

Využití aproximačních funkcí pro kaskádní syntézu filtrů

Materiál slouží pouze jako „průvodce“ k materiálu podrobnějšímu, který je dostupný na stránkách <http://mi21.vsb.cz/> Tam jsou uvedeny i odkazy na literaturu a naznačena některá základní odvození. Číslování obrázků je převzato z rozsáhlejšího materiálu.

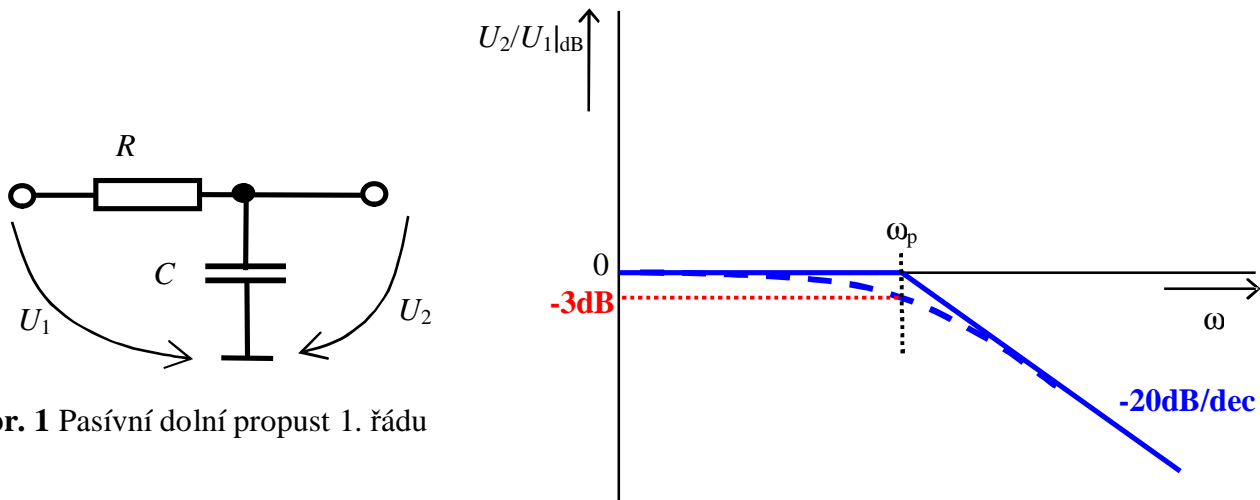
I. MOTIVACE

Po použití **Laplaceovy transformace** popisujeme (modelujeme) lineární obvody pomocí **obrazových impedancí**
 $Z_R(p) = R; Z_L(p) = pL; Z_C(p) = 1/(pC)$, kde

$$p = s + j\omega$$

je **komplexní kmitočet**.

Pro $p = j\omega$ přechází Laplaceova transformace ve **Fourierovu transformaci** – řešíme ustálený harmonický stav běžnými metodami.



Obr. 1 Pasívní dolní propust 1. řádu

Přenos struktury na obr. 1 je určen vztahem

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{w_p}{p + w_p} = \frac{1}{p/w_p + 1}; \quad w_p = 1/(RC)$$

Zavedeme *normovaný komplexní kmitočet*

$$s = p/w_p = S/w_p + jw/w_p = \Sigma + j\Omega; \quad \Sigma = S/w_p; \quad \Omega = w/w_p.$$

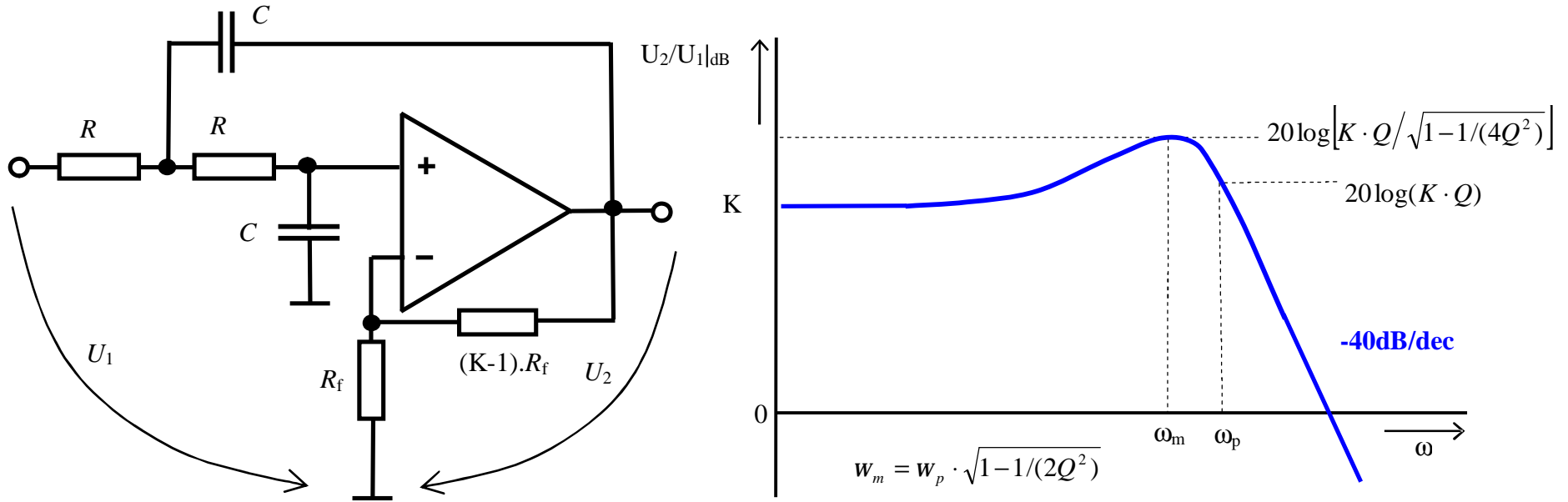
Potom platí

$$\left. \frac{U_2}{U_1} \right|_s = \frac{1}{s+1}; \quad \left. \frac{U_2}{U_1} \right|_{j\Omega} = \frac{1}{j\Omega+1}; \quad \left. \frac{U_2}{U_1} \right|_{\Omega} = \frac{1}{\sqrt{\Omega^2+1}}$$

Pro $\Omega \gg 1$ je

$$\left. \frac{U_2}{U_1} \right|_{\Omega} \cong \frac{1}{\Omega}; \quad \left. \frac{U_2}{U_1} \right|_{dB} \cong -20 \cdot \log \Omega$$

tomu odpovídá *asymptota* se strmostí -20 dB/dec.



Obr. 2 Dolní propust Sallen-Key, 2. řádu

Přenos struktury na obr. 2 je definován vztahem

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{K}{\left(\frac{p}{\omega_p}\right)^2 + \left(\frac{p}{\omega_p}\right)/Q + 1} = \frac{K}{s^2 + s/Q + 1}; \quad \omega_p = \frac{1}{RC}; \quad 1/Q = 3 - K$$

Snadno lze určit, že pro $3 - K < 0$ budou *reálné části pólů přenosové funkce kladné*, *system* bude *nestabilní*.

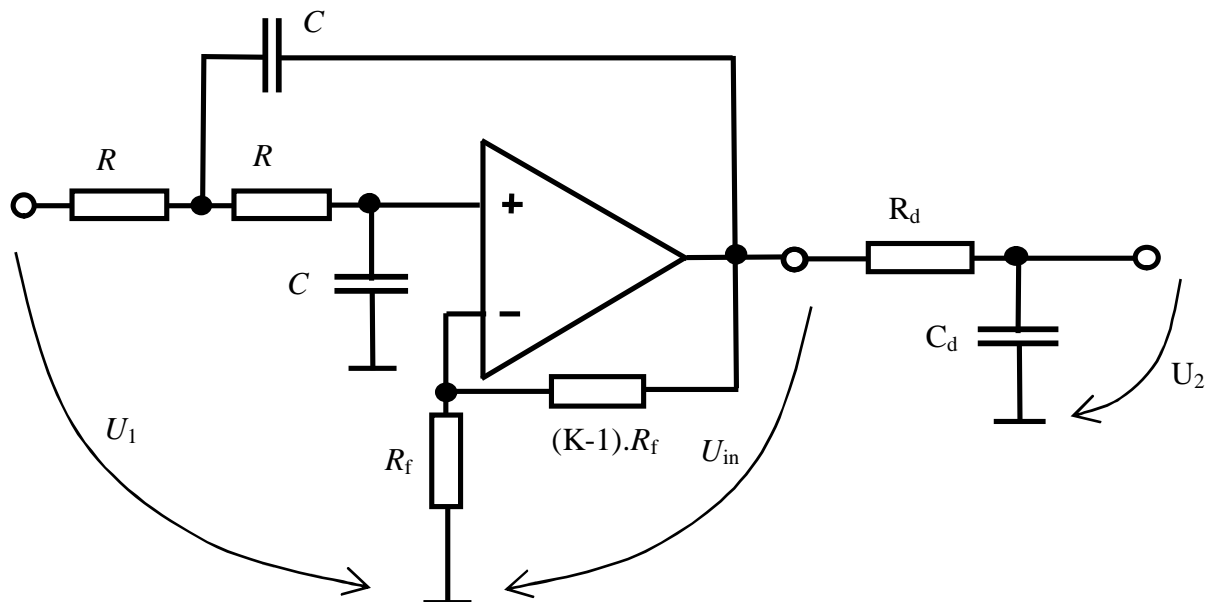
Pro $\Omega \gg 1$ je

$$\left| \frac{U_2}{U_1} \right|_{\Omega} \cong \frac{K}{\Omega^2}; \quad \left| \frac{U_2}{U_1} \right|_{dB} \cong 20 \cdot \log K - 40 \cdot \log \Omega$$

tomu odpovídá asymptota se strmostí -40 dB/dec. Extrém funkce je definován na obr.2 ($s_m = w_m / w_p$).

Přenos struktury na obr. 3 je definován vztahem (kaskádní řazení)

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{K \cdot w_{p1}^2}{p^2 + p \cdot w_{p1} / Q_1 + w_{p1}^2} \cdot \frac{w_{p2}}{p + w_{p2}}$$

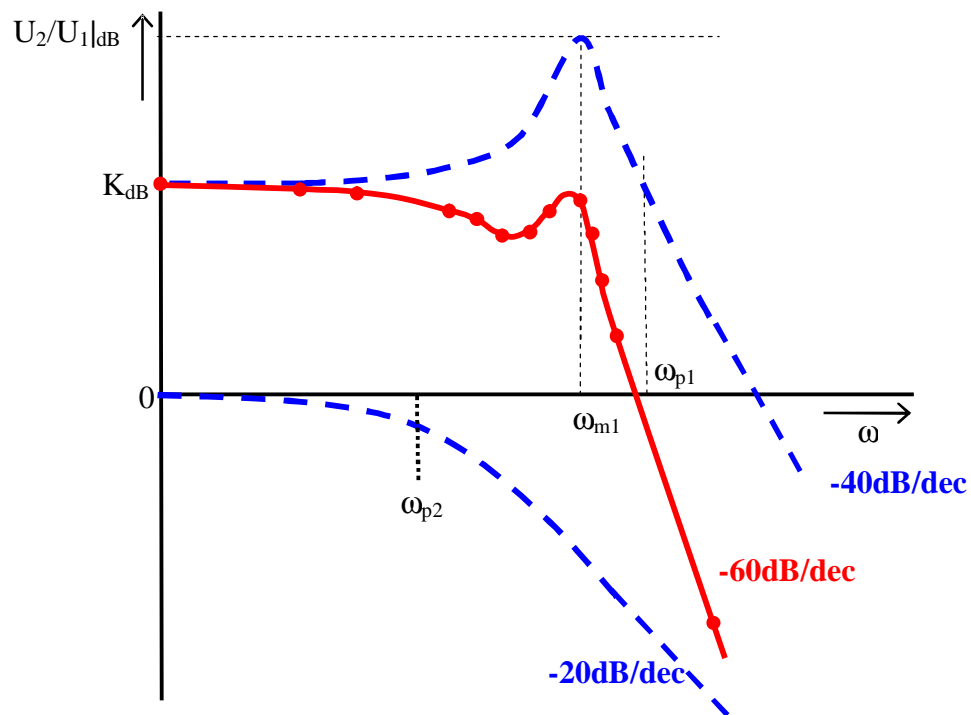


Obr. 3 Kaskádní řazení dolní propusti Sallen-Key 2. řádu a dolní propusti 1. řádu

Modul přenosu vyjádřený v dB je

$$\left| \frac{U_2}{U_1} \right|_{dB} = 20 \cdot \log K + 20 \cdot \log \left| \frac{w_{p1}^2}{p^2 + p \cdot w_{p1} / Q_1 + w_{p1}^2} \right| + 20 \cdot \log \left| \frac{w_{p2}}{p + w_{p2}} \right|$$

Výsledek pro náhodně vybrané parametry filtrů je kvalitativně znázorněn plnou čarou na obr. 4.



