



# ÚVOD DO FUNKCIONÁLNÍ ANALÝZY

Jiří Bouchala

Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století* (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Jiří Bouchala  
Úvod do funkcionální analýzy

© Jiří Bouchala, 13. června 2012  
ISBN

# Předmluva

Výslednou podobu těchto skript ovlivnili mnozí z mých učitelů, kolegů i studentů. Všem jsem jim upřímně vděčný. Speciálně chci poděkovat svému synovi Ondřejovi, který mi pomohl s přepsáním rukopisu, a svému příteli Mgr. Petrovi Vodstrčilovi, Ph.D., který celý text pečlivě přečetl a svými připomínkami ho pomohl vylepšit.

Čtenářům budu vděčný za shovívavost a sdělení všech připomínek.<sup>1</sup>

Další v rámci projektu *Matematika pro inženýry 21. století* připravované výukové materiály lze najít na stránkách <http://mi21.vsb.cz/>. Podívejte se na ně!

V Orlové, 2011

Jiří Bouchala

---

<sup>1</sup>Všechny připomínky (výhrady, komentáře, doporučení, výhrůžky a dary) zasílejte (prosím) na moji e-mailovou adresu: [jiri.bouchala@vsb.cz](mailto:jiri.bouchala@vsb.cz)

# Obsah

|                                 |     |
|---------------------------------|-----|
| Předmluva                       | iii |
| Prostory (nad $\mathbb{R}$ )    | 1   |
| 1 Vektorový (lineární) prostor  | 2   |
| 2 Metrický prostor              | 7   |
| 3 Normovaný lineární prostor    | 21  |
| 4 Prostor se skalárním součinem | 27  |
| Operátory v NLP                 | 40  |
| 5 Spojitá lineární zobrazení    | 41  |
| 6 Diferenciální počet v NLP     | 61  |
| Literatura                      | 79  |
| Rejstřík                        | 80  |

**PROSTORY (nad  $\mathbb{R}$ )**

# Kapitola 1

## Vektorový (lineární) prostor

**1.1 Definice.** Vektorovým prostorem nazýváme každou neprázdnou množinu  $X$ , na níž jsou definovány operace

$$+ : X \times X \rightarrow X,$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$$

splňující následující podmínky:

- (1)  $\forall x, y \in X : x + y = y + x$  (komutativita),
- (2)  $\forall x, y, z \in X : (x + y) + z = x + (y + z)$  (asociativita vzhledem k „+“),
- (3)  $(\exists 0 \in X) (\forall x \in X) : x + 0 = x$  ( $0 \dots$  nulový prvek),
- (4)  $(\forall x \in X) (\exists (-x) \in X) : x + (-x) = 0$  ( $(-x) \dots$  prvek opačný k  $x$ ),
- (5)  $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}) (\forall x \in X) : \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$  (asociativita vzhledem k „ $\cdot$ “),
- (6)  $\forall x \in X : 1 \cdot x = x$ ,
- (7)  $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}) (\forall x, y \in X) : \begin{array}{l} \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \\ (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x \end{array}$  (distributivita).

**1.2 Cvičení.** Dokažte, že v každém vektorovém prostoru  $X$  platí:<sup>1</sup>

- i)  $(\exists! 0 \in X) (\forall x \in X) : x + 0 = x$ ,
- ii)  $(\forall x \in X) (\exists! (-x) \in X) : x + (-x) = 0$ ,
- iii)  $\forall x \in X : 0 \cdot x = 0$ ,  
 $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \alpha \cdot 0 = 0$ ,
- iv)  $\forall x \in X : (-1) \cdot x = (-x)$ ,

---

<sup>1</sup>Píšeme nepříliš přesně *vektorový prostor*  $X$  místo přesnějšího *vektorový prostor*  $(X, +, \cdot)$ .

- v)  $\forall x, y, z \in X : [x + y = x + z \Rightarrow y = z]$ ,  
vi)  $(\forall \alpha \in \mathbb{R}) (\forall x, y \in X) : [(\alpha x = \alpha y \wedge \alpha \neq 0) \Rightarrow x = y]$ ,  
vii)  $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}) (\forall x \in X) : [(\alpha x = \beta x \wedge x \neq 0) \Rightarrow \alpha = \beta]$ .

**Označení:**  $(-x) =: -x$ ;  $x + (-y) =: x - y$ .

### 1.3 Příklady.

- 1)  $X = \{1\}$ ,

$$1 + 1 := 1, \quad \alpha \cdot 1 := 1 \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

( $X \dots$  tzv. triviální vektorový prostor – obsahuje jediný (nulový) prvek).

- 2)  $X = \mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ),

$$x + y := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), \quad \alpha x := (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$$

pro  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ ;  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

- 3)  $X = C(\langle 0, 1 \rangle) := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ je spojitá na } Df = \langle 0, 1 \rangle\}$ ,

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) := \alpha f(x)$$

pro  $f, g \in C(\langle 0, 1 \rangle)$ ;  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

- 4)  $X = l^p$  ( $p \geq 1$ )  $\dots$  množina všech reálných posloupností  $(x_n)$  takových,

$$\text{že } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty,^1$$

$$x + y := (x_n + y_n), \quad \alpha x := (\alpha x_n)$$

pro  $x = (x_n)$ ,  $y = (y_n) \in l^p$ ;  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

*Poznámka a hezké cvičení: rozmyslete si, že platí*

$$(\forall a, b \in \mathbb{R}) (\forall p > 0) : |a + b|^p \leq 2^p (|a|^p + |b|^p),$$

*a proto*

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \\ \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p < \infty \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p \leq 2^p \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p \right) < \infty.$$

---

<sup>1</sup>Definujeme  $0^p := 0$ .

5)  $X = l^\infty \dots$  množina všech reálných posloupností  $(x_n)$  takových, že  $\sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty$ ,

$$x + y := (x_n + y_n), \quad \alpha x := (\alpha x_n)$$

pro  $x = (x_n), y = (y_n) \in l^\infty; \alpha \in \mathbb{R}$ .

**1.4 Cvičení.** Najděte vektorový prostor o 2, 3 a 4 prvcích.

**1.5 Definice.** Buď  $X$  vektorový prostor a buď  $Y \subset X$ . Pokud je  $Y$  vzhledem k operacím „+“ a „ $\cdot$ “ definovaným na  $X$  vektorovým prostorem, nazýváme  $Y$  vektorovým podprostorem  $X$ .

**1.6 Cvičení.** Dokažte, že v každém vektorovém prostoru  $X$  platí:

$\emptyset \neq Y \subset X$  je vektorovým podprostorem  $X$  právě tehdy, platí-li

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R}) (\forall x, y \in Y) : x + y \in Y, \alpha x \in Y.$$

**1.7 Příklady.**

- 1)  $Y_1 := \{f \in C(\langle 0, 1 \rangle) : f(0) = 0\}$  je vektorovým podprostorem  $C(\langle 0, 1 \rangle)$ ,
- 2)  $Y_2 := \{f \in C(\langle 0, 1 \rangle) : f(0) = 1\}$  není vektorovým podprostorem  $C(\langle 0, 1 \rangle)$ .

**1.8 Definice.** Buď  $X$  vektorový prostor.

- Řekneme, že prvky (vektory)  $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$  jsou lineárně nezávislé, jestliže

$$\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} : [\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0].^a$$

(V opačném případě nazýváme prvky  $x_1, x_2, \dots, x_n$  lineárně závislé.)

- Řekneme, že množina  $M \subset X$  je lineárně nezávislá, jestliže každá její konečná podmnožina je tvořena lineárně nezávislými prvky.

---

<sup>a</sup>Tzn. jestliže z rovnosti

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0$$

(kde  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ ) plyne, že

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$



**1.9 Definice.** Dimenzí vektorového prostoru  $X$  rozumíme číslo

$$\dim X := \begin{cases} 0, & \text{je-li } X \text{ triviální vektorový prostor,} \\ n \in \mathbb{N}, & \text{je-li } n \text{ maximální počet lineárně nezávislých prvků v } X, \\ \infty, & \text{existuje-li pro každé } m \in \mathbb{N} \text{ } m \text{ lineárně nezávislých prvků v } X. \end{cases}$$

**1.10 Cvičení.** Určete dimenzi těchto vektorových prostorů:

- 1)  $\mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ),
- 2)  $C(\langle 0, 1 \rangle)$ ,
- 3)  $l^p$  ( $p \geq 1$ ),
- 4)  $Y_1 := \{f \in C(\langle 0, 1 \rangle) : f(0) = 0\}$ ,
- 5)  $Y := \{f \in C(\langle 0, 1 \rangle) : f'' \in C(\langle 0, 1 \rangle) \wedge f'' + f = 0\}$ ,
- 6)  $Y_1 \cap Y$ ,
- 7)  $\{f \in Y : f(0) = f(1) = 0\}$ .

**1.11 Definice.** Buď  $X$  vektorový prostor a  $\emptyset \neq M \subset X$ .

Množinu

$$\text{Lin } M := \{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n : n \in \mathbb{N}; \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}; x_1, \dots, x_n \in M\}$$

nazýváme lineárním obalem množiny  $M$ . Navíc definujeme

$$\text{Lin } \emptyset := \{0\} \subset X.$$

**1.12 Cvičení.** Dokažte (za situace z předchozí definice), že

- i)  $\text{Lin } M$  je vektorovým podprostorem  $X$ ,
- ii)  $\text{Lin } M$  je průnikem všech vektorových podprostorů  $X$  obsahujících  $M$  (tj.  $\text{Lin } M$  je nejmenším vektorovým podprostorem  $X$  obsahujícím  $M$ ).

**1.13 Definice.** Buď  $X$  vektorový prostor. Řekneme, že (konečná!) množina

$$M = \{x_1, \dots, x_n\} \subset X$$

je bází vektorového prostoru  $X$ , platí-li současně:

- (1) množina  $M$  je lineárně nezávislá,
- (2)  $\text{Lin } M = X$ .

**1.14 Cvičení.** Buď  $X$  vektorový prostor a  $n \in \mathbb{N}$ .  
Dokažte, že platí:

$$X \text{ má bázi o } n \text{ prvcích} \Leftrightarrow \dim X = n.$$

## Kapitola 2

# Metrický prostor

**2.1 Definice.** Metrickým prostorem nazýváme každou **neprázdnou** množinu  $X$ , na níž je definováno zobrazení (tzv. metrika)

$$\varrho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

splňující podmínky:

- (1)  $\forall x, y \in X : \varrho(x, y) \geq 0, \varrho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$  (... nezápornost);
- (2)  $\forall x, y \in X : \varrho(x, y) = \varrho(y, x)$  (... symetrie);
- (3)  $\forall x, y, z \in X : \varrho(x, y) + \varrho(y, z) \geq \varrho(x, z)$  (... trojúhelníková nerovnost).

## 2.2 Příklady.

- 1)  $X = \mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ),

$$\varrho(x, y) := \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2} \text{ (... eukleidovská metrika)}$$

pro  $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ .

- 2)  $X = \mathbb{R}^n$ ,

$$\varrho(x, y) := \max\{|y_1 - x_1|, \dots, |y_n - x_n|\} \text{ (... maximová metrika)}.$$

- 3)  $X = \mathbb{R}^n$ ,

$$\varrho(x, y) := |y_1 - x_1| + \dots + |y_n - x_n| \text{ (... součtová metrika)}.$$

4)  $X = \mathbb{R}^n$ ,

$$\varrho(x, y) := \begin{cases} \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}, & \text{existuje-li } \lambda \in \mathbb{R} \text{ takové, že} \\ & x = \lambda y := (\lambda y_1, \dots, \lambda y_n) \\ & \text{nebo } y = \lambda x := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n), \\ \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} + \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2} & \text{v ostatních případech} \end{cases}$$

(... „pampelišková“ metrika).

5)  $\emptyset \neq X$  ... libovolná množina,

$$\varrho(x, y) := \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y \end{cases}$$

(... diskrétní metrika).

6)  $X = C(\langle 0, 1 \rangle)$ ,

$$\varrho(x, y) := \sup_{t \in \langle 0, 1 \rangle} |x(t) - y(t)| = \max_{t \in \langle 0, 1 \rangle} |x(t) - y(t)| \quad (\dots \text{supremová metrika})$$

pro  $x, y \in C(\langle 0, 1 \rangle)$ .

7)  $X = C(\langle 0, 1 \rangle)$ ,

$$\varrho(x, y) := \sqrt{\int_0^1 (x(t) - y(t))^2 dt} \quad (\dots \text{L}^2 \text{ metrika}).$$

**2.3 Definice.** Buď  $(x_n)$  posloupnost v metrickém prostoru  $X$  a buď  $x \in X$ . Řekneme, že posloupnost  $(x_n)$  má limitu  $x$  a píšeme  $x_n \rightarrow x$ , platí-li

$$\varrho(x_n, x) \rightarrow 0.$$

#### 2.4 Věta (nutná podmínka konvergence).

Nechť  $(x_n)$  je konvergentní posloupnost v metrickém prostoru  $X$  (tzn. že existuje  $x \in X$ , pro které  $x_n \rightarrow x$ ). Potom platí tzv. Bolzanova – Cauchyho podmínka:

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n, m \in \mathbb{N}; n, m \geq n_0) : \varrho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

**Důkaz** je vhodným cvičením.

**2.5 Definice.** Posloupnost  $(x_n)$  (v metrickém prostoru  $X$ ), pro niž platí Bolzanova – Cauchyho podmínka, se nazývá cauchyovská.

**2.6 Definice.** Metrický prostor  $X$  se nazývá úplný, je-li v něm **každá** cauchyovská posloupnost konvergentní.

**2.7 Cvičení.** Pokuste se dokázat následující tvrzení.

- 1)  $\mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) s eukleidovskou metrikou je úplný metrický prostor.
- 2) Prostor  $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  s metrikou  $\varrho(x, y) := |x - y|$  není úplný.  
(Posloupnost  $(\frac{1}{n})$  je cauchyovská, ale nemá v  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  limitu.)
- 3)  $C(\langle 0, 1 \rangle)$  se supremovou metrikou je úplný metrický prostor.
- 4)  $C(\langle 0, 1 \rangle)$  s  $L^2$  metrikou není úplný.  
(Posloupnost  $(f_n)$ , kde

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle, \\ 1 + n - 2nx & \text{pro } x \in (\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}), \\ 0 & \text{pro } x \in \langle \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}, 1 \rangle, \end{cases}$$

je cauchyovská, ale nemá v  $C(\langle 0, 1 \rangle)$  limitu.<sup>1)</sup>

**2.8 Cvičení.** Definujme pro každé  $n \in \mathbb{N}$  funkce  $f_n$  a  $g_n$  na  $\langle 0, 1 \rangle$  předpisy:

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 - 2nx, & x \in \langle 0, \frac{1}{2n} \rangle, \\ 0, & x \in (\frac{1}{2n}, 1), \end{cases} \quad g_n(x) := \frac{x(x - 2n)}{1 - 2n}.$$

Zjistěte, zda je posloupnost  $(f_n)$ , resp.  $(g_n)$ , cauchyovská a zda má limitu v prostoru

- 1)  $C(\langle 0, 1 \rangle)$  se supremovou metrikou,
- 2)  $C(\langle 0, 1 \rangle)$  s  $L^2$  metrikou.

---

<sup>1)</sup>Nakreslete si obrázek s grafy funkcí  $f_1, f_2, \dots$ .

**2.9 Definice.** Buď  $X$  metrický prostor s metrikou  $\varrho$ ,  $x \in X$  a  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ . Množinu

$$U(x, \varepsilon) := \{y \in X : \varrho(x, y) < \varepsilon\}$$

nazýváme  $\varepsilon$ -okolím bodu  $x$ .

(Nezáleží-li nám na „poloměru“  $\varepsilon$ , píšeme krátce  $U(x)$  a mluvíme o okolí bodu  $x$ .)

**2.10 Definice.** Buď  $X$  metrický prostor a  $M \subset X$ . Bod  $x \in X$  nazveme

- vnitřním bodem  $M$ , existuje-li okolí  $U(x)$  takové, že  $U(x) \subset M$ ;
- vnějším bodem  $M$ , existuje-li okolí  $U(x)$  takové, že  $U(x) \cap M = \emptyset$ ;
- hraničním bodem  $M$ , není-li ani vnitřním ani vnějším bodem  $M$ ;
- izolovaným bodem  $M$ , existuje-li okolí  $U(x)$  takové, že  $U(x) \cap M = \{x\}$ ;
- hromadným bodem  $M$ , jestliže v každém jeho okolí leží nekonečně mnoho bodů množiny  $M$ .

Navíc značme:

- $\text{int } M$  ... množinu všech vnitřních bodů  $M$  (tzv. vnitřek  $M$ );
- $\text{ext } M$  ... množinu všech vnějších bodů  $M$  (tzv. vnějšek  $M$ );
- $\partial M$  ... množinu všech hraničních bodů  $M$  (tzv. hranice  $M$ );
- $\overline{M} := M \cup \partial M$  ... tzv. uzávěr  $M$ .

**2.11 Definice.** Množinu  $M \subset X$ , kde  $X$  je metrický prostor, nazveme

- otevřenou ( $\text{v } X$ ), jestliže  $M = \text{int } M$ ;
- uzavřenou ( $\text{v } X$ ), je-li její doplněk, tj. množina  $X \setminus M$ , otevřená množina.

**2.12 Cvičení.** Buď  $M \subset X$ . Dokažte následující tvrzení:

i)

$$M \text{ je otevřená množina} \Leftrightarrow \left[ (\forall x \in M) (\exists U(x)) : U(x) \subset M \right] \Leftrightarrow M \cap \partial M = \emptyset;$$

ii)

$$\begin{aligned} M \text{ je uzavřená množina} &\Leftrightarrow M = \overline{M} \Leftrightarrow \partial M \subset M \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left[ \left( (\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in M) \wedge (x_n \rightarrow x \in X) \right) \Rightarrow x \in M \right]; \end{aligned}$$

iii)

$$\overline{M} = \bigcap_{\substack{M \subset K \subset X \\ K \text{ je uzavřená}}} K = \{x \in X : \text{exist. posl. } (x_n) \text{ v } M \text{ taková, že } x_n \rightarrow x\};$$

iv)

$x \in X$  je hromadným bodem  $M \Leftrightarrow$  exist. posl.  $(x_n)$  v  $M \setminus \{x\}$  taková, že  $x_n \rightarrow x$ .

**2.13 Cvičení.** Dokažte, že v každém metrickém prostoru  $X$  platí následující tvrzení týkající se otevřených množin:

- $\emptyset$  a  $X$  jsou otevřené množiny,
- (libovolné) sjednocení otevřených množin je otevřená množina,
- průnik konečně mnoha otevřených množin je otevřená množina;

i „symetrická“ tvrzení týkající se množin uzavřených:

- $\emptyset$  a  $X$  jsou uzavřené množiny,
- (libovolný) průnik uzavřených množin je uzavřená množina,
- sjednocení konečně mnoha uzavřených množin je uzavřená množina.

**2.14 Definice.** Buď  $X$  metrický prostor s metrikou  $\varrho$ . Řekneme, že operátor (zobrazení)

$$T : X \rightarrow X$$

je kontraktivní na  $X$ , existuje-li  $q \in (0, 1)$  takové, že

$$\forall x, y \in X : \varrho(T(x), T(y)) \leq q\varrho(x, y).$$

**2.15 Věta (Banachova o pevném bodě).**

*Buď*

- $X$  úplný metrický prostor,
- $T : X \rightarrow X$  *kontraktivní*.

*Potom*

$$\exists! x \in X : T(x) = x.$$

(Prvek  $x \in X$ , pro který platí  $T(x) = x$ , nazýváme pevným bodem zobrazení  $T$ .)

