

Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava
Západočeská univerzita v Plzni



ÚVOD DO FUNKCIONÁLNÍ ANALÝZY



Jiří Bouchala



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Obsah

1. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



Jiří Bouchala
ÚVOD DO FUNKCIONÁLNÍ ANALÝZY

© Jiří Bouchala, 2012
ISBN

Obsah

2. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Předmluva

Výslednou podobu těchto skript ovlivnili mnozí z mých učitelů, kolegů i studentů. Všem jsem jim upřímně vděčný. Speciálně chci poděkovat svému synovi Ondřejovi, který mi pomohl s přepsáním rukopisu, a svému příteli Mgr. Petrovi Vodstrčilovi, Ph.D., který celý text pečlivě přečetl a svými připomínkami ho pomohl vylepšit.

Čtenářům budu vděčný za shovívavost a sdělení všech připomínek.¹

Další v rámci projektu *Matematika pro inženýry 21. století* připravované výukové materiály lze najít na stránkách <http://mi21.vsb.cz/>. Podívejte se na ně!

V Orlové, 2011

Jiří Bouchala

¹Všechny připomínky (výhrady, komentáře, doporučení, výhrůžky a dary) zasílejte (prosím) na moji e-mailovou adresu: jiri.bouchala@vsb.cz

Obsah

Předmluva	3
Prostory (nad $\mathbb{R}$)	6
1 Vektorový (lineární) prostor	7
2 Metrický prostor	15
3 Normovaný lineární prostor	39
4 Prostor se skalárním součinem	49
Operátory v NLP	71
5 Spojitá lineární zobrazení	72
6 Diferenciální počet v NLP	105
Literatura	135



Obsah

4. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno



Obsah

5. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

PROSTORY (nad $\mathbb{R}$)



Obsah

6. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



Kapitola 1

Vektorový (lineární) prostor

Obsah

7. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno



Definice 1.1. Vektorovým prostorem nazýváme každou **neprázdnou** množinu X , na níž jsou definovány operace

$$+ : X \times X \rightarrow X,$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$$

splňující následující podmínky:

- (1) $\forall x, y \in X : x + y = y + x$ (komutativita),
- (2) $\forall x, y, z \in X : (x + y) + z = x + (y + z)$ (asociativita vzhledem k „+“),
- (3) $(\exists 0 \in X) (\forall x \in X) : x + 0 = x$ (0 ... nulový prvek),
- (4) $(\forall x \in X) (\exists (-x) \in X) : x + (-x) = 0$ ((-x) ... prvek opačný k x),
- (5) $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}) (\forall x \in X) : \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ (asociativita vzhledem k „·“),
- (6) $\forall x \in X : 1 \cdot x = x$,
- (7) $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}) (\forall x, y \in X) : \begin{array}{l} \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \\ (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x \end{array}$ (distributivita).

Cvičení 1.2. Dokažte, že v každém vektorovém prostoru X platí:¹

- i) $(\exists! 0 \in X) (\forall x \in X) : x + 0 = x$,
- ii) $(\forall x \in X) (\exists! (-x) \in X) : x + (-x) = 0$,
- iii) $\forall x \in X : 0 \cdot x = 0, \forall \alpha \in \mathbb{R} : \alpha \cdot 0 = 0$,

¹Píšeme nepřiliš přesně *vektorový prostor* X místo přesnějšího *vektorový prostor* $(X, +, \cdot)$.

Obsah

8. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

$$\text{iv) } \forall x \in X : (-1) \cdot x = (-x),$$

$$\text{v) } \forall x, y, z \in X : [x + y = x + z \Rightarrow y = z],$$

$$\text{vi) } (\forall \alpha \in \mathbb{R}) (\forall x, y \in X) : [(\alpha x = \alpha y \wedge \alpha \neq 0) \Rightarrow x = y],$$

$$\text{vii) } (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}) (\forall x \in X) : [(\alpha x = \beta x \wedge x \neq 0) \Rightarrow \alpha = \beta].$$

Označení: $(-x) =: -x$; $x + (-y) =: x - y$.

Příklady 1.3.

$$1) X = \{1\},$$

$$1 + 1 := 1, \alpha \cdot 1 := 1 \ (\alpha \in \mathbb{R})$$

(X ... tzv. triviální vektorový prostor – obsahuje jediný (nulový) prvek).

$$2) X = \mathbb{R}^n \ (n \in \mathbb{N}),$$

$$x + y := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), \quad \alpha x := (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$$

$$\text{pro } x = (x_1, \dots, x_n), \ y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n; \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$3) X = C(\langle 0, 1 \rangle) := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ je spojitá na } Df = \langle 0, 1 \rangle\},$$

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \ (\alpha f)(x) := \alpha f(x)$$

$$\text{pro } f, g \in C(\langle 0, 1 \rangle); \ \alpha \in \mathbb{R}.$$



Obsah

9. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



4) $X = l^p$ ($p \geq 1$) ... množina všech reálných posloupností (x_n) takových,

$$\text{že } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty,^1$$

$$x + y := (x_n + y_n), \quad \alpha x := (\alpha x_n)$$

pro $x = (x_n), y = (y_n) \in l^p; \alpha \in \mathbb{R}$.

Poznámka a hezké cvičení: rozmyslete si, že platí

$$(\forall a, b \in \mathbb{R}) (\forall p > 0) : |a + b|^p \leq 2^p (|a|^p + |b|^p),$$

a proto

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \\ \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p < \infty \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p \leq 2^p \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p \right) < \infty.$$

5) $X = l^\infty$... množina všech reálných posloupností (x_n) takových, že $\sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty$,

$$x + y := (x_n + y_n), \quad \alpha x := (\alpha x_n)$$

pro $x = (x_n), y = (y_n) \in l^\infty; \alpha \in \mathbb{R}$.

¹Definujeme $0^p := 0$.

Obsah

10. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Cvičení 1.4. Najděte vektorový prostor o 2, 3 a 4 prvcích.

Definice 1.5. Buď X vektorový prostor a buď $Y \subset X$. Pokud je Y vzhledem k operacím „+“ a „·“ definovaným na X vektorovým prostorem, nazýváme Y vektorovým podprostorem X .

Cvičení 1.6. Dokažte, že v každém vektorovém prostoru X platí:

$\emptyset \neq Y \subset X$ je vektorovým podprostorem X právě tehdy, platí-li

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R}) (\forall x, y \in Y) : x + y \in Y, \alpha x \in Y.$$

Příklady 1.7.

- 1) $Y_1 := \{f \in C(\langle 0, 1 \rangle) : f(0) = 0\}$ je vektorovým podprostorem $C(\langle 0, 1 \rangle)$,
- 2) $Y_2 := \{f \in C(\langle 0, 1 \rangle) : f(0) = 1\}$ **není** vektorovým podprostorem $C(\langle 0, 1 \rangle)$.



Obsah

11. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



Definice 1.8. Buď X vektorový prostor.

- Řekneme, že prvky (vektory) $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ jsou lineárně nezávislé, jestliže

$$\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} : [\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0].^a$$

(V opačném případě nazýváme prvky $x_1, x_2, \dots, x_n$ lineárně závislé.)

- Řekneme, že množina $M \subset X$ je lineárně nezávislá, jestliže každá její konečná podmnožina je tvořena lineárně nezávislými prvky.

^aTzn. jestliže z rovnosti

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0$$

(kde $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$) plyne, že

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Definice 1.9. Dimenzí vektorového prostoru X rozumíme číslo

$$\dim X := \begin{cases} 0, & \text{je-li } X \text{ triviální vektorový prostor,} \\ n \in \mathbb{N}, & \text{je-li } n \text{ maximální počet lineárně nezávislých prvků v } X, \\ \infty, & \text{existuje-li pro každé } m \in \mathbb{N} \text{ } m \text{ lineárně nezávislých prvků v } X. \end{cases}$$

Obsah

12. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



Cvičení 1.10. Určete dimenzi těchto vektorových prostorů:

- 1) $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$),
- 2) $C(\langle 0, 1 \rangle)$,
- 3) l^p ($p \geq 1$),
- 4) $Y_1 := \{f \in C(\langle 0, 1 \rangle) : f(0) = 0\}$,
- 5) $Y := \{f \in C(\langle 0, 1 \rangle) : f'' \in C(\langle 0, 1 \rangle) \wedge f'' + f = 0\}$,
- 6) $Y_1 \cap Y$,
- 7) $\{f \in Y : f(0) = f(1) = 0\}$.

Definice 1.11. Buď X vektorový prostor a $\emptyset \neq M \subset X$.

Množinu

$$\text{Lin } M := \{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n : n \in \mathbb{N}; \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}; x_1, \dots, x_n \in M\}$$

nazýváme lineárním obalem množiny M . Navíc definujeme

$$\text{Lin } \emptyset := \{0\} \subset X.$$

Cvičení 1.12. Dokažte (za situace z předchozí definice), že

- i) $\text{Lin } M$ je vektorovým podprostorem X ,
- ii) $\text{Lin } M$ je průnikem všech vektorových podprostorů X obsahujících M (tj. $\text{Lin } M$ je nejmenším vektorovým podprostorem X obsahujícím M).

Obsah

13. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Definice 1.13. Buď X vektorový prostor. Řekneme, že (konečná!) množina

$$M = \{x_1, \dots, x_n\} \subset X$$

je bází vektorového prostoru X , platí-li současně:

- (1) množina M je lineárně nezávislá,
- (2) $\text{Lin } M = X$.

Cvičení 1.14. Buď X vektorový prostor a $n \in \mathbb{N}$.

Dokažte, že platí:

$$X \text{ má bázi o } n \text{ prvcích} \Leftrightarrow \dim X = n.$$



Obsah

14. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno



Kapitola 2

Metrický prostor

Definice 2.1. Metrickým prostorem nazýváme každou neprázdnou množinu X , na níž je definováno zobrazení (tzv. metrika)

$$\varrho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

splňující podmínky:

- (1) $\forall x, y \in X : \varrho(x, y) \geq 0, \varrho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (... nezápornost);
- (2) $\forall x, y \in X : \varrho(x, y) = \varrho(y, x)$ (... symetrie);
- (3) $\forall x, y, z \in X : \varrho(x, y) + \varrho(y, z) \geq \varrho(x, z)$ (... trojúhelníková nerovnost).

Obsah

15. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Příklady 2.2.

$$1) X = \mathbb{R}^n \ (n \in \mathbb{N}),$$

$$\varrho(x, y) := \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2} \ (\dots \text{eukleidovská metrika})$$

$$\text{pro } x = (x_1, \dots, x_n), \ y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

$$2) X = \mathbb{R}^n,$$

$$\varrho(x, y) := \max\{|y_1 - x_1|, \dots, |y_n - x_n|\} \ (\dots \text{maximová metrika}).$$

$$3) X = \mathbb{R}^n,$$

$$\varrho(x, y) := |y_1 - x_1| + \dots + |y_n - x_n| \ (\dots \text{součtová metrika}).$$

$$4) X = \mathbb{R}^n,$$

$$\varrho(x, y) := \begin{cases} \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}, & \text{existuje-li } \lambda \in \mathbb{R} \text{ takové, že} \\ & x = \lambda y := (\lambda y_1, \dots, \lambda y_n) \\ & \text{nebo } y = \lambda x := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n), \\ \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} + \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2} & \text{v ostatních případech} \end{cases}$$

(... „pampelišková“ metrika).



Obsah

16. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

5) $\emptyset \neq X$... libovolná množina,

$$\varrho(x, y) := \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y \end{cases}$$

(... diskrétní metrika).

6) $X = C(\langle 0, 1 \rangle)$,

$$\varrho(x, y) := \sup_{t \in \langle 0, 1 \rangle} |x(t) - y(t)| = \max_{t \in \langle 0, 1 \rangle} |x(t) - y(t)| \quad (\dots \text{supremová metrika})$$

pro $x, y \in C(\langle 0, 1 \rangle)$.

7) $X = C(\langle 0, 1 \rangle)$,

$$\varrho(x, y) := \sqrt{\int_0^1 (x(t) - y(t))^2 dt} \quad (\dots \text{L}^2 \text{ metrika}).$$

Definice 2.3. Buď (x_n) posloupnost v metrickém prostoru X a buď $x \in X$. Řekneme, že posloupnost (x_n) má limitu x a píšeme $x_n \rightarrow x$, platí-li

$$\varrho(x_n, x) \rightarrow 0.$$



Obsah

17. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

**Věta 2.4 (nutná podmínka konvergence).**

Nechť (x_n) je konvergentní posloupnost v metrickém prostoru X (tzn. že existuje $x \in X$, pro které $x_n \rightarrow x$). Potom platí tzv. Bolzanova – Cauchyho podmínka:

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n, m \in \mathbb{N}; n, m \geq n_0) : \varrho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Důkaz je vhodným cvičením.

Definice 2.5. Posloupnost (x_n) (v metrickém prostoru X), pro niž platí Bolzanova – Cauchyho podmínka, se nazývá cauchyovská.

Definice 2.6. Metrický prostor X se nazývá úplný, je-li v něm **každá** cauchyovská posloupnost konvergentní.

Cvičení 2.7. Pokuste se dokázat následující tvrzení.

- 1) $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) s eukleidovskou metrikou je úplný metrický prostor.
- 2) Prostor $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ s metrikou $\varrho(x, y) := |x - y|$ není úplný.
(Posloupnost $(\frac{1}{n})$ je cauchyovská, ale nemá v $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ limitu.)
- 3) $C([0, 1])$ se supremovou metrikou je úplný metrický prostor.

Obsah

18. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

4) $C(\langle 0, 1 \rangle)$ s L^2 metrikou není úplný.

(Posloupnost (f_n) , kde

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle, \\ 1 + n - 2nx & \text{pro } x \in (\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}), \\ 0 & \text{pro } x \in \langle \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}, 1 \rangle, \end{cases}$$

je cauchyovská, ale nemá v $C(\langle 0, 1 \rangle)$ limitu.¹⁾

Cvičení 2.8. Definujme pro každé $n \in \mathbb{N}$ funkce f_n a g_n na $\langle 0, 1 \rangle$ předpisy:

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 - 2nx, & x \in \langle 0, \frac{1}{2n} \rangle, \\ 0, & x \in (\frac{1}{2n}, 1), \end{cases} \quad g_n(x) := \frac{x(x - 2n)}{1 - 2n}.$$

Zjistěte, zda je posloupnost (f_n) , resp. (g_n) , cauchyovská a zda má limitu v prostoru

1) $C(\langle 0, 1 \rangle)$ se supremovou metrikou,

2) $C(\langle 0, 1 \rangle)$ s L^2 metrikou.

¹⁾ Nakreslete si obrázek s grafy funkcí $f_1, f_2, \dots$.



Obsah

19. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



Definice 2.9. Buď X metrický prostor s metrikou ϱ , $x \in X$ a $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Množinu

$$U(x, \varepsilon) := \{y \in X : \varrho(x, y) < \varepsilon\}$$

nazýváme ε -okolím bodu x .

(Nezáleží-li nám na „poloměru“ ε , píšeme krátce $U(x)$ a mluvíme o okolí bodu x .)

Definice 2.10. Buď X metrický prostor a $M \subset X$. Bod $x \in X$ nazveme

- vnitřním bodem M , existuje-li okolí $U(x)$ takové, že $U(x) \subset M$;
- vnějším bodem M , existuje-li okolí $U(x)$ takové, že $U(x) \cap M = \emptyset$;
- hraničním bodem M , není-li ani vnitřním ani vnějším bodem M ;
- izolovaným bodem M , existuje-li okolí $U(x)$ takové, že $U(x) \cap M = \{x\}$;
- hromadným bodem M , jestliže v každém jeho okolí leží nekonečně mnoho bodů množiny M .

Navíc značme:

- $\text{int } M$... množinu všech vnitřních bodů M (tzv. vnitřek M);
- $\text{ext } M$... množinu všech vnějších bodů M (tzv. vnějšek M);
- ∂M ... množinu všech hraničních bodů M (tzv. hranice M);
- $\overline{M} := M \cup \partial M$... tzv. uzávěr M .

Obsah

20. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



Definice 2.11. Množinu $M \subset X$, kde X je metrický prostor, nazveme

- otevřenou (v X), jestliže $M = \text{int } M$;
- uzavřenou (v X), je-li její doplněk, tj. množina $X \setminus M$, otevřená množina.

Cvičení 2.12. Buď $M \subset X$. Dokažte následující tvrzení:

i)

$$M \text{ je otevřená množina} \Leftrightarrow \left[(\forall x \in M) (\exists U(x)) : U(x) \subset M \right] \Leftrightarrow M \cap \partial M = \emptyset;$$

ii)

$$\begin{aligned} M \text{ je uzavřená množina} &\Leftrightarrow M = \overline{M} \Leftrightarrow \partial M \subset M \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left[\left((\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in M) \wedge (x_n \rightarrow x \in X) \right) \Rightarrow x \in M \right]; \end{aligned}$$

iii)

$$\overline{M} = \bigcap_{\substack{M \subset K \subset X \\ K \text{ je uzavřená}}} K = \{x \in X : \text{exist. posl. } (x_n) \text{ v } M \text{ taková, že } x_n \rightarrow x\};$$

iv)

$$x \in X \text{ je hromadným bodem } M \Leftrightarrow \text{exist. posl. } (x_n) \text{ v } M \setminus \{x\} \text{ taková, že } x_n \rightarrow x.$$

Obsah

21. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Cvičení 2.13. Dokažte, že v každém metrickém prostoru X platí následující tvrzení týkající se otevřených množin:

- $\emptyset$ a X jsou otevřené množiny,
- (libovolné) sjednocení otevřených množin je otevřená množina,
- průnik **konečně mnoha** otevřených množin je otevřená množina;

i „symetrická“ tvrzení týkající se množin uzavřených:

- $\emptyset$ a X jsou uzavřené množiny,
- (libovolný) průnik uzavřených množin je uzavřená množina,
- sjednocení **konečně mnoha** uzavřených množin je uzavřená množina.

Definice 2.14. Buď X metrický prostor s metrikou ϱ . Řekneme, že operátor (zobrazení)

$$T : X \rightarrow X$$

je kontraktivní na X , existuje-li $q \in \langle 0, 1 \rangle$ takové, že

$$\forall x, y \in X : \varrho(T(x), T(y)) \leq q\varrho(x, y).$$



Obsah

22. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Věta 2.15 (Banachova o pevném bodě).*Bud'*

- X úplný metrický prostor,
- $T: X \rightarrow X$ kontraktivní.

Potom

$$\exists! x \in X : T(x) = x.$$

(Prvek $x \in X$, pro který platí $T(x) = x$, nazýváme pevným bodem zobrazení T .)

Důkaz.

