INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky

Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra elektrotechniky

TEORETICKÁ ELEKTROTECHNIKA II

Učební text

Petr Orság a Josef Punčochář

Ostrava 2011

Studijní materiály pro studijní program Elektrotechnika fakulty elektrotechniky a informatiky
Jazyková korektura: nebyla provedena.

Určeno pro projekt:

Název: Matematika pro inženýry 21. století
Číslo: CZ.1.07/2.2.00/07.0332
Realizace: VŠB – Technická univerzita Ostrava
Projekt je spolufinancován z prostředků ESF a státního rozpočtu ČR

Předmluva

Vážený čtenáři,

text, který právě čtete, vznikl v rámci řešení projektu **„Matematika pro inženýry 21. století -- inovace výuky matematiky na technických školách v nových podmínkách rychle se vyvíjející informační a technické společnosti“.** Projekt je řešen na Vysoké škole báňské – Technické univerzitě v Ostravě a Západočeské univerzitě v Plzni v období 2009 -- 2012.

Hlavní motivací projektu je potřeba reagovat na změny významu jednotlivých partií matematiky při řešení praktických problémů, způsobenou zejména velkým pokrokem v matematickém modelování, dramatickým zlepšováním software a rychlým zvyšováním výpočetních kapacit moderních počítačů. Inženýři nyní běžně využívají stále se vyvíjející komplikované softwarové produkty založené na matematických pojmech, se kterými se v kurzech matematiky buďto nesetkají vůbec nebo v nevhodné formě. Na druhé straně prezentace některých pojmů v základních kurzech neodráží z nejrůznějších důvodů potřeby odborných kateder. Bohužel tento stav ztěžuje studentům aktivní používání získaných vědomostí v odborných předmětech i orientaci v rychle se vyvíjejících metodách inženýrské praxe.

Cílem projektu je inovace matematických a některých odborných kurzů na technických vysokých školách s cílem získat zájem studentů, zvýšit efektivnost výuky, zpřístupnit prakticky aplikovatelné výsledky moderní matematiky a vytvořit předpoklady pro efektivní výuku inženýrských předmětů. Zkvalitnění výuky matematiky budoucích inženýrů chceme dosáhnout po stránce formální využitím nových informačních technologií přípravy elektronických studijních materiálů a po stránce věcné pečlivým výběrem vyučované látky s důsledným využíváním zavedených pojmů v celém kurzu matematiky s promyšlenou integrací moderního matematického aparátu do vybraných inženýrských předmětů. Metodiku výuky matematiky a její atraktivnost pro studenty chceme zlepšit důrazem na motivaci a důsledným používáním postupu "od problému k řešení".

V rámci projektu vytváříme 40 nových výukových materiálů z oblastí matematické analýzy, lineární algebry, numerických metod, metod optimalizace, diskrétní matematiky, teorie grafů, statistiky a několika odborných kurzů. Všechny hotové výukové materiály budou volně k dispozici na webových stránkách projektu http://mi21.vsb.cz

Autoři předem děkují za všechny případné nápady a návrhy k vylepšení textu i za upozornění na chyby.

Obsah

1. Trojfázové obvody

Motivace Po prostudování této kapitoly budete umět

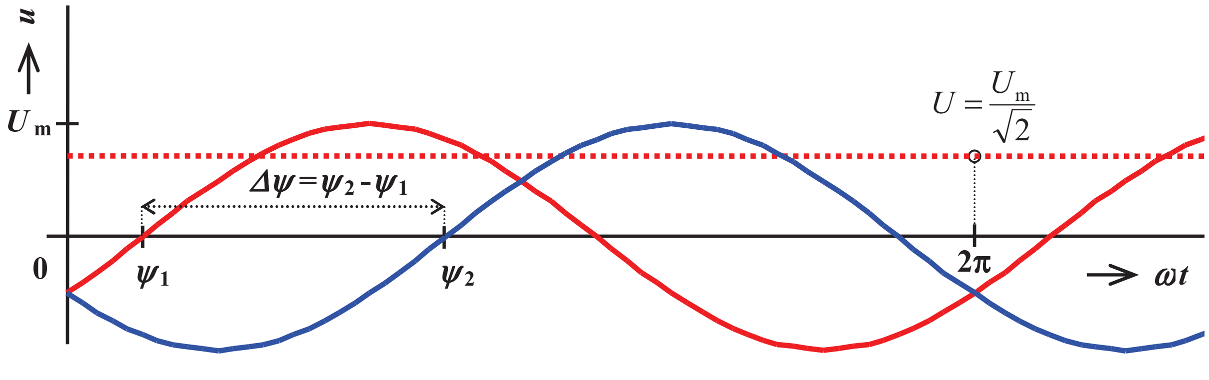
- modelovat trojfázový zdroj a trojfázovou zátěž
- vymezit souměrný zdroj a symetrickou zátěž
- vytvořit trojfázovou soustavu napětí a rozlišovat sled jejich fází
- definovat vyváženou soustavu napětí
- vymezit podmínku optimálního provozu trojfázového zdroje
- vysvětit princip činnosti alternátoru a točivého magnetického pole

1.1. Prvky trojfázového obvodu

Trojfázový obvod vznikne principiálně spojením trojfázového zdroje a trojfázové zátěže vedením. Zdroj i zátěž mohou být zapojeny různým způsobem. Klasickým trojfázovým zdrojem je alternátor v elektrárně, jehož střídavá napětí jsou dostupná spotřebitelům elektrické energie po transformaci a přenosu energie vedením v podobě trojfázové soustavy napětí, která může být tří nebo čtyřvodičová. V technické praxi se střídavá napájecí soustava historicky prosadila pro své výhodné vlastnosti i snadnou výrobu, rozvod a spotřebu elektrické energie. Jejímu rozšíření napomohl i jednoduchý způsob vytváření točivého magnetického pole a masově využití trojfázového asynchronnímu motoru v průmyslu. Pro úplnost poznamenejme, že trojfázové obvody patří mezi vícefázové střídavé obvody.

❑ Trojfázový zdroj

Trojfázový zdroj modelujeme zapojením tří jednofázových zdrojů napětí zpravidla s harmonickými časovými průběhy (funkcemi) obecně charakterizovanými parametry: amplitudou $U_\mathrm{m} = \sqrt{2}U$, kmitočtem f nebo periodou T a počáteční fází napětí ψ. Parametry harmonické funkce mohou být obecně různé, je ale výhodné, aby jejich amplitudy byly shodné, měly stejné kmitočty a stálý fázový posun $\Delta\psi$ mezi po sobě následujícími časovými průběhy fázových napětí viz obr. 1.1. Takovýto zdroj potom nazýváme souměrný, stejně jako napěťovou soustavu, kterou je v praxi zvykem označovat efektivní hodnotou sdruženého napětí, viz dále a hodnotou kmitočtu.

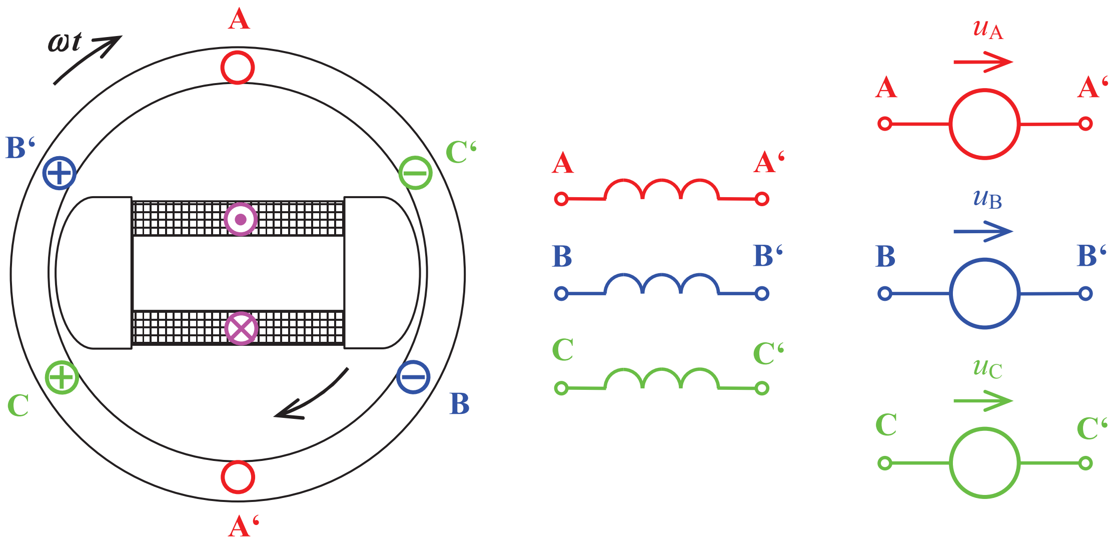


Obr. 1.1 Parametry průběhů trojfázové soustavy napětí

Technickou realizací trojfázového zdroje je trojfázový alternátor na obr. 1.2, což je střídavý generátor se soustavou vinutí natočených o 120° elektrických, ve kterých se následkem časové změny magnetického toku vyvolané rovnoměrným otáčivým pohybem stejnosměrného elektromagnetu indukují napětí $u = \frac{\mathrm{d}\,\Phi(t)}{\mathrm{d}t}$ stejného kmitočtu vzájemně posunutá o úhel $\Delta\psi = \frac{2\pi}{3}$ resp. 120°. Úhlový kmitočet indukovaných napětí $\omega = 2\pi f$ je v našem případě přímo daný úhlovou rychlostí otáčejícího se elektromagnetu, protože natočení elektromagnetu o jednu otočku odpovídá jedna perioda indukovaných napětí.

Poznamenejme, že v teorii elektromagnetického pole je magnetický tok v homogenním magnetickém poli definovaný skalárním součinem vektorů magnetické indukce $\boldsymbol{B}$ a plochy $\boldsymbol{S}$. Platí pro něj $\Phi(t) = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{S} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\cdot S = BS\cos(\alpha) = \Phi_m \cos(\omega t)$, kde α označuje úhel mezi vektorem indukce $\boldsymbol{B}$ normálou plochy $\boldsymbol{n}$. Změnu magnetického toku procházejícího rovinami závitů vinutí $\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$ tak můžeme interpretovat buď z pohledu pozorovatele pohybujícího se na elektromagnetu jako následek změny vektoru plochy $\boldsymbol{S}$ v čase, nebo z pohledu pozorovatele spojeného s trojfázovým vinutím generátoru jako následek změny vektoru magnetické indukce $\boldsymbol{B}$ v čase. Je-li tedy osa magnetu kolmá k rovině závitů vinutí, neindukuje se ve vinutí napětí, což je i případ vinutí A – A‘alternátoru na obr. 1.2. Skalární součin vektorů má totiž hodnotu 0, protože osa elektromagnetu a osa vinutí svírá pravý úhel.

Každému vinutí se říká fáze. Má svůj začátek a konec. Označme je v pořadí A – A‘, B – B‘, C – C‘. Otáčí-li se magnet podle obr. 1.2 ve směru hodinových ručiček, sled fází je A, B, C a koresponduje s pořadím písmen použitých k rozlišení počátků vinutí. Sled odpovídá také pořadí maxim indukovaných napětí tak, jak za sebou následují v čase na obr. 1.3 a 1.4. Maxima ve fázích B a C vůči fázi A jsou vzhledem ke konstrukčnímu uspořádání vinutí posunuta o úhel -120° resp. -240°, stejně jako průběhy indukovaných napětí, které se tak zpožďují v čase o dobu $\frac{T}{3}$ resp. $\frac{2T}{3}$.



Obr. 1.2 Trojfázový zdroj napětí: řez alternátorem, idealizovaný obvodový model vinutí, náhradní schéma

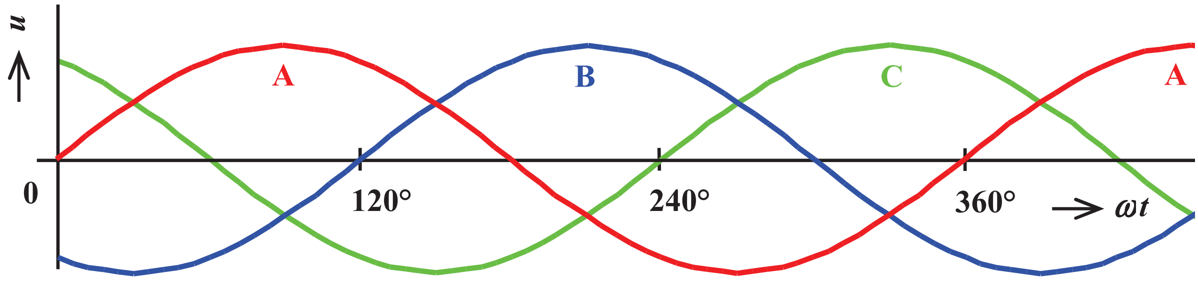
Takto vzniklá soustava napětí má přívlastek trojfázová a za předpokladu, že v čase $t = 0$ s je poloha magnetu totožná s polohou na obrázku alternátoru, ji modelujeme soustavou fázových napětí o okamžitých hodnotách

$$u_A = U_{mA} \sin(\omega t),$$

$$u_B = U_{mB} \sin(\omega t - 120°),$$

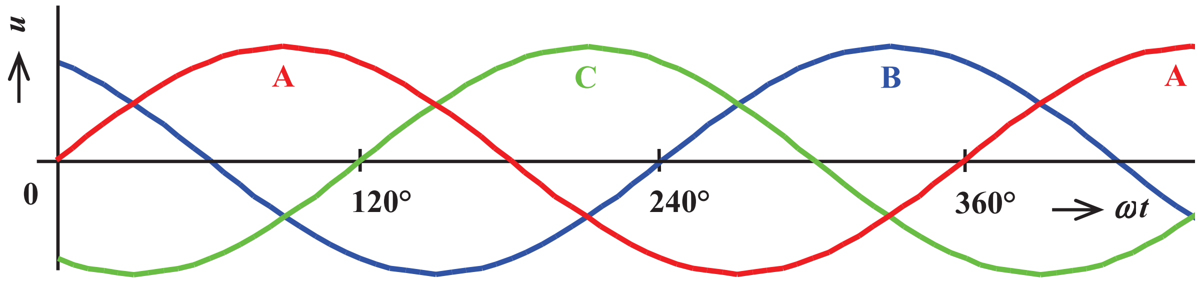
$$u_C = U_{mC} \sin(\omega t - 240°) = U_{mC} \sin(\omega t + 120°),$$

která tvoří souslednou soustavu napětí na obr. 1.3 se sledem fází A, B, C.



Obr. 1.3 Sousledná soustava napětí

Otáčí-li se magnet opačným směrem je sled fází A, C, B. Průběhy napětí fází B a C si zaměnily na časové ose své pozice, čímž vznikla zpětná soustava napětí zobrazená na obr. 1.4.



Obr. 1.4 Zpětná soustava napětí

Je-li součet okamžitých hodnot fázových napětí v každém časovém okamžiku nulový, je soustava napětí zdroje vyvážená a platí pro ni

$$u_{\mathrm{A}} + u_{\mathrm{B}} + u_{\mathrm{C}} = 0\,.$$

Příklad 1.1.

Trojfázová soustava napětí je popsána průběhy napětí $u_{\mathrm{A}} = 326{,}6\sin(314{,}16\,t)$, $u_{\mathrm{B}} = 326{,}6\sin(314{,}16\,t)$ *a* $u_{\mathrm{C}} = 326{,}6\sin(314{,}16\,t)$. *Je tato soustava souměrná?*

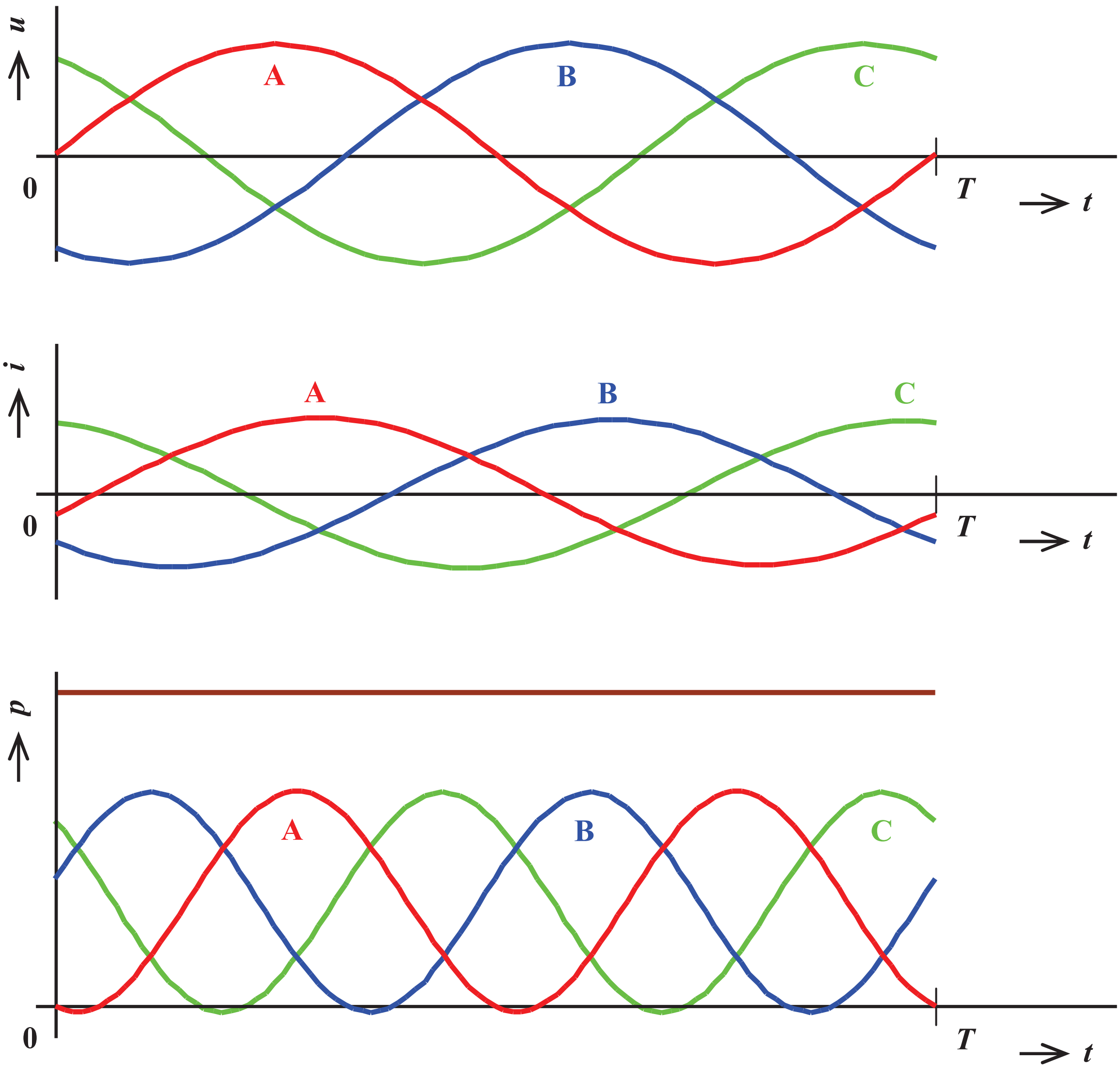
♦

Amplitudy resp. efektivní hodnoty fázových napětí jsou stejné a činí 326,6 V resp. 230,9 V. Úhlový kmitočet napětí je shodný a má hodnotu 314,16 rad s^{-1}, což odpovídá kmitočtu f = 314,16/2π= 50 Hz. Fázové posuny dvou po sobě jsoucích fází jsou stejné a činí 0° resp. 0 radiánů. Tato soustava tedy splňuje podmínky souměrnosti. Všechny tři průběhy jejich napětí jsou totožné. Takovouto soustavu nazýváme netočivou a její časový průběh je dán trojicí časových průběhů napětí u_{A} na obr. 1.3 nebo 1.4.

❑ Trojfázová zátěž

Trojfázovou zátěž modelujeme zapojením tří imitancí podle obr. 1.7 vpravo, příklad 1.2, které mohou být obecně co do charakteru různé, ale je žádoucí, aby měli stejné komplexní hodnoty. Tuto zátěž nazýváme symetrickou. Připojíme-li ji k souměrnému zdroji se souslednou soustavou napětí, bude bez ohledu na její zapojení zatěžován symetricky proudy i_{A}, i_{B}, i_{C} a jeho celkový okamžitý výkon p bude konstantní, i když okamžité výkony v každé jeho fázi p_{A}, p_{B}, p_{C} jsou kmitavé, viz obr. 1.5. Za těchto podmínek je trojfázový zdroj optimálně provozován a jeho celkový okamžitý výkon se v čase nemnění. Součet fázových činných výkonů zdroje P_{A}, P_{B}, P_{C} je trojnásobkem fázového činného výkonu jedné fáze zdroje např. P_{A} resp. příkonu jedné fáze zátěže např. P_1. Obě tyto skutečnosti lze společně zapsat

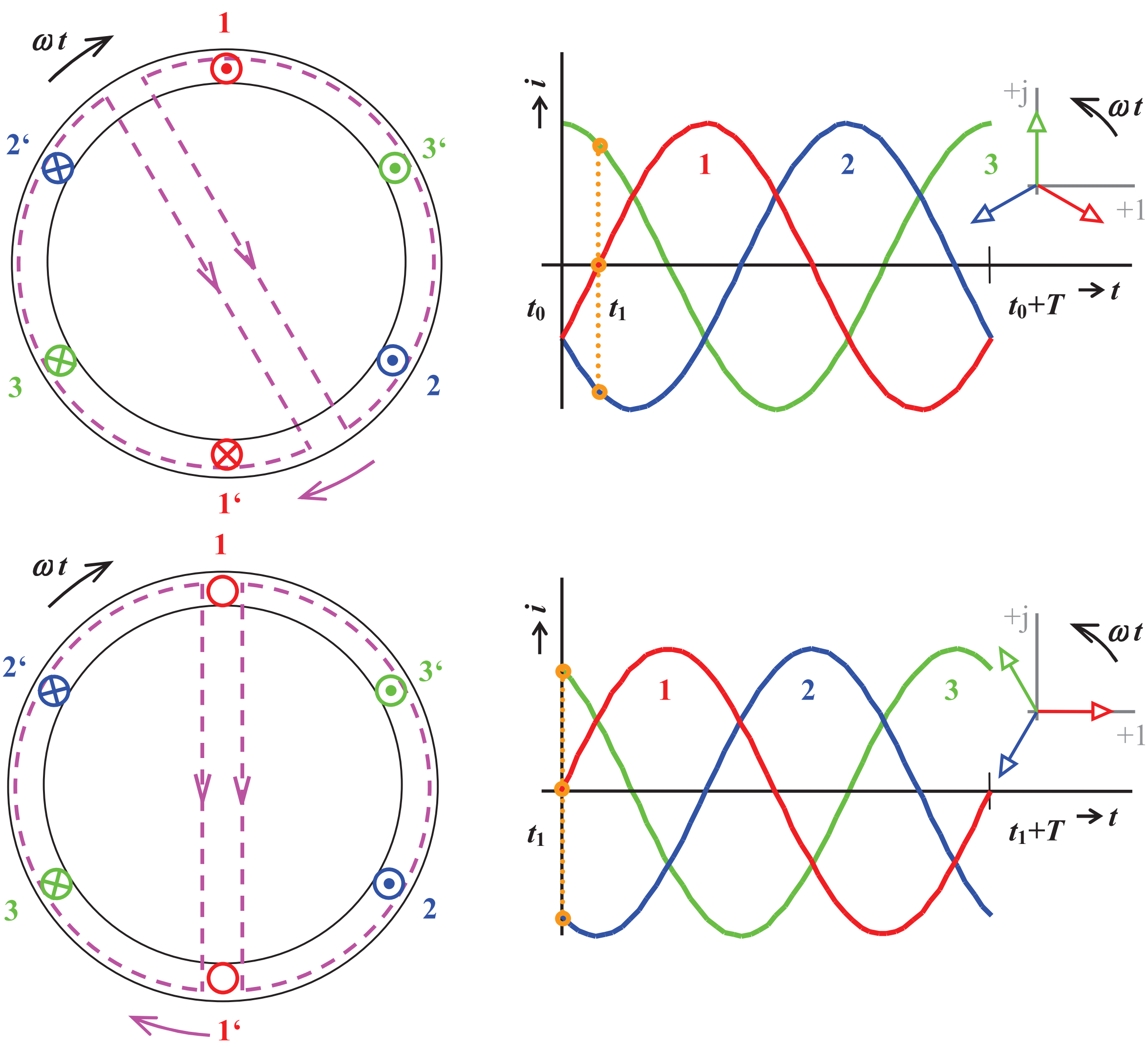
$$p = p_{\mathrm{A}} + p_{\mathrm{B}} + p_{\mathrm{C}} = P_{\mathrm{A}} + P_{\mathrm{B}} + P_{\mathrm{C}} = 3P_{\mathrm{A}} = 3P_1 = \text{konst.}$$



Obr. 1.5 Optimální provoz trojfázového zdroje

Poznamenejme, že výše zobrazené časové průběhy napětí, proudů a výkonů odpovídají zdrojovému systému počítacích šipek, takže fázové činné výkony zdroje jsou kladné.

Trojfázová zátěž je často tvořena jedním konstrukčním celkem. Příkladem je v technické praxi konstrukčně jednoduchý a ve střídavých pohonech často používaný asynchronní motor, jehož princip činnosti je opačný k funkci alternátoru. Trojfázová napájecí soustava připojená k vinutím 1 – 1‘, 2 – 2‘, 3 – 3‘ s proudy i_1, i_2, i_3 vytváří točivé magnetické pole, viz obr. 1.6, jehož výslednici si můžeme představit jako magnet, otáčející se proti smyslu oběhu sousledné nebo zpětné napájecí soustavy úhlovou rychlostí (kmitočtem) ω této napájecí soustavy. Na obr. 1.6 vpravo je situace zobrazena pro dva časové okamžiky t_{o} a t_1.



Obr. 1.6 Magnetické pole statoru asynchronního motoru buzené proudy jeho vinutí

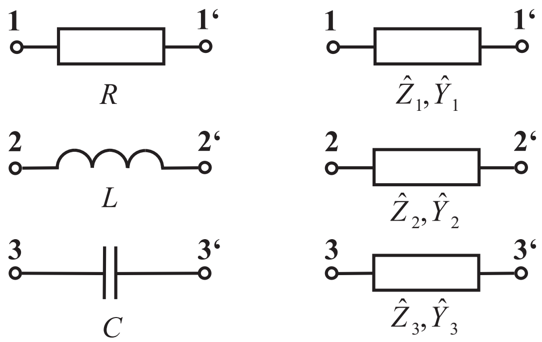
Asynchronní motor je konstrukčně souměrný a tvořený statorovým a rotorovým vinutím, které je uloženo v drážkách. Je-li napájen ze souměrného trojfázového zdroje napětí, vytvoří se souměrná soustava proudů ve statoru, která jak již bylo zmíněno, vytváří točivé magnetické pole, jenž indukuje v rotoru zatíženého asynchronního motoru proudy, jejichž výsledné magnetické pole v reakci na budící točivé magnetické pole vytváří konstantní moment na hřídeli motoru, protože trojfázový zdroj je optimálně provozován. Poznamenejme, že u reálného asynchronního motoru právě vlivem uložení statorového a rotorového vinutí do drážek je moment motoru zvlněný. Konstantní by byl pouze v případě nekonečného počtu drážek, tj. kdyby proudová vrstva na statoru i rotoru byla spojitě rozložena.

Příklad 1.2.

Trojfázová zátěž na obr. 1.7 má ve svých fázích zapojený každý jeden z elementárních pasivních obvodových prvků o hodnotě impedance 10 Ω. Jedná se o souměrnou zátěž?

♦

Zátěž není souměrná, jelikož imitance mají různý charakter a tudíž jejich komplexní hodnota je různá. Je-li např. v 1. fázi rezistor, 2. fázi induktor a 3. fázi kapacitor, jsou jejich hodnoty imitancí následující: impedance $\hat{Z}_1 = 10 = 10\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}0^\circ}$ Ω resp. admitance $\hat{Y}_1 = 0{,}1 = 0{,}1\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}0^\circ}$ S, $\hat{Z}_2 = 10\mathrm{j} = 10\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}90^\circ}$ Ω resp. $\hat{Y}_2 = -0{,}1\mathrm{j} = 0{,}1\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}90^\circ}$ S a $\hat{Z}_3 = -10\mathrm{j} = 10\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}90^\circ}$ Ω resp. $\hat{Y}_3 = 0{,}1\mathrm{j} = 0{,}1\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}90^\circ}$ S. Mají stejnou velikost nikoli stejnou fázi.



Obr. 1.7 Trojfázová zátěž: obvodový model nesouměrné zátěže, imitanční model, příklad 1.2

Σ Shrnutí pojmů 1.1.

Souměrný trojfázový zdroj tvoří tři dílčí jednofázové zdroje se stejnou efektivní hodnotou napětí, stejným kmitočtem a stejnými fázovými posuny mezi fázovými napětími dílčích zdrojů. Je-li tento zdroj souměrně zatěžován, je optimálně provozován a jeho celkový okamžitý výkon se nemnění v čase čili je konstantní. Souměrný trojfázový zdroj napětí je současně i vyvážený neboť součet okamžitých hodnot dílčích jednofázových zdrojů je v každém čase nulový. Realizací souměrného trojfázového zdroje je alternátor, který podle smyslu otáčení svého budícího elektromagnetu generuje souslednou nebo zpětnou soustavu napětí. Sousledná soustava má sled fází, který je daný pořadím maxim napětí dílčích jednofázových zdrojů A, B, C. Zpětná soustava ho má opačný, tj. A, C, B. Typickou souměrnou trojfázovou zátěží je asynchronní motor, jehož funkce je opačná funkci generátoru, u kterého funkce budícího elektromagnetu alternátoru je nahrazena točivým magnetickým polem statorového vinutí motoru.

? Otázky 1.1.

1. Jak modelujeme trojfázový zdroj napětí?
2. Co musí být splněno, aby trojfázový zdroj byl souměrný?
3. Jaké fázové posuny mezi dvěma po sobě jdoucími fázemi jsou schopny zajistit vytvoření trojfázové souměrné soustavy napětí?
4. Pomocí jakého zařízení v praxi vytváříme trojfázovou soustavu napětí?
5. Jaké významy má pojem fáze?
6. Čím je dán sled fázových napětí zdroje?
7. Je zpětná soustava napětí vyvážená?
8. Co musí být splněno, aby trojfázová zátěž byla symetrická?.
9. Napište podmínku vyváženosti trojfázové soustavy napětí. Platí jen pro harmonické průběhy napětí?
10. Na čem závisí zatížení trojfázového zdroje napětí?

11. Napište podmínku optimálního provozu trojfázového zdroje. V čem spočívá její význam?
12. Jakou velikost mají fázové proudy a napětí trojfázového zdroje, je-li optimálně provozován?
13. Jaký je vztah mezi točivým magnetickým polem a sledem fází trojfázové napájecí soustavy?
14. Co způsobí záměna dvou přívodních vodičů trojfázové napájecí soustavy připojených ke svorkám asynchronního motoru?

Úloha k řešení 1.1.

Je dána periodická funkce, která představuje časový průběh jedné fáze neharmonického trojfázového zdroje napětí na periodě T. Pro funkci platí

$$u(t)=\begin{cases} 1,\ \text{pro}\ t\in\left(0,\dfrac{T}{6}\right) \\ 2,\ \text{pro}\ t\in\left(\dfrac{T}{6},\dfrac{T}{3}\right) \\ 1,\ \text{pro}\ t\in\left(\dfrac{T}{3},\dfrac{T}{2}\right) \\ -1,\ \text{pro}\ t\in\left(\dfrac{T}{2},\dfrac{2T}{3}\right) \\ -2,\ \text{pro}\ t\in\left(\dfrac{2T}{3},\dfrac{5T}{6}\right) \\ -1,\ \text{pro}\ t\in\left(\dfrac{5T}{6},T\right). \end{cases}$$

Nakreslete časový průběh této funkce. Dále vytvořte a nakreslete časové průběhy napětí zbývajících fází trojfázového zdroje, tak aby byl zdroj souměrný a vyvážený. Určete efektivní hodnotu fázových napětí zdroje.

Řešení:

Uvažujeme-li, že zadaná funkce definuje napětí fáze A zdroje a zdroj má být souměrný, odpovídající časové průběhy napětí trojfázového zdroje jsou zobrazeny na obr. 1.8. Sled fází zdroje je A, B, C. Průběhy mají stejnou periodu T, jsou mezi sebou posunuty o jednu třetinu periody T a mají stejnou efektivní hodnotu fázových napětí, pro kterou platí

$$U_\mathrm{A}=U_\mathrm{B}=U_\mathrm{C}=U=\sqrt{2}\ \mathrm{V}\,.$$

Ta byla stanovena z definice

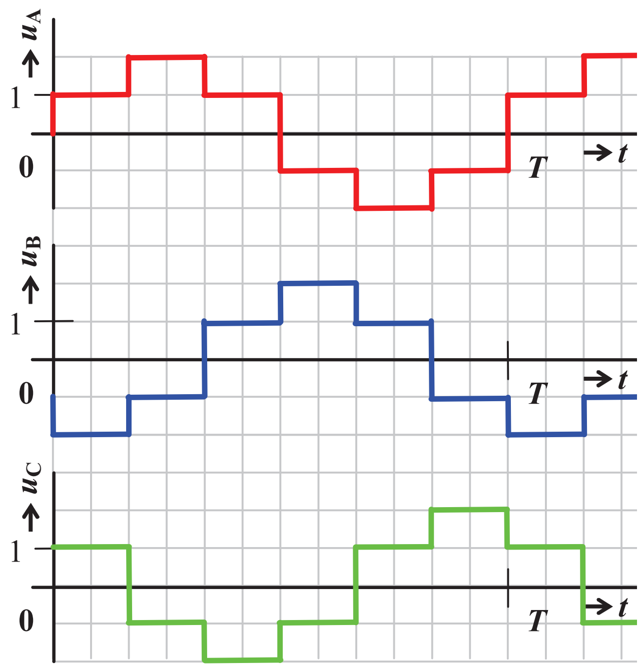
$$U=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,dt}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{T}\left(\int_0^{T/6}1^2(t)\,dt+\int_{T/6}^{T/3}2^2(t)\,dt+\int_{T/3}^{T/2}1^2(t)\,dt+\int_{T/2}^{2T/3}(-1)^2(t)\,dt+\int_{2T/3}^{5T/6}(-2)^2(t)\,dt+\int_{5T/6}^{T}(-1)^2(t)\,dt\right)}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{T}\left([t]_0^{\frac{T}{6}}+[4t]_{\frac{T}{6}}^{\frac{T}{3}}+[t]_{\frac{T}{3}}^{\frac{T}{2}}+[t]_{\frac{T}{2}}^{\frac{2T}{3}}+[4t]_{\frac{2T}{3}}^{\frac{5T}{6}}+[t]_{\frac{5T}{6}}^{T}\right)}=$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T}\left(\left[\frac{T}{6}-0\right]+\left[4\left(\frac{T}{3}-\frac{T}{6}\right)\right]+\left[\frac{T}{2}-\frac{T}{3}\right]+\left[\frac{2T}{3}-\frac{T}{2}\right]+\left[4\left(\frac{5T}{6}-\frac{2T}{3}\right)\right]+\left[T-\frac{5T}{6}\right]\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T}\left(\frac{T}{6}+4\frac{T}{6}+\frac{T}{6}+\frac{T}{6}+4\frac{T}{6}+\frac{T}{6}\right)} = \sqrt{\frac{1}{T}\left(\frac{12T}{6}\right)} = \sqrt{2}\ \mathrm{V}.$$



Obr. 1.8 Trojfázový neharmonický zdroj napětí, úloha k řešení 1.1

Trojfázová soustava těchto napětí je vyvážená, protože jejich součet je v každém časovém okamžiku nulový. Závěrem poznamenejme, že v praxi lze tyto časové průběhy vytvářet tzv. střídači napětí, které využíváme k úspornému řízení otáček např. asynchronních motorů.

1.2. Zapojení zdrojů

Trojfázový zdroj vytvoříme tak, že zapojíme jednofázové zdroje napětí o okamžitých hodnotách u_A, u_B, u_C do hvězdy (Y) nebo do trojúhelníku (D). Další možností je rozdělení každého z jednofázových zdrojů na dvě části, které zapojíme do lomené hvězdy (Yz).

Je-li trojfázový zdroj souměrný, vytváří soustavu napětí s okamžitými hodnotami

$$u_A = U_m \sin(\omega t) = \sqrt{2}\,U \sin(\omega t),$$

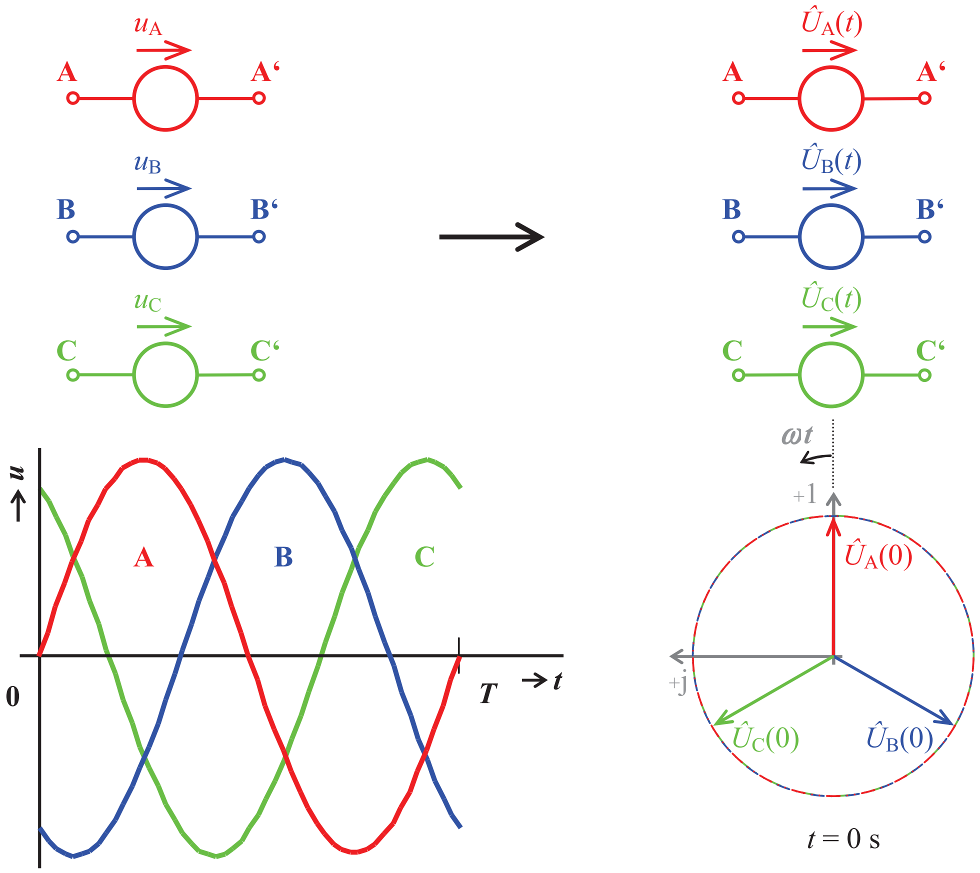
$$u_B = U_m \sin(\omega t - 120°) = \sqrt{2}\,U \sin(\omega t - 120°),$$

$$u_C = U_m \sin(\omega t + 120°) = \sqrt{2}\,U \sin(\omega t + 120°),$$

které můžeme vyjádřit užitím Eulerova vztahu $e^{j(\omega t \pm \psi)} = \cos(\omega t \pm \psi) + j\sin(\omega t \pm \psi)$ jako komplexní funkce reálné proměnné t. Transformaci zápisu provedeme na základě předpisu

$$\sqrt{2}\,U \sin(\omega t \pm \psi) = \sqrt{2}\,U\ \mathrm{Im}\left\{e^{j(\omega t \pm \psi)}\right\} = \sqrt{2}\ \mathrm{Im}\left\{U\,e^{\pm j\psi}\,e^{j\omega t}\right\} = \sqrt{2}\ \mathrm{Im}\left\{\hat{U}\,e^{j\omega t}\right\},$$

její grafické zobrazení je znázorněno na obr. 1.9.



Obr. 1.9 Transformace časových průběhů napětí do komplexní roviny

Po transformaci získáme komplexní funkce napětí reálné proměnné *t*, které však nezapisujeme v měřítku maximálních, ale efektivních hodnot tzn., že neuvažujeme konstantu √2,

$$\hat{U}_{\mathrm{A}}(t) = U\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}0^\circ}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t},$$

$$\hat{U}_{\mathrm{B}}(t) = U\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}120^\circ}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t},$$

$$\hat{U}_{\mathrm{C}}(t) = U\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}120^\circ}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}.$$

Jejich grafickým zobrazením v komplexní rovině jsou hodografy funkcí (vektorové čáry) viz kapitola 4.1, a to kružnice, viz obr. 1.9 vpravo dole. Významné jsou počáteční hodnoty těchto komplexních funkcí v čase $t = 0\,\mathrm{s}$. Jsou to tři komplexní čísla, která charakterizují trojfázovou napájecí soustavu. Jejich geometrickou interpretací získáme fázory (orientované úsečky, vektory) fázových napětí

$$\hat{U}_{\mathrm{A}} = \hat{U}_{\mathrm{A}}(0) = U\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}0^\circ},$$

$$\hat{U}_{\mathrm{B}} = \hat{U}_{\mathrm{B}}(0) = U\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}120^\circ},$$

$$\hat{U}_{\mathrm{C}} = \hat{U}_{\mathrm{C}}(0) = U\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}120^\circ},$$

které orientujeme stejně jako počítací šipky napětí na jejich koncích šipkami. Mají velikost, která je dána vzdáleností komplexního čísla od počátku komplexní roviny, a ta je úměrná efektivní hodnotě napětí *U*. Poloha fázoru napětí v komplexní rovině je dána argumentem exponenciální funkce a udává jeho natočení vůči reálné ose komplexní roviny. Necháme-li rotovat fázory napětí úhlovou rychlostí ω v čase komplexní rovinou, získáme rotující fázory – komplexory, jejichž koncové body se pohybují po kružnicích hodografů komplexních napětí $\hat{U}_{\mathrm{A}}(t)$, $\hat{U}_{\mathrm{B}}(t)$, $\hat{U}_{\mathrm{C}}(t)$, které jsou současně rovnicemi komplexorů. Jelikož mají všechna napětí jednofázových zdrojů stejný kmitočet, můžeme v komplexní rovině z jejich popisu eliminovat čas a trojfázovou soustavu napětí modelovat namísto komplexorů jen na čase nezávislými fázory napětí $\hat{U}_{\mathrm{A}}$, $\hat{U}_{\mathrm{B}}$, $\hat{U}_{\mathrm{C}}$, jejichž grafickou podobou je fázorový diagram totožný s komplexory napětí v čase $t = 0$ s , viz obr. 1.9 vpravo dole.

Poznamenejme jen, že souřadný systém os komplexní roviny je z historických důvodů v trojfázových obvodech natočen oproti zvyklostem o 90°. Souměrné a vyvážené trojfázové zdroje mají jak součet okamžitých hodnot, tak i fázorů napětí v komplexní rovině nulový. Vyvážený zdroj snadno poznáme podle fázorového diagramu, neboť součet fázorů napětí trojfázového zdroje tvoří rovnostranný trojúhelník.

Zapojení zdrojů do hvězdy

Zapojení do hvězdy vznikne spojením začátků A, B, C resp. konců A‘, B‘, C‘ svorek tří samostatných jednofázových zdrojů do společného uzlu. Existují dvě možnosti zapojení trojfázového zdroje, z nichž si pro následující výklad zvolme variantu, kdy uzel je tvořen začátky A, B, C svorek zdroje na obr. 1.11. Soustavu napětí vytvářenou trojfázovým zdrojem vyveďme čtveřicí svorek A‘, B‘, C‘ a N. Propojení uzlu zdroje a svorky N je provedeno tzv. nulovým vodičem. Získali jsme tak čtyřvodičovou napájecí soustavu, která umožňuje připojit trojfázové spotřebiče ke dvěma systémům napětí o různých efektivních hodnotách. První soustava využívá napětí mezi svorkami A‘, B‘, C‘ a uzlem N a druhá napětí mezi svorkami A‘B‘, B‘C‘, C‘A‘.

První, čtyřvodičová soustava s okamžitými hodnotami tzv. fázových napětí u_{AN}, u_{BN}, u_{CN}, zobrazená na obr. 1.10, je vzhledem k platnosti 2. Kirchhoffova zákona (uvažujme oběh ve smyčce proti směru hodinových ručiček) popsána rovnicemi

$$u_{\mathrm{AN}} - u_{\mathrm{A}} = 0,$$

$$u_{\mathrm{BN}} - u_{\mathrm{B}} = 0,$$

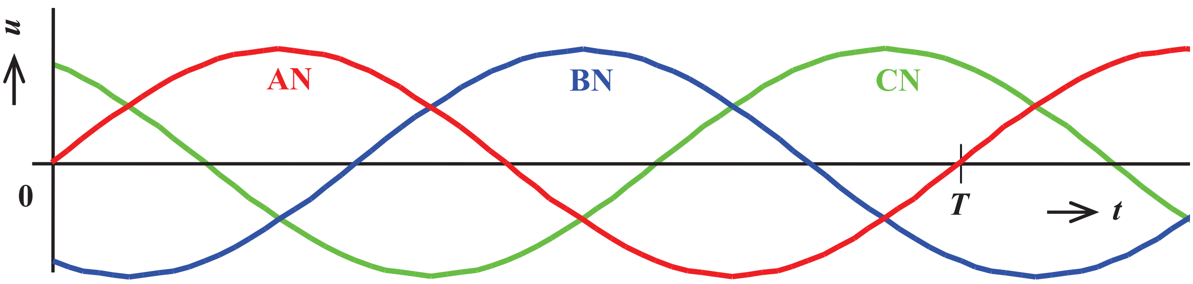
$$u_{\mathrm{CN}} - u_{\mathrm{C}} = 0$$

a po dosazení okamžitých hodnot napětí jednofázových zdrojů rovnicemi

$$u_{\mathrm{AN}} = u_{\mathrm{A}} = U_{\mathrm{m}} \sin(\omega t) = \sqrt{2}\, U \sin(\omega t),$$

$$u_{\mathrm{BN}} = u_{\mathrm{B}} = U_{\mathrm{m}} \sin(\omega t - 120°) = \sqrt{2}\, U \sin(\omega t - 120°),$$

$$u_{\mathrm{CN}} = u_{\mathrm{C}} = U_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + 120°) = \sqrt{2}\, U \sin(\omega t + 120°).$$



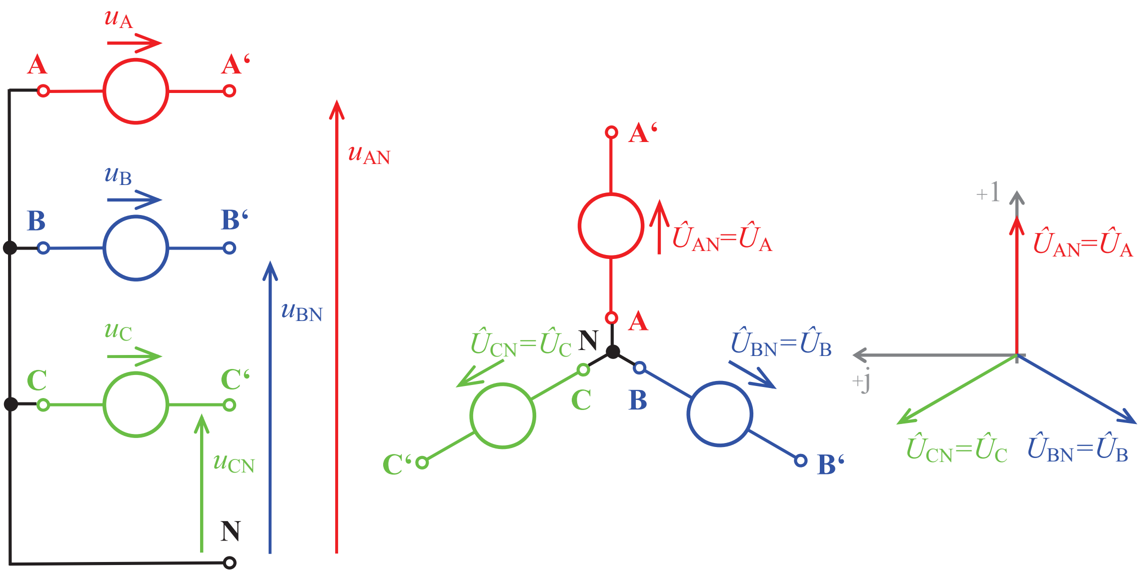
Obr. 1.10 Okamžité hodnoty fázových napětí

Po transformaci rovnic do komplexní roviny získáme fázory fázových napětí zobrazené na obr. 11 vpravo, dané rovnicemi

$$\hat{U}_{\mathrm{AN}} = \hat{U}_{\mathrm{A}} = U\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}0°},$$

$$\hat{U}_{\mathrm{BN}} = \hat{U}_{\mathrm{B}} = U\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}120°},$$

$$\hat{U}_{CN} = \hat{U}_C = U\,e^{j120°}\,.$$



Obr. 1.11 Definice fázových napětí, čtyřvodičová soustava: náhradní schéma pro okamžité hodnoty, překreslené náhradní schéma pro komplexní hodnoty, fázorový diagram

Druhá, trojvodičová soustava s okamžitými hodnotami tzv. sdružených napětí u_{AB}, u_{BC}, u_{CA}, zobrazená na obr.1.12, je podle 2. Kirchhoffova zákona (uvažujme oběh ve smyčce proti směru hodinových ručiček) popsána rovnicemi

$$u_{AB} - u_A + u_B = 0\,,$$

$$u_{BC} - u_B + u_C = 0\,,$$

$$u_{CA} - u_C + u_A = 0$$

a po dosazení okamžitých hodnot napětí jednofázových zdrojů a úpravách vycházejících ze vztahů pro goniometrické funkce obdržíme definice

$$u_{AB} = u_A - u_B = \sqrt{2}\,U\sin(\omega t) - \sqrt{2}\,U\sin(\omega t - 120°) = \sqrt{6}\,U\sin(\omega t + 30°),$$

$$u_{BC} = u_B - u_C = \sqrt{2}\,U\sin(\omega t - 120°) - \sqrt{2}\,U\sin(\omega t + 120°) = \sqrt{6}\,U\sin(\omega t - 90°),$$

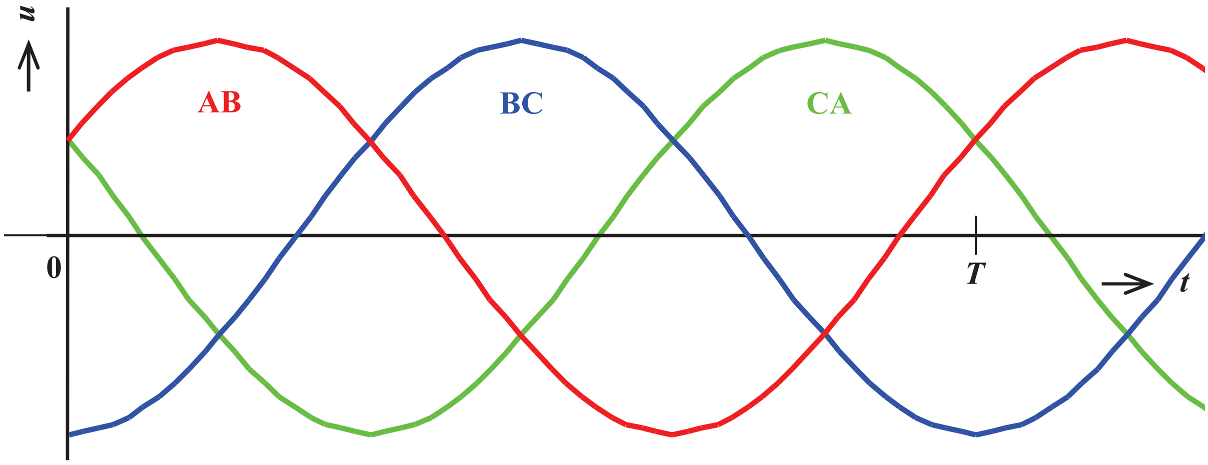
$$u_{CA} = u_C - u_A = \sqrt{2}\,U\sin(\omega t + 120°) - \sqrt{2}\,U\sin(\omega t) = \sqrt{6}\,U\sin(\omega t + 150°)\,.$$

Po transformaci rovnic do komplexní roviny získáme fázory sdružených napětí zobrazené na obr. 1.13 vpravo, definované

$$\hat{U}_{AB} = \hat{U}_A - \hat{U}_B = U\,e^{j0°} - U\,e^{-j120°} = \sqrt{3}\,U\,e^{j30°}\,,$$

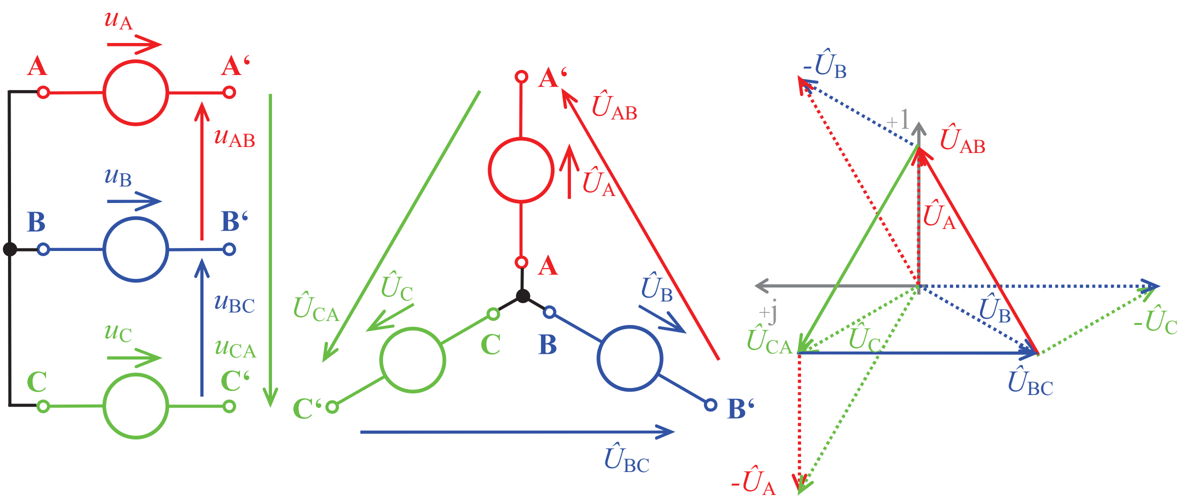
$$\hat{U}_{BC} = \hat{U}_B - \hat{U}_C = U\,e^{-j120°} - U\,e^{j120°} = \sqrt{3}\,U\,e^{-j90°}\,,$$

$$\hat{U}_{CA} = \hat{U}_C - \hat{U}_A = U\,e^{j120°} - U\,e^{j0°} = \sqrt{3}\,U\,e^{j150°}\,.$$



Obr. 1.12 Okamžité hodnoty sdružených napětí, trojfázový zdroj zapojený do hvězdy

Zdůrazněme, že ve čtyřvodičové napájecí soustavě rozlišujeme dva typy napětí: mezi svorkami A‘, B‘, C‘ a uzlem N fázová a mezi svorkami A‘B‘, B‘C‘, C‘A‘ sdružená. Sdružená napětí souměrné napájecí soustavy (zdroje) mají velikost √3 krát větší než napětí fázová a v čase jsou fázově posunuta o dvanáctinu periody (T/12) resp. v komplexní rovině natočena o π/6 či 30° vůči fázovým napětím, viz obr. 1.13.



Obr. 1.13 Definice sdružených napětí, třívodičová soustava: náhradní schéma pro okamžité hodnoty, náhradní schéma pro komplexní hodnoty, fázorový diagram

Příklad 1.3.

Popište způsob odvození konstanty úměrnosti mezi efektivní hodnotou fázového a sdruženého napětí souměrného harmonického zdroje zapojeného do hvězdy.

♦

Souměrný zdroj má stejné amplitudy i efektivní hodnoty fázových napětí. Vztah mezi amplitudou a efektivní hodnotou plyne z definice efektivní hodnoty napětí $U=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2\,\mathrm{d}t}$, do které dosadíme obecný průběh harmonického napětí $u=U_\mathrm{m}\sin(\omega t\pm\psi)$. Pro efektivní hodnotu harmonického průběhu platí

$$U=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T U_\mathrm{m}^2\sin^2(\omega t\pm\psi)\,\mathrm{d}t}=\sqrt{\frac{U_\mathrm{m}^2}{2T}\int_0^T \left(1-\cos(2(\omega t\pm\psi))\right)\mathrm{d}t}\,.$$

Výpočet efektivní hodnoty se po úpravě rozpadne na dvě části, a to na integrál konstanty a harmonické funkce s dvojnásobným kmitočtem. Integrálem harmonické funkce je opět harmonická funkce, její průběh je střídavý, a proto i její určitý integrál na periodě T je nulový, což si snadno představíme na základě geometrické interpretace integrálu jako plochy pod křivkou. Na vyčíslení efektivní hodnoty má tak vliv jen určitý integrál ze stejnosměrné složky, tedy jednotkové funkce, který je na periodě roven její délce T, a proto pro efektivní hodnotu platí $U=U_\mathrm{m}/\sqrt{2}$.

Pro odvození efektivní hodnoty sdruženého napětí zvolme průběh napětí u_AB, který je definován fázovými napětími $u_\mathrm{AB}=u_\mathrm{A}-u_\mathrm{B}=U_\mathrm{m}\left(\sin(\omega t)-\sin(\omega t-120°)\right)$. Pro efektivní hodnotu sdruženého napětí platí

$$U_\mathrm{AB}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u_\mathrm{AB}^2\,\mathrm{d}t}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T U_\mathrm{m}^2\left[\sin(\omega t)-\sin(\omega t-120°)\right]^2\mathrm{d}t}=$$

$$=\sqrt{\frac{U_\mathrm{m}^2}{T}\int_0^T\left[\sin^2(\omega t)-2\sin(\omega t)\sin(\omega t-120°)+\sin^2(\omega t-120°)\right]\mathrm{d}t}=$$

$$=\sqrt{\frac{U_\mathrm{m}^2}{T}\int_0^T\left[\sin^2(\omega t)-2\sin(\omega t)\sin(\omega t-120°)+\sin^2(\omega t-120°)\right]\mathrm{d}t}=$$

$$=\sqrt{\frac{U_\mathrm{m}^2}{2T}\int_0^T\left[1-\cos(2\omega t)-2\cos(120°)+2\cos(2\omega t-120°)+1-\cos(2\omega t-240°)\right]\mathrm{d}t}\,.$$

S ohledem na výše uvedené, mají na vyčíslení efektivní hodnoty vliv jen časově nezávislé členy pod odmocninou tj. $2-2\cos(120°)$, které reprezentují hodnotu integrálu na periodě T, která po dosazení integračních mezí je rovna hodnotě $2(1-\cos(120°))T$, takže po vykrácení a jednoduché úpravě platí nakonec pro efektivní hodnotu sdruženého napětí

$$U_\mathrm{AB}=U_\mathrm{m}\sqrt{1-\cos(120°)}=U_\mathrm{m}\sqrt{1-(-\frac{1}{2})}=U_\mathrm{m}\sqrt{\frac{3}{2}}=\sqrt{2}\,U\sqrt{\frac{3}{2}}=\sqrt{3}\,U\,.$$

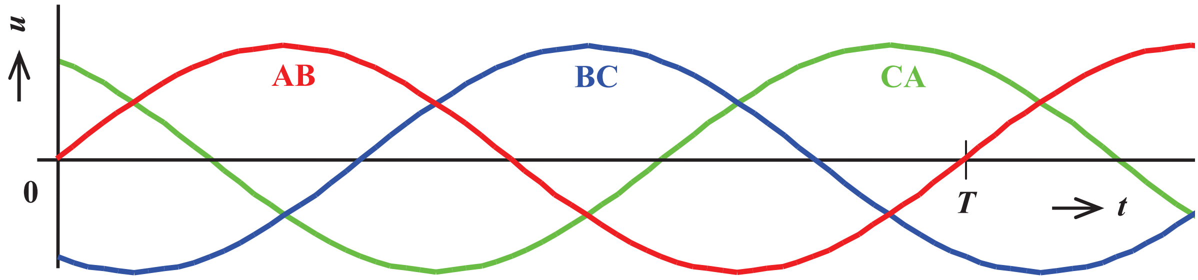
❑ Zapojení zdrojů do trojúhelníku

Zapojení do trojúhelníku vznikne spojením začátků jedněch a konců jiných, odlišně označených svorek tří samostatných jednofázových zdrojů do série. Existují dvě možnosti zapojení trojfázového zdroje, z nichž si pro výklad zvolme variantu propojení svorek A‘B, B‘C, C’A zobrazenou na obr. 1.15. Získali jsme tak třívodičovou, trojfázovou napájecí soustavu vyvedenou trojicí svorek A‘, B‘, C‘ s jedním systémem napětí s okamžitými hodnotami u_AB, u_BC, u_CA, zobrazenými na obr. 1.14. Soustava napětí je popsána podle 2. Kirchhoffova zákona (uvažujme oběh ve smyčce proti směru hodinových ručiček) rovnicemi

$$u_{AB} - u_A = 0,$$
$$u_{BC} - u_B = 0,$$
$$u_{CA} - u_C = 0$$

a po dosazení okamžitých hodnot napětí jednofázových zdrojů rovnicemi

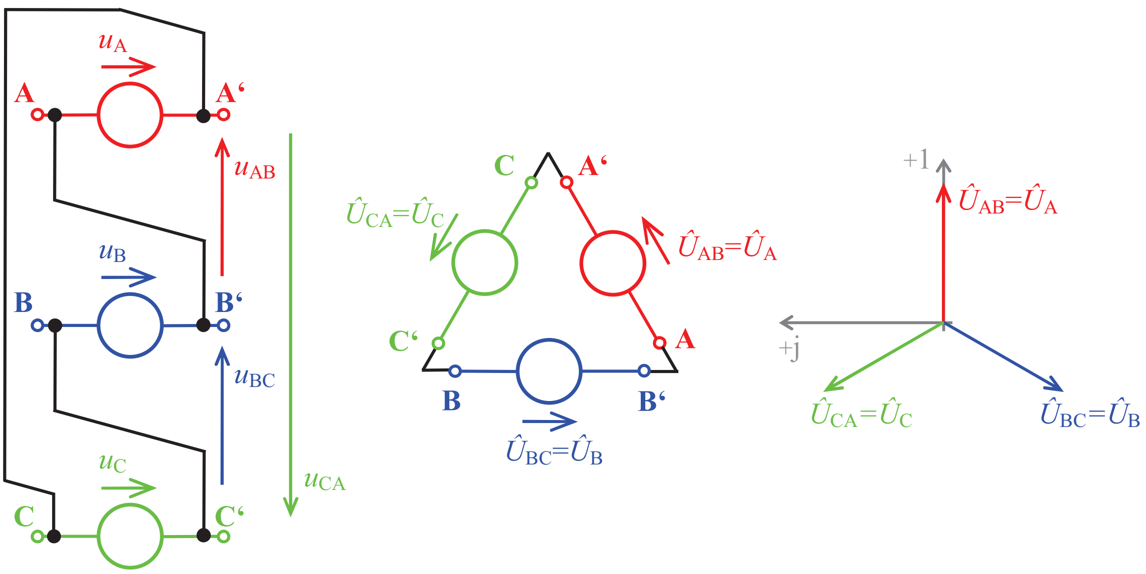
$$u_{AB} = u_A = \sqrt{2}\,U \sin(\omega t),$$
$$u_{BC} = u_B = \sqrt{2}\,U \sin(\omega t - 120°),$$
$$u_{CA} = u_C = \sqrt{2}\,U \sin(\omega t + 120°).$$



Obr. 1.14 Okamžité hodnoty fázových napětí, trojfázový zdroj zapojený do trojúhelníku

Po transformaci rovnic do komplexní roviny získáme fázory sdružených napětí zobrazené na obr. 1.15 vpravo, dané rovnicemi

$$\hat{U}_{AB} = \hat{U}_A = U\,e^{j0°},$$
$$\hat{U}_{BC} = \hat{U}_B = U\,e^{-j120°},$$
$$\hat{U}_{CA} = \hat{U}_C = U\,e^{j120°}.$$



Obr. 1.15 Trojfázový zdroj zapojený do trojúhelníku: náhradní schéma pro okamžité hodnoty, překreslené náhradní schéma pro komplexní hodnoty, fázorový diagram

Poznamenejme, že v zapojení do trojúhelníku jsou fázová napětí zdroje rovna sdruženým napětím třívodičové napájecí soustavy.

❑ Zapojení zdrojů do lomené hvězdy

Standardní zapojení do lomené hvězdy vznikne propojením dvou souměrných trojfázových zdrojů s efektivními hodnotami napětí $U/2$. Jeden z nich zapojíme do hvězdy a spojíme jeho volné začátky resp. konce svorek se začátky resp. konci svorek druhého zdroje, tak aby velikost fázových napětí napájecí soustavy byla √3-krát větší, než napětí dílčích šesti fází zdrojů. Existuje osm možností zapojení, z nichž si pro následující výklad zvolme variantu zakreslenou na obr. 1.17 a 1.19, kdy uzel zdroje je tvořen konci svorek druhého zdroje A2‘, B2‘, C2‘ a zdroje jsou propojeny svorkami A1B2, B1C2, C1A2. Soustavu napětí vytvářenou oběma trojfázovými zdroji vyveďme čtveřicí svorek A1‘, B1‘, C1‘ a N. Propojení uzlu druhého zdroje a svorky N je opět provedeno tzv. nulovým vodičem. Získali jsme tak jako u zapojení do hvězdy čtyřvodičovou napájecí soustavu, která umožňuje napájet trojfázové spotřebiče dvěma systémy napětí, o různých efektivních hodnotách. První soustava na obr. 1.17 využívá napětí mezi svorkami A1‘, B1‘, C1‘ a uzlem N a druhá soustava na obr. 1.19 napětí mezi svorkami A1’B1‘, B1’C1‘, C1’A1‘.

První, čtyřvodičová soustava s okamžitými hodnotami fázových napětí u_A, u_B, u_C, zobrazená na obr. 1.16, je vzhledem k platnosti 2. Kirchhoffova zákona (uvažujme oběh ve smyčce proti směru hodinových ručiček) popsána rovnicemi

$$u_A - u_{A1} + u_{B2} = 0\,,$$

$$u_B - u_{B1} + u_{C2} = 0\,,$$

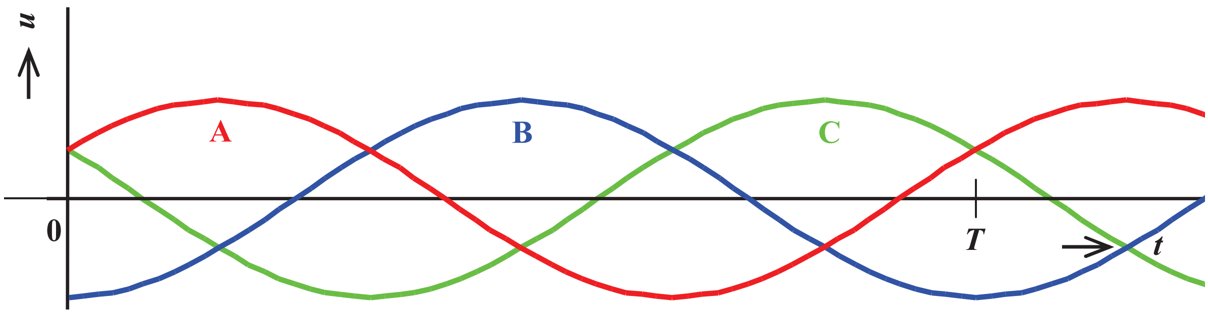
$$u_C - u_{C1} + u_{A2} = 0$$

a po dosazení okamžitých hodnot napětí jednofázových zdrojů a úpravách vycházejících ze vztahů pro goniometrické funkce obdržíme definice

$$u_A = u_{A1} - u_{B2} = \sqrt{2}\frac{U}{2}\sin(\omega t) - \sqrt{2}\frac{U}{2}\sin(\omega t - 120°) = \sqrt{6}\frac{U}{2}\sin(\omega t + 30°),$$

$$u_B = u_{B1} - u_{C2} = \sqrt{2}\frac{U}{2}\sin(\omega t - 120°) - \sqrt{2}\frac{U}{2}\sin(\omega t + 120°) = \sqrt{6}\frac{U}{2}\sin(\omega t - 90°).$$

$$u_C = u_{C1} - u_{A2} = \sqrt{2}\frac{U}{2}\sin(\omega t + 120°) - \sqrt{2}\frac{U}{2}\sin(\omega t) = \sqrt{6}\frac{U}{2}\sin(\omega t + 150°).$$



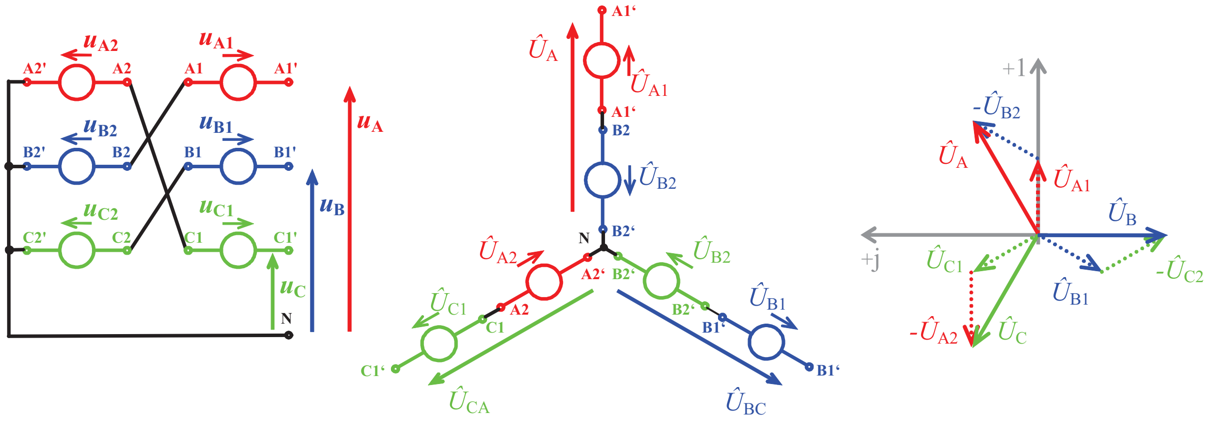
Obr. 1.16 Okamžité hodnoty fázových napětí, trojfázový zdroj zapojený do lomené hvězdy

Po transformaci rovnic do komplexní roviny získáme fázory fázových napětí zobrazené na obr. 1.17 vpravo, definované

$$\hat{U}_A = \hat{U}_{A1} - \hat{U}_{B2} = \frac{U}{2}e^{j0°} - \frac{U}{2}e^{-j120°} = \frac{\sqrt{3}\,U}{2}e^{j30°},$$

$$\hat{U}_B = \hat{U}_{B1} - \hat{U}_{C2} = \frac{U}{2}e^{-j120°} - \frac{U}{2}e^{j120°} = \frac{\sqrt{3}\,U}{2}e^{-j90°},$$

$$\hat{U}_{C} = \hat{U}_{C1} - \hat{U}_{A2} = \frac{U}{2}e^{j120°} - \frac{U}{2}e^{j0°} = \frac{\sqrt{3}\,U}{2}e^{j150°}.$$



Obr. 1.17 Trojfázový zdroj zapojený do lomené hvězdy, definice fázových napětí: náhradní schéma pro okamžité hodnoty, překreslené náhradní schéma pro komplexní hodnoty, fázorový diagram

Druhá, trojvodičová soustava s okamžitými hodnotami sdružených napětí u_{AB}, u_{BC}, u_{CA}, zobrazená na obr. 1.18, je podle 2. Kirchhoffova zákona (uvažujme oběh ve smyčce proti směru hodinových ručiček) popsána rovnicemi

$$u_{AB} - u_{A1} + u_{B2} - u_{C2} + u_{B1} = 0,$$

$$u_{BC} - u_{B1} + u_{C2} - u_{A2} + u_{C1} = 0,$$

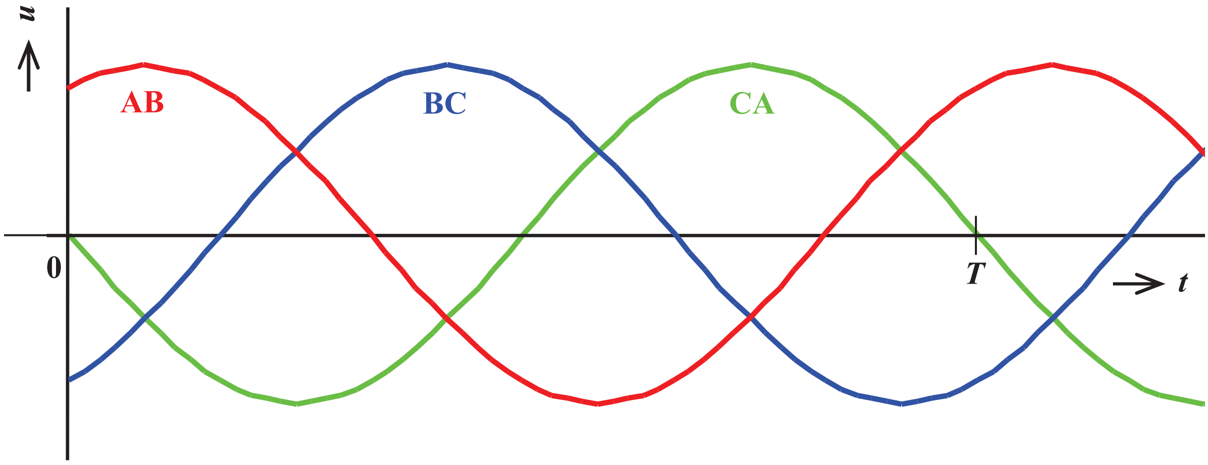
$$u_{CA} - u_{C1} + u_{A2} - u_{B2} + u_{A1} = 0$$

a po dosazení okamžitých hodnot napětí jednofázových zdrojů a úpravách vycházejících ze vztahů pro goniometrické funkce obdržíme definice

$$u_{AB} = u_{A1} - u_{B2} + u_{C2} - u_{B1} = \sqrt{2}\frac{U}{2}\left(\sin(\omega t) - \sin(\omega t - 120°) + \sin(\omega t + 120°) - \sin(\omega t - 120°)\right) =$$
$$= \sqrt{2}\frac{U}{2}\left(\sin(\omega t) - 2\sin(\omega t - 120°) + \sin(\omega t + 120°)\right) = \sqrt{2}\frac{3}{2}U\sin(\omega t + 60°),$$

$$u_{BC} = u_{B1} - u_{C2} + u_{A2} - u_{C1} = \sqrt{2}\frac{U}{2}\left(\sin(\omega t - 120°) - \sin(\omega t + 120°) + \sin(\omega t) - \sin(\omega t + 120°)\right) =$$
$$= \sqrt{2}\frac{U}{2}\left(\sin(\omega t - 120°) - 2\sin(\omega t + 120°) + \sin(\omega t)\right) = \sqrt{2}\frac{3}{2}U\sin(\omega t - 60°),$$

$$u_{CA} = u_{C1} - u_{A2} + u_{B2} - u_{A1} = \sqrt{2}\frac{U}{2}\left(\sin(\omega t + 120°) - \sin(\omega t) + \sin(\omega t - 120°) - \sin(\omega t)\right) =$$
$$= \sqrt{2}\frac{U}{2}\left(\sin(\omega t + 120°) - 2\sin(\omega t) + \sin(\omega t - 120°)\right) = \sqrt{2}\frac{3}{2}U\sin(\omega t + 180°).$$



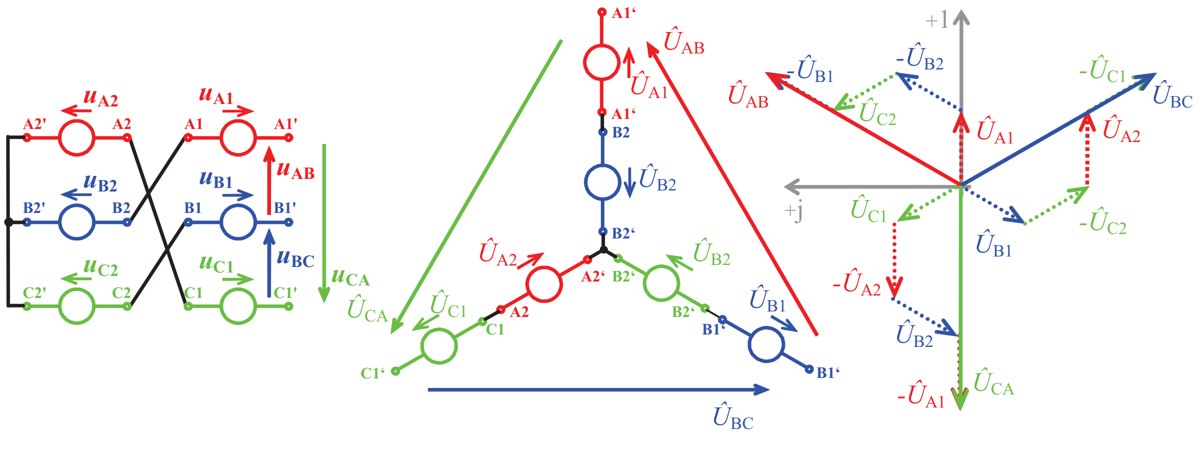
Obr. 1.18 Okamžité hodnoty sdružených napětí, trojfázový zdroj zapojený do lomené hvězdy

Po transformaci rovnic do komplexní roviny získáme fázory sdružených napětí zobrazené na obr. 1.19 vpravo, definované

$$\hat{U}_{AB} = \hat{U}_{A1} - \hat{U}_{B2} + \hat{U}_{C2} - \hat{U}_{B1} = \frac{U}{2}\left(e^{j0°} - e^{-j120°} + e^{j120°} - e^{-j120°}\right) = \frac{U}{2}\left(e^{j0°} - 2e^{-j120°} + e^{j120°}\right) = \frac{3}{2}U\,e^{j60°},$$

$$\hat{U}_{BC} = \hat{U}_{B1} - \hat{U}_{C2} + \hat{U}_{A2} - \hat{U}_{C1} = \frac{U}{2}\left(e^{-j120°} - e^{j120°} + e^{j0°} - e^{j120°}\right) = \frac{U}{2}\left(e^{-j120°} - 2e^{j120°} + e^{j0°}\right) = \frac{3}{2}U\,e^{-j60°},$$

$$\hat{U}_{CA} = \hat{U}_{C1} - \hat{U}_{A2} + \hat{U}_{B2} - \hat{U}_{A1} = \frac{U}{2}\left(e^{j120°} - e^{j0°} + e^{-j120°} - e^{j0°}\right) = \frac{U}{2}\left(e^{j120°} - 2e^{j0°} + e^{-j120°}\right) = \frac{3}{2}U\,e^{j180°}.$$

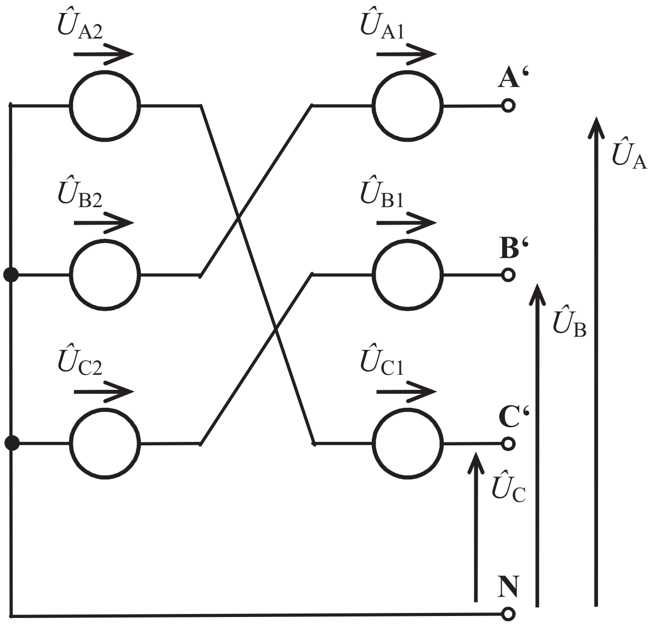


Obr. 1.19 Trojfázový zdroj zapojený do lomené hvězdy, definice sdružených napětí: náhradní schéma pro okamžité hodnoty, náhradní schéma pro komplexní hodnoty, fázorový diagram

Fázová i sdružená napětí v zapojení do lomené hvězdy jsou √3/2 násobkem hodnot fázových i sdružených napětí v zapojení do hvězdy a v čase jsou vzájemně posunuta vůči nim o dvanáctinu periody (T/12) resp. v komplexní rovině jsou vůči nim natočena o π/6 či 30°, viz obr. 1.19.

Příklad 1.4.

Stanovte efektivní hodnotu fázových napětí čtyřvodičové soustavy napětí dvou souměrných trojfázových zdrojů se stejným sledem fází A, B, C a efektivní hodnotou U zapojených podle obr. 1.20. Nakreslete fázorový diagram obvodu.



Obr. 1.20 Nestandardní zapojení trojfázových zdrojů do lomené hvězdy, příklad 1.4

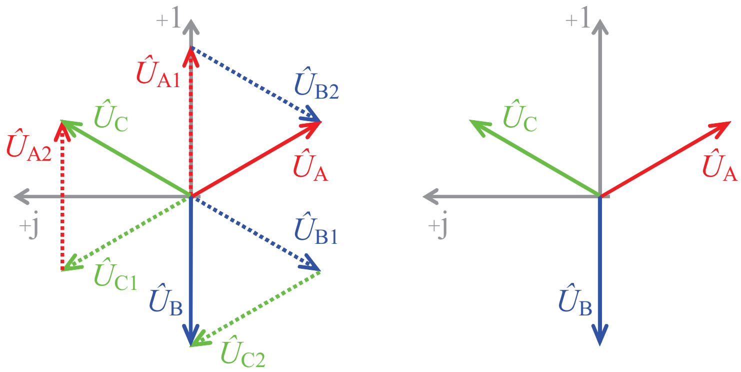
♦

Řešení:

Jelikož oba trojfázové zdroje jsou souměrné, bude i trojfázová soustava napětí mezi svorkami A, B, C a svorkou N (uzlem zdroje) souměrná a pro určení její efektivní hodnoty stačí určit její hodnotu napětí v jedné její fázi např. A. Pro komplexní hodnotu napětí $\hat{U}_A$ platí podle 2. Kirchhoffova zákona

$$\begin{aligned}\hat{U}_A &= \hat{U}_{A1} + \hat{U}_{B2} = U\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}0°} + U\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}120°} = U\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}0°} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}120°}\right) = \\ &= U\left(\cos(0°) + \mathrm{j}\sin(0°) + \cos(-120°) + \mathrm{j}\sin(-120°)\right) = \\ &= U\left(1 + \mathrm{j}0 - \frac{1}{2} - \mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = U\left(\frac{1}{2} - \mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \\ &= \frac{U}{2}\sqrt{(1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \frac{U}{2}\sqrt{1+3}\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right)} = U\,\mathrm{e}^{\text{-j}60°}\ \mathrm{V}.\end{aligned}$$

Z odvozeného definičního vztahu plyne, že efektivní hodnota výsledného fázového napětí při tomto nestandardním zapojení zdrojů do lomené hvězdy je stejně velká jako efektivní hodnota fázového napětí dílčích trojfázových zdrojů a že fázor výsledného napětí $\hat{U}_A$ je natočen vůči reálné ose komplexní roviny (+1) o -60°. Jelikož oba zdroje jsou souměrné, bude i soustava napětí vzniklého zdroje souměrná, takže efektivní hodnota zbylých fází zdroje bude stejná. Polohu fázoru $\hat{U}_B$ v komplexní rovině získáme natočením fázoru $\hat{U}_A$ o -120° a polohu fázoru $\hat{U}_C$ jeho natočením o +120°. Pro tyto fázory tak platí $\hat{U}_B = U\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}180°}$ a $\hat{U}_C = U\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}60°}$. Konstrukce fázorového diagramu je zachycena na obr. 1.21 a dokládá výše uvedené skutečnosti..



