

# Využití aproximačních funkcí pro kaskádní syntézu filtrů

## I. MOTIVACE

Lineární obvody s reaktančními prvky jsou popsány integrodiferenciálními rovnicemi. Použití *Laplaceovy transformace* vede (při nulových počátečních podmínkách) k zavedení obrazových impedancí:

$$Z_R(p) = R$$

$$Z_L(p) = pL$$

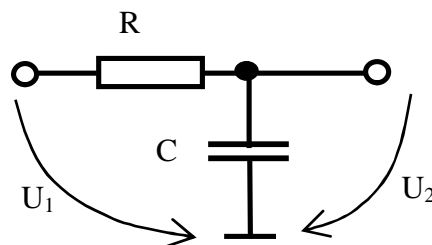
$$Z_C(p) = 1/(pC)$$

kde  $p = s + j\omega$  je komplexní kmitočet.

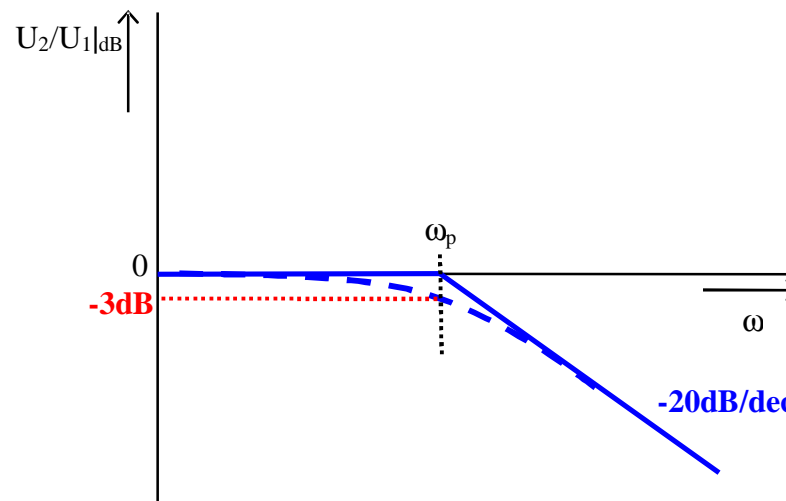
Pro  $p = j\omega$  přechází Laplaceova transformace ve Fourierovu transformaci – řešíme ustálený harmonický stav běžnými metodami.

Přenos struktury na obr. 1 je tak určen vztahem

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{1}{pC}}{R + \frac{1}{pC}} = \frac{1/(RC)}{p + 1/(RC)} = \frac{w_p}{p + w_p} = \frac{1}{p/w_p + 1}; \quad w_p = 1/(RC)$$



Obr. 1 Pasivní dolní propust 1. řádu



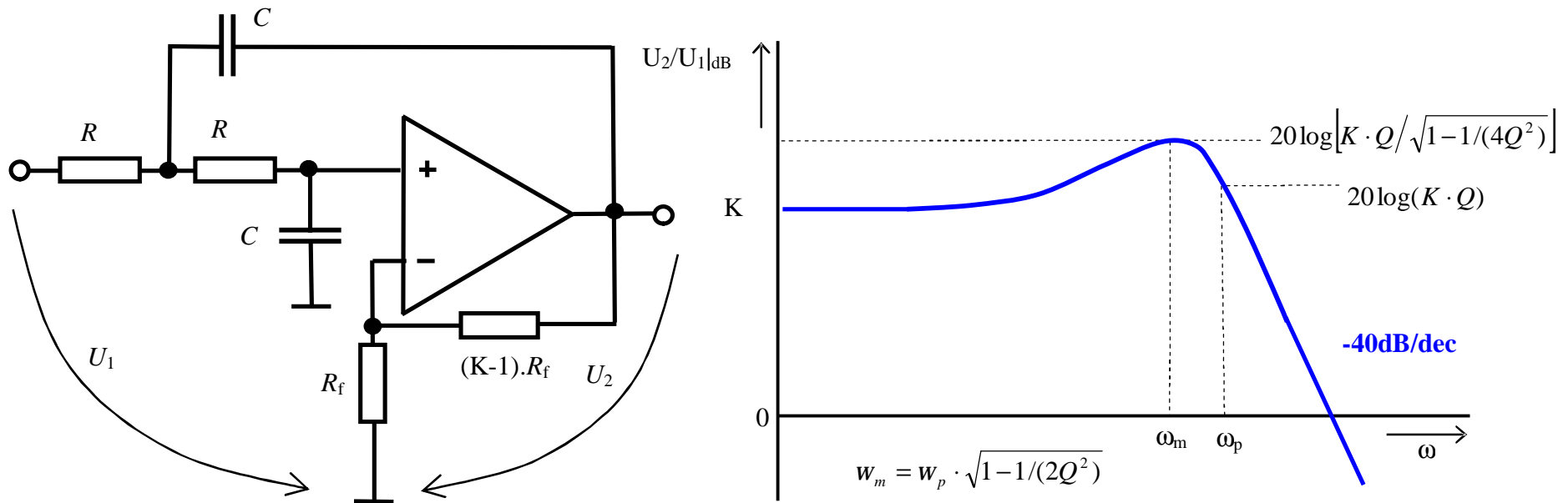
Zavedme *normovaný komplexní kmitočť*  $s = p/w_p = \Sigma/w_p + jw/w_p = \Sigma + j\Omega$ ;  $\Sigma = s/w_p$ ;  $\Omega = w/w_p$ .

Potom platí pro strukturu na obr.1:  $\left. \frac{U_2}{U_1} \right|_s = \frac{1}{s+1}$ ;  $\left. \frac{U_2}{U_1} \right|_{j\Omega} = \frac{1}{j\Omega+1}$ ;  $\left. \frac{U_2}{U_1} \right|_{\Omega} = \frac{1}{\sqrt{\Omega^2+1}}$

Pro  $\Omega \gg 1$  je  $\left. \frac{U_2}{U_1} \right|_{\Omega} \cong \frac{1}{\Omega}$ ;  $\left. \frac{U_2}{U_1} \right|_{dB} \cong -20 \cdot \log \Omega$ , tomu odpovídá asymptota se strmostí -20 dB/dec.

Přenos struktury na obr. 2 [Punčochář] je definován vztahem

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{K \cdot w_p^2}{p^2 + p \cdot w_p / Q + w_p^2} = \frac{K}{(p/w_p)^2 + (p/w_p)/Q + 1} = \frac{K}{s^2 + s/Q + 1} = \frac{K}{s^2 + a_1 s + 1}; \quad w_p = \frac{1}{RC}; \quad 1/Q = 3 - K$$



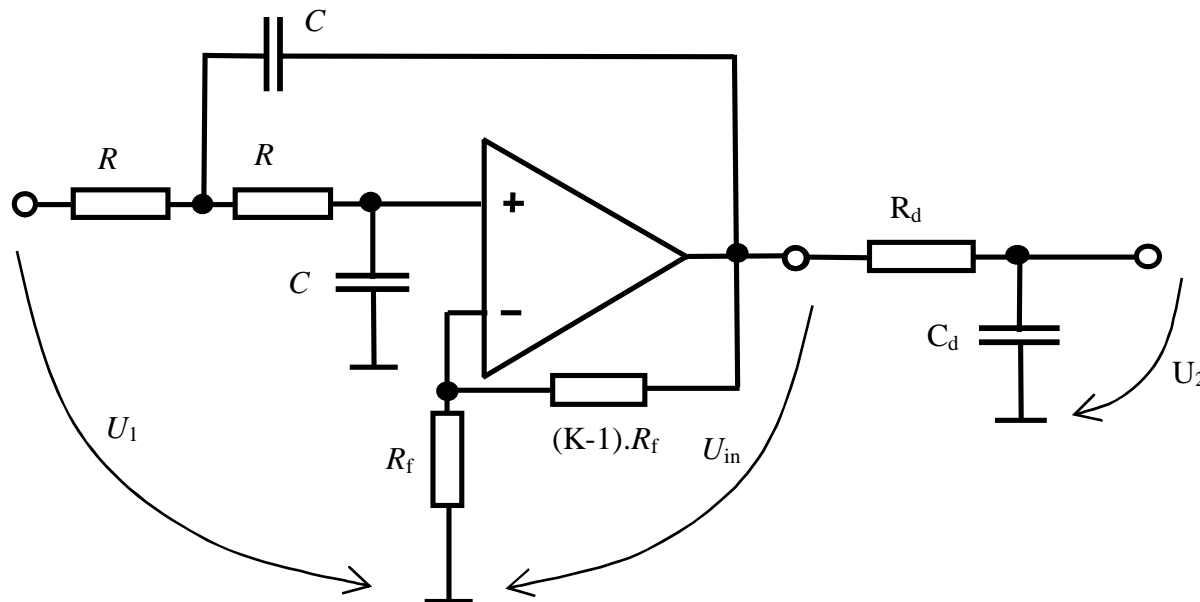
**Obr. 2** Dolní propust Sallen-Key, 2. řádu

Snadno lze určit, že pro  $3 - K < 0$  budou reálné části pólů přenosové funkce kladné, **system** bude **nestabilní** (díky nadkritické kladné zpětné vazbě přes kapacitu).

Pro  $\Omega \gg 1$  je  $\left| \frac{U_2}{U_1} \right|_{\Omega} \cong \frac{K}{\Omega^2}$ ;  $\left| \frac{U_2}{U_1} \right|_{dB} \cong 20 \cdot \log K - 40 \cdot \log \Omega$ , tomu odpovídá asymptota se strmostí -40 dB/dec. Extrém funkce je definován na obr.2 ( $s_m = w_m / w_p$ ).

Přenos struktury na obr. 3 je definován vztahem (kaskádní řazení)

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{U_{in}}{U_1} \cdot \frac{U_2}{U_{in}} = \frac{K \cdot w_{p1}^2}{p^2 + p \cdot w_{p1} / Q_1 + w_{p1}^2} \cdot \frac{w_{p2}}{p + w_{p2}}$$

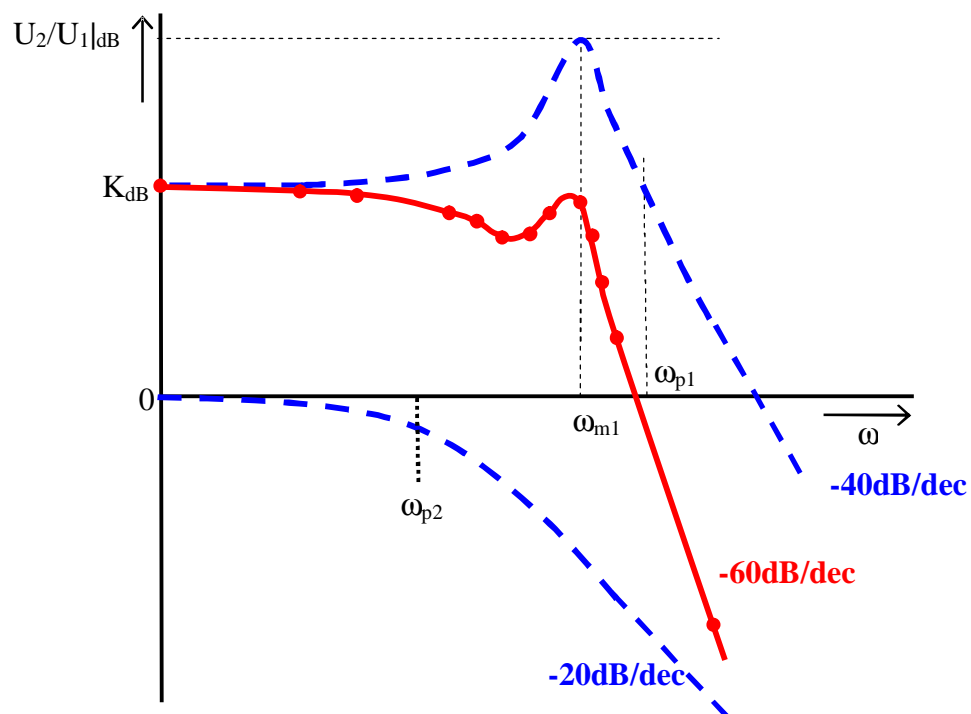


**Obr. 3** Kaskádní řazení dolní propusti Sallen-Key 2. řádu a dolní propusti 1. řádu

Pro modul přenosu vyjádřeny v dB tedy platí

$$\left| \frac{U_2}{U_1} \right|_{dB} = 20 \cdot \log K + 20 \cdot \log \left| \frac{w_{p1}^2}{p^2 + p \cdot w_{p1} / Q_1 + w_{p1}^2} \right| + 20 \cdot \log \left| \frac{w_{p2}}{p + w_{p2}} \right|$$

Výsledek pro náhodně vybrané parametry filtrů je kvalitativně znázorněn plnou čarou na obr. 4.



**Obr. 4** Modul přenosu pro strukturu na obr. 3

*Je zřejmé, že volbou parametrů dílčích filtrů na obr. 3 (zde  $w_{p1}$  a  $Q_1$ ;  $w_{p2}$ ) můžeme dosahovat různé průběhy výsledné modulové charakteristiky struktury.*

Budeme-li nyní normovat vůči nějakému kmitočtu  $\omega_0$  (nejčastěji  $w_0 = \sqrt{w_{p1} \cdot w_{p2}}$ ), obdržíme normovaný přenos pro strukturu na obr. 3 v podobě

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{K \cdot a_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

Pro  $\Omega \gg 1$  je  $\left| \frac{U_2}{U_1} \right|_{\Omega} \cong \frac{K}{\Omega^3}$ ;  $\left| \frac{U_2}{U_1} \right|_{dB} \cong 20 \log K - 60 \cdot \log \Omega$ , tomu odpovídá asymptota se strmostí -60 dB/dec – viz obr. 4.

Všechny dolní propusti (stabilní) lze popsat normovanou přenosovou funkcí

$$H(s) = \frac{a_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{1}{P(s)}$$

Konstanta  $K$  v čitateli vztahu neovlivňuje „tvar“ modulu přenosu. Většinou je pouze výsledkem zvolené obvodové realizace získané (požadované) aproximační funkce.

Polynom

$$P(s) = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

je (musí být) **Hurwitzův polynom**.

## II. HURWITZŮV POLYNOM

Vlastnosti Hurwitzova polynomu jsou podrobně popsány např. v [Hurwitz, Balabanian, Lam, Kvasil, Čajka, ...]. Musí platit, že  $a_i > 0$  pro všechna  $i$  (všechna  $a_i$  jsou nenulová). To je podmínka nutná, nikoli postačující. Všechny kořeny polynomu  $P(s)$  – póly přenosové funkce – musí ležet v levé (otevřené) polorovině  $s = \Sigma + j\Omega$ .

Existují kritéria, která umožňují pro zadaný polynom  $P(s)$  stanovit, zda se jedná o Hurwitzův polynom – například Routh – Hurwitzovo kritérium stability, např. [Hurwitz, Routh, Braun, ....].

Pro Hurwitzův polynom platí

$$P(j\Omega) = \operatorname{Re} P(j\Omega) + j \operatorname{Im} P(j\Omega) \longrightarrow \text{fázová charakteristika } \Phi_p(\Omega) = \operatorname{arctg} \left( \frac{\operatorname{Im} P(j\Omega)}{\operatorname{Re} P(j\Omega)} \right)$$

Pro  $s = j\Omega$  je  $\operatorname{Re} P(j\Omega)$  sudou funkcí  $\Omega$  [ $(j\Omega)^2 = -\Omega^2; (j\Omega)^4 = \Omega^4; \dots$ ] a  $\operatorname{Im} P(j\Omega)$  je lichou funkcí  $\Omega$  [ $j\Omega; (j\Omega)^3 = -j\Omega^3; (j\Omega)^5 = j\Omega^5; \dots$ ].

Proto

$$P(-j\Omega) = \operatorname{Re} P(j\Omega) - j \operatorname{Im} P(j\Omega) = P^*(j\Omega)$$

$$P(j\Omega) \cdot P^*(j\Omega) = (\operatorname{Re} P)^2 + (\operatorname{Im} P)^2 = |P(j\Omega)|^2$$

Analytické prodloužení (pokračování) – kvadrát modulu lze psát v podobě  $|P(s)|^2 = P(s) \cdot P(-s)$ .

Zajímavý způsob popisu přenosu je v [Balabanian, str. 90, 173, 410, ...]. Přenosová funkce je ve tvaru

$$H(j\Omega) = \exp(a(\Omega^2) + j\Phi(\Omega))$$

$a(\Omega^2)$  je logaritmus modulu (normované) přenosové funkce

$\Phi(\Omega)$  je argument přenosové (normované) funkce

$$[H(j\Omega)]^2 = H(j\Omega) \cdot H(j\Omega) = H(j\Omega) \cdot H(-j\Omega) \cdot \frac{H(j\Omega)}{H(-j\Omega)} = G(\Omega^2) \cdot A(j\Omega)$$

$$G(\Omega^2) = H(j\Omega) \cdot H(-j\Omega) = |H(j\Omega)|^2 - \text{funkce } G$$

$$A(j\Omega) = \frac{H(j\Omega)}{H(-j\Omega)} = \frac{|H(j\Omega)| \cdot \exp(j\Phi(\Omega))}{|H(-j\Omega)| \cdot \exp(-j\Phi(\Omega))} = \exp(j2\Phi(\Omega)) - \text{funkce } A$$

Analytickým prodloužením ( $s = j\Omega$ ;  $\Omega^2 = -(j\Omega)^2 = -s^2$ ) získáme vztah

$$A(j\Omega) \rightarrow A(s) = \frac{H(s)}{H(-s)} = \exp(2\Phi(s))$$

$$\Phi(s) = \frac{1}{2} \ln \frac{H(s)}{H(-s)} = \frac{1}{2} \ln \frac{P(-s)}{P(s)} - \text{fázová charakteristika}$$

$$G(\Omega^2) \rightarrow G(-s^2) = H(s) \cdot H(-s) = |H(s)|^2 - \text{kvadrát modulu přenosu}$$

Nyní můžeme určit **skupinové zpoždění** jako funkci  $P(s)$ ,  $P(-s)$ :

$$D(s) = -\frac{d\Phi(s)}{ds} = -\frac{d}{ds} \left( \frac{1}{2} \ln \frac{P(-s)}{P(s)} \right) = \dots = \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{P'(s)}{P(s)} - \frac{P'(-s)}{P(-s)} \right]$$

Známe-li  $D(\Omega) = -d\Phi(\Omega) / d\Omega$ , potom pro  $\Omega = w / w_0$  je

$$D(w) = -d\Phi(\Omega) / dw = (-d\Phi(\Omega) / d\Omega) \cdot d\Omega / dw = D(\Omega) / w_0$$



### III. APROXIMACE DOLNÍCH PROPUSTÍ (DP)

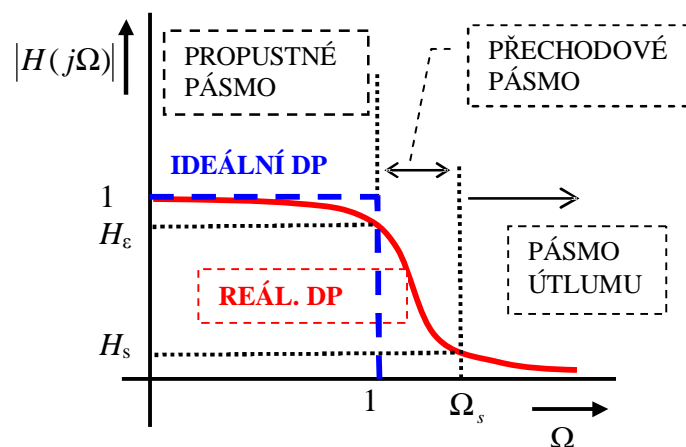
Nejčastěji hledáme přenosové funkce obvodu, které:

- aproximují s požadovanou přesností modul (modulovou charakteristiku) obvodu (filtru).
- aproximují zpoždění

Budeme se zabývat pouze DP. Pomocí frekvenční transformace lze získat přenosy pro horní propust (HP), pásmovou propust (PP) a pásmovou zádrž (PZ).