- 1) Existence. Nejdříve zvolme (a to libovolně) $x_0 \in X$ a definujme rekurentně posloupnost (x_n) v X :

$$\forall n \in \mathbb{N} : x_n := T(x_{n-1}) \stackrel{\text{ozn.}}{=} Tx_{n-1}.$$

Protože T je kontraktivní, platí pro každé $n \in \mathbb{N}$, že

$$\begin{aligned} \varrho(x_n, x_{n-1}) &= \varrho(Tx_{n-1}, Tx_{n-2}) \leq q\varrho(x_{n-1}, x_{n-2}) = q\varrho(Tx_{n-2}, Tx_{n-3}) \leq \\ &\leq q^2\varrho(x_{n-2}, x_{n-3}) \leq \dots \leq q^{n-1}\varrho(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Pomocí těchto odhadů (a trojúhelníkové nerovnosti) snadno ověříme, že



Obsah

23. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

pro každé $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$, je

$$\begin{aligned}\varrho(x_n, x_m) &\leq \varrho(x_n, x_{n-1}) + \varrho(x_{n-1}, x_{n-2}) + \dots + \varrho(x_{m+1}, x_m) \leq \\ &\leq (q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q^m) \varrho(x_1, x_0) \leq \\ &\leq (q^m + \dots + q^{n-2} + q^{n-1} + \dots) \varrho(x_1, x_0) = \frac{q^m}{1-q} \varrho(x_1, x_0).\end{aligned}$$

Odtud, protože

$$\frac{q^m}{1-q} \varrho(x_1, x_0) \rightarrow 0 \text{ pro } m \rightarrow \infty,$$

vyplývá, že posloupnost (x_n) je cauchyovská. Existuje proto $(X$ je úplný metrický prostor) $x \in X$ takové, že $x_n \rightarrow x$. Skutečnost, že x je hledaným pevným bodem T , tj. že $Tx = x$, je přímým důsledkem pozorování:

- $0 \leq \varrho(Tx_n, Tx) \leq \underbrace{q \varrho(x_n, x)}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0 \Rightarrow \underline{Tx_n \rightarrow Tx};$
- $x_n \rightarrow x \Rightarrow x_{n+1} = \underline{Tx_n \rightarrow x}.$

2) Jednoznačnost. Předpokládejme, že pro $x, y \in X$ je

$$x = Tx, \quad y = Ty.$$

Pak, protože T je kontraktivní, platí

$$\varrho(x, y) = \varrho(Tx, Ty) \leq q\varrho(x, y),$$



Obsah

24. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

kde $q \in \langle 0, 1 \rangle$, a proto $\varrho(x, y) = 0$, neboli

$$x = y.$$

□

Pozorování 2.16. Všimněme si, že uvedený důkaz obsahuje návod (mluvíme někdy o metodě prosté iterace), jak pevný bod najít, a udává i chybu, jíž se při jeho aproximaci dopouštíme:

- zvolíme libovolně bod $x_0 \in X$ (tzv. nultou aproximaci),
- sestrojíme posloupnost (x_n) :

$$x_1 = Tx_0, \quad x_2 = Tx_1, \quad x_3 = Tx_2, \quad \dots, \quad x_n = Tx_{n-1}, \quad \dots$$

Pak (x_n) konverguje k hledanému pevnému bodu x a platí:¹

$$\forall n \in \mathbb{N} : \varrho(x_n, x) \leq \frac{q^n}{1 - q} \varrho(x_1, x_0).$$

¹Rozmyslete si podrobně proč!



Obsah

25. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Příklad 2.17. Uvažujme okrajovou úlohu

$$\begin{cases} -u''(x) + g(u(x)) = f(x) \text{ pro } x \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

kde $f \in C(\langle 0, 1 \rangle)$ a funkce $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je lipschitzovsky spojitá na $\mathbb{R}$, tzn. že

$$(\exists q \geq 0) (\forall t, s \in \mathbb{R}) : |g(t) - g(s)| \leq q|t - s|.$$

Buď nyní $v \in C(\langle 0, 1 \rangle)$ libovolná (pevně zvolená) funkce a hledejme funkci $u \in C^2(\langle 0, 1 \rangle)$, která řeší lineární okrajovou úlohu

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) - g(v(x)) \text{ pro } x \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Snadno(?) se lze přesvědčit,¹ že jediným řešením je funkce

$$u(x) := \int_0^1 K(x, t) (f(t) - g(v(t))) dt, \quad (2.3)$$

kde

$$K(x, t) := \begin{cases} (1-x)t & \text{pro } 0 \leq t \leq x \leq 1, \\ x(1-t) & \text{pro } 0 \leq x < t \leq 1. \end{cases}$$

¹Udělejte to!



Obsah

26. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Definujeme nyní operátor

$$T : C(\langle 0, 1 \rangle) \rightarrow C(\langle 0, 1 \rangle)$$

předpisem

$$(Tv)(x) := \int_0^1 K(x, t) (f(t) - g(v(t))) dt, \quad (2.4)$$

tzn. (viz (2.2), (2.3) a (2.4)) že

$$\begin{cases} -(Tv)''(x) = f(x) - g(v(x)) \text{ pro } x \in (0, 1), \\ (Tv)(0) = (Tv)(1) = 0. \end{cases}$$

Najít řešení naší úlohy (2.1) tedy znamená najít pevný bod operátoru T , tj. funkci $u \in C(\langle 0, 1 \rangle)$ takovou, že $Tu = u$.

Už víme, že $C(\langle 0, 1 \rangle)$ se supremovou metrikou je úplný metrický prostor. Najdeme-li podmínky, za nichž je operátor T **kontraktivní**, najdeme podmínky zaručující existenci právě jednoho řešení úlohy (2.1) (viz Banachovu větu o pevném bodě 2.15).

Potřebujeme odhadnout

$$\varrho(Tu, Tv) = \sup_{x \in \langle 0, 1 \rangle} |(Tu)(x) - (Tv)(x)|.$$



Obsah

27. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Protože pro každé $x \in \langle 0, 1 \rangle$ platí

$$\begin{aligned} |(Tu)(x) - (Tv)(x)| &= \left| \int_0^1 K(x, t) (g(v(t)) - g(u(t))) dt \right| \leq \\ &\leq \int_0^1 \underbrace{|K(x, t)|}_{\leq 1} \cdot \underbrace{|g(v(t)) - g(u(t))|}_{\leq q |v(t) - u(t)|} dt \leq q \int_0^1 |v(t) - u(t)| dt \leq \\ &\leq q \int_0^1 \sup_{x \in \langle 0, 1 \rangle} |v(x) - u(x)| dt = q \varrho(v, u), \end{aligned}$$

je

$$\varrho(Tu, Tv) \leq q\varrho(u, v).$$

Zjistili jsme: je-li konstanta q charakterizující lipchitzovskou spojitost funkce g menší než 1, je T kontraktivní operátor, a proto existuje právě jedno řešení okrajové úlohy (2.1).

Závěr – podařilo se nám dokázat následující tvrzení:

Je-li

- g lipschitzovsky spojitá na $\mathbb{R}$ s konstantou $q \in \langle 0, 1 \rangle$,
- $f \in C(\langle 0, 1 \rangle)$,



Obsah

28. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



existuje v $C(\langle 0, 1 \rangle)$ právě jedno řešení úlohy

$$\begin{cases} -u''(x) + g(u(x)) = f(x) \text{ pro } x \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Ukažme si konstrukci posloupnosti postupných aproximací (viz metodu prosté iterace 2.16):

- $u_0 \in C(\langle 0, 1 \rangle)$... libovolná funkce,
- $u_1 = Tu_0$... řešení lineární úlohy

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) - g(u_0(x)) \text{ v } (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

- $u_2 = Tu_1$... řešení lineární úlohy

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) - g(u_1(x)) \text{ v } (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

$\vdots$

Obsah

29. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

- $u_{n+1} = Tu_n$... řešení lineární úlohy

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) - g(u_n(x)) & \text{v } (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0, \\ \vdots \end{cases}$$

Vlastně místo řešení **nelineární** okrajové úlohy (2.1) hledáme posloupnost řešení **lineárních** okrajových úloh typu

$$\begin{cases} -u''(x) = F(x) & \text{v } (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

[Obsah](#)[30. strana ze 142](#)[Zavřít dokument](#)[Celá obrazovka/Okno](#)

Příklad 2.18. Dokažme pomocí Banachovy věty o pevném bodě Picardovu – Lindelöfovou větu:

Bud'

- $f, \frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ spojité na množině

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq a \wedge |y - y_0| \leq b\},$$

kde $x_0, y_0 \in \mathbb{R}; a, b \in \mathbb{R}^+$;

- $M = \max_{(x,y) \in D} |f(x, y)|, L = \max_{(x,y) \in D} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right|;$
- $h \in \mathbb{R}^+$ takové, že $h \leq a, hM \leq b, hL < 1$.

Pak existuje právě jedno řešení Cauchyovy úlohy

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

na intervalu $(x_0 - h, x_0 + h)$.

Důkaz. Předně si uvědomme, že daná Cauchyova úloha je ekvivalentní s integrální rovnicí

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt.$$



Obsah

31. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Nyní uvažujme metrický prostor $C(\langle x_0 - h, x_0 + h \rangle)$ se supremovou metrikou

$$\varrho(y_1, y_2) := \sup_{x \in \langle x_0 - h, x_0 + h \rangle} |y_1(x) - y_2(x)|$$

a definujeme

$$X = \{y \in C(\langle x_0 - h, x_0 + h \rangle) : |y(x) - y_0| \leq b \text{ pro každé } x \in \langle x_0 - h, x_0 + h \rangle\}.$$

Prostor X s indukovanou metrikou

$$\varrho = \varrho|_X$$

je zřejmě úplný metrický prostor (X je uzavřenou podmnožinou úplného metrického prostoru $C(\langle x_0 - h, x_0 + h \rangle)$).

Teď definujeme operátor

$$T : X \rightarrow C(\langle x_0 - h, x_0 + h \rangle)$$

předpisem

$$(Ty)(x) := y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt.$$

Zbývá dokázat (viz Banachovu větu o pevném bodě 2.15), že

(i) $\forall y \in X : Ty \in X$ (tj. $T : X \rightarrow X$),

(ii) $T : X \rightarrow X$ je kontraktivní.



Obsah

32. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Ad (i). Buď $y \in X$. Pak pro každé $x \in \langle x_0 - h, x_0 + h \rangle$ platí

$$|(Ty)(x) - y_0| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, y(t))| dt \right| \leq M|x - x_0| \leq Mh \leq b,$$

a proto $Ty \in X$.

Ad (ii). $(\forall y_1, y_2 \in X) (\forall x \in \langle x_0 - h, x_0 + h \rangle) :$

$$\begin{aligned} |(Ty_1)(x) - (Ty_2)(x)| &= \left| \int_{x_0}^x f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t)) dt \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x L |y_1(t) - y_2(t)| dt \right| \leq Lh \varrho(y_1, y_2), \end{aligned}$$

a proto

$$\varrho(Ty_1, Ty_2) \leq q \varrho(y_1, y_2),$$

kde $q := hL < 1$. □

Varovné příklady 2.19. Uvažujme $\mathbb{R}$ s eukleidovskou metrikou $\varrho(x, y) := |x - y|$ a rozmysleme si podrobně následující tvrzení.

1) Pro funkci $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$T(x) := x + 1$$

platí

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \varrho(Tx, Ty) = |x - y| = 1 \cdot \varrho(x, y),$$

ale T nemá pevný bod (tj. neexistuje $x \in \mathbb{R}$ takové, aby $T(x) = x$).



Obsah

33. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

2) Pro funkci $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$T(x) := \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ x + e^{-x}, & x > 0, \end{cases}$$

platí

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \varrho(Tx, Ty) = |Tx - Ty| < |x - y| = \varrho(x, y),$$

a přesto **neexistuje** pevný bod funkce T .

Cvičení 2.20. Ukažte, že z Banachovy věty 2.15 o pevném bodě plyne tvrzení:

$$\left. \begin{array}{l} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \\ (\exists q < 1) (\forall x \in \mathbb{R}) : |f'(x)| \leq q \end{array} \right\} \Rightarrow \exists! x \in \mathbb{R} : f(x) = x.$$

(Dokažte tvrzení i přímo – bez Banachovy věty.)

Cvičení 2.21. Dokažte tuto speciální verzi Brouwerovy věty o pevném bodě:

$$\left. \begin{array}{l} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ je spojitá na intervalu } \langle a, b \rangle, \\ \forall x \in \langle a, b \rangle : f(x) \in \langle a, b \rangle, \\ (a, b \in \mathbb{R}, a < b) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists x \in \langle a, b \rangle : f(x) = x$$

a všimněte si, že důsledkem je tvrzení:



Obsah

34. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

$$\left. \begin{array}{l} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \\ \forall x \in \langle a, b \rangle : f(x) \in \langle a, b \rangle, \\ \forall x, y \in \langle a, b \rangle : |f(x) - f(y)| \leq |x - y|, \\ (a, b \in \mathbb{R}, a < b) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists x \in \langle a, b \rangle : f(x) = x,$$

a porovnejte ho s příkladem 2.19.

Věta 2.22 (Cantorova).

Nechť

- X je úplný metrický prostor,
- (M_n) je nerostoucí posloupnost neprázdných uzavřených množin v X , tzn.

$$\forall n \in \mathbb{N} : \emptyset \neq M_{n+1} \subset M_n = \overline{M_n} \subset X,$$

- $\text{diam } M_n := \sup_{x, y \in M_n} \varrho(x, y) \rightarrow 0$.

Potom $\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$ je jednobodový, tzn.

$$\exists x \in X : \{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n.$$



Obsah

35. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Důkaz Cantorovy věty ponechme jako užitečné cvičení čtenářům.

(Nápověda: zvolte pro každé $n \in \mathbb{N}$ libovolně $x_n \in M_n$ a ukažte, že posloupnost (x_n) je cauchyovská (a proto konvergentní) v X a že její limita $x \in X$ je právě oním hledaným jediným prvkem průniku $\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$.)

Definice 2.23. Buď X metrický prostor. Řekneme, že množina $M \subset X$ je

- řídká, je-li $\text{int } \overline{M} = \emptyset$;
- 1. kategorie, je-li sjednocením spočetně mnoha řídkých množin, tzn.

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n, \text{ kde pro každé } n \in \mathbb{N} \text{ je } \text{int } \overline{M_n} = \emptyset;$$

- 2. kategorie, jestliže není 1. kategorie.

Příklady 2.24. Uvažujme metrický prostor $\mathbb{R}$ s metrikou

$$\varrho(x, y) := |x - y|.$$

Pak

- 1) každá konečná podmnožina $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}$ je řídká,
- 2) množina $\mathbb{N}$ je řídká,



Obsah

36. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

3) množina $\mathbb{Q}$ není řídká,

4) každá (nejvýše) spočetná podmnožina $\mathbb{R}$ je 1. kategorie (speciálně $\mathbb{Q}$ je 1. kategorie).

Věta 2.25 (Baireova). *Nechť X je úplný metrický prostor. Pak každá neprázdная otevřená podmnožina X je 2. kategorie. Speciálně: X je 2. kategorie.*

Důkaz. Předpokládejme sporem, že

$$\emptyset \neq U \subset X \text{ je otevřená množina} \quad (2.5)$$

a že

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n, \text{ kde pro každé } n \in \mathbb{N} \text{ je } \text{int } \overline{M_n} = \emptyset. \quad (2.6)$$

Díky (2.5) existuje $a \in U$ a číslo $r > 0$ takové, že

$$U(a, r) := \{x \in X : \varrho(x, a) < r\} \subset \overline{U(a, r)} \subset \{x \in X : \varrho(x, a) \leq r\} \subset U.$$

Z předpokladu $\text{int } \overline{M_1} = \emptyset$ plyne, že existuje bod $a_1 \in U(a, r)$ takový, že

$$\text{dist}(a_1, \overline{M_1}) := \inf_{x \in \overline{M_1}} \varrho(a_1, x) > 0$$

(to si rozmyslete podrobně!), a proto i kladné číslo r_1 takové, že

$$\overline{U(a_1, r_1)} \cap \overline{M_1} = \emptyset, \quad \overline{U(a_1, r_1)} \subset \overline{U(a, r)}, \quad 0 < r_1 < \frac{r}{2}.$$



Obsah

37. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

A dál postupujme analogicky: z předpokladu $\text{int } \overline{M_2} = \emptyset$ vyplývá, že existuje bod $a_2 \in U(a_1, r_1)$ a číslo r_2 tak, že

$$\overline{U(a_2, r_2)} \cap \overline{M_2} = \emptyset, \quad \overline{U(a_2, r_2)} \subset \overline{U(a_1, r_1)}, \quad 0 < r_2 < \frac{r_1}{2}.$$

...

Tímto způsobem lze sestavit posloupnost neprázdných uzavřených množin $(\overline{U(a_n, r_n)})$, pro které platí:

$$\begin{aligned} U \supset \overline{U(a, r)} \supset \overline{U(a_1, r_1)} \supset \overline{U(a_2, r_2)} \supset \dots, \\ \forall n \in \mathbb{N} : \overline{U(a_n, r_n)} \cap \overline{M_n} = \emptyset, \\ \text{diam } \overline{U(a_n, r_n)} \leq 2r_n \rightarrow 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Z Cantorovy věty 2.22 vyplývá

$$\exists x \in X : \{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U(a_n, r_n)} \subset U.$$

Jenže: pro toto x má současně platit

$$x \in U = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \text{ (viz (2.6)),}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : x \notin \overline{M_n} \text{ (viz (2.7)).}$$

A to je spor.

□



Obsah

38. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



Kapitola 3

Normovaný lineární prostor

Definice 3.1. Normovaným lineárním prostorem nazýváme každý vektorový prostor $X = (X, +, \cdot)$, na němž je definováno zobrazení (tzv. norma)

$$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$$

splňující podmínky:

- (1) $\forall x \in X : \|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- (2) $(\forall x \in X) (\forall \alpha \in \mathbb{R}) : \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$;
- (3) $\forall x, y \in X : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Obsah

39. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Je snadné nahlédnout: je-li X NLP,¹ je zobrazení $\varrho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ definované předpisem

$$\varrho(x, y) := \|x - y\|$$

metrikou na X . Máme tedy definovanou (tzv. silnou) konvergenci:

$$\begin{aligned} (x_n) \dots \text{posloupnost v NLP } X, x \in X \\ x_n \rightarrow x \Leftrightarrow \varrho(x_n, x) = \|x_n - x\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Definice 3.2. Normovaný lineární prostor X se nazývá Banachův, jestliže je úplný (vzhledem k indukované metrice $\varrho(x, y) := \|x - y\|$).

Příklady 3.3. Uvažujme vektorové prostory definované v příkladech 1.3 a opatřme je normou.

1) $X = \{1\}$, $\|1\| := 0$ je Banachův prostor.

2) $X = \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) s eukleidovskou normou

$$\|x\| = \|(x_1, \dots, x_n)\| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

je Banachův prostor.

¹Tuto zkratku asi nemusíme vysvětlovat.



Obsah

40. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

- 3) $X = \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) s maximovou normou

$$\|x\| = \|(x_1, \dots, x_n)\| := \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$$

je Banachův prostor.