*Důkaz.*

- 1) Existence. Nejdříve zvolme (a to libovolně)  $x_0 \in X$  a definujme rekurentně posloupnost  $(x_n)$  v  $X$ :

$$\forall n \in \mathbb{N} : x_n := T(x_{n-1}) \stackrel{\text{ozn.}}{=} Tx_{n-1}.$$

Protože  $T$  je **kontraktivní**, platí pro každé  $n \in \mathbb{N}$ , že

$$\begin{aligned} \varrho(x_n, x_{n-1}) &= \varrho(Tx_{n-1}, Tx_{n-2}) \leq q\varrho(x_{n-1}, x_{n-2}) = q\varrho(Tx_{n-2}, Tx_{n-3}) \leq \\ &\leq q^2\varrho(x_{n-2}, x_{n-3}) \leq \dots \leq q^{n-1}\varrho(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Pomocí těchto odhadů (a trojúhelníkové nerovnosti) snadno ověříme, že pro každé  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $n > m$ , je

$$\begin{aligned} \varrho(x_n, x_m) &\leq \varrho(x_n, x_{n-1}) + \varrho(x_{n-1}, x_{n-2}) + \dots + \varrho(x_{m+1}, x_m) \leq \\ &\leq (q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q^m) \varrho(x_1, x_0) \leq \\ &\leq (q^m + \dots + q^{n-2} + q^{n-1} + \dots) \varrho(x_1, x_0) = \frac{q^m}{1-q} \varrho(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Odtud, protože

$$\frac{q^m}{1-q} \varrho(x_1, x_0) \rightarrow 0 \text{ pro } m \rightarrow \infty,$$

vyplývá, že posloupnost  $(x_n)$  je cauchyovská. Existuje proto ( $X$  je úplný metrický prostor)  $x \in X$  takové, že  $x_n \rightarrow x$ . Skutečnost, že  $x$  je hledaným pevným bodem  $T$ , tj. že  $Tx = x$ , je přímým důsledkem pozorování:

- $0 \leq \varrho(Tx_n, Tx) \leq q \underbrace{\varrho(x_n, x)}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0 \Rightarrow \underline{Tx_n \rightarrow Tx};$
- $x_n \rightarrow x \Rightarrow x_{n+1} = \underline{Tx_n \rightarrow x}.$

- 2) Jednoznačnost. Předpokládejme, že pro  $x, y \in X$  je

$$x = Tx, \quad y = Ty.$$

Pak, protože  $T$  je kontraktivní, platí

$$\varrho(x, y) = \varrho(Tx, Ty) \leq q\varrho(x, y),$$

kde  $q \in \langle 0, 1 \rangle$ , a proto  $\varrho(x, y) = 0$ , neboli

$$x = y.$$

□



**2.16 Pozorování.** Všimněme si, že uvedený důkaz obsahuje návod (mluvíme někdy o metodě prosté iterace), jak pevný bod najít, a udává i chybu, jíž se při jeho aproximaci dopouštíme:

- zvolíme libovolně bod  $x_0 \in X$  (tzv. nultou aproximaci),
- sestrojíme posloupnost  $(x_n)$ :

$$x_1 = Tx_0, \quad x_2 = Tx_1, \quad x_3 = Tx_2, \quad \dots, \quad x_n = Tx_{n-1}, \quad \dots$$

Pak  $(x_n)$  konverguje k hledanému pevnému bodu  $x$  a platí:<sup>1</sup>

$$\forall n \in \mathbb{N} : \varrho(x_n, x) \leq \frac{q^n}{1-q} \varrho(x_1, x_0).$$

**2.17 Příklad.** Uvažujme okrajovou úlohu

$$\begin{cases} -u''(x) + g(u(x)) = f(x) \text{ pro } x \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

kde  $f \in C(\langle 0, 1 \rangle)$  a funkce  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je lipschitzovsky spojitá na  $\mathbb{R}$ , tzn. že

$$(\exists q \geq 0) (\forall t, s \in \mathbb{R}) : |g(t) - g(s)| \leq q|t - s|.$$

Buď nyní  $v \in C(\langle 0, 1 \rangle)$  libovolná (pevně zvolená) funkce a hledejme funkci  $u \in C^2(\langle 0, 1 \rangle)$ , která řeší lineární okrajovou úlohu

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) - g(v(x)) \text{ pro } x \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Snadno(?) se lze přesvědčit,<sup>2</sup> že jediným řešením je funkce

$$u(x) := \int_0^1 K(x, t) (f(t) - g(v(t))) dt, \quad (2.3)$$

kde

$$K(x, t) := \begin{cases} (1-x)t & \text{pro } 0 \leq t \leq x \leq 1, \\ x(1-t) & \text{pro } 0 \leq x < t \leq 1. \end{cases}$$

Definujeme nyní operátor

$$T : C(\langle 0, 1 \rangle) \rightarrow C(\langle 0, 1 \rangle)$$

<sup>1</sup>Rozmyslete si podrobně proč!

<sup>2</sup>Udělejte to!

předpisem

$$(Tv)(x) := \int_0^1 K(x, t) (f(t) - g(v(t))) dt, \quad (2.4)$$

tzn. (viz (2.2), (2.3) a (2.4)) že

$$\begin{cases} -(Tv)''(x) = f(x) - g(v(x)) \text{ pro } x \in (0, 1), \\ (Tv)(0) = (Tv)(1) = 0. \end{cases}$$

Najít řešení naší úlohy (2.1) tedy znamená najít pevný bod operátoru  $T$ , tj. funkci  $u \in C(\langle 0, 1 \rangle)$  takovou, že  $Tu = u$ .

Už víme, že  $C(\langle 0, 1 \rangle)$  se supremovou metrikou je **úplný** metrický prostor. Najdeme-li podmínky, za nichž je operátor  $T$  **kontraktivní**, najdeme podmínky zaručující existenci právě jednoho řešení úlohy (2.1) (viz Banachovu větu o pevném bodě 2.15).

Potřebujeme odhadnout

$$\varrho(Tu, Tv) = \sup_{x \in \langle 0, 1 \rangle} |(Tu)(x) - (Tv)(x)|.$$

Protože pro každé  $x \in \langle 0, 1 \rangle$  platí

$$\begin{aligned} |(Tu)(x) - (Tv)(x)| &= \left| \int_0^1 K(x, t) (g(v(t)) - g(u(t))) dt \right| \leq \\ &\leq \int_0^1 \underbrace{|K(x, t)|}_{\leq 1} \cdot \underbrace{|g(v(t)) - g(u(t))|}_{\leq q|v(t) - u(t)|} dt \leq q \int_0^1 |v(t) - u(t)| dt \leq \\ &\leq q \int_0^1 \sup_{x \in \langle 0, 1 \rangle} |v(x) - u(x)| dt = q \varrho(v, u), \end{aligned}$$

je

$$\varrho(Tu, Tv) \leq q \varrho(u, v).$$

Zjistili jsme: je-li konstanta  $q$  charakterizující lipchitzovskou spojitost funkce  $g$  menší než 1, je  $T$  **kontraktivní** operátor, a proto existuje právě jedno řešení okrajové úlohy (2.1).

Závěr – podařilo se nám dokázat následující tvrzení:

*Je-li*

- $g$  *lipschitzovsky spojitá na  $\mathbb{R}$  s konstantou  $q \in \langle 0, 1 \rangle$ ,*
- $f \in C(\langle 0, 1 \rangle)$ ,

existuje v  $C(\langle 0, 1 \rangle)$  právě jedno řešení úlohy

$$\begin{cases} -u''(x) + g(u(x)) = f(x) & \text{pro } x \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Ukažme si konstrukci posloupnosti postupných aproximací (viz metodu prosté iterace 2.16):

- $u_0 \in C(\langle 0, 1 \rangle)$  ... libovolná funkce,
- $u_1 = Tu_0$  ... řešení lineární úlohy

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) - g(u_0(x)) & \text{v } (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

- $u_2 = Tu_1$  ... řešení lineární úlohy

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) - g(u_1(x)) & \text{v } (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

$\vdots$

- $u_{n+1} = Tu_n$  ... řešení lineární úlohy

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) - g(u_n(x)) & \text{v } (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

$\vdots$

Vlastně místo řešení **nelineární** okrajové úlohy (2.1) hledáme posloupnost řešení **lineárních** okrajových úloh typu

$$\begin{cases} -u''(x) = F(x) & \text{v } (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

**2.18 Příklad.** Dokažme pomocí Banachovy věty o pevném bodě Picardovu – Lindelöfovou větu:

Bud'

- $f, \frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  spojité na množině

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq a \wedge |y - y_0| \leq b\},$$

kde  $x_0, y_0 \in \mathbb{R}; a, b \in \mathbb{R}^+$ ;

- $M = \max_{(x,y) \in D} |f(x, y)|, L = \max_{(x,y) \in D} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right|;$
- $h \in \mathbb{R}^+$  takové, že  $h \leq a, hM \leq b, hL < 1$ .

Pak existuje právě jedno řešení Cauchyovy úlohy

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

na intervalu  $(x_0 - h, x_0 + h)$ .

*Důkaz.* Předně si uvědomme, že daná Cauchyova úloha je ekvivalentní s integrální rovnicí

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt.$$

Nyní uvažujme metrický prostor  $C(\langle x_0 - h, x_0 + h \rangle)$  se supremovou metrikou

$$\varrho(y_1, y_2) := \sup_{x \in \langle x_0 - h, x_0 + h \rangle} |y_1(x) - y_2(x)|$$

a definujme

$$X = \{y \in C(\langle x_0 - h, x_0 + h \rangle) : |y(x) - y_0| \leq b \text{ pro každé } x \in \langle x_0 - h, x_0 + h \rangle\}.$$

Prostor  $X$  s indukovanou metrikou

$$\varrho = \varrho|_X$$

je zřejmě úplný metrický prostor ( $X$  je uzavřenou podmnožinou úplného metrického prostoru  $C(\langle x_0 - h, x_0 + h \rangle)$ ).

Teď definujme operátor

$$T : X \rightarrow C(\langle x_0 - h, x_0 + h \rangle)$$

předpisem

$$(Ty)(x) := y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt.$$

Zbývá dokázat (viz Banachovu větu o pevném bodě 2.15), že

(i)  $\forall y \in X : Ty \in X$  (tj.  $T : X \rightarrow X$ ),

(ii)  $T : X \rightarrow X$  je kontraktivní.

Ad (i). Buď  $y \in X$ . Pak pro každé  $x \in \langle x_0 - h, x_0 + h \rangle$  platí

$$|(Ty)(x) - y_0| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, y(t))| dt \right| \leq M|x - x_0| \leq Mh \leq b,$$

a proto  $Ty \in X$ .

Ad (ii).  $(\forall y_1, y_2 \in X) (\forall x \in \langle x_0 - h, x_0 + h \rangle) :$

$$\begin{aligned} |(Ty_1)(x) - (Ty_2)(x)| &= \left| \int_{x_0}^x f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t)) dt \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x L |y_1(t) - y_2(t)| dt \right| \leq L h \varrho(y_1, y_2), \end{aligned}$$

a proto

$$\varrho(Ty_1, Ty_2) \leq q \varrho(y_1, y_2),$$

kde  $q := h L < 1$ . □

**2.19 Varovné příklady.** Uvažujme  $\mathbb{R}$  s eukleidovskou metrikou  $\varrho(x, y) := |x - y|$  a rozmysleme si podrobně následující tvrzení.

1) Pro funkci  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definovanou předpisem

$$T(x) := x + 1$$

platí

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \varrho(Tx, Ty) = |x - y| = 1 \cdot \varrho(x, y),$$

ale  $T$  nemá pevný bod (tj. neexistuje  $x \in \mathbb{R}$  takové, aby  $T(x) = x$ ).

2) Pro funkci  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definovanou předpisem

$$T(x) := \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ x + e^{-x}, & x > 0, \end{cases}$$

platí

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \varrho(Tx, Ty) = |Tx - Ty| < |x - y| = \varrho(x, y),$$

a přesto neexistuje pevný bod funkce  $T$ .

**2.20 Cvičení.** Ukažte, že z Banachovy věty 2.15 o pevném bodě plyne tvrzení:

$$\left. \begin{array}{l} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \\ (\exists q < 1) (\forall x \in \mathbb{R}) : |f'(x)| \leq q \end{array} \right\} \Rightarrow \exists! x \in \mathbb{R} : f(x) = x.$$

(Dokažte tvrzení i přímo – bez Banachovy věty.)

**2.21 Cvičení.** Dokažte tuto speciální verzi Brouwerovy věty o pevném bodě:

$$\left. \begin{array}{l} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ je spojitá na intervalu } \langle a, b \rangle, \\ \forall x \in \langle a, b \rangle : f(x) \in \langle a, b \rangle, \\ (a, b \in \mathbb{R}, a < b) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists x \in \langle a, b \rangle : f(x) = x$$

a všimněte si, že důsledkem je tvrzení:

$$\left. \begin{array}{l} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \\ \forall x \in \langle a, b \rangle : f(x) \in \langle a, b \rangle, \\ \forall x, y \in \langle a, b \rangle : |f(x) - f(y)| \leq |x - y|, \\ (a, b \in \mathbb{R}, a < b) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists x \in \langle a, b \rangle : f(x) = x,$$

a porovnejte ho s příkladem 2.19.

### 2.22 Věta (Cantorova).

*Nechť*

- $X$  je **úplný** metrický prostor,
- $(M_n)$  je nerostoucí posloupnost neprázdných uzavřených množin v  $X$ , tzn.

$$\forall n \in \mathbb{N} : \emptyset \neq M_{n+1} \subset M_n = \overline{M_n} \subset X,$$

- $\text{diam } M_n := \sup_{x, y \in M_n} \varrho(x, y) \rightarrow 0$ .

Potom  $\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$  je jednobodový, tzn.

$$\exists x \in X : \{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n.$$

*Důkaz* Cantorovy věty ponechme jako užitečné cvičení čtenářům.

(Nápověda: zvolte pro každé  $n \in \mathbb{N}$  libovolně  $x_n \in M_n$  a ukažte, že posloupnost  $(x_n)$  je cauchyovská (a proto konvergentní) v  $X$  a že její limita  $x \in X$  je právě oním hledaným jediným prvkem průniku  $\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$ .)

**2.23 Definice.** Buď  $X$  metrický prostor. Řekneme, že množina  $M \subset X$  je

- řídka, je-li  $\text{int } \overline{M} = \emptyset$ ;
- 1. kategorie, je-li sjednocením spočetně mnoha řídkých množin, tzn.

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n, \text{ kde pro každé } n \in \mathbb{N} \text{ je } \text{int } \overline{M_n} = \emptyset;$$

- 2. kategorie, jestliže není 1. kategorie.

**2.24 Příklady.** Uvažujme metrický prostor  $\mathbb{R}$  s metrikou

$$\varrho(x, y) := |x - y|.$$

Pak

- 1) každá konečná podmnožina  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}$  je řídká,
- 2) množina  $\mathbb{N}$  je řídká,
- 3) množina  $\mathbb{Q}$  není řídká,
- 4) každá (nejvýše) spočetná podmnožina  $\mathbb{R}$  je 1. kategorie (speciálně  $\mathbb{Q}$  je 1. kategorie).

**2.25 Věta (Baireova).** *Nechť  $X$  je úplný metrický prostor. Pak každá neprázdná otevřená podmnožina  $X$  je 2. kategorie. Speciálně:  $X$  je 2. kategorie.*

*Důkaz.* Předpokládejme sporem, že

$$\emptyset \neq U \subset X \text{ je otevřená množina} \tag{2.5}$$

a že

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n, \text{ kde pro každé } n \in \mathbb{N} \text{ je } \text{int } \overline{M_n} = \emptyset. \tag{2.6}$$

Díky (2.5) existuje  $a \in U$  a číslo  $r > 0$  takové, že

$$U(a, r) := \{x \in X : \varrho(x, a) < r\} \subset \overline{U(a, r)} \subset \{x \in X : \varrho(x, a) \leq r\} \subset U.$$

Z předpokladu  $\text{int } \overline{M_1} = \emptyset$  plyne, že existuje bod  $a_1 \in U(a, r)$  takový, že

$$\text{dist}(a_1, \overline{M_1}) := \inf_{x \in \overline{M_1}} \varrho(a_1, x) > 0$$

(to si rozmyslete podrobně!), a proto i kladné číslo  $r_1$  takové, že

$$\overline{U(a_1, r_1)} \cap \overline{M_1} = \emptyset, \quad \overline{U(a_1, r_1)} \subset \overline{U(a, r)}, \quad 0 < r_1 < \frac{r}{2}.$$

A dál postupujme analogicky: z předpokladu  $\text{int } \overline{M_2} = \emptyset$  vyplývá, že existuje bod  $a_2 \in U(a_1, r_1)$  a číslo  $r_2$  tak, že

$$\overline{U(a_2, r_2)} \cap \overline{M_2} = \emptyset, \quad \overline{U(a_2, r_2)} \subset \overline{U(a_1, r_1)}, \quad 0 < r_2 < \frac{r_1}{2}.$$

...

Tímto způsobem lze sestrojit posloupnost neprázdných uzavřených množin  $\left(\overline{U(a_n, r_n)}\right)$ , pro které platí:

$$U \supset \overline{U(a, r)} \supset \overline{U(a_1, r_1)} \supset \overline{U(a_2, r_2)} \supset \dots,$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : \overline{U(a_n, r_n)} \cap \overline{M_n} = \emptyset, \quad (2.7)$$

$$\text{diam } \overline{U(a_n, r_n)} \leq 2r_n \rightarrow 0.$$

Z Cantorovy věty 2.22 vyplývá

$$\exists x \in X : \{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U(a_n, r_n)} \subset U.$$

Jenže: pro toto  $x$  má současně platit

$$x \in U = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \text{ (viz (2.6))},$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : x \notin \overline{M_n} \text{ (viz (2.7)).}$$

A to je spor.

□



## Kapitola 3

# Normovaný lineární prostor

**3.1 Definice.** Normovaným lineárním prostorem nazýváme každý vektorový prostor  $X = (X, +, \cdot)$ , na němž je definováno zobrazení (tzv. norma)

$$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$$

splňující podmínky:

- (1)  $\forall x \in X : \|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$
- (2)  $(\forall x \in X) (\forall \alpha \in \mathbb{R}) : \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|;$
- (3)  $\forall x, y \in X : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

Je snadné nahlédnout: je-li  $X$  NLP,<sup>1</sup> je zobrazení  $\varrho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  definované předpisem

$$\varrho(x, y) := \|x - y\|$$

metrikou na  $X$ . Máme tedy definovanou (tzv. silnou) konvergenci:

$$\begin{aligned} (x_n) \dots \text{posloupnost v NLP } X, x \in X \\ x_n \rightarrow x \Leftrightarrow \varrho(x_n, x) = \|x_n - x\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

**3.2 Definice.** Normovaný lineární prostor  $X$  se nazývá Banachův, jestliže je úplný (vzhledem k indukované metrice  $\varrho(x, y) := \|x - y\|$ ).

**3.3 Příklady.** Uvažujme vektorové prostory definované v příkladech 1.3 a opatřeme je normou.

<sup>1</sup>Tuto zkratku asi nemusíme vysvětlovat.

1)  $X = \{1\}$ ,  $\|1\| := 0$  je Banachův prostor.

2)  $X = \mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) s eukleidovskou normou

$$\|x\| = \|(x_1, \dots, x_n)\| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

je Banachův prostor.

3)  $X = \mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) s maximovou normou

$$\|x\| = \|(x_1, \dots, x_n)\| := \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$$

je Banachův prostor.

