Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava
Západočeská univerzita v Plzni

# Variační metody ve stavební mechanice

Ing. Martin Krejsa, Ph.D. a
Ing. Lenka Lausová

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Autoři: Ing. Martin Krejsa, Ph.D. a Ing. Lenka Lausová
Název: Variační metody ve stavební mechanice

© Krejsa, Lausová, 2010

# Předmluva

Tento materiál by měl sloužit jako stručná informace o možnostech, které nabízejí variační metody ve stavební mechanice. Přednáška je určena pro pedagogy v rámci projektu Matematika pro inženýry 21. století.

Text byl vysázen pomocí sázecího systému TEX ve formátu pdf LATEX $2_\varepsilon$.

V Ostravě 10. 6. 2010 Martin Krejsa a Lenka Lausová

# Obsah

**Předmluva** **3**

**1 Základní pojmy a postupy variačního počtu ve stavební mechanice** **5**

**2 Energetické variační metody** **12**
2.1 Deformační (Lagrangeův) variační princip . . . . . 14
2.2 Silový (Castiglianův) variační princip . . . . . 14

**3 Deformační (Lagrangeův) variační princip** **16**
3.1 Podrobnější výklad deformačního variačního principu . . . . . 16
3.2 Jednoduché příklady použití . . . . . 25

**4 Silový (Castiglianův) variační princip** **41**
4.1 Podrobný výklad silového variačního principu . . . . . 41
4.2 Jednoduché příklady použití . . . . . 53

**Literatura** **61**

# Kapitola 1

# Základní pojmy a postupy variačního počtu ve stavební mechanice

## Vlastnosti variačních funkcí

Variační funkce jsou předmětem řešení variačních úloh. Ve většině praktických aplikací mají variační funkce tvar

$$\boldsymbol{f}(x) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x), \tag{1.1}$$

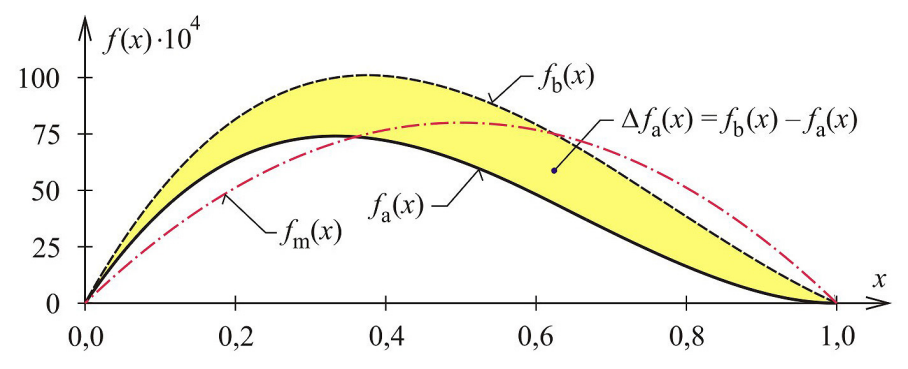
kde $f_i(x)(i = 0, \ldots, n)$ jsou funkce (nejčastěji polynomy), které jsou spojité v hodnotách

i ve svých derivacích v celém zkoumaném intervalu $x \in \langle a, b \rangle$ a $a_i$ jsou konstanty (tzv. *parametry*). Funkce $f_i$ musí rovněž splňovat okrajové podmínky úlohy při jakýchkoliv hodnotách konstant $a_i$.

Příkladem funkce (1.1) je kubická parabola z obrázku 1.1 ve tvaru:

$$\boldsymbol{f}(x) = a_1 x(1-x) + a_2 x(1-x^2). \tag{1.2}$$

## Variace funkce




Obr. 1.1 Příklad změny průběhu funkce

Na obrázku 1.1 jsou rovněž znázorněny grafy funkcí označené $f_a(x)$ s konkrétně zadanými parametry $a_1 = 0,100$, $a_2 = -0,050$ a $f_b(x)$ s parametry $a_1 = 0,105$ a $a_2 = -0,045$.

Žlutá plocha vyjadřuje *změnu průběhu* původní funkce $f_a(x)$ pozměněnými hodnotami konstant $a_1$ a $a_2$, tedy $\Delta f_a(x) = f_b(x) - f_a(x)$. Hodnoty konstant $a_i$ byly pozměněny o *konečné přírůstky*, a proto byla změna průběhu $\Delta f_a(x)$ také konečná. Při nekonečně malých změnách konstant $a_i$ dojde také k nekonečně malé změně průběhu funkce - **variaci funkce**.

## Funkcionál

Funkci (1.1) lze označit zjednodušeně jako $f = f(x)$ a její derivace podle nezávislé proměnné $x$ pak $f^{'}, f^{''}, \ldots$ . Funkcionálem pak bude integrál:

$$\Pi = \int_a^b F(f, f^{'}, f^{''}, \ldots)\,\mathrm{d}x, \tag{1.3}$$

kde $F$ je funkce funkcí $f, f^{'}, f^{''}, \ldots$ - **funkcionál**. V úlohách stavební mechaniky bývají funkcionály popsány zpravidla jako součet několika integrálů. V případě, že funkcionál obsahuje např. funkci (1.1) a její derivace, po integraci podle $x$ s uvažováním mezí $a$ a $b$ jeho hodnota závisí pouze na hodnotách parametrů $a_i$.

**Příklad 1.1.** Určete hodnotu funkcionálu

$$\Pi = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} \left[ f^{''}(x) \right]^2 - 0,768 f(x) \right\} \mathrm{d}x, \tag{1.4}$$

pro parametry $a_i$ funkcí $f_a(x)$ a $f_b(x)$ z obrázku 1.1.

*Řešení.* Funkce (1.2) má druhou derivaci rovnu $f^{''}(x) = -2a_1 - 6a_2$. Po dosazení $[f^{''}(x)]^2$ a $f(x)$ do (1.4) lze získat:

$$\Pi = \int_0^1 \left[2a_1^2 + 12a_1a_2x + 18a_2^2x^2 - 0,768a_1(x - x^2) - 0,768a_2(x - x^3)\right] \mathrm{d}x \tag{1.5}$$

a po integraci

$$\Pi = 2a_1^2 + 6a_1a_2 + 6a_2^2 - 0,128a_1 - 0,192a_2. \tag{1.6}$$

Hodnota funkcionálu (1.6) pro parametry funkce $f_a(x)$ z obrázku 1.1 $a_1 = 0,100$ a $a_2 = -0,050$ se rovná $\Pi_a = 0,00180$.

Pro funkci $f_b(x)$ s parametry $a_1 = 0,105$ a $a_2 = -0,045$ je hodnota funkcionálu $\Pi_b = 0,00105$.

▲

## Variace funkcionálu

V případě variace funkce $f = f(x)$ i jejích derivací $f', f'', \ldots$ se změní hodnota funkcionálu $\Pi$ - **variace funkcionálu**.

**Poznámka 1.2.** Při integraci funkcionálu podle nezávislé proměnné $x$ vystupovaly parametry $a_i$ jako konstanty např. (1.5). Po provedení integrace např. (1.6) je v souvislosti s variací funkcionálu nutné tyto parametry považovat za nezávislé proměnné a funkcionál za funkci $n$ těchto proměnných parametrů $a_i$:

$$\Pi = \Pi(a_1, \ldots, a_n). \tag{1.7}$$

## Variační úloha

Řešením tzv. **variační úlohy** je nalezení průběhu funkce $f = f(x)$ a jejích derivací $f', f'', \ldots$ při němž bude mít funkcionál (1.3) extrémní hodnotu. Řešení spočívá ve stanovení číselných hodnot všech součinitelů $a_i$ funkcionálu $\Pi$, k čemuž se v úlohách stavební mechaniky používají většinou *přímé metody*.

Funkcionál bude nabývat svou extrémní hodnotu, pokud budou všechny parciální derivace funkce $\Pi$ podle všech proměnných $a_k (k = 1, \ldots, n)$ nulové.

$$\frac{\partial\, \Pi}{\partial\, a_1} = 0, \ldots, \frac{\partial\, \Pi}{\partial\, a_n} = 0. \tag{1.8}$$

Variační úloha pak vede k řešení systému $n$ rovnic s kořeny $a_i$. Funkce $f_m(x)$, zajišťující extrémní hodnotu funkcionálu, se nazývá **extremála**.

**Příklad 1.3.** Určete extrémní hodnotu funkcionálu (1.4) z příkladu 1.1 a jeho extremálu $f_m(x)$.

*Řešení.* Parciální derivace (1.8) podle $a_1$ a $a_2$ sestavíme pro odvozený výraz (1.6):

$$\frac{\partial\, \Pi}{\partial\, a_1} = 4a_1 + 6a_2 - 0,128 = 0, \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial\, \Pi}{\partial\, a_2} = 6a_1 + 12a_2 - 0,192 = 0. \tag{1.10}$$

Řešením těchto dvou rovnic lze získat kořeny soustavy $a_1 = 0,032$ a $a_2 = 0$.

Dosazením obou parametrů do výrazu (1.6) vychází minimální hodnota funkcionálu $\Pi_{\min} = -0,002048$.

Případným vložením hodnot obou vypočtených parametrů do (1.2) je určena extremála, která nabývá tvar

$$\boldsymbol{f}_m(x) = 0,032x(1-x) \tag{1.11}$$

a odpovídá tedy rovnici kvadratické paraboly (je zobrazena na obrázku 1.1).

▲

**Poznámka 1.4.** Při řešení úloh stavební mechaniky variačními metodami není nutno určovat extrémní hodnoty funkcionálu $\Pi_{\min}$ nebo $\Pi_{\max}$, a proto je vhodnější nejprve v rovnici (1.3) derivovat integrand $F$ podle parametru $a_k$ a pak teprve integrovat podle $x$:

$$\frac{\partial\ \Pi}{\partial\ a_k} = \int_a^b \frac{\partial}{\partial\ a_k} F(f, f', f'', \ldots)\,\mathrm{d}x = 0 \tag{1.12}$$

pro $k = 1, \ldots, n$.

**Příklad 1.5.** Určete rovnice (1.8) z příkladu 1.3 způsobem popsaným v poznámce 1.4.

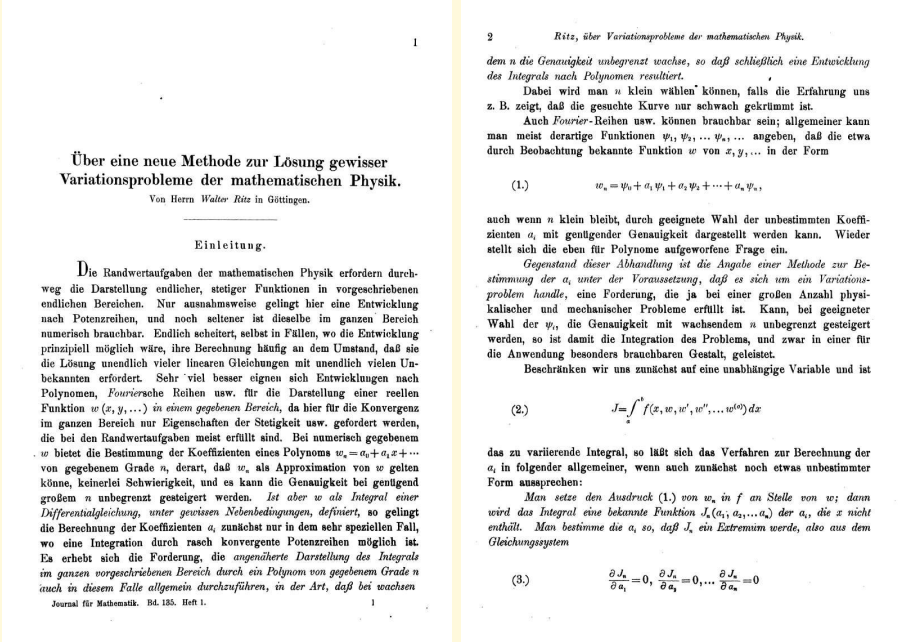
*Řešení.* Při řešení výrazu (1.4) podle (1.12) lze získat:

$$\frac{\partial\ \Pi}{\partial\ a_k} = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} \cdot 2f''(x) \frac{\partial\ f''(x)}{\partial\ a_k} - 0,768 \frac{\partial\ f(x)}{\partial\ a_k} \right\} \mathrm{d}x = 0 \tag{1.13}$$

pro $k = 1, 2$. Při dosazení $f''(x) = -2a_1 - 6a_2x$; $\frac{\partial\ f''(x)}{\partial\ a_1} = -2$ a $\frac{\partial\ f(x)}{\partial\ a_1} = x(1-x)$ pro $k = 1$; $\frac{\partial\ f''(x)}{\partial\ a_2} = -6x$ a $\frac{\partial\ f(x)}{\partial\ a_2} = x(1-x^2)$ pro $k = 2$ je možno získat po integraci rovnice (1.9) a (1.10), aniž by se sestavovaly funkcionály (1.5) a (1.6).