Obr. 4 Modul přenosu pro strukturu na obr. 3

Je zřejmé, že volbou parametrů dílčích filtrů na obr. 3 (zde w_{p1} a Q_1 ; w_{p2}) můžeme dosahovat různé průběhy výsledné modulové charakteristiky struktury.

Budeme-li nyní normovat vůči nějakému kmitočtu ω_0 , obdržíme normovaný přenos pro strukturu na obr. 3 v podobě

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{K \cdot a_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

Pro $\Omega \gg 1$ je

$$\left| \frac{U_2}{U_1} \right|_{\Omega} \cong \frac{K}{\Omega^3}; \quad \left| \frac{U_2}{U_1} \right|_{dB} \cong 20 \log K - 60 \cdot \log \Omega$$

tomu odpovídá asymptota se strmostí -60 dB/dec – viz obr. 4.

Všechny dolní propusti (stabilní) lze popsat normovanou přenosovou funkcí

$$H(s) = \frac{a_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{a_0}{P(s)}$$

Konstanta K v čitateli vztahu neovlivňuje „tvar“ modulu přenosu. Polynom

$$P(s) = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

je (musí být) **Hurwitzův polynom**.

II. HURWITZŮV POLYNOM

Musí platit, že $a_i > 0$ pro všechna i (**všechna a_i jsou nenulová**) - podmínka nutná, nikoli postačující. **Všechny kořeny** polynomu $P(s)$ – póly přenosové funkce – musí ležet **v levé** (otevřené) **polorovině**

$$s = \Sigma + j\Omega.$$

Existují kritéria, která umožňují pro zadaný polynom $P(s)$ stanovit, zda se jedná o Hurwitzův polynom.

Pro Hurwitzův polynom platí

$$P(j\Omega) = \operatorname{Re} P(j\Omega) + j \operatorname{Im} P(j\Omega) \longrightarrow \text{fázová charakteristika polynomu}$$

$$\Phi_p(\Omega) = \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{Im} P(j\Omega)}{\operatorname{Re} P(j\Omega)} \right)$$

Pro $s = j\Omega$ je $\operatorname{Re} P(j\Omega)$ sudou funkcí Ω ;

$\operatorname{Im} P(j\Omega)$ je lichou funkcí Ω .

Proto

$$P(-j\Omega) = \operatorname{Re} P(j\Omega) - j \operatorname{Im} P(j\Omega) = P^*(j\Omega)$$

$$P(j\Omega) \cdot P^*(j\Omega) = (\operatorname{Re} P)^2 + (\operatorname{Im} P)^2 = |P(j\Omega)|^2$$

Analytické prodloužení (pokračování) – kvadrát modulu lze psát v podobě

$$|P(s)|^2 = P(s) \cdot P(-s).$$

Lze odvodit, že pro celou strukturu platí

$$\Phi(s) = \frac{1}{2} \ln \frac{H(s)}{H(-s)} = \frac{1}{2} \ln \frac{P(-s)}{P(s)} \quad \text{- fázová charakteristika přenosu (DP)}$$

$$G(\Omega^2) \rightarrow G(-s^2) = H(s) \cdot H(-s) = |H(s)|^2 \quad \text{- kvadrát modulu přenosu (DP)}$$

Skupinové zpoždění struktury (DP) jako funkce $P(s)$, $P(-s)$ je

$$D(s) = -\frac{d\Phi(s)}{ds} = -\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{P(-s)}{P(s)} \right) = \dots = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{P'(s)}{P(s)} - \frac{P'(-s)}{P(-s)} \right]$$

Známe-li $D(\Omega) = -d\Phi(\Omega) / d\Omega$, potom pro $\Omega = w / w_0$ je

$$D(w) = -d\Phi(\Omega) / dw = (-d\Phi(\Omega) / d\Omega) \cdot d\Omega / dw = D(\Omega) / w_0$$

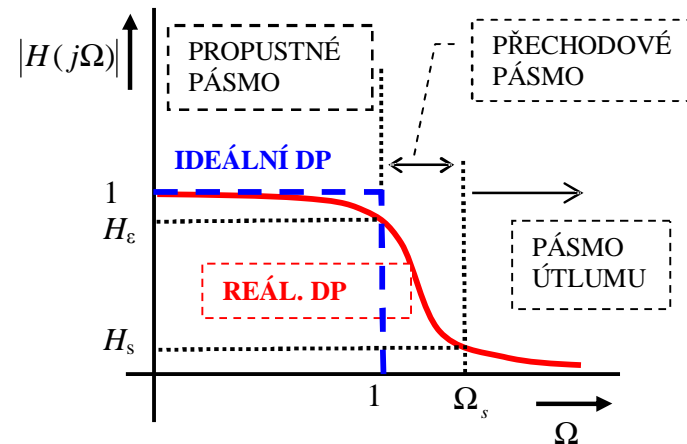
III. APROXIMACE DOLNÍCH PROPUSTÍ (DP)

Hledáme přenosové funkce obvodu, které:

- aproximují *s požadovanou přesností modul* (modulovou charakteristiku) obvodu (filtru)
- aproximují *zpoždění*

III.1 Popis vlastností (požadavků na) DP

Ideální DP by vyžadovala $n \rightarrow \infty$ - filtr by byl nekonečně složitý (nerealizovatelný). Modulová charakteristika reálné dolní propusti je na obr. 4.



Obr. 4 Modul přenosu normované dolní propusti

Modul přenosu modelujeme (aproximujeme) často pomocí *charakteristické funkce* $j(\Omega)$

$$|H(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{2j^2(\Omega)}}}$$

$j(\Omega)$ tak vlastně vždy aproximuje „nulu“ pro Ω v intervalu 0 až 1, pro $\Omega > 1$ musí hodnota charakteristické funkce rychle růst.

Pro normovaný filtr **primárně požadujeme** přenos H_ε (na $\Omega = 1$) a přenos H_s (na Ω_s).

Modul přenosu na $\Omega = 1$ je právě ($j(1) = 1$) $H_\varepsilon = 1/\sqrt{1+e^2}$; ε tak definuje požadovanou přesnost v pásmu propustnosti – je to **sekundární parametr filtru** (pro normovaný tvar). Lze odvodit, že

$$e = \sqrt{10^{a_p/10} - 1}$$

$a_p = 20 \log(1/H_\varepsilon)$ je útlum (v dB) povolený v propustném pásmu.

Modul přenosu na $\Omega = \Omega_s$ je právě H_s ($j(\Omega_s) = ?$), proto platí $H_s = 1/\sqrt{1+e^2 j^2(\Omega_s)}$; charakteristická funkce proto musí být

$$j^2(\Omega_s) = \frac{10^{a_s/10} - 1}{10^{a_p/10} - 1}$$

$a_s = 20 \log(1/H_s)$ je požadovaný útlum (v dB) na Ω_s .

Primární požadavky na filtr (normovaný) tedy jsou: a_p ; a_s na Ω_s .

Sekundární parametry filtru jsou (zcela obecně):
 e - definuje chybu (zvlnění) v pásmu propustnosti
 $j(\Omega_s)$ - definuje odstup modulu přenosu v propustném pásmu a pásmu útlumu
 $k = 1/\Omega_s$ - definuje požadovanou „strmost“ v pásmu přechodovém

III.2 Maximálně plochá modulová charakteristika

Vyděme z elementárního popisu přenosu pro $a_0 = 1$: $H(s) = \frac{1}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + 1}$

n = 2:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + a_1s + 1} \Rightarrow |s = j\Omega| \Rightarrow H(j\Omega) = \frac{1}{1 - \Omega^2 + ja_1\Omega} \Rightarrow |H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{(1 - \Omega^2)^2 + a_1^2\Omega^2} = \frac{1}{1 + \Omega^2(a_1^2 - 2) + \Omega^4}$$

Lze zajistit pouze splnění podmínky $a_1^2 - 2 = 0$. Odsud $a_1 = \pm\sqrt{2}$. Volit musíme kladné znaménko - Hurwitzův polynom

$$|H(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega^4}}; \quad H(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2} \cdot s + 1}$$

n = 3:

$$H(s) = \frac{1}{s^3 + a_2s^2 + a_1s + 1} \Rightarrow \dots \Rightarrow |H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \Omega^2(a_1^2 - 2a_2) + \Omega^4(a_2^2 - 2a_1) + \Omega^6}. \text{ Zajistit lze splnění podmínek: } a_1^2 - 2a_2 = 0 \text{ a}$$

$a_2^2 - 2a_1 = 0$. Pro $a_1 = a_2 = 2$ se jedná o Hurwitzův polynom

$$H(s) = \frac{1}{s^3 + 2 \cdot s^2 + 2 \cdot s + 1}; \quad |H(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega^6}}$$

$$\underline{n=4}: H(s) = \frac{1}{s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + 1} \Rightarrow \dots \Rightarrow |H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \Omega^2 (a_1^2 - 2a_2) + \Omega^4 (2 + a_2^2 - 2a_1 a_3) + \Omega^6 (a_3^2 - 2a_2) + \Omega^8}$$

Přenos

$$|H(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega^8}}$$

obdržíme pro $a_1 = a_3 = 2,61313$; $a_2 = 3,41421$ - Hurwitzův polynom; ale také pro $a_1 = a_3 = 1,08239$; $a_2 = 0,58579$ - **není Hurwitzův polynom!!!**

Proto

$$H(s) = \frac{1}{s^4 + 2,61313 \cdot s^3 + 3,41421 \cdot s^2 + 2,61313 \cdot s + 1}$$

Je zřejmé, že získáváme moduly přenosu typu

$$|H(j\Omega)|_n = \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega^{2n}}}$$

kde n je řád filtru (funkce). Jedná se o **Butterworthovy polynomy** [Butterworth].

Pro vyšší řády již bude obtížné kontrolovat, které koeficienty a_i (z možných řešení) splňují podmínky pro vytvoření Hurwitzova polynomu. Proto se volí vhodnější postup odvození maximálně ploché charakteristiky pomocí charakteristické funkce $j(\Omega)$.

III.2.1 Maximálně plochá modulová charakteristika určená pomocí charakteristické funkce

Výchozí vztah

$$|H(j\Omega)|^2 = H(j\Omega) \cdot H(-j\Omega) = \frac{1}{1 + e^{2j^2(\Omega)}}$$

Analytickým pokračováním v komplexní rovině je vztah ($s = j\Omega$; $\Omega = s/j$)

$$|H(s)|^2 = H(s) \cdot H(-s) = \frac{1}{1 + e^{2j^2(s/j)}}$$

Při **Butterworthově aproximaci** je $j^2(\Omega) = \Omega^{2n}$ a **nejčastěji $\epsilon = 1$** . Potom

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \Omega^{2n}}$$

- $|H(j0)|^2 = 1$

- $|H(j1)|^2 = 1/(1+1) \Rightarrow |H(j1)| = 1/\sqrt{2} \Rightarrow |H(j1)|_{dB} = -3 \text{ dB}$

- pro $\Omega \gg 1$ je $|H(j\Omega)| = 1/\Omega^n \Rightarrow |H(j\Omega)|_{dB} = -20 \cdot n \cdot \log \Omega \text{ dB}$ - tomu odpovídá asymptota $-n \times 20 \text{ dB/dec}$

- prvních $2n - 1$ derivací $|H(j\Omega)|$ pro $\Omega = 0$ je rovno nule.