Obr. 1.21 Fázorový diagram nestandardního zapojení trojfázových zdrojů do lomené hvězdy: postup konstrukce, fázory výsledné soustavy napětí

Shrnutí pojmů 1.2.

Zapojením trojfázových zdrojů do hvězdy, trojúhelníku a lomené hvězdy můžeme vytvořit různé napájecí soustavy. Napětí všech trojfázových zdrojů mohou být vyvedeny třívodičově a zdroje zapojené do hvězdy a lomené hvězdy i čtyřvodičově. Napětí třívodičové soustavy nazýváme sdružená. V čtyřvodičové soustavě kromě sdružených napětí existují i napětí fázová definována vůči nulovému vodiči soustavy.

Otázky 1.2.

1. Kolika způsoby lze zapojit trojfázový zdroj do hvězdy a trojúhelníka? Nakreslete všechny varianty zapojení.
2. Kolika způsoby lze zapojit trojfázový zdroj do lomené hvězdy? Nakreslete alespoň dvě varianty zapojení.
3. Mění se fázový posun mezi po sobě následujícími časovými průběhy napětí napájecích soustav vytvářených trojfázovými zdroji zapojenými do hvězdy, trojúhelníka a lomené hvězdy?
4. Jak se mění počáteční fáze časových průběhů napětí resp. natočení fázorů napětí napájecích soustav vytvářených trojfázovými zdroji zapojenými do hvězdy, trojúhelníka a lomené hvězdy?
5. Je souměrný trojfázový zdroj zapojený do hvězdy, trojúhelníku a lomené hvězdy vyvážený? Jak poznáme z fázorového diagramu, že zdroj je vyvážený?
6. Který zákon užíváme k odvození systému napětí troj i čtyřvodičové trojfázové napájecí soustavy?
7. Jaká napětí rozlišujeme ve čtyřvodičové napájecí soustavě?
8. Co je to nulový vodič?

Úloha k řešení 1.2.

Odvoďte z fázorového diagramu vztah mezi fázovým a sdruženým napětím v případě souměrné, sousledné trojfázové soustavy napětí.

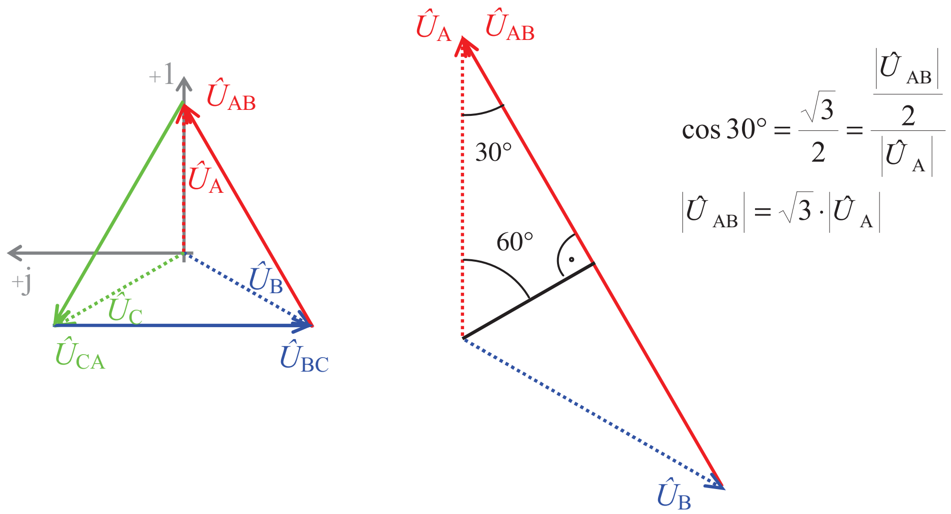
Řešení:

Odvození si ukažme na případu sdruženého napětí $\hat{U}_{\mathrm{AB}} = \hat{U}_{\mathrm{A}} - \hat{U}_{\mathrm{B}}$. Velikosti fázových napětí v souměrné soustavě napětí jsou stejné, takže platí $\left|\hat{U}_{\mathrm{A}}\right| = \left|\hat{U}_{\mathrm{B}}\right| = \left|\hat{U}_{\mathrm{C}}\right| = U$. Mají různé fáze, v našem případě $\hat{U}_{\mathrm{A}} = U\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}0°}$, $\hat{U}_{\mathrm{B}} = U\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}120°}$, $\hat{U}_{\mathrm{C}} = U\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}120°}$, takže pro zvolené sdružené napětí platí

$$\hat{U}_{\mathrm{AB}} = U\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}0°} - U\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}120°} = U\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}0°} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}120°}\right) = U\left[\cos 0° + \mathrm{j}\sin 0° - (\cos 120° - \mathrm{j}\sin 120°)\right] = U\left[\frac{3}{2} + \mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}\right] =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\arctan\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}}\right)} = \sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{j}30°}\ \mathrm{V}.$$

Sdružené napětí $\hat{U}_{\mathrm{AB}}$ v komplexní rovině zkonstruujeme graficky podle definice rozdílem fázorů fázových napětí $\hat{U}_{\mathrm{A}}$ a $\hat{U}_{\mathrm{B}}$. Velikosti fázorů jsou délkami stran trojúhelníků. Průmětem přepony vybraného pravoúhlého trojúhelníku do směru daného polohou fázoru $\hat{U}_{\mathrm{AB}}$ získáme hodnotu poloviny velikosti sdruženého napětí $\dfrac{U_{\mathrm{AB}}}{2} = \dfrac{\left|\hat{U}_{\mathrm{AB}}\right|}{2}$. Úhly pravoúhlého trojúhelníka uvedené v obrázku určíme ze známých hodnot fází fázorů napětí. Z obrázku je patrné, že fázor $\hat{U}_{\mathrm{A}}$ svírá s fázorem $\hat{U}_{\mathrm{AB}}$ úhel 30°. Užitím goniometrické funkce kosinus potom určíme relaci mezi velikostí fázového a sdruženého napětí, viz obr. 1.22. Poznamenejme, že tato relace platí pouze u souměrné trojfázové soustavy napětí.



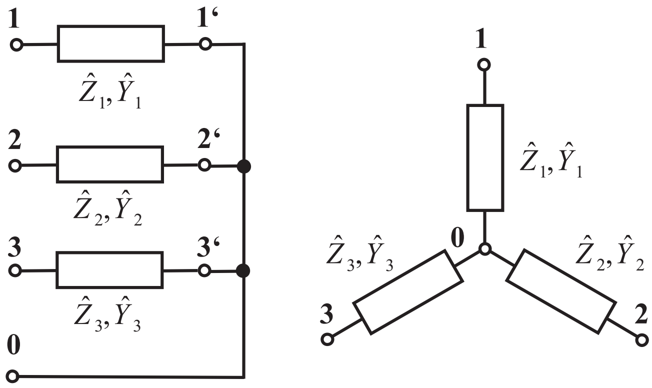
Obr. 1.22 Odvození relace mezi fázovým a sdruženým napětím z fázorového diagramu, úloha k řešení 1.2

1.3. Zapojení zátěže

Stejně jako trojfázové zdroje můžeme zapojit trojfázovou zátěž do hvězdy nebo do trojúhelníku. Obě zapojení lze navzájem transfigurovat z jednoho způsobu zapojení na druhé, neboť jsou navzájem ekvivalentní. V harmonicky ustáleném stavu je výhodné pasivní zátěž (spotřebič) modelovat imitancemi $\hat{Z}$ nebo $\hat{Y}$, viz obr. 1.23 a 1.24 vpravo.

Zapojení zátěže do hvězdy

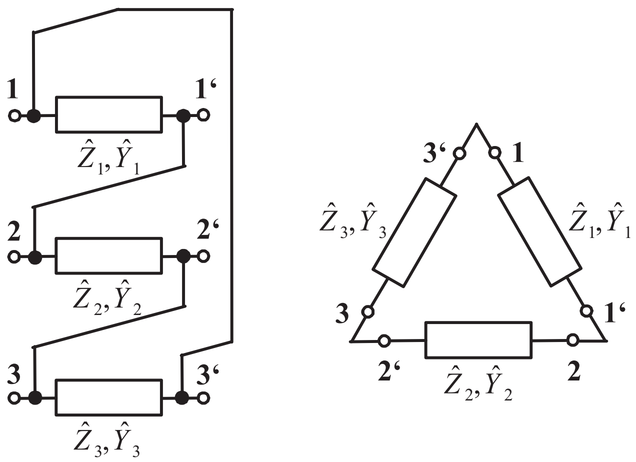
Zapojení zátěže do hvězdy vznikne spojením začátků resp. konců svorek tří samostatných, zpravidla pasivních větví zátěže do společného uzlu, který označme 0. Existují dvě možnosti jak vytvořit uzel, z nichž je na obr. 1.23 nakreslena varianta s uzlem tvořeným konci svorek 1‘, 2‘, 3. Tuto zátěž můžeme ke zdroji připojit tří nebo čtyřvodičově vyvedenými svorkami 1, 2, 3. a 0.



Obr. 1.23 Zapojení trojfázové zátěže do hvězdy

Zapojení zátěže do trojúhelníku

Zapojení zátěže do trojúhelníku na obr. 1.24 vznikne spojením začátků jedněch a konců jiných, odlišně označených svorek tří samostatných, zpravidla pasivních větví zátěže do série. Existují dvě možnosti jak propojit svorky zátěže, z nichž na obrázku je zakreslena varianta 1‘2, 2‘3, 3‘1. Tuto zátěž můžeme ke zdroji připojit třívodičově vyvedenými svorkami 1, 2, 3.

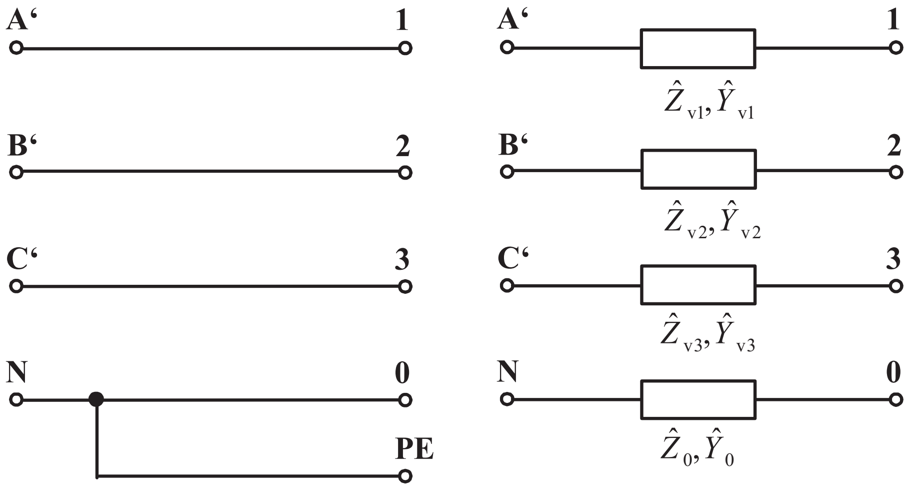


Obr. 1.24 Zapojení trojfázové zátěže do trojúhelníku

Trojfázové vedení

Model vedení na obr. 1.25 z pohledu svorek trojfázového zdroje představuje další zátěž, která je kaskádně včleněna mezi zdroj a trojfázovou zátěž. Z didaktických důvodů, model reálného vedení idealizujeme nebo zjednodušujeme tím, že zanedbáme některé jeho parametry. Podle počtu svorek napájecí soustavy, vyvedených ze zdroje, máme vedení tří nebo čtyřvodičové, případně pětivodičové, je-li nulový vodič rozdělen na vodič pracovní a ochranný z důvodů elektrické bezpečnosti. Poznamenejme, že v praxi označujeme pracovní vodič písmenem N, ochranný vodič PE a fázové vodiče L1, L2, L3.

Napětí a proudy vedení nazýváme síťovými. Idealizované vedení na obr. 1.25 vlevo propojuje svorky zdroje a zátěže, model vedení na obr. 1.25 vpravo potom respektuje některé vlastnosti vedení, které obvykle modelujeme v harmonicky ustáleném stavu symetrickou hodnotou imitance fáze vedení $\hat{Z}_v$ nebo $\hat{Y}_v$ a hodnotou imitace nulového vodiče $\hat{Z}_0$ nebo $\hat{Y}_0$.



Obr. 1.25 Trojfázové vedení:ideální vedení, imitanční model vedení

Pro výklad v další kapitole uvažujme idealizované vedení s nulovou hodnotou impedance fázových vodičů a nenulovou hodnotou imitance nulového vodiče.

Σ Shrnutí pojmů 1.3.

Trojfázovou zátěž zapojujeme do hvězdy a trojúhelníku. Zátěž do hvězdy lze ke zdroji připojit troj nebo čtyřvodičovým vedením, zátěž do trojúhelníku pouze trojvodičovým vedením. Veličiny vedení nazýváme síťové.

? Otázky 1.3.

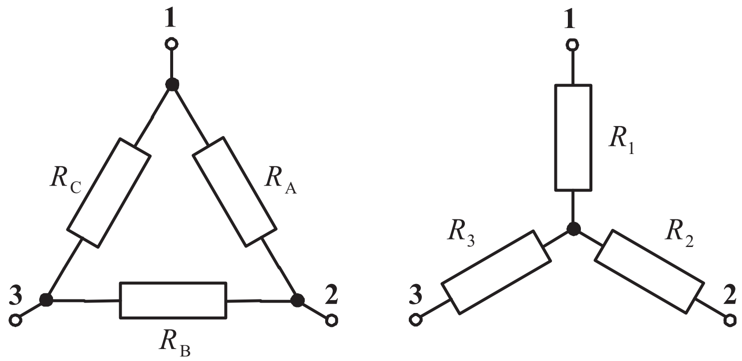
1. Čím modelujeme trojfázové spotřebiče v harmonicky ustáleném stavu?
2. Kolika způsoby lze zapojit trojfázovou zátěž do hvězdy a trojúhelníka? Nakreslete všechny varianty zapojení.
3. Kolik vodičů může mít trojfázové vedení?
4. Jak nazýváme napětí a proudy vedení?
5. Je trojfázová zátěž po transfiguraci ekvivalentní s původní zátěží?
6. Za jakým účelem dělíme nulový vodič na pracovní a ochranný vodič?

Úloha k řešení 1.3.

Je dána souměrná ohmická zátěž zapojená do trojúhelníka, nahraďte tuto zátěž ekvivalentním zapojením zátěže do hvězdy a stanovte hodnoty náhradních odporů zátěže.

Řešení:

Hodnoty ekvivalentních parametrů odporové zátěže zapojené do hvězdy získáme transfigurací trojúhelník - hvězda podle níže uvedených vztahů respektujících označení parametrů obou typů zátěže podle obr. 1.26, ze kterých je patrné, že odpor jedné fáze zátěže zapojené do hvězdy je třetinou odporu jedné fáze zátěže zapojené do trojúhelníku. Při těchto hodnotách odporů zátěže dodává zdroj oběma zapojením stejný činný výkon. Pokud bychom transfiguraci neprovedli a obě zátěže by měly stejnou hodnotu odporu, byl by pochopitelně příkon zátěže zapojené do trojúhelníka trojnásobkem příkonu zátěže zapojené do hvězdy.



Obr. 1.26 Transfigurace trojfázové zátěže

$$R_1 = \frac{R_A R_C}{R_A + R_B + R_C}, \quad R_2 = \frac{R_A R_B}{R_A + R_B + R_C}, \quad R_3 = \frac{R_B R_C}{R_A + R_B + R_C},$$

$$R = R_A = R_B = R_C,$$

$$R_1 = R_2 = R_3 = \frac{1}{3} R.$$

1.4. Analýza trojfázových obvodů

Analýza trojfázových obvodů v harmonicky ustáleném stavu na základě známých hodnot parametrů trojfázového zdroje a imitancí obvodu není složitá. Řešení provádíme v oboru komplexních čísel namísto komplikovaného řešení soustavy goniometrických rovnic s nezávislou časovou proměnou t v oboru reálných čísel. Komplexní hodnoty obvodových veličin reprezentované fázory napětí a proudu můžeme stanovit obecnými metodami řešení elektrických obvodů nebo přímou aplikaci Kirchhoffových zákonů a Ohmova zákona v symbolickém tvaru. Varianty uspořádání trojfázových obvodů získáme kombinacemi zapojení výše uvedených trojfázových zdrojů a zátěží, které propojíme zvoleným typem vedení. V praxi se pak nejčastěji setkáme se čtyřvodičovou napájecí soustavou nízkého napětí. V následujícím výkladu se proto zaměříme na trojfázové obvody se zdrojem zapojeným do hvězdy a ideálním vedením. Připomeňme si jen, že prvním krokem analýzy jakéhokoliv obvodu je zakreslení počítacích šipek v našem případě opatřených symboly hledaných komplexních hodnot napětí a proudů do schématu zapojení trojfázového obvodu.

❑ Zdroj a zátěž zapojené do hvězdy

Trojfázový obvod se zdrojem a zátěží zapojenými do hvězdy podle obr. 1.27 analyzujme přímou aplikací 1. a 2. Kirchhoffova zákona. Nejprve určíme napětí nulového vodiče $\hat{U}_0$ užitím 1. Kirchhoffova zákona (uvažujme kladný referenční směr proudu ven z uzlu)

$$-\hat{I}_0+\hat{I}_1+\hat{I}_2+\hat{I}_3=0\,,$$

kam dosadíme za proudy vztahy plynoucí z Ohmova zákona v symbolickém tvaru

$$-\hat{U}_0\hat{Y}_0+\hat{U}_1\hat{Y}_1+\hat{U}_2\hat{Y}_2+\hat{U}_3\hat{Y}_3=0\,.$$

Po aplikaci 2. Kirchhoffova zákona na příslušné smyčky (uvažujme oběh ve smyčce proti směru hodinových ručiček)

$$\hat{U}_1-\hat{U}_\mathrm{A}+\hat{U}_0=0\,,$$

$$\hat{U}_2-\hat{U}_\mathrm{B}+\hat{U}_0=0\,,$$

$$\hat{U}_3-\hat{U}_\mathrm{C}+\hat{U}_0=0\,,$$

si vyjádříme fázová napětí zátěže, která dosadíme do předcházejícího vztahu, čímž získáme rovnici

$$-\hat{U}_0\hat{Y}_0+(\hat{U}_\mathrm{A}-\hat{U}_0)\hat{Y}_1+(\hat{U}_\mathrm{B}-\hat{U}_0)\hat{Y}_2+(\hat{U}_\mathrm{C}-\hat{U}_0)\hat{Y}_3=0$$

a po úpravě napětí

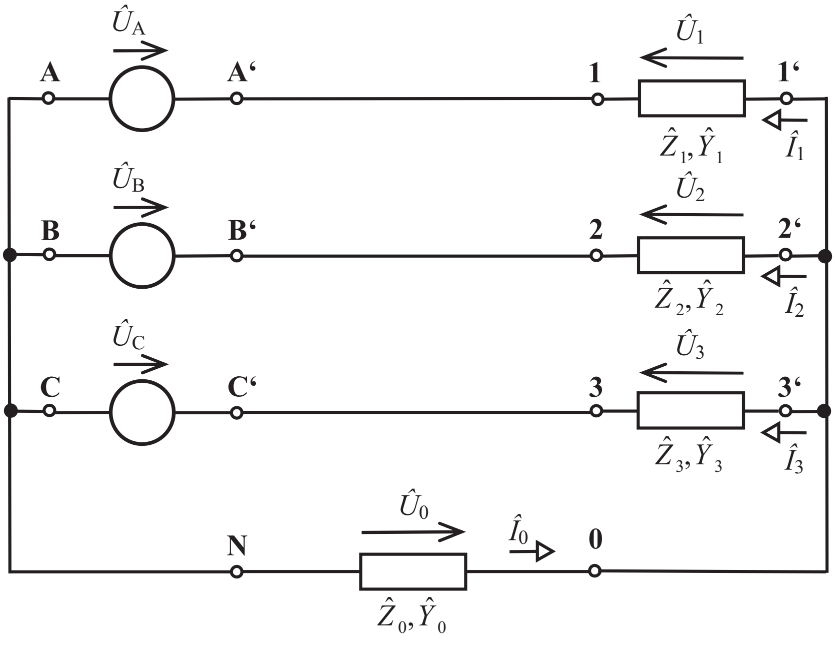
$$\hat{U}_0=\frac{\hat{U}_\mathrm{A}\hat{Y}_1+\hat{U}_\mathrm{B}\hat{Y}_2+\hat{U}_\mathrm{C}\hat{Y}_3}{\hat{Y}_1+\hat{Y}_2+\hat{Y}_3+\hat{Y}_0}\,.$$

Fázová napětí zátěže určíme ze známých parametrů zdroje a napětí $\hat{U}_0$

$$\hat{U}_1=\hat{U}_\mathrm{A}-\hat{U}_0\,,$$

$$\hat{U}_2=\hat{U}_\mathrm{B}-\hat{U}_0\,,$$

$$\hat{U}_3=\hat{U}_\mathrm{C}-\hat{U}_0\,.$$



Obr. 1.27 Analýza trojfázového obvodu se zátěží zapojenou do hvězdy, zavedení počítacích šipek

Fázové proudy obvodu stanovíme z Ohmova zákona v symbolickém tvaru dosazením fázových napětí a admitancí zátěže

$$\hat{I}_1=\hat{U}_1\hat{Y}_1\,,$$

$$\hat{I}_2 = \hat{U}_2 \hat{Y}_2 ,$$

$$\hat{I}_3 = \hat{U}_3 \hat{Y}_3$$

a proud nulového vodiče z rovnice

$$\hat{I}_0 = \hat{U}_0 \hat{Y}_0 .$$

Na závěr analýzy provedeme kontrolu správnosti řešení dosazením vypočtených proudů obvodu do 1. Kirchhoffova zákona.

Rozeberme si nyní vybrané provozní a poruchové stavy tohoto obvodu:

a) nulová impedance nulového vodiče,

b) souměrná zátěž,

c) přerušení nulového vodiče,

d) přerušení jedné fáze symetrické zátěže,

e) zkrat v jedné fázi zátěže.

Ad a) Je-li uzel zdroje a zátěže přímo propojen, impedance nulového vodiče $\hat{Z}_0 = 0\ \Omega$ resp. admitance nulového vodiče bude

$$\hat{Y}_0 = \lim_{\hat{Z}_0 \to 0} \frac{1}{\hat{Z}_0} \to \infty\ \Omega$$

a napětí nulového vodiče je nulové bez ohledu na nesymetrii zátěže

$$\hat{U}_0 = \lim_{\hat{Y}_0 \to \infty} \frac{\hat{U}_\mathrm{A} \hat{Y}_1 + \hat{U}_\mathrm{B} \hat{Y}_2 + \hat{U}_\mathrm{C} \hat{Y}_3}{\hat{Y}_1 + \hat{Y}_2 + \hat{Y}_3 + \hat{Y}_0} = 0\ \mathrm{V} .$$

Z tohoto důvodu jsou fázová napětí zátěže rovna fázovým napětím zdroje a případná nesymetrie zátěže se projeví nenulovou hodnotou proudu $\hat{I}_0$. Trojfázový obvod se tak rozpadne na tři samostatné jednofázové obvody se společným nulovým vodičem.

Ad b) Symetrická zátěž má ve všech fázích stejné hodnoty imitance, takže platí

$$\hat{Y}_1 = \hat{Y}_2 = \hat{Y}_3 = \hat{Y} \text{ nebo } \hat{Z}_1 = \hat{Z}_2 = \hat{Z}_3 = \hat{Z}$$

a napětí nulového vodiče je nulové v důsledku vyváženosti souměrného zdroje

$$\hat{U}_0 = \frac{\hat{Y} \left(\hat{U}_\mathrm{A} + \hat{U}_\mathrm{B} + \hat{U}_\mathrm{C} \right)}{3\hat{Y} + \hat{Y}_0} = 0 ,$$

pro který platí v komplexní rovině $\hat{U}_\mathrm{A} + \hat{U}_\mathrm{B} + \hat{U}_\mathrm{C} = 0$. Fázová napětí zátěže jsou tak rovna fázovým napětím zdroje a proud nulového vodiče $\hat{I}_0$ je nulový. Trojfázový obvod se tak rozpadne na tři samostatné jednofázové obvody.

Ad c) Přerušený nulový vodič má admitanci $\hat{Y}_0 = 0\ \mathrm{S}$. Napětí nulového vodiče je dáno vztahem

$$\hat{U}_0 = \frac{\hat{U}_\mathrm{A} \hat{Y}_1 + \hat{U}_\mathrm{B} \hat{Y}_2 + \hat{U}_\mathrm{C} \hat{Y}_3}{\hat{Y}_1 + \hat{Y}_2 + \hat{Y}_3} ,$$

takže může být nulové jen, je-li zátěž symetrická viz odrážka b). Při přerušeném nulovém vodiči je proud $\hat{I}_0$ nulový a fázová napětí nesymetrické zátěže jsou rovna rozdílu fázových napětí zdroje a napětí nulového vodiče.

Ad d) Uvažujme, že k přerušení došlo ve fázi 1 zátěže, která nemá tím pádem žádnou vodivost, tj. $\hat{Y}_1 = 0\,\mathrm{S}$. Pro napětí nulového vodiče platí

$$\hat{U}_0 = \frac{\hat{U}_\mathrm{B}\hat{Y}_2 + \hat{U}_\mathrm{C}\hat{Y}_3}{\hat{Y}_2 + \hat{Y}_3 + \hat{Y}_0}$$

a může být nulové jen, je-li uzel zdroje a zátěže propojen, tj. při $\hat{Z}_0 = 0\ \Omega$ viz odrážka a). Nesymetrie zátěže se v tomto případě projeví nenulovou hodnotou proudu $\hat{I}_0$. Nebude-li uzel zdroje a zátěže propojen, nesymetrie zátěže se projeví nenulovou hodnotou napětí $\hat{U}_0$ viz odrážka c).

Ad e) Uvažujme, že ke zkratu došlo ve fázi 1 zátěže, která má tím pádem nulovou impedanci $\hat{Z}_1 = 0\,\Omega$ resp. nekonečně velkou admitanci $\hat{Y}_1 = \lim\limits_{\hat{Z}_1 \to 0} \frac{1}{\hat{Z}_1} \to \infty\ \mathrm{S}$, takže pro napětí nulového vodiče platí

$$\hat{U}_0 = \lim_{\hat{Y}_1 \to \infty} \frac{\hat{U}_\mathrm{A}\hat{Y}_1 + \hat{U}_\mathrm{B}\hat{Y}_2 + \hat{U}_\mathrm{C}\hat{Y}_3}{\hat{Y}_1 + \hat{Y}_2 + \hat{Y}_3 + \hat{Y}_0} = \lim_{\hat{Y}_1 \to \infty} \frac{\hat{U}_\mathrm{A} + \hat{U}_\mathrm{B}\dfrac{\hat{Y}_2}{\hat{Y}_1} + \hat{U}_\mathrm{C}\dfrac{\hat{Y}_3}{\hat{Y}_1}}{1 + \dfrac{\hat{Y}_2}{\hat{Y}_1} + \dfrac{\hat{Y}_3}{\hat{Y}_1} + \dfrac{\hat{Y}_0}{\hat{Y}_1}} = \hat{U}_\mathrm{A}$$

bez ohledu na to, je-li uzel zdroje a zátěže propojen či ne. Nesymetrie zátěže se v tomto případě projeví tím, že se na nepostižených fázích zátěže objeví napětí o velikosti sdružených napětí

$$\hat{U}_2 = \hat{U}_\mathrm{B} - \hat{U}_\mathrm{A} = -\left(\hat{U}_\mathrm{A} - \hat{U}_\mathrm{B}\right) = -\left(U\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}0°} - U\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}120°}\right) = \sqrt{3}\,U\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}150°},$$

$$\hat{U}_3 = \hat{U}_\mathrm{C} - \hat{U}_\mathrm{A} = U\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}120°} - U\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}0°} = \sqrt{3}\,U\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}150°}$$

a fázové proudy

$$\hat{I}_2 = \hat{U}_2\hat{Y}_2 = \sqrt{3}\,U\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}150°}\,Y_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_{\mathrm{Y}2}} = I_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(-150° + \varphi_{\mathrm{Y}2})},$$

$$\hat{I}_3 = \hat{U}_3\hat{Y}_3 = \sqrt{3}\,U\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}150°}\,Y_3\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_{\mathrm{Y}3}} = I_3\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(150° + \varphi_{\mathrm{Y}3})}.$$

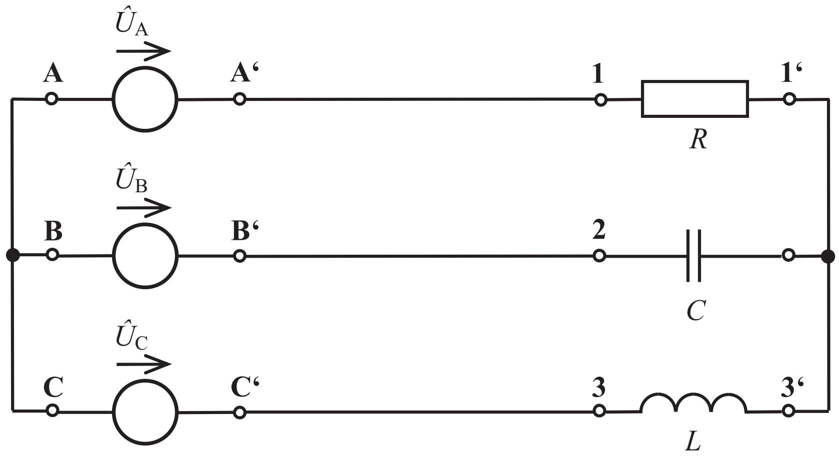
Bude-li uzel zdroje a zátěže propojen nulovým vodičem s nenulovou hodnotou impedance, proud tohoto vodiče bude mít hodnotu $\hat{I}_0 = \hat{U}_\mathrm{A}\hat{Y}_0$ a proud postižené fáze $\hat{I}_1$ bude dán podle 1. Kirchhoffova zákona rovnicí $\hat{I}_1 = \hat{I}_0 - \hat{I}_2 - \hat{I}_3$. Nebude-li toto propojení realizováno, proud postižené fáze bude $\hat{I}_1 = -\hat{I}_2 - \hat{I}_3$.

Uvažovat případ, kdy uzel zdroje a zátěže je propojen ideálním vodičem nebo případ dvoufázového zkratu zátěže propojené se zdrojem ideálním vedením, nemá význam analyzovat, neboť vznikne obvod s nekonečným výkonem.

Připomeňme si jen, že fázové výkony zdroje a zátěže i výkon nulového vodiče počítáme stejným způsobem jako v jednofázových střídavých obvodech v harmonicky ustáleném stavu. Výkon zdroje a příkon zátěže získáme sečtením jejich fázových výkonů.

Příklad 1.5.

Je dán trojfázový obvod složený ze souměrného zdroje napětí o efektivní hodnotě napětí U a zátěže nakreslené na obr. 1.28. Pro velikost impedancí fází zátěže platí $\left|\hat{Z}_1\right| = \left|\hat{Z}_2\right| = \left|\hat{Z}_3\right| = K\ \Omega$. *Zakreslete počítací šipky veličin obvodu do schéma zapojení a stanovte fázové výkony zátěže.*



Obr. 1.28 Nesouměrný trojfázový obvod se zátěží zapojenou do hvězdy, příklad 1.5

♦

Řešení:

Po zavedení imitancí zátěže

$$\hat{Z}_1 = K\ \Omega, \quad \hat{Z}_2 = -\mathrm{j}K\ \Omega, \quad \hat{Z}_3 = \mathrm{j}K\ \Omega,$$

$$\hat{Y}_1 = \frac{1}{\hat{Z}_1} = \frac{1}{K} = \frac{1}{K}\mathrm{e}^{\mathrm{j}0°},$$

$$\hat{Y}_2 = \frac{1}{\hat{Z}_2} = \frac{1}{-\mathrm{j}K}\frac{\mathrm{j}}{\mathrm{j}} = \mathrm{j}\frac{1}{K} = \frac{1}{K}\mathrm{e}^{\mathrm{j}90°},$$

$$\hat{Y}_3 = \frac{1}{\hat{Z}_1} = \frac{1}{\mathrm{j}K}\frac{-\mathrm{j}}{-\mathrm{j}} = -\mathrm{j}\frac{1}{K} = \frac{1}{K}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}90°}$$

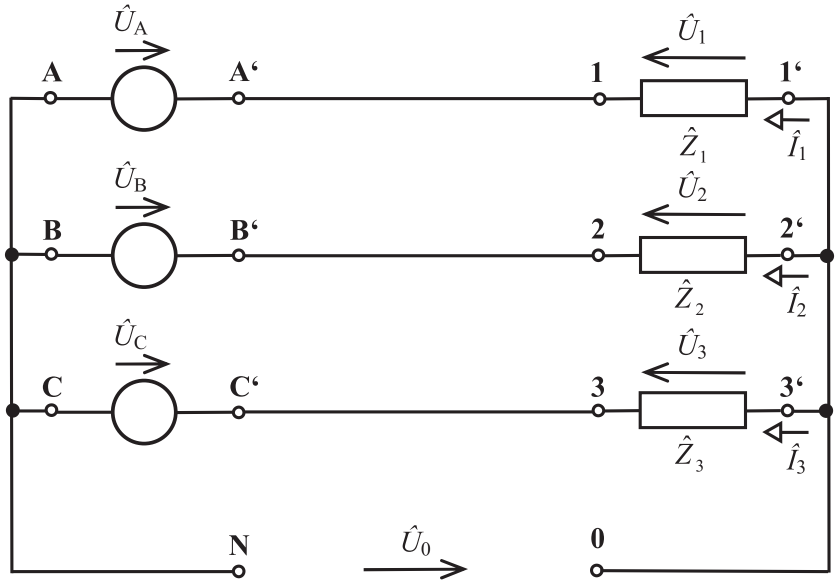
si zadaný obvod překreslíme a zavedeme počítací šipky podle obr. 1.29.

Uvažujme souslednou soustavu fázových napětí zdroje

$$\hat{U}_\mathrm{A} = U = U\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}0°},$$

$$\hat{U}_\mathrm{B} = U\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}120°} = U\big(\cos(-120°) + \mathrm{j}\sin(-120°)\big) = U\big(\cos(120°) - \mathrm{j}\sin(120°)\big) = U\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{j}\right),$$

$$\hat{U}_\mathrm{C} = U\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}120°} = U\big(\cos(120°) + \mathrm{j}\sin(120°)\big) = U\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{j}\right).$$



Obr. 1.29 Zavedení počítacích šipek a imitančního popisu k zadání příkladu 1.5

Zátěž není symetrická, takže musíme nejprve vypočítat hodnotu nulového napětí

$$\hat{U}_0 = \frac{\hat{U}_{\mathrm{A}}\hat{Y}_1 + \hat{U}_{\mathrm{B}}\hat{Y}_2 + \hat{U}_{\mathrm{C}}\hat{Y}_3}{\hat{Y}_1 + \hat{Y}_2 + \hat{Y}_3 + \hat{Y}_0} = \frac{U\frac{1}{K} + U\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{j}\right)\mathrm{j}\frac{1}{K} + U\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{j}\right)\left(-\mathrm{j}\frac{1}{K}\right)}{\frac{1}{K} + \mathrm{j}\frac{1}{K} + \left(-\mathrm{j}\frac{1}{K}\right) + 0} =$$

$$= \frac{U\frac{1}{K}\left[1 + \left(-\frac{1}{2}\mathrm{j} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{j}^2\right) + \left(-\frac{1}{2}(-\mathrm{j}) + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{j}(-\mathrm{j})\right)\right]}{\frac{1}{K}} = U\left[1 + -\frac{1}{2}\mathrm{j} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{j} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$= U\left(1 + \sqrt{3}\right)$$

a až poté můžeme na základě 2. Kirchhoffova zákona vypočítat fázová napětí zátěže ve složkovém tvaru

$$\hat{U}_1 = \hat{U}_{\mathrm{A}} - \hat{U}_0 = U - U\left(1 + \sqrt{3}\right) = U - U - \sqrt{3}\,U = -U\sqrt{3} \doteq -1{,}732\,U\,,$$

$$\hat{U}_2 = \hat{U}_{\mathrm{B}} - \hat{U}_0 = U\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{j}\right) - U\left(1 + \sqrt{3}\right) = U\left(-\frac{1}{2} - \left(1 + \sqrt{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{j}\right) =$$

$$= U\left[-\left(\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{j}\right] \doteq U\left(-3{,}232 - 0{,}866\mathrm{j}\right),$$

$$\hat{U}_3 = \hat{U}_{\mathrm{C}} - \hat{U}_0 = U\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{j}\right) - U\left(1 + \sqrt{3}\right) = U\left(-\frac{1}{2} - \left(1 + \sqrt{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{j}\right)$$

$$= U\left[-\left(\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{j}\right] \doteq U\left(-3{,}232 + 0{,}866\mathrm{j}\right),$$

jejichž exponenciální tvar je

$$\hat{U}_1 = -U\sqrt{3} = U\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}180^\circ},$$

$$\hat{U}_2 = U\left[-\left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{j}\right] = U\sqrt{\left[-\left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)\right]^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\;\mathrm{e}^{\mathrm{j}\arctan\left(\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)}\right)} =$$

$$= U\sqrt{(-1)^2\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2+2\frac{3}{2}\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2\right]+(-1)^2\,\frac{3}{2^2}}\;\mathrm{e}^{\mathrm{j}\arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{-\left(3+2\sqrt{3}\right)}\right)} =$$

$$= U\sqrt{\left(\frac{9}{4}+3\sqrt{3}+3\right)+\frac{3}{4}}\;\mathrm{e}^{\mathrm{j}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{\left(3+2\sqrt{3}\right)}\right)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}180^\circ} = U\sqrt{\frac{9+4\cdot3\sqrt{3}+4\cdot3+3}{4}}\;\mathrm{e}^{\mathrm{j}15^\circ}\mathrm{e}^{\mathrm{j}180^\circ} =$$

$$= U\sqrt{\frac{24+12\sqrt{3}}{4}}\;\mathrm{e}^{\mathrm{j}195^\circ} = U\sqrt{3\left(2+\sqrt{3}\right)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}195^\circ} = \sqrt{3}U\sqrt{2+\sqrt{3}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}195^\circ} = \sqrt{3}U\sqrt{2+\sqrt{3}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}165^\circ},$$

$$\hat{U}_3 = U\left[-\left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{j}\right] = U\sqrt{\left[-\left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)\right]^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\;\mathrm{e}^{\mathrm{j}\arctan\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)}\right)} =$$

$$= U\sqrt{(-1)^2\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2+2\frac{3}{2}\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2\right]+\frac{3}{2^2}}\;\mathrm{e}^{\mathrm{j}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{-\left(3+2\sqrt{3}\right)}\right)} =$$

$$= U\sqrt{\left(\frac{9}{4}+3\sqrt{3}+3\right)+\frac{3}{4}}\;\mathrm{e}^{\mathrm{j}\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{\left(3+2\sqrt{3}\right)}\right)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}180^\circ} = U\sqrt{\frac{9+4\cdot3\sqrt{3}+4\cdot3+3}{4}}\;\mathrm{e}^{-\mathrm{j}15^\circ}\mathrm{e}^{\mathrm{j}180^\circ} =$$

$$= U\sqrt{\frac{24+12\sqrt{3}}{4}}\;\mathrm{e}^{\mathrm{j}165^\circ} = U\sqrt{3\left(2+\sqrt{3}\right)}\;\mathrm{e}^{\mathrm{j}165^\circ} = \sqrt{3}U\sqrt{2+\sqrt{3}}\;\mathrm{e}^{\mathrm{j}165^\circ} = \sqrt{3}U\sqrt{2+\sqrt{3}}\;\mathrm{e}^{\mathrm{j}165^\circ}.$$

Fázové proudy určíme užitím Ohmova zákona v symbolickém tvaru, a to nejprve ve složkovém tvaru

$$\hat{I}_1 = \hat{Y}_1\hat{U}_1 = \frac{1}{K}\left(-U\sqrt{3}\right) = -\frac{U}{K}\sqrt{3} \doteq -1{,}732\frac{U}{K},$$

$$\hat{I}_2 = \hat{Y}_2\hat{U}_2 = \mathrm{j}\frac{1}{K}U\left[-\left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{j}\right] = \frac{U}{K}\left[-\left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)\mathrm{j}-\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{j}^2\right] =$$

$$= \frac{U}{K}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)\mathrm{j}\right] \doteq \frac{U}{K}\left(0{,}866-3{,}232\,\mathrm{j}\right),$$

$$\hat{I}_3 = \hat{Y}_3\hat{U}_3 = -\mathrm{j}\frac{1}{K}U\left[-\left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{j}\right] = \frac{U}{K}\left[-\left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)(-\mathrm{j})+\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{j}(-\mathrm{j})\right] =$$

$$= \frac{U}{K}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)\mathrm{j}\right] \doteq \frac{U}{K}\left(0{,}866+3{,}232\,\mathrm{j}\right)$$

a poté i ve tvaru exponenciálním

$$\hat{I}_1 = -\sqrt{3}\frac{U}{K} = -\frac{U}{K}\sqrt{3} = \frac{U}{K}\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}180^\circ},$$

$$\hat{I}_2 = \frac{U}{K}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right)\mathrm{j}\right] = \frac{U}{K}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right)\mathrm{j}\right] =$$

$$= \frac{U}{K}\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left[-\left(\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right)\right]^2} \quad \mathrm{e}^{\mathrm{j}\arctan\left(\frac{-\left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)} =$$

$$= \frac{U}{K}\sqrt{\frac{3}{2^2} + (-1)^2\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2\frac{3}{2}\sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2\right]} \quad \mathrm{e}^{\mathrm{j}\arctan\left(\frac{-(3+2\sqrt{3})}{\sqrt{3}}\right)} =$$

$$= \frac{U}{K}\sqrt{\frac{3}{4} + \left(\frac{9}{4} + 3\sqrt{3} + 3\right)} \quad \mathrm{e}^{-\mathrm{j}75^\circ} = \frac{U}{K}\sqrt{\frac{9 + 4\cdot 3\sqrt{3} + 4\cdot 3 + 3}{4}} \quad \mathrm{e}^{-\mathrm{j}75^\circ} =$$

$$= \frac{U}{K}\sqrt{\frac{24 + 12\sqrt{3}}{4}} \quad \mathrm{e}^{-\mathrm{j}75^\circ} = \frac{U}{K}\sqrt{3\left(2 + \sqrt{3}\right)} \ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}75^\circ} = \sqrt{3}\frac{U}{K}\sqrt{2 + \sqrt{3}} \ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}75^\circ},$$

$$\hat{I}_3 = \frac{U}{K}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right)\mathrm{j}\right] = \frac{U}{K}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right)\mathrm{j}\right] = \frac{U}{K}\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right)^2} \quad \mathrm{e}^{\mathrm{j}\arctan\left(\frac{\left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)} =$$

$$= \frac{U}{K}\sqrt{\frac{3}{2^2} + \left[\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2\frac{3}{2}\sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2\right]} \quad \mathrm{e}^{\mathrm{j}\arctan\left(\frac{(3+2\sqrt{3})}{\sqrt{3}}\right)} =$$

$$= \frac{U}{K}\sqrt{\frac{3}{4} + \left(\frac{9}{4} + 3\sqrt{3} + 3\right)} \quad \mathrm{e}^{\mathrm{j}75^\circ} = \frac{U}{K}\sqrt{\frac{9 + 4\cdot 3\sqrt{3} + 4\cdot 3 + 3}{4}} \quad \mathrm{e}^{\mathrm{j}75^\circ} =$$

$$= \frac{U}{K}\sqrt{\frac{24 + 12\sqrt{3}}{4}} \quad \mathrm{e}^{\mathrm{j}75^\circ} = \frac{U}{K}\sqrt{3\left(2 + \sqrt{3}\right)} \ \mathrm{e}^{\mathrm{j}75^\circ} = \sqrt{3}\frac{U}{K}\sqrt{2 + \sqrt{3}} \ \mathrm{e}^{\mathrm{j}75^\circ}.$$

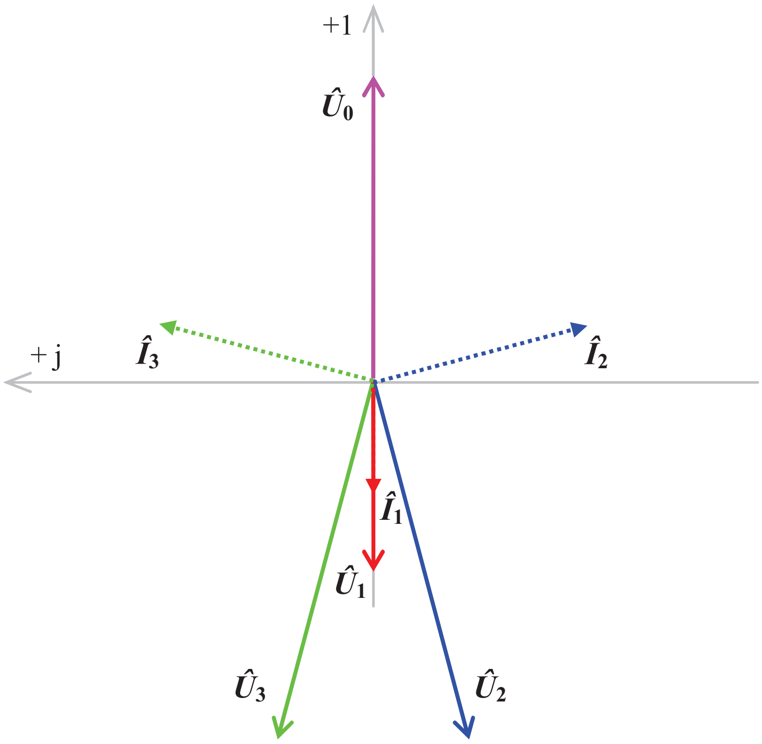
Kontrolu správnosti řešení provedeme podle 1. Kirchhoffova zákona

$$\hat{I}_1 + \hat{I}_2 + \hat{I}_3 = -\frac{U}{K}\sqrt{3} + \frac{U}{K}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right)\mathrm{j}\right] + \frac{U}{K}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right)\mathrm{j}\right] =$$

$$= \frac{U}{K}\left\{-\sqrt{3} + \left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right)\mathrm{j}\right] + \left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right)\mathrm{j}\right]\right\} = \qquad .$$

$$= \frac{U}{K}\left[-\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right)\mathrm{j} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right)\mathrm{j}\right] = 0\ \mathrm{A}.$$

Fázorový diagram obvodu je nakreslen na obr. 1.30 a je z něj zřejmé, že fázory $\hat{U}_2$, $\hat{U}_3$ a $\hat{I}_2$, $\hat{I}_3$ jsou komplexně sdružená čísla.



Obr. 1.30 Fázorový diagram obvodu, příklad 1.5

Ze známých hodnot fázorů napětí a proudů nyní vypočítáme fázové výkony zátěže, a to využitím jejich definic v exponenciálním tvaru

$$\hat{S}_1 = \hat{U}_1 \hat{I}_1^* = U\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}180°}\left(\frac{U}{K}\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}180°}\right)^* = 3\frac{U^2}{K}\mathrm{e}^{\mathrm{j}180°}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}180°} = 3\frac{U^2}{K}\mathrm{e}^{\mathrm{j}0°} = 3\frac{U^2}{K},$$

$$\hat{S}_2 = \hat{U}_2 \hat{I}_2^* = \sqrt{3}U\sqrt{2+\sqrt{3}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}165°}\left(\sqrt{3}\frac{U}{K}\sqrt{2+\sqrt{3}}\;\mathrm{e}^{-\mathrm{j}75°}\right)^* = 3\frac{U^2}{K}\left(2+\sqrt{3}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}165°}\;\mathrm{e}^{\mathrm{j}75°} =$$

$$= 3\frac{U^2}{K}\left(2+\sqrt{3}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}165°}\;\mathrm{e}^{\mathrm{j}75°} = 3\frac{U^2}{K}\left(2+\sqrt{3}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}90°},$$

$$\hat{S}_3 = \hat{U}_3 \hat{I}_3^* = \sqrt{3}U\sqrt{2+\sqrt{3}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}165°}\left(\sqrt{3}\frac{U}{K}\sqrt{2+\sqrt{3}}\;\mathrm{e}^{\mathrm{j}75°}\right)^* = 3\frac{U^2}{K}\left(2+\sqrt{3}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}165°}\;\mathrm{e}^{-\mathrm{j}75°} =$$

$$= 3\frac{U^2}{K}\left(2+\sqrt{3}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}165°}\;\mathrm{e}^{-\mathrm{j}75°} = 3\frac{U^2}{K}\left(2+\sqrt{3}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}90°}.$$

Připomeňme si jen, že v definici zdánlivého výkonu má proud komplexně sdruženou hodnotu, která je vyznačena hvězdičkou na pozici horního indexu. Komplexně sdružené číslo získáme z původního čísla změnou znaménka buď jeho imaginární složky, je-li zapsáno ve složkovém tvaru, nebo jeho argumentu (fáze), je-li a zapsáno v exponenciálním tvaru.

Složky zdánlivého výkonu zátěže snadno určíme, uvědomíme-li si, že zdánlivý výkon první fáze má jen reálnou složku, protože $\mathrm{e}^{\mathrm{j}0°} = 1$ a zdánlivé výkony druhé a třetí fáze jen složku imaginární, protože platí $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}90°} = \pm\mathrm{j}$, takže platí

$$\hat{S}_1 = P_1 = 3\frac{U^2}{K},$$

$$\hat{S}_2 = \mathrm{j}Q_2 = -\mathrm{j}3\frac{U^2}{K}\left(2+\sqrt{3}\right),$$

$$\hat{S}_3 = \mathrm{j}Q_3 = \mathrm{j}3\frac{U^2}{K}\left(2+\sqrt{3}\right).$$

❑ Zdroj zapojený do hvězdy a zátěž zapojená do trojúhelníku

Trojfázový obvod se zdrojem zapojeným do hvězdy a zátěží zapojenou do trojúhelníku podle obr. 1.31 analyzujme přímou aplikací 1. a 2. Kirchhoffova zákona. Fázová napětí zátěže určíme užitím 2. Kirchhoffova zákona

$$\hat{U}_1 = \hat{U}_\mathrm{A} - \hat{U}_\mathrm{B},$$

$$\hat{U}_2 = \hat{U}_\mathrm{B} - \hat{U}_\mathrm{C},$$

$$\hat{U}_3 = \hat{U}_\mathrm{C} - \hat{U}_\mathrm{A}.$$

Fázové proudy zátěže stanovíme z Ohmova zákona v symbolickém tvaru dosazením fázových napětí zátěže a jejich admitancí

$$\hat{I}_1 = \hat{U}_1\hat{Y}_1,$$

$$\hat{I}_2 = \hat{U}_2\hat{Y}_2,$$

$$\hat{I}_3 = \hat{U}_3\hat{Y}_3.$$

Síťové proudy určíme aplikací 1. Kirchhoffova zákona na uzly 1, 2, 3 zátěže

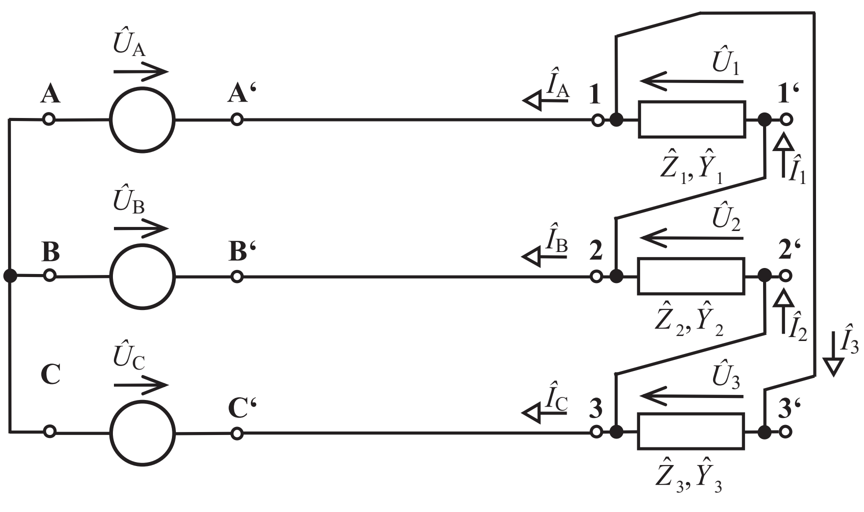
$$\hat{I}_\mathrm{A} = \hat{I}_1 - \hat{I}_3,$$

$$\hat{I}_\mathrm{B} = \hat{I}_2 - \hat{I}_1,$$

$$\hat{I}_\mathrm{C} = \hat{I}_3 - \hat{I}_2.$$

Kontrolu řešení provedeme dosazením vypočtených síťových proudů do 1. Kirchhoffova zákona

$$\hat{I}_\mathrm{A} + \hat{I}_\mathrm{B} + \hat{I}_\mathrm{C} = 0.$$



Obr. 1.31 Analýza trojfázového obvodu se zátěží zapojenou do trojúhelníku, zavedení počítacích šipek

Z poruchových stavů zátěže zapojené do trojúhelníka nemá význam analyzovat zkrat fáze zátěže, neboť vznikne obvod s nekonečnými výkony.

Příklad 1.6.

Odvoďte konstantu úměrnosti mezi efektivní hodnotou fázového a síťového proudu symetrické zátěže zapojené do trojúhelníku podle obr. 1.31 připojené k souměrnému harmonickému zdroji zapojenému do hvězdy.

♦

Vzhledem k tomu, že zdroj je souměrný a zátěž symetrická, jsou velikosti síťových proudů stejné a k odvození hledané konstanty si můžeme zvolit kterýkoliv uzel zátěže z obr. 1.31. Zvolíme-li uzel 1, platí pro něj podle 1. Kirchhoffova zákona $\hat{I}_\mathrm{A} = \hat{I}_1 - \hat{I}_3$, kam dosadíme z Ohmova zákona v symbolickém tvaru za fázové proudy zátěže

$$\begin{aligned}\hat{I}_1 &= \hat{U}_1\hat{Y}_1 = \left(\hat{U}_\mathrm{A} - \hat{U}_\mathrm{B}\right)\hat{Y} = U\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}0^\circ} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}120^\circ}\right)Y\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_\mathrm{Y}} = \\ &= U\,Y\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_\mathrm{Y}}\left(\cos(0^\circ) + \mathrm{j}\sin(0^\circ) - \left(\cos(-120^\circ) + \mathrm{j}\sin(-120^\circ)\right)\right) = \\ &= U\,Y\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_\mathrm{Y}}\left(1 + \mathrm{j}0 - \left(-\frac{1}{2} - \mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = U\,Y\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_\mathrm{Y}}\left(\frac{3}{2} + \mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \\ &= \frac{U}{2}Y\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_\mathrm{Y}}\sqrt{(3)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{U}{2}Y\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_\mathrm{Y}}\sqrt{4\cdot 3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)} = \sqrt{3}\,U\,Y\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}30^\circ}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_\mathrm{Y}}\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{I}_3 &= \hat{U}_3\hat{Y}_3 = \left(\hat{U}_\mathrm{C} - \hat{U}_\mathrm{A}\right)\hat{Y} = U\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}120^\circ} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}0^\circ}\right)Y\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_\mathrm{Y}} = \\ &= U\,Y\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_\mathrm{Y}}\left(\cos(120^\circ) + \mathrm{j}\sin(120^\circ) - \left(\cos(0^\circ) + \mathrm{j}\sin(0^\circ)\right)\right) = \\ &= U\,Y\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_\mathrm{Y}}\left(-\frac{1}{2} + \mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2} - (1 + \mathrm{j}0)\right) = U\,Y\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_\mathrm{Y}}\left(-\frac{3}{2} + \mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \\ &= \frac{U}{2}Y\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_\mathrm{Y}}\sqrt{(-3)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{U}{2}Y\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_\mathrm{Y}}\sqrt{4\cdot 3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{-3}\right)+180^\circ\right)} = \sqrt{3}\,U\,Y\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}150^\circ}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_\mathrm{Y}}\,,\end{aligned}$$

takže pro síťový proud platí

$$\begin{aligned}\hat{I}_\mathrm{A} &= \sqrt{3}\,U\,Y\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_\mathrm{Y}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}30^\circ} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}150^\circ}\right) = \\ &= \sqrt{3}\,U\,Y\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_\mathrm{Y}}\left(\cos(30^\circ) + \mathrm{j}\sin(30^\circ) - \left(\cos(150^\circ) + \mathrm{j}\sin(150^\circ)\right)\right) = \\ &= \sqrt{3}\,U\,Y\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_\mathrm{Y}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{j}\frac{1}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{j}\frac{1}{2}\right)\right) = \sqrt{3}\,U\,Y\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_\mathrm{Y}}\left(\sqrt{3} + \mathrm{j}0\right) = 3\,U\,Y\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_\mathrm{Y}}\,.\end{aligned}$$

Z poměru velikostí síťového a fázového proudu $3/\sqrt{3}$ plyne konstanta úměrnosti $\sqrt{3}$ a pro jejich velikosti platí $\left|\hat{I}_\mathrm{A}\right| = \sqrt{3}\left|\hat{I}_1\right|$. Poznamenejme, že tato konstanta platí pouze pro symetrický trojfázový obvod.

Na závěr poznamenejme, že zapojení trojfázových obvodů se souměrnými zdroji zapojenými do lomené hvězdy není zapotřebí samostatně analyzovat, k jejich analýze lze využít výše uvedený rozbor trojfázových obvodů se zdrojem zapojeným do hvězdy.

Shrnutí pojmů 1.4.

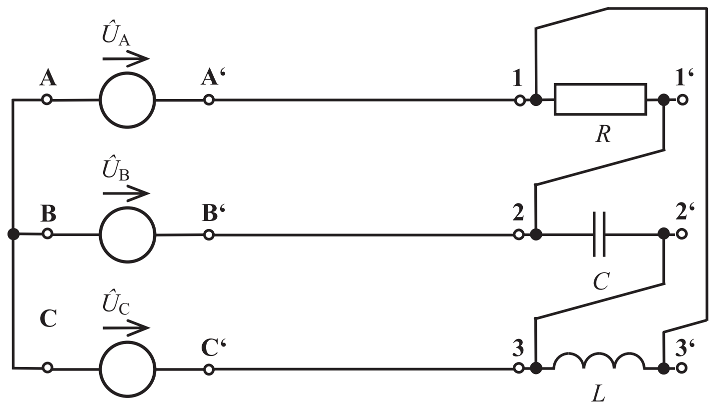
Analýzu trojfázových obvodů v harmonicky ustáleném stavu provádíme z důvodu zjednodušení jejich řešení v oboru komplexních čísel. Analýza obvodu se zdrojem i zátěží zapojenou do hvězdy, kde fázový proud zdroje je roven fázovému proudu zátěže, se opírá o výpočet napětí nulového vodiče. Je-li toto napětí nulové, obvod řešíme tak, jako by každá fáze zátěže byla napájena ze samostatného jednofázového zdroje. Řešení obvodu se zdrojem zapojeným do hvězdy a zátěží do trojúhelníka vychází ze sdružených napětí zdroje, která jsou rovny fázovým napětím zátěže. Mezi sdruženým a fázovým napětím zdroje nebo zátěže zapojené do hvězdy a mezi síťovým a fázovým proudem zátěže zapojené do trojúhelníku za předpokladu, že zdroj je souměrný a zátěž symetrická, platí úměra, daná konstantou √3. Výkon trojfázového harmonického zdroje a příkon trojfázové zátěže je dán aritmetickým součtem fázových výkonů, a to činných, jalových a zdánlivých.

Otázky 1.4.

1. Co je jádrem řešení trojfázového obvodu se zdrojem a zátěží zapojenými do hvězdy?
2. Za jakého předpokladu platí stejná úměra mezi fázovými a sdruženými napětími zdroje nebo zátěže zapojenými do hvězdy?
3. Kdy jsou fázová napětí zátěže a zdroje zapojenými do hvězdy stejná?
4. Jak se projeví přerušení nulového vodiče u symetrické a nesymetrické zátěže zapojené do hvězdy?
5. Jaký následek má zkrat v jedné fázi zátěže zapojené do hvězdy a trojúhelníka?
6. Platí relace mezi velikostmi síťového a fázového proudu $\left|\hat{I}_s\right| = \sqrt{3}\left|\hat{I}_f\right|$ i pro nesymetrickou zátěž zapojenou do trojúhelníku.

Úloha k řešení 1.4.

Určete hodnotu příkonu trojfázové zátěže z obr. 1.32, platí-li pro velikost fázových impedancí $\left|\hat{Z}_1\right| = \left|\hat{Z}_2\right| = \left|\hat{Z}_3\right| = 10\,\Omega$, má-li souměrný trojfázový zdroj efektivní hodnotu fázového napětí 10 V.

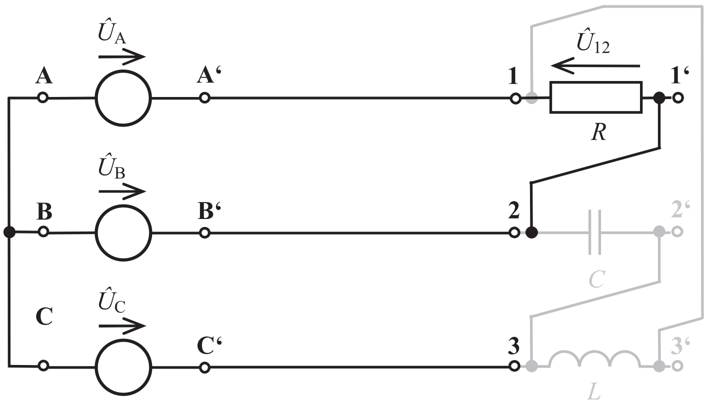


Obr. 1.32 Nesouměrný trojfázový obvod se zátěží zapojenou do trojúhelníku, úloha k řešení 1.4

Řešení:

Modelový prvek, na kterém dochází k nevratné přeměně elektrické energie na jinou formu energie, tedy i teplo, je rezistor. Teplo, které vznikne za jednotku času na rezistoru o hodnotě odporu *R*, je rovno činnému výkonu a v našem případě i příkonu zátěže. V tomto případě není třeba řešit celý obvod a stačí určit jen velikost napětí $|\hat{U}_{12}| = |\hat{U}_{AB}|$ na rezistoru R, viz obr. 1.33. Příkon zátěže je

$$P = \frac{U_{12}^2}{R} + 0 + 0 = \frac{\left(\sqrt{3}U_A\right)^2}{R} = \frac{\left(\sqrt{3} \cdot 10\right)^2}{10} = 30\ \mathrm{W}\,.$$



Obr. 1.33 Rozbor řešení, úloha k řešení 1.4

2. Přechodné děje

Motivace Po prostudování této kapitoly budete umět

- definovat příčiny vzniku přechodného děje a stanovit počáteční podmínky
- určit řád obvodu (z hlediska přechodného děje)
- sestavit obvodové rovnice v časové oblasti
- analyzovat přechodné děje v obvodech 1. a 2. řádu
- posoudit vliv okamžiku připojení obvodu 1. a 2. k harmonickému zdroji napětí
- definovat význam časové konstanty obvodu (z hlediska ustálení stavu obvodu)

2.1. Analýza přechodných dějů

Přechodné děje popisují chování obvodu mezi jeho ustálenými stavy. Jestliže v ustáleném stavu jsou všechny časové průběhy veličin lineárního obvodu stacionární nebo periodické, pak ve stavu neustáleném, tedy v přechodném, jsou po jistou dobu (teoreticky nekonečně dlouho, prakticky na krátký čas) jednorázové nebo neperiodické, dokud obvod nedosáhne nového ustáleného stavu. Během přechodného děje se některé veličiny mění skokem a jiné spojitě. Spojitě měnící se veličiny nazýváme stavové. Jsou vlastní pasivním akumulačním prvkům a charakterizují jejich energii i stav obvodu. Změna energie (stavu) obvodu následkem změny struktury (topologie) obvodu nebo jeho parametrů je potom příčinou přechodného děje. Změnu topologické struktury obvodu modelujeme spínačem, odpínačem nebo přepínačem. Energie akumulovaná v pasivních prvcích obvodu v okamžiku zahájení přechodného děje je definována počátečními podmínkami stavových veličin, které slouží k určení i matematických počátečních podmínek řešení diferenciálních rovnic popisujících chování obvodu v přechodném ději.

❑ Fyzikální počáteční podmínky

Stav obvodu je charakterizován elektrickou energií akumulovanou v kapacitorech a induktorech obvodu, jejichž soustředěnými parametry modelujeme energií elektromagnetického pole reálného obvodu. Energie kapacitoru $w_\mathrm{C} = \frac{1}{2}Cu^2$ je integrální veličina, která se z fyzikálních důvodů mění spojitě. Stavovou veličinou kapacitoru je napětí. Pokud by se energie, a tedy i napětí neměnily spojitě, blížila by se směrnice energie limitně nekonečné velké hodnotě, stejně jako výkon kapacitoru

$$p_\mathrm{C} = \frac{\mathrm{d}w_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\left(Cu^2\right)}{\mathrm{d}t} = C\,u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = u\,i\,.$$

Tento výkon by musel dodat nebo přijmout zdroj nebo jiný pasivní obvodový prvek, což není fyzikálně možné. Začne-li přechodný děj v čase $t = 0$ s, platí pro napětí $\lim_{t\to 0_-} u(t) = \lim_{t\to 0+} u(t)$, čili napětí těsně před začátkem přechodného děje se rovná napětí bezprostředně po začátku přechodného děje. Tato počáteční podmínka spojitosti je fyzikální a zjednodušeně ji zapišme $u(0) = u_\mathrm{C}(0_-) = u_\mathrm{C}(0_+)$. Směrnice, se kterou se na počátku přechodného děje začne měnit napětí, má hodnotu

$$\frac{\mathrm{d}u(0_+)}{\mathrm{d}t} = \frac{i(0_+)}{C}\,.$$

Veličinou, která se může měnit skokem je proud kapacitoru.

Energie induktoru $w_{\mathrm{L}} = \frac{1}{2} L i^2$ je integrální veličina, která se z fyzikálních důvodů mění spojitě. Stavovou veličinou induktoru je proud. Pokud by se energie, a tedy i proud neměnily spojitě, blížila by se směrnice energie limitně nekonečné velké hodnotě, stejně jako výkon induktoru

$$p_{\mathrm{L}} = \frac{\mathrm{d}w_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\left(Li^2\right)}{\mathrm{d}t} = L\,i\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = u\,i\,.$$

Tento výkon by musel dodat nebo přijmout zdroj nebo jiný obvodový prvek, což není fyzikálně možné. Začne-li přechodný děj v čase $t = 0$ s, platí pro napětí $\lim\limits_{t\to 0_-} i(t) = \lim\limits_{t\to 0+} i(t)$. Tato počáteční podmínka spojitosti je fyzikální a zjednodušeně ji zapišme $i(0) = i(0_-) = i(0_+)$, čili proud induktoru před začátkem přechodného děje se rovná proudu bezprostředně po začátku přechodného děje. Směrnice, se kterou se na počátku přechodného děje začne měnit proud, je

$$\frac{\mathrm{d}i(0_+)}{\mathrm{d}t} = \frac{u(0_+)}{L}\,.$$

Veličinou, která se může měnit skokem je napětí induktoru.

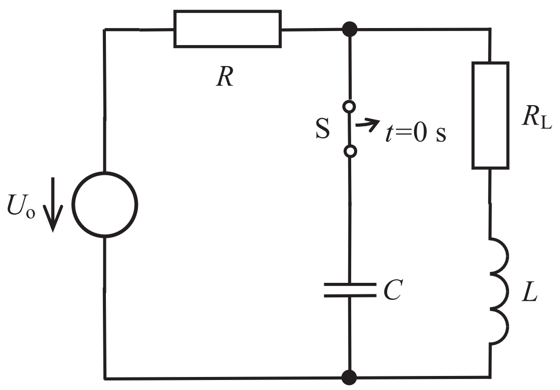
Součet energií obou akumulačních prvků je elementárním modelem energie elektromagnetického pole obvodu

$$w_{\mathrm{LC}} = w_{\mathrm{C}} + w_{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}\left(Cu^2 + Li^2\right).$$

Obě obvodové veličiny rezistoru se mohou měnit skokem. Skokem se mohou měnit i závislé veličiny zdrojů.

Příklad 2.1.

Stanovte počáteční podmínky stavových veličin obvodu na obr. 2.1.



Obr. 2.1 Počáteční podmínky přechodného děje, příklad 2.1

♦

Obvod řešíme přímou aplikací Kirchhoffových zákonů. Nejprve si do zadaného obvodu nakreslíme počítací šipky obvodových veličin viz obr. 2.2 vpravo a označíme je příslušnými symboly. Počáteční hodnoty stavových veličin i_{L}, u_{C} určíme z výchozího náhradního zapojení obvodu a jeho ustáleného stavu v čase $t \to 0_-$. V ustáleném stavu je ve stejnosměrném obvodu nulové napětí na induktoru i nulový proud kapacitoru a chování obvodu lze tedy popsat jen náhradním obvodem s rezistory, viz blíže příklad 2.2, takže pro proud obvodu platí

$$i(0_-) = i_L(0_-) = \frac{U_o}{R + R_L}.$$

Napětí kapacitoru je potom podle 2. Kirchhoffova zákona aplikovaného na smyčku S_2 na. obr. 2.2 vlevo v čase $t \to 0_-$ dáno

$$u_C(0_-) = u_{R_L}(0_-) = R\, i_L(0_-) = \frac{R_L}{R + R_L} U_o,$$

neboť $u_L(0_-) = 0\,\mathrm{V}$.

O tom, dojde-li k přechodnému ději, se přesvědčíme na základě hodnot směrnic stavových veličin obvodu v čase $t \to 0_+$. Směrnici napětí kapacitoru určíme z jeho časové derivace

$$\frac{\mathrm{d}u_C(0_+)}{\mathrm{d}t} = \frac{i_C(0_+)}{C} = \frac{0}{C} = 0\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{s}},$$

která je nulová, protože po rozpojení spínače S je proud kapacitoru nulový, což znamená, že napětí kapacitoru se nezmění. Směrnici proudu induktoru určíme z derivace

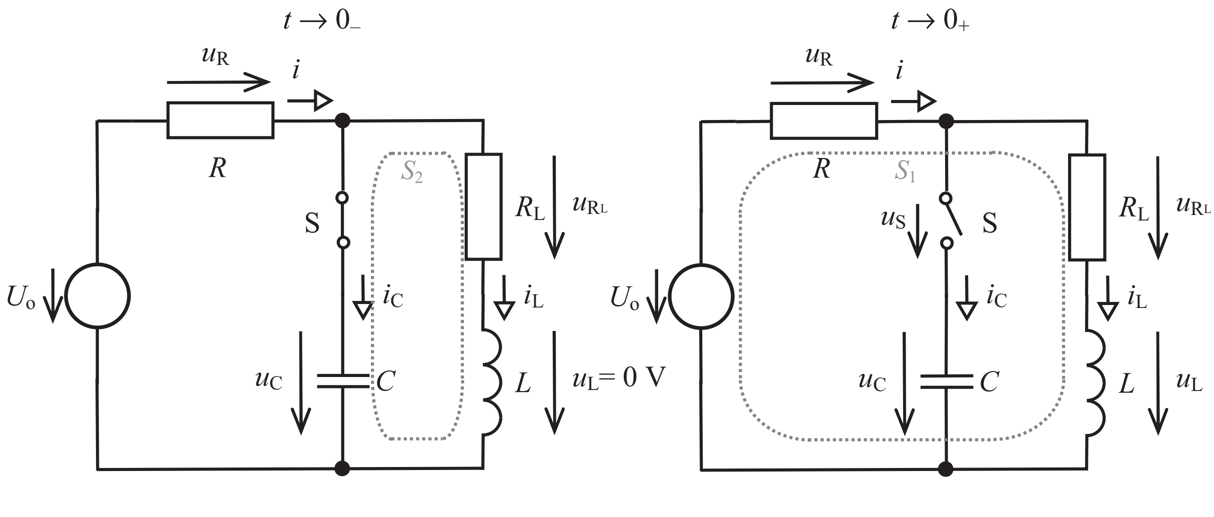
$$\frac{\mathrm{d}i_L(0_+)}{\mathrm{d}t} = \frac{u_L(0_+)}{L} = \frac{0}{L} = 0\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{s}}.$$

Její hodnota je nulová, protože po rozpojení spínače S na obr. 2.2 vpravo se proud induktoru nemění, neboť induktor se po tuto dobu chová jako zdroj proudu s hodnotou proudu $i_L(0_+) = i_L(0_-)$, takže napětí

$$u_L(0_+) = U_o - u_R(0_+) = U_o - (R + R_L)\cdot i_L(0_+) = U_o - (R + R_L)\frac{U_o}{R + R_L},$$

stanovené na základě 2. Kirchhoffova zákona aplikovaného na smyčku S_1 na obr. 2.2 je nulové, což znamená, že proud induktoru se nezmění a v obvodu nedojde k přechodnému ději. Napětí mezi svorkami rozpojeného spínače S je nulové, protože platí

$$u_S(0_+) = u_{R_L}(0_+) + u_L(0_+) - u_C(0_+) = R_L\frac{U_o}{R + R_L} + 0 - R_L\frac{U_o}{R + R_L} = 0\,\mathrm{V}.$$



Obr. 2.2 Analýza počátečních podmínek přechodného děje: výchozí stav, čas $t \to 0_-$; rozpojený spínač, čas $t \to 0_+$, příklad 2.1

Obecný postup analýzy obvodu v přechodném ději

Analýza zapojení obvodu v přechodném ději vychází z topologie obvodu, jejíž struktura odpovídá novému ustálenému stavu obvodu. Na tento obvod aplikujeme Kirchhoffovy zákony pro okamžité hodnoty obvodových veličin, ať už v podobě přímé nebo obecných metod řešení obvodů, do kterých dosadíme příslušné relace mezi obvodovými veličinami v pasivních větvích obvodu, čímž získáme obecně soustavu integrodiferenciálních (obvodových) rovnic s konstantními parametry, jejichž řešení, pomineme-li jednoduché případy, které lze řešit přímou integrací, převádíme derivováním na řešení soustavy diferenciálních rovnic. Odezvy (časové funkce) obvodových veličin na změnu stavu obvodu získáme řešením obvodových rovnic, až na integrační konstanty, které určíme z hodnot známých matematických počátečních podmínek v čase $t = 0$ s.

Matematické metody řešení soustavy rovnic volíme podle složitosti analyzovaného obvodu a řádu diferenciální rovnice. Pokud je to možné, upřednostňujeme exaktní, analytické metody řešení obvodu v podobě algebraických vztahů, které umožňují dělat obecné závěry na rozdíl např. od numerických metod řešení, které provádí analýzu obvodu jen pro konkrétní hodnoty parametrů. Z exaktních metod řešení jmenujme klasický způsob řešení diferenciálních rovnic, na který se zaměříme, neboť má nejblíže fyzikální realitě. Z dalších metod zmiňme alespoň operátorovou metodu, která transformuje soustavu diferenciálních rovnic v časové oblasti na soustavu algebraických rovnic v komplexní rovině, ve které časovým funkcím po transformaci, např. Laplaceově, odpovídají funkce komplexní proměnné, nazývané obrazy. Prakticky to znamená, že obvodové veličiny s nezávislou proměnnou časem tj. napětí $u(t)$ a proud $i(t)$ se po transformaci změní na operátorové veličiny tj. obrazy napětí $U(p)$ a proudu $I(p)$ s nezávislou komplexní proměnnou, v našem případě p. Operátorové veličiny i komplexní proměnná by se sice správně měly zapisovat jako komplexní čísla, ale z důvodu zjednodušení jejich zápisu se tak elektrotechnice neděje. Podílem obrazů obvodových veličin jsou v komplexní rovině definovány i operátorové imitance $Z(p)$, $Y(p)$, ty ale nemají v časové oblasti své fyzikální vzory.

Klasická metoda je vhodná pro řešení lineárních obvodů popsaných obyčejnou nehomogenní lineární diferenciální rovnicí obecně n-tého řádu s konstantními parametry A_0, A_1, A_2,... A_n a budící veličinou e na pravé straně ve tvaru

$$A_n \frac{\mathrm{d}^n v}{\mathrm{d}t^n} + \cdots + A_2 \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}t^2} + A_1 \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + A_0 v = e\,.$$

Jsou-li parametry obvodu konstantní, obvod je lineární, parametry diferenciální rovnice jsou konstantní a rovnice je lineární. To umožňuje zapsat řešení úplné rovnice s proměnnou v jako superpozici dvou složek řešení, a to obecného řešení v_h homogenní rovnice s nulovou pravou stranou a partikulárního řešení v_p nehomogenní rovnice, které se dá stanovit substitucí, variací konstant nebo odhadem, což bude náš nejčastější případ, jelikož ve stejnosměrných a harmonických obvodech lze snadno najít řešení obvodu v ustáleném stavu, které je právě partikulárním řešením úplné, nehomogenní rovnice, které obvodu vnucuje budící veličina (zdroj).

Homogenní rovnice popisuje chování obvodu v přechodném ději. Obecné řešení v_h rovnice nezávisí na budící veličině ($e = 0$) a jeho charakter je dán výhradně parametry pasivních větví obvodu. Získáme ho pro řád diferenciální rovnice $n > 1$ přímou integrací, jako lineární kombinací n nezávislých řešení

$$v_\mathrm{h} = C_1 v_1 + C_2 v_2 + \cdots + C_n v_n\,,$$

které tvoří fundamentální systém homogenní rovnice. Nezávislá řešení nejsnáze určíme z typu kořenů charakteristické rovnice, kterou obdržíme, nahradíme-li derivace obyčejné homogenní diferenciální rovnice charakteristickým číslem λ, umocněným na řád derivace

$$A_n \lambda^n + \cdots + A_2 \lambda^2 + A_1 \lambda^1 + A_0 \lambda^0 = 0\,.$$

Jsou-li kořeny různé, řešení má tvar

$$v_\mathrm{h} = C_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + C_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t} + \cdots + C_n\,\mathrm{e}^{\lambda_n t}\,,$$

je-li k kořenů násobných

$$v_\mathrm{h} = \left(C_1 + C_2\,t + \cdots + C_k\,t^{k-1}\right)\mathrm{e}^{\lambda t}\,.$$

Integrační konstanty C_1, C_2, ... C_n určíme z úplného řešení nehomogenní rovnice

$$v = v_\mathrm{h} + v_\mathrm{p} = C_1 v_1 + C_2 v_2 + \cdots + C_n v_n + v_\mathrm{p}$$

a ze známých matematických počátečních (Cauchyho) podmínek

$$v(0), \frac{\mathrm{d}v(0)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}^2 v(0)}{\mathrm{d}t^2}, \cdots \frac{\mathrm{d}^{n-1} v(0)}{\mathrm{d}t^{n-1}}\,.$$

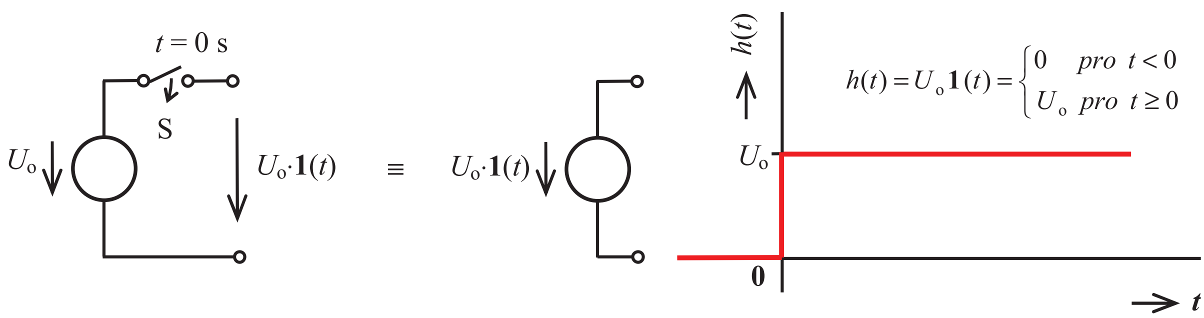
Za předpokladu, že derivace funkcí řešení nehomogenní rovnice v jsou spojité, potom existuje právě jedno řešení této rovnice, které splňuje počáteční podmínku (Cauchyova počáteční úloha). Matematické počáteční podmínky při řešení obvodových rovnic určujeme z fyzikálních počátečních podmínek.

❑ Odezva obvodu

Připojení nezávislého zdroje buzení k obvodu, ať již napěťového nebo proudového, které má za následek změnu závislých veličin obvodu z počátečních hodnot k novým ustáleným hodnotám, nazýváme odezvou obvodu. Připojení buzení k obvodu modelujeme jednotkovým skokem, definovaným

$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 0 \; pro \;\; t < 0 \\ 1 \; pro \;\; t \geq 0, \end{cases}$$

který v matematickém popisu obvodu nahrazuje sériové schéma zapojení stejnosměrného zdroje a spínače. Na obr. 2.3 je zobrazen jednotkový skok napětí, jehož následkem vznikne proudová odezva a úbytky napětí obvodu popsané v případě sériového RC, RL a RLC obvodu rovnicemi uvedenými v následujících kapitolách 2.1 a 2.2. Jsou-li fyzikální počáteční podmínky stavových veličin obvodu nulové, pak jeho odezvu na připojení ke stejnosměrnému zdroji nazýváme přechodovou charakteristikou, viz např. odezva proudu na obr. 2.8.



Obr. 2.3 Obvodový model jednotkového skoku napětí

Analogicky bychom modelovali i odpojení zdroje od obvodu tj. rozpojení spínače v čase $t = t_0$, a to jednotkovou funkcí definovanou

$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 1 \quad pro \;\; t < t_0 \\ 0 \quad pro \;\; t \geq t_0 \end{cases}\,.$$

Shrnutí pojmů 2.1.

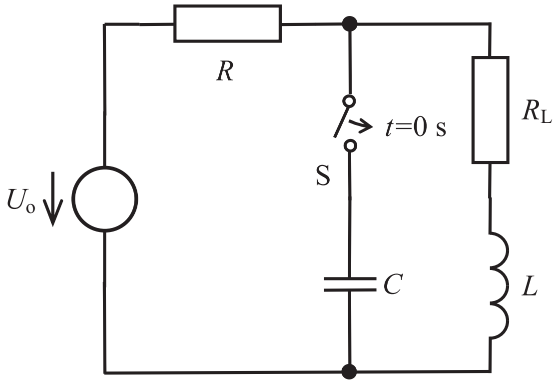
Chování obvodu během přechodného děje ovlivňují pasivní parametry obvodu, které vystupují v charakteristické rovnici obvodu. Kořeny charakteristické rovnice rozhodují o charakteru řešení homogenní rovnice. Budící veličiny (zdroje) vnucují obvodu ustálené hodnoty veličin a definují partikulární řešení nehomogenní rovnice. Spojitě se měnící stavové veličiny, což jsou napětí kapacitorů a proudy induktorů, definují počáteční podmínky, důležité pro stanovení integračních konstant úplného řešení nehomogenní rovnice. Přechodný děj v obvodu vyvolaný sepnutím spínače S modelujeme jednotkovým skokem. Odezvu obvodu s nulovými počátečními podmínkami na připojení ke stejnosměrnému zdroji nazýváme přechodovou charakteristikou.

Otázky 2.1.

1. Proč dochází k přechodnému ději obvodu?
2. Co charakterizuje změnu stavu obvodu?
3. Proč se stavové veličiny mění spojitě?
4. Jak se při změně stavu obvodu mění proud kapacitoru?
5. Jak se při změně stavu obvodu mění napětí induktoru?
6. Co se děje s obvodovými veličinami při změně stavu obvodu?
7. Co je to homogenní rovnice a k čemu slouží?
8. Jaký má význam charakteristická rovnice obvodu?
9. Jak určíme partikulární řešení nehomogenní a co popisuje?
10. K čemu slouží počáteční podmínky obvodu?
11. Jakým obvodovým zapojením modelujeme jednotkový skok?
12. Co je to přechodová charakteristika?

