# Čemu vděčíme za základní větu algebry?

Petr Vodstrčil

petr.vodstrcil@vsb.cz

Katedra aplikované matematiky, Fakulta elektrotechniky a informatiky,
Vysoká škola báňská–Technická univerzita Ostrava

19.5. 2011

evropský sociální fond v ČR EVROPSKÁ UNIE MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tato prezentace je spolufinancována Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

# Důkaz č. 1

**Věta. (Liouvilleova)**

*Je-li funkce* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *omezená a holomorfní v celé komplexní rovině, pak je konstantní.*

# Důkaz č. 1

## Věta. (Liouvilleova)

*Je-li funkce* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *omezená a holomorfní v celé komplexní rovině, pak je konstantní.*

## Věta. (Základní věta algebry)

*Každý nekonstantní komplexní polynom p má alespoň jeden komplexní kořen.*

## Důkaz č. 1

### Věta. (Liouvilleova)

*Je-li funkce* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *omezená a holomorfní v celé komplexní rovině, pak je konstantní.*

### Věta. (Základní věta algebry)

*Každý nekonstantní komplexní polynom p má alespoň jeden komplexní kořen.*

### Důkaz.

Předpokládejme sporem, že polynom $p$ nemá žádný komplexní kořen.

# Důkaz č. 1

## Věta. (Liouvilleova)

*Je-li funkce* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *omezená a holomorfní v celé komplexní rovině, pak je konstantní.*

## Věta. (Základní věta algebry)

*Každý nekonstantní komplexní polynom p má alespoň jeden komplexní kořen.*

## Důkaz.

Předpokládejme sporem, že polynom $p$ nemá žádný komplexní kořen. Definujme funkci $f$ předpisem

$$f(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{p(z)} \quad \text{pro každé} \quad z \in \mathbb{C}.$$

# Důkaz č. 1

## Věta. (Liouvilleova)

*Je-li funkce* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *omezená a holomorfní v celé komplexní rovině, pak je konstantní.*

## Věta. (Základní věta algebry)

*Každý nekonstantní komplexní polynom p má alespoň jeden komplexní kořen.*

## Důkaz.

Předpokládejme sporem, že polynom $p$ nemá žádný komplexní kořen. Definujme funkci $f$ předpisem

$$f(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{p(z)} \quad \text{pro každé} \quad z \in \mathbb{C}.$$

Zřejmě je $f$ holomorfní v celé komplexní rovině.

# Důkaz č. 1

## Věta. (Liouvilleova)

*Je-li funkce* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *omezená a holomorfní v celé komplexní rovině, pak je konstantní.*

## Věta. (Základní věta algebry)

*Každý nekonstantní komplexní polynom* $p$ *má alespoň jeden komplexní kořen.*

## Důkaz.

Předpokládejme sporem, že polynom $p$ nemá žádný komplexní kořen. Definujme funkci $f$ předpisem

$$f(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{p(z)} \quad \text{pro každé} \quad z \in \mathbb{C}.$$

Zřejmě je $f$ holomorfní v celé komplexní rovině. Navíc platí $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$, a tedy funkce $f$ je omezená.

# Důkaz č. 1

## Věta. (Liouvilleova)

*Je-li funkce* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *omezená a holomorfní v celé komplexní rovině, pak je konstantní.*

## Věta. (Základní věta algebry)

*Každý nekonstantní komplexní polynom* $p$ *má alespoň jeden komplexní kořen.*

## Důkaz.

Předpokládejme sporem, že polynom $p$ nemá žádný komplexní kořen. Definujme funkci $f$ předpisem

$$f(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{p(z)} \quad \text{pro každé} \quad z \in \mathbb{C}.$$

Zřejmě je $f$ holomorfní v celé komplexní rovině. Navíc platí $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$, a tedy funkce $f$ je omezená. Podle Liouvilleovy věty musí být funkce $f$ (a tedy i polynom $p$) konstantní, což je spor. $\square$

# Připomenutí některých pojmů a vět

- Křivkou v $\mathbb{C}$ rozumíme spojité zobrazení $\gamma : \langle \alpha, \beta \rangle \to \mathbb{C}$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$.