- 4) $X = \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) se součtovou normou

$$\|x\| = \|(x_1, \dots, x_n)\| := |x_1| + \dots + |x_n|$$

je Banachův prostor.

- 5) $X = C(\langle 0, 1 \rangle)$ se supremovou normou

$$\|f\| := \sup_{x \in \langle 0, 1 \rangle} |f(x)| = \max_{x \in \langle 0, 1 \rangle} |f(x)|$$

pro $f \in C(\langle 0, 1 \rangle)$ je Banachův prostor.

- 6) $X = C(\langle 0, 1 \rangle)$ s L^p normou ($1 \leq p < \infty$)

$$\|f\| := \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

není Banachův prostor (ale je to NLP).

- 7) $X = l^p$ ($1 \leq p < \infty$) s normou

$$\|x\| = \|(x_n)\| := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$



Obsah

41. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

je Banachův prostor.

8) $X = l^\infty$ s normou

$$\|x\| = \|(x_n)\| := \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$$

je Banachův prostor.

Věta 3.4. *Bud' (x_n) posloupnost v Banachově prostoru X . Pak platí implikace*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty \Rightarrow \text{existuje } \lim_{n \rightarrow \infty} (x_1 + \dots + x_n) \stackrel{\text{ozn.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} x_n \in X.$$

Důkaz. Definujme tzv. posloupnost částečných součtů (s_n) předpisem

$$s_n := x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

Pak pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ takové, že $m > n$, platí

$$\|s_m - s_n\| = \|x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_m\| \leq \|x_{n+1}\| + \dots + \|x_m\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|x_k\|.$$

Odtud, protože z předpokladu $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$ plyne $\sum_{k=n+1}^{\infty} \|x_k\| \rightarrow 0$ pro $n \rightarrow \infty$, snadno odvodíme, že posloupnost (s_n) je cauchyovská (v úplném prostoru X), a tudíž konvergentní. $\square$



Obsah

42. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Cvičení 3.5. Dokažte, že v každém NLP X je norma spojitým funkcioálem, tzn. že platí implikace

$$x_n \rightarrow x \Rightarrow \|x_n\| \rightarrow \|x\|.$$

Definice 3.6. Dva normované lineární prostory X a Y se nazývají izomorfními, existuje-li zobrazení (tzv. izomorfismus)

$$L : X \rightarrow Y$$

takové, že

(1) L je lineární

$$(\text{tzn. } (\forall x, y \in X) (\forall \alpha \in \mathbb{R}) : L(x + y) = Lx + Ly, L(\alpha x) = \alpha Lx),$$

(2) L je vzájemně jednoznačné (tzn. prosté a na);

$$(3) (\exists k, K \in \mathbb{R}^+) (\forall x \in X) : k \|x\|_X \leq \|Lx\|_Y \leq K \|x\|_X.$$

Platí-li navíc, že $k = K = 1$, nazýváme prostory X a Y izometricky izomorfními a zobrazení L izometrickým izomorfismem X na Y .

Definice 3.7. Dvě normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ na vektorovém prostoru X se nazývají ekvivalentními, existují-li konstanty $k, K \in \mathbb{R}^+$ takové, že

$$\forall x \in X : k \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq K \|x\|_1.$$



Obsah

43. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Pozorování 3.8. Jsou-li normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ ekvivalentní na X , platí ekvivalence

$$\|x_n - x\|_1 \rightarrow 0 \Leftrightarrow \|x_n - x\|_2 \rightarrow 0,$$

tzn.

$$\begin{array}{ccc} x_n \rightarrow x & \Leftrightarrow & x_n \rightarrow x. \\ \text{(vzhledem k } \|\cdot\|_1) & & \text{(vzhledem k } \|\cdot\|_2) \end{array}$$

Věta 3.9. *Nechť*

- X je NLP,
- $\dim X = n \in \mathbb{N}$.

Pak X je izomorfní s $\mathbb{R}^n$ (s eukleidovskou normou).

Důkaz. Buď $\{x_1, \dots, x_n\}$ nějaká báze X (viz 1.14).

Definujeme zobrazení $L: \mathbb{R}^n \rightarrow X$ předpisem

$$L\alpha = L(\alpha_1, \dots, \alpha_n) := \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i.$$

Ukážeme, že L je izomorfismus.

- L je zřejmě lineární.



Obsah

44. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

- L je prosté a na (to plyne – a rozmyslete si podrobně jak – z definice báze 1.13).
- $\forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \|L\alpha\| &= \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n \|\alpha_i x_i\| = \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \cdot \|x_i\| \leq \max\{\|x_1\|, \dots, \|x_n\|\} \cdot \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \leq \\ &\leq \max\{\|x_1\|, \dots, \|x_n\|\} \cdot \sum_{i=1}^n \|\alpha\| = \underbrace{\max\{\|x_1\|, \dots, \|x_n\|\} \cdot n}_{=:K} \cdot \|\alpha\| = K\|\alpha\|. \end{aligned}$$

Dokázali jsme, že

$$(\exists K \in \mathbb{R}^+) (\forall \alpha \in \mathbb{R}^n) : \|L\alpha\| \leq K\|\alpha\|. \quad (3.1)$$

Zbývá nám dokázat:

$$(\exists k \in \mathbb{R}^+) (\forall \alpha \in \mathbb{R}^n) : k\|\alpha\| \leq \|L\alpha\|.$$

Uvažujme nyní funkci $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$f(\alpha) := \|L\alpha\|.$$

Funkce f je zřejmě spojitá.¹

$$\begin{aligned} \underline{\alpha_m \rightarrow \alpha} &\Rightarrow \|\alpha_m - \alpha\| \rightarrow 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \|L\alpha_m - L\alpha\| = \|L(\alpha_m - \alpha)\| \leq K\|\alpha_m - \alpha\| \rightarrow 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow L\alpha_m \rightarrow L\alpha \Rightarrow \|L\alpha_m\| \rightarrow \|L\alpha\| \Rightarrow \underline{f(\alpha_m) \rightarrow f(\alpha)}, \end{aligned}$$

¹Rozmyslete si – s pomocí (3.1) a 3.5 – každou z následujících implikací!



Obsah

45. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

a proto existuje (viz Weierstrassovu větu)¹

$$\min \{f(\xi) : \|\xi\| = 1\}.$$

Protože L je prosté a $L(0) = 0$, je $f > 0$ na množině $\{\xi \in \mathbb{R}^n : \|\xi\| = 1\}$, a tudíž

$$k := \min \{f(\xi) : \|\xi\| = 1\} > 0.$$

Odtud již snadno plyne

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\} : \|L\alpha\| = \|\alpha\| \cdot \left\| L \left(\frac{\alpha}{\|\alpha\|} \right) \right\| = \|\alpha\| \cdot f \left(\frac{\alpha}{\|\alpha\|} \right) \geq k\|\alpha\|,$$

a proto taky

$$(\exists k \in \mathbb{R}^+) (\forall \alpha \in \mathbb{R}^n) : k\|\alpha\| \leq \|L\alpha\|.$$

Dokázali jsme, že L je izomorfismus $\mathbb{R}^n$ na X .

□

Cvičení 3.10. Pokuste se dokázat následující tvrzení.

- 1) Každý normovaný lineární prostor **konečné dimenze** je Banachův.
- 2) Každé dvě normy v prostoru **konečné dimenze** jsou ekvivalentní.
- 3) Každý podprostor **konečné dimenze** NLP X je uzavřený v X .

¹Ta mimochodem plyne z úplnosti $\mathbb{R}$.



Obsah

46. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Příklad 3.11. Uvažujme na vektorovém prostoru $X = C(\langle 0, 1 \rangle)$ dvě normy:

$$\|f\|_1 := \sup_{x \in \langle 0, 1 \rangle} |f(x)|; \quad \|f\|_2 := \int_0^1 |f(x)| \, dx.$$

Už víme, že X s normou $\|\cdot\|_1$ je Banachův prostor a že X s normou $\|\cdot\|_2$ **není** Banachův prostor. Odtud již snadno plyne (rozmyslete si podrobně!), že normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ nejsou na X ekvivalentní, a proto X nemá konečnou dimenzi.

Definice 3.12. Buď Y NLP a buď $M \subset Y$. Řekneme, že M je hustou podmnožinou Y , platí-li

$$Y = \overline{M} := \{y \in Y : \text{existuje posloupnost } (x_n) \text{ v } M \text{ taková, že } x_n \rightarrow y \text{ (v } Y)\}.$$

Příklad 3.13. Uvažujme NLP $\mathbb{R}$. Pak $\mathbb{Q}$ je hustou podmnožinou $\mathbb{R}$.



Obsah

47. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Věta 3.14 (Cantorova o zúplnění). *Nechť X je NLP. Pak existuje Banachův prostor Y a zobrazení*

$$L : X \rightarrow Y$$

takové, že platí

- 1) L je lineární,
- 2) L je prosté,
- 3) $\overline{L(X)} = Y$,
- 4) $\forall x \in X : \|Lx\|_Y = \|x\|_X$
(tzn. že L je izometrický izomorfismus X na hustou podmnožinu Y).

Poznámka 3.15. Výše uvedený Banachův prostor Y – tzv. zúplnění X – je určen až na izometrický izomorfismus jednoznačně.



Obsah

48. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



Kapitola 4

Prostor se skalárním součinem

Definice 4.1. Prostorem se skalárním součinem nazýváme každý vektorový prostor $X = (X, +, \cdot)$, na němž je definováno zobrazení (tzv. skalární součin)

$$(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

splňující podmínky:

- (1) $\forall y \in X : x \mapsto (x, y)$ je lineární zobrazení na X ,
- (2) $\forall x, y \in X : (x, y) = (y, x)$,
- (3) $\forall x \in X : (x, x) \geq 0, (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Obsah

49. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Dá se snadno dokázat: je-li X prostor se skalárním součinem, je zobrazení $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ definované předpisem

$$\|x\| := \sqrt{(x, x)}$$

normou na X .¹ Můžeme proto prostory se skalárním součinem vnímat jako speciální případy NLP.

Definice 4.2. Prostor X se skalárním součinem se nazývá Hilbertův prostor, jestliže je úplný v indukované metrice

$$\varrho(x, y) := \|x - y\| = \sqrt{(x - y, x - y)}.$$

Příklady 4.3. Podíváte-li se na normované lineární prostory uvedené v 3.3, nebudete následujícími příklady vůbec překvapeni.

1) $X = \mathbb{R}^n$ se skalárním součinem

$$(x, y) := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

$$(x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n)$$

je Hilbertův prostor.

¹Mluvíme o normě indukované skalárním součinem.



Obsah

50. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

2) $X = l^2$ se skalárním součinem

$$(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$
$$(x = (x_n), y = (y_n) \in l^2)$$

je Hilbertův prostor.

3) $X = C(\langle 0, 1 \rangle)$ se skalárním součinem

$$(f, g) := \int_0^1 f(x)g(x) \, dx$$
$$(f, g \in C(\langle 0, 1 \rangle))$$

není Hilbertův prostor.

Věta 4.4 (o Cauchyho – Schwartzově – Buňakovského nerovnosti).

Nechť X je prostor se skalárním součinem. Pak pro každé $x, y \in X$ platí

$$|(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)} \cdot \sqrt{(y, y)} = \|x\| \cdot \|y\|.$$



Obsah

51. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Důkaz. Buď $x, y \in X$ dáno.

1) Je-li $y = 0$, plyne přímo z vlastností skalárního součinu, že

$$\begin{aligned}(x, y) &= (x, 0) = (0, x) = 0, \\ (y, y) &= (0, 0) = 0,\end{aligned}$$

a není proto co dokazovat.

2) Je-li $y \neq 0$, platí pro každé $t \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq (x + ty, x + ty) = (x, x) + 2t(x, y) + t^2 \underbrace{(y, y)}_{>0},$$

a proto příslušný diskriminant musí být nekladný, tj.

$$(2(x, y))^2 - 4(y, y)(x, x) \leq 0.$$

Odtud již snadno vyplývá dokazovaná nerovnost.

□

Ukázali jsme si, že skalárním součinem je vždy indukovaná norma. Není však pravda, že každá norma je indukovaná nějakým skalárním součinem.



Obsah

52. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

**Věta 4.5 (rovnoběžníkové pravidlo).**

i) *Nechť X je prostor se skalárním součinem. Pak pro indukovanou normu*

$$\|\cdot\| := \sqrt{(\cdot, \cdot)}$$

platí tzv. rovnoběžníkové pravidlo:

$$\forall x, y \in X : \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \quad (4.1)$$

ii) *Nechť X je normovaný lineární prostor, v němž platí rovnoběžníkové pravidlo (4.1). Pak zobrazení definované na $X \times X$ předpisem*

$$(x, y) := \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

je skalárním součinem na X , který indukuje danou normu.

Důkaz ponechme jako dobrovolné cvičení.

Příklad 4.6. Uvažujme vektorový prostor $\mathbb{R}^2$ s maximovou normou

$$\|x\| = \|(x_1, x_2)\| := \max\{|x_1|, |x_2|\}$$

a zvolme

$$x = (1, 0), \quad y = (1, 1).$$

Obsah

53. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Pak

$$x + y = (2, 1), \quad x - y = (0, -1),$$

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 4 + 1 = 5,$$

$$2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 2(1 + 1) = 4,$$

a proto maximová norma $\|\cdot\|$ **není** indukovaná žádným skalárním součinem (viz větu 4.5).

Úmluva 4.7. Až do konce kapitoly budeme symbolem „ H “ rozumět Hilbertův prostor se skalárním součinem $(\cdot, \cdot)$ a indukovanou normou $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot, \cdot)}$.

Definice 4.8. Prvky $x, y \in H$ se nazývají ortogonální, je-li

$$(x, y) = 0.$$

Systém $\{x_\gamma : \gamma \in \Gamma\} \subset H$ se nazývá ortogonální, platí-li

$$\forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma : [\gamma_1 \neq \gamma_2 \Rightarrow (x_{\gamma_1}, x_{\gamma_2}) = 0].$$

Systém $\{x_\gamma : \gamma \in \Gamma\} \subset H$ se nazývá ortonormální, platí-li

$$\forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma : (x_{\gamma_1}, x_{\gamma_2}) = \begin{cases} 0, & \text{je-li } \gamma_1 \neq \gamma_2 \\ & (\text{tzn. } \{x_\gamma : \gamma \in \Gamma\} \text{ je ortogonální systém}), \\ 1, & \text{je-li } \gamma_1 = \gamma_2 \\ & (\text{tzn. } \forall \gamma \in \Gamma : \|x_\gamma\| = 1). \end{cases}$$



Obsah

54. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Pozorování 4.9.

i) Ortogonální systém $\{x_\gamma : \gamma \in \Gamma\} \subset H$ **nenulových** prvků je lineárně nezávislý.

Důkaz. Buď $x_1, \dots, x_n$ libovolné navzájem různé prvky z $\{x_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ a buď α_1 až $\alpha_n \in \mathbb{R}$. Pak

$$\begin{aligned} & \underline{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0} \Rightarrow \\ \Rightarrow & \left[\forall i \in \{1, \dots, n\} : (\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n, x_i) = (0, x_i) = 0 \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow & \left[\forall i \in \{1, \dots, n\} : \sum_{k=1}^n \alpha_k \underbrace{(x_k, x_i)}_{=0, \substack{\text{je-li } k \neq i}} = \alpha_i \underbrace{(x_i, x_i)}_{\neq 0} = 0 \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow & \underline{\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0}. \end{aligned}$$

□



Obsah

55. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

ii) Necht $\{e_1, \dots, e_n\} \subset H$ je ortonormální báze podprostoru $Y \subset H^1$ a necht $y \in Y$. Pak

$$y = \sum_{k=1}^n (y, e_k) e_k, \quad \|y\|^2 = \sum_{k=1}^n |(y, e_k)|^2.$$

Důkaz. Je-li $y \in Y$, existují čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ taková, že

$$y = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k,$$

a proto pro každé $j \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$(y, e_j) = \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k e_k, e_j \right) = \sum_{k=1}^n \alpha_k (e_k, e_j) = \alpha_j,$$

neboli

$$y = \sum_{k=1}^n (y, e_k) e_k.$$

Podobně snadné je dokázat tvrzení týkající se normy y :

$$\|y\|^2 = \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k e_k, \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \right) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_k \alpha_j (e_k, e_j) = \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 = \sum_{k=1}^n |(y, e_k)|^2.$$

¹Tzn. že $\{e_1, \dots, e_n\}$ je ortonormální systém a současně $Y = \text{Lin} \{e_1, \dots, e_n\}$, neboli

$$(\forall y \in Y) (\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}) : y = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k.$$



Obsah

56. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



Zobecněním tohoto pozorování je následující věta.

Věta 4.10 (o aproximaci). *Nechť $\{e_1, \dots, e_n\}$ je ortonormální báze podprostoru $Y \subset H$. Pak pro každé $x \in H$ existuje **jediné** $y \in Y$ takové, že*

$$\|x - y\| = \inf_{z \in Y} \|x - z\|.$$

Pro toto y navíc platí:

$$\text{i) } y = \sum_{k=1}^n (x, e_k) e_k,$$

$$\text{ii) } \|x - y\|^2 = \|x\|^2 - \|y\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |(x, e_k)|^2, \text{ }^a$$

$$\text{iii) } \forall z \in Y : (x - y, z) = 0.$$

^aJe šikovné si uvědomit, že první z rovností říkáme v rovině Pythagorova věta. Je to jasné? Pokud ne, nakreslete si obrázek.

Obsah

57. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Důkaz. Buď $x \in H$ dáno.

Nejdříve si uvědomme, že

$$\begin{aligned} \|x - \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k\|^2 &= \left\langle x - \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k, x - \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \right\rangle = \\ &= \|x\|^2 - 2 \sum_{k=1}^n \alpha_k (x, e_k) + \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \pm \sum_{k=1}^n |(x, e_k)|^2 = \\ &= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |(x, e_k)|^2 + \sum_{k=1}^n |(x, e_k) - \alpha_k|^2, \end{aligned}$$

kde $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, bude nejmenší, bude-li

$$\sum_{k=1}^n |(x, e_k) - \alpha_k|^2 = 0,$$

to znamená, bude-li

$$\forall k \in \{1, \dots, n\} : \alpha_k = (x, e_k).$$

Zvolíme-li proto

$$y = \sum_{k=1}^n (x, e_k) e_k \in Y,$$

platí pro každé $z \in Y \setminus \{y\}$, že

$$\|x - z\| > \|x - y\|.$$



Obsah

58. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Navíc platí (viz předchozí pozorování 4.9) i tvrzení ii).