Úloha k řešení 2.1.

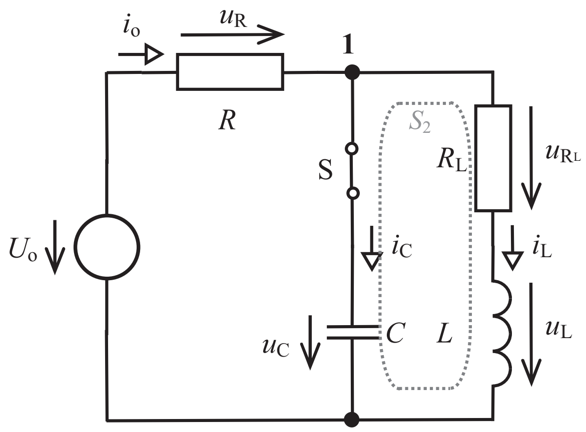
Určete počáteční hodnoty a směrnice stavových veličin obvodu na obrázku, je-li na počátku přechodného děje kapacitor vybitý.



Obr. 2.4 Počáteční podmínky přechodného děje, úloha k řešení 2.1

Řešení:

Nejprve si do zadaného obvodového schématu zakreslíme počítací šipky, viz obr. 2.5.



Obr. 2.5 Analýza počátečních podmínek přechodného děje, čas $t \to 0_+$, úloha k řešení 2.1

Jak již víme, stavové veličiny se mění spojitě, takže mají bezprostředně před (čas $t \to 0_-$) a ihned po (čas $t \to 0_+$) začátku přechodného děje stejné okamžité hodnoty. Jelikož je kapacitor vybitý, má jeho počáteční napětí hodnotu

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0\,\mathrm{V}\,.$$

Proud induktoru v čase $t \to 0_-$ je omezen jen rezistory obvodu viz příklad 2.1 , takže jeho počáteční hodnota je dána

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = \frac{U_o}{R + R_L}\quad .$$

Směrnice, se kterými se stavové veličiny mění, jsou dány

$$\frac{\mathrm{d}u_C(0_+)}{\mathrm{d}t} = \frac{i_C(0_+)}{C}\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}i_L(0_+)}{\mathrm{d}t} = \frac{u_L(0_+)}{L}\,,$$

takže k jejich stanovení potřebujeme ještě určit proud nezávislého uzlu **1** na obr. 2.5 užitím 1. Kirchhoffova zákona

$$i_C(0_+) = i_o(0_+) - i_L(0_+) = \frac{u_R(0_+)}{R} - \frac{U_o}{R + R_L} = \frac{U_o - u_C(0_+)}{R} - \frac{U_o}{R + R_L} = \frac{U_o(R + R_L) - U_o R}{R(R + R_L)} = \frac{U_o R_L}{R(R + R_L)}$$

a napětí ve smyčce S_2 užitím 2. Kirchhoffova zákona

$$u_L(0_+) = u_C(0_+) - u_{R_L}(0_+) = -R_L i_L(0_+) = -R_L \frac{U_o}{R + R_L}\,.$$

Po dosazení do definic obdržíme

$$\frac{\mathrm{d}u_C(0_+)}{\mathrm{d}t} = \frac{U_o R_L}{RC(R + R_L)} = \frac{1}{\tau_{RC}} \frac{R_L}{(R + R_L)} U_o\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}i_{\mathrm{L}}(0_+)}{\mathrm{d}t} = -\frac{R_{\mathrm{L}}}{L}\frac{U_{\mathrm{o}}}{R+R_{\mathrm{L}}} = -\frac{1}{\frac{L}{R_{\mathrm{L}}}}\frac{U_{\mathrm{o}}}{R+R_{\mathrm{L}}} = -\frac{1}{\tau_{\mathrm{LR}}}\frac{U_{\mathrm{o}}}{R+R_{\mathrm{L}}}\,.$$

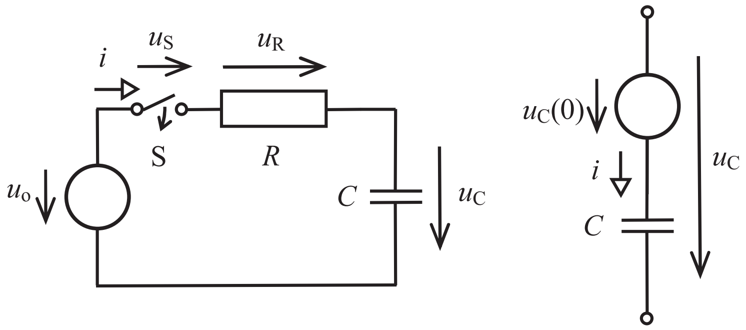
Z hodnot směrnic vidíme, že na počátku přechodného děje napětí na kapacitoru narůstá a proud induktoru klesá.

2.2. Analýza obvodů 1. řádu

Obvod 1. řádu obsahuje rezistory a jeden akumulační prvek kapacitor nebo induktor.

❑ RC obvod

Náhradní schéma jednoduchého RC obvodu připojeného ke zdroji napětí u_{o} v čase $t = 0$ s je na obr. 2.6 vlevo. Nejdříve analyzujme situaci před sepnutím spínače S (čas $t \to 0_-$). Kapacitor o kapacitě C může být obecně nabit na napětí $u_{\mathrm{C}}(0)$, což zachycuje ekvivalentní náhradní zapojení na obr. 2.6 vpravo.



Obr. 2.6 Přechodný děj RC obvodu: schéma zapojení, ekvivalentní obvodový model kapacitoru

Po sepnutí spínače S, kdy $u_{\mathrm{S}} = 0$ V, platí podle 2. Kirchhoffova zákona

$$u_{\mathrm{o}} = u_{\mathrm{R}} + u_{\mathrm{C}}$$

a po dosazení Ohmova zákona nebo rovnice kontinuity za společnou veličinu obvodu, tedy proud $i = \frac{u}{R} = C\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t}$, získáme buď rovnici

$$R\,i + \frac{1}{C}\int i\,\mathrm{d}t = u_{\mathrm{o}}$$

s hledanou odezvou, proudem nebo

$$R\,C\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t} + u_{\mathrm{C}} = u_{\mathrm{o}}$$

s hledanou odezvou, napětím kapacitoru. Pro popis obvodu si zvolme matematický model obvodu daný nehomogenní diferenciální rovnicí 1. řádu s hledanou odezvou, napětím kapacitoru, které je stavovou veličinou obvodu. Obecná homogenní rovnice

$$R\,C\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t} + u_{\mathrm{C}} = 0\,,$$

kterou získáme z nehomogenní rovnice dosazením za budící napětí $u_o = 0$ V a která popisuje chování obvodu v přechodném ději. Její obecné řešení až na integrační konstantu určíme pomocí kořene charakteristické rovnice

$$R\,C\,\lambda^1 + \lambda^0 = R\,C\,\lambda + 1 = 0,$$
$$\lambda = -\frac{1}{R\,C} = -\frac{1}{\tau}$$

ve tvaru

$$u_{\mathrm{Ch}} = C_1\,\mathrm{e}^{\lambda t} = C_1\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}},$$

kde τ je charakteristický parametr obvodu nazývaný časová konstanta, která je v našem případě definována součinem $\tau = RC$. Její význam bude vyložen později.

Partikulární řešení nehomogenní rovnice, popisující chování obvodu v ustáleném stavu, získáme dosazením konkrétního případu budícího napětí u_0. Omezme se na tyto dva případy

a) buzení stejnosměrným zdrojem, $u_o = U$,

b) buzení harmonickým zdrojem, $u_o = U_m \sin(\omega t + \psi_U)$.

ad a) Po připojení obvodu ke stejnosměrnému zdroji budou po odeznění přechodného děje ustálené hodnoty stacionární čili stejnosměrné. Ustálená hodnota napětí kapacitoru, která je partikulárním řešením nehomogenní rovnice, je $u_{\mathrm{Cp}} = \lim_{t \to \infty} u_{\mathrm{C}}(t) = U$, protože se kapacitor nabije na hodnotu napětí stejnosměrného zdroje, tím dojde k vyrovnání napětí obvodu a přerušení proudu obvodu. Prakticky to znamená, že v původní nehomogenní rovnici neuvažujeme složku s derivací 1. řádu, protože změna napětí kapacitoru v ustáleném stavu stejnosměrného obvodu je nulová.

Úplné řešení má tvar

$$u_{\mathrm{C}} = u_{\mathrm{Ch}} + u_{\mathrm{Cp}} = C_1\,\mathrm{e}^{\lambda t} + U\,.$$

Konstantu C_1 určíme pomocí známé počáteční podmínky $u_C(0)$

$$u_{\mathrm{C}}(0) = \lim_{t \to 0} C_1\,\mathrm{e}^{\lambda t} + U = C_1 + U\,,$$
$$C_1 = u_{\mathrm{C}}(0) - U\,,$$

takže úplné řešení má konečný tvar po normování

$$u_{\mathrm{C}} = \left(u_{\mathrm{C}}(0) - U\right)\mathrm{e}^{\lambda t} + U = U(1 - \mathrm{e}^{\lambda t}) + u_{\mathrm{C}}(0)\,\mathrm{e}^{\lambda t} = U(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}) + u_{\mathrm{C}}(0)\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

a není-li kapacitor nabit

$$u_{\mathrm{C}} = U(1 - \mathrm{e}^{\lambda t}) = U(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})\,.$$

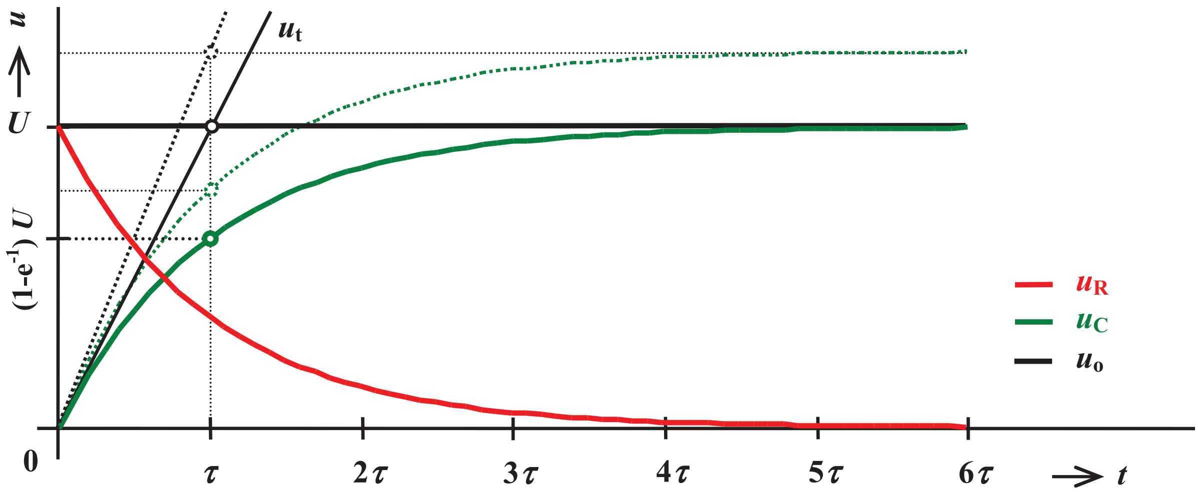
Průběh nabíjení vybitého kapacitoru je na obr. 2.7. Z jeho grafu je zřejmé, že přechodný děj končí prakticky za dobu několika časových konstant. V čase $t = \tau$ napětí kapacitoru dosáhne asi 63,2 % (přesně (1-e^{-1}) tiny) ustálené hodnoty napětí U, v časech $t = 3\tau$ se přiblíží na 5 %, $t = 5\tau$ na 1 %, $t = 7\tau$ na 0,1 % k ustálené hodnotě napětí. Rovnice tečny průběhu napětí stanovená v počátku nám poslouží k vyložení významu časové konstanty. Směrnici určíme derivací napětí nenabitého kapacitoru

$$\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(U(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{U}{\tau}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}},$$

kde po dosazení za čas $t = 0$ s získáme směrnici $\frac{U}{\tau}$ a rovnici tečny v počátku

$$u_\mathrm{t} = \frac{U}{\tau} t \,.$$

Směrnice je kladná, takže napětí na kapacitoru narůstá. Dosadíme-li za čas t časovou konstantu obvodu tj. $t = \tau$, hodnota napětí tečny v tomto časovém okamžiku je $u_\mathrm{t} = U$, tedy má ustálenou hodnotu napětí nabitého kapacitoru, v našem případě napětí zdroje. Sklon směrnice podle její rovnice při dané časové konstantě ovlivňuje velikost napětí zdroje viz obr. 2.7 (tečna vykreslená plnou a přerušovanou čarou). Jiná interpretace časové konstanty potom říká, že je to doba, za kterou dosáhne napětí vybitého kapacitoru (1-e^{-1}) tiny tj. asi 63,2 % své ustálené hodnoty.



Obr. 2.7 Přechodný děj RC obvodu, připojení stejnosměrného zdroje napětí, nulové počáteční podmínky: okamžité hodnoty napětí rezistoru, kapacitoru a zdroje

Okamžitou hodnotu proudu obvodu i, zobrazenou na obr. 2.8, získáme derivací napětí kapacitoru podle času

$$i = C\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}\left(U(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})\right)}{\mathrm{d}t} = C\frac{U}{\tau}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{U}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} = I_\mathrm{R}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

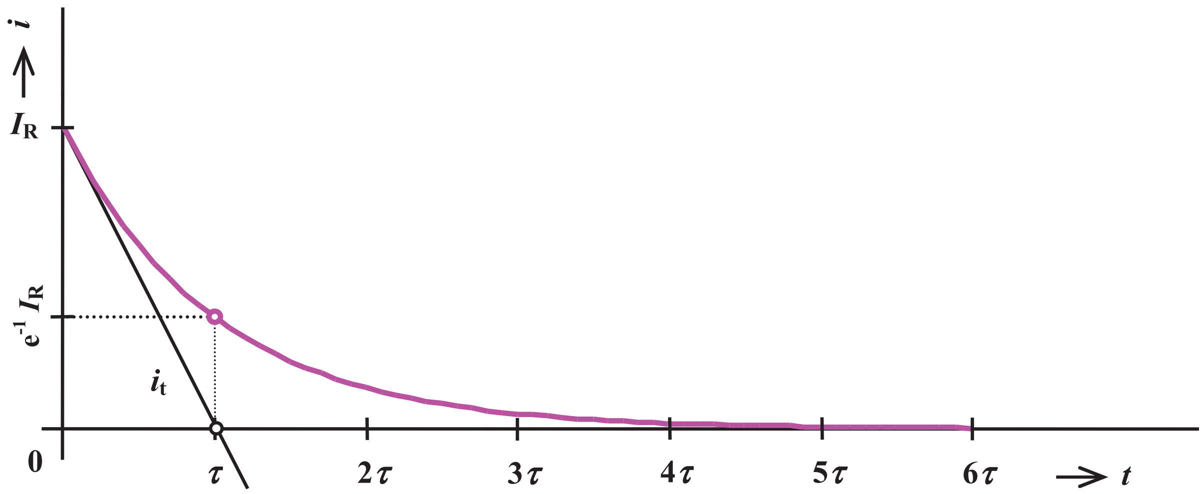
a derivací proudu

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(I_\mathrm{R}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right)}{\mathrm{d}t} = -\frac{I_\mathrm{R}}{\tau}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

směrnici rovnice tečny v počátku (čas $t = 0$ s) vynesenou na obr. 2.8, která má rovnici

$$i_\mathrm{t} = -\frac{I_\mathrm{R}}{\tau} t \,.$$

Směrnice je záporná, takže proud obvodem klesá, a to k nulové ustálené hodnotě, které prakticky dosáhne za 3-5 časových konstant τ. Hodnota proudu obvodu v čase $t = \tau$ klesne z počáteční hodnoty proudu $i\,(0_+) = I_\mathrm{R} = U/R$ na hodnotu její 1/e tiny tj. asi 36,8 %.



Obr. 2.8 Přechodný děj RC obvodu, připojení stejnosměrného zdroje napětí, nulové počáteční podmínky: okamžité hodnoty proudu

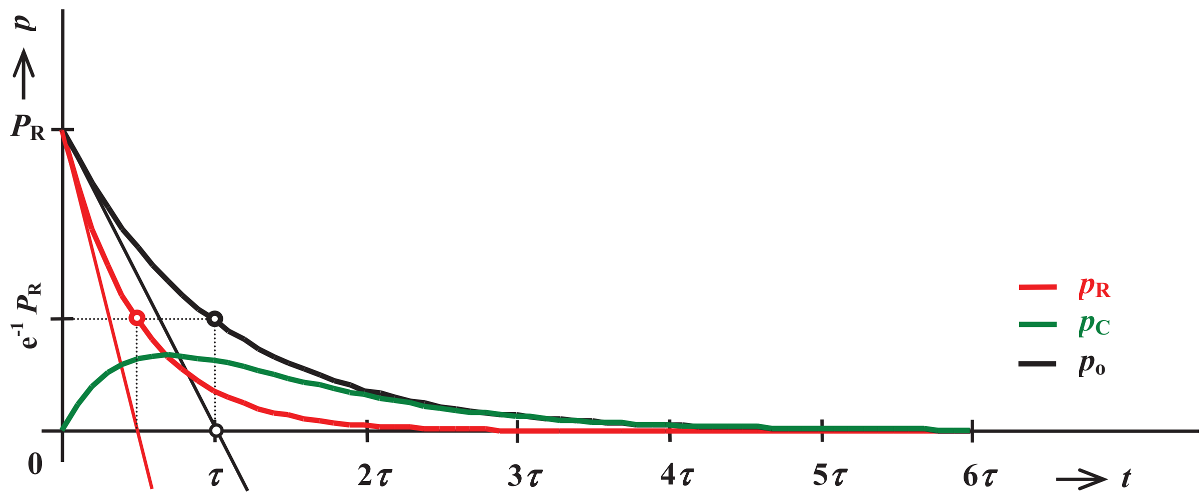
Napětí rezistoru, zobrazené na obr. 2.7, určíme z Ohmova zákona

$$u_R = R\,i = U\,e^{-\frac{t}{\tau}}\,.$$

Průběh tohoto napětí je až na měřítko dané hodnotou odporu rezistoru R stejný jako průběh proudu.

Podle toho, který z úbytků napětí RC obvodu zvolíme za výstupní (odezvu), má přechodová charakteristika derivační nebo integrační charakter. RC obvod nazýváme derivačním článkem, je-li výstupem napětí rezistoru u_R a integračním článkem, je-li výstupem napětí kapacitoru u_C. Jak vidíme z obr. 2.7, derivačnímu průběhu odpovídá skoková změna napětí v počátku, následovaná exponenciálním poklesem tohoto napětí k nule, integračnímu průběhu odpovídá spojitý, exponenciální nárůst veličiny k ustálené hodnotě napětí.

Okamžité výkony obvodu v přechodném ději, zobrazené na obr. 2.9, určíme součinem příslušného napětí obvodového prvku a společného proudu obvodu



Obr. 2.9 Přechodný děj RC obvodu, připojení stejnosměrného zdroje napětí, nulové počáteční podmínky: okamžité výkony rezistoru, kapacitoru a zdroje

$$p_R = u_R\,i = U\,e^{-\frac{t}{\tau}}\,I_R\,e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{U^2}{R}\,e^{-2\frac{t}{\tau}} = P_R\,e^{-2\frac{t}{\tau}}\,,$$

$$p_{\mathrm{C}} = u_{\mathrm{C}}\, i = U(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})\; I_{\mathrm{R}}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} = P_{\mathrm{R}}\left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} - \mathrm{e}^{-2\frac{t}{\tau}}\right),$$

$$p_{\mathrm{o}} = u_{\mathrm{o}}\, i = U \cdot I_{\mathrm{R}}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} = P_{\mathrm{R}}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

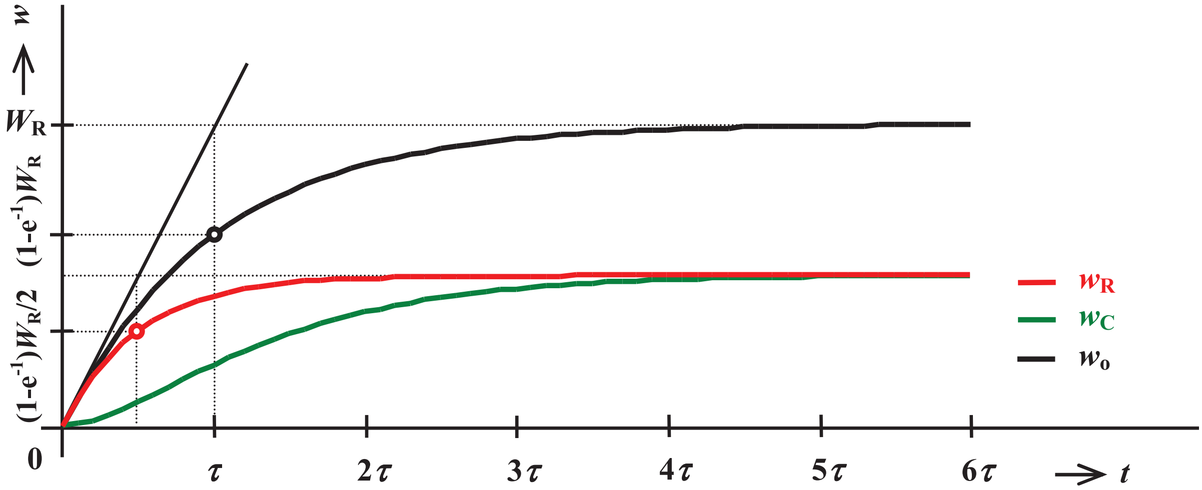
a jejich integrací okamžité hodnoty energií, zobrazené na obr. 2.10, dané rovnicemi

$$w_{\mathrm{R}} = \int_0^t p_{\mathrm{R}}\,\mathrm{d}\xi = \int_0^t P_{\mathrm{R}}\,\mathrm{e}^{-2\frac{\xi}{\tau}}\,\mathrm{d}\xi = P_{\mathrm{R}}\left[-\frac{\tau}{2}\mathrm{e}^{-2\frac{\xi}{\tau}}\right]_0^t = \frac{\tau}{2}P_{\mathrm{R}}\left(1-\mathrm{e}^{-2\frac{t}{\tau}}1\right) = \frac{W_{\mathrm{R}}}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-2\frac{t}{\tau}}\right),$$

$$w_{\mathrm{C}} = \int_0^t p_{\mathrm{C}}\,\mathrm{d}\xi = \int_0^t P_{\mathrm{R}}\left(\mathrm{e}^{-\frac{\xi}{\tau}} - \mathrm{e}^{-2\frac{\xi}{\tau}}\right)\mathrm{d}\xi = P_{\mathrm{R}}\left[-\tau\,\mathrm{e}^{-\frac{\xi}{\tau}} + \frac{\tau}{2}\mathrm{e}^{-2\frac{\xi}{\tau}}\right]_0^t = \frac{\tau}{2}P_{\mathrm{R}}\left(-2\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} + \mathrm{e}^{-2\frac{t}{\tau}} + 1\right) =$$

$$= \frac{\tau}{2}P_{\mathrm{R}}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right)^2 = \frac{W_{\mathrm{R}}}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right)^2,$$

$$w_{\mathrm{o}} = \int_0^t p_{\mathrm{o}}\,\mathrm{d}\xi = \int_0^t P_{\mathrm{R}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\xi}{\tau}}\,\mathrm{d}\xi = P_{\mathrm{R}}\left[-\tau\,\mathrm{e}^{-\frac{\xi}{\tau}}\right]_0^t = \tau P_{\mathrm{R}}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right) = W_{\mathrm{R}}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right).$$



Obr. 2.10 Přechodný děj RC obvodu, připojení stejnosměrného zdroje napětí, nulové počáteční podmínky: okamžité hodnoty energie rezistoru, kapacitoru a zdroje

Rovnice tečen v počátku okamžitých výkonů a energií si již snadno odvodíte sami. Poznamenejme jen, že směrnice průběhů energií w a w_{R} v počátku jsou stejné.

Celkovou energii dodanou zdrojem do obvodu, která je rovna práci, kterou zdroj vykonal od připojení k obvodu až do nabití kapacitoru na napětí zdroje určíme ze vztahu

$$A_{\mathrm{o}} = \lim_{t\to\infty} W_{\mathrm{R}}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right) = W_{\mathrm{R}} = \tau P_{\mathrm{R}} = RC\frac{U^2}{R} = CU^2 .$$

Tato práce z poloviny kryje Jouleovy ztráty na rezistoru

$$A_{\mathrm{R}} = \lim_{t\to\infty}\frac{W_{\mathrm{R}}}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-2\frac{t}{\tau}}1\right) = \frac{W_{\mathrm{R}}}{2} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}C(RI)^2 = \frac{1}{2}RCRI^2 = \frac{\tau}{2}RI^2$$

a z poloviny je spotřebována na vytvoření elektrického pole kapacitoru

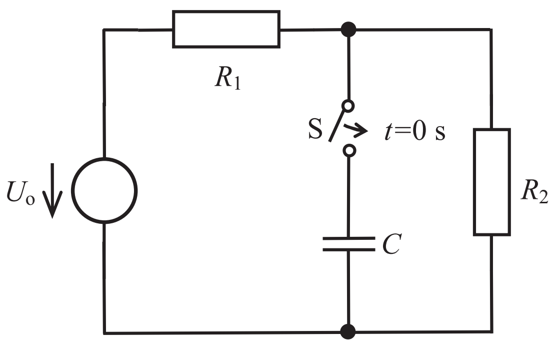
$$A_{\mathrm{C}} = \lim_{t\to\infty} \frac{W_{\mathrm{R}}}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}1}\right)^2 = \frac{W_{\mathrm{R}}}{2} = \frac{1}{2}CU^2 .$$

Účinnost nabíjení (akumulace energie elektrického pole) vybitého kapacitoru je

$$\eta = \frac{A_{\mathrm{C}}}{A_{\mathrm{o}}} = \frac{\frac{1}{2}CU^2}{CU^2} = \frac{1}{2} .$$

Příklad 2.2.

Určete časový průběh stavové veličiny obvodu z obr. 2.11 po sepnutí spínače S. Předpokládejte, že kapacitor byl před sepnutím spínače S nabit na počáteční hodnotu napětí ve stejném obvodu, měl-li ale zdroj napětí opačné polarity.



Obr. 2.11 Přechodný děj ve smíšeném zapojení obvodu, příklad 2.2

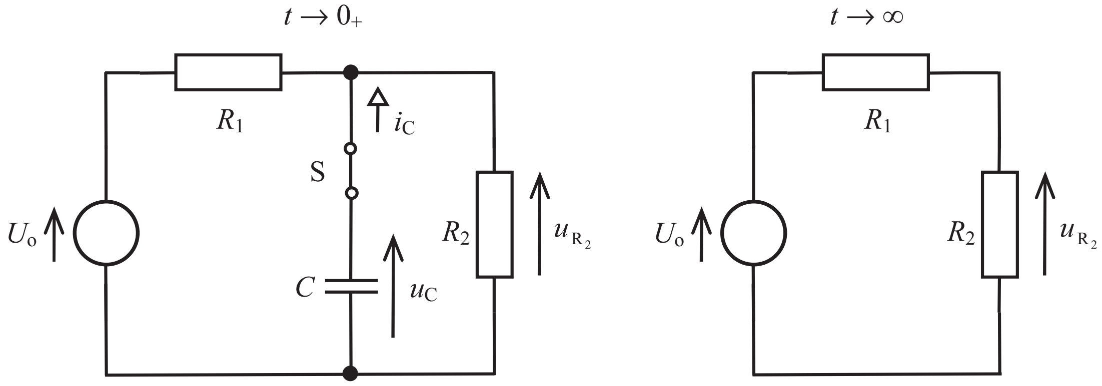
♦

Stavovou veličinou obvodu je napětí na kapacitoru u_{C}. Počáteční hodnotu napětí kapacitoru určíme z obvodového schématu na obr. 2.12, kde podle 2. Kirchhoffova zákona platí $u_{\mathrm{C}}=u_{\mathrm{R}_2}$. Po nabití kapacitoru, nebude touto větví procházet proud, takže na kondenzátoru bude hodnota napětí, kterou určíme z děliče napětí v ustáleném stavu obvodu, tedy v čase $t \to \infty$, kdy platí

$$u_{\mathrm{C}}=u_{\mathrm{R}_2}= \frac{R_2}{R_1+R_2}U_{\mathrm{o}} .$$

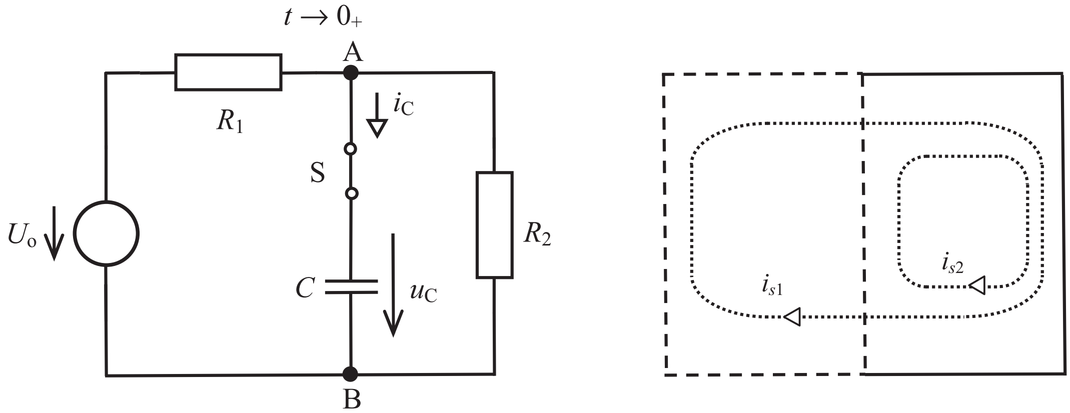
Po nabití kapacitoru spínač S rozpojíme a změníme polaritu zdroje. Obvod tak bude odpovídat situaci na původním obrázku 2.11. Jelikož je kapacitor ideální prvek, nemá se jak vybít, takže se jeho hodnota napětí stane počáteční hodnotou napětí

$$u_{\mathrm{C}}(0) = \frac{R_2}{R_1+R_2}U_{\mathrm{o}} .$$



Obr. 2.12 Stanovení počátečního napětí kapacitou po sepnutí spínače v čase t = 0 s: sepnutý spínač, čas $t \to 0_+$; ekvivalentní obvod pro čas $t \to \infty$, příklad 2.2

Rovnice popisující chování obvodu v přechodném ději sestavujeme pro obvod, který vznikne po sepnutí spínače S, a to v čase $t \to 0_+$ podle obr. 2.13.



Obr. 2.13 Analýza přechodného děje obvodu: zavedení počítacích šipek, graf obvodu se smyčkovými proudy, příklad 2.2

Analýzu obvodu můžeme provést jednou z univerzálních metod řešení obvodů nebo s výhodou můžeme u řešeného obvodu použít větu o náhradním zdroji a využít k nalezení jeho odezvy již odvozenou rovnici pro napětí kapacitoru v jednoduchém RC obvodu podle náhradního obvodu na obr. 2.14, jehož náhradní parametry skutečného zdroje napětí v případě Theveninovy věty jsou

$$U_{AB} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_o , \qquad R_{AB} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} .$$

Pro počáteční hodnotu napětí ze zadání platí

$$u_C(0) = -U_o .$$

Časová konstanta má hodnotu

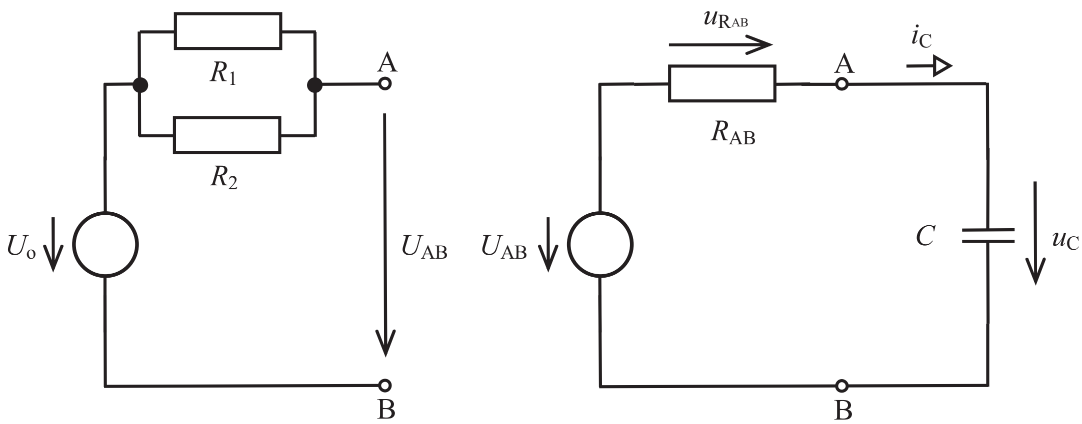
$$\tau = R_{AB} C .$$

Napětí na kapacitoru má hodnotu

$$u_{\mathrm{C}} = U_{\mathrm{AB}}(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}) + u_{\mathrm{C}}(0)\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{R_2}{R_1+R_2}U_{\mathrm{o}}(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}) + \left(-\frac{R_2}{R_1+R_2}U_{\mathrm{o}}\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} =$$

$$= \frac{R_2}{R_1+R_2}U_{\mathrm{o}} - \frac{2R_2}{R_1+R_2}U_{\mathrm{o}}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Poznamenejme, že větu o náhradním zdroji můžeme použít zpravidla jen u obvodů popsaných diferenciální rovnicí 1. řádu.



Obr. 2.14 Analýza přechodného děje obvodu užitím věty o náhradním zdroji, příklad 2.2

Nyní si ale ukažme postup analýzy obvodu metodu smyčkových proudů. Zvolíme-li strom obvodu ve větvi s rezistorem R_2, potom nezávislé větve jsou větve se zdrojem a kapacitorem, viz obr. 2.13 vpravo. Smyčkové proudy přísluší nezávislým větvím, jejich označení odpovídá obr. 2.13 vpravo a smyčkové rovnice sestavené podle 2. Kirchhoffova zákona jsou

$$\mathrm{S}_1\text{: } u_1 + u_2 = U_{\mathrm{o}}\,,$$

$$\mathrm{S}_{2:}\ -u_{\mathrm{C}} + u_2 = 0\,,$$

kam dosadíme za úbytky na rezistorech z Ohmova zákona a za napětí kapacitoru rovnici kontinuity ve tvaru

$$u_{\mathrm{C}} = -\frac{1}{C}\int i_{\mathrm{s2}}\mathrm{d}t\,,$$

čímž získáme soustavu rovnic pro neznámé smyčkové proudy

$$R_1 i_{\mathrm{s1}} + R_2(i_{\mathrm{s1}} + i_{\mathrm{s2}}) = U_{\mathrm{o}}\,,$$

$$+\frac{1}{C}\int i_{\mathrm{s2}}\mathrm{d}t + R_2(i_{\mathrm{s1}} + i_{\mathrm{s2}}) = 0\,,$$

kterou upravíme a vynásobíme hodnotami parametrů tak, abychom eliminovali smyčkový proud i_{s1}

$$(R_1+R_2)i_{\mathrm{s1}} + R_2 i_{\mathrm{s2}} = U_{\mathrm{o}}\,, \qquad /\cdot R_2$$

$$R_2 i_{\mathrm{s1}} + R_2 i_{\mathrm{s2}} + \frac{1}{C}\int i_{\mathrm{s2}}\mathrm{d}t = 0\,, \qquad /\cdot -(R_1+R_2)$$

tedy

$$R_2(R_1+R_2)i_{\mathrm{s1}} + R_2^2 i_{\mathrm{s2}} = R_2 U_{\mathrm{o}}\,,$$

$$-R_2(R_1+R_2)i_{\mathrm{s1}} - R_2(R_1+R_2)i_{\mathrm{s2}} - \frac{R_1+R_2}{C}\int i_{\mathrm{s2}}\mathrm{d}t = 0\,,$$

čímž získáme integrální rovnici, kterou podělíme hodnotou $(-R_1R_2)$

$$-R_1R_2\, i_{\mathrm{s2}} - \frac{R_1+R_2}{C}\int i_{\mathrm{s2}}\mathrm{d}t = R_2 U_{\mathrm{o}} \qquad /:-R_1R_2\,,$$

a zderivujeme podle času

$$i_{s2} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} \int i_{s2} \mathrm{d}t = -\frac{R_2}{R_1 R_2} U_o , \qquad / \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$$

čímž získáme homogenní rovnici, která je současně i rovnicí úplnou

$$\frac{\mathrm{d}i_{s2}}{\mathrm{d}t} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} i_{s2} = 0 ,$$

kterou můžeme upravit do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}i_{s2}}{i_{s2}} = -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} \mathrm{d}t ,$$

a řešit integrováním obou stran rovnice

$$\ln(i_{s2}) = -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t + K .$$

„Odlogaritmováním“ získáme řešení homogenní rovnice

$$i_{s2}(t) = \mathrm{e}^{-\frac{R_1+R_2}{R_1 R_2 C} t + K} = \mathrm{e}^{-\frac{R_1+R_2}{R_1 R_2 C} t} \mathrm{e}^{K} = A\,\mathrm{e}^{-\frac{R_1+R_2}{R_1 R_2 C} t} = A\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} ,$$

kde K a A jsou integrační konstanty a τ je časová konstanta definovaná

$$\tau = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C .$$

Použijeme-li postup zmíněný úvodem kapitoly 2.1, pro homogenní rovnici sestavíme charakteristickou rovnici, u které umocníme charakteristické číslo λ na řád derivace členu charakteristické rovnice

$$\lambda^1 + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} \lambda^0 = \lambda + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} = 0 ,$$

čímž získáme její kořen

$$\lambda = -\frac{1}{\tau} = -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} ,$$

který dosadíme do řešení

$$i_{s2}(t) = A\mathrm{e}^{\lambda t} .$$

Konstantu A určíme z počáteční podmínky

$$i_{s2}(0_+) = -i_C(0_+) = -\frac{U_o}{R_1} = A\mathrm{e}^{\lambda \cdot 0} ,$$

$$A = -\frac{U_o}{R_1}$$

$$i_{s2}(t) = -\frac{U_o}{R_1} \mathrm{e}^{\lambda \cdot t} .$$

Z rovnice $(R_1 + R_2) i_{s1} + R_2\, i_{s2} = U_o$ si vyjádříme proud i_{s1} a dosadíme za proud i_{s2}

$$i_{s1}(t) = \frac{U_o - R_2\, i_{s2}}{R_1 + R_2} = \frac{U_o}{R_1 + R_2} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} i_{s2} = \frac{U_o}{R_1 + R_2} - \frac{R_2}{R_1 + R_2}\left(-\frac{U_o}{R_1}\mathrm{e}^{\lambda t}\right) = \frac{U_o}{R_1 + R_2}\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\mathrm{e}^{\lambda t}\right).$$

ad b) Po připojení obvodu k harmonickému zdroji $u_o = U_m \sin(\omega t + \psi_U)$ budou po odeznění přechodného děje ustálené hodnoty harmonické. Ustálenou okamžitou hodnotu napětí kapacitoru, která je partikulárním řešením nehomogenní rovnice, určíme transformací řešení do komplexní roviny, kde časový průběh napětí zdroje reprezentuje fázor $\hat{U}_o = U_m/\sqrt{2}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi U} = U\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi U}$ a parametry obvodu impedance $\hat{Z} = R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} = R - \mathrm{j}X_C$. Fázor napětí kapacitoru určíme ze vztahu

$$\hat{U}_{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{j}\,\mathrm{Im}\{\hat{Z}\}}{\hat{Z}}\,\hat{U}_{\mathrm{o}} = \frac{-\mathrm{j}X_{\mathrm{C}}}{R-\mathrm{j}X_{\mathrm{C}}}\,\hat{U}_{\mathrm{o}} = \frac{\hat{U}_{\mathrm{o}}}{1+\mathrm{j}\dfrac{R}{X_{\mathrm{C}}}} = \frac{U\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_{\mathrm{U}}}}{\sqrt{1^2+\left(\dfrac{R}{X_{\mathrm{C}}}\right)^2}\;\mathrm{e}^{\mathrm{j}\arctan\left(\frac{R}{X_{\mathrm{C}}}\right)}} =$$

$$= \frac{U}{\sqrt{1+\left(\dfrac{R}{X_{\mathrm{C}}}\right)^2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\psi_{\mathrm{U}}-\arctan\left(\frac{R}{X_{\mathrm{C}}}\right)\right)} = \frac{U}{\sqrt{1+(R\,C\,\omega)^2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\psi_{\mathrm{U}}-\arctan(R\,C\,\omega))} = \frac{U}{\sqrt{1+(\tau\,\omega)^2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\psi_{\mathrm{U}}-\arctan(\tau\,\omega))}.$$

Po vynásobení tohoto fázoru napětí komplexní periodickou funkcí $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$, získáme komplexní, časovou funkci, komplexor napětí kapacitoru ve tvaru $\hat{U}_{\mathrm{C}}(t) = \hat{U}_{\mathrm{C}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ a zpětnou transformací na základě Eulerova vztahu, volbou imaginární části tohoto komplexoru, získáme partikulární řešení nehomogenní diferenciální rovnice 1. řádu RC obvodu

$$u_{\mathrm{Cp}} = \sqrt{2}\,\mathrm{Im}\{\hat{U}_{\mathrm{C}}(t)\} = \sqrt{2}\,\mathrm{Im}\{\hat{U}_{\mathrm{C}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\} = \sqrt{2}\,\mathrm{Im}\left\{\frac{U}{\sqrt{1+(\tau\,\omega)^2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\psi_{\mathrm{U}}-\arctan(\tau\,\omega))}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\} =$$

$$= \sqrt{2}\,\mathrm{Im}\left\{\frac{U}{\sqrt{1+(\tau\,\omega)^2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\psi_{\mathrm{U}}-\arctan(\tau\,\omega))}\right\} =$$

$$= \frac{U_{\mathrm{m}}}{\sqrt{1+(\tau\,\omega)^2}}\sin(\omega t+\psi_{\mathrm{U}}-\arctan(\tau\,\omega)) = U_{\mathrm{Cm}}\sin(\omega t+\psi_{\mathrm{U}}-\arctan(\tau\,\omega)).$$

Úplné řešení rovnice má tvar

$$u_{\mathrm{C}} = u_{\mathrm{Ch}} + u_{\mathrm{Cp}} = C_1\,\mathrm{e}^{\lambda t} + U_{\mathrm{Cm}}\sin(\omega t+\psi_{\mathrm{U}}-\arctan(\tau\,\omega)).$$

Konstantu C_1 určíme pomocí známé počáteční podmínky $u_{\mathrm{C}}(0)$

$$u_{\mathrm{C}}(0) = \lim_{t\to 0}\left[C_1\,\mathrm{e}^{\lambda t} + U_{\mathrm{Cm}}\sin(\omega t+\psi_{\mathrm{U}}-\arctan(\tau\,\omega))\right] = C_1 + U_{\mathrm{Cm}}\sin(\psi_{\mathrm{U}}-\arctan(\tau\,\omega)),$$

$$C_1 = u_{\mathrm{C}}(0) - U_{\mathrm{Cm}}\sin(\psi_{\mathrm{U}}-\arctan(\tau\,\omega)),$$

takže úplné řešení má konečný tvar po normování

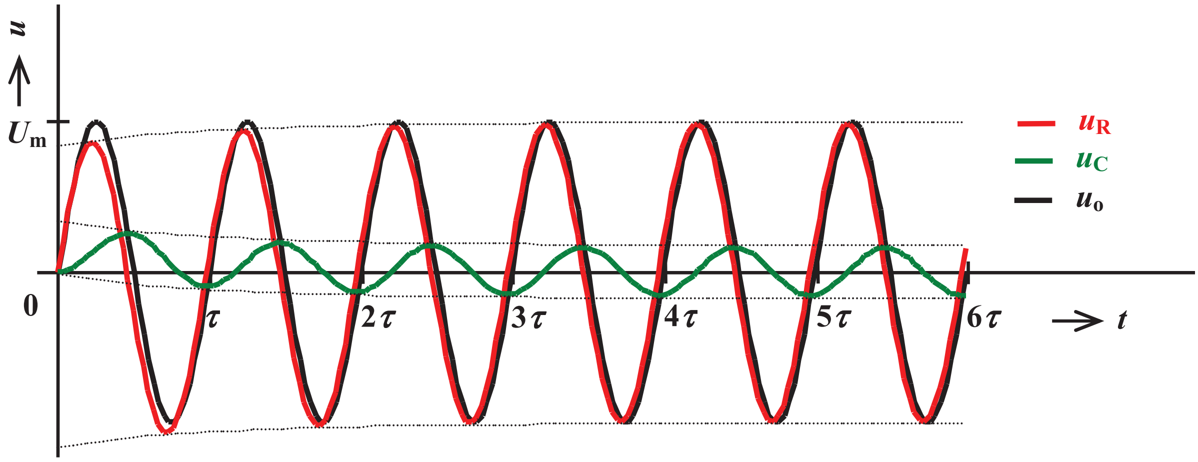
$$u_{\mathrm{C}} = \left[u_{\mathrm{C}}(0) - U_{\mathrm{Cm}}\sin(\psi_{\mathrm{U}}-\arctan(\tau\,\omega))\right]\mathrm{e}^{\lambda t} + U_{\mathrm{Cm}}\sin(\omega t+\psi_{\mathrm{U}}-\arctan(\tau\,\omega))$$

$$= U_{\mathrm{Cm}}\left[\sin(\omega t+\psi_{\mathrm{U}}-\arctan(\tau\,\omega)) - \sin(\psi_{\mathrm{U}}-\arctan(\tau\,\omega))\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right] + u_{\mathrm{C}}(0)\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

a není-li kapacitor nabit

$$u_{\mathrm{C}} = U_{\mathrm{Cm}}\left[\sin(\omega t+\psi_{\mathrm{U}}-\arctan(\tau\,\omega)) - \sin(\psi_{\mathrm{U}}-\arctan(\tau\,\omega))\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right].$$

Průběh nabíjení nenabitého kapacitoru při $\psi_{\mathrm{U}} = 0$ rad a při $\psi_{\mathrm{U}} \neq \arctan(\tau\,\omega)$ je zobrazen na obr. 2.15. Z průběhu je zřejmé, že přechodný děj končí prakticky za dobu několika časových konstant, tak jako v případě stejnosměrného obvodu. Přechodná složka nevznikne, bude-li v okamžiku připojení zdroje jeho počáteční fáze napětí ψ_{U} rovna argumentu fázového posunu impedance obvodu, tedy obecně při $\psi_{\mathrm{U}} = \arctan(\tau\,\omega) + k\,\pi$, kde k je přirozené číslo respektující periodicitu funkce tangens. Naopak se plně vyvine, bude-li $\psi_{\mathrm{U}} = \arctan(\tau\,\omega) + (2k+1)\pi/2$.



Obr. 2.15 Přechodný děj RC obvodu, připojení harmonického zdroje napětí, $\psi_U \neq \varphi_z$, nulové počáteční podmínky: okamžité hodnoty napětí rezistoru, kapacitoru a zdroje

Pro proud obvodu, zobrazený na obr. 2.16, platí

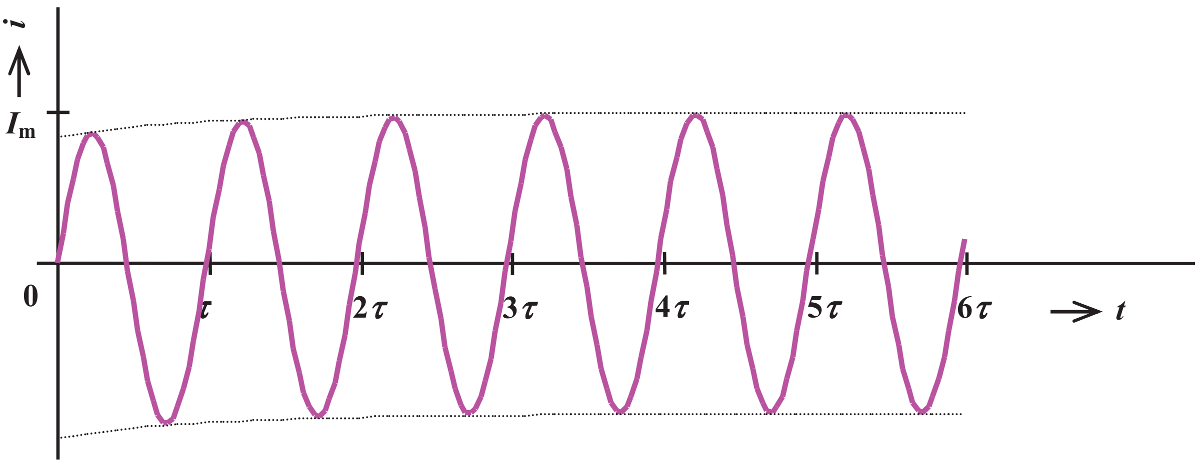
$$i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}\left(U_{Cm}\left[\sin(\omega t + \psi_U - \arctan(\tau\omega)) - \sin(\psi_U - \arctan(\tau\omega))\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right]\right)}{\mathrm{d}t} =$$

$$= C U_{Cm}\left[\omega\cos(\omega t + \psi_U - \arctan(\tau\omega)) + \frac{1}{\tau}\sin(\psi_U - \arctan(\tau\omega))\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right] =$$

$$= \tau\omega\frac{U_{Cm}}{R}\left[\cos(\omega t + \psi_U - \arctan(\tau\omega)) + \frac{1}{\omega\tau}\sin(\psi_U - \arctan(\tau\omega))\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right] =$$

$$= U_m\frac{\tau\omega}{R\sqrt{1^2 + (\tau\omega)^2}}\left[\cos(\omega t + \psi_U - \arctan(\tau\omega)) + \frac{1}{\omega\tau}\sin(\psi_U - \arctan(\tau\omega))\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right] =$$

$$= I_m\left[\cos(\omega t + \psi_U - \arctan(\tau\omega)) + \frac{1}{\omega\tau}\sin(\psi_U - \arctan(\tau\omega))\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right].$$



Obr. 2.16 Přechodný děj RC obvodu, připojení harmonického zdroje napětí s počáteční fází $\psi_U = 0°$, $\psi_U \neq \varphi_z$, nulové počáteční podmínky: okamžité hodnoty proudu

Napětí na rezistoru, zobrazené na obr. 2.15, je dáno

$$u_{\mathrm{R}} = R\,i = U_{\mathrm{m}} \frac{\tau\,\omega}{\sqrt{1^2 + (\tau\,\omega)^2}} \left[\cos(\omega t + \psi_{\mathrm{U}} - \arctan(\tau\,\omega)) + \frac{1}{\omega\tau} \sin(\psi_{\mathrm{U}} - \arctan(\tau\,\omega)) \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \right] =$$

$$= U_{\mathrm{Rm}} \left[\cos(\omega t + \psi_{\mathrm{U}} - \arctan(\tau\,\omega)) + \frac{1}{\omega\tau} \sin(\psi_{\mathrm{U}} - \arctan(\tau\,\omega)) \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \right].$$

Okamžité výkony obvodu v přechodném ději, zobrazené na obr. 2.17, určíme součinem příslušného napětí obvodového prvku a společného proudu obvodu, které upravíme pomocí vztahů pro součiny goniometrických funkcí

$$p_{\mathrm{R}} = u_{\mathrm{R}}\, i = U_{\mathrm{Rm}} \left[\cos(\omega t + \psi_{\mathrm{U}} - \arctan(\tau\,\omega)) + \frac{1}{\omega\tau} \sin(\psi_{\mathrm{U}} - \arctan(\tau\,\omega)) \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \right] \cdot$$

$$\cdot I_{\mathrm{m}} \left[\cos(\omega t + \psi_{\mathrm{U}} - \arctan(\tau\,\omega)) + \frac{1}{\omega\tau} \sin(\psi_{\mathrm{U}} - \arctan(\tau\,\omega)) \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \right] =$$

$$= \frac{U_{\mathrm{m}}^2}{R} \frac{(\tau\,\omega)^2}{1^2 + (\tau\,\omega)^2} \left[\cos(\omega t + \psi_{\mathrm{U}} - \arctan(\tau\,\omega)) + \frac{1}{\omega\tau} \sin(\psi_{\mathrm{U}} - \arctan(\tau\,\omega)) \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \right]^2 =$$

$$= P_{\mathrm{R}} \frac{(\tau\,\omega)^2}{1^2 + (\tau\,\omega)^2} \left[\frac{1}{2} [1 + \cos(2(\omega t + \psi_{\mathrm{U}} - \arctan(\tau\,\omega)))] + \right.$$

$$+ \frac{2}{\omega\tau} \sin(\psi_{\mathrm{U}} - \arctan(\tau\,\omega)) \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega t + \psi_{\mathrm{U}} - \arctan(\tau\,\omega)) +$$

$$\left. + \frac{1}{(\omega\tau)^2} \sin^2(\psi_{\mathrm{U}} - \arctan(\tau\,\omega)) \mathrm{e}^{-2\frac{t}{\tau}} \right],$$

$$p_{\mathrm{C}} = u_{\mathrm{C}}\, i = U_{\mathrm{Cm}} \left[\sin(\omega t + \psi_{\mathrm{U}} - \arctan(\tau\,\omega)) - \sin(\psi_{\mathrm{U}} - \arctan(\tau\,\omega)) \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \right] \cdot$$

$$\cdot I_{\mathrm{m}} \left[\cos(\omega t + \psi_{\mathrm{U}} - \arctan(\tau\,\omega)) + \frac{1}{\omega\tau} \sin(\psi_{\mathrm{U}} - \arctan(\tau\,\omega)) \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \right] =$$

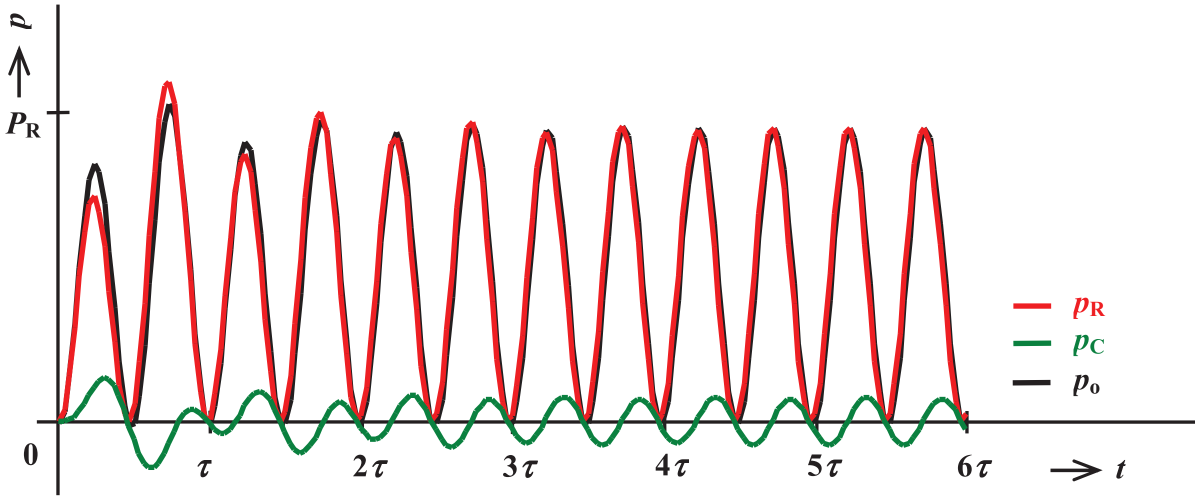
$$= P_{\mathrm{R}} \frac{\tau\,\omega}{1^2 + (\tau\,\omega)^2} \left[\frac{1}{2} \sin[2(\omega t + \psi_{\mathrm{U}}) - \arctan(\tau\,\omega)] + \sin(\psi_{\mathrm{U}} - \arctan(\tau\,\omega)) \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left(\frac{1}{\omega\tau} \sin(\omega t + \psi_{\mathrm{U}} - \arctan(\tau\,\omega)) - \cos(\omega t + \psi_{\mathrm{U}} - \arctan(\tau\,\omega)) \right) - \frac{1}{\omega\tau} \sin^2(\psi_{\mathrm{U}} - \arctan(\tau\,\omega)) \mathrm{e}^{-2\frac{t}{\tau}} \right],$$

$$p_{\mathrm{o}} = u_{\mathrm{o}}\, i = U_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \psi_{\mathrm{U}})\, I_{\mathrm{m}} \left[\cos(\omega t + \psi_{\mathrm{U}} - \arctan(\tau\,\omega)) + \frac{1}{\omega\tau} \sin(\psi_{\mathrm{U}} - \arctan(\tau\,\omega)) \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \right] =$$

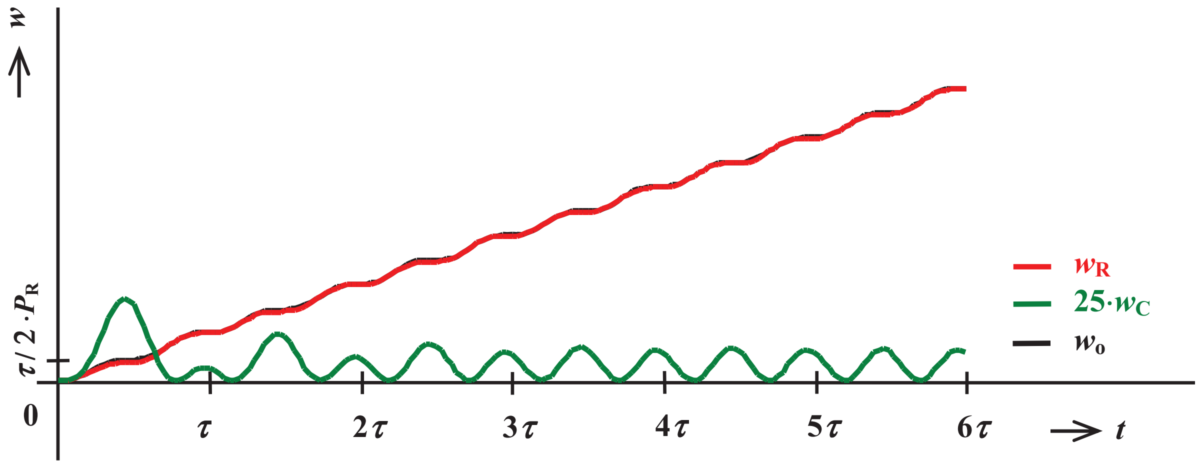
$$= P_{\mathrm{R}} \frac{\tau\,\omega}{\sqrt{1^2 + (\tau\,\omega)^2}} \left[\frac{1}{2} [\sin(2(\omega t + \psi_{\mathrm{U}}) - \arctan(\tau\,\omega)) + \sin(\arctan(\tau\,\omega))] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\omega\tau} \sin(\psi_{\mathrm{U}} - \arctan(\tau\,\omega)) \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\omega t + \psi_{\mathrm{U}}) \right].$$



Obr. 2.17 Přechodný děj RC obvodu, připojení harmonického zdroje napětí, $\psi_U \neq \varphi_z$, nulové počáteční podmínky: okamžité výkony rezistoru, kapacitoru a zdroje

Okamžité hodnoty energií jsou zobrazeny pro jednotlivé prvky obvodu jen v podobě grafů na obr. 2.18. Jelikož grafy energie zdroje w a rezistoru w_R jsou prakticky totožné, je graf energie kapacitoru w_C s ohledem na větší názornost zvětšen 25 krát.



Obr. 2.18 Přechodný děj RC obvodu, připojení harmonického zdroje napětí, $\psi_U \neq \varphi_z$, nulové počáteční podmínky: okamžité hodnoty energie rezistoru, kapacitoru a zdroje

Poznamenejme, že rozpojíme-li v čase t_0 spínač S, zůstane kapacitor v RC obvodu nabit na napětí $u_C(t_0)$ a jelikož proud kapacitoru se může měnit skokem, okamžitě zanikne. Na spínači se objeví napětí $u_S = u_o - u_C(t_0)$.

Příklad 2.3.

Určete veličiny RC obvodu, který byl připojen spínačem S ke zdroji napětí se sinusovým průběhem s parametry $U_m = 10$ V, $f = 10$ Hz a $\psi_U = -60°$, jsou-li hodnoty prvků obvodu $R = 1$ kΩ a $C = 10$ μF a po 50 ms spínačem rozpojen. Předpokládejte, že před sepnutím spínače S byl kapacitor vybitý.

♦

Okamžité hodnoty veličin obvodu určíme z výše odvozených vztahů, kam dosadíme za čas hodnotu $t = 0{,}05$ s. Nejprve si vyčíslíme následující hodnoty parametrů obvodu

$$\omega = 2\pi f = 20\pi \,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} \qquad \text{a} \qquad \tau = RC = 10^3\, 10^{-5} = 0{,}01 \text{ s}\,.$$

Obvodové veličiny jsou pak po dosazení známých hodnot a parametrů

$$i = U_\mathrm{m} \frac{\tau\,\omega}{R\sqrt{1^2 + (\tau\,\omega)^2}} \left[\cos(\omega t + \psi_\mathrm{U} - \arctan(\tau\,\omega)) + \frac{1}{\omega\tau} \sin(\psi_\mathrm{U} - \arctan(\tau\,\omega))\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \right] =$$

$$= \lim_{t\to 0{,}05} 10 \frac{20\pi \cdot 0{,}01}{10^3 \sqrt{1^2 + (20\pi \cdot 0{,}01)^2}} \left[\cos\left(20\pi \cdot 0{,}05 - \frac{\pi}{3} - \arctan(20\pi \cdot 0{,}01) \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{20\pi \cdot 0{,}01} \sin\left(-\frac{\pi}{3} - \arctan(20\pi \cdot 0{,}01) \right) \mathrm{e}^{-\frac{0{,}05}{0{,}01}} \right] = 142\,\mu\mathrm{A},$$

$$u_\mathrm{R} = R\,i = 1000 \cdot 142 \cdot 10^{-6} = 142 \text{ mV}\,,$$

$$u_\mathrm{C} = \frac{U_\mathrm{m}}{\sqrt{1 + (\tau\,\omega)^2}} \left[\sin(\omega t + \psi_\mathrm{U} - \arctan(\tau\,\omega)) - \sin(\psi_\mathrm{U} - \arctan(\tau\,\omega))\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \right] =$$

$$= \lim_{t\to 0{,}05} \frac{10}{\sqrt{1^2 + (20\pi \cdot 0{,}01)^2}} \left[\sin\left(20\pi \cdot 0{,}05 - \frac{\pi}{3} - \arctan(20\pi \cdot 0{,}01) \right) - \right.$$

$$\left. - \sin\left(-\frac{\pi}{3} - \arctan(20\pi \cdot 0{,}01) \right) \mathrm{e}^{-\frac{0{,}05}{0{,}01}} \right] = 8{,}518 \text{ V},$$

$$u = U_\mathrm{m} \sin(\omega t + \psi_\mathrm{U}) = \lim_{t\to 0{,}05} 10 \sin\left(20\pi \cdot 0{,}05 - \frac{\pi}{3} \right) = 8{,}660 \text{ V}.$$

Po rozpojení spínače S přestane obvodem okamžitě procházet proud a kondenzátor zůstane nabitý, takže pro hledané hodnoty veličin obvodu platí

$$i = 0\,\mathrm{A}\,, \qquad u_\mathrm{R} = 0 \text{ V}\,, \qquad u_\mathrm{C} = 8{,}518 \text{ V}\,,$$

$$u = 10 \sin\left(20\pi t - \frac{\pi}{3} \right)$$

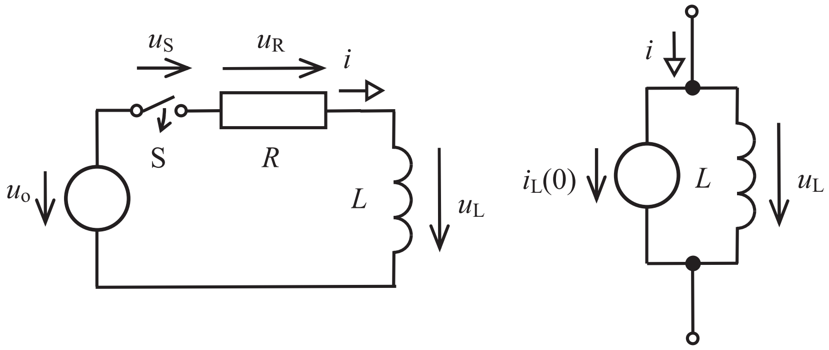
a mezi kontakty rozepnutého spínače se objeví podle 2. Kirchhoffova zákona pro čas $t \geq 50$ ms napětí

$$u_\mathrm{S} = u - u_\mathrm{C} = 10 \sin\left(20\pi t - \frac{\pi}{3} \right) - 8{,}518 \text{ V}\,,$$

které je funkcí času, protože se s časem mění napětí budícího zdroje.

❑ LR obvod

Náhradní schéma jednoduchého LR obvodu připojeného ke zdroji napětí u_o v čase $t = 0$ s je na obr. 2.19 vlevo. Nejdříve prošetřeme situaci před sepnutím spínače S (čas $t \to 0_-$ s). Induktorem o hodnotě indukčnosti L může obecně procházet proud $i_\mathrm{L}(0)$, což zachycuje ekvivalentní náhradní zapojení na obr. 2.19 vpravo.



Obr. 2.19 Přechodný děj LR obvodu: schéma zapojení, ekvivalentní obvodový model induktoru

Po sepnutí spínače S, kdy $u_S = 0$ V, platí podle 2. Kirchhoffova zákona

$$u_o = u_R + u_L$$

a po dosazení Ohmova zákona nebo Faradayova zákona za společnou veličinu obvodu proud $i = \frac{u}{R} = \frac{1}{L}\int u_L \, dt$, získáme buď rovnici

$$R\,i + L\frac{di}{dt} = u_o$$

s proudovou odezvou nebo

$$R\frac{1}{L}\int u_L \, dt + u_L = u_o$$

s odezvou, napětím induktoru. Pro popis obvodu si zvolme matematický model obvodu daný nehomogenní diferenciální rovnicí 1. řádu s hledanou odezvou, proudem induktoru, který je stavovou veličinou obvodu. Obecná homogenní rovnice

$$L\frac{di}{dt} + R\,i = u_o\,,$$

kterou získáme z nehomogenní rovnice dosazením za budící napětí $u_o = 0$ V a která popisuje chování obvodu v přechodném ději. Její obecné řešení až na integrační konstantu určíme pomocí kořene charakteristické rovnice

$$L\,\lambda + R = 0,$$

$$\lambda = -\frac{R}{L} = -\frac{1}{\tau}$$

ve tvaru

$$i_h = C_1 e^{\lambda t} = C_1 e^{-\frac{t}{\tau}},$$

kde časová konstanta τ je definována podílem $\tau = L/R$.

Partikulární řešení nehomogenní rovnice hledejme opět pro případy

a) buzení stejnosměrným zdrojem, $u_0 = U$,

b) buzení harmonickým zdrojem, $u_0 = U_m \sin(\omega t + \psi_U)$.

ad a) Po připojení obvodu ke stejnosměrnému zdroji budou po ode znění přechodného děje ustálené hodnoty stejnosměrné. Ustálená hodnota proudu induktoru, která je partikulárním řešením nehomogenní rovnice, je $i_{\mathrm{p}} = \lim_{t\to\infty} i(t) = U/R$, protože induktor se chová ve stejnosměrném obvodu jako zkrat. Prakticky to znamená, že v původní nehomogenní rovnici neuvažujeme složku s derivací 1. řádu, protože změna napětí induktoru v ustáleném stavu stejnosměrného obvodu je nulová.

Úplné řešení má tvar

$$i = i_{\mathrm{h}} + i_{\mathrm{p}} = C_1\,\mathrm{e}^{\lambda t} + \frac{U}{R}.$$

Konstantu C_1 určíme pomocí známé počáteční podmínky $i(0)$

$$i(0) = \lim_{t\to 0} C_1\,\mathrm{e}^{\lambda t} + \frac{U}{R} = C_1 + \frac{U}{R},$$

$$C_1 = i(0) - \frac{U}{R},$$

takže úplné řešení má konečný tvar po normování

$$i = \left(i(0) - \frac{U}{R}\right)\mathrm{e}^{\lambda t} + \frac{U}{R} = \frac{U}{R}(1-\mathrm{e}^{\lambda t}) + i(0)\,\mathrm{e}^{\lambda t} = \frac{U}{R}(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}) + i(0)\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

a byl-li induktor bez proudu

$$i = \frac{U}{R}(1-\mathrm{e}^{\lambda t}) = \frac{U}{R}(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}) = I_{\mathrm{R}}(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}).$$

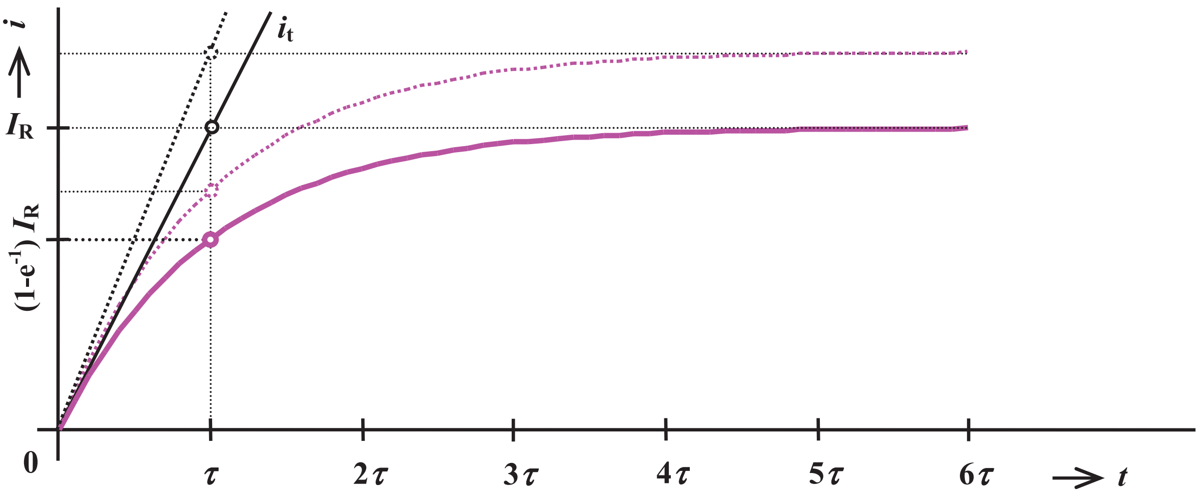
Průběh proudu induktoru s nulovým počátečním proudem je na obr. 2.20. Z jeho grafu je zřejmé, že přechodný děj končí prakticky za dobu několika časových konstant. V čase $t = \tau$ proud induktoru dosáhne asi 63,2 % (přesně (1-e^{-1}) tiny) ustálené hodnoty proudu I_{R}, v časech $t = 3\tau$ se přiblíží na 5 %, $t = 5\tau$ na 1 %, $t = 7\tau$ na 0,1 % k ustálené hodnotě proudu. Rovnice tečny průběhu proudu stanovená v počátku nám poslouží k vyložení významu časové konstanty. Směrnici určíme derivací proudu induktoru s nulovým počátečním proudem

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(I_{\mathrm{R}}(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{I_{\mathrm{R}}}{\tau}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}},$$

kde po dosazení za čas $t = 0$ s získáme směrnici $\frac{I_{\mathrm{R}}}{\tau}$ a rovnici tečny v počátku

$$i_{\mathrm{t}} = \frac{I_{\mathrm{R}}}{\tau}\,t.$$

Směrnice je kladná, takže proud induktorem narůstá. Dosadíme-li za čas časovou konstantu obvodu tj. $t = \tau$, hodnota proudu tečny v tomto časovém okamžiku je $i_{\mathrm{t}} = I_{\mathrm{R}}$, tedy má ustálenou hodnotu proudu obvodu. Sklon směrnice při dané časové konstantě ovlivňuje velikost proudu I_{R}, viz obr. 2.20. Směrnice závisí na napětí zdroje a odporu rezistoru obvodu. Jiná interpretace časové konstanty potom říká, že je to doba, za kterou dosáhne proud induktoru s nulovým počátečním proudem (1-e^{-1}) tiny tj. asi 63,2 % své ustálené hodnoty.



Obr. 2.20 Přechodný děj LR obvodu, připojení stejnosměrného zdroje napětí, nulové počáteční podmínky: okamžité hodnoty proudu

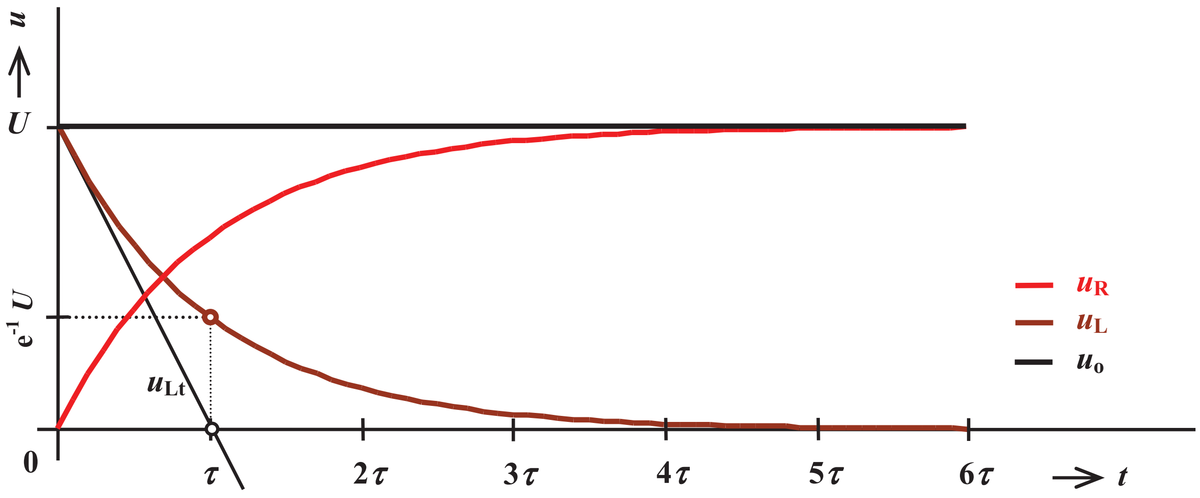
Okamžitou hodnotu napětí rezistoru stanovíme užitím Ohmova zákona

$$u_R = R\,i = R\,I_R\,(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) = U\,(1-e^{-\frac{t}{\tau}}),$$

které je až na měřítko dané hodnotou odporu rezistoru R stejná jako proud obvodu a napětí induktoru pomocí Faradayova zákona

$$u_L = L\frac{di}{dt} = L\frac{d\left(I_R\,(1-e^{-\frac{t}{\tau}})\right)}{dt} = L\,\frac{I_R}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{U}{R}\frac{L}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} = U\,e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Obě tato napětí jsou zobrazena na obr. 2.21. Podle toho, který z úbytků napětí RL obvodu zvolíme za výstupní (odezvu), má přechodová charakteristika derivační nebo integrační charakter. RL obvod nazýváme derivačním článkem, je-li výstupem napětí induktoru u_L a integračním článkem, je-li výstupem napětí rezistoru u_R. Jak vidíme z obr. 2.21, derivačnímu průběhu odpovídá skoková změna napětí v počátku, následovaná exponenciálním poklesem tohoto napětí k nule, integračnímu průběhu odpovídá spojitý, exponenciální nárůst veličiny k ustálené hodnotě napětí.



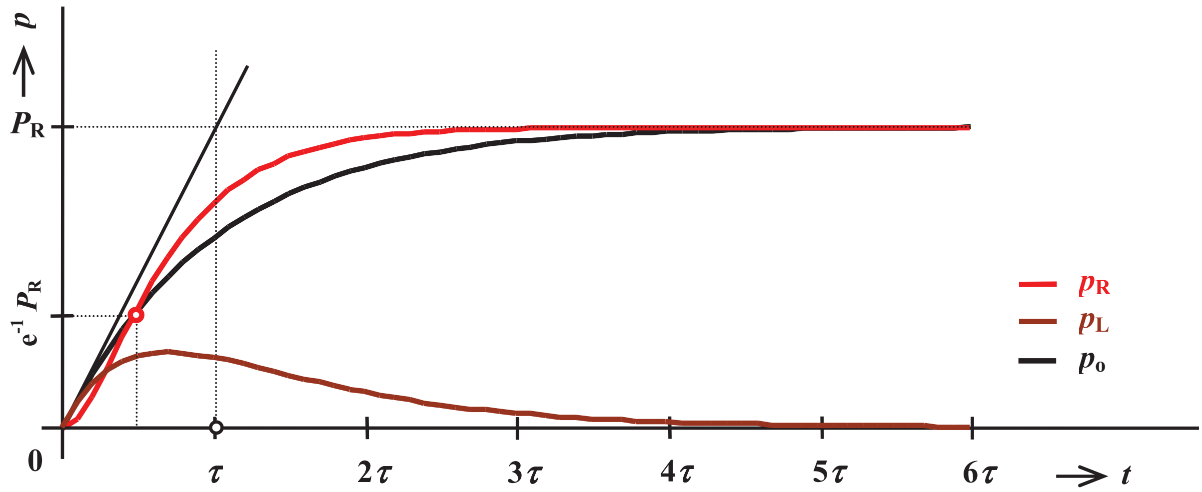
Obr. 2.21 Přechodný děj LR obvodu, připojení stejnosměrného zdroje napětí, nulové počáteční podmínky: okamžité hodnoty napětí rezistoru, induktoru a zdroje

Okamžité výkony obvodu v přechodném ději, zobrazené na obr. 2.22, určíme součinem příslušného napětí obvodového prvku a společného proudu obvodu

$$p_{\mathrm{R}} = u_{\mathrm{R}}\, i = U\,(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})\, I_{\mathrm{R}}\,(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}) = \frac{U^2}{R}(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})^2 = P_{\mathrm{R}}\left(1-2\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}+\mathrm{e}^{-2\frac{t}{\tau}}\right),$$

$$p_{\mathrm{L}} = u_{\mathrm{L}}\, i = U\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\, I_{\mathrm{R}}\,(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}) = P_{\mathrm{R}}\left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}-\mathrm{e}^{-2\frac{t}{\tau}}\right),$$

$$p_{\mathrm{o}} = u_{\mathrm{o}}\, i = U\, I_{\mathrm{R}}\,(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}) = P_{\mathrm{R}}\,(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})$$



Obr. 2.22 Přechodný děj LR obvodu, připojení stejnosměrného zdroje napětí, nulové počáteční podmínky: okamžité výkony rezistoru, induktoru a zdroje

a jejich integrací okamžité hodnoty energií, zobrazené na obr. 2.23, dané rovnicemi

$$w_{\mathrm{R}} = \int_0^t p_{\mathrm{R}}\,\mathrm{d}\xi = \int_0^t P_{\mathrm{R}}\left(1-2\,\mathrm{e}^{-\frac{\xi}{\tau}}+\mathrm{e}^{-2\frac{\xi}{\tau}}\right)\mathrm{d}\xi = P_{\mathrm{R}}\left[\xi+2\tau\,\mathrm{e}^{-\frac{\xi}{\tau}}-\frac{\tau}{2}\mathrm{e}^{-2\frac{\xi}{\tau}}\right]_0^t =$$

$$= P_{\mathrm{R}}\left(t+2\tau\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}-\frac{\tau}{2}\mathrm{e}^{-2\frac{t}{\tau}}-\frac{3}{2}\tau\right) = \frac{\tau}{2}P_{\mathrm{R}}\left(2\frac{t}{\tau}+4\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}-\mathrm{e}^{-2\frac{t}{\tau}}-3\right) = \frac{W_{\mathrm{R}}}{2}\left(2\frac{t}{\tau}+4\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}-\mathrm{e}^{-2\frac{t}{\tau}}-3\right),$$

$$w_{\mathrm{L}} = \int_0^t p_{\mathrm{L}}\,\mathrm{d}\xi = \int_0^t P_{\mathrm{R}}\left(\mathrm{e}^{-\frac{\xi}{\tau}}-\mathrm{e}^{-2\frac{\xi}{\tau}}\right)\mathrm{d}\xi = P_{\mathrm{R}}\left[-\tau\,\mathrm{e}^{-\frac{\xi}{\tau}}+\frac{\tau}{2}\mathrm{e}^{-2\frac{\xi}{\tau}}\right]_0^t = \frac{\tau}{2}P_{\mathrm{R}}\left(-2\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}+\mathrm{e}^{-2\frac{t}{\tau}}+1\right) =$$

$$= \frac{\tau}{2}P_{\mathrm{R}}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right)^2 = \frac{W_{\mathrm{R}}}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right)^2,$$

$$w_{\mathrm{o}} = \int_0^t p_{\mathrm{o}}\,\mathrm{d}\xi = \int_0^t P_{\mathrm{R}}\,(1-\mathrm{e}^{-\frac{\xi}{\tau}})\,\mathrm{d}\xi = P_{\mathrm{R}}\left[\xi-\tau\,\mathrm{e}^{-\frac{\xi}{\tau}}\right]_0^t = P_{\mathrm{R}}\left(t+\tau\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}-\tau\right) = \tau P_{\mathrm{R}}\left(\frac{t}{\tau}+\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}-1\right) =$$

$$= W_{\mathrm{R}}\left(\frac{t}{\tau}+\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}-1\right).$$

Celkovou energii dodanou zdrojem do obvodu, která je rovna práci, kterou zdroj vykonal od připojení k obvodu až do ustálení hodnoty proudu obvodu určíme ze vztahu

$$A_\mathrm{o} = \lim_{t\to\infty} \frac{W_\mathrm{R}}{2}\left(2\frac{t}{\tau} + 4\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} - \mathrm{e}^{-2\frac{t}{\tau}} - 3\right) \to \infty \,.$$

Ta má nekonečnou hodnotu vlivem Jouleových ztrát na rezistoru

$$A_\mathrm{R} = \lim_{t\to\infty} \frac{W_\mathrm{R}}{2}\left(2\frac{t}{\tau} + 4\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} - \mathrm{e}^{-2\frac{t}{\tau}} - 3\right) \to \infty \,,$$

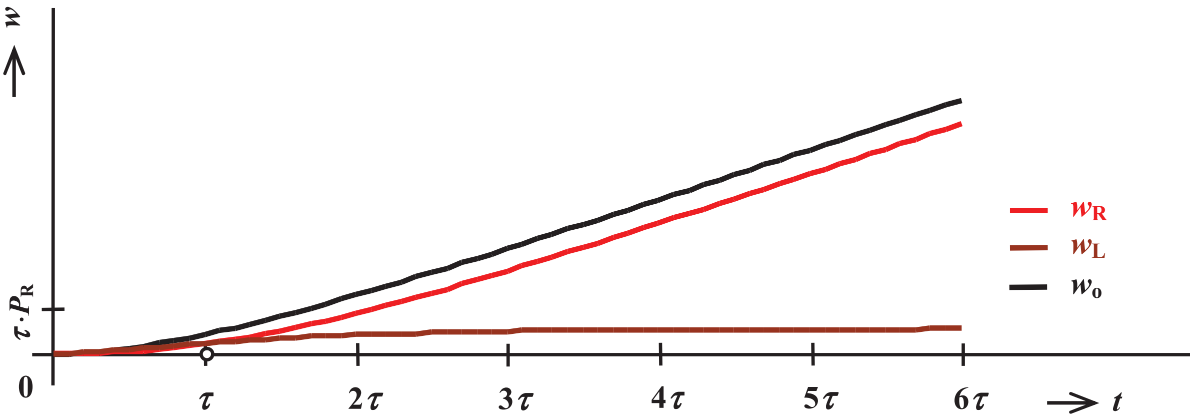
protože rezistorem trvale prochází proud.

K vytvoření magnetického pole induktoru je ale zapotřebí vykonat práci, která má konečnou hodnotu

$$A_\mathrm{L} = \lim_{t\to\infty} \frac{W_\mathrm{R}}{2}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right)^2 = \frac{W_\mathrm{R}}{2} = \frac{1}{2} L\, I_\mathrm{R}^2 \,.$$

Účinnost akumulace energie magnetického pole induktoru je nulová, protože platí

$$\eta = \lim_{t\to\infty} \frac{A_\mathrm{L}}{A_\mathrm{o}} \to 0 \,.$$



Obr. 2.23 Přechodný děj LR obvodu, připojení stejnosměrného zdroje napětí, nulové počáteční podmínky: okamžité hodnoty energie rezistoru, induktoru a zdroje

ad b) Po připojení obvodu k harmonickému zdroji $u_0 = U_\mathrm{m} \sin(\omega t + \psi_\mathrm{U})$ budou po odeznění přechodného děje ustálené hodnoty harmonické. Ustálenou okamžitou hodnotu proudu induktoru, která je partikulárním řešením nehomogenní rovnice, určíme transformací řešení do komplexní roviny, kde časový průběh napětí zdroje reprezentuje fázor $\hat{U}_\mathrm{o} = U_\mathrm{m}/\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_\mathrm{U}} = U\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_\mathrm{U}}$ a parametry obvodu impedance $\hat{Z} = R + \mathrm{j}\omega L = R + \mathrm{j}X_\mathrm{L}$. Fázor proudu induktoru určíme ze vztahu

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}_\mathrm{o}}{\hat{Z}} = \frac{\hat{U}_\mathrm{o}}{R + \mathrm{j}X_\mathrm{L}} = \frac{\hat{U}_\mathrm{o}}{R}\frac{1}{1 + \mathrm{j}\frac{X_\mathrm{L}}{R}} = \frac{U\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_\mathrm{U}}}{R}\frac{1}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{X_\mathrm{L}}{R}\right)^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\arctan\left(\frac{X_\mathrm{L}}{R}\right)}} =$$

$$= \frac{U}{R}\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{X_\mathrm{L}}{R}\right)^2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\psi_\mathrm{U} - \arctan\left(\frac{X_\mathrm{L}}{R}\right)\right)} = \frac{U}{R}\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{L}{R}\omega\right)^2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\psi_\mathrm{U} - \arctan\left(\frac{L}{R}\omega\right)\right)} = \frac{U}{R}\frac{1}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\psi_\mathrm{U} - \arctan(\tau\omega))} .$$

Po vynásobení tohoto fázoru proudu komplexní periodickou funkcí $e^{j\omega t}$, získáme komplexní, časovou funkci, komplexor proudu induktoru ve tvaru $\hat{I}(t) = \hat{I}\,e^{j\omega t}$ a zpětnou transformací na základě Eulerova vztahu, volbou imaginární části tohoto komplexoru, získáme partikulární řešení nehomogenní diferenciální rovnice 1. řádu RL obvodu

$$i_p = \sqrt{2}\ \mathrm{Im}\{\hat{I}(t)\} = \sqrt{2}\ \mathrm{Im}\{\hat{I}\,e^{j\omega t}\} = \sqrt{2}\ \mathrm{Im}\left\{\frac{U}{R}\frac{1}{\sqrt{1+(\tau\,\omega)^2}}\ e^{j(\psi_U - \arctan(\tau\,\omega))}\,e^{j\omega t}\right\} =$$

$$= \sqrt{2}\ \mathrm{Im}\left\{\frac{U}{R}\frac{1}{\sqrt{1+(\tau\,\omega)^2}}\ e^{j(\omega t + \psi_U - \arctan(\tau\,\omega))}\right\} =$$

$$= \frac{U_m}{R}\frac{1}{\sqrt{1+(\tau\,\omega)^2}}\sin(\omega t + \psi_U - \arctan(\tau\,\omega)) = I_m \sin(\omega t + \psi_U - \arctan(\tau\,\omega)).$$

Úplné řešení má tvar

$$i = i_h + i_p = C_1\,e^{\lambda t} + I_m \sin(\omega t + \psi_U - \arctan(\tau\,\omega)).$$

Konstantu C_1 určíme pomocí známé počáteční podmínky $i(0)$

$$i(0) = \lim_{t\to 0}\left[C_1\,e^{\lambda t} + I_m \sin(\omega t + \psi_U - \arctan(\tau\,\omega))\right] = C_1 + I_m \sin(\psi_U - \arctan(\tau\,\omega))$$

$$C_1 = i(0) - I_m \sin(\psi_U - \arctan(\tau\,\omega)),$$

takže úplné řešení má konečný tvar po normování

$$i = [i(0) - I_m \sin(\psi_U - \arctan(\tau\,\omega))]e^{\lambda t} + I_m \sin(\omega t + \psi_U - \arctan(\tau\,\omega)) =$$

$$= I_m\left[\sin(\omega t + \psi_U - \arctan(\tau\,\omega)) - \sin(\psi_U - \arctan(\tau\,\omega))e^{-\frac{t}{\tau}}\right] + i(0)\,e^{-\frac{t}{\tau}}$$

a má-li induktor nulový počáteční proud

$$i = I_m\left[\sin(\omega t + \psi_U - \arctan(\tau\,\omega)) - \sin(\psi_U - \arctan(\tau\,\omega))e^{-\frac{t}{\tau}}\right].$$

Průběh proudu induktoru s nulovým počátečním proudem při $\psi_U = 0$ rad a při $\psi_U \neq \arctan(\tau\,\omega)$ je zobrazený na obr. 2.24. Z průběhu je zřejmé, že přechodný děj končí prakticky za dobu několika časových konstant, tak jako v případě stejnosměrného obvodu. Přechodná složka nevznikne, bude-li v okamžiku připojení zdroje jeho počáteční fáze napětí ψ_U rovna argumentu fázového posunu impedance obvodu, tedy obecně při $\psi_U = \arctan(\tau\,\omega) + k\,\pi$, kde k je přirozené číslo respektující periodicitu funkce tangens. Naopak se plně vyvine, bude-li $\psi_U = \arctan(\tau\,\omega) + (2k+1)\pi/2$.

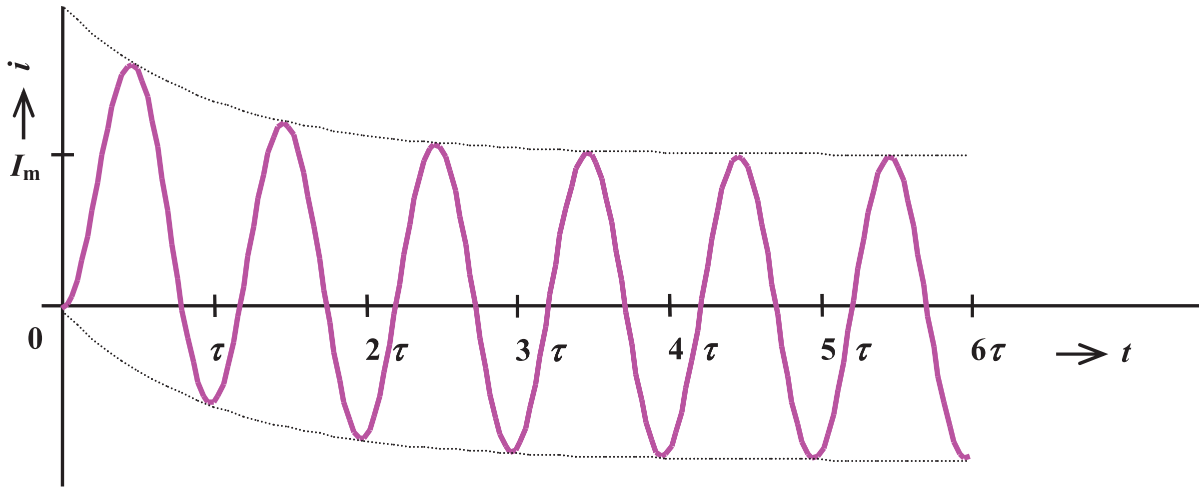
Okamžitou hodnotu napětí rezistoru stanovíme užitím Ohmova zákona

$$u_R = R\,i = R\,I_m\left[\sin(\omega t + \psi_U - \arctan(\tau\,\omega)) - \sin(\psi_U - \arctan(\tau\,\omega))e^{-\frac{t}{\tau}}\right] =$$

$$= \frac{U_m}{\sqrt{1+(\tau\,\omega)^2}}\left[\sin(\omega t + \psi_U - \arctan(\tau\,\omega)) - \sin(\psi_U - \arctan(\tau\,\omega))e^{-\frac{t}{\tau}}\right] =$$

$$= U_{\mathrm{Rm}}\left[\sin(\omega t + \psi_{\mathrm{U}} - \arctan(\tau\,\omega)) - \sin(\psi_{\mathrm{U}} - \arctan(\tau\,\omega))\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right],$$

která je až na měřítko dané hodnotou odporu rezistoru R stejná jako proud obvodu.



Obr. 2.24 Přechodný děj LR obvodu, připojení harmonického zdroje napětí s počáteční fází $\psi_{\mathrm{U}} = 0°$, $\psi_{\mathrm{U}} \neq \varphi_{\mathrm{z}}$, nulové počáteční podmínky proudu induktoru: okamžité hodnoty proudu

Okamžitou hodnotu napětí induktoru stanovíme pomocí Faradayova zákona

$$u_{\mathrm{L}} = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}\left(I_{\mathrm{m}}\left[\sin(\omega t + \psi_{\mathrm{U}} - \arctan(\tau\,\omega)) - \sin(\psi_{\mathrm{U}} - \arctan(\tau\,\omega))\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right]\right)}{\mathrm{d}t} =$$

$$= L\,I_{\mathrm{m}}\left[\omega\cos(\omega t + \psi_{\mathrm{U}} - \arctan(\tau\,\omega)) + \frac{1}{\tau}\sin(\psi_{\mathrm{U}} - \arctan(\tau\,\omega))\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right] =$$

$$= L\,\omega\frac{U_{\mathrm{m}}}{R}\frac{1}{\sqrt{1 + (\tau\,\omega)^2}}\left[\cos(\omega t + \psi_{\mathrm{U}} - \arctan(\tau\,\omega)) + \frac{1}{\omega\tau}\sin(\psi_{\mathrm{U}} - \arctan(\tau\,\omega))\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right] =$$

$$= U_{\mathrm{m}}\frac{\tau\,\omega}{\sqrt{1^2 + (\tau\,\omega)^2}}\left[\cos(\omega t + \psi_{\mathrm{U}} - \arctan(\tau\,\omega)) + \frac{1}{\omega\tau}\sin(\psi_{\mathrm{U}} - \arctan(\tau\,\omega))\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right] =$$

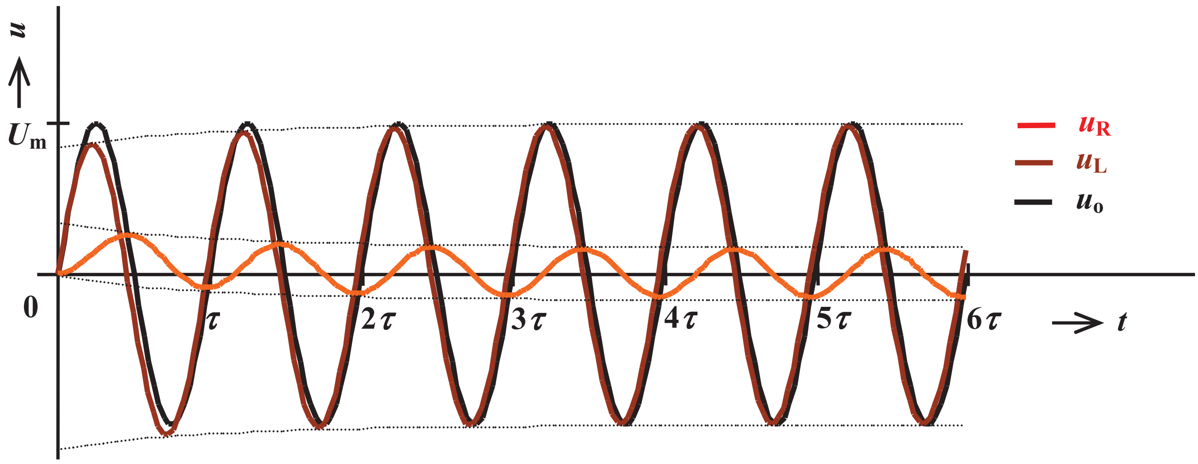
$$= U_{\mathrm{Lm}}\left[\cos(\omega t + \psi_{\mathrm{U}} - \arctan(\tau\,\omega)) + \frac{1}{\omega\tau}\sin(\psi_{\mathrm{U}} - \arctan(\tau\,\omega))\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right].$$

Obě tato napětí jsou zobrazena na obr. 2.25.

Okamžité výkony obvodu v přechodném ději, zobrazené na obr. 2.26, určíme součinem příslušného napětí obvodového prvku a společného proudu obvodu, které upravíme pomocí vztahů pro součiny goniometrických funkcí

$$p_{\mathrm{R}} = u_{\mathrm{R}}\,i = U_{\mathrm{Rm}}\left[\sin(\omega t + \psi_{\mathrm{U}} - \arctan(\tau\,\omega)) - \sin(\psi_{\mathrm{U}} - \arctan(\tau\,\omega))\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right]\cdot$$

$$\cdot\,I_{\mathrm{m}}\left[\sin(\omega t + \psi_{\mathrm{U}} - \arctan(\tau\,\omega)) - \sin(\psi_{\mathrm{U}} - \arctan(\tau\,\omega))\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right] =$$



Obr. 2.25 Přechodný děj LR obvodu, připojení harmonického zdroje napětí, $\psi_U \neq \varphi_Z$, nulové počáteční podmínky: okamžité hodnoty napětí rezistoru, induktoru a zdroje

$$= \frac{U_m^2}{R} \frac{1}{1^2 + (\tau\omega)^2} \left[\sin(\omega t + \psi_U - \arctan(\tau\omega)) - \sin(\psi_U - \arctan(\tau\omega)) e^{-\frac{t}{\tau}} \right]^2 =$$

$$= P_R \frac{1}{1^2 + (\tau\omega)^2} \left[\frac{1}{2} [1 - \cos(2(\omega t + \psi_U - \arctan(\tau\omega)))] - \right.$$

$$- 2\sin(\psi_U - \arctan(\tau\omega)) e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\omega t + \psi_U - \arctan(\tau\omega)) +$$

$$\left. + \sin^2(\psi_U - \arctan(\tau\omega)) e^{-2\frac{t}{\tau}} \right],$$

$$p_L = u_L\, i = U_{Lm} \left[\cos(\omega t + \psi_U - \arctan(\tau\omega)) + \frac{1}{\omega\tau} \sin(\psi_U - \arctan(\tau\omega)) e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \cdot$$

$$\cdot I_m \left[\sin(\omega t + \psi_U - \arctan(\tau\omega)) - \sin(\psi_U - \arctan(\tau\omega)) e^{-\frac{t}{\tau}} \right] =$$

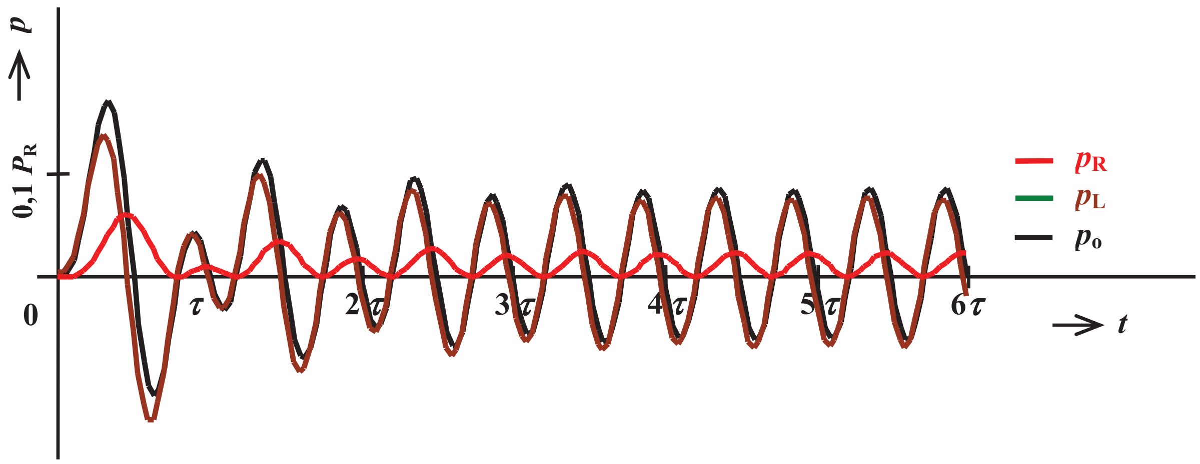
$$= P_R \frac{\tau\omega}{1^2 + (\tau\omega)^2} \left[\frac{1}{2} \sin[2(\omega t + \psi_U) - \arctan(\tau\omega)] + \sin(\psi_U - \arctan(\tau\omega)) e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left(\frac{1}{\omega\tau} \sin(\omega t + \psi_U - \arctan(\tau\omega)) - \cos(\omega t + \psi_U - \arctan(\tau\omega)) \right) - \frac{1}{\omega\tau} \sin^2(\psi_U - \arctan(\tau\omega)) e^{-2\frac{t}{\tau}} \right],$$

$$p_o = u_o\, i = U_m \sin(\omega t + \psi_U)\, I_m \left[\cos(\omega t + \psi_U - \arctan(\tau\omega)) + \frac{1}{\omega\tau} \sin(\psi_U - \arctan(\tau\omega)) e^{-\frac{t}{\tau}} \right] =$$

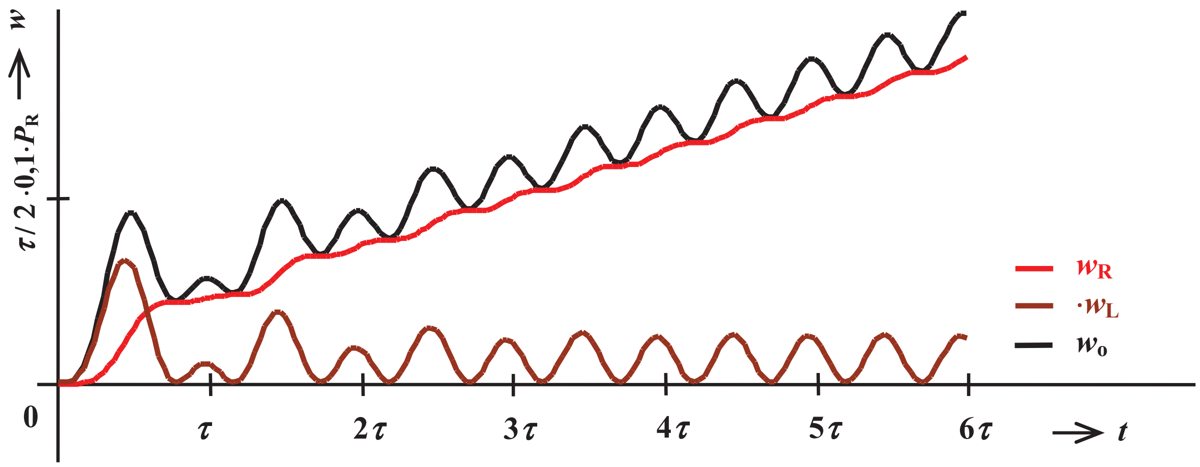
$$= P_R \frac{\tau\omega}{\sqrt{1^2 + (\tau\omega)^2}} \left[\frac{1}{2} [\sin(2(\omega t + \psi_U) - \arctan(\tau\omega)) + \sin(\arctan(\tau\omega))] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\omega\tau} \sin(\psi_U - \arctan(\tau\omega)) e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\omega t + \psi_U) \right].$$



Obr. 2.26 Přechodný děj LR obvodu, připojení harmonického zdroje napětí, $\psi_{\mathrm{U}} \neq \varphi_{\mathrm{z}}$, nulové počáteční podmínky: okamžité výkony rezistoru, induktoru a zdroje

Okamžité hodnoty energií jsou zobrazeny pro jednotlivé prvky obvodu jen v podobě grafů na obr. 2.27.



Obr. 2.27 Přechodný děj LR obvodu, připojení harmonického zdroje napětí, $\psi_{\mathrm{U}} \neq \varphi_{\mathrm{z}}$, nulové počáteční podmínky: okamžité hodnoty energie rezistoru, induktoru a zdroje

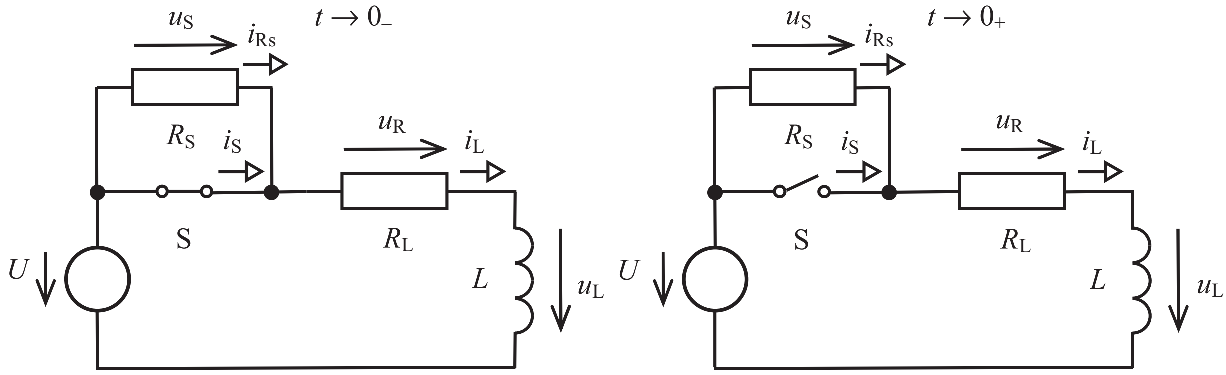
Poznamenejme, že rozpojíme-li v čase t_0 spínačem S nenulový proud RL obvodu, jak vidíme z ekvivalentního náhradního zapojení na obr. 2.19 vpravo, induktor se v okamžiku rozpojení obvodu chová jako zdroj proudu s hodnotou $i(t_0)$, který vytvoří na svorkách rozepnutého spínače ∞ velký úbytek napětí, vlivem jeho nekonečně velkého odporu. Jiným způsobem tuto fyzikální skutečnost můžeme vyložit užitím Faradayova indukčního zákona, kdy se v ∞ krátkém čase naindukuje na induktoru napětí $u_{\mathrm{L}} = \lim\limits_{\mathrm{d}t \to 0} L \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \to \infty$. Není-li hodnota proudu v okamžiku rozpojení obvodu nulová, tedy $i(t_0) = 0$ A, objeví se na induktoru vždy nebezpečně velké napětí, které může vést až k destrukci prvků reálného obvodu.

Příklad 2.4.

Navrhněte řešení, jak omezit velikost napětí spínače S při rozpojení LR obvodu.

♦

Příčinou vzniku vysokého napětí je přerušení proudu induktoru. Aby k němu nedošlo, musíme k induktoru nebo spínači zařadit paralelně větev obvodu, která zajistí, že proud induktoru nebude okamžitě přerušen. Zaměřme se na variantu, kdy paralelně ke spínači je zapojena větev s rezistorem R_S, viz obr. 2.28.



Obr. 2.28 Rozpojení spínače v obvodu s induktorem v čase $t = 0$ s: sepnutý spínač, čas $t \to 0_-$; rozpojený spínač, čas $t \to 0_+$, příklad 2.4

Před rozepnutím spínače je ustálená hodnota proudu obvodu

$$i_S(0_-) = i_L(0_-) = \frac{U}{R_L},$$

která je současně počáteční podmínkou obvodu. Rezistor R_S je vyzkratován, takže tato větev má nulový proud.

Po rozepnutí spínače je chování obvodu popsáno řešením rovnice, které již známe z odvození připojení LR obvodu k stejnosměrnému zdroji, do kterého dosadíme za

$$R = R_S + R_L, \qquad \tau = \frac{L}{R_S + R_L}$$

a počáteční podmínku

$$i(0) = i_L(0_+) = i_L(0_-) = \frac{U}{R_L},$$

takže získáme rovnice obvodových veličin

$$i_{R_S} = i_S = \frac{U}{R_S + R_L}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + \frac{U}{R_L} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{U}{R_S + R_L} + \left(\frac{U}{R_L} - \frac{U}{R_S + R_L}\right) e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{U}{R_S + R_L}\left(1 + \frac{R_S}{R_L} e^{-\frac{t}{\tau}}\right),$$

$$u_S = R_S i_S = \frac{R_S U}{R_S + R_L}\left(1 + \frac{R_S}{R_L} e^{-\frac{t}{\tau}}\right),$$

$$u_{R_L} = R_L i_L = \frac{R_L U}{R_S + R_L}\left(1 + \frac{R_S}{R_L} e^{-\frac{t}{\tau}}\right),$$

$$u_L = U - u_S - u_L = -U \frac{R_S}{R_L} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Hledanou hodnotu napětí spínače po jeho rozepnutí dostaneme dosazením za čas $t \to 0_+$

$$u_S = \lim_{t\to 0_+} \frac{R_S U}{R_S + R_L}\left(1 + \frac{R_S}{R_L} e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = \frac{R_S}{R_L} U\ ,$$

která je konečná.

Poznamenejme, že v praxi se na místo ztrátového rezistoru R_S zapojuje ke spínači S paralelně dioda, zapojená tak, aby po rozpojení převzala proud induktoru, který exponenciálně klesá s časovou konstantou $\tau = \dfrac{L}{R_D + R_L}$, kde R_D je odpor diody. Induktor se po rozpojení spínače S chová jako zdroj, jelikož jeho okamžitý výkon $p_L = u_L \cdot i_L$ je záporný, vlivem právě záporných okamžitých hodnot napětí induktoru, a vrací tak naakumulovanou energii zdroji, dokud neklesne hodnota proudu induktoru k nule.

Σ Shrnutí pojmů 2.2.

Změnu stavu obvodu v důsledku změny topologické struktury obvodu modelujeme spínačem, který má dva provozní stavy. V rozepnutém stavu má nekonečně velký odpor a v sepnutém stavu nemá žádný odpor. Chování LC a LR obvodů je popsáno diferenciální rovnicí 1. řádu. Okamžité hodnoty obvodových veličin v přechodném ději, dané homogenním řešením diferenciální rovnice, jsou monotónní, exponenciální funkce, jejichž ustálené okamžité hodnoty odpovídají partikulárnímu řešení této diferenciální rovnice. Důležitým parametrem přechodných složek průběhů obvodových veličin je časová konstanta obvodu, kterou lze odvodit na základě směrnice rovnic tečen obvodových veličin v počátku přechodného děje. Přechodný děj tvá sice teoreticky nekonečně dlouho, ale prakticky končí po uplynutí několika časových konstant. V okamžiku změny stavu obvodu se kapacitor chová jako ekvivalentní zdroj napětí a induktor jako ekvivalentní zdroj proudu. Je-li kapacitor v sériovém RC obvodu se zdrojem napětí vybit, chová se v okamžiku sepnutí spínače tedy jako zdroj s nulovou hodnotou napětí čili jako nulový odpor tj. zkrat. Má-li induktor v sériovém RL obvodu se zdrojem napětí nulovou hodnotu počátečního proudu, chová se v okamžiku sepnutí spínače jako zdroj s nulovou hodnotou proudu čili jako ∞ velký odpor tj. rozpojená větev, avšak rozpojení větve s induktorem s nenulovou hodnotou proudu má za následek naindukování nekonečně velkého napětí na jeho svorkách. Chceme-li tomu zabránit, musíme do obvodu vhodně zařadit paralelní větev, která převezme proud induktoru. Při připojení LC a LR obvodu k harmonickému zdroji napětí rozhoduje o tom, vznikne-li nebo nevznikne-li přechodná složka průběhů obvodových veličin, relace mezi počáteční fází zdroje a fázovým posunem obvodu, který závisí na imitanci obvodu. Přechodná složka se nevyvine, je-li počáteční fáze zdroje rovna fázovému posunu obvodu.

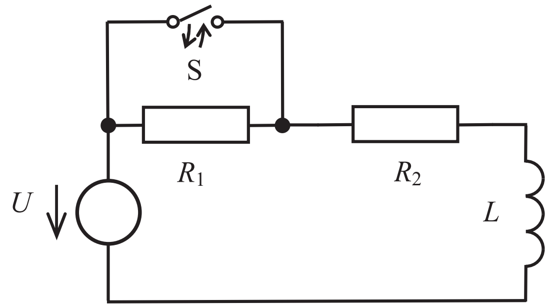
? **Otázky 2.2.**

1. Jakou diferenciální rovnicí popisujeme chování RC a LR obvodu?
2. Jak je definována časová konstanta RC a LR obvodu a jak ji interpretujeme?
3. Po uplynutí kolika časových konstant můžeme považovat přechodný děj za prakticky ukončený?
4. Jak se chová kapacitor a induktor v okamžiku změny topologické struktury obvodu?
5. Jak se chová vybitý kapacitor v okamžiku změny topologické struktury obvodu?
6. Jak se chová induktor s nulovým počátečním proudem v okamžiku změny topologické struktury obvodu?
7. Proč ve stejnosměrném sériovém RC obvodu dochází po odeznění přechodného jevu k zániku proudu obvodu?

8. Proč se při rozpojení větvě s induktorem objeví na jejich svorkách limitně neomezená hodnota napětí? Dá se tomu zabránit?
9. Jakým zapojením obvodu můžeme modelovat derivační a integrační článek?
10. Jaká musí být hodnota počáteční fáze napětí zdroje, aby nevznikla přechodná složka veličin RC a LR obvodu?

Úloha k řešení 2.2.

Určete průběh proudu obvodu na obr. 2.29 a nakreslete jeho průběh, je-li spínač obvodu periodicky spínán a rozpínán, tak aby nepřesáhla jeho maximální hodnota úroveň proudu I_2 a minimální hodnota úroveň proudu I_1, které obě leží mezi ustálenými hodnotami proudu obvodu.



Obr. 2.29 Periodicky se opakující přechodný děj v LR obvodu, úloha k řešení 2.2

Řešení:

Při sepnutém spínači by ustálená hodnota byla

$$I_{1u} = \frac{U_o}{R_2}$$

a při rozepnutém spínači

$$I_{2u} = \frac{U_o}{R_1 + R_2},$$

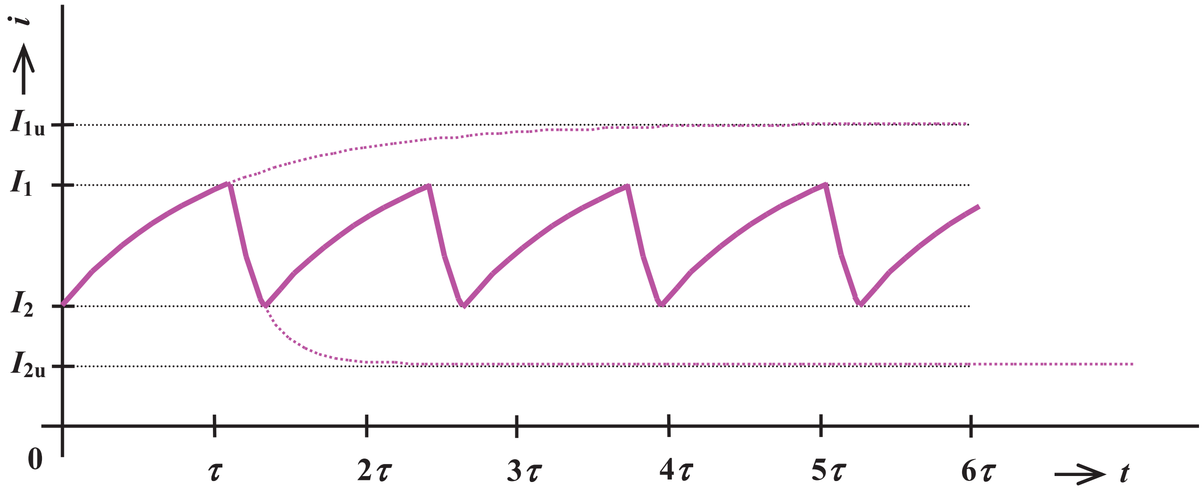
takže v souladu se zadáním platí $I_{1u} > I_1$, $I_{2u} < I_2$ s předpokladem $I_1 > I_2$. Při sepnutém spínači je časová konstanta $\tau_1 = \dfrac{L}{R_2}$ pro proud platí rovnice

$$i = I_{1u}(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}) + I_2 \, e^{-\frac{t}{\tau_1}}$$

a při rozepnutém spínači je časová konstanta $\tau_2 = \dfrac{L}{R_1 + R_2}$ pro proud platí rovnice

$$i = I_{2u}(1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}}) + I_1 \, e^{-\frac{t}{\tau_2}}.$$

Odvozené průběhy proudů jsou zobrazeny na obr. 2.30.



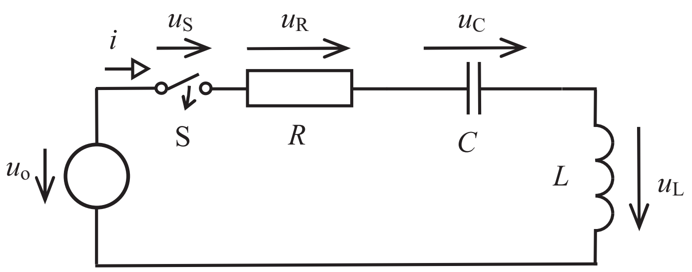
Obr. 2.30 Periodicky se opakující přechodný děj v LR obvodu: okamžité hodnoty proudu obvodu, úloha k řešení 2.2

2.3. Analýza obvodů 2. řádu

Obvod 2.řádu obecně obsahuje rezistory a po jednom z akumulačních prvků, tj. kapacitor a induktor.

❑ RLC obvod

Náhradní schéma sériového RLC obvodu před připojením zdroje napětí u_o v čase $t = 0$ s je na obr. 2.31. Předpokládejme, že kapacitor je obecně nabit na napětí $u_C(0)$ a proud induktoru má hodnotu $i(0)$ na počátku přechodného děje.



Obr. 2.31 Obvodový model přechodného děje v RLC obvodu

Po sepnutí spínače S, kdy $u_S = 0$ V, platí podle 2. Kirchhoffova zákona

$$u_o = u_R + u_C + u_L$$

a po dosazení Ohmova zákona, rovnice kontinuity a Faradayova zákona získáme integrodiferenciální rovnici popisující chování obvodu v přechodném ději

$$R\,i + \frac{1}{C}\int i\,\mathrm{d}t + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = u_o\,,$$

po jejímž derivování dostaneme nehomogenní diferenciální rovnici 2. řádu s hledanou odezvou, proudem

$$L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{C} = \frac{\mathrm{d}u_o}{\mathrm{d}t}$$

nebo po dosazení rovnice kontinuity, nehomogenní rovnici

$$L\,C\,\frac{\mathrm{d}^2 u_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t^2}+R\,C\,\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t}+u_{\mathrm{C}}=u_{\mathrm{o}}$$

s hledanou odezvou, napětím kapacitoru. Pro popis obvodu si zvolme matematický model obvodu, daný v pořadí první, nehomogenní diferenciální rovnicí 2. řádu s hledanou odezvou, proudem obvodu, který je i stavovou veličinou induktoru obvodu.

Obecná homogenní rovnice, která popisuje přechodný děj proudu obvodu, má nulovou pravou stranu

$$L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2}+R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{i}{C}=0\,.$$

Její obecné řešení až na integrační konstanty určíme pomocí kořenů charakteristické rovnice

$$L\,\lambda^2+R\,\lambda^1+\frac{1}{C}\lambda^0=L\,\lambda^2+R\,\lambda+\frac{1}{C}=0\,.$$

Kořeny kvadratické rovnice jsou

$$\lambda_{1,2}=\frac{-R\pm\sqrt{R^2-4\dfrac{L}{C}}}{2L}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega_{\mathrm{o}}^2}\,,$$

kde α je konstanta útlumu a ω_0 rezonanční úhlový kmitočet, vedený cizím zdrojem. Podle hodnot obvodových parametrů mohou nastat tyto případy kořenů:

1) reálné $\lambda_{1,2}=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega_{\mathrm{o}}^2}$ pro $\alpha>\omega_{\mathrm{o}}$,

2) dvojnásobný reálný kořen $\lambda_{1,2}=-\alpha$ pro $\alpha=\omega_{\mathrm{o}}$,

3) komplexně sdružené kořeny

$$\lambda_{1,2}=-\alpha\pm\sqrt{-\left(\omega_{\mathrm{o}}^2-\alpha^2\right)}=-\alpha\pm\sqrt{-1}\sqrt{\left(\omega_{\mathrm{o}}^2-\alpha^2\right)}=-\alpha\pm\mathrm{j}\sqrt{\omega_{\mathrm{o}}^2-\alpha^2}=-\alpha\pm\mathrm{j}\omega_{\mathrm{d}}\ \text{pro}\ \alpha<\omega_{\mathrm{o}}\,.$$

Člen $\omega_{\mathrm{d}}=\sqrt{\omega_{\mathrm{o}}^2-\alpha^2}$ nazýváme vlastním úhlovým kmitočtem obvodu, který je buzený změnou jeho topologické struktury, který je při nenulovém tlumení vždy menší než rezonanční úhlový kmitočet obvodu. Poznamenejme, že úhlové kmitočty vlastních a rezonančních kmitů jsou totožné jen při nulovém tlumení obvodu, tedy v LC obvodu.

Obecné řešení homogenní rovnice pro kořeny 1) a 3) má tvar

$$i_{\mathrm{h}}=C_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t}+C_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$$

a pro dvojnásobný kořen

$$i_{\mathrm{h}}=\left(C_1+C_2\,t\right)\mathrm{e}^{\lambda_{1,2} t}\,.$$

Hodnoty integračních konstant určíme z matematických počátečních podmínek $i(0)$, $\dfrac{\mathrm{d}i(0)}{\mathrm{d}t}$ a úplného řešení nehomogenní rovnice RLC obvodu. První podmínka je i podmínkou fyzikální, druhou určíme z obou fyzikálních počátečních podmínek pro jednotlivé případy buzení, viz postup níže.

Analýzou řešení s dvojnásobným kořenem se nebudeme zabývat, protože ho v praxi nelze realizovat, s ohledem na závislost technických realizací obvodových prvků na parametrech okolí, tedy na nestabilitu jejich parametrů. Řekněme si jen, že mu odpovídá nejkratší doba trvání přechodného jevu, tj., že řešení se nejrychleji blíží ustálené hodnotě proudu.

Partikulární řešení nehomogenní rovnice, popisující chování obvodu v ustáleném stavu, závisí na tvaru budícího napětí u_0. Omezme se na tyto dva případy

a) buzení stejnosměrným zdrojem, $u_0 = U$,

b) buzení harmonickým zdrojem, $u_0 = U_m \sin(\omega t + \psi_U)$.

ad a) V případě připojení RLC obvodu k stejnosměrnému zdroji je partikulární řešení nulové, jelikož na pravé straně nehomogenní rovnice vystupuje derivace stejnosměrného napětí U. Obecné řešení je i řešením úplným, takže platí $i = i_h$ a hodnoty integračních konstant určíme z matematických počátečních podmínek $i(0)$, $\dfrac{di(0)}{dt}$.

Pro integrační konstanty C_1 a C_2 platí následující soustava rovnic

$$i(0) = \lim_{t\to 0} C_1\, e^{\lambda_1 t} + C_2\, e^{\lambda_2 t} = C_1 + C_2 \,,$$

$$i'(0) = \frac{di(0)}{dt} = \lim_{t\to 0} C_1\, \lambda_1\, e^{\lambda_1 t} + C_2\, \lambda_2\, e^{\lambda_2 t} = C_1\, \lambda_1 + C_2\, \lambda_2 \,,$$

ze které např. Cramerovým pravidlem stanovíme konstanty

$$C_1 = \frac{i(0)\,\lambda_2 - i'(0)}{\lambda_2 - \lambda_1} \,,$$

$$C_2 = \frac{i'(0) - \lambda_1\, i(0)}{\lambda_2 - \lambda_1} = -\frac{\lambda_1\, i(0) - i'(0)}{\lambda_2 - \lambda_1} \,,$$

kde hodnotu $i'(0)$ určíme z výchozí rovnice obvodu

$$\lim_{t\to 0}\left(R\, i + u_C + L\frac{di}{dt} - U \right) = R\, i(0) + u_C(0) + L i'(0) - U = 0 \,,$$

takže pro derivaci proudu v počátku platí

$$i'(0) = \frac{U - R\, i(0) - u_C(0)}{L} \,.$$

Pro zpřehlednění zápisu funkcí obvodových veličin RLC obvodu využijme vztahy pro rozdíl kořenů charakteristické rovnice se dvěma reálnými kořeny

$$\lambda_2 - \lambda_1 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2} - \left(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2} \right) = -2\sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2}$$

a jejich součin

$$\lambda_2\, \lambda_1 = \left(-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2} \right) \cdot \left(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2} \right) = \omega_o^2 \,,$$

které po zavedení časových konstant obvodu

$$\tau_1 = -\frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2}} \,, \qquad \tau_2 = -\frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2}} \,,$$

přejdou do tvaru

$$\frac{1}{2\sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2}} = \frac{\tau_1\, \tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \,, \qquad \tau_1\, \tau_2 = \frac{1}{\omega_o^2} = L\, C \qquad \text{resp.} \qquad \frac{\omega_o^2}{2\sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2}} = \frac{1}{\tau_1 - \tau_2} \,.$$

Řešení diferenciální rovnice pro dva reálné kořeny má tvar

$$i=-\frac{1}{2\sqrt{\alpha^2-\omega_o^2}}\left[\left(\frac{1}{\tau_1}i(0)-\frac{U-u_C(0)}{L}\right)e^{-\frac{t}{\tau_1}}-\left(\frac{1}{\tau_2}i(0)-\frac{U-u_C(0)}{L}\right)e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right]=$$

$$=-\frac{\tau_1\,\tau_2}{\tau_1-\tau_2}\left[\left(\frac{1}{\tau_1}i(0)-\frac{U-u_C(0)}{L}\right)e^{-\frac{t}{\tau_1}}-\left(\frac{1}{\tau_2}i(0)-\frac{U-u_C(0)}{L}\right)e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right]$$

a pro komplexně sdružené kořeny v podobě komplexní funkce reálné proměnné t

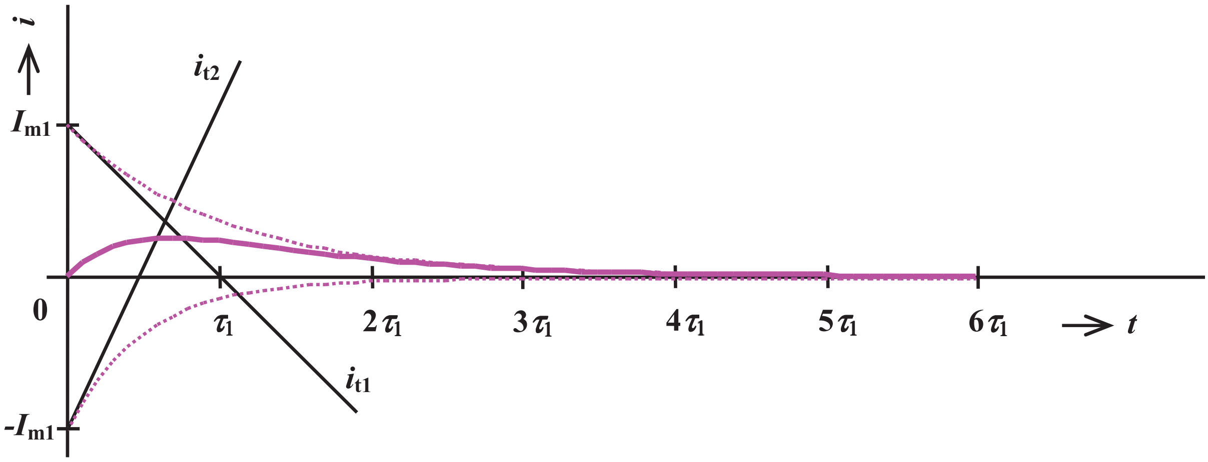
$$i=-\frac{1}{2\,\omega_d\,j}\left[\left((\alpha-j\omega_d)i(0)-\frac{U-u_C(0)}{L}\right)e^{-\alpha t}e^{j\omega_d t}-\left((\alpha+j\omega_d)i(0)-\frac{U-u_C(0)}{L}\right)e^{-\alpha t}e^{-j\omega_d t}\right].$$

Jsou-li počáteční podmínky stavových veličin nulové, tj. $i(0)=0\,\mathrm{A}$ a $u_C(0)=0\,\mathrm{V}$, zjednoduší se obě proudové odezvy obvodu, zobrazené na obr. 2.32 a 2.33, do tvaru

$$i=\frac{U}{L}\frac{\tau_1\,\tau_2}{\tau_1-\tau_2}\left[e^{-\frac{t}{\tau_1}}-e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right]=I_{m1}\left[e^{-\frac{t}{\tau_1}}-e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right]$$

a

$$i=\frac{U}{2\,L\,\omega_d\,j}e^{-\alpha t}\left[e^{j\omega_d t}-e^{-j\omega_d t}\right]=\frac{U}{L\,\omega_d}e^{-\alpha t}\frac{e^{j\omega_d t}-e^{-j\omega_d t}}{2\,j}=\frac{U}{L\,\omega_d}e^{-\alpha t}\sin(\omega_d\,t)=I_{m3}\,e^{-\alpha t}\sin(\omega_d\,t).$$

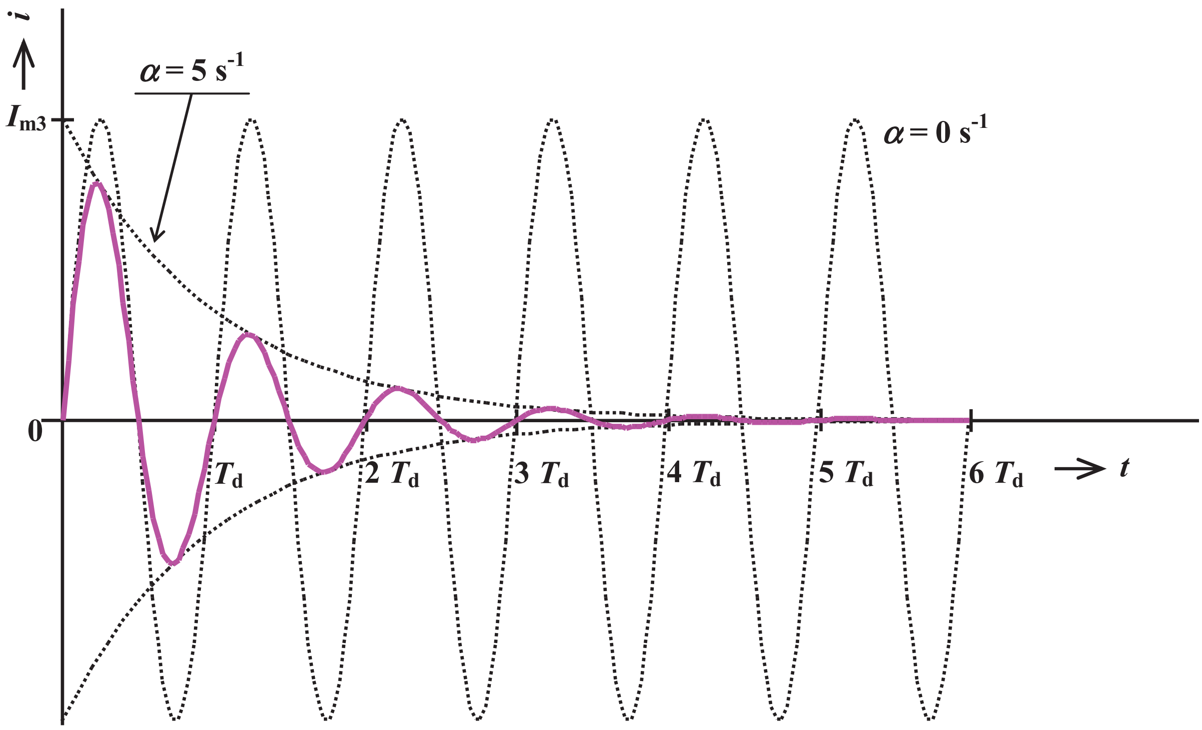


Obr. 2.32 Přechodný děj RLC obvodu, připojení stejnosměrného zdroje napětí, nulové počáteční podmínky: aperiodická odezva proudu

Okamžité hodnoty napětí RLC obvodu získáme dosazením hledaného proudu do Ohmova zákona, rovnice kontinuity a Faradayova zákona. Definiční vztahy a jejich grafy pro reálné kořeny charakteristické rovnice, zobrazené na obr. 2.34, jsou následující

$$u_R=R\,i=R\,I_{m1}\left[e^{-\frac{t}{\tau_1}}-e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right]=R\frac{U}{L}\frac{\tau_1\,\tau_2}{\tau_1-\tau_2}\left[e^{-\frac{t}{\tau_1}}-e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right]=2U\alpha\left[\frac{\tau_1\,\tau_2}{\tau_1-\tau_2}e^{-\frac{t}{\tau_1}}-\frac{\tau_1\,\tau_2}{\tau_1-\tau_2}e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right],$$

$$u_C=\frac{1}{C}\int_0^t i\,d\xi=\frac{1}{C}\int_0^t I_{m1}\left[e^{-\frac{\xi}{\tau_1}}-e^{-\frac{\xi}{\tau_2}}\right]d\xi=\frac{I_{m1}}{C}\left[-\tau_1\,e^{-\frac{\xi}{\tau_1}}+\tau_2\,e^{-\frac{\xi}{\tau_2}}\right]_0^t=$$



Obr. 2.33 Přechodný děj RLC obvodu, připojení stejnosměrného zdroje napětí, nulové počáteční podmínky: kvaziperiodická odezva proudu

$$=\frac{\frac{U}{L}\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1-\tau_2}}{C}\left[-\tau_1\,e^{-\frac{t}{\tau_1}}+\tau_2\,e^{-\frac{t}{\tau_2}}+\tau_1-\tau_2\right]=\frac{U}{LC}\frac{LC}{\tau_1-\tau_2}\cdot(\tau_1-\tau_2)\cdot$$

$$\cdot\left[-\frac{\tau_1}{\tau_1-\tau_2}e^{-\frac{t}{\tau_1}}+\frac{\tau_2}{\tau_1-\tau_2}e^{-\frac{t}{\tau_2}}+1\right]=U\left[1+\frac{\tau_2}{\tau_1-\tau_2}e^{-\frac{t}{\tau_2}}-\frac{\tau_1}{\tau_1-\tau_2}e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right],$$

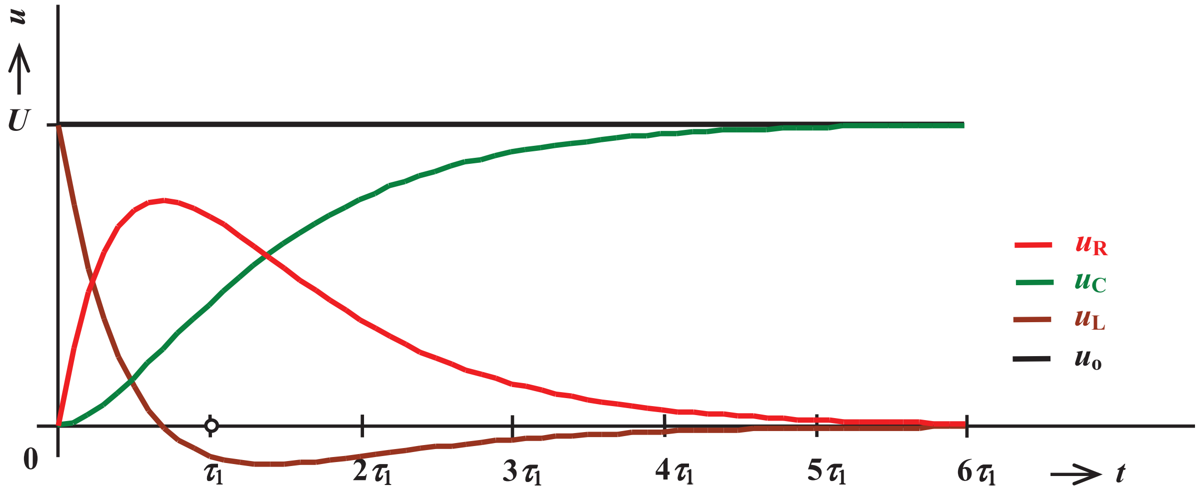
$$u_L=L\frac{di}{dt}=L\frac{d\left(I_{m1}\left[e^{-\frac{t}{\tau_1}}-e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right]\right)}{dt}=L\,I_{m1}\left[-\frac{e^{-\frac{t}{\tau_1}}}{\tau_1}+\frac{e^{-\frac{t}{\tau_2}}}{\tau_2}\right]=L\frac{U}{L}\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1-\tau_2}\left[-\frac{e^{-\frac{t}{\tau_1}}}{\tau_1}+\frac{e^{-\frac{t}{\tau_2}}}{\tau_2}\right]=$$

$$=U\left[\frac{\tau_1}{\tau_1-\tau_2}e^{-\frac{t}{\tau_2}}-\frac{\tau_2}{\tau_1-\tau_2}e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right]$$

a pro komplexně sdružené kořeny

$$u_R=Ri=RI_{m3}\,e^{-\alpha t}\sin(\omega_d t)=R\frac{U}{\omega_d L}\frac{2}{2}e^{-\alpha t}\sin(\omega_d t)=2U\frac{\alpha}{\omega_d}e^{-\alpha t}\sin(\omega_d t),$$

$$u_C=\frac{1}{C}\int_0^t i\,d\xi=\frac{1}{C}\int_0^t I_{m3}\,e^{-\alpha\xi}\sin(\omega_d\xi)\,d\xi=\frac{\frac{U}{\omega_d L}}{C}\left[-\frac{e^{-\alpha\xi}\left(\alpha\sin(\omega_d\xi)+\omega_d\cos(\omega_d\xi)\right)}{\alpha^2+\omega_d^2}\right]_0^t=$$



Obr. 2.34 Přechodný děj RLC obvodu, připojení stejnosměrného zdroje napětí, nulové počáteční podmínky: okamžité hodnoty napětí rezistoru, kapacitoru, induktoru a zdroje, aperiodické odezvy

$$= \frac{U}{\omega_d LC}\left[-\frac{e^{-\alpha\xi}\left(\alpha\sin(\omega_d\,\xi)+\omega_d\cos(\omega_d\,\xi)\right)}{\alpha^2+\omega_d^2}-\left(-\frac{\omega_d}{\alpha^2+\omega_d^2}\right)\right]=$$

$$=U\frac{\omega_o^2}{\omega_d}\frac{\omega_d}{\alpha^2+\omega_d^2}\left[1-e^{-\alpha t}\left(\frac{\alpha}{\omega_d}\sin(\omega_d\,t)+\cos(\omega_d\,t)\right)\right]=U\frac{\omega_o^2}{\alpha^2+\omega_d^2}\left[1-e^{-\alpha t}\left(\frac{\alpha}{\omega_d}\sin(\omega_d\,t)+\cos(\omega_d\,t)\right)\right],$$

$$u_L = L\frac{di}{dt}=L\frac{d\left(I_{m3}\,e^{-\alpha t}\sin(\omega_d\,t)\right)}{dt}=L\,I_{m3}\left[-\alpha\,e^{-\alpha t}\sin(\omega_d\,t)+e^{-\alpha t}\omega_d\cos(\omega_d\,t)\right]=$$

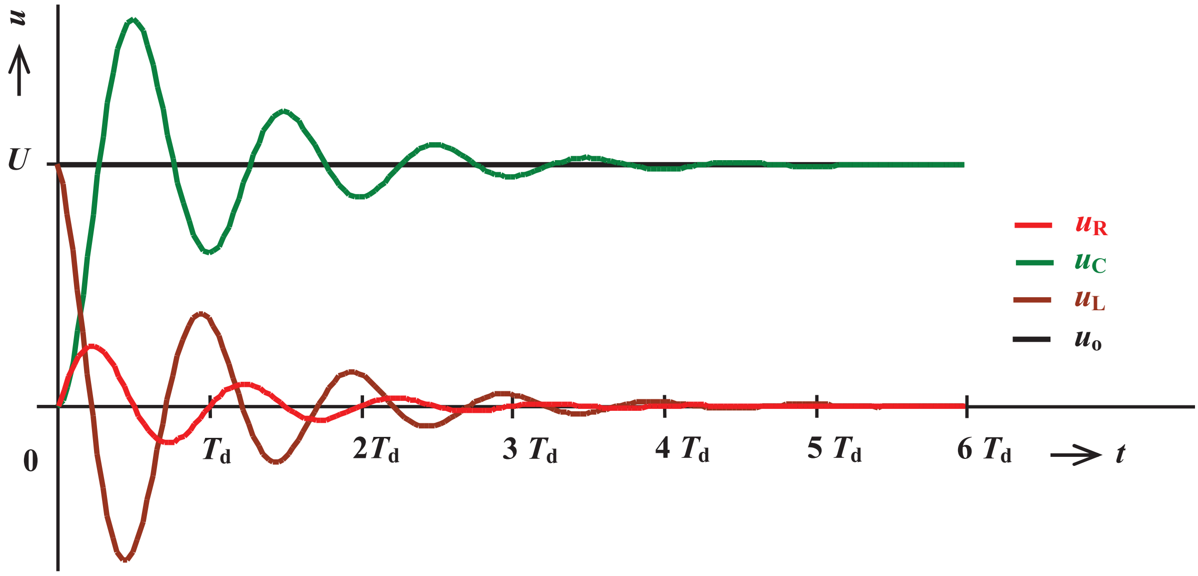
$$=L\frac{U}{\omega_d L}\omega_d\,e^{-\alpha t}\left[-\frac{\alpha}{\omega_d}\sin(\omega_d\,t)+\cos(\omega_d\,t)\right]=U\,e^{-\alpha t}\left[-\frac{\alpha}{\omega_d}\sin(\omega_d\,t)+\cos(\omega_d\,t)\right],$$

jejichž grafy jsou zobrazeny na obr. 2.35.

Grafy obvodových veličin pro dva různé reálné kořeny jsou aperiodické a pro kořeny komplexně sdružené, kvaziperiodické. Hodnota parametrů RLC obvodu rozhoduje o charakteru přechodného děje. Z meze stability obvodu můžeme po dosazení do rovnosti $\omega_o = \alpha$ odvodit hodnotu tzv. kritického odporu obvodu

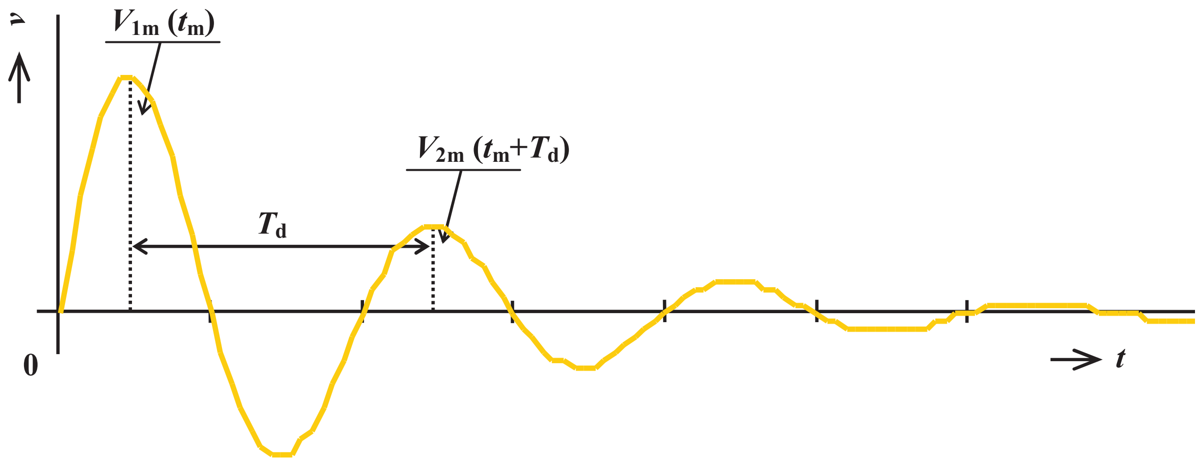
$$R_k = 2\sqrt{\frac{L}{C}},$$

který je roven dvojnásobku charakteristického odporu RLC obvodu. Je-li hodnota kritického odporu větší než hodnota odporu obvodu tj. $R_k > R$, je přechodný děj tlumený a kmitavý (kvaziperiodický), je-li menší, tj. $R_k < R$, je nekmitavý (aperiodický). Jinými slovy, aby byla odezva obvodu aperiodická, musí být tedy odpor obvodu větší než kritický. Zvětšíme-li tedy odpor obvodu nad hodnotu kritického odporu, nevzniknou v obvodu vlastní kmity.



Obr. 2.35 Přechodný děj RLC obvodu, připojení stejnosměrného zdroje napětí, nulové počáteční podmínky: okamžité hodnoty napětí rezistoru, kapacitoru, induktoru a zdroje, kvaziperiodické odezvy

Míru tlumení kvaziperiodického případu RLC obvodu můžeme stanovit z poměru dvou po sobě následujících amplitud stejné polarity obvodové veličiny, vztažených vůči její ustálené hodnotě, viz průběh měřeného signálu v na obr. 2.36 zastupujícího napětí nebo proud.



Obr. 2.36 Kvaziperiodická odezva signálu

Poměr nazýváme dekrement úhlu

$$\varDelta = \frac{V_{1m}(t_m)}{V_{2m}(t_m + T_d)} = \frac{V_m\, e^{-\alpha t} \sin(\omega_d\, t_m)}{V_m\, e^{-\alpha (t_m + T_d)} \sin(\omega_d\, (t_m + T_d))} = \frac{e^{-\alpha t} \sin\left(\frac{2\pi}{T_d} t_m\right)}{e^{-\alpha t_m} e^{-\alpha T_d} \sin\left(\frac{2\pi}{T_d} (t_m + T_d)\right)} = e^{\alpha T_d},$$

který po logaritmování označujeme jako logaritmický dekrement úhlu

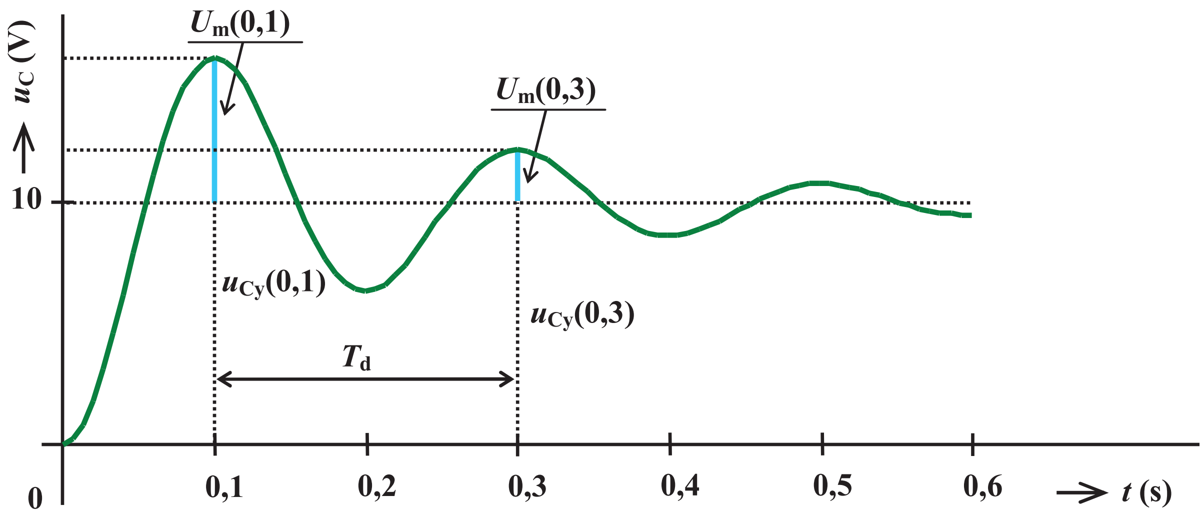
$$\delta = \ln \varDelta = \ln(e^{\alpha T_d}) = \alpha\, T_d,$$

pomocí kterého při známé periodě vlastních kmitů T_d určíme činitel tlumení

$$\alpha = \frac{\delta}{T_d}.$$

Příklad 2.5.

Určete hodnotu činitele tlumení obvodu ze známého časového průběhu (odezvy) napětí kapacitoru na obr. 2.37.



Obr. 2.37 Kvaziperiodická odezva napětí kapacitoru RLC obvodu, připojení stejnosměrného zdroje napětí, nulové počáteční podmínky, příklad 2.5

♦

Nejprve odměříme délky úseček vztyčených kolmo na x-osu v časech 0,1 s a 0,3 s, které odpovídají 1. a 2. kladné amplitudě časového průběhu napětí kapacitoru. Ty mají v pořadí hodnoty 5,1 cm a 3,9 cm. Perioda vlastních kmitů je $T_d = 0{,}2\,\mathrm{s}$. Měřítko napětí je dáno poměrem $m_U = \frac{10\,\mathrm{V}}{3{,}2\,\mathrm{cm}} = 3{,}125\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{cm}}$.

Dekrement úhlu určíme dosazením odměřených hodnot do jeho definice

$$\Delta = \frac{U_m(0{,}1)}{U_m(0{,}1+0{,}2)} = \frac{m_U u_{Cy}(0{,}1) - 10\,\mathrm{V}}{m_U u_{Cy}(0{,}1+0{,}2) - 10\,\mathrm{V}} = \frac{3{,}125\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{cm}}\,5{,}1\,\mathrm{cm} - 10\,\mathrm{V}}{3{,}125\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{cm}}\,3{,}9\,\mathrm{cm} - 10\,\mathrm{V}} = \frac{5{,}9375}{2{,}1875} \doteq 2{,}714.$$

Hledaný činitel útlumu má hodnotu

$$\alpha = \frac{\ln \Delta}{T_d} = \frac{\ln 2{,}714}{0{,}2} \doteq \frac{0{,}998}{0{,}2} \doteq 4{,}99\,\mathrm{s}^{-1}.$$

ad b) Po připojení obvodu k harmonickému zdroji $u_0 = U_m \sin(\omega t + \psi_U)$ budou po odeznění přechodného děje ustálené hodnoty harmonické. Ustálenou okamžitou hodnotu proudu RLC obvodu, která je partikulárním řešením nehomogenní rovnice, určíme transformací řešení do komplexní roviny, kde časový průběh napětí zdroje reprezentuje fázor $\hat{U}_o = U_m/\sqrt{2}\, e^{j\psi U} = U\, e^{j\psi U}$ a parametry obvodu impedanci $\hat{Z} = R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} = R + j(X_L - X_C)$. Fázor proudu určíme ze vztahu

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}_\mathrm{o}}{\hat{Z}} = \frac{\hat{U}_\mathrm{o}}{R + \mathrm{j}\left(X_\mathrm{L} - X_\mathrm{C}\right)} = \frac{\hat{U}_\mathrm{o}}{R}\,\frac{1}{1 + \mathrm{j}\dfrac{X_\mathrm{L} - X_\mathrm{C}}{R}} = \frac{U\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_\mathrm{U}}}{R}\,\frac{1}{\sqrt{1^2 + \left(\dfrac{X_\mathrm{L} - X_\mathrm{C}}{R}\right)^2}\;\mathrm{e}^{\mathrm{j}\arctan\left(\frac{X_\mathrm{L} - X_\mathrm{C}}{R}\right)}} =$$

$$= \frac{U}{R}\,\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{X_\mathrm{L} - X_\mathrm{C}}{R}\right)^2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\psi_\mathrm{U} - \arctan\left(\frac{X_\mathrm{L} - X_\mathrm{C}}{R}\right)\right)} = \frac{U}{R}\,\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\omega^2 LC - 1}{\omega RC}\right)^2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\psi_\mathrm{U} - \arctan\left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega RC}\right)\right)} =$$

$$= \frac{U}{R}\,\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\left(\dfrac{\omega}{\omega_\mathrm{o}}\right)^2 - 1}{\tau\,\omega}\right)^2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\psi_\mathrm{U} - \arctan\left(\frac{\left(\frac{\omega}{\omega_\mathrm{o}}\right)^2 - 1}{\tau\,\omega}\right)\right)} = \frac{U}{R}\,\frac{\tau\,\omega}{\sqrt{(\tau\,\omega)^2 + \left(\left(\dfrac{\omega}{\omega_\mathrm{o}}\right)^2 - 1\right)^2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\psi_\mathrm{U} - \varphi_Z\right)}.$$

Po vynásobení tohoto fázoru proudu komplexní periodickou funkcí $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$, získáme komplexní, časovou funkci, komplexor proudu ve tvaru $\hat{I}(t) = \hat{I}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ a zpětnou transformací na základě Eulerova vztahu, volbou imaginární části tohoto komplexoru, získáme partikulární řešení nehomogenní diferenciální rovnice 2. řádu RLC obvodu

$$i_\mathrm{p} = \sqrt{2}\,\mathrm{Im}\left\{\hat{I}(t)\right\} = \sqrt{2}\,\mathrm{Im}\left\{\hat{I}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\} = \sqrt{2}\,\mathrm{Im}\left\{\frac{U}{R}\,\frac{\tau\,\omega}{\sqrt{(\tau\,\omega)^2 + \left(\left(\dfrac{\omega}{\omega_\mathrm{o}}\right)^2 - 1\right)^2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\psi_\mathrm{U} - \varphi_Z\right)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\} =$$

$$= \sqrt{2}\,\mathrm{Im}\left\{\frac{U}{R}\,\frac{\tau\,\omega}{\sqrt{(\tau\,\omega)^2 + \left(\left(\dfrac{\omega}{\omega_\mathrm{o}}\right)^2 - 1\right)^2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\omega t + \psi_\mathrm{U} - \varphi_Z\right)}\right\} =$$

$$= \frac{U_\mathrm{m}}{R}\,\frac{\tau\,\omega}{\sqrt{(\tau\,\omega)^2 + \left(\left(\dfrac{\omega}{\omega_\mathrm{o}}\right)^2 - 1\right)^2}}\,\sin\left(\omega t + \psi_\mathrm{U} - \varphi_Z\right) = I_\mathrm{m}\,\sin\left(\omega t + \psi_\mathrm{U} - \varphi_Z\right).$$

Hodnoty integračních konstant C_1 a C_2 určíme z úplného řešení nehomogenní rovnice RLC obvodu a matematických počátečních podmínek $i(0)$, $\dfrac{\mathrm{d}i(0)}{\mathrm{d}t}$ z následující soustavy rovnic

$$i(0)=\lim_{t\to 0}\left(i_\mathrm{h}+i_\mathrm{p}\right)=\lim_{t\to 0}\left(C_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t}+C_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t}+I_\mathrm{m}\sin\left(\omega t+\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z\right)\right)=C_1+C_2+I_\mathrm{m}\sin\left(\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z\right),$$

$$\begin{aligned} i'(0)&=\lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{d}\left(i_\mathrm{h}+i_\mathrm{p}\right)}{\mathrm{d}t}=\lim_{t\to 0}\left(C_1\,\lambda_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t}+C_2\,\lambda_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t}+\frac{\mathrm{d}\left(I_\mathrm{m}\sin\left(\omega t+\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z\right)\right)}{\mathrm{d}t}\right)=\\ &=C_1\,\lambda_1+C_2\,\lambda_2+\omega I_\mathrm{m}\cos\left(\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z\right),\end{aligned}$$

ze které např. Cramerovým pravidlem stanovíme konstanty

$$\begin{aligned} C_1&=\frac{\lambda_2\left(i(0)-I_\mathrm{m}\sin\left(\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z\right)\right)-i'(0)+\omega I_\mathrm{m}\cos\left(\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z\right)}{\lambda_2-\lambda_1}=\\ &=\frac{\lambda_2\,i(0)-i'(0)}{\lambda_2-\lambda_1}-I_\mathrm{m}\,\frac{\lambda_2\sin\left(\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z\right)-\omega\cos\left(\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z\right)}{\lambda_2-\lambda_1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2&=\frac{i'(0)-\omega I_\mathrm{m}\cos\left(\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z\right)-\lambda_1\left(i(0)-I_\mathrm{m}\sin\left(\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z\right)\right)}{\lambda_2-\lambda_1}=\\ &=-\frac{\lambda_1\left(i(0)-I_\mathrm{m}\sin\left(\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z\right)\right)-i'(0)+\omega I_\mathrm{m}\cos\left(\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z\right)}{\lambda_2-\lambda_1}=\\ &=-\frac{\lambda_1\,i(0)-i'(0)}{\lambda_2-\lambda_1}+I_\mathrm{m}\,\frac{\lambda_1\sin\left(\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z\right)-\omega\cos\left(\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z\right)}{\lambda_2-\lambda_1},\end{aligned}$$

kde hodnotu $i'(0)$ určíme z výchozí rovnice obvodu

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to 0}\left(R\,i+u_\mathrm{C}+L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}-u_\mathrm{o}\right)=\lim_{t\to 0}\left(R\,i+u_\mathrm{C}+L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}-U_\mathrm{m}\sin(\omega t+\psi_\mathrm{U})\right)=\\ &=R\,i(0)+u_\mathrm{C}(0)+L i'(0)-U_\mathrm{m}\sin(\psi_\mathrm{U})=0,\end{aligned}$$

takže pro derivaci proudu v počátku platí

$$i'(0)=\frac{U_\mathrm{m}\sin(\psi_\mathrm{U})-R\,i(0)-u_\mathrm{C}(0)}{L}.$$

Po dosazení konstant C_1 a C_2 do řešení homogenní rovnice můžeme toto řešení rozepsat na dvě části

$$\begin{aligned} i_\mathrm{h}&=C_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t}+C_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t}=\frac{\lambda_2\,i(0)-i'(0)}{\lambda_2-\lambda_1}\mathrm{e}^{\lambda_1 t}-I_\mathrm{m}\frac{\lambda_2\sin\left(\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z\right)-\omega\cos\left(\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z\right)}{\lambda_2-\lambda_1}\mathrm{e}^{\lambda_1 t}-\\ &-\frac{\lambda_1\,i(0)-i'(0)}{\lambda_2-\lambda_1}\mathrm{e}^{\lambda_2 t}+I_\mathrm{m}\frac{\lambda_1\sin\left(\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z\right)-\omega\cos\left(\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z\right)}{\lambda_2-\lambda_1}\mathrm{e}^{\lambda_2 t}=\\ &=\frac{\lambda_2\,i(0)-i'(0)}{\lambda_2-\lambda_1}\mathrm{e}^{\lambda_1 t}-\frac{\lambda_1\,i(0)-i'(0)}{\lambda_2-\lambda_1}\mathrm{e}^{\lambda_2 t}-\frac{I_\mathrm{m}}{\lambda_2-\lambda_1}\Big[\left(\lambda_2\sin\left(\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z\right)-\omega\cos\left(\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z\right)\right)\mathrm{e}^{\lambda_1 t}-\\ &-\left(\lambda_1\sin\left(\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z\right)-\omega\cos\left(\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z\right)\right)\mathrm{e}^{\lambda_2 t}\Big],\end{aligned}$$

kde první dva členy jsou shodné s řešením odvozeným pro stejnosměrné buzení RLC obvodu.

Dosazením dvou reálných kořenů získáme řešení homogenní rovnice

$$i_\mathrm{h} = -\frac{\tau_1\,\tau_2}{\tau_1-\tau_2}\left[\left(\frac{1}{\tau_1}\,i(0) - \frac{U_\mathrm{m}\sin(\psi_\mathrm{U}) - u_\mathrm{C}(0)}{L}\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_1}} - \left(\frac{1}{\tau_2}\,i(0) - \frac{U_\mathrm{m}\sin(\psi_\mathrm{U}) - u_\mathrm{C}(0)}{L}\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_2}}\right] -$$

$$- I_\mathrm{m}\,\frac{\tau_1\,\tau_2}{\tau_1-\tau_2}\left[\left(\frac{1}{\tau_2}\sin(\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z) + \omega\cos(\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z)\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_1}} - \left(\frac{1}{\tau_1}\sin(\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z) + \omega\cos(\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z)\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_2}}\right]$$

a pro komplexně sdružené kořeny řešení v podobě komplexní funkce reálné proměnné t

$$\begin{aligned}
i_\mathrm{h} = &-\frac{1}{2\,\omega_\mathrm{d}\,\mathrm{j}}\left[\left((\alpha - \mathrm{j}\omega_\mathrm{d})\,i(0) - \frac{U_\mathrm{m}\sin(\psi_\mathrm{U}) - u_\mathrm{C}(0)}{L}\right)\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_\mathrm{d} t} - \right.\\
&\left. - \left((\alpha + \mathrm{j}\omega_\mathrm{d})\,i(0) - \frac{U_\mathrm{m}\sin(\psi_\mathrm{U}) - u_\mathrm{C}(0)}{L}\right)\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_\mathrm{d} t}\right] -\\
&-\frac{I_\mathrm{m}}{2\,\omega_\mathrm{d}\,\mathrm{j}}\Big[\big((\alpha + \mathrm{j}\omega_\mathrm{d})\sin(\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z) + \omega\cos(\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z)\big)\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_\mathrm{d} t} - \\
&- \big((\alpha - \mathrm{j}\omega_\mathrm{d})\sin(\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z) + \omega\cos(\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z)\big)\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_\mathrm{d} t}\Big].
\end{aligned}$$

Jsou-li počáteční podmínky stavových veličin nulové, tj. $i(0) = 0\,\mathrm{A}$ a $u_\mathrm{C}(0) = 0\,\mathrm{V}$, zjednoduší se obě řešení homogenní rovnice na funkce

$$\begin{aligned}
i_\mathrm{h} = &\frac{U_\mathrm{m}\sin(\psi_\mathrm{U})}{L}\,\frac{\tau_1\,\tau_2}{\tau_1-\tau_2}\left[\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_1}} - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_2}}\right] - I_\mathrm{m}\,\frac{\tau_1\,\tau_2}{\tau_1-\tau_2}\left[\left(\frac{1}{\tau_2}\sin(\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z) + \omega\cos(\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z)\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_1}} - \right.\\
&\left. -\left(\frac{1}{\tau_1}\sin(\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z) + \omega\cos(\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z)\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_2}}\right] = \frac{U_\mathrm{m}\sin(\psi_\mathrm{U})}{L}\,\frac{\tau_1\,\tau_2}{\tau_1-\tau_2}\left[\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_1}} - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_2}}\right] -\\
&-\frac{I_\mathrm{m}}{\tau_1-\tau_2}\left[\left(\tau_1\sin(\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z) + \frac{\omega}{\omega_\mathrm{o}^2}\cos(\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z)\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_1}} - \left(\tau_2\sin(\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z) + \frac{\omega}{\omega_\mathrm{o}^2}\cos(\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z)\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_2}}\right]
\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}
i_\mathrm{h} = &\frac{U_\mathrm{m}\sin(\psi_\mathrm{U})}{2\,L\,\omega_\mathrm{d}\,\mathrm{j}}\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_\mathrm{d} t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_\mathrm{d} t}\right] - \frac{I_\mathrm{m}}{2\,\omega_\mathrm{d}\,\mathrm{j}}\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\Big[\big((\alpha + \mathrm{j}\omega_\mathrm{d})\sin(\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z) + \omega\cos(\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z)\big)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_\mathrm{d} t} -\\
&-\big((\alpha - \mathrm{j}\omega_\mathrm{d})\sin(\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z) + \omega\cos(\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z)\big)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_\mathrm{d} t}\Big] = \frac{U_\mathrm{m}\sin(\psi_\mathrm{U})}{L\,\omega_\mathrm{d}}\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_\mathrm{d} t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_\mathrm{d} t}}{2\,\mathrm{j}} - \frac{I_\mathrm{m}}{\omega_\mathrm{d}}\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\cdot\\
&\cdot\left[\omega\cos(\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_\mathrm{d} t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_\mathrm{d} t}}{2\mathrm{j}} + \alpha\sin(\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_\mathrm{d} t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_\mathrm{d} t}}{2\mathrm{j}} + \mathrm{j}\,\omega_\mathrm{d}\sin(\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_\mathrm{d} t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_\mathrm{d} t}}{2\mathrm{j}}\right] =\\
&= \frac{U_\mathrm{m}\sin(\psi_\mathrm{U})}{L\,\omega_\mathrm{d}}\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin(\omega_\mathrm{d}\,t) -\\
&- I_\mathrm{m}\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\left[\frac{\omega}{\omega_\mathrm{d}}\cos(\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z)\sin(\omega_\mathrm{d}\,t) + \frac{\alpha}{\omega_\mathrm{d}}\sin(\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z)\sin(\omega_\mathrm{d}\,t) + \sin(\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z)\cos(\omega_\mathrm{d}\,t)\right] =
\end{aligned}$$

$$= \frac{U_{\mathrm{m}} \sin(\psi_{\mathrm{U}})}{L\,\omega_{\mathrm{d}}} \mathrm{e}^{-\alpha t} \sin(\omega_{\mathrm{d}}\, t) -$$

$$- I_{\mathrm{m}}\, \mathrm{e}^{-\alpha t} \left[\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{d}}} \cos(\psi_{\mathrm{U}} - \varphi_Z) + \frac{\alpha}{\omega_{\mathrm{d}}} \sin(\psi_{\mathrm{U}} - \varphi_Z) \right) \sin(\omega_{\mathrm{d}}\, t) + \sin(\psi_{\mathrm{U}} - \varphi_Z) \cos(\omega_{\mathrm{d}}\, t) \right].$$

Úplné řešení má pro dva reálné kořeny tvar

$$i = i_{\mathrm{h}} + i_{\mathrm{p}} = \frac{U_{\mathrm{m}} \sin(\psi_{\mathrm{U}})}{L} \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \left[\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_1}} - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_2}} \right] - \frac{I_{\mathrm{m}}}{\tau_1 - \tau_2} \left[\left(\tau_1 \sin(\psi_{\mathrm{U}} - \varphi_Z) + \frac{\omega}{\omega_{\mathrm{o}}^2} \cos(\psi_{\mathrm{U}} - \varphi_Z) \right) \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_1}} - \right.$$

$$\left. - \left(\tau_2 \sin(\psi_{\mathrm{U}} - \varphi_Z) + \frac{\omega}{\omega_{\mathrm{o}}^2} \cos(\psi_{\mathrm{U}} - \varphi_Z) \right) \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_2}} \right] + I_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \psi_{\mathrm{U}} - \varphi_Z).$$

a pro komplexně sdružené kořeny

$$i = i_{\mathrm{h}} + i_{\mathrm{p}} = \frac{U_{\mathrm{m}} \sin(\psi_{\mathrm{U}})}{L\,\omega_{\mathrm{d}}} \mathrm{e}^{-\alpha t} \sin(\omega_{\mathrm{d}}\, t) -$$

$$- I_{\mathrm{m}}\, \mathrm{e}^{-\alpha t} \left[\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{d}}} \cos(\psi_{\mathrm{U}} - \varphi_Z) + \frac{\alpha}{\omega_{\mathrm{d}}} \sin(\psi_{\mathrm{U}} - \varphi_Z) \right) \sin(\omega_{\mathrm{d}}\, t) + \sin(\psi_{\mathrm{U}} - \varphi_Z) \cos(\omega_{\mathrm{d}}\, t) \right] +$$

$$+ I_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \psi_{\mathrm{U}} - \varphi_Z).$$

Okamžité hodnoty napětí obvodových prvků RLC obvodu pro dva reálné kořeny získáme aplikací Ohmova zákona, rovnice kontinuity a Faradayova zákona

$$u_{\mathrm{R}} = R\, i = R\, \frac{U_{\mathrm{m}} \sin(\psi_{\mathrm{U}})}{L} \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \left[\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_1}} - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_2}} \right] - R\, \frac{I_{\mathrm{m}}}{\tau_1 - \tau_2} \left[\left(\tau_1 \sin(\psi_{\mathrm{U}} - \varphi_Z) + \frac{\omega}{\omega_{\mathrm{o}}^2} \cos(\psi_{\mathrm{U}} - \varphi_Z) \right) \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_1}} - \right.$$

$$\left. - \left(\tau_2 \sin(\psi_{\mathrm{U}} - \varphi_Z) + \frac{\omega}{\omega_{\mathrm{o}}^2} \cos(\psi_{\mathrm{U}} - \varphi_Z) \right) \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_2}} \right] + R\, I_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \psi_{\mathrm{U}} - \varphi_Z) = 2\, \alpha\, U_{\mathrm{m}} \sin(\psi_{\mathrm{U}}) \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \cdot$$

$$\cdot \left[\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_1}} - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_2}} \right] - R\, \frac{U_{\mathrm{m}}}{R} \frac{\tau\, \omega}{\sqrt{(\tau\, \omega)^2 + \left(\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{o}}} \right)^2 - 1 \right)^2}} \frac{1}{\tau_1 - \tau_2} \left[\left(\tau_1 \sin(\psi_{\mathrm{U}} - \varphi_Z) + \frac{\omega}{\omega_{\mathrm{o}}^2} \cos(\psi_{\mathrm{U}} - \varphi_Z) \right) \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_1}} - \right.$$

$$\left. - \left(\tau_2 \sin(\psi_{\mathrm{U}} - \varphi_Z) + \frac{\omega}{\omega_{\mathrm{o}}^2} \cos(\psi_{\mathrm{U}} - \varphi_Z) \right) \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_2}} \right] + R\, \frac{U_{\mathrm{m}}}{R} \frac{\tau\, \omega}{\sqrt{(\tau\, \omega)^2 + \left(\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{o}}} \right)^2 - 1 \right)^2}} \sin(\omega t + \psi_{\mathrm{U}} - \varphi_Z) =$$

$$= 2 U_{\mathrm{m}} \sin(\psi_{\mathrm{U}})\, \alpha\, \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \left[\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_1}} - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_2}} \right] -$$

$$
-\frac{U_{\mathrm{m}}\,\tau\,\omega}{\sqrt{(\tau\,\omega)^2+\left(\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{o}}}\right)^2-1\right)^2}}\frac{1}{\tau_1-\tau_2}\left[\left(\tau_1\sin(\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)+\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{o}}^2}\cos(\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_1}}-\right.
$$

$$
\left.-\left(\tau_2\sin(\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)+\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{o}}^2}\cos(\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_2}}\right]+\frac{U_{\mathrm{m}}\,\tau\,\omega}{\sqrt{(\tau\,\omega)^2+\left(\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{o}}}\right)^2-1\right)^2}}\sin(\omega t+\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z),
$$

$$
u_{\mathrm{C}}=\frac{1}{\mathrm{C}}\int_0^t i\,\mathrm{d}\xi=
$$

$$
=\frac{1}{\mathrm{C}}\int_0^t\left(\begin{array}{l}\frac{U_{\mathrm{m}}\sin(\psi_{\mathrm{U}})}{L}\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1-\tau_2}\left[\mathrm{e}^{-\frac{\xi}{\tau_1}}-\mathrm{e}^{-\frac{\xi}{\tau_2}}\right]-\frac{I_{\mathrm{m}}}{\tau_1-\tau_2}\left[\left(\tau_1\sin(\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)+\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{o}}^2}\cos(\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)\right)\mathrm{e}^{-\frac{\xi}{\tau_1}}-\right.\\ \left.-\left(\tau_2\sin(\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)+\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{o}}^2}\cos(\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)\right)\mathrm{e}^{-\frac{\xi}{\tau_2}}\right]+I_{\mathrm{m}}\sin(\omega\xi+\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)\end{array}\right)\mathrm{d}\xi=
$$

$$
=\frac{U_{\mathrm{m}}\sin(\psi_{\mathrm{U}})}{L\,C}\frac{L\,C}{\tau_1-\tau_2}\left[(-\tau_1)\mathrm{e}^{-\frac{\xi}{\tau_1}}-(-\tau_2)\,\mathrm{e}^{-\frac{\xi}{\tau_2}}\right]_0^t-\frac{U_{\mathrm{m}}}{R\,C}\frac{\tau\,\omega}{\sqrt{(\tau\,\omega)^2+\left(\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{o}}}\right)^2-1\right)^2}}\frac{1}{\tau_1-\tau_2}\cdot
$$

$$
\cdot\left[\left(\tau_1\sin(\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)+\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{o}}^2}\cos(\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)\right)(-\tau_1)\mathrm{e}^{-\frac{\xi}{\tau_1}}-\left(\tau_2\sin(\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)+\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{o}}^2}\cos(\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)\right)(-\tau_2)\mathrm{e}^{-\frac{\xi}{\tau_2}}\right]_0^t+
$$

$$
+\frac{U_{\mathrm{m}}}{R\,C}\frac{\tau\,\omega}{\sqrt{(\tau\,\omega)^2+\left(\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{o}}}\right)^2-1\right)^2}}\left[-\frac{1}{\omega}\cos(\omega\xi+\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)\right]_0^t=
$$

$$
=\frac{U_{\mathrm{m}}\sin(\psi_{\mathrm{U}})}{\tau_1-\tau_2}\left[\tau_2\,\mathrm{e}^{-\frac{\xi}{\tau_2}}-\tau_1\,\mathrm{e}^{-\frac{\xi}{\tau_1}}\right]_0^t-\frac{U_{\mathrm{m}}}{\sqrt{(\tau\,\omega)^2+\left(\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{o}}}\right)^2-1\right)^2}}\frac{1}{\tau_1-\tau_2}\cdot
$$

$$
\cdot\left[\left(\tau_2\,\omega\sin(\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)+\frac{\omega^2}{\omega_{\mathrm{o}}^2}\cos(\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)\right)\tau_2\,\mathrm{e}^{-\frac{\xi}{\tau_2}}-\left(\tau_1\,\omega\sin(\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)+\frac{\omega^2}{\omega_{\mathrm{o}}^2}\cos(\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)\right)\tau_1\,\mathrm{e}^{-\frac{\xi}{\tau_1}}\right]_0^t+
$$

$$
+\frac{U_{\mathrm{m}}}{\sqrt{(\tau\,\omega)^2+\left(\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{o}}}\right)^2-1\right)^2}}\left[-\cos(\omega\xi+\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)\right]_0^t=
$$

$$=U_{\mathrm{m}}\sin(\psi_{\mathrm{U}})\left[\frac{\tau_2}{\tau_1-\tau_2}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_2}}-\frac{\tau_1}{\tau_1-\tau_2}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_1}}+1\right]-\frac{U_{\mathrm{m}}}{\sqrt{(\tau\,\omega)^2+\left(\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{o}}}\right)^2-1\right)^2}}\,\frac{1}{\tau_1-\tau_2}\cdot$$

$$\cdot\left[\left(\tau_2\,\omega\sin(\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)+\frac{\omega^2}{\omega_{\mathrm{o}}^2}\cos(\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)\right)\tau_2\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_2}}-\left(\tau_1\,\omega\sin(\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)+\frac{\omega^2}{\omega_{\mathrm{o}}^2}\cos(\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)\right)\tau_1\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_1}}+\right.$$

$$\left.+\left(\tau_1\,\omega\sin(\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)+\frac{\omega^2}{\omega_{\mathrm{o}}^2}\cos(\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)\right)\tau_1-\left(\tau_2\,\omega\sin(\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)+\frac{\omega^2}{\omega_{\mathrm{o}}^2}\cos(\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)\right)\tau_2\right]+$$

$$+\frac{U_{\mathrm{m}}}{\sqrt{(\tau\,\omega)^2+\left(\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{o}}}\right)^2-1\right)^2}}\left[-\cos(\omega t+\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)+\cos(\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)\right]=$$

$$=U_{\mathrm{m}}\sin(\psi_{\mathrm{U}})\left[1+\frac{\tau_2}{\tau_1-\tau_2}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_2}}-\frac{\tau_1}{\tau_1-\tau_2}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_1}}\right]-\frac{U_{\mathrm{m}}}{\sqrt{(\tau\,\omega)^2+\left(\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{o}}}\right)^2-1\right)^2}}\,\frac{1}{\tau_1-\tau_2}\cdot$$

$$\cdot\left[\tau_2\left(\tau_2\,\omega\sin(\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)+\frac{\omega^2}{\omega_{\mathrm{o}}^2}\cos(\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)\right)\left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_2}}-1\right)-\right.$$

$$\left.-\tau_1\left(\tau_1\,\omega\sin(\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)+\frac{\omega^2}{\omega_{\mathrm{o}}^2}\cos(\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)\right)\left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_1}}-1\right)\right]+$$

$$+\frac{U_{\mathrm{m}}}{\sqrt{(\tau\,\omega)^2+\left(\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{o}}}\right)^2-1\right)^2}}\left[-\cos(\omega t+\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)+\cos(\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)\right],$$

$$u_{\mathrm{L}}=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{U_{\mathrm{m}}\sin(\psi_{\mathrm{U}})}{L}\,\frac{\tau_1\,\tau_2}{\tau_1-\tau_2}\left[\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_1}}-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_2}}\right]-\frac{I_{\mathrm{m}}}{\tau_1-\tau_2}\left[\left(\tau_1\sin(\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)+\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{o}}^2}\cos(\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_1}}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(\tau_2\sin(\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)+\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{o}}^2}\cos(\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_2}}\right]+I_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)\right)=U_{\mathrm{m}}\sin(\psi_{\mathrm{U}})\,\frac{\tau_1\,\tau_2}{\tau_1-\tau_2}\cdot$$

$$\cdot\left[-\frac{1}{\tau_1}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_1}}-\left(-\frac{1}{\tau_2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_2}}\right]-$$

$$-L\frac{U_{\mathrm{m}}}{R}\,\frac{\tau\,\omega}{\sqrt{(\tau\,\omega)^2+\left(\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{o}}}\right)^2-1\right)^2}}\,\frac{1}{\tau_1-\tau_2}\left[\left(\tau_1\sin(\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)+\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{o}}^2}\cos(\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)\right)\left(-\frac{1}{\tau_1}\right)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_1}}-\right.$$

$$-\left(\tau_2\sin(\psi_U-\varphi_Z)+\frac{\omega}{\omega_o^2}\cos(\psi_U-\varphi_Z)\right)\left(-\frac{1}{\tau_2}\right)e^{-\frac{t}{\tau_2}}\Bigg]+$$

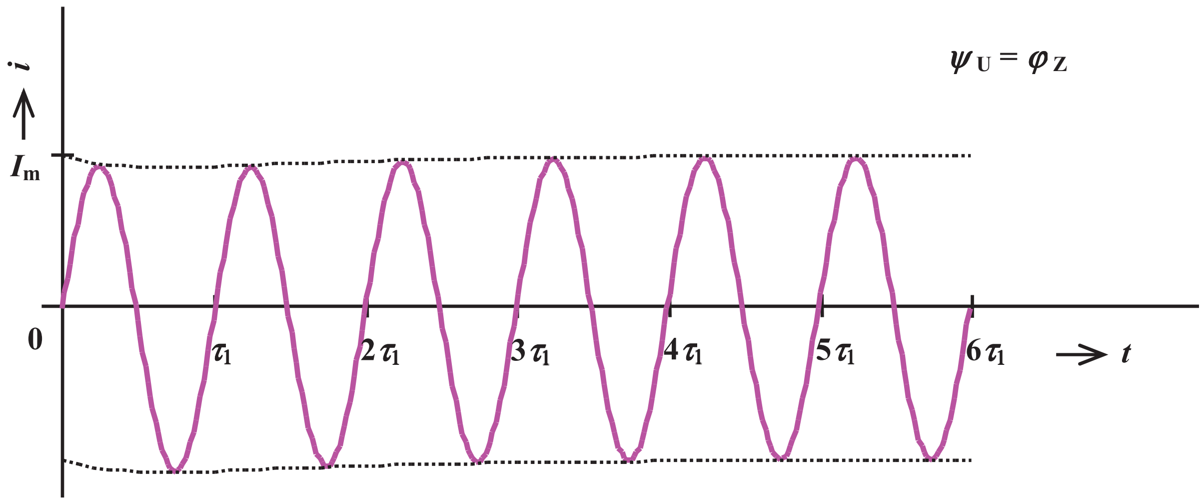
$$+L\frac{U_m}{R}\frac{\tau\omega}{\sqrt{(\tau\omega)^2+\left(\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2-1\right)^2}}\omega\cos(\omega t+\psi_U-\varphi_Z)=$$

$$=U_m\sin(\psi_U)\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1-\tau_2}\left[\frac{1}{\tau_2}e^{-\frac{t}{\tau_2}}-\frac{1}{\tau_1}e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right]-\frac{U_m\tau\omega}{\sqrt{(\tau\omega)^2+\left(\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2-1\right)^2}}\frac{1}{2\alpha(\tau_1-\tau_2)}\cdot$$

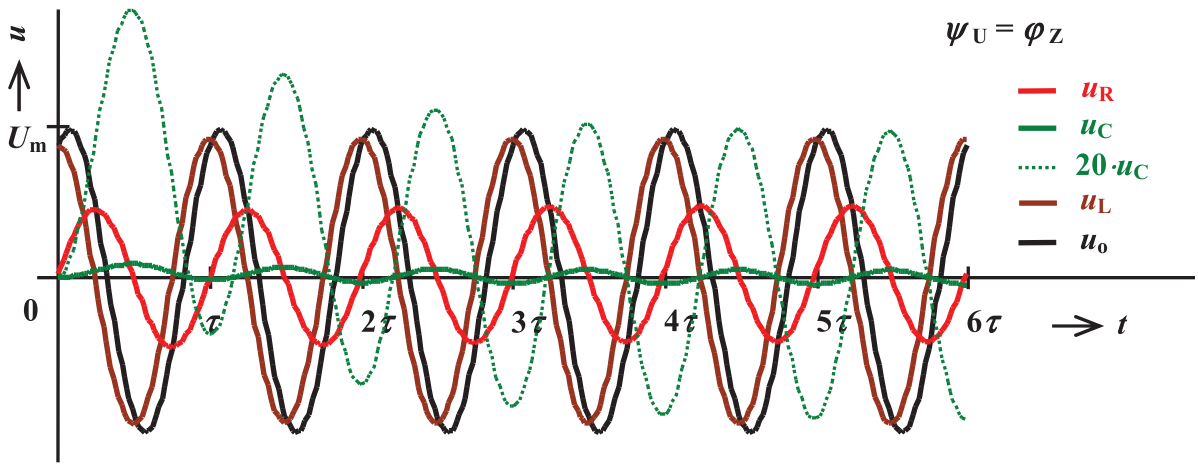
$$\cdot\left[\frac{1}{\tau_2}\left(\tau_2\sin(\psi_U-\varphi_Z)+\frac{\omega}{\omega_o^2}\cos(\psi_U-\varphi_Z)\right)e^{-\frac{t}{\tau_2}}-\frac{1}{\tau_1}\left(\tau_1\sin(\psi_U-\varphi_Z)+\frac{\omega}{\omega_o^2}\cos(\psi_U-\varphi_Z)\right)e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right]+$$

$$+\frac{U_m\tau\omega}{\sqrt{(\tau\omega)^2+\left(\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2-1\right)^2}}\frac{\omega}{2\alpha}\cos(\omega t+\psi_U-\varphi_Z).$$

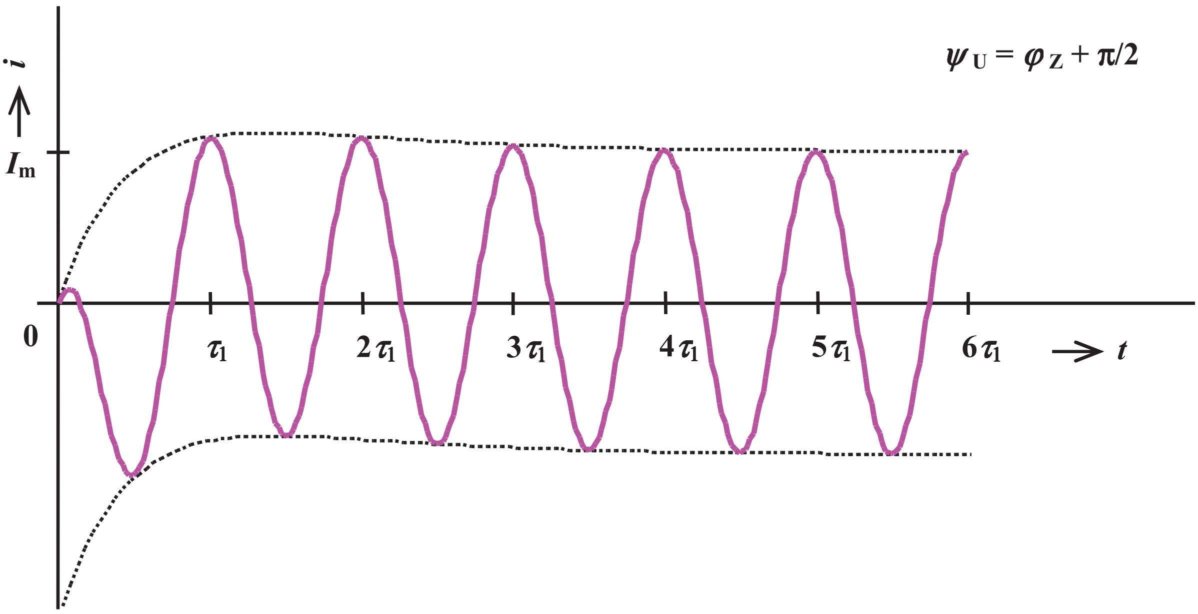
Z odvozených funkcí je zřejmé, že přechodná složka se v RLC obvodu vyvine vždy a závisí na hodnotě argumentu impedance obvodu φ_Z (fázový posun obvodu) a okamžiku připojení obvodu k harmonickému zdroji napětí, kterému odpovídá počáteční fáze napětí ψ_U v okamžiku sepnutí spínače S na obr. 2. 31. Vliv počáteční fáze na okamžik připojení obvodu ke zdroji si ukažme na grafech okamžitých hodnot aperiodických odezev obvodových veličin pro případy $\psi_U=\varphi_Z$ a $\psi_U=\varphi_Z+\pi/2$, zobrazené v uvedeném pořadí na obr. 2.38, 2.39 a obr. 2.40, 2.41, při kterých rozdíl $\psi_U-\varphi_Z$ v argumentech harmonických funkcí nabývá hodnot 0 a $\pi/2$. Těmto hodnotám argumentů, v uvedeném pořadí, odpovídají nejmenší a největší okamžité hodnoty přechodné složky veličin obvodu, jejichž velikost je dobře patrná z grafů obr. 2.38 a 2.40.



Obr. 2.38 Přechodný děj RLC obvodu, připojení harmonického zdroje napětí, nulové počáteční podmínky: aperiodická odezva proudu



Obr. 2.39 Přechodný děj RLC obvodu, připojení harmonického zdroje napětí, nulové počáteční podmínky, aperiodická odezva: okamžité hodnoty napětí rezistoru, kapacitoru, induktoru a zdroje



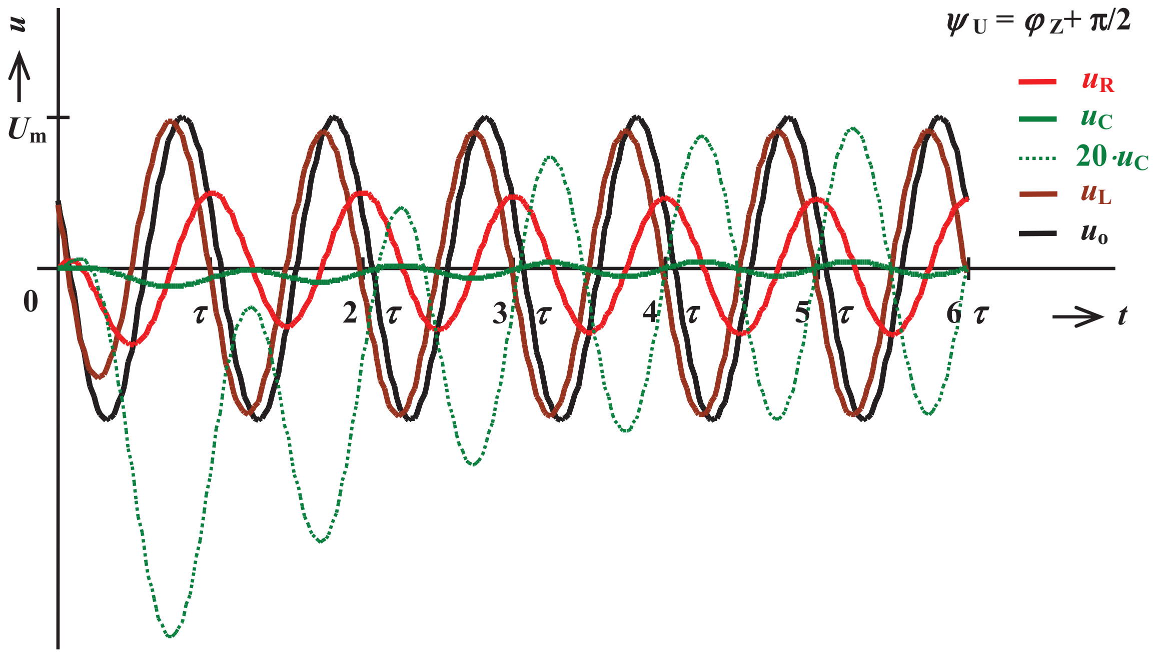
Obr. 2.40 Přechodný děj RLC obvodu, připojení harmonického zdroje napětí, nulové počáteční podmínky: aperiodická odezva proudu

Okamžité hodnoty napětí obvodových prvků RLC obvodu pro komplexně sdružené kořeny jsou dány

$$u_{\mathrm{R}} = R\,i = R\frac{U_{\mathrm{m}}\sin(\psi_{\mathrm{U}})}{L\,\omega_{\mathrm{d}}}\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin(\omega_{\mathrm{d}}\,t) - R\,I_{\mathrm{m}}\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\left[\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{d}}}\cos(\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)+\frac{\alpha}{\omega_{\mathrm{d}}}\sin(\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)\right)\sin(\omega_{\mathrm{d}}\,t)+\right.$$

$$\left.+\sin(\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)\cos(\omega_{\mathrm{d}}\,t)\right] + R\,I_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z) = 2U_{\mathrm{m}}\sin(\psi_{\mathrm{U}})\frac{\alpha}{\omega_{\mathrm{d}}}\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin(\omega_{\mathrm{d}}\,t) -$$

$$-\frac{U_{\mathrm{m}}\,\tau\,\omega}{\sqrt{(\tau\,\omega)^2+\left(\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{o}}}\right)^2-1\right)^2}}\mathrm{e}^{-\alpha t}\left[\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{d}}}\cos(\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)+\frac{\alpha}{\omega_{\mathrm{d}}}\sin(\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)\right)\sin(\omega_{\mathrm{d}}\,t)+\sin(\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)\cos(\omega_{\mathrm{d}}\,t)\right]+$$



Obr. 2.41 Přechodný děj RLC obvodu, připojení harmonického zdroje napětí, nulové počáteční podmínky, aperiodická odezva: okamžité hodnoty napětí rezistoru, kapacitoru, induktoru a zdroje

$$+\frac{U_\mathrm{m}\,\tau\,\omega}{\sqrt{(\tau\,\omega)^2+\left(\left(\frac{\omega}{\omega_\mathrm{o}}\right)^2-1\right)^2}}\sin\left(\omega t+\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z\right),$$

$$u_\mathrm{C}=\frac{1}{\mathrm{C}}\int_0^t i\,\mathrm{d}\xi=$$

$$=\frac{1}{\mathrm{C}}\int_0^t\left(\begin{array}{l}\frac{U_\mathrm{m}\sin(\psi_\mathrm{U})}{L\,\omega_\mathrm{d}}\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin(\omega_\mathrm{d}\,t)-I_\mathrm{m}\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\left[\left(\frac{\omega}{\omega_\mathrm{d}}\cos(\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z)+\frac{\alpha}{\omega_\mathrm{d}}\sin(\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z)\right)\sin(\omega_\mathrm{d}\,t)+\right.\\ \left.+\sin(\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z)\cos(\omega_\mathrm{d}\,t)\right]+I_\mathrm{m}\sin(\omega\xi+\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z)\end{array}\right)\mathrm{d}\xi=$$

$$=U_\mathrm{m}\sin(\psi_\mathrm{U})\frac{\omega_\mathrm{o}^2}{\omega_\mathrm{d}}\left[-\frac{\mathrm{e}^{-\alpha\xi}\left(\alpha\sin(\omega_\mathrm{d}\,\xi)+\omega_\mathrm{d}\cos(\omega_\mathrm{d}\,\xi)\right)}{\alpha^2+\omega_\mathrm{d}^2}\right]_0^t-\frac{U_\mathrm{m}\,\omega}{\sqrt{(\tau\,\omega)^2+\left(\left(\frac{\omega}{\omega_\mathrm{o}}\right)^2-1\right)^2}}\cdot$$

$$\cdot\left[\left(\frac{\omega}{\omega_\mathrm{d}}\cos(\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z)+\frac{\alpha}{\omega_\mathrm{d}}\sin(\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z)\right)\left[-\frac{\mathrm{e}^{-\alpha\xi}\left(\alpha\sin(\omega_\mathrm{d}\,\xi)+\omega_\mathrm{d}\cos(\omega_\mathrm{d}\,\xi)\right)}{\alpha^2+\omega_\mathrm{d}^2}\right]_0^t+\right.$$

$$\left.+\sin(\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z)\left[-\frac{\mathrm{e}^{-\alpha\xi}\left(\alpha\cos(\omega_\mathrm{d}\,\xi)-\omega_\mathrm{d}\sin(\omega_\mathrm{d}\,\xi)\right)}{\alpha^2+\omega_\mathrm{d}^2}\right]_0^t\right]+$$

$$+\frac{U_{\mathrm{m}}\,\omega}{\sqrt{(\tau\,\omega)^2+\left(\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{o}}}\right)^2-1\right)^2}}\left[-\frac{1}{\omega}\cos(\omega\xi+\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)\right]_0^t=$$

$$=U_{\mathrm{m}}\sin(\psi_{\mathrm{U}})\frac{\omega_{\mathrm{o}}^2}{\omega_{\mathrm{d}}}\left[-\frac{\mathrm{e}^{-\alpha t}\left(\alpha\sin(\omega_{\mathrm{d}}\,t)+\omega_{\mathrm{d}}\cos(\omega_{\mathrm{d}}\,t)\right)}{\alpha^2+\omega_{\mathrm{d}}^2}-\left(-\frac{\omega_{\mathrm{d}}}{\alpha^2+\omega_{\mathrm{d}}^2}\right)\right]-\frac{U_{\mathrm{m}}\,\omega}{\sqrt{(\tau\,\omega)^2+\left(\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{o}}}\right)^2-1\right)^2}}\cdot$$

$$\cdot\left[\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{d}}}\cos(\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)+\frac{\alpha}{\omega_{\mathrm{d}}}\sin(\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)\right)\left[-\frac{\mathrm{e}^{-\alpha t}\left(\alpha\sin(\omega_{\mathrm{d}}\,t)+\omega_{\mathrm{d}}\cos(\omega_{\mathrm{d}}\,t)\right)}{\alpha^2+\omega_{\mathrm{d}}^2}-\left(-\frac{\omega_{\mathrm{d}}}{\alpha^2+\omega_{\mathrm{d}}^2}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\sin(\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)\left[-\frac{\mathrm{e}^{-\alpha t}\left(\alpha\cos(\omega_{\mathrm{d}}\,t)-\omega_{\mathrm{d}}\sin(\omega_{\mathrm{d}}\,t)\right)}{\alpha^2+\omega_{\mathrm{d}}^2}-\left(-\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega_{\mathrm{d}}^2}\right)\right]\right]+$$

$$+\frac{U_{\mathrm{m}}}{\sqrt{(\tau\,\omega)^2+\left(\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{o}}}\right)^2-1\right)^2}}\left[-\cos(\omega t+\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)+1\right]=$$

$$=U_{\mathrm{m}}\sin(\psi_{\mathrm{U}})\frac{\omega_{\mathrm{o}}^2}{\alpha^2+\omega_{\mathrm{d}}^2}\left[1-\mathrm{e}^{-\alpha t}\left(\frac{\alpha}{\omega_{\mathrm{d}}}\sin(\omega_{\mathrm{d}}\,t)+\cos(\omega_{\mathrm{d}}\,t)\right)\right]-\frac{U_{\mathrm{m}}\,\omega}{\sqrt{(\tau\,\omega)^2+\left(\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{o}}}\right)^2-1\right)^2}}\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{\omega_{\mathrm{d}}}{\alpha^2+\omega_{\mathrm{d}}^2}\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{d}}}\cos(\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)+\frac{\alpha}{\omega_{\mathrm{d}}}\sin(\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)\right)\left[1-\mathrm{e}^{-\alpha t}\left(\frac{\alpha}{\omega_{\mathrm{d}}}\sin(\omega_{\mathrm{d}}\,t)+\cos(\omega_{\mathrm{d}}\,t)\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega_{\mathrm{d}}^2}\sin(\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)\cdot\left[1-\mathrm{e}^{-\alpha t}\left(\cos(\omega_{\mathrm{d}}\,t)-\frac{\omega_{\mathrm{d}}}{\alpha}\sin(\omega_{\mathrm{d}}\,t)\right)\right]\right]+$$

$$+\frac{U_{\mathrm{m}}}{\sqrt{(\tau\,\omega)^2+\left(\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{o}}}\right)^2-1\right)^2}}\left[\cos(\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)-\cos(\omega t+\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)\right],$$

$$u_{\mathrm{L}}=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{U_{\mathrm{m}}\sin(\psi_{\mathrm{U}})}{L\,\omega_{\mathrm{d}}}\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin(\omega_{\mathrm{d}}\,t)-I_{\mathrm{m}}\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\left[\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{d}}}\cos(\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)+\frac{\alpha}{\omega_{\mathrm{d}}}\sin(\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)\right)\sin(\omega_{\mathrm{d}}\,t)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sin(\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)\cos(\omega_{\mathrm{d}}\,t)\right]+I_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\psi_{\mathrm{U}}-\varphi_Z)\right)=\frac{U_{\mathrm{m}}\sin(\psi_{\mathrm{U}})}{\omega_{\mathrm{d}}}\mathrm{e}^{-\alpha t}\left(-\alpha\sin(\omega_{\mathrm{d}}\,t)+\omega_{\mathrm{d}}\cos(\omega_{\mathrm{d}}\,t)\right)-$$

$$-\frac{U_\mathrm{m}\,\tau\,\omega}{\sqrt{(\tau\,\omega)^2+\left(\left(\dfrac{\omega}{\omega_\mathrm{o}}\right)^2-1\right)^2}}\,\frac{1}{2\,\alpha}\left[\left(\frac{\omega}{\omega_\mathrm{d}}\cos(\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z)+\frac{\alpha}{\omega_\mathrm{d}}\sin(\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z)\right)\mathrm{e}^{-\alpha\,t}\left(-\alpha\sin(\omega_\mathrm{d}\,t)+\omega_\mathrm{d}\cos(\omega_\mathrm{d}\,t)\right)+\right.$$

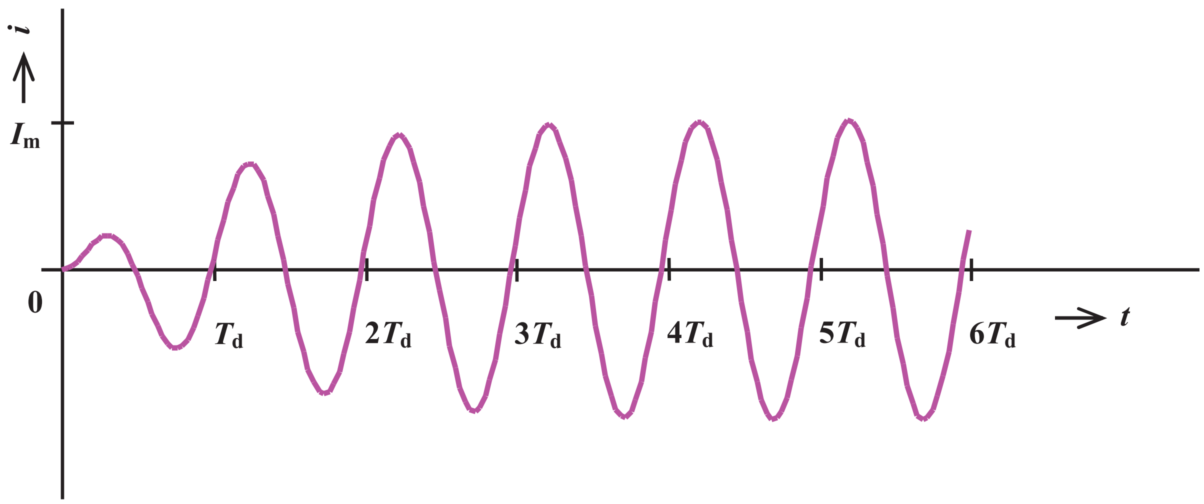
$$\left.+\sin(\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z)\mathrm{e}^{-\alpha\,t}\left(-\omega_\mathrm{d}\sin(\omega_\mathrm{d}\,t)-\alpha\cos(\omega_\mathrm{d}\,t)\right)\right]+\frac{U_\mathrm{m}\,\tau\,\omega}{\sqrt{(\tau\,\omega)^2+\left(\left(\dfrac{\omega}{\omega_\mathrm{o}}\right)^2-1\right)^2}}\,\frac{\omega}{2\,\alpha}\cos(\omega t+\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z)=$$

$$=U_\mathrm{m}\sin(\psi_\mathrm{U})\,\mathrm{e}^{-\alpha\,t}\left(-\frac{\alpha}{\omega_\mathrm{d}}\sin(\omega_\mathrm{d}\,t)+\cos(\omega_\mathrm{d}\,t)\right)-\frac{U_\mathrm{m}\,\tau\,\omega}{\sqrt{(\tau\,\omega)^2+\left(\left(\dfrac{\omega}{\omega_\mathrm{o}}\right)^2-1\right)^2}}\,\frac{1}{2}\cdot$$

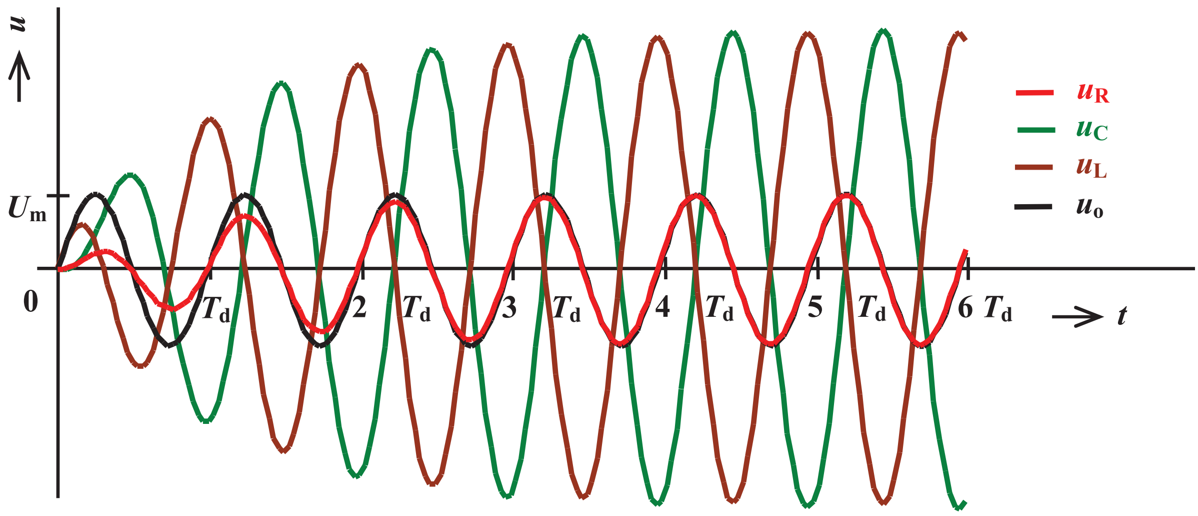
$$\cdot\left[\left(\frac{\omega}{\omega_\mathrm{d}}\cos(\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z)+\frac{\alpha}{\omega_\mathrm{d}}\sin(\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z)\right)\mathrm{e}^{-\alpha t}\left(-\sin(\omega_\mathrm{d}\,t)+\frac{\omega_\mathrm{d}}{\alpha}\cos(\omega_\mathrm{d}\,t)\right)-\sin(\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z)\,\mathrm{e}^{-\alpha\,t}\,\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left(\frac{\omega_\mathrm{d}}{\alpha}\sin(\omega_\mathrm{d}\,t)+\cos(\omega_\mathrm{d}\,t)\right)\right]+\frac{U_\mathrm{m}\,\tau\,\omega}{\sqrt{(\tau\,\omega)^2+\left(\left(\dfrac{\omega}{\omega_\mathrm{o}}\right)^2-1\right)^2}}\,\frac{\omega}{2\,\alpha}\cos(\omega t+\psi_\mathrm{U}-\varphi_Z).$$

Charakter průběhů RLC obvodu výrazně závisí na interferenci zdrojem vnucovaného kmitočtu a vlastního kmitočtu obvodu. Významně se projevují při malém tlumení obvodu, kdy je i kmitočet vlastních kmitů blízký rezonančnímu kmitočtu obvodu. Čím je tlumení menší, tím delší je doba trvání přechodného děje, a tedy i dosažení ustáleného stavu a velikost napětí kapacitoru a induktoru narůstá s časem a dosahuje mnohonásobných hodnot amplitudy partikulárního řešení obvodu, viz obr. 2.42 a 2.43.



Obr. 2.42 Přechodný děj RLC obvodu, připojení harmonického zdroje napětí, nulové počáteční podmínky: kvaziperiodická odezva proudu při malém tlumení obvodu



Obr. 2.43 Přechodný děj RLC obvodu, připojení harmonického zdroje napětí, nulové počáteční podmínky, kvaziperiodická odezva: okamžité hodnoty napětí rezistoru, kapacitoru, induktoru a zdroje při malém tlumení obvodu

Σ Shrnutí pojmů 2.3.

Chování RLC obvodu je popsáno diferenciální rovnicí 2. řádu. Charakter odezvy přechodného děje závisí na hodnotách parametrů RLC obvodu resp. na hodnotách činitele útlumu α a rezonančního úhlového kmitočtu obvodu ω_0. Platí-li pro parametry rovnost $R = R_k = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ resp. $\omega_o = \alpha$, řešení charakteristické rovnice má dvojnásobný reálný kořen, kterému odpovídá řešení homogenní diferenciální rovnice s nejkratší dobou trvání přechodného jevu, a které je mezním případem mezi aperiodickým ($R_k < R$, $\omega_o < \alpha$) a kvaziperiodickým ($R_k > R$, $\omega_o > \alpha$) řešením rovnice obvodu.

V případě kvaziperiodické odezvy RLC obvodu dochází ke vzniku vlastních kmitů obvodu, nezávisle na kmitočtu zdroje. Zajímavá situace nastává při malých hodnotách činitele útlumu, kdy vlastní kmitočet je blízký rezonančnímu a obvod se nachází blízko stavu rezonance, kdy amplitudy napětí kapacitoru resp. induktoru jsou prakticky stejně velké a dosahují násobku amplitudy napětí zdroje, jenž závisí na činiteli jakosti obvodu.

Při připojení RLC obvodu k harmonickému zdroji napětí závisí na velikosti jeho počáteční fáze, jak velká se vyvine přechodná složka průběhů obvodových veličin. Minimální přechodná složka se vyvine, je-li počáteční fáze zdroje rovna fázovému posunu obvodu v ustáleném stavu. Nejvíce se projevuje vliv přechodné složky na okamžitých hodnotách napětí kapacitoru, který filtruje stejnosměrnou složku napětí.

? Otázky 2.3.

1. Jaké možné případy řešení má charakteristická rovnice RLC obvodu?
2. Kolik a jaké matematické počáteční podmínky musíme znát, abychom stanovili integrační konstanty obecného řešení diferenciální rovnice RLC obvodu.
3. Jaký je vztah mezi fyzikálními a matematickými počátečními podmínkami RLC obvodu?

4. Co je to kritický odpor obvodu?
5. Proč v praxi nemůžeme zrealizovat mez aperiodicity RLC obvodu?
6. Můžeme nějakým způsobem zabránit vzniku vlastních kmitů obvodu?
7. Závisí kmitočet vlastních kmitů obvodu na kmitočtu zdroje obvodu?
8. Na kterém obvodovém prvku se nejvíce projeví přechodná složka řešení RLC obvodu?
9. Jak určíme činitel útlumu z kvaziperiodické odezvy RLC obvodu?
10. Při jaké počáteční fázi harmonického zdroje napětí vznikne minimální přechodná složka řešení RLC obvodu ?

Úloha k řešení 2.3.

Stanovte hodnoty obvodových parametrů sériového RLC obvodu, znáte-li hodnotu činitele útlumu α a kmitočet vlastních kmitů ω_d. Proveďte diskuzi řešení.

Řešení:

Hodnoty parametrů RLC obvodu nelze obecně určit pouze ze známých hodnot činitele útlumu $\alpha = \frac{R}{2L}$ a vlastního úhlového kmitočtu obvodu

$$\omega_d = \sqrt{\omega_o^2 - \alpha^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \,,$$

protože máme k dispozici pouze dvě rovnice pro tři neznámé hodnoty parametrů. Můžeme je ale určit, předřadíme-li neznámému RLC obvodu rezistor R_T o známé hodnotě odporu, která však nesmí způsobit zánik vlastních kmitů obvodu. Získáme tak nové hodnoty činitele útlumu α_T a vlastního úhlového kmitočtu obvodu ω_{dT} definované vztahy

$$\alpha_T = \frac{R + R_T}{2L} \quad \text{a} \quad \omega_{dT}^2 = \omega_o^2 - \alpha_T^2 \,.$$

Hodnotu odporu R a indukčnosti L původního obvodu určíme ze soustavy rovnic

$$\alpha_T 2L - R = R_T \,, \qquad \alpha 2L - R = 0 \,,$$

jejímž řešením jsou hodnoty parametrů

$$L = \frac{R_T}{2(\alpha_T - \alpha)} \quad \text{a} \quad R = \alpha \frac{R_T}{\alpha_T - \alpha} \,.$$

Hodnotu kapacity C původního obvodu určíme pomocí kvadrátu rezonančního kmitočtu obvodu

$$\omega_o^2 = \frac{1}{LC} = \frac{\omega_{dT}^2 + \omega_d^2 + \alpha_T^2 + \alpha^2}{2} \,,$$

který jsme získali součtem a úpravou následujících rovnic

$$\omega_{dT}^2 = \omega_o^2 - \alpha_T^2 \,, \qquad \omega_d^2 = \omega_o^2 - \alpha^2 \,,$$

pro jejíž hodnotu platí

$$C=\frac{2}{L\left(\omega_{\mathrm{dT}}^2+\omega_{\mathrm{d}}^2+\alpha_{\mathrm{T}}^2+\alpha^2\right)}=\frac{4\left(\alpha_{\mathrm{T}}-\alpha\right)}{R_{\mathrm{T}}\left(\omega_{\mathrm{dT}}^2+\omega_{\mathrm{d}}^2+\alpha_{\mathrm{T}}^2+\alpha^2\right)}.$$

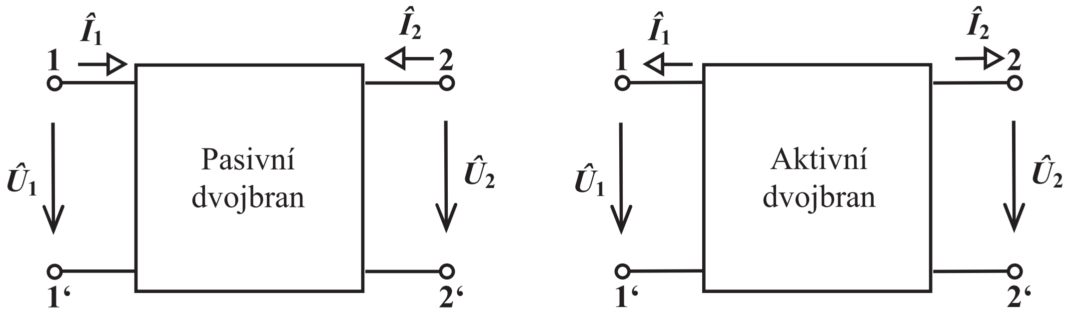
3. Dvojbrany

Motivace Po prostudování této kapitoly budete umět

- používat šipkovou konvenci dvojbranů a umět je klasifikovat
- určit parametry lineárních dvojbranů ze stavů naprázdno a nakrátko
- přiřadit ekvivalentní obvodové modely k rovnicím dvojbranu
- určit parametry regulárního řazení dvojbranů
- určit vztah mezi jednotlivými typy parametrů dvojbranu
- definovat ideální transformátor a gyrátor a transformaci zatěžovací impedance na vstupní bránu.
- definovat základní aktivní dvojbrany, energetickou bilanci vstupní brány

3.1. Základní úvahy a terminologie

Analyzujeme-li složitější obvody, můžeme na ně nahlížet buď na zapojení složené z čistě dvojpólových obvodových prvků popsané obecnými metodami řešení obvodů nebo na zapojení tvořené spojením více pólových obvodových prvků. Omezíme-li se jen na vztahy mezi sledovanými veličinami pólů, sníží počet závislých veličin obvodu, čímž se podstatně zjednoduší i popis obvodu. Má-li takovýto obvodový prvek dva páry pólů se společným napětím a proudem, pak těmto párům říkáme brány a mluvíme o dvojbranech případně o čtyřpólech. Jednu bránu nazýváme vstupní a zpravidla ji označujeme svorkami 1, 1‘ a druhou výstupní se svorkami 2, 2‘, viz obr. 3.1. K analýze chování dvojbranu použijeme pouze vztahy mezi napětími a proudy těchto bran, tj. mezi jeho vnějšími veličinami a není tak třeba hledat napětí a proudy ve větvích „skrytých“ uvnitř dvojbranu. Při výkladu se omezme jen na popis dvojbranu v harmonicky ustáleném stavu, který provedeme pomocí fázorů napětí a proudu vstupní brány $\hat{U}_1$, $\hat{I}_1$ a výstupní brány $\hat{U}_2$, $\hat{I}_2$, tedy v oboru komplexních hodnot.



Obr. 3.1 Šipková konvence: aktivní pasivní, aktivní dvojbran

Dvojbran charakterizují čtyři veličiny, dvě branová napětí $\hat{U}_1$, $\hat{U}_2$ a dva branové proudy $\hat{I}_1$, $\hat{I}_2$. Jak uvidíme, ze čtyř veličin můžeme ke zvoleným dvěma nezávislým veličinám (proměnným) přiřadit dvě závislé veličiny (proměnné) celkem 6 způsoby. Je-li dvojbran lineární, funkční závislosti mezi dvěma závislými a nezávislými veličinami jsou definovány čtyřmi parametry dvojbranu, které jednoznačně definují jeho vlastnosti. Dvojbran je jednoznačně určen kteroukoliv z možných čtveřic parametrů a ty, jak si ukážeme, je možné navzájem na sebe přepočítat pomocí lineárních transformací.

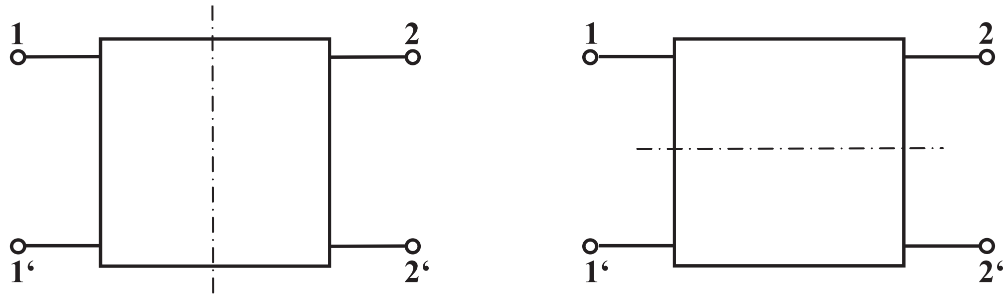
Podle energetické bilance rozlišujeme dvojbrany pasivní a aktivní. Pasivní dvojbran má počítací šipky proudu obou bran orientované dovnitř dvojbranu a počítací šipky napětí od horní svorky ke svorce dolní, viz obr. 3.1 vlevo. Jelikož je tvořen jen pasivními obvodovými prvky, předpokládáme, že obě jeho brány odebírají energii z vnějšího obvodu, čemuž odpovídá i spotřebičová orientace počítacích šipek obou bran dvojbranu. Aktivní dvojbran má počítací šipky proudu obou bran orientované ven z dvojbranu a počítací šipky napětí od horní svorky ke svorce dolní, viz obr. 3.1 vpravo. Jelikož obsahuje i nezávislé zdroje, předpokládáme, že obě jeho brány trvale dodávají energii do vnějšího obvodu, čemuž odpovídá i zdrojová orientace počítacích šipek obou bran dvojbranu.

Podle typu charakteristik dělíme dvojbrany na lineární a nelineární. U lineárního dvojbranu platí princip superpozice, žádný parametr dvojbranu není funkcí branových veličin, a proto lze pro určení jeho parametrů použít stavy naprázdno a nakrátko. Nelineární dvojbran má parametry závislé na branových veličinách, proto se snažíme podmínku lineárnosti splnit alespoň v jistém okolí tzv. pracovního bodu dvojbranu.

Obsahuje-li dvojbran nezávislý zdroj energie, může dodávat trvale energii do obvodu a nazývá se autonomní. Dále existují dvojbrany (či spíše jejich modely) neautonomní, které obsahují pasivní prvky a řízené zdroje, ne však nezávislé zdroje energie. Jsou to např. tranzistory, operační zesilovače a jiné zesilující struktury, které považujeme sice za aktivní prvky, avšak ty nejsou schopné trvale dodávat energii do obvodu, neboť jejich modely obsahují pouze řízené zdroje. Řízené zdroje v náhradním schématu dvojbranu tak zastupují účinek nezávislého zdroje a pouze řídí distribuci energie z nezávislého zdroje do obvodu, blíže viz kapitola 5.2. Nezávislý zdroj je nutný k nastavení vhodného pracovního bodu aktivního prvku, a proto se v náhradním schématu (modelu) obvodu většinou nekreslí. Každý autonomní dvojbran lze v tomto smyslu popsat pomocí neautonomního dvojbranu a nezávislého zdroje.

Podle topologické struktury dělíme dvojbrany na podélně a příčně souměrné, což ukazuje obr. 3.2. Na rozdíl od podélné souměrnosti nemá příčná souvislost vliv na parametry dvojbranu, takže obě brány příčně souměrného dvojbranu jsou zaměnitelné.

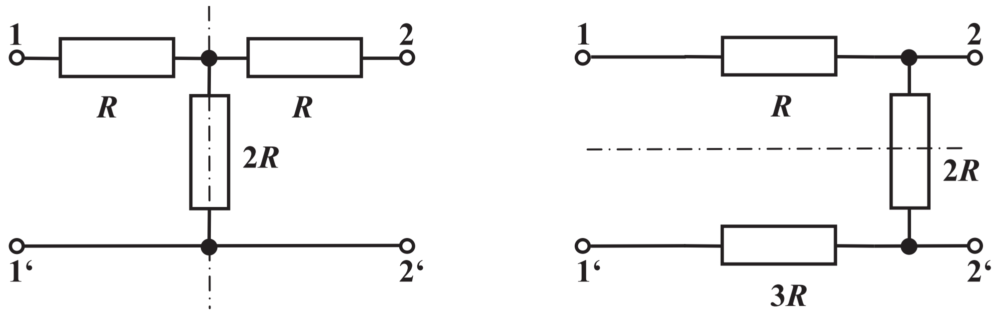
Typické dvojbrany jsou děliče napětí a proudu, zesilovače, zpožďovací články, filtry, derivační a integrační obvody, aj.



Obr. 3.2 Typy symetrie dvojbranu: podélná, příčná

Příklad 3.1.

Rozhodněte, který z odporových dvojbranů na obr. 3.3 je podélně nebo příčně souměrný.



Obr. 3.3 Zapojení dvojbranů, příklad 3.1

♦

Dvojbran na obr. 3.3 vlevo je podélně souměrný, protože má v podélné větvi stejné hodnoty odporů. Tento dvojbran je ale i krajně příčně nesouměrný, protože je vlastně trojpólem modelovaným dvojbranem, protože má přímo propojené svorky 1‘ a 2‘**.** Dvojbran vpravo je příčně souměrný. Nezáleží u něj na hodnotách odporů, protože příčná souměrnost nemá vliv na parametry dvojbranu.

Σ Shrnutí pojmů 3.1.

Dvojbran je čtyřpólový prvek se dvěma branami, vymezenými dvojicemi svorek. Bez ohledu na jeho vnitřní strukturu můžeme jeho vlastnosti vyjádřit vztahy mezi proudy a napětími jeho bran. Vlastnosti dvojbranu jsou obecně určeny čtyřmi parametry. Parametry lineárního dvojbranu určujeme ze stavů naprázdno a nakrátko. Dvojbrany dělíme podle různých hledisek na aktivní a pasivní, lineární a nelineární, autonomní a neautonomní a příčně a podélně souměrné. K modelování aktivních prvků používáme řízené zdroje.

? **Otázky 3.1.**

1. K čemu používáme model dvojbranu?
2. Co je to brána dvojbranu a co vymezuje?
3. Kolik veličin potřebujeme k popisu dvojbranu?
4. Kolika parametry je charakterizován lineární dvojbran?
5. Jakým způsobem určíme parametry lineárního dvojbranu?
6. Na čem závisí volba počítacích šipek dvojbranu?
7. Jak dělíme z energetického hlediska dvojbrany?
8. Charakterizujte nelineární dvojbran?
9. Jaký se liší autonomní a neautonomní dvojbran?
10. Co modelují řízené zdroje v náhradním schématu dvojbranu?
11. Jak nazýváme dvojbran s aktivním prvkem např. tranzistorem?
12. Má záměna bran příčně souměrného dvojbranu vliv na jeho parametry?

Úloha k řešení 3.1

Při spotřebičové šipkové konvenci byly zjištěny ve stejnosměrném obvodu veličiny vstupní brány U_1 = 5 V, I_1 = 0,1 A a výstupní brány dvojbranu a) U_2 = 2 V, I_2 = 0,2 A b) U_2 = 2 V, I_2 = -0,25 A; c) U_2 = 2 V, I_2 = -0,3 A. Posuďte situace z hlediska pasivity a aktivity dvojbranu.

Řešení:

Při spotřebičové orientaci je výkon dodávaný do stejnosměrného obvodu definován vztahem $P = P_1 + P_2 = U_1 I_1 + U_2 I_2$. Pro $P > 0$ se jedná o obvod pasivní, pro $P = 0$ bezeztrátový a pro $P < 0$ o obvod aktivní**.** Pro vstupní bránu platí $P_1 = U_1 I_1 = 5 \cdot 0{,}1 = 0{,}5\ \mathrm{W}$. Pro výstupní bránu a celý dvojbran platí pro jednotlivé body zadání:

a) $P = P_1 + U_1 I_1 = 0{,}5 + 2 \cdot 0{,}2 = 0{,}9\ \mathrm{W}$, pasivní dvojbran

b) $P = P_1 + U_1 I_1 = 0{,}5 + 2 \cdot (-0{,}25) = 0\ \mathrm{W}$, bezeztrátový dvojbran

c) $P = P_1 + U_1 I_1 = 0{,}5 + 2 \cdot (-0{,}3) = -0{,}1\ \mathrm{W}$, aktivní dvojbran.

3.2. Matematické a obvodové modely dvojbranů

V dalším výkladu se omezme jen na modely neautonomních lineárních dvojbranů v harmonicky ustáleném stavu, kterých je, jak již bylo zmíněno šest.

❑ Admitanční model

Za nezávisle proměnné veličiny volíme branová napětí $\hat{U}_1$, $\hat{U}_2$. Závisle proměnné veličiny jsou branové proudy $\hat{I}_1$, $\hat{I}_2$, které můžeme popsat lineární kombinací napětí

$$\hat{I}_1 = \hat{Y}_{11}\hat{U}_1 + \hat{Y}_{12}\hat{U}_2 ,$$

$$\hat{I}_2 = \hat{Y}_{21}\hat{U}_1 + \hat{Y}_{22}\hat{U}_2 ,$$

nebo v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{Y}_{11} & \hat{Y}_{12} \\ \hat{Y}_{21} & \hat{Y}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{U}_2 \end{bmatrix},$$

kde parametry dvojbranu jsou definovány admitanční maticí

$$[\hat{Y}] = \begin{bmatrix} \hat{Y}_{11} & \hat{Y}_{12} \\ \hat{Y}_{21} & \hat{Y}_{22} \end{bmatrix},$$

která je současně charakteristikou dvojbranu. Každy prvek admitanční matice má rozměr S.

Vzhledem k linearitě dvojbranu můžeme parametry admitanční matice určit podle obr. 3.4 ze stavů nakrátko. Při buzení vstupu dvojbranu zdrojem napětí a zkratovaném výstupu platí $\hat{I}_1 = \hat{Y}_{11}\hat{U}_1$ a $\hat{I}_2 = \hat{Y}_{21}\hat{U}_1$ a při buzení výstupu dvojbranu zdrojem napětí a zkratovaném vstupu platí $\hat{I}_1 = \hat{Y}_{12}\hat{U}_2$ a $\hat{I}_2 = \hat{Y}_{22}\hat{U}_2$. Z těchto rovnic určíme parametry admitanční matice následovně:

vstupní admitanci (nakrátko)

$$\hat{Y}_{11} = \left. \frac{\hat{I}_1}{\hat{U}_1} \right|_{U_2=0} ,$$

přenosovou admitanci (nakrátko)

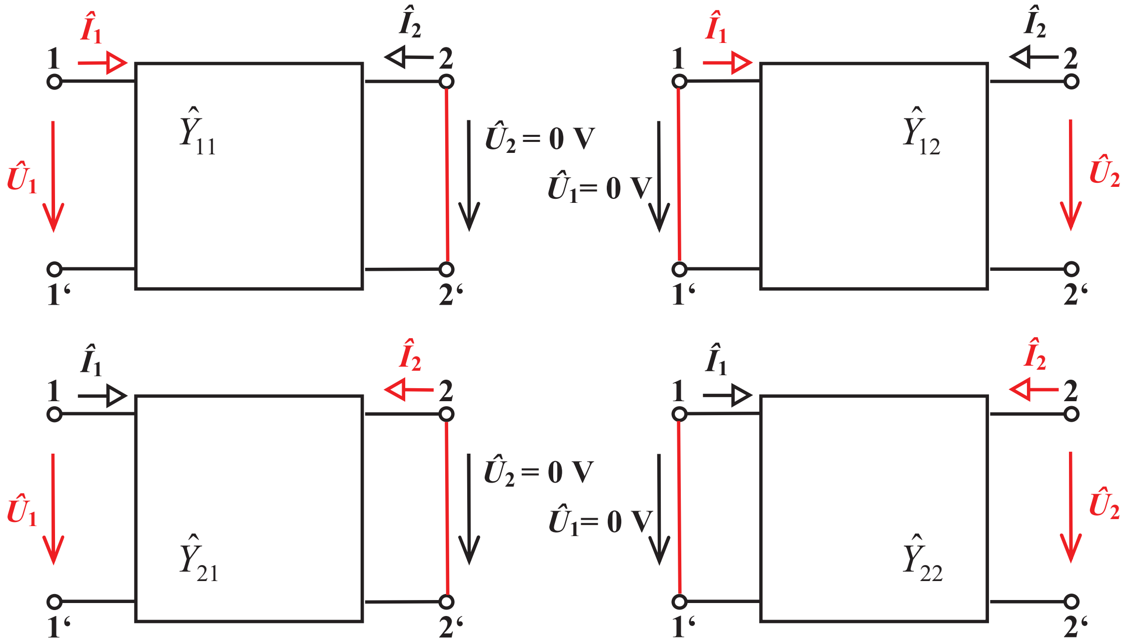
$$\hat{Y}_{12} = \left. \frac{\hat{I}_1}{\hat{U}_2} \right|_{U_1=0} ,$$

přenosovou admitanci (nakrátko)

$$\hat{Y}_{21} = \left. \frac{\hat{I}_2}{\hat{U}_1} \right|_{U_2=0} ,$$

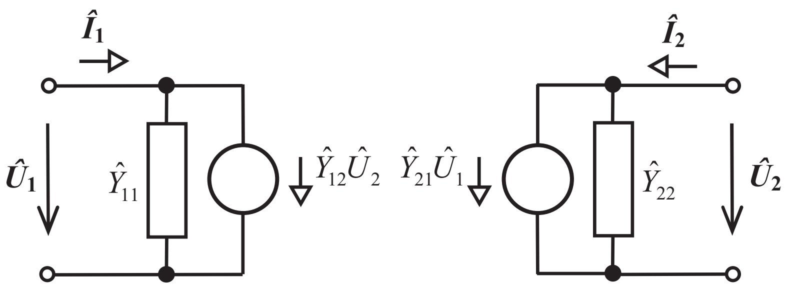
výstupní admitanci (nakrátko)

$$\hat{Y}_{22} = \left. \frac{\hat{I}_2}{\hat{U}_2} \right|_{U_1=0} .$$



Obr. 3.4 Určování admitančních parametrů z provozních stavů dvojbranu

Obvodový model sestavíme na základě 1. Kirchhoffova zákon, kterému odpovídá paralelní řazení obvodových prvků na obr. 3.5, proto také jinak říkáme admitančnímu modelu paralelně paralelní.



Obr. 3.5 Náhradní schéma admitančního modelu dvojbranu

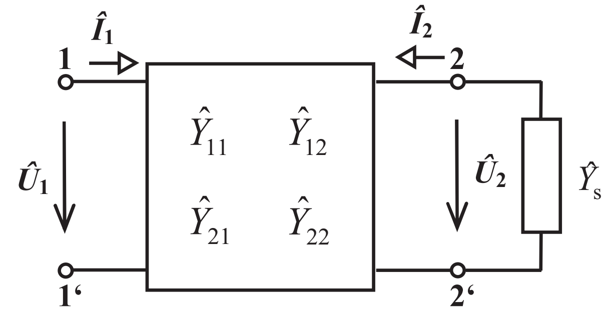
Obecně je admitanční dvojbran definován (charakterizován) čtyřmi různými nezávislými parametry admitanční matice. Je-li dvojbran složen pouze z pasivních prvků, platí pro něj princip reciprocity. Po připojení zdroje napětí o hodnotě U ke vstupní bráně, má výstupní proud nakrátko dvojbranu stejnou hodnotu, jakou má jeho vstupní proud nakrátko po připojení zdroje o hodnotě napětí U k jeho výstupní bráně. Ve stavu nakrátko platí pro výstupní proud $\hat{I}_2 = \hat{Y}_{21}\hat{U}$ a pro vstupní proud $\hat{I}_1 = \hat{Y}_{12}\hat{U}$, takže $\hat{Y}_{12} = \hat{Y}_{21}$. Tím se sníží počet nezávislých parametrů u reciprokého dvojbranu na tři. Dvěma parametry je potom charakterizován tzv. souměrný dvojbran, což je podélně souměrný dvojbran, pro který platí $\hat{Y}_{11} = \hat{Y}_{22}$. Zaměníme-li u tohoto dvojbranu vstup a výstup, jeho obvodové poměry se nezmění.

Příklad 3.2.

Dokažte podmínku podélné souměrnosti admitančního modelu dvojbranu $\hat{Y}_{11} = \hat{Y}_{22}$.

♦

Podélně souměrný dvojbran má stejné hodnoty imitance vstupní a výstupní brány. K důkazu podélné souměrnosti admitančního dvojbranu, blokově zobrazeného na obr. 3.6, musíme tedy znát hodnoty jeho vstupní a výstupní admitance.



Obr. 3.6 Blokové schéma zatíženého admitančního modelu dvojbranu, příklad 3.2

Vstupní admitanci určíme pro buzení vstupní brány napětím $\hat{U}_1$ při zatížení výstupní brány admitancí $\hat{Y}_s$ následujícím postupem. Do rovnice druhé brány dosadíme za proud $\hat{I}_2$ do zobecněného Ohmova zákona

$$\hat{I}_2 = -\hat{Y}_s\hat{U}_2 = \hat{Y}_{21}\hat{U}_1 + \hat{Y}_{22}\hat{U}_2$$

a vyjádříme si z ní napětí

$$\hat{U}_2 = -\frac{\hat{Y}_{21}\hat{U}_1}{\hat{Y}_{22} + \hat{Y}_s},$$

které dosadíme do rovnice první brány

$$\hat{I}_1 = \hat{Y}_{11}\hat{U}_1 + \hat{Y}_{12}\hat{U}_2 = \hat{Y}_{11}\hat{U}_1 - \hat{Y}_{12}\frac{\hat{Y}_{21}\hat{U}_1}{\hat{Y}_{22} + \hat{Y}_s} = \hat{U}_1\left(\hat{Y}_{11} - \frac{\hat{Y}_{12}\hat{Y}_{21}}{\hat{Y}_{22} + \hat{Y}_s}\right),$$

takže pro vstupní impedanci platí

$$\hat{Y}_1 = \frac{\hat{I}_1}{\hat{U}_1} = \left(\hat{Y}_{11} - \frac{\hat{Y}_{12}\hat{Y}_{21}}{\hat{Y}_{22} + \hat{Y}_s}\right).$$

Výstupní admitanci určíme pomocí Nortonovy resp. Theveninovy věty ze stavu naprázdno a nakrátko výstupní brány. Při zkratovaném výstupu platí pro rovnici vstupní brány podle horního obvodu na obr. 3.7

$$\hat{I}_{1k} = \hat{Y}_{11}\hat{U}_{1k},$$

ze které si vyjádříme napětí

$$\hat{U}_{1k} = \frac{\hat{I}_{1k}}{\hat{Y}_{11}},$$

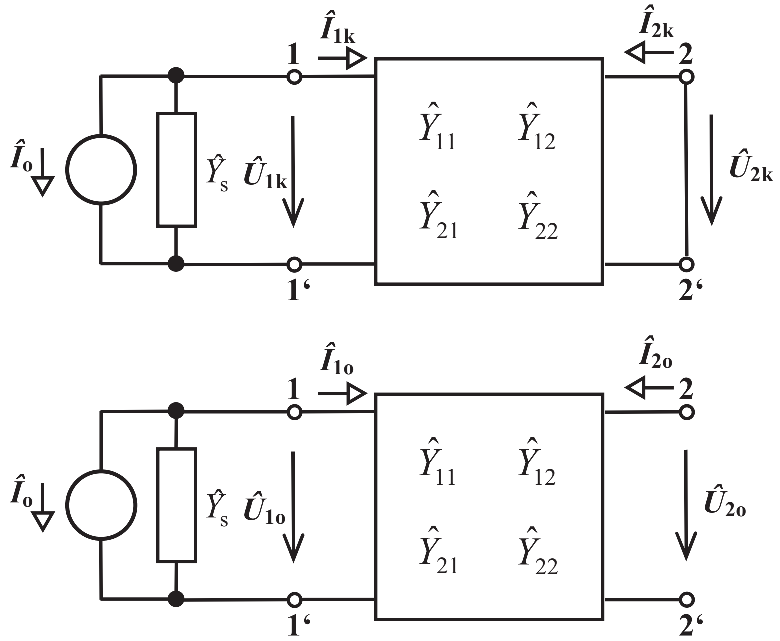
které dosadíme do rovnice druhé brány

$$\hat{I}_{2k} = \hat{Y}_{21}\hat{U}_{1k} = \hat{Y}_{21}\frac{\hat{I}_{1k}}{\hat{Y}_{11}}.$$

Vstupní proud $\hat{I}_{1k}$ určíme z rovnice pro horní uzel vstupní brány, kam dosadíme za napětí $\hat{U}_{1k}$

$$\hat{I}_{1k} = \hat{I}_o - \hat{Y}_z\hat{U}_{1k} = \hat{I}_o - \hat{Y}_s\frac{\hat{I}_{1k}}{\hat{Y}_{11}},$$

ze které pro něj plyne



Obr. 3.7 Určení výstupní impedance dvojbranu z provozních stavů jeho výstupní brány, příklad 3.2

$$\hat{I}_{1k} = \frac{\hat{I}_o}{1 + \dfrac{\hat{Y}_s}{\hat{Y}_{11}}} = \frac{\hat{Y}_{11}\hat{I}_o}{\hat{Y}_{11} + \hat{Y}_s}$$

a pro výstupní proud nakrátko

$$\hat{I}_{2k} = \hat{Y}_{21}\frac{\hat{I}_{1k}}{\hat{Y}_{11}} = \frac{\hat{Y}_{21}}{\hat{Y}_{11}}\frac{\hat{Y}_{11}\hat{I}_o}{\hat{Y}_{11} + \hat{Y}_s} = \frac{\hat{Y}_{21}\hat{I}_o}{\hat{Y}_{11} + \hat{Y}_s}.$$

Při rozpojené výstupní bráně platí pro dolní obvod na obr. 3.7 následující rovnice dvojbranu

$$\hat{I}_{1o} = \hat{Y}_{11}\hat{U}_{1o} + \hat{Y}_{12}\hat{U}_{2o},$$

$$0 = \hat{Y}_{21}\hat{U}_{1o} + \hat{Y}_{22}\hat{U}_{2o},$$

kdy z druhé rovnice si vyjádříme napětí vstupní brány

$$\hat{U}_{1o} = -\frac{\hat{Y}_{22}}{\hat{Y}_{21}}\hat{U}_{2o}.$$

Dosazením rovnice vstupní brány do rovnice pro horní uzel této brány dostaneme rovnici

$$\hat{I}_{1o} = \hat{Y}_{11}\hat{U}_{1o} + \hat{Y}_{12}\hat{U}_{2o} = \hat{I}_o - \hat{Y}_s\hat{U}_{1o},$$

kterou upravíme do tvaru

$$\hat{U}_{1o}\left(\hat{Y}_{11} + \hat{Y}_s\right) + \hat{Y}_{12}\hat{U}_{2o} = \hat{I}_o,$$

a do které dosadíme za napětí $\hat{U}_{1o}$

$$-\frac{\hat{Y}_{22}}{\hat{Y}_{21}}\hat{U}_{2o}\left(\hat{Y}_{11} + \hat{Y}_s\right) + \hat{Y}_{12}\hat{U}_{2o} = \hat{I}_o$$

a vyjádříme si z ní výstupní napětí naprázdno

$$\hat{U}_{2\mathrm{o}} = \frac{\hat{I}_{\mathrm{o}}}{-\dfrac{\hat{Y}_{22}}{\hat{Y}_{21}}\left(\hat{Y}_{11}+\hat{Y}_{\mathrm{s}}\right)+\hat{Y}_{12}} = \frac{\hat{Y}_{21}\hat{I}_{\mathrm{o}}}{-\hat{Y}_{22}\left(\hat{Y}_{11}+\hat{Y}_{\mathrm{s}}\right)+\hat{Y}_{12}\hat{Y}_{21}}\,.$$

Výstupní admitanci určíme podle Nortonovy věty

$$\hat{Y}_2 = -\frac{\hat{I}_{2\mathrm{k}}}{\hat{U}_{2\mathrm{o}}} = -\frac{\dfrac{\hat{Y}_{21}\hat{I}_{\mathrm{o}}}{\hat{Y}_{11}+\hat{Y}_{\mathrm{s}}}}{\dfrac{\hat{Y}_{21}\hat{I}_{\mathrm{o}}}{-\hat{Y}_{22}\left(\hat{Y}_{11}+\hat{Y}_{\mathrm{s}}\right)+\hat{Y}_{12}\hat{Y}_{21}}} = \hat{Y}_{22} - \frac{\hat{Y}_{12}\hat{Y}_{21}}{\hat{Y}_{11}+\hat{Y}_{\mathrm{s}}}\,.$$

Má-li být dvojbran podélně souměrný, musí platit $\hat{Y}_1 = \hat{Y}_2$ a tedy musí být splněna rovnost $\hat{Y}_{11} = \hat{Y}_{22}$.

❑ Impedanční model

Za nezávisle proměnné veličiny volíme branové proudy $\hat{I}_1$, $\hat{I}_2$. Závisle proměnné veličiny jsou branová napětí $\hat{U}_1$, $\hat{U}_2$, které můžeme popsat lineární kombinací proudů

$$\hat{U}_1 = \hat{Z}_{11}\hat{I}_1 + \hat{Z}_{12}\hat{I}_2\,,$$

$$\hat{U}_2 = \hat{Z}_{21}\hat{I}_1 + \hat{Z}_{22}\hat{I}_2\,,$$

nebo v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix}\hat{U}_1\\ \hat{U}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\hat{Z}_{11} & \hat{Z}_{12}\\ \hat{Z}_{21} & \hat{Z}_{22}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\hat{I}_1\\ \hat{I}_2\end{bmatrix},$$

kde parametry dvojbranu jsou definovány impedanční maticí

$$\left[\hat{Z}\right] = \begin{bmatrix}\hat{Z}_{11} & \hat{Z}_{12}\\ \hat{Z}_{21} & \hat{Z}_{22}\end{bmatrix},$$

která je současně charakteristikou dvojbranu. Každy prvek impedanční matice má rozměr Ω.

Vzhledem k linearitě dvojbranu můžeme parametry impedanční matice určit podle obrázku ze stavů naprázdno. Při buzení vstupu dvojbranu zdrojem proudu a rozpojeném výstupu platí $\hat{U}_1 = \hat{Z}_{11}\hat{I}_1$ a $\hat{U}_2 = \hat{Z}_{21}\hat{I}_1$ a při buzení výstupu dvojbranu zdrojem proudu a rozpojeném vstupu platí $\hat{U}_1 = \hat{Z}_{12}\hat{I}_2$ a $\hat{U}_2 = \hat{Z}_{22}\hat{I}_2$. Z těchto rovnic určíme parametry impedanční matice následovně:

vstupní impedanci (naprázdno)

$$\hat{Z}_{11} = \left.\frac{\hat{U}_1}{\hat{I}_1}\right|_{I_2=0},$$

přenosovou impedanci (naprázdno)

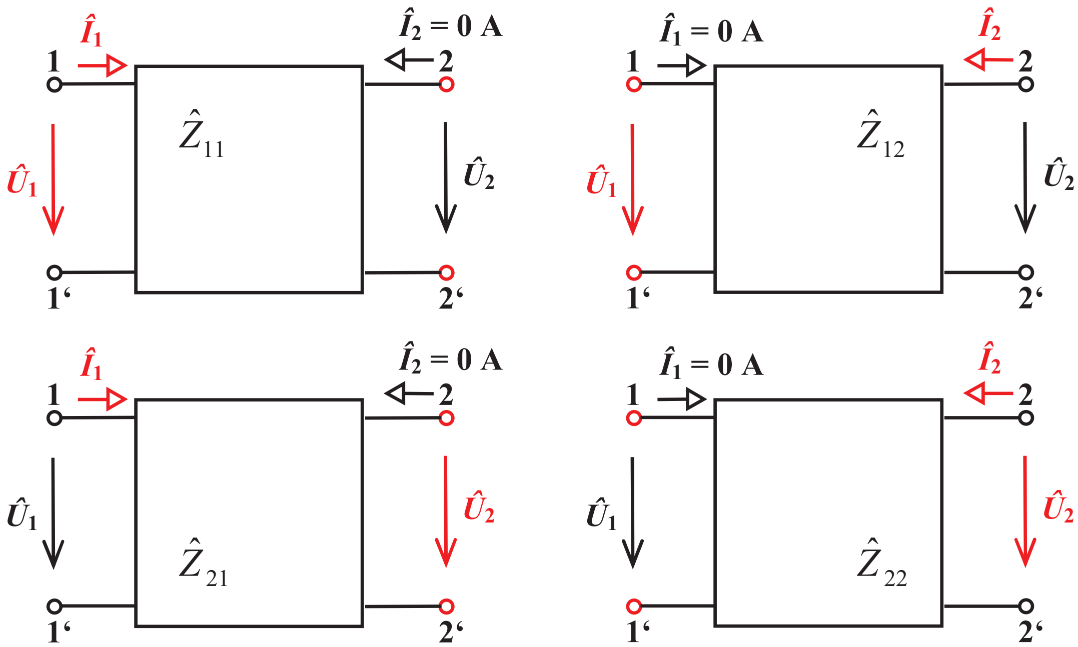
$$\hat{Z}_{12} = \left.\frac{\hat{U}_1}{\hat{I}_2}\right|_{I_1=0},$$

přenosovou impedanci (naprázdno)

$$\hat{Z}_{21} = \left.\frac{\hat{U}_2}{\hat{I}_1}\right|_{I_2=0},$$

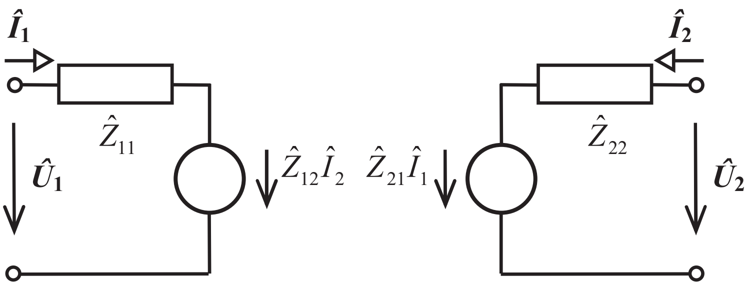
výstupní impedanci (naprázdno)

$$\hat{Z}_{22} = \left.\frac{\hat{U}_2}{\hat{I}_2}\right|_{I_1=0}.$$



Obr. 3.8 Určování impedančních parametrů z provozních stavů dvojbranu

Obvodový model sestavíme na základě 2. Kirchhoffova zákon, kterému odpovídá sériové řazení obvodových prvků na obr. 3.9, proto také jinak říkáme impedančnímu modelu sériově sériový.

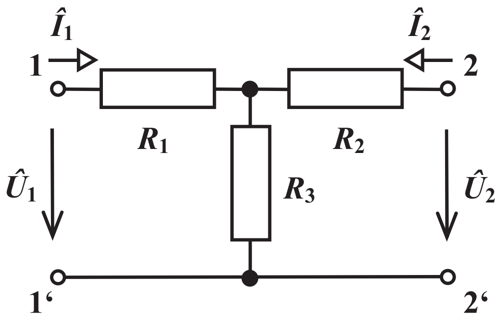


Obr. 3.9 Náhradní schéma impedančního modelu dvojbranu

Obecně je impedanční dvojbran definován (charakterizován) čtyřmi různými nezávislými parametry impedanční matice. Je-li dvojbran složen pouze z pasivních prvků, platí pro něj princip reciprocity. Po připojení zdroje proudu o hodnotě I ke vstupní bráně, má výstupní napětí naprázdno dvojbranu stejnou hodnotu, jakou má jeho vstupní napětí naprázdno po připojení zdroje o hodnotě proudu I k jeho výstupní bráně. Ve stavu naprázdno platí pro výstupní napětí $\hat{U}_2 = \hat{Z}_{21}\hat{I}$ a pro vstupní napětí $\hat{U}_1 = \hat{Z}_{12}\hat{I}$, takže $\hat{Z}_{12} = \hat{Z}_{21}$. Tím se sníží počet nezávislých parametrů u reciprokého dvojbranu na tři. Dvěma parametry je charakterizován tzv. souměrný dvojbran, což je podélně souměrný dvojbran, pro který platí $\hat{Z}_{11} = \hat{Z}_{22}$. Zaměníme-li u tohoto dvojbranu vstup a výstup, jeho obvodové poměry se nezmění.

Příklad 3.3.

Určete impedanční parametry dvojbranu T článku z obr. 3.10.



Obr. 3.10 T článek jako dvojbran, příklad 3.3

♦

Parametry určíme přímou aplikací Kirchhoffových zákonů a zobecněného Ohmova zákona na obvod na obr. 3.10. Z definičních vztahů platí pro vstupní impedanci naprázdno, kdy bránu 1 budíme proudem $\hat{I}_1$

$$\hat{Z}_{11} = \left.\frac{\hat{U}_1}{\hat{I}_1}\right|_{I_2=0} = \frac{(\hat{Z}_1 + \hat{Z}_3)\hat{I}_1}{\hat{I}_1} = \hat{Z}_1 + \hat{Z}_3 = R_1 + R_3,$$

pro přenosovou impedanci naprázdno, kdy bránu 2 budíme proudem $\hat{I}_2$

$$\hat{Z}_{12} = \left.\frac{\hat{U}_1}{\hat{I}_2}\right|_{I_1=0} = \frac{\hat{Z}_3 \hat{I}_2}{\hat{I}_2} = \hat{Z}_3 = R_3,$$

pro přenosovou impedanci naprázdno, kdy bránu 1 budíme proudem $\hat{I}_1$

$$\hat{Z}_{21} = \left.\frac{\hat{U}_2}{\hat{I}_1}\right|_{I_2=0} = \frac{\hat{Z}_3 \hat{I}_1}{\hat{I}_1} = \hat{Z}_3 = R_3,$$

pro výstupní impedanci naprázdno, kdy bránu 2 budíme proudem $\hat{I}_2$

$$\hat{Z}_{22} = \left.\frac{\hat{U}_2}{\hat{I}_2}\right|_{I_1=0} = \frac{(\hat{Z}_2 + \hat{Z}_3)\hat{I}_2}{\hat{I}_2} = \hat{Z}_2 + \hat{Z}_3 = R_2 + R_3.$$

Impedanční matice má parametry

$$[\hat{Z}] = \begin{bmatrix} \hat{Z}_{11} & \hat{Z}_{12} \\ \hat{Z}_{21} & \hat{Z}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_3 & R_3 \\ R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix}$$

a odpovídá matici obvodu sestavené dle pravidel metody smyčkových proudů.

Smíšený model paralelně sériový

Za nezávisle proměnné veličiny volíme branové napětí $\hat{U}_1$ a proud $\hat{I}_2$. Závisle proměnné veličiny jsou branový proud $\hat{I}_1$ a napětí $\hat{U}_2$, které můžeme popsat lineární kombinací nezávislých veličin

$$\hat{I}_1 = \hat{K}_{11}\hat{U}_1 + \hat{K}_{12}\hat{I}_2,$$

$$\hat{U}_2 = \hat{K}_{21}\hat{U}_1 + \hat{K}_{22}\hat{I}_2,$$

nebo v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{K}_{11} & \hat{K}_{12} \\ \hat{K}_{21} & \hat{K}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{I}_2 \end{bmatrix},$$

kde parametry dvojbranu jsou definovány smíšenou maticí

$$[\hat{K}] = \begin{bmatrix} \hat{K}_{11} & \hat{K}_{12} \\ \hat{K}_{21} & \hat{K}_{22} \end{bmatrix},$$

která je současně charakteristikou dvojbranu. Každý prvek smíšené matice má jiný rozměr, $\hat{K}_{12}$ a $\hat{K}_{21}$ jsou bezrozměrné, $\hat{K}_{11}$ má jednotku S a $\hat{K}_{22}$ jednotku Ω.

Vzhledem k linearitě dvojbranu můžeme parametry smíšené matice určit podle obr. 3.11 ze stavů naprázdno a nakrátko. Při buzení vstupu dvojbranu zdrojem napětí a rozpojeném výstupu platí $\hat{I}_1 = \hat{K}_{11}\hat{U}_1$ a $\hat{U}_2 = \hat{K}_{21}\hat{U}_1$ a při buzení výstupu dvojbranu zdrojem proudu a zkratovaném vstupu platí $\hat{I}_1 = \hat{K}_{12}\hat{I}_2$ a $\hat{U}_2 = \hat{K}_{22}\hat{I}_2$. Z těchto rovnic určíme parametry smíšené matice následovně:

vstupní admitanci (naprázdno)

$$\hat{K}_{11} = \left.\frac{\hat{I}_1}{\hat{U}_1}\right|_{I_2=0},$$

proudový přenos (nakrátko)

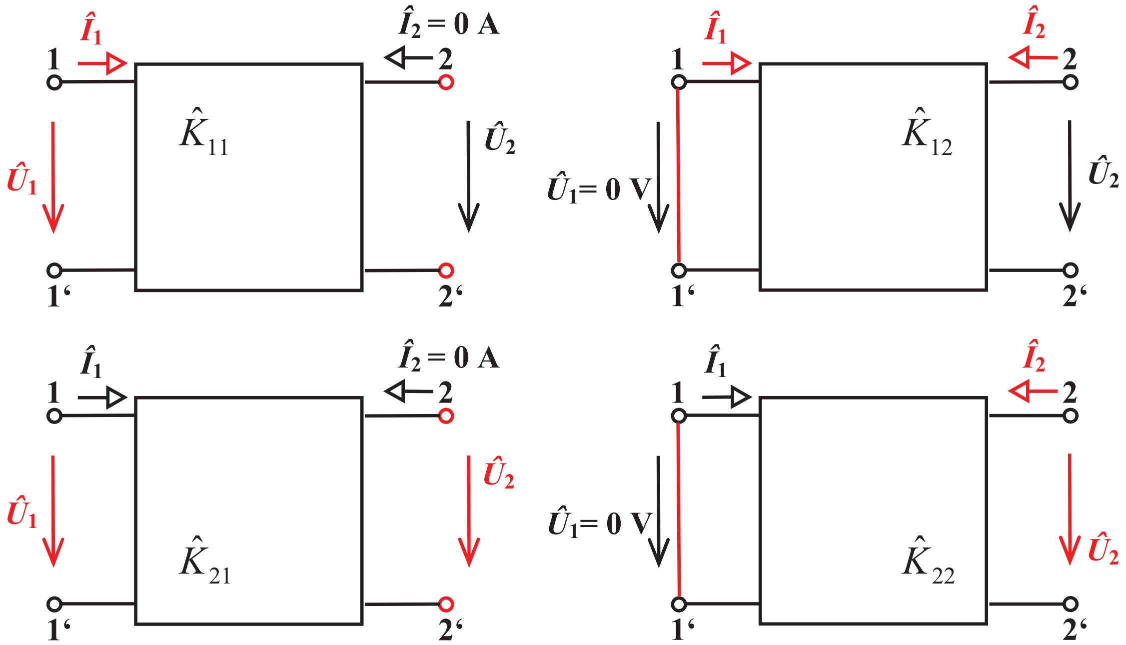
$$\hat{K}_{12} = \left.\frac{\hat{I}_1}{\hat{I}_2}\right|_{U_1=0},$$

napěťový přenos (naprázdno)

$$\hat{K}_{21} = \left.\frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1}\right|_{I_2=0},$$

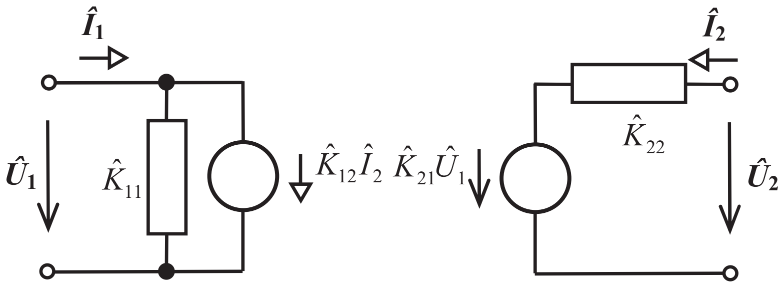
výstupní admitanci (nakrátko)

$$\hat{K}_{22} = \left.\frac{\hat{U}_2}{\hat{I}_2}\right|_{U_1=0}.$$



Obr. 3.11 Určování $\hat{K}$ parametrů z provozních stavů dvojbranu

Obvodový model sestavíme na základě 1. a 2. Kirchhoffova zákona, kterému odpovídá paralelně sériové řazení obvodových prvků na obr. 3.12. Odtud pochází i název modelu.



Obr. 3.12 Náhradní schéma smíšeného modelu dvojbranu s $\hat{K}$ parametry

Obecně je paralelně sériový model dvojbranu definován (charakterizován) čtyřmi různými nezávislými parametry smíšené matice. Je-li dvojbran složen pouze z pasivních prvků, platí pro něj princip reciprocity. Jelikož každá brána má jiné náhradní schéma, můžeme si vybrat při odvození podmínky reciprocity tohoto dvojbranu buď napěťové nebo proudové buzení jeho bran. Při proudovém buzení připojíme na vstupní bránu zdroj proudu o hodnotě $\hat{I}$, takže na rozpojeném výstupu, tj. při $\hat{I}_2 = 0$ A, bude napětí $\hat{U}_2 = \hat{K}_{21}\hat{U}_1 = \hat{K}_{21}\dfrac{\hat{I}}{\hat{K}_{11}}$, které je stejné jako napětí $\hat{U}_1$ při buzení výstupu stejným proudem a při rozpojeném vstupu tj. při $\hat{I}_1 = 0$ A. Toto napětí určíme z první rovnice paralelně sériového modelu $0 = \hat{K}_{11}\hat{U}_1 + \hat{K}_{12}\hat{I}$, které je $\hat{U}_1 = -\dfrac{\hat{K}_{12}}{\hat{K}_{11}}\hat{I}$. Z rovnosti těchto napětí plyne podmínka reciprocity $\hat{K}_{12} = -\hat{K}_{21}$, čímž se sníží počet nezávislých parametrů dvojbranu na tři. Dvěma parametry je charakterizován tzv. souměrný dvojbran, což je podélně souměrný dvojbran, pro který platí $\hat{K}_{11}\hat{K}_{22} - \hat{K}_{12}\hat{K}_{21} = -1$, takže se obvodové poměry nezmění, zaměníme-li jeho vstup a výstup.

❑ Smíšený model sériově paralelní

Za nezávisle proměnné veličiny volíme branový proud $\hat{I}_1$ a napětí $\hat{U}_2$. Závisle proměnné veličiny jsou branové napětí $\hat{U}_1$ a proud $\hat{I}_2$, které můžeme popsat lineární kombinací nezávislých veličin

$$\hat{U}_1 = \hat{H}_{11}\hat{I}_1 + \hat{H}_{12}\hat{U}_2 ,$$

$$\hat{I}_2 = \hat{H}_{21}\hat{I}_1 + \hat{H}_{22}\hat{U}_2 ,$$

nebo v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{H}_{11} & \hat{H}_{12} \\ \hat{H}_{21} & \hat{H}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{U}_2 \end{bmatrix},$$

kde parametry dvojbranu jsou definovány smíšenou maticí

$$\left[\hat{H}\right] = \begin{bmatrix} \hat{H}_{11} & \hat{H}_{12} \\ \hat{H}_{21} & \hat{H}_{22} \end{bmatrix},$$

která je současně charakteristikou dvojbranu. Každý prvek smíšené matice má jiný rozměr, $\hat{H}_{12}$ a $\hat{H}_{21}$ jsou bezrozměrné, $\hat{H}_{11}$ má jednotku Ω a $\hat{H}_{22}$ jednotku S.

Vzhledem k linearitě dvojbranu můžeme parametry smíšené matice určit podle obr. 3.13 ze stavů nakrátko a naprázdno. Při buzení vstupu dvojbranu zdrojem proudu a výstupu nakrátko platí $\hat{U}_1 = \hat{H}_{11}\hat{I}_1$ a $\hat{I}_2 = \hat{H}_{21}\hat{I}_1$ a při buzení výstupu dvojbranu zdrojem napětí a rozpojeném vstupu platí $\hat{U}_1 = \hat{H}_{12}\hat{U}_2$ a $\hat{I}_2 = \hat{H}_{22}\hat{U}_2$. Z těchto rovnic určíme parametry smíšené matice následovně:

vstupní impedanci (nakrátko)

$$\hat{H}_{11} = \left.\frac{\hat{U}_1}{\hat{I}_1}\right|_{U_2=0},$$

napěťový přenos (naprázdno)

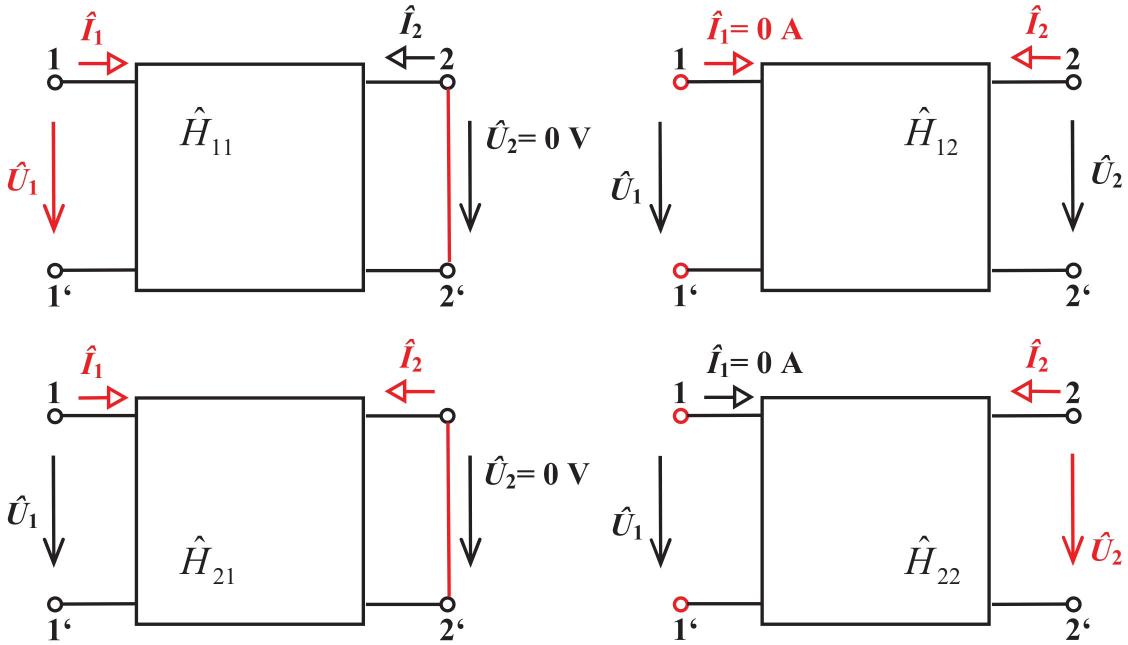
$$\hat{H}_{12} = \left.\frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_2}\right|_{I_1=0},$$

proudový přenos (nakrátko)

$$\hat{H}_{21} = \left.\frac{\hat{I}_2}{\hat{I}_1}\right|_{U_2=0},$$

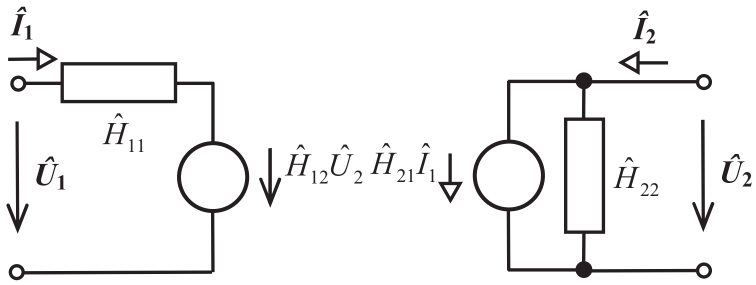
výstupní admitanci (naprázdno)

$$\hat{H}_{22} = \left.\frac{\hat{I}_2}{\hat{U}_2}\right|_{I_1=0}.$$



Obr. 3.13 Určování $\hat{H}$ parametrů z provozních stavů dvojbranu

Obvodový model sestavíme na základě 2. a 1. Kirchhoffova zákona, kterému odpovídá sériově paralelní řazení obvodových prvků na obr. 3.14. Odtud pochází i název modelu.



Obr. 3.14 Náhradní schéma smíšeného modelu dvojbranu s $\hat{H}$ parametry

Obecně je sériově paralelní model dvojbranu definován (charakterizován) čtyřmi různými nezávislými parametry smíšené matice. Je-li dvojbran složen pouze z pasivních prvků, platí pro něj princip reciprocity. Jelikož každá brána má jiné náhradní schéma, můžeme si vybrat při odvození podmínky reciprocity tohoto dvojbranu buď napěťové nebo proudové buzení jeho bran. Při proudovém buzení připojíme na vstupní bránu zdroj proudu o hodnotě $\hat{I}$, takže na rozpojeném výstupu, tj. při $\hat{I}_2$ = 0 A, určíme napětí $\hat{U}_2$ z druhé rovnice sériově paralelního modelu $0=\hat{H}_{11}\hat{I}+\hat{H}_{12}\hat{U}_2$, které je $\hat{U}_2=-\dfrac{\hat{H}_{21}}{\hat{H}_{22}}\hat{I}$. Napětí $\hat{U}_2$ musí být stejné jako napětí $\hat{U}_1=\hat{H}_{12}\hat{U}_2=\hat{H}_{12}\dfrac{\hat{I}}{\hat{H}_{22}}$ při buzení výstupu stejným proudem a při rozpojeném vstupu, tj. při $\hat{I}_1$ = 0 A. Z rovnosti těchto napětí plyne podmínka reciprocity $\hat{H}_{12}=-\hat{H}_{21}$, čímž se sníží počet nezávislých parametrů dvojbranu na tři. Pouze dvěma parametry je charakterizován tzv. souměrný dvojbran, což je podélně souměrný dvojbran, pro který platí $\hat{H}_{11}\hat{H}_{22}-\hat{H}_{12}\hat{H}_{21}=1$, takže se obvodové poměry nezmění, zaměníme-li jeho vstup a výstup.

❑ Kaskádní model

Kaskádní parametry dvojbranu používáme k modelování kaskádního řazení dvojbranů, u kterých zpravidla předpokládáme přenos energie ze vstupní brány na výstupní bránu, takže volíme opačný směr proudu výstupní brány, tj. $\hat{I}'_2 = -\hat{I}_2$. Za nezávisle proměnné veličiny volíme branové napětí $\hat{U}_2$ a proud $-\hat{I}_2$, tj. proud $\hat{I}'_2$. Závisle proměnné veličiny jsou branové napětí $\hat{U}_1$ a proud $\hat{I}_1$, které můžeme popsat lineární kombinací nezávislých veličin

$$\hat{U}_1 = \hat{A}_{11}\hat{U}_2 + \hat{A}_{12}\left(-\hat{I}_2\right) = \hat{A}_{11}\hat{U}_2 + \hat{A}_{12}\hat{I}'_2,$$

$$\hat{I}_1 = \hat{A}_{21}\hat{U}_2 + \hat{A}_{22}\left(-\hat{I}_2\right) = \hat{A}_{21}\hat{U}_2 + \hat{A}_{22}\hat{I}'_2$$

nebo v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{U}_2 \\ -\hat{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{U}_2 \\ \hat{I}'_2 \end{bmatrix},$$

kde parametry dvojbranu jsou definovány kaskádní maticí

$$\left[\hat{A}\right] = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{bmatrix},$$

která je současně charakteristikou dvojbranu. Každý prvek kaskádní matice má jiný rozměr, $\hat{A}_{11}$ a $\hat{A}_{22}$ jsou bezrozměrné, $\hat{A}_{12}$ má jednotku Ω a $\hat{A}_{21}$ jednotku S.

Vzhledem k linearitě dvojbranu můžeme parametry kaskádní matice určit podle obr. 3. 15 ze stavů naprázdno a nakrátko. Při buzení vstupu dvojbranu zdrojem napětí nebo proudu a jeho rozpojeném výstupu, tj. při $\hat{I}_2 = 0$ A, platí $\hat{U}_1 = \hat{A}_{11}\hat{U}_2$, $\hat{I}_1 = \hat{A}_{21}\hat{U}_2$ a jeho vyzkratovaném výstupu, tj. při $\hat{U}_2 = 0$ A, platí $\hat{U}_1 = -\hat{A}_{12}\hat{I}_2$ a $\hat{I}_1 = -\hat{A}_{22}\hat{I}_2$. Z těchto rovnic určíme parametry kaskádní matice následovně:

napěťový přenos (naprázdno)

$$\hat{A}_{11} = \left.\frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_2}\right|_{I_2=0},$$

přenosová impedance (nakrátko)

$$\hat{A}_{12} = \left.\frac{\hat{U}_1}{-\hat{I}_2}\right|_{U_2=0},$$

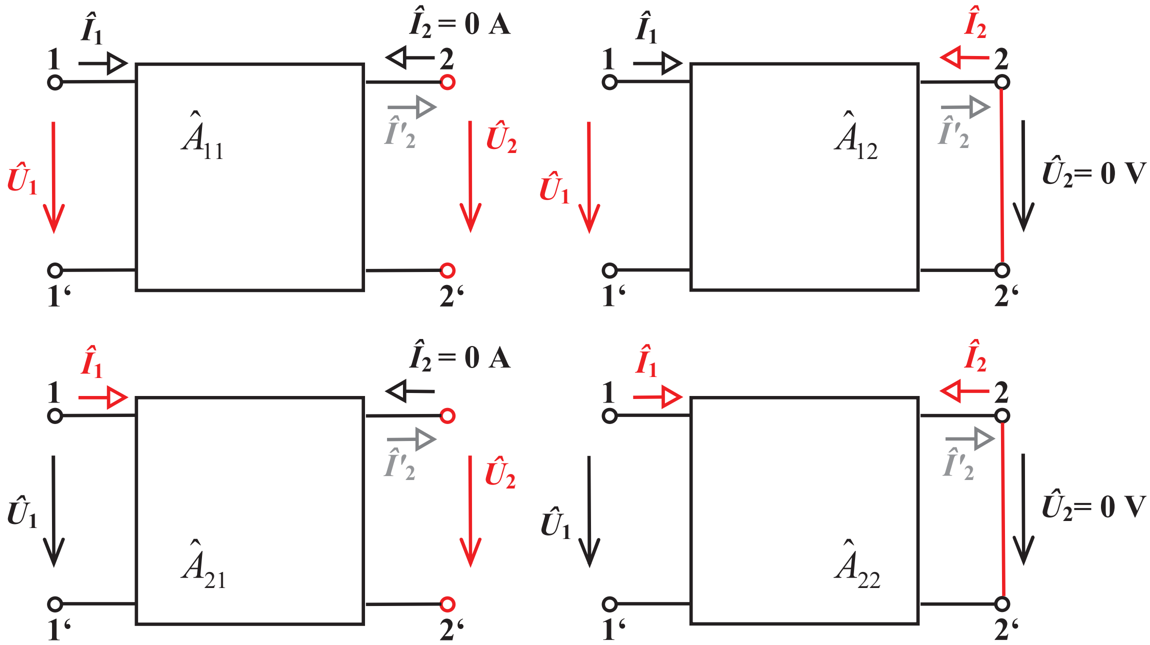
přenosová admitance (naprázdno)

$$\hat{A}_{21} = \left.\frac{\hat{I}_1}{\hat{U}_2}\right|_{I_2=0},$$

proudový přenos (nakrátko)

$$\hat{A}_{22} = \left.\frac{\hat{I}_1}{-\hat{I}_2}\right|_{U_2=0}.$$

Obvodový model kaskádního dvojbranu neexistuje.

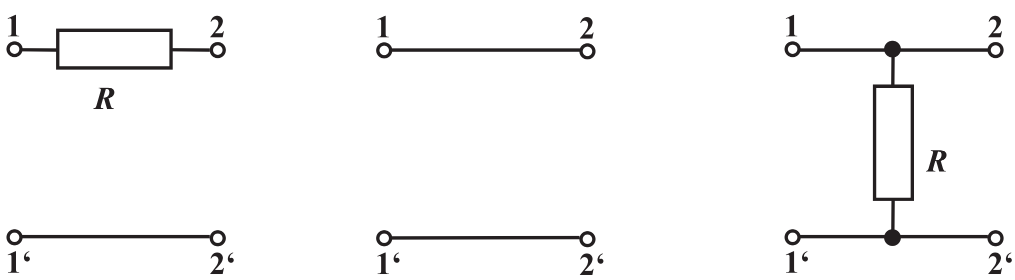


Obr. 3.15 Určování kaskádních parametrů z provozních stavů dvojbranu

Tento dvojbran je definován (charakterizován) čtyřmi různými nezávislými parametry kaskádní matice. Je-li složen pouze z pasivních prvků, platí pro něj princip reciprocity. Při proudovém buzení připojíme na vstupní bránu zdroj proudu o hodnotě $\hat{I}$, takže na rozpojeném výstupu, tj. při $\hat{I}_2 = 0$ A, bude přímo z druhé rovnice pro toto napětí platit $\hat{U}_2 = \frac{1}{\hat{A}_{21}} \hat{I}$. Toto napětí musí být stejné jako napětí $\hat{U}_1$ při rozpojeném vstupu, tj. při $\hat{I}_1 = 0$ A a buzení výstupu stejným proudem $\hat{I}$. Po dosazení nulové hodnoty vstupního proudu do druhé rovnice získáme rovnost $0 = \hat{A}_{21}\hat{U}_2 - \hat{A}_{22}\,\hat{I}$, ze které si vyjádříme napětí $\hat{U}_2$, které dosadíme do první rovnice $\hat{U}_1 = \hat{A}_{11}\hat{U}_2 - \hat{A}_{12}\,\hat{I}$, čímž získáme vstupní napětí $\hat{U}_1 = \frac{\hat{A}_{11}\,\hat{A}_{22}}{\hat{A}_{21}}\hat{I} - \hat{A}_{12}\,\hat{I} = \frac{\hat{A}_{11}\,\hat{A}_{22} - \hat{A}_{12}\,\hat{A}_{21}}{\hat{A}_{21}}\hat{I}$. Aby bylo vyhověno principu reciprocity, musí platit $\hat{A}_{11}\,\hat{A}_{22} - \hat{A}_{12}\,\hat{A}_{21} = 1$, čímž se sníží počet nezávislých parametrů dvojbranu na tři. Dvěma parametry je charakterizován tzv. souměrný dvojbran, což je podélně souměrný dvojbran, pro který platí $\hat{A}_{11} = \hat{A}_{22}$, takže se obvodové poměry nezmění, zaměníme-li jeho vstup a výstup.

Příklad 3.4.

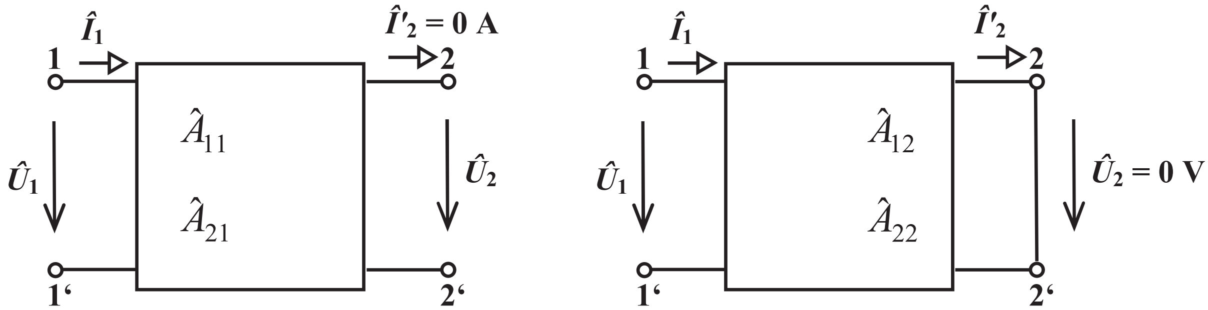
Určete kaskádní parametry modelu jednoduchých dvojbranů na obr. 3.16.



Obr. 3.16 Jednoduché, degenerované dvojbrany, příklad 3.4

♦

Parametry kaskádních matic všech dvojbranů určíme z poměrů branových veličin určených ze stavu naprázdno a nakrátko realizovaných na výstupní bráně dvojbranu. Počítací šipky všech dvojbranů z obr. 3.16 odpovídají situaci na obr. 3.17.



Obr. 3.17 Provozní stavy kaskádního modelu dvojbranu, příklad 3.4

Pro první dvojbran z obr. 3.16 platí ve stavu naprázdno $\hat{I}_2' = 0\,\mathrm{A}$, takže i $\hat{I}_1 = 0\,\mathrm{A}$. Na rezistoru proto nevznikne úbytek a pro napětí platí rovnost $\hat{U}_2 = \hat{U}_1$, takže parametry mají hodnoty

$$\hat{A}_{11} = \left.\frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_2}\right|_{\hat{I}_2'=0} = \frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_1} = 1, \qquad \hat{A}_{21} = \left.\frac{\hat{I}_1}{\hat{U}_2}\right|_{\hat{I}_2'=0} = \frac{0}{\hat{U}_1} = 0.$$

Ve stavu nakrátko platí $\hat{U}_2 = 0\,\mathrm{V}$, takže $\hat{I}_1 = \hat{I}_2' = \hat{U}_1 / R$ a pro parametry platí

$$\hat{A}_{12} = \left.\frac{\hat{U}_1}{\hat{I}_2'}\right|_{U_2=0} = \frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_1 / R} = R, \qquad \hat{A}_{22} = \left.\frac{\hat{I}_1}{\hat{I}_2'}\right|_{U_2=0} = \frac{\hat{I}_1}{\hat{I}_1} = 1.$$

Kaskádní matice prvního dvojbranu je

$$\left[\hat{A}\right] = \begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pro prostřední dvojbran platí pro $\hat{I}_2' = 0\,\mathrm{A}$, že $\hat{I}_1 = 0\,\mathrm{A}$ a $\hat{U}_2 = \hat{U}_1$ a parametry mají hodnoty

$$\hat{A}_{11} = \left.\frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_2}\right|_{\hat{I}_2'=0} = \frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_1} = 1, \qquad \hat{A}_{21} = \left.\frac{\hat{I}_1}{\hat{U}_2}\right|_{\hat{I}_2'=0} = \frac{0}{\hat{U}_1} = 0.$$

Ve stavu nakrátko platí $\hat{U}_2 = 0\,\mathrm{V}$, takže $\hat{I}_1 = \hat{I}_2' \to \infty$ a pro parametry platí

$$\hat{A}_{12} = \lim_{\hat{I}_2' \to \infty} \left.\frac{\hat{U}_1}{\hat{I}_2'}\right|_{U_2=0} = 0, \qquad \hat{A}_{22} = \lim_{\hat{I}_2' \to \infty} \left.\frac{\hat{I}_1}{\hat{I}_2'}\right|_{U_2=0} = 1.$$

Kaskádní matice druhého dvojbranu je

$$\left[\hat{A}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pro poslední dvojbran platí pro $\hat{I}_2' = 0\,\mathrm{A}$, že $\hat{I}_1 = \dfrac{\hat{U}_1}{R}$ a $\hat{U}_2 = \hat{U}_1$ a parametry mají hodnoty

$$\hat{A}_{11}=\left.\frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_2}\right|_{\hat{I}'_2=0}=\frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_1}=1\,,\qquad \hat{A}_{21}=\left.\frac{\hat{I}_1}{\hat{U}_2}\right|_{\hat{I}'_2=0}=\frac{\frac{\hat{U}_1}{R}}{\hat{U}_1}=\frac{1}{R}\,.$$

Ve stavu nakrátko platí $\hat{U}_2=0\,\mathrm{V}$, takže $\hat{I}_1=\hat{I}'_2\to\infty$ a pro parametry platí

$$\hat{A}_{12}=\lim_{\hat{I}'_2\to\infty}\left.\frac{\hat{U}_1}{\hat{I}'_2}\right|_{U_2=0}=0\,,\qquad \hat{A}_{22}=\lim_{\hat{I}'_2\to\infty}\left.\frac{\hat{I}_1}{\hat{I}'_2}\right|_{U_2=0}=1\,.$$

Kaskádní matice třetího dvojbranu je

$$\left[\hat{A}\right]=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{R} & 1\end{bmatrix}.$$

❑ Zpětně kaskádní model

Zpětně kaskádní parametry dvojbranu používáme k modelování kaskádního řazení dvojbranů, u kterých zpravidla předpokládáme přenos energie z výstupní brány na vstupní bránu, takže volíme opačný směr proudu výstupní brány, tj. $\hat{I}'_1=-\hat{I}_1$. Za nezávisle proměnné veličiny volíme branové napětí $\hat{U}_2$ a proud $-\hat{I}_1$, tj. proud $\hat{I}'_1$. Závisle proměnné veličiny jsou branové napětí $\hat{U}_1$ a proud $\hat{I}_1$, které můžeme popsat lineární kombinací nezávislých veličin

$$\hat{U}_2=\hat{B}_{11}\hat{U}_1+\hat{B}_{12}\left(-\hat{I}_1\right)=\hat{B}_{11}\hat{U}_1+\hat{B}_{12}\hat{I}'_1\,,$$

$$\hat{I}_2=\hat{B}_{21}\hat{U}_1+\hat{B}_{22}\left(-\hat{I}_1\right)=\hat{B}_{21}\hat{U}_1+\hat{B}_{22}\hat{I}'_1$$

nebo v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix}\hat{U}_2\\ \hat{I}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{B}_{11} & \hat{B}_{12}\\ \hat{B}_{21} & \hat{B}_{22}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\hat{U}_1\\ -\hat{I}_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{B}_{11} & \hat{B}_{12}\\ \hat{B}_{21} & \hat{B}_{22}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\hat{U}_1\\ \hat{I}'_1\end{bmatrix},$$

kde parametry dvojbranu jsou definovány zpětně kaskádní maticí

$$\left[\hat{B}\right]=\begin{bmatrix}\hat{B}_{11} & \hat{B}_{12}\\ \hat{B}_{21} & \hat{B}_{22}\end{bmatrix},$$

která je současně charakteristikou dvojbranu. Každý prvek kaskádní matice má jiný rozměr, $\hat{B}_{11}$ a $\hat{B}_{22}$ jsou bezrozměrné, $\hat{B}_{12}$ má jednotku Ω a $\hat{B}_{21}$ jednotku S.

Vzhledem k linearitě dvojbranu můžeme parametry kaskádní matice určit podle obrázku ze stavů naprázdno a nakrátko. Při buzení výstupu dvojbranu zdrojem napětí nebo proudu a jeho rozpojeném vstupu, tj. při $\hat{I}_1$ = 0 A, platí $\hat{U}_2=\hat{B}_{11}\hat{U}_1$, $\hat{I}_2=\hat{B}_{21}\hat{U}_1$ a jeho vyzkratovaném vstupu, tj. při $\hat{U}_1$ = 0 A, platí $\hat{U}_2=-\hat{B}_{12}\hat{I}_1$ a $\hat{I}_2=-\hat{B}_{22}\hat{I}_1$. Z těchto rovnic určíme parametry kaskádní matice následovně:

napěťový přenos (naprázdno)

$$\hat{B}_{11}=\left.\frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1}\right|_{I_1=0},$$

přenosová impedance (nakrátko)

$$\hat{B}_{12} = \left.\frac{\hat{U}_2}{-\hat{I}_1}\right|_{U_1=0},$$

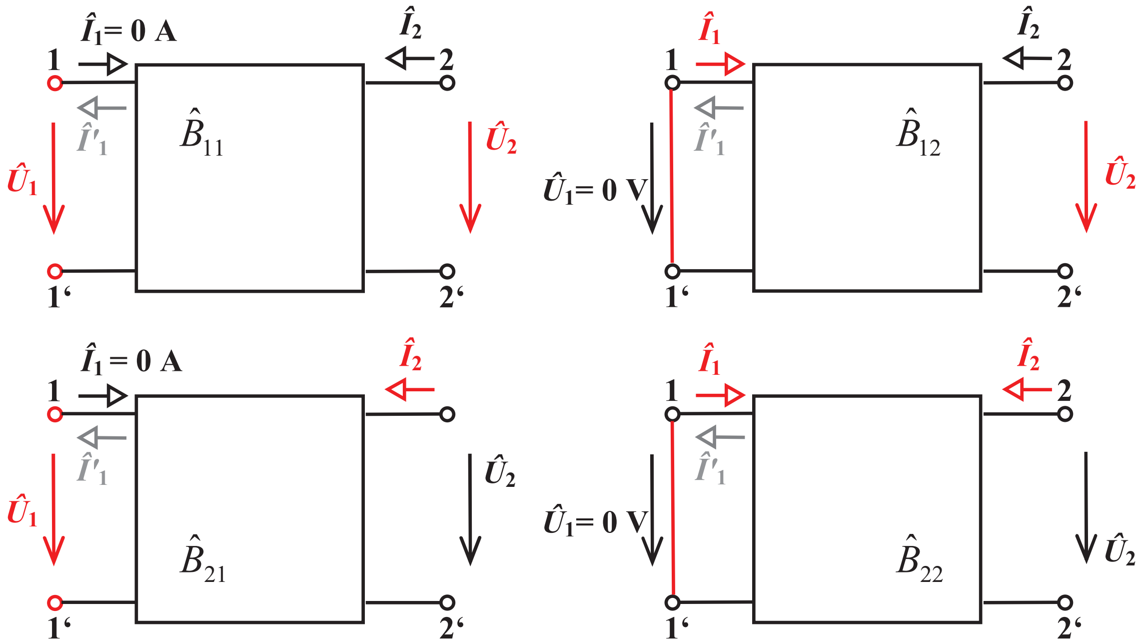
přenosová admitance (naprázdno)

$$\hat{B}_{21} = \left.\frac{\hat{I}_2}{\hat{U}_1}\right|_{I_1=0},$$

proudový přenos (nakrátko)

$$\hat{B}_{22} = \left.\frac{\hat{I}_2}{-\hat{I}_1}\right|_{U_1=0}.$$

Obvodový model zpětně kaskádního dvojbranu neexistuje.



Obr. 3.18 Určování zpětně kaskádních parametrů z provozních stavů dvojbranu

Tento dvojbran je definován (charakterizován) čtyřmi různými nezávislými parametry kaskádní matice. Je-li složen pouze z pasivních prvků, platí pro něj princip reciprocity. Při proudovém buzení připojíme na výstupní bránu zdroj proudu o hodnotě $\hat{I}$, takže na rozpojeném vstupu, tj. při $\hat{I}_1 = 0$ A, bude podle druhé rovnice napětí $\hat{U}_1 = \frac{1}{\hat{B}_{21}}\hat{I}$. Toto napětí musí být stejné jako napětí $\hat{U}_2$ při rozpojeném výstupu, tj. při $\hat{I}_2 = 0$ A a při buzení vstupu stejným proudem $\hat{I}$. Po dosazení nulové hodnoty výstupního proudu do druhé rovnice získáme rovnost $0 = \hat{B}_{21}\hat{U}_1 - \hat{B}_{22}\,\hat{I}$, ze které si vyjádříme napětí $\hat{U}_1$ a dosadíme do první rovnice $\hat{U}_2 = \hat{B}_{11}\hat{U}_1 - \hat{B}_{12}\,\hat{I}$, čímž získáme $\hat{U}_2 = \frac{\hat{B}_{11}\,\hat{B}_{22}}{\hat{B}_{21}}\hat{I} - \hat{B}_{12}\,\hat{I} = \frac{\hat{B}_{11}\,\hat{B}_{22} - \hat{B}_{12}\,\hat{B}_{21}}{\hat{B}_{21}}\hat{I}$. Aby bylo vyhověno principu reciprocity, musí platit $\hat{B}_{11}\,\hat{B}_{22} - \hat{B}_{12}\,\hat{B}_{21} = 1$, čímž sníží počet nezávislých parametrů dvojbranu na tři. Dvěma parametry je charakterizován tzv. souměrný dvojbran, což je podélně souměrný dvojbran, pro který platí $B_{11} = \hat{B}_{22}$, takže se obvodové poměry nezmění, zaměníme-li jeho vstup a výstup.

Shrnutí pojmů 3.2.

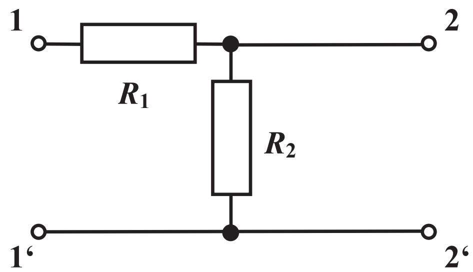
Ze čtyř branových veličin lze pro dvě závislé proměnné vytvořit šest matematických modelů dvojbranů, a to admitančni paralelně-paralelní, impedanční sériově-sériově, smíšený paralelně-sérový, smíšený sériově-paralelní, kaskádní a zpětně kaskádní a pro první čtyři z nich i obvodové modely. Parametry lineárního dvojbranu nejsnáze určíme z jeho stavů naprádno a nakrátko. Dvojbran, u kterého se nezmění obvodové poměry při záměně jeho vstupu a výstupu nazýváme podélně souměrný. Obě brány podélně souměrného dvojbranu tak mají stejné vlastnosti. Dvojbran, který může být i nesouměrný a u kterého se nezmění energetické poměry při záměně jeho vstupu a výstupu, nazýváme reciprocitní. Reciprocitní dvojbrany jsou určeny třemi parametry a podélně souměrné dvěma parametry. Podmínky reciprocity a souměrnosti jsou různé pro jednotlivé modely. Pro reciprocitní dvojbrany platí $\hat{Z}_{12} = \hat{Z}_{21}$, $\hat{Y}_{12} = \hat{Y}_{21}$, $\hat{K}_{12} = -\hat{K}_{21}$, $\hat{H}_{12} = -\hat{H}_{21}$, $\hat{A}_{11}\,\hat{A}_{22} - \hat{A}_{12}\,\hat{A}_{21} = 1$ a $\hat{B}_{11}\,\hat{B}_{22} - \hat{B}_{12}\,\hat{B}_{21} = 1$. Pro podélně souměrné dvojbrany platí $\hat{Z}_{11} = \hat{Z}_{22}$, $\hat{Y}_{11} = \hat{Y}_{22}$, $\hat{K}_{11}\hat{K}_{22} - \hat{K}_{12}\hat{K}_{21} = -1$, $\hat{H}_{11}\hat{H}_{22} - \hat{H}_{12}\hat{H}_{21} = 1$, $\hat{A}_{11} = \hat{A}_{22}$ a $B_{11} = \hat{B}_{22}$.

Otázky 3.2.

1. Je počet matematických a obvodových modelů dvojbranů shodný?
2. Z jakých stavů určujeme parametry dvojbranu?
3. Je možné nakreslit náhradní schéma kaskádního a zpětně kaskádního modelu dvojbranu?
4. Jak byste prakticky ověřili princip reciprocity dvojbranu?
5. Kolika parametry je charakterizován reciprocitní dvojbran?
6. Co musí splňovat dvojbran, aby byl jednoznačně určený dvěma parametry a jak ho nazýváme?
7. Jaká je podmínka podélné souměrnosti kaskádního dvojbranu?
8. Který matematický model dvojbranu je charakterizován $\hat{H}$ -parametry?

Úloha k řešení 3.2

Určete kaskádní parametry dvojbranu z obr. 3.19 z provozních stavů jeho výstupní brány.



Obr. 3.19 L článek jako dvojbran, úloha k řešení 3.2

Řešení:

Počítací šipky dvojbranu z obr. 3.19 volme podle obr. 3.17. Ve stavu naprázdno platí pro výstupní proud $\hat{I}_2' = 0\,\mathrm{A}$, tedy

$$\hat{I}_1 = \frac{\hat{U}_1}{R_1 + R_2} \text{ a } \hat{U}_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\hat{U}_1 .$$

Hledané kaskádní parametry mají tak hodnoty

$$\hat{A}_{11} = \left.\frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_2}\right|_{\hat{I}_2'=0} = \frac{\hat{U}_1}{\frac{R_2}{R_1+R_2}\hat{U}_1} = 1 + \frac{R_1}{R_2}, \qquad \hat{A}_{21} = \left.\frac{\hat{I}_1}{\hat{U}_2}\right|_{\hat{I}_2'=0} = \frac{\frac{\hat{U}_1}{R_1+R_2}}{\frac{R_2}{R_1+R_2}\hat{U}_1} = \frac{1}{R_2} .$$

Ve stavu nakrátko platí $\hat{U}_2 = 0\,\mathrm{V}$, tedy

$$\hat{I}_1 = \hat{I}_2' = \frac{\hat{U}_1}{R_1}$$

a zbývající parametry jsou

$$\hat{A}_{12} = \left.\frac{\hat{U}_1}{\hat{I}_2'}\right|_{U_2=0} = \frac{\hat{U}_1}{\frac{\hat{U}_1}{R_1}} = R_1, \qquad \hat{A}_{22} = \left.\frac{\hat{I}_1}{\hat{I}_2'}\right|_{U_2=0} = 1 .$$

3.3. Vzájemné vztahy mezi charakteristikami dvojbranů

Dvojbran je jednoznačně charakterizován libovolným ze šesti uvedených modelů. Každý model je však výhodný pro řešení jiné obvodové situace, proto je prospěšné znát vzájemné vztahy (přepočty, transformace) mezi jednotlivými charakteristikami, abychom si mohli kterýkoliv model "dopočítat" z modelu, který známe. K těmto vztahům se snadno dopracujeme formálními úpravami příslušných matematických modelů - jejich lineárními transformacemi.

❑ Vztahy mezi imitančními modely

Maticový tvar admitančního modelu zapišme zjednodušeně maticovým zápisem

$$[\hat{Y}]\cdot[\hat{U}] = [\hat{I}] .$$

Po vynásobení jeho pravé i levé strany inverzní maticí $[\hat{Y}]^{-1}$ zleva dostaneme

$$[\hat{Y}]^{-1}\cdot[\hat{Y}]\cdot[\hat{U}] = [\hat{Y}]^{-1}\cdot[\hat{I}].$$

Jelikož součin inverzní admitanční matice a admitanční matice se rovná jednotkové matici, a protože platí

$$[\hat{Z}] = [\hat{Y}]^{-1},$$

získáme impedanční model

$$[\hat{U}] = [\hat{Z}]\cdot[\hat{I}] .$$

Ze známých parametrů admitanční matice získáme vztahy pro výpočet parametrů impedanční matice srovnáním prvků matic levé a pravé strany podle rovnosti $[\hat{Z}] = [\hat{Y}]^{-1}$, tedy

$$\begin{bmatrix} \hat{Z}_{11} & \hat{Z}_{12} \\ \hat{Z}_{21} & \hat{Z}_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{|\hat{Y}|}\begin{bmatrix} \hat{Y}_{22} & -\hat{Y}_{12} \\ -\hat{Y}_{21} & \hat{Y}_{11} \end{bmatrix}.$$

Prvky admitanční matice ze známých prvků impedanční matice získáme formální záměnou duálních prvků. Oba tyto modely jsou navzájem inverzní, takže pro prvky admitanční matice platí

$$\begin{bmatrix} \hat{Y}_{11} & \hat{Y}_{12} \\ \hat{Y}_{21} & \hat{Y}_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\left|\hat{Z}\right|} \begin{bmatrix} \hat{Z}_{22} & -\hat{Z}_{12} \\ -\hat{Z}_{21} & \hat{Z}_{11} \end{bmatrix}.$$

❑ Vztahy mezi smíšenými modely

Analogický postup můžeme aplikovat i na smíšený paralelně-sériový a sériově-paralelní model, protože i tyto modely jsou navzájem duální. Po vynásobení paralelně-sériového modelu inverzní maticí $\left[\hat{K}\right]^{-1}$

$$\begin{bmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{K}_{11} & \hat{K}_{12} \\ \hat{K}_{21} & \hat{K}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{I}_2 \end{bmatrix},$$

získáme

$$\begin{bmatrix} \hat{K}_{11} & \hat{K}_{12} \\ \hat{K}_{21} & \hat{K}_{22} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{K}_{11} & \hat{K}_{12} \\ \hat{K}_{21} & \hat{K}_{22} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \hat{K}_{11} & \hat{K}_{12} \\ \hat{K}_{21} & \hat{K}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{I}_2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \hat{K}_{11} & \hat{K}_{12} \\ \hat{K}_{21} & \hat{K}_{22} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{I}_2 \end{bmatrix}$$

tedy

$$\begin{bmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{K}_{11} & \hat{K}_{12} \\ \hat{K}_{21} & \hat{K}_{22} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{U}_2 \end{bmatrix},$$

který srovnáme s modelem sériově-paralelním

$$\begin{bmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{H}_{11} & \hat{H}_{12} \\ \hat{H}_{21} & \hat{H}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{U}_2 \end{bmatrix},$$

takže platí

$$\begin{bmatrix} \hat{H}_{11} & \hat{H}_{12} \\ \hat{H}_{21} & \hat{H}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{K}_{11} & \hat{K}_{12} \\ \hat{K}_{21} & \hat{K}_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\left|\hat{K}\right|} \begin{bmatrix} \hat{K}_{22} & -\hat{K}_{12} \\ -\hat{K}_{21} & \hat{K}_{11} \end{bmatrix}.$$

Pro opačný přepočet pak platí

$$\begin{bmatrix} \hat{K}_{11} & \hat{K}_{12} \\ \hat{K}_{21} & \hat{K}_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\left|\hat{H}\right|} \begin{bmatrix} \hat{H}_{22} & -\hat{H}_{12} \\ -\hat{H}_{21} & \hat{H}_{11} \end{bmatrix}.$$

❑ Vztahy mezi kaskádními modely

I když by se na první pohled mohlo zdát, že charakteristiky obou těchto modelů jsou navzájem inverzní, ukažme si odvozením transformačních vztahů pro přepočet kaskádních parametrů na zpětně kaskádní algebraickými úpravami rovnic kaskádního modelu, že tomu tak není. Rovnice kaskádního modelu jsou

$$\hat{U}_1 = \hat{A}_{11}\hat{U}_2 + \hat{A}_{12}\left(-\hat{I}_2\right) = \hat{A}_{11}\hat{U}_2 + \hat{A}_{12}\hat{I}'_2,$$

$$\hat{I}_1 = \hat{A}_{21}\hat{U}_2 + \hat{A}_{22}\left(-\hat{I}_2\right) = \hat{A}_{21}\hat{U}_2 + \hat{A}_{22}\hat{I}'_2$$

upravíme do tvaru zpětně kaskádního modelu

$$\hat{U}_2 = \hat{B}_{11}\hat{U}_1 + \hat{B}_{12}\left(-\hat{I}_1\right) = \hat{B}_{11}\hat{U}_1 + \hat{B}_{12}\hat{I}'_1,$$

$$\hat{I}_2 = \hat{B}_{21}\hat{U}_1 + \hat{B}_{22}\left(-\hat{I}_1\right) = \hat{B}_{21}\hat{U}_1 + \hat{B}_{22}\hat{I}'_1$$

tak, že první rovnici kaskádního modelu, abychom z ní mohli vyjádřit $\hat{U}_2$ vynásobíme prvkem $\hat{A}_{22}$ a druhou $\left(-\hat{A}_{12}\right)$ a sečteme

$$\hat{A}_{22}\,\hat{U}_1 = \hat{A}_{22}\,\hat{A}_{11}\,\hat{U}_2 + \hat{A}_{22}\,\hat{A}_{12}\left(-\hat{I}_2\right),$$

$$-\hat{A}_{12}\,\hat{I}_1 = -\hat{A}_{12}\,\hat{A}_{21}\hat{U}_2 - \hat{A}_{12}\,\hat{A}_{22}\left(-\hat{I}_2\right),$$

čímž po úpravě dostaneme

$$\hat{A}_{22}\,\hat{U}_1 - \hat{A}_{12}\,\hat{I}_1 = \left(\hat{A}_{11}\,\hat{A}_{22} - \hat{A}_{12}\,\hat{A}_{21}\right)\hat{U}_2\,.$$

Obdobně první rovnici kaskádního modelu, abychom z ní mohli vyjádřit $\hat{I}_2$ vynásobíme prvkem $\hat{A}_{21}$ a druhou $\left(-\hat{A}_{11}\right)$ a sečteme

$$\hat{A}_{21}\,\hat{U}_1 = \hat{A}_{21}\,\hat{A}_{11}\,\hat{U}_2 + \hat{A}_{12}\,\hat{A}_{21}\left(-\hat{I}_2\right),$$

$$-\hat{A}_{11}\,\hat{I}_1 = -\hat{A}_{21}\,\hat{A}_{11}\hat{U}_2 - \hat{A}_{11}\,\hat{A}_{22}\left(-\hat{I}_2\right),$$

čímž po úpravě dostaneme

$$\hat{A}_{21}\,\hat{U}_1 - \hat{A}_{11}\,\hat{I}_1 = -\left(\hat{A}_{11}\,\hat{A}_{22} - \hat{A}_{12}\,\hat{A}_{21}\right)\left(-\hat{I}_2\right)$$

nebo

$$\hat{A}_{21}\,\hat{U}_1 - \hat{A}_{11}\,\hat{I}_1 = \left(\hat{A}_{11}\,\hat{A}_{22} - \hat{A}_{12}\,\hat{A}_{21}\right)\hat{I}_2$$

a tedy na konec i transformovanou podobu rovnic

$$\hat{U}_2 = \frac{\hat{A}_{22}\,\hat{U}_1 - \hat{A}_{12}\,\hat{I}_1}{\hat{A}_{11}\,\hat{A}_{22} - \hat{A}_{12}\,\hat{A}_{21}} = \frac{\hat{A}_{22}}{\left|\hat{A}\right|}\hat{U}_1 - \frac{\hat{A}_{12}}{\left|\hat{A}\right|}\hat{I}_1,$$

$$\hat{I}'_2 = \left(-\hat{I}_2\right) = \frac{\hat{A}_{21}\,\hat{U}_1 - \hat{A}_{11}\,\hat{I}_1}{\hat{A}_{11}\,\hat{A}_{22} - \hat{A}_{12}\,\hat{A}_{21}} = -\frac{\hat{A}_{21}}{\left|\hat{A}\right|}\hat{U}_1 + \frac{\hat{A}_{11}}{\left|\hat{A}\right|}\hat{I}_1,$$

nebo

$$\hat{U}_2 = \frac{\hat{A}_{22}\,\hat{U}_1 - \hat{A}_{12}\,\hat{I}_1}{\hat{A}_{11}\,\hat{A}_{22} - \hat{A}_{12}\,\hat{A}_{21}} = \frac{\hat{A}_{22}}{\left|\hat{A}\right|}\hat{U}_1 + \frac{\hat{A}_{12}}{\left|\hat{A}\right|}\left(-\hat{I}_1\right) = \frac{\hat{A}_{22}}{\left|\hat{A}\right|}\hat{U}_1 + \frac{\hat{A}_{12}}{\left|\hat{A}\right|}\hat{I}'_1,$$

$$\hat{I}_2 = \frac{\hat{A}_{21}\,\hat{U}_1 - \hat{A}_{11}\,\hat{I}_1}{\hat{A}_{11}\,\hat{A}_{22} - \hat{A}_{12}\,\hat{A}_{21}} = \frac{\hat{A}_{21}}{\left|\hat{A}\right|}\hat{U}_1 + \frac{\hat{A}_{11}}{\left|\hat{A}\right|}\left(-\hat{I}_1\right) = \frac{\hat{A}_{21}}{\left|\hat{A}\right|}\hat{U}_1 + \frac{\hat{A}_{11}}{\left|\hat{A}\right|}\hat{I}'_1\,.$$

Z následného srovnání odpovídajících prvků plyne

$$\hat{B}_{11} = \frac{\hat{A}_{22}}{\left|\hat{A}\right|}, \qquad \hat{B}_{12} = \frac{\hat{A}_{12}}{\left|\hat{A}\right|}$$

$$\hat{B}_{21} = \frac{\hat{A}_{21}}{\left|\hat{A}\right|}, \qquad \hat{B}_{22} = \frac{\hat{A}_{11}}{\left|\hat{A}\right|}\,.$$

Zpětně kaskádní matice je tak definována pomocí matice kaskádní takto

$$\begin{bmatrix} \hat{B}_{11} & \hat{B}_{12} \\ \hat{B}_{21} & \hat{B}_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\left|\hat{A}\right|} \begin{bmatrix} \hat{A}_{22} & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{11} \end{bmatrix}.$$

Poznamenejme, že aby matice zpětně kaskádního modelu $\left[\hat{B}\right]$ byla definována inverzní maticí kaskádního modelu $\left[\hat{A}\right]^{-1}$, museli bychom za závislé veličiny zpětně kaskádního modelu volit $\hat{U}_2$, $\hat{I}_2'$ čili $\left(-\hat{I}_2\right)$.

Pro opačný přepočet pak analogicky platí

$$\begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\left|\hat{B}\right|} \begin{bmatrix} \hat{B}_{22} & \hat{B}_{12} \\ \hat{B}_{21} & \hat{B}_{11} \end{bmatrix}.$$

❑ Vztahy mezi různými modely

Vztahy pro přepočet charakteristik různých modelů dvojbranů získáme úpravou algebraických rovnic modelu se známými charakteristikami do tvaru modelu, jehož charakteristiky hledáme a jejich následným srovnáním. Postup si ukažme na nalezení charakteristik impedančního a admitančního modelu ze známých charakteristik kaskádního modelu. Rovnice kaskádního modelu

$$\hat{U}_1 = \hat{A}_{11}\hat{U}_2 + \hat{A}_{12}\left(-\hat{I}_2\right),$$

$$\hat{I}_1 = \hat{A}_{21}\hat{U}_2 + \hat{A}_{22}\left(-\hat{I}_2\right)$$

upravíme do tvaru impedančního modelu

$$\hat{U}_1 = \hat{Z}_{11}\hat{I}_1 + \hat{Z}_{12}\hat{I}_2,$$

$$\hat{U}_2 = \hat{Z}_{21}\hat{I}_1 + \hat{Z}_{22}\hat{I}_2,$$

tak, že z druhé rovnice kaskádního modelu si vyjádříme napětí

$$\hat{U}_2 = \frac{\hat{I}_1 + \hat{A}_{22}\hat{I}_2}{\hat{A}_{21}} = \frac{1}{\hat{A}_{21}}\hat{I}_1 + \frac{\hat{A}_{22}}{\hat{A}_{21}}\hat{I}_2$$

a dosadíme ho do první rovnice kaskádního modelu

$$\hat{U}_1 = \hat{A}_{11}\hat{U}_2 + \hat{A}_{12}\left(-\hat{I}_2\right) = \frac{\hat{A}_{11}}{\hat{A}_{21}}\hat{I}_1 + \frac{\hat{A}_{11}\hat{A}_{22}}{\hat{A}_{21}}\hat{I}_2 - \hat{A}_{12}\hat{I}_2 = \frac{\hat{A}_{11}}{\hat{A}_{21}}\hat{I}_1 + \frac{\hat{A}_{11}\hat{A}_{22} - \hat{A}_{21}\hat{A}_{12}}{\hat{A}_{21}}\hat{I}_2 = \frac{\hat{A}_{11}}{\hat{A}_{21}}\hat{I}_1 + \frac{\left|\hat{A}\right|}{\hat{A}_{21}}\hat{I}_2.$$

Z následného srovnání odpovídajících prvků plyne

$$\hat{Z}_{11} = \hat{A}_{11} / \hat{A}_{21}, \qquad \hat{Z}_{12} = \frac{\left(\hat{A}_{11}\hat{A}_{22} - \hat{A}_{12}\hat{A}_{21}\right)}{\hat{A}_{21}} = \frac{\left|\hat{A}\right|}{\hat{A}_{21}}$$

$$\hat{Z}_{21} = 1 / \hat{A}_{21}, \qquad \hat{Z}_{22} = \hat{A}_{22} / \hat{A}_{21}.$$

Impedanční matice je tak definována pomocí matice kaskádní takto

$$\begin{bmatrix} \hat{Z}_{11} & \hat{Z}_{12} \\ \hat{Z}_{21} & \hat{Z}_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\hat{A}_{21}} \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \left|\hat{A}\right| \\ 1 & \hat{A}_{22} \end{bmatrix}.$$

V případě nalezení parametrů admitančního modelu popsaného rovnicemi

$$\hat{I}_1 = \hat{Y}_{11}\hat{U}_1 + \hat{Y}_{12}\hat{U}_2,$$

$$\hat{I}_2 = \hat{Y}_{21}\hat{U}_1 + \hat{Y}_{22}\hat{U}_2$$

postupujeme tak, že z první rovnice kaskádního modelu si vyjádříme proud

$$\hat{I}_2 = -\frac{1}{\hat{A}_{12}}\hat{U}_1 + \frac{\hat{A}_{11}}{\hat{A}_{12}}\hat{U}_2$$

a dosadíme ho do druhé rovnice kaskádního modelu

$$\hat{I}_1 = \hat{A}_{21}\hat{U}_2 + \hat{A}_{22}\left(-\hat{I}_2\right) = \hat{A}_{21}\hat{U}_2 + \frac{\hat{A}_{22}}{\hat{A}_{12}}\hat{U}_1 - \frac{\hat{A}_{11}\,\hat{A}_{22}}{\hat{A}_{12}}\hat{U}_2 = \frac{\hat{A}_{22}}{\hat{A}_{12}}\hat{U}_1 - \frac{\hat{A}_{11}\,\hat{A}_{22} - \hat{A}_{21}\,\hat{A}_{12}}{\hat{A}_{12}}\hat{U}_2 =$$

$$= \frac{\hat{A}_{22}}{\hat{A}_{12}}\hat{U}_1 - \frac{\left|\hat{A}\right|}{\hat{A}_{12}}\hat{U}_2 .$$

Z následného srovnání plyne

$$\hat{Y}_{11} = \hat{A}_{22} / \hat{A}_{12}, \qquad \hat{Y}_{12} = -\frac{\hat{A}_{11}\hat{A}_{22} - \hat{A}_{12}\hat{A}_{21}}{\hat{A}_{12}} = -\frac{\left|\hat{A}\right|}{\hat{A}_{12}}$$

$$\hat{Y}_{21} = -1 / \hat{A}_{12}, \qquad \hat{Y}_{22} = \hat{A}_{11} / \hat{A}_{12} .$$

Admitanční matice je tak definována pomocí matice kaskádní takto

$$\begin{bmatrix} \hat{Y}_{11} & \hat{Y}_{12} \\ \hat{Y}_{21} & \hat{Y}_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\hat{A}_{12}} \begin{bmatrix} \hat{A}_{22} & -\left|\hat{A}\right| \\ -1 & \hat{A}_{11} \end{bmatrix}.$$

Vzájemné přepočty parametrů dvojbranů plynou z tab. 3.1 a platí pro zvolené referenční směry počítacích šipek na obr. 3.1 vlevo.

Tab. 3.1 Vzájemné přepočty dvojbranových parametrů

$\begin{bmatrix} \hat{Y}_{11} & \hat{Y}_{12} \\ \hat{Y}_{21} & \hat{Y}_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\lvert\hat{Z}\rvert}\begin{bmatrix} \hat{Z}_{22} & -\hat{Z}_{12} \\ -\hat{Z}_{21} & \hat{Z}_{11} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\hat{K}_{22}}\begin{bmatrix} \lvert\hat{K}\rvert & \hat{K}_{12} \\ -\hat{K}_{21} & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\hat{H}_{11}}\begin{bmatrix} 1 & -\hat{H}_{12} \\ \hat{H}_{21} & \lvert\hat{H}\rvert \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\hat{A}_{12}}\begin{bmatrix} \hat{A}_{22} & -\lvert\hat{A}\rvert \\ -1 & \hat{A}_{11} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\hat{B}_{12}}\begin{bmatrix} \hat{B}_{11} & -1 \\ -\lvert\hat{B}\rvert & \hat{B}_{22} \end{bmatrix}$
$\frac{1}{\lvert\hat{Y}\rvert}\begin{bmatrix} \hat{Y}_{22} & -\hat{Y}_{12} \\ -\hat{Y}_{21} & \hat{Y}_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \hat{Z}_{11} & \hat{Z}_{12} \\ \hat{Z}_{21} & \hat{Z}_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\hat{K}_{11}}\begin{bmatrix} 1 & -\hat{K}_{12} \\ \hat{K}_{21} & \lvert\hat{K}\rvert \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\hat{H}_{22}}\begin{bmatrix} \lvert\hat{H}\rvert & \hat{H}_{12} \\ -\hat{H}_{21} & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\hat{A}_{21}}\begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \lvert\hat{A}\rvert \\ 1 & \hat{A}_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\hat{B}_{12}}\begin{bmatrix} \hat{B}_{22} & 1 \\ \lvert\hat{B}\rvert & \hat{B}_{11} \end{bmatrix}$
$\frac{1}{\hat{Y}_{22}}\begin{bmatrix} \lvert\hat{Y}\rvert & \hat{Y}_{12} \\ -\hat{Y}_{21} & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\hat{Z}_{11}}\begin{bmatrix} 1 & -\hat{Z}_{12} \\ \hat{Z}_{21} & \lvert\hat{Z}\rvert \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \hat{K}_{11} & \hat{K}_{12} \\ \hat{K}_{21} & \hat{K}_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\lvert\hat{H}\rvert}\begin{bmatrix} \hat{H}_{22} & -\hat{H}_{12} \\ -\hat{H}_{21} & \hat{H}_{11} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\hat{A}_{11}}\begin{bmatrix} \hat{A}_{21} & -\lvert\hat{A}\rvert \\ 1 & \hat{A}_{12} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\hat{B}_{22}}\begin{bmatrix} \hat{B}_{21} & -1 \\ \lvert\hat{B}\rvert & \hat{B}_{12} \end{bmatrix}$
$\frac{1}{\hat{Y}_{11}}\begin{bmatrix} 1 & -\hat{Y}_{12} \\ \hat{Y}_{21} & \lvert\hat{Y}\rvert \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\hat{Z}_{22}}\begin{bmatrix} \lvert\hat{Z}\rvert & \hat{Z}_{12} \\ -\hat{Z}_{21} & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\lvert\hat{K}\rvert}\begin{bmatrix} \hat{K}_{22} & -\hat{K}_{12} \\ -\hat{K}_{21} & \hat{K}_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \hat{H}_{11} & \hat{H}_{12} \\ \hat{H}_{21} & \hat{H}_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\hat{A}_{22}}\begin{bmatrix} \hat{A}_{12} & \lvert\hat{A}\rvert \\ -1 & \hat{A}_{21} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\hat{B}_{11}}\begin{bmatrix} \hat{B}_{12} & 1 \\ -\lvert\hat{B}\rvert & \hat{B}_{21} \end{bmatrix}$
$\frac{1}{\hat{Y}_{21}}\begin{bmatrix} -\hat{Y}_{22} & -1 \\ -\lvert\hat{Y}\rvert & -\hat{Y}_{11} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\hat{Z}_{21}}\begin{bmatrix} \hat{Z}_{11} & \lvert\hat{Z}\rvert \\ 1 & \hat{Z}_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\hat{K}_{21}}\begin{bmatrix} 1 & \hat{K}_{22} \\ \hat{K}_{11} & \lvert\hat{K}\rvert \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\hat{H}_{21}}\begin{bmatrix} -\lvert\hat{H}\rvert & -\hat{H}_{11} \\ -\hat{H}_{22} & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\lvert\hat{B}\rvert}\begin{bmatrix} \hat{B}_{22} & \hat{B}_{12} \\ \hat{B}_{21} & \hat{B}_{11} \end{bmatrix}$
$\frac{1}{\hat{Y}_{12}}\begin{bmatrix} -\hat{Y}_{11} & -1 \\ -\lvert\hat{Y}\rvert & -\hat{Y}_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\hat{Z}_{12}}\begin{bmatrix} \hat{Z}_{22} & \lvert\hat{Z}\rvert \\ 1 & \hat{Z}_{11} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\hat{K}_{12}}\begin{bmatrix} -\lvert\hat{K}\rvert & -\hat{K}_{22} \\ -\hat{K}_{11} & -1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\hat{H}_{12}}\begin{bmatrix} 1 & \hat{H}_{11} \\ \hat{H}_{22} & \lvert\hat{H}\rvert \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\lvert\hat{A}\rvert}\begin{bmatrix} \hat{A}_{22} & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \hat{B}_{11} & \hat{B}_{12} \\ \hat{B}_{21} & \hat{B}_{22} \end{bmatrix}$

Příklad 3.5.

Z impedančních parametrů T článku na obr. 3.10 určete transformací parametrů impedanční matice parametry kaskádní matice dvojbranu. Přepočet ověřte stanovením kaskádních parametrů ze stavů naprázdno a nakrátko.

♦

Impedanční matice T článku má parametry

$$[\hat{Z}] = \begin{bmatrix} R_1 + R_3 & R_3 \\ R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix},$$

viz příklad 3.3. Dosazením odpovídajících parametrů do transformační matice z tabulky získáme

$$[\hat{A}] = \frac{1}{\hat{Z}_{21}} \begin{bmatrix} \hat{Z}_{11} & |\hat{Z}| \\ 1 & \hat{Z}_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{R_3} \begin{bmatrix} R_1 + R_3 & (R_1 + R_3)(R_2 + R_3) - R_3^2 \\ 1 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \dfrac{R_1}{R_3} & R_1 + R_2 + \dfrac{R_1 R_2}{R_3} \\ \dfrac{1}{R_3} & 1 + \dfrac{R_2}{R_3} \end{bmatrix}.$$

Ověření provedeme na základě definičních vztahů parametrů kaskádního modelu dvojbranu ve stavu naprázdno a nakrátko, dosazením odpovídajících obvodových veličin

$$\hat{A}_{11} = \left.\frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_2}\right|_{I_2=0} = \frac{\hat{U}_1}{\dfrac{R_3 \hat{U}_1}{R_1 + R_3}} = 1 + \frac{R_1}{R_3}, \qquad \hat{A}_{12} = \left.\frac{\hat{U}_1}{-\hat{I}_2}\right|_{U_2=0} = \frac{\left(R_1 + \dfrac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}\right)\hat{I}_1}{-\left(-\dfrac{R_3 \hat{I}_1}{R_2 + R_3}\right)} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3},$$

$$\hat{A}_{21} = \left.\frac{\hat{I}_1}{\hat{U}_2}\right|_{I_2=0} = \frac{\dfrac{\hat{U}_1}{R_1 + R_3}}{\dfrac{R_3 \hat{U}_1}{R_1 + R_3}} = \frac{1}{R_3}, \qquad \hat{A}_{22} = \left.\frac{\hat{I}_1}{-\hat{I}_2}\right|_{U_2=0} = \frac{\hat{I}_1}{-\left(-\dfrac{R_3 \hat{I}_1}{R_2 + R_3}\right)} = 1 + \frac{R_2}{R_3}.$$

Ze srovnání obou způsobů určení parametrů vidíme, že dávají stejné výsledky.

Σ Shrnutí pojmů 3.3.

Každý ze šesti uvedených modelů jednoznačně charakterizuje dvojbran, ale je výhodný pro řešení jiné obvodové situace. Za tímto účelem provádíme přepočty charakteristik dvojbranů. Jelikož imitanční modely dvojbranu jsou navzájem inverzní a podobně i oba smíšené modely, můžeme pouze pro ně použít k vzájemnému přepočtu inverzní matici. Zcela obecně lze nalézt vztahy pro přepočet mezi dvojicemi charakteristik dvojbranů algebraickými úpravami rovnic transformovaného modelu dvojbranu a jeho následným srovnáním s modelem, jehož parametry hledáme.

? Otázky 3.3.

1. Který ze zápisů modelů dvojbranů je univerzálnější pro odvození transformačních vztahů mezi modely dvojbranů? Algebraický nebo maticový?
2. Pro které modely dvojbranů můžeme použít k vzájemnému přepočtu jejich charakteristik inverzní matici?

3. U některých transformačních vztahů v tabulce nejsou přímo uvedeny všechny prvky matice modelu, znamená to, že po transformaci se snížil počet parametrů definujících dvojbran?

Uloha k řešení 3.3

Algebraickými úpravami příslušných rovnic dvojbranu odvoďte definiční vtahy pro admitanční parametry dvojbranu, znáte-li $\hat{H}$ parametry dvojbranu.

Řešení:

Nejprve si napíšeme rovnice smíšeného modelu dvojbranu, jehož parametry známe

$$\hat{U}_1 = \hat{H}_{11}\hat{I}_1 + \hat{H}_{12}\hat{U}_2 ,$$

$$\hat{I}_2 = \hat{H}_{21}\hat{I}_1 + \hat{H}_{22}\hat{U}_2 ,$$

které upravíme do tvaru admitančního modelu

$$\hat{I}_1 = \hat{Y}_{11}\hat{U}_1 + \hat{Y}_{12}\hat{U}_2 ,$$

$$\hat{I}_2 = \hat{Y}_{21}\hat{U}_1 + \hat{Y}_{22}\hat{U}_2$$

tak, že z první rovnice smíšeného modelu si vyjádříme proud

$$\hat{I}_1 = \frac{\hat{U}_1 - \hat{H}_{12}\hat{U}_2}{\hat{H}_{11}}$$

a dosadíme ho do druhé rovnice smíšeného modelu

$$\hat{I}_2 = \hat{H}_{21}\hat{I}_1 + \hat{H}_{22}\hat{U}_2 = \hat{H}_{21}\left(\frac{\hat{U}_1 - \hat{H}_{12}\hat{U}_2}{\hat{H}_{11}}\right) + \hat{H}_{22}\hat{U}_2 = \frac{\hat{H}_{21}\hat{U}_1 + \left(\hat{H}_{11}\hat{H}_{22} - \hat{H}_{12}\hat{H}_{21}\right)\hat{U}_2}{\hat{H}_{11}} .$$

Z následného srovnání odpovídajících prvků plyne pro admitanční parametry dvojbranu

$$\hat{Y}_{11} = 1/\hat{H}_{11} , \qquad \hat{Y}_{12} = -\frac{\hat{H}_{12}}{\hat{H}_{11}} ,$$

$$\hat{Y}_{21} = \hat{H}_{21}/\hat{H}_{11} , \qquad \hat{Y}_{22} = \frac{\hat{H}_{11}\hat{H}_{22} - \hat{H}_{12}\hat{H}_{21}}{\hat{H}_{11}} = \frac{\left|\hat{H}\right|}{\hat{H}_{11}} .$$

3.4. Řazení dvojbranů

Jak víme, dva dvojpóly se dají navzájem zapojit jen dvěma způsoby, a to paralelně a sériově. Dvojbrany mají ale dvě dvojice svorek (brány), takže vstupní a výstupní brány dvou dvojbranů můžeme zapojit nejen paralelně nebo sériově, ale i kombinovaně, vstupní brány paralelně a výstupní sériově nebo vstupní brány sériově a výstupní paralelně. Dvojbrany lze navíc ještě řadit za sebou do kaskády. Můžeme je zapojit celkem pěti způsoby. Při zapojování dvojbranů ale musíme dbát na to, aby výsledné zapojení dvojbranů bylo regulární, což znamená, že se jejich spojením nesmí změnit vlastnosti dílčích dvojbranů. Zapojení příčně souměrných dvojbranů je vždy regulární. U dvojbranů s krajní příčnou nesouměrností se musíme o regularitě zapojení nejdříve přesvědčit. Na rozdíl od podélně souměrných dvojbranů, příčně souměrné dvojbrany jsou vždy regulární.

❑ Paralelní řazení dvojbranů (paralelně paralelní)

Toto zapojení má spojenou vstupní i výstupní bránu paralelně. Společnou veličinou bran je napětí a sčítají se proudy bran. Podle obr. 3.20 tedy platí

$$\hat{U}_1 = \hat{U}_1' = \hat{U}_1'' \qquad \text{a} \qquad \hat{U}_2 = \hat{U}_2' = \hat{U}_2''$$

a podle 1. Kirchhoffova zákona

$$\hat{I}_1 = \hat{I}_1' + \hat{I}_1'' \qquad \text{a} \qquad \hat{I}_2 = \hat{I}_2' + \hat{I}_2'' .$$

Zapíšeme-li poslední dvě rovnice v maticovém tvaru, dostaneme

$$\begin{bmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{I}_1' \\ \hat{I}_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{I}_1'' \\ \hat{I}_2'' \end{bmatrix},$$

kam za dílčí proudy bran dosadíme admitanční model dvojbranů v maticovém tvaru

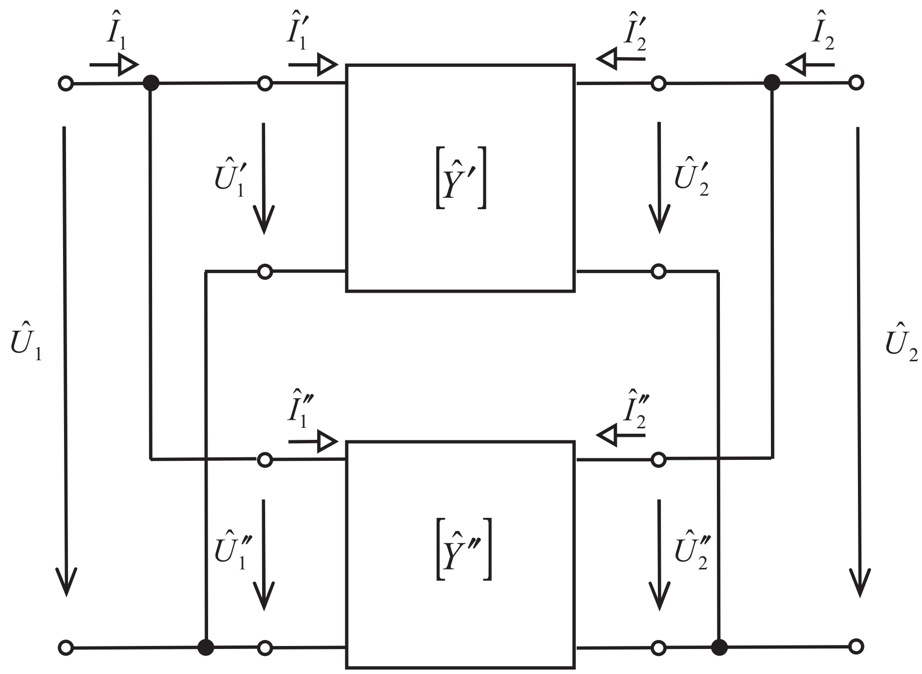
$$\begin{bmatrix} \hat{I}_1' \\ \hat{I}_2' \end{bmatrix} = \left[\hat{Y}'\right] \cdot \begin{bmatrix} \hat{U}_1' \\ \hat{U}_2' \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \hat{I}_1'' \\ \hat{I}_2'' \end{bmatrix} = \left[\hat{Y}''\right] \cdot \begin{bmatrix} \hat{U}_1'' \\ \hat{U}_2'' \end{bmatrix},$$

čímž dostaneme

$$\begin{bmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{I}_2 \end{bmatrix} = \left[\hat{Y}'\right] \cdot \begin{bmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{U}_2 \end{bmatrix} + \left[\hat{Y}''\right] \cdot \begin{bmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{U}_2 \end{bmatrix} = \left[\hat{Y}\right] \cdot \begin{bmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{U}_2 \end{bmatrix},$$

z čehož plyne pro výslednou admitanční matici paralelně řazených dvojbranů, že je dána součtem admitančních matic dílčích dvojbranů

$$\left[\hat{Y}\right] = \left[\hat{Y}'\right] + \left[\hat{Y}''\right] .$$



Obr. 3.20 Blokové schéma paralelního řazení dvojbranů

❑ Sériové řazení dvojbranů (sériově sériové)

Toto zapojení má spojenou vstupní i výstupní bránu sériově. Společnou veličinou bran je proud a sčítají se jejich napětí. Impedanční model je duální k modelu paralelně paralelnímu, takže platí podle obr. 3.21

$$\hat{I}_1 = \hat{I}'_1 = \hat{I}''_1 \quad \text{a} \quad \hat{I}_2 = \hat{I}'_2 = \hat{I}''_2$$

a podle 2. Kirchhoffova zákona

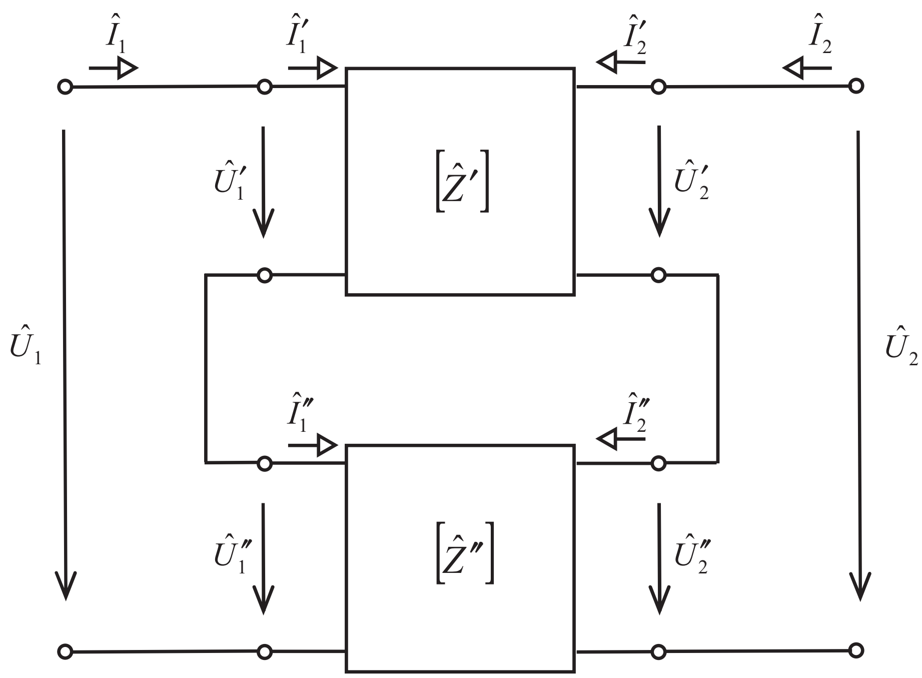
$$\hat{U}_1 = \hat{U}'_1 + \hat{U}''_1 \quad \text{a} \quad \hat{U}_2 = \hat{U}'_2 + \hat{U}''_2,$$

takže i

$$\begin{bmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{U}_2 \end{bmatrix} = [\hat{Z}'] \cdot \begin{bmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{I}_2 \end{bmatrix} + [\hat{Z}''] \cdot \begin{bmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{I}_2 \end{bmatrix} = [\hat{Z}] \cdot \begin{bmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{I}_2 \end{bmatrix},$$

z čehož plyne pro výslednou impedanční matici sériově řazených dvojbranů, že je dána součtem impedančních matic dílčích dvojbranů

$$[\hat{Z}] = [\hat{Z}'] + [\hat{Z}''] .$$



Obr. 3.21 Blokové schéma sériového řazení dvojbranů

❑ Paralelně sériové řazení dvojbranů

Toto zapojení má vstupní brány dvojbranů spojené paralelně a výstupní brány sériově. Společnou veličinou vstupních bran je napětí a sčítají se jejich proudy, společnou veličinou výstupních bran je proud a sčítají se jejich napětí. Podle obr. 3.22 tedy platí

$$\hat{U}_1 = \hat{U}'_1 = \hat{U}''_2 \quad \text{a} \quad \hat{I}_2 = \hat{I}'_2 = \hat{I}''_2$$

a podle 1. a 2. Kirchhoffova zákona

$$\hat{I}_1 = \hat{I}'_1 + \hat{I}''_1 \quad \text{a} \quad \hat{U}_2 = \hat{U}'_2 + \hat{U}''_2 .$$

Zapíšeme-li poslední dvě rovnice v maticovém tvaru, dostaneme

$$\begin{bmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{I}'_1 \\ \hat{U}'_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{I}''_1 \\ \hat{U}''_2 \end{bmatrix},$$

kam dosadíme smíšené modely dvojbranu se zjednodušeným zápisem matice $\hat{K}$

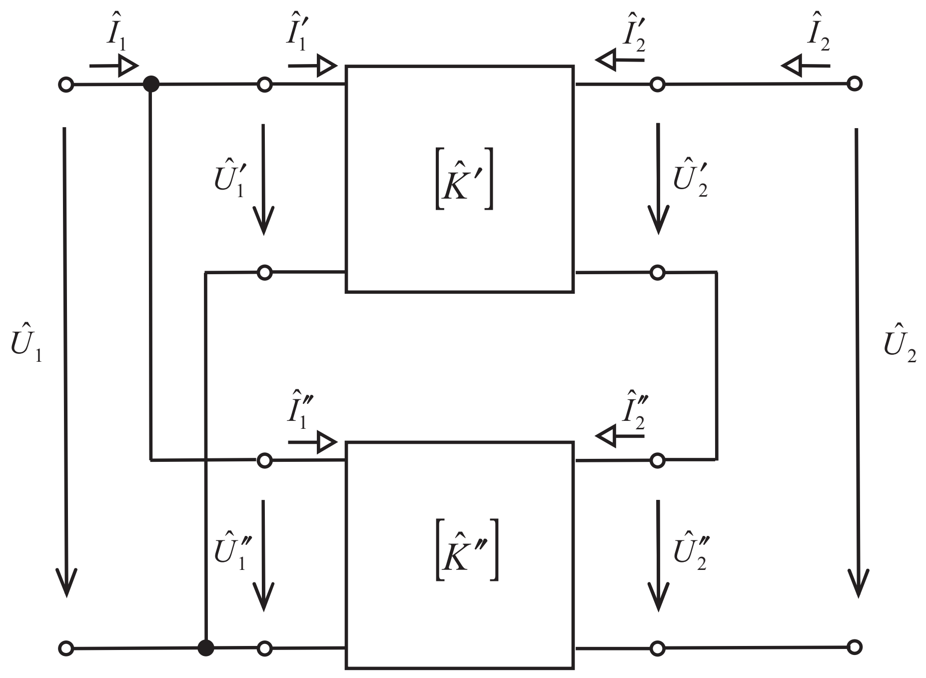
$$\begin{bmatrix} \hat{I}'_1 \\ \hat{U}'_2 \end{bmatrix} = \left[\hat{K}'\right] \cdot \begin{bmatrix} \hat{U}'_1 \\ \hat{I}'_2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \hat{I}''_1 \\ \hat{U}''_2 \end{bmatrix} = \left[\hat{K}''\right] \cdot \begin{bmatrix} \hat{U}''_1 \\ \hat{I}''_2 \end{bmatrix},$$

čímž dostaneme

$$\begin{bmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{U}_2 \end{bmatrix} = \left[\hat{K}'\right] \cdot \begin{bmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{I}_2 \end{bmatrix} + \left[\hat{K}''\right] \cdot \begin{bmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{I}_2 \end{bmatrix} = \left[\hat{K}\right] \cdot \begin{bmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{I}_2 \end{bmatrix},$$

z čehož plyne pro výslednou paralelně sériovou matici, že je dána součtem dílčích paralelně sériových matic dvojbranů

$$\left[\hat{K}\right] = \left[\hat{K}'\right] + \left[\hat{K}''\right] .$$



Obr. 3.22 Blokové schéma paralelně sériového řazení dvojbranů

❑ Sériově paralelní řazení dvojbranů

Toto zapojení má vstupní brány dvojbranů spojené sériově a výstupní brány paralelně. Společnou veličinou vstupních bran je proud a sčítají se jejich napětí, společnou veličinou výstupních bran je napětí a sčítají se jejich proudy. Toto zapojení je duální k paralelně sériovému. Pro tento model tedy platí podle obr. 3.23

$$\hat{I}_1 = \hat{I}'_1 = \hat{I}''_1 \quad \text{a} \quad \hat{U}_2 = \hat{U}'_2 = \hat{U}''_2$$

a podle 2. Kirchhoffova zákona

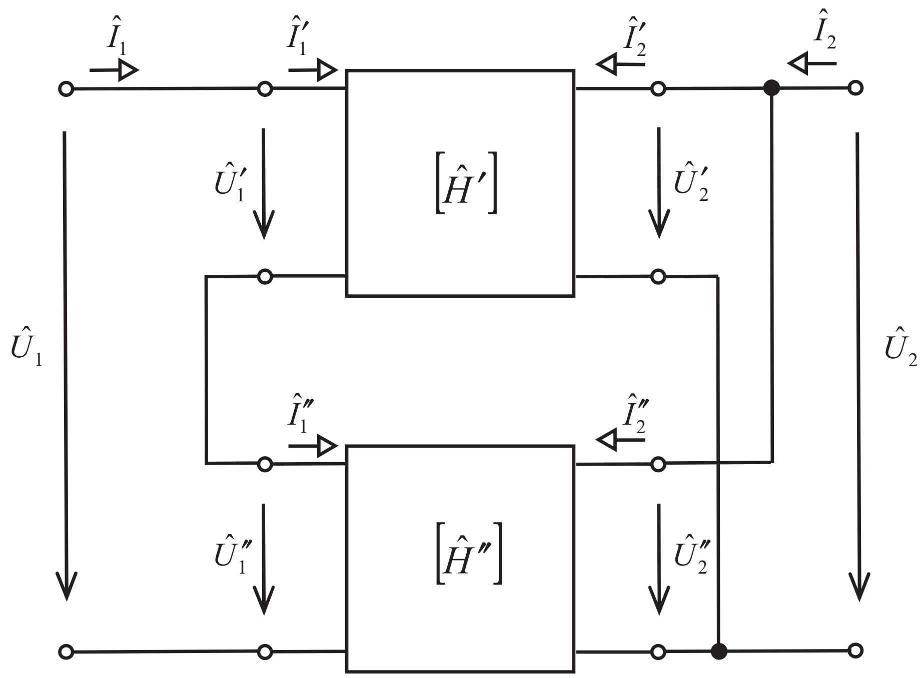
$$\hat{U}_1 = \hat{U}'_1 + \hat{U}''_1 \quad \text{a} \quad \hat{I}_2 = \hat{I}'_2 + \hat{I}''_2,$$

takže i

$$\begin{bmatrix}\hat{U}_1\\ \hat{I}_2\end{bmatrix}=\left[\hat{H}'\right]\cdot\begin{bmatrix}\hat{I}_1\\ \hat{U}_2\end{bmatrix}+\left[\hat{H}''\right]\cdot\begin{bmatrix}\hat{I}_1\\ \hat{U}_2\end{bmatrix}=\left[\hat{H}\right]\cdot\begin{bmatrix}\hat{I}_1\\ \hat{U}_2\end{bmatrix},$$

z čehož plyne pro výslednou sérioparalelní matici, že je dána součtem sérioparalelních matic dílčích dvojbranů

$$\left[\hat{H}\right]=\left[\hat{H}'\right]+\left[\hat{H}''\right].$$



Obr. 3.23 Blokové schéma sériově paralelního řazení dvojbranů

❑ Kaskádní řazení dvojbranů

Toto zapojení spojuje výstupní bránu jednoho dvojbranu se vstupní branou následujícího dvojbranu. Společnou veličinou spojených bran je jejich proud a napětí. Pro tento model platí podle obr. 3.24

$$\hat{U}_1=\hat{U}'_1,\qquad \hat{U}''_1=\hat{U}'_2,\qquad \hat{U}_2=\hat{U}''_2$$

a

$$\hat{I}_1=\hat{I}'_1,\qquad \hat{I}''_1=-\hat{I}'_2,\qquad \hat{I}_2=\hat{I}''_2$$

což můžeme zapsat pomocí maticového zápisu

$$\begin{bmatrix}\hat{U}_1\\ \hat{I}_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{U}'_1\\ \hat{I}'_1\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}\hat{U}''_1\\ \hat{I}''_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{U}'_2\\ -\hat{I}'_2\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}\hat{U}_2\\ -\hat{I}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{U}''_2\\ -\hat{I}''_2\end{bmatrix}.$$

Užitím kaskádního modelu dvojbranu a dosazením do rovností získáme

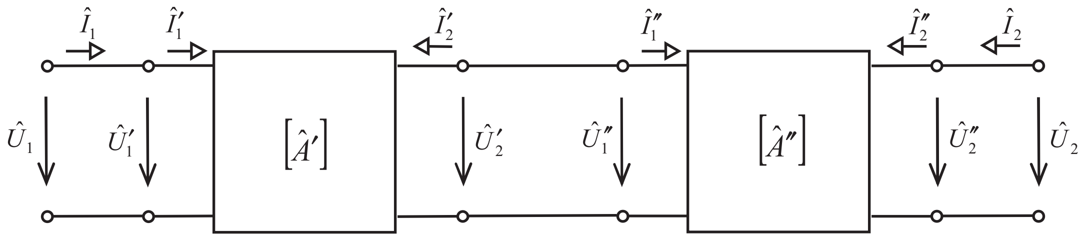
$$\begin{bmatrix}\hat{U}_1\\ \hat{I}_1\end{bmatrix}=\left[\hat{A}'\right]\cdot\begin{bmatrix}\hat{U}'_2\\ -\hat{I}'_2\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}\hat{U}''_1\\ \hat{I}''_1\end{bmatrix}=\left[\hat{A}''\right]\cdot\begin{bmatrix}\hat{U}_2\\ -\hat{I}_2\end{bmatrix}\qquad \text{resp.}\qquad \begin{bmatrix}\hat{U}'_2\\ -\hat{I}'_2\end{bmatrix}=\left[\hat{A}''\right]\cdot\begin{bmatrix}\hat{U}_2\\ -\hat{I}_2\end{bmatrix}$$

a jejich zřetězením díky rovnosti

$$\begin{bmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{I}_1 \end{bmatrix} = [\hat{A}'] \cdot [\hat{A}''] \cdot \begin{bmatrix} \hat{U}_2 \\ -\hat{I}_2 \end{bmatrix} = [\hat{A}] \cdot \begin{bmatrix} \hat{U}_2 \\ -\hat{I}_2 \end{bmatrix},$$

z čehož pro plyne pro výslednou kaskádní matici, že je dána součinem kaskádních matic dílčích dvojbranů

$$[\hat{A}] = [\hat{A}'] \cdot [\hat{A}''] \ .$$

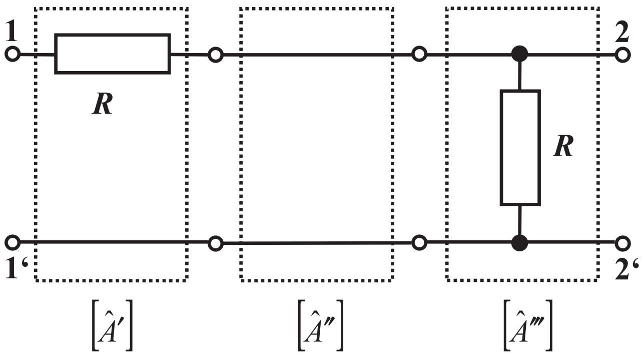


Obr. 3.24 Blokové schéma kaskádního řazení dvojbranů

Poznamenejme, že kaskádní řazení dvojbranů je vždy regulární.