Póly funkce $H(s) \cdot H(-s)$ zjistíme z rovnosti

$$1 + \Omega^{2n} = |\Omega = s/j| = 1 + (s/j)^{2n} = 1 + (-js)^{2n} = 0$$

Vždy platí

$$s_m = -\sin\left((2m-1) \cdot \frac{p}{2n}\right) + j \cos\left((2m-1) \cdot \frac{p}{2n}\right); \mu = 1, 2, \dots, n$$

Pro n sudá platí

$$H(s) = \frac{1}{\prod_1^{n/2} \left[\left(s^2 + 2 \cdot s \cdot \sin\left((2m-1) \frac{p}{2n}\right) + 1 \right) \right]}$$

Pro n lichá platí

$$H(s) = \frac{1}{(s+1) \cdot \prod_1^{(n-1)/2} \left[\left(s^2 + 2 \cdot s \cdot \sin\left((2m-1) \frac{p}{2n}\right) + 1 \right) \right]}$$

– všechny póly přenosu jsou v levé části komplexní roviny, leží na kružnici, póly v kladné části komplexní roviny tvoří funkci $H(-s)$.

III.2.2 Póly přenosu určené pomocí charakteristické funkce; obecně $\varepsilon \neq 1$

Substitucí $s' = e^{1/n} s$ získáme vztahy

Pro n sudá

$$H(s) = \frac{e^{-1}}{\prod_1^{n/2} [(s^2 + a_1 \cdot s + a_0)]}$$

$$a_1 = \frac{2}{\sqrt[n]{e}} \cdot \sin\left((2m-1) \frac{p}{2n}\right); \quad a_0 = \frac{1}{\sqrt[n]{e^2}}$$

Pro n lichá

$$H(s) = \frac{e^{-1}}{(s + e^{-1/n}) \prod_1^{(n-1)/2} [(s^2 + a_1 \cdot s + a_0)]}$$

Pro $e = 1$ dostaneme předchozí vztahy.

Tento tvar zápisu je velmi vhodný pro kaskádní realizaci filtrů (řazení dílčích filtrů 2. řádu pro n sudá, řazení jednoho filtru prvního řádu a dílčích filtrů 2. řádu pro n lichá).

III.2.3 Potřebný řád Butterworthova filtru

$$\text{Platí } \Omega_s^{2n} = \frac{10^{a_s/10} - 1}{10^{a_p/10} - 1} \Rightarrow \Omega_s^n = \sqrt{\frac{10^{a_s/10} - 1}{10^{a_p/10} - 1}} \Rightarrow$$

$$n \geq \frac{\log \sqrt{\frac{10^{a_s/10} - 1}{10^{a_p/10} - 1}}}{\log \Omega_s}$$

n musí být celé číslo.

III.2.4 Odhad chyby v propustném pásmu

V měřicích řetězcích může být důležité určení chyby modulu (vůči ideální hodnotě 1) pro $\Omega \ll 1$. Pro nejběžnější situaci, kdy se volí $e = 1$ (to odpovídá chybě cca 30% na $\Omega = 1$) platí pro $\Omega \ll 1$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \Omega^{2n}}} \cong 1 - 0,5 \cdot \Omega^{2n};$$

Definujme chybu modulu $E = (1 - 0,5 \cdot \Omega^{2n}) - 1 = -0,5 \cdot \Omega^{2n}$; $E_{\%} = \left| -0,5 \cdot \Omega^{2n} \right| \cdot 100 = 50 \cdot \Omega^{2n}$

Frekvenci Ω_E , na které je chyba právě $E_{\%}$ snadno určíme ze vztahu

$$\Omega_E \cong \sqrt[2n]{\frac{E_{\%}}{50}}$$

Pro $\Omega < \Omega_E$ bude při Butterworthově aproximaci chyba menší.

III.3 Izoextremální aproximace (Čebyševova)

- Hledáme polynom, který se stejnoměrnou odchylkou aproximuje nulu v propustném pásmu.
- Charakteristická funkce $j(\Omega)$ je tvořena **Čebyševovými polynomy**.

Pro $0 \leq \Omega \leq 1$ je

$$C_n(\Omega) = \cos(n \arccos \Omega)$$

Pro $\Omega \geq 1$ je

$$C_n(\Omega) = \cosh(n \arg \cosh \Omega)$$

Postupně tak obdržíme

$$C_0(\Omega) = 1$$

$$C_1(\Omega) = \cos(\arccos \Omega) = \Omega$$

$$C_2(\Omega) = \cos(2 \cdot \arccos \Omega) = \left| x = \arccos \Omega \right| = \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2 \cos^2 x - 1 = 2(\cos(\arccos \Omega))^2 - 1 = 2 \cdot \Omega^2 - 1$$

Platí

$$C_{n+1}(\Omega) = 2 \cdot \Omega \cdot C_n(\Omega) - C_{n-1}(\Omega)$$

Pro příklad:

$$C_3(\Omega) = 2 \cdot \Omega \cdot C_2(\Omega) - C_1(\Omega) = 2 \cdot \Omega \cdot (2 \cdot \Omega^2 - 1) - \Omega = 4 \cdot \Omega^3 - 3 \cdot \Omega$$

Pro modul přenosové funkce nyní platí

$$|H(j\Omega)|^2 = H(j\Omega) \cdot H(-j\Omega) = \frac{1}{1 + e^2 \cdot C_n^2(\Omega)}$$

Z uvedených vlastností je zřejmé, že

pro n lichá $C_n(0) = 0$ $|H(j0)| = 1$

pro n sudá $|C_n(0)| = 1$ $|H(j0)| = 1/\sqrt{1+e^2}$

pro všechna n $|C_n(1)| = 1$ $|H(j1)| = 1/\sqrt{1+e^2}$

III.3.1 Maxima a minima přenosu v pásmu propustnosti

Maxima v pásmu propustnosti vznikají tam, kde charakteristická funkce nabývá nulových hodnot. Platí (odvození viz k přednášce přiložený materiál)

$$\Omega_{MAXm} = \cos(2m-1) \frac{p}{2 \cdot n}$$

$\mu = 1, 2, \dots, n/2$ pro n sudé

$\mu = 1, 2, \dots, (n+1)/2$ pro n liché.

Minima v pásmu propustnosti vznikají tam, kde charakteristická funkce hodnot ± 1 . Platí (odvození viz k přednášce přiložený materiál)

$$\Omega_{MINm} = \cos(m-1) \frac{p}{n}$$

III.3.2 Frekvence Ω_3 pro pokles přenosu o 3 dB

V teorii filtrů je důležité znát frekvenci, na které je pokles přenosu právě 3 dB, což v našem případě znamená, že musí právě platit $|H(j\Omega_3)|^2 = 1/(1+1)$, tedy $e^2 \cdot C_n^2(\Omega_3) = 1$; tedy $e^2 \cdot \cosh^2(n \cdot \arg \cosh \Omega_3) = 1$. Odsud lze určit (odvození viz k přednášce přiložený materiál)

$$\Omega_3 = \cosh\left(\frac{1}{n} \cdot \arg \cosh \frac{1}{e}\right); \quad e < 1$$

III.3.3 Potřebný řád filtru

Zcela obecně bylo odvozeno $e = \sqrt{10^{a_p/10} - 1}$ a $j^2(\Omega_s) = (10^{a_s/10} - 1)/(10^{a_p/10} - 1)$, kde a_s je požadovaný útlum (v dB) na Ω_s a a_p je povolená chyba (zde zvlnění v pásmu propustnosti v dB) pro Ω rovno 0 až 1. Pro Čebyševovu aproximaci tedy platí (nyní již nejsme v propustném pásmu; $\Omega > 1$), že (odvození viz k přednášce přiložený materiál)

$$C_n^2(\Omega_s) = \frac{10^{a_s/10} - 1}{10^{a_p/10} - 1} \Rightarrow n \geq \frac{\arg \cosh \sqrt{\frac{10^{a_s/10} - 1}{10^{a_p/10} - 1}}}{\arg \cosh \Omega_s} \quad n \text{ musí být celé číslo.}$$

III.3.4 Určení pólů přenosové funkce pro Čebyševovu aproximaci

Postup je shodný jako u Butterworthovy aproximace. Pouze řešení problému je poněkud složitější, hledáme póly v pásmu propustnosti, kde platí, že $\Omega < 1$:

$$|H(s)|^2 = H(s) \cdot H(-s) = \frac{1}{1 + e^{2j^2(s/j)}}; \quad 1 + e^{2j^2(s/j)} = 1 + e^{2C_n^2(s/j)} = 0; \quad C_n(s/j) = \cos(n \arccos(s/j)) = \pm j/e$$

Zavedeme substituci $\arccos(s/j) = u + jv$, kde u, v jsou již reálná čísla. Výsledkem je

$$v = \frac{1}{n} \cdot \arg \sinh \frac{1}{e}$$

$$\Sigma_m = -\sinh v \cdot \sin \left[(2m-1) \frac{p}{2n} \right]; \quad \Omega_m = \cosh v \cdot \cos \left[(2m-1) \frac{p}{2n} \right]$$

potom snadno určíme, že

$$\Sigma_m^2 / \sinh^2 v = \sin^2 \left[(2m-1) \frac{p}{2n} \right]; \quad \Omega_m^2 / \cosh^2 v = \cos^2 \left[(2m-1) \frac{p}{2n} \right]$$

Odsud určíme, že

$$\left(\Sigma_m^2 / \sinh^2 v \right) + \left(\Omega_m^2 / \cosh^2 v \right) = \sin^2 \left[(2m-1) \frac{p}{2n} \right] + \cos^2 \left[(2m-1) \frac{p}{2n} \right] = 1$$

Kořeny s_μ polynomu $H(s)$ (reálné části kořenů záporné) leží na elipse, v levé části komplexní roviny. Kořeny s kladnou reálnou částí, náležející polynomu $H(-s)$, leží na stejné elipse – v pravé části komplexní roviny.

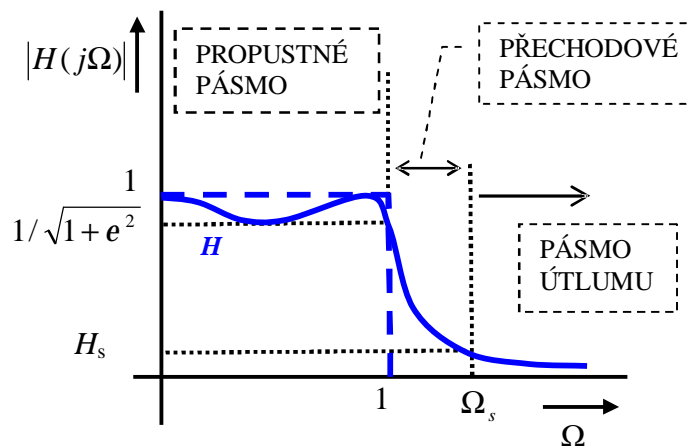
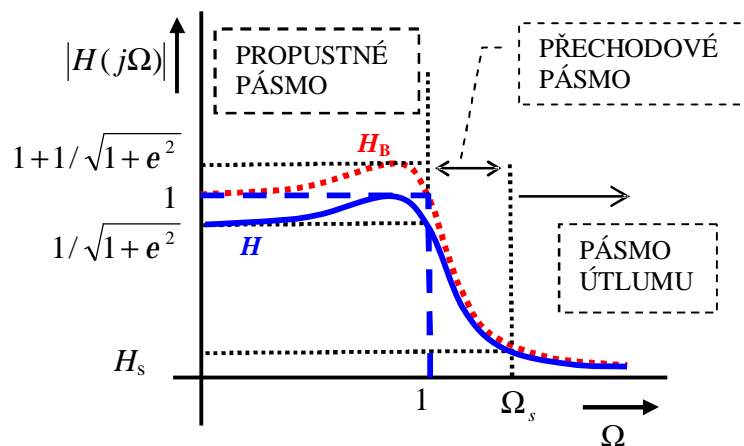
Pro **n sudá** platí

$$H(s) = \frac{1}{\sqrt{1+e^2}} \cdot \prod_1^{n/2} \frac{\Sigma_m^2 + \Omega_m^2}{s^2 - 2 \cdot s \cdot \Sigma_m + \Sigma_m^2 + \Omega_m^2}$$

V některých zdrojích se pro n sudá pracuje se vztahem

$$H_B(s) = \prod_1^{n/2} \frac{\Sigma_m^2 + \Omega_m^2}{s^2 - 2 \cdot s \cdot \Sigma_m + \Sigma_m^2 + \Omega_m^2}$$

Dopad je zřejmý z kvalitativního zobrazení na obr. 5.