# Připomenutí některých pojmů a vět

- Křivkou v $\mathbb{C}$ rozumíme spojité zobrazení $\gamma : \langle \alpha, \beta \rangle \to \mathbb{C}$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$.
- Množinu $[\gamma] = \gamma(\langle \alpha, \beta \rangle)$ nazýváme geometrickým obrazem křivky $\gamma$.

# Připomenutí některých pojmů a vět

- Křivkou v $\mathbb{C}$ rozumíme spojité zobrazení $\gamma : \langle \alpha, \beta \rangle \to \mathbb{C}$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$.
- Množinu $[\gamma] = \gamma(\langle \alpha, \beta \rangle)$ nazýváme geometrickým obrazem křivky $\gamma$.
- Je-li $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$, nazývá se křivka $\gamma$ uzavřená.

# Připomenutí některých pojmů a vět

- Křivkou v $\mathbb{C}$ rozumíme spojité zobrazení $\gamma : \langle\alpha, \beta\rangle \to \mathbb{C}$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$.
- Množinu $[\gamma] = \gamma(\langle\alpha, \beta\rangle)$ nazýváme geometrickým obrazem křivky $\gamma$.
- Je-li $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$, nazývá se křivka $\gamma$ uzavřená.
- Křivka $\gamma$ se nazývá cesta, jestliže existuje dělení $D = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$ takové, že $\gamma|\langle t_{k-1}, t_k\rangle$ má spojitou a nenulovou derivaci na $\langle t_{k-1}, t_k\rangle$ $(k \in \{1, 2, \dots, n\})$.

# Připomenutí některých pojmů a vět

- Křivkou v $\mathbb{C}$ rozumíme spojité zobrazení $\gamma : \langle \alpha, \beta \rangle \to \mathbb{C}$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$.
- Množinu $[\gamma] = \gamma(\langle \alpha, \beta \rangle)$ nazýváme geometrickým obrazem křivky $\gamma$.
- Je-li $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$, nazývá se křivka $\gamma$ uzavřená.
- Křivka $\gamma$ se nazývá cesta, jestliže existuje dělení $D = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ takové, že $\gamma|\langle t_{k-1}, t_k \rangle$ má spojitou a nenulovou derivaci na $\langle t_{k-1}, t_k \rangle$ $(k \in \{1, 2, \ldots, n\})$.
- Uzavřená cesta je uzavřená křivka, která je cestou.

# Připomenutí některých pojmů a vět

- Křivkou v $\mathbb{C}$ rozumíme spojité zobrazení $\gamma : \langle \alpha, \beta \rangle \to \mathbb{C}$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$.
- Množinu $[\gamma] = \gamma(\langle \alpha, \beta \rangle)$ nazýváme geometrickým obrazem křivky $\gamma$.
- Je-li $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$, nazývá se křivka $\gamma$ uzavřená.
- Křivka $\gamma$ se nazývá cesta, jestliže existuje dělení $D = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ takové, že $\gamma | \langle t_{k-1}, t_k \rangle$ má spojitou a nenulovou derivaci na $\langle t_{k-1}, t_k \rangle$ $(k \in \{1, 2, \dots, n\})$.
- Uzavřená cesta je uzavřená křivka, která je cestou.
- Křivka $\gamma : \langle \alpha, \beta \rangle \to \mathbb{C}$ se nazývá jednoduchá, jestliže pro každá dvě čísla $t_1, t_2 \in \langle \alpha, \beta \rangle$ taková, že $0 < |t_1 - t_2| < \beta - \alpha$, platí $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$. Je-li navíc $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$, mluvíme o jednoduché uzavřené křivce (Jordanova křivka). Je-li Jordanova křivka cestou, mluvíme o Jordanově cestě.

# Připomenutí některých pojmů a vět

- Každá Jordanova křivka $\gamma$ rozděluje množinu $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ na dvě jednoduše souvislé oblasti. Tu oblast, která neobsahuje bod $\infty$, budeme nazývat vnitřkem křivky $\gamma$ a značit $\operatorname{Int} \gamma$.