Zbývá dokázat tvrzení iii). Buď

$$z = \sum_{j=1}^n c_j e_j \in Y,$$

kde $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, zvoleno libovolně. Pak

$$\begin{aligned} (x - y, z) &= \left(x - \sum_{k=1}^n (x, e_k) e_k, \sum_{j=1}^n c_j e_j \right) = \\ &= \sum_{j=1}^n c_j \left[(x, e_j) - \sum_{k=1}^n (x, e_k) (e_k, e_j) \right] = \sum_{j=1}^n c_j [(x, e_j) - (x, e_j)] = 0. \end{aligned}$$

□



Obsah

59. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno



Věta 4.11 (o Fourierových řadách). *Nechť*

$$\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$$

je ortonormální systém v Hilbertově prostoru H .

Pak platí

$$\text{i) } \forall x \in H : \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 \leq \|x\|^2 \quad \dots \text{ tzv. } \underline{\text{Besselova nerovnost}},$$

$$\text{ii) } \forall x \in H : \text{existuje } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (x, e_k) e_k \stackrel{\text{ozn.}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k \quad \dots \text{ tzv. } \underline{\text{Fourierova řada } x},$$

$$\text{iii) } \forall x \in H : \left[x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n \Leftrightarrow \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 \right]$$

\dots tzv. Parsevalova rovnost.

Důkaz.

Ad i). Z věty o aproximaci 4.10 vyplývá, že

$$(\forall x \in H) (\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |(x, e_k)|^2,$$

a proto

$$\forall x \in H : \sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 \leq \|x\|^2.$$

Obsah

60. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



Ad ii). Definujme posloupnost (s_n) v H předpisem

$$s_n := \sum_{k=1}^n (x, e_k) e_k.$$

Pak pro $m > n$ platí

$$\begin{aligned} \|s_m - s_n\|^2 &= \left(\sum_{k=n+1}^m (x, e_k) e_k, \sum_{k=n+1}^m (x, e_k) e_k \right) = \\ &= \sum_{k=n+1}^m |(x, e_k)|^2 \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 \end{aligned}$$

a navíc (viz – již dokázanou – Besselovu nerovnost)

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 \rightarrow 0 \text{ pro } n \rightarrow \infty.$$

Odtud plyne, že posloupnost (s_n) je **cauchyovská**, a proto konvergentní v úplném prostoru H .

Ad iii). Stačí si uvědomit, že z věty o aproximaci 4.10 vyplývá

$$\|x - s_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |(x, e_k)|^2,$$

Obsah

61. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

a proto

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n \Leftrightarrow \|x - s_n\|^2 \rightarrow 0 \Leftrightarrow \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2.$$

□

Definice 4.12. Ortonormální systém

$$\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\} \subset H$$

se nazývá ortonormální báží prostoru H , platí-li

$$\forall x \in H : x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n.$$

Cvičení 4.13. Definujme pro každé $n \in \mathbb{N}$ posloupnost

$$e_n := 0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots$$

(n -tým členem posloupnosti e_n je číslo 1, ostatní členy jsou nulové).

Dokažte, že $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ je ortonormální báží Hilbertova prostoru l^2 .



Obsah

62. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Následujícímu příkladu plně porozumíte, až se seznámíte s Lebesgueovým integrálem a Lebesgueovými prostory $L^2(\Omega)$.¹

Příklad 4.14. Dá se ukázat, že systém funkcí

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) : n \in \mathbb{N} \right\}$$

je ortonormální bází Hilbertova prostoru

$$L^2(0, 2\pi) = \overline{C(\langle 0, 2\pi \rangle)}^{\|\cdot\|_{L^2(0, 2\pi)}}$$

Platí proto pro každou funkci $f \in L^2(0, 2\pi)$ (a tedy i pro každou funkci f spojitou na $\langle 0, 2\pi \rangle$), že

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

kde

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) \, dx, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\};$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) \, dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

¹V tuto chvíli pouze prozradíme, že prostor $L^2(0, 2\pi)$ je zúplněním prostoru $C(\langle 0, 2\pi \rangle)$ uvažovaného s normou indukovanou skalárním součinem

$$(f, g) := \int_0^{2\pi} f(x)g(x) \, dx.$$



Obsah

63. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Pozor! Konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \dots$ zde rozumíme konvergenci v normě prostoru $L^2(0, 2\pi)$, tzn.

$$\left\| f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \right) \right\|_{L^2(0, 2\pi)} \rightarrow 0 \text{ pro } n \rightarrow \infty.$$

Poznámka. Podobně se dá ukázat, že každý ze systémů

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(nx) : n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx) : n \in \mathbb{N} \right\}$$

je ortonormální bází Hilbertova prostoru $L^2(0, \pi)$.

Věta 4.15 (Schmidtův ortonormalizační proces). *Nechť*

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset H$$

je taková množina, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ jsou prvky $x_1, x_2, \dots, x_n$ lineárně nezávislé. Pak existuje ortonormální systém $\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subset H$ takový, že

$$\forall n \in \mathbb{N} : \text{Lin} \{x_1, \dots, x_n\} = \text{Lin} \{e_1, \dots, e_n\}.$$



Obsah

64. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Důkaz. Ověřte, že stačí položit (viz větu 4.10):

$$e_1 := \frac{x_1}{\|x_1\|}, \quad e_{n+1} := \frac{x_{n+1} - \sum_{k=1}^n (x_{n+1}, e_k) e_k}{\|x_{n+1} - \sum_{k=1}^n (x_{n+1}, e_k) e_k\|} \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

□

Věta 4.16. *Nechť Hilbertův prostor H je separabilní (tzn. že existuje jeho hustá spočetná podmnožina). Pak existuje jeho – nejvýše spočetná – ortonormální báze.*

Důkaz. Je-li dimenze prostoru H konečná, je tvrzení triviální. Předpokládejme proto navíc, že $\dim H = \infty$. Buď M hustou spočetnou podmnožinou H , tzn.

$$M = \{x_1, \dots, x_n, \dots\} \subset H, \quad \overline{M} = H.$$

Zřejmě platí:

$$\overline{\{x_1, \dots, x_n, \dots\}} = \overline{\text{Lin}\{x_1, \dots, x_n, \dots\}} = H.$$

Budeme-li z posloupnosti (x_n) postupně vynechávat ty prvky, které jsou lineární kombinací prvků předcházejících, získáme posloupnost vybranou z posloupnosti (x_n) (značme ji stejně) takovou, že $\overline{\text{Lin}\{x_1, \dots, x_n, \dots\}} = H$ a že množina $\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ je lineárně nezávislá.

Sestrojme nyní pomocí Schmidtova ortonormalizačního procesu ortonormální systém $\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\} \subset H$ takový, že

$$\forall n \in \mathbb{N} : \text{Lin}\{x_1, \dots, x_n\} = \text{Lin}\{e_1, \dots, e_n\},$$



Obsah

65. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

a proto

$$\overline{\text{Lin}\{x_1, \dots, x_n, \dots\}} = \overline{\text{Lin}\{e_1, \dots, e_n, \dots\}} = H. \quad (4.2)$$

Ukažme, že $\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$ je ortonormální bázi H , tzn. že pro každé $x \in H$ je $x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n$. Buď $x \in H$ dáno.

Pak existuje (viz (4.2)) posloupnost (y_n) v H taková, že

$$\lim y_n = x,$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) (\exists m_n \in \mathbb{N}, m_n \geq n) : y_n \in \text{Lin}\{e_1, e_2, \dots, e_{m_n}\}.$$

Odtud a z věty o aproximaci 4.10 plyne

$$0 \leq \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{m_n} |(x, e_k)|^2 \leq \|x - y_n\|^2 \rightarrow 0 \text{ pro } n \rightarrow \infty,$$

a tedy i Parsevalova rovnost

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2,$$

a proto (viz větu 4.11)

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n.$$

□



Obsah

66. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Poznámka 4.17. Pojem ortonormální báze lze zobecnit i pro nespočetné ortonormální systémy – užitím tzv. zobecněných řad. Pomocí Zornova lemmatu ¹ se pak dá dokázat, že každý Hilbertův prostor má ortonormální bázi.

Příklad 4.18. Je známo, že množina všech polynomů je hustá v $C(\langle -1, 1 \rangle)$, a proto i v $L^2(-1, 1)$. Tzn.

$$\overline{\text{Lin}\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}}^{\|\cdot\|_{L^2(-1,1)}} = L^2(-1, 1).$$

Odtud – protože množina polynomů

$$\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\} \quad (4.3)$$

je lineárně nezávislá² – plyne, že Schmidtovým ortonormalizačním procesem získáme z (4.3) ortonormální bázi $L^2(-1, 1)$ tvořenou (tzv. Legendreovými) polynomy:

$$\left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}x, \frac{\sqrt{10}}{4}(3x^2 - 1), \frac{\sqrt{14}}{4}(5x^3 - 3x), \dots \right\}.$$

Cvičení 4.19. Dokažte, že ortonormální systém $\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subset H$ je bází H právě tehdy, je-li úplný, tj. platí-li implikace

$$[x \in H \wedge (x, e_n) = 0 \text{ pro každé } n \in \mathbb{N}] \Rightarrow x = 0.$$

¹Zornovo lemma je jedno z tvrzení ekvivalentních s tzv. axiomem výběru.

²A rozmyslete si proč!



Obsah

67. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Věta 4.20 (Rieszova – Fischerova). Každý separabilní Hilbertův prostor nekonečné dimenze je izometricky izomorfní s l^2 .

Důsledek 4.21. Libovolné dva separabilní Hilbertovy prostory nekonečné dimenze jsou izometricky izomorfní.

Důkaz. Buď H separabilní Hilbertův prostor takový, že $\dim H = \infty$, a buď $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ortonormální báze H (ta, jak už víme, existuje!).

Pak

$$\forall x \in H : x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n, \quad \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2.$$

Definujeme zobrazení $L : H \rightarrow l^2$ předpisem

$$Lx := ((x, e_n)).$$

Pak platí

- L je lineární, protože pro každé $x, y \in H$ a každé $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

$$\underline{L(x+y)} = ((x+y, e_n)) = ((x, e_n) + (y, e_n)) = ((x, e_n)) + ((y, e_n)) = \underline{Lx} + \underline{Ly},$$

$$\underline{L(\alpha x)} = ((\alpha x, e_n)) = (\alpha(x, e_n)) = \alpha((x, e_n)) = \underline{\alpha Lx};$$



Obsah

68. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

- L je **prosté**, protože pro každé $x, y \in H$ platí

$$\begin{aligned} \underline{Lx = Ly} &\Rightarrow ((x, e_n)) = ((y, e_n)) \Rightarrow [\forall n \in \mathbb{N} : (x, e_n) = (y, e_n)] \Rightarrow \\ &\Rightarrow [\forall n \in \mathbb{N} : (x - y, e_n) = 0] \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow \underline{x = y}; \end{aligned}$$

- L je **na**, protože pro každé $(x_n) \in l^2$ existuje $y \in H$: $Ly = (x_n)$

(Buď $\underline{(x_n) \in l^2}$ dáno. Definujme posloupnost (y_n) v H předpisem

$$y_n := \sum_{k=1}^n x_k e_k.$$

Pak pro každé $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$, je

$$\|y_n - y_m\|^2 = \left\| \sum_{k=m+1}^n x_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=m+1}^n x_k^2 \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} x_k^2,$$

a navíc

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} x_k^2 \rightarrow 0 \text{ pro } m \rightarrow \infty,$$

a tedy (y_n) je **cauchyovská** v H . Z úplnosti H pak vyplývá, že existuje $y \in H$ takové, že $y_n \rightarrow y$. Snadno lze nahlédnout, že pro toto y pak platí

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n = \sum_{n=1}^{\infty} (y, e_n) e_n,$$



Obsah

69. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

a proto¹

$$\underline{Ly = (x_n)};$$

- L je izometrie, protože pro každé $x \in H$ zřejmě platí

$$\|x\|_H^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 = \|Lx\|_{l^2}^2.$$

Dokázali jsme, že L je izometrický izomorfismus H na l^2 .

□

¹Opět dobrý důvod k zamyšlení.

[Obsah](#)[70. strana ze 142](#)[Zavřít dokument](#)[Celá obrazovka/Okno](#)

OPERÁTORY V NLP



Obsah

71. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



Kapitola 5

Spojité lineární zobrazení

Definice 5.1. Buď X netriviální NLP a Y NLP. Řekneme, že **zobrazení** (operátor) $f : X \rightarrow Y$ má v bodě $x_0 \in X$ limitu $a \in Y$ (a píšeme $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$), platí-li pro každou posloupnost (x_n) v $X \setminus \{x_0\}$ implikace

$$x_0 \neq x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow a.$$

[Obsah](#)[72. strana ze 142](#)[Zavřít dokument](#)[Celá obrazovka/Okno](#)



Definice 5.2. Buď X, Y NLP. Řekneme, že zobrazení $f : X \rightarrow Y$ je spojité v bodě $x_0 \in X$, platí-li pro každou posloupnost (x_n) v X implikace

$$x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x_0). \quad ^a$$

Řekneme, že f je spojité na X , je-li spojité v každém bodě $x \in X$.

^aNepřehlédněme: je-li navíc prostor X **netriviální**, je

$$f \text{ spojité v bodě } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Definice 5.3. Buď X a Y normované lineární prostory. Lineární zobrazení $A : X \rightarrow Y$ se nazývá omezené, existuje-li nezáporné číslo $k \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\forall x \in X : \|A(x)\|_Y \leq k \|x\|_X.$$

Věta 5.4. Buď X, Y NLP. Necht $A : X \rightarrow Y$ je lineární zobrazení. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- i) A je spojité v každém bodě $x \in X$,
- ii) A je spojité v 0,
- iii) A je omezené.

Obsah

73. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Důkaz.

i) $\Rightarrow$ (ii) ... zřejmé.

ii) $\Rightarrow$ iii). Nejdříve si rozmysleme, že

$$A \text{ je spojité v } 0 \Leftrightarrow [(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x \in X) : \|x - 0\| < \delta \Rightarrow \|A(x) - A(0)\| < \varepsilon], \quad (5.1)$$

a potom volme $\varepsilon = 1$ a dosadíme do (5.1) (A je lineární) $A(0) = 0$. Dostaneme tak tvrzení

$$(\exists \delta > 0) (\forall x \in X) : \|x\| < \delta \Rightarrow \|A(x)\| < 1.$$

Nyní položme

$$k := \frac{2}{\delta}.$$

Pak pro každé $x \in X$ platí:

- $x = 0 \Rightarrow \|A(x)\| = \|A(0)\| = \|0\| = 0 = k \|0\| = k \|x\|,$
- $x \neq 0 \Rightarrow \left\| \frac{\delta}{2} \frac{x}{\|x\|} \right\| = \frac{\delta}{2} < \delta \Rightarrow \left\| A\left(\frac{\delta}{2} \frac{x}{\|x\|}\right) \right\| = \frac{\delta}{2} \frac{1}{\|x\|} \|A(x)\| < 1,$

a proto $\|A(x)\| \leq \frac{2}{\delta} \|x\| = k \|x\|.$

iii) $\Rightarrow$ i). Stačí si uvědomit, že

$$0 \leq \|A(x_n) - A(x)\| = \|A(x_n - x)\| \leq k \|x_n - x\| \rightarrow 0, \text{ pokud } x_n \rightarrow x.$$

□



Obsah

74. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Poznámka 5.5. Takže jsme vlastně dokázali, že

$$\text{spojitý lineární operátor} \equiv \text{omezený lineární operátor}.$$

Příklad 5.6. Uvažujme prostor $X = C(\langle 0, 1 \rangle)$ s normou

$$\|x\| := \sup_{t \in \langle 0, 1 \rangle} |x(t)|$$

a spojitou funkci

$$K : \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}.$$

Pak zobrazení $A : X \rightarrow X$ definované na X předpisem

$$(Ax)(t) := \int_0^1 K(t, s)x(s) \, ds$$

je spojitě na X .

Důkaz. Protože A je zřejmě **lineární**, stačí dokázat, že A je **omezené**. To je ale velmi snadné, protože pro každé $x \in X$ platí

$$\begin{aligned} \|Ax\| &= \sup_{t \in \langle 0, 1 \rangle} \left| \int_0^1 K(t, s)x(s) \, ds \right| \leq \sup_{t \in \langle 0, 1 \rangle} \int_0^1 |K(t, s)| \cdot |x(s)| \, ds \leq \\ &\leq \sup_{(t, s) \in \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle} |K(t, s)| \cdot \|x\| = \underline{k} \|x\|, \end{aligned}$$



Obsah

75. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

kde nezáporná reálná konstanta

$$k := \sup_{(t,s) \in \langle 0,1 \rangle \times \langle 0,1 \rangle} |K(t,s)| = \max_{(t,s) \in \langle 0,1 \rangle \times \langle 0,1 \rangle} |K(t,s)|$$

nezávisí na volbě $x \in X$. □

Označení a definice 5.7. Buď X a Y normované lineární prostory. Symbolem $\mathcal{L}(X, Y)$ značme množinu všech lineárních zobrazení X do Y spojitých na X .

Definujme pro každé $A, B \in \mathcal{L}(X, Y)$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ zobrazení $A + B$, $\alpha A \in \mathcal{L}(X, Y)$ předpisem

$$(A + B)(x) := A(x) + B(x),$$

$$(\alpha A)(x) := \alpha A(x).$$

Dá se ukázat, že spolu s těmito operacemi je $\mathcal{L}(X, Y)$ **vektorovým prostorem**.

Navíc, zobrazení $\|\cdot\| : \mathcal{L}(X, Y) \rightarrow \mathbb{R}$ definované předpisem

$$\|A\| := \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \leq 1}} \|A(x)\|_Y$$

je normou na $\mathcal{L}(X, Y)$.

Shrnutí:

$\mathcal{L}(X, Y)$ je normovaný lineární prostor.



Obsah

76. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Definice 5.8. Buď X NLP. Prostor všech spojitých lineárních funkcí na X , tzn. normovaný lineární prostor

$$X^* := \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$$

s normou

$$\|A\| := \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} |A(x)|,$$

nazýváme duálním prostorem k X .

Poznámky a tvrzení 5.9.

$$\text{i) } A \in \mathcal{L}(X, Y), B \in \mathcal{L}(Y, Z) \Rightarrow B \circ A \in \mathcal{L}(X, Z)$$

$$(\text{a navíc } \|B \circ A\|_{\mathcal{L}(X, Z)} \leq \|B\|_{\mathcal{L}(Y, Z)} \cdot \|A\|_{\mathcal{L}(X, Y)}).$$

$$\text{ii) } \left. \begin{array}{l} A : X \rightarrow Y, \text{ kde } X \text{ a } Y \text{ jsou NLP,} \\ A \text{ je lineární na } X, \\ \dim X < \infty \end{array} \right\} \Rightarrow A \text{ je spojitý na } X.$$

Pozor! Tvrzení neplatí bez předpokladu $\dim X < \infty$, tj. je-li $\dim X = \infty$.
Jako protipříklad lze volit:

$$X = C^1(\langle 0, 1 \rangle), Y = C(\langle 0, 1 \rangle)$$



Obsah

77. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



(oba prostory se supremovou normou $\|x\| := \sup_{t \in \langle 0,1 \rangle} |x(t)|$,

$$A: X \rightarrow Y, A(x) := x'.$$

Pak A je zřejmě **lineární zobrazení** na X . Nyní uvažujme posloupnost (x_n) v X , jejímiž členy jsou funkce definované předpisy

$$x_n(t) := t^n.$$

Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\|x_n\| = 1, \|Ax_n\| = \sup_{t \in \langle 0,1 \rangle} |(Ax_n)(t)| = \sup_{t \in \langle 0,1 \rangle} |n t^{n-1}| = n,$$

a proto A **není** omezené na kouli

$$\{x \in X : \|x\| \leq 1\},$$

což znamená, že A **není** spojitě na X .