Obr. 5 Kvalitativní porovnání modulů H a H_B pro $n = 2$ **Obr. 6** Kvalitativní zobrazení modulu přenosu H a pro $n = 3$

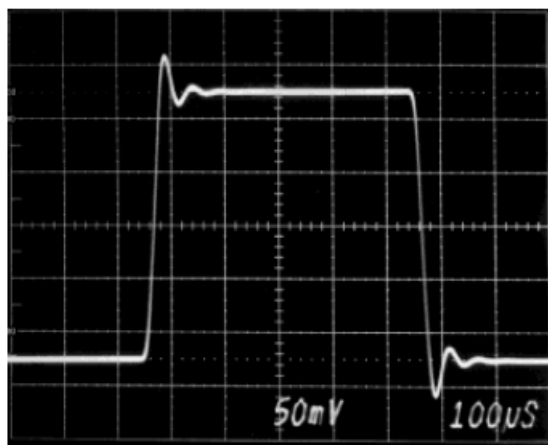
Pro **n lichá** platí

$$H(s) = \frac{\sinh v}{s + \sinh v} \cdot \prod_1^{(n-1)/2} \frac{\Sigma_m^2 + \Omega_m^2}{s^2 - 2 \cdot s \cdot \Sigma_m + \Sigma_m^2 + \Omega_m^2}$$

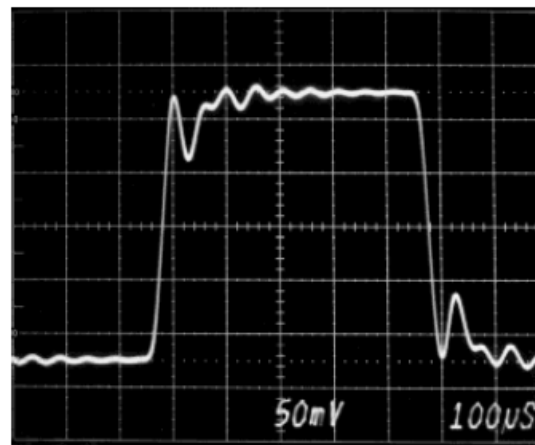
Kvalitativní zobrazení pro $n = 3$ je na obr. 6.

III.4 Srovnání Butterworthovy a Čebyševovy aproximace

Při přenosu signálů impulsového charakteru hraje skupinové zpoždění vážnou roli – ideálně by mělo být konstantní. Tomu odpovídá lineární závislost fáze na frekvenci. Z hlediska skupinového zpoždění je vhodnější aproximace Butterworthova (než Čebyševova) – při jinak srovnatelných parametrech modulu přenosu. To je zřejmé ze záznamu přenosu impulsů dolních propustí na obr. 7 a na obr. 8.

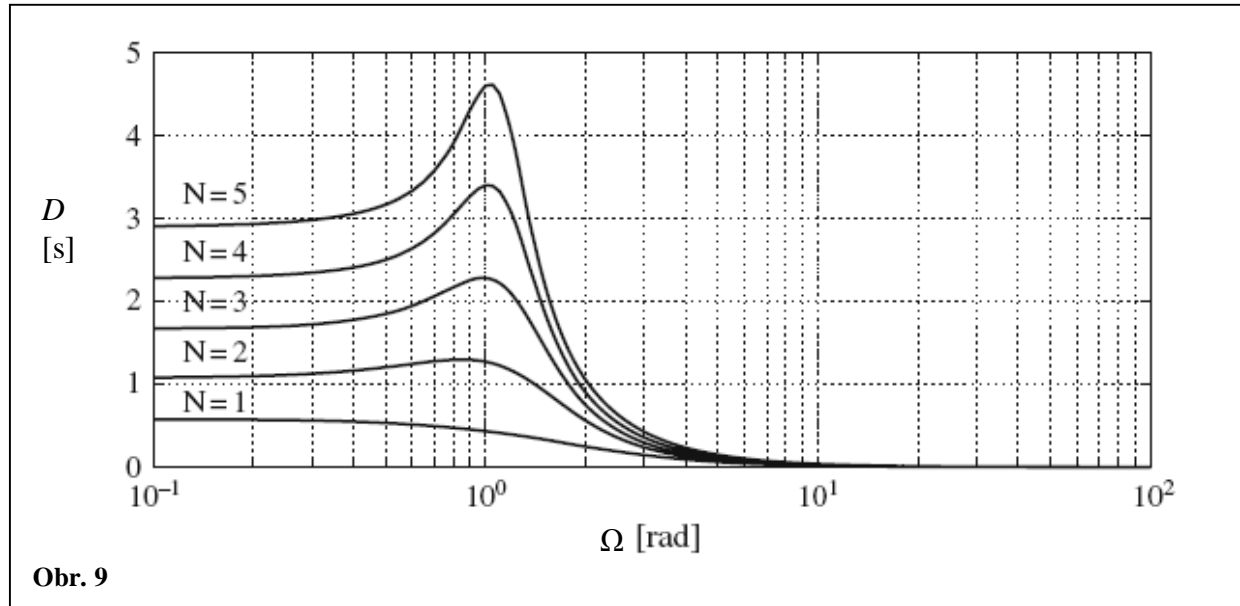


Obr. 7 Přenos impulsu, Butterworthův filtr 5. řádu, dolní propust 20 kHz

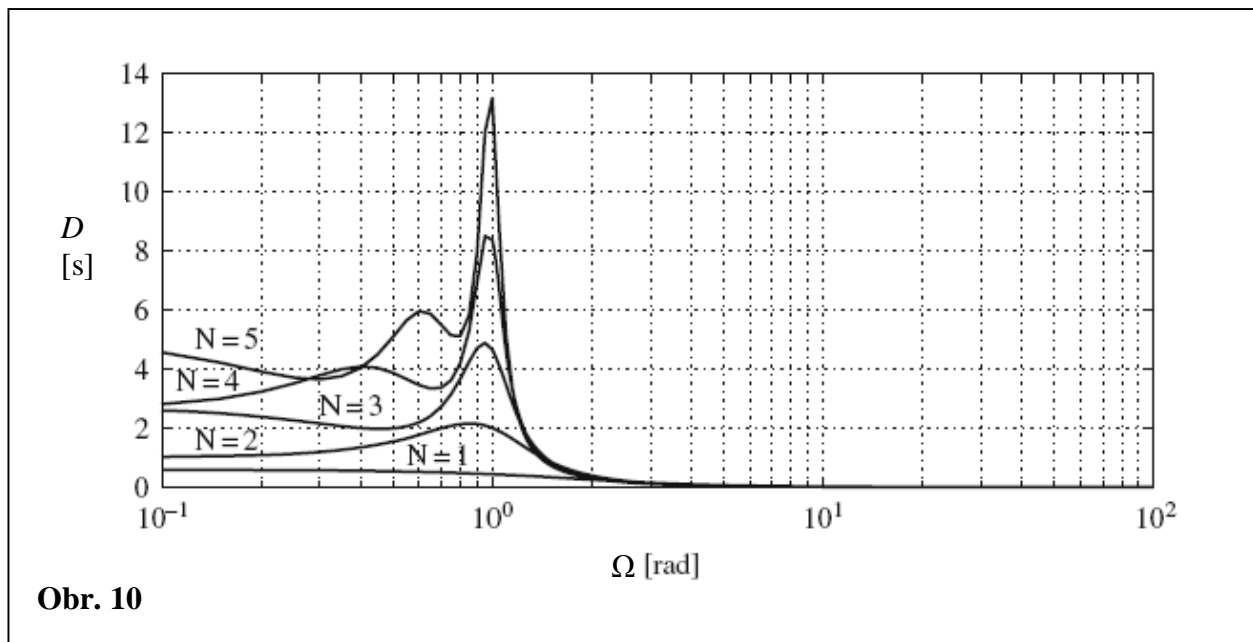


Obr. 8 Přenos impulsu, Čebyševův filtr 5. řádu, zvlnění 3 dB, dolní propust 20 kHz

Skupinové zpoždění D Butterworthových filtrů různého řádu je na obr. 9.



Příklad skupinových zpoždění D Čebyševových filtrů je kvalitativně na obr. 10.



Existují i aproximace, kde se optimalizuje skupinové zpoždění D .

IV. MAXIMÁLNĚ PLOCHÝ PRŮBĚH SKUPINOVÉHO ZPOŽDĚNÍ

Kritériem pro aproximaci je nyní průběh skupinového zpoždění D . Vyjděme z elementárních (dříve uvedených) vztahů.

$$\text{Pro } \underline{n=2}: H(s) = \frac{a_0}{s^2 + a_1s + a_0} \Rightarrow |s = j\Omega| \Rightarrow H(j\Omega) = \frac{a_0}{a_0 - \Omega^2 + ja_1\Omega} \quad ; \quad \Phi(\Omega) = -\arctg\left(\frac{\text{Im}P(j\Omega)}{\text{Re}P(j\Omega)}\right) = -\arctg\frac{a_1 \cdot \Omega}{a_0 - \Omega^2}$$

$$D(\Omega) = -d\Phi(\Omega)/d\Omega \Rightarrow D(\Omega) = \dots = \frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{1 + \Omega^2/a_0}{1 + \Omega^2(a_1^2/a_0^2 - 2/a_0) + \Omega^4/a_0^2}$$

Pro dosažení maximálně plochého průběhu skupinového zpoždění můžeme zajistit shodu koeficientů u stejných mocnin v čitateli a jmenovateli, pro $n=2$ tedy: $1/a_0 = a_1^2/a_0^2 - 2/a_0$. Volíme-li normované zpoždění $D_0 = a_1/a_0 = 1$ s, musí platit $1/a_0 = 1 - 2/a_0 \Rightarrow a_0 = 3 = a_1$

Platí tedy, že skupinové zpoždění má maximálně plochý průběh pro

$$H_2(s) = \frac{3}{s^2 + 3s + 3}$$

$$\text{Pro } \underline{n=3}: H(s) = \frac{a_0}{s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0} \Rightarrow |s = j\Omega| \Rightarrow H(j\Omega) = \frac{a_0}{a_0 - a_2\Omega^2 + j\Omega(a_1 - \Omega^2)}$$

Obdobným způsobem určíme, že skupinové zpoždění má maximálně plochý průběh pro

$$H_3(s) = \frac{15}{s^3 + 6s^2 + 15s + 15}$$

Předvedený postup je pro větší hodnoty n obtížný. **Vhodnější postup vypracoval Storch**. Snadno určíme, že normovaný přenos $H(s) = \exp(-s) = |_{s=j\Omega} = \exp(-j\Omega) = 1/\exp(j\Omega)$ má modul 1 nezávisle na Ω a jeho fáze $\Phi(\Omega) = -\Omega$. Skupinové zpoždění (normované na hodnotu 1 s) pro tuto přenosovou funkci je

$$D(\Omega) = -d\Phi / d\Omega = 1,$$

což je ideální stav z hlediska skupinového zpoždění. Platí ovšem (McLaurinova řada) $\exp x = \sum_0^{\infty} x^k / k!$. Ideální řešení by tedy bylo realizováno

nekonečně složitým systémem. Pokud se omezíme pouze na řadu konečné délky (omezenou, ořezanou) $\exp x = \sum_0^n \frac{x^k}{k!}$, ukázalo se, že již pro

$n \geq 5$ obsahuje rovnice $\sum_0^n \frac{x^k}{k!} = 0$ vždy komplexně sdružené kořeny, jejichž reálná část je kladná, **nejedná se tedy o Hurwitzův polynom!**

Takové systémy by nebyly stabilní, tedy nemá smysl je realizovat. Zde se využije jiné vlastnosti Hurwitzova polynomu. Předpokládejme, že máme polynom řádu n

$$P_n(s) = S_n(s) + L_n(s) = \sum_0^n a_k s^k$$

Polynom $S_n(s)$ tvoří členy se sudou mocninou s ; polynom $L_n(s)$ tvoří členy s lichou mocninou s .