# Připomenutí některých pojmů a vět

- Každá Jordanova křivka $\gamma$ rozděluje množinu $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ na dvě jednoduše souvislé oblasti. Tu oblast, která neobsahuje bod $\infty$, budeme nazývat vnitřkem křivky $\gamma$ a značit $\operatorname{Int}\gamma$.
- Pro $z_0 \in \mathbb{C}$ a $r, R \in \mathbb{R}^*$ splňující $0 \leq r < R \leq +\infty$ definujme

$$P(z_0; r, R) \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} \ : \ r < |z - z_0| < R\}.$$

# Připomenutí některých pojmů a vět

- Každá Jordanova křivka $\gamma$ rozděluje množinu $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ na dvě jednoduše souvislé oblasti. Tu oblast, která neobsahuje bod $\infty$, budeme nazývat vnitřkem křivky $\gamma$ a značit $\operatorname{Int} \gamma$.
- Pro $z_0 \in \mathbb{C}$ a $r, R \in \mathbb{R}^*$ splňující $0 \leq r < R \leq +\infty$ definujme

$$P(z_0; r, R) \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} \ : \ r < |z - z_0| < R\}.$$

- Dále položme

$$P(z_0; R) \stackrel{\text{def}}{=} P(z_0; 0, R) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ 0 < |z - z_0| < R\},$$

$$O(z_0; R) \stackrel{\text{def}}{=} P(z_0; R) \cup \{z_0\} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z - z_0| < R\}.$$

**Věta.** (Laurentova)

*Nechť* $0 \leq r < R \leq +\infty$ *a nechť* $f$ *je holomorfní v mezikruží* $P(z_0; r, R)$. *Pak existuje právě jedna Laurentova řada* $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$, *pro kterou platí*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n \quad \text{pro každé} \quad z \in P(z_0; r, R).$$

# Připomenutí některých pojmů a vět

## Věta. (Laurentova)

*Nechť* $0 \le r < R \le +\infty$ *a nechť* $f$ *je holomorfní v mezikruží* $P(z_0; r, R)$. *Pak existuje právě jedna Laurentova řada* $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$, *pro kterou platí*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \quad \text{pro každé} \quad z \in P(z_0; r, R).$$

## Definice.

*Buď* $f$ *holomorfní v* $P(z_0; R)$, *kde* $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$. *Koeficient* $a_{-1}$ *v odpovídajícím Laurentově rozvoji* $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ *funkce* $f$ *nazýváme reziduem funkce* $f$ *v bodě* $z_0$ *a značíme ho* $\operatorname{res}_{z_0} f$.

## Příklad.

*Vypočtěte* $\operatorname{res}_{z_0} f$, *je-li*

$$z_0 = 0, \quad f(z) = \frac{\sin z}{z^4}.$$

## Příklad.

*Vypočtěte* $\operatorname{res}_{z_0} f$, *je-li*

$$z_0 = 0, \quad f(z) = \frac{\sin z}{z^4}.$$

## Řešení.

Funkce $f$ je holomorfní v $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

## Příklad.

*Vypočtěte* $\operatorname{res}_{z_0} f$, *je-li*

$$z_0 = 0, \quad f(z) = \frac{\sin z}{z^4}.$$

## Řešení.

Funkce $f$ je holomorfní v $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Pro každé $z \in \mathbb{C}$ platí

$$\sin z = z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \frac{1}{7!}z^7 + \dots .$$

## Příklad.

*Vypočtěte* $\operatorname{res}_{z_0} f$, *je-li*

$$z_0 = 0, \quad f(z) = \frac{\sin z}{z^4}.$$

## Řešení.

Funkce $f$ je holomorfní v $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Pro každé $z \in \mathbb{C}$ platí

$$\sin z = z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \frac{1}{7!}z^7 + \dots .$$

Odtud dostaneme, že pro každé $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^4} = z^{-3} - \frac{1}{3!}z^{-1} + \frac{1}{5!}z - \frac{1}{7!}z^3 + \dots .$$

## Příklad.

*Vypočtěte* $\operatorname{res}_{z_0} f$, *je-li*

$$z_0 = 0, \quad f(z) = \frac{\sin z}{z^4}.$$

## Řešení.

Funkce $f$ je holomorfní v $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Pro každé $z \in \mathbb{C}$ platí

$$\sin z = z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \frac{1}{7!}z^7 + \dots .$$

Odtud dostaneme, že pro každé $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^4} = z^{-3} - \frac{1}{3!}z^{-1} + \frac{1}{5!}z - \frac{1}{7!}z^3 + \dots .$$

To (podle definice) znamená, že $\operatorname{res}_{z_0} f = -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}$. □