- iii) $\left. \begin{array}{l} X \dots \text{NLP,} \\ Y \dots \text{Banachův prostor} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathcal{L}(X, Y) \text{ je Banachův prostor.}$

Speciálně:

$$X^* \text{ je Banachův prostor.}$$

Důkaz uvedených tvrzení ponechme jako výzvu a velmi vhodné cvičení čtenářům.

Obsah

78. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Věta 5.10. *Nechť X je NLP a nechť $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ je lineární zobrazení na X .^a Pak f je spojitě na X právě tehdy, je-li*

$$\text{Ker } f := \{x \in X : f(x) = 0\}$$

(tzv. jádro zobrazení f) uzavřeným vektorovým podprostorem X .

^aNěkdy mluvíme o lineární formě na X .

Důkaz. Nejdříve si všimněme, že platí implikace

$$\underline{x, y \in \text{Ker } f} \Rightarrow 0 = f(x) + f(y) = f(x + y) \Rightarrow \underline{x + y \in \text{Ker } f},$$

$$\underline{\alpha \in \mathbb{R}, x \in \text{Ker } f} \Rightarrow 0 = \alpha f(x) = f(\alpha x) \Rightarrow \underline{\alpha x \in \text{Ker } f},$$

a proto (viz cvičení 1.6)

$\text{Ker } f$ je vektorovým podprostorem X .

Zbývá nám dokázat ekvivalenci

$$f \text{ je spojitě na } X \Leftrightarrow \text{Ker } f \text{ je uzavřená podmnožina } X, \text{ tzn. } \overline{\text{Ker } f} = \text{Ker } f.$$

Důkaz „ $\Rightarrow$ “ plyne přímo ze spojitosti f , protože

$$\underline{\text{Ker } f \ni x_n \rightarrow x \in X} \Rightarrow 0 = f(x_n) \rightarrow f(x) \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \underline{x \in \text{Ker } f}.$$



Obsah

79. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Důkaz „ $\Leftarrow$ “. Je-li $f \equiv 0$, je tvrzení zřejmé. Není-li $f \equiv 0$, existuje $v \in X$ takové, že $f(v) \neq 0$, a můžeme vzít

$$u := \frac{1}{f(v)} v \in X.$$

Pak

$$f(u) = 1 \tag{5.2}$$

a navíc

$$d := \inf_{y \in \text{Ker } f} \|u - y\| > 0.$$

(Nerovnost $d > 0$ můžeme ověřit – díky předpokladu, že jádro $\text{Ker } f$ je uzavřené – sporem:

$$\begin{aligned} d = 0 &\Rightarrow [\text{existuje posloupnost } (y_n) \text{ v } \text{Ker } f \text{ taková, že } \|u - y_n\| \rightarrow 0] \Rightarrow \\ &\Rightarrow y_n \rightarrow u \Rightarrow u \in \text{Ker } f, \end{aligned}$$

a to je spor s (5.2).)

Není těžké zkontrolovat, že pro každé $x \in X$, pro něž $f(x) \neq 0$, platí

$$\|x\| = \|f(x)u + x - f(x)u\| = |f(x)| \cdot \|u - \underbrace{\frac{f(x)u - x}{f(x)}}_{\in \text{Ker } f}\| \geq |f(x)| \cdot d,$$

a proto

$$\forall x \in X : |f(x)| \leq \frac{1}{d} \|x\|.$$

Zjistili jsme, že f je omezené, a tudíž **spojité** na X .

□



Obsah

80. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



Věta 5.11 (o ortogonální projekci v H -prostoru).

Nechť M je uzavřený vektorový podprostor Hilbertova prostoru H .^a

Pak

$$(\forall x \in H) (\exists! Px \in M) : \|x - Px\| = \inf_{y \in M} \|x - y\|.$$

Navíc, pro (tímto způsobem definované) zobrazení

$$P : H \rightarrow M$$

platí:

- i) $(\forall x \in H) (\forall y \in M) : (x - Px, y) = 0$,
- ii) $P \in \mathcal{L}(H, M)$,
- iii) $\forall x \in H : \|Px\|^2 + \|x - Px\|^2 = \|x\|^2$.

(Zobrazení P se nazývá ortogonální projekce na M .)

^aTo znamená:

$$\emptyset \neq M = \overline{M} \subset H, \\ (\forall x, y \in M) (\forall \alpha \in \mathbb{R}) : [x + y \in M \wedge \alpha x \in M].$$

(Porovnejte větu o ortogonální projekci s větou o aproximaci 4.10.)

Obsah

81. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Důkaz.

• Existence Px .

Buď $x \in H$ dáno. Uvažujme posloupnost (y_n) v M takovou, že

$$d := \inf_{y \in M} \|x - y\| \leq \|x - y_n\| < d + \frac{1}{n} \quad (5.3)$$

(taková existuje!). Pak pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ díky rovnoběžníkovému pravidlu 4.5 platí:

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|^2 &= \|y_n - x - (y_m - x)\|^2 = \\ &= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - \|y_n - x + y_m - x\|^2 = \\ &= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\left\|\underbrace{\frac{y_n + y_m}{2}}_{\in M} - x\right\|^2 \leq \\ &\leq 2\left(d + \frac{1}{n}\right)^2 + 2\left(d + \frac{1}{m}\right)^2 - 4d^2 = \frac{4d}{n} + \frac{4d}{m} + \frac{2}{n^2} + \frac{2}{m^2}. \end{aligned}$$

Odtud již snadno plyne, že posloupnost (y_n) je cauchyovská v úplném prostoru H , a proto

$$\exists Px \in H : y_n \rightarrow Px.$$

Zbývá nám ukázat, že bod Px má požadované kvality.

Protože pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $y_n \in M$ a M je uzavřená množina, je $Px \in M$.

Navíc, z konvergence $y_n \rightarrow Px$, spojitosti normy (viz 3.5) a nerovností (5.3) plyne

$$x - y_n \rightarrow x - Px \Rightarrow \underbrace{\|x - y_n\|}_{\rightarrow d} \rightarrow \|x - Px\| \Rightarrow \underline{\|x - Px\| = d}.$$



Obsah

82. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

- Jednoznačnost Px .

Buď

$$\|x - P_1x\| = \|x - P_2x\| = d,$$

kde $P_1x, P_2x \in M$. Potom (podobně jako před chvílí):

$$\begin{aligned} \|P_1x - P_2x\|^2 &= \|P_1x - x + x - P_2x\|^2 = \\ &= 2\|P_1x - x\|^2 + 2\|x - P_2x\|^2 - \|P_1x - x - x + P_2x\|^2 = \\ &= 2d^2 + 2d^2 - 4\left\|\underbrace{\frac{P_1x + P_2x}{2}}_{\in M} - x\right\|^2 \leq 4d^2 - 4d^2 = 0, \end{aligned}$$

a proto $P_1x = P_2x$.

- Vlastnost i).

Buď $x \in H$ a $y \in M$ dáno. Pak pro funkci

$$\varphi(t) := \|x - (Px - ty)\|^2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

platí, že

$$\min_{t \in \mathbb{R}} \varphi(t) = \varphi(0).$$

Odtud plyne: existuje-li $\varphi'(0)$, je $\varphi'(0) = 0$.

Snadno zkontrolujeme, že pro každé $t \in \mathbb{R}$ je

$$\varphi(t) = (x - Px + ty, x - Px + ty) = \|x - Px\|^2 + 2t(x - Px, y) + t^2\|y\|^2,$$



Obsah

83. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

a proto

$$\varphi'(0) = 2 \underline{(x - Px, y)} = 0.$$

• Vlastnost ii).

Nejdříve dokažme, že P je lineární:

$\forall x, y \in H$:

$$\begin{aligned} \left\| \underbrace{P(x+y) - (Px + Py)}_{\substack{\text{ozn.} \\ \equiv z \in M}} \right\|^2 &= (P(x+y) - (x+y) + (x+y) - (Px + Py), z) = \\ &= - \underbrace{(x+y - P(x+y), z)}_{=0} + \underbrace{(x - Px, z)}_{=0} + \underbrace{(y - Py, z)}_{=0} = 0, \end{aligned}$$

a proto

$$\underline{P(x+y) = Px + Py};$$

$(\forall \alpha \in \mathbb{R}) (\forall x \in H)$:

$$\begin{aligned} \left\| \underbrace{P(\alpha x) - \alpha Px}_{\substack{\text{ozn.} \\ \equiv z \in M}} \right\|^2 &= (P(\alpha x) - \alpha x + \alpha x - \alpha Px, z) = \\ &= - \underbrace{(\alpha x - P(\alpha x), z)}_{=0} + \underbrace{\alpha(x - Px, z)}_{=0} = 0, \end{aligned}$$



Obsah

84. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

a proto

$$\underline{P(\alpha x) = \alpha Px.}$$

Zbývá dokázat, že P je spojitý, tzn. omezený:

$$\underline{\forall x \in H : \|Px\|^2 = (Px - x + x, Px) = - \underbrace{(x - Px, \overbrace{Px}^{\in M})}_{=0} + (x, Px) \leq \|x\| \cdot \|Px\|},$$

a proto $\|Px\| \leq \|x\|$.

- Vlastnost iii).

$\forall x \in H$:

$$\begin{aligned} \underline{\|Px\|^2 + \|x - Px\|^2} &= (Px, Px) + (x - Px, x - Px) = (Px, Px) + (x - Px, x) = \\ &= (Px, Px) + (x, x) + (-x, Px) = - \underbrace{(x - Px, Px)}_{=0} + (x, x) = \underline{\|x\|^2}. \end{aligned}$$

□



Obsah

85. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Pozorování 5.12. Buď H Hilbertův prostor a buď $y \in H$ libovolný bod. Pak zobrazení $A : H \rightarrow \mathbb{R}$ definované předpisem

$$Ax := (x, y)$$

je **lineární** a **omezené** ($\|Ax\| = |Ax| = |(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$).

Je proto

$$A \in H^*.$$

Navíc platí

$$\|A\|_{H^*} = \|y\|_H.$$

Důkaz rovnosti norem rozdělme na dvě části:

- je-li $y = 0$, je

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |A(x)| = \sup_{\|x\| \leq 1} |(x, 0)| = \underline{0} = \|y\|;$$

- je-li $y \neq 0$, je

$$\left. \begin{aligned} \|A\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} |(x, y)| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} (\|x\| \cdot \|y\|) \leq \|y\|, \\ \|A\| &\geq |A(\frac{y}{\|y\|})| = |(\frac{y}{\|y\|}, y)| = \frac{1}{\|y\|} \cdot \|y\|^2 = \|y\| \end{aligned} \right\} \Rightarrow \|A\| = \|y\|.$$

□



Obsah

86. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Je tedy – ve zřejmém smyslu –

$$H \subset H^*.$$

Následující věta ukazuje, že tuto inklusi lze i obrátit.

Věta 5.13 (Rieszova o reprezentaci).

Nechť H je Hilbertův prostor a nechť $f \in H^$. Pak*

$$(\exists! u \in H) (\forall x \in H) : f(x) = (x, u).$$

Navíc platí:

$$\|f\|_{H^*} := \sup_{\|x\|_H \leq 1} |f(x)| = \|u\|_H.$$

Důkaz.

• Existence u .

Je-li $f \equiv 0$, stačí volit $u = 0$.

Předpokládejme proto navíc, že pro nějaké $\tilde{v} \in H$ je $f(\tilde{v}) \neq 0$, a položme

$$v := \frac{1}{f(\tilde{v})} \tilde{v}.$$

Pak $f(v) = 1$. Jak už víme (viz větu 5.10), $\text{Ker } f := \{x \in H : f(x) = 0\}$ je uzavřeným podprostorem H , a proto existuje (viz větu 5.11) ortogonální projekce

$$P : H \rightarrow \text{Ker } f.$$



Obsah

87. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Nyní volme

$$\tilde{u} := v - Pv.$$

Pak pro každé $x \in H$ platí

$$x = f(x)\tilde{u} + \underbrace{x - f(x)\tilde{u}}_{\in \text{Ker } f},$$

a proto taky (viz vlastnost i) ortogonální projekce z věty 5.11)

$$\underline{(x, \tilde{u})} = f(x)(\tilde{u}, \tilde{u}) + \underbrace{(x - f(x)\tilde{u}, \tilde{u})}_{=0} = \underline{f(x)(\tilde{u}, \tilde{u})} = \underline{f(x) \|\tilde{u}\|^2}.$$

Odtud přímo plyne, že stačí volit

$$u := \frac{\tilde{u}}{\|\tilde{u}\|^2}.$$

- Jednoznačnost.

Nechť $u_1, u_2 \in H$ jsou takové prvky, že

$$\forall x \in H : f(x) = (x, u_1) = (x, u_2).$$

Odtud plyne, že

$$\forall x \in H : (x, u_1 - u_2) = 0,$$

a proto (volíme $x = u_1 - u_2$)

$$(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = \|u_1 - u_2\|^2 = 0$$

neboli $u_1 = u_2$.



Obsah

88. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

- Rovnost norem plyne přímo z pozorování 5.12 uvedeného před větou.



Takže jsme ukázali možnost ztotožnění

$$H = H^*.$$

Poznámka a definice 5.14. Buď X normovaný lineární prostor. Definujme

$$X^{**} := (X^*)^*.$$

Dá se ukázat, že zobrazení (tzv. kanonické vnoření)

$$S : X \rightarrow X^{**}$$

definované předpisem

$$(Sx)(f) := f(x)$$

je izometrickým izomorfismem X na $S(X) \subset X^{**}$. Protože izometricky izomorfní prostory lze ztotožnit, je (po zmíněném ztotožnění)

$$X \subset X^{**}.$$

NLP X se nazývá reflexivní, je-li $S(X) = X^{**}$.



Obsah

89. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Příklady 5.15.

1) Protože pro Hilbertův prostor H platí $H^* = H$, je

$$H^{**} = (H^*)^* = H^* = H.$$

Tedy: každý Hilbertův prostor je reflexivní.¹

2) Prostory l^p , kde $1 < p < \infty$, jsou reflexivní.

3) Prostory l^1 a l^∞ nejsou reflexivní.

4) Prostor $C(\langle 0, 1 \rangle)$ se supremovou normou není reflexivní.

Tvzení 5.16.

- i) Každý reflexivní prostor je Banachův.
- ii) Je-li prostor X reflexivní, je i každý jeho uzavřený vektorový podprostor reflexivní.
- iii) Je-li prostor X reflexivní, je i X^* reflexivní.

¹Rozmyslete si s pomocí Rieszovy věty, že uvedené ztotožnění $H = H^{**}$ je realizováno právě pomocí kanonického vnoření.

[Obsah](#)

90. strana ze 142

[Zavřít dokument](#)[Celá obrazovka/Okno](#)



Věta 5.17 (Hahnova – Banachova).

Nechť M je vektorovým podprostorem (ne nutně uzavřeným) NLP X a nechť $f_M \in M^*$. Pak existuje $f \in X^*$ takové, že

- $\forall x \in M : f(x) = f_M(x)$,
- $\|f\|_{X^*} = \|f_M\|_{M^*}$.

Důsledek 5.18. Nechť X je NLP a nechť $u \in X \setminus \{0\}$. Pak existuje $f \in X^*$ takové, že

- $f(u) = \|u\|_X$,
- $\|f\|_{X^*} = 1$.

Důkaz Hahnovy–Banachovy věty je nekonstruktivní a opírá se o Zornovo lemma. Ukažme si proto pouze, jak z této věty vyplývá uvedený důsledek.

Uvažujme vektorový podprostor

$$M = \{\lambda u : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

a zobrazení $f_M : M \rightarrow \mathbb{R}$ definované předpisem

$$f_M(\lambda u) := \lambda \|u\|.$$

Pak f_M je zřejmě lineární:

Obsah

91. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

$$\begin{aligned}
 \underline{f_M(\lambda_1 u + \lambda_2 u)} &= f_M((\lambda_1 + \lambda_2)u) = (\lambda_1 + \lambda_2)\|u\| = \\
 &= \lambda_1\|u\| + \lambda_2\|u\| = \underline{f_M(\lambda_1 u) + f_M(\lambda_2 u)}, \\
 \underline{f_M(\alpha \lambda u)} &= \alpha\lambda\|u\| = \underline{\alpha f_M(\lambda u)},
 \end{aligned}$$

a protože pro každé $x = \lambda u \in M$ navíc platí:

$$|f_M(x)| = |f_M(\lambda u)| = |\lambda\|u\|| = |\lambda| \cdot \|u\| = \|\lambda u\| = \|x\|,$$

je

$$f_M \in M^* \wedge \|f_M\|_{M^*} = 1.$$

Existence $f \in X^*$ daných vlastností teď plyne přímo z Hahnovy-Banachovy věty.

□

Pozorování 5.19. Z důsledku Hahnovy-Banachovy věty 5.18 vyplývá, že v každém netriviálním NLP X existuje netriviální spojité lineární forma.

Dokonce platí, že prostor X^* je tak „bohatý“, že stačí k „rozlišení bodů“. Řekněme to přesněji.

Buď X NLP. Pak platí

$$(\forall x, y \in X, x \neq y) (\exists f \in X^*) : f(x) \neq f(y).$$



Obsah

92. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Důkaz. Volme $u := x - y \in X \setminus \{0\}$. Pak existuje $f \in X^*$ takové, že $f(u) = \|u\|$, a proto

$$\underline{f(x) - f(y)} = f(x - y) = f(u) = \|u\| = \underline{\|x - y\|} \neq 0.$$

□

Toto pozorování lze ještě zobecnit.

Věta 5.20. *Nechť M je vektorovým podprostorem (ne nutně uzavřeným) NLP X a nechť $x \in X$ je takové, že*

$$d := \inf_{y \in M} \|x - y\| > 0.$$

Pak existuje $f \in X^$ takové, že*

- $f(x) = 1$,
- $\forall y \in M : f(y) = 0$,
- $\|f\| = \frac{1}{d}$.