#### III.1 Popis vlastností (požadavků na) DP

Z předchozích úvah je zřejmé, že ideální DP by vyžadovala  $n \rightarrow \infty$  - filtr by byl nekonečně složitý, tedy technicky nerealizovatelný. Modulová charakteristika (modul přenosu) reálné dolní propusti je na obr. 4.



Obr. 4 Modul přenosu normované dolní propusti

Modul přenosu modelujeme (aproximujeme) často pomocí *charakteristické funkce*  $j(\Omega)$

$$|H(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + e^2 j^2(\Omega)}}$$

$j(\Omega)$  tak vlastně vždy aproximuje „nulu“ pro  $\Omega$  v intervalu 0 až 1, pro  $\Omega > 1$  musí hodnota charakteristické funkce rychle růst.

Pro normovaný filtr *primárně požadujeme* přenos  $H_\varepsilon$  (na  $\Omega = 1$ ) a přenos  $H_s$  (na  $\Omega_s$ ).

Modul přenosu na  $\Omega = 1$  je právě ( $j(1) = 1$ )

$$H_\varepsilon = 1/\sqrt{1 + e^2}$$

$\varepsilon$  tak definuje požadovanou přesnost v pásmu propustnosti – je to *sekundární parametr filtru* (pro normovaný tvar).

Platí:  $20 \log H_\varepsilon = -10 \log(1 + e^2)$ ;  $\Rightarrow -20 \log(1/H_\varepsilon) = -10 \log(1 + e^2)$

Útlum (povolený, požadovaný v propustné pásmu; v dB) na  $\Omega = 1$  označíme  $a_p = 20 \log(1/H_\varepsilon)$

Potom  $-a_p = -10 \log(1 + e^2)$ ;  $\Rightarrow a_p/10 = \log(1 + e^2)$   $\Rightarrow 10^{a_p/10} = 1 + e^2$   $\Rightarrow$

$$e = \sqrt{10^{a_p/10} - 1}$$

Modul přenosu na  $\Omega = \Omega_s$  je právě  $H_s(j(\Omega_s) = ?)$ , proto

$$H_s = 1/\sqrt{1 + e^{2j^2(\Omega_s)}}; \Rightarrow 20 \log H_s = -10 \log(1 + e^{2j^2(\Omega_s)}); \Rightarrow -20 \log(1/H_s) = -10 \log(1 + e^{2j^2(\Omega_s)})$$

Požadovaný útlum (v dB) na  $\Omega_s$  označíme  $a_s = 20 \log(1/H_s)$

$$\text{Potom } -a_s = -10 \log(1 + e^{2j^2(\Omega_s)}); \Rightarrow a_s/10 = \log(1 + e^{2j^2(\Omega_s)}) \Rightarrow 10^{a_s/10} = 1 + e^{2j^2(\Omega_s)} \Rightarrow$$

$$j^2(\Omega_s) = \frac{10^{a_s/10} - 1}{10^{a_p/10} - 1}$$

**Primární požadavky na filtr** (normovaný) tedy jsou:  $a_p$ ;  $a_s$  a  $\Omega_s$ .

**Sekundární parametry filtru** jsou (zcela obecně):  
 $e$  - definuje chybu (zvlnění) v pásmu propustnosti  
 $j(\Omega_s)$  - definuje odstup modulu přenosu v propustném pásmu a pásmu útlumu  
 $k = 1/\Omega_s$  - definuje požadovanou „strmost“ v pásmu přechodovém

### III.2 Maximálně plochá modulová charakteristika

Vyjděme nejdříve z elementárního popisu přenosu pro  $a_0 = 1$ :  $H(s) = \frac{1}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + 1}$

$$\mathbf{n = 2:} \quad H(s) = \frac{1}{s^2 + a_1s + 1} \Rightarrow |s = j\Omega| \Rightarrow H(j\Omega) = \frac{1}{1 - \Omega^2 + ja_1\Omega} \Rightarrow |H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{(1 - \Omega^2)^2 + a_1^2\Omega^2} = \frac{1}{1 + \Omega^2(a_1^2 - 2) + \Omega^4}$$

Jediné, co lze zajistit, je splnění podmínky  $a_1^2 - 2 = 0$ . Odsud  $a_1 = \pm\sqrt{2}$ . Volit ovšem musíme kladné znaménko, protože pouze tehdy se bude jednat o Hurwitzův polynom (mnohočlen). Pro tuto podmínku bude platit

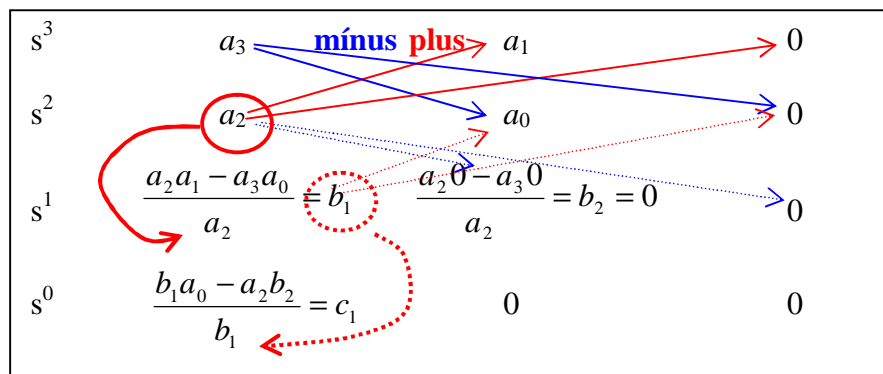
$$|H(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega^4}}; \quad H(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2} \cdot s + 1}$$

$$\mathbf{n = 3:} \quad H(s) = \frac{1}{s^3 + a_2s^2 + a_1s + 1} \Rightarrow \dots \Rightarrow |H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \Omega^2(a_1^2 - 2a_2) + \Omega^4(a_2^2 - 2a_1) + \Omega^6}$$

Zajistit lze splnění podmínek:  $a_1^2 - 2a_2 = 0$  a  $a_2^2 - 2a_1 = 0$ . Tyto podmínky jsou splněny pro  $a_1 = a_2 = 2$ . Platí tedy

$$H(s) = \frac{1}{s^3 + 2 \cdot s^2 + 2 \cdot s + 1}; \quad |H(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega^6}}$$

Zkontrolujeme, zda je splněno Routh-Hurwitzovo kritérium (stability):



Aby nedošlo ke znaménkové změně ve sloupci „ $a_3; a_2; b_1; c_1$ “, musí platit pro  $n = 3$  (pro  $a_i > 0$ ) jediná podmínka:

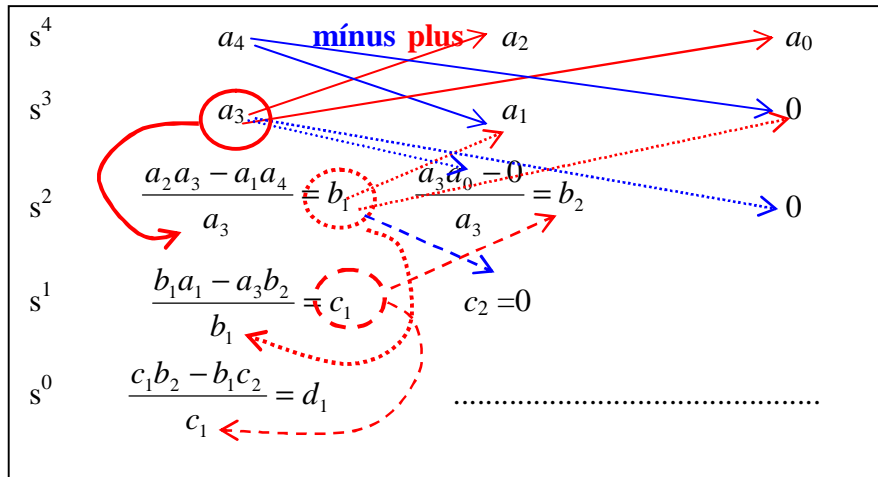
$$a_1 a_2 - a_3 a_0 > 0$$

Při uvedených podmínkách tedy platí  $a_1 a_2 - a_3 a_0 = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1 > 0$ , podmínka je splněna, jedná se o Hurwitzův polynom.

Pro  $n=4$  je  $H(s) = \frac{1}{s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + 1} \Rightarrow \dots \Rightarrow |H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \Omega^2 (a_1^2 - 2a_2) + \Omega^4 (2 + a_2^2 - 2a_1 a_3) + \Omega^6 (a_3^2 - 2a_2) + \Omega^8}$

Přenos  $|H(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega^8}}$  obdržíme pro  $a_1 = a_3 = 2,61313; a_2 = 3,41421$ , ale také pro  $a_1 = a_3 = 1,08239; a_2 = 0,58579$ .

Pomocí Routh-Hurwitzova kritéria snadno určíme, že pro  $a_1 = a_3$  nedochází ke změně znaménka ve sloupci  $a_4; a_3; b_1; c_1; d_1$  pro  $(a_2 - a_4) > 0$ .



Tuto podmínku splňuje pouze řešení  $a_1 = a_3 = 2,61313$ ;  $a_2 = 3,41421$ , takže „stabilní přenos“ pro  $n = 4$  je definován funkcí

$$H(s) = \frac{1}{s^4 + 2,61313 \cdot s^3 + 3,41421 \cdot s^2 + 2,61313 \cdot s + 1}$$

Je zřejmé, že získáváme moduly přenosu typu

$$|H(j\Omega)|_n = \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega^{2n}}}$$

kde  $n$  je řád filtru (funkce). Jedná se o **Butterworthovy polynomy** [Butterworth].

Pro vyšší řády již bude obtížné kontrolovat, které koeficienty  $a_i$  (z možných řešení) splňují podmínky pro vytvoření Hurwitzova polynomu. Proto se volí vhodnější postup odvození maximálně ploché charakteristiky pomocí charakteristické funkce  $j(\Omega)$ .

### III.2.1 Maximálně plochá modulová charakteristika určená pomocí charakteristické funkce

Vydeme ze vztahu

$$|H(j\Omega)|^2 = H(j\Omega) \cdot H(-j\Omega) = \frac{1}{1 + e^2 j^2(\Omega)}$$

Analytickým pokračováním v komplexní rovině je vztah ( $s = j\Omega$ ;  $\Omega = s/j$ )

$$|H(s)|^2 = H(s) \cdot H(-s) = \frac{1}{1 + e^2 j^2(s/j)}$$

Při **Butterworthově aproximaci** [Butterworth, Huelsman, Lam, ...] je  $j^2(\Omega) = \Omega^{2n}$  a **nejčastěji  $\epsilon = 1$** . Potom

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \Omega^{2n}}$$

$$- |H(j0)|^2 = 1$$

$$- |H(j1)|^2 = 1/(1+1) \Rightarrow |H(j1)| = 1/\sqrt{2} \Rightarrow |H(j1)|_{dB} = -3 \text{ dB}$$

$$- \text{pro } \Omega \gg 1 \text{ je } |H(j\Omega)| = 1/\Omega^n \Rightarrow |H(j\Omega)|_{dB} = -20 \cdot n \cdot \log \Omega \text{ dB} - \text{tomu odpovídá asymptota } -20 \cdot n \text{ dB/dec}$$

- prvních  $2n - 1$  derivací  $|H(j\Omega)|$  pro  $\Omega = 0$  je rovno nule.

**Póly funkce**  $H(s) \cdot H(-s)$  zjistíme z rovnosti

$$1 + \Omega^{2n} = |\Omega = s/j| = 1 + (s/j)^{2n} = 1 + (-js)^{2n} = 0$$

Pro  $n$  sudá tedy platí

$$1 + (-j)^{2n} \cdot (s)^{2n} = 1 + (s)^{2n} = 0$$

$$(s)^{2n} = -1 = \exp[j(-p + 2kp)]$$

$$s_k = \exp\left[j \frac{2k-1}{2n} \cdot p\right] = \cos\left(\frac{2k-1}{2n} \cdot p\right) + j \sin\left(\frac{2k-1}{2n} \cdot p\right)$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

Kořeny leží v komplexní rovině na kružnici se středem v počátku komplexní roviny, platí totiž  $|s_k| = 1$ . Póly přenosu  $H(s)$  musí mít **reálné části záporné**. To bude dodrženo pro  $(2k-1) \cdot p/2n \in \langle p/2; 3 \cdot p/2 \rangle$ , kde je  $\cos \alpha < 0$ . Odsud

$$\frac{2k-1}{2n} \cdot p > \frac{p}{2} \Rightarrow k > \frac{n+1}{2}$$

$$\frac{2k-1}{2n} \cdot p < \frac{3 \cdot p}{2} \Rightarrow k < \frac{3n+1}{2}$$



Protože se musí jednat o celá čísla, platí  $k_{\min} = (n + 2)/2 = n/2 + 1$  a  $k_{\max} = 3n/2$ .

Snadno můžeme změnit indexovou proměnnou substitucí  $k = n/2 + \mu$ , kde  $\mu = 1, 2, \dots, n$ .

Potom můžeme pro kořeny s reálnou částí zápornou psát ve tvaru

$$s_m = \cos\left(\frac{2(n/2 + m) - 1}{2n} \cdot p\right) + j \sin\left(\frac{2(n/2 + m) - 1}{2n} \cdot p\right)$$

$$s_m = \cos\left((2m - 1) \cdot \frac{p}{2n} + \frac{p}{2}\right) + j \sin\left((2m - 1) \cdot \frac{p}{2n} + \frac{p}{2}\right)$$

V intervalu  $\langle p/2; 3 \cdot p/2 \rangle$  ovšem platí  $\cos(a + p/2) = -\sin a$ ;  $\sin(a + p/2) = \cos a$ , tedy kořeny Hurwitzova polynomu (póly přenosu) jsou určeny při Butterworthově aproximaci vztahem

$$s_m = -\sin\left((2m - 1) \cdot \frac{p}{2n}\right) + j \cos\left((2m - 1) \cdot \frac{p}{2n}\right); \mu = 1, 2, \dots, n$$

Zbývající kořeny  $s_k$ , jejichž reálná část je kladná, přísluší funkci  $H(-s)$ .

Po vynásobení kořenových činitelů s komplexně sdruženými kořeny obdržíme [pro sudá n](#) vztah

$$H(s) = \frac{1}{\prod_1^{n/2} \left[ s^2 + 2 \cdot s \cdot \sin \left( (2m-1) \frac{p}{2n} \right) + 1 \right]}$$

Pro n lichá platí

$$1 + (-j)^{2n} \cdot (s)^{2n} = 1 + (-1)^n (s)^{2n} = 1 - (s)^{2n} = 0$$

$$(s)^{2n} = 1 = \exp[j \cdot 2kp]$$

$$s_k = \exp \left[ j \frac{kp}{n} \right] = \cos \left( \frac{kp}{n} \right) + j \sin \left( \frac{kp}{n} \right)$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

Póly přenosu  $H(s)$  musí opět mít **reálné části záporné**. To bude dodrženo pro  $kp/n \in \langle p/2; 3 \cdot p/2 \rangle$ , kde je  $\cos \alpha < 0$ . Odsud

$$kp/n > \frac{p}{2} \Rightarrow k > \frac{n}{2}$$

$$kp/n < \frac{3 \cdot p}{2} \Rightarrow k < \frac{3n}{2}$$

Protože se musí jednat o celá čísla, platí  $k_{\min} = (n+1)/2 = n/2 + 1/2$  a  $k_{\max} = (3n-1)/2 = 3n/2 - 1/2$ .

I nyní můžeme změnit indexovou proměnnou substitucí  $k = (n-1)/2 + \mu$ , kde  $\mu = 1, 2, \dots, n$ .

Potom můžeme pro kořeny s reálnou částí zápornou psát ve tvaru

$$s_m = \cos\left(\frac{(n-1)/2 + m}{n} \cdot p\right) + j \sin\left(\frac{(n-1)/2 + m}{n} \cdot p\right)$$

$$s_m = \cos\left((2m-1) \cdot \frac{p}{2n} + \frac{p}{2}\right) + j \sin\left((2m-1) \cdot \frac{p}{2n} + \frac{p}{2}\right)$$

a stejně jako pro  $n$  sudá, platí i pro **n lichá**

$$s_m = -\sin\left((2m-1) \cdot \frac{p}{2n}\right) + j \cos\left((2m-1) \cdot \frac{p}{2n}\right); \mu = 1, 2, \dots, n$$

Pro  $n$  lichá ovšem existuje jeden reálný kořen, kdy  $(2m-1) \cdot \frac{p}{2n} = \frac{p}{2} \Rightarrow m = \frac{n+1}{2}; s_m\left(m = \frac{n+1}{2}\right) = -1$ .