Nutnou a postačující podmínkou pro Hurwitzův polynom je, že všechny koeficienty v rozvoji podílu $S_n(s) / L_n(s)$ na řetězové zlomky jsou kladné.

Vraťme se nyní k přenosu

$$H(s) = 1/\exp(s) = \frac{1}{1 + s + s^2/2! + s^3/3! + s^4/4! + s^5/5! + s^6/6! + \dots} = \frac{1}{(1 + s^2/2! + s^4/4! + s^6/6! + \dots) + (s + s^3/3! + s^5/5! + \dots)} = \frac{1}{\cosh s + \sinh s}$$

Známe tedy sudou i lichou část požadovaného přenosu a můžeme určit podíl

$$\frac{\cosh s}{\sinh s} = \frac{(1 + s^2/2! + s^4/4! + s^6/6! + \dots)}{(s + s^3/3! + s^5/5! + \dots)} = \frac{1}{s} + \frac{1}{\frac{3}{s} + \frac{1}{\frac{5}{s} + \frac{1}{\frac{7}{s} + \dots}}}$$

Pokud nyní požadujeme aproximaci řádu n , je posledním členem řetězového zlomku člen $(2n-1)/s$. Řetězový zlomek tak aproximuje lineární průběh fáze (maximálně plochý – obdobně jako tomu bylo s modulem přenosu u Butterworthovy aproximace). Po elementárních úpravách získáme sudou a lichou část Hurwitzova (aproximačního) polynomu, jejich součtem obdržíme **Besselovy polynomy**.

Pro $n = 2$ tedy platí $\frac{\cosh s}{\sinh s} = \frac{1}{s} + \frac{1}{3/s} = \frac{1}{s} + \frac{s}{3} = \frac{s^2 + 3}{3 \cdot s}$, tedy $P_2(s) = (s^2 + 3) + 3 \cdot s = s^2 + 3 \cdot s + 3$.

Požadovaný přenos (s „lineární fází“) je

$$H_2(s) = \frac{3}{s^2 + 3 \cdot s + 3}$$

V [Balabanian] je uveden pro Besselovu aproximaci obecný vztah ve tvaru

$$H_n(s) = \frac{b_0}{\sum_0^n b_k s^k} = \frac{b_0}{B_n(s)}; \quad b_k = \frac{(2n-k)!}{2^{n-k} \cdot k! \cdot (n-k)!}$$

a rovněž se uvádí rekurentní vztah

$$B_n(s) = (2n-1) \cdot B_{n-1}(s) + s^2 \cdot B_{n-2}(s)$$

Pokud chceme získat i nyní vztahy vhodné pro kaskádní realizaci, **musíme určit kořeny rovnic** $B_n(s) = 0$ a $H_n(s) = b_0 / B_n(s)$ opět rozložit na součiny dílčích funkcí druhého řádu pro n sudé. Pro n liché pouze přibude jeden dílčí člen prvního řádu – tab. 1.

Z praktických důvodů budeme dále pro kaskádní realizace používat obecně zápis:

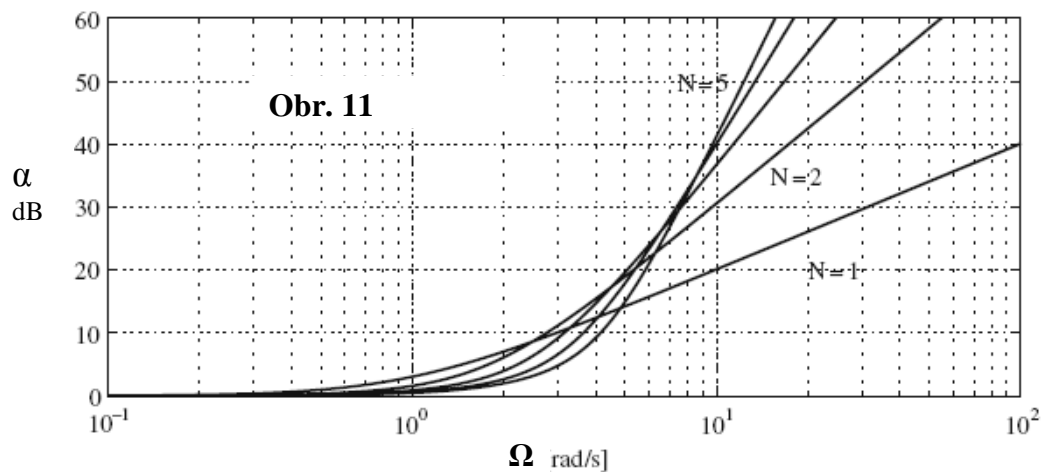
$$H(s) = \prod_{k=1}^{n/2} A_k \frac{b_k}{s^2 + a_k s + b_k} \quad \text{-pro } n \text{ sudé}$$

$$H(s) = \frac{A_0 \cdot b_0}{s + b_0} \times \prod_{k=1}^{(n-1)/2} A_k \frac{b_k}{s^2 + a_k s + b_k} \quad \text{- pro } n \text{ liché}$$

n	b_0	a_1	b_1	a_2	b_2
2	-	3,000 000	3,000 000	-	-
3	2,322 185	3,677 815	6,459 433	-	-
4	-	5,792 421	9,140 131	4,207 579	11,487 800
5	3,646 739	6,703 913	14,272 481	4,649 349	18,156 315

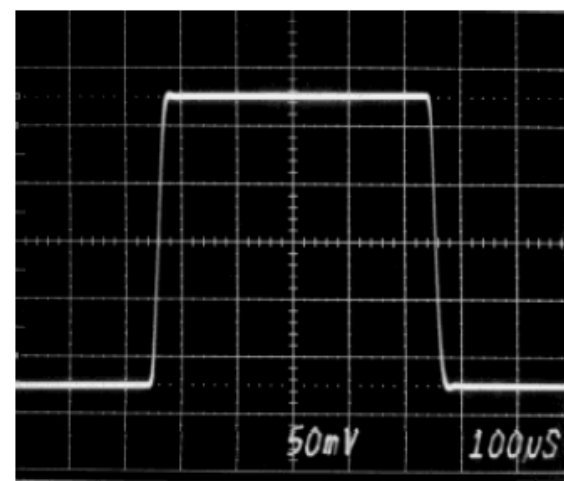
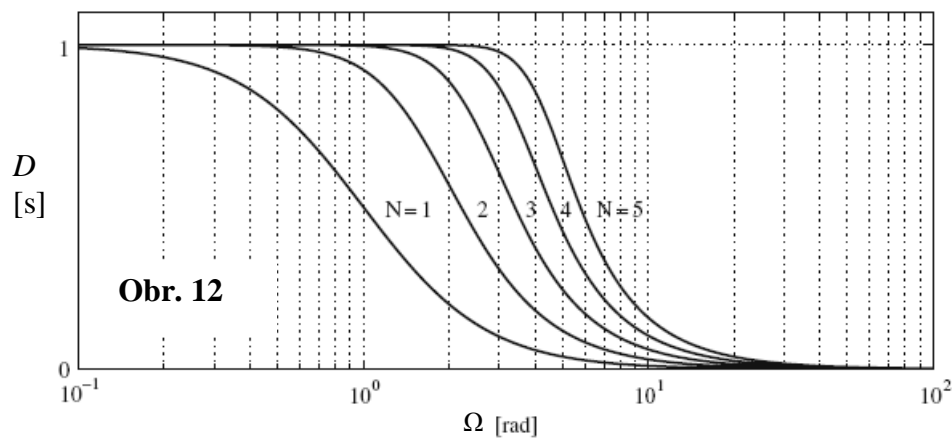
Tab. 1 Hodnoty dílčích funkcí pro Besselovu aproximaci

Útlumové charakteristiky Besselových filtrů (převrácená hodnota přenosu) jsou na obr. 11. Frekvence poklesu přenosu o 3 dB jsou uvedeny v tabulce 2. Průběhy skupinového zpoždění jsou na obr. 12. Přenos impulsu pro Besselův (Thomsonův) filtr 5. řádu je na obr. 13.



řád filtru n	2	3	4	5
Ω_3	1,36	1,75	2,13	2,42

Tab.2 Besselovy filtry – frekv. poklesu přenosu o 3 dB



Obr. 13 Přenos impulsu, Besselův filtr 5. řádu, dolní propust 20 kHz

Je zřejmé, že chování Besselových (Thomsonových) filtrů v časové oblasti je nejlepší.

Tabulky k „obecnému zápisu“ – optimalizovaný zápis pro kaskádní realizaci filtrů Butterworthových a Čebyševových

n	b_0	a_1	b_1	a_2	b_2
2	-	1,425 625	1,516 203	-	-
3	0,626 456	0,626 456	1,142 448	-	-
4	-	0,350 706	1,063 519	0,846 680	0,356 412
5	0,362 320	0,223 926	1,035 784	0,586 245	0,476 676

Tab.3a Čebyševovy filtry (DP) – zvlnění $\alpha_p = 0,5$ dB

n	b_0	a_1	b_1	a_2	b_2
2	-	1,097 734	1,102 510	-	-
3	0,494 171	0,494 171	0,994 205	-	-
4	-	0,279 072	0,986 505	0,673 739	0,279 398
5	0,289 493	0,178 917	0,988 315	0,468 410	0,429 298

Tab.3b Čebyševovy filtry (DP) – zvlnění $\alpha_p = 1$ dB

n	b_0	a_1	b_1	a_2	b_2
2	-	0,803 816	0,823 060	-	-
3	0,368 911	0,368 911	0,886 095	-	-
4	-	0,209 775	0,928 675	0,506 440	0,221 568
5	0,218 308	0,134 922	0,952 167	0,353 230	0,393 150

Tab.3c Čebyševovy filtry (DP) – zvlnění $\alpha_p = 2$ dB

Řád filtru n	zvlnění v pásmu propustném α_p		
	0,5 dB	1 dB	2 dB
2	1,390	1,218	1,074
3	1,168	1,095	1,033
4	1,093	1,053	1,018
5	1,059	1,034	1,012

Tab. 3d 3-dB frekvence Čebyševových filtrů Ω_3

n	b_0	a_1	b_1	a_2	b_2
2	-	1,414 214	1,000 000	-	-
3	1,000 000	1,000 000	1,000 000	-	-
4	-	0,765 367	1,000 000	1,847 759	1,000 000
5	1,000000	0,618 034	1,000 000	1,618 034	1,000 000

Tab.4 Butterworthovy filtry

Určení koeficientů je zřejmé ze vztahů na str. 14 (Butterworthova aproximace, $b_i = 1$) a str. 20. (Čebyševova aproximace).

IV. FREKVENČNÍ TRANSFORMACE

Byl definován komplexní normovaný kmitočet, w_0 zde reprezentuje charakteristickou vlastnost celého filtru.

$$s = p / w_0 = S / w_0 + jW / w_0 = \Sigma + j\Omega$$

pro který byly odvozeny všechny vlastnosti normovaných DP. Jedná se pouze o změnu měřítka, k technicky potřebným hodnotám w_0 se vrátíme **základní substitucí** (denormalizace, odnormování, normovaná DP → denormalizovaná DP)

$$s \rightarrow p / w_0$$

Například z normované dolní propusti 3. řádu (n liché) tak obdržíme (předpokládáme jednotkový přenos)

$$H(s) = \frac{b_0}{s + b_0} \times \frac{b_1}{s^2 + a_1 s + b_1} \rightarrow |s \rightarrow p / w_0| \rightarrow H(p) = \frac{w_0 b_0}{p + w_0 b_0} \times \frac{w_0^2 b_1}{p^2 + a_1 w_0 p + w_0^2 b_1}$$

Kaskádní realizace bude obsahovat jednu dolní propust prvního řádu s charakteristickým kmitočtem $w_{p0} = w_0 b_0$ a jednu dolní propust 2. řádu (DP2) s charakteristickým kmitočtem $w_{p1}^2 = w_0^2 b_1$ - porovnáme-li přenos DP2 s běžným technickým zápisem (modelem)

$$\frac{w_{p1}^2}{p^2 + p \cdot w_{p1} / Q_1 + w_{p1}^2}$$

Rovněž je zřejmé, že musí platit $w_{p1} / Q_1 = a_1 w_0 \Rightarrow Q_1 = w_{p1} / (a_1 w_0) = w_0 \cdot \sqrt{b_1} / (a_1 w_0) = \sqrt{b_1} / a_1$.