Důkaz. Uvažujme vektorový podprostor

$$N = \{y + \lambda x : y \in M, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

(že N je skutečně vektorovým podprostorem plyne z 1.6 a z rovností:

$$(y_1 + \lambda_1 x) + (y_2 + \lambda_2 x) = \underbrace{(y_1 + y_2)}_{\in M} + \underbrace{(\lambda_1 + \lambda_2)}_{\in \mathbb{R}} x, \quad \alpha(y + \lambda x) = \underbrace{(\alpha y)}_{\in M} + \underbrace{(\alpha \lambda)}_{\in \mathbb{R}} x$$



Obsah

93. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

a zobrazení $f_N : N \rightarrow \mathbb{R}$ definované předpisem

$$f_N(y + \lambda x) := \lambda.$$

Nejdříve ověříme, že f_N je lineární:

$$\begin{aligned} f_N((y_1 + \lambda_1 x) + (y_2 + \lambda_2 x)) &= f_N((y_1 + y_2) + (\lambda_1 + \lambda_2)x) = \\ &= \lambda_1 + \lambda_2 = \underline{f_N(y_1 + \lambda_1 x) + f_N(y_2 + \lambda_2 x)}, \end{aligned}$$

$$\underline{f_N(\alpha(y + \lambda x))} = f_N((\alpha y) + (\alpha \lambda)x) = \alpha \lambda = \underline{\alpha f(y + \lambda x)}.$$

Nyní ukážeme, že f_N je omezené. Vlastně dokážeme:

$$\forall z \in N : |f_N(z)| \leq \frac{1}{d} \|z\|.$$

Buď $z = y + \lambda x \in N$ dáno.

Je-li $\lambda \neq 0$, je

$$\|z\| = |\lambda| \cdot \left\| \frac{y}{\lambda} + x \right\| = |\lambda| \cdot \underbrace{\left\| x - \left(-\frac{y}{\lambda}\right) \right\|}_{\in M} \geq |\lambda| d,$$

a proto

$$|f_N(z)| = |\lambda| \leq \frac{1}{d} \|z\|.$$

Je-li $\lambda = 0$, je

$$|f_N(z)| = 0 \leq \frac{1}{d} \|z\|.$$



Obsah

94. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Zjistili jsme, že

$$f_N \in N^* \wedge \|f_N\| \leq \frac{1}{d}.$$

Ukažme, že platí dokonce

$$\|f_N\| = \frac{1}{d}.$$

Buď (y_n) posloupnost v M taková, že

$$\|x - y_n\| \rightarrow d.$$

Pak

$$1 = f_N(x - y_n) \leq \|f_N\| \cdot \|x - y_n\| \rightarrow \|f_N\| \cdot d,$$

a proto

$$\|f_N\| \geq \frac{1}{d}.$$

K dokončení důkazu stačí aplikovat Hahnovu–Banachovu větu 5.17. □

Poznámka 5.21. Připomeňme si, že v NLP X jsme definovali konvergenci posloupnosti bodů následujícím způsobem:

$$x_n \rightarrow x \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \|x_n - x\| \rightarrow 0.$$

S tímto typem (tzv. silné) konvergence v aplikacích obvykle nevystačíme. Zavedení duálního prostoru X^* nám umožňuje zavést další typ (tzv. slabé) konvergence.



Obsah

95. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



Definice 5.22. Buď (x_n) posloupnost v NLP X a buď $x \in X$. Řekneme, že posloupnost (x_n) konverguje slabě k bodu x a píšeme $x_n \rightharpoonup x$, platí-li

$$\forall f \in X^* : f(x_n) \rightarrow f(x).$$

Věta 5.23 (o slabé konvergenci). Buď X NLP. Pak v X platí:

- i) každá posloupnost má nejvýš jednu slabou limitu,
- ii) $x_n \rightarrow x \Rightarrow x_n \rightharpoonup x$,
- iii) $x_n \rightharpoonup x \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{R}^+) (\forall n \in \mathbb{N}) : \|x_n\| \leq k$
(tzn. (x_n) je omezená posloupnost),
- iv) $x_n \rightharpoonup x \Rightarrow \|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.^a

^aSrovnejte toto tvrzení s již známým tvrzením: $x_n \rightarrow x \Rightarrow \|x\| = \lim \|x_n\|$.

Důkaz.

Ad i). Toto tvrzení dokažme sporem. Předpokládejme, že

$$x_n \rightharpoonup x, x_n \rightharpoonup y, x \neq y,$$

Obsah

96. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

a vezměme $f \in X^*$ takové, že $f(x) \neq f(y)$ (existence takového f je zaručena – viz 5.19). Pak platí

$$\underline{f(x_n) \rightarrow f(x)}, \underline{f(x_n) \rightarrow f(y)}, \underline{f(x) \neq f(y)}.$$

A to je spor, protože posloupnost reálných čísel $(f(x_n))$ nemůže mít dvě různé limity.

Ad ii). Předpokládejme, že $x_n \rightarrow x$, a buď $f \in X^*$ dáno. Pak přímo ze spojitosti f plyne

$$f(x_n) \rightarrow f(x).$$

Ad iii). Důkaz tvrzení, že každá slabě konvergentní posloupnost je omezená, je komplikovanější. Je založen na principu stejnoměrné omezenosti a ukážeme si ho později – viz stranu 104.

Ad iv). Je-li $x = 0$, je tvrzení zřejmé. Je-li $x \neq 0$, existuje $f \in X^*$ takové, že $\|f\| = 1$ a že $f(x) = \|x\|$ (viz 5.18). Z předpokladu $x_n \rightharpoonup x$ pak plyne:

$$\|x\| = f(x) = \lim f(x_n) = \liminf f(x_n) \leq \liminf \underbrace{[\|f\|]}_{=1} \cdot \|x_n\| = \liminf \|x_n\|.$$

□

Cvičení 5.24. Dokažte, že v každém normovaném lineárním prostoru X konečné dimenze platí:

$$x_n \rightarrow x \Leftrightarrow x_n \rightharpoonup x.$$



Obsah

97. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



Příklady 5.25.

1) Buď $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ortonormální systém v Hilbertově prostoru H .¹

Pak

$$\forall u \in H : (e_n, u) \rightarrow 0 = (0, u)$$

(viz Besselovu nerovnost ve větě 4.11), a proto (viz Rieszovu větu o reprezentaci 5.13)

$$e_n \rightharpoonup 0.$$

Nyní ukažme sporem, že posloupnost (e_n) **není** v H **silně konvergentní**.

Nechť $e_n \rightarrow x$. Pak $x = 0$ (viz tvrzení i) a ii) předcházející věty 5.23), a proto

$$1 = \|e_n\| \rightarrow \|0\| = 0.$$

A to je spor.²

¹Například:

$$H = l^2, \quad e_n := 0, 0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{n\text{-tý člen}}, 0, \dots,$$

nebo

$$H = L^2(0, \pi), \quad e_n(x) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx).$$

²Mohli jsme postupovat i jinak: protože

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \quad n \neq m : \|e_n - e_m\|^2 = (e_n - e_m, e_n - e_m) = \|e_n\|^2 + \|e_m\|^2 = 2,$$

není posloupnost (e_n) Cauchyovská, a proto ani konvergentní (viz větu 2.4).

Obsah

98. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

2) Uvažujme reálné posloupnosti

$$e_n := 0, 0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{n\text{-tý člen}}, 0, \dots$$

Dá se ukázat, že v každém z prostorů l^p , kde $1 < p < \infty$, platí

$$e_n \rightarrow 0,$$

zatímco v prostoru l^1 posloupnost (e_n) vůbec slabě nekonverguje. (Dá se dokonce ukázat, že v prostoru l^1 platí: $x_n \rightarrow x \Leftrightarrow x_n \rightarrow x$.)

Věta 5.26. *Buď X normovaný lineární prostor. Pak*

$$\dim X < \infty \Leftrightarrow \text{z každé omezené posloupnosti lze vybrat} \\ \text{silně konvergentní podposloupnost.}$$

Věta 5.27 (Eberleinova – Šmuljanova). *Buď X Banachův prostor. Pak*

$$X \text{ je reflexivní} \Leftrightarrow \text{z každé omezené posloupnosti lze vybrat} \\ \text{slabě konvergentní podposloupnost.}$$



Obsah

99. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Cvičení 5.28. Uvažujme Banachův prostor $C(\langle 0, 1 \rangle)$ s normou $\|x\| := \sup_{t \in \langle 0, 1 \rangle} |x(t)|$ a v něm posloupnost (f_n) definovanou předpisy

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 - nx, & x \in \langle 0, \frac{1}{n} \rangle, \\ 0, & x \in (\frac{1}{n}, 1). \end{cases}$$

Dokažte, že (přestože posloupnost (f_n) je v $C(\langle 0, 1 \rangle)$ omezená) z posloupnosti (f_n) nelze vybrat slabě konvergentní podposloupnost. (Odtud a z věty 5.27 již plyne, že $C(\langle 0, 1 \rangle)$ není reflexivní prostor.)

Věta 5.29. V libovolném Hilbertově prostoru platí:

$$[x_n \rightharpoonup x \wedge \|x_n\| \rightarrow \|x\|] \Rightarrow x_n \rightarrow x.$$

Důkaz. Stačí si rozmyslet, že z předpokladů a z Rieszovy věty 5.13 plyne:

$$\|x_n - x\|^2 = (x_n - x, x_n - x) = \underbrace{\|x_n\|^2}_{\rightarrow \|x\|^2} + \|x\|^2 - 2 \underbrace{(x_n, x)}_{\rightarrow (x, x) = \|x\|^2} \rightarrow 0.$$

□



Obsah

100. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



Věta 5.30 (princip stejnoměrné omezenosti). *Nechť X je Banachův prostor, nechť Y je NLP a nechť $\mathcal{G} \subset \mathcal{L}(X, Y)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

- i) $\sup \{\|L\| : L \in \mathcal{G}\} < \infty$,
- ii) $\forall x \in X : \sup \{\|Lx\| : L \in \mathcal{G}\} < \infty$.

Důkaz. Implikace i) $\Rightarrow$ ii) je přímým důsledkem již známého tvrzení

$$\forall x \in X : \|Lx\| \leq \|L\| \cdot \|x\|.$$

Důkaz tvrzení ii) $\Rightarrow$ i) je komplikovanější, opírá se o Baireovu větu 2.25.

Definujme pro každé $n \in \mathbb{N}$ množinu

$$M_n := \bigcap_{L \in \mathcal{G}} \{x \in X : \|Lx\| \leq n\}.$$

Díky spojitosti normy i zobrazení L je každá z množin $\{x \in X : \|Lx\| \leq n\}$ uzavřená. Odtud plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je uzavřená i množina M_n (viz cvičení 2.13). Navíc: předpoklad ii) nám umožňuje tvrdit, že

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n,$$

a proto (viz Baireovu větu 2.25)

$$\exists m \in \mathbb{N} : \text{int } \overline{M_m} = \text{int } M_m \neq \emptyset.$$

Obsah

101. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

To znamená, že existují $\delta > 0$ a $y \in M_m$, pro něž

$$U(y, 2\delta) := \{x \in X : \|x - y\| < 2\delta\} \subset M_m.$$

Buď nyní $L \in \mathcal{G}$ a $x \in X$, $\|x\| \leq 1$, zvoleny libovolně. Pak

$$z := y + \delta x \in U(y, 2\delta) \subset M_m,$$

a proto (viz definici množiny M_m a skutečnost, že $z, y \in M_m$):

$$\|Lx\| = \left\| L\left(\frac{z - y}{\delta}\right) \right\| \leq \frac{1}{\delta} (\|Lz\| + \|Ly\|) \leq \frac{1}{\delta} (m + m) = \frac{2m}{\delta}.$$

Odtud a z definice normy v $\mathcal{L}(X, Y)$ již snadno plyne

$$\sup \{\|L\| : L \in \mathcal{G}\} \leq \frac{2m}{\delta} \in \mathbb{R}.$$

□

Věta 5.31 (Banachova – Steinhausova). *Nechť X je Banachův prostor, nechť Y je NLP a nechť (L_n) je taková posloupnost v $\mathcal{L}(X, Y)$, že pro každé $x \in X$ existuje*

$$\lim L_n x =: Lx.$$

Pak

$$L \in \mathcal{L}(X, Y).$$



Obsah

102. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



Důkaz. Linearita zobrazení L je zřejmá, protože pro všechna $x, y \in X$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ je

$$\underline{L(x + y)} = \lim L_n(x + y) = \lim(L_n x + L_n y) = \lim L_n x + \lim L_n y = \underline{Lx + Ly},$$

$$\underline{L(\alpha x)} = \lim L_n(\alpha x) = \lim(\alpha L_n x) = \alpha \lim L_n x = \underline{\alpha Lx}.$$

Navíc: předpokládáme, že pro každé $x \in X$ existuje $\lim L_n x$, a proto

$$\forall x \in X : \sup\{\|L_n x\| : n \in \mathbb{N}\} < \infty.$$

Odtud a z principu stejnoměrné omezenosti 5.30 plyne

$$(\exists k \in \mathbb{R}^+) (\forall n \in \mathbb{N}) : \|L_n\| \leq k,$$

z čehož – díky spojitosti normy – snadno odvodíme

$$(\exists k \in \mathbb{R}^+) (\forall x \in X) : \underline{\|Lx\|} = \|\lim L_n x\| = \lim \|L_n x\| \leq k \|x\|.$$

Dokázali jsme, že lineární zobrazení L je omezené, a tudíž $\underline{L \in \mathcal{L}(X, Y)}$.

□

Obsah

103. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Na závěr této kapitoly splníme dříve uvedený slib a dokážeme tvrzení iii) věty 5.23, tj. implikaci:

$$x_n \rightharpoonup x \Rightarrow \text{posloupnost } (x_n) \text{ je omezená.}$$

Důkaz. Uvažujme kanonické vnoření $S : X \rightarrow X^{**}$ (viz 5.14). Pak

$$\forall f \in X^* : (Sx_n)(f) = f(x_n) \rightarrow f(x) = (Sx)(f),$$

a proto

$$\forall f \in X^* : \sup \{ |(Sx_n)(f)| : n \in \mathbb{N} \} < \infty.$$

Odtud, z principu stejnoměrné omezenosti 5.30¹ a skutečnosti, že kanonické vnoření S je izometrickým izomorfismem X na $S(X)$, plyne

$$(\exists k \in \mathbb{R}^+) (\forall n \in \mathbb{N}) : \|Sx_n\| = \|x_n\| \leq k.$$

□

¹Připomeňme si, že X^* je úplný!



Obsah

104. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno



Kapitola 6

Diferenciální počet v NLP

Obsah

105. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno



Definice 6.1. Budiž

- X a Y normované lineární prostory,
- $f : X \rightarrow Y$,
- $x \in X$ vnitřní bod Df ,
- $h \in X$.

Existuje-li limita

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda \in \mathbb{R}}} \frac{f(x + \lambda h) - f(x)}{\lambda} =: D_h f(x),$$

nazýváme ji derivací f v bodě x ve směru h .

Existuje-li $D_h f(x)$ pro každé $h \in X$, nazýváme zobrazení

$$h \mapsto D_h f(x)$$

Gâteauxovým diferenciálem f v bodě x .

Poznámka 6.2. Existují zobrazení, jejichž Gâteauxův diferenciál v daném bodě

- neexistuje,
- existuje, ale není lineárním zobrazením,

Obsah

106. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

- existuje a je lineárním, ale ne spojitým zobrazením.

Definice 6.3. Je-li zobrazení

$$h \mapsto D_h f(x)$$

spojitým lineárním zobrazením X do Y (tj. patří-li do $\mathcal{L}(X, Y)$), nazýváme toto zobrazení Gâteauxovou (slabou) derivací f v bodě x a značíme $Df(x)$.^a

^aPro Gâteauxovu derivaci (existuje-li) tedy platí:

$$Df(x) \in \mathcal{L}(X, Y),$$

$$\forall h \in X : (Df(x))(h) = D_h f(x) \in Y.$$

Příklady 6.4.

1) Buďte X a Y NLP a $f : X \rightarrow Y$ lineární na X .

Pak

$$\forall x, h \in X : D_h f(x) = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda \in \mathbb{R}}} \frac{f(x + \lambda h) - f(x)}{\lambda} = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda \in \mathbb{R}}} \frac{f(x) + \lambda f(h) - f(x)}{\lambda} = f(h),$$

a proto

- není-li f spojitě na X , neexistuje Gâteauxova derivace f v žádném bodě $x \in X$ (viz příklad ii) na straně 78),



Obsah

107. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

• je-li $f \in \mathcal{L}(X, Y)$, je $Df(x) = f$ pro každé $x \in X$.

2) Uvažujme Banachův prostor $X = C(\langle 0, 1 \rangle)$, $\|x\| := \sup_{t \in \langle 0, 1 \rangle} |x(t)|$, a funkcionál $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ definovaný předpisem

$$f(x) := \int_0^1 x^2(t) dt.$$

Pak pro každé $x, h \in X$ platí

$$\begin{aligned} D_h f(x) &= \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda \in \mathbb{R}}} \frac{f(x + \lambda h) - f(x)}{\lambda} = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda \in \mathbb{R}}} \frac{\int_0^1 (x(t) + \lambda h(t))^2 dt - \int_0^1 x^2(t) dt}{\lambda} = \\ &= \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda \in \mathbb{R}}} \int_0^1 2x(t)h(t) dt + \underbrace{\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda \in \mathbb{R}}} \int_0^1 \lambda h^2(t) dt}_{=0, \text{ protože } |\int_0^1 \lambda h^2(t) dt| \leq |\lambda| \cdot \|h\|^2} = \int_0^1 2x(t)h(t) dt, \end{aligned}$$

a protože zobrazení

$$h \mapsto D_h f(x) = \int_0^1 2x(t)h(t) dt$$

je zřejmě lineární a omezené ($|\int_0^1 2x(t)h(t) dt| \leq 2 \cdot \|x\| \cdot \|h\|$), existuje pro každé $x \in X$ Gâteauxova derivace $Df(x)$ a platí

$$\forall h \in X : (Df(x))(h) = \int_0^1 2x(t)h(t) dt.$$



Obsah

108. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

3) Buď $X = C(\langle 0, 1 \rangle)$ s normou $\|x\| := \sup_{t \in \langle 0, 1 \rangle} |x(t)|$ a buď funkcionál $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ definován předpisem

$$f(x) := \int_0^1 \sin(x(t)) dt.$$

Pak pro každé $x, h \in X$ a $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ platí¹

$$\begin{aligned} \frac{f(x + \lambda h) - f(x)}{\lambda} &= \int_0^1 \frac{\sin(x(t) + \lambda h(t)) - \sin(x(t))}{\lambda} dt = \\ &= \int_0^1 \cos(\xi_\lambda(t)) h(t) dt \rightarrow \int_0^1 \cos(x(t)) h(t) dt \quad \text{pro } \lambda \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Protože navíc zobrazení

$$h \mapsto \int_0^1 \cos(x(t)) h(t) dt$$

¹Stačí dvakrát aplikovat Lagrangeovu větu o střední hodnotě:

- $(\forall t \in \langle 0, 1 \rangle) (\exists \xi_\lambda(t) \text{ ležící mezi } x(t) \text{ a } x(t) + \lambda h(t)):$

$$\sin(x(t) + \lambda h(t)) - \sin(x(t)) = \sin'(\xi_\lambda(t)) \lambda h(t) = \cos(\xi_\lambda(t)) \lambda h(t);$$

•

$$\left| \int_0^1 (\cos(\xi_\lambda(t)) - \cos(x(t))) h(t) dt \right| \leq \int_0^1 |\cos(\xi_\lambda(t)) - \cos(x(t))| \cdot |h(t)| dt \leq$$

$$\leq \|h\| \int_0^1 |\xi_\lambda(t) - x(t)| dt \leq \|h\| \cdot |\lambda| \cdot \|h\| \rightarrow 0 \text{ pro } \lambda \rightarrow 0.$$



Obsah

109. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

je lineární a omezené ($|\int_0^1 \cos(x(t))h(t) dt| \leq \|h\|$), je

$$\forall x, h \in X : (Df(x))(h) = \int_0^1 \cos(x(t))h(t) dt.$$

Definice 6.5. Budiž

- X a Y NLP,
- $f : X \rightarrow Y$,
- $x \in X$ vnitřní bod Df .