Příklad 3.6.

Určete výslednou matici kaskádně řazených dvojbranů na obr. 3.25 a posuďte jeho vlastnosti.



Obr. 3.16 Kaskádní řazení jednoduchých dvojbranů, příklad 3.6

♦

K řešení využijme výsledky příkladu 3.4, kde pro jednotlivé dvojbrany byly určeny následující kaskádní matice:

$$[\hat{A}'] = \begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\hat{A}''] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\hat{A}'''] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R} & 1 \end{bmatrix}.$$

Výslednou matici zapojení dostaneme násobením dílčích matic

$$[\hat{A}] = [\hat{A}'] \cdot [\hat{A}''] \cdot [\hat{A}'''] = \cdot \begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & R \\ \frac{1}{R} & 1 \end{bmatrix}.$$

Dvojbran je reciproký, protože determinant výsledné matice platí $|\hat{A}| = 2 \cdot 1 - \frac{1}{R} R = 1$ a nesouměrný, jelikož platí $\hat{A}_{11} \neq \hat{A}_{22}$ a po dosazení $2 \neq 1$.

Shrnutí pojmů 3.4.

Řazením dvojbranů vznikne nový dvojbran, jehož vlastnosti jsou definovány parametry dílčích dvojbranů. Celkem existuje pět možností zapojení dvojbranů. Výsledné matice získáme součtem dílčích matic dvojbranů s výjimkou modelu kaskádního, který je dán součinem dílčích matic dvojbranů. Zapojení dvojbranů musí být regulární, což je splněno vždy u příčně souměrných dvojbranů. U dvojbranů s krajní příčnou nesouměrností se musíme o regularitě zapojení nejprve přesvědčit.

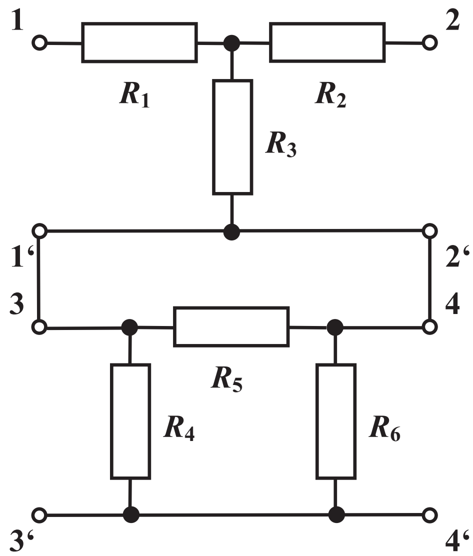
Otázky 3.4.

1. Co rozumíme regulárním zapojením dvojbranů?
2. Jakým způsobem můžeme zapojit dva nebo více dvojbranů?
3. Proč musíme u zapojení dvojbranů, z nichž je alespoň jeden krajně příčně nesouměrný, zkoumat regularitu zapojení?
4. U kterého řazení nemusíme zkoumat regularitu zapojení dvojbranů?
5. Které modely dvojbranů jsou definovány součtem matic dílčích dvojbranů?
6. Jak určíme výslednou matici kaskádně řazených dvojbranů?

Úloha k řešení 3.4

Posuďte, jsou-li sériově zapojené dvojbrany na obr. 3.26 korektně zapojené.

Řešení:

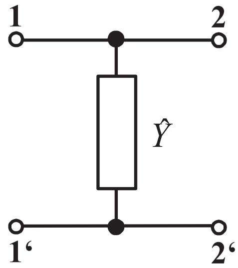


Obr. 3.26 Sériové řazení T-článku a Π-článku, úloha k řešení 3.4

Zapojením horního dvojbranu s krajní příčnou nesouměrností se mění vlastnosti dolního dvojbranu, protože jeho rezistor R_5 je zkratován, takže výsledný dvojbran je neregulární.

3.5. Vybrané dvojbrany

Některé jednoduché dvojbrany nazýváme degenerované, protože pro ně není možné sestavit všechny maticové modely. Příklad takového dvojbranu je uveden na obr. 3.27.



Obr. 3.27 Jednoduchý, degenerovaný dvojbran, podélně i příčně souměrný

Pokud bychom chtěli určit prvky jeho admitanční matice z definičních vztahů, zjistíme, že vlivem zkratování jedněch bran a při napájení druhých bran dvojbranu ze zdroje napětí porostou jeho proudy nade všechny meze, a tím i hodnoty prvků admitanční matice

$$\hat{Y}_{11} = \lim_{\hat{I}_1 \to \infty} \left. \frac{\hat{I}_1}{\hat{U}_1} \right|_{U_2=0} \to \infty, \qquad \hat{Y}_{12} = \lim_{\hat{I}_1 \to \infty} \left. \frac{\hat{I}_1}{\hat{U}_2} \right|_{U_1=0} \to \infty,$$

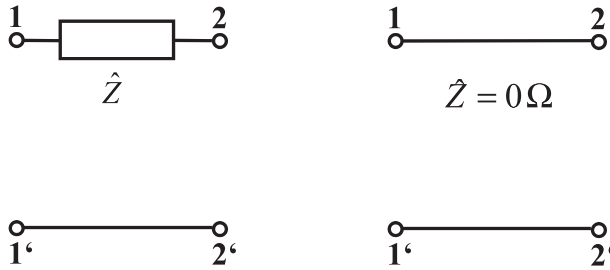
$$\hat{Y}_{21} = \lim_{\hat{I}_2 \to \infty} \left. \frac{\hat{I}_2}{\hat{U}_1} \right|_{U_2=0} \to \infty, \qquad \hat{Y}_{22} = \lim_{\hat{I}_2 \to \infty} \left. \frac{\hat{I}_2}{\hat{U}_2} \right|_{U_1=0} \to \infty .$$

Admitanční matice tohoto dvojbranu tudíž není definována a zdálo by se tedy, že nejsou definovány ani další maticové modely tohoto dvojbranu, poněvadž v transformačních vztazích v tab. 3.1, vystupuje determinant admitanční matice, což ale není pravda. Určíme-li hodnoty prvků příslušných matic podle definičních vztahů, zjistíme, že mají následující hodnoty

$$\left[\hat{Z}\right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\hat{Y}} & \frac{1}{\hat{Y}} \\ \frac{1}{\hat{Y}} & \frac{1}{\hat{Y}} \end{bmatrix}, \left[\hat{K}\right] = \begin{bmatrix} \hat{Y} & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \left[\hat{H}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \hat{Y} \end{bmatrix}, \left[\hat{A}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \hat{Y} & 1 \end{bmatrix}, \left[\hat{B}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \hat{Y} & 1 \end{bmatrix}$$

a že až na singulární admitanční matici, jsou ostatní matice regulární. Nulový determinat impedanční matice má potom za následek, že při přepočtu matice impedanční na admitanční získáme limitní hodnoty prvků admitanční matice, takové jak byly určeny výše z definičních vztahů tedy rostoucí nade všechny meze.

Další dva jednoduché dvojbrany, používané ke skládání složených nedegenerovaných dvojbranů jejich kaskádním řazením, jsou uvedeny na obr. 3.28. Analogickým způsobem bychom zjistily, že pro degenerovaný dvojbran v levé části obr. 3.28, který je duální k dvojbranu na obr. 3.27, není definována impedanční matice $\left[\hat{Z}\right]$ kvůli nulovým hodnotám proudů obou bran a u dvojbranu na obr. 3.28 vpravo, který realizuje ideální propojení (obdoba ideálního vodiče) kaskádně řazených dvojbranů a je limitním případem levého degenerovaného dvojbranu pro $\hat{Z} \to 0\,\Omega$, není definována jak admitanční matice $\left[\hat{Y}\right]$, tak i impedanční matice $\left[\hat{Z}\right]$.



Obr. 3.28 Jednoduchý, degenerovaný dvojbran: podélně souměrný, podélně i příčně souměrný

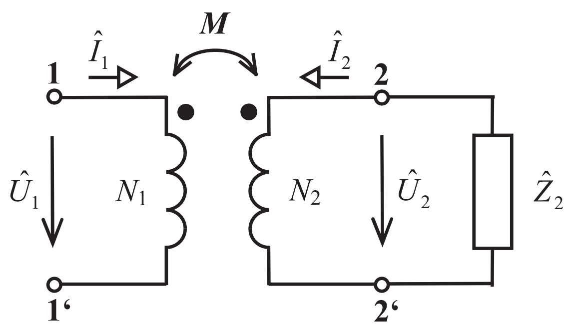
❑ Ideální transformátor

Ideální transformátor, nakreslený na obr. 3.29, má nulové odpory vinutí, dokonalou vazbu mezi primárním a sekundárním vinutím (nemá žádný rozptyl), nekonečně velké hodnoty primární indukčnosti L_1 a sekundární indukčnosti L_2 a tím i vzájemné indukčnosti $M = \sqrt{L_1 L_2}$. Poznamenejme, že prakticky pro modelování ideálního transformátoru na počítači stačí hodnoty obou indukčností volit dostatečně velké. Ideální transformátor má komplexní napětí připadající na jeden závit $\hat{U}_{1z}$ stejné pro obě vinutí. Napětí primárního vinutí tak můžeme vyjádřit

$$\hat{U}_1 = N_1 \hat{U}_{1z}$$

a komplexní napětí sekundárního vinutí

$$\hat{U}_2 = N_2 \hat{U}_{1z}.$$



Obr. 3.29 Zatížený ideální transformátor

Jeho jediným parametrem převodní je poměr

$$n = \left|\frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_2}\right| = \left|\frac{-\hat{I}_2}{\hat{I}_1}\right| = \frac{N_1}{N_2}.$$

Úpravou tohoto vztahu získáme kaskádní rovnice ideálního transformátoru

$$\hat{U}_1 = n\hat{U}_2 = n\hat{U}_2 + 0\cdot(-\hat{I}_2),$$

$$\hat{I}_1 = \frac{-\hat{I}_2}{n} = 0\cdot\hat{U}_2 + \frac{1}{n}(-\hat{I}_2),$$

a tedy i kaskádní matici

$$[\hat{A}] = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{bmatrix}.$$

Užitím transformačních vztahů z tab. 3.1 vidíme, že admitanční a impedanční matice není definována vlivem nulových hodnot prvků $\hat{A}_{12}$, $\hat{A}_{21}$ kaskádní matice. Ideální transformátor je tedy degenerovaný dvojbran. Zbývající matice modelu ideálního transformátoru však existují a jsou

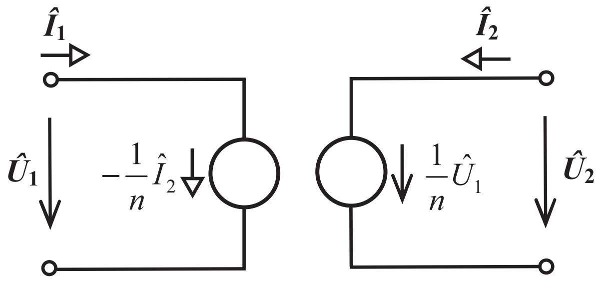
$$[\hat{K}] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & 0 \end{bmatrix}, \qquad [\hat{H}] = \begin{bmatrix} 0 & n \\ -n & 0 \end{bmatrix}, \qquad [\hat{B}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix}.$$

Příklad 3.7.

Nakreslete možné obvodové modely ideálního transformátoru.

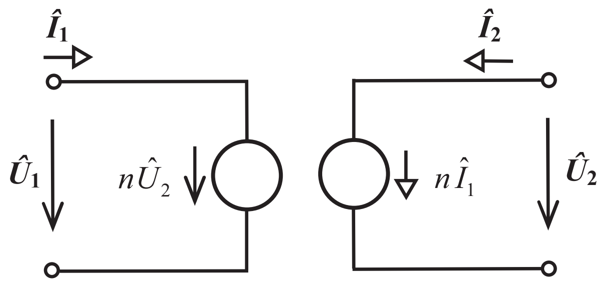
♦

Jak víme, kaskádní a zpětně kaskádní obvodový model neexistují. Imitanční modely ideálního transformátoru nejsou definovány, z tohoto důvodu můžeme nakreslit jeho obvodové modely jen pro smíšené modely dvojbranu, viz obr. 3.30.



$$\hat{I}_1 = \hat{K}_{11}\hat{U}_1 + \hat{K}_{12}\hat{I}_2 = 0 \cdot \hat{U}_1 + \left(-\frac{1}{n}\right)\hat{I}_2,$$

$$\hat{U}_2 = \hat{K}_{21}\hat{U}_1 + \hat{K}_{22}\hat{I}_2 = \frac{1}{n}\hat{U}_1 + 0 \cdot \hat{I}_2$$



$$\hat{U}_1 = \hat{H}_{11}\hat{I}_1 + \hat{H}_{12}\hat{U}_2 = 0 \cdot \hat{I}_1 + n\hat{U}_2$$

$$\hat{I}_2 = \hat{H}_{21}\hat{I}_1 + \hat{H}_{22}\hat{U}_2 = -n\hat{I}_1 + 0 \cdot \hat{U}_2$$

Obr. 3.30 Náhradní schéma zapojení a rovnice ideálního transformátoru: paralelně sériový model, sériově paralelní model

Ideální transformátor je kmitočtově nezávislý, takže výše uvedené vztahy neplatí jen pro popis transformátoru pomocí komplexního počtu, ale i pro libovolné průběhy okamžitých hodnot napětí a proudu

$$u_1 = n u_2 ,$$

$$i_1 = \frac{-i_2}{n} .$$

Určíme-li okamžitý výkon dodaný oběma branami dvojbranu, tedy výkon spotřebovaný ideálním transformátorem, platí

$$p = p_1 + p_2 = u_1 i_1 + u_2 i_2 = n u_2 \left(\frac{-i_2}{n} \right) + u_2 i_2 = p_2 (-1+1) = 0\,\mathrm{VA}$$

a jak vidíme, ideální transformátor nespotřebovává žádný výkon, je tedy bezeztrátový.

Vstupní impedance ideálního transformátoru zatíženého impedancí $\hat{Z}_2$ je

$$\hat{Z}_1 = \frac{\hat{U}_1}{\hat{I}_1} = \frac{n\hat{U}_2}{-\dfrac{\hat{I}_2}{n}} = n^2 \frac{\hat{U}_2}{-\hat{I}_2} = n^2 \frac{-\hat{Z}_2 \hat{I}_2}{-\hat{I}_2} = n^2 \hat{Z}_2 .$$

Má tedy stejný charakter jako zatěžovací impedance $\hat{Z}_2$, mění se pouze velikost jejího modulu se čtvercem převodu. Této vlastnosti se využívá u přizpůsobovacího transformátoru, kterým se provádí impedanční přizpůsobení zátěže.

Příklad 3.8.

Dokažte užitím symbolického počtu, že ideální transformátor je bezeztrátový.

♦

Důkaz provedeme dosazením převodního poměru do definičního vztahu pro zdánlivý výkon

$$\hat{S} = \hat{U}_1 \hat{I}_1^* + \hat{U}_2 \left(-\hat{I}_2\right)^* = \hat{U}_2 \hat{I}_2^* \left(\frac{\hat{U}_1 \hat{I}_1^*}{\hat{U}_2 \hat{I}_2^*} - 1 \right) = \hat{U}_2 \hat{I}_2^* \left(\frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_2} \left(\frac{\hat{I}_1}{\hat{I}_2} \right)^* - 1 \right) = \hat{U}_2 \hat{I}_2^* \left(n \left(\frac{1}{n} \right)^* - 1 \right) =$$

$$= \hat{U}_2 \hat{I}_2^* \left(n \left(\frac{1}{n} \right) - 1 \right) = 0,$$

který je nulový a tudíž i činný výkon (reálná část zdánlivého výkonu) i ztráty ideálního transformátoru.

❑ Gyrátor

Gyrátor je bezeztrátový dvojbran, který realizuje inverzi zatěžovací impedance $\hat{Z}_2$. Je popsán rovnicemi

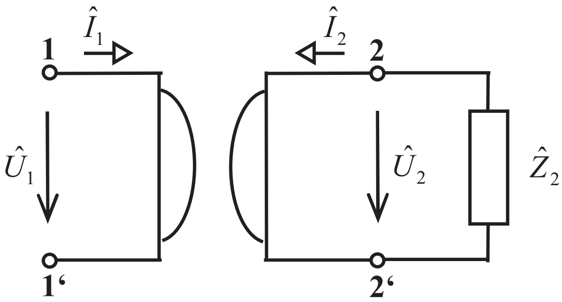
$$\hat{I}_1 = g\hat{U}_2 = 0 \cdot \hat{U}_1 + g\hat{U}_2 ,$$

$$\hat{I}_2 = -g\hat{U}_1 = -g\hat{U}_1 + 0 \cdot \hat{U}_2$$

a tedy i admitanční matici

$$\left[\hat{Y}\right] = \begin{bmatrix} 0 & g \\ -g & 0 \end{bmatrix},$$

kde g je gyrační vodivost. Jeho schematická značka je nakreslena na obr. 3.31.



Obr. 3.31 Model gyrátoru

Užitím transformačních vztahů z tab. 3.1 vidíme, že obě smíšené matice nejsou definovány vlivem nulových hodnot prvků $\hat{Y}_{11}$, $\hat{Y}_{22}$ admitanční matice. Gyrátor je tedy degenerovaný dvojbran. Další existující matice modelu gyrátoru jsou

$$[\hat{Z}]=\begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{g} \\ \dfrac{1}{g} & 0 \end{bmatrix}, \qquad [\hat{A}]=\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{g} \\ g & 0 \end{bmatrix}, \qquad [\hat{B}]=\begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{g} \\ -g & 0 \end{bmatrix}.$$

Vstupní impedance gyrátoru zatíženého impedancí $\hat{Z}_2$ je

$$\hat{Z}_1=\frac{\hat{U}_1}{\hat{I}_1}=\frac{\dfrac{-\hat{I}_2}{g}}{g\hat{U}_2}=\frac{1}{g^2}\frac{-\hat{I}_2}{-\hat{Z}_2\hat{I}_2}=\frac{1}{g^2}\frac{1}{\hat{Z}_2}=r^2\frac{1}{\hat{Z}_2}$$

a jak vidíme, realizuje inverzi zatěžovací impedance, jejíž velikost se mění přímo úměrně se čtvercem gyračního odporu r nebo nepřímo úměrně se čtvercem gyrační vodivosti g. Významným případem je zapojení kapacitoru na výstup gyrátoru, potom bude jeho vstupní impedance

$$\hat{Z}_1=r^2\frac{1}{\hat{Z}_2}=r^2\frac{1}{\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}}=\mathrm{j}r^2\omega C=\mathrm{j}\omega L_\mathrm{e},$$

kde L_e je ekvivalentní hodnota tzv. syntetické indukčnosti. Této vlastnosti se využívá při konstrukci aktivních filtrů, které obsahují pouze rezistory, kapacitory a zesilovací prvky, tzv. ARC filtrů.

Příklad 3.9.

Přesvědčte se, že gyrátor je bezeztrátový obvodový prvek.

♦

Důkaz provedeme dosazením definičních vztahů do rovnice pro zdánlivý výkon dvojbranu a algebraickými úpravami s komplexními čísly

$$\hat{S}=\hat{U}_1\hat{I}_1^*+\hat{U}_2\hat{I}_2^*=\left(\frac{-\hat{I}_2}{g}\right)\left(g\hat{U}_2\right)^*+\hat{U}_2\hat{I}_2^*=-\hat{I}_2\hat{U}_2^*+\hat{U}_2\hat{I}_2^*=-I_2\,e^{\mathrm{j}\psi_{I_2}}\left(U_2\,e^{\mathrm{j}\psi_{U_2}}\right)^*+U_2\,e^{\mathrm{j}\psi_{U_2}}\left(I_2\,e^{\mathrm{j}\psi_{I_2}}\right)^*=$$

$$=U_2I_2\left[-e^{\mathrm{j}\psi_{I_2}}e^{-\mathrm{j}\psi_{U_2}}+e^{\mathrm{j}\psi_{U_2}}e^{-\mathrm{j}\psi_{I_2}}\right]=S_2\left[e^{\mathrm{j}(\psi_{U_2}-\psi_{I_2})}-e^{-\mathrm{j}(\psi_{U_2}-\psi_{I_2})}\right]=\mathrm{j}2\cdot S_2\left[\frac{e^{\mathrm{j}(\psi_{U_2}-\psi_{I_2})}-e^{-\mathrm{j}(\psi_{U_2}-\psi_{I_2})}}{2\mathrm{j}}\right]=$$

$$= \mathrm{j}2\,S_2 \sin\left(\psi_{U_2} - \psi_{I_2}\right) = \mathrm{j}2\,S_2 \sin\left(\varphi_{Z_2}\right).$$

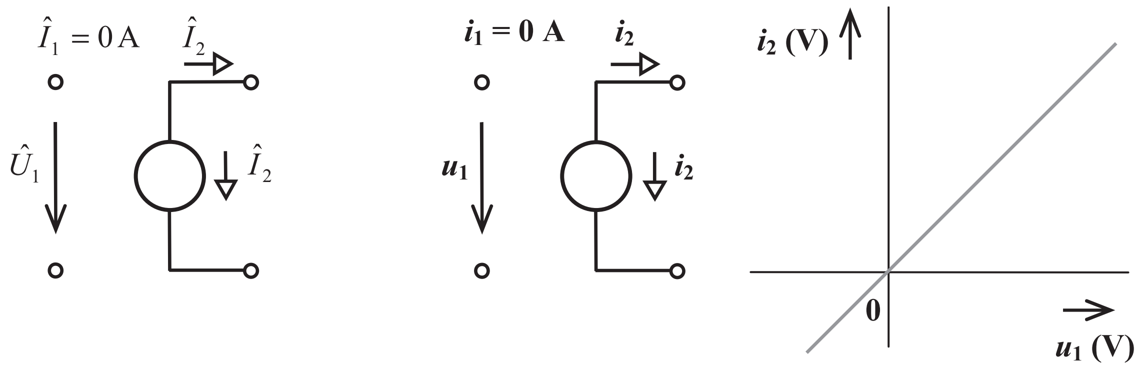
Zdánlivý výkon gyrátoru nemá reálnou část, má nulový činný výkon i ztráty, je tedy bezeztrátový prvek. Jak vidíme, imaginární část, jalový výkon, je nenulový a závisí na impedanci $\hat{Z}_2$.

❑ Aktivní dvojbrany

Aktivní dvojbrany jsou zvláštní případy imitančních a smíšených modelů dvojbranů, u kterých neuvažujeme v jejich modelech pasivní obvodové prvky a přenos energie z výstupní brány směrem k bráně vstupní. Jde o tzv. unilaterární dvojbrany. Tyto dvojbrany jsou charakterizovány pouze jediným parametrem a definují je následující matice

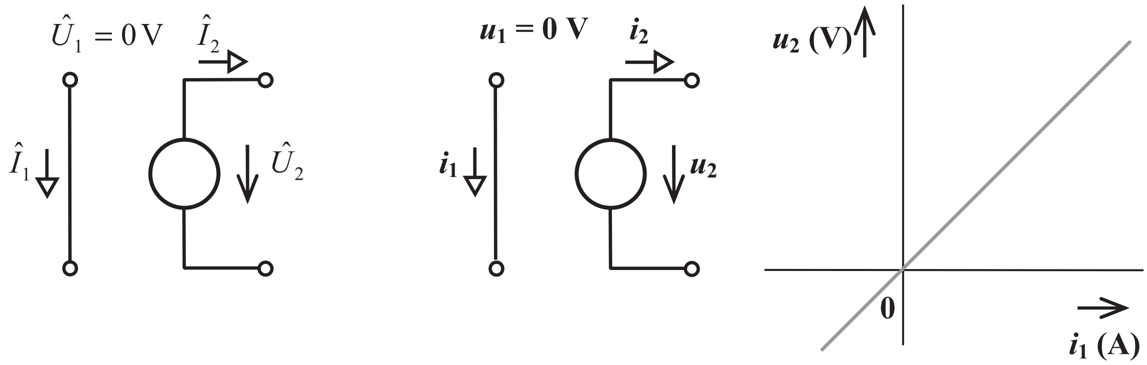
$$\left[\hat{Y}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \hat{Y}_{21} & 0 \end{bmatrix}, \qquad \left[\hat{Z}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \hat{Z}_{21} & 0 \end{bmatrix}, \qquad \left[\hat{K}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \hat{K}_{21} & 0 \end{bmatrix}, \qquad \left[\hat{H}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \hat{H}_{21} & 0 \end{bmatrix}.$$

Admitanční matici $\left[\hat{Y}\right]$ odpovídá rovnice $\hat{I}_2 = \hat{Y}_{21}\hat{U}_1$, která platí i pro obecné časové průběhy napětí ve tvaru $i_2 = y_{21}\,u_1$. V případě tohoto dvojbranu mluvíme o modelu zdroje proudu řízeného napětím. Proud zdroje i_2 je lineární funkcí řídicího napětí u_1. Obvodový model zdroje a řídicí charakteristika zdroje jsou uvedeny na obr. 3.32, ze kterého je zřejmé že řídící výkon zdroje $p_1 = u_1\,i_1$ je vlivem rozpojených svorek vstupní brány nulový (i_1 = 0 A) stejně jako řídící komplexní výkon $\hat{S}_1 = \hat{U}_1\hat{I}_1^*$. Zdroj proudu řízený napětím je modelem převodníku napětí na proud nebo transadmitančního zesilovače. Konstanta $\hat{Y}_{21}$ se nazývá přenosová admitance nebo strmost a má rozměr S.



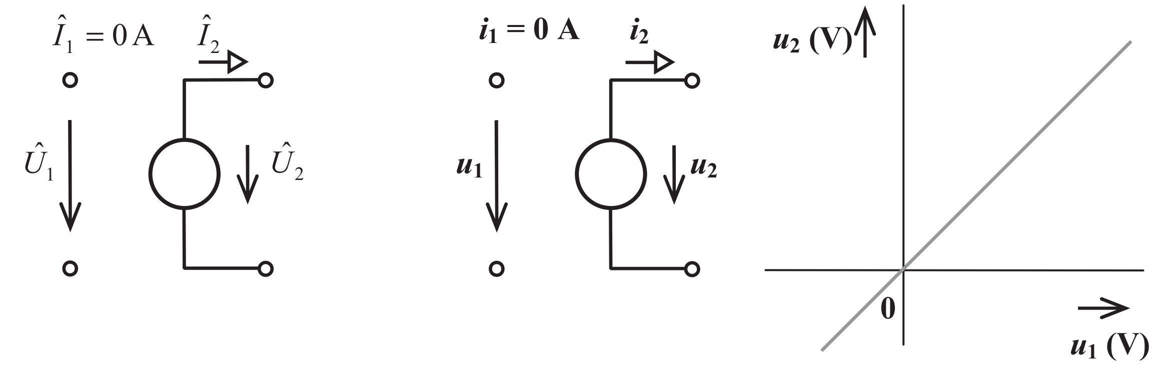
Obr. 3.32 Obvodový model zdroje proudu řízeného napětím: komplexní popis, obecný popis, řídicí charakteristika

Impedanční matici $\left[\hat{Z}\right]$ odpovídá rovnice $\hat{U}_2 = \hat{Z}_{21}\hat{I}_1$, která platí i pro obecné časové průběhy napětí ve tvaru $u_2 = z_{21}\,i_1$. V případě tohoto dvojbranu mluvíme o modelu zdroje napětí řízeného proudem. Napětí zdroje u_2 je lineární funkcí řídicího proudu i_1. Obvodový model zdroje a řídicí charakteristika zdroje jsou uvedeny na obr. 3.33, ze kterého je zřejmé že řídící výkon zdroje $p_1 = u_1\,i_1$ je vlivem propojení svorek vstupní brány nulový (u_1 = 0 V) stejně jako řídící komplexní výkon $\hat{S}_1 = \hat{U}_1\hat{I}_1^*$. Zdroj napětí řízený proudem je modelem převodníku proudu na napětí nebo transimpedančního zesilovače. Konstanta $\hat{Z}_{21}$ se nazývá přenosová impedance nebo transimpedance a má rozměr Ω.



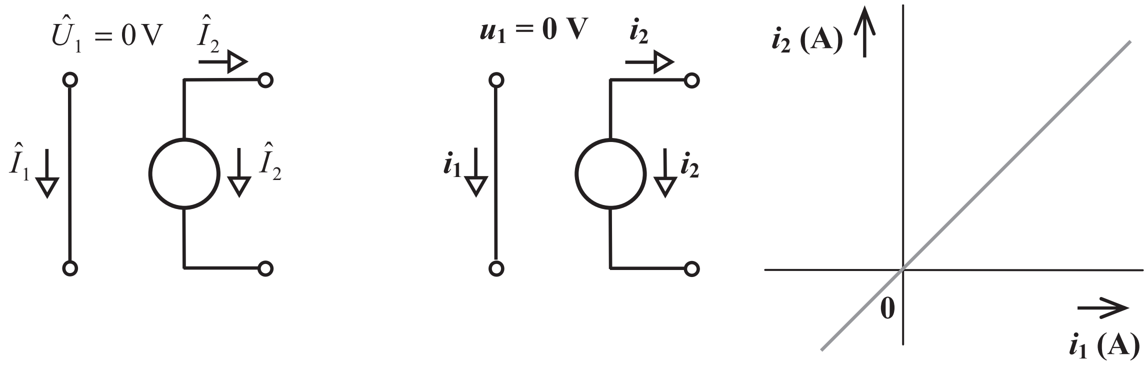
Obr. 3.33 Obvodový model zdroje napětí řízeného proudem: komplexní popis, obecný popis, řídící charakteristika

Smíšené matici $\left[\hat{K}\right]$ odpovídá rovnice $\hat{U}_2 = \hat{K}_{21}\hat{U}_1$, která platí i pro obecné časové průběhy napětí ve tvaru $u_2 = k_{21} u_1$. V případě tohoto dvojbranu mluvíme o modelu zdroje napětí řízeného napětím. Napětí zdroje u_2 je lineární funkcí řídicího napětí u_1. Obvodový model zdroje a řídicí charakteristika zdroje jsou uvedeny na obr. 3.34, ze kterého je zřejmé že řídící výkon zdroje $p_1 = u_1 i_1$ je vlivem rozpojených svorek vstupní brány nulový (i_1 = 0 A) stejně jako řídící komplexní výkon $\hat{S}_1 = \hat{U}_1\hat{I}_1^*$. Zdroj napětí řízený napětím je modelem ideálního zesilovače napětí. Bezrozměrná konstanta $\hat{K}_{21}$ se nazývá napěťové zesílení.



Obr. 3.34 Obvodový model zdroje napětí řízeného napětím: komplexní popis, obecný popis, řídící charakteristika

Smíšené matici $\left[\hat{H}\right]$ odpovídá rovnice $\hat{I}_2 = \hat{H}_{21}\hat{I}_1$, která platí i pro obecné časové průběhy napětí ve tvaru $i_2 = H_{21} i_1$. V případě tohoto dvojbranu mluvíme o modelu zdroje proudu řízeného proudem. Proud zdroje i_2 je lineární funkcí řídicího proudu i_1. Obvodový model zdroje a řídicí charakteristika zdroje jsou uvedeny na obr. 3.35, ze kterého je zřejmé že řídící výkon zdroje $p_1 = u_1 i_1$ je vlivem propojení svorek vstupní brány nulový (u_1 = 0 V) stejně jako řídící komplexní výkon $\hat{S}_1 = \hat{U}_1\hat{I}_1^*$. Zdroj proudu řízený proudem je modelem ideálního zesilovače proudu. Bezrozměrná konstanta $\hat{H}_{21}$ se nazývá proudové zesílení nebo proudový zesilovací činitel.



Obr. 3.35 Obvodový model zdroje proudu řízeného proudem: komplexní popis, obecný popis, řídící charakteristika

Σ Shrnutí pojmů 3.5.

Dvojbrany u nichž nelze vytvořit všechny maticové modely nazýváme degenerované. Patří sem všechny dvojbrany definované jediným parametrem. K základním degenerovaným dvojbranům patří ideální transformátor, gyrátor a řízené zdroje. Důležitou vlastností těchto dvojbranů je, že jsou bezeztrátové. Ideální transformátor je obvodový prvek, který v závislosti na převodním poměru mění velikost impedance k němu připojené. Gyrátor je obvodový prvek, který modeluje inverzi impedance, připojené k jeho výstupní bráně. Velikost impedance závisí na gyrační vodivosti nebo gyračním odporu. Řízené zdroje slouží k modelování zesilovačů nebo převodníků elektrických veličin. Zesilovače jsou charakterizované převodní konstantou – zesílením, převodníky – transimitancí.

? Otázky 3.5.

1. Kolika parametry je definován ideální transformátor?
2. K čemu slouží ideální transformátor?
3. Které degenerované dvojbrany jsou bezeztrátové?
4. Je ideální transformátor kmitočtově závislý?
5. Jak se chová kapacitor připojený k výstupním svorkám gyrátoru?
6. Co je to gyrační odpor?
7. Kolika parametry je definován model řízeného zdroje?
8. Jak nazýváme bezrozměrné konstanty řízených zdrojů?
9. Které řízené zdroje jsou spojeny s transimitancemi?
10. Jaký je řídící výkon řízených zdrojů?

Uloha k řešení 3.5

Určete velikost a fázi vstupní impedance ideálního transformátoru s převodem $n = 0{,}1$ má-li zatěžovací impedance hodnotu 8+j6 Ω.

Řešení:

$$\hat{Z}_1 = n^2 \hat{Z}_2 = 0{,}1^2 \cdot (8 + \mathrm{j}6) = 0{,}08 + \mathrm{j}0{,}06\ \Omega\,,$$

$$\left|\hat{Z}_1\right| = \sqrt{0{,}08^2 + 0{,}06^2} = 0{,}1\ \Omega , \qquad \varphi_{Z_1} = \arctan\left(\frac{0{,}06}{0{,}08}\right) = 36{,}87^\circ .$$

4. Obvody s proměnnými parametry. Fázorové čáry, amplitudové a fázové charakteristiky, Bodeho metoda

Motivace Po prostudování této kapitoly budete umět

- modelovat změny parametrů obvodových prvků a zdrojů
- sestrojit hodograf (fázorovou čáru) imitančních funkcí
- nakreslit amplitudovou a fázovou charkteristiku přenosové funkce
- efektivně sestrojit kmitočtové charakteristiky lomené přenosové funkce a stanovit její nuly a póly
- sestrojit kmitočtové asymptotické charakteristiky (Bodeho charakteristiky)

4.1. Fázorové čáry, amplitudové a fázové charakteristiky

Při analýze obvodů v harmonicky ustáleném stavu většinou předpokládáme, že parametry obvodových prvků jsou konstantní. K jejich řešení obvykle využíváme transformaci harmonických průběhů obvodových veličin do komplexní roviny, které v daném provozním stavu obvodu reprezentují fázory napětí a proudů. Zajímá-li nás vliv změny velikosti obvodových parametrů na chování obvodu, ať již z důvodů citlivostní analýzy, toleranční analýzy či regulace, můžeme tuto skutečnost nejsnáze modelovat změnou hodnoty jednoho z parametrů v řadě ustálených stavů obvodu (prakticky při velmi pomalé změně parametrů) reprezentovaných souborem fázorů, jejichž koncové body se pohybují po křivkách, jež nazýváme fázorovými čarami nebo hodografy. Označíme-li změnu parametru reálným číslem p, můžeme popsat změnu odporu $R = pR_0$, kapacity $C = pC_0$, vlastní indukčnosti $L = pL_0$, vzájemné indukčnosti $M = pM_0$, případně změnu parametru nezávislého nebo řízeného zdroje např. kmitočtu $\omega = p\omega_0$, čímž můžeme zkoumat funkční závislosti parametru p pomocí komplexní funkce reálné proměnné $\hat{F}(p)$, která může zastupovat impedanční, admitanční nebo přenosovou charakteristiku. Indexem 0 je označena vztažná hodnota parametru, což může být např. jmenovitá hodnota, rezonanční úhlový kmitočet nebo jiný parametr pro který obvod vykazuje významné vlastnosti, kterou můžeme použít k normování proměnných. Fázorové čáry jsou orientované, takže jim přiřazujeme orientaci pomocí šipky. Kladná orientace hodografu odpovídá nárůstu hodnot parametru p. Vhodnou volbou hodnoty parametru dosáhneme požadovaného průběhu komplexní funkce $\hat{F}(p)$, kterou si můžeme vyjádřit ve složkovém tvaru

$$\hat{F}(p) = \mathrm{Re}\{\hat{F}(p)\} + \mathrm{j}\,\mathrm{Im}\{\hat{F}(p)\},$$

nebo ve tvaru exponenciálním

$$\hat{F}(p) = \left|\hat{F}(p)\right| \mathrm{e}^{\mathrm{j}\arg\left(\hat{F}(p)\right)},$$

kde závislost velikosti komplexní funkce $\left|\hat{F}(p)\right|$ na parametru p označujeme jako modulovou nebo amplitudovou charakteristiku a závislost argumentu komplexní funkce

$$\varphi_{\mathrm{P}} = \arg\left(\hat{F}(p)\right) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\{\hat{F}(p)\}}{\mathrm{Re}\{\hat{F}(p)\}}\right)$$

na parametru p označujeme jako fázovou charakteristiku. Grafické znázornění komplexní funkce $\hat{F}(p)$ v komplexní rovině nazýváme hodografem. Zvláštním případem hodografu je fázorová čára, kdy komplexní funkce je zastoupena obvodovými funkcemi obvykle v exponenciálním tvaru. Hodograf či fázorovou čáru opatřujeme kvůli odečtu hodnot pro danou hodnotu parametru p

parametrickou stupnicí, která je v některých případech nelineární. Této nevýhodě se můžeme vyhnout zobrazením komplexní funkce v podobě oddělené amplitudové a fázové charakteristiky, které konstruujeme přímo v závislosti na hodnotě proměnného parametru, tedy bez nutnosti konstrukce pomocné parametrické stupnice.

Grafickou podobu funkce můžeme získat stanovením funkčních hodnot pro dostatečný počet hodnot parametru p z požadovaného intervalu, ať už zobrazujeme hodograf či modulovou a fázovou charakteristiku. Tento postup je v době masového využití výpočetní techniky snadno realizovatelný a jediný možný u složitějších obvodů. V jednodušších případech obvodů můžeme využít i geometrické konstrukce, neboť hodografy jsou většinou přímky nebo kružnice, pro které lze jednoduše konstruovat i parametrické stupnice.

Základními hodografy či přesněji fázorovými čárami jsou impedanční charakteristiky $\hat{Z}(p)$ a admitanční charakteristiky $\hat{Y}(p)$, ze kterých užitím zobecněného Ohmova zákona můžeme snadno odvodit hodografy napětí a proudu ze vztahů

$$\hat{U}(p) = \hat{Z}(p)\hat{I}(p) \text{ a } \hat{I}(p) = \hat{Y}(p)\hat{U}(p)$$

a z jejich součinů i hodografy výkonů.

Σ Shrnutí pojmů 4.1.

Fázorová čára je spojitá křivka zobrazená v komplexní rovině, na které leží geometrická místa bodů vymezená definičním intervalem reálné proměnné p komplexní obvodové funkce $\hat{F}(p)$. Fázorovou čarou či hodografem modelujeme vliv změny obvodového parametru na chování elektrického obvodu. Základními hodografy jsou impedanční a admitanční charakteristiky, ze kterých lze odvodit hodografy napětí a proudu užitím zobecněného Ohmova zákona.

? Otázky 4.1.

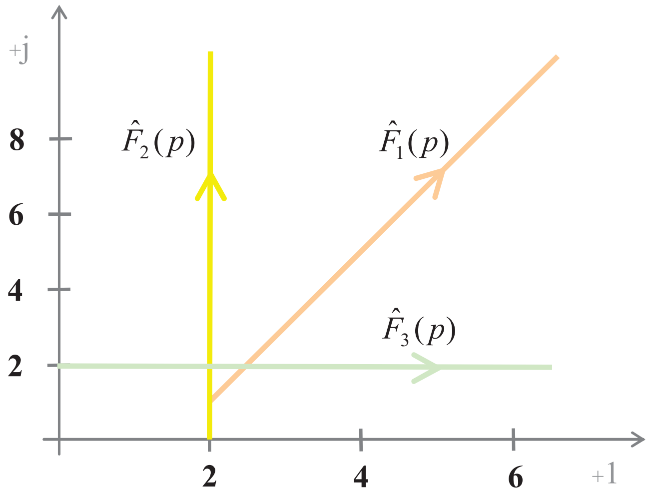
1. Jakým způsobem modelujeme vliv změn obvodových parametrů?
2. Co je to fázorová čára?
3. Je rozdíl mezi hodografem a fázorovou čarou?
4. Co udává amplitudová a fázová charakteristika?
5. Jak konstruujeme hodograf nebo amplitudovou a fázovou charakteristiku obvodu s proměnným parametrem?
6. Které charakteristiky definují fázové a amplitudové poměry v elektrickém obvodu ?

Úloha k řešení 4.1.

Nakreslete hodograf funkce $\hat{F}(p) = \hat{A} + p\,\hat{B}$. Co můžeme touto funkcí modelovat?

Řešení:

Budou-li mít konstanty rozměr impedance nebo admitance, potom tato funkce modeluje v komplexní rovině impedanční charakteristiku $\hat{Z}(p)$ sériového RL obvodu nebo admitanční charakteristiku $\hat{Y}(p)$ paralelního RC obvodu, jejichž koncové body se v závislosti na parametru $p \in <0, \infty)$ nacházejí na polopřímce. Praktický význam tak mají v elektrotechnice jen hodografy, které jsou definovány jen jednou složkou konstant $\hat{A}$ a $\hat{B}$. Možné hodnoty konstant si ilustrujme následujícími třemi případy konstant. Pro konstanty $\hat{A} = 2 + \mathrm{j}$ a $\hat{B} = 1 + \mathrm{j}2$ získáme hodograf $\hat{F}_1(p) = 2 + \mathrm{j} + p(1 + \mathrm{j}2)$, pro konstanty $\hat{A} = 2$ a $\hat{B} = \mathrm{j}2$ získáme hodograf $\hat{F}_2(p) = 2 + \mathrm{j}2p$ a pro konstanty $\hat{A} = \mathrm{j}2$ a $\hat{B} = 2$ získáme hodograf $\hat{F}_3(p) = \mathrm{j}2 + 2p$. První funkce má jen teoretický význam. Druhá funkce ilustruje v případě charakteristiky $\hat{Z}(p)$ závislost induktivní reaktance a v případě charakteristiky $\hat{Y}(p)$ závislost kapacitní susceptance na parametru *p*. Třetí funkce v případě charakteristiky $\hat{Z}(p)$ představuje závislost rezistance a v případě charakteristiky $\hat{Y}(p)$ závislost konduktance na parametru *p*. Praktický význam tak mají jen hodografy určené konstantami $\hat{A}$ a $\hat{B}$, které mají jen jednu ze složek komplexního čísla. Hodografy dílčích funkcí jsou vyneseny na obr. 4.1.



Obr. 4.1 Hodografy funkcí, příklad 4.1

4.2. Hodografy jednoduchých obvodů s proměnným parametrem

❑ Proměnný rezistor

Impedanční charakteristika proměnného rezistoru, zobrazená na obr. 4.2 vlevo spolu obvodovým schématem, je definována

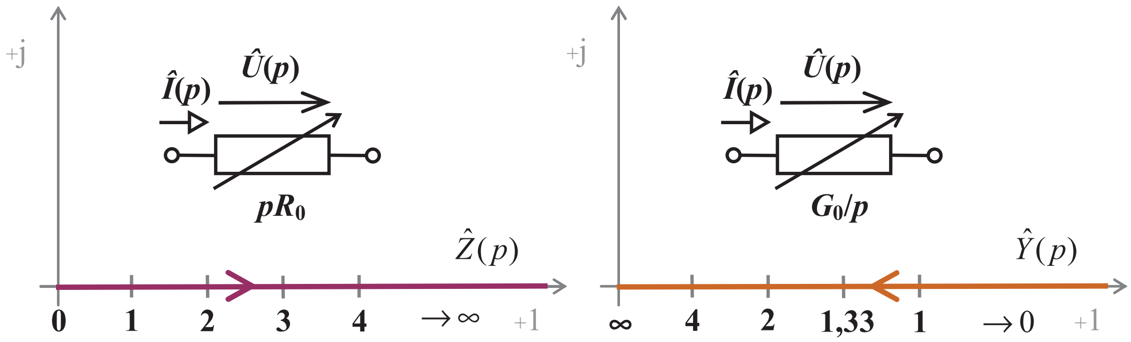
$$\hat{Z}(p) = \frac{\hat{U}(p)}{\hat{I}(p)} = p\,R_0\,,$$

kde R_0 je vztažná hodnota odporu a definiční obor parametru $p \in \langle 0, \infty)$. Je to rovnice polopřímky s lineární parametrickou stupnicí, která leží v kladné části reálné osy komplexní roviny.

Admitanční charakteristika, zobrazená na obr. 4.2 vpravo, je inverzní k charakteristice impedanční

$$\hat{Y}(p) = \frac{1}{\hat{Z}(p)} = \frac{\hat{I}(p)}{\hat{U}(p)} = \frac{1}{p\,R_0} = \frac{1}{p}\,G_0\,,$$

kde G_0 je vztažná hodnota vodivosti a definiční obor parametru $p \in \langle 0, \infty)$. Je to rovnice polopřímky avšak s nelineární parametrickou stupnicí, která leží v kladné části reálné osy komplexní roviny, viz obr. 4.2 vpravo.



Obr. 4.2 Hodograf a schematická značka proměnného rezistoru/konduktoru: impedanční model, admitanční model

❑ Proměnný induktor

Impedanční charakteristika proměnného induktoru, zobrazená na obr. 4.3 vlevo spolu obvodovým schématem, je definována

$$\hat{Z}(p)=\frac{\hat{U}(p)}{\hat{I}(p)}=\mathrm{j}\omega\, p\, L_0=p\,\mathrm{j}X_{\mathrm{L}_0}\,,$$

kde L_0 a X_{L_0} je vztažná hodnota indukčnosti a její reaktance a definiční obor parametru $p\in<0,\infty)$. Je to rovnice polopřímky s lineární parametrickou stupnicí, která leží v kladné části imaginární osy komplexní roviny.

Admitanční charakteristika, zobrazená na obr. 4.3 vpravo, je inverzní k charakteristice impedanční a je daná

$$\hat{Y}(p)=\frac{1}{\hat{Z}(p)}=\frac{\hat{I}(p)}{\hat{U}(p)}=\frac{1}{\mathrm{j}\omega\, p\, L_0}=\frac{K_{\mathrm{L}_0}}{\mathrm{j}\omega\, p}=\frac{1}{p\,\mathrm{j}X_{\mathrm{L}_0}}=-\mathrm{j}\frac{1}{p}B_{\mathrm{L}_0}\,,$$

kde $K_{\mathrm{L}_0}=L_0^{-1}$ je inverzní indukčnost, B_{L_0} je vztažná hodnota susceptance a definiční obor parametru $p\in<0,\infty)$. Je to rovnice polopřímky s nelineární parametrickou stupnicí, která leží v záporné části imaginární osy komplexní roviny.

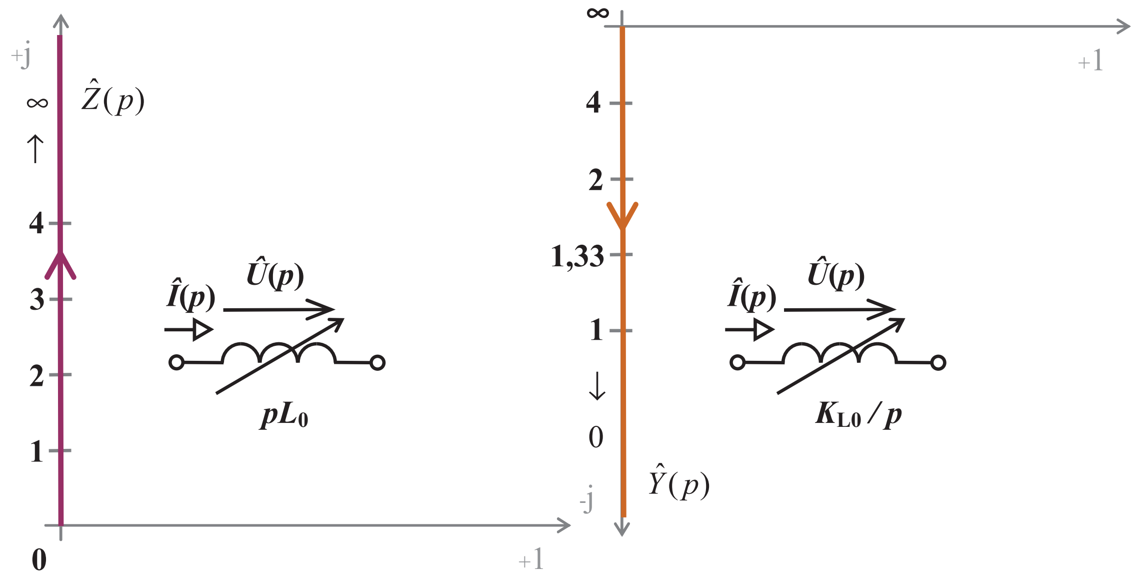
❑ Proměnný kapacitor

Impedanční charakteristika proměnného kapacitoru, zobrazená na obr. 4.4 vlevo spolu obvodovým schématem, je definována

$$\hat{Z}(p)=\frac{\hat{U}(p)}{\hat{I}(p)}=\frac{1}{\mathrm{j}\omega\, p\, C_0}=\frac{1}{p}\left(-\mathrm{j}\frac{1}{\omega\, C_0}\right)=-\mathrm{j}\frac{D_{\mathrm{C}_0}}{\omega\, p}=-\frac{1}{p}\mathrm{j}X_{\mathrm{C}_0}\,,$$

kde C_0 je kapacita, $D_{\mathrm{C}_0}=C_0^{-1}$ je inverzní kapacita a X_{C_0} je vztažná hodnota kapacity a její reaktance a definiční obor parametru $p\in<0,\infty)$. Je to rovnice polopřímky s nelineární parametrickou stupnicí, která leží v záporné části imaginární osy komplexní roviny.

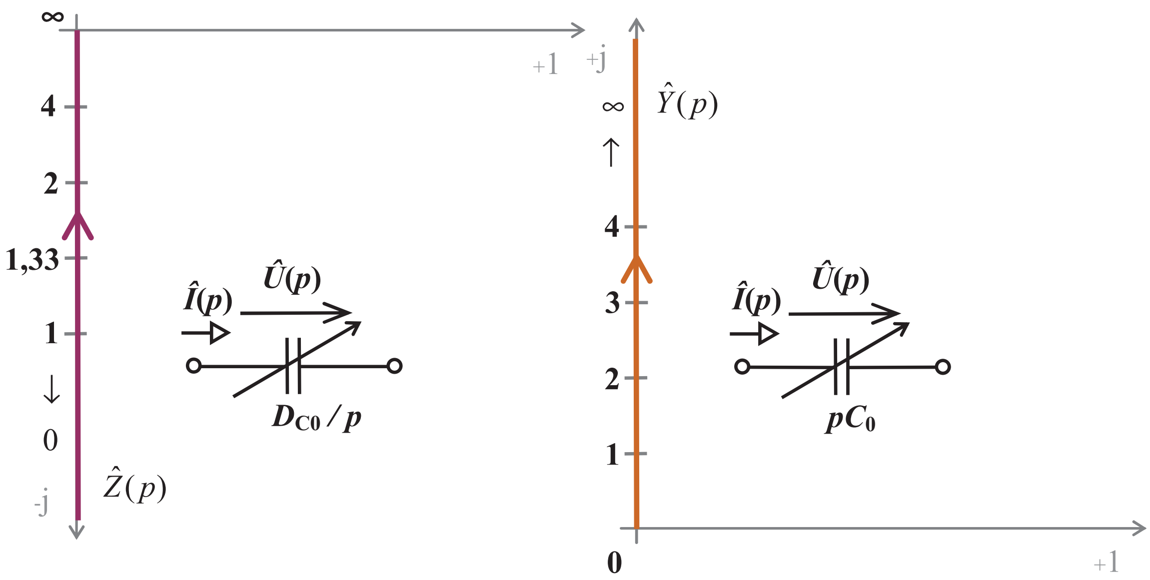
Admitanční charakteristika, zobrazená na obr. 4.4 vpravo, je inverzní k charakteristice impedanční



Obr. 4.3 Hodograf a schematická značka proměnného induktoru/inverzního induktoru: impedanční model, admitanční model

$$\hat{Y}(p) = \frac{1}{\hat{Z}(p)} = \frac{\hat{I}(p)}{\hat{U}(p)} = \frac{1}{\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega p C_0}} = p\,\mathrm{j}\omega C_0 = p\,\mathrm{j}B_{\mathrm{C}_0} = p\,\mathrm{j}\frac{1}{X_{\mathrm{C}_0}},$$

kde B_{C_0} je vztažná hodnota susceptance a definiční obor parametru $p \in (0, \infty)$. Je to rovnice polopřímky s lineární parametrickou stupnicí, která leží v záporné části imaginární osy komplexní roviny.



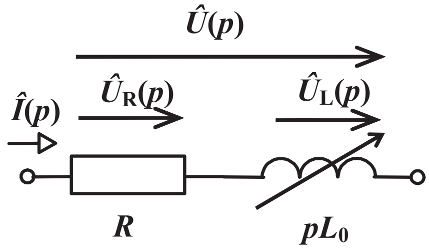
Obr. 4.4 Hodograf a obvodové schéma proměnného inverzního kapacitoru/kapacitoru: impedanční model, admitanční model

❑ Rezistor a proměnný induktor v sérii

Impedanční charakteristika sériového zapojení rezistoru R a proměnného induktoru, zobrazená na obr. 4.6 vlevo, je definována

$$\hat{Z}(p)=\frac{\hat{U}(p)}{\hat{I}(p)}=R+\mathrm{j}\omega\, p\, L_0=R+p\,\mathrm{j}X_{\mathrm{L_0}}$$

a její obvodové schéma je na obr. 4.5.



Obr. 4.5 Schéma zapojení RL obvodu s proměnným induktorem

kde L_0 a $X_{\mathrm{L_0}}$ je vztažná hodnota indukčnosti a její reaktance a definiční obor parametru $p\in<0,\infty)$. Jak vidíme z obr. 4.6 vlevo, je to rovnice polopřímky s lineární parametrickou stupnicí, která leží v I. kvadrantu komplexní roviny a je posunuta o hodnotu R vůči jejímu počátku. Jak víme, přímka je určena dvěma body, které můžeme využít k stanovení měřítka parametrické stupnice, která je lineární. Zvolíme-li hodnoty parametru $p=0$ a $p=1$, potom pomocí funkčních hodnot impedanční charakteristiky $\hat{Z}(0)$ a $\hat{Z}(1)$ určíme jednotku parametrické stupnice, tak jak je to ukázáno na obr. 4.6 vlevo, z něhož rovněž vidíme, že parametrická stupnice může být libovolně umístěna.

Admitanční charakteristika, zobrazená na obr. 4.6 vpravo, je inverzní k charakteristice impedanční

$$\hat{Y}(p)=\frac{1}{\hat{Z}(p)}=\frac{\hat{I}(p)}{\hat{U}(p)}=\frac{1}{R+\mathrm{j}\omega\, p\, L_0}=\frac{1}{R+p\,\mathrm{j}X_{\mathrm{L_0}}}=\frac{1}{R+p\,\mathrm{j}X_{\mathrm{L_0}}}\frac{R-p\,\mathrm{j}X_{\mathrm{L_0}}}{R-p\,\mathrm{j}X_{\mathrm{L_0}}}=$$

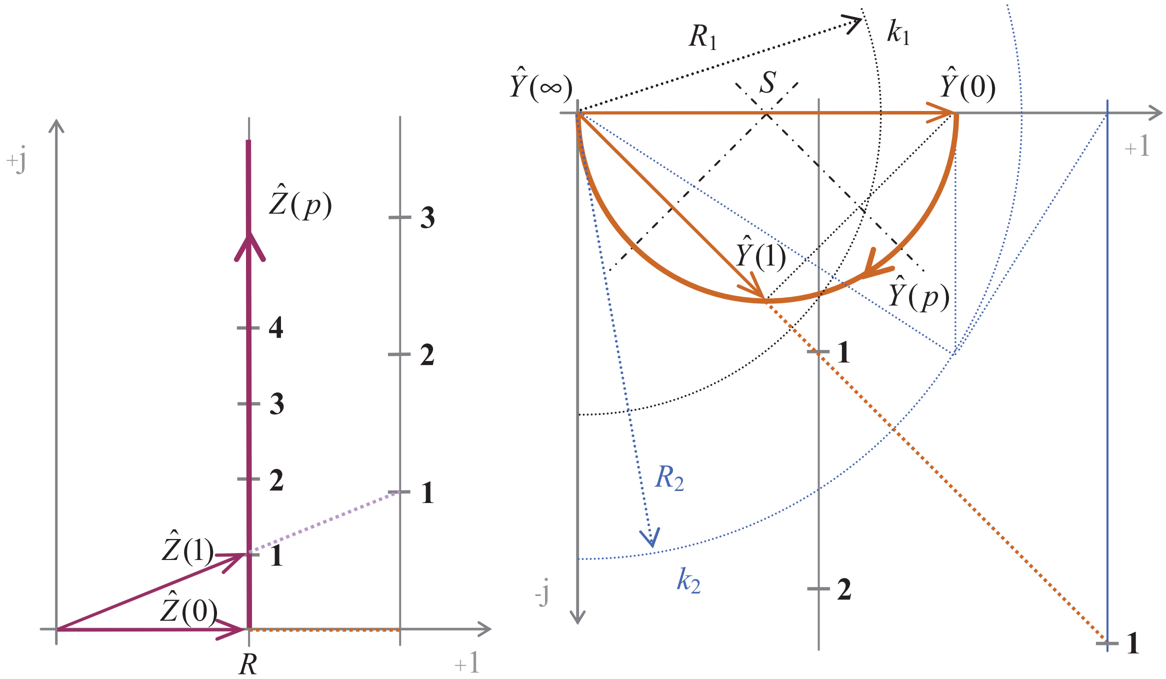
$$=\frac{R}{R^2+\left(p\,X_{\mathrm{L_0}}\right)^2}-\mathrm{j}\frac{p\,X_{\mathrm{L_0}}}{R^2+\left(p\,X_{\mathrm{L_0}}\right)^2}$$

a má definiční obor parametru $p\in(0,\infty)$. Je to rovnice kružnice, která leží ve IV. kvadrantu komplexní roviny. Jak víme, kružnice je určena třemi body, které nejsnáze získáme pro tzv. hlavní hodnoty parametru $p=0$, $p=1$ a $p\to\infty$

$$\hat{Y}(0)=\lim_{p\to 0}\hat{Y}(p)=\lim_{p\to 0}\frac{R}{R^2+\left(p\,X_{\mathrm{L_0}}\right)^2}-\mathrm{j}\frac{p\,X_{\mathrm{L_0}}}{R^2+\left(p\,X_{\mathrm{L_0}}\right)^2}=\frac{1}{R},$$

$$\hat{Y}(1)=\lim_{p\to 1}\hat{Y}(p)=\lim_{p\to 1}\frac{R}{R^2+\left(p\,X_{\mathrm{L_0}}\right)^2}-\mathrm{j}\frac{p\,X_{\mathrm{L_0}}}{R^2+\left(p\,X_{\mathrm{L_0}}\right)^2}=\frac{R}{R^2+X_{\mathrm{L_0}}^2}-\mathrm{j}\frac{X_{\mathrm{L_0}}}{R^2+X_{\mathrm{L_0}}^2},$$

$$\hat{Y}(\infty)=\lim_{p\to\infty}\hat{Y}(p)=\lim_{p\to\infty}\frac{R}{R^2+\left(p\,X_{\mathrm{L_0}}\right)^2}-\mathrm{j}\frac{p\,X_{\mathrm{L_0}}}{R^2+\left(p\,X_{\mathrm{L_0}}\right)^2}=0\,.$$



Obr. 4.6 Hodografy RL obvodu s proměnným induktorem: impedanční model, admitanční model

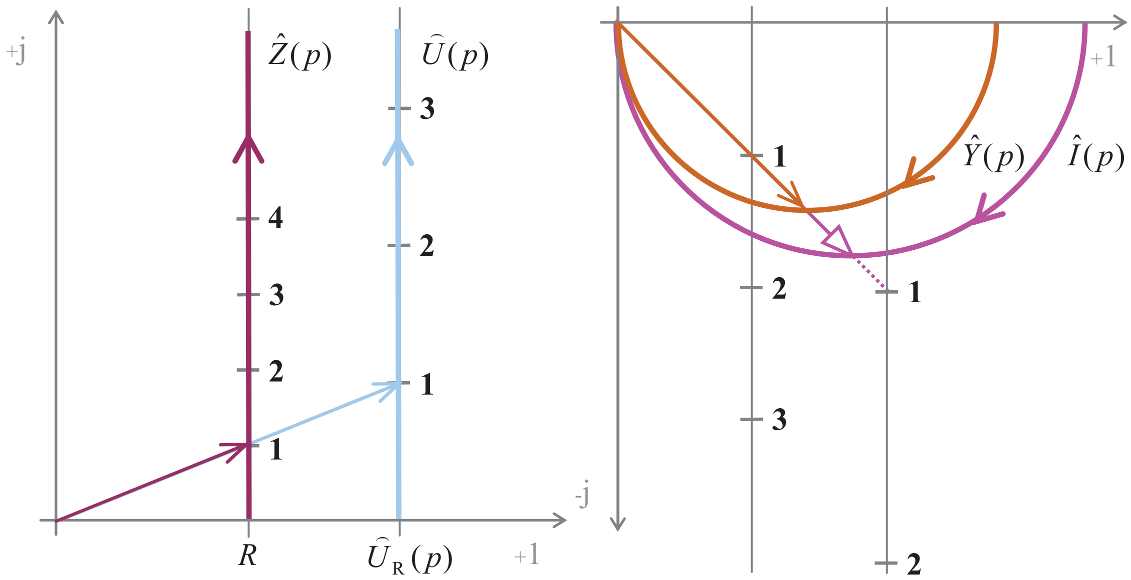
Parametrická stupnice umístěná po obvodu půlkruhu by byla nerovnoměrná. Můžeme ji ale linearizovat, když půlkružnici s nelineární parametrickou stupnicí, zobrazíme (promítneme) na polopřímku s rovnoměrným dělením stupnice užitím geometrické inverze (Euklidova věta) vůči středu inverze, který leží v bodě s hodnotou $\hat{Y}(\infty)$ čili v počátku komplexní roviny. Půlkružnice a jí odpovídající inverzní polopřímka jsou inverzní vůči řídicí kružnici k_1 se středem v bodě $\hat{Y}(\infty)$ a libovolným poloměrem R_1, přičemž polopřímku získáme spuštěním kolmice z průsečíku řídicí kružnice a půlkružnice hodografu $\hat{Y}(p)$ na spojnici středu inverze $\hat{Y}(\infty)$ a středu kružnice S. Tím, že poloměr řídicí kružnice je libovolný, může být kolmice vztyčena v libovolném místě z průsečíku řídicí kružnice a půlkružnice. Pokud ale průsečík neexistuje, parametrickou polopřímku pak zkonstruujeme pomocí řídicí kružnici k_2 postupem naznačeným na obr. 4.6 vpravo. V bodě $\hat{Y}(0)$ vztyčíme kolmici a v místě jejího průsečíku s kružnicí k_2 sestrojíme tečnu ke kružnici. V místě, kde tato tečna protne polopřímku určenou bodem s hodnotou $\hat{Y}(\infty)$ a středem kružnice S potom leží parametrická přímka, která je na ni kolmá. Střed půlkružnice S stanovíme geometrickou konstrukcí obecně z průsečíku os tětiv daných dvojicemi bodů určených hodnotami $\hat{Y}(0)$, $\hat{Y}(1)$ a $\hat{Y}(1)$, $\hat{Y}(\infty)$. Měřítko parametrické stupnice určíme promítnutím hodnot $\hat{Y}(0)$, $\hat{Y}(1)$ do inverzní přímky ze středu inverze $\hat{Y}(\infty)$. Nula parametrické stupnice přímky tedy leží na polopřímce začínající bodem $\hat{Y}(\infty)$ a procházející středem kružnice S.

Při napájení tohoto obvodu ze zdroje s konstantními parametry získáme připojením proudového zdroje $\hat{I}(p) = \hat{I}_{\mathrm{o}}$ hodograf napětí

$$\hat{U}(p) = \hat{Z}(p)\,\hat{I}_{\mathrm{o}} = \left(R + \mathrm{j}\omega\, p\, L_0\right)\hat{I}_{\mathrm{o}} = R\,\hat{I} + \mathrm{j}\omega\, p\, X_{\mathrm{L}_0}\,\hat{I}_{\mathrm{o}} = \hat{U}_{\mathrm{R}} + \hat{U}_{\mathrm{L}}(p),$$

který bude po podělení velikostí proudu $I_{\mathrm{o}} = \left|\hat{I}_{\mathrm{o}}\right|$ totožný s hodografem impedanční charakteristiky $\hat{Z}(p)$ viz obr. 4.7 vlevo. Pokud zavedeme měřítko impedance m_Z dané velikostí impedance $\left|\hat{Z}\right|$

připadající na jednotku délky parametrické stupnice, bude hodograf $\hat{U}(p)$ totožný s hodografem $\hat{Z}(p)$, jak plyne z Ohmova zákona, při měřítku napětí $m_U = m_Z I_o$.



Obr. 4.7 Hodografy RL obvodu s proměnným induktorem: napětí, proud

Podobně při napájení tohoto obvodu z napěťového zdroje $\hat{U}(p) = \hat{U}_o$ bude hodograf proudu daný

$$\hat{I}(p) = \hat{Y}(p)\hat{U}_o = \frac{\hat{U}_o}{R + j\omega p L_0} = \left(\frac{R}{R^2 + \left(p X_{L_0}\right)^2} - j \frac{p X_{L_0}}{R^2 + \left(p X_{L_0}\right)^2} \right) \hat{U}_o$$

a po podělení velikostí napětí $U_o = \left|\hat{U}_o\right|$ bude totožný s hodografem admitanční charakteristiky $\hat{Y}(p)$ na obr. 4.7 vpravo. Zavedeme-li měřítko admitance m_Y dané velikostí admitance $\left|\hat{Y}\right|$ připadající na jednotku délky parametrické stupnice, bude hodograf $\hat{I}(p)$ totožný s hodografem $\hat{Y}(p)$, jak plyne z Ohmova zákona, při měřítku proudu $m_I = m_Y U_o$.

Podobně hodograf napětí rezistoru $\hat{U}_R(p)$ na obr. 4.8 vlevo, po podělení velikostí součinu $\left|R\hat{U}\right|$ resp. při měřítku napětí $m_U = R\, m_I = m_Y R{\cdot}U_o$ splyne s hodografem $\hat{Y}(p)$

$$\hat{U}_R(p) = R\,\hat{I}(p) = R\,\hat{Y}(p)\hat{U}_o = \hat{Y}(p)\,R\,\hat{U}_o = \frac{1}{R + jp\,X_{L_0}} R\,\hat{U}_o .$$

Stejné měřítko napětí má i hodograf napětí induktoru v pravé části obrázku, protože z 2. Kirchhoffova zákona plyne

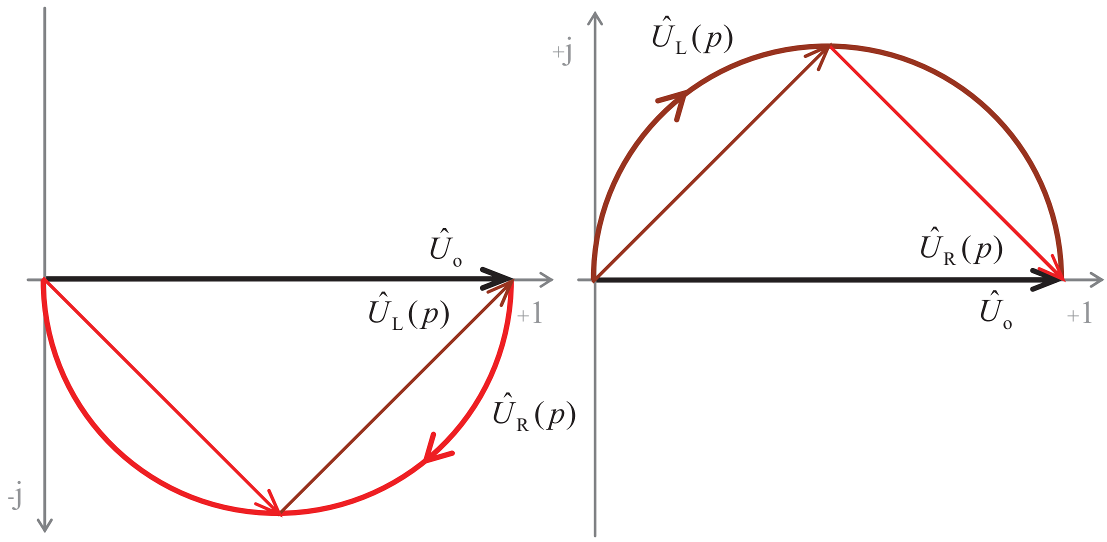
$$\hat{U}_L(p) = \hat{U}_o - \hat{U}_R(p) = \hat{U}_o - \hat{Y}(p)\,R\,\hat{U} = \left(1 - \hat{Y}(p)\,R\right)\hat{U}_o = \left(1 - \frac{R}{R + jp\,X_0}\right)\hat{U}_o = \frac{jp\,X_{L_0}}{R + jp\,X_{L_0}}\hat{U}_o =$$

$$= jpX_{L_0}\,\hat{I}(p)$$

a po rozšíření posledního členu rovnice podílem $\frac{R}{R}$, získáme rovnici

$$\hat{U}_{\mathrm{L}}(p) = \mathrm{j}p\,X_{\mathrm{L_0}}\,\hat{I}(p)\frac{R}{R} = \mathrm{j}\frac{p\,X_{\mathrm{L_0}}}{\mathrm{R}}\hat{U}_{\mathrm{R}}(p),$$

ze které vidíme, že napětí $\hat{U}_{\mathrm{L}}(p)$ je natočeno o 90° vůči napětí $\hat{U}_{\mathrm{R}}(p)$ a že jeho velikost je $\frac{p\,X_{\mathrm{L_0}}}{\mathrm{R}}$ násobkem velikosti $\left|\hat{U}_{\mathrm{R}}(p)\right|$. Protože podíl $\frac{p\,X_{\mathrm{L_0}}}{\mathrm{R}}$ je bezrozměrný, mají obě napětí stejné měřítko. Hodograf tohoto napětí je zobrazený na obr. 4.8 vpravo.



Obr. 4.8 Hodografy napětí RL obvodu s proměnným induktorem: rezistor, induktor

Hodograf zdánlivého výkonu tohoto obvodu při napájení z proudového zdroje je dán rovnicí

$$\hat{S}(p) = \hat{U}(p)\,\hat{I}_{\mathrm{o}}^{*} = \hat{Z}(p)\,\hat{I}_{\mathrm{o}}\,\hat{I}_{\mathrm{o}}^{*} = \hat{Z}(p)\left|\hat{I}_{\mathrm{o}}\right|^{2} = \left(R + \mathrm{j}p\,X_{\mathrm{L_0}}\right)I_{\mathrm{o}}^{2}.$$

Z rovnice vidíme, že po podělení kvadrátem efektivní hodnoty proudu I_{o}^{2} nebo po zavedení měřítka výkonu $m_{\mathrm{S}} = m_{\mathrm{Z}}\,I_{\mathrm{o}}^{2}$ by byl totožný s hodografem $\hat{Z}(p)$.

Podobně hodograf zdánlivého výkonu tohoto obvodu při napájení z napěťového zdroje je dán rovnicí

$$\hat{S}(p) = \hat{U}_{\mathrm{o}}\,\hat{I}^{*}(p) = \hat{U}_{\mathrm{o}}\,\hat{I}^{*}(p) = \hat{U}_{\mathrm{o}}\left(\hat{Y}(p)\hat{U}_{\mathrm{o}}\right)^{*} = \hat{Y}^{*}(p)\hat{U}_{\mathrm{o}}\,\hat{U}_{\mathrm{o}}^{*} = \hat{Y}^{*}\left|\hat{U}_{\mathrm{o}}\right|^{2} = \left(\frac{1}{R + \mathrm{j}pX_{\mathrm{L_0}}}\right)^{*} U_{\mathrm{o}}^{2}.$$

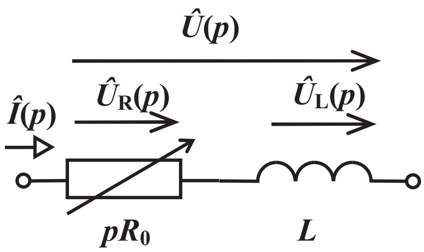
K jeho konstrukci musíme sestrojit komplexně sdružený hodograf k $\hat{Y}(p)$, což je v našem případě půlkružnice zrcadlově překlopená kolem reálné osy nebo můžeme použít hodograf $\hat{Y}(p)$ s tím, že fázový posun mezi napětím a proudem bychom orientovali opačným směrem tj. ve směru hodinových ručiček, tedy od napětí zdroje $\hat{U}_{\mathrm{o}}$ k proudu obvodu $\hat{I}(p)$. Potom i v tomto případě po podělení kvadrátem efektivní hodnoty napětí U_{o}^{2} nebo po zavedení měřítka výkonu $m_{\mathrm{S}} = m_{\mathrm{Z}}U_{\mathrm{o}}^{2}$ by byl hodograf $\hat{S}(p)$ totožný s hodografem $\hat{Y}(p)$ resp. $\hat{Y}^{*}(p)$.

❑ Induktor a proměnný rezistor v sérii

Impedanční charakteristika sériového zapojení proměnného rezistoru a induktoru L, zobrazená na obr. 4.10 vlevo, je definována

$$\hat{Z}(p)=\frac{\hat{U}(p)}{\hat{I}(p)}=p\,R_0+\mathrm{j}\omega L=p\,R_0+\mathrm{j}X_\mathrm{L}$$

a její obvodové schéma je na obr. 4.9.



Obr. 4.9 Schéma zapojení RL obvodu s proměnným rezistorem

kde R_0 je vztažná hodnota rezistoru a X_L reaktance induktoru a definiční obor parametru $p\in<0,\infty)$. Jak vidíme z obr. 4.10 vlevo, je to rovnice polopřímky s lineární parametrickou stupnicí, která leží v I. kvadrantu komplexní roviny a je posunuta o hodnotu $\mathrm{j}X_\mathrm{L}$ vůči jejímu počátku.

Admitanční charakteristika, zobrazená na obr. 4.10 vpravo, je inverzní k charakteristice impedanční

$$\hat{Y}(p)=\frac{1}{\hat{Z}(p)}=\frac{\hat{I}(p)}{\hat{U}(p)}=\frac{1}{p\,R_0+\mathrm{j}\omega L}=\frac{1}{p\,R_0+\mathrm{j}X_\mathrm{L}}=\frac{1}{p\,R_0+\mathrm{j}X_\mathrm{L}}\,\frac{p\,R_0-\mathrm{j}X_\mathrm{L}}{p\,R_0-\mathrm{j}X_\mathrm{L}}=$$

$$=\frac{p\,R_0}{(p\,R_0)^2+X_\mathrm{L}^2}-\mathrm{j}\frac{X_\mathrm{L}}{(p\,R_0)^2+X_\mathrm{L}^2},$$

jenž má definiční obor parametru $p\in(0,\infty)$. Je to rovnice kružnice, která leží ve IV. kvadrantu komplexní roviny a její hlavní hodnoty jsou

$$\hat{Y}(0)=\lim_{p\to 0}\hat{Y}(p)=\lim_{p\to 0}\frac{p\,R}{(p\,R_0)^2+X_\mathrm{L}^2}-\mathrm{j}\frac{X_\mathrm{L}}{(p\,R_0)^2+X_\mathrm{L}^2}=-\mathrm{j}\frac{1}{X_\mathrm{L}},$$

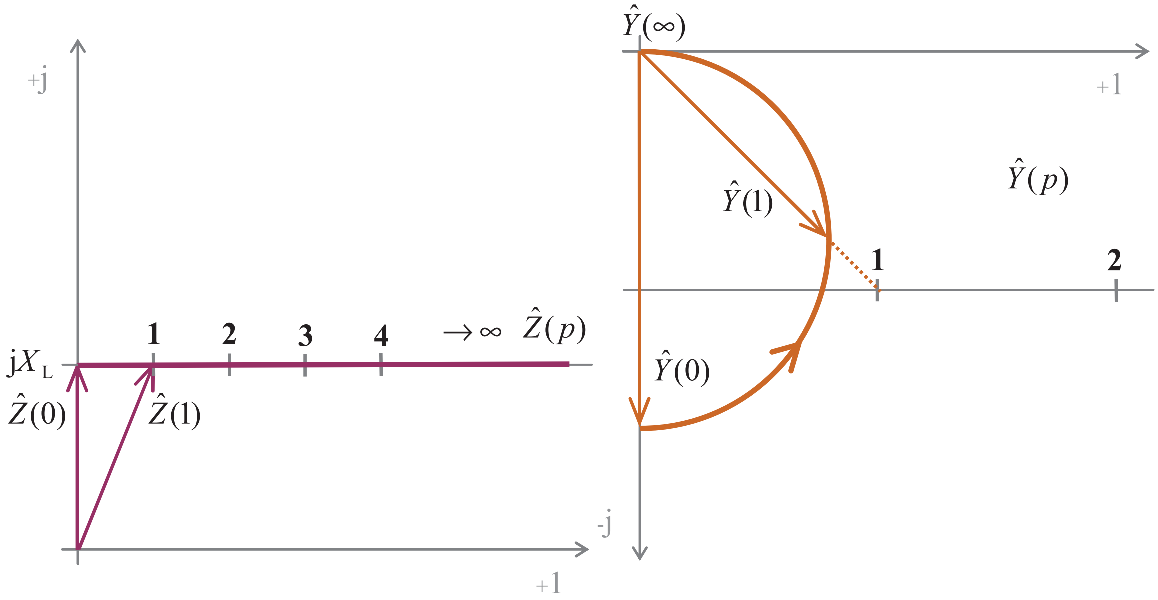
$$\hat{Y}(1)=\lim_{p\to 1}\hat{Y}(p)=\lim_{p\to 1}\frac{p\,R_0}{(p\,R_0)^2+X_\mathrm{L}^2}-\mathrm{j}\frac{X_\mathrm{L}}{(p\,R_0)^2+X_\mathrm{L}^2}=\frac{R_0}{R_0^2+X_\mathrm{L}^2}-\mathrm{j}\frac{X_\mathrm{L}}{R_0^2+X_\mathrm{L}^2},$$

$$\hat{Y}(\infty)=\lim_{p\to\infty}\hat{Y}(p)=\lim_{p\to\infty}\frac{p\,R}{(p\,R_0)^2+X_\mathrm{L}^2}-\mathrm{j}\frac{X_\mathrm{L}}{(p\,R_0)^2+X_\mathrm{L}^2}=0.$$

Při napájení tohoto obvodu ze zdroje s konstantními parametry získáme připojením proudového zdroje $\hat{I}(p)=\hat{I}_\mathrm{o}$ hodograf napětí

$$\hat{U}(p)=\hat{Z}(p)\,\hat{I}_\mathrm{o}=(p\,R_0+\mathrm{j}\omega L)\hat{I}_\mathrm{o}=p\,R_0\,\hat{I}_\mathrm{o}+\mathrm{j}\omega L\,\hat{I}_\mathrm{o}=\hat{U}_\mathrm{R}(p)+\hat{U}_\mathrm{L},$$

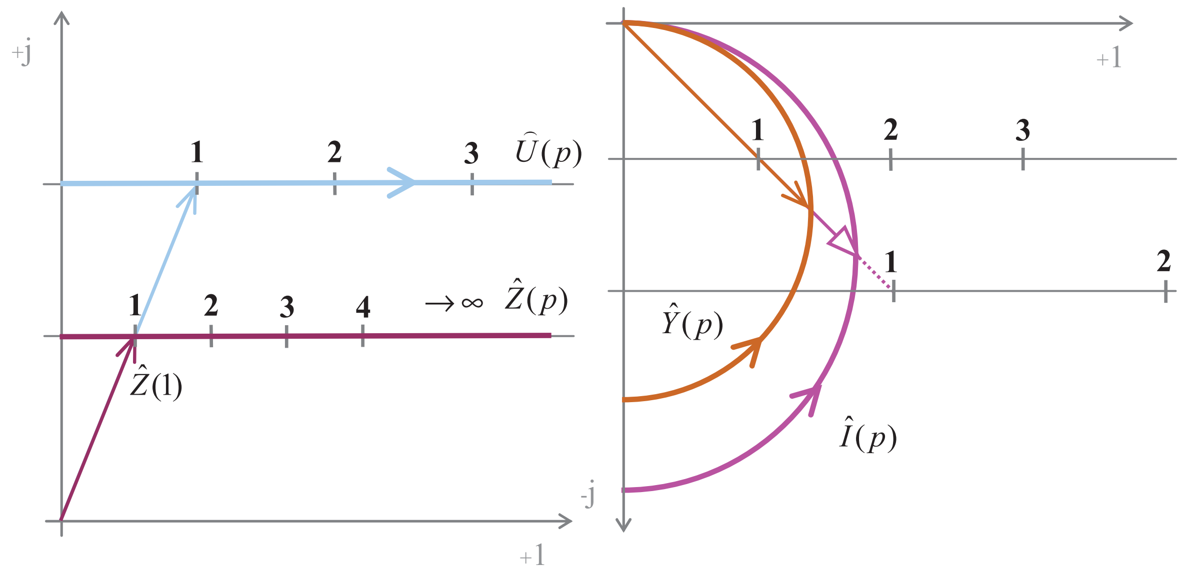
který bude po podělení velikostí proudu $I_\mathrm{o}=\left|\hat{I}_\mathrm{o}\right|$ totožný s hodografem impedanční charakteristiky $\hat{Z}(p)$ viz obr. 4.11 vlevo. Pokud zavedeme měřítko impedance m_Z dané velikostí impedance $\left|\hat{Z}\right|$ připadající na jednotku délky parametrické stupnice, bude hodograf $\hat{U}(p)$ totožný s hodografem $\hat{Z}(p)$, jak plyne z Ohmova zákona, při měřítku napětí $m_\mathrm{U}=m_\mathrm{Z}\,I_\mathrm{o}$.