4)  $X = \mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) se součtovou normou

$$\|x\| = \|(x_1, \dots, x_n)\| := |x_1| + \dots + |x_n|$$

je Banachův prostor.

5)  $X = C(\langle 0, 1 \rangle)$  se supremovou normou

$$\|f\| := \sup_{x \in \langle 0, 1 \rangle} |f(x)| = \max_{x \in \langle 0, 1 \rangle} |f(x)|$$

pro  $f \in C(\langle 0, 1 \rangle)$  je Banachův prostor.

6)  $X = C(\langle 0, 1 \rangle)$  s  $L^p$  normou ( $1 \leq p < \infty$ )

$$\|f\| := \left( \int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

**není** Banachův prostor (ale je to NLP).

7)  $X = l^p$  ( $1 \leq p < \infty$ ) s normou

$$\|x\| = \|(x_n)\| := \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

je Banachův prostor.

8)  $X = l^\infty$  s normou

$$\|x\| = \|(x_n)\| := \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$$

je Banachův prostor.

**3.4 Věta.** *Bud'  $(x_n)$  posloupnost v Banachově prostoru  $X$ . Pak platí implikace*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty \Rightarrow \text{existuje } \lim_{n \rightarrow \infty} (x_1 + \dots + x_n) \stackrel{\text{ozn.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} x_n \in X.$$

*Důkaz.* Definujme tzv. posloupnost částečných součtů  $(s_n)$  předpisem

$$s_n := x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

Pak pro každé  $m, n \in \mathbb{N}$  takové, že  $m > n$ , platí

$$\|s_m - s_n\| = \|x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_m\| \leq \|x_{n+1}\| + \dots + \|x_m\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|x_k\|.$$

Odtud, protože z předpokladu  $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$  plyne  $\sum_{k=n+1}^{\infty} \|x_k\| \rightarrow 0$  pro  $n \rightarrow \infty$ , snadno odvodíme, že posloupnost  $(s_n)$  je cauchyovská (v úplném prostoru  $X$ ), a tudíž konvergentní.

□

**3.5 Cvičení.** Dokažte, že v každém NLP  $X$  je norma spojitým funkcioálem, tzn. že platí implikace

$$x_n \rightarrow x \Rightarrow \|x_n\| \rightarrow \|x\|.$$

**3.6 Definice.** Dva normované lineární prostory  $X$  a  $Y$  se nazývají izomorfními, existuje-li zobrazení (tzv. izomorfismus)

$$L : X \rightarrow Y$$

takové, že

(1)  $L$  je lineární

$$(\text{tzn. } (\forall x, y \in X) (\forall \alpha \in \mathbb{R}) : L(x + y) = Lx + Ly, L(\alpha x) = \alpha Lx),$$

(2)  $L$  je vzájemně jednoznačné (tzn. prosté a na);

(3)  $(\exists k, K \in \mathbb{R}^+) (\forall x \in X) : k \|x\|_X \leq \|Lx\|_Y \leq K \|x\|_X$ .

Platí-li navíc, že  $k = K = 1$ , nazýváme prostory  $X$  a  $Y$  izometricky izomorfními a zobrazení  $L$  izometrickým izomorfismem  $X$  na  $Y$ .

**3.7 Definice.** Dvě normy  $\|\cdot\|_1$  a  $\|\cdot\|_2$  na vektorovém prostoru  $X$  se nazývají ekvivalentními, existují-li konstanty  $k, K \in \mathbb{R}^+$  takové, že

$$\forall x \in X : k\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq K\|x\|_1.$$

**3.8 Pozorování.** Jsou-li normy  $\|\cdot\|_1$  a  $\|\cdot\|_2$  ekvivalentní na  $X$ , platí ekvivalence

$$\|x_n - x\|_1 \rightarrow 0 \Leftrightarrow \|x_n - x\|_2 \rightarrow 0,$$

tzn.

$$\begin{array}{ccc} x_n \rightarrow x & \Leftrightarrow & x_n \rightarrow x. \\ \text{(vzhledem k } \|\cdot\|_1) & & \text{(vzhledem k } \|\cdot\|_2) \end{array}$$

**3.9 Věta.** *Nechť*

- $X$  je NLP,
- $\dim X = n \in \mathbb{N}$ .

*Pak  $X$  je izomorfní s  $\mathbb{R}^n$  (s eukleidovskou normou).*

*Důkaz.* Buď  $\{x_1, \dots, x_n\}$  nějaká báze  $X$  (viz 1.14).

Definujeme zobrazení  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow X$  předpisem

$$L\alpha = L(\alpha_1, \dots, \alpha_n) := \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i.$$

Ukážeme, že  $L$  je izomorfismus.

- $L$  je zřejmě lineární.
- $L$  je prosté a na (to plyne – a rozmyslete si podrobně jak – z definice báze 1.13).
- $\forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n :$

$$\begin{aligned} \|L\alpha\| &= \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n \|\alpha_i x_i\| = \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \cdot \|x_i\| \leq \max\{\|x_1\|, \dots, \|x_n\|\} \cdot \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \leq \\ &\leq \max\{\|x_1\|, \dots, \|x_n\|\} \cdot \sum_{i=1}^n \|\alpha\| = \underbrace{\max\{\|x_1\|, \dots, \|x_n\|\} \cdot n}_{=:K} \|\alpha\| = K\|\alpha\|. \end{aligned}$$

Dokázali jsme, že

$$(\exists K \in \mathbb{R}^+) (\forall \alpha \in \mathbb{R}^n) : \|L\alpha\| \leq K\|\alpha\|. \quad (3.1)$$

Zbývá nám dokázat:

$$(\exists k \in \mathbb{R}^+) (\forall \alpha \in \mathbb{R}^n) : k\|\alpha\| \leq \|L\alpha\|.$$

Uvažujme nyní funkci  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definovanou předpisem

$$f(\alpha) := \|L\alpha\|.$$

Funkce  $f$  je zřejmě spojitá:<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \alpha_m \rightarrow \alpha &\Rightarrow \|\alpha_m - \alpha\| \rightarrow 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \|L\alpha_m - L\alpha\| &= \|L(\alpha_m - \alpha)\| \leq K\|\alpha_m - \alpha\| \rightarrow 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow L\alpha_m \rightarrow L\alpha &\Rightarrow \|L\alpha_m\| \rightarrow \|L\alpha\| \Rightarrow \underline{f(\alpha_m) \rightarrow f(\alpha)}, \end{aligned}$$

a proto existuje (viz Weierstrassovu větu)<sup>2</sup>

$$\min \{f(\xi) : \|\xi\| = 1\}.$$

Protože  $L$  je prosté a  $L(0) = 0$ , je  $f > 0$  na množině  $\{\xi \in \mathbb{R}^n : \|\xi\| = 1\}$ , a tudíž

$$k := \min \{f(\xi) : \|\xi\| = 1\} > 0.$$

Odtud již snadno plyne

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\} : \|L\alpha\| = \|\alpha\| \cdot \left\| L \left( \frac{\alpha}{\|\alpha\|} \right) \right\| = \|\alpha\| \cdot f \left( \frac{\alpha}{\|\alpha\|} \right) \geq k\|\alpha\|,$$

a proto taky

$$(\exists k \in \mathbb{R}^+) (\forall \alpha \in \mathbb{R}^n) : k\|\alpha\| \leq \|L\alpha\|.$$

Dokázali jsme, že  $L$  je izomorfismus  $\mathbb{R}^n$  na  $X$ .

□

**3.10 Cvičení.** Pokuste se dokázat následující tvrzení.

- 1) Každý normovaný lineární prostor **konečné dimenze** je Banachův.
- 2) Každé dvě normy v prostoru **konečné dimenze** jsou ekvivalentní.
- 3) Každý podprostor **konečné dimenze** NLP  $X$  je uzavřený v  $X$ .

<sup>1</sup>Rozmyslete si – s pomocí (3.1) a 3.5 – každou z následujících implikací!

<sup>2</sup>Ta mimochodem plyne z úplnosti  $\mathbb{R}$ .

**3.11 Příklad.** Uvažujme na vektorovém prostoru  $X = C(\langle 0, 1 \rangle)$  dvě normy:

$$\|f\|_1 := \sup_{x \in \langle 0, 1 \rangle} |f(x)|; \quad \|f\|_2 := \int_0^1 |f(x)| dx.$$

Už víme, že  $X$  s normou  $\|\cdot\|_1$  je Banachův prostor a že  $X$  s normou  $\|\cdot\|_2$  **není** Banachův prostor. Odtud již snadno plyne (rozmyslete si podrobně!), že normy  $\|\cdot\|_1$  a  $\|\cdot\|_2$  nejsou na  $X$  ekvivalentní, a proto  $X$  nemá konečnou dimenzi.

**3.12 Definice.** Buď  $Y$  NLP a buď  $M \subset Y$ . Řekneme, že  $M$  je hustou podmnožinou  $Y$ , platí-li

$$Y = \overline{M} := \{y \in Y : \text{existuje posloupnost } (x_n) \text{ v } M \text{ taková, že } x_n \rightarrow y \text{ (v } Y)\}.$$

**3.13 Příklad.** Uvažujme NLP  $\mathbb{R}$ . Pak  $\mathbb{Q}$  je hustou podmnožinou  $\mathbb{R}$ .

**3.14 Věta (Cantorova o zúplnění).** *Nechť  $X$  je NLP. Pak existuje Banachův prostor  $Y$  a zobrazení*

$$L : X \rightarrow Y$$

*takové, že platí*

1)  $L$  je lineární,

2)  $L$  je prosté,

3)  $\overline{L(X)} = Y$ ,

4)  $\forall x \in X : \|Lx\|_Y = \|x\|_X$

$\left( \text{tzn. že } L \text{ je izometrický izomorfismus } X \text{ na hustou podmnožinu } Y \right).$

**3.15 Poznámka.** Výše uvedený Banachův prostor  $Y$  – tzv. zúplnění  $X$  – je určen až na izometrický izomorfismus jednoznačně.

## Kapitola 4

# Prostor se skalárním součinem

**4.1 Definice.** Prostorem se skalárním součinem nazýváme každý vektorový prostor  $X = (X, +, \cdot)$ , na němž je definováno zobrazení (tzv. skalární součin)

$$(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

splňující podmínky:

- (1)  $\forall y \in X : x \mapsto (x, y)$  je lineární zobrazení na  $X$ ,
- (2)  $\forall x, y \in X : (x, y) = (y, x)$ ,
- (3)  $\forall x \in X : (x, x) \geq 0, (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

Dá se snadno dokázat: je-li  $X$  prostor se skalárním součinem, je zobrazení  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$  definované předpisem

$$\|x\| := \sqrt{(x, x)}$$

normou na  $X$ .<sup>1</sup> Můžeme proto prostory se skalárním součinem vnímat jako speciální případy NLP.

**4.2 Definice.** Prostor  $X$  se skalárním součinem se nazývá Hilbertův prostor, jestliže je úplný v indukované metrice

$$\varrho(x, y) := \|x - y\| = \sqrt{(x - y, x - y)}.$$

**4.3 Příklady.** Podíváte-li se na normované lineární prostory uvedené v 3.3, nebudete následujícími příklady vůbec překvapeni.

<sup>1</sup>Mluvíme o normě indukované skalárním součinem.

1)  $X = \mathbb{R}^n$  se skalárním součinem

$$(x, y) := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

$$(x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n)$$

je Hilbertův prostor.

2)  $X = l^2$  se skalárním součinem

$$(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

$$(x = (x_n), y = (y_n) \in l^2)$$

je Hilbertův prostor.

3)  $X = C(\langle 0, 1 \rangle)$  se skalárním součinem

$$(f, g) := \int_0^1 f(x)g(x) \, dx$$

$$(f, g \in C(\langle 0, 1 \rangle))$$

není Hilbertův prostor.

#### 4.4 Věta (o Cauchyho – Schwartzově – Buňakovského nerovnosti).

*Nechť  $X$  je prostor se skalárním součinem. Pak pro každé  $x, y \in X$  platí*

$$|(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)} \cdot \sqrt{(y, y)} = \|x\| \cdot \|y\|.$$

*Důkaz.* Buď  $x, y \in X$  dáno.

1) Je-li  $y = 0$ , plyne přímo z vlastností skalárního součinu, že

$$(x, y) = (x, 0) = (0, x) = 0,$$

$$(y, y) = (0, 0) = 0,$$

a není proto co dokazovat.

2) Je-li  $y \neq 0$ , platí pro každé  $t \in \mathbb{R}$ :

$$0 \leq (x + ty, x + ty) = (x, x) + 2t(x, y) + t^2 \underbrace{(y, y)}_{>0},$$



a proto příslušný diskriminant musí být nekladný, tj.

$$(2(x, y))^2 - 4(y, y)(x, x) \leq 0.$$

Odtud již snadno vyplývá dokazovaná nerovnost. □

Ukázali jsme si, že skalárním součinem je vždy indukovaná norma. Není však pravda, že každá norma je indukovaná nějakým skalárním součinem.

#### 4.5 Věta (rovnoběžníkové pravidlo).

i) *Nechť  $X$  je prostor se skalárním součinem. Pak pro indukovanou normu*

$$\|\cdot\| := \sqrt{(\cdot, \cdot)}$$

*platí tzv. rovnoběžníkové pravidlo:*

$$\forall x, y \in X : \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \quad (4.1)$$

ii) *Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor, v němž platí rovnoběžníkové pravidlo (4.1). Pak zobrazení definované na  $X \times X$  předpisem*

$$(x, y) := \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

*je skalárním součinem na  $X$ , který indukuje danou normu.*

*Důkaz ponechme jako dobrovolné cvičení.*

**4.6 Příklad.** Uvažujme vektorový prostor  $\mathbb{R}^2$  s maximovou normou

$$\|x\| = \|(x_1, x_2)\| := \max\{|x_1|, |x_2|\}$$

a zvolme

$$x = (1, 0), \quad y = (1, 1).$$

Pak

$$x + y = (2, 1), \quad x - y = (0, -1),$$

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 4 + 1 = 5,$$

$$2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 2(1 + 1) = 4,$$

a proto maximová norma  $\|\cdot\|$  **není** indukovaná žádným skalárním součinem (viz větu 4.5).

**4.7 Úmluva.** Až do konce kapitoly budeme symbolem „ $H$ “ rozumět Hilbertův prostor se skalárním součinem  $(\cdot, \cdot)$  a indukovanou normou  $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot, \cdot)}$ .

**4.8 Definice.** Prvky  $x, y \in H$  se nazývají ortogonální, je-li

$$(x, y) = 0.$$

Systém  $\{x_\gamma : \gamma \in \Gamma\} \subset H$  se nazývá ortogonální, platí-li

$$\forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma : [\gamma_1 \neq \gamma_2 \Rightarrow (x_{\gamma_1}, x_{\gamma_2}) = 0].$$

Systém  $\{x_\gamma : \gamma \in \Gamma\} \subset H$  se nazývá ortonormální, platí-li

$$\forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma : (x_{\gamma_1}, x_{\gamma_2}) = \begin{cases} 0, & \text{je-li } \gamma_1 \neq \gamma_2 \\ & (\text{tzn. } \{x_\gamma : \gamma \in \Gamma\} \text{ je ortogonální systém}), \\ 1, & \text{je-li } \gamma_1 = \gamma_2 \\ & (\text{tzn. } \forall \gamma \in \Gamma : \|x_\gamma\| = 1). \end{cases}$$

#### 4.9 Pozorování.

i) *Ortogonální systém  $\{x_\gamma : \gamma \in \Gamma\} \subset H$  nenulových prvků je lineárně nezávislý.*

*Důkaz.* Buď  $x_1, \dots, x_n$  libovolné navzájem různé prvky z  $\{x_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$  a buď  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ . Pak

$$\begin{aligned} & \underline{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \left[ \forall i \in \{1, \dots, n\} : (\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n, x_i) = (0, x_i) = 0 \right] \Rightarrow \\ & \Rightarrow \left[ \forall i \in \{1, \dots, n\} : \sum_{k=1}^n \alpha_k \underbrace{(x_k, x_i)}_{=0, \text{ je-li } k \neq i} = \alpha_i \underbrace{(x_i, x_i)}_{\neq 0} = 0 \right] \Rightarrow \\ & \Rightarrow \underline{\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0}. \end{aligned}$$

□

ii) Necht  $\{e_1, \dots, e_n\} \subset H$  je ortonormální báze podprostoru  $Y \subset H^1$  a necht  $y \in Y$ . Pak

$$y = \sum_{k=1}^n (y, e_k) e_k, \quad \|y\|^2 = \sum_{k=1}^n |(y, e_k)|^2.$$

*Důkaz.* Je-li  $y \in Y$ , existují čísla  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  taková, že

$$y = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k,$$

a proto pro každé  $j \in \{1, \dots, n\}$  platí

$$(y, e_j) = \left( \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k, e_j \right) = \sum_{k=1}^n \alpha_k (e_k, e_j) = \alpha_j,$$

neboli

$$y = \sum_{k=1}^n (y, e_k) e_k.$$

Podobně snadné je dokázat tvrzení týkající se normy  $y$ :

$$\|y\|^2 = \left( \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k, \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \right) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_k \alpha_j (e_k, e_j) = \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 = \sum_{k=1}^n |(y, e_k)|^2.$$

□

Zobecněním tohoto pozorování je následující věta.

---

<sup>1</sup>Tzn. že  $\{e_1, \dots, e_n\}$  je ortonormální systém a současně  $Y = \text{Lin} \{e_1, \dots, e_n\}$ , neboli

$$(\forall y \in Y) (\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}) : y = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k.$$

**4.10 Věta (o aproximaci).** *Nechť  $\{e_1, \dots, e_n\}$  je ortonormální báze podprostoru  $Y \subset H$ . Pak pro každé  $x \in H$  existuje **jediné**  $y \in Y$  takové, že*

$$\|x - y\| = \inf_{z \in Y} \|x - z\|.$$

*Pro toto  $y$  navíc platí:*

$$\text{i) } y = \sum_{k=1}^n (x, e_k) e_k,$$

$$\text{ii) } \|x - y\|^2 = \|x\|^2 - \|y\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |(x, e_k)|^2, \quad a$$

$$\text{iii) } \forall z \in Y : (x - y, z) = 0.$$

<sup>a</sup>Je šikovné si uvědomit, že první z rovností říkáme v rovině Pythagorova věta. Je to jasné? Pokud ne, nakreslete si obrázek.

*Důkaz.* Buď  $x \in H$  dáno.

Nejdříve si uvědomme, že

$$\begin{aligned} \|x - \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k\|^2 &= \left( x - \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k, x - \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \right) = \\ &= \|x\|^2 - 2 \sum_{k=1}^n \alpha_k (x, e_k) + \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \pm \sum_{k=1}^n |(x, e_k)|^2 = \\ &= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |(x, e_k)|^2 + \sum_{k=1}^n |(x, e_k) - \alpha_k|^2, \end{aligned}$$

kde  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ , bude nejmenší, bude-li

$$\sum_{k=1}^n |(x, e_k) - \alpha_k|^2 = 0,$$

to znamená, bude-li

$$\forall k \in \{1, \dots, n\} : \alpha_k = (x, e_k).$$

Zvolíme-li proto

$$y = \sum_{k=1}^n (x, e_k) e_k \in Y,$$

platí pro každé  $z \in Y \setminus \{y\}$ , že

$$\|x - z\| > \|x - y\|.$$

Navíc platí (viz předchozí pozorování 4.9) i tvrzení ii).