# Připomenutí některých pojmů a vět

## Definice.

*Nechť* $\gamma : \langle\alpha, \beta\rangle \to \mathbb{C}$ *je cesta a* $f : [\gamma] \to \mathbb{C}$ *spojitá funkce. Křivkový integrál funkce* $f$ *po cestě* $\gamma$ *definujeme vztahem*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \overset{def}{=} \int_\alpha^\beta f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$

# Připomenutí některých pojmů a vět

## Definice.

*Nechť* $\gamma : \langle\alpha,\beta\rangle \to \mathbb{C}$ *je cesta a* $f : [\gamma] \to \mathbb{C}$ *spojitá funkce. Křivkový integrál funkce* $f$ *po cestě* $\gamma$ *definujeme vztahem*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \overset{def}{=} \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$

## Věta. (O reziduích)

*Nechť* $\gamma$ *je kladně orientovaná Jordanova cesta a* $M \subseteq \operatorname{Int}\gamma$ *konečná množina. Nechť dále funkce* $f$ *je holomorfní v* $\operatorname{Int}\gamma \setminus M$ *a spojitá a konečná na* $\overline{\operatorname{Int}\gamma}$. *Pak platí*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\cdot\sum_{z\in M}\operatorname{res}_z f.$$

# Důkaz č. 2

$$\left( \int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z \overset{\text{def}}{=} \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t \right)$$

**Věta. (Základní věta algebry)**

*Každý nekonstantní komplexní polynom $p$ má alespoň jeden komplexní kořen.*

# Důkaz č. 2

$$\left(\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \overset{\text{def}}{=} \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

**Věta. (Základní věta algebry)**

*Každý nekonstantní komplexní polynom $p$ má alespoň jeden komplexní kořen.*

**Důkaz.**

Předpokládejme sporem, že polynom $p$ nemá žádný komplexní kořen, tzn. funkce $\frac{1}{p}$ je holomorfní v celé komplexní rovině.

# Důkaz č. 2

$$\left(\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \stackrel{\text{def}}{=} \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

**Věta. (Základní věta algebry)**

*Každý nekonstantní komplexní polynom $p$ má alespoň jeden komplexní kořen.*

**Důkaz.**

Předpokládejme sporem, že polynom $p$ nemá žádný komplexní kořen, tzn. funkce $\frac{1}{p}$ je holomorfní v celé komplexní rovině.

Pro $R > 0$ počítejme nyní křivkový integrál

$$I_R = \int_{\gamma_R} \frac{1}{z\cdot p(z)}\,\mathrm{d}z$$

kde

$$\gamma_R(t) = R\cdot e^{it} \quad \bigl(t\in\langle 0, 2\pi\rangle\bigr),$$

tj. $\gamma_R$ je kladně orientovaná kružnice s poloměrem $R$.

**Věta. (Základní věta algebry)**

*Každý nekonstantní komplexní polynom $p$ má alespoň jeden komplexní kořen.*

**Důkaz.**

Předpokládejme sporem, že polynom $p$ nemá žádný komplexní kořen, tzn. funkce $\frac{1}{p}$ je holomorfní v celé komplexní rovině.

Pro $R > 0$ počítejme nyní křivkový integrál

$$I_R = \int\limits_{\gamma_R} \frac{1}{z\cdot p(z)}\,\mathrm{d}z \qquad \left(= \int\limits_0^{2\pi} \frac{i}{p\left(R\cdot e^{it}\right)}\,\mathrm{d}t\right),$$

kde

$$\gamma_R(t) = R\cdot e^{it} \quad \big(t\in\langle 0, 2\pi\rangle\big),$$

tj. $\gamma_R$ je kladně orientovaná kružnice s poloměrem $R$.

## Důkaz.

S využitím reziduové věty (funkce $\frac{1}{p}$ je holomorfní v $\mathbb{C}$) dostaneme

$$I_R = \int\limits_{\gamma_R} \frac{1}{z \cdot p(z)}\,\mathrm{d}z = \int\limits_{\gamma_R} \frac{\frac{1}{p(z)}}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot \frac{1}{p(0)},$$

# Pokračování důkazu

$$\left(\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot \sum_{z\in M} \operatorname{res}_z f\right)$$

## Důkaz.

S využitím reziduové věty (funkce $\frac{1}{p}$ je holomorfní v $\mathbb{C}$) dostaneme

$$I_R = \int_{\gamma_R} \frac{1}{z \cdot p(z)}\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_R} \frac{\frac{1}{p(z)}}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot \frac{1}{p(0)},$$

a tedy $|I_R| = \frac{2\pi}{|p(0)|}$, což je kladné číslo nezávisející na $R$.