Pro dílčí polynomy DP2. řádu tedy bude vždy platit, že jim odpovídající charakteristická (dílčí) frekvence je

a činitel jakosti je

$$w_{pk}^2 = w_0^2 b_k$$

$$Q_k = \sqrt{b_k} / a_k$$

Je – li n liché, platí pro přenos prvního řádu (dílčí)

$$w_{p0} = w_0 b_0$$

Tyto parametry potřebujeme znát pro technickou realizaci prvků kaskádního přenosového řetězce typu dolní propust.

Transformace DP na horní propust (HP)

Použijeme substituci

$$s \rightarrow w_0 / p$$

Jako příklad opět použijme normovanou DP 3. řádu (**DP prototyp**):

$$H(s) = \frac{b_0}{s + b_0} \times \frac{b_1}{s^2 + a_1 s + b_1} \rightarrow |s \rightarrow w_0 / p| \rightarrow H(p) = \frac{b_0}{w_0 / p + b_0} \cdot \frac{b_1}{w_0^2 / p^2 + a_1 w_0 / p + b_1} = \frac{p}{p + w_0 / b_0} \cdot \frac{p^2}{p^2 + p a_1 w_0 / b_1 + w_0^2 / b_1}$$

Kaskádní realizace bude obsahovat jednu horní propust prvního řádu s charakteristickým kmitočtem $w_{p0} = w_0 / b_0$ a jednu horní propust 2. řádu (HP2) s charakteristickým kmitočtem $w_{p1}^2 = w_0^2 / b_1$ - porovnáme-li přenos HP2 s běžným technickým zápisem (modelem)

$$\frac{p^2}{p^2 + p \cdot w_{p1} / Q_1 + w_{p1}^2}$$

Rovněž je zřejmé, že musí platit $w_{p1}/Q_1 = a_1 w_0 / b_1 \Rightarrow Q_1 = w_{p1} b_1 / (a_1 w_0) = (w_0 \cdot b_1 / \sqrt{b_1}) / (a_1 w_0) = \sqrt{b_1} / a_1$.

Pro dílčí polynomy HP2. řádu tedy bude vždy platit, že jim odpovídající charakteristická (dílčí) frekvence je

$$w_{pk}^2 = w_0^2 / b_k$$

a činitel jakosti je

$$Q_k = \sqrt{b_k} / a_k$$

Je – li n liché, platí pro přenos prvního řádu (dílčí)

$$w_{p0} = w_0 / b_0$$

Tyto parametry potřebujeme znát pro technickou realizaci prvků kaskádního přenosového řetězce typu horní propust.

Porovnáním zjistíme, že **póly přenosových funkcí** DP a HP se obecně liší. Pouze pro Butterworthovu aproximaci, kde $b_k = 1$ (pro $\varepsilon = 1$) se poloha pólů přenosových funkcí neliší.

Transformace DP na pásmovou propust (PP)

Vezměme za základ normovaný přenos dolní propusti a požadujeme pásmovou propust 2. řádu – model běžně používaný v technické praxi. Musí potom platit rovnost

$$\frac{1}{s+1} = \frac{p \cdot w_0 / Q}{p^2 + p \cdot w_0 / Q + w_0^2}$$

Elementárními úpravami dospějeme ke vztahu, který je v literatuře pro tuto transformaci uváděn:

$$s \rightarrow \frac{p^2 + w_0^2}{p \cdot w_0 / Q}$$

kde výraz w_0 / Q definuje požadovanou šířku propouštěného pásma.

Je zřejmé, že při tomto dosazení do přenosu DP prototypu se řád filtru zdvojnásobí (proti původnímu řádu DP prototypu).

Transformace DP na pásmovou zadrž. (PZ)

Vezměme za základ normovaný přenos dolní propusti a požadujeme zadrž. 2. řádu – model běžně používaný v technické praxi. Musí potom platit rovnost

$$\frac{1}{s+1} = \frac{p^2 + w_0^2}{p^2 + p \cdot w_0 / Q + w_0^2}$$

Elementárními úpravami dospějeme i nyní ke vztahu, který je v literatuře pro tuto transformaci uváděn:

$$s \rightarrow \frac{p \cdot w_0 / Q}{p^2 + w_0^2}$$

kde výraz w_0 / Q definuje požadovanou šířku zadržovaného pásma.

Je zřejmé, že i při tomto dosazení do přenosu DP prototypu se řád filtru zdvojnásobí (proti původnímu řádu DP prototypu).

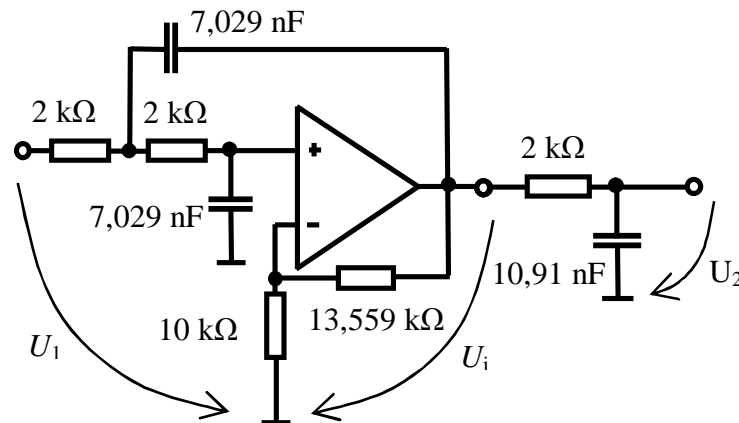
V. PŘÍKLAD APROXIMACE A REALIZACE

Požadujeme DP, $a_p = 0,3$ dB na $f_0 = 10$ kHz. Je požadován útlum $a_s = 22$ dB na $f_s = 24,58$ kHz.

Určíme $s = p/(2p \cdot 10^4)$; $\Omega_s = 24,58/10 = 2,458$, atd. Zvolena byla Čebyševova aproximace. Podrobné odvození a diskuse - viz k přednášce přiložený materiál. Požadavkům vyhovuje normalizovaná funkce

$$H(s) = \frac{0,72928}{s + 0,72928} \cdot \frac{1,28185}{s^2 + s \cdot 0,72928 + 1,28185} \rightarrow H(p) = \frac{5,0605 \cdot 10^9}{p^2 + p \cdot 4,5822 \cdot 10^4 + 5,0605 \cdot 10^9} \cdot \frac{4,5822 \cdot 10^4}{p + 4,5822 \cdot 10^4}$$

Je zřejmé, že $b_0 = 0,72928$; $a_1 = 0,72928$; $b_1 = 1,28185$; $Q_1 = \sqrt{b_1}/a_1 = 1,5525$. Pro realizaci požadovaných vlastností s mezní frekvencí (celého filtru) $w_0 = 2p \cdot f_0 = 6,2832 \cdot 10^4$ rad/s tedy potřebujeme jednu dolní propust 1. řádu s charakteristickou (dílčí) frekvencí $w_{p0} = 4,5822 \cdot 10^4$ rad/s a jednu dolní propust 2. řádu s charakteristickou frekvencí (dílčí) $w_{p1} = \sqrt{5,0605 \cdot 10^9} = 7,1137 \cdot 10^4$ rad/s a činitelem jakosti $Q_1 = 1,5525$. Přenos poklesne o 3 dB na frekvenci $f_3 = \Omega_3 \cdot f_0 = 1,2291 \cdot f_0 = 12,291$ kHz. Možné realizace následují.

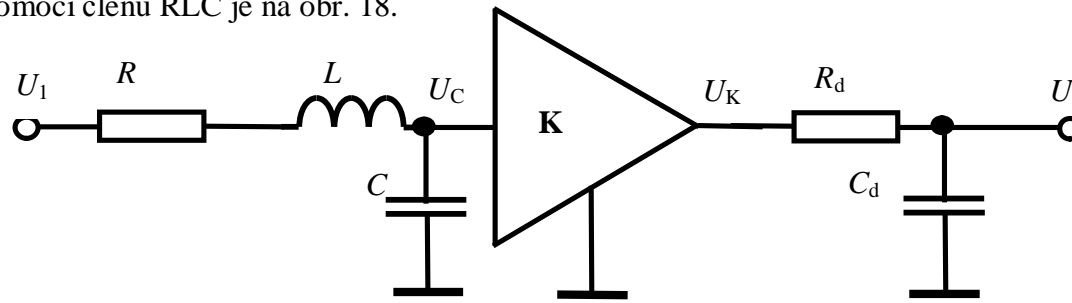


Obr. 14 Čebyševova dolní propust 3. řádu se zvlněním 0,3 dB; $f_0 = 10$ kHz

Této struktuře odpovídá přenosová funkce ($K = 2,3559$)
$$H(p) = 2,3559 \cdot \frac{5,0605 \cdot 10^9}{p^2 + p \cdot 4,5822 \cdot 10^4 + 5,0605 \cdot 10^9} \cdot \frac{4,5822 \cdot 10^4}{p + 4,5822 \cdot 10^4}.$$

Varianty s oddělovacím zesilovačem jsou diskutovány v příloženém materiálu (obr.15 a obr.16). Obrovskou výhodou shora popsaných filtrů je to, že můžeme velmi snadno nastavovat činitel jakosti – nemění se charakteristický kmitočet (délčho filtru 2. řádu). Současně se změnou činitele jakosti se ovšem mění i přenos K na nízkých kmitočtech.

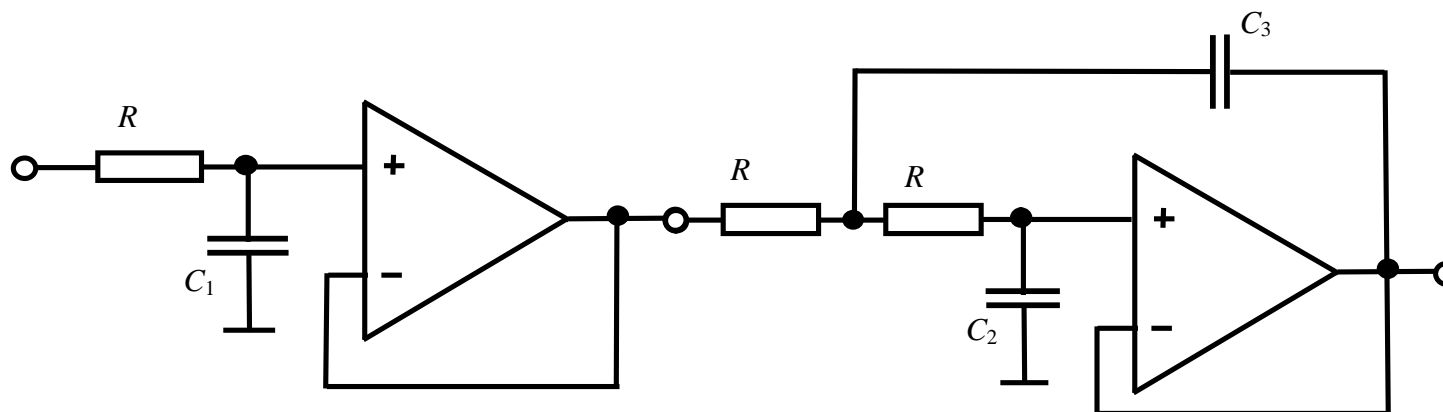
Příklad na realizaci pomocí členu RLC je na obr. 18.



Obr. 18 Čebyševova dolní propust se zvlněním 0,3 dB – ideálně s přenosem 1; $f_0 = 10$ kHz; K – oddělovací zesilovač; $R = R_d = 2$ k Ω ; $C = 4,53$ nF; $L = 43,65$ mH; $C_d = 10,91$ nF

Na obr. 19. jsou shrnuty výsledky pro struktury s jednotkovým přenosem. Přenos struktury je sice roven jedné, mnohem obtížnější je ovšem nastavení činitele jakosti - musíme stále udržovat konstantní součin $C_2 C_3 = 1/(w_p^2 R^2)$, při praktickém nastavování tedy musíme měnit obě kapacity. Vždy se jedná o dolní propust 3. řádu s poklesem přenosu o 3 dB na frekvenci 12,291 kHz.