Zbývá dokázat tvrzení iii). Buď

$$z = \sum_{j=1}^n c_j e_j \in Y,$$

kde  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ , zvoleno libovolně. Pak

$$\begin{aligned} (x - y, z) &= \left( x - \sum_{k=1}^n (x, e_k) e_k, \sum_{j=1}^n c_j e_j \right) = \\ &= \sum_{j=1}^n c_j \left[ (x, e_j) - \sum_{k=1}^n (x, e_k) (e_k, e_j) \right] = \sum_{j=1}^n c_j [(x, e_j) - (x, e_j)] = 0. \end{aligned}$$

□

#### 4.11 Věta (o Fourierových řadách). *Nechť*

$$\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$$

*je ortonormální systém v Hilbertově prostoru  $H$ .*

*Pak platí*

- i)  $\forall x \in H : \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 \leq \|x\|^2 \quad \dots \text{ tzv. } \underline{\text{Besselova nerovnost}},$
- ii)  $\forall x \in H : \text{ existuje } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (x, e_k) e_k \stackrel{\text{ozn.}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k \quad \dots \text{ tzv. } \underline{\text{Fourierova řada } x},$
- iii)  $\forall x \in H : \left[ x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n \Leftrightarrow \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 \right]$   
 $\dots \text{ tzv. } \underline{\text{Parsevalova rovnost}}.$

*Důkaz.*

Ad i). Z věty o aproximaci 4.10 vyplývá, že

$$(\forall x \in H) (\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |(x, e_k)|^2,$$

a proto

$$\forall x \in H : \sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 \leq \|x\|^2.$$

Ad ii). Definujme posloupnost  $(s_n)$  v  $H$  předpisem

$$s_n := \sum_{k=1}^n (x, e_k) e_k.$$

Pak pro  $m > n$  platí

$$\begin{aligned} \|s_m - s_n\|^2 &= \left\| \sum_{k=n+1}^m (x, e_k) e_k, \sum_{k=n+1}^m (x, e_k) e_k \right\|^2 = \\ &= \sum_{k=n+1}^m |(x, e_k)|^2 \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 \end{aligned}$$

a navíc (viz – již dokázanou – Besselovu nerovnost)

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 \rightarrow 0 \text{ pro } n \rightarrow \infty.$$

Odtud plyne, že posloupnost  $(s_n)$  je **cauchyovská**, a proto konvergentní v úplném prostoru  $H$ .

Ad iii). Stačí si uvědomit, že z věty o aproximaci 4.10 vyplývá

$$\|x - s_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |(x, e_k)|^2,$$

a proto

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n \Leftrightarrow \|x - s_n\|^2 \rightarrow 0 \Leftrightarrow \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2.$$

□

**4.12 Definice.** Ortonormální systém  $\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\} \subset H$  se nazývá ortonormální bází prostoru  $H$ , platí-li

$$\forall x \in H : x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n.$$

**4.13 Cvičení.** Definujme pro každé  $n \in \mathbb{N}$  posloupnost

$$e_n := 0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots$$

( $n$ -tým členem posloupnosti  $e_n$  je číslo 1, ostatní členy jsou nulové).

Dokažte, že  $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$  je ortonormální bázi Hilbertova prostoru  $l^2$ .

Následujícímu příkladu plně porozumíte, až se seznámíte s Lebesgueovým integrálem a Lebesgueovými prostory  $L^2(\Omega)$ .<sup>1</sup>

**4.14 Příklad.** Dá se ukázat, že systém funkcí

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) : n \in \mathbb{N} \right\}$$

je ortonormální bázi Hilbertova prostoru

$$L^2(0, 2\pi) = \overline{C(\langle 0, 2\pi \rangle)}^{\|\cdot\|_{L^2(0, 2\pi)}}$$

Platí proto pro každou funkci  $f \in L^2(0, 2\pi)$  (a tedy i pro každou funkci  $f$  spojitou na  $\langle 0, 2\pi \rangle$ ), že

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

kde

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) \, dx, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\};$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) \, dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

**Pozor!** Konvergenci řady  $\sum_{n=1}^{\infty} \dots$  zde rozumíme konvergenci v normě prostoru  $L^2(0, 2\pi)$ , tzn.

$$\left\| f(x) - \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \right) \right\|_{L^2(0, 2\pi)} \rightarrow 0 \text{ pro } n \rightarrow \infty.$$

<sup>1</sup>V tuto chvíli pouze prozradíme, že prostor  $L^2(0, 2\pi)$  je zúplněním prostoru  $C(\langle 0, 2\pi \rangle)$  uvažovaného s normou indukovanou skalárním součinem

$$(f, g) := \int_0^{2\pi} f(x)g(x) \, dx.$$

**Poznámka.** Podobně se dá ukázat, že každý ze systémů

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(nx) : n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx) : n \in \mathbb{N} \right\}$$

je ortonormální bází Hilbertova prostoru  $L^2(0, \pi)$ .

**4.15 Věta (Schmidtův ortonormalizační proces).** *Nechť*

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset H$$

*je taková množina, že pro každé  $n \in \mathbb{N}$  jsou prvky  $x_1, x_2, \dots, x_n$  lineárně nezávislé. Pak existuje ortonormální systém  $\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subset H$  takový, že*

$$\forall n \in \mathbb{N} : \text{Lin}\{x_1, \dots, x_n\} = \text{Lin}\{e_1, \dots, e_n\}.$$

*Důkaz.* Ověřte, že stačí položit (viz větu 4.10):

$$e_1 := \frac{x_1}{\|x_1\|}, \quad e_{n+1} := \frac{x_{n+1} - \sum_{k=1}^n (x_{n+1}, e_k) e_k}{\|x_{n+1} - \sum_{k=1}^n (x_{n+1}, e_k) e_k\|} \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

□

**4.16 Věta.** *Nechť Hilbertův prostor  $H$  je separabilní (tzn. že existuje jeho hustá spočetná podmnožina). Pak existuje jeho – nejvýše spočetná – ortonormální báze.*

*Důkaz.* Je-li dimenze prostoru  $H$  konečná, je tvrzení triviální. Předpokládejme proto navíc, že  $\dim H = \infty$ . Buď  $M$  hustou spočetnou podmnožinou  $H$ , tzn.

$$M = \{x_1, \dots, x_n, \dots\} \subset H, \quad \overline{M} = H.$$

Zřejmě platí:

$$\overline{\{x_1, \dots, x_n, \dots\}} = \overline{\text{Lin}\{x_1, \dots, x_n, \dots\}} = H.$$

Budeme-li z posloupnosti  $(x_n)$  postupně vynechávat ty prvky, které jsou lineární kombinací prvků předcházejících, získáme posloupnost vybranou z posloupnosti  $(x_n)$



(značme ji stejně) takovou, že  $\overline{\text{Lin}\{x_1, \dots, x_n, \dots\}} = H$  a že množina  $\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$  je lineárně nezávislá.

Sestrojme nyní pomocí Schmidtova ortonormalizačního procesu ortonormální systém  $\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\} \subset H$  takový, že

$$\forall n \in \mathbb{N} : \text{Lin}\{x_1, \dots, x_n\} = \text{Lin}\{e_1, \dots, e_n\},$$

a proto

$$\overline{\text{Lin}\{x_1, \dots, x_n, \dots\}} = \overline{\text{Lin}\{e_1, \dots, e_n, \dots\}} = H. \quad (4.2)$$

Ukažme, že  $\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$  je ortonormální báze  $H$ , tzn. že pro každé  $x \in H$  je  $x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n$ . Buď  $x \in H$  dáno.

Pak existuje (viz (4.2)) posloupnost  $(y_n)$  v  $H$  taková, že

$$\lim y_n = x,$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) (\exists m_n \in \mathbb{N}, m_n \geq n) : y_n \in \text{Lin}\{e_1, e_2, \dots, e_{m_n}\}.$$

Odtud a z věty o aproximaci 4.10 plyne

$$0 \leq \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{m_n} |(x, e_k)|^2 \leq \|x - y_n\|^2 \rightarrow 0 \text{ pro } n \rightarrow \infty,$$

a tedy i Parsevalova rovnost

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2,$$

a proto (viz větu 4.11)

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n.$$

□

**4.17 Poznámka.** Pojem ortonormální báze lze zobecnit i pro nespočetné ortonormální systémy – užitím tzv. zobecněných řad. Pomocí Zornova lemmatu <sup>1</sup> se pak dá dokázat, že každý Hilbertův prostor má ortonormální bázi.

**4.18 Příklad.** Je známo, že množina všech polynomů je hustá v  $C(\langle -1, 1 \rangle)$ , a proto i v  $L^2(-1, 1)$ . Tzn.

$$\overline{\text{Lin}\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}}^{\|\cdot\|_{L^2(-1,1)}} = L^2(-1, 1).$$

<sup>1</sup>Zornovo lemma je jedno z tvrzení ekvivalentních s tzv. axiomem výběru.

Odtud – protože množina polynomů

$$\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\} \quad (4.3)$$

je lineárně nezávislá<sup>1</sup> – plyne, že Schmidtovým ortonormalizačním procesem získáme z (4.3) ortonormální bázi  $L^2(-1, 1)$  tvořenou (tzv. Legendreovými) polynomy:

$$\left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}x, \frac{\sqrt{10}}{4}(3x^2 - 1), \frac{\sqrt{14}}{4}(5x^3 - 3x), \dots \right\}.$$

**4.19 Cvičení.** Dokažte, že ortonormální systém  $\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subset H$  je bází  $H$  právě tehdy, je-li úplný, tj. platí-li implikace

$$[x \in H \wedge (x, e_n) = 0 \text{ pro každé } n \in \mathbb{N}] \Rightarrow x = 0.$$

**4.20 Věta (Rieszova – Fischerova).** Každý *separabilní* Hilbertův prostor nekonečné dimenze je izometricky izomorfní s  $l^2$ .

**4.21 Důsledek.** Libovolné dva separabilní Hilbertovy prostory nekonečné dimenze jsou izometricky izomorfní.

*Důkaz.* Buď  $H$  separabilní Hilbertův prostor takový, že  $\dim H = \infty$ , a buď  $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$  ortonormální báze  $H$  (ta, jak už víme, existuje!).

Pak

$$\forall x \in H : x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n, \quad \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2.$$

Definujeme zobrazení  $L : H \rightarrow l^2$  předpisem

$$Lx := ((x, e_n)).$$

Pak platí

- $L$  je lineární, protože pro každé  $x, y \in H$  a každé  $\alpha \in \mathbb{R}$  platí

$$\underline{L(x+y)} = ((x+y, e_n)) = ((x, e_n) + (y, e_n)) = ((x, e_n)) + ((y, e_n)) = \underline{Lx + Ly},$$

$$\underline{L(\alpha x)} = ((\alpha x, e_n)) = (\alpha(x, e_n)) = \alpha((x, e_n)) = \underline{\alpha Lx};$$

---

<sup>1</sup>A rozmyslete si proč!

- $L$  je **prosté**, protože pro každé  $x, y \in H$  platí

$$\begin{aligned} \underline{Lx = Ly} &\Rightarrow ((x, e_n)) = ((y, e_n)) \Rightarrow [\forall n \in \mathbb{N} : (x, e_n) = (y, e_n)] \Rightarrow \\ &\Rightarrow [\forall n \in \mathbb{N} : (x - y, e_n) = 0] \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow \underline{x = y}; \end{aligned}$$

- $L$  je **na**, protože pro každé  $(x_n) \in l^2$  existuje  $y \in H : Ly = (x_n)$   
 (Bud  $\underline{(x_n) \in l^2}$  dáno. Definujme posloupnost  $(y_n)$  v  $H$  předpisem

$$y_n := \sum_{k=1}^n x_k e_k.$$

Pak pro každé  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $n > m$ , je

$$\|y_n - y_m\|^2 = \left\| \sum_{k=m+1}^n x_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=m+1}^n x_k^2 \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} x_k^2,$$

a navíc

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} x_k^2 \rightarrow 0 \text{ pro } m \rightarrow \infty,$$

a tedy  $(y_n)$  je **cauchyovská** v  $H$ . Z úplnosti  $H$  pak vyplývá, že existuje  $y \in H$  takové, že  $y_n \rightarrow y$ . Snadno lze nahlédnout, že pro toto  $y$  pak platí

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n = \sum_{n=1}^{\infty} (y, e_n) e_n,$$

a proto<sup>1</sup>

$$\underline{Ly = (x_n)};$$

- $L$  je **izometrie**, protože pro každé  $x \in H$  zřejmě platí

$$\|x\|_H^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 = \|Lx\|_{l^2}^2.$$

Dokázali jsme, že  $L$  je izometrický izomorfismus  $H$  na  $l^2$ .

□

---

<sup>1</sup>Opět dobrý důvod k zamyšlení.

# OPERÁTORŮ V NLP

## Kapitola 5

# Spojité lineární zobrazení

**5.1 Definice.** Buď  $X$  netriviální NLP a  $Y$  NLP. Řekneme, že **zobrazení** (operátor)  $f : X \rightarrow Y$  má v bodě  $x_0 \in X$  limitu  $a \in Y$  (a píšeme  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ ), platí-li pro každou posloupnost  $(x_n)$  v  $X \setminus \{x_0\}$  implikace

$$x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow a.$$

**5.2 Definice.** Buď  $X, Y$  NLP. Řekneme, že **zobrazení**  $f : X \rightarrow Y$  je spojité v bodě  $x_0 \in X$ , platí-li pro každou posloupnost  $(x_n)$  v  $X$  implikace

$$x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x_0).^a$$

Řekneme, že  $f$  je spojité na  $X$ , je-li spojité v každém bodě  $x \in X$ .

<sup>a</sup>Nepřehlédněme: je-li navíc prostor  $X$  netriviální, je

$$f \text{ spojité v bodě } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

**5.3 Definice.** Buď  $X$  a  $Y$  normované lineární prostory. **Lineární zobrazení**  $A : X \rightarrow Y$  se nazývá omezené, existuje-li nezáporné číslo  $k \in \mathbb{R}$  takové, že

$$\forall x \in X : \|A(x)\|_Y \leq k \|x\|_X.$$

**5.4 Věta.** *Bud'  $X, Y$  NLP. Nechť  $A : X \rightarrow Y$  je **lineární** zobrazení. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

- i)  $A$  je spojitý v každém bodě  $x \in X$ ,
- ii)  $A$  je spojitý v 0,
- iii)  $A$  je omezený.

*Důkaz.*

i)  $\Rightarrow$  (ii) ... zřejmé.

ii)  $\Rightarrow$  iii). Nejprve si rozmysleme, že

$$A \text{ je spojitý v } 0 \Leftrightarrow [(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x \in X) : \|x - 0\| < \delta \Rightarrow \|A(x) - A(0)\| < \varepsilon], \quad (5.1)$$

a potom volme  $\varepsilon = 1$  a dosadíme do (5.1) ( $A$  je lineární)  $A(0) = 0$ . Dostaneme tak tvrzení

$$(\exists \delta > 0) (\forall x \in X) : \|x\| < \delta \Rightarrow \|A(x)\| < 1.$$

Nyní položíme

$$k := \frac{2}{\delta}.$$

Pak pro každé  $x \in X$  platí:

- $x = 0 \Rightarrow \|A(x)\| = \|A(0)\| = \|0\| = 0 = k \|0\| = k \|x\|,$
  - $x \neq 0 \Rightarrow \left\| \frac{\delta}{2} \frac{x}{\|x\|} \right\| = \frac{\delta}{2} < \delta \Rightarrow \left\| A\left(\frac{\delta}{2} \frac{x}{\|x\|}\right) \right\| = \frac{\delta}{2} \frac{1}{\|x\|} \|A(x)\| < 1,$
- a proto  $\|A(x)\| \leq \frac{2}{\delta} \|x\| = k \|x\|.$

iii)  $\Rightarrow$  i). Stačí si uvědomit, že

$$0 \leq \|A(x_n) - A(x)\| = \|A(x_n - x)\| \leq k \|x_n - x\| \rightarrow 0, \text{ pokud } x_n \rightarrow x.$$

□

**5.5 Poznámka.** Takže jsme vlastně dokázali, že

$$\text{spojitý lineární operátor} \equiv \text{omezený lineární operátor}.$$

**5.6 Příklad.** Uvažujme prostor  $X = C(\langle 0, 1 \rangle)$  s normou

$$\|x\| := \sup_{t \in \langle 0, 1 \rangle} |x(t)|$$

a spojitou funkcí

$$K : \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}.$$

Pak zobrazení  $A : X \rightarrow X$  definované na  $X$  předpisem

$$(Ax)(t) := \int_0^1 K(t, s)x(s) \, ds$$

je spojitě na  $X$ .

*Důkaz.* Protože  $A$  je zřejmě **lineární**, stačí dokázat, že  $A$  je **omezené**. To je ale velmi snadné, protože pro každé  $x \in X$  platí

$$\begin{aligned} \|Ax\| &= \sup_{t \in \langle 0, 1 \rangle} \left| \int_0^1 K(t, s)x(s) \, ds \right| \leq \sup_{t \in \langle 0, 1 \rangle} \int_0^1 |K(t, s)| \cdot |x(s)| \, ds \leq \\ &\leq \sup_{(t, s) \in \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle} |K(t, s)| \cdot \|x\| = \underline{k} \|x\|, \end{aligned}$$

kde nezáporná reálná konstanta

$$k := \sup_{(t, s) \in \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle} |K(t, s)| = \max_{(t, s) \in \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle} |K(t, s)|$$

nezávisí na volbě  $x \in X$ . □

**5.7 Označení a definice.** Buď  $X$  a  $Y$  normované lineární prostory. Symbolem  $\mathcal{L}(X, Y)$  značme množinu všech lineárních zobrazení  $X$  do  $Y$  spojitých na  $X$ .

Definujme pro každé  $A, B \in \mathcal{L}(X, Y)$  a  $\alpha \in \mathbb{R}$  zobrazení  $A + B$ ,  $\alpha A \in \mathcal{L}(X, Y)$  předpisy

$$(A + B)(x) := A(x) + B(x),$$

$$(\alpha A)(x) := \alpha A(x).$$

Dá se ukázat, že spolu s těmito operacemi je  $\mathcal{L}(X, Y)$  **vektorovým prostorem**.

Navíc, zobrazení  $\|\cdot\| : \mathcal{L}(X, Y) \rightarrow \mathbb{R}$  definované předpisem

$$\|A\| := \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \leq 1}} \|A(x)\|_Y$$

je normou na  $\mathcal{L}(X, Y)$ .

Shrnutí:

$\mathcal{L}(X, Y)$  je normovaný lineární prostor.

**5.8 Definice.** Buď  $X$  NLP. Prostor všech spojitých lineárních funkcí na  $X$ , tzn. normovaný lineární prostor

$$X^* := \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$$

s normou

$$\|A\| := \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} |A(x)|,$$

nazýváme duálním prostorem k  $X$ .