Vytkneme-li kořenový činitel  $(s+1)$ , zbývají kořeny pro  $\mu = 1, 2, \dots, (n+1)/2 - 1, (n+1)/2 + 1, \dots, n$ , tedy  $(n-1)$  komplexně sdružených kořenů. Proto platí pro **n lichá**, že

$$H(s) = \frac{1}{(s+1) \cdot \prod_1^{(n-1)/2} \left[ \left( s^2 + 2 \cdot s \cdot \sin\left( (2m-1) \frac{p}{2n} \right) + 1 \right) \right]}$$

Zbývající kořeny  $s_k$ , jejichž reálná část je kladná, i nyní přísluší funkci  $H(-s)$ .

### III.2.2 Póly přenosu určené pomocí charakteristické funkce; obecně $\varepsilon \neq 1$

Vydeme opět ze základního vztahu  $|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+e^{2\Omega^{2n}}} = \frac{1}{1+(e^{1/n}\Omega)^{2n}}$ .

Stačí udělat substituci  $s' = e^{1/n}s$  a platí všechny dříve odvozené vztahy.

#### Pro n sudá

$$\begin{aligned}
 H(s) &= \frac{1}{\prod_1^{n/2} \left[ s'^2 + 2 \cdot s' \cdot \sin\left((2m-1)\frac{p}{2n}\right) + 1 \right]} = \frac{1}{\prod_1^{n/2} \left[ s^2 \cdot e^{2/n} + 2 \cdot s \cdot e^{1/n} \cdot \sin\left((2m-1)\frac{p}{2n}\right) + 1 \right]} \\
 &= \frac{1}{\prod_1^{n/2} e^{2/n} \left[ s^2 + 2 \cdot s \cdot e^{-1/n} \cdot \sin\left((2m-1)\frac{p}{2n}\right) + e^{-2/n} \right]} = \frac{1}{(e^{2/n})^{n/2} \prod_1^{n/2} [(s^2 + a_1 s + a_0)]}
 \end{aligned}$$

$$a_1 = \frac{2}{\sqrt[n]{e}} \cdot \sin\left((2m-1)\frac{p}{2n}\right) \quad a_0 = \frac{1}{\sqrt[n]{e^2}}$$

$$H(s) = \frac{e^{-1}}{\prod_1^{n/2} [(s^2 + a_1 \cdot s + a_0)]}$$

Pro  $n$  lichá obdržíme stejným postupem

$$H(s) = \frac{e^{-1}}{(s + e^{-1/n})^{(n-1)/2} \prod_1 [(s^2 + a_1 \cdot s + a_0)]}$$

Pro  $e = 1$  dostaneme předchozí vztahy.

*Tento tvar zápisu je velmi vhodný pro kaskádní realizaci filtrů (řazení dílčích filtrů 2. řádu pro  $n$  sudá, řazení jednoho filtru prvního řádu a dílčích filtrů 2. řádu pro  $n$  lichá).*

### III.2.3 Potřebný řád Butterworthova filtru

Zcela obecně bylo odvozeno  $e = \sqrt{10^{a_p/10} - 1}$  a  $j^2(\Omega_s) = (10^{a_s/10} - 1)/(10^{a_p/10} - 1)$ , kde  $a_s$  je požadovaný útlum (v dB) na  $\Omega_s$  a  $a_p$  je povolená chyba (v dB) pro  $\Omega$  rovno 0 až 1. Pro Butterworthovu aproximaci tedy platí

$$\Omega_s^{2n} = \frac{10^{a_s/10} - 1}{10^{a_p/10} - 1} \Rightarrow \Omega_s^n = \sqrt{\frac{10^{a_s/10} - 1}{10^{a_p/10} - 1}} \Rightarrow$$

$$n \geq \frac{\log \sqrt{\frac{10^{a_s/10} - 1}{10^{a_p/10} - 1}}}{\log \Omega_s}$$

*$n$  musí být celé číslo.*

Pro obecné hodnoty  $a_p$  je  $e \neq 1$ . Pro  $\Omega = 1$  platí  $|H(j1)|^2 = \frac{1}{1+e^2}$ .

Potřebujeme-li i nyní určit normovanou frekvenci  $\Omega_3$  (pokles přenosu právě 3 dB), musí platit

$$e^2 \cdot \Omega_3^{2n} = 1 \Rightarrow \Omega_3 = 1/\sqrt[n]{e}$$

Pro  $a_p = 3$  dB je právě  $e = \sqrt{10^{3/10} - 1} = 1$  a  $n \geq \frac{\log(10^{a_s/10} - 1)}{2 \cdot \log \Omega_s}$ ;  $\Omega_3 = 1/\sqrt[n]{1} = 1$ .

### III.2.4 Odhad chyby v propustném pásmu

V měřicích řetězcích může být důležité určení chyby modulu (vůči ideální hodnotě 1) pro  $\Omega \ll 1$ . Pro nejběžnější situaci, kdy se volí  $e = 1$  (to odpovídá chybě cca 30% na  $\Omega = 1$ ) platí pro  $\Omega \ll 1$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \Omega^{2n}}} \cong 1 - 0,5 \cdot \Omega^{2n}$$

Definujme chybu modulu

$$E = (1 - 0,5 \cdot \Omega^{2n}) - 1 = -0,5 \cdot \Omega^{2n}$$

$$E_{\%} = |-0,5 \cdot \Omega^{2n}| \cdot 100 = 50 \cdot \Omega^{2n}$$

Frekvenci  $\Omega_E$ , na které je chyba právě  $E_{\%}$  snadno určíme ze vztahu

$$\Omega_E \cong 2n \sqrt{\frac{E_{\%}}{50}}$$

Pro  $\Omega < \Omega_E$  bude při Butterworthově aproximaci chyba menší.

### III.3 Izoextremální aproximace ( Čebyševova)

- Hledáme polynom, který se stejnoměrnou odchylkou aproximuje nulu v propustném pásmu.
- Charakteristická funkce  $j(\Omega)$  je tvořena **Čebyševovými polynomy**.

Pro  $0 \leq \Omega \leq 1$  je

$$C_n(\Omega) = \cos(n \arccos \Omega)$$

Pro  $\Omega \geq 1$  je

$$C_n(\Omega) = \cosh(n \arg \cosh \Omega)$$

BOX 1

Funkce  $\arccos \Omega$  je definována pouze pro  $\Omega \in \langle -1, 1 \rangle$ . Předpokládejme [Van Valkenburg], že pro  $\Omega \geq 1$  platí

$$\arccos \Omega = jz \quad | \cos$$

$$\Omega = \cos jz$$

$$\cos jz = \frac{\exp(j(jz)) + \exp(-j(jz))}{2} = \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2} = \cosh z$$

$$\Omega = \cosh z \Rightarrow z = \arg \cosh \Omega$$

$$C_n(\Omega) = \cos(n \arccos \Omega) = \cos(njz) = \cos(jn \arg \cosh \Omega) = \cosh(n \arg \cosh \Omega)$$

Postupně tak obdržíme

$$C_0(\Omega) = 1$$

$$C_1(\Omega) = \cos(\arccos \Omega) = \Omega$$

$$C_2(\Omega) = \cos(2 \cdot \arccos \Omega) = \left| x = \arccos \Omega \right| = \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1 = 2(\cos(\arccos \Omega))^2 - 1 = 2 \cdot \Omega^2 - 1$$



BOX 2

$$\cos[(n+1)x] = \cos nx \cdot \cos x - \sin nx \cdot \sin x; \quad \cos[(n-1)x] = \cos nx \cdot \cos x + \sin nx \cdot \sin x$$

$$\cos[(n+1)x] + \cos[(n-1)x] = 2 \cdot \cos nx \cdot \cos x$$

$$\cos[(n+1)x] = 2 \cdot \cos nx \cdot \cos x - \cos[(n-1)x]$$

$$x = \arccos \Omega$$

$$\cos[(n+1) \cdot \arccos \Omega] = 2 \cdot \cos(n \arccos \Omega) \cdot \cos(\arccos \Omega) - \cos[(n-1) \arccos \Omega]$$

$$\cos[(n+1) \cdot \arccos \Omega] = 2 \cdot \Omega \cdot \cos(n \arccos \Omega) - \cos[(n-1) \arccos \Omega]$$

Na základě elementárních úvah v „BOX 2“ je zřejmé, že platí tvrzení [Lam, Huelsman, ...]

$$C_{n+1}(\Omega) = 2 \cdot \Omega \cdot C_n(\Omega) - C_{n-1}(\Omega)$$

tedy pro příklad:

$$C_2(\Omega) = 2 \cdot \Omega \cdot C_1(\Omega) - C_0(\Omega) = 2 \cdot \Omega \cdot \Omega - 1 = 2 \cdot \Omega^2 - 1$$

$$C_3(\Omega) = 2 \cdot \Omega \cdot C_2(\Omega) - C_1(\Omega) = 2 \cdot \Omega \cdot (2 \cdot \Omega^2 - 1) - \Omega = 4 \cdot \Omega^3 - 3 \cdot \Omega$$

Pro modul přenosové funkce nyní platí

$$|H(j\Omega)|^2 = H(j\Omega) \cdot H(-j\Omega) = \frac{1}{1 + e^2 \cdot C_n^2(\Omega)}$$

Z uvedených vlastností je zřejmé, že

pro n lichá

$$C_n(0) = 0 \quad |H(j0)| = 1$$

pro n sudá

$$|C_n(0)| = 1 \quad |H(j0)| = 1/\sqrt{1+e^2}$$

pro všechna n

$$|C_n(1)| = 1 \quad |H(j1)| = 1/\sqrt{1+e^2}$$

### III.3.1 Maxima a minima přenosu v pásmu propustnosti

Maxima v pásmu propustnosti vznikají tam, kde charakteristická funkce nabývá nulových hodnot. Proto musí platit

$$\cos(n \cdot \arccos \Omega_{MAX}) = 0 \Rightarrow n \cdot \arccos \Omega_{MAX} = p/2; 3 \cdot p/2; \dots$$

$$n \cdot \arccos \Omega_{MAXm} = (2m-1) \cdot p/2$$

$$\arccos \Omega_{MAXm} = (2m-1) \cdot p/(2 \cdot n) \quad | \cos$$

$$\Omega_{MAXm} = \cos(2m-1) \frac{p}{2 \cdot n}$$

$\mu = 1, 2, \dots, n/2$  pro n sudé

$\mu = 1, 2, \dots, (n+1)/2$  pro n liché.

Minima v pásmu propustnosti vznikají tam, kde charakteristická funkce hodnot  $\pm 1$ . Proto musí platit

$$\cos(n \cdot \arccos \Omega_{MIN}) = \pm 1 \Rightarrow n \cdot \arccos \Omega_{MIN} = 0; p; 2 \cdot p; \dots$$

$$n \cdot \arccos \Omega_{MINm} = (m-1) \cdot p$$

$$\arccos \Omega_{MINm} = (m-1) \cdot p / n$$

$$\Omega_{MINm} = \cos(m-1) \frac{p}{n}$$

### III.3.2 Frekvence $\Omega_3$ pro pokles přenosu o 3 dB

V teorii filtrů je důležité znát frekvenci, na které je pokles přenosu právě 3 dB, což v našem případě znamená, že musí právě platit

$$|H(j\Omega_3)|^2 = \frac{1}{1+1}$$

tedy

$$e^2 \cdot C_n^2(\Omega_3) = 1$$

Musí tedy platit (nejsme již v propustném pásmu;  $\Omega > 1$ ), že

$$e^2 \cdot \cosh^2(n \cdot \arg \cosh \Omega_3) = 1$$

$$\cosh(n \cdot \arg \cosh \Omega_3) = 1/e \quad \left| \arg \cosh; \quad e < 1 \right.$$

$$n \cdot \arg \cosh \Omega_3 = \arg \cosh(1/e)$$

$$\arg \cosh \Omega_3 = \frac{1}{n} \cdot \arg \cosh \frac{1}{e} \quad \left| \cosh \right.$$

$$\Omega_3 = \cosh \left( \frac{1}{n} \cdot \arg \cosh \frac{1}{e} \right); \quad e < 1$$

Pro příklad určíme:

$$a_p = 0,5 \text{ dB}; \Rightarrow e = \sqrt{10^{0,05} - 1} = 0,3493114; \Omega_3 = \cosh\left(\frac{1}{n} \cdot \arg \cosh \frac{1}{e}\right) = \cosh\left(\frac{1}{n} \cdot \arg \cosh 2,8628\right) = \cosh\left(\frac{1,71294}{n}\right)$$

Nyní snadno určíme, že pro  $a_p = 0,5$  platí:

$$\begin{aligned} \Omega_3(n=2) &= \cosh\left(\frac{1,71294}{2}\right) = 1,3897; & \Omega_3(n=3) &= \cosh\left(\frac{1,71294}{3}\right) = 1,1675; & \Omega_3(n=4) &= \cosh\left(\frac{1,71294}{4}\right) = 1,0931; \\ \Omega_3(n=5) &= \cosh\left(\frac{1,71294}{5}\right) = 1,0593; & \Omega_3(n=6) &= \cosh\left(\frac{1,71294}{6}\right) = 1,0410; & \Omega_3(n=7) &= \cosh\left(\frac{1,71294}{7}\right) = 1,0301. \end{aligned}$$

Stejně určíme:

$$\begin{aligned} a_p = 1, \text{ dB}; \Rightarrow e = \sqrt{10^{0,05} - 1} = 0,5088471; \Omega_3 &= \cosh\left(\frac{1}{n} \cdot \arg \cosh 1,9652\right) = \cosh\left(\frac{1,29664}{n}\right); \Omega_3(n=2) = 1,2176; \Omega_3(n=3) = 1,0949; \\ \Omega_3(n=4) &= 1,0530; \Omega_3(n=5) = 1,0338; \Omega_3(n=6) = 1,0234; \Omega_3(n=7) = 1,0172. \end{aligned}$$

### III.3.3 Potřebný řád filtru

Zcela obecně bylo odvozeno  $e = \sqrt{10^{a_p/10} - 1}$  a  $j^2(\Omega_s) = (10^{a_s/10} - 1)/(10^{a_p/10} - 1)$ , kde  $a_s$  je požadovaný útlum (v dB) na  $\Omega_s$  a  $a_p$  je povolená chyba (zde zvlnění v pásmu propustnosti v dB) pro  $\Omega$  rovno 0 až 1. Pro Čebyševovu aproximaci tedy platí (nyní již nejsme v propustném pásmu;  $\Omega > 1$ ), že

$$C_n^2(\Omega_s) = \frac{10^{a_s/10} - 1}{10^{a_p/10} - 1} \Rightarrow$$

$$\cosh(n \cdot \arg \cosh \Omega_s) = \sqrt{\frac{10^{a_s/10} - 1}{10^{a_p/10} - 1}} \quad | \arg \cosh \Rightarrow$$

$$n \cdot \arg \cosh \Omega_s = \arg \cosh \sqrt{\frac{10^{a_s/10} - 1}{10^{a_p/10} - 1}} \Rightarrow$$

$$n \geq \frac{\arg \cosh \sqrt{\frac{10^{a_s/10} - 1}{10^{a_p/10} - 1}}}{\arg \cosh \Omega_s}$$

*n musí být celé číslo.*

### III.3.4 Určení pólů přenosové funkce pro Čebyševovu aproximaci [Balabanian, Guillemin, Huelsman, Van Valkenburg, ...]

Postup je shodný jako u Butterworthovy aproximace. Pouze řešení problému je poněkud složitější, hledáme póly v pásmu propustnosti, kde platí, že  $\Omega < 1$ :

$$|H(s)|^2 = H(s) \cdot H(-s) = \frac{1}{1 + e^{2j^2(s/j)}}$$

$$1 + e^{2j^2(s/j)} = 1 + e^{2C_n^2(s/j)} = 0$$

$$C_n(s/j) = \cos(n \arccos(s/j)) = \pm j/e$$

Zavedeme substituci

$$\arccos(s/j) = u + jv$$

kde  $u, v$  jsou již reálná čísla.

Potom musí platit

$$\cos(n \cdot (u + jv)) = \cos(nu) \cdot \cosh(nv) - j \cdot \sin(nu) \cdot \sinh(nv) = \pm j/e$$

**BOX 3**

$$\cos x = (\exp(jx) + \exp(-jx))/2; \quad \sin x = (\exp(jx) - \exp(-jx))/(2j)$$

$$\cos(x = jnv) = (\exp(-nv) + \exp(nv))/2 = \cosh nv$$

$$\sin(x = jnv) = (\exp(-nv) - \exp(nv))/(2j) = j \cdot (\exp(nv) - \exp(-nv))/2 = j \cdot \sinh nv$$

Získáme systém rovnic

$$\cos(nu) \cdot \cosh(nv) = 0$$

$$\sin(nu) \cdot \sinh(nv) = \pm 1/e$$

Pro reálné  $v$  vždy platí  $\cosh(nv) \neq 0$ , proto mohou být rovnice splněny pouze pro

$$\cos(nu) = 0$$

tedy musí platit pro (lichá  $k$ )  $nu = k \cdot p/2$ , odkud určíme, že

$$u_k = k \cdot \frac{p}{2n}$$

$k = 1, 3, 5, \dots, 4n-1$ .

Pro tyto hodnoty  $u_k$  ovšem nabývá funkce  $\sin$  pouze hodnot  $\pm 1$ . Stačí proto řešit rovnici

$$\sinh(nv) = \pm 1/e$$

Řešením je vztah

$$v = \pm \frac{1}{n} \cdot \arg \sinh \frac{1}{e}$$

Nyní musí platit

$$\begin{aligned} \arccos(s/j) = u + jv & \quad | \cos \\ s/j = \cos(u + jv) & \\ s = j \cdot \cos(u + jv) & \\ s = j[\cos u \cdot \cos(jv) - \sin u \cdot \sin(jv)] & \end{aligned}$$

$$s_k = \sin u_k \cdot \sinh v + j \cdot \cos u_k \cdot \cosh v$$

Tento výsledek obsahuje kořeny s kladnou i zápornou částí. Hurwitzův polynom (reálná část záporná) tvoří kořeny pro  $v > 0$  [např. Davídek]

$$s_m = -\sinh v \cdot \sin \left[ (2m-1) \frac{p}{2n} \right] + j \cosh v \cdot \cos \left[ (2m-1) \frac{p}{2n} \right]$$

Ostatní kořeny tvoří funkci  $H(-s)$ .