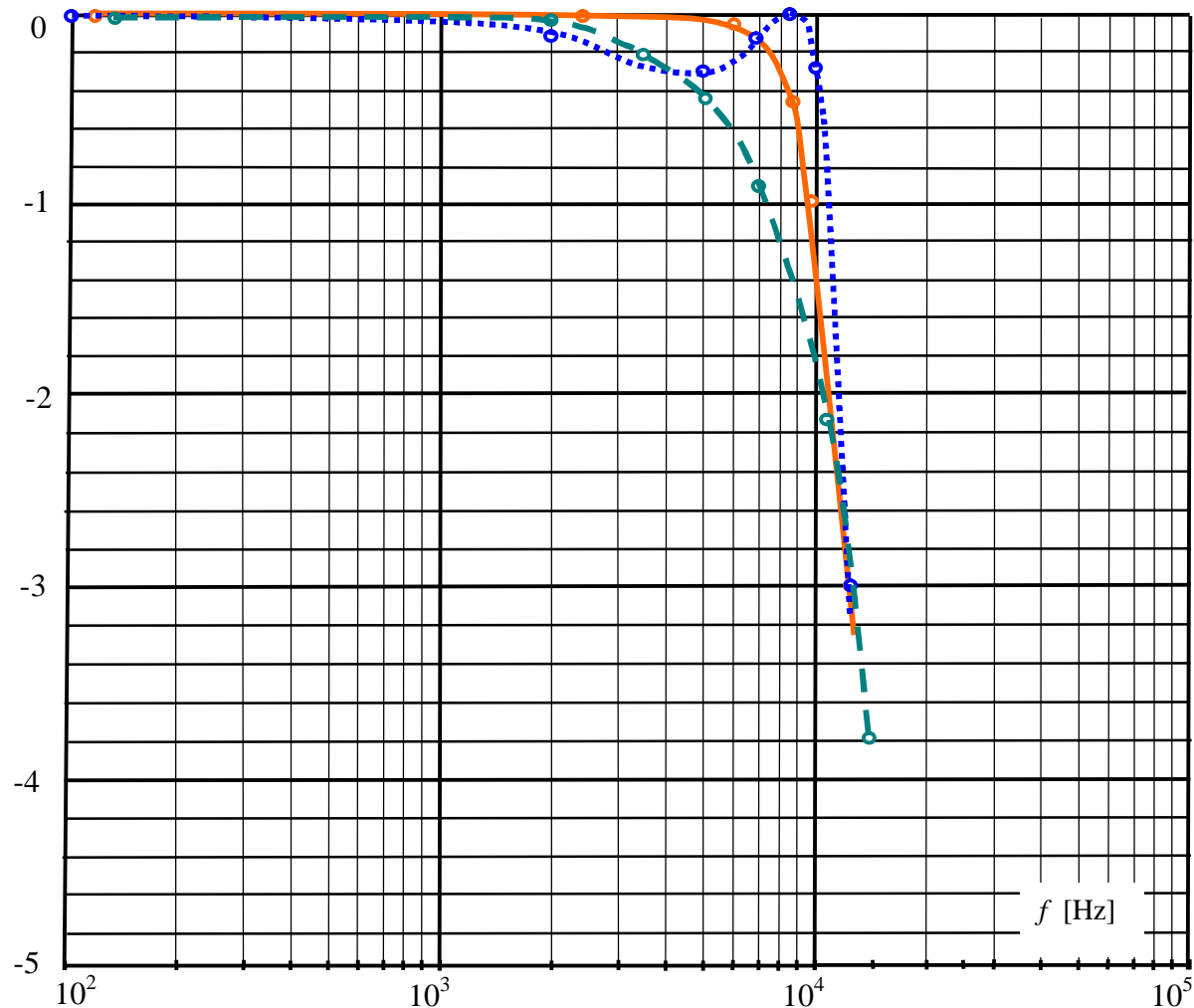
Z podstaty použitých vztahů je zřejmé, že **změna charakteristických frekvencí** (přeladění) známé struktury je velmi snadná, charakteristiky aproximací jsou přitom zachovány. Potřebujeme – li hodnotu f_3 zvětšit na 122,91 kHz (tedy desetkrát), stačí zmenšit všechny odpory R desetkrát. Nebo hodnoty všech kapacit zmenšíme desetkrát. Nebo odpory zmenšíme dvakrát a kondenzátory pětkrát – podle možností praktické realizace. Máme – li strukturu s charakteristickou frekvencí f_3 (f_0) a požadujeme novou frekvenci $f'_3 = k \cdot f_3$; ($f'_0 = k \cdot f_0$), dosáhneme toho volbou $R \rightarrow R'/k$ (kondenzátory neměníme) nebo $C_i \rightarrow C'_i/k$ (odpory neměníme) nebo $RC_i \rightarrow R'C'_i/k$ (měníme odpory i kondenzátory). Pro k menší než jedna (snižování frekvence) to samozřejmě vede ke zvětšování hodnot součástek (proti výchozímu stavu).



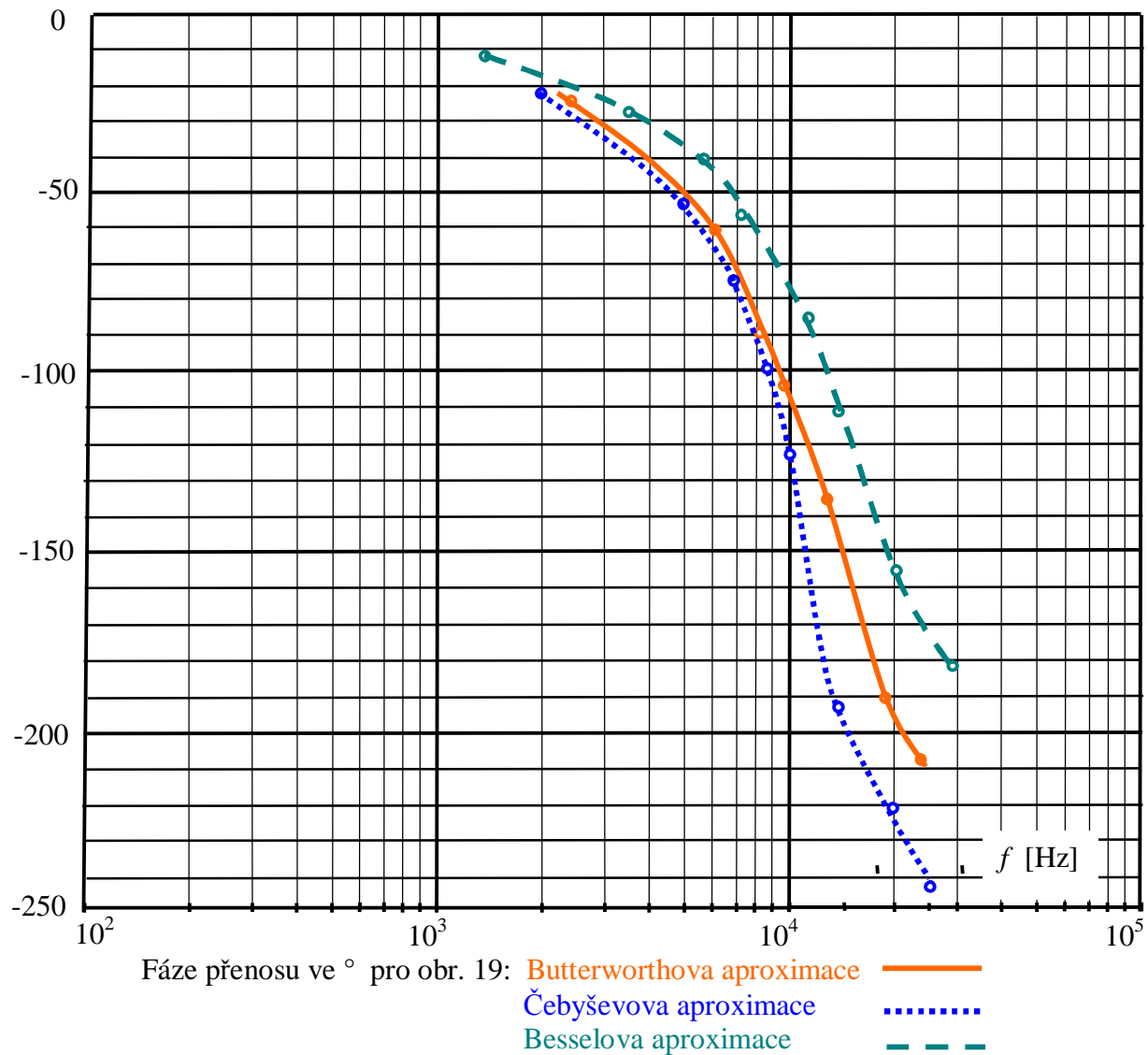
Obr. 19 Dolní propust 3. řádu; $f_3 = 12,291$ kHz – pokles přenosu o 3 dB; $R = 1500 \Omega$

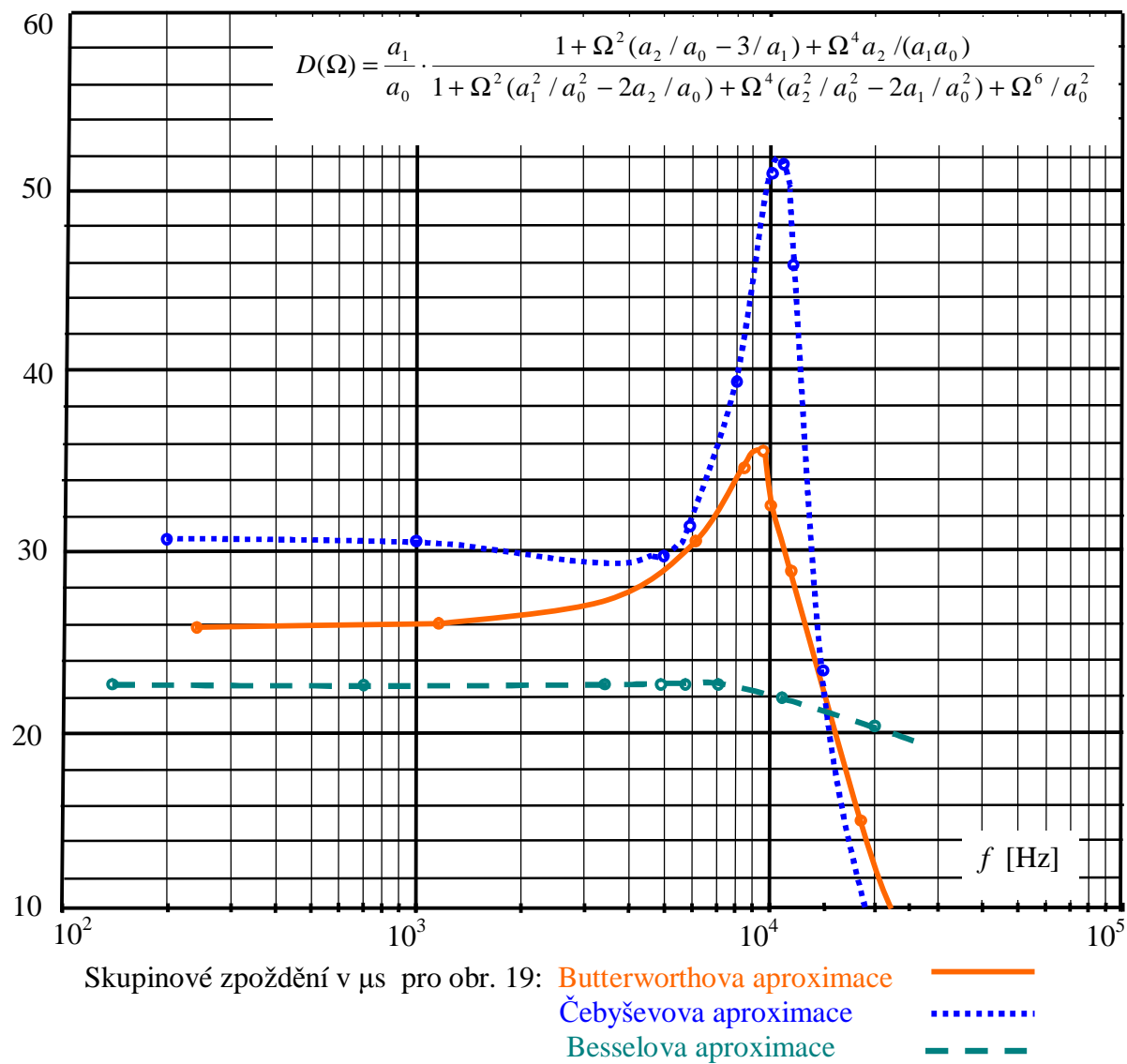
- a) $C_1 = 14,55$ nF; $C_2 = 3,02$ nF; $C_3 = 29,1$ nF - Čebyševova dolní propust se zvlněním 0,3 dB; $f_0 = 10$ kHz
- b) $C_1 = 8,633$ nF; $C_2 = 4,3165$ nF; $C_3 = 17,266$ nF - Butterworthova dolní propust; $f_0 = 12,291$ kHz
- c) $C_1 = 6,51$ nF; $C_2 = 4,30$ nF; $C_3 = 8,22$ nF - Besselova dolní propust; $f_0 = 7,023$ kHz

Moduly přenosu a průběhy fáze pro dané aproximace jsou na následujících obrázcích.