### 5.9 Poznámky a tvrzení.

i)  $A \in \mathcal{L}(X, Y), B \in \mathcal{L}(Y, Z) \Rightarrow B \circ A \in \mathcal{L}(X, Z)$

(a navíc  $\|B \circ A\|_{\mathcal{L}(X, Z)} \leq \|B\|_{\mathcal{L}(Y, Z)} \cdot \|A\|_{\mathcal{L}(X, Y)}$ ).

ii)  $\left. \begin{array}{l} A : X \rightarrow Y, \text{ kde } X \text{ a } Y \text{ jsou NLP,} \\ A \text{ je lineární na } X, \\ \dim X < \infty \end{array} \right\} \Rightarrow A \text{ je spojité na } X.$

**Pozor!** Tvrzení neplatí bez předpokladu  $\dim X < \infty$ , tj. je-li  $\dim X = \infty$ . Jako protipříklad lze volit:

$$X = C^1(\langle 0, 1 \rangle), Y = C(\langle 0, 1 \rangle)$$

(oba prostory se supremovou normou  $\|x\| := \sup_{t \in \langle 0, 1 \rangle} |x(t)|$ ),

$$A : X \rightarrow Y, A(x) := x'.$$

Pak  $A$  je zřejmě lineární zobrazení na  $X$ . Nyní uvažujme posloupnost  $(x_n)$  v  $X$ , jejímiž členy jsou funkce definované předpisy

$$x_n(t) := t^n.$$

Pak pro každé  $n \in \mathbb{N}$  platí

$$\|x_n\| = 1, \|Ax_n\| = \sup_{t \in \langle 0, 1 \rangle} |(Ax_n)(t)| = \sup_{t \in \langle 0, 1 \rangle} |n t^{n-1}| = n,$$

a proto  $A$  není omezené na kouli

$$\{x \in X : \|x\| \leq 1\},$$

což znamená, že  $A$  není spojité na  $X$ .



$$\text{iii)} \left. \begin{array}{l} X \dots \text{NLP,} \\ Y \dots \text{Banachův prostor} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathcal{L}(X, Y) \text{ je Banachův prostor.}$$

Speciálně:

$$X^* \text{ je Banachův prostor.}$$

*Důkaz* uvedených tvrzení ponechme jako výzvu a velmi vhodné cvičení čtenářům.

**5.10 Věta.** *Nechť  $X$  je NLP a nechť  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  je **lineární zobrazení** na  $X$ .<sup>a</sup> Pak  $f$  je spojitý na  $X$  právě tehdy, je-li*

$$\text{Ker } f := \{x \in X : f(x) = 0\}$$

(tzn. jádro zobrazení  $f$ ) uzavřeným vektorovým podprostorem  $X$ .

<sup>a</sup>Někdy mluvíme o lineární formě na  $X$ .

*Důkaz.* Nejdříve si všimněme, že platí implikace

$$\underline{x, y \in \text{Ker } f} \Rightarrow 0 = f(x) + f(y) = f(x + y) \Rightarrow \underline{x + y \in \text{Ker } f},$$

$$\underline{\alpha \in \mathbb{R}, x \in \text{Ker } f} \Rightarrow 0 = \alpha f(x) = f(\alpha x) \Rightarrow \underline{\alpha x \in \text{Ker } f},$$

a proto (viz cvičení 1.6)

$\text{Ker } f$  je vektorovým podprostorem  $X$ .

Zbývá nám dokázat ekvivalenci

$$f \text{ je spojitý na } X \Leftrightarrow \text{Ker } f \text{ je uzavřená podmnožina } X, \text{ tzn. } \overline{\text{Ker } f} = \text{Ker } f.$$

Důkaz „ $\Rightarrow$ “ plyne přímo ze spojitosti  $f$ , protože

$$\underline{\text{Ker } f \ni x_n \rightarrow x \in X} \Rightarrow 0 = f(x_n) \rightarrow f(x) \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \underline{x \in \text{Ker } f}.$$

Důkaz „ $\Leftarrow$ “. Je-li  $f \equiv 0$ , je tvrzení zřejmé. Není-li  $f \equiv 0$ , existuje  $v \in X$  takové, že  $f(v) \neq 0$ , a můžeme vzít

$$u := \frac{1}{f(v)} v \in X.$$

Pak

$$f(u) = 1 \tag{5.2}$$

a navíc

$$d := \inf_{y \in \text{Ker } f} \|u - y\| > 0.$$

(Nerovnost  $d > 0$  můžeme ověřit – díky předpokladu, že jádro  $\text{Ker } f$  je uzavřené – sporem:

$$\begin{aligned} d = 0 &\Rightarrow [\text{existuje posloupnost } (y_n) \text{ v } \text{Ker } f \text{ taková, že } \|u - y_n\| \rightarrow 0] \Rightarrow \\ &\Rightarrow y_n \rightarrow u \Rightarrow u \in \text{Ker } f, \end{aligned}$$

a to je spor s (5.2).)

Není těžké zkontrolovat, že pro každé  $x \in X$ , pro něž  $f(x) \neq 0$ , platí

$$\|x\| = \|f(x)u + x - f(x)u\| = |f(x)| \cdot \left\| u - \underbrace{\frac{f(x)u - x}{f(x)}}_{\in \text{Ker } f} \right\| \geq |f(x)| \cdot d,$$

a proto

$$\forall x \in X : |f(x)| \leq \frac{1}{d} \|x\|.$$

Zjistili jsme, že  $f$  je omezené, a tudíž **spojité** na  $X$ .

□

### 5.11 Věta (o ortogonální projekci v $H$ -prostoru).

Nechť  $M$  je **uzavřený** vektorový **podprostor** Hilbertova prostoru  $H$ .<sup>a</sup>  
Pak

$$(\forall x \in H) (\exists! Px \in M) : \|x - Px\| = \inf_{y \in M} \|x - y\|.$$

Navíc, pro (tímto způsobem definované) zobrazení

$$P : H \rightarrow M$$

platí:

- i)  $(\forall x \in H) (\forall y \in M) : (x - Px, y) = 0$ ,
- ii)  $P \in \mathcal{L}(H, M)$ ,
- iii)  $\forall x \in H : \|Px\|^2 + \|x - Px\|^2 = \|x\|^2$ .

(Zobrazení  $P$  se nazývá ortogonální projekce na  $M$ .)

<sup>a</sup>To znamená:

$$\begin{aligned} \emptyset \neq M = \overline{M} \subset H, \\ (\forall x, y \in M) (\forall \alpha \in \mathbb{R}) : [x + y \in M \wedge \alpha x \in M]. \end{aligned}$$

(Porovnejte větu o ortogonální projekci s větou o aproximaci 4.10.)

*Důkaz.*

• Existence  $Px$ .

Buď  $x \in H$  dáno. Uvažujme posloupnost  $(y_n)$  v  $M$  takovou, že

$$d := \inf_{y \in M} \|x - y\| \leq \|x - y_n\| < d + \frac{1}{n} \quad (5.3)$$

(taková existuje!). Pak pro každé  $m, n \in \mathbb{N}$  díky rovnoběžníkovému pravidlu 4.5 platí:

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|^2 &= \|y_n - x - (y_m - x)\|^2 = \\ &= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - \|y_n - x + y_m - x\|^2 = \\ &= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\left\|\underbrace{\frac{y_n + y_m}{2}}_{\in M} - x\right\|^2 \leq \\ &\leq 2\left(d + \frac{1}{n}\right)^2 + 2\left(d + \frac{1}{m}\right)^2 - 4d^2 = \frac{4d}{n} + \frac{4d}{m} + \frac{2}{n^2} + \frac{2}{m^2}. \end{aligned}$$

Odtud již snadno plyne, že posloupnost  $(y_n)$  je cauchyovská v úplném prostoru  $H$ , a proto

$$\exists Px \in H : y_n \rightarrow Px.$$

Zbývá nám ukázat, že bod  $Px$  má požadované kvality.

Protože pro každé  $n \in \mathbb{N}$  je  $y_n \in M$  a  $M$  je uzavřená množina, je  $Px \in M$ .

Navíc, z konvergence  $y_n \rightarrow Px$ , spojitosti normy (viz 3.5) a nerovností (5.3) plyne

$$x - y_n \rightarrow x - Px \Rightarrow \underbrace{\|x - y_n\|}_{\rightarrow d} \rightarrow \|x - Px\| \Rightarrow \underline{\|x - Px\| = d}.$$

• Jednoznačnost  $Px$ .

Buď

$$\|x - P_1x\| = \|x - P_2x\| = d,$$

kde  $P_1x, P_2x \in M$ . Potom (podobně jako před chvílí):

$$\begin{aligned} \|P_1x - P_2x\|^2 &= \|P_1x - x + x - P_2x\|^2 = \\ &= 2\|P_1x - x\|^2 + 2\|x - P_2x\|^2 - \|P_1x - x - x + P_2x\|^2 = \\ &= 2d^2 + 2d^2 - 4\left\|\underbrace{\frac{P_1x + P_2x}{2}}_{\in M} - x\right\|^2 \leq 4d^2 - 4d^2 = 0, \end{aligned}$$

a proto  $\underline{P_1x = P_2x}$ .

- Vlastnost i).

Buď  $x \in H$  a  $y \in M$  dáno. Pak pro funkci

$$\varphi(t) := \|x - (Px - ty)\|^2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

platí, že

$$\min_{t \in \mathbb{R}} \varphi(t) = \varphi(0).$$

Odtud plyne: existuje-li  $\varphi'(0)$ , je  $\varphi'(0) = 0$ .

Snadno zkontrolujeme, že pro každé  $t \in \mathbb{R}$  je

$$\varphi(t) = (x - Px + ty, x - Px + ty) = \|x - Px\|^2 + 2t(x - Px, y) + t^2 \|y\|^2,$$

a proto

$$\varphi'(0) = 2 \underline{(x - Px, y) = 0}.$$

- Vlastnost ii).

Nejdříve dokažme, že  $P$  je lineární:

$\forall x, y \in H$ :

$$\begin{aligned} \left\| \underbrace{P(x+y) - (Px + Py)}_{\stackrel{\text{ozn.}}{=} z \in M} \right\|^2 &= (P(x+y) - (x+y) + (x+y) - (Px + Py), z) = \\ &= - \underbrace{(x+y - P(x+y), z)}_{=0} + \underbrace{(x - Px, z)}_{=0} + \underbrace{(y - Py, z)}_{=0} = 0, \end{aligned}$$

a proto

$$\underline{P(x+y) = Px + Py};$$

$(\forall \alpha \in \mathbb{R}) (\forall x \in H)$ :

$$\begin{aligned} \left\| \underbrace{P(\alpha x) - \alpha Px}_{\stackrel{\text{ozn.}}{=} z \in M} \right\|^2 &= (P(\alpha x) - \alpha x + \alpha x - \alpha Px, z) = \\ &= - \underbrace{(\alpha x - P(\alpha x), z)}_{=0} + \underbrace{\alpha(x - Px, z)}_{=0} = 0, \end{aligned}$$

a proto

$$\underline{P(\alpha x) = \alpha Px}.$$

Zbývá dokázat, že  $P$  je spojitý, tzn. omezený:

$$\forall x \in H : \|Px\|^2 = (Px - x + x, Px) = - \underbrace{(x - Px, \overbrace{Px}^{\in M})}_{=0} + (x, Px) \leq \|x\| \cdot \|Px\|,$$

a proto  $\|Px\| \leq \|x\|$ .

- Vlastnost iii).

$\forall x \in H$ :

$$\begin{aligned} \|Px\|^2 + \|x - Px\|^2 &= (Px, Px) + (x - Px, x - Px) = (Px, Px) + (x - Px, x) = \\ &= (Px, Px) + (x, x) + (-x, Px) = - \underbrace{(x - Px, Px)}_{=0} + (x, x) = \|x\|^2. \end{aligned}$$

□

**5.12 Pozorování.** Buď  $H$  Hilbertův prostor a buď  $y \in H$  libovolný bod. Pak zobrazení  $A : H \rightarrow \mathbb{R}$  definované předpisem

$$Ax := (x, y)$$

je **lineární** a **omezené** ( $\|Ax\| = |Ax| = |(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ ).

Je proto

$$A \in H^*.$$

Navíc platí

$$\|A\|_{H^*} = \|y\|_H.$$

*Důkaz* rovnosti norem rozdělme na dvě části:

- je-li  $\underline{y = 0}$ , je

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |A(x)| = \sup_{\|x\| \leq 1} |(x, 0)| = \underline{0} = \|y\|;$$

- je-li  $\underline{y \neq 0}$ , je

$$\left. \begin{aligned} \|A\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} |(x, y)| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} (\|x\| \cdot \|y\|) \leq \|y\|, \\ \|A\| &\geq |A(\frac{y}{\|y\|})| = |(\frac{y}{\|y\|}, y)| = \frac{1}{\|y\|} \cdot \|y\|^2 = \|y\| \end{aligned} \right\} \Rightarrow \|A\| = \|y\|.$$

□

Je tedy – ve zřejmém smyslu –

$$H \subset H^*.$$

Následující věta ukazuje, že tuto inklusi lze i obrátit.

**5.13 Věta (Rieszova o reprezentaci).**

*Nechť  $H$  je Hilbertův prostor a nechť  $f \in H^*$ . Pak*

$$(\exists! u \in H) (\forall x \in H) : f(x) = (x, u).$$

*Navíc platí:*

$$\|f\|_{H^*} := \sup_{\|x\|_H \leq 1} |f(x)| = \|u\|_H.$$

*Důkaz.*

• Existence  $u$ .

Je-li  $f \equiv 0$ , stačí volit  $u = 0$ .

Předpokládejme proto navíc, že pro nějaké  $\tilde{v} \in H$  je  $f(\tilde{v}) \neq 0$ , a položme

$$v := \frac{1}{f(\tilde{v})} \tilde{v}.$$

Pak  $f(v) = 1$ . Jak už víme (viz větu 5.10),  $\text{Ker } f := \{x \in H : f(x) = 0\}$  je uzavřeným podprostorem  $H$ , a proto existuje (viz větu 5.11) ortogonální projekce

$$P : H \rightarrow \text{Ker } f.$$

Nyní volme

$$\tilde{u} := v - Pv.$$

Pak pro každé  $x \in H$  platí

$$x = f(x)\tilde{u} + \underbrace{x - f(x)\tilde{u}}_{\in \text{Ker } f},$$

a proto taky (viz vlastnost i) ortogonální projekce z věty 5.11)

$$\underline{(x, \tilde{u})} = f(x)(\tilde{u}, \tilde{u}) + \underbrace{(x - f(x)\tilde{u}, \tilde{u})}_{=0} = f(x)(\tilde{u}, \tilde{u}) = \underline{f(x) \|\tilde{u}\|^2}.$$

Odtud přímo plyne, že stačí volit

$$u := \frac{\tilde{u}}{\|\tilde{u}\|^2}.$$

- Jednoznačnost.

Nechť  $u_1, u_2 \in H$  jsou takové prvky, že

$$\forall x \in H : f(x) = (x, u_1) = (x, u_2).$$

Odtud plyne, že

$$\forall x \in H : (x, u_1 - u_2) = 0,$$

a proto (volíme  $x = u_1 - u_2$ )

$$(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = \|u_1 - u_2\|^2 = 0$$

neboli  $u_1 = u_2$ .

- Rovnost norem plyne přímo z pozorování 5.12 uvedeného před větou.

□

Takže jsme ukázali možnost ztotožnění

$$H = H^*.$$

**5.14 Poznámka a definice.** Buď  $X$  normovaný lineární prostor. Definujme

$$X^{**} := (X^*)^*.$$

Dá se ukázat, že zobrazení (tzv. kanonické vnoření)

$$S : X \rightarrow X^{**}$$

definované předpisem

$$(Sx)(f) := f(x)$$

je izometrickým izomorfismem  $X$  na  $S(X) \subset X^{**}$ . Protože izometricky izomorfní prostory lze ztotožnit, je (po zmíněném ztotožnění)

$$X \subset X^{**}.$$

NLP  $X$  se nazývá reflexivní, je-li  $S(X) = X^{**}$ .

### 5.15 Příklady.

1) Protože pro Hilbertův prostor  $H$  platí  $H^* = H$ , je

$$H^{**} = (H^*)^* = H^* = H.$$

Tedy: každý Hilbertův prostor je reflexivní.<sup>1</sup>

2) Prostory  $l^p$ , kde  $1 < p < \infty$ , jsou reflexivní.

3) Prostory  $l^1$  a  $l^\infty$  nejsou reflexivní.

4) Prostor  $C(\langle 0, 1 \rangle)$  se supremovou normou není reflexivní.

### 5.16 Tvrzení.

- i) Každý reflexivní prostor je Banachův.
- ii) Je-li prostor  $X$  reflexivní, je i každý jeho uzavřený vektorový podprostor reflexivní.
- iii) Je-li prostor  $X$  reflexivní, je i  $X^*$  reflexivní.

### 5.17 Věta (Hahnova – Banachova).

Nechť  $M$  je vektorovým podprostorem (ne nutně uzavřeným) NLP  $X$  a nechť  $f_M \in M^*$ . Pak existuje  $f \in X^*$  takové, že

- $\forall x \in M : f(x) = f_M(x),$
- $\|f\|_{X^*} = \|f_M\|_{M^*}.$

**5.18 Důsledek.** Nechť  $X$  je NLP a nechť  $u \in X \setminus \{0\}$ . Pak existuje  $f \in X^*$  takové, že

- $f(u) = \|u\|_X,$
- $\|f\|_{X^*} = 1.$

<sup>1</sup>Rozmyslete si s pomocí Rieszovy věty, že uvedené ztotožnění  $H = H^{**}$  je realizováno právě pomocí kanonického vnoření.



*Důkaz* Hahnovy–Banachovy věty je nekonstruktivní a opírá se o Zornovo lemma. Ukažme si proto pouze, jak z této věty vyplývá uvedený důsledek.

Uvažujme vektorový podprostor

$$M = \{\lambda u : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

a zobrazení  $f_M : M \rightarrow \mathbb{R}$  definované předpisem

$$f_M(\lambda u) := \lambda \|u\|.$$

Pak  $f_M$  je zřejmě **lineární**:

$$\begin{aligned} \underline{f_M(\lambda_1 u + \lambda_2 u)} &= f_M((\lambda_1 + \lambda_2)u) = (\lambda_1 + \lambda_2)\|u\| = \\ &= \lambda_1\|u\| + \lambda_2\|u\| = \underline{f_M(\lambda_1 u)} + \underline{f_M(\lambda_2 u)}, \\ \underline{f_M(\alpha \lambda u)} &= \alpha \lambda \|u\| = \underline{\alpha f_M(\lambda u)}, \end{aligned}$$

a protože pro každé  $x = \lambda u \in M$  navíc platí:

$$|f_M(x)| = |f_M(\lambda u)| = |\lambda \|u\|| = |\lambda| \cdot \|u\| = \|\lambda u\| = \|x\|,$$

je

$$f_M \in M^* \wedge \|f_M\|_{M^*} = 1.$$

Existence  $f \in X^*$  daných vlastností teď plyne přímo z Hahnovy-Banachovy věty.  $\square$

**5.19 Pozorování.** Z důsledku Hahnovy-Banachovy věty 5.18 vyplývá, že v každém netriviálním NLP  $X$  existuje netriviální spojitá lineární forma.

Dokonce platí, že prostor  $X^*$  je tak „bohatý“, že stačí k „rozlišení bodů“. Řekněme to přesněji.

Buď  $X$  NLP. Pak platí

$$(\forall x, y \in X, x \neq y) (\exists f \in X^*) : f(x) \neq f(y).$$

*Důkaz.* Volme  $u := x - y \in X \setminus \{0\}$ . Pak existuje  $f \in X^*$  takové, že  $f(u) = \|u\|$ , a proto

$$\underline{f(x) - f(y)} = f(x - y) = f(u) = \|u\| = \underline{\|x - y\|} \neq 0.$$

$\square$

Toto pozorování lze ještě zobecnit.

**5.20 Věta.** *Nechť  $M$  je vektorovým podprostorem (ne nutně uzavřeným) NLP  $X$  a nechť  $x \in X$  je takové, že*

$$d := \inf_{y \in M} \|x - y\| > 0.$$

*Pak existuje  $f \in X^*$  takové, že*

- $f(x) = 1$ ,
- $\forall y \in M : f(y) = 0$ ,
- $\|f\| = \frac{1}{d}$ .