Označíme-li ve shodě s předchozí symbolikou

$$\Sigma_m = -\sinh v \cdot \sin \left[ (2m-1) \frac{p}{2n} \right]; \quad \Omega_m = \cosh v \cdot \cos \left[ (2m-1) \frac{p}{2n} \right]$$

potom snadno určíme, že

$$\Sigma_m^2 / \sinh^2 v = \sin^2 \left[ (2m-1) \frac{p}{2n} \right]; \quad \Omega_m^2 / \cosh^2 v = \cos^2 \left[ (2m-1) \frac{p}{2n} \right]$$

Odsud určíme, že

$$\left( \Sigma_m^2 / \sinh^2 v \right) + \left( \Omega_m^2 / \cosh^2 v \right) = \sin^2 \left[ (2m-1) \frac{p}{2n} \right] + \cos^2 \left[ (2m-1) \frac{p}{2n} \right] = 1$$

Kořeny  $s_\mu$  polynomu  $H(s)$  (reálné části kořenů záporné) leží na elipse, v levé části komplexní roviny. Kořeny s kladnou reálnou částí, náležející polynomu  $H(-s)$ , leží na stejné elipse – v pravé části komplexní roviny.

Respektujeme-li vlastnosti komplexně sdružených kořenů, získáme pro **n sudá** vztah

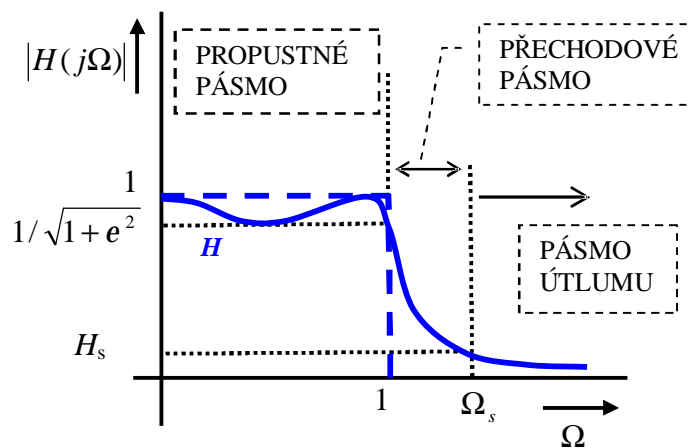
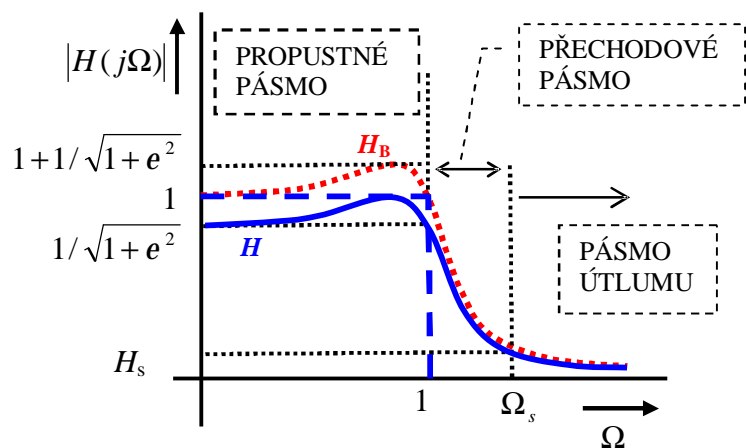
$$H(s) = \frac{1}{\sqrt{1+e^2}} \cdot \prod_1^{n/2} \frac{\Sigma_m^2 + \Omega_m^2}{s^2 - 2 \cdot s \cdot \Sigma_m + \Sigma_m^2 + \Omega_m^2}$$

V některých zdrojích se pro  $n$  sudá pracuje se vztahem

$$H_B(s) = \prod_1^{n/2} \frac{\Sigma_m^2 + \Omega_m^2}{s^2 - 2 \cdot s \cdot \Sigma_m + \Sigma_m^2 + \Omega_m^2}$$



Dopad je zřejmý z kvalitativního zobrazení na obr. 5.



**Obr. 5** Kvalitativní porovnání modulů  $H$  a  $H_B$  pro  $n = 2$     **Obr. 6** Kvalitativní zobrazení modulu přenosu  $H$  a pro  $n = 3$

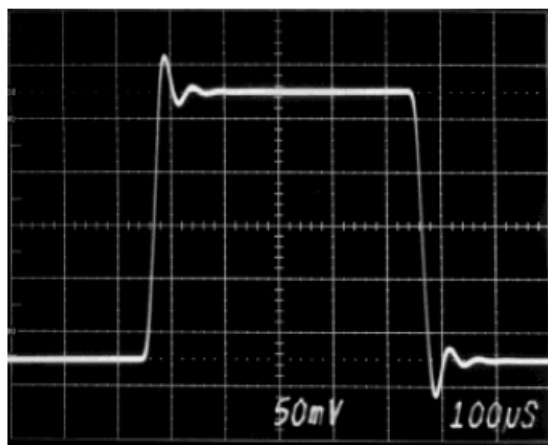
Pro [n lichá](#) platí

$$H(s) = \frac{\sinh v}{s + \sinh v} \cdot \prod_1^{(n-1)/2} \frac{\Sigma_m^2 + \Omega_m^2}{s^2 - 2 \cdot s \cdot \Sigma_m + \Sigma_m^2 + \Omega_m^2}$$

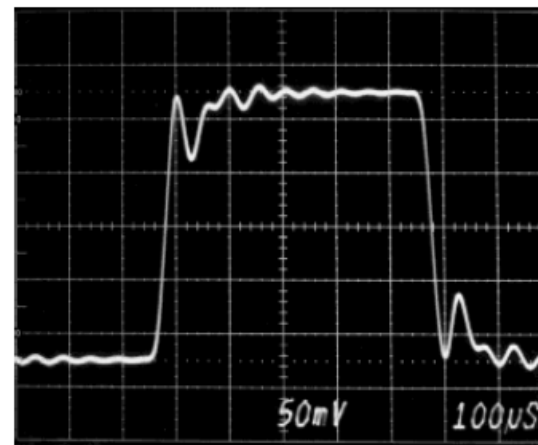
Kvalitativní zobrazení pro  $n = 3$  je na obr. 6.

### III.4 Srovnání Butterworthovy a Čebyševovy aproximace

Vlastnosti modulů přenosových funkcí pro zkoumané aproximace jsou zřejmé z uvedeného. Nebylo však posuzováno *skupinové zpoždění* (fáze zkoumaných aproximací). Fázové vlastnosti zde nesloužily jako kritérium. Přitom při přenosu signálů impulsového charakteru hraje skupinové zpoždění vážnou roli – ideálně by mělo být konstantní. Tomu odpovídá lineární závislost fáze na frekvenci. Z hlediska skupinového zpoždění je vhodnější aproximace Butterworthova (než Čebyševova) – při jinak srovnatelných parametrech modulu přenosu. To je zřejmé ze záznamu přenosu impulsů dolních propustí na obr. 7 a na obr. 8.

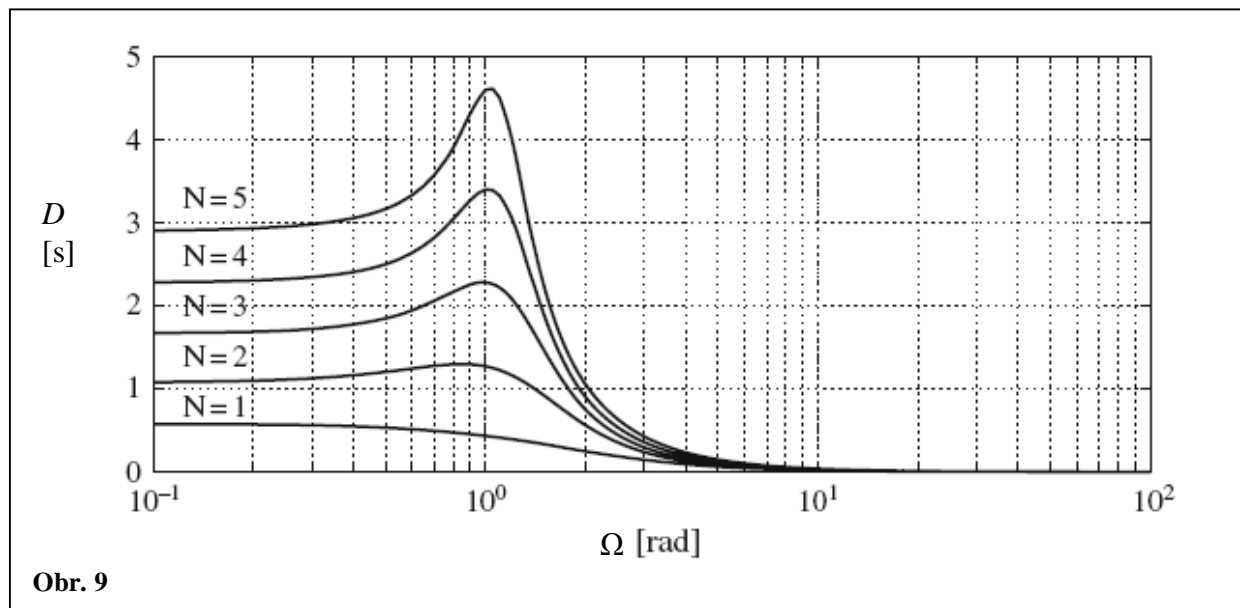


**Obr. 7** Přenos impulsu, Butterworthův filtr 5. řádu, dolní propust 20 kHz [TEXAS]



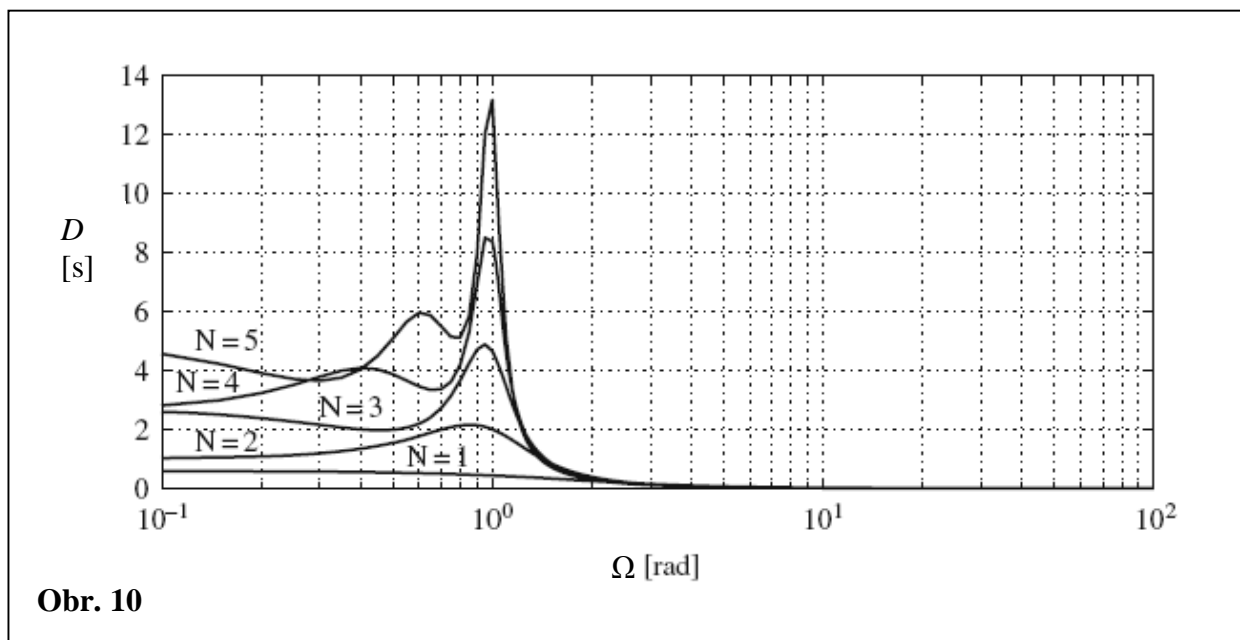
**Obr. 8** Přenos impulsu, Čebyševův filtr 5. řádu, zvlnění 3 dB, dolní propust 20 kHz [TEXAS]

Skupinové zpoždění  $D$  Butterworthových filtrů různého řádu je na obr. 9.



Obr. 9

Příklad skupinových zpoždění  $D$  Čebyševových filtrů je kvalitativně na obr. 10.



Existují i aproximace, kde se optimalizuje skupinové zpoždění  $D$ .

## IV. MAXIMÁLNĚ PLOCHÝ PRŮBĚH SKUPINOVÉHO ZPOŽDĚNÍ

Kritériem pro aproximaci je nyní průběh skupinového zpoždění  $D$ . Vyjděme z elementárních (dříve uvedených) vztahů.

Pro  **$n=2$** :

$$H(s) = \frac{a_0}{s^2 + a_1s + a_0} \Rightarrow |s = j\Omega| \Rightarrow H(j\Omega) = \frac{a_0}{a_0 - \Omega^2 + ja_1\Omega}$$

$$\Phi(\Omega) = -\arctg\left(\frac{\text{Im}P(j\Omega)}{\text{Re}P(j\Omega)}\right) = -\arctg\frac{a_1 \cdot \Omega}{a_0 - \Omega^2}$$

$$D(\Omega) = -d\Phi(\Omega) / d\Omega = \frac{d}{d\Omega}\left(\arctg\frac{a_1 \cdot \Omega}{a_0 - \Omega^2}\right) = \left|\left(\arctg x\right)'\right| = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow$$

$$D(\Omega) = \dots = \frac{a_1 a_0 + \Omega^2 a_1}{a_0^2 + \Omega^2 (a_1^2 - 2a_0) + \Omega^4} = \frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{1 + \Omega^2 / a_0}{1 + \Omega^2 (a_1^2 / a_0^2 - 2 / a_0) + \Omega^4 / a_0^2}$$

Pro dosažení maximálně plochého průběhu skupinového zpoždění můžeme zajistit shodu koeficientů u stejných mocnin v čitateli a jmenovateli, pro  $n=2$  tedy:

$$1/a_0 = a_1^2 / a_0^2 - 2/a_0$$

Volíme-li normované zpoždění  $D_0 = a_1 / a_0 = 1$  s, musí platit

$$1/a_0 = 1 - 2/a_0 \Rightarrow a_0 = 3 = a_1$$

Platí tedy, že skupinové zpoždění má maximálně plochý průběh pro

$$H_2(s) = \frac{3}{s^2 + 3s + 3}$$

Pro **n=3**:

$$H(s) = \frac{a_0}{s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0} \Rightarrow |s = j\Omega| \Rightarrow H(j\Omega) = \frac{a_0}{a_0 - a_2\Omega^2 + j\Omega(a_1 - \Omega^2)}$$

$$\Phi(\Omega) = -\arctg \frac{\Omega(a_1 - \Omega^2)}{a_0 - a_2\Omega^2}; \quad D(\Omega) = -d\Phi(\Omega)/d\Omega = \dots = \frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{1 + \Omega^2(a_2/a_0 - 3/a_1) + \Omega^4 a_2/(a_1 a_0)}{1 + \Omega^2(a_1^2/a_0^2 - 2a_2/a_0) + \Omega^4(a_2^2/a_0^2 - 2a_1/a_0^2) + \Omega^6/a_0^2}$$

Opět volíme normované zpoždění  $D_0 = a_1/a_0 = 1$  s, musí platit:

$$a_2/a_0 - 3/a_1 = a_1^2/a_0^2 - 2a_2/a_0; \quad a_2/(a_1 a_0) = a_2^2/a_0^2 - 2a_1/a_0^2$$

$$a_2/a_0 - 3/a_1 = 1 - 2a_2/a_0; \quad a_2 = a_2^2 a_1/a_0 - 2a_1^2/a_0 = a_2^2 a_1/a_0 - 2a_0 a_1^2/a_0^2 = a_2^2 - 2a_0$$

$$a_1 = a_0; \quad a_0 = 3 \cdot a_2 - 3; \quad a_2 = a_2^2 - 2a_0 = a_2^2 - 2 \cdot (3a_2 - 3) \Rightarrow$$

$$a_2^2 - 7a_2 + 6 = 0; \quad a_0 = 3 \cdot a_2 - 3; \quad a_1 = a_0$$

Řešením kvadratické rovnice zjistíme, že  $a_2$  může nabývat hodnoty 1 a 6. Pro  $a_2 = 6$  je  $a_0 = 3 \cdot 6 - 3 = 15 = a_1$ . Platí tedy, že skupinové zpoždění má maximálně plochý průběh pro

$$H_3(s) = \frac{15}{s^3 + 6s^2 + 15s + 15}$$

Pro  $a_2 = 1$  je  $a_0 = 3 \cdot 1 - 3 = 0 = a_1$ , nejedná se tedy o Hurwitzův polynom.

Předvedený postup je pro větší hodnoty  $n$  obtížný. **Vhodnější postup vypracoval [Storch]**, viz např. i [Balabanian, Guillemin, ...]. Snadno určíme, že normovaný přenos

$$H(s) = \exp(-s) = |s = j\Omega| = \exp(-j\Omega) = 1 / \exp(j\Omega)$$

má modul 1 nezávisle na  $\Omega$  a jeho fáze

$$\Phi(\Omega) = -\Omega$$

Skupinové zpoždění (normované na hodnotu 1 s) pro tuto přenosovou funkci je

$$D(\Omega) = -d\Phi / d\Omega = 1$$

což je ideální stav z hlediska skupinového zpoždění. Platí ovšem (McLaurinova řada)

$$\exp x = \sum_0^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Ideální řešení by tedy bylo realizováno nekonečně složitým systémem.

Pokud se omezíme pouze na řadu konečné délky (omezenou, ořezanou)

$$\exp x = \sum_0^n \frac{x^k}{k!}$$

ukázalo se [Iverson], že již pro  $n \geq 5$  obsahuje rovnice

$$\sum_0^n \frac{x^k}{k!} = 0$$

vždy komplexně sdružené kořeny, jejichž reálná část je kladná, nejedná se tedy o Hurwitzův polynom. Takové systémy by nebyly stabilní, tedy nemá smysl je realizovat. Zde se využije jiné vlastnosti Hurwitzova polynomu. Předpokládejme, že máme polynom řádu  $n$

$$P_n(s) = S_n(s) + L_n(s) = \sum_0^n a_k s^k$$

Polynom  $S_n(s)$  tvoří členy se sudou mocninou  $s$ ; polynom  $L_n(s)$  tvoří členy s lichou mocninou  $s$ .