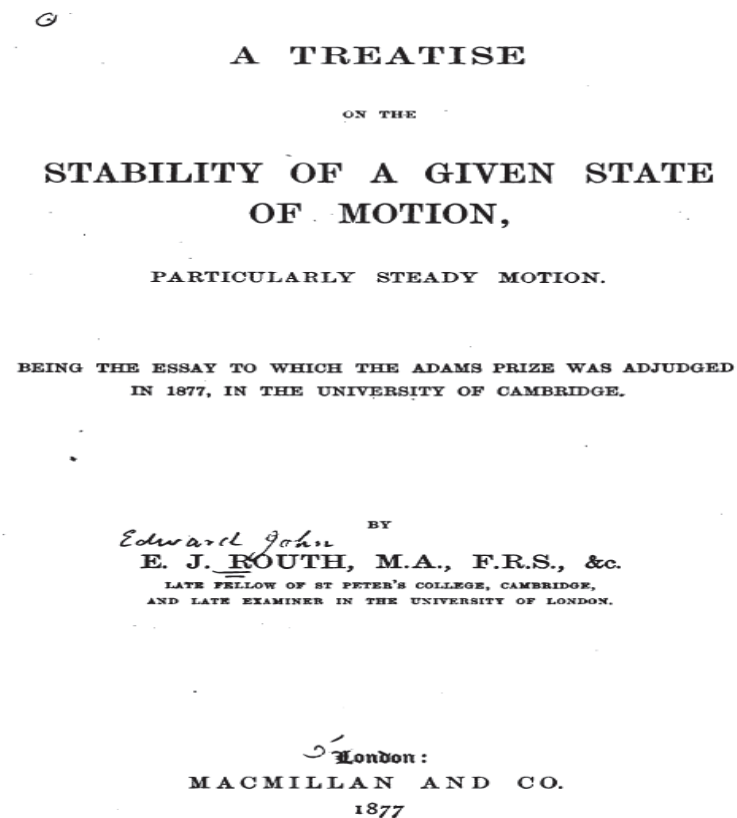
Moduly přenosu v dB pro obr. 19: Butterworthova aproximace
 Čebyševova aproximace
 Besselova aproximace





VI. HISTORIE

Z kontextu je zřejmé, že ve jmenovateli přenosové funkce musí být vždy Hurwitzův polynom. Pouze v tom případě je obvod stabilní – tedy i realizovatelný. Tato problematika byla studována již v 19. století, stejně jako problematika aproximací.



1. The object of this Chapter has been explained at the end of Chapter I. Briefly, the criterion that the motion of a system of bodies should be stable is that the roots of a certain equation should have all their real parts negative. We propose to investigate these conditions.

Let the equation to be considered be

$$f(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_{n-1} x + p_n = 0.$$

Let the real roots be $\alpha_1, \alpha_2 \dots$ and the imaginary roots be

$$\alpha_1 \pm \beta_1 \sqrt{-1}, \quad \alpha_2 \pm \beta_2 \sqrt{-1}, \quad \&c.$$

Then

$$f(x) = p_0 (x - \alpha_1) (x - \alpha_2) \dots (x^2 - 2\alpha_1 x + \alpha_1^2 + \beta_1^2), \quad \&c.$$

If then $\alpha_1, \alpha_2, \&c. \alpha_1, \alpha_2, \&c.$ are all negative, every term in each factor, and therefore in the product, must be positive.

It is therefore necessary that every term in the equation $f(x) = 0$ should have the same sign. It will be convenient to suppose this sign to be positive.

Ueber die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Theilen besitzt.

Von

A. HURWITZ in Zürich.

1.

Auf Veranlassung meines verehrten Collegen, Herrn A. Stodola, beschäftigte ich mich vor einiger Zeit mit der Frage, wann eine Gleichung n^{ten} Grades mit reellen Coefficienten

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

nur solche Wurzeln besitzt, deren reelle Bestandtheile negativ sind. Wenn auch die Erledigung dieser Frage nach den Methoden von Sturm, Liouville, Cauchy und Hermite keine principielle Schwierigkeit bietet, so erlaube ich mir doch das Resultat, zu welchem ich gelangt bin, hier mitzuthemen, weil dasselbe wegen seiner einfachen, für die Anwendungen brauchbaren Gestalt vielleicht einiges Interesse verdient*).

Die Herleitung des Resultates giebt mir zugleich Gelegenheit, die Methode von Hermite-Jacobi in einer Form darzustellen, in welcher sie eine Verallgemeinerung nach verschiedenen Richtungen zulässt.

Man darf sich, was hier geschehen soll, offenbar auf den Fall beschränken, wo der Coefficient a_0 positiv ist. Denn andernfalls kann man die linke Seite der Gleichung mit dem Factor -1 multipliciren. Man bilde nun die Determinante

*) Herr Stodola benutzt mein Resultat in seiner Abhandlung über „die Regulirung von Turbinen“ (Schweiz. Bauzeitung, Bd. 23, Nr. 17, 18), deren Ergebnisse bei der Turbinenanlage des Badeortes Davos mit glänzendem Erfolge Anwendung gefunden haben. — Die obige Frage wird auch, worauf mich Herr Stodola aufmerksam machte, in Thomson und Tait's Natural Philosophy (1886. Theil I, pag. 390) aufgeworfen und ihre Erledigung als wünschenswerth bezeichnet.

274

A. HURWITZ.

$$(1) \quad \Delta_\lambda = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & a_{2\lambda-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & a_{2\lambda-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & a_{2\lambda-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_1 \end{vmatrix}$$

nach der Maassgabe, dass die Indices in der ersten Horizontalreihe immer um zwei Einheiten wachsen, in jeder Verticalreihe immer um eine Einheit abnehmen. Dabei ist allgemein $a_x = 0$ zu setzen, wenn der Index x negativ oder grösser als n ist.

Dies vorausgeschickt, gilt der Satz:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Gleichung

$$(2) \quad a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

in welcher der Coefficient a_0 positiv vorausgesetzt wird, nur Wurzeln mit negativen reellen Bestandtheilen besitzt, ist die, dass die Werthe der Determinanten

$$(3) \quad \Delta_1 = a_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_n$$

sämmtlich positiv sind.

Zu diesem Satze ist noch folgendes zu bemerken. Die Determinante Δ_n ist, wie man leicht erkennt, indem man sie nach den Elementen der letzten Verticalreihe entwickelt, gleich $a_n \cdot \Delta_{n-1}$.

Daher ist die Forderung, dass Δ_{n-1} und Δ_n positiv sein sollen, gleichbedeutend mit der anderen, dass Δ_{n-1} und a_n positiv sein sollen. Der obige Satz bleibt also richtig, wenn a_n an Stelle von Δ_n gesetzt wird. Eine andere Bemerkung ist diese:

Betrachtet man die Reihe der Determinanten

$$(4) \quad \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \dots,$$

so verschwinden die Glieder dieser Reihe vom $(n+1)$ sten ab identisch, d. h. für unbestimmt gedachte Werthe von a_0, a_1, \dots, a_n . Denn die Elemente der letzten Verticalreihe von Δ_λ sind für $\lambda > n$ sämmtlich Null. Die Bedingung des Satzes kann also auch dahin ausgesprochen werden, dass die nicht identisch verschwindenden Glieder der Reihe (4) sämmtlich positiv sein müssen. Die Glieder dieser Reihe sind ausführlich geschrieben diese:

$$a_1, \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix}, \dots,$$

und man bildet hiernach ohne Weiteres die Bedingungen für jeden speciellen Werth von n .

erwähnte Beschaffenheit besitzen**).

Zürich, den 12. December 1894.

*) Crelle's Journal Bd. 52, pag. 39, Bulletin de la société mathématique de France, Bd. 7, pag. 128.

**) Vgl. Biehler, Crelle's Journal Bd. 87, pag. 350, Laguerre, ib. Bd. 89, pag. 339.

Chebyshev, P. L., [Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes](#), *Mém. Acad. Sci. Pétersb.* 7 (1854), 539-568. Also to be found in *Oeuvres de P. L. Tchebychef, Volume 1*, 111-143, Chelsea, New York, 1961, from where this paper was scanned.

Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes.

§ 1. Quand il s'agit d'assurer la direction du mouvement rectiligne d'une pièce soumise à un effort oblique, il ne suffit pas de rendre les inégalités des guides peu sensibles à la mesure; les déviations, qui ne sont pas appréciables à l'oeil nu, se manifestent clairement par les résistances passives qui en résultent. En guidant la tige du piston de la machine à vapeur à l'aide de coulisses ou glissoires, on prend un soin particulier de les exé-

.....

De plus, chose très importante pour nous, on peut remplacer la dernière équation, avec le même degré de précision, par celle-ci:

$$(z^3 - 1) \frac{dy}{dz} = 0.$$

En effet, comme cette équation n'a pas de racines multiples (ce qu'on voit d'après la forme de y) on n'influera sur leurs valeurs numériques que

Zolotarev, E. I., [Prilozhenie ellipticheskikh funkciy k voprosam o funkciyakh, najmenee i naibolee otklonyaykschikhsya ot nulya](#), *Oeuvres de E. I. Zolotarev*, Volume 2, Izdat. Akad. Nauk SSSR, Leningrad, 1932, pp. 1-59 (in Russian). The English title is "Applications of elliptic functions to problems of functions deviating least and most from zero". The original appeared in *Zapiski St-Petersburg Akad. Nauk* **30** (1877).

**ПРИЛОЖЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ К ВОПРОСАМ
О ФУНКЦИЯХ, НАИМЕНЕЕ И НАИБОЛЕЕ ОТКЛОНЯЮЩИХСЯ
ОТ НУЛЯ**

Записки С.-Петербургской Академии Наук, XXX, № 5, 1877

После работ Абеля, Якоби и других ученых теорию эллиптических функций можно считать уже законченною в главных чертах.

Дальнейшим исследователям остается только пользоваться этою теориею для решения различных вопросов анализа и математической физики.

Несмотря на уже имеющиеся, в высшей степени замечательные, приложения эллиптических функций к теории чисел, геометрии и механике, я полагаю, что со стороны приложений теория эллиптических функций оставляет желать еще многого.

Поэтому я счел не лишним рассмотреть некоторые вопросы о наименьших величинах, которые решаются при помощи основных формул теории эллиптических функций. Эти вопросы принадлежат к тому классу вопросов о наименьших величинах, приемы для решения которых были даны в первый раз П. Л. Чебышевым.*

1. Согласимся называть *наибольшим отклонением* некоторой функции от нуля в пределах от $x = a$ до $x = b$ наибольшую численную величину функции для всех значений независимой переменной от $x = a$ до $x = b$, со включением пределов.

Точно так же *наименьшим отклонением* какой-нибудь функции от нуля в пределах от $x = a$ до $x = b$ — наименьшую численную величину значений функции для всех значений независимой переменной от $x = a$ до $x = b$, со включением пределов.

* Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes, 1853, и его же: Sur les questions de Minima, etc.