Řekneme, že f má v bodě x Fréchetův (totální) diferenciál, jestliže existuje spojité lineární zobrazení prostoru X do prostoru Y – budeme jej značit $f'(x)$ – takové, že

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - (f'(x))(h)}{\|h\|} = 0.$$

Zobrazení $f'(x) \in \mathcal{L}(X, Y)$ se též nazývá Fréchetova (silná) derivace f v bodě x .

Pozorování 6.6.

- i) Z existence Fréchetovy derivace f v bodě x již vyplývá jednoznačnost zobrazení $f'(x)$ výše uvedených vlastností.



Obsah

110. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



Důkaz. Předpokládejme, že $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(X, Y)$ a že

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - L_1(h)}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - L_2(h)}{\|h\|} = 0.$$

Potom taky

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x) - L_1(h)}{\|h\|} - \frac{f(x+h) - f(x) - L_2(h)}{\|h\|} \right] = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{L_2(h) - L_1(h)}{\|h\|}. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Buď nyní $h \in X$ libovolný bod.

- Je-li $\underline{h = 0}$, je zřejmě $\underline{L_1(h) = L_2(h) = 0}$ (L je lineární).
- Je-li $\underline{h \neq 0}$, uvažujme posloupnost

$$h_n := \frac{1}{n}h.$$

Protože $0 \neq h_n \rightarrow 0$, plyne z (6.1), že

$$\frac{L_2(h_n) - L_1(h_n)}{\|h_n\|} = \frac{\frac{1}{n}L_2(h) - \frac{1}{n}L_1(h)}{\frac{1}{n}\|h\|} = \frac{L_2(h) - L_1(h)}{\|h\|} \rightarrow 0,$$

a proto $\underline{L_2(h) = L_1(h)}$.

□

Obsah

111. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

ii) $f'(x)$ existuje $\Rightarrow$ zobrazení f je spojité v bodě x .

Důkaz.

$$\begin{aligned} \underline{x \neq x_n \rightarrow x} &\Rightarrow 0 \neq x_n - x \rightarrow 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{f(x + (x_n - x)) - f(x) - f'(x)(x_n - x)}{\|x_n - x\|} \rightarrow 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow f(x_n) - f(x) - \underbrace{f'(x)(x_n - x)}_{\rightarrow 0, \text{ protože } f'(x) \in \mathcal{L}(X, Y)} \rightarrow 0 \Rightarrow \underline{f(x_n) \rightarrow f(x)}. \end{aligned}$$

□

iii) $f'(x)$ existuje $\Rightarrow Df(x)$ existuje a platí $Df(x) = f'(x)$.

(Pozor!, neplatí: $Df(x)$ existuje $\Rightarrow f'(x)$ existuje.¹)

Důkaz. Stačí si uvědomit, že pro každé $h \in X$, $h \neq 0$, je

¹Stačí volit:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) := \begin{cases} 1, & y = x^2 \neq 0, \\ 0, & \text{jinde.} \end{cases}$$

Pak

- $Df(0) = 0$,
- $f'(0)$ neexistuje (funkce f není v 0 spojitá).



Obsah

112. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno



$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda \in \mathbb{R}}} \left\| \frac{f(x + \lambda h) - f(x)}{\lambda} - f'(x)(h) \right\|_Y &= \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda \in \mathbb{R}}} \left\| \frac{f(x + \lambda h) - f(x) - f'(x)(\lambda h)}{\lambda} \right\|_Y \cdot \frac{\|h\|_X}{\|h\|_X} = \\ &= \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda \in \mathbb{R}}} \frac{\|f(x + \lambda h) - f(x) - f'(x)(\lambda h)\|_Y}{\|\lambda h\|_X} \cdot \|h\|_X = 0, \end{aligned}$$

a proto

$$\forall h \in X : (Df(x))(h) = f'(x)(h).$$

□

Příklady 6.7.

- 1) Buď $f \in \mathcal{L}(X, Y)$. Už víme (viz příklad 1) na straně 107 a předchozí pozorování): existuje-li pro nějaké $x \in X$ Fréchetova derivace $f'(x)$, je $f'(x) = f$. A protože pro každé $x \in X$ platí

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x) - f(h)}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{\|h\|} = 0,$$

je

$$\forall x \in X : f'(x) = f.$$

- 2) Uvažujme

$$X = C(\langle 0, 1 \rangle), \quad \|x\| := \sup_{t \in \langle 0, 1 \rangle} |x(t)|,$$

$$f : X \rightarrow X, \quad f(x)(t) := \sin(x(t)).$$

Obsah

113. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Pak pro každé $x \in X$ existuje $f'(x)$ a platí

$$(\forall x \in X) (\forall h \in X) (\forall t \in \langle 0, 1 \rangle) :$$

$$f'(x) \in \mathcal{L}(X, X),$$

$$f'(x)(h) \in X,$$

$$(f'(x)(h))(t) = \cos(x(t))h(t).$$

Důkaz. Buď $x \in X$ libovolný bod. Definujme zobrazení $L : X \rightarrow X$ předpisem

$$(Lh)(t) = \cos(x(t))h(t).$$

Máme dokázat, že $L = f'(x)$.

Zobrazení L je zřejmě lineární a omezené:

$$\|Lh\| = \sup_{t \in \langle 0, 1 \rangle} |(Lh)(t)| = \sup_{t \in \langle 0, 1 \rangle} |\cos(x(t))h(t)| \leq \|h\|.$$

Navíc pro každé $h \in X$ platí (je třeba dvakrát použít šikovně Lagrangeovu větu o střední hodnotě):

$$\begin{aligned} \|f(x+h) - f(x) - Lh\| &= \sup_{t \in \langle 0, 1 \rangle} |\sin(x(t) + h(t)) - \sin(x(t)) - \cos(x(t))h(t)| = \\ &= \sup_{t \in \langle 0, 1 \rangle} |\cos(\xi(t))h(t) - \cos(x(t))h(t)| \leq \sup_{t \in \langle 0, 1 \rangle} [|\xi(t) - x(t)| \cdot |h(t)|] \leq \\ &\leq \sup_{t \in \langle 0, 1 \rangle} [|h(t)| \cdot |h(t)|] = \|h\|^2, \end{aligned}$$



Obsah

114. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

a proto

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - Lh\|}{\|h\|} = 0.$$

Dokázali jsme, že $f'(x) = L$.

□

3) Uvažujme nyní

$$X = L^2(0, 1), \quad \|x\| := \sqrt{\int_0^1 x^2(t) dt},$$

$$f : X \rightarrow X, \quad f(x)(t) := \sin(x(t)).$$

Pak existuje $Df(0)$ a platí

$$\underline{Df(0) = \text{Id}},$$

tzn.

$$\forall h \in X : (Df(0))(h) = D_h f(0) = h,$$

ale

$$\underline{\text{neexistuje } f'(0)}.$$

(Porovnejte s předchozím příkladem – máme zobrazení, pro něž derivace závisí na volbě prostoru!)

Náznak důkazu. Buďte $h \in X$ a $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zvoleny libovolně. Dá se ukázat, že



Obsah

115. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

$$\left\| \frac{f(0 + \lambda h) - f(0)}{\lambda} - h \right\| = \sqrt{\int_0^1 \left(\frac{\sin(\lambda h(t))}{\lambda} - h(t) \right)^2 dt} \rightarrow 0 \text{ pro } \lambda \rightarrow 0,$$

tzn.

$$\forall h \in X : D_h f(0) = h,$$

a proto (zobrazení $h \mapsto D_h f(0) = h$ patří do $\mathcal{L}(X, X)$):

$$\underline{Df(0) = \text{Id.}}$$

Zbývá nám dokázat, že $f'(0)$ neexistuje.

Protože už víme, že $Df(0) = \text{Id}$, stačí ukázat, že

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h) - f(0) - h}{\|h\|} \text{ není rovna } 0.$$

Definujme nyní posloupnost (h_n) v prostoru X předpisem

$$h_n(t) := \begin{cases} 2\pi, & 0 \leq t < \frac{1}{n}, \\ 0, & \frac{1}{n} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Pak

$$0 \neq \|h_n\| = \sqrt{\int_0^1 h_n^2(t) dt} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{n}} \rightarrow 0,$$

ale (využitím faktu, že pro každé $t \in \langle 0, 1 \rangle$ je $\sin(h_n(t)) = 0$)



Obsah

116. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

$$\frac{\|f(0 + h_n) - f(0) - h_n\|}{\|h_n\|} = \frac{\sqrt{\int_0^1 (\sin(h_n(t)) - h_n(t))^2 dt}}{\|h_n\|} = \frac{\|h_n\|}{\|h_n\|} = 1 \not\rightarrow 0.$$

□

Věta 6.8 (o derivaci složeného zobrazení).*Nechť*

- X, Y, Z jsou NLP,
- $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$,
- $x \in X, h \in X$,
- existují $g'(f(x))$ a $D_h f(x)$.

Potom existuje $D_h(g \circ f)(x)$ a platí

$$D_h(g \circ f)(x) = g'(f(x))(D_h f(x)).$$

Důsledek 6.9. Existuje-li navíc $Df(x)$ resp. $f'(x)$, je

$$D(g \circ f)(x) = g'(f(x)) \circ Df(x)$$

resp.

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x).$$



Obsah

117. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Příklad 6.10. Uvažujme

$$X = C(\langle 0, 1 \rangle), \|x\| := \sup_{t \in \langle 0, 1 \rangle} |x(t)|,$$

$$F : X \rightarrow \mathbb{R}, F(x) := \left(\int_0^1 x(t) dt \right)^3.$$

Pak

$$F = g \circ f,$$

kde

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := \int_0^1 x(t) dt,$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(t) := t^3.$$

Protože

- $\forall x \in X : f'(x) = f$
(f je zřejmě lineární a spojitý – a viz příklad 1) na straně 113),
- $\forall x \in X : g'(f(x)) = 3(f(x))^2$
(tj. $(\forall x \in X) (\forall t \in \mathbb{R}) : g'(f(x))(t) = 3(f(x))^2 t$),

je

$$\forall x \in X : F'(x) = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x) = 3(f(x))^2 \circ f,$$

tzn.

$$(\forall x \in X) (\forall h \in X) : (F'(x))(h) = 3 \left(\int_0^1 x(t) dt \right)^2 \int_0^1 h(t) dt.$$



Obsah

118. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Varovný příklad 6.11. Buď

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x) := (x, x^2),$$
$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, g(x, y) := \begin{cases} x, & y = x^2, \\ 0, & y \neq x^2. \end{cases}$$

Pak (a to si rozmyslete podrobně!)

$$(g \circ f)'(0) = D(g \circ f)(0) = \text{Id}, \text{ tzn. } \forall h \in \mathbb{R}: (D(g \circ f)(0))(h) = h,$$

$$Dg(f(0)) = Dg(0) = 0,$$

$$\forall h \in \mathbb{R}: (Df(0))(h) = (h, 0),$$

tzn.

$$\text{neplatí } D(g \circ f)(0) = (Dg)(f(0)) \circ Df(0).$$



Obsah

119. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

**Věta 6.12.***Nechť*

- X a Y jsou NLP,
- $f: X \rightarrow Y$,
- $Df: X \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ je *spojité zobrazení* v bodě $x \in X$ (tzn. $x_n \rightarrow x \Rightarrow Df(x_n) \rightarrow Df(x)$).

Pak existuje $f'(x)$ (a platí $f'(x) = Df(x)$).

Důsledek 6.13. Je-li navíc zobrazení Df spojité na otevřené množině $G \subset X$, existuje na G Fréchetova derivace f' a je na G spojitá.¹

Definice 6.14. Buďte X NLP a $f: X \rightarrow \mathbb{R}$.

Řekneme, že f má v bodě $x \in X$ lokální minimum resp. ostré lokální minimum, existuje-li $\varepsilon > 0$ takové, že

$$\forall y \in U(x, \varepsilon) : f(x) \leq f(y)$$

resp.

$$\forall y \in P(x, \varepsilon) := U(x, \varepsilon) \setminus \{x\} : f(x) < f(y).$$

¹Píšeme $f \in C^1(G)$.

Obsah

120. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Poznámka 6.15. Skoro každému je jasné, jak je definované lokální maximum resp. ostré lokální maximum.

Věta 6.16 (Eulerova nutná podmínka existence lokálního extrému).

Nechť

- X je NLP,
- $f : X \rightarrow \mathbb{R}$,
- f má v bodě $x \in X$ *lokální extrém*
(tzn. lokální minimum nebo lokální maximum),
- $h \in X$ je takové, že existuje $D_h f(x)$.

Pak

$$D_h f(x) = 0.$$

Důkaz. Uvažujme funkci

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(\lambda) := f(x + \lambda h).$$

Pak

- g má lokální extrém v 0 (protože f má lokální extrém v x),
- existuje $g'(0)$ (protože existuje $D_h f(x)$).



Obsah

121. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Odtud snadno plyne, že

$$0 = g'(0) = D_h f(x).$$

□

Všimněme si, že uvedená nutná podmínka je zobecněním známého tvrzení o lokálních extrémech funkcí z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$. Ukažme si i zobecnění tzv. postačující podmínky. K tomu ovšem potřebujeme i derivace vyšších řádů. Pro jednoduchost se omezíme pouze na Fréchetovy derivace.

Definice 6.17. Necht

- X a Y jsou NLP,
- $f : X \rightarrow Y$,
- f' existuje na nějakém okolí bodu $x \in X$ ($f' : X \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$).

Existuje-li Fréchetova derivace zobrazení f' v bodě x , nazýváme ji druhou Fréchetovou derivací f v bodě x a značíme $f''(x)$.

(Podobně lze definovat Fréchetovy derivace vyšších řádů.)



Obsah

122. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Poznámka 6.18. Pro vyšší derivace se situace stává poněkud nepřehlednou, neboť

$$\begin{aligned}
 f &: X \rightarrow Y; \\
 f'(x) &\in \mathcal{L}(X, Y), \quad f' : X \rightarrow \mathcal{L}(X, Y); \\
 f''(x) &\in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y)), \quad f'' : X \rightarrow \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y)); \\
 f'''(x) &\in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y))), \quad f''' : X \rightarrow \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y))); \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Dá se však ukázat, že výše uvedené prostory $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y))$, $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y)))$, ... lze ztotožnit s prostory tzv. multilineárních zobrazení.

Speciálně:

$$f''(x) \in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y)) \cong \mathcal{L}(X \times X, Y).$$



Obsah

123. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

**Věta 6.19 (Lagrangeova postačující podmínka existence lok. extrému).**

Nechť

- X je NLP,
- $f : X \rightarrow \mathbb{R}$,
- $x \in X$ je kritickým bodem f (tzn. $f'(x) = 0$),
- f'' je *spojitá na nějakém okolí* bodu x .

Pak platí:

i) *existuje-li* $\alpha \in \mathbb{R}^+$ *takové, že*

$$\forall h \in X : (f''(x)(h))(h) \cong f''(x)(h, h) \geq \alpha \|h\|^2,$$

má f *v bodě* x *ostré lokální minimum;*

ii) *existuje-li* $\alpha \in \mathbb{R}^+$ *takové, že*

$$\forall h \in X : (f''(x)(h))(h) \cong f''(x)(h, h) \leq -\alpha \|h\|^2,$$

má f *v bodě* x *ostré lokální maximum.*

Obsah

124. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Snad hezké a určité užitečné příklady na závěr.

Příklad 6.20. Uvažujme okrajovou úlohu

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) \text{ v } (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (6.2)$$

Tato úloha může popisovat (např.) stacionární rozložení teploty v tenké tyči, na jejíchž koncích udržujeme nulovou teplotu:

$u = u(x) \dots$ teplota v příčném řezu,

$f = f(x) \dots$ souvisí s tepelnými zdroji uvnitř tyče.

Uvažujme-li – fyzikálně rozumný – případ, kdy rozložení zdrojů není spojitě – např.

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle, \\ -1, & x \in \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle, \end{cases}$$

neexistuje klasické řešení dané úlohy.

Je proto přirozené pojem řešení zobecnit.

Naznačme, jak lze postupovat:



Obsah

125. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Předpokládejme nejdříve, že u je klasickým řešením úlohy (6.2), tzn. že

$$\begin{aligned} u &\in C^2(\langle 0, 1 \rangle), \\ \forall x \in \langle 0, 1 \rangle : -u''(x) &= f(x), \\ u(0) = u(1) &= 0. \end{aligned}$$

Pak pro každou funkci $v \in C^1(\langle 0, 1 \rangle)$ takovou, že $v(0) = v(1) = 0$, platí

$$\int_0^1 -u''(x)v(x) \, dx = \int_0^1 f(x)v(x) \, dx$$

(oba (Riemannovy) **integrály existují** – integrujeme spojité funkce).

Upravme integrál na levé straně pomocí „per partes“:

$$\int_0^1 -u''(x)v(x) \, dx = \underbrace{[-u'(x)v(x)]_0^1}_{=0, \text{ protože } v(0)=v(1)=0} + \int_0^1 u'(x)v'(x) \, dx.$$

Tedy – řešení u musí pro každou výše popsanou funkci v splňovat rovnost

$$\int_0^1 u'(x)v'(x) \, dx = \int_0^1 f(x)v(x) \, dx. \quad (6.3)$$

Tento vztah, ve kterém se již nevyskytuje u'' , lze vzít za základ definice tzv. slabého řešení úlohy (6.2).

Mimochodem: velmi často je výsledkem fyzikálních úvah (pomocí nichž se snažíme sestavit model – rovnici popisující nějaký jev) právě analogická „integrální rovnice“. K diferenciální rovnici se dostáváme za **dodatečného** předpokladu hladkosti řešení (v našem



Obsah

126. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

případě: $u \in C^2(\langle 0, 1 \rangle)$). Definovat řešení daného problému pomocí té integrální rovnice je tak v jistém smyslu přirozenější a správnější.

Podstatnou je otázka, kde – tj. v jakém prostoru – máme řešení našeho problému hledat.