## Důkaz.

S využitím reziduové věty (funkce $\frac{1}{p}$ je holomorfní v $\mathbb{C}$) dostaneme

$$I_R = \int\limits_{\gamma_R} \frac{1}{z \cdot p(z)}\,\mathrm{d}z = \int\limits_{\gamma_R} \frac{\frac{1}{p(z)}}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot \frac{1}{p(0)},$$

a tedy $|I_R| = \frac{2\pi}{|p(0)|}$, což je kladné číslo nezávisející na $R$.

Na druhé straně je

$$|I_R| \leq \lambda(\gamma_R) \cdot \max_{|z|=R} \frac{1}{|z \cdot p(z)|} = 2\pi R \cdot \frac{1}{R} \cdot \max_{|z|=R} \frac{1}{|p(z)|} =$$

$$= 2\pi \cdot \max_{|z|=R} \frac{1}{|p(z)|} \to 0 \quad \text{pro} \quad R \to +\infty,$$

## Důkaz.

S využitím reziduové věty (funkce $\frac{1}{p}$ je holomorfní v $\mathbb{C}$) dostaneme

$$I_R = \int_{\gamma_R} \frac{1}{z\cdot p(z)}\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_R} \frac{\frac{1}{p(z)}}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot \frac{1}{p(0)},$$

a tedy $|I_R| = \frac{2\pi}{|p(0)|}$, což je kladné číslo nezávisející na $R$.

Na druhé straně je

$$|I_R| \le \lambda(\gamma_R)\cdot \max_{|z|=R} \frac{1}{|z\cdot p(z)|} = 2\pi R \cdot \frac{1}{R} \cdot \max_{|z|=R} \frac{1}{|p(z)|} =$$

$$= 2\pi \cdot \max_{|z|=R} \frac{1}{|p(z)|} \to 0 \quad \text{pro} \quad R \to +\infty,$$

což je samozřejmě spor. $\square$

# Připomenutí některých pojmů a vět

Větu o reziduích lze zobecnit i pro uzavřené cesty, které nejsou Jordanovy.

# Připomenutí některých pojmů a vět

Větu o reziduích lze zobecnit i pro uzavřené cesty, které nejsou Jordanovy.

## Věta. (O reziduích–zobecněná)

*Buď $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ jednoduše souvislá oblast, $M \subseteq \Omega$ konečná množina a nechť funkce $f$ je holomorfní v $\Omega \setminus M$. Nechť dále $\gamma$ je uzavřená cesta, pro kterou $[\gamma] \subseteq \Omega \setminus M$. Pak platí*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot \sum_{z \in M} \left(\operatorname{res}_z f \cdot \operatorname{ind}_\gamma z\right).$$

# Připomenutí některých pojmů a vět

Další důkaz základní věty algebry se opírá o tzv. Rouchèovu větu.

Další důkaz základní věty algebry se opírá o tzv. Rouchèovu větu.

**Věta. (Rouchèova)**

*Buď $\gamma$ Jordanova cesta v $\mathbb{C}$ a $f, g$ funkce holomorfní na $\overline{\operatorname{Int}\gamma}$. Jestliže platí*

$$|f(z)| > |g(z)| \quad \textit{pro každé} \quad z \in [\gamma],$$

*pak funkce $f + g$ a funkce $f$ mají v $\operatorname{Int}\gamma$ stejný počet kořenů.*

# Důkaz č. 3

**Věta. (Základní věta algebry)**

*Každý komplexní polynom $p$ stupně $n \in \mathbb{N}$ má právě $n$ komplexních kořenů (počítáno včetně násobností).*

# Důkaz č. 3

**Věta. (Základní věta algebry)**

*Každý komplexní polynom $p$ stupně $n \in \mathbb{N}$ má právě $n$ komplexních kořenů (počítáno včetně násobností).*

**Důkaz.**

K důkazu využijeme Rouchèovu větu. Předpokládejme, že

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0, \quad \text{kde} \quad n \in \mathbb{N},\ a_n \neq 0.$$

# Důkaz č. 3

## Věta. (Základní věta algebry)

*Každý komplexní polynom $p$ stupně $n \in \mathbb{N}$ má právě $n$ komplexních kořenů (počítáno včetně násobností).*

## Důkaz.

K důkazu využijeme Rouchèovu větu. Předpokládejme, že

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0, \quad \text{kde} \quad n \in \mathbb{N},\ a_n \neq 0.$$

Položme

$$\begin{aligned} f(z) &= a_n z^n, \\ g(z) &= a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0, \\ \gamma(t) &= R \cdot e^{it},\ t \in \langle 0, 2\pi \rangle, \end{aligned}$$

# Pokračování důkazu

$(f(z) = a_n z^n,\ g(z) = a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0,\ \gamma(t) = R \cdot e^{it}\ )$

## Důkaz.

kde $R \in \mathbb{R}$ je takové číslo, že pro každé $z \in \mathbb{C}$ splňující $|z| \geq R$ platí

$$|p(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0. \tag{1}$$

# Pokračování důkazu

$\left(f(z) = a_n z^n,\ g(z) = a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0,\ \gamma(t) = R \cdot e^{it}\ \right)$

## Důkaz.

kde $R \in \mathbb{R}$ je takové číslo, že pro každé $z \in \mathbb{C}$ splňující $|z| \geq R$ platí

$$|p(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0. \tag{1}$$

Odtud vidíme, že funkce $f, g$ a $\gamma$ splňují předpoklady Rouchèovy věty, a tedy funkce

$$f + g = p \qquad \text{a} \qquad f$$

mají uvnitř $\gamma$ stejný počet komplexních kořenů.

# Pokračování důkazu

$\left(f(z) = a_n z^n,\ g(z) = a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0,\ \gamma(t) = R \cdot e^{it}\ \right)$

## Důkaz.

kde $R \in \mathbb{R}$ je takové číslo, že pro každé $z \in \mathbb{C}$ splňující $|z| \geq R$ platí

$$|p(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0. \tag{1}$$

Odtud vidíme, že funkce $f, g$ a $\gamma$ splňují předpoklady Rouchèovy věty, a tedy funkce

$$f + g = p \qquad \text{a} \qquad f \qquad (f(z) = a_n z^n)$$

mají uvnitř $\gamma$ stejný počet (tj. $n$) komplexních kořenů.

# Pokračování důkazu

$\left(f(z) = a_n z^n,\ g(z) = a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0,\ \gamma(t) = R \cdot e^{it}\ \right)$

## Důkaz.

kde $R \in \mathbb{R}$ je takové číslo, že pro každé $z \in \mathbb{C}$ splňující $|z| \geq R$ platí

$$|p(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0. \tag{1}$$

Odtud vidíme, že funkce $f, g$ a $\gamma$ splňují předpoklady Rouchèovy věty, a tedy funkce

$$f + g = p \qquad \text{a} \qquad f \qquad (f(z) = a_n z^n)$$

mají uvnitř $\gamma$ stejný počet (tj. $n$) komplexních kořenů.

Zároveň ze vztahu (1) plyne, že polynom $p$ nemůže mít žádný komplexní kořen mimo $\operatorname{Int}\gamma$, což znamená, že polynom $p$ má v $\mathbb{C}$ právě $n$ komplexních kořenů. □

## Poznámka.

Rouchèovu větu lze odvodit z následujícího tvrzení.

## Poznámka.

Rouchèovu větu lze odvodit z následujícího tvrzení.

## Věta. (Princip argumentu)

*Buď $\gamma$ kladně orientovaná Jordanova cesta v $\mathbb{C}$. Nechť funkce $f$ je holomorfní na $\overline{\operatorname{Int}\gamma}$. Nechť dále $f(z) \neq 0$ na $[\gamma]$. Pak pro počet $K$ kořenů funkce $f$ v $\operatorname{Int}\gamma$ (včetně násobností) platí*

$$K = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z.$$

## Poznámka.

Vztah $K = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z$

lze podle definice křivkového integrálu a podle zobecněné reziduové věty psát ve tvaru

$$K = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\alpha^\beta \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))} \cdot \gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\alpha^\beta \frac{(f \circ \gamma)'(t)}{(f \circ \gamma)(t)}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{f\circ\gamma} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \operatorname{res}_0 \frac{1}{z} \cdot \operatorname{ind}_{f\circ\gamma} 0 = \operatorname{ind}_{f\circ\gamma} 0.$$

## Poznámka.

Vztah $K = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{d}z$

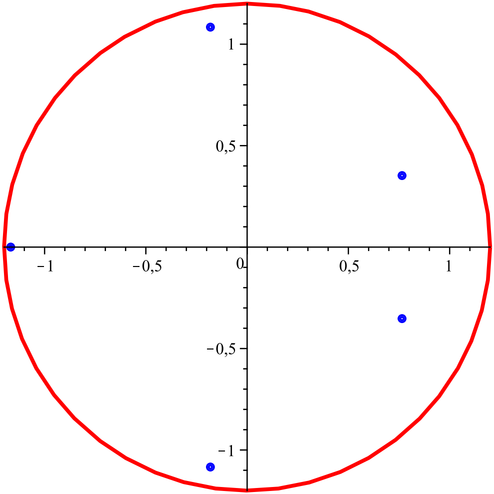
lze podle definice křivkového integrálu a podle zobecněné reziduové věty psát ve tvaru

$$K = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))} \cdot \gamma'(t) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{(f \circ \gamma)'(t)}{(f \circ \gamma)(t)} \, \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{f \circ \gamma} \frac{1}{z} \, \mathrm{d}z = \operatorname{res}_0 \frac{1}{z} \cdot \operatorname{ind}_{f \circ \gamma} 0 = \operatorname{ind}_{f \circ \gamma} 0.$$

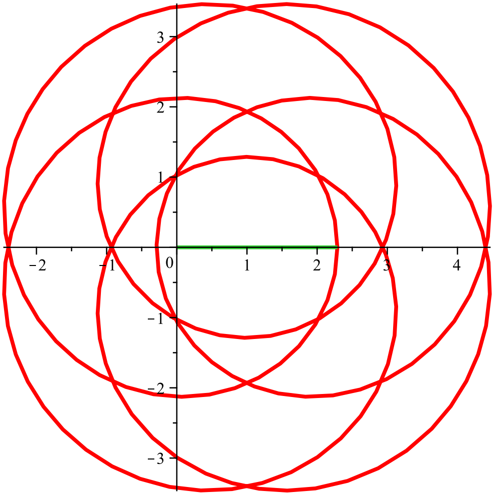
Vztah $K = \operatorname{ind}_{f \circ \gamma} 0$ má poměrně zajímavou geometrickou interpretaci.

# Princip argumentu – ilustrace č. 1 $\left(f(z) = z^5 - z + 1\right)$



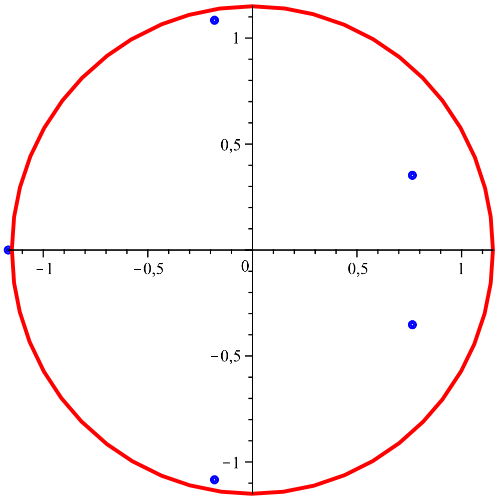

Kliknutím na obrázek spustíte animaci.

# Principle argumentu – ilustrace č. 1 $\left(f(z) = z^5 - z + 1\right)$



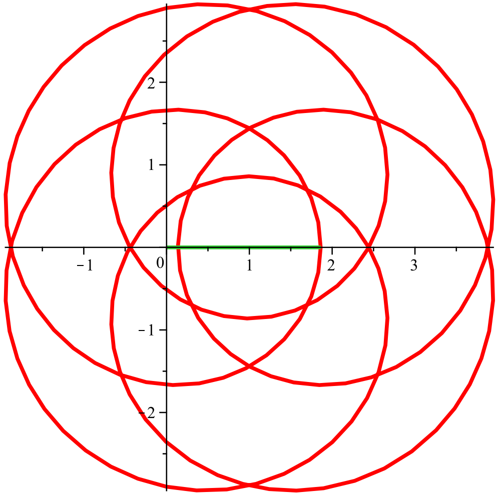

Vidíme, že $\operatorname{ind}_{f\circ\gamma} 0 = 5$.

# Princip argumentu – ilustrace č. 2 $\left(f(z) = z^5 - z + 1\right)$



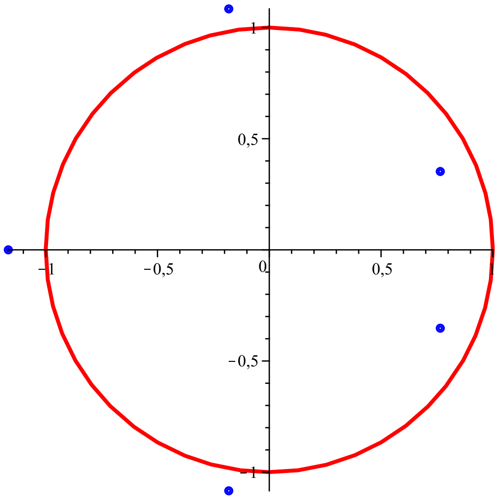

Kliknutím na obrázek spustíte animaci.

# Principle argumentu – ilustrace č. 2 $\left(f(z) = z^5 - z + 1\right)$

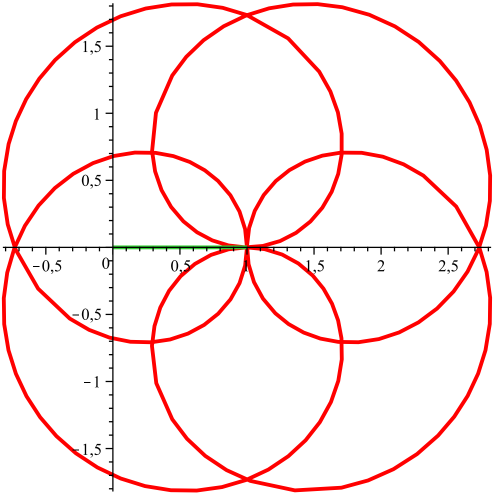



Vidíme, že $\operatorname{ind}_{f\circ\gamma} 0 = 4$.

# Princip argumentu – ilustrace č. 3 $\left(f(z) = z^5 - z + 1\right)$

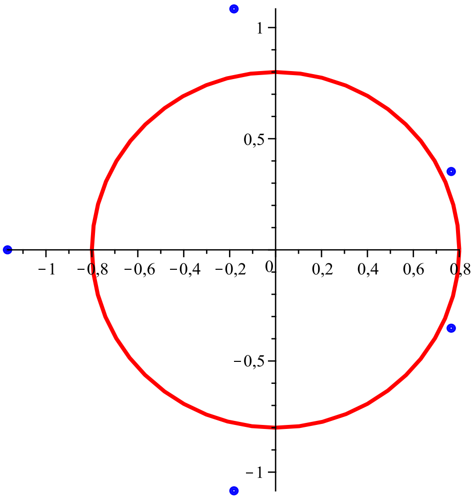



Kliknutím na obrázek spustíte animaci.



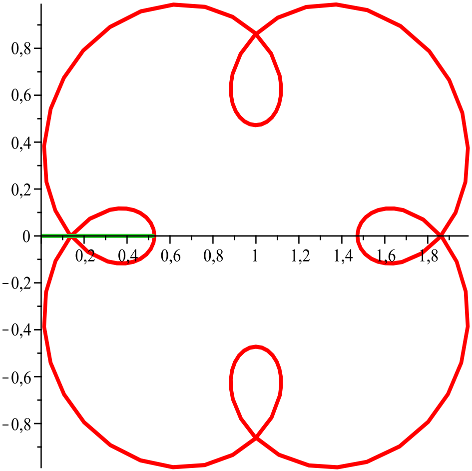

Vidíme, že $\operatorname{ind}_{f\circ\gamma} 0 = 2$.

# Princip argumentu – ilustrace č. 4 $\left(f(z) = z^5 - z + 1\right)$




Kliknutím na obrázek spustíte animaci.

# Princip argumentu – ilustrace č. 4 $\left(f(z) = z^5 - z + 1\right)$




Vidíme, že $\operatorname{ind}_{f\circ\gamma} 0 = 0$.

**Děkuji za pozornost !!!**