▲

Uvedené pojetí variační úlohy ve stavební mechanice bývá označováno jako **Ritzova metoda**. Walter Ritz (1878-1909) postup použil v roce 1908 při řešení tenkých desek.



1

**Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik.**

Von Herrn *Walter Ritz* in Göttingen.

Einleitung.

Die Randwertaufgaben der mathematischen Physik erfordern durchweg die Darstellung endlicher, stetiger Funktionen in vorgeschriebenen endlichen Bereichen. Nur ausnahmsweise gelingt hier eine Entwicklung nach Potenzreihen, und noch seltener ist dieselbe im ganzen Bereich numerisch brauchbar. Endlich scheitert, selbst in Fällen, wo die Entwicklung prinzipiell möglich wäre, ihre Berechnung häufig an dem Umstand, daß sie die Lösung unendlich vieler linearen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten erfordert. Sehr viel besser eignen sich Entwicklungen nach Polynomen, *Fourier*sche Reihen usw. für die Darstellung einer reellen Funktion $w(x, y, \ldots)$ *in einem gegebenen Bereich*, da hier für die Konvergenz im ganzen Bereich nur Eigenschaften der Stetigkeit usw. gefordert werden, die bei den Randwertaufgaben meist erfüllt sind. Bei numerisch gegebenem $w$ bietet die Bestimmung der Koeffizienten eines Polynoms $w_n = a_0 + a_1 x + \cdots$ von gegebenem Grade $n$, derart, daß $w_n$ als Approximation von $w$ gelten könne, keinerlei Schwierigkeit, und es kann die Genauigkeit bei genügend großem $n$ unbegrenzt gesteigert werden. *Ist aber $w$ als Integral einer Differentialgleichung, unter gewissen Nebenbedingungen, definiert*, so gelingt die Berechnung der Koeffizienten $a_i$ zunächst nur in dem sehr speziellen Fall, wo eine Integration durch rasch konvergente Potenzreihen möglich ist. Es erhebt sich die Forderung, die *angenäherte Darstellung des Integrals im ganzen vorgeschriebenen Bereich durch ein Polynom von gegebenem Grade $n$ auch in diesem Falle allgemein durchzuführen, in der Art, daß bei wachsen*

Journal für Mathematik. Bd. 135. Heft 1. 1

2 *Ritz, über Variationsprobleme der mathematischen Physik.*

*dem $n$ die Genauigkeit unbegrenzt wachse, so daß schließlich eine Entwicklung des Integrals nach Polynomen resultiert.*

Dabei wird man $n$ klein wählen können, falls die Erfahrung uns z. B. zeigt, daß die gesuchte Kurve nur schwach gekrümmt ist.

Auch *Fourier*-Reihen usw. können brauchbar sein; allgemeiner kann man meist derartige Funktionen $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n, \ldots$ angeben, daß die etwa durch Beobachtung bekannte Funktion $w$ von $x, y, \ldots$ in der Form

$$(1.) \qquad w_n = \psi_0 + a_1 \psi_1 + a_2 \psi_2 + \cdots + a_n \psi_n,$$

auch wenn $n$ klein bleibt, durch geeignete Wahl der unbestimmten Koeffizienten $a_i$ mit genügender Genauigkeit dargestellt werden kann. Wieder stellt sich die eben für Polynome aufgeworfene Frage ein.

*Gegenstand dieser Abhandlung ist die Angabe einer Methode zur Bestimmung der $a_i$ unter der Voraussetzung, daß es sich um ein Variationsproblem handle*, eine Forderung, die ja bei einer großen Anzahl physikalischer und mechanischer Probleme erfüllt ist. Kann, bei geeigneter Wahl der $\psi_i$, die Genauigkeit mit wachsendem $n$ unbegrenzt gesteigert werden, so ist damit die Integration des Problems, und zwar in einer für die Anwendung besonders brauchbaren Gestalt, geleistet.

Beschränken wir uns zunächst auf eine unabhängige Variable und ist

$$(2.) \qquad J = \int_a^b f(x, w, w', w'', \ldots w^{(\alpha)})\, dx$$

das zu variierende Integral, so läßt sich das Verfahren zur Berechnung der $a_i$ in folgender allgemeiner, wenn auch zunächst noch etwas unbestimmter Form aussprechen:

*Man setze den Ausdruck* (1.) *von $w_n$ in $f$ an Stelle von $w$; dann wird das Integral eine bekannte Funktion $J_n(a_1, a_2, \ldots a_n)$ der $a_i$, die $x$ nicht enthält. Man bestimme die $a_i$ so, daß $J_n$ ein Extremum werde, also aus dem Gleichungssystem*

$$(3.) \qquad \frac{\partial J_n}{\partial a_1} = 0, \ \frac{\partial J_n}{\partial a_2} = 0, \ldots \frac{\partial J_n}{\partial a_n} = 0$$

Obr. 1.2: Ukázka Ritzovy práce

Obsah
11. strana ze 61
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka/Okno

# Kapitola 2

# Energetické variační metody

Vlastnosti konstrukce v reálném zatěžovacím stavu, které jsou důležité pro další výpočet:

1. V zatížené konstrukci vzniká tzv. *pole napětí*, tj. souhrn **normálových napětí** $\sigma$ a **smykových napětí** $\tau$ ve všech bodech tělesa tvořícího konstrukci. U prutové konstrukce je pole napětí vyjádřeno prostřednictvím **průběhu vnitřních sil** ve všech průřezech prutů. Vnitřní síly splňují **diferenciální podmínky rovnováhy** na všech elementech konstrukce a spolu s vnějšími silami tvoří **rovnovážnou soustavu sil**.

2. V deformované konstrukci vzniká tzv. pole deformací, tj. souhrn **poměrných protažení** $\varepsilon$ a **zkosení** $\gamma$ ve všech bodech tělesa tvořícího konstrukci. U prutové konstrukce je pole deformací vyjádřeno prostřednictvím **elastických čar** prutů. Deformace splňují **podmínky kompatibility** na všech elementech konstrukce a elastické čáry respektují **kinematické podmínky** předepsané vnějšími vazbami.

3. Pole napětí (resp. vnitřní síly) a pole deformací (resp. elastické čáry) jsou vzájemně vázána **fyzikálními rovnicemi** (u lineárně pružného materiálu tedy Hookovým zákonem).

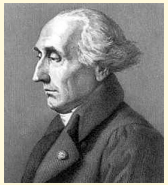
4. Vnější síly zatížené a deformované konstrukce vykazují potenciální energii (stručněji *reálný potenciál*) $\Pi_{\mathrm{e}}$, vnitřní síly pak potenciální energii $\Pi_i$. **Celkový reálný potenciál soustavy $\Pi$ je dán součtem $\Pi = \Pi_{\mathrm{e}} + \Pi_i$ a je roven nule: $\Pi = 0$.**

Pomocí celkového potenciálu soustavy lze vyřešit neznámé vnitřní síly, reakce a deformace konstrukce. Metody výpočtu jsou z matematického hlediska založeny na použití variačního počtu a jsou označovány jako **energetické variační metody**. Energetických variačních metod je v současnosti známo několik. Z fyzikálního hlediska se liší tzv. **energetickým variačním principem**. Zásadní postavení mají zejména dva tzv. *klasické variační principy*, které jsou historicky nejstarší a také nejpoužívanější:

- **Deformační (Lagrangeův) variační princip**
- **Silový (Castiglianův) variační princip**

## 2.1. Deformační (Lagrangeův) variační princip

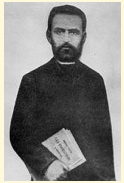
**Definice 2.1.** Ze všech možných aproximací pole deformací (elastické čáry), které splňují podmínky kompatibility a okrajové podmínky předepsané vnějšími vazbami, je nejvýstižnější ta, která minimalizuje deformační potenciál ${}^{d}\Pi$.



Deformační variační princip je pojmenován podle francouzského matematika a fyzika Josepha-Louise Lagrangeho (1736-1813), který se jako první zabýval počátkem 19.století využitím pojmu mechanické práce ke studiu statické rovnováhy tuhých (nedeformovatelných) těles.

## 2.2. Silový (Castiglianův) variační princip

**Definice 2.2.** Ze všech možných aproximací pole napětí (vnitřních sil), které splňují diferenciální podmínky rovnováhy a vyhovují podmínkám rovnováhy vnitřních a vnějších sil, je nejvýstižnější ta, která minimalizuje silový potenciál ${}^{s}\Pi$.



Silový variační princip je pojmenován podle italského vědce Carla Alberta Castigliana (1847-1884), který v roce 1875 poprvé publikoval ucelenou teorii výpočtu pružných soustav založenou na pojmu přetvárné práce.

**Poznámka 2.3.** Mezi oběma principy existuje teoretická souvislost, zvaná **dualita**. Záměnou odpovídajících pojmů (*pole napětí* ↔ *pole deformací*, *podmínky rovnováhy* ↔ *podmínky kompatibility* apod.) přejde jeden princip v druhý.

**Poznámka 2.4.** Energetické variační metody jsou metody **přibližné**. Přesné řešení lze získat pouze ve zvláštních případech, kdy skutečný tvar elastické čáry nebo skutečný průběh vnitřních sil je obsažen ve zvolené aproximační funkci.

**Poznámka 2.5.** U prutových soustav se energetické variační principy používají jen k řešení jednoduchých úloh (např. k výpočtu deformací v zadaných bodech konstrukce nebo k výpočtu reakcí staticky neurčitých nosníků), kde se většinou získá i přesné řešení. Hlavní uplatnění energetických variačních metod je třeba hledat při řešení plošných a masivních prostorových konstrukcí metodou konečných prvků.

# Kapitola 3

# Deformační (Lagrangeův) variační princip

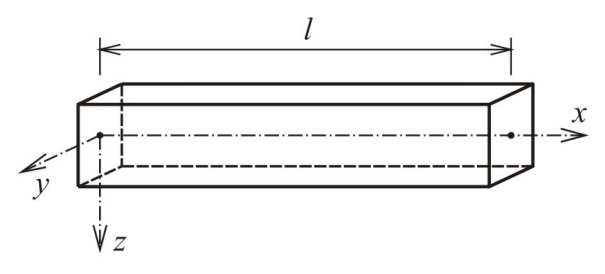
## 3.1. Podrobnější výklad deformačního variačního principu

### Aproximace elastických čar

Pro případ obecně namáhaného přímého prutu v prostoru (umístěného v lokální souřadnicové soustavě podle obrázku 3.1) lze aproximovat, za předpokladu zanedbání vlivu posouvajících sil na deformaci, čtyři elastické čáry s využitím polynomů:

(a) rovnice osových posunů

$$u = u(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i, \tag{3.1}$$




Obr. 3.1 Souřadnicová soustava přímého prutu v prostoru

(b) rovnice ohybové čáry v hlavní rovině $x$,$z$

$$w = w(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i, \tag{3.2}$$

(c) rovnice ohybové čáry v hlavní rovině $x$,$y$

$$v = v(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i, \tag{3.3}$$

(d) rovnice pootočení při kroucení

$$\vartheta = \vartheta(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \vartheta_i, \tag{3.4}$$

V rovnicích (3.1) až (3.4) představují $a_i$ parametry aproximačních funkcí, $u_i = u_i(x)$ až $\vartheta_i = \vartheta_i(x)$ dílčí aproximační polynomy zvolené tak, aby funkce (3.1) až (3.4) vyhovovaly okrajovým podmínkám, které jsou předepsány vnějšími vazbami.

**Poznámka 3.1.** Výsledky variačních řešení lze superponovat, proto lze každou elastickou čáru vyšetřovat v samostatné úloze. Z tohoto důvodu jsou parametry $a_i$ i jejich počet $n$ označeny v rovnicích (3.1) až (3.4) stejně.

**Poznámka 3.2.** Aproximační polynomy v rovnicích (3.1) až (3.4) jsou po celé délce prutů spojité ve všech hodnotách i derivacích. K uspokojivým výsledkům pak mohou vést pouze při zatíženích, které neobsahují osamělé síly nebo momenty, jež by způsobovaly nespojitosti v derivacích ohybových čar.

## Deformační potenciál vnějších sil

Energie vnějších sil působících na vyšetřovaný prut je u jednotlivých elastických čar dána vzorci:

$$u(x) : {}^{d}\Pi_{\mathrm{e}} = -\sum_j P_{x,j} u_j - \sum_j \int_{\bar{a}_j}^{\bar{b}_j} n_{x,j}(x) u \,\mathrm{d}x, \tag{3.5}$$

$$w(x) : {}^{d}\Pi_{\mathrm{e}} = -\sum_j P_{z,j} w_j - \sum_j M_{y,j} w_j' - \sum_j \int_{\bar{a}_j}^{\bar{b}_j} q_{z,j}(x) w \,\mathrm{d}x, \tag{3.6}$$

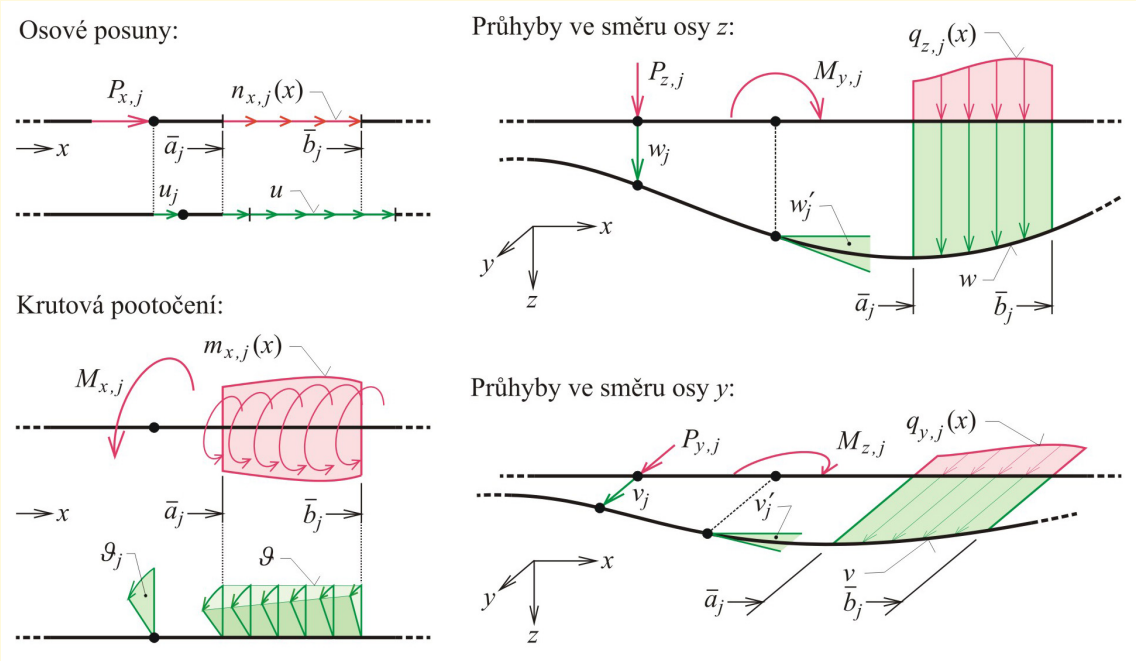
$$v(x) : {}^{d}\Pi_{\mathrm{e}} = -\sum_j P_{y,j} v_j - \sum_j M_{z,j} v_j' - \sum_j \int_{\bar{a}_j}^{\bar{b}_j} q_{y,j}(x) v \,\mathrm{d}x, \tag{3.7}$$

$$\vartheta(x) : {}^{d}\Pi_{\mathrm{e}} = -\sum_{j} M_{x,j}\vartheta_j - \sum_{j} \int_{\bar{a}_j}^{\bar{b}_j} m_{x,j}(x)\vartheta \,\mathrm{d}x. \tag{3.8}$$

Na energii vnějších sil daného prutu se tedy podílejí:

- Osamělé síly $P_{x,j}, P_{y,j}, P_{z,j}$ působící ve směrech jednotlivých souřadnicových os, které konají práci na posunech svých působišť $u_j, v_j, w_j$ v týchž směrech,
- Spojitá silová zatížení $n_{x,j}(x)$ působící v ose prutu $x$, která konají práci na osových posunech $u$,
- Spojitá příčná silová zatížení $q_{y,j}(x), q_{z,j}(x)$ působící ve směrech souřadnicových os $y, z$, která konají práci na pořadnicích ohybových čar $v, w$,
- Osamělé ohýbající momenty $M_{y,j}, M_{z,j}$ působící v hlavních rovinách prutu $x, z$ a $x, y$, které konají práci na pootočeních, tedy na derivacích ohybových čar $w_j^{'}, v_j^{'}$ v místech svých působišť,
- Osamělé zkrucující momenty $M_{x,j}$, které konají práci na krutových pootočeních $\vartheta_j$ svých působišť,
- Spojitá momentová zkrucující zatížení $m_{x,j}(x)$, která konají práci na krutových pootočeních $\vartheta$.

Kladné smysly uvedených veličin jsou znázorněny na obrázku 3.2.




Obr. 3.2 Deformační potenciál vnějších sil na jednotlivých elastických čárách

## Deformační potenciál vnitřních sil

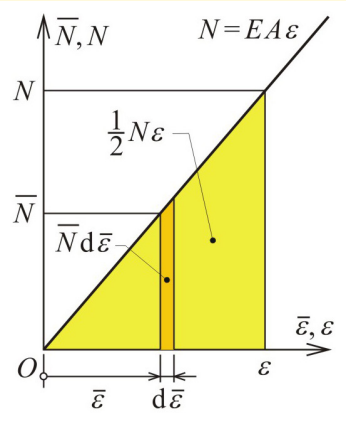
U fyzikálně lineárního materiálu je závislost mezi normálovou silou $N$ a poměrným protažením $\varepsilon$ dána Hookovým zákonem $N = EAu' = EA\varepsilon$. Pokud se ve variační úloze mění tvar

elastické čáry (tedy funkce $u(x)$ a tím i poměrné protažení $\varepsilon$), změnou jejich aproximačních parametrů (tedy čistě matematickými prostředky bez ohledu na vnější síly) vystupuje protažení $\varepsilon$ jako nezávisle proměnná veličina a energii (zápornou práci) připadající na elementární vrstvičku o tloušťce $\mathrm{d}x$ lze získat integrací:

$$\frac{\mathrm{d}^d\Pi_i}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}L_i}{\mathrm{d}x} = \int_0^{\varepsilon} \overline{N}\,\mathrm{d}\overline{\varepsilon} = EA\int_0^{\varepsilon} \overline{\varepsilon}\,\mathrm{d}\overline{\varepsilon} = EA\frac{1}{2}\varepsilon^2 = \frac{1}{2}EAu'^2. \tag{3.9}$$

Na obrázku 3.3 je tato energie vrstvičky taženého prutu znázorněna žlutě vybarveným trojúhelníkem o ploše $\frac{1}{2}N\varepsilon$. Obdobně lze odvodit energii i pro ostatní elastické čáry. Vzorec pro deformační potenciál vnitřních sil přímého prutu pro fyzikálně lineární materiál s aproximačními funkcemi s měnitelnými parametry pak má tvar:

$${}^d\Pi_i = \frac{1}{2}\int_0^l (EAu'^2 + EI_y w''^2 + EI_z v''^2 + GI_t \vartheta''^2)\,\mathrm{d}x. \tag{3.10}$$




Obr. 3.3 Deformační potenciál taženého prutu

## Výpočet extremál

Celkový deformační potenciál soustavy je dán součtem ${}^d\Pi = {}^d\Pi_i + {}^d\Pi_e$. Podmínka pro stanovení minima tohoto funkcionálu je nulová hodnota jeho variace, tj. $\delta^d\Pi = \delta^d\Pi_i + \delta^d\Pi_e = 0$, neboli

$$\delta^d \Pi_i = -\delta^d \Pi_\mathrm{e}. \tag{3.11}$$

Tato podmínka bude splněna, vyjádří-li se variace obou potenciálů v rovnici (3.11) daných vztahy (3.5) až (3.8) pomocí parciálních derivací podle aproximačních parametrů. Pro elastickou čáru $u = u(x)$ tak lze získat $n$ dvojic výrazů ($k = 1, \ldots, n$):

$$\frac{\partial^d \Pi_i}{\partial a_k} = \frac{1}{2}\int_0^l EA2u' \frac{\partial u'}{\partial a_k}\,\mathrm{d}x = \int_0^l EA\left(\sum_{i=1}^n a_i u_i'\right) u_k'\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n a_i \int_0^l EAu_i'u_k'\,\mathrm{d}x, \tag{3.12}$$

$$-\frac{\partial^d \Pi_\mathrm{e}}{\partial a_k} = \sum_j P_{x,j}\left(\frac{\partial u}{\partial a_k}\right) + \sum_j \int_{\bar{a}_j}^{\bar{b}_j} n_{x,j}(x)\frac{\partial u}{\partial a_k}\,\mathrm{d}x = \sum_j P_{x,j}(u_k)_j + \sum \int_{\bar{a}_j}^{\bar{b}_j} n_{x,j}(x)u_k\,\mathrm{d}x. \tag{3.13}$$

Vznikne tak soustava $n$ rovnic ($k = 1, \ldots, n$) pro výpočet parametrů $a_i$ ($i = 1, \ldots, n$):

$$\sum_{i=1}^n a_i \int_0^l EAu_i'u_k'\,\mathrm{d}x = \sum_j P_{x,j}(u_k)_j + \sum \int_{\bar{a}_j}^{\bar{b}_j} n_{x,j}(x)u_k\,\mathrm{d}x. \tag{3.14}$$

Soustavu rovnic (3.14) lze zapsat přehledněji maticově:

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{Z} \rightarrow [k_{i,k}]\cdot\{a_i\} = \{Z_k\}. \tag{3.15}$$

kde $\mathbf{k}$ značí matici levých stran rovnic tzv. *matici tuhosti*, $\mathbf{a}$ sloupcový vektor aproximačních součinitelů a $\mathbf{Z}$ sloupcový vektor pravých stran rovnic tzv. *zatěžovací vektor*.

Obdobně lze odvodit soustavy rovnic i pro ostatní tři typy elastických čar. Pro složky matice tuhosti a zatěžovacího vektoru pak u jednotlivých typů elastických čar platí:

(a) rovnice osových posunů $u = u(x)$ :

$$k_{i,k} = \int_0^l EAu_i^{'}u_k^{'}\,\mathrm{d}x;\; Z_k = \sum_j P_{x,j}(u_k)_j + \sum_j \int_{\overline{a}_j}^{\overline{b}_j} n_{x,j}(x)u_k\,\mathrm{d}x, \tag{3.16}$$

(b) rovnice ohybové čáry $w = w(x)$ v hlavní rovině $x$,$z$:

$$k_{i,k} = \int_0^l EI_y w_i^{''}w_k^{''}\,\mathrm{d}x;\; Z_k = \sum_j P_{z,j}(w_k)_j + \sum_j M_{y,j}(w_k^{'})_j + \sum_j \int_{\overline{a}_j}^{\overline{b}_j} q_{z,j}(x)w_k\,\mathrm{d}x, \tag{3.17}$$

(c) rovnice ohybové čáry $v = v(x)$ v hlavní rovině $x$,$y$:

$$k_{i,k} = \int_0^l EI_z v_i^{''}v_k^{''}\,\mathrm{d}x;\; Z_k = \sum_j P_{y,j}(v_k)_j + \sum_j M_{z,j}(v_k^{'})_j + \sum_j \int_{\overline{a}_j}^{\overline{b}_j} q_{y,j}(x)v_k\,\mathrm{d}x, \tag{3.18}$$

(d) rovnice pootočení při kroucení $\vartheta = \vartheta(x)$ :

$$k_{i,k} = \int_0^l GI_t\vartheta_i^{'}\vartheta_k^{'}\,\mathrm{d}x;\; Z_k = \sum_j M_{x,j}(\vartheta_k)_j + \sum_j \int_{\overline{a}_j}^{\overline{b}_j} m_{x,j}(x)\vartheta_k\,\mathrm{d}x. \tag{3.19}$$

Po vyřešení kterékoliv z těchto soustav lze získat hodnoty parametrů $a_i$ a tím i extremálu čili nejvýstižnější aproximaci (případně i přesný tvar) příslušné elastické čáry.

## Vnitřní síly a reakce ve vnějších vazbách

Průběhy vnitřních sil lze stanovit z derivací elastických čar:

(a) Normálová síla $N$

$$N = EA\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = EAu', \tag{3.20}$$

(b) Ohybový moment $M_y$ v hlavní rovině $x,z$

$$M_y = -EI_y\frac{\mathrm{d}\varphi_y}{\mathrm{d}x} = -EI_y\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2} = -EI_yw'', \tag{3.21}$$

(c) Ohybový moment $M_z$ v hlavní rovině $x,y$

$$M_z = -EI_zv'', \tag{3.22}$$

(d) Kroutící moment $T$

$$T = GI_t\vartheta'. \tag{3.23}$$

Vzhledem k zanedbání vlivu posouvajících sil na deformace se průběhy posouvajících sil $V_z$ a $V_y$ určí jako derivace odpovídajících ohybových momentů:

(e) Posouvající síla $V_z$ v hlavní rovině $x,z$

$$V_z = \frac{\mathrm{d}M_y}{\mathrm{d}x} = -EI_yw''', \tag{3.24}$$

(f) Posouvající síla $V_y$ v hlavní rovině $x,y$

$$V_y = \frac{\mathrm{d}M_z}{\mathrm{d}x} = -EI_zv'''. \tag{3.25}$$

Reakce ve vnějších vazbách se pak určí pomocí hodnot vnitřních sil v podporových bodech nebo z podmínek rovnováhy.

**Poznámka 3.3.** Vzhledem k omezenému rozsahu přednášky se další výklad nezabývá výpočtem zatěžovacího stavu zadaných popuštění podpor nebo oteplením konstrukce.

## 3.2. Jednoduché příklady použití

**Příklad 3.4.** Železobetonový pilíř obdélníkového průřezu s proměnnou výškou průřezu podle obrázku 3.4 je namáhán jen vlastní silou. Měrná hmotnost staviva je $\rho = 2400\,\mathtt{kg/m^3}$, modul pružnosti v tahu a tlaku $E = 2 \cdot 10^7\,\mathtt{kPa}$. Pomocí deformačního variačního principu určete:

a) tvar elastické čáry $u = u(x)$,

b) průběh normálových sil $N$,

c) reakce $R_{a,b}$ a $R_{b,a}$.

### Přípravný výpočet

a) Počátek lokálních souřadnic $x$ je v horní podpoře $a$ a její kladný smysl směřuje k dolnímu konci $b$.

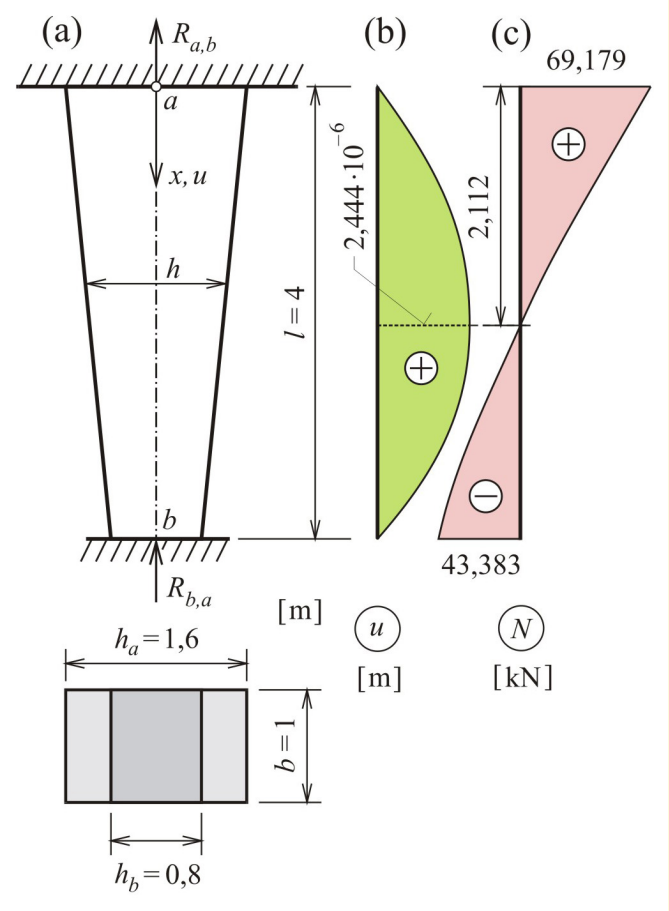
b) Proměnnou výšku průřezu lze vyjádřit pomocí $h - h(x) = h_a - \frac{h_a - h_b}{l} x = 1,6 - 0,2x\,[\mathtt{m}]$.

c) Proměnná průřezová plocha je pak rovna $A = A(x) = b \cdot h = 1,6 - 0,2x\,[\mathtt{m}]$.

d) Měrná tíha: $\gamma = \rho \cdot 10 = 24000\,\mathtt{N/m^3} = 24\,\mathtt{kN/m^3}$.

e) Spojité osové zatížení: $n_x = n_x(x) = \gamma \cdot A = 24 \cdot (1,6 - 0,2x) = 38,4 - 4,8x\,[\mathtt{kN/m}]$.

f) Celková tíha pilíře se pak rovná $Q = \frac{1,6+0,8}{2} \cdot 4 \cdot 24 = 115,2\,[\mathtt{kN}]$.




Obr. 3.4 Zadání a řešení příkladu 3.4

## Volba aproximačního polynomu:

V případě stálého průřezu by elastická čára osových posunů byla vyjádřena polynomem 2°. Při proměnném průřezu je její tvar složitější (nemá podobu polynomu, ale logaritmické funkce) a pro její aproximaci je účelné zvolit vyšší polynom. Pro jednoduchost výkladu je zvolen polynom 3°. Pro posuny je zvolen stejný počátek i kladný smysl jako pro souřadnici $x$.

$$u = u(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3.$$

Tento polynom musí splňovat okrajové podmínky (hodnoty posunů v obou podporách musí být rovny nule), díky čemuž se z polynomu vyeliminují dvě konstanty:

$$u(0) = 0 \Rightarrow c_0 = 0,$$

$$u(l) = 0 \Rightarrow c_1 = -c_2 l - c_3 l^2 = -4c_2 - 16c_3.$$

Po dosazení do polynomu a úpravě lze získat:

$$u = c_2(x^2 - 4x) + c_3(x^3 - 16x).$$

S ohledem na označení v předchozím výkladu se názvy parametrů přejmenují: $a_1 \equiv c_2$ a $a_2 \equiv c_3$. Aproximační polynom se dvěma členy ($n = 2$) má tento výsledný tvar:

$$u = a_1(x^2 - 4x) + a_2(x^3 - 16x).$$

Dílčí aproximační polynomy a jejich derivace se pak rovnají:

$$u_1 = (x^2 - 4x)\,, \qquad u_1' = (2x - 4).$$

$$u_2 = (x^3 - 16x)\,, \qquad u_2' = (3x^2 - 16).$$

## Složky matice tuhosti:

Matice tuhosti **k** je čtvercová matice řádu $n = 2$ a vzhledem k symetrii matice má 3 neznámé členy, které lze určit pomocí vztahu (3.16).

$$k_{1,1} = E\int_0^l Au_1'u_1'\,\mathrm{d}x = E\int_0^4 (1,6-0,2x)(2x-4)^2\,\mathrm{d}x = E\cdot 25,6\,[\mathtt{kNm}^3],$$

$$k_{2,2} = E\int_0^l Au_2'u_2'\,\mathrm{d}x = E\int_0^4 (1,6-0,2x)(3x^2-16)^2\,\mathrm{d}x = E\cdot 901,12\,[\mathtt{kNm}^5],$$

$$k_{1,2} = k_{2,1} = E\int_0^l Au_1'u_2'\,\mathrm{d}x = E\int_0^4 (1,6-0,2x)(2x-4(3x^2-16))\,\mathrm{d}x = E\cdot 146,77\overline{3}\,[\mathtt{kNm}^4].$$

## Složky zatěžovacího vektoru:

Zatěžovací vektor **Z** má dva členy, jež lze určit podle vztahu (3.16):

$$Z_1 = \int_0^l n_x u_1\,\mathrm{d}x = \int_0^4 (38,4-4,8x)(x^2-4x)\,\mathrm{d}x = -307,2\,[\mathtt{kNm}^2],$$

$$Z_2 = \int_0^l n_x u_2\,\mathrm{d}x = \int_0^4 (38,4-4,8x)(x^3-16x)\,\mathrm{d}x = -1802,24\,[\mathtt{kNm}^3].$$

## Soustava rovnic a její kořeny:

Soustava rovnic (3.15) po vydělení obou stran modulem pružnosti $E$ nabývá tvaru:

$$\begin{bmatrix} 25,6 & 146,77\overline{3} \\ 146,77\overline{3} & 901,12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -307,2 \\ -1802,24 \end{Bmatrix} \cdot \frac{1}{E}.$$

Vyřešením soustavy rovnic lze získat kořeny: $a_1 = \frac{-8{,}061069}{E}[\mathtt{m}^{-1}]$ a $a_2 = \frac{-0{,}687023}{E}[\mathtt{m}^{-2}]$.

## Elastická čára:

Dosazením kořenů do rovnice aproximačního polynomu je možno získat aproximaci elastické čáry. Posuny $u$ vznikají v ose prutu. Na obrázku 3.4 jsou vykresleny pro názornost kolmo k ose prutu. Horní část pilíře se prodlouží, spodní část se zkrátí. Maximální hodnota posunutí činí $u_{max} = 2,444.10^{-6}\,[\mathtt{m}]$ a vzniká ve vzdálenosti $x = 2,112\,[\mathtt{m}]$ od horního konce pilíře.

## Průběh normálových sil:

Podle rovnice (3.20) je průběh normálových sil popsán funkcí:

$$N = EAu' = E(1,6 - 0,2x)[a_1(2x-4) + a_2(3x^2 - 16)]\,[\mathtt{kN}],$$

do které se dosadí vypočtené parametry. Průběh normálových sil je zobrazen na obrázku 3.4. Horní část pilíře je tažená, spodní tlačená. Největší posunutí nastává v průřezu s nulovou normálovou silou.

## Reakce v podporách:

Reakce ve vnějších vazbách lze vypočítat z krajních hodnot normálových sil:

$$R_{a,b} = N(0) = E \cdot 1,6(-4a_1 - 16a_2) = 69,179\,[\mathtt{kN}],$$

$$R_{b,a} = N(4) = E \cdot 0,8(4a_1 + 32a_2) = 43,383\,[\mathtt{kN}].$$

Součet obou reakcí je 112,562 kN, což se nerovná celkové tíze pilíře 115,2 kN. Podmínka rovnováhy není v důsledku přibližného řešení splněna.

**Poznámka 3.5.** Přesnost výsledků: V následující tabulce jsou pro srovnání uvedeny hodnoty obou reakcí pro aproximační řešení polynomem 3°, polynomem 4° a přesné řešení. Tabulka rovněž obsahuje relativní chyby v procentech.

| způsob řešení | $R_{a,b}$ [kN] | $\Delta R_{a,b}$ [%] | $R_{b,a}$ [kN] | $\Delta R_{b,a}$ [%] |
|---|---|---|---|---|
| polynom 3° | 69,179 | -1,88 | 43,383 | -2,94 |
| polynom 4° | 70,760 | +0,37 | 44,440 | -0,58 |
| přesné řešení | 70,501 | 0 | 44,699 | 0 |

Z tabulky vyplývá, že zvýšením stupně aproximačního polynomu se zpřesní výsledky. Naprosto přesného řešení však polynomem nelze dosáhnout.

**Příklad 3.6.** Jednoduchý staticky neurčitý nosník podle obrázku 3.5 je zatížen spojitým trojúhelníkovým zatížením. Nosník je tvořen ocelovým válcovaným prutem profilu I140. Pomocí deformačního variačního principu stanovte:

(a) tvar elastické (ohybové) čáry $w = w(x)$ (se zanedbáním vlivu posouvajících sil na deformace),

(b) průběhy vnitřních sil $V = V_z$ a $M = M_y$,

(c) reakce $R_{a,b}$, $R_{b,a}$ a $M_{a,b}$.

## Vstupní údaje a přípravný výpočet:

a) Ohybová tuhost: $E = 2,1 \cdot 10^8\,\mathtt{kPa}$, $\quad I_y = 5,72 \cdot 10^{-6}\,\mathtt{m}^4$, $\quad EI_y = 1201,2\,\mathtt{kNm}^2$.

b) Příčné zatížení: $q_z = q = \frac{q_b}{l}x = 7,5x\,[\mathtt{kN/m}]$.

c) Celkové zatížení: $Q = \frac{q_b l}{2} = 60\,[\mathtt{kN}]$.

## Volba aproximačního polynomu:

Výslednou ohybovou čáru lze nejlépe aproximovat polynomem 5° s kladným směrem průhybu dolů:

$$w = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5$$

**Poznámka 3.7.** Tímto způsobem lze získat přesné řešení, jelikož ohybová čára dané konstrukce se zadaným zatížením skutečně nabývá tvaru daného polynomem 5°.

Polynom musí splňovat okrajové podmínky, pomocí nichž lze vyloučit čtveřici konstant:

1. $w(0) = 0 \Rightarrow c_0 = 0$,
2. $w'(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$,

3. $w(l) = 0 \Rightarrow c_2 + c_3 l + c_4 l^2 + c_5 l^3 = 0,$
4. $M_y(l) = 0 \Rightarrow w''(l) = 0 \Rightarrow 2c_2 + 6c_3 l + 12c_4 l^2 + 20c_5 l^3 = 0.$

Z posledních dvou podmínek lze vyeliminovat:

$$c_2 = \frac{3}{2}c_4 l^2 + \frac{7}{2}c_5 l^3, \quad c_3 = -\frac{5}{2}c_4 l - \frac{9}{2}c_5 l^2.$$

Aproximační polynom pak nabude tvaru:

$$w = c_4\left(x^4 - \frac{5}{2}lx^3 + \frac{3}{2}l^2x^2\right) + c_5\left(x^5 - \frac{9}{2}l^2x^3 + \frac{7}{2}l^3x^2\right).$$

Změnou označení $a_1 \equiv c_4$, $a_2 \equiv c_5$ a dosazením $l = 4\,\mathrm{m}$ lze získat výsledný tvar aproximačního polynomu ($n = 2$):

$$w = a_1(24x^2 - 10x^3 + x^4) + a_2(224x^2 - 72x^3 + x^5).$$

Dílčí aproximační polynomy a jejich derivace pak jsou rovny:

$$w_1 = 24x^2 - 10x^3 + x^4, \quad w_1' = 48x - 30x^2 + 4x^3, \quad w_1'' = 48 - 60x + 12x^2,$$

$$w_2 = 224x^2 - 72x^3 + x^5, \quad w_2' = 448x - 216x^2 + 5x^4, \quad w_2'' = 448 - 432x + 20x^3.$$

## Složky matice tuhosti:

Složky matice tuhosti **k** se stanoví na základě vztahu (3.17):

$$k_{1,1} = EI_y \int_0^l w_1'' w_1'' \,\mathrm{d}x = EI_y \int_0^4 (48 - 60x + 12x^2)^2 \,\mathrm{d}x = EI_y \cdot 1843,2\,[\mathtt{kNm}^7],$$

$$k_{2,2} = EI_y \int_0^l w_2'' w_2'' \,\mathrm{d}x = EI_y \int_0^4 (448 - 432x + 20x^3)^2 \,\mathrm{d}x = EI_y \cdot 231716,6\,[\mathtt{kNm}^9],$$

$$k_{1,2} = k_{2,1} = EI_y \int_0^l w_1'' w_2'' \,\mathrm{d}x = EI_y \int_0^4 (48 - 60x + 12x^2)(448 - 432x + 20x^3) \,\mathrm{d}x =$$

$$= EI_y \cdot 20480,0\,[\mathtt{kNm}^8].$$

## Složky zatěžovacího vektoru:

Složky zatěžovacího vektoru **Z** se rovněž určí podle vztahu (3.17):

$$Z_1 = \int_0^l q w_1 \,\mathrm{d}x = \int_0^4 7,5x(24x^2 - 10x^3 + x^4) \,\mathrm{d}x = 1280,0\,[\mathtt{kNm}^4],$$

$$Z_2 = \int_0^l q w_2 \,\mathrm{d}x = \int_0^4 7,5x(224x^2 - 72x^3 + x^5) \,\mathrm{d}x = 14482,3\,[\mathtt{kNm}^5].$$

## Soustava rovnic a její kořeny:

Soustavu rovnic (3.15) po vydělení obou stran konstantní ohybovou tuhostí $EI_y$ lze upravit do tvaru:

$$\begin{bmatrix} 1843,2 & 20480,0 \\ 20480,0 & 231716,6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1280,0 \\ 14482,3 \end{Bmatrix} \cdot \frac{1}{EI_y}.$$

Kořeny soustavy rovnic po vyřešení vycházejí: $a_1 = 0$ a $a_2 = \frac{0{,}0625}{EI_y}\,[\mathrm{m}^{-4}]$.

## Ohybová čára:

Dosazením vypočtených kořenů do odvozeného polynomu $w = a_1(24x^2 - 10x^3 + x^4) + a_2(224x^2 - 72x^3 + x^5)$ lze získat rovnici ohybové čáry, která po úpravě nabývá tvaru:

$$w = \left(14x^2 - 4,5x^3 + 0,0625x^5\right) \cdot \frac{1}{EI_y}\,[\mathrm{m}].$$

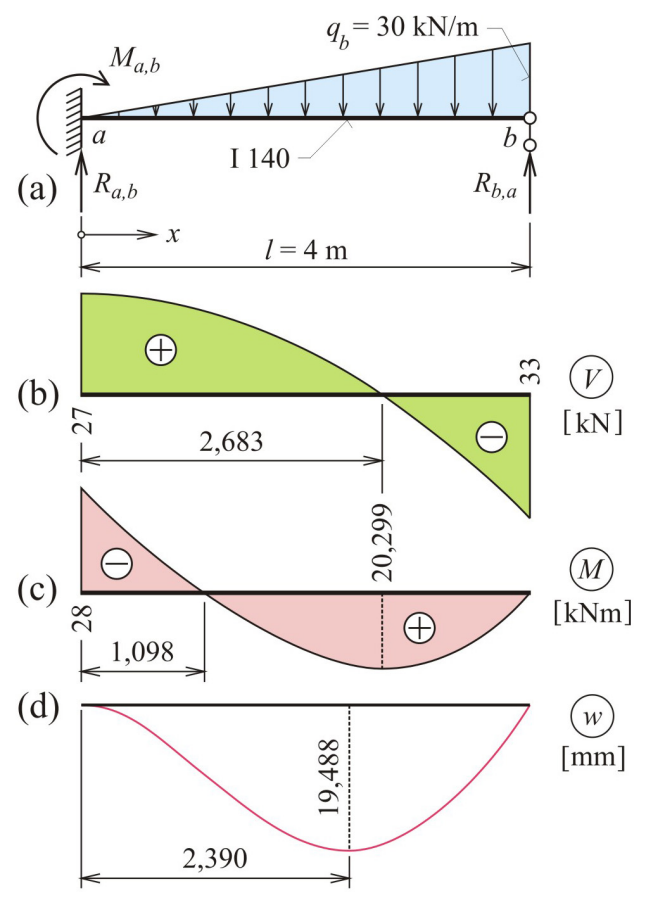
Největší průhyb nastane v průřezu vzdáleném 2,390 m od levé podpory a jeho velikost činí $w_{max} = 19,488\,[\mathrm{mm}]$. Výsledný tvar ohybové čáry je zobrazen na obrázku 3.5(d).

## Průběhy vnitřních sil:

Průběhy vnitřních sil je možno určit z derivací ohybové čáry:

$$M_y = -EI_y w'' = -28 + 27x - 1,25x^3\,[\mathrm{kNm}], \quad V_z = -EI_y w''' = 27 - 3,75x^2\,[\mathrm{kN}].$$

Největší ohybový moment $M_{y,max} = 20,299\,[\mathrm{kNm}]$ vznikne v průřezu s nulovou posouvající silou $V_z$, tedy ve vzdálenosti $x_m = 2,683\,[\mathrm{m}]$. Průběhy vnitřních sil jsou zobrazeny na obrázku 3.5(b),(c).




Obr. 3.5 Zadání a řešení příkladu 3.6

## Reakce ve vnějších vazbách:

Veškeré reakce ve vnějších vazbách se určí z rovnic vnitřních sil po dosazení souřadnic krajních bodů:

$$R_{a,b} = V_z(0) = 27\,[\mathtt{kN}], \quad R_{b,a} = -V_z(4) = 33\,[\mathtt{kN}], \quad M_{a,b} = M_y(0) = -28\,[\mathtt{kNm}].$$

Pomocí silové a momentové podmínky rovnováhy lze snadno ověřit, že dosažené výsledky odpovídají přesnému řešení (podle předpokladu v poznámce 3.7).

**Příklad 3.8.** Jednoduchý prostě podepřený nosník konstantního průřezu podle obrázku 3.6 je zatížen spojitým rovnoměrným zatížením. Přibližným způsobem podle Lagrangeova variačního principu užitím aproximace průhybové funkce jednou sinusovou půlvlnou určete:

(a) obecně tvar elastické (ohybové) čáry $w = w(x)$ ,

(b) průběh ohybových momentů $M = M_y(x)$,

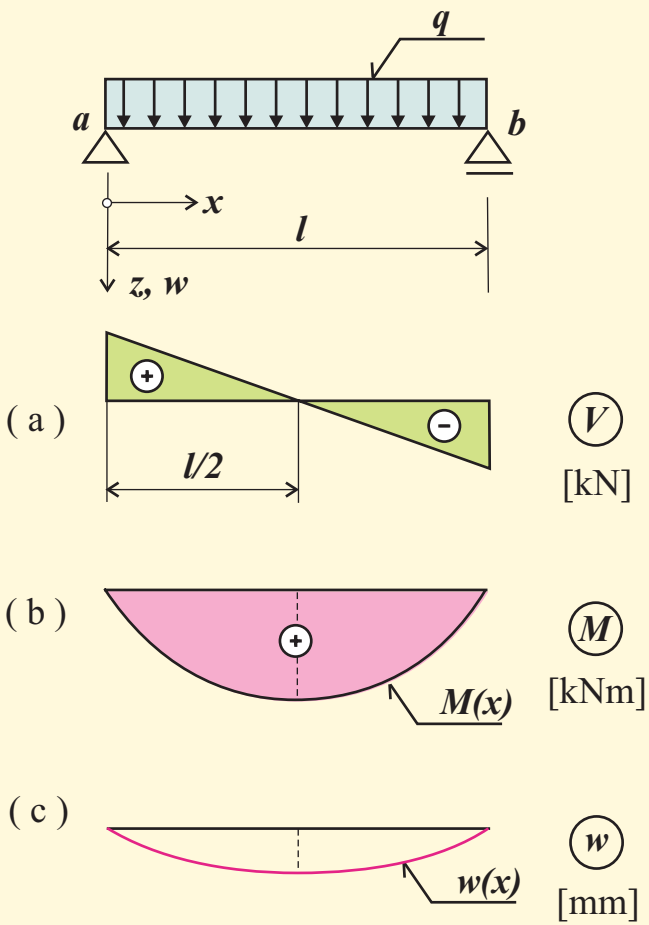
(c) určete přesnost (chybu) výpočtu pro hodnoty v polovině nosníku u obou funkcí $w, M$.

## Vstupní údaje

a) Počátek lokálních os $x$ a $z$ je v podpoře $a$, kladný smysl osy $x$ směřuje k podpoře $b$ a kladný smysl osy $z$ směřuje dolů.

b) Průhyb v polovině rozpětí : $w(l/2) = \frac{5}{384}\,\frac{ql^4}{EI_y}\,[\mathtt{mm}]$.

c) Ohybový moment v polovině rozpětí : $M_y(l/2) = \frac{1}{8}\,ql^2\,[\mathtt{kNm}]$.




Obr. 3.6 Zadání a řešení příkladu 3.8

## Volba aproximačního polynomu:

Skutečný průběh ohybové čáry je dán polynomem 4. stupně, takže podle předchozího příkladu 3.7 je možno získat přesné řešení. V tomto příkladě v souladu se zadáním je průhybová funkce aproximována funkcí goniometrickou, takže získáme přibližné řešení. Je zvolen jeden člen řady podle vzorce (3.2) :

$$w = w(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i = a_1 \cdot \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Tato aproximace splňuje okrajové deformační podmínky nulového průhybu nad podporami:

1. $w(0) = 0 \Rightarrow a_1 \cdot \sin 0 = 0,$
2. $w(l) = 0 \Rightarrow a_1 \cdot \sin \pi = 0.$

Pro další výpočty budeme potřebovat druhou derivaci aproximační funkce ohybové čáry:

$$w''^2 = -a_1 \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

## Potenciální energie vnějších sil (od rovnoměrného zatížení):

$$\Pi_{\mathrm{e}} = -\int_0^l q w(x) \mathrm{d}x = -q a_1 \int_0^l \sin \frac{\pi x}{l} dx = -q a_1 \left[ -\frac{l}{\pi} \cdot \cos \frac{\pi x}{l} \right]_0^l = -\frac{2ql}{\pi} a_1$$

## Potenciální energie vnitřních sil:

$$\Pi_i = \frac{1}{2}\int_0^l EI_y w''^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}EI_y \int_0^l \left(-a_1 \frac{\pi^2}{l^2}\sin\frac{\pi x}{l}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{\pi^4}{4}\frac{EI_y}{l^3}a_1^2$$

## Celková potenciální energie soustavy:

$$\Pi = \Pi_i + \Pi_\mathrm{e}$$

Z podmínky minima tohoto funkcionálu získáme rovnici:

$$\frac{\delta \Pi}{\delta a_1} = 0 \Rightarrow -\frac{2}{\pi}ql + \frac{\pi^4}{4}\frac{EI_y}{l^3}2a_1 = 0.$$

Z této rovnice vyjádříme neznámý parametr $a_1$:

$$a_1 = \frac{4ql^4}{\pi^5 EI_y} \doteq 0,01307\frac{ql^4}{EI_y}.$$

## Ohybová čára:

Dosazením vypočteného parametru $a_1$ do aproximační funkce $w(x) = a_1 \cdot \sin\frac{\pi x}{l}$ získáme přibližný tvar ohybové čáry.

$$w(x) = \frac{4ql^4}{\pi^5 EI_y} \cdot \sin\frac{\pi x}{l}.$$

Hodnota průhybu uprostřed rozpětí je rovna přímo parametru $a_1$:

$$w(l/2) = a_1 \cdot \sin\frac{\pi}{2} = a_1 \doteq 0,01307\frac{ql^4}{EI_y}.$$

Srovnáním s přesnou hodnotou průhybu $w(l/2) = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI_y} \doteq 0,01302\frac{ql^4}{EI_y}$ zjistíme, že chyba ve vypočteném průhybu uprostřed rozpětí je nepatrná (0,005 %).

## Průběh ohybových momentů:

Momentová funkce odvozená z druhé derivace aproximační funkce bude mít tvar:

$$M(x) = -EI_y w'' = -EI_y\left(-a_1\frac{\pi^2}{l^2}\sin\frac{\pi x}{l}\right) = \frac{4}{\pi^3}ql^2\sin\frac{\pi x}{l} \doteq 0,129\,ql^2\sin\frac{\pi x}{l}.$$

Dosazením hodnoty $l/2$ za $x$ dostaneme velikost maximálního ohybového momentu uprostřed rozpětí $M(l/2) \doteq 0,129\,ql^2$. Srovnáním s přesnou hodnotou ohybového momentu $M_y(l/2) = \frac{1}{8}ql^2$ zjistíme, že chyba je 0,4 %.

# Kapitola 4

# Silový (Castiglianův) variační princip

## 4.1. Podrobný výklad silového variačního principu

Silový variační princip je *duálním obrazem* deformačního variačního principu (viz poznámka 2.3). Jednotlivé výpočetní kroky jsou však u silového variačního principu značně rozdílné, což je při řešení konkrétní nosné konstrukce způsobeno zejména odlišnými požadavky na variaci pole napětí (průběhu vnitřních sil) než na variaci pole deformací (elastických čar).

U konstrukcí staticky určitých je možno průběhy vnitřních sil stanovit na základě podmínek rovnováhy a není důvod používat variační výpočet. Použití Castiglianova variačního principu je proto u prutových soustav opodstatněné pouze u dvou typů úloh:

a) výpočet staticky neurčitých veličin (u staticky neurčitých soustav),

b) výpočet posunů nebo pootočení v zadaných bodech řešené konstrukce.

## Aproximace průběhů vnitřních sil

Aproximace průběhů vnitřních sil je prvním krokem výpočtu podle silového variačního principu. V případě obecně namáhaného přímého prutu v prostoru (umístěného v lokální souřadnicové soustavě podle obrázku 3.1) lze aproximovat funkcemi polynomů šest průběhů vnitřních sil:

(a) průběh normálových sil:

$$N = N(x) = N_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i N_i, \tag{4.1}$$

(b) průběh ohybových momentů v hlavní rovině $x,z$:

$$M_y = M_y(x) = M_{y,0} + \sum_{i=1}^{n} a_i M_{y,i}, \tag{4.2}$$

(c) průběh ohybových momentů v hlavní rovině $x,y$:

$$M_z = M_z(x) = M_{z,0} + \sum_{i=1}^{n} a_i M_{z,i}, \tag{4.3}$$

(d) průběh posouvajících sil v hlavní rovině $x,z$:

$$V_z = V_z(x) = V_{z,0} + \sum_{i=1}^{n} a_i V_{z,i}, \tag{4.4}$$

(e) průběh posouvajících sil v hlavní rovině $x,y$:

$$V_y = V_y(x) = V_{y,0} + \sum_{i=1}^{n} a_i V_{y,i}, \tag{4.5}$$

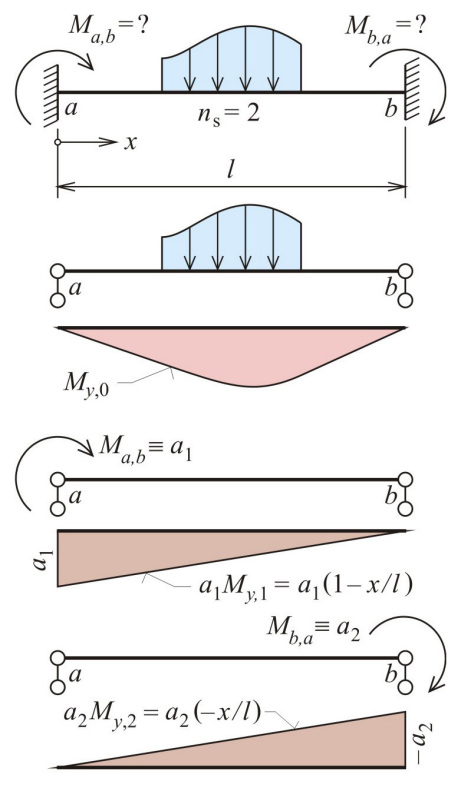
(f) průběh kroutících momentů:

$$T = T(x) = T_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i T_i. \tag{4.6}$$

**Poznámka 4.1.** Průběhy posouvajících sil $V_z$ a $V_y$ se při výpočtu uplatní pouze v případě, že uvažujeme vliv posouvajících sil na deformaci prutu. Jejich zavedení do variačního výpočtu je u silového principu podstatně jednodušší.

V rovnicích (4.1) až (4.6) jsou $a_i$ parametry aproximačních funkcí a $N_i$ až $T_i$ ($i = 0, 1$ až $n$) jsou dílčí aproximační polynomy. Tyto polynomy jsou zvoleny tak, aby funkce (4.1) až (4.6) splňovaly podmínky rovnováhy vnitřních a vnějších sil v každém průřezu. Dílčí aproximační funkce s nulovým indexem $i = 0$ vyjadřuje průběh vnitřních sil od daného zatížení na zadané nebo zvolené základní *staticky určité* soustavě. Každá z dílčích aproximačních funkcí (pro $i > 0$) popisuje průběh vnitřních sil od jednotkové hodnoty jedné staticky neurčité veličiny na téže základní staticky určité soustavě. Parametr $a_i$ vyjadřuje právě sledovanou staticky neurčitou veličinu. Počet parametrů $n$ je v tomto případě roven stupni statické neurčitosti $n_s$ řešeného nosníku. Popsaný význam aproximačních funkcí je názorně zobrazen na obrázku 4.1 u příčně zatíženého oboustranně vetknutého nosníku $n_s = 2$.

**Poznámka 4.2.** Pro výpočty složitějších případů zatížení a podepření je nutno připustit, že aproximační funkce (4.1) až (4.6) mohou být na řešeném prutu spojité jen po částech s odlišně definovanými funkčními předpisy.




Obr. 4.1 Aproximace při výpočtu staticky neurčitých veličin

**Poznámka 4.3.** U plošných a masivních prostorových konstrukcí není pojem „základní staticky určitá soustava“ k dispozici. Sestrojení aproximačních funkcí pole napětí je u nich zpravidla velmi obtížné, což je jeden z důvodů, proč se pro řešení plošných a prostorových konstrukcí používá silového principu jen zřídka. Naopak u prutových konstrukcí je přesné určení aproximačních funkcí poměrně snadné.

## Silový potenciál vnějších sil

Silový potenciál ${}^{s}\Pi$ je stanoven pro nezatížený stav konstrukce, v němž je potenciální energie vnějších i vnitřních sil nulová. Reakce při nehybném podepření nekonají práci a jejich potenciál je skutečně nulový. Variace silového potenciálu vnějších sil je proto

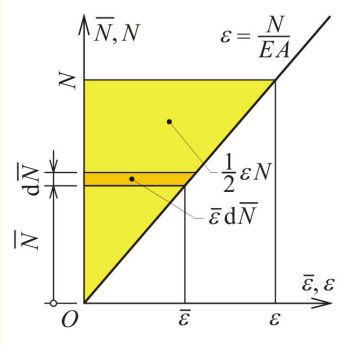
$$\delta\, {}^{s}\Pi_{\mathrm{e}} = 0. \tag{4.7}$$

Zadané zatížení a ani jeho silový potenciál tedy není funkcí aproximačních parametrů.

## Silový potenciál vnitřních sil

U osově namáhaného prutu s fyzikálně lineárním chováním materiálu je závislost mezi poměrným protažením $\varepsilon$ a normálovou silou $N$ dána Hookovým zákonem $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u' = \varepsilon = \frac{N}{EA}$ (viz obrázek 4.2). Mění-li se v silové variační úloze průběh vnitřních sil (zde tedy funkce $N = N(x)$) změnou aproximačních parametrů (tedy čistě matematickými prostředky bez ohledu na skutečný tvar elastické čáry), normálová síla $N$ ve výpočtu vystupuje jako nezávisle proměnná veličina a energii (zápornou práci) připadající na elementární vrstvičku o tloušťce $\mathrm{d}x$ lze získat integrací:

$$\frac{\mathrm{d}^s \Pi_i}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}L_i}{\mathrm{d}x} = \int_0^N \overline{\varepsilon}\,\mathrm{d}\overline{N} = \frac{1}{EA}\int_0^N \overline{N}\,\mathrm{d}\overline{N} = \frac{1}{2}\frac{N^2}{EA}. \tag{4.8}$$




Obr. 4.2 Silový potenciál taženého prutu

Na obrázku 4.2 je tato energie vrstvičky taženého prutu znázorněna žlutě vybarveným trojúhelníkem o ploše $\frac{1}{2}\varepsilon N$.

Obdobně se v případě výpočtu energie postupuje i u ostatních vnitřních sil. Vzorec pro silový potenciál přímého prutu s fyzikálně lineárním chováním materiálu pro všechny vnitřní síly, jejichž průběhy jsou vyjádřeny aproximačními funkcemi s měnitelnými parametry, pak nabývá tvaru:

$$^s\Pi_i = \frac{1}{2}\int_0^l \left(\frac{N^2}{EA} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{M_z^2}{EI_z} + \frac{V_z^2}{GA_z^*} + \frac{V_y^2}{GA_y^*} + \frac{T^2}{GI_t}\right)\mathrm{d}x. \tag{4.9}$$

## Výpočet extremál

Celkový silový potenciál konstrukce je dán součtem ${}^{s}\Pi = {}^{s}\Pi_i + {}^{s}\Pi_\mathrm{e}$. Podmínka pro stanovení minima tohoto funkcionálu je nulová hodnota jeho variace, tedy $\delta\,{}^{s}\Pi = \delta\,{}^{s}\Pi_i + \delta\,{}^{s}\Pi_\mathrm{e} = 0$, čili

$$\delta\,{}^{s}\Pi_i = -\delta\,{}^{s}\Pi_\mathrm{e}. \tag{4.10}$$

Podmínka bude splněna, budou-li variace obou potenciálů v rovnici (4.10) vyjádřeny pomocí parciálních derivací podle aproximačních parametrů. Potenciály jsou dány vztahy (4.9) a (4.7). Protože se však podle (4.7) hodnota $\delta^s\Pi_\mathrm{e}$ rovná nule, a tedy i $\frac{\partial\,{}^{s}\Pi_\mathrm{e}}{\partial\,a_k} = 0$, podmínky minima potenciálu taženého prutu nabývají tvaru:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\,{}^{s}\Pi_i}{\partial\,a_k} &= \frac{1}{2}\int_0^l \frac{1}{EA}\cdot 2N\frac{\partial\,N}{\partial\,a_k}\,\mathrm{d}x = \int_0^l \frac{1}{EA}\left(N_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i N_i\right) N_k\,\mathrm{d}x = \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \int_0^l \frac{N_i N_k}{EA}\,\mathrm{d}x + \int_0^l \frac{N_0 N_k}{EA}\,\mathrm{d}x = 0.\end{aligned} \tag{4.11}$$

Členy, které neobsahují neznámý parametr $a_i$, se mohou převést na pravou stranu, čímž vznikne soustava $n$ rovnic ($k = 1, \ldots, n$) pro výpočet parametrů $a_i$:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \int_0^l \frac{N_i N_k}{EA}\,\mathrm{d}x = -\int_0^l \frac{N_0 N_k}{EA}\,\mathrm{d}x, \tag{4.12}$$

která se dá přehledně zapsat v maticovém tvaru:

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{Z} \rightarrow [c_{i,k}] \cdot \{a_i\} = \{Z_k\}, \tag{4.13}$$

kde **c** představuje čtvercovou matici levých stran rovnic tzv. *matici poddajnosti*, **a** sloupcový vektor aproximačních součinitelů a **Z** sloupcový vektor pravých stran rovnic tzv. *zatěžovací vektor*.

Obdobně lze odvodit soustavy rovnic i pro ostatní průběhy vnitřních sil. Pro složky matice poddajnosti a zatěžovacího vektoru pak u jednotlivých průběhů platí vzorce:

(a) průběh normálové síly $N = N(x)$ :

$$c_{i,k} = \int_0^l \frac{N_i N_k}{EA}\,\mathrm{d}x, \quad Z_k = -\int_0^l \frac{N_0 N_k}{EA}\,\mathrm{d}x, \tag{4.14}$$

(b) průběh ohybového momentu $M_y = M_y(x)$ v hlavní rovině $x$,$z$:

$$c_{i,k} = \int_0^l \frac{M_{y,i} M_{y,k}}{EI_y}\,\mathrm{d}x, \quad Z_k = -\int_0^l \frac{M_{y,0} M_{y,k}}{EI_y}\,\mathrm{d}x, \tag{4.15}$$

(c) průběh ohybového momentu $M_z = M_z(x)$ v hlavní rovině $x$,$y$:

$$c_{i,k} = \int_0^l \frac{M_{z,i} M_{z,k}}{EI_z}\,\mathrm{d}x, \quad Z_k = -\int_0^l \frac{M_{z,0} M_{z,k}}{EI_z}\,\mathrm{d}x, \tag{4.16}$$

(d) průběh posouvající síly $V_z = V_z(x)$ v hlavní rovině $x$,$z$:

$$c_{i,k} = \int_0^l \frac{V_{z,i} V_{z,k}}{GA_z^*}\,\mathrm{d}x, \quad Z_k = -\int_0^l \frac{V_{z,0} V_{z,k}}{GA_z^*}\,\mathrm{d}x, \tag{4.17}$$

(e) průběh posouvající síly $V_y = V_y(x)$ v hlavní rovině $x,y$:

$$c_{i,k} = \int_0^l \frac{V_{y,i}V_{y,k}}{GA_y^*}\,\mathrm{d}x, \qquad Z_k = -\int_0^l \frac{V_{y,0}V_{y,k}}{GA_y^*}\,\mathrm{d}x, \tag{4.18}$$

(f) průběh kroutícího momentu $T = T(x)$ :

$$c_{i,k} = \int_0^l \frac{T_iT_k}{GI_t}\,\mathrm{d}x, \qquad Z_k = -\int_0^l \frac{T_0T_k}{GI_t}\,\mathrm{d}x. \tag{4.19}$$

Po vyřešení kterékoliv z těchto soustav lze získat hodnoty parametrů $a_i$, tedy hodnoty staticky neurčitých veličin, s jejichž využitím lze sestrojit výsledné průběhy vnitřních sil, které představují extremálu silové variační úlohy. Použití silového variačního principu vede vždy k přesnému řešení, jelikož dílčí aproximační funkce jsou sestrojeny jako přesné průběhy vnitřních sil.

**Poznámka 4.4.** Při výpočtu staticky neurčitých veličin pomocí silového variačního principu se uplatňuje pouze silový potenciál vnitřních sil, neboť podle vztahu (4.7) je variace silového potenciálu vnějších sil nulová. U lineárně pružných konstrukcí se silový potenciál vnitřních sil (4.9) shoduje s pružnou potenciální energií vnitřních sil reálného zatěžovacího stavu a zároveň s absolutní hodnotou přetvárné práce vnitřních sil. Popsaný způsob řešení staticky neurčitých veličin bývá proto v literatuře nazýván **Castiglianovým principem minima přetvárné práce vnitřních sil** a je formulován:

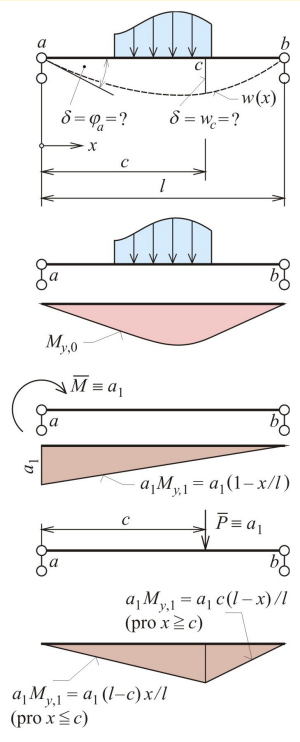
**Definice 4.5.** Staticky neurčité veličiny nabudou právě takových hodnot, při nichž je přetvárná práce vnitřních sil minimální.

## Deformace prutu

Pokud je již průběh vnitřních sil znám (u prutu staticky určitého nebo neurčitého), elastickou čáru lze odvodit např. integrací příslušné diferenciální rovnice (3.20) až (3.25). V praktických úlohách je však nejčastějším požadavkem pouze výpočet deformace $\delta$ (posun nebo pootočení) v konkrétním bodě konstrukce, k čemuž lze s výhodou využít přímo silový variační princip.

V případě takového výpočtu se u aproximačních průběhů vnitřních sil ve vztazích (4.1) až (4.6) každého prutu použije pouze jediný aproximační parametr $a_1$ ($n$ je pouze rovno 1). Dílčí aproximační funkce s nulovým indexem $i = 0$ pak vyjadřuje průběh vnitřních sil od zadaného zatížení na zadaném staticky určitém nosníku nebo průběh vnitřních sil vyřešeného staticky neurčitého nosníku. Dílčí aproximační funkce s indexem $i = 1$ vyjadřuje průběh vnitřních sil od jednotkové hodnoty vnější síly $\overline{P} \equiv a_1$, působící v místě a ve směru hledaného posunu, nebo od jednotkové hodnoty vnějšího momentu $\overline{M} \equiv a_1$, který působí v průřezu a v rovině hledaného pootočení. Síla $\overline{P}$ a moment $\overline{M}$ představují variaci daného zatížení a jejich průběh se zjišťuje buď na zadaném staticky určitém nosníku nebo na libovolné staticky určité soustavě, která byla použita pro řešení daného původně staticky neurčitého nosníku. Popsaný význam aproximačních funkcí je názorně ukázán na obrázku 4.3 s příklady výpočtu pootočení a posunu v zadaných průřezech příčně zatíženého prostého nosníku.

Jelikož síla $\overline{P}$, resp. moment $\overline{M}$, působí na již zdeformované




Obr. 4.3 Aproximace při výpočtu posunů a pootočení

konstrukci, vykonává práci na hledaném posunu $\delta$, resp. na pootočení $\delta$. Do silového potenciálu vnějších sil je pak nutno zahrnout i účinek $-a_1\delta$, takže parciální derivace silového potenciálu již není nulová, nýbrž rovna:

$$\frac{\partial\, {}^s\Pi_\mathrm{e}}{\partial\, a_1} = -\delta. \tag{4.20}$$

Pro silový potenciál vnitřních sil však vztah (4.8) zůstává i nadále v platnosti. Podmínka (4.10) se pomocí parciálních deformací podle parametru $a_1$ zapíše ve tvaru $\frac{\partial\, {}^s\Pi_i}{\partial\, a_1} = -\frac{\partial\, {}^s\Pi_\mathrm{e}}{\partial\, a_1} = +\delta$. Po úpravě a označení $a_1 \equiv \overline{P}$ nebo $a_1 \equiv \overline{M}$ lze získat:

$$\delta = \frac{\partial\, {}^s\Pi_i}{\partial\, \overline{P}} \tag{4.21}$$

nebo

$$\delta = \frac{\partial\, {}^s\Pi_i}{\partial\, \overline{M}}. \tag{4.22}$$

Rovnicemi (4.21) a (4.22) je vyjádřena tzv. **Castiglianova věta**:

**Definice 4.6.** Deformace (tj. posun nebo pootočení) v zadaném bodě prutu, vystaveného silovému zatěžovacímu stavu, je rovna parciální derivaci silového potenciálu vnitřních sil podle síly $\overline{P}$, účelově zadané v místě a ve směru hledaného posunu, nebo podle momentu $\overline{M}$, účelově zadaného v místě a v rovině hledaného pootočení.

Castiglianovu větu danou vztahy (4.21) a (4.22) lze z praktických důvodů upravit na bezprostředně použitelný tvar. Např. pro průběh normálových sil a pro $\overline{P} \equiv a_1$ $(n = 1)$ pak vychází:

$$\delta = \frac{\partial\, {}^{s}\Pi_i}{\partial\, a_1} = \int_0^l \frac{1}{EA}(N_0 + a_1 N_1) N_1 \,\mathrm{d}x = a_1 \int_0^l \frac{N_1^2}{EA}\,\mathrm{d}x + \int_0^l \frac{N_0 N_1}{EA}\,\mathrm{d}x. \tag{4.23}$$

Účelově zvolená síla $\overline{P} \equiv a_1$ na vyšetřovaný prut ve skutečnosti nepůsobí (byly použity pouze pro odvození variace zatížení), proto lze položit ve vzorci (4.24) parametr $a_1 = 0$, což vyplývá přímo z podstaty variačního principu: po splnění podmínky minima silového potenciálu (4.8) se aproximační funkce musí ztotožnit s reálným stavem. Obdobně se mohou získat vztahy i pro ostatní průběhy vnitřních sil:

(a) normálová síla $N$ :

$$\delta = \int_0^l \frac{N_0 N_1}{EA}\,\mathrm{d}x, \tag{4.24}$$

(b) ohybový moment $M_y$ v hlavní rovině $x$,$z$:

$$\delta = \int_0^l \frac{M_{y,0} M_{y,1}}{EI_y}\,\mathrm{d}x, \tag{4.25}$$

(c) ohybový moment $M_z$ v hlavní rovině $x$,$y$:

$$\delta = \int_0^l \frac{M_{z,0} M_{z,1}}{EI_z}\,\mathrm{d}x, \tag{4.26}$$

(d) posouvající síla $V_z$ v hlavní rovině $x$,$z$:

$$\delta = \int_0^l \frac{V_{z,0} V_{z,1}}{EA_z^*}\,\mathrm{d}x, \tag{4.27}$$

(e) posouvající síla $V_y$ v hlavní rovině $x,y$:

$$\delta = \int_0^l \frac{V_{y,0} V_{y,1}}{E A_y^*} \, \mathrm{d}x, \tag{4.28}$$

(f) kroutící moment $T$ :

$$\delta = \int_0^l \frac{T_0 T_1}{G I_t} \, \mathrm{d}x. \tag{4.29}$$

**Poznámka 4.7.** Kladná hodnota deformace $\delta$, vypočtená podle vzorců (4.24) až (4.29), znamená, že smysl deformace se shoduje se zvoleným smyslem parametru $a_1$, tj. síly $\overline{P}$ nebo momentu $\overline{M}$.

**Poznámka 4.8.** Vzhledem k omezenému rozsahu přednášky se další výklad nezabývá výpočtem zatěžovacího stavu zadaných popuštění podpor nebo oteplením konstrukce.

## 4.2. Jednoduché příklady použití

**Příklad 4.9.** U železobetonového pilíře z příkladu 3.4 a obrázku 3.4 s pomocí silového variačního principu vypočtěte:

a) staticky neurčitou reakci $R_{b,a}$,

b) průběh normálových sil $N$ a reakci $R_{a,b}$,

c) místo a velikost maximálního osového posunu.

## Přípravný výpočet

Přípravný výpočet je již proveden u příkladu 3.4.

## Aproximační polynom

Osově namáhaná konstrukce je 1x staticky neurčitá ($n_s = n = 1$). Základní staticky určitou soustavu lze vytvořit odebráním vazby proti svislému posunutí v bodě dolního podepření $b$. V nultém ($i = 0$) zatěžovacím stavu (viz obrázek 4.4) na základní soustavu působí vlastní tíha $n_x$. Normálová síla $N_0$ se v obecném průřezu $x$ rovná tíze části prutu pod průřezem:

$$N_0 = N_0(x) = \frac{A(x) + A_b}{2}(l - x) \cdot \gamma = \frac{1,6 - 0,2x + 0,8}{2}(4 - x) \cdot 24 =$$

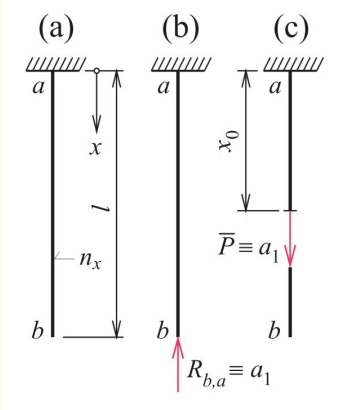
$$= 115,2 - 38,4x + 2,4x^2\,[\mathtt{kN}].$$

Normálová síla v prvním ($i = 1$) zatěžovacím stavu (viz obrázek 4.4) je konstantní po celé délce prutu a rovná se $-R_{b,a} = a_1(-1)$, takže dílčí aproximační funkce $N_1 = N_1(x) = -1$.

## Složka matice poddajnosti:

Podle vzorce (4.14) je jediný prvek matice poddajnosti:

$$c_{1,1} = \int_0^l \frac{N_1^2}{EA}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{E}\int_0^4 \frac{1}{1,6 - 0,2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{E} \cdot 3,46574\,[\mathtt{m/kN}].$$




Obr. 4.4 K řešení příkladu 4.9

## Složka zatěžovacího vektoru:

Podle vzorce (4.14) je jediný prvek zatěžovacího vektoru:

$$Z_1 = -\int_0^l \frac{N_0 N_1}{EA}\,\mathrm{d}x = +\frac{1}{E}\int_0^4 \frac{115,2 - 38,4x + 2,4x^2}{1,6 - 0,2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{E}\cdot 154,916\,[\mathtt{m}].$$

## Rovnice a její kořen:

Z rovnice o jedné neznámé $c_{1,1}a_1 = Z_1$ se po vykrácení modulu pružnosti $E$ určí:

$$a_1 = R_{b,a} = \frac{154,916}{3,46574} = 44,699\,[\mathtt{kN}].$$

## Průběh normálových sil a reakce $R_{a,b}$:

Superpozicí nultého a prvního stavu se určí rovnice průběhu normálové síly:

$$N = N(x) = N_0 + a_1 N_1 = 115,2 - 38,4x + 2,4x^2 - 44,699 = 70,501 - 38,4x + 2,4x^2\,[\mathtt{kN}].$$

Dosazením hodnoty $x = 0$ pak z této rovnice vychází $R_{a,b} = N_0 = 70,501\,[\mathtt{kN}]$.

## Místo a velikost maximálního osového posunu:

Řešením kvadratické rovnice $N(x) = 0$ lze určit reálný kořen $x_0 = 2,116\,[\mathtt{kN}]$, který představuje průřez s nulovou hodnotou normálové síly $N$. V tomto průřezu vzniká největší posun v ose prutu $u_{max}$. K výpočtu této deformace lze použít Castiglianovu větu danou vzorcem (4.24). Průběh $N_0$ v tomto případě představuje průběh normálové síly získaný výpočtem dané staticky neurčité konstrukce, tedy:

$$N(0) = N = 70,501 - 38,4x + 2,4x^2.$$

Pro zjištění průběhu $N_1$ je nutno vytvořit zatěžovací stav podle obrázku 4.4(c) s tím, že v místě hledaného posunutí bude působit pouze síla $\overline{P} \equiv a_1$. V horní části tak vznikne normálová síla $\overline{P} = a_1 \cdot 1$, tedy $N_1 = 1$. V dolní části pak bude normálová síla nulová. Výsledná deformace se vypočte:

$$\delta = u_{max} = \int_0^l \frac{N_0 N_1}{EA}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{E}\int_0^{2,116} \frac{70,501 - 38,4x + 2,4x^2}{1,6 - 0,2x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{E} \cdot 48,629 = 2,431 \cdot 10^{-6}\,[\mathtt{m}].$$

**Poznámka 4.10.** Výsledky získané silovým variačním principem jsou přesné. V případě reakcí se o tom lze přesvědčit např. v tabulce poznámky 3.5.

**Příklad 4.11.** Oboustranně vetknutý staticky neurčitý nosník podle obrázku 4.5 stálého průřezu $EI_y = konst.$ je zatížen spojitým trojúhelníkovým zatížením. Pomocí silového variačního principu odvoďte obecně:

a) vzorce pro staticky neurčité momentové složky reakcí ve vetknutí $M_{a,b}$ a $M_{b,a}$,

b) průběhy vnitřních sil $V = V_z$ a $M = M_y$,

c) silové složky reakcí ve vetknutí $R_{a,b}$ a $R_{b,a}$.

Při výpočtu zanedbejte vliv posouvajících sil na deformaci nosníku.

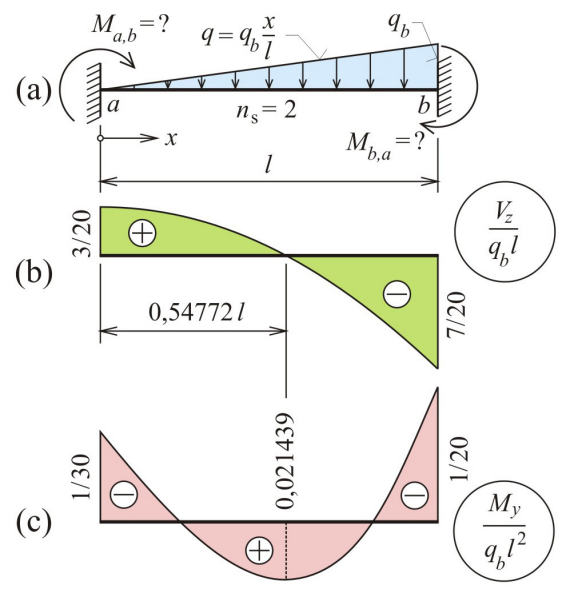
## Aproximační polynom

Ohýbaná konstrukce je dvakrát staticky neurčitá ($n = 2$). Základní staticky určitou soustavu v podobě prostého nosníku lze vytvořit odebráním obou vazeb proti pootočení v bodech $a$ i $b$. V nultém ($i = 0$) zatěžovacím stavu (viz obrázek 4.1) vyjadřuje dílčí aproximační funkce $M_{y,0}$ průběh ohybových momentů na prostém nosníku od zadaného zatížení:

$$M_{y,0} = \frac{1}{6} q_b l x - \frac{1}{2} q_b \frac{x}{l} x \frac{x}{3} = \frac{q_b l^2}{6} \left( \frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3} \right).$$

Další dvě dílčí aproximační funkce jsou znázorněny na obrázku 4.1, odkud lze převzít:

$$M_{y,1} = 1 - \frac{x}{l}, \quad M_{y,2} = -\frac{x}{l}.$$




Obr. 4.5 Zadání a řešení příkladu 4.11

## Složky matice poddajnosti:

Čtyři členy matice poddajnosti lze získat s použitím vzorce (4.15):

$$c_{1,1}=\int_0^l \frac{M_{y,1}^2}{EI_y}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{EI_y}\int_0^l\left(1-\frac{x}{l}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{EI_y}\frac{l}{3},$$

$$c_{2,2} = \int_0^l \frac{M_{y,2}^2}{EI_y}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{EI_y}\int_0^l \frac{x^2}{l^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{EI_y}\frac{l}{3},$$

$$c_{1,2} = c_{2,1} = \int_0^l \frac{M_{y,1}M_{y,2}}{EI_y}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{EI_y}\int_0^l \left(1-\frac{x}{l}\right)\left(-\frac{x}{l}\right)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{EI_y}\frac{l}{6}.$$

## Složky zatěžovacího vektoru:

Oba členy zatěžovacího vektoru se získají s použitím vzorce (4.15):

$$Z_1 = -\int_0^l \frac{M_{y,0}M_{y,1}}{EI_y}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{EI_y}\frac{q_b l^2}{6}\int_0^l \left(\frac{x}{l}-\frac{x^3}{l^3}\right)\left(1-\frac{x}{l}\right)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{EI_y}\frac{7}{360}q_b l^3,$$

$$Z_2 = -\int_0^l \frac{M_{y,0}M_{y,2}}{EI_y}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{EI_y}\frac{q_b l^2}{6}\int_0^l \left(\frac{x}{l}-\frac{x^3}{l^3}\right)\left(-\frac{x}{l}\right)\,\mathrm{d}x = +\frac{1}{EI_y}\frac{1}{45}q_b l^3.$$

## Soustava rovnic a její kořeny:

Soustava rovnic (4.13) po vykrácení ohybovou tuhostí $EI_y$ nabývá tvaru:

$$\begin{bmatrix} \frac{l}{3} & -\frac{l}{6} \\ -\frac{l}{6} & \frac{l}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{7}{360}q_b l^3 \\ +\frac{1}{45}q_b l^3 \end{Bmatrix}.$$

Vyřešením soustavy rovnic lze získat kořeny: $a_1 = M_{a,b} = -\frac{1}{30}q_b l^2\,[\mathtt{kNm}]$ a $a_2 = M_{b,a} = + +\frac{1}{20}q_b l^2\,[\mathtt{kNm}]$.

## Průběhy ohybových momentů a posouvajících sil:

Průběh ohybového momentu $M_y$ v hlavní rovině $x$,$z$ lze získat rozepsáním aproximačního polynomu (4.2):

$$M_y = M_{y,0} + a_1 M_{y,1} + a_2 M_{y,2} =$$

$$= \frac{q_b l^2}{6}\left(\frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3}\right) - \frac{1}{30} q_b l^2 \left(1 - \frac{x}{l}\right) - \frac{1}{20} q_b l^2 \frac{x}{l} = \frac{1}{60} q_b l^2 \left(-2 + 9\frac{x}{l} - 10\frac{x^3}{l^3}\right).$$

Tento průběh je extremálou řešené variační úlohy a je znázorněn na obrázku 4.5(c). Průběh posouvající síly $V_z$ v hlavní rovině $x$,$z$ se určí pomocí derivace průběhu ohybových momentů:

$$V_z = \frac{\mathrm{d}M_y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{60} q_b l^2 \left(\frac{9}{l} - \frac{30x^2}{l^3}\right) = \frac{1}{20} q_b l \left(3 - 10\frac{x^2}{l^2}\right).$$

Průběh je znázorněn na obrázku 4.5(b).

## Svislé složky reakcí:

Svislé složky reakcí lze stanovit z koncových hodnot posouvajících sil:

$$R_{a,b} = V_z(0) = \frac{3}{20} q_b l, \quad R_{b,a} = -V_z(l) = \frac{7}{20} q_b l.$$

# Literatura


[1] Benda, J. *Energetické principy a variační metody ve stavební mechanice.* 1. vydání. Ostrava: Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava, 2005. 103 s. Skriptum.

[2] Šmiřák, S. – Hlavinková, B. *Pružnost a plasticita I, příklady.* CERM Brno, 1999. 217 s. Skriptum.

[3] Teplý, B. – Šmířák, S. *Pružnost a plasticita II.* CERM Brno, 1993. 199 s. Skriptum.

[4] Servít, R. – Crha, M. – Doležalová, E. *Teorie pružnosti a plasticity, I.díl.* ČVUT v Praze, 1977. 386 s. Skriptum.