*Důkaz.* Uvažujme vektorový podprostor

$$N = \{y + \lambda x : y \in M, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

(že  $N$  je skutečně vektorovým podprostorem plyne z 1.6 a z rovností:

$$(y_1 + \lambda_1 x) + (y_2 + \lambda_2 x) = \underbrace{(y_1 + y_2)}_{\in M} + \underbrace{(\lambda_1 + \lambda_2)}_{\in \mathbb{R}} x, \quad \alpha(y + \lambda x) = \underbrace{(\alpha y)}_{\in M} + \underbrace{(\alpha \lambda)}_{\in \mathbb{R}} x$$

a zobrazení  $f_N : N \rightarrow \mathbb{R}$  definované předpisem

$$f_N(y + \lambda x) := \lambda.$$

Nejdříve ověříme, že  $f_N$  je lineární:

$$\begin{aligned} f_N((y_1 + \lambda_1 x) + (y_2 + \lambda_2 x)) &= f_N((y_1 + y_2) + (\lambda_1 + \lambda_2)x) = \\ &= \lambda_1 + \lambda_2 = \underline{f_N(y_1 + \lambda_1 x) + f_N(y_2 + \lambda_2 x)}, \end{aligned}$$

$$\underline{f_N(\alpha(y + \lambda x))} = f_N((\alpha y) + (\alpha \lambda)x) = \alpha \lambda = \underline{\alpha f(y + \lambda x)}.$$

Nyní ukážeme, že  $f_N$  je omezené. Vlastně dokážeme:

$$\forall z \in N : |f_N(z)| \leq \frac{1}{d} \|z\|.$$

Bud'  $z = y + \lambda x \in N$  dáno.

Je-li  $\lambda \neq 0$ , je

$$\|z\| = |\lambda| \cdot \left\| \frac{y}{\lambda} + x \right\| = |\lambda| \cdot \left\| x - \underbrace{\left(-\frac{y}{\lambda}\right)}_{\in M} \right\| \geq |\lambda| d,$$

a proto

$$|f_N(z)| = |\lambda| \leq \frac{1}{d} \|z\|.$$

Je-li  $\lambda = 0$ , je

$$|f_N(z)| = 0 \leq \frac{1}{d} \|z\|.$$

Zjistili jsme, že

$$f_N \in N^* \wedge \|f_N\| \leq \frac{1}{d}.$$

Ukažme, že platí dokonce

$$\|f_N\| = \frac{1}{d}.$$

Buď  $(y_n)$  posloupnost v  $M$  taková, že

$$\|x - y_n\| \rightarrow d.$$

Pak

$$1 = f_N(x - y_n) \leq \|f_N\| \cdot \|x - y_n\| \rightarrow \|f_N\| \cdot d,$$

a proto

$$\|f_N\| \geq \frac{1}{d}.$$

K dokončení důkazu stačí aplikovat Hahnovu–Banachovu větu 5.17. □

**5.21 Poznámka.** Připomeňme si, že v NLP  $X$  jsme definovali konvergenci posloupnosti bodů následujícím způsobem:

$$x_n \rightarrow x \stackrel{\text{def}}{\iff} \|x_n - x\| \rightarrow 0.$$

S tímto typem (tzv. silné) konvergence v aplikacích obvykle nevystačíme. Zavedení duálního prostoru  $X^*$  nám umožňuje zavést další typ (tzv. slabé) konvergence.

**5.22 Definice.** Buď  $(x_n)$  posloupnost v NLP  $X$  a buď  $x \in X$ . Řekneme, že posloupnost  $(x_n)$  konverguje slabě k bodu  $x$  a píšeme  $x_n \rightharpoonup x$ , platí-li

$$\forall f \in X^* : f(x_n) \rightarrow f(x).$$

**5.23 Věta (o slabé konvergenci).** *Bud'  $X$  NLP. Pak v  $X$  platí:*

- i) *každá posloupnost má nejvýš jednu slabou limitu,*
- ii)  $x_n \rightarrow x \Rightarrow x_n \rightharpoonup x,$
- iii)  $x_n \rightharpoonup x \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{R}^+) (\forall n \in \mathbb{N}) : \|x_n\| \leq k$   
*(tzn.  $(x_n)$  je omezená posloupnost),*
- iv)  $x_n \rightharpoonup x \Rightarrow \|x\| \leq \liminf \|x_n\|.$ <sup>a</sup>

<sup>a</sup>Srovnejte toto tvrzení s již známým tvrzením:  $x_n \rightarrow x \Rightarrow \|x\| = \lim \|x_n\|.$

*Důkaz.*

Ad i). Toto tvrzení dokažme sporem. Předpokládejme, že

$$x_n \rightharpoonup x, x_n \rightharpoonup y, x \neq y,$$

a vezměme  $f \in X^*$  takové, že  $f(x) \neq f(y)$  (existence takového  $f$  je zaručena – viz 5.19). Pak platí

$$\underline{f(x_n) \rightarrow f(x)}, \underline{f(x_n) \rightarrow f(y)}, \underline{f(x) \neq f(y)}.$$

A to je spor, protože posloupnost reálných čísel  $(f(x_n))$  nemůže mít dvě různé limity.

Ad ii). Předpokládejme, že  $x_n \rightarrow x$ , a buď  $f \in X^*$  dáno. Pak přímo ze spojitosti  $f$  plyne

$$f(x_n) \rightarrow f(x).$$

Ad iii). Důkaz tvrzení, že každá slabě konvergentní posloupnost je omezená, je komplikovanější. Je založen na principu stejnoměrné omezenosti a ukážeme si ho později – viz stranu 60.

Ad iv). Je-li  $x = 0$ , je tvrzení zřejmé. Je-li  $x \neq 0$ , existuje  $f \in X^*$  takové, že  $\|f\| = 1$  a že  $f(x) = \|x\|$  (viz 5.18). Z předpokladu  $x_n \rightharpoonup x$  pak plyne:

$$\|x\| = f(x) = \lim f(x_n) = \liminf f(x_n) \leq \liminf \underbrace{[\|f\| \cdot \|x_n\|]}_{=1} = \liminf \|x_n\|.$$

□

**5.24 Cvičení.** Dokažte, že v každém normovaném lineárním prostoru  $X$  konečné dimenze platí:

$$x_n \rightarrow x \Leftrightarrow x_n \rightharpoonup x.$$

### 5.25 Příklady.

1) Buď  $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$  ortonormální systém v Hilbertově prostoru  $H$ .<sup>1</sup>

Pak

$$\forall u \in H : (e_n, u) \rightarrow 0 = (0, u)$$

(viz Besselovu nerovnost ve větě 4.11), a proto (viz Rieszovu větu o reprezentaci 5.13)

$$e_n \rightharpoonup 0.$$

Nyní ukažme sporem, že posloupnost  $(e_n)$  **není** v  $H$  **silně konvergentní**.

Nechť  $e_n \rightarrow x$ . Pak  $x = 0$  (viz tvrzení i) a ii) předcházející věty 5.23), a proto

$$1 = \|e_n\| \rightarrow \|0\| = 0.$$

A to je spor.<sup>2</sup>

2) Uvažujme reálné posloupnosti

$$e_n := 0, 0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{n\text{-tý člen}}, 0, \dots$$

Dá se ukázat, že v každém z prostorů  $l^p$ , kde  $1 < p < \infty$ , platí

$$e_n \rightharpoonup 0,$$

zatímco v prostoru  $l^1$  posloupnost  $(e_n)$  vůbec slabě nekonverguje. (Dá se dokonce ukázat, že v prostoru  $l^1$  platí:  $x_n \rightarrow x \Leftrightarrow x_n \rightharpoonup x$ .)

**5.26 Věta.** Buď  $X$  normovaný lineární prostor. Pak

$$\dim X < \infty \Leftrightarrow \text{z každé omezené posloupnosti lze vybrat} \\ \text{silně konvergentní podposloupnost.}$$

<sup>1</sup>Například:

$$H = l^2, \quad e_n := 0, 0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{n\text{-tý člen}}, 0, \dots,$$

nebo

$$H = L^2(0, \pi), \quad e_n(x) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx).$$

<sup>2</sup>Mohli jsme postupovat i jinak: protože

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \quad n \neq m : \|e_n - e_m\|^2 = (e_n - e_m, e_n - e_m) = \|e_n\|^2 + \|e_m\|^2 = 2,$$

není posloupnost  $(e_n)$  cauchyovská, a proto ani konvergentní (viz větu 2.4).

**5.27 Věta (Eberleinova – Šmuljanova).** *Bud'  $X$  Banachův prostor. Pak*

*$X$  je reflexivní  $\Leftrightarrow$  z každé omezené posloupnosti lze vybrat slabě konvergentní podposloupnost.*

**5.28 Cvičení.** Uvažujme Banachův prostor  $C(\langle 0, 1 \rangle)$  s normou  $\|x\| := \sup_{t \in \langle 0, 1 \rangle} |x(t)|$  a v něm posloupnost  $(f_n)$  definovanou předpisy

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 - nx, & x \in \langle 0, \frac{1}{n} \rangle, \\ 0, & x \in (\frac{1}{n}, 1). \end{cases}$$

Dokažte, že (přestože posloupnost  $(f_n)$  je v  $C(\langle 0, 1 \rangle)$  omezená) z posloupnosti  $(f_n)$  nelze vybrat slabě konvergentní podposloupnost. (Odtud a z věty 5.27 již plyne, že  $C(\langle 0, 1 \rangle)$  není reflexivní prostor.)

**5.29 Věta.** *V libovolném Hilbertově prostoru platí:*

$$[x_n \rightharpoonup x \wedge \|x_n\| \rightarrow \|x\|] \Rightarrow x_n \rightarrow x.$$

*Důkaz.* Stačí si rozmyslet, že z předpokladů a z Rieszovy věty 5.13 plyne:

$$\|x_n - x\|^2 = (x_n - x, x_n - x) = \underbrace{\|x_n\|^2}_{\rightarrow \|x\|^2} + \|x\|^2 - 2 \underbrace{(x_n, x)}_{\rightarrow (x, x) = \|x\|^2} \rightarrow 0.$$

□

**5.30 Věta (princip stejnoměrné omezenosti).** *Nechť  $X$  je Banachův prostor, nechť  $Y$  je NLP a nechť  $\mathcal{G} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ . Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

- i)  $\sup \{\|L\| : L \in \mathcal{G}\} < \infty$ ,
- ii)  $\forall x \in X : \sup \{\|Lx\| : L \in \mathcal{G}\} < \infty$ .

*Důkaz.* Implikace i)  $\Rightarrow$  ii) je přímým důsledkem již známého tvrzení

$$\forall x \in X : \|Lx\| \leq \|L\| \cdot \|x\|.$$

Důkaz tvrzení ii)  $\Rightarrow$  i) je komplikovanější, opírá se o Baireovu větu 2.25.

Definujme pro každé  $n \in \mathbb{N}$  množinu

$$M_n := \bigcap_{L \in \mathcal{G}} \{x \in X : \|Lx\| \leq n\}.$$

Díky spojitosti normy i zobrazení  $L$  je každá z množin  $\{x \in X : \|Lx\| \leq n\}$  uzavřená. Odtud plyne, že pro každé  $n \in \mathbb{N}$  je uzavřená i množina  $M_n$  (viz cvičení 2.13). Navíc: předpoklad ii) nám umožňuje tvrdit, že

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n,$$

a proto (viz Baireovu větu 2.25)

$$\exists m \in \mathbb{N} : \text{int } \overline{M_m} = \text{int } M_m \neq \emptyset.$$

To znamená, že existují  $\delta > 0$  a  $y \in M_m$ , pro něž

$$U(y, 2\delta) := \{x \in X : \|x - y\| < 2\delta\} \subset M_m.$$

Buď nyní  $L \in \mathcal{G}$  a  $x \in X$ ,  $\|x\| \leq 1$ , zvoleny libovolně. Pak

$$z := y + \delta x \in U(y, 2\delta) \subset M_m,$$

a proto (viz definici množiny  $M_m$  a skutečnost, že  $z, y \in M_m$ ):

$$\|Lx\| = \left\| L\left(\frac{z - y}{\delta}\right) \right\| \leq \frac{1}{\delta} (\|Lz\| + \|Ly\|) \leq \frac{1}{\delta} (m + m) = \frac{2m}{\delta}.$$

Odtud a z definice normy v  $\mathcal{L}(X, Y)$  již snadno plyne

$$\sup \{\|L\| : L \in \mathcal{G}\} \leq \frac{2m}{\delta} \in \mathbb{R}.$$

□

**5.31 Věta (Banachova – Steinhausova).** *Nechť  $X$  je Banachův prostor, nechť  $Y$  je NLP a nechť  $(L_n)$  je taková posloupnost v  $\mathcal{L}(X, Y)$ , že pro každé  $x \in X$  existuje*

$$\lim L_n x =: Lx.$$

*Pak*

$$L \in \mathcal{L}(X, Y).$$

*Důkaz.* Linearita zobrazení  $L$  je zřejmá, protože pro všechna  $x, y \in X$  a  $\alpha \in \mathbb{R}$  je

$$\begin{aligned}\underline{L(x+y)} &= \lim L_n(x+y) = \lim(L_nx + L_ny) = \lim L_nx + \lim L_ny = \underline{Lx + Ly}, \\ \underline{L(\alpha x)} &= \lim L_n(\alpha x) = \lim(\alpha L_nx) = \alpha \lim L_nx = \underline{\alpha Lx}.\end{aligned}$$

Navíc: předpokládáme, že pro každé  $x \in X$  existuje  $\lim L_nx$ , a proto

$$\forall x \in X : \sup\{\|L_nx\| : n \in \mathbb{N}\} < \infty.$$

Odtud a z principu stejnoměrné omezenosti 5.30 plyne

$$(\exists k \in \mathbb{R}^+) (\forall n \in \mathbb{N}) : \|L_n\| \leq k,$$

z čehož – díky spojitosti normy – snadno odvodíme

$$(\exists k \in \mathbb{R}^+) (\forall x \in X) : \underline{\|Lx\|} = \|\lim L_nx\| = \lim \|L_nx\| \leq k \|x\|.$$

Dokázali jsme, že lineární zobrazení  $L$  je omezené, a tudíž  $\underline{L \in \mathcal{L}(X, Y)}$ . □

Na závěr této kapitoly splníme dříve uvedený slib a dokážeme tvrzení iii) věty 5.23, tj. implikaci:

$$\boxed{x_n \rightharpoonup x \Rightarrow \text{posloupnost } (x_n) \text{ je omezená.}}$$

*Důkaz.* Uvažujme kanonické vnoření  $S : X \rightarrow X^{**}$  (viz 5.14). Pak

$$\forall f \in X^* : (Sx_n)(f) = f(x_n) \rightarrow f(x) = (Sx)(f),$$

a proto

$$\forall f \in X^* : \sup\{|(Sx_n)(f)| : n \in \mathbb{N}\} < \infty.$$

Odtud, z principu stejnoměrné omezenosti 5.30<sup>1</sup> a skutečnosti, že kanonické vnoření  $S$  je izometrickým izomorfismem  $X$  na  $S(X)$ , plyne

$$(\exists k \in \mathbb{R}^+) (\forall n \in \mathbb{N}) : \|Sx_n\| = \|x_n\| \leq k.$$

□

---

<sup>1</sup>Připomeňme si, že  $X^*$  je úplný!



## Kapitola 6

# Diferenciální počet v NLP

**6.1 Definice.** Budiž

- $X$  a  $Y$  normované lineární prostory,
- $f : X \rightarrow Y$ ,
- $x \in X$  vnitřní bod  $Df$ ,
- $h \in X$ .

Existuje-li limita

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda \in \mathbb{R}}} \frac{f(x + \lambda h) - f(x)}{\lambda} =: D_h f(x),$$

nazýváme ji derivací  $f$  v bodě  $x$  ve směru  $h$ .

Existuje-li  $D_h f(x)$  pro každé  $h \in X$ , nazýváme zobrazení

$$h \mapsto D_h f(x)$$

Gâteauxovým diferenciálem  $f$  v bodě  $x$ .

**6.2 Poznámka.** Existují zobrazení, jejichž Gâteauxův diferenciál v daném bodě

- neexistuje,
- existuje, ale není lineárním zobrazením,
- existuje a je lineárním, ale ne spojitým zobrazením.

**6.3 Definice.** Je-li zobrazení

$$h \mapsto D_h f(x)$$

spojitým lineárním zobrazením  $X$  do  $Y$  (tj. patří-li do  $\mathcal{L}(X, Y)$ ), nazýváme toto zobrazení Gâteauxovou (slabou) derivací  $f$  v bodě  $x$  a značíme  $Df(x)$ .<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Pro Gâteauxovu derivaci (existuje-li) tedy platí:

$$Df(x) \in \mathcal{L}(X, Y),$$

$$\forall h \in X : (Df(x))(h) = D_h f(x) \in Y.$$

## 6.4 Příklady.

1) Buďte  $X$  a  $Y$  NLP a  $f : X \rightarrow Y$  lineární na  $X$ .

Pak

$$\forall x, h \in X : D_h f(x) = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda \in \mathbb{R}}} \frac{f(x + \lambda h) - f(x)}{\lambda} = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda \in \mathbb{R}}} \frac{f(x) + \lambda f(h) - f(x)}{\lambda} = f(h),$$

a proto

- není-li  $f$  spojitě na  $X$ , neexistuje Gâteauxova derivace  $f$  v žádném bodě  $x \in X$  (viz příklad ii) na straně 44),
- je-li  $f \in \mathcal{L}(X, Y)$ , je  $Df(x) = f$  pro každé  $x \in X$ .

2) Uvažujme Banachův prostor  $X = C(\langle 0, 1 \rangle)$ ,  $\|x\| := \sup_{t \in \langle 0, 1 \rangle} |x(t)|$ , a funkcionál

$f : X \rightarrow \mathbb{R}$  definovaný předpisem

$$f(x) := \int_0^1 x^2(t) dt.$$

Pak pro každé  $x, h \in X$  platí

$$\begin{aligned} D_h f(x) &= \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda \in \mathbb{R}}} \frac{f(x + \lambda h) - f(x)}{\lambda} = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda \in \mathbb{R}}} \frac{\int_0^1 (x(t) + \lambda h(t))^2 dt - \int_0^1 x^2(t) dt}{\lambda} = \\ &= \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda \in \mathbb{R}}} \int_0^1 2x(t)h(t) dt + \underbrace{\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda \in \mathbb{R}}} \int_0^1 \lambda h^2(t) dt}_{=0, \text{ protože } |\int_0^1 \lambda h^2(t) dt| \leq |\lambda| \cdot \|h\|^2} = \int_0^1 2x(t)h(t) dt, \end{aligned}$$

a protože zobrazení

$$h \mapsto D_h f(x) = \int_0^1 2x(t)h(t) dt$$

je zřejmě **lineární** a **omezené** ( $|\int_0^1 2x(t)h(t) dt| \leq 2 \cdot \|x\| \cdot \|h\|$ ), existuje pro každé  $x \in X$  Gâteauxova derivace  $Df(x)$  a platí

$$\forall h \in X : (Df(x))(h) = \int_0^1 2x(t)h(t) dt.$$

3) Buď  $X = C(\langle 0, 1 \rangle)$  s normou  $\|x\| := \sup_{t \in \langle 0, 1 \rangle} |x(t)|$  a buď funkcionál  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  definován předpisem

$$f(x) := \int_0^1 \sin(x(t)) dt.$$

Pak pro každé  $x, h \in X$  a  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  platí<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \frac{f(x + \lambda h) - f(x)}{\lambda} &= \int_0^1 \frac{\sin(x(t) + \lambda h(t)) - \sin x(t)}{\lambda} dt = \\ &= \int_0^1 \cos(\xi_\lambda(t)) h(t) dt \rightarrow \int_0^1 \cos(x(t)) h(t) dt \quad \text{pro } \lambda \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Protože navíc zobrazení

$$h \mapsto \int_0^1 \cos(x(t)) h(t) dt$$

je **lineární** a **omezené** ( $|\int_0^1 \cos(x(t)) h(t) dt| \leq \|h\|$ ), je

$$\forall x, h \in X : (Df(x))(h) = \int_0^1 \cos(x(t)) h(t) dt.$$

---

<sup>1</sup>Stačí dvakrát aplikovat Lagrangeovu větu o střední hodnotě:

- ( $\forall t \in \langle 0, 1 \rangle$ ) ( $\exists \xi_\lambda(t)$  ležící mezi  $x(t)$  a  $x(t) + \lambda h(t)$ ):

$$\sin(x(t) + \lambda h(t)) - \sin(x(t)) = \sin'(\xi_\lambda(t)) \lambda h(t) = \cos(\xi_\lambda(t)) \lambda h(t);$$

- 

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 (\cos(\xi_\lambda(t)) - \cos(x(t))) h(t) dt \right| &\leq \int_0^1 |\cos(\xi_\lambda(t)) - \cos(x(t))| \cdot |h(t)| dt \leq \\ &\leq \|h\| \int_0^1 |\xi_\lambda(t) - x(t)| dt \leq \|h\| \cdot |\lambda| \cdot \|h\| \rightarrow 0 \quad \text{pro } \lambda \rightarrow 0. \end{aligned}$$

**6.5 Definice.** Budiž

- $X$  a  $Y$  NLP,
- $f : X \rightarrow Y$ ,
- $x \in X$  vnitřní bod  $Df$ .

Řekneme, že  $f$  má v bodě  $x$  Fréchetův (totální) diferenciál, jestliže existuje spojité lineární zobrazení prostoru  $X$  do prostoru  $Y$  – budeme jej značit  $f'(x)$  – takové, že

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - (f'(x))(h)}{\|h\|} = 0.$$

Zobrazení  $f'(x) \in \mathcal{L}(X, Y)$  se též nazývá Fréchetova (silná) derivace  $f$  v bodě  $x$ .

**6.6 Pozorování.**

- i) Z existence Fréchetovy derivace  $f$  v bodě  $x$  již vyplývá jednoznačnost zobrazení  $f'(x)$  výše uvedených vlastností.

*Důkaz.* Předpokládejme, že  $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(X, Y)$  a že

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - L_1(h)}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - L_2(h)}{\|h\|} = 0.$$

Potom taky

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x+h) - f(x) - L_1(h)}{\|h\|} - \frac{f(x+h) - f(x) - L_2(h)}{\|h\|} \right] = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{L_2(h) - L_1(h)}{\|h\|}. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Buď nyní  $h \in X$  libovolný bod.

- Je-li  $h = 0$ , je zřejmě  $L_1(h) = L_2(h) = 0$  ( $L$  je lineární).
- Je-li  $h \neq 0$ , uvažujme posloupnost

$$h_n := \frac{1}{n}h.$$

Protože  $0 \neq h_n \rightarrow 0$ , plyne z (6.1), že

$$\frac{L_2(h_n) - L_1(h_n)}{\|h_n\|} = \frac{\frac{1}{n}L_2(h) - \frac{1}{n}L_1(h)}{\frac{1}{n}\|h\|} = \frac{L_2(h) - L_1(h)}{\|h\|} \rightarrow 0,$$

a proto  $L_2(h) = L_1(h)$ .

□

ii)  $f'(x)$  existuje  $\Rightarrow$  zobrazení  $f$  je spojité v bodě  $x$ .

*Důkaz.*

$$\begin{aligned} x \neq x_n \rightarrow x &\Rightarrow 0 \neq x_n - x \rightarrow 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{f(x + (x_n - x)) - f(x) - f'(x)(x_n - x)}{\|x_n - x\|} \rightarrow 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow f(x_n) - f(x) - \underbrace{f'(x)(x_n - x)}_{\rightarrow 0, \text{ protože } f'(x) \in \mathcal{L}(X, Y)} \rightarrow 0 \Rightarrow \underline{f(x_n) \rightarrow f(x)}. \end{aligned}$$

□

iii)  $f'(x)$  existuje  $\Rightarrow Df(x)$  existuje a platí  $Df(x) = f'(x)$ .

(Pozor!, **neplatí**:  $Df(x)$  existuje  $\Rightarrow f'(x)$  existuje.<sup>1</sup>)

*Důkaz.* Stačí si uvědomit, že pro každé  $h \in X$ ,  $h \neq 0$ , je

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda \in \mathbb{R}}} \left\| \frac{f(x + \lambda h) - f(x)}{\lambda} - f'(x)(h) \right\|_Y &= \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda \in \mathbb{R}}} \left\| \frac{f(x + \lambda h) - f(x) - f'(x)(\lambda h)}{\lambda} \right\|_Y \cdot \frac{\|h\|_X}{\|h\|_X} = \\ &= \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda \in \mathbb{R}}} \frac{\|f(x + \lambda h) - f(x) - f'(x)(\lambda h)\|_Y}{\|\lambda h\|_X} \cdot \|h\|_X = 0, \end{aligned}$$

a proto

$$\forall h \in X : (Df(x))(h) = f'(x)(h).$$

□

## 6.7 Příklady.

1) Buď  $f \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Už víme (viz příklad 1) na straně 62 a předchozí pozorování): existuje-li pro nějaké  $x \in X$  Fréchetova derivace  $f'(x)$ , je  $f'(x) = f$ . A protože pro každé  $x \in X$  platí

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x) - f(h)}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{\|h\|} = 0,$$

---

<sup>1</sup>Stačí volit:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) := \begin{cases} 1, & y = x^2 \neq 0, \\ 0, & \text{jinde.} \end{cases}$$

Pak

- $Df(0) = 0$ ,
- $f'(0)$  neexistuje (funkce  $f$  není v 0 spojitá).

je

$$\forall x \in X : f'(x) = f.$$

2) Uvažujme

$$X = C(\langle 0, 1 \rangle), \quad \|x\| := \sup_{t \in \langle 0, 1 \rangle} |x(t)|,$$

$$f : X \rightarrow X, \quad f(x)(t) := \sin(x(t)).$$

Pak pro každé  $x \in X$  existuje  $f'(x)$  a platí

$$(\forall x \in X) (\forall h \in X) (\forall t \in \langle 0, 1 \rangle) :$$

$$f'(x) \in \mathcal{L}(X, X),$$

$$f'(x)(h) \in X,$$

$$(f'(x)(h))(t) = \cos(x(t))h(t).$$

*Důkaz.* Buď  $x \in X$  libovolný bod. Definujme zobrazení  $L : X \rightarrow X$  předpisem

$$(Lh)(t) = \cos(x(t))h(t).$$

Máme dokázat, že  $L = f'(x)$ .

Zobrazení  $L$  je zřejmě **lineární** a **omezené**:

$$\|Lh\| = \sup_{t \in \langle 0, 1 \rangle} |(Lh)(t)| = \sup_{t \in \langle 0, 1 \rangle} |\cos(x(t))h(t)| \leq \|h\|.$$

Navíc pro každé  $h \in X$  platí (je třeba dvakrát použít šikově Lagrangeovu větu o střední hodnotě):

$$\begin{aligned} \|f(x+h) - f(x) - Lh\| &= \sup_{t \in \langle 0, 1 \rangle} |\sin(x(t)+h(t)) - \sin(x(t)) - \cos(x(t))h(t)| = \\ &= \sup_{t \in \langle 0, 1 \rangle} |\cos(\xi(t))h(t) - \cos(x(t))h(t)| \leq \sup_{t \in \langle 0, 1 \rangle} [|\xi(t) - x(t)| \cdot |h(t)|] \leq \\ &\leq \sup_{t \in \langle 0, 1 \rangle} [|h(t)| \cdot |h(t)|] = \|h\|^2, \end{aligned}$$

a proto

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - Lh\|}{\|h\|} = 0.$$

Dokázali jsme, že  $f'(x) = L$ .

□

3) Uvažujme nyní

$$X = L^2(0, 1), \quad \|x\| := \sqrt{\int_0^1 x^2(t) \, dt},$$

$$f : X \rightarrow X, \quad f(x)(t) := \sin(x(t)).$$

Pak existuje  $Df(0)$  a platí

$$\underline{Df(0) = \text{Id}},$$

tzn.

$$\forall h \in X : (Df(0))(h) = D_h f(0) = h,$$

ale

$$\underline{\text{neexistuje } f'(0)}.$$

(Porovnejte s předchozím příkladem – máme zobrazení, pro něž derivace závisí na volbě prostoru!)

*Náznak důkazu.* Buďte  $h \in X$  a  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  zvoleny libovolně. Dá se ukázat, že

$$\left\| \frac{f(0 + \lambda h) - f(0)}{\lambda} - h \right\| = \sqrt{\int_0^1 \left( \frac{\sin(\lambda h(t))}{\lambda} - h(t) \right)^2 dt} \rightarrow 0 \text{ pro } \lambda \rightarrow 0,$$

tzn.

$$\forall h \in X : D_h f(0) = h,$$

a proto (zobrazení  $h \mapsto D_h f(0) = h$  patří do  $\mathcal{L}(X, X)$ ):

$$\underline{Df(0) = \text{Id}}.$$

Zbývá nám dokázat, že  $\underline{f'(0)}$  neexistuje.

Protože už víme, že  $Df(0) = \text{Id}$ , stačí ukázat, že

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h) - f(0) - h}{\|h\|} \text{ není rovna } 0.$$

Definujme nyní posloupnost  $(h_n)$  v prostoru  $X$  předpisem

$$h_n(t) := \begin{cases} 2\pi, & 0 \leq t < \frac{1}{n}, \\ 0, & \frac{1}{n} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Pak

$$0 \neq \|h_n\| = \sqrt{\int_0^1 h_n^2(t) \, dt} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{n}} \rightarrow 0,$$

ale (využitím faktu, že pro každé  $t \in \langle 0, 1 \rangle$  je  $\sin(h_n(t)) = 0$ )

$$\frac{\|f(0 + h_n) - f(0) - h_n\|}{\|h_n\|} = \frac{\sqrt{\int_0^1 (\sin(h_n(t)) - h_n(t))^2 dt}}{\|h_n\|} = \frac{\|h_n\|}{\|h_n\|} = 1 \not\rightarrow 0.$$

□

### 6.8 Věta (o derivaci složeného zobrazení).

*Nechť*

- $X, Y, Z$  jsou NLP,
- $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ ,
- $x \in X, h \in X$ ,
- existují  $g'(f(x))$  a  $D_h f(x)$ .

*Potom existuje  $D_h(g \circ f)(x)$  a platí*

$$D_h(g \circ f)(x) = g'(f(x))(D_h f(x)).$$

**6.9 Důsledek.** Existuje-li navíc  $Df(x)$  resp.  $f'(x)$ , je

$$D(g \circ f)(x) = g'(f(x)) \circ Df(x)$$

resp.

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x).$$

**6.10 Příklad.** Uvažujme

$$X = C(\langle 0, 1 \rangle), \|x\| := \sup_{t \in \langle 0, 1 \rangle} |x(t)|,$$

$$F : X \rightarrow \mathbb{R}, F(x) := \left( \int_0^1 x(t) dt \right)^3.$$

Pak

$$F = g \circ f,$$

kde

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := \int_0^1 x(t) dt,$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(t) := t^3.$$

Protože



- $\forall x \in X : f'(x) = f$   
( $f$  je zřejmě **lineární** a **spojité** – a viz příklad 1) na straně 65),
- $\forall x \in X : g'(f(x)) = 3(f(x))^2$   
(tj.  $(\forall x \in X) (\forall t \in \mathbb{R}) : g'(f(x))(t) = 3(f(x))^2 t$ ),

je

$$\forall x \in X : F'(x) = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x) = 3(f(x))^2 \circ f,$$

tzn.

$$(\forall x \in X) (\forall h \in X) : (F'(x))(h) = 3 \left( \int_0^1 x(t) dt \right)^2 \int_0^1 h(t) dt.$$

**6.11 Varovný příklad.** Buď

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x) := (x, x^2),$$

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, g(x, y) := \begin{cases} x, & y = x^2, \\ 0, & y \neq x^2. \end{cases}$$

Pak (a to si rozmyslete podrobně!)

$$(g \circ f)'(0) = D(g \circ f)(0) = \text{Id}, \text{ tzn. } \forall h \in \mathbb{R} : (D(g \circ f)(0))(h) = h,$$

$$Dg(f(0)) = Dg(0) = 0,$$

$$\forall h \in \mathbb{R} : (Df(0))(h) = (h, 0),$$

tzn.

$$\text{neplatí } D(g \circ f)(0) = (Dg)(f(0)) \circ Df(0).$$

### 6.12 Věta.

*Nechť*

- $X$  a  $Y$  jsou NLP,
- $f : X \rightarrow Y$ ,
- $Df : X \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$  je **spojité zobrazení** v bodě  $x \in X$   
(tzn.  $x_n \rightarrow x \Rightarrow Df(x_n) \rightarrow Df(x)$ ).

*Pak existuje  $f'(x)$  (a platí  $f'(x) = Df(x)$ ).*

**6.13 Důsledek.** Je-li navíc zobrazení  $Df$  spojité na otevřené množině  $G \subset X$ , existuje na  $G$  Fréchetova derivace  $f'$  a je na  $G$  spojitá.<sup>1</sup>

**6.14 Definice.** Buďte  $X$  NLP a  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ .

Řekneme, že  $f$  má v bodě  $x \in X$  lokální minimum resp. ostré lokální minimum, existuje-li  $\varepsilon > 0$  takové, že

$$\forall y \in U(x, \varepsilon) : f(x) \leq f(y)$$

resp.

$$\forall y \in P(x, \varepsilon) := U(x, \varepsilon) \setminus \{x\} : f(x) < f(y).$$

**6.15 Poznámka.** Skoro každému je jasné, jak je definované lokální maximum resp. ostré lokální maximum.

**6.16 Věta (Eulerova nutná podmínka existence lokálního extrému).**

*Nechť*

- $X$  je NLP,
- $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,
- $f$  má v bodě  $x \in X$  **lokální extrém**  
(tzn. lokální minimum nebo lokální maximum),
- $h \in X$  je takové, že existuje  $D_h f(x)$ .

*Pak*

$$D_h f(x) = 0.$$

*Důkaz.* Uvažujme funkci

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(\lambda) := f(x + \lambda h).$$

Pak

- $g$  má lokální extrém v 0 (protože  $f$  má lokální extrém v  $x$ ),
- existuje  $g'(0)$  (protože existuje  $D_h f(x)$ ).

---

<sup>1</sup>Píšeme  $f \in C^1(G)$ .

Odtud snadno plyne, že

$$0 = g'(0) = D_h f(x).$$

□

Všimněme si, že uvedená nutná podmínka je zobecněním známého tvrzení o lokálních extrémech funkcí z  $\mathbb{R}^n$  do  $\mathbb{R}$ . Ukažme si i zobecnění tzv. postačující podmínky. K tomu ovšem potřebujeme i derivace vyšších řádů. Pro jednoduchost se omezíme pouze na Fréchetovy derivace.

**6.17 Definice.** Necht

- $X$  a  $Y$  jsou NLP,
- $f : X \rightarrow Y$ ,
- $f'$  existuje na nějakém okolí bodu  $x \in X$  ( $f' : X \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ ).

Existuje-li Fréchetova derivace zobrazení  $f'$  v bodě  $x$ , nazýváme ji druhou Fréchetovou derivací  $f$  v bodě  $x$  a značíme  $f''(x)$ .

(Podobně lze definovat Fréchetovy derivace vyšších řádů.)

**6.18 Poznámka.** Pro vyšší derivace se situace stává poněkud nepřehlednou, neboť

$$\begin{aligned} f &: X \rightarrow Y; \\ f'(x) &\in \mathcal{L}(X, Y), \quad f' : X \rightarrow \mathcal{L}(X, Y); \\ f''(x) &\in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y)), \quad f'' : X \rightarrow \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y)); \\ f'''(x) &\in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y))), \quad f''' : X \rightarrow \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y))); \\ &\vdots \end{aligned}$$

Dá se však ukázat, že výše uvedené prostory  $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y))$ ,  $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y)))$ , ... lze ztotožnit s prostory tzv. multilineárních zobrazení.

**Speciálně:**

$$f''(x) \in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y)) \cong \mathcal{L}(X \times X, Y).$$

**6.19 Věta (Lagrangeova postačující podmínka existence lok. extrému).**  
*Nechť*

- $X$  je NLP,
- $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,
- $x \in X$  je kritickým bodem  $f$  (tzn.  $f'(x) = 0$ ),
- $f''$  je *spojitá na nějakém okolí* bodu  $x$ .

*Pak platí:*

i) *existuje-li*  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  *takové, že*

$$\forall h \in X : (f''(x)(h))(h) \cong f''(x)(h, h) \geq \alpha \|h\|^2,$$

*má*  $f$  *v bodě*  $x$  *ostré lokální minimum;*

ii) *existuje-li*  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  *takové, že*

$$\forall h \in X : (f''(x)(h))(h) \cong f''(x)(h, h) \leq -\alpha \|h\|^2,$$

*má*  $f$  *v bodě*  $x$  *ostré lokální maximum.*

**Snad hezké a určitě užitečné příklady na závěr.**

**6.20 Příklad.** Uvažujme okrajovou úlohu

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & \text{v } (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (6.2)$$

Tato úloha může popisovat (např.) stacionární rozložení teploty v tenké tyči, na jejíchž koncích udržujeme nulovou teplotu:

$u = u(x) \dots$  teplota v příčném řezu,

$f = f(x) \dots$  souvisí s tepelnými zdroji uvnitř tyče.

Uvažujme-li – fyzikálně rozumný – případ, kdy rozložení zdrojů není spojitě – např.

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle, \\ -1, & x \in \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle, \end{cases}$$

neexistuje klasické řešení dané úlohy.

Je proto přirozené pojem řešení zobecnit.  
Naznačme, jak lze postupovat:

Předpokládejme nejdříve, že  $u$  je klasickým řešením úlohy (6.2), tzn. že

$$\begin{aligned} u &\in C^2(\langle 0, 1 \rangle), \\ \forall x \in \langle 0, 1 \rangle : -u''(x) &= f(x), \\ u(0) = u(1) &= 0. \end{aligned}$$

Pak pro každou funkci  $v \in C^1(\langle 0, 1 \rangle)$  takovou, že  $v(0) = v(1) = 0$ , platí

$$\int_0^1 -u''(x)v(x) \, dx = \int_0^1 f(x)v(x) \, dx$$

(oba (Riemannovy) **integrály existují** – integrujeme spojité funkce).

Upravme integrál na levé straně pomocí „per partes“:

$$\int_0^1 -u''(x)v(x) \, dx = \underbrace{[-u'(x)v(x)]_0^1}_{=0, \text{ protože } v(0)=v(1)=0} + \int_0^1 u'(x)v'(x) \, dx.$$

Tedy – řešení  $u$  musí pro každou výše popsanou funkci  $v$  splňovat rovnost

$$\int_0^1 u'(x)v'(x) \, dx = \int_0^1 f(x)v(x) \, dx. \quad (6.3)$$

Tento vztah, ve kterém se již nevyskytuje  $u''$ , lze vzít za základ definice tzv. slabého řešení úlohy (6.2).

Mimochodem: velmi často je výsledkem fyzikálních úvah (pomocí nichž se snažíme sestavit model – rovnici popisující nějaký jev) právě analogická „integrální rovnice“. K diferenciální rovnici se dostáváme za **dodatečného** předpokladu hladkosti řešení (v našem případě:  $u \in C^2(\langle 0, 1 \rangle)$ ). Definovat řešení daného problému pomocí té integrální rovnice je tak v jistém smyslu přirozenější a správnější.

Podstatnou je otázka, kde – tj. v **jakém prostoru** – máme řešení našeho problému hledat.

Nabízí se nám vektorový prostor

$$C_0^1(\langle 0, 1 \rangle) := \{u \in C^1(\langle 0, 1 \rangle) : u(0) = u(1) = 0\}.$$

Funkce z tohoto prostoru splňují okrajové podmínky a spojitost jejich derivací se nám „hodí“ pro existenci integrálů v příslušné integrální rovnici (6.3).

Jakou však máme na  $C_0^1(\langle 0, 1 \rangle)$  zvolit normu? Zvolíme-li normu

$$\|x\| := \sup_{t \in \langle 0, 1 \rangle} |x(t)| + \sup_{t \in \langle 0, 1 \rangle} |x'(t)|,$$

získáme sice Banachův prostor, ale tato norma jistě neodpovídá „duchu“ dané integrální rovnice.

Ukazuje se užitečným definovat na  $C_0^1(\langle 0, 1 \rangle)$  takovýto skalární součin (ten již indukuje „šikovější“ normu):

$$(u, v) := \int_0^1 u'(x)v'(x) dx. \quad (6.4)$$

Přesvědčme se (přímo z definice 4.1), že vztah (6.4) skutečně definuje na  $C_0^1(\langle 0, 1 \rangle)$  skalární součin:

- $\forall v \in C_0^1(\langle 0, 1 \rangle) : u \mapsto \int_0^1 u'(x)v'(x) dx$  je lineární zobrazení,
- $\forall u, v \in C_0^1(\langle 0, 1 \rangle) : \int_0^1 u'(x)v'(x) dx = \int_0^1 v'(x)u'(x) dx$ ,
- $\forall u \in C_0^1(\langle 0, 1 \rangle) : \int_0^1 (u'(x))^2 dx \geq 0$ ,  
 $u \equiv 0 \Rightarrow \int_0^1 (u'(x))^2 dx = 0$ ,  
 $\int_0^1 (u'(x))^2 dx = 0 \Rightarrow u' \equiv 0 \Rightarrow [u \text{ je konstantní} + \text{předp. } u(0) = 0] \Rightarrow u \equiv 0$ .

Dá se ukázat, že  $C_0^1(\langle 0, 1 \rangle)$  s indukovanou normou

$$\|u\| := \sqrt{\int_0^1 (u'(x))^2 dx}$$

není úplný prostor.

Definujme Sobolevův prostor  $W_0^{1,2}(0, 1)$  jako zúplnění prostoru  $C_0^1(\langle 0, 1 \rangle)$  vzhledem k výše uvedené normě.

Je tedy  $W_0^{1,2}(0, 1)$  Hilbertovým prostorem.

Navíc se dá ukázat, že

$$W_0^{1,2}(0, 1) \subset C(\langle 0, 1 \rangle)$$

a že pro každé  $f \in L^2(0, 1)$  je zobrazení

$$F(v) := \int_0^1 f(x)v(x) dx$$

spojitým lineárním funkcionálem na  $W_0^{1,2}(0, 1)$ .<sup>1</sup>

Nyní přistupme k definici slabého řešení.

---

<sup>1</sup>Integrály vystupující v definici funkcionálu  $F \in (W_0^{1,2}(0, 1))^*$  a v dalším jsou ovšem integrály Lebesgueovy; plné pochopení tohoto a následujícího příkladu tak bude možné až později. Zvědaví čtenáři však mohou nahlédnout už teď do textu [1].

**6.21 Definice.** Buď  $f \in L^2(0, 1)$ . Funkci  $u \in W_0^{1,2}(0, 1)$  nazýváme slabým řešením okrajové úlohy (6.2), platí-li

$$\forall v \in W_0^{1,2}(0, 1) : \int_0^1 u'(x)v'(x) dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx.$$

**6.22 Věta.** *Ať  $f \in L^2(0, 1)$ . Pak **existuje právě jedno** slabé řešení úlohy (6.2).*

Ukažme si dva různé důkazy této věty.

*Důkaz 1.* Už víme, že zobrazení  $v \mapsto \int_0^1 f(x)v(x) dx$  je prvkem  $(W_0^{1,2}(0, 1))^*$ . Existuje proto (viz Rieszovu větu o reprezentaci 5.13) právě jedno  $u \in W_0^{1,2}(0, 1)$  takové, že

$$\forall v \in W_0^{1,2}(0, 1) : \int_0^1 u'(x)v'(x) dx = (u, v) = \int_0^1 f(x)v(x) dx.$$

□

*Důkaz 2.*

a) Existence slabého řešení.

Definujme funkcionál  $J : W_0^{1,2}(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  předpisem

$$J(u) := \frac{1}{2} \int_0^1 (u'(x))^2 dx - \int_0^1 f(x)u(x) dx.$$

Pak

$$\forall u, v \in W_0^{1,2}(0, 1) : J'(u)(v) = \int_0^1 u'(x)v'(x) dx - \int_0^1 f(x)v(x) dx,$$

a proto

$$u \text{ je slabým řešením úlohy (6.2)} \Leftrightarrow J'(u) = 0. \quad (6.5)$$

Nyní si uvědomme, že **stačí**, dokážeme-li, že  $J$  **nabývá** na  $W_0^{1,2}(0, 1)$  **svého minima**, tzn.

$$\exists u \in W_0^{1,2}(0, 1) : J(u) = \inf_{v \in W_0^{1,2}(0, 1)} J(v).$$

Potom totiž  $J$  má v bodě  $u$  i lokální minimum, a proto (viz Eulerovu nutnou podmínku 6.16)  $J'(u) = 0$  (a viz (6.5)).

Všimněme si, že z omezenosti zobrazení  $v \mapsto \int_0^1 f(x)v(x) dx$  plyne

$$(\exists k \in \mathbb{R}^+) (\forall v \in W_0^{1,2}(0, 1)) : J(v) = \frac{1}{2} \|v\|^2 - \int_0^1 f(x)v(x) dx \geq \frac{1}{2} \|v\|^2 - k \cdot \|v\|,$$

a proto

- $\inf_{v \in W_0^{1,2}(0,1)} J(v) := d \in \mathbb{R}$  ... funkcionál  $J$  je zdola omezený,
- $\lim_{\|v\| \rightarrow \infty} J(v) = +\infty$  ... funkcionál  $J$  je slabě koercivní.

Nyní uvažujme posloupnost  $(u_n)$  na  $W_0^{1,2}(0,1)$  takovou, že

$$J(u_n) \rightarrow d$$

(taková **existuje!**). Tato posloupnost je jistě omezená ( $J$  je slabě koercivní), a proto  $(W_0^{1,2}(0,1))$  je Hilbertův, a tedy reflexivní prostor – viz stranu 52) existuje  $u \in W_0^{1,2}(0,1)$  a posloupnost vybraná z posloupnosti  $(u_n)$  – značme ji stejně – taková, že

$$u_n \rightharpoonup u$$

(viz Eberleinovu-Šmuljanovu větu na straně 58).

A dál je to snadné:  $u_n \rightharpoonup u$ , a proto

$$\|u\| \leq \liminf \|u_n\| \quad (\text{viz tvrzení iv) věty 5.23}),$$

$$\int_0^1 f(x)u_n(x) \, dx \rightarrow \int_0^1 f(x)u(x) \, dx.$$

Navíc předpokládáme, že

$$\begin{aligned} d = \lim J(u_n) &= \liminf J(u_n) = \liminf \left[ \frac{1}{2} \|u_n\|^2 - \int_0^1 f(x)u_n(x) \, dx \right] = \\ &= \liminf \frac{1}{2} \|u_n\|^2 - \int_0^1 f(x)u(x) \, dx \geq \frac{1}{2} \|u\|^2 - \int_0^1 f(x)u(x) \, dx = J(u), \end{aligned}$$

a proto

$$J(u) = d = \inf_{v \in W_0^{1,2}(0,1)} J(v).$$

b) Jednoznačnost slabého řešení.

Budte  $u_1, u_2 \in W_0^{1,2}(0,1)$  slabá řešení (6.2). Pak

$$\begin{aligned} \|u_1 - u_2\|^2 &= \int_0^1 (u_1 - u_2)'(u_1 - u_2)' \, dx = \\ &= \int_0^1 u_1'(u_1 - u_2)' \, dx - \int_0^1 u_2'(u_1 - u_2)' \, dx = \\ &= \int_0^1 f(u_1 - u_2) \, dx - \int_0^1 f(u_1 - u_2) \, dx = 0, \end{aligned}$$

a proto

$$u_1 = u_2.$$

□



**6.23 Příklad.** Uvažujme okrajovou úlohu

$$\begin{cases} -u''(x) + u^3(x) = f(x), & x \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \quad (6.6)$$

kde  $f \in L^2(0, 1)$ .

Slabým řešením úlohy (6.6) nazýváme funkci  $u \in W_0^{1,2}(0, 1)$  takovou, že

$$\forall v \in W_0^{1,2}(0, 1) : \int_0^1 u'(x)v'(x) dx + \int_0^1 u^3(x)v(x) dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx.$$

**6.24 Tvzení.** Existuje slabé řešení úlohy (6.6).

*Důkaz* jenom naznačíme.

Bud'

$$J(u) := \frac{1}{2} \int_0^1 (u'(x))^2 dx + \frac{1}{4} \int_0^1 u^4(x) dx - \int_0^1 f(x)u(x) dx$$

$$(J : W_0^{1,2}(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}).$$

Pak pro každé  $u, v \in W_0^{1,2}(0, 1)$  platí:

- $J'(u)(v) = \int_0^1 u'(x)v'(x) dx + \int_0^1 u^3(x)v(x) dx - \int_0^1 f(x)v(x) dx$ , a proto  
 $u$  je slabým řešením (6.6)  $\Leftrightarrow J'(u) = 0$ ;
- $J(v) = \frac{1}{2}\|v\|^2 + \frac{1}{4} \int_0^1 v^4(x) dx - \int_0^1 f(x)v(x) dx \geq \frac{1}{2}\|v\|^2 - k \cdot \|v\|$ , a proto  
 $J$  je zdola omezený a slabě koercivní.

Navíc se dá dokázat, že  $J$  je slabě zdola polospojité funkcionál, tzn.

$$u_n \rightharpoonup u \Rightarrow J(u) \leq \liminf J(u_n).$$

A zbývajíc část důkazu je stejná jako v předchozím příkladu. Najdeme posloupnost  $(u_n)$  ve  $W_0^{1,2}(0, 1)$  takovou, že

$$J(u_n) \rightarrow \inf_{v \in W_0^{1,2}(0, 1)} J(v) \in \mathbb{R}!$$

Tato posloupnost je nutně omezená ( $J$  je slabě koercivní), a proto z ní lze vybrat slabě konvergentní podposloupnost<sup>1</sup> (viz Eberleinovu-Šmuljanovu větu). Získáme tak posloupnost  $(u_n)$  ve  $W_0^{1,2}(0, 1)$  a bod  $u \in W_0^{1,2}(0, 1)$  tak, že

<sup>1</sup>Opět ji značíme stejně.

- $J(u_n) \rightarrow \inf_{v \in W_0^{1,2}(0,1)} J(v) \in \mathbb{R},$
- $u_n \rightharpoonup u.$

Odtud plyne ( $J$  je slabě zdola polospojité), že

$$J(u) \leq \liminf J(u_n) = \inf_{v \in W_0^{1,2}(0,1)} J(v),$$

$$J(u) = \inf_{v \in W_0^{1,2}(0,1)} J(v).$$

Funkcionál  $J$  má zřejmě v bodě  $u$  i lokální minimum, a protože existuje  $J'(u)$ , je  $J'(u) = 0$  (viz Eulerovu nutnou podmínku 6.16).

□

## Literatura

- [1] J. Bouchala: *Variační metody*, <http://mi21.vsb.cz/>, 2011.
- [2] P. Drábek, A. Kufner: *Úvod do funkcionální analýzy*, skripta ZČU, Plzeň, 1993.
- [3] P. Drábek, A. Kufner: *Funkcionální analýza*, skripta ZČU, Plzeň, 1994.
- [4] P. Drábek, J. Milota: *Methods of Nonlinear Analysis (Applications to Differential Equations)*, Birkhäuser Verlag AG, Berlin, 2007.
- [5] S. Fučík, A. Kufner: *Nelineární diferenciální rovnice*, SNTL, Praha, 1978.
- [6] S. Fučík, J. Milota: *Matematická analýza II*, skripta UK, Praha, 1980.
- [7] J. Lukeš: *Zápisky z funkcionální analýzy*, skripta UK, Karolinum, Praha, 1998.
- [8] E. Zeidler: *Applied Functional Analysis (Applications to Mathematical Physics)*, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [9] E. Zeidler: *Applied Functional Analysis (Main Principles and Their Applications)*, Springer-Verlag, New York, 1995.

# Rejstřík

Banachův prostor, 21

Báze

ortonormální, 31, 34

vektorového prostoru, 5

Besselova nerovnost, 33

Bod

hraniční, 10

hromadný, 10

izolovaný, 10

okolí, 10

vnější, 10

vnitřní, 10

Bolzanova – Cauchyho podmínka, 8

Derivace

Fréchetova

vyšších řádů, 71

Fréchetova (silná), 64

Gâteauxova (slabá), 62

ve směru, 61

Diferenciál

Fréchetův (totální), 64

Gâteauxův, 61

Dimenze vektorového prostoru, 5

Duální prostor, 44

Ekvivalentní normy, 24

Extrémy

lokální, 70

Fourierova řada, 33

Fréchetova (silná) derivace, 64

Fréchetova derivace vyšších řádů, 71

Fréchetův (totální) diferenciál, 64

Funkcionál

slabě koercivní, 76

slabě zdola polospojité, 77

zdola omezený, 76

Gâteauxova (slabá) derivace, 62

Gâteauxův diferenciál, 61

Hilbertův prostor, 27

Hranice množiny, 10

Hraniční bod, 10

Hromadný bod, 10

Hustá podmnožina, 26

Indukovaná metrika, 21, 27

Indukovaná norma, 27

Izolovaný bod, 10

Izometrický izomorfismus, 23

Izometricky izomorfní prostory, 23

Izomorfismus, 23

Izomorfní prostory, 23

Jádro zobrazení, 45

Kanonické vnoření, 51

Klasické řešení okrajové úlohy, 73

Kontraktivní operátor, 11

Konvergence

silná, 21

slabá, 55

Legendreovy polynomy, 38

Limita

posloupnosti, 8

zobrazení, 41

Lineárně

nezávislá množina, 4

nezávislé prvky, 4

závislé prvky, 4

- Lineární  
  forma, 45  
  obal množiny, 5  
Lineární zobrazení, 23  
  omezené, 41  
Lipschitzovská spojitost, 13  
Lokální extrémy, 70  
Lokální maximum, 70  
Lokální minimum, 70  
Maximum  
  lokální, 70  
  ostré, 70  
Metoda prostých iterací, 13  
Metrický prostor, 7  
Metrika, 7  
   $L^2$ -metrika, 8  
  „pampelišková“, 8  
  diskrétní, 8  
  eukleidovská, 7  
  indukovaná, 21, 27  
  maximová, 7  
  součtová, 7  
  supremová, 8  
  trojúhelníková nerovnost, 7  
Minimum  
  lokální, 70  
  ostré, 70  
Množina  
  1. kategorie, 19  
  2. kategorie, 19  
  hranice, 10  
  lineárně nezávislá, 4  
  lineární obal, 5  
  otevřená, 10  
  řídká, 19  
  uzávěr, 10  
  uzavřená, 10  
  vnějšek, 10  
  vnitřek, 10  
Multilineární zobrazení, 71  
Nerovnost  
  Besselova, 33  
  Cauchyho – Schwartzova – Buňakovského, 28  
Norma, 21  
  eukleidovská, 22  
  indukovaná, 27  
  maximová, 22  
  součtová, 22  
  supremová, 22  
Normovaný lineární prostor, 21  
Normy  
  ekvivalentní, 24  
Okolí  
  bodu, 10  
Omezená posloupnost, 56  
Operátor  
  kontraktivní, 11  
Ortogonální  
  prvky, 30  
  systém, 30  
Ortogonální projekce, 46  
Ortonormální  
  báze, 31, 34  
  systém, 30  
Ostré lokální maximum, 70  
Ostré lokální minimum, 70  
Otevřená množina, 10  
Parsevalova rovnost, 33  
Podmínka  
  Bolzanova – Cauchyho, 8  
Podmnožina  
  hustá, 26  
Podprostor  
  vektorový, 4  
Posloupnost  
  cauchyovská, 9  
  částečných součtů, 23  
  konvergentní, 8  
  omezená, 56  
Projekce  
  ortogonální, 46  
Prosté iterace, 13  
Prostor

- $\mathcal{L}(X, Y)$ , 43
- $L^2(\Omega)$ , 35
- Banachův, 21
- duální ( $X^*$ ), 44
- Hilbertův, 27
- metrický, 7
- normovaný lineární, 21
- reflexivní, 51
- se skalárním součinem, 27
- separabilní, 36
- Sobolevův, 74
- úplný, 9
- vektorový, 2
  - báze, 5
  - triviální, 3
  - zúplnění, 26
- Prostory
  - izometricky izomorfní, 23
  - izomorfní, 23
- Prvky
  - lineárně nezávislé, 4
  - lineárně závislé, 4
  - ortogonální, 30
- Reflexivní prostor, 51
- Rovnoběžníkové pravidlo, 29
- Rovnost
  - Parsevalova, 33
- Řada
  - Fourierova, 33
- Řešení okrajové úlohy
  - klasické, 73
  - slabé, 75
- Řídká množina, 19
- Separabilní prostor, 36
- Silná konvergence, 21
- Skalární součin, 27
- Slabá konvergence, 55
- Slabě koercivní funkcionál, 76
- Slabé řešení okrajové úlohy, 75
- Slabě zdola polospojité funkcionál, 77
- Sobolevův prostor, 74
- Spojité zobrazení, 41
- Systém
  - ortogonální, 30
  - ortonormální, 30
  - úplný, 38
- Úplný
  - ortonormální systém, 38
  - prostor, 9
- Uzávěr množiny, 10
- Uzavřená množina, 10
- Vektorový
  - podprostor, 4
  - prostor, 2
    - dimenze, 5
    - triviální, 3
- Věta
  - Baireova, 19
  - Banachova – Steinhausova, 59
  - Banachova o pevném bodě, 11
  - Brouwerova o pevném bodě, 18
  - Cantorova, 18
  - Cantorova o zúplnění, 26
  - Eberleinova – Šmuljanova, 58
  - Eulerova nutná podmínka existence
    - lokálního extrému, 70
  - Hahnova – Banachova, 52
  - Lagrangeova postačující podmínka
    - existence lokálního extrému, 72
  - nutná podmínka konvergence, 8
    - o aproximaci, 32
    - o derivaci složeného zobrazení, 68
    - o existenci slabého řešení, 75
    - o Fourierových řadách, 33
    - o slabé konvergenci, 56
    - o ortogonální projekci v  $H$ -prostoru, 46
    - o Cauchyho – Schwartzově – Buňakovského nerovnosti, 28
  - Picardova – Lindelöfova, 15
  - princip stejnoměrné omezenosti, 58
  - Pythagorova, 32
  - Rieszova – Fischerova, 38

- Rieszova o reprezentaci, 50
- rovnoběžníkové pravidlo, 29
- Schmidtův ortonormalizační proces,  
36
- Vnějšek množiny, 10
- Vnější bod, 10
- Vnitřek množiny, 10
- Vnitřní bod, 10
- Vnoření
  - kanonické, 51
- Zdola omezený funkcionál, 76
- Zobrazení
  - lineární, 23
  - omezené, 41
  - multilineární, 71
  - spojité, 41
- Zúplnění prostoru, 26