Nabízí se nám vektorový prostor

$$C_0^1(\langle 0, 1 \rangle) := \{u \in C^1(\langle 0, 1 \rangle) : u(0) = u(1) = 0\}.$$

Funkce z tohoto prostoru splňují okrajové podmínky a spojitost jejich derivací se nám „hodí“ pro existenci integrálů v příslušné integrální rovnici (6.3).

Jakou však máme na $C_0^1(\langle 0, 1 \rangle)$ zvolit normu? Zvolíme-li normu

$$\|x\| := \sup_{t \in \langle 0, 1 \rangle} |x(t)| + \sup_{t \in \langle 0, 1 \rangle} |x'(t)|,$$

získáme sice Banachův prostor, ale tato norma jistě neodpovídá „duchu“ dané integrální rovnice.

Ukazuje se užitečným definovat na $C_0^1(\langle 0, 1 \rangle)$ takovýto **skalární součin** (ten již indukuje „šikvnější“ **normu**):

$$(u, v) := \int_0^1 u'(x)v'(x) dx. \quad (6.4)$$

Přesvědčme se (přímo z definice 4.1), že vztah (6.4) skutečně definuje na $C_0^1(\langle 0, 1 \rangle)$ skalární součin:

- $\forall v \in C_0^1(\langle 0, 1 \rangle) : u \mapsto \int_0^1 u'(x)v'(x) dx$ je lineární zobrazení,
- $\forall u, v \in C_0^1(\langle 0, 1 \rangle) : \int_0^1 u'(x)v'(x) dx = \int_0^1 v'(x)u'(x) dx,$



Obsah

127. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

- $\forall u \in C_0^1(\langle 0, 1 \rangle) : \int_0^1 (u'(x))^2 dx \geq 0,$
 $u \equiv 0 \Rightarrow \int_0^1 (u'(x))^2 dx = 0,$
 $\int_0^1 (u'(x))^2 dx = 0 \Rightarrow u' \equiv 0 \Rightarrow [u \text{ je konstantní} + \text{předp. } u(0) = 0] \Rightarrow u \equiv 0.$

Dá se ukázat, že $C_0^1(\langle 0, 1 \rangle)$ s indukovanou normou

$$\|u\| := \sqrt{\int_0^1 (u'(x))^2 dx}$$

není úplný prostor.

Definujme Sobolevův prostor $W_0^{1,2}(0, 1)$ jako zúplnění prostoru $C_0^1(\langle 0, 1 \rangle)$ vzhledem k výše uvedené normě.

Je tedy $W_0^{1,2}(0, 1)$ Hilbertovým prostorem.

Navíc se dá ukázat, že

$$W_0^{1,2}(0, 1) \subset C(\langle 0, 1 \rangle)$$

a že pro každé $f \in L^2(0, 1)$ je zobrazení

$$F(v) := \int_0^1 f(x)v(x) dx$$

spojitým lineárním funkcioálem na $W_0^{1,2}(0, 1)$.¹

¹Integrály vystupující v definici funkcioálu $F \in (W_0^{1,2}(0, 1))^*$ a v dalším jsou ovšem integrály Lebesgueovy; plné pochopení tohoto a následujícího příkladu tak bude možné až později. Zvědaví čtenáři však mohou nahlédnout už teď do textu [1].



Obsah

128. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Nyní přistupme k definici slabého řešení.

Definice 6.21. Buď $f \in L^2(0, 1)$. Funkci $u \in W_0^{1,2}(0, 1)$ nazýváme slabým řešením okrajové úlohy (6.2), platí-li

$$\forall v \in W_0^{1,2}(0, 1) : \int_0^1 u'(x)v'(x) dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx.$$

Věta 6.22. *Ať $f \in L^2(0, 1)$. Pak existuje právě jedno slabé řešení úlohy (6.2).*

Ukažme si dva různé důkazy této věty.

Důkaz 1. Už víme, že zobrazení $v \mapsto \int_0^1 f(x)v(x) dx$ je prvkem $(W_0^{1,2}(0, 1))^*$. Existuje proto (viz Rieszovu větu o reprezentaci 5.13) právě jedno $u \in W_0^{1,2}(0, 1)$ takové, že

$$\forall v \in W_0^{1,2}(0, 1) : \int_0^1 u'(x)v'(x) dx = (u, v) = \int_0^1 f(x)v(x) dx.$$

□

Důkaz 2.

a) Existence slabého řešení.

Definujme funkcionál $J : W_0^{1,2}(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$J(u) := \frac{1}{2} \int_0^1 (u'(x))^2 dx - \int_0^1 f(x)u(x) dx.$$



Obsah

129. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Pak

$$\forall u, v \in W_0^{1,2}(0, 1) : J'(u)(v) = \int_0^1 u'(x)v'(x) dx - \int_0^1 f(x)v(x) dx,$$

a proto

$$u \text{ je slabým řešením úlohy (6.2)} \Leftrightarrow J'(u) = 0. \quad (6.5)$$

Nyní si uvědomme, že **stačí**, dokážeme-li, že J nabývá na $W_0^{1,2}(0, 1)$ svého minima, tzn.

$$\exists u \in W_0^{1,2}(0, 1) : J(u) = \inf_{v \in W_0^{1,2}(0, 1)} J(v).$$

Potom totiž J má v bodě u i lokální minimum, a proto (viz Eulerovu nutnou podmínku 6.16) $J'(u) = 0$ (a viz (6.5)).

Všimněme si, že z omezenosti zobrazení $v \mapsto \int_0^1 f(x)v(x) dx$ plyne

$$(\exists k \in \mathbb{R}^+) \left(\forall v \in W_0^{1,2}(0, 1) \right) : J(v) = \frac{1}{2} \|v\|^2 - \int_0^1 f(x)v(x) dx \geq \frac{1}{2} \|v\|^2 - k \cdot \|v\|,$$

a proto

- $\inf_{v \in W_0^{1,2}(0, 1)} J(v) := d \in \mathbb{R} \dots$ funkcionál J je zdola omezený,
- $\lim_{\|v\| \rightarrow \infty} J(v) = +\infty \dots$ funkcionál J je slabě koercivní.

Nyní uvažujme posloupnost (u_n) na $W_0^{1,2}(0, 1)$ takovou, že

$$J(u_n) \rightarrow d$$



Obsah

130. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

(taková **existuje!**). Tato posloupnost je jistě omezená (J je slabě koercivní), a proto $(W_0^{1,2}(0,1))$ je Hilbertův, a tedy **reflexivní prostor** – viz stranu 90) existuje $u \in W_0^{1,2}(0,1)$ a posloupnost vybraná z posloupnosti (u_n) – značme ji stejně – taková, že

$$u_n \rightharpoonup u$$

(viz Eberleinovu-Šmuljanovu větu na straně 99).

A dál je to snadné: $u_n \rightharpoonup u$, a proto

$$\|u\| \leq \liminf \|u_n\| \text{ (viz tvrzení iv) věty 5.23),}$$

$$\int_0^1 f(x)u_n(x) dx \rightarrow \int_0^1 f(x)u(x) dx.$$

Navíc předpokládáme, že

$$\begin{aligned} d &= \lim J(u_n) = \liminf J(u_n) = \liminf \left[\frac{1}{2} \|u_n\|^2 - \int_0^1 f(x)u_n(x) dx \right] = \\ &= \liminf \frac{1}{2} \|u_n\|^2 - \int_0^1 f(x)u(x) dx \geq \frac{1}{2} \|u\|^2 - \int_0^1 f(x)u(x) dx = J(u), \end{aligned}$$

a proto

$$J(u) = d = \inf_{v \in W_0^{1,2}(0,1)} J(v).$$

b) Jednoznačnost slabého řešení.

Buďte $u_1, u_2 \in W_0^{1,2}(0,1)$ slabá řešení (6.2). Pak



Obsah

131. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno



$$\begin{aligned}
 \|u_1 - u_2\|^2 &= \int_0^1 (u_1 - u_2)'(u_1 - u_2)' dx = \\
 &= \int_0^1 u_1'(u_1 - u_2)' dx - \int_0^1 u_2'(u_1 - u_2)' dx = \\
 &= \int_0^1 f(u_1 - u_2) dx - \int_0^1 f(u_1 - u_2) dx = 0,
 \end{aligned}$$

a proto

$$u_1 = u_2.$$

□

Příklad 6.23. Uvažujme okrajovou úlohu

$$\begin{cases} -u''(x) + u^3(x) = f(x), & x \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \quad (6.6)$$

kde $f \in L^2(0, 1)$.

Slabým řešením úlohy (6.6) nazýváme funkci $u \in W_0^{1,2}(0, 1)$ takovou, že

$$\forall v \in W_0^{1,2}(0, 1) : \int_0^1 u'(x)v'(x) dx + \int_0^1 u^3(x)v(x) dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx.$$

Obsah

132. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Tvrzení 6.24. Existuje slabé řešení úlohy (6.6).

Důkaz jenom naznačíme.

Buď

$$J(u) := \frac{1}{2} \int_0^1 (u'(x))^2 dx + \frac{1}{4} \int_0^1 u^4(x) dx - \int_0^1 f(x)u(x) dx$$

$$(J : W_0^{1,2}(0,1) \rightarrow \mathbb{R}).$$

Pak pro každé $u, v \in W_0^{1,2}(0,1)$ platí:

- $J'(u)(v) = \int_0^1 u'(x)v'(x) dx + \int_0^1 u^3(x)v(x) dx - \int_0^1 f(x)v(x) dx$, a proto

$$u \text{ je slabým řešením (6.6)} \Leftrightarrow J'(u) = 0;$$

- $J(v) = \frac{1}{2}\|v\|^2 + \frac{1}{4} \int_0^1 v^4(x) dx - \int_0^1 f(x)v(x) dx \geq \frac{1}{2}\|v\|^2 - k \cdot \|v\|$, a proto

J je zdola omezený a slabě koercivní.

Navíc se dá dokázat, že J je slabě zdola polospojité funkcionál, tzn.

$$u_n \rightharpoonup u \Rightarrow J(u) \leq \liminf J(u_n).$$

A zbývající část důkazu je stejná jako v předchozím příkladu. Najdeme posloupnost (u_n) ve $W_0^{1,2}(0,1)$ takovou, že

$$J(u_n) \rightarrow \inf_{v \in W_0^{1,2}(0,1)} J(v) \in \mathbb{R}!$$



Obsah

133. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Tato posloupnost je nutně omezená (J je **slabě koercivní**), a proto z ní lze vybrat slabě konvergentní podposloupnost¹ (viz Eberleinovu-Šmuljanovu větu). Získáme tak posloupnost (u_n) ve $W_0^{1,2}(0,1)$ a bod $u \in W_0^{1,2}(0,1)$ tak, že

- $J(u_n) \rightarrow \inf_{v \in W_0^{1,2}(0,1)} J(v) \in \mathbb{R}$,
- $u_n \rightharpoonup u$.

Odtud plyne (J je **slabě zdola polospojité**), že

$$J(u) \leq \liminf J(u_n) = \inf_{v \in W_0^{1,2}(0,1)} J(v),$$

$$J(u) = \inf_{v \in W_0^{1,2}(0,1)} J(v).$$

Funkcionál J má zřejmě v bodě u i lokální minimum, a protože existuje $J'(u)$, je

$$J'(u) = 0$$

(viz Eulerovu nutnou podmínku 6.16).

□



Obsah

134. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

¹Opět ji značme stejně.



Literatura

- [1] J. Bouchala: *Variační metody*, <http://mi21.vsb.cz/>, 2011.
- [2] P. Drábek, A. Kufner: *Úvod do funkcionální analýzy*, skripta ZČU, Plzeň, 1993.
- [3] P. Drábek, A. Kufner: *Funkcionální analýza*, skripta ZČU, Plzeň, 1994.
- [4] P. Drábek, J. Milota: *Methods of Nonlinear Analysis (Applications to Differential Equations)*, Birkhäuser Verlag AG, Berlin, 2007.
- [5] S. Fučík, A. Kufner: *Nelineární diferenciální rovnice*, SNTL, Praha, 1978.
- [6] S. Fučík, J. Milota: *Matematická analýza II*, skripta UK, Praha, 1980.
- [7] J. Lukeš: *Zápisky z funkcionální analýzy*, skripta UK, Karolinum, Praha, 1998.
- [8] E. Zeidler: *Applied Functional Analysis (Applications to Mathematical Physics)*, Springer-Verlag, New York, 1995.

Obsah

135. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

- [9] E. Zeidler: *Applied Functional Analysis (Main Principles and Their Applications)*, Springer-Verlag, New York, 1995.



Obsah

136. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Rejstřík

Banachův prostor, 40

Báze

ortonormální, 56, 62

vektorového prostoru, 14

Besselova nerovnost, 60

Bod

hraniční, 20

hromadný, 20

izolovaný, 20

okolí, 20

vnější, 20

vnitřní, 20

Bolzanova – Cauchyho podmínka, 18

Derivace

Fréchetova

vyšších řádů, 122

Fréchetova (silná), 110

Gâteauxova (slabá), 107

ve směru, 106

Diferenciál

Fréchetův (totální), 110

Gâteauxův, 106

Dimenze vektorového prostoru, 12

Duální prostor, 77

Ekvivalentní normy, 43

Extrémy

lokální, 120

Fourierova řada, 60

Fréchetova (silná) derivace, 110

Fréchetova derivace vyšších řádů, 122

Fréchetův (totální) diferenciál, 110

Funkcionál

slabě koercivní, 130



Obsah

137. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

slabě zdola polospojité, 133

zdola omezený, 130

Gâteauxova (slabá) derivace, 107

Gâteauxův diferenciál, 106

Hilbertův prostor, 50

Hranice množiny, 20

Hraniční bod, 20

Hromadný bod, 20

Hustá podmnožina, 47

Indukovaná metrika, 40, 50

Indukovaná norma, 50

Izolovaný bod, 20

Izometrický izomorfismus, 43

Izometricky izomorfní prostory, 43

Izomorfismus, 43

Izomorfní prostory, 43

Jádro zobrazení, 79

Kanonické vnoření, 89

Klasické řešení okrajové úlohy, 126

Kontraktivní operátor, 22

Konvergence

silná, 40

slabá, 96

Legendreovy polynomy, 67

Limita

posloupnosti, 17

zobrazení, 72

Lineárně

nezávislá množina, 12

nezávislé prvky, 12

závislé prvky, 12

Lineární

forma, 79

obal množiny, 13

Lineární zobrazení, 43

omezené, 73

Lipschitzovská spojitost, 26

Lokální extrémy, 120

Lokální maximum, 121

Lokální minimum, 120

Maximum

lokální, 121

ostré, 121

Metoda prostých iterací, 25

Metrický prostor, 15

Metrika, 15



Obsah

138. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

- L^2 -metrika, 17
„pampelišková“, 16
diskrétní, 17
eukleidovská, 16
indukovaná, 40, 50
maximová, 16
součtová, 16
supremová, 17
trojúhelníková nerovnost, 15
- Minimum
lokální, 120
ostré, 120
- Množina
1. kategorie, 36
2. kategorie, 36
hranice, 20
lineárně nezávislá, 12
lineární obal, 13
otevřená, 21
řidká, 36
uzávěr, 20
uzavřená, 21
vnějšek, 20
vnitřek, 20
- Multilineární zobrazení, 123
- Nerovnost
Besselova, 60
Cauchyho – Schwartzova – Buňakovského, 51
- Norma, 39
eukleidovská, 40
indukovaná, 50
maximová, 41
součtová, 41
supremová, 41
- Normovaný lineární prostor, 39
- Normy
ekvivalentní, 43
- Okolí
bodu, 20
- Omezená posloupnost, 96
- Operátor
kontraktivní, 22
- Ortogonální
prvky, 54
systém, 54
- Ortogonální projekce, 81
- Ortonormální
báze, 56, 62
systém, 54



Obsah

139. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

- Ostré lokální maximum, 121
Ostré lokální minimum, 120
Otevřená množina, 21
- Parsevalova rovnost, 60
Podmínka
 Bolzanova – Cauchyho, 18
Podmnožina
 hustá, 47
Podprostor
 vektorový, 11
Posloupnost
 cauchyovská, 18
 částečných součtů, 42
 konvergentní, 18
 omezená, 96
Projekce
 ortogonální, 81
Prosté iterace, 25
Prostor
 $\mathcal{L}(X, Y)$, 76
 $L^2(\Omega)$, 63
 Banachův, 40
 duální (X^*), 77
 Hilbertův, 50
 metrický, 15
 normovaný lineární, 39
 reflexivní, 89
 se skalárním součinem, 49
 separabilní, 65
 Sobolevův, 128
 úplný, 18
 vektorový, 8
 báze, 14
 triviální, 9
 zúplnění, 48
Prostory
 izometricky izomorfní, 43
 izomorfní, 43
Prvky
 lineárně nezávislé, 12
 lineárně závislé, 12
 ortogonální, 54
Reflexivní prostor, 89
Rovnoběžníkové pravidlo, 53
Rovnost
 Parsevalova, 60
Řada
 Fourierova, 60
Řešení okrajové úlohy



Obsah

140. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

klasické, 126

slabé, 129

Řídká množina, 36

Separabilní prostor, 65

Silná konvergence, 40

Skalární součin, 49

Slabá konvergence, 96

Slabě koercivní funkcionál, 130

Slabé řešení okrajové úlohy, 129

Slabě zdola polospojitý funkcionál, 133

Sobolevův prostor, 128

Spojité zobrazení, 73

Systém

ortogonální, 54

ortonormální, 54

úplný, 67

Úplný

ortonormální systém, 67

prostor, 18

Uzávěr množiny, 20

Uzavřená množina, 21

Vektorový

podprostor, 11

prostor, 8

dimenze, 12

triviální, 9

Věta

Baireova, 37

Banachova – Steinhausova, 102

Banachova o pevném bodě, 23

Brouwerova o pevném bodě, 34

Cantorova, 35

Cantorova o zúplnění, 48

Eberleinova – Šmuljanova, 99

Eulerova nutná podmínka existence lokálního extrému, 121

Hahnova – Banachova, 91

Lagrangeova postačující podmínka existence lokálního extrému, 124

nutná podmínka konvergence, 18

o aproximaci, 57

o derivaci složeného zobrazení, 117

o existenci slabého řešení, 129

o Fourierových řadách, 60

o slabé konvergenci, 96

o ortogonální projekci v H -prostoru, 81

o Cauchyho – Schwartzově – Buňakovského nerovnosti, 51



Obsah

141. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Picardova – Lindelöfova, 31
princip stejnoměrné omezenosti, 101
Pythagorova, 57
Rieszova – Fischerova, 68
Rieszova o reprezentaci, 87
rovnoběžníkové pravidlo, 53
Schmidtův ortonormalizační proces, 64
Vnějšek množiny, 20
Vnější bod, 20
Vnitřek množiny, 20
Vnitřní bod, 20
Vnoření
 kanonické, 89
Zdola omezený funkcionál, 130
Zobrazení
 lineární, 43
 omezené, 73
 multilineární, 123
 spojité, 73
Zúplnění prostoru, 48



Obsah

142. strana ze 142



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno