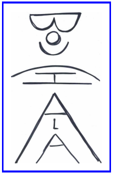
Čemu vděčíme za Základní větu algebry?

Jiří Bouchala



Katedra
aplikované
matematiky

19. 5. 2011

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Základní věta algebry.

Každý polynom kladného stupně má alespoň jeden komplexní kořen.
Jinak řečeno:

je-li

$$p(z) := a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 : \ \mathbb{C} \to \mathbb{C},$$

kde

$$n \in \mathbb{N}; \ a_0, a_1, \ \dots \ , a_n \in \mathbb{C}; \ a_n \neq 0,$$

existuje $z \in \mathbb{C}$ takové, že

$$p(z) = 0.$$

Ukážeme si tři z (mnoha desítek známých) důkazů této věty. Opírají se o tři hluboké a krásné výsledky matematické analýzy, a to o

- větu o pevném bodě (L. E. J. Brouwer),
- Fubiniovu větu (R. B. Burckel),
- Weierstrassovu větu (A. C. Lazer).

Brouwerova věta o pevném bodě.

Každé spojité zobrazení

$$g: \ K \to K,$$

kde $K \subset \mathbb{R}^N$ je neprázdná uzavřená omezená a konvexní množina, má pevný bod; to znamená, že existuje $c \in K$ takové, že

$$g(c) = c.$$

$$p(z) := z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

Položme $R = 2 + |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \cdots + |a_1| + |a_0|$, $K = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| \leq R\}$,

$$g(z) := \begin{cases} z - \frac{p(z)}{Re^{i(n-1)\theta r}}, & \text{je-li } |z| \leq 1, \\ z - \frac{p(z)}{Rz^{n-1}}, & \text{je-li } |z| \geq 1; \end{cases} \qquad z = re^{i\theta}, \quad r \geq 0, \ -\pi < \theta \leq \pi.$$

Zřejmě g je spojitá na $\mathbb{C}$. Ukažme, že $g(K) \subset K$:

- $\forall z \in K, \ |z| \leq 1:$

$$|g(z)| \leq |z| + \frac{1}{R}|p(z)| \leq 1 + \frac{1}{R}(1 + |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \cdots + |a_1| + |a_0|) \leq 1 + 1 \leq R,$$

- $\forall z \in K, \ |z| \geq 1:$

$$|g(z)| = \left| z - \frac{z}{R} - \frac{a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}{Rz^{n-1}} \right| \leq \left| z\left(1 - \frac{1}{R}\right) \right| + \frac{|a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|}{R} \leq$$

$$\leq R - 1 + \frac{R-2}{R} = R - \frac{2}{R} \leq R.$$

$$g(z) := \begin{cases} z - \frac{p(z)}{Re^{i(n-1)\theta r}}, & \text{je-li } |z| \le 1, \\ z - \frac{p(z)}{Rz^{n-1}}, & \text{je-li } |z| \ge 1; \end{cases} \qquad z = re^{i\theta}, \quad r \ge 0, \ -\pi < \theta \le \pi.$$

Zjistili jsme, že

- g je spojitá na $\mathbb{C}$,
- $g(K) \subset K = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| \le R\}$.

Z Brouwerovy věty plyne, že existuje

$$z \in K \subset \mathbb{C},$$

pro které je $g(z) = z$, a tudíž

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0.$$

Uvedený „důkaz“ obsahuje hrubou chybu! Jakou?

"Fubinito (Immediately) Implies FTA", 2006

Předpokládejme sporem, že $\forall z \in \mathbb{C}: \ p(z) \neq 0$, a definujme funkci f předpisem $f(z) := \frac{1}{p(z)}$. Pak f je holomorfní v $\mathbb{C}$ a platí $f(0) \neq 0$. Navíc platí:

- $f\left(\frac{1}{r}e^{i\theta}\right) \to 0,\ f\left(re^{i\theta}\right) \to f(0)$ pro $r \to 0+$ (stejnoměrně vzhledem k θ),
- $\frac{\partial}{\partial\theta}\left[f\left(\varrho e^{i\theta}\right)\right] = f'\left(\varrho e^{i\theta}\right)\varrho i e^{i\theta},\ \frac{\partial}{\partial\varrho}\left[f\left(\varrho e^{i\theta}\right)\right] = f'\left(\varrho e^{i\theta}\right)e^{i\theta} = \frac{1}{\varrho i}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[f\left(\varrho e^{i\theta}\right)\right]$.

Odtud plyne, že pro každé $r > 0$ je

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_r^{\frac{1}{r}}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left[f\left(\varrho e^{i\theta}\right)\right]\mathrm{d}\varrho\right)\mathrm{d}\theta = \int_r^{\frac{1}{r}}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\varrho i}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[f\left(\varrho e^{i\theta}\right)\right]\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\varrho,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{1}{r}e^{i\theta}\right) - f\left(re^{i\theta}\right)\mathrm{d}\theta = \int_r^{\frac{1}{r}}\frac{1}{\varrho i}\left[f\left(\varrho e^{i\pi}\right) - f\left(\varrho e^{-i\pi}\right)\right]\mathrm{d}\varrho = 0,$$

a proto

$$\lim_{r\to 0+}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{1}{r}e^{i\theta}\right) - f\left(re^{i\theta}\right)\mathrm{d}\theta = -2\pi f(0) = 0.$$ A to je spor.

"From the Cauchy-Riemann Equations to the FTA", 2006

$$\boxed{f \text{ holomorfní } \Rightarrow \triangle(|f|^2) = 4|f'|^2.}$$

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y), \quad |f(x+iy)|^2 = u^2(x,y) + v^2(x,y)$$

$$\frac{\partial |f|^2}{\partial x} = 2u\frac{\partial u}{\partial x} + 2v\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 |f|^2}{\partial x^2} = 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + 2v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 |f|^2}{\partial y^2} = 2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2v\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$\boxed{f \text{ holomorfní } \Rightarrow \triangle(|f|^2) = 4|f'|^2.}$$

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

$$f'(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$$

$$f''(x+iy) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) - i\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y)$$

$$|f'|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

$$\boxed{f \text{ holomorfní} \;\Rightarrow\; \triangle(|f|^2) = 4|f'|^2.}$$

$$\frac{\partial^2|f|^2}{\partial x^2} = 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + 2v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$+$$

$$\frac{\partial^2|f|^2}{\partial y^2} = 2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2v\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$f''(x+iy) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) - i\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y)$$

$$|f'|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

Předpokládejme sporem, že $\forall z \in \mathbb{C}: \; p(z) \neq 0$, a definujme funkci f předpisem $f(z) := \frac{1}{p(z)}$. Pak f je holomorfní v $\mathbb{C}$, a proto platí $\triangle\left(|f|^2\right) = 4|f'|^2$.

Nyní uvažujme funkci $w(x,y) := \sum_{k=1}^{n} |f(x+iy+k)|^2 : \; \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$.

Zřejmě $w(x,y) \to 0$ pro $x+iy \to \infty$, a proto existuje $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ takové, že

$$w(x_0, y_0) = \max_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} w(x,y).$$

Odtud plyne, že

$$0 \geq \triangle w(x_0, y_0) = \sum_{k=1}^{n} \triangle\left(|f(x_0+iy_0+k)|^2\right) = \sum_{k=1}^{n} 4|f'(x_0+iy_0+k)|^2,$$

a proto $\boxed{\forall k \in \{1,2,\dots,n\}: \quad 0 = f'(x_0+iy_0+k) \; = \; -\dfrac{p'(x_0+iy_0+k)}{p^2(x_0+iy_0+k)}.}$

Zjistili jsme, že polynom p' - $(n-1)$-ního stupně - má alespoň n různých kořenů. A to je spor.

Literatura

J. Lukeš
Zápisky z funkcionální analýzy
Karolinum - nakladatelství Univerzity Karlovy, 1998

I. Netuka
Nové důkazy základní věty algebry
přednáška na TU v Liberci, 10. listopadu 2006

R. B. Burckel
Fubinito (Immediately) Implies FTA
American Mathematical Monthly, 113, No. 4, 344-347, April 2006

A. C. Lazer
From the Cauchy-Riemann Equations to the Fundamental Theorem of Algebra
Mathematics Magazine, Volume 79, Number 3, 210-213(4), June 2006