*Nutnou a postačující podmínkou pro Hurwitzův polynom je, že všechny koeficienty v rozvoji podílu  $S_n(s)/L_n(s)$  na řetězové zlomky jsou kladné.*

Vraťme se nyní k přenosu

$$H(s) = 1/\exp(s) = \frac{1}{1 + s + s^2/2! + s^3/3! + s^4/4! + s^5/5! + s^6/6! + \dots} = \frac{1}{(1 + s^2/2! + s^4/4! + s^6/6! + \dots) + (s + s^3/3! + s^5/5! + \dots)} = \frac{1}{\cosh s + \sinh s}$$

Známe tedy sudou i lichou část požadovaného přenosu a můžeme určit podíl



$$\frac{\cosh s}{\sinh s} = \frac{(1 + s^2/2! + s^4/4! + s^6/6! + \dots)}{(s + s^3/3! + s^5/5! + \dots)} = \frac{1}{s} + \frac{1}{\frac{3}{s} + \frac{1}{\frac{5}{s} + \frac{1}{\frac{7}{s} + \dots}}}$$

$$\frac{\cosh s}{\sinh s} = (1 + s^2/2! + s^4/4! + s^6/6! + \dots) / (s + s^3/3! + s^5/5! + \dots) = \frac{1}{s} + \frac{zbytek1}{s + s^3/3! + s^5/5! + \dots} = \frac{1}{s} + \frac{1}{\frac{s + s^3/3! + s^5/5! + \dots}{zbytek1}}$$

$$zbytek1 = (1 + s^2/2! + s^4/4! + s^6/6! + \dots) - (s + s^3/3! + s^5/5! + \dots) \cdot \frac{1}{s} = (1 + s^2/2! + s^4/4! + s^6/6! + \dots) - (1 + s^2/3! + s^4/5! + \dots) =$$

$$= s^2/3 + 4 \cdot s^4/5! + s^6/6! + \dots$$

$$\frac{\cosh s}{\sinh s} = \frac{1}{s} + \frac{1}{\frac{s + s^3/3! + s^5/5! + \dots}{s^2/3 + 4 \cdot s^4/5! + s^6/6! + \dots}} = \frac{1}{s} + \frac{1}{\frac{3}{s} + \frac{zbytek2}{s^2/3 + 4 \cdot s^4/5! + s^6/6! + \dots}} = \frac{1}{s} + \frac{1}{\frac{3}{s} + \frac{1}{\frac{s^2/3 + 4 \cdot s^4/5! + s^6/6! + \dots}{zbytek2}}}$$

$$zbytek2 = (s + s^3/3! + s^5/5! + \dots) - (s^2/3 + 4 \cdot s^4/5! + s^6/6! + \dots) \cdot \frac{3}{s} = \dots = s^3/15 + \dots$$

$$\frac{\cosh s}{\sinh s} = \frac{1}{s} + \frac{1}{\frac{3}{s} + \frac{1}{\frac{s^2/3 + 4 \cdot s^4/5! + s^6/6! + \dots}{s^3/15 + \dots}}} = \frac{1}{s} + \frac{1}{\frac{3}{s} + \frac{1}{\frac{5}{s} + \frac{zbytek3}{s^3/15 + \dots}}}$$

Pokud nyní požadujeme aproximaci řádu  $n$ , je posledním členem řetězového zlomku člen  $(2n-1)/s$ . Řetězový zlomek tak aproximuje lineární průběh fáze (maximálně plochý – obdobně jako tomu bylo s modulem přenosu u Butterworthovy aproximace). Po elementárních úpravách získáme sudou a lichou část Hurwitzova (aproximačního) polynomu, jejich součtem obdržíme **Besselovy polynomy**.

**Pro  $n = 2$**  tedy platí

$$\frac{\cosh s}{\sinh s} = \frac{1}{s} + \frac{1}{3/s} = \frac{1}{s} + \frac{s}{3} = \frac{s^2 + 3}{3 \cdot s}$$

Tedy

$$P_2(s) = (s^2 + 3) + 3 \cdot s = s^2 + 3 \cdot s + 3$$

Požadovaný přenos (s „lineární fází“) je tedy

$$H_2(s) = \frac{3}{s^2 + 3 \cdot s + 3}$$

**Pro  $n = 3$**  platí

$$\frac{\cosh s}{\sinh s} = \frac{1}{s} + \frac{1}{(3/s) + 1/(5/s)} = \dots = \frac{15 + 6 \cdot s^2}{15 \cdot s + s^3}$$

Tedy

$$P_3(s) = (6 \cdot s^2 + 15) + (15 \cdot s + s^3) = s^3 + 6 \cdot s^2 + 15 \cdot s + 15$$

Požadovaný přenos (s „lineární fází“) je tedy

$$H_3(s) = \frac{15}{s^3 + 6 \cdot s^2 + 15 \cdot s + 15}$$

Získané výsledky se shodují s výsledky získanými „elementárními“ postupy.

V [Balabanian] je uveden pro Besselovu aproximaci obecný vztah ve tvaru

$$H_n(s) = \frac{b_0}{\sum_{k=0}^n b_k s^k} = \frac{b_0}{B_n(s)}$$

$$b_k = \frac{(2n-k)!}{2^{n-k} \cdot k!(n-k)!}$$

a rovněž se uvádí rekurentní vztah, např. [LAM, Huelsman, ...]

$$B_n(s) = (2n-1) \cdot B_{n-1}(s) + s^2 \cdot B_{n-2}(s)$$

Pro  $n = 4$  tak například zjistíme z rekurentního vztahu, že

$$B_4(s) = (2 \cdot 4 - 1) \cdot B_3(s) + s^2 \cdot B_2(s) = 7 \cdot (s^3 + 6 \cdot s^2 + 15 \cdot s + 15) + s^2 \cdot (s^2 + 3 \cdot s + 3) = 105 + 105 \cdot s + 45 \cdot s^2 + 10 \cdot s^3 + s^4$$

nebo

$$b_0 = \frac{(2 \cdot 4 - 0)!}{2^{4-0} \cdot 0!(4-0)!} = 105; \quad b_1 = \frac{(2 \cdot 4 - 1)!}{2^{4-1} \cdot 1!(4-1)!} = 105; \quad b_2 = \frac{(2 \cdot 4 - 2)!}{2^{4-2} \cdot 2!(4-2)!} = 45; \quad b_3 = \frac{(2 \cdot 4 - 3)!}{2^{4-3} \cdot 3!(4-3)!} = 10; \quad b_4 = \frac{(2 \cdot 4 - 4)!}{2^{4-4} \cdot 4!(4-4)!} = 1$$

Výsledek je shodný.

Pokud chceme získat i nyní vztahy vhodné pro kaskádní realizaci, musíme určit kořeny rovnic  $B_n(s) = 0$  a  $H_n(s) = b_0 / B_n(s)$  opět rozložit na součiny dílčích funkcí druhého řádu pro  $n$  sudé. Pro  $n$  liché pouze přibude jeden dílčí člen prvního řádu – tab. 1 – ***z praktických důvodů budeme dále pro kaskádní realizace používat obecně zápis*** (souvislost s předchozími formami zápisu je zřejmá):

$$H(s) = \prod_{k=1}^{n/2} A_k \frac{b_k}{s^2 + a_k s + b_k} \quad \text{pro } n \text{ sudé}$$

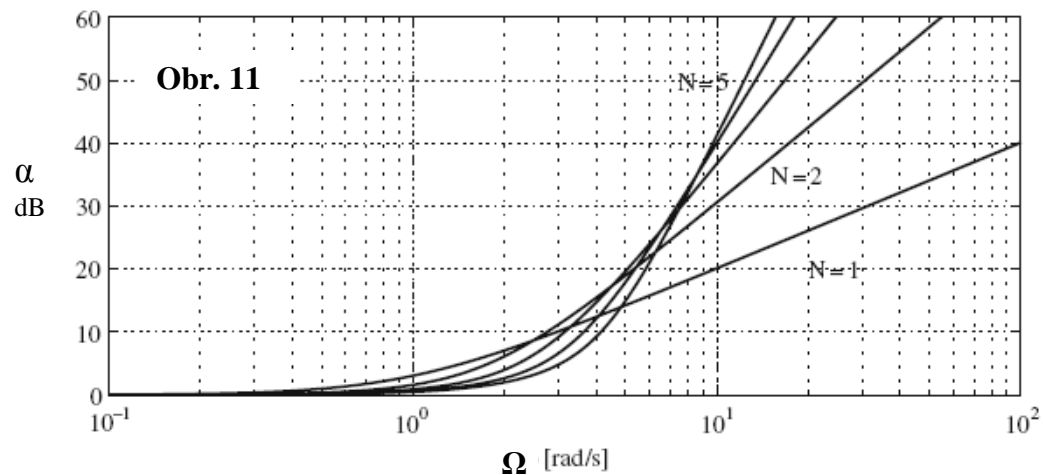
$$H(s) = \frac{A_0 \cdot b_0}{s + b_0} \times \prod_{k=1}^{(n-1)/2} A_k \frac{b_k}{s^2 + a_k s + b_k} \quad \text{pro } n \text{ liché}$$

n	$b_0$	$a_1$	$b_1$	$a_2$	$b_2$
2	-	3,000 000	3,000 000	-	-
3	2,322 185	3,677 815	6,459 433	-	-
4	-	5,792 421	9,140 131	4,207 579	11,487 800
5	3,646 739	6,703 913	14,272 481	4,649 349	18,156 315

**Tab. 1** Hodnoty dílčích funkcí pro Besselovu aproximaci

Rozsáhlé tabulky jsou například v [Johnson]. Základní výběr vhodný pro běžnou praxi je například v [Punčochář; OZ v el.], včetně řady řešených příkladů. Viz i tabulky 3 a 4.

Útlumové charakteristiky Besselových filtrů (převrácená hodnota přenosu) jsou na obr. 11.

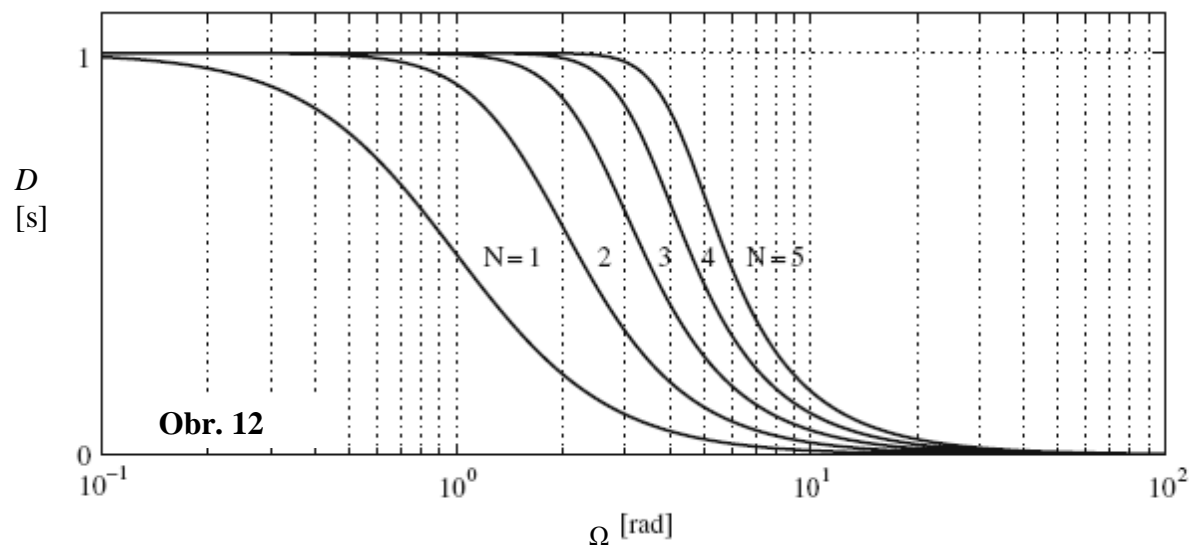


Frekvence poklesu přenosu o 3 dB jsou uvedeny v tabulce 2.

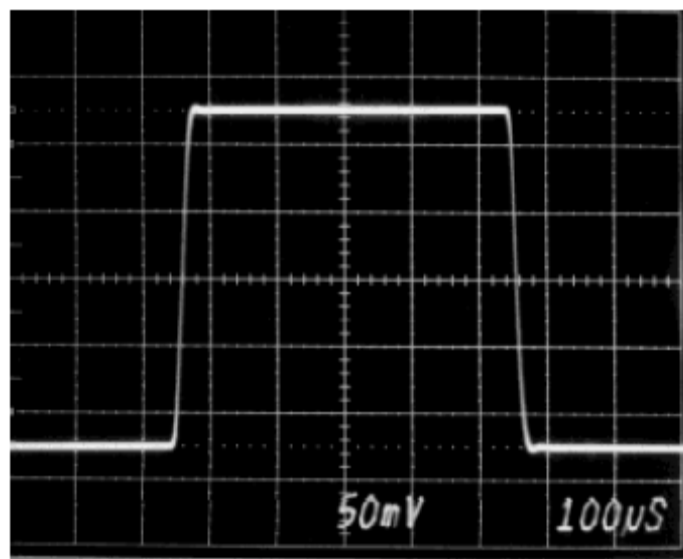
řád filtru n	2	3	4	5
$\Omega_3$	1,36	1,75	2,13	2,42

**Tab.2** Besselovy filtry – frekvence poklesu přenosu o 3 dB

Průběhy skupinového zpoždění jsou na obr. 12.



Přenos impulsu pro Besselův (Thomsonův) filtr 5. řádu (dolní propust 20 kHz [TEXAS]) je na obr. 13.



**Obr. 13** Přenos impulsu, Besselův filtr 5. řádu, dolní propust 20 kHz [TEXAS]

Je zřejmé, že chování Besselových (Thomsonových) filtrů v časové oblasti je nejlepší.

n	$b_0$	$a_1$	$b_1$	$a_2$	$b_2$
2	-	1,425 625	1,516 203	-	-
3	0,626 456	0,626 456	1,142 448	-	-
4	-	0,350 706	1,063 519	0,846 680	0,356 412
5	0,362 320	0,223 926	1,035 784	0,586 245	0,476 676

**Tab.3a** Čebyševovy filtry (DP) – zvlnění  $\alpha_p = 0,5$  dB

n	$b_0$	$a_1$	$b_1$	$a_2$	$b_2$
2	-	1,097 734	1,102 510	-	-
3	0,494 171	0,494 171	0,994 205	-	-
4	-	0,279 072	0,986 505	0,673 739	0,279 398
5	0,289 493	0,178 917	0,988 315	0,468 410	0,429 298

**Tab.3b** Čebyševovy filtry (DP) – zvlnění  $\alpha_p = 1$  dB

n	$b_0$	$a_1$	$b_1$	$a_2$	$b_2$
2	-	0,803 816	0,823 060	-	-
3	0,368 911	0,368 911	0,886 095	-	-
4	-	0,209 775	0,928 675	0,506 440	0,221 568
5	0,218 308	0,134 922	0,952 167	0,353 230	0,393 150

**Tab.3c** Čebyševovy filtry (DP) – zvlnění  $\alpha_p = 2$  dB

Řád filtru n	zvlnění v pásmu propustném $\alpha_p$		
	0,5 dB	1 dB	2 dB
2	1,390	1,218	1,074
3	1,168	1,095	1,033
4	1,093	1,053	1,018
5	1,059	1,034	1,012

**Tab. 3d** 3-dB frekvence Čebyševových filtrů  $\Omega_3$

n	$b_0$	$a_1$	$b_1$	$a_2$	$b_2$
2	-	1,414 214	1,000 000	-	-
3	1,000 000	1,000 000	1,000 000	-	-
4	-	0,765 367	1,000 000	1,847 759	1,000 000
5	1,000000	0,618 034	1,000 000	1,618 034	1,000 000

**Tab.4** Butterworthovy filtry



## IV. FREKVENČNÍ TRANSFORMACE [Novák, ...]

V předchozí části byla popsána řada jednodušších i složitějších úvah, které vedly k aproximaci vlastností dolních propustí (DP) podle různě stanovených kritérií. Je výhodné nalézt způsob, jak využít aproximace DP i pro řešení jiných používaných typů filtrů. Základní transformace byla definována na začátku materiálu. Byl definován komplexní normovaný kmitočet,  $w_0$  zde reprezentuje charakteristickou vlastnost celého filtru.

$$s = p / w_0 = \sigma / w_0 + j\omega / w_0 = \Sigma + j\Omega$$

pro který byly odvozeny všechny vlastnosti normovaných DP. Jedná se pouze o změnu měřítka, k technicky potřebným hodnotám  $w_0$  se vrátíme **základní substitucí** (denormalizace, odnormování, normovaná DP → denormalizovaná DP)

$$s \rightarrow p / w_0$$

Například z normované dolní propusti 3. řádu (n liché) tak obdržíme (předpokládáme jednotkový přenos)

$$H(s) = \frac{b_0}{s + b_0} \times \frac{b_1}{s^2 + a_1s + b_1} \rightarrow \left| s \rightarrow p / w_0 \right| \rightarrow H(p) = \frac{w_0 b_0}{p + w_0 b_0} \times \frac{w_0^2 b_1}{p^2 + a_1 w_0 p + w_0^2 b_1}$$

Kaskádní realizace bude obsahovat jednu dolní propust prvního řádu s charakteristickým kmitočtem  $w_{p0} = w_0 b_0$  a jednu dolní propust 2. řádu (DP2) s charakteristickým kmitočtem  $w_{p1}^2 = w_0^2 b_1$  - porovnáme-li přenos DP2 s běžným technickým zápisem (modelem)

$$\frac{w_{p1}^2}{p^2 + p \cdot w_{p1} / Q_1 + w_{p1}^2}$$

Rovněž je zřejmé, že musí platit  $w_{p1}/Q_1 = a_1 w_0 \Rightarrow Q_1 = w_{p1}/(a_1 w_0) = w_0 \cdot \sqrt{b_1}/(a_1 w_0) = \sqrt{b_1}/a_1$ .

Pro dílčí polynomy DP2. řádu tedy bude vždy platit, že jim odpovídající charakteristická (dílčí) frekvence je

$$w_{pk}^2 = w_0^2 b_k$$

a činitel jakosti je

$$Q_k = \sqrt{b_k} / a_k$$

Je – li n liché, platí pro přenos prvního řádu (dílčí)

$$w_{p0} = w_0 b_0$$

Tyto parametry potřebujeme znát pro technickou realizaci prvků kaskádního přenosového řetězce typu dolní propust.

### Transformace DP na horní propust (HP)

Použijeme substituci

$$s \rightarrow w_0 / p$$

Jako příklad opět použijme normovanou DP 3. řádu (**DP prototyp**):

$$H(s) = \frac{b_0}{s+b_0} \times \frac{b_1}{s^2+a_1s+b_1} \rightarrow |s \rightarrow w_0/p| \rightarrow H(p) = \frac{b_0}{w_0/p+b_0} \cdot \frac{b_1}{w_0^2/p^2+a_1w_0/p+b_1} = \frac{p}{p+w_0/b_0} \cdot \frac{p^2}{p^2+pa_1w_0/b_1+w_0^2/b_1}$$

Kaskádní realizace bude obsahovat jednu horní propust prvního řádu s charakteristickým kmitočtem  $w_{p0} = w_0 / b_0$  a jednu horní propust 2. řádu (HP2) s charakteristickým kmitočtem  $w_{p1}^2 = w_0^2 / b_1$  - porovnáme-li přenos HP2 s běžným technickým zápisem (modelem)

$$\frac{p^2}{p^2 + p \cdot w_{p1} / Q_1 + w_{p1}^2}$$

Rovněž je zřejmé, že musí platit  $w_{p1} / Q_1 = a_1 w_0 / b_1 \Rightarrow Q_1 = w_{p1} b_1 / (a_1 w_0) = (w_0 \cdot b_1 / \sqrt{b_1}) / (a_1 w_0) = \sqrt{b_1} / a_1$ .

Pro dílčí polynomy HP2. řádu tedy bude vždy platit, že jim odpovídající charakteristická (dílčí) frekvence je

$$w_{pk}^2 = w_0^2 / b_k$$

a činitel jakosti je

$$Q_k = \sqrt{b_k} / a_k$$

Je – li n liché, platí pro přenos prvního řádu (dílčí)

$$w_{p0} = w_0 / b_0$$

Tyto parametry potřebujeme znát pro technickou realizaci prvků kaskádního přenosového řetězce typu horní propust.

Porovnáním zjistíme, že **póly přenosových funkcí** DP a HP se obecně liší. Pouze pro Butterworthovu aproximaci, kde  $b_k = 1$  (pro  $\varepsilon = 1$ ) se poloha pólů přenosových funkcí neliší.

### Transformace DP na pásmovou propust (PP)

Vezměme za základ normovaný přenos dolní propusti a požadujeme pásmovou propust 2. řádu – model běžně používaný v technické praxi. Musí potom platit rovnost

$$\frac{1}{s+1} = \frac{p \cdot w_0 / Q}{p^2 + p \cdot w_0 / Q + w_0^2}$$

Elementárními úpravami dospějeme ke vztahu, který je v literatuře pro tuto transformaci uváděn:

$$s \rightarrow \frac{p^2 + w_0^2}{p \cdot w_0 / Q}$$

kde výraz  $w_0 / Q$  definuje požadovanou šířku propouštěného pásma.

Je zřejmé, že při tomto dosazení do přenosu DP prototypu se řád filtru zdvojnásobí (proti původnímu řádu DP prototypu).

### Transformace DP na pásmovou zadrž (PZ)

Vezměme za základ normovaný přenos dolní propusti a požadujeme zadrž 2. řádu – model běžně používaný v technické praxi. Musí potom platit rovnost

$$\frac{1}{s+1} = \frac{p^2 + w_0^2}{p^2 + p \cdot w_0 / Q + w_0^2}$$

Elementárními úpravami dospějeme i nyní ke vztahu, který je v literatuře pro tuto transformaci uváděn:

$$s \rightarrow \frac{p \cdot w_0 / Q}{p^2 + w_0^2}$$

kde výraz  $w_0 / Q$  definuje požadovanou šířku zadržovaného pásma.

Je zřejmé, že i při tomto dosazení do přenosu DP prototypu se řád filtru zdvojnásobí (proti původnímu řádu DP prototypu).

## V. PŘÍKLAD APROXIMACE A REALIZACE

Požadujeme DP,  $a_p = 0,3$  dB na  $f_0 = 10$  kHz. Je požadován útlum  $a_s = 22$  dB na  $f_s = 24,58$  kHz.

Určíme  $s = p/(2p \cdot 10^4)$ ;  $\Omega_s = 24,58/10 = 2,458$ .

Rozhodneme se pro Čebyševovu aproximaci – viz čl. III.3

Potřebný řád filtru je

$$n \geq \frac{\arg \cosh \sqrt{\frac{10^{a_s/10} - 1}{10^{a_p/10} - 1}}}{\arg \cosh \Omega_s} = \frac{\arg \cosh \sqrt{\frac{10^{2,2} - 1}{10^{0,03} - 1}}}{\arg \cosh 2,458} = 2,9333$$

Volíme  $n = 3$  (liché).

$$e = \sqrt{10^{a_p/10} - 1} = \sqrt{10^{0,03} - 1} = 0,267431$$

$$v = \frac{1}{n} \cdot \arg \sinh \frac{1}{e} = \frac{1}{3} \cdot \arg \sinh \frac{1}{0,267431} = 0,67649$$

$$\begin{aligned} s_m &= -\sinh v \cdot \sin \left[ (2m-1) \frac{p}{2n} \right] + j \cdot \cosh v \cdot \cos \left[ (2m-1) \frac{p}{2n} \right] = \\ &= -0,72928 \cdot \sin \left[ (2m-1) \frac{p}{6} \right] + j \cdot 1,23768 \cdot \cos \left[ (2m-1) \frac{p}{6} \right] \end{aligned}$$

$$m = 1; \quad s_1 = -0,72928 \cdot \sin\left[(2-1)\frac{p}{6}\right] + j \cdot 1,23768 \cdot \cos\left[(2-1)\frac{p}{6}\right] = -0,36464 + j1,07186$$

$$m = 2; \quad s_2 = -0,72928 \cdot \sin\left[(4-1)\frac{p}{6}\right] + j \cdot 1,23768 \cdot \cos\left[(4-1)\frac{p}{6}\right] = -0,72928$$

$$m = 3; \quad s_3 = -0,72928 \cdot \sin\left[(6-1)\frac{p}{6}\right] + j \cdot 1,23768 \cdot \cos\left[(6-1)\frac{p}{6}\right] = -0,36464 - j1,07186$$

$$P(s) = (s - s_2) \cdot (s - s_3) \cdot (s - s_1) = (s + 0,72928) \cdot (s + 0,36464 + j1,07186) \cdot (s + 0,36464 - j1,07186) = \\ = (s + 0,72928) \cdot (s^2 + s \cdot 0,72928 + 1,28185)$$

Přenosová funkce (pro normalizovaný filtr) tedy je

$$H(s) = \frac{0,72928}{s + 0,72928} \cdot \frac{1,28185}{s^2 + s \cdot 0,72928 + 1,28185}$$

$$\Omega_3 = \cosh\left(\frac{1}{3} \cdot \arg \cosh \frac{1}{0,267431}\right) = 1,22906$$

Činitel jakosti dílčího filtru 2. řádu je (viz kap. IV)

$$Q_1 = \sqrt{b_1} / a_1 = \sqrt{1,28185} / 0,72928 = 1,5525$$

Denormalizovaný přenos filtru požadovaných vlastností:  $s = p/(2p \cdot 10^4) = p/(2p \cdot f_0) = p/(6,2832 \cdot 10^4) \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
 H(p) &= \frac{0,72928 \cdot (6,2832 \cdot 10^4)}{p + 0,72928 \cdot (6,2832 \cdot 10^4)} \cdot \frac{1,28185 \cdot (6,2832 \cdot 10^4)^2}{p^2 + p \cdot 0,72928 \cdot (6,2832 \cdot 10^4) + 1,28185 \cdot (6,2832 \cdot 10^4)^2} = \\
 &= \frac{4,5822 \cdot 10^4}{p + 4,5822 \cdot 10^4} \cdot \frac{5,0605 \cdot 10^9}{p^2 + p \cdot 4,5822 \cdot 10^4 + 5,0605 \cdot 10^9}
 \end{aligned}$$

Pro realizaci požadovaných vlastností s mezní frekvencí (celého filtru)  $w_0 = 2p \cdot f_0 = 6,2832 \cdot 10^4$  rad/s tedy potřebujeme jednu dolní propust 1. řádu s charakteristickou (dílčí) frekvencí  $w_{p0} = 4,5822 \cdot 10^4$  rad/s a jednu dolní propust 2. řádu s charakteristickou frekvencí (dílčí)  $w_{p1} = \sqrt{5,0605 \cdot 10^9} = 7,1137 \cdot 10^4$  rad/s a činitelem jakosti  $Q_1 = 1,5525$ . Přenos poklesne o 3 dB na frekvenci  $f_3 = \Omega_3 \cdot f_0 = 12,29$  kHz.

### Minima a maxima

$$\Omega_{MAXm} = \cos(2m-1) \frac{p}{2 \cdot n} = \cos(2m-1) \frac{p}{6} ; \quad \Omega_{MAX1} = \cos \frac{p}{6} = 0,866025 ; \quad \Omega_{MAX2} = \cos \frac{3p}{6} = 0 ;$$

$$\Omega_{MINm} = \cos(m-1) \frac{p}{n} = \cos(m-1) \cdot \frac{p}{3} ; \quad \Omega_{MIN1} = \cos 0 = 1 ; \quad \Omega_{MIN2} = \cos(p/3) = 0,500000 ;$$

Zkontrolujme ze základní funkce – tabulka 5.

$$C_3(\Omega) = 4 \cdot \Omega^3 - 3 \cdot \Omega$$



$\Omega$	$C_3(\Omega)$	$e^2 C_3^2(\Omega)$	$ H(j\Omega) = 1/\sqrt{1 + e^2 C_3^2(\Omega)} $	POZNÁMKA
0	0	0	1 (0 dB)	MAX
0,5	-1	$7,15193 \cdot 10^{-2}$	0,966051 (-0,3dB)	MIN
0,866025	$-2,4227 \cdot 10^{-6}$	$4,19780 \cdot 10^{-13} \rightarrow 0$	1 (0 dB)	MAX
1	1	$7,15193 \cdot 10^{-2}$	0,966051 (-0,3dB)	MIN

**Tab.5** Rozložení minim a maxim

Požadovanou přenosovou funkci lze realizovat řadou různých zapojení. Pokud možno volíme struktury bez indukčností, tzv. struktury RC.

### Realizujeme nejdříve přenos zapojením z obr. 3.

Při volbě této struktury nemůžeme libovolně volit přenos  $K$  pro nízké kmitočty, ten je určen požadovaným činitelem jakosti. To však není v technické praxi obvykle na závadu. Pro dílčí filtr 2. řádu musí platit

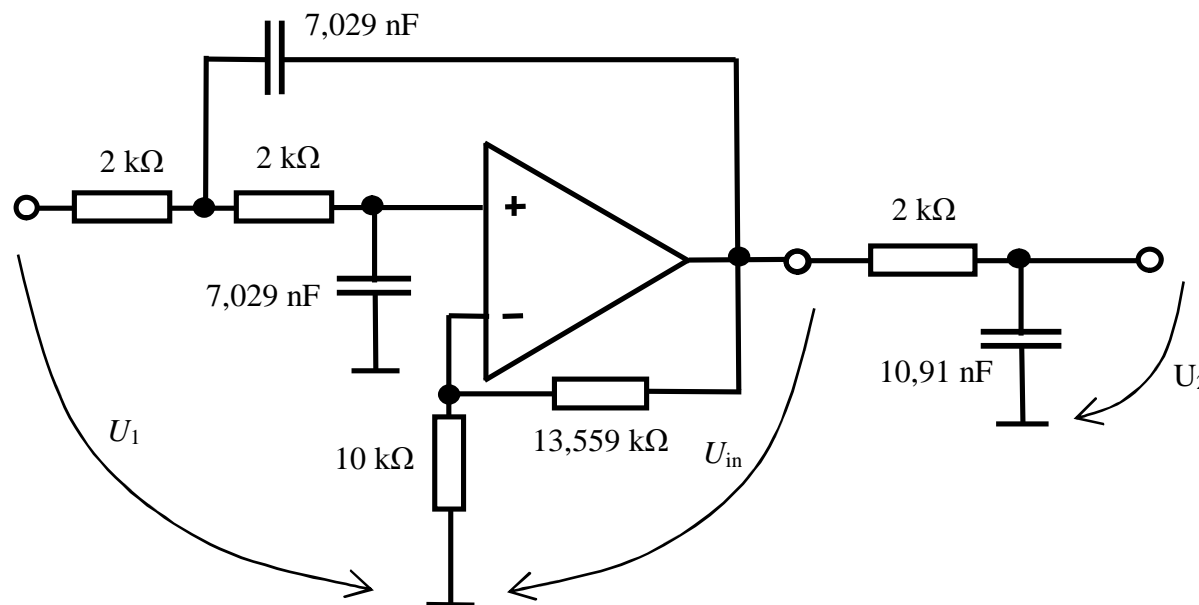
$$w_{p1} = \frac{1}{RC}; \quad 1/Q_1 = 3 - K$$

Zvolme  $R = 2 \text{ k}\Omega$ , potom  $C = 1/(w_{p1}R) = 1/(7,1137 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10^4) = 7,029 \text{ nF}$ .

Dále musí platit, že  $K = 3 - 1/Q_1 = 2,3559$ ; volíme-li hodnotu rezistoru  $R_f$ , potom pro dosažení požadovaného činitele jakosti platí pro rezistor  $(K - 1) \cdot R_f = (2 - 1/Q_1)R_f = |R_f = 10 \text{ k}\Omega| = (2 - 1/1,5525) \cdot 10 \text{ k}\Omega = 13,559 \text{ k}\Omega$ .

Požadovanou charakteristickou frekvenci  $\omega_{p0} = 4,5822 \cdot 10^4$  realizujeme prvky  $R_d; C_d$ . Platí  $\omega_{p0} = 1/(R_d C_d)$ . Zvolme  $R_d$ , potom  $C_d = 1/(\omega_{p0} R_d) = 1/(4,5822 \cdot 10^4 \cdot R_d) = |R_d = 2 \text{ k}\Omega| = 10,91 \text{ nF}$ .

Výsledné schéma je na obr. 14.

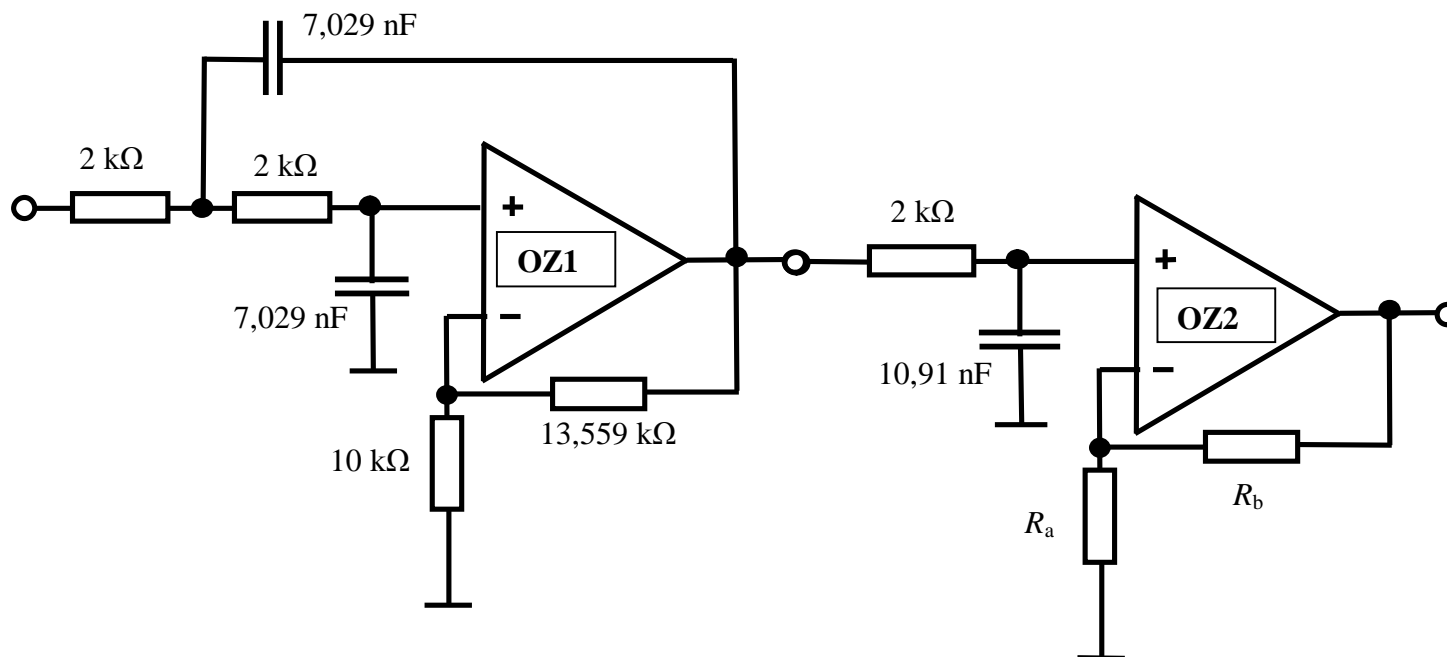


**Obr. 14** Čebyševova dolní propust se zvlněním 0,3 dB;  $f_0 = 10 \text{ kHz}$

Této struktuře odpovídá přenosová funkce ( $K = 2,3559$ )

$$H(p) = 2,3559 \cdot \frac{5,0605 \cdot 10^9}{p^2 + p \cdot 4,5822 \cdot 10^4 + 5,0605 \cdot 10^9} \cdot \frac{4,5822 \cdot 10^4}{p + 4,5822 \cdot 10^4}$$

ovšem pouze tehdy, je-li výstup dolní propusti nezatížen (vstupní impedance následující struktury je nekonečně velká). Rovněž musí platit, že zdroj signálu  $U_1$  má nulovou výstupní impedanci. V opačném případě by se tato impedance řadila do série „s  $R$ “ – to by vedlo ke změně vlastností filtru.



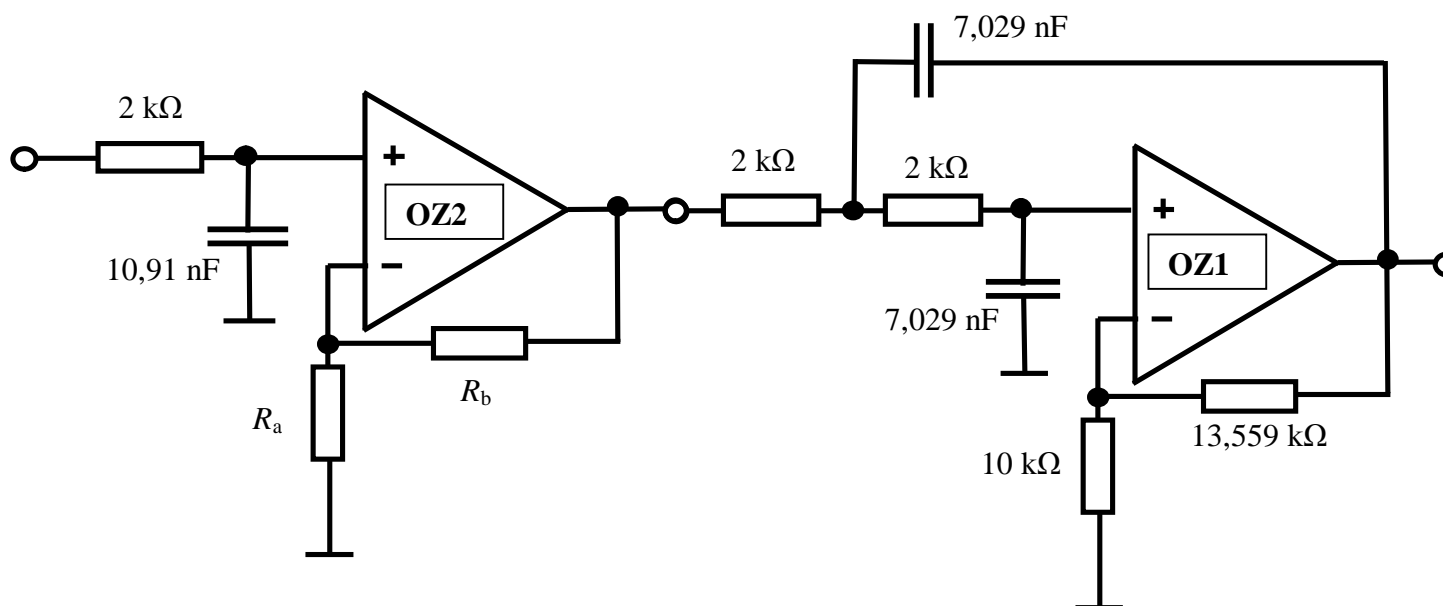
**Obr. 15** Čebyševova dolní propust se zvlněním 0,3 dB;  $f_0 = 10$  kHz – varianta s oddělovacím zesilovačem

Za cenu jednoho operačního zesilovače (OZ2) můžeme strukturu dále upravit – aniž se mění rozložení pólů přenosové funkce – obr. 15. Nyní již může být výstup filtru zatížen, protože operační zesilovač má ideálně nekonečný vstupní odpor a neovlivňuje poměry v obvodu „ $2\text{k}\Omega + 10,91\text{nF}$ “. Navíc vnáší do struktury další zesílení (ideálně frekvenčně nezávislé):  $1 + R_b / R_a$ .

Struktuře na obr. 15 odpovídá přenosová funkce ( $K = 2,3559$ )

$$H(p) = 2,3559 \cdot \frac{5,0605 \cdot 10^9}{p^2 + p \cdot 4,5822 \cdot 10^4 + 5,0605 \cdot 10^9} \cdot \frac{4,5822 \cdot 10^4}{p + 4,5822 \cdot 10^4} \cdot (1 + R_b / R_a)$$

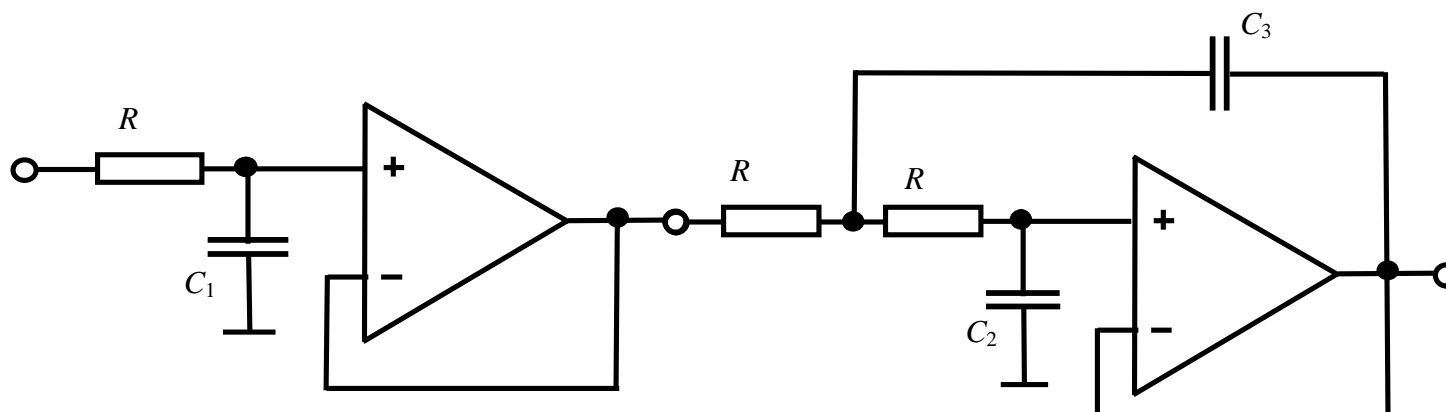
Ještě i zapojení na obr. 15 lze mírně upravit (zaměnit pořadí v kaskádě) – přenos struktury se již nemění – obr. 16.



**Obr. 16** Čebyševova dolní propust se zvlněním 0,3 dB;  $f_0 = 10\text{ kHz}$  – jiná varianta s oddělovacím zesilovačem

Obrovskou výhodou shora popsaných filtrů je to, že můžeme velmi snadno nastavovat činitel jakosti – nemění se charakteristický kmitočet (dílčího filtru 2. řádu). Současně se změnou činitele jakosti se ovšem mění i přenos na nízkých kmitočtech.

[Jiná možná realizace \[Punčochář;OZ v elektronice, str. 341\] je na obr. 17](#)



**Obr. 17** Čebyševova dolní propust se zvlněním 0,3 dB;  $f_0 = 10$  kHz – zesilovače zapojeny jako sledovače – ideálně s přenosem 1;  $R = 1,5$  k $\Omega$ ;  $C_1 = 14,55$  nF;  $C_2 = 3,02$  nF;  $C_3 = 29,1$  nF

Filtr 1. řádu je definován prvky  $R, C_1$ . Sledovač pouze impedančně odděluje následující stupeň kaskády. Platí  $w_{p0} = 1/(RC_1)$ . Zvolme  $R$ , potom  $C_1 = 1/(w_{p0}R) = 1/(w_0 \cdot b_0 \cdot R) = 1/(4,5822 \cdot 10^4 \cdot R) = |R = 1,5 \text{ k}\Omega| = 14,55 \text{ nF}$ .

Pro dílčí filtr 2. řádu platí (při dané realizaci; prvky  $R$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  a sledovač)

$$w_{p1}^2 = \frac{1}{R^2 C_2 C_3}$$

Činitel jakosti není nyní možné nastavovat zesílením zesilovače, je určen poměrem kapacit – kapacita  $C_3$  zavádí kladnou zpětnou vazbu, zvětšování její hodnoty vede ke zvětšování činitele jakosti. Platí

$$\frac{1}{Q_1} = 2 \times \sqrt{\frac{C_2}{C_3}}$$

Zvolíme –li hodnotu  $R$ , můžeme určit

$$C_2 C_3 = \frac{1}{w_{p1}^2 R^2}; \quad \sqrt{\frac{C_3}{C_2}} = 2 \cdot Q_1 \quad | \times C_2 \Rightarrow; \quad \sqrt{C_2 C_3} = 2 \cdot Q_1 \cdot C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{\sqrt{C_2 C_3}}{2 \cdot Q_1} = \frac{1}{2 \cdot Q_1 \cdot w_{p1} \cdot R}$$

$$C_2 = \frac{1}{2 \cdot Q_1 \cdot w_{p1} \cdot R} = \frac{1}{2 \cdot Q_1 \cdot w_0 \cdot \sqrt{b_1} \cdot R}$$

Dále platí

$$C_3 = \frac{1}{w_{p1}^2 R^2 C_2} = \frac{2 \cdot Q_1 \cdot w_{p1} \cdot R}{w_{p1}^2 R^2} = \frac{2 \cdot Q_1}{w_{p1} R}$$

$$C_3 = \frac{2 \cdot Q_1}{w_{p1} R} = \frac{2 \cdot Q_1}{w_0 \cdot \sqrt{b_1} \cdot R}$$

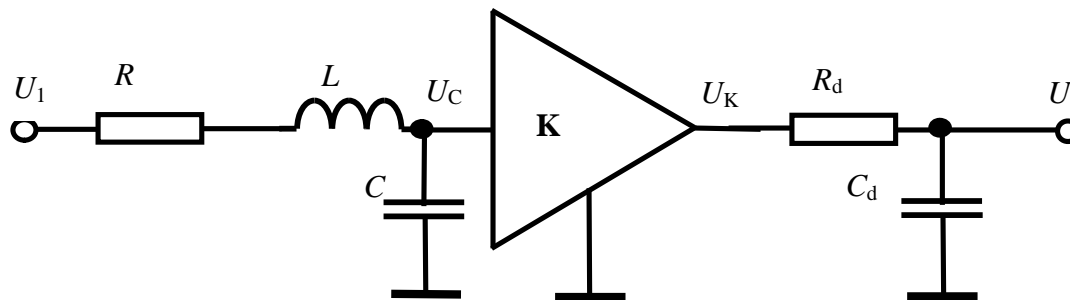
Po dosažení požadavků a  $R = 1,5 \text{ k}\Omega$  získáme hodnoty uvedené na obr. 17. Pro kontrolu  $Q_1 = 0,5 \cdot \sqrt{C_3/C_2} = 0,5 \cdot \sqrt{29,1/3,02} = 1,5521$ .

Struktuře na obr. 17 odpovídá přenosová funkce

$$H(p) = \frac{4,5822 \cdot 10^4}{p + 4,5822 \cdot 10^4} \cdot \frac{5,0605 \cdot 10^9}{p^2 + p \cdot 4,5822 \cdot 10^4 + 5,0605 \cdot 10^9}$$

Přenos struktury je sice roven jedné, mnohem obtížnější je ovšem nastavení činitele jakosti - musíme stále udržovat konstantní součin  $C_2 C_3 = 1/(w_{p1}^2 R^2)$ , při praktickém nastavování tedy musíme měnit obě kapacity.

[Možné zapojení s realizací filtru 2. řádu obvodem RLC je na obr. 18](#)



**Obr. 18** Čebyševova dolní propust se zvlněním 0,3 dB– ideálně s přenosem 1;  $f_0 = 10 \text{ kHz}$ ; K – oddělovací zesilovač;  $R = R_d = 2 \text{ k}\Omega$ ;  $C = 4,53 \text{ nF}$ ;  $L = 43,65 \text{ mH}$ ;  $C_d = 10,91 \text{ nF}$

Pro vytvoření přenosové funkce 2. řádu je nyní využít obvod  $RLC$ , oddělovací zesilovač (s nekonečnou vstupní a nulovou výstupní impedancí) zamezuje ovlivňování přenosu článku  $RLC$  následující dolní propustí 1. řádu).

Pomocí elementárních postupů určíme, že platí

$$\frac{U_K}{U_1} = K \cdot \frac{U_C}{U_1} = K \cdot \frac{1/(pC)}{R + pL + 1/(pC)} = K \cdot \frac{1/(LC)}{p^2 + p \cdot R/L + 1/(LC)} = K \cdot \frac{w_{p1}^2}{p^2 + p \cdot w_{p1}/Q_1 + w_{p1}^2}$$

$$w_{p1}^2 = 1/(LC); \quad R/L = w_{p1}/Q_1 \Rightarrow Q_1 = w_{p1} \cdot L/R$$

Volíme – li hodnotu  $R$  snadno určíme:

$$L = \frac{R \cdot Q_1}{w_{p1}}$$

$$\text{a dále } C = 1/(w_{p1}^2 L) = 1/\left(w_{p1}^2 \frac{R \cdot Q_1}{w_{p1}}\right) \Rightarrow$$

$$C = \frac{1}{w_{p1} \cdot R \cdot Q_1}$$

Vydeme-li i nyní ze získané aproximace ( $w_{p1} = 7,1137 \cdot 10^4$  rad/s;  $Q_1 = 1,5525$ ) a zvolíme opět  $R = R_d = 2$  k $\Omega$ , získáme hodnoty  $L = 43,65$  mH a  $C = 4,53$  nF,  $C_d$  je při dané volbě  $R = R_d = 2$  k $\Omega$  stejná jako na obr. 14 až obr. 16.



Struktuře na obr. 18 odpovídá přenosová funkce

$$H(p) = K \cdot \frac{4,5822 \cdot 10^4}{p + 4,5822 \cdot 10^4} \cdot \frac{5,0605 \cdot 10^9}{p^2 + p \cdot 4,5822 \cdot 10^4 + 5,0605 \cdot 10^9}$$

Všechny shora uvedené příklady realizace tedy vykazují pokles přenosu 0,3 dB na frekvenci 10 kHz a pokles přenosu 3 dB na frekvenci  $\Omega_3 \cdot 10 \text{ kHz} = 12,291 \text{ kHz}$ . Navrhněme tedy i Butterworthův a Besselův filtr s poklesem přenosu 3 dB na této frekvenci.

### Butterworthův filtr 3. řádu; $f_3 = f_0 = 12,291 \text{ kHz}$ (zde právě pokles přenosu 3 dB)

Z tabulky 4 zjistíme, že

$$H(s) = \frac{b_0}{s + b_0} \times \frac{b_1}{s^2 + a_1 s + b_1} = \frac{1}{s + 1} \times \frac{1}{s^2 + 1 \cdot s + 1} \Rightarrow |s = p/w_0| \Rightarrow H(p) = \frac{w_0}{p + w_0} \times \frac{w_0^2}{p^2 + p w_0 + w_0^2}$$

Zřejmě platí, že  $w_{p1} = w_{p2} = w_0 = 2p \cdot 12,291 \cdot 10^3 = 7,722 \cdot 10^4$ ;  $Q_1 = 1$ . Rozhodneme – li se pro realizaci pomocí struktury na obr. 17, můžeme použít pro něj uvedené vztahy:

$$C_1 = 1/(w_{p0} R) = 1/(w_0 \cdot R) = 1/(2 \cdot p \cdot 12,291 \cdot 10^3 \cdot R) = |R = 1,5 \text{ k}\Omega| = 8,633 \text{ nF}$$

$$C_2 = \frac{1}{2 \cdot Q_1 \cdot w_{p1} \cdot R} = \frac{1}{R \cdot w_0} \cdot \frac{1}{2 \cdot Q_1} = \frac{C_1}{2 \cdot Q_1} = 4,3165 \text{ nF}$$

$$C_3 = \frac{2 \cdot Q_1}{w_{p1} R} = \frac{1}{w_0 R} \cdot 2 \cdot Q_1 = C_1 \cdot 2 \cdot Q_1 = 17,266 \text{ nF}$$

Poměr kapacit je pro daný typ filtru (aproximaci) typický.

Nyní můžeme určit i přenos na  $f_s = 24,58$  kHz. Platí nyní  $\Omega_s = 24,58/12,291 = 2$ . Proto můžeme využít vztah ( $n = 3$ )

$$|H(j\Omega_s)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega_s^6}} = 0,124 \quad (-18,13) \text{ dB}$$

Samozřejmě můžeme dosadit  $f_s = 24,58$  kHz přímo do vztahu ( $p = j\omega$ )

$$|H(p)| = \left| \frac{w_0}{p + w_0} \right| \times \left| \frac{w_0^2}{p^2 + pw_0 + w_0^2} \right| = \dots = \left| \frac{1}{1 + j2} \right| \cdot \left| \frac{1}{-3 + j2} \right| = 0,124$$

Je zřejmé, že útlum Butterworthova filtru na  $f_s = 24,58$  kHz je menší než pro filtr Čebyševův. Rozdíl v útlumu by byl ještě větší, kdyby se jednalo o Čebyševův filtr 3. řádu s větším zvlněním v pásmu propustném.

### Besselův filtr 3. řádu; $f_3 = 12,291$ kHz (zde právě pokles přenosu 3 dB)

Pro Besselův filtr 3. řádu platí (tabulka 2), že  $\Omega_3 = 1,75$ . Požadujeme – li tedy  $f_3 = 12,291$  kHz, musí být  $f_3 = f_0 \cdot \Omega_3$ , tedy  $f_0 = f_3 / \Omega_3 = 12,291 \cdot 10^3 / 1,75 = 7,023$  kHz;  $w_0 = 2\pi f_0 = 44129$  rad/s. Z tabulky 1 zjistíme, že

$$H(s) = \frac{b_0}{s + b_0} \times \frac{b_1}{s^2 + a_1s + b_1} = \frac{2,3222}{s + 2,3222} \times \frac{6,4594}{s^2 + 3,6778 \cdot s + 6,4594} = \frac{15}{s^3 + 6s^2 + 15s + 15} \Rightarrow$$

$$\Omega_{p0} = 2,3222; \quad \Omega_{p1} = \sqrt{6,4594} = 2,5415; \quad Q_1 = 2,5415 / 3,6778 = 0,691$$

I nyní volíme realizaci pomocí struktury na obr. 17. Postup je stejný, jako u Butterworthova i Čebyševova filtru:



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Punčochář, J.: **Využití aproximačních funkcí pro kaskádní syntézu filtrů**

$$C_1 = 1/(w_{p0}R) = 1/(\Omega_{p0} \cdot w_0 \cdot R) = 1/(2,3222 \cdot w_0 \cdot R) = |R = 1,5 \text{ k}\Omega| = 6,51 \text{ nF}$$

$$C_2 = \frac{1}{2 \cdot Q_1 \cdot w_{p1} \cdot R} = \frac{1}{2 \cdot Q_1 \cdot \Omega_{p1} \cdot w_0 \cdot R} = |R = 1,5 \text{ k}\Omega| = 4,30 \text{ nF}$$

$$C_3 = \frac{2 \cdot Q_1}{w_{p1}R} = \frac{2 \cdot Q_1}{\Omega_{p1} \cdot w_0 \cdot R} = |R = 1,5 \text{ k}\Omega| = 8,22 \text{ nF}$$

Nyní můžeme určit i přenos na  $f_s = 24,58 \text{ kHz}$ . Platí nyní  $\Omega_s = 24,58/7,023 = 3,5$ . Vyjděme nyní z normovaného tvaru přenosu

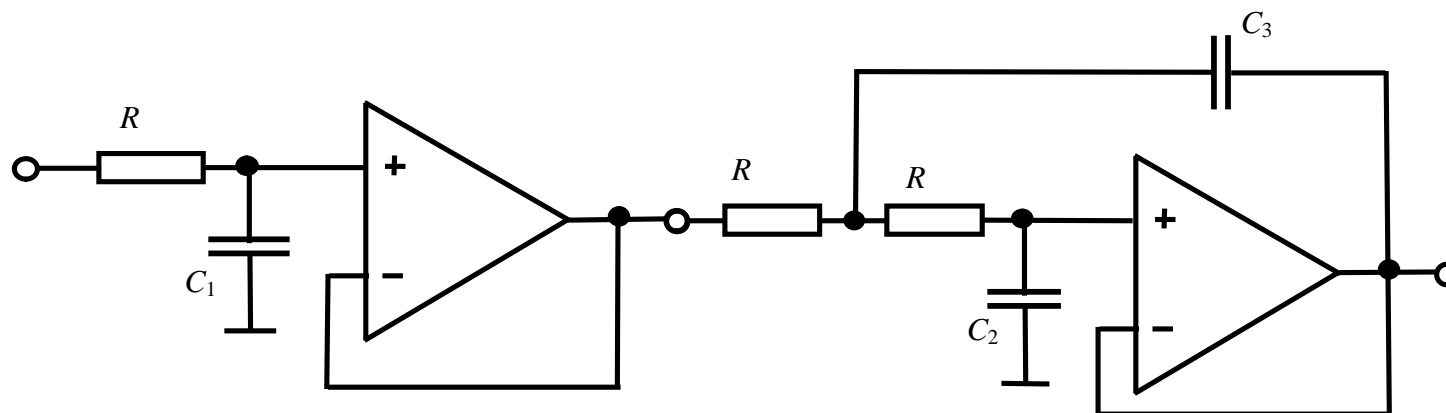
$$H(s) = \frac{15}{s^3 + 6s^2 + 15s + 15} = |s = j\Omega_s| = \frac{15}{-j\Omega_s^3 - 6\Omega_s^2 + j15\Omega_s + 15} = \dots = \frac{15}{-58,5 + j9,625}$$

$$|H(j,3,5)| = \left| \frac{15}{-58,5 + j9,625} \right| = 0,253 \quad (-11,94 \text{ dB})$$

Útlum Besselova filtru na  $f_s = 24,58 \text{ kHz}$  je menší než pro filtr Butterworthův. Normované skupinové zpoždění je 1 s (pro normovaný filtr). Pro dané  $w_0$  proto nyní platí

$$D(w) = -d\Phi(\Omega)/dw = (-d\Phi(\Omega)/d\Omega) \cdot d\Omega/dw = D(\Omega)/w_0 = 1/44129 = 22,66 \text{ ns}$$

Výsledky pro strukturu na obr. 17 jsou shrnuty na obr. 19.



**Obr. 19** Dolní propust 3. řádu;  $f_3 = 12,291$  kHz – pokles přenosu o 3 dB;  $R = 1500 \Omega$

- a)  $C_1 = 14,55$  nF;  $C_2 = 3,02$  nF;  $C_3 = 29,1$  nF - Čebyševova dolní propust se zvlněním 0,3 dB;  $f_0 = 10$  kHz
- b)  $C_1 = 8,633$  nF;  $C_2 = 4,3165$  nF;  $C_3 = 17,266$  nF - Butterworthova dolní propust;  $f_0 = 12,291$  kHz
- c)  $C_1 = 6,51$  nF;  $C_2 = 4,30$  nF;  $C_3 = 8,22$  nF - Besselova dolní propust;  $f_0 = 7,023$  kHz

Z podstaty použitých vztahů je zřejmé, že **změna charakteristických frekvencí** (přeladění) známé struktury je velmi snadná, charakteristiky aproximací jsou přitom zachovány. Potřebujeme – li hodnotu  $f_3$  zvětšit na 122,91 kHz (tedy desetkrát), stačí zmenšit všechny odpory  $R$  desetkrát. Nebo hodnoty všech kapacit zmenšíme desetkrát. Nebo odpory zmenšíme dvakrát a kondenzátory pětkrát – podle možností praktické realizace. Máme – li strukturu s charakteristickou frekvencí  $f_3$  ( $f_0$ ) a požadujeme novou frekvenci  $f'_3 = k \cdot f_3$ ; ( $f'_0 = k \cdot f_0$ ), dosáhneme toho volbou  $R \rightarrow R'/k$  (kondenzátory neměníme) nebo  $C_i \rightarrow C'_i/k$  (odpory neměníme) nebo  $RC_i \rightarrow R'C'_i/k$  (měníme odpory i kondenzátory). Pro  $k$  menší než jedna (snižování frekvence) to samozřejmě vede ke zvětšování hodnot součástek (proti výchozímu stavu).

## VI. HISTORIE

Z kontextu je zřejmé, že ve jmenovateli přenosové funkce musí být vždy Hurwitzův polynom. Pouze v tom případě je obvod stabilní – tedy i realizovatelný. Tato problematika byla studována již v 19. století, stejně jako problematika aproximací.

G

### A TREATISE

ON THE

### STABILITY OF A GIVEN STATE OF MOTION,

PARTICULARLY STEADY MOTION.

BEING THE ESSAY TO WHICH THE ADAMS PRIZE WAS ADJUDGED  
IN 1877, IN THE UNIVERSITY OF CAMBRIDGE.

BY

*Edward John***E. J. ROUTH, M.A., F.R.S., &c.**LATE FELLOW OF ST PETER'S COLLEGE, CAMBRIDGE,  
AND LATE EXAMINER IN THE UNIVERSITY OF LONDON.

London:

MACMILLAN AND CO.

1877

## Strana 11

1. The object of this Chapter has been explained at the end of Chapter I. Briefly, the criterion that the motion of a system of bodies should be stable is that the roots of a certain equation should have all their real parts negative. We propose to investigate these conditions.

Let the equation to be considered be

$$f(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_{n-1} x + p_n = 0.$$

Let the real roots be  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  and the imaginary roots be

$$\alpha_1 \pm \beta_1 \sqrt{-1}, \alpha_2 \pm \beta_2 \sqrt{-1}, \&c.$$

Then

$$f(x) = p_0 (x - \alpha_1) (x - \alpha_2) \dots (x^2 - 2\alpha_1 x + \alpha_1^2 + \beta_1^2), \&c.$$

If then  $\alpha_1, \alpha_2, \&c. \alpha_1, \alpha_2, \&c.$  are all negative, every term in each factor, and therefore in the product, must be positive.

It is therefore necessary that every term in the equation  $f(x) = 0$  should have the same sign. It will be convenient to suppose this sign to be positive.

II.]

THE SECOND METHOD.

17

Hence we have this rule, to find  $P_m$ , eliminate  $x$  between

$$\left. \begin{aligned} x^n + p_1 x^{n-2} + p_2 x^{n-4} + \dots &= 0 \\ p_1 x^{n-1} + p_3 x^{n-3} + \dots &= 0 \end{aligned} \right\},$$

and divide the result by the coefficient of  $p_1 p_2 p_3 \dots p_{n-1}$ .

It is obvious that the result may be written down as a determinant. On trial, however, it will be found more convenient to make the elimination by the method of eliminating the highest and lowest terms than to expand the determinant.

Ueber die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur  
Wurzeln mit negativen reellen Theilen besitzt.

Von

A. HURWITZ in Zürich.

1.

Auf Veranlassung meines verehrten Collegen, Herrn A. Stodola, beschäftigte ich mich vor einiger Zeit mit der Frage, wann eine Gleichung  $n^{\text{ten}}$  Grades mit reellen Coefficienten

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

nur solche Wurzeln besitzt, deren reelle Bestandtheile negativ sind. Wenn auch die Erledigung dieser Frage nach den Methoden von Sturm, Liouville, Cauchy und Hermite keine principielle Schwierigkeit bietet, so erlaube ich mir doch das Resultat, zu welchem ich gelangt bin, hier mitzutheilen, weil dasselbe wegen seiner einfachen, für die Anwendungen brauchbaren Gestalt vielleicht einiges Interesse verdient\*).

Die Herleitung des Resultates giebt mir zugleich Gelegenheit, die Methode von Hermite-Jacobi in einer Form darzustellen, in welcher sie eine Verallgemeinerung nach verschiedenen Richtungen zulässt.

Man darf sich, was hier geschehen soll, offenbar auf den Fall beschränken, wo der Coefficient  $a_0$  positiv ist. Denn andernfalls kann man die linke Seite der Gleichung mit dem Factor  $-1$  multipliciren. Man bilde nun die Determinante

\*) Herr Stodola benutzt mein Resultat in seiner Abhandlung über „die Regulirung von Turbinen“ (Schweiz. Bauzeitung, Bd. 23, Nr. 17, 18), deren Ergebnisse bei der Turbinenanlage des Badeortes Davos mit glänzendem Erfolge Anwendung gefunden haben. — Die obige Frage wird auch, worauf mich Herr Stodola aufmerksam machte, in Thomson und Tait's Natural Philosophy (1886. Theil I, pag. 390) aufgeworfen und ihre Erledigung als wünschenswerth bezeichnet.



274

A. HURWITZ.

$$(1) \quad \Delta_\lambda = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & a_{2\lambda-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & a_{2\lambda-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & a_{2\lambda-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_\lambda \end{vmatrix}$$

nach der Maassgabe, dass die Indices in der ersten Horizontalreihe immer um zwei Einheiten wachsen, in jeder Verticalreihe immer um eine Einheit abnehmen. Dabei ist allgemein  $a_n = 0$  zu setzen, wenn der Index  $n$  negativ oder grösser als  $n$  ist.

Dies vorausgeschickt, gilt der Satz:

*Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Gleichung*

$$(2) \quad a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

*in welcher der Coefficient  $a_0$  positiv vorausgesetzt wird, nur Wurzeln mit negativen reellen Bestandtheilen besitzt, ist die, dass die Werthe der Determinanten*

$$(3) \quad \Delta_1 = a_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_n$$

*sämmtlich positiv sind.*

Zu diesem Satze ist noch folgendes zu bemerken. Die Determinante  $\Delta_n$  ist, wie man leicht erkennt, indem man sie nach den Elementen der letzten Verticalreihe entwickelt, gleich  $a_n \cdot \Delta_{n-1}$ .

Daher ist die Forderung, dass  $\Delta_{n-1}$  und  $\Delta_n$  positiv sein sollen, gleichbedeutend mit der anderen, dass  $\Delta_{n-1}$  und  $a_n$  positiv sein sollen. Der obige Satz bleibt also richtig, wenn  $a_n$  an Stelle von  $\Delta_n$  gesetzt wird. Eine andere Bemerkung ist diese:

Betrachtet man die Reihe der Determinanten

$$(4) \quad \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \dots,$$

so verschwinden die Glieder dieser Reihe vom  $(n+1)$ ten ab identisch, d. h. für unbestimmt gedachte Werthe von  $a_0, a_1, \dots, a_n$ . Denn die Elemente der letzten Verticalreihe von  $\Delta_\lambda$  sind für  $\lambda > n$  sämmtlich Null. Die Bedingung des Satzes kann also auch dahin ausgesprochen werden, dass die nicht identisch verschwindenden Glieder der Reihe (4) sämmtlich positiv sein müssen. Die Glieder dieser Reihe sind ausführlich geschrieben diese:

$$a_0 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix}, \dots,$$

und man bildet hiernach ohne Weiteres die Bedingungen für jeden speciellen Werth von  $n$ .

erwähnte Beschaffenheit besitzen\*\*).

Zürich, den 12. December 1894.

\*) Crelle's Journal Bd. 52, pag. 39, Bulletin de la société mathématique de France, Bd. 7, pag. 128.

\*\*\*) Vgl. Biehler, Crelle's Journal Bd. 87, pag. 350, Laguerre, ib. Bd. 89, pag. 339.

Chebyshev, P. L., [Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes](#), *Mém. Acad. Sci. Pétersb.* 7 (1854), 539-568. Also to be found in *Oeuvres de P. L. Tchebychef, Volume 1*, 111-143, Chelsea, New York, 1961, from where this paper was scanned.

## Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes.

—

§ 1. Quand il s'agit d'assurer la direction du mouvement rectiligne d'une pièce soumise à un effort oblique, il ne suffit pas de rendre les inégalités des guides peu sensibles à la mesure; les déviations, qui ne sont pas appréciables à l'oeil nu, se manifestent clairement par les résistances passives qui en résultent. En guidant la tige du piston de la machine à vapeur à l'aide de coulisses ou glissoires, on prend un soin particulier de les exé-

.....

De plus, chose très importante pour nous, on peut remplacer la dernière équation, avec le même degré de précision, par celle-ci:

$$(z^3 - 1) \frac{dy}{dz} = 0.$$

En effet, comme cette équation n'a pas de racines multiples (ce qu'on voit d'après la forme de  $y$ ) on n'influera sur leurs valeurs numériques que

d'où, en supprimant le terme  $\frac{1 \cdot 2 \dots n \cdot 2^{n-1} Z}{N}$ , nous tirons

$$\cos(n\varphi) = 0,$$

ce qui donne

$$\varphi = \frac{2m+1}{2n} \pi,$$

$m$  étant un nombre entier quelconque.

Zolotarev, E. I., [Prilozhenie ellipticheskikh funkciy k voprosam o funkciyakh, najmenee i naibolee otklonyaykschikhsya ot nulya](#), *Oeuvres de E. I. Zolotarev*, Volume 2, Izdat. Akad. Nauk SSSR, Leningrad, 1932, pp. 1-59 (in Russian). The English title is "Applications of elliptic functions to problems of functions deviating least and most from zero". The original appeared in *Zapiski St-Petersburg Akad. Nauk* **30** (1877).

**ПРИЛОЖЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ К ВОПРОСАМ  
О ФУНКЦИЯХ, НАИМЕНЕЕ И НАИБОЛЕЕ ОТКЛОНЯЮЩИХСЯ  
ОТ НУЛЯ**

*Записки С.-Петербургской Академии Наук, XXX, № 5, 1877*

После работ Абеля, Якоби и других ученых теорию эллиптических функций можно считать уже законченною в главных чертах.

Дальнейшим исследователям остается только пользоваться этою теориею для решения различных вопросов анализа и математической физики.

Несмотря на уже имеющиеся, в высшей степени замечательные, приложения эллиптических функций к теории чисел, геометрии и механике, я полагаю, что со стороны приложений теория эллиптических функций оставляет желать еще многого.

Поэтому я счел не лишним рассмотреть некоторые вопросы о наименьших величинах, которые решаются при помощи основных формул теории эллиптических функций. Эти вопросы принадлежат к тому классу вопросов о наименьших величинах, приемы для решения которых были даны в первый раз П. Л. Чебышевым.\*

**1.** Согласимся называть *наибольшим отклонением* некоторой функции от нуля в пределах от  $x = a$  до  $x = b$  наибольшую численную величину функции для всех значений независимой переменной от  $x = a$  до  $x = b$ , со включением пределов.

Точно так же *наименьшим отклонением* какой-нибудь функции от нуля в пределах от  $x = a$  до  $x = b$  — наименьшую численную величину значений функции для всех значений независимой переменной от  $x = a$  до  $x = b$ , со включением пределов.

\* Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes, 1853, и его же: Sur les questions de Minima, etc.

Собр. соч. Е. И. Золотарева

## VII. LITERATURA

- [Balabanian] Balabanian, N.: Syntéza elektrických obvodů. SNTL, Praha 1965
- [Braun] Braun, J., Čížek, V., Kvasil, J., Novák, M.: Analýza lineárních obvodů a soustav. SNTL, Praha 1973
- [Butterworth] Butterworth, S.: On the Theory of Filter Amplifiers. Wireless Engineering, 1930, pp. 536 – 541
- [Čajka] Čajka, J., Kvasil, J.: Teorie lineárních obvodů. SNTL, Praha 1979
- [Davídek] Davídek, V., Laipert, M.: Analogové a číslicové filtry. ČVUT, Praha 2000
- [Guillemin] Guillemin, A. E.: Synthesis of Passive Networks. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1957  
(rusky Svjaz, Moskva 1970)
- [Hurwitz] Hurwitz, A.: Ueber die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negative reelen Theilen besitzt. Math. Ann. 46 (1895), pp. 273 - 284
- [Huelsman] Huelsman, L. P., Allen, P. E.: Introduction to the Theory and Design of Active Filters. Mc Graw – Hill, 1980  
(rusky Radio i svjaz, Moskva 1984)
- [Iverson] Iverson, K. E.: The Zeros of the Partial Sums of  $e^z$ . MTAC, vol. VII (1953), July, pp. 165 - 168
- [Johnson] Johnson, D., Johnson, J., Moore, H.: A handbook of active filters. Prentice – Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1980  
(rusky Energoizdat, Moskva 1983)
- [Kvasil] Kvasil, J., Čajka, J.: Úvod do syntézy lineárních obvodů. SNTL, Praha 1981
- [Lam] Lam, H, Y – F.: Analog and Digital Filters. Prentice – Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1979

[Lanne] Lanne, A. A.: Optimální syntéza lineárních obvodů. SNTL, Praha 1973

[Novák] Novák, M., Vlček, M.: Syntéza přenosových funkcí selektivních soustav. Academia, Praha 1981

[Punčochář] Punčochář, J.: Operační zesilovače v elektronice. BEN, Praha (1. vydání 1996, 5. vydání 2002)

[Punčochář] Punčochář, J.: Lineární obvody s elektronickými prvky. VŠB – TU Ostrava, 2002

[Routh] Routh, E. J.: A treatise on the stability of a given state of motion. Macmillan and co., London 1877

[Storch] Storch, L.: Synthesis of Constant – Time – Delay Ladder Networks Using Bessel Polynomials. Proc. IRE, vol. 42 (1954), pp. 1666 - 1675

[Thomson] Thomson, W. E.: Delay Networks Having Maximally Flat Frequency Characteristics. Proc. IEE, pt. 3, vol. 96 (1949), pp. 487 – 490

[TEXAS] Texas Instruments: SBFA001C – June 1991 – Revised February 2011, USER'S GUIDE

[Van Valkenburg] Van Valkenburg, M. E.: Analog Filter Design. Oxford University Press, 1982