Obr. 4.10 Hodografy RL obvodu s proměnným rezistorem: impedanční model, admitanční model

Podobně při napájení tohoto obvodu z napěťového zdroje $\hat{U}(p) = \hat{U}_o$ bude hodograf proudu daný rovnicí

$$\hat{I}(p) = \hat{Y}(p)\hat{U}_o = \frac{\hat{U}_o}{pR_0 + j\omega L} = \frac{\hat{U}_o}{pR_0 + jX_L} = \left(\frac{pR_0}{(pR_0)^2 + X_L^2} - j\frac{X_L}{(pR_0)^2 + X_L^2}\right)\hat{U}_o$$



Obr. 4.11 Hodografy RL obvodu s proměnným rezistorem: napětí, proud

a po podělení velikostí napětí $U_o = |\hat{U}_o|$ bude totožný s hodografem admitanční charakteristiky $\hat{Y}(p)$ viz obr. 4.11 vpravo. Zavedeme-li měřítko admitance m_Y dané velikostí admitance $|\hat{Y}|$ připadající na jednotku délky parametrické stupnice, bude hodograf $\hat{I}(p)$ totožný s hodografem $\hat{Y}(p)$, jak plyne z Ohmova zákona, při měřítku proudu $m_I = m_Y U_o$.

Podobně hodograf napětí induktoru $\hat{U}_L(p)$ na obr. 4.12 vlevo, po podělení velikostí součinu $\left| X_L \hat{U}_o \right|$ resp. při měřítku napětí $m_U = X_L m_I = m_Y X_L \cdot U_o$ bude mít stejnou velikost jako hodograf $\hat{Y}(p)$, ale bude natočený o 90° v komplexní rovině

$$\hat{U}_L(p) = \mathrm{j} X_L \hat{I}(p) = \mathrm{j} X_L \hat{Y}(p) \hat{U}_o = \mathrm{j} \frac{1}{p R_0 + \mathrm{j}\omega L} X_L \hat{U}_o .$$

Stejné měřítko napětí má i hodograf napětí rezistoru na obr. 4.12 vpravo, protože z 2. Kirchhoffova zákona plyne

$$\hat{U}_R(p) = \hat{U}_o - \hat{U}_L(p) = \hat{U}_o - \hat{Y}(p) \mathrm{j} X_L \hat{U}_o = \left(1 - \hat{Y}(p) \mathrm{j} X_L\right) \hat{U}_o = \left(1 - \frac{\mathrm{j} X_L}{p R_0 + \mathrm{j} X_L}\right) \hat{U}_o =$$

$$= \frac{p R_0}{p R_0 + \mathrm{j} X_L} \hat{U}_o = p R_0 \hat{I}(p)$$

a po rozšíření posledního členu rovnice podílem $\frac{\mathrm{j} X_L}{\mathrm{j} X_L}$, získáme rovnici

$$\hat{U}_R(p) = p R_0 \hat{I}(p) \frac{\mathrm{j} X_L}{\mathrm{j} X_L} = \frac{p R_0}{\mathrm{j} X_L} \hat{U}_L(p) = -\mathrm{j} \frac{p R_0}{X_L} \hat{U}_L(p) ,$$

ze které vidíme, že napětí $\hat{U}_R(p)$ je natočeno o -90° vůči napětí $\hat{U}_L(p)$ a že jeho velikost je $\frac{p R_0}{X_L}$ násobkem velikosti $\left| \hat{U}_L(p) \right|$. Protože podíl $\frac{p R_0}{X_L}$ je bezrozměrný, mají obě napětí stejné měřítko.

Hodograf zdánlivého výkonu tohoto obvodu při napájení z proudového zdroje je dán rovnicí

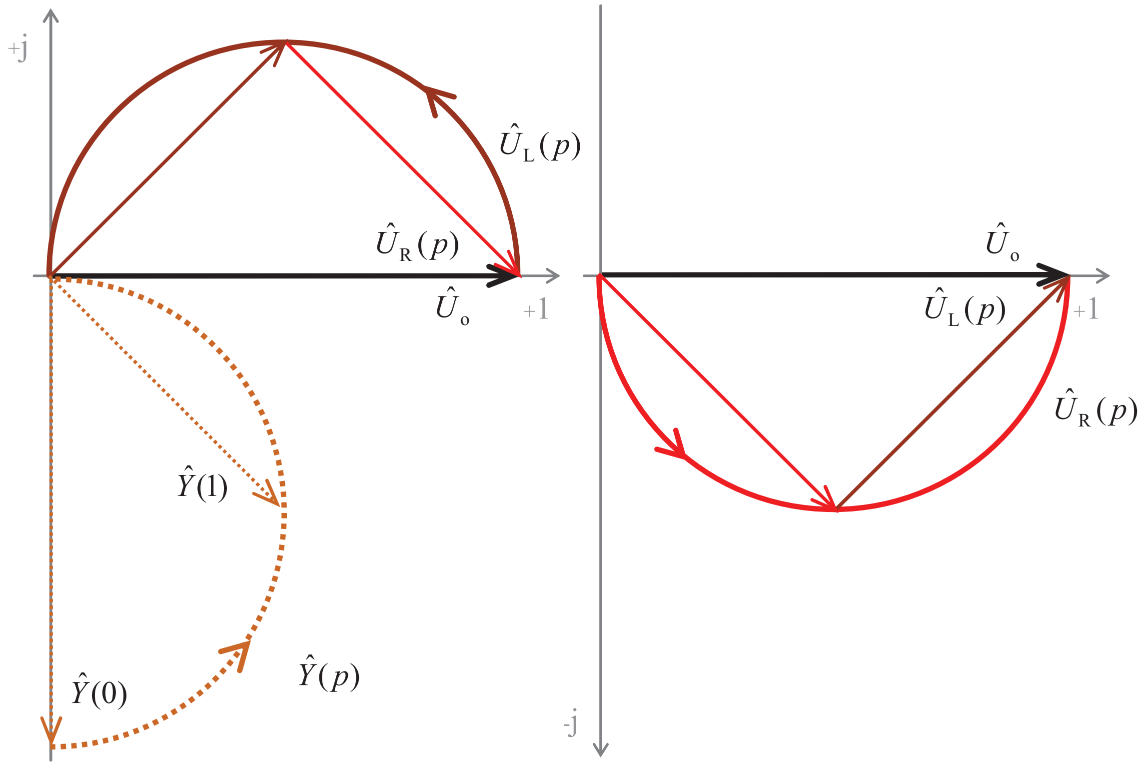
$$\hat{S}(p) = \hat{U}(p) \hat{I}_o^* = \hat{Z}(p) \hat{I}_o \hat{I}_o^* = \hat{Z}(p) \left| \hat{I}_o \right|^2 = \left(p R_0 + \mathrm{j} X_L\right) I_o^2 .$$

Z rovnice vidíme, že po podělení kvadrátem efektivní hodnoty proudu I_o^2 nebo po zavedení měřítka výkonu $m_S = m_Z I_o^2$ by byl totožný s hodografem $\hat{Z}(p)$.

Podobně hodograf zdánlivého výkonu tohoto obvodu při napájení z napěťového zdroje je dán rovnicí

$$\hat{S}(p) = \hat{U}_o \hat{I}^*(p) = \hat{U}_o \hat{I}^*(p) = \hat{U}_o \left(\hat{Y}(p) \hat{U}_o\right)^* = \hat{Y}^*(p) \hat{U}_o \hat{U}_o^* = \hat{Y}^* \left| \hat{U}_o \right|^2 = \left(\frac{1}{p R_0 + \mathrm{j} X_L}\right)^* \hat{U}_o^2 .$$

K jeho konstrukci musíme sestrojit komplexně sdružený hodograf k $\hat{Y}(p)$, což je v našem případě půlkružnice zrcadlově překlopená kolem reálné osy nebo můžeme použít hodograf $\hat{Y}(p)$, s tím, že fázový posun mezi napětím a proudem bychom orientovali opačným směrem tj. ve směru hodinových ručiček, tedy od napětí zdroje $\hat{U}_o$ k proudu obvodu $\hat{I}(p)$. Potom i v tomto případě po podělení kvadrátem efektivní hodnoty napětí U_o^2 nebo po zavedení měřítka výkonu $m_S = m_Z U_o^2$ by byl hodograf hodograf $\hat{S}(p)$ totožný s hodografem $\hat{Y}(p)$ resp. $\hat{Y}^*(p)$.



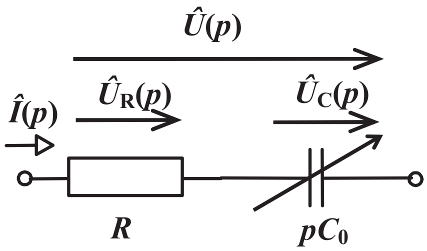
Obr. 4.12 Hodografy napětí RL obvodu s proměnným rezistorem: induktor, rezistor

Příklad 4.1.

Určete a nakreslete hodograf proudu a obou napětí sériového zapojení rezistoru R a proměnného kapacitoru se vztažnou hodnotou C_0 napájeného ze zdroje napětí. Diskutujte duální zapojení tohoto obvodu.

♦

Náhradní schéma obvodu s počítacími šipkami je nakresleno na obr. 4.13.



Obr. 4.13 Schéma zapojení RC obvodu s proměnným kapacitorem, příklad 4.1

Admitanční charakteristika, zobrazená na obr. 4.14 vlevo, je dána rovnicí

$$\hat{Y}(p)=\frac{1}{\hat{Z}(p)}=\frac{\hat{I}(p)}{\hat{U}(p)}=\frac{1}{R+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega p C_0}}=\frac{1}{R-\mathrm{j}\dfrac{1}{p}X_{\mathrm{C}_0}}=\frac{p}{pR-\mathrm{j}X_{\mathrm{C}_0}}\frac{pR+\mathrm{j}X_{\mathrm{C}_0}}{pR+\mathrm{j}X_{\mathrm{C}_0}}=$$

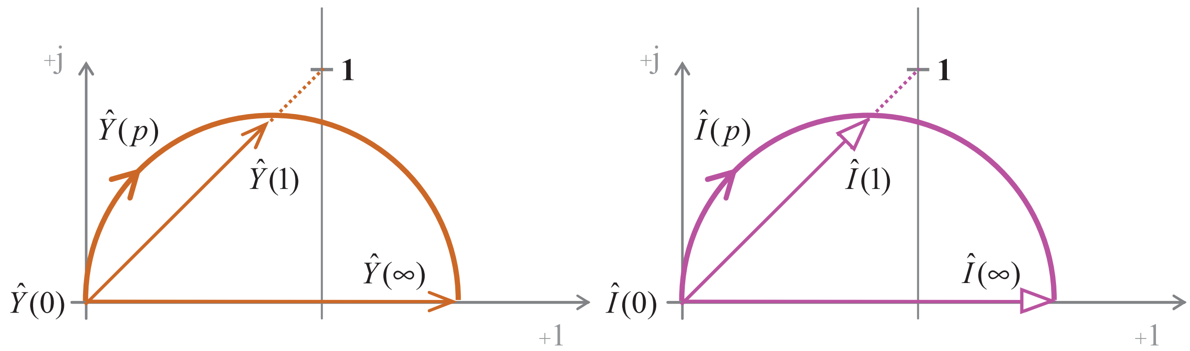
$$=\frac{p^2 R}{(pR)^2+X_{\mathrm{C}_0}^2}+\mathrm{j}\frac{pX_{\mathrm{C}_0}}{(pR)^2+X_{\mathrm{C}_0}^2},$$

pro $p \in (0, \infty)$. Hlavní hodnoty charakteristiky jsou pro hodnoty parametru $p = 0$, $p = 1$ a $p \to \infty$

$$\hat{Y}(0) = \lim_{p \to 0} \hat{Y}(p) = \lim_{p \to 0} \frac{p^2 R}{(p\,R)^2 + X_{C_0}^2} + \mathrm{j}\frac{p\,X_{C_0}}{(p\,R)^2 + X_{C_0}^2} = 0\,,$$

$$\hat{Y}(1) = \lim_{p \to 1} \hat{Y}(p) = \lim_{p \to 1} \frac{p^2 R}{(p\,R)^2 + X_{C_0}^2} + \mathrm{j}\frac{p\,X_{C_0}}{(p\,R)^2 + X_{C_0}^2} = \frac{R}{R^2 + X_{C_0}^2} + \mathrm{j}\frac{X_{C_0}}{R^2 + X_{C_0}^2}\,,$$

$$\hat{Y}(\infty) = \lim_{p \to \infty} \hat{Y}(p) = \lim_{p \to \infty} \frac{p^2 R}{(p\,R)^2 + X_{C_0}^2} + \mathrm{j}\frac{p\,X_{C_0}}{(p\,R)^2 + X_{C_0}^2} = \frac{1}{R}\,,$$



Obr. 4.14 Hodografy RC obvodu s proměnným kapacitorem: admitance, proud, příklad 4.1

ze kterých vidíme, že hodograf $\hat{Y}(p)$ leží v I. kvadrantu. Pro hodograf proudu, zobrazený na obr. 4.14 vpravo, při napájení obvodu ze zdroje napětí $\hat{U}(p) = \hat{U}_{\mathrm{o}}$ platí

$$\hat{I}(p) = \hat{Y}(p)\hat{U}_{\mathrm{o}}$$

a pro hodograf napětí rezistoru, zobrazený na obr. 4.15 vlevo, platí

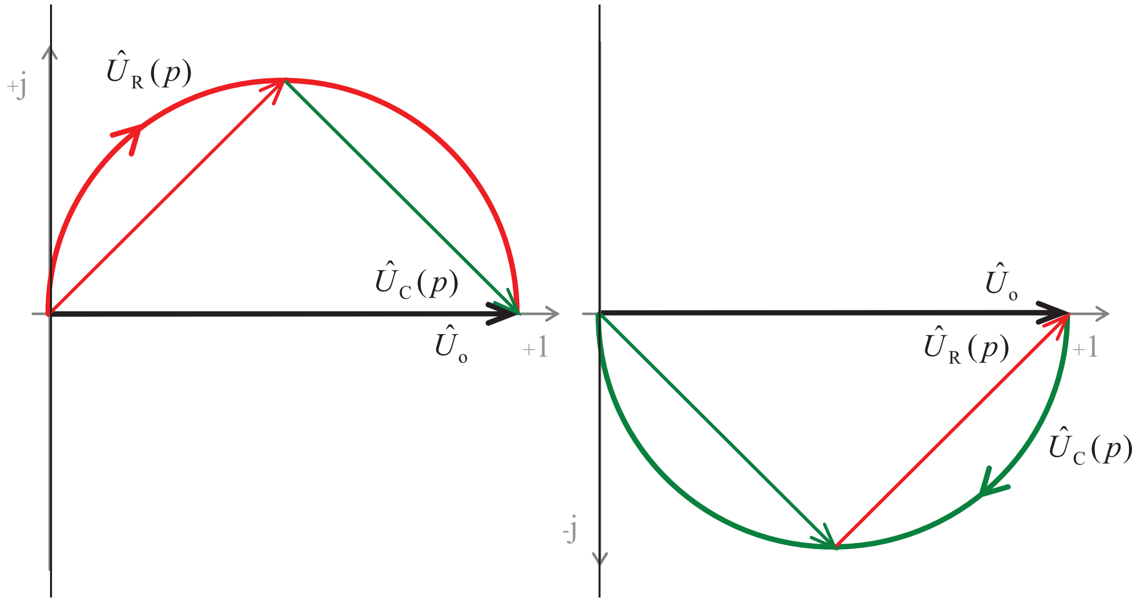
$$\hat{U}_{\mathrm{R}}(p) = R\,\hat{I}(p) = R\,\hat{Y}(p)\hat{U}_{\mathrm{o}}\,.$$

Jak vidíme, hodograf proudu při měřítku $m_{\mathrm{I}} = m_{\mathrm{Y}}\,U_{\mathrm{o}}$ a hodograf napětí rezistoru při měřítku $m_{\mathrm{U}} = m_{\mathrm{I}}\,R = m_{\mathrm{Y}} R\,U_{\mathrm{o}}$ splynou s hodografem $\hat{Y}(p)$. Pro hodograf napětí kapacitoru, zobrazený na obr. 4.15 vpravo, platí z děliče napětí

$$\hat{U}_{\mathrm{C}}(p) = \frac{-\mathrm{j}\frac{1}{p}X_{C_0}}{\hat{Z}(p)}\hat{U}_{\mathrm{o}} = -\mathrm{j}\frac{1}{p}X_{C_0}\hat{Y}(p)\hat{U}_{\mathrm{o}}\,,$$

ze kterého vidíme, že fázor $\hat{U}_{\mathrm{C}}(p)$ je natočený o -90° stupňů vůči fázoru $\hat{U}_{\mathrm{R}}(p)$.

Duální obvod k zadanému obvodu je nakreslen na obr. 4.16. Provedeme-li duální záměnu veličin a charakteristik budou rovnice a hodografy duálního obvodu napájeného ze zdroje proudu $\hat{I}(p) = \hat{I}_{\mathrm{o}}$ stejné jako zadaného obvodu. Platí tedy následující korespondence



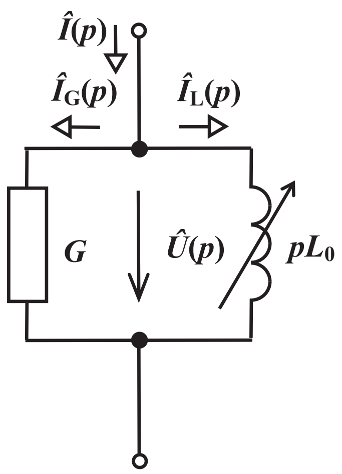
Obr. 4.15 Hodografy napětí RC obvodu s proměnným kapacitorem: rezistor, kapacitor, příklad 4.1

$$\hat{Y}(p)=\frac{1}{\hat{Z}(p)}=\frac{1}{R+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega p C_0}}=\frac{1}{R-\mathrm{j}\dfrac{1}{p}X_{C_0}} \quad\leftrightarrow\quad \hat{Z}(p)=\frac{1}{\hat{Y}(p)}=\frac{1}{G+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega p L_0}}=\frac{1}{G-\mathrm{j}\dfrac{1}{p}B_{L_0}}$$

$$\hat{I}(p)=\hat{Y}(p)\hat{U}_o \quad\leftrightarrow\quad \hat{U}(p)=\hat{Z}(p)\hat{I}_o\,,$$

$$\hat{U}_R(p)=R\,\hat{I}(p)=R\,\hat{Y}(p)\hat{U}_o \quad\leftrightarrow\quad \hat{I}_G(p)=G\,\hat{U}(p)=R\,\hat{Z}(p)\hat{I}_o\,,$$

$$\hat{U}_C(p)=\frac{-\mathrm{j}\dfrac{1}{p}X_{C_0}}{\hat{Z}(p)}\hat{U}_o=-\mathrm{j}\frac{1}{p}X_{C_0}\hat{Y}(p)\hat{U}_o \quad\leftrightarrow\quad \hat{I}_L(p)=\frac{-\mathrm{j}\dfrac{1}{p}B_{L_0}}{\hat{Y}(p)}\hat{I}_o=-\mathrm{j}\frac{1}{p}B_{C_0}\hat{Z}(p)\hat{I}_o\,.$$



Obr. 4.16 Schéma zapojení duálního obvodu k obvodu na obr. 4.13, příklad 4.1

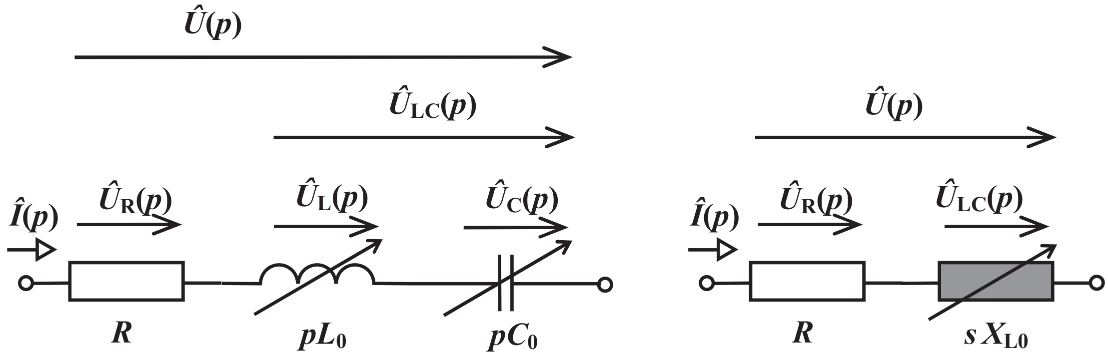
❑ Rezistor, proměnný induktor a proměnný kapacitor v sérii

Impedanční charakteristika sériového zapojení rezistoru R a proměnného induktoru a kapacitoru, jejichž hodnoty se mění stejnou měrou s parametrem p, zobrazená na 4.18 vlevo je dána rovnicí

$$\hat{Z}(p)=\frac{\hat{U}(p)}{\hat{I}(p)}=R+\mathrm{j}\omega p\,L_0+\frac{1}{\mathrm{j}\omega p\,C_0}=R+p\,\mathrm{j}X_{\mathrm{L}_0}-\mathrm{j}\frac{1}{p}X_{\mathrm{C}_0}=R+\mathrm{j}X_{\mathrm{L}_0}\left(p-\frac{1}{p}\frac{X_{\mathrm{C}_0}}{X_{\mathrm{L}_0}}\right)=$$

$$=R+\mathrm{j}X_{\mathrm{L}_0}\left(p-\frac{1}{p}\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)=R+\mathrm{j}X_{\mathrm{L}_0}\left(p-\frac{1}{p}\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right)=R+\mathrm{j}X_{\mathrm{L}_0}s$$

a a její obvodové schéma je na obr. 4.17.



Obr. 4.17 Obvodové modely RLC obvodu s proměnným induktorem a kapacitorem: schéma zapojení, ekvivalentní náhradní schéma

kde L_0 a X_{L_0} je vztažná hodnota indukčnosti a její reaktance, C_0 a X_{C_0} je vztažná hodnota kapacity a její reaktance, ω_0 je rezonanční úhlový kmitočet obvodu a s je lineární parametr. Definiční obor parametru p je $p\in(0,\infty)$ a parametru s je $s\in(-\infty,\infty)$. Je to rovnice přímky s nelineární parametrickou stupnicí, která leží v I a II. kvadrantu komplexní roviny a je posunuta o hodnotu R vůči jejímu počátku. Zavedením substituce $s=p-\frac{1}{p}\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2$ parametrickou stupnici linearizujeme. Nulové hodnotě parametru s nebo hodnotě parametru $p=\frac{\omega_0}{\omega}$ odpovídá rezonance obvodu. Řešením kvadratické rovnice $p^2-p\,s-\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2=0$ získáme transformační vztah mezi parametrem s a p. Kladné hodnotě parametru p odpovídá kořen rovnice $p=\frac{s}{2}+\sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2+\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}$ (záporný kořen kvadratické rovnice neuvažujeme). Hodnoty parametru s z intervalu $s\in(-\infty,0)$ se zobrazují na hodnoty parametru p na intervalu $p\in\left(0,\frac{\omega_0}{\omega}\right)$ a hodnoty z intervalu $s\in(0,\infty)$ na interval $p\in\left(\frac{\omega_0}{\omega},\infty\right)$. Zavedením parametru s jsme popis obvodu převedli na předchozí řešení RL obvodu s proměnnou indukčností, kterému odpovídají hodnoty parametru $s\in(0,\infty)$. Záporné hodnoty parametru s transformují hodnotu reaktance X_{L_0} na kapacitní reaktanci. Hodograf admitance obvodu

$$\hat{Y}(s)=\frac{1}{\hat{Z}(s)}=\frac{\hat{I}(s)}{\hat{U}(s)}=\frac{1}{R+s\,\mathrm{j}X_{\mathrm{L}_0}}=\frac{1}{R+s\,\mathrm{j}X_{\mathrm{L}_0}}\frac{R-s\,\mathrm{j}X_{\mathrm{L}_0}}{R-s\,\mathrm{j}X_{\mathrm{L}_0}}=\frac{R}{R^2+\left(s\,X_{\mathrm{L}_0}\right)^2}-\mathrm{j}\frac{s\,X_{\mathrm{L}_0}}{R^2+\left(s\,X_{\mathrm{L}_0}\right)^2}\,,$$

zobrazený na obr. 4.18 vpravo, je kružnice složená ze dvou půlkružnic, jedna reprezentuje induktivní chování obvodu s funkčními hodnotami ve IV. kvadrantu a druhá kapacitní chování obvodu s funkčními hodnotami ve I. kvadrantu. U obou půlkružnic parametr s narůstá ve směru hodinových ručiček. Hlavní body obou půlkružnic jsou

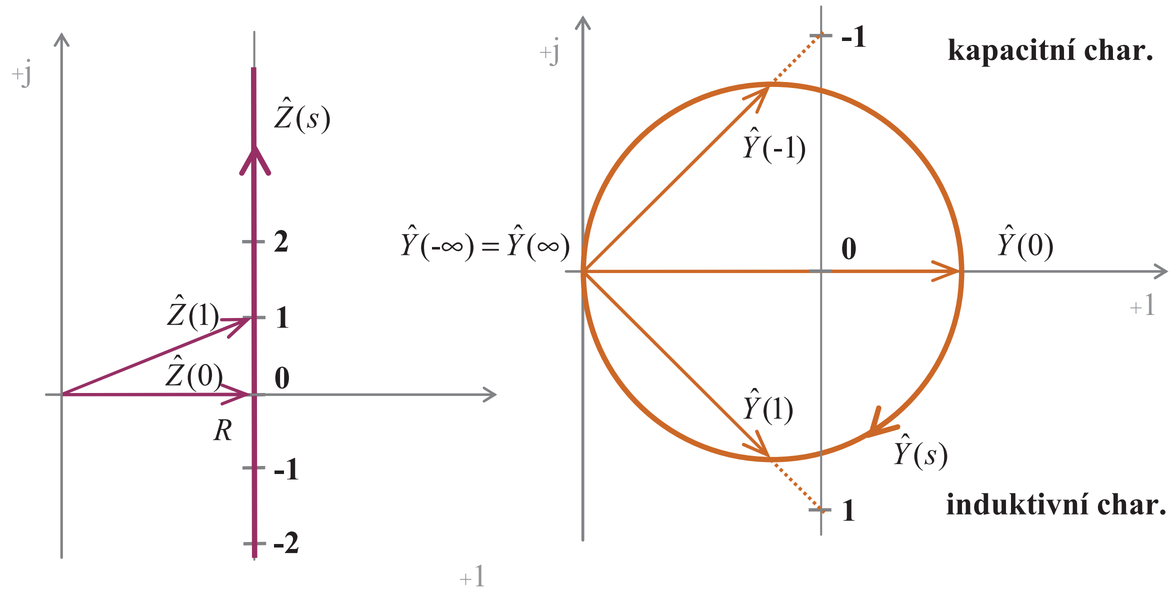
$$\hat{Y}(\infty)=\lim_{s\to\infty}\hat{Y}(s)=\lim_{p\to\infty}\frac{R}{R^2+\left(s\,X_{\mathrm{L}_0}\right)^2}-\mathrm{j}\frac{s\,X_{\mathrm{L}_0}}{R^2+\left(s\,X_{\mathrm{L}_0}\right)^2}=0\,,$$

$$\hat{Y}(1)=\lim_{p\to 1}\hat{Y}(s)=\lim_{s\to 1}\frac{R}{R^2+\left(s\,X_{\mathrm{L}_0}\right)^2}-\mathrm{j}\frac{s\,X_{\mathrm{L}_0}}{R^2+\left(s\,X_{\mathrm{L}_0}\right)^2}=\frac{R}{R^2+X_{\mathrm{L}_0}^2}-\mathrm{j}\frac{X_{\mathrm{L}_0}}{R^2+X_{\mathrm{L}_0}^2}\,,$$

$$\hat{Y}(0)=\lim_{s\to 0}\hat{Y}(s)=\lim_{s\to 0}\frac{R}{R^2+\left(s\,X_{\mathrm{L}_0}\right)^2}-\mathrm{j}\frac{s\,X_{\mathrm{L}_0}}{R^2+\left(s\,X_{\mathrm{L}_0}\right)^2}=\frac{1}{R}\,,$$

$$\hat{Y}(-1)=\lim_{p\to -1}\hat{Y}(s)=\lim_{s\to 1}\frac{R}{R^2+\left(s\,X_{\mathrm{L}_0}\right)^2}-\mathrm{j}\frac{s\,X_{\mathrm{L}_0}}{R^2+\left(s\,X_{\mathrm{L}_0}\right)^2}=\frac{R}{R^2+X_{\mathrm{L}_0}^2}+\mathrm{j}\frac{X_{\mathrm{L}_0}}{R^2+X_{\mathrm{L}_0}^2}\,,$$

$$\hat{Y}(-\infty)=\lim_{s\to -\infty}\hat{Y}(s)=\lim_{p\to\infty}\frac{R}{R^2+\left(s\,X_{\mathrm{L}_0}\right)^2}-\mathrm{j}\frac{s\,X_{\mathrm{L}_0}}{R^2+\left(s\,X_{\mathrm{L}_0}\right)^2}=0\,.$$



Obr. 4.18 Hodografy RLC obvodu s proměnným induktorem a kapacitorem: impedanční model, admitanční model

Hodograf napětí při napájení tohoto obvodu z proudového zdroje $\hat{I}(s)=\hat{I}_{\mathrm{o}}$ má rovnici

$$\hat{U}(s)=\hat{Z}(s)\,\hat{I}_{\mathrm{o}}=R\,\hat{I}_{\mathrm{o}}+\mathrm{j}s\,X_{\mathrm{L}_0}\,\hat{I}_{\mathrm{o}}=\hat{U}_{\mathrm{R}}+\hat{U}_{\mathrm{LC}}(s)$$

a je až na měřítko totožný s hodografem $\hat{Z}(s)$. Rozdělíme-li proměnné napětí $\hat{U}_{\mathrm{LC}}(s)$ na úbytky napětí na proměnném induktoru a kapacitoru platí pro něj po dosazení za parametr *p* po úpravách

$$\hat{U}_{\mathrm{LC}}(s)=\hat{U}_{\mathrm{L}}(p)+\hat{U}_{\mathrm{C}}(p)=\left(\left(\frac{s}{2}+\sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2+\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}\right)\mathrm{j}\omega L_0+\frac{1}{\frac{s}{2}+\sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2+\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}\frac{1}{\mathrm{j}\omega C_0}\right)\hat{I}_{\mathrm{o}}=$$

$$=\mathrm{j}\omega\left(\frac{s}{2}L_0+\sqrt{\left(\frac{s}{2}L_0\right)^2+\frac{\frac{L_0}{C_0}}{\omega^2}}\right)\hat{I}_{\mathrm{o}}+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\frac{1}{\frac{s}{2}C_0+\sqrt{\left(\frac{s}{2}C_0\right)^2+\frac{\frac{C_0}{L_0}}{\omega^2}}}\hat{I}_{\mathrm{o}}=$$

$$=\mathrm{j}\left(\frac{s}{2}\omega L_0+\sqrt{\left(\frac{s}{2}\omega L_0\right)^2+\frac{L_0}{C_0}}\right)\hat{I}_{\mathrm{o}}+\frac{1}{\mathrm{j}}\frac{1}{\frac{s}{2}\omega C_0+\sqrt{\left(\frac{s}{2}\omega C_0\right)^2+\frac{C_0}{L_0}}}\hat{I}_{\mathrm{o}}=\hat{U}_{\mathrm{L}}(s)+\hat{U}_{\mathrm{C}}(s),$$

kde poměr $\frac{L_0}{C_0}$ je čtverec charakteristického odporu ρ_0^2 a jeho převrácená hodnota čtverec charakteristické vodivosti γ_0^2. Srovnáním napětí $\hat{U}_{\mathrm{LC}}(s)$ s úbytkem $\mathrm{j}sX_{\mathrm{L_0}}\hat{I}_{\mathrm{o}}$ vidíme, že pro reaktanci měnící se s parametrem *s*, platí

$$sX_{\mathrm{L_0}}=\frac{s}{2}\omega L_0+\sqrt{\left(\frac{s}{2}\omega L_0\right)^2+\frac{L_0}{C_0}}-\frac{1}{\frac{s}{2}\omega C_0+\sqrt{\left(s\frac{\omega C_0}{2}\right)^2+\frac{C_0}{L_0}}}=$$

$$=\frac{s}{2}X_{\mathrm{L_0}}+\sqrt{\left(\frac{s}{2}X_{\mathrm{L_0}}\right)^2+\rho_0^2}-\frac{1}{\frac{s}{2}B_{\mathrm{C_0}}+\sqrt{\left(\frac{s}{2}B_{\mathrm{C_0}}\right)^2+\gamma_0^2}}=$$

$$=\frac{s}{2}X_{\mathrm{L_0}}+\sqrt{\left(\frac{s}{2}X_{\mathrm{L_0}}\right)^2+\rho_0^2}-\frac{1}{\frac{s}{2}\frac{1}{X_{\mathrm{C_0}}}+\sqrt{\left(\frac{s}{2}\frac{1}{X_{\mathrm{C_0}}}\right)^2+\frac{1}{\rho_0^2}}},$$

takže pro proměnnou impedanci obvodu v závislosti na parametru *s* platí

$$\hat{Z}(s)=R+\mathrm{j}\left(\frac{s}{2}X_{\mathrm{L_0}}+\sqrt{\left(\frac{s}{2}X_{\mathrm{L_0}}\right)^2+\rho_0^2}-\frac{1}{\frac{s}{2}\frac{1}{X_{\mathrm{C_0}}}+\sqrt{\left(\frac{s}{2}\frac{1}{X_{\mathrm{C_0}}}\right)^2+\frac{1}{\rho_0^2}}}\right).$$

Hodograf proudu při napájení tohoto obvodu z napěťového zdroje $\hat{U}(s)=\hat{U}_{\mathrm{o}}$ je daný

$$\hat{I}(s)=\hat{Y}(s)\hat{U}_{\mathrm{o}}=\frac{\hat{U}_{\mathrm{o}}}{\hat{Z}(s)}=\frac{\hat{U}_{\mathrm{o}}}{R+\mathrm{j}s\,X_{\mathrm{L}_0}}=\frac{\hat{U}_{\mathrm{o}}}{R}\frac{1}{1+\mathrm{j}s\dfrac{X_{\mathrm{L}_0}}{R}}=\frac{\hat{U}_{\mathrm{o}}}{R}\frac{1}{1+\mathrm{j}s\,Q_{\mathrm{L}_0}}$$

a je až na měřítko totožný s hodografem $\hat{Y}(s)$. Jiným způsobem můžeme zapsat hodograf proudu

$$\hat{I}(s)=\frac{\hat{U}_{\mathrm{o}}}{\hat{Z}(s)}=\frac{\hat{U}_{\mathrm{o}}}{R+\mathrm{j}\left(\dfrac{s}{2}X_{\mathrm{L}_0}+\sqrt{\left(\dfrac{s}{2}X_{\mathrm{L}_0}\right)^2+\rho_0^2}-\dfrac{1}{\dfrac{s}{2}\dfrac{1}{X_{\mathrm{C}_0}}+\sqrt{\left(\dfrac{s}{2}\dfrac{1}{X_{\mathrm{C}_0}}\right)^2+\dfrac{1}{\rho_0^2}}}\right)}=$$

$$=\frac{\hat{U}_{\mathrm{o}}}{R}\frac{1}{1+\mathrm{j}\left(\dfrac{s}{2}\dfrac{X_{\mathrm{L}_0}}{R}+\sqrt{\left(\dfrac{s}{2}\dfrac{X_{\mathrm{L}_0}}{R}\right)^2+\left(\dfrac{\rho_0}{R}\right)^2}-\dfrac{1}{\dfrac{s}{2}\dfrac{R}{X_{\mathrm{C}_0}}+\sqrt{\left(\dfrac{s}{2}\dfrac{R}{X_{\mathrm{C}_0}}\right)^2+\left(\dfrac{R}{\rho_0}\right)^2}}\right)}=$$

$$=\frac{\hat{U}_{\mathrm{o}}}{R}\frac{1}{1+\mathrm{j}\left(\dfrac{s}{2}Q_{\mathrm{L}_0}+\sqrt{\left(\dfrac{s}{2}Q_{\mathrm{L}_0}\right)^2+\left(\dfrac{\rho_0}{R}\right)^2}-\dfrac{1}{\dfrac{s}{2}\dfrac{1}{Q_{\mathrm{C}_0}}+\sqrt{\left(\dfrac{s}{2}\dfrac{1}{Q_{\mathrm{C}_0}}\right)^2+\left(\dfrac{R}{\rho_0}\right)^2}}\right)},$$

kde Q_{L_0} je činitel jakosti cívky a Q_{C_0} činitel jakosti kondenzátoru.

Hodografy napětí rezistoru, induktoru a kapacitoru získané dosazením hodografu $\hat{I}(s)$ do obecněného Ohmova zákona jsou

$$\hat{U}_{\mathrm{R}}(s)=R\,\hat{I}(s)=\frac{1}{1+\mathrm{j}s\,Q_{\mathrm{L}_0}}\hat{U}_{\mathrm{o}},$$

$$\hat{U}_{\mathrm{L}}(s)=\mathrm{j}\left(\frac{s}{2}+\sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2+\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}\right)X_{\mathrm{L}_0}\,\hat{I}(s)=\mathrm{j}\left(\frac{s}{2}+\sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2+\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}\right)\frac{X_{\mathrm{L}_0}}{R}\frac{1}{1+\mathrm{j}s\,Q_{\mathrm{L}_0}}\hat{U}_{\mathrm{o}}=$$

$$=\mathrm{j}\left(\frac{s}{2}+\sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2+\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}\right)\frac{Q_{\mathrm{L}_0}}{1+\mathrm{j}s\,Q_{\mathrm{L}_0}}\hat{U}_{\mathrm{o}},$$

$$\hat{U}_\mathrm{C}(s) = -\mathrm{j}\frac{1}{\left(\dfrac{s}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{s}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}\right)} X_{\mathrm{C}_0}\,\hat{I}(s) = -\mathrm{j}\frac{1}{\left(\dfrac{s}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{s}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}\right)} \frac{X_{\mathrm{C}_0}}{R}\frac{1}{1+\mathrm{j}sQ_{\mathrm{L}_0}}\hat{U}_\mathrm{o} =$$

$$= -\mathrm{j}\frac{1}{\left(\dfrac{s}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{s}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}\right)} \frac{Q_{\mathrm{C}_0}}{1+\mathrm{j}sQ_{\mathrm{L}_0}}\hat{U}_\mathrm{o}.$$

Ve stavu rezonance obvodu, kdy $s = 0$, hodografy přejdou do tvaru

$$\hat{U}_\mathrm{R}(s) = \hat{U}_\mathrm{o},$$

$$\hat{U}_\mathrm{L}(s) = \mathrm{j}\frac{\omega_0}{\omega}Q_{\mathrm{L}_0}\hat{U}_\mathrm{o} = \mathrm{j}\omega_0\frac{L_0}{R}\hat{U}_\mathrm{o},$$

$$\hat{U}_\mathrm{C}(s) = -\mathrm{j}\frac{1}{\dfrac{\omega_0}{\omega}}Q_{\mathrm{C}_0}\hat{U}_\mathrm{o} = -\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0}Q_{\mathrm{L}_0}\hat{U}_\mathrm{o} = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega_0 RC_0}\hat{U}_\mathrm{o}.$$

Σ Shrnutí pojmů 4.2.

Hodografy obvodů s proměnnými parametry konstruujeme pomocí imitančních charakteristik, kterými jsou komplexní funkce impedance a admitance obvodu s reálným parametrem p resp. s. Proměnný parametr se používá k modelování změny hodnoty obvodového parametru – odporu, indukčnosti a kapacity. Inverzní imitanční charakteristiky jednoduchých obvodů konstruujeme užitím geometrické inverze vůči řídicí kružnici a pomocí středu inverze. Geometrickou inverzi používáme také k linearizaci parametrické stupnice půlkruhového nebo kruhového diagramu. Lineární parametrická stupnice je kolmice vztyčená na spojnici středu inverze a středu kružnice. Hodografy jednoduchých obvodů jsou přímky nebo kružnice a konstruujeme je pomocí hlavních hodnot parametrů.

? **Otázky 4.2.**

1. Jaký je definiční obor hodnot parametru p modelujícího změnu obvodového parametru?
2. Jak nazýváme inverzní charakteristiku k charakteristice impedanční?
3. Kterou charakteristiku použijeme pro konstrukci hodografů obvodových veličin sériového řazení základních obvodových prvků s jedním proměnným parametrem při jeho napájení ze zdroje proudu?
4. Je-li impedanční charakteristikou polopřímka, jakou podobu bude mít charakteristika admitanční?
5. Které hlavní hodnoty parametru p používáme ke konstrukci půlkruhového hodografu?
6. Kde leží střed inverze půlkruhového nebo kruhového hodografu?
7. Jaká musí být struktura obvodu s proměnným parametrem, aby jeho imitanční charakteristika byla kružnice?

8. Co s výhodou využijeme ke konstrukci hodografů paralelně řazených obvodových prvků s proměnným parametrem, známe-li hodografy sériově řazených obvodových prvků s proměnným parametrem.

Úloha k řešení 4.2.

Při jaké hodnotě parametru p dojde k rezonanci v sériovém obvodu s proměnou hodnotou indukčnosti a kapacity, které se mění stejnou měrou, jsou-li vztažné hodnoty indukčnosti a kapacity obvodu $L_0 = 100$ mH a $C_0 = 10$ µF a je-li úhlový kmitočet napájecího obvodu $\omega = 1$ Mrad s^{-1}.

Řešení:

K sériové rezonanci dojde, bude-li imaginární složka impedanční charakteristiky nulová, tedy

$$\operatorname{Im}\{\hat{Z}(p)\} = X_{\mathrm{L}_0}\left(p - \frac{1}{p}\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) = 0$$

a pro hledanou hodnotu parametru platí

$$p = \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{\frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}}{\omega} = \frac{1}{\omega\sqrt{L_0 C_0}} = \frac{1}{10^6\sqrt{10^{-1}\cdot 10^{-5}}} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}\,.$$

4.3. Kmitočtové charakteristiky

V praxi často vyšetřujeme změnu charakteristik obvodu v závislosti na kmitočtu $f = p f_0$ resp. úhlovém kmitočtu $\omega = p\omega_0$, kdy vztažným kmitočtem je charakteristický kmitočet obvodu, kterým může být lomový kmitočet, rezonanční kmitočet aj. Jelikož je lhostejné, je-li změna imitance akumulačních prvků obvodu způsobena změnou hodnoty parametru nebo kmitočtu, jsou hodografy kmitočtové závislých obvodů stejné jako hodografy odpovídajících obvodů s proměnnými parametry z předchozí kapitoly 4.2. Jejich amplitudové a fázové imitanční kmitočtové charakteristiky můžeme popsat následujícími prototypy komplexních funkcí $\hat{F}(p)$ reálného parametru p.

❑ Komplexní funkce je reálná a konstantní

Reálná komplexní funkce $\hat{F}(p)$ je charakteristikou kmitočtově nezávislého členu, kterým může být odpor, vodivost, zesílení aj. Takováto funkce je charakterizována reálnou konstantou

$$\hat{F}(p) = K_0\,.$$

Pro její amplitudovou charakteristiku platí

$$F(p) = \left|\hat{F}(p)\right| = K_0\,,$$

takže nemá žádnou vztažnou hodnotu kmitočtu.

Její fázová charakteristika má nulovou hodnotou

$$\varphi_{\mathrm{F}}(p) = \arg\left(\hat{F}(p)\right) = \underset{\lim \operatorname{Im}\{\hat{F}(p)\}\to 0}{\arctan}\left(\frac{\operatorname{Im}\{\hat{F}(p)\}}{\operatorname{Re}\{\hat{F}(p)\}}\right) = 0^\circ\,,$$

protože funkce $\hat{F}(p)$ nemá imaginární složku. Obě charakteristiky jsou vyneseny na obr. 4.19.

Komplexní funkce je ryze imaginární

Ryze imaginární komplexní funkce $\hat{F}(p)$ je charakteristikou kmitočtově závislého členu, kterým může být reaktance, susceptance aj. Takováto funkce je charakterizována reálnou konstantou K_1 a může mít dva tvary, které jsou navzájem inverzní

$$\hat{F}(p,\omega) = \mathrm{j}\omega K_1 = \mathrm{j}p\omega_0 K_1$$

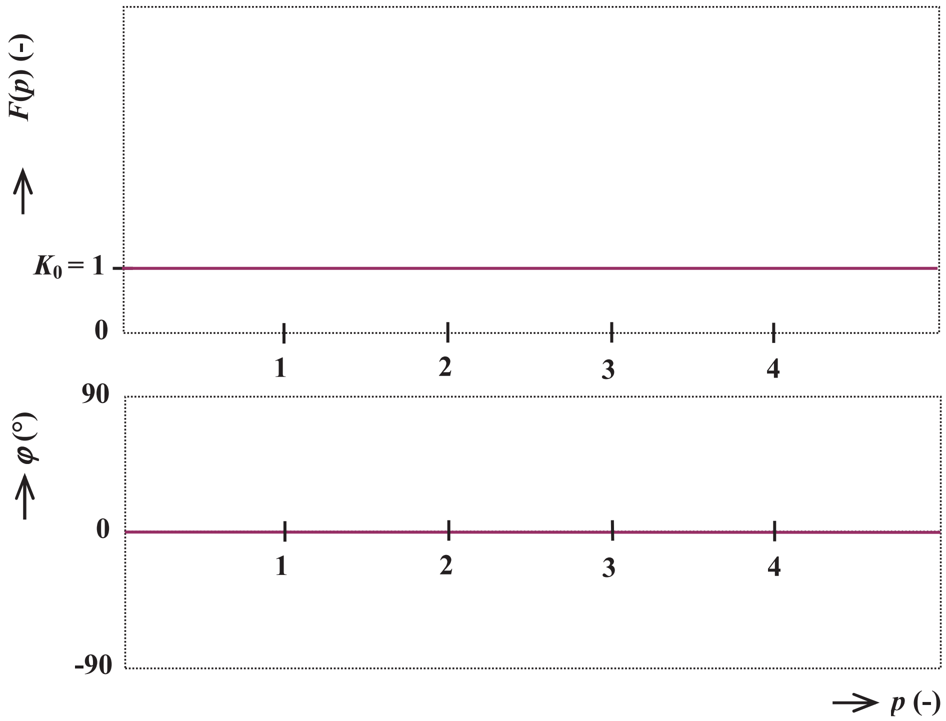
a

$$\hat{G}(p,\omega) = \frac{1}{\hat{F}(p,\omega)} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega K_1} = \frac{1}{\mathrm{j}p\omega_0 K_1} = -\mathrm{j}\frac{1}{p\omega_0 K_1}\,.$$

Pro jejich amplitudové charakteristiky platí

$$F(p) = \left|\hat{F}(p)\right| = \left|\mathrm{j}p\omega_0 K_1\right| = p\omega_0 K_1,$$

$$G(p) = \left|\hat{G}(p)\right| = \left|\frac{1}{\mathrm{j}p\omega_0 K_1}\right| = \frac{1}{p\omega_0 K_1}$$



Obr. 4.19 Normované kmitočtové charakteristiky konstantní, ryze reálné komplexní funkce: amplitudová, fázová

a zvolíme-li vztažnou hodnotu úhlového kmitočtu $\omega_0 = \dfrac{1}{K_1}$ nebude normovaná amplitudová charakteristika závislá na hodnotě parametru K_1, tedy $F(p) = p$ a $G(p) = \dfrac{1}{p}$.

Jejich fázové charakteristiky jsou konstanty a mají hodnoty

$$\varphi_{\mathrm{F}}(p) = \arg\left(\hat{F}(p)\right) = \underset{\lim \operatorname{Re}\{\hat{F}(p)\}\to 0}{\arctan} \frac{\operatorname{Im}\{\hat{F}(p)\}}{\operatorname{Re}\{\hat{F}(p)\}} = \underset{\lim \operatorname{Re}\{\hat{F}(p)\}\to 0}{\arctan} \left(\frac{p}{\operatorname{Re}\{\hat{F}(p)\}} \right) = 90\,^{\circ},$$

$$\varphi_{\mathrm{G}}(p) = \arg\left(\hat{G}(p)\right) = \underset{\lim \{\hat{G}(p)\}\to 0}{\arctan} \left(\frac{-\frac{1}{p}}{\operatorname{Re}\{\hat{G}(p)\}} \right) = -90\,^{\circ},$$

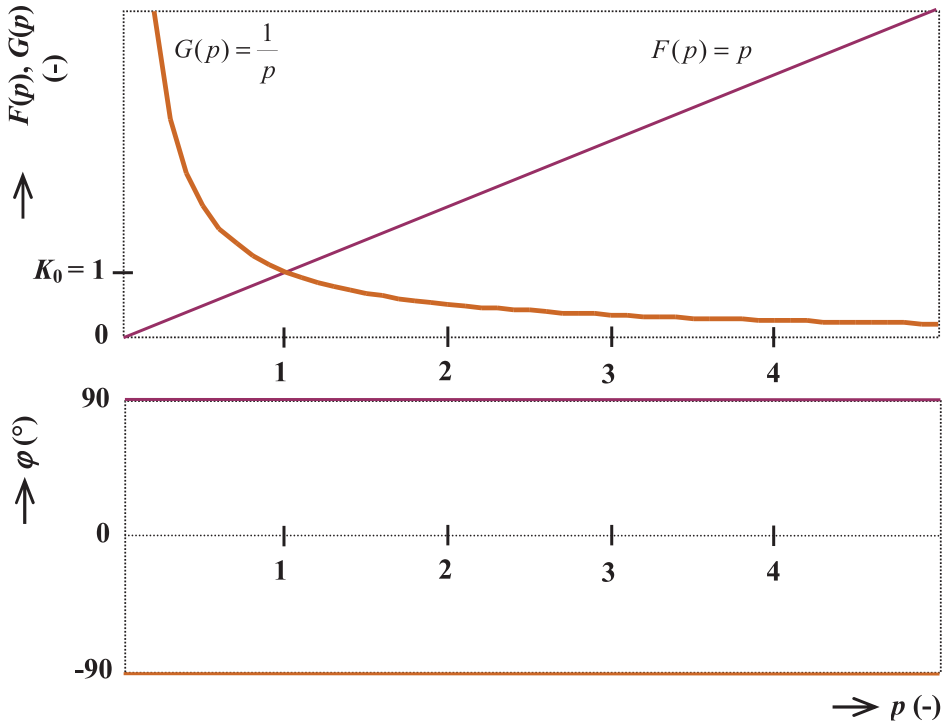
protože funkce $\hat{F}(p)$ a $\hat{G}(p)$ jsou ryze imaginární. Obě charakteristiky jsou vyneseny na obr. 4.20.

❑ Komplexní funkce je polynom se setrvačností 1. řádu

Je-li komplexní funkce $\hat{F}(p)$ úplným polynomem 1. řádu, je charakteristikou kmitočtově závislého obvodu, kterým může být impedance, admitance, přenos aj. Takováto funkce je charakterizována reálnými konstantami K_0 a K_1 a může mít dva tvary, které jsou navzájem inverzní

$$\hat{F}(p,\omega) = K_0 + \mathrm{j}\omega K_1 = K_0 + \mathrm{j}p\omega_0\, K_1 = K_0\left(1 + \mathrm{j}p\omega_0\, \tau_1\right)$$

a



Obr. 4.20 Normované kmitočtové charakteristiky proměnné, ryze imaginární komplexní funkce: amplitudová, fázová

$$\hat{G}(p,\omega) = \frac{1}{\hat{F}(p,\omega)} = \frac{1}{K_0 + \mathrm{j}\omega K_1} = \frac{1}{K_0 + \mathrm{j}p\omega_0\, K_1} = \frac{1}{K_0\left(1 + \mathrm{j}p\omega_0\, \tau_1\right)}.$$

Pro jejich amplitudové charakteristiky platí

$$F(p) = \left|\hat{F}(p)\right| = \left|K_0\left(1 + \mathrm{j}p\omega_0 \frac{K_1}{K_0}\right)\right| = K_0\sqrt{1 + \left(p\omega_0\, \tau_1\right)^2}\ ,$$

$$G(p)=\left|\hat{G}(p)\right|=\left|\frac{1}{K_0\left(1+\mathrm{j}p\omega_0\dfrac{K_1}{K_0}\right)}\right|=\frac{1}{K_0\sqrt{1+(p\omega_0\,\tau_1)^2}}$$

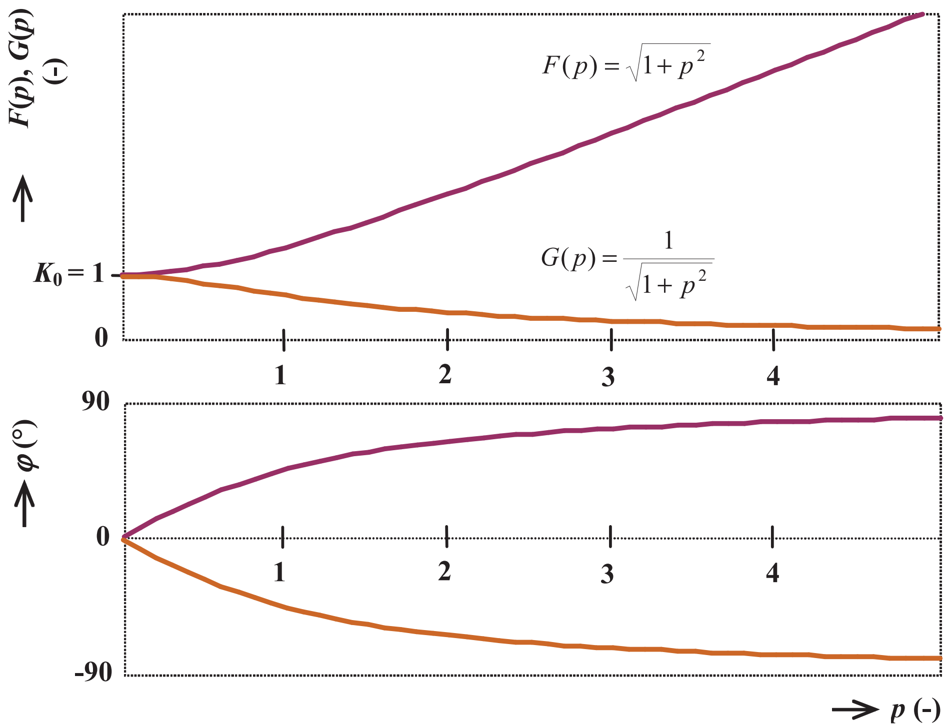
a zvolíme-li vztažnou hodnotu úhlového kmitočtu $\omega_0=\dfrac{K_0}{K_1}=\dfrac{1}{\tau_1}$, kde τ_1 je časová konstanta, bude normovaná amplitudová charakteristika nezávislá na hodnotách parametru K_0 a K_1, tedy $F(p)=K_0\sqrt{1+p^2}$ a $G(p)=\dfrac{1}{K_0\sqrt{1+p^2}}$.

Jejich fázové charakteristiky jsou kmitočtově závislé funkce

$$\varphi_\mathrm{F}(p)=\arg\left(\hat{F}(p)\right)=\arg\left(K_0(1+\mathrm{j}p)\right)=\arctan(p),$$

$$\varphi_\mathrm{G}(p)=\arg\left(\hat{G}(p)\right)=\arg\left(\frac{1}{K_0(1+\mathrm{j}p)}\right)=\arctan(-p).$$

Obě dvojice charakteristik jsou vyneseny na obr. 4.21.



Obr. 4.21 Normované kmitočtové charakteristiky komplexní funkce 1. řádu: amplitudová, fázová

Příklad 4.2.

Určete pro hlavní hodnoty parametru p funkční hodnoty amplitudové a fázové kmitočtové charakteristiky normovaných funkcí $\hat{F}(p)=1+\mathrm{j}p$ *a* $\hat{G}(p)=\dfrac{1}{1+\mathrm{j}p}$.

♦

Hlavní hodnoty parametru p jsou hodnoty p = 0, p = 1 a $p \to \infty$. Hodnoty amplitudové a fázové charakteristiky první funkce jsou

$$F(0) = \lim_{p\to 0} F(p) = \lim_{p\to 0} \sqrt{1+p^2} = 1, \qquad \varphi_F(0) = \lim_{p\to 0} \varphi_F(p) = \lim_{p\to 0} \arctan(p) = 0°,$$

$$F(1) = \lim_{p\to 1} F(p) = \lim_{p\to 1} \sqrt{1+p^2} = \sqrt{2}, \qquad \varphi_F(1) = \lim_{p\to 1} \varphi_F(p) = \lim_{p\to 1} \arctan(p) = 45°,$$

$$F(\infty) = \lim_{p\to \infty} F(p) = \lim_{p\to \infty} \sqrt{1+p^2} = \infty, \qquad \varphi_F(\infty) = \lim_{p\to \infty} \varphi_F(p) = \lim_{p\to \infty} \arctan(p) = 90°$$

a druhé funkce

$$G(0) = \lim_{p\to 0} G(p) = \lim_{p\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} = 1, \qquad \varphi_G(0) = \lim_{p\to 0} \varphi_G(p) = \lim_{p\to 0} \arctan(-p) = 0°,$$

$$G(1) = \lim_{p\to 1} G(p) = \lim_{p\to 1} \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \varphi_G(1) = \lim_{p\to 1} \varphi_G(p) = \lim_{p\to 1} \arctan(-p) = -45°,$$

$$G(\infty) = \lim_{p\to \infty} G(p) = \lim_{p\to \infty} \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} = 0, \qquad \varphi_G(\infty) = \lim_{p\to \infty} \varphi_G(p) = \lim_{p\to \infty} \arctan(-p) = -90°.$$

❑ Komplexní funkce je polynom 2. řádu

Je-li komplexní funkce $\hat{F}(p)$ polynomem 2. řádu je charakteristikou kmitočtově závislého obvodu, popsaného imitanční aj. Takováto funkce je charakterizována reálnými konstantami K_0, K_1, K_2 a může mít dva tvary, které jsou navzájem inverzní

$$\hat{F}(p,\omega) = K_0 + \mathrm{j}\omega K_1 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega K_2} = K_0\left(1 + \mathrm{j}\omega\frac{K_1}{K_0} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega K_2 K_0}\right) = K_0\left(1 + \mathrm{j}\omega\,\tau_1 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega\,\tau_2}\right) =$$

$$= \frac{K_0}{\mathrm{j}\omega\tau_2}\left((\mathrm{j}\omega)^2\tau_1\tau_2 + \mathrm{j}\omega\,\tau_2 + 1\right)$$

a

$$\hat{G}(p,\omega) = \frac{1}{\hat{F}(p,\omega)} = \frac{1}{K_0 + \mathrm{j}\omega K_1 + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega K_2}} = \frac{1}{\dfrac{K_0}{\mathrm{j}\omega\tau_2}\left((\mathrm{j}\omega)^2\tau_1\tau_2 + \mathrm{j}\omega\,\tau_2 + 1\right)} = \frac{\mathrm{j}\omega\tau_2}{K_0\left((\mathrm{j}\omega)^2\tau_1\tau_2 + \mathrm{j}\omega\,\tau_2 + 1\right)}.$$

Pro jejich amplitudové charakteristiky platí

$$F(p,\omega) = \left|\hat{F}(p,\omega)\right| = \left|\frac{K_0}{\mathrm{j}\omega\tau_2}\left((\mathrm{j}\omega)^2\tau_1\tau_2 + \mathrm{j}\omega\,\tau_2 + 1\right)\right| = \left|\frac{K_0}{\omega\tau_2}\right|\sqrt{\left(\omega^2\tau_1\tau_2\right)^2 - 2\,\omega^2\tau_1\tau_2 + \omega^2\tau_2 + 1},$$

$$G(p,\omega) = \left|\hat{G}(p,\omega)\right| = \left|\frac{\mathrm{j}\omega\tau_2}{K_0\left((\mathrm{j}\omega)^2\tau_1\tau_2 + \mathrm{j}\omega\,\tau_2 + 1\right)}\right| = \left|\frac{\omega\tau_2}{K_0}\right|\frac{1}{\sqrt{\left(\omega^2\tau_1\tau_2\right)^2 - 2\,\omega^2\tau_1\tau_2 + \omega^2\tau_2 + 1}}.$$

Zvolíme-li vztažnou hodnotu úhlového kmitočtu $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{K_1K_2}} = \dfrac{1}{\sqrt{\tau_1\tau_2}}$, kde τ_1 a τ_2 jsou časové konstanty, bude normovaná charakteristika

$$\hat{F}(p)=\frac{K_0}{\mathrm{j}p\,\omega_0\,\tau_2}\left((\mathrm{j}p\,\omega_0\,)^2\tau_1\tau_2+\mathrm{j}p\,\omega_0\,\tau_2+1\right)=\frac{K_0}{\mathrm{j}p\,\dfrac{\tau_2}{\sqrt{\tau_1\tau_2}}}\left(\mathrm{j}^2p+\mathrm{j}p\,\frac{\tau_2}{\sqrt{\tau_1\tau_2}}+1\right)=$$

$$=\frac{K_0}{\mathrm{j}p\,\dfrac{K_0K_2}{\sqrt{K_1K_2}}}\left(\mathrm{j}^2p+\mathrm{j}p\,\frac{K_0K_2}{\sqrt{K_1K_2}}+1\right)=\frac{1}{\mathrm{j}p\,\dfrac{1}{\rho}}\left(\mathrm{j}^2p+\mathrm{j}p\,K_0\,\frac{1}{\rho}+1\right)=\frac{\rho}{\mathrm{j}p}\left(\mathrm{j}^2p+\mathrm{j}p\,\xi+1\right)$$

a jí odpovídající inverzní normovaná charakteristika

$$\hat{G}(p)=\frac{\mathrm{j}p\,\omega_0\,\tau_2}{K_0}\,\frac{1}{(\mathrm{j}p\,\omega_0\,)^2\tau_1\tau_2+\mathrm{j}p\,\omega_0\,\tau_2+1}=\cdots=\frac{\mathrm{j}p}{\rho}\,\frac{1}{\mathrm{j}^2p+\mathrm{j}p\,\xi+1},$$

kde $\rho=\sqrt{\dfrac{K_1}{K_2}}$ a $\xi=\dfrac{K_0}{\rho}$.

Polynom $\mathrm{j}^2p^2+\mathrm{j}p\,\xi+1$ se nedá rozložit na kořenové činitele s reálnými kořeny. Jeho kořeny jsou

$$p_{1,2}=\frac{-\mathrm{j}\,\xi\pm\sqrt{(\mathrm{j}\,\xi)^2-4\mathrm{j}^2}}{2\mathrm{j}^2}=\frac{\mathrm{j}}{2}\left(\xi\mp\sqrt{\xi^2-4}\right).$$

Podle hodnoty parametru ξ nastanou tři případy kořenů. Mezní hodnota parametru je $\xi=2$, kdy existuje jeden násobný kořeny o hodnotě $p_{1,2}=\mathrm{j}$, pro $\xi>2$ jsou oba kořeny ryze imaginární a pro $\xi<2$ mají kořeny i reálnou část.

Normovaná amplitudová charakteristika má tedy tvar

$$F(p)=\left|\frac{\rho}{p}\right|\sqrt{p^4+p^2\left(\xi^2-2\right)+1}$$

a inverzní

$$G(p)=\left|\frac{p}{\rho}\right|\frac{1}{\sqrt{p^4+p^2\left(\xi^2-2\right)+1}}.$$

Jejich fázové charakteristiky jsou kmitočtově závislé funkce

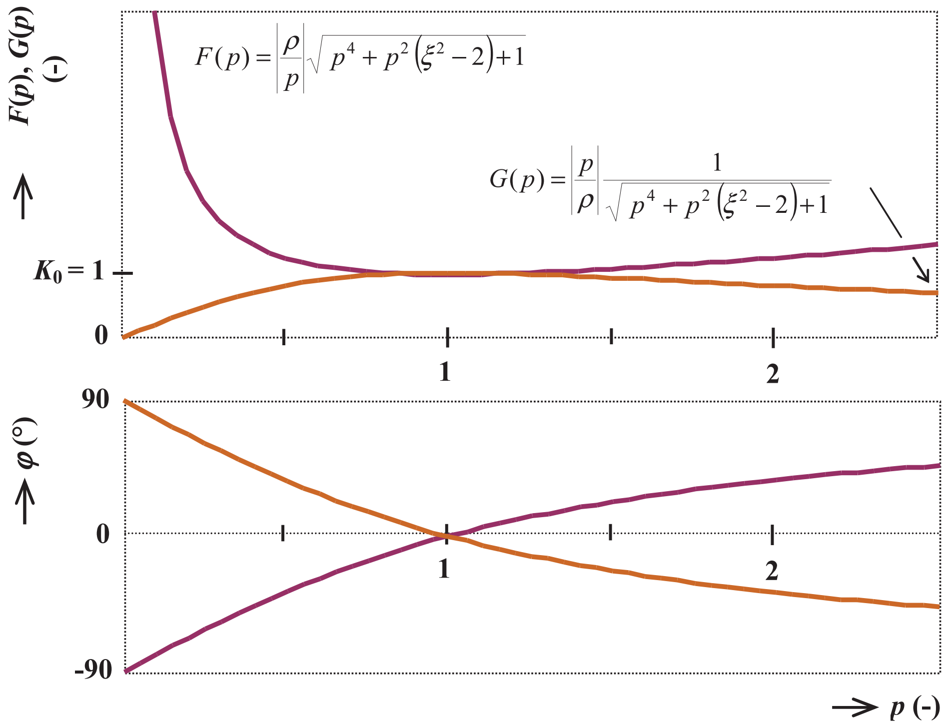
$$\varphi_{\mathrm{F}}(p)=\arg\left(\hat{F}(p)\right)=\arg\left(\frac{\rho}{\mathrm{j}p}\left(\mathrm{j}^2p^2+\mathrm{j}p\,\xi+1\right)\right)=\arctan\left(\frac{p^2-1}{\xi\,p}\right),$$

$$\varphi_{\mathrm{G}}(p)=\arg\left(\hat{G}(p)\right)=\arg\left(\frac{\mathrm{j}p}{\rho}\,\frac{1}{\mathrm{j}^2p^2+\mathrm{j}p\,\xi+1}\right)=\arctan\left(-\frac{p^2-1}{\xi\,p}\right).$$

Obě dvojice charakteristik jsou vyneseny na obr. 4.22.

Pro modelování obvodů popsaných diferenciální rovnicí 2. řádu má význam prototyp přenosové funkce $\hat{F}(p)=\mathrm{j}^2p^2+\mathrm{j}p\,2a+1$, který získáme formální úpravou polynomu $\mathrm{j}^2p^2+\mathrm{j}p\,\xi+1$, když člen s 1. mocninou rozšíříme výrazem $\dfrac{2}{2}$ a poté zavedeme substitucí $a=\dfrac{\xi}{2}$. Pro kořeny tohoto polynomu platí

$$p_{1,2}=\mathrm{j}\left(a\mp2\sqrt{a^2-1}\right).$$



Obr. 4.22 Normované kmitočtové charakteristiky komplexní funkce 2. řádu: amplitudová, fázová

Amplitudová charakteristika má tvar

$$F(p)=\sqrt{p^4+p^2\left(4a^2-2\right)+1}$$

a inverzní

$$G(p)=\frac{1}{\sqrt{p^4+p^2\left(4a^2-2\right)+1}}.$$

Jejich fázové charakteristiky jsou dané

$$\varphi_{\mathrm{F}}(p)=\arg\left(\hat{F}(p)\right)=\arg\left(\mathrm{j}^2p^2+\mathrm{j}p\,2a+1\right)=\arctan\left(-\frac{ap}{p^2-1}\right)\quad \text{pro}\ \ p\in<0,1),$$

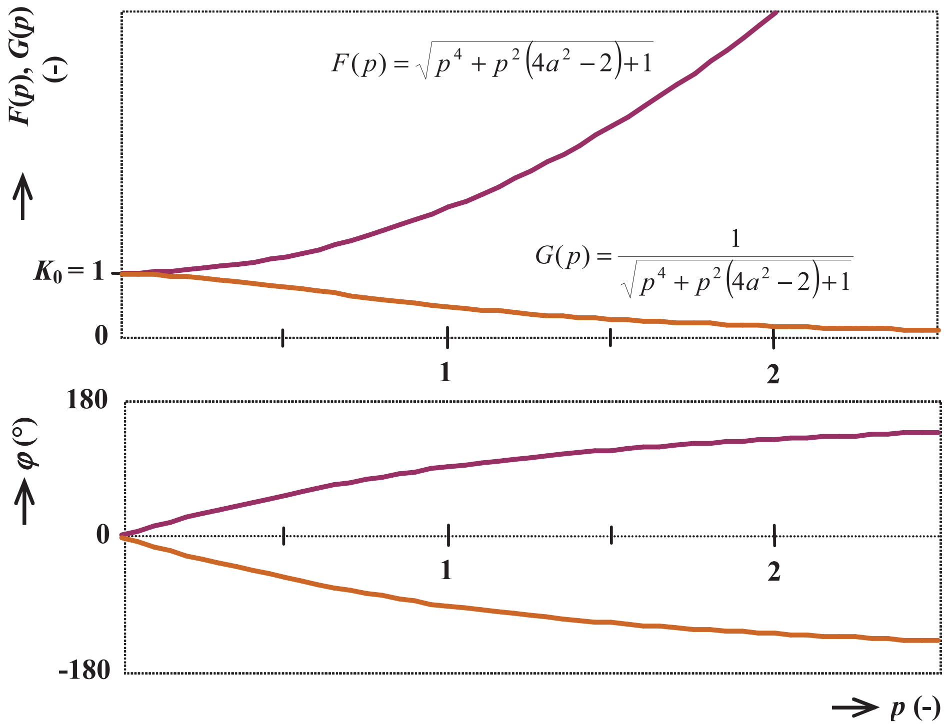
$$\varphi_{\mathrm{F}}(p)=\arg\left(\hat{F}(p)\right)=\arg\left(\mathrm{j}^2p^2+\mathrm{j}p\,2a+1\right)=\pi+\arctan\left(-\frac{ap}{p^2-1}\right)\quad \text{pro}\ \ p\geq 1$$

a

$$\varphi_{\mathrm{G}}=\arg\left(\hat{G}(p)\right)=\arg\left(\frac{1}{\mathrm{j}^2p^2+\mathrm{j}p\,2a+1}\right)=\arctan\left(\frac{ap}{p^2-1}\right)\quad \text{pro}\ \ p\in<0,1),$$

$$\varphi_{\mathrm{G}}=\arg\left(\hat{G}(p)\right)=\arg\left(\frac{1}{\mathrm{j}^2p^2+\mathrm{j}p\,2a+1}\right)=-\pi+\arctan\left(\frac{ap}{p^2-1}\right)\quad \text{pro}\ \ p\geq 1.$$

Obě dvojice charakteristik jsou vyneseny na následujícím obr. 4.23.



Obr. 4.23 Standardní tvar normované kmitočtové charakteristiky komplexní funkce 2. řádu: amplitudová, fázová

Příklad 4.3.

Určete pro hlavní hodnoty parametru p funkční hodnoty amplitudové a fázové kmitočtové charakteristiky normovaných funkcí $\hat{F}(p)=\mathrm{j}^2p^2+\mathrm{j}p\,2a+1$ *a* $\hat{G}(p)=\dfrac{1}{\mathrm{j}^2p^2+\mathrm{j}p\,2a+1}$, *je-li parametr a = 1.*

♦

Hlavní hodnoty parametru p jsou hodnoty p = 0, p = 1 a $p\to\infty$. Hodnoty amplitudová a fázové charakteristiky první funkce jsou

$$F(0)=\lim_{p\to 0}F(p)=\lim_{p\to 0}\sqrt{p^4+2p^2+1}=1\,,\ \varphi_{\mathrm{F}}(0)=\lim_{p\to 0}\varphi_{\mathrm{F}}(p)=\lim_{p\to 0}\arctan\left(-\frac{p}{p^2-1}\right)=0^\circ,$$

$$F(1)=\lim_{p\to 1}F(p)=\lim_{p\to 1}\sqrt{p^4+2p^2+1}=2\,,\ \varphi_{\mathrm{F}}(1)=\lim_{p\to 1}\varphi_{\mathrm{F}}(p)=\lim_{p\to 1}\left(\pi+\arctan\left(-\frac{p}{p^2-1}\right)\right)=90^\circ,$$

$$F(\infty)=\lim_{p\to\infty}F(p)=\lim_{p\to\infty}\sqrt{p^4+2p^2+1}=\infty\,,\ \varphi_{\mathrm{F}}(\infty)=\lim_{p\to\infty}\varphi_{\mathrm{F}}(p)=\lim_{p\to\infty}\left(\pi+\arctan\left(-\frac{p}{p^2-1}\right)\right)=180^\circ$$

a druhé funkce

$$G(0)=\lim_{p\to 0}G(p)=\lim_{p\to 0}\frac{1}{\sqrt{p^4+2p^2+1}}=1\,,\ \varphi_{\mathrm{G}}(0)=\lim_{p\to 0}\varphi_{\mathrm{G}}(p)=\lim_{p\to 0}\arctan\left(\frac{p}{p^2-1}\right)=0^\circ,$$

$$G(1)=\lim_{p\to 1}G(p)=\lim_{p\to 1}\frac{1}{\sqrt{p^4+2p^2+1}}=\frac{1}{2},\ \varphi_{\mathrm{G}}(1)=\lim_{p\to 1}\varphi_{\mathrm{G}}(p)=\lim_{p\to 1}\left(-\pi+\arctan\left(\frac{p}{p^2-1}\right)\right)=-90°,$$

$$G(\infty)=\lim_{p\to\infty}G(p)=\lim_{p\to\infty}\frac{1}{\sqrt{p^4+2p^2+1}}=0,\ \varphi_{\mathrm{G}}(\infty)=\lim_{p\to\infty}\varphi_{\mathrm{G}}(p)=\lim_{p\to\infty}\left(-\pi+\arctan\left(\frac{p}{p^2-1}\right)\right)=180°.$$

Σ Shrnutí pojmů 4.3.

Normováním komplexní funkce $\hat{F}(p)$ reálného parametru p získáme univerzální amplitudovou a fázovou kmitočtovou charakteristiku daného obvodu, nezávislou na hodnotách vztažného úhlového kmitočtu. Vztažný úhlový kmitočet je dán převrácenou (inverzní) hodnotou časové konstanty obvodu. Nejvýznamnější prototypy komplexní funkce $\hat{F}(p)$ jsou normované komplexní polynomy 0. – 2. řádu, a to K_0, $\mathrm{j}p$, $\mathrm{j}p+1$, $\mathrm{j}^2p^2+\mathrm{j}p\,2a+1$ a jejich inverzní tvary popsané funkcí $\hat{G}(p)$.

? Otázky 4.3.

1. Jaký je vztah mezi vztažným úhlovým kmitočtem a časovou konstantou obvodu?
2. Jakou výhodu má normovaný tvar amplitudové a fázové kmitočtové charakteristiky?
3. Který prototyp komplexní funkce $\hat{F}(p)$ reálného parametru p má nulovou hodnotu fáze fázové kmitočtové charakteristiky a proč?
4. Který prototyp komplexní funkce $\hat{F}(p)$ reálného parametru p má amplitudovou kmitočtovou charakteristiku přímku? Jakou má fázovou charakteristiku?
5. Jakou hodnotu amplitudy a fáze májí jednotlivé prototypy komplexní funkce $\hat{F}(p)$ pro hodnotu parametru $p=1$?

Úloha k řešení 4.3.

Nakreslete dvě obvodová schéma tvořená pokaždé dvěma typy pasivních obvodových prvků, které mají normovanou amplitudovou charakteristiku danou funkcí $\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$, kde kladná hodnota parametru p zastupuje proměnný kmitočet.

Řešení:

Zadaný tvar amplitudové charakteristiky přenosové funkce odpovídá integračnímu článku viz kapitola 2, takže jeden z dvojice obvodových prvků musí být kmitočtově závislý. Omezíme-li se jen na napěťový přenos obvodu, struktura hledaného obvodu odpovídá sériovému řazení obvodových prvků, který je popsán prototypem komplexní funkce s polynomem 1. řádu, a to inverzní funkcí $\left|\hat{G}(p)\right|=\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$. Komplexní funkce $\hat{G}(p)$ v našem případě odpovídá přenosu RC a RL obvodu, které jsou nakresleny na obr. 4.24 a popsány kmitočtově závislým děličem napětí. Normovaný přenos napětí vůči úhlovému lomovému kmitočtu obvodu $\omega_0 = 1/\tau$, kde τ je časová konstanta obvodu, je v případě RC obvodu dán

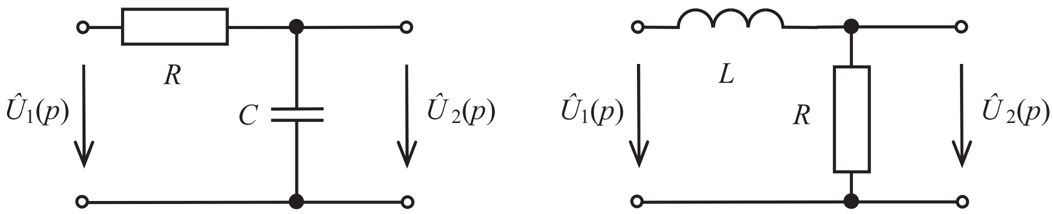
$$\frac{\hat{U}_2(p)}{\hat{U}_1(p)} = \frac{\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{R + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}} = \frac{1}{1+\mathrm{j}\omega RC} = \frac{1}{1+\mathrm{j}\omega\tau} = \frac{1}{1+\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_0}} = \frac{1}{1+\mathrm{j}\,p}$$

a RL obvodu

$$\frac{\hat{U}_2(p)}{\hat{U}_1(p)} = \frac{R}{R+\mathrm{j}\omega L} = \frac{1}{1+\mathrm{j}\omega\dfrac{R}{L}} = \frac{1}{1+\mathrm{j}\omega\tau} = \frac{1}{1+\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_0}} = \frac{1}{1+\mathrm{j}\,p}.$$

Normovaná komplexní funkce má v obou případech stejný tvar a její amplitudová charakteristika odpovídá velikosti této komplexní funkce, tedy

$$\left|\frac{1}{1+\mathrm{j}\,p}\right| = \left|\frac{1}{1+\mathrm{j}\,p}\,\frac{1-\mathrm{j}\,p}{1-\mathrm{j}\,p}\right| = \left|\frac{1-\mathrm{j}\,p}{1+p^2}\right| = \frac{1}{\left|1+p^2\right|}\sqrt{1^2+(-p)^2} = \frac{\sqrt{1^2+p^2}}{\sqrt{1^2+p^2}\sqrt{1^2+p^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}.$$



Obr. 4.24 Obvodové modely integračního článku

Integračnímu článku z obr. 4.24 vlevo odpovídá hodograf na obr. 4.15 vpravo a integračnímu článku z obr. 4.24 vpravo odpovídá hodograf na obr. 4.8 vlevo. Amplitudová a fázová kmitočtová charakteristika tohoto článku odpovídá grafům na obr. 4.21 a Bodeho charakteristiky grafům na obr. 4.26, oba pro případ prototypu funkce $\hat{G}(p)$ 1. řádu.

4.4. Bodeho charakteristiky

Vyneseme-li amplitudy kmitočtové charakteristiky v logaritmickém měřítku, fáze kmitočtové charakteristiky v lineárním měřítku a budou-li mít jejich kmitočtové osy logaritmické měřítko, můžeme amplitudové i fázové kmitočtové charakteristiky polynomů 0. – 2. řádu zjednodušeně konstruovat pomocí jejich asymptot. Tyto semilogaritmické charakteristiky potom nazýváme Bodeho charakteristiky. Amplitudová osa již není bezrozměrná, ale je vynášena v decibelech, osa fáze ve stupních případně radiánech. Logaritmické kmitočtové osy jsou vynášeny po dekádách, takže v rámci dekád nejsou dílky rastru kmitočtu rozmístněny lineárně, ale logaritmicky. Výhodou zavedení logaritmického měřítka amplitudové charakteristiky jsou nejen vlastnosti funkce logaritmus, ale i možnost zobrazení velkého rozsahu amplitud a šířky pásma.

❑ Komplexní funkce je reálná a konstantní - polynom 0. řádu

Pro logaritmicko amplitudovou charakteristiku platí

$$F_{\mathrm{dB}}(p) = 20\log\left|F(p)\right| = 20\log K_0$$

a fázovou charakteristiku

$$\varphi_F(p) = 0°.$$

Amplitudová i fázová charakteristika, vynesené v semilogaritmických souřadnicích jsou konstantní funkce, nejsou tudíž vyneseny, neboť mají až na logaritmické měřítko osy *p*, stejný tvar jako charakteristiky prototypu této funkce zobrazené na obr. 4.19 s lineárním měřítkem osy *p*.

❑ Normovaná komplexní funkce je ryze imaginární polynom 1. řádu

Pro normovanou logaritmicko amplitudovou charakteristiku a její inverzní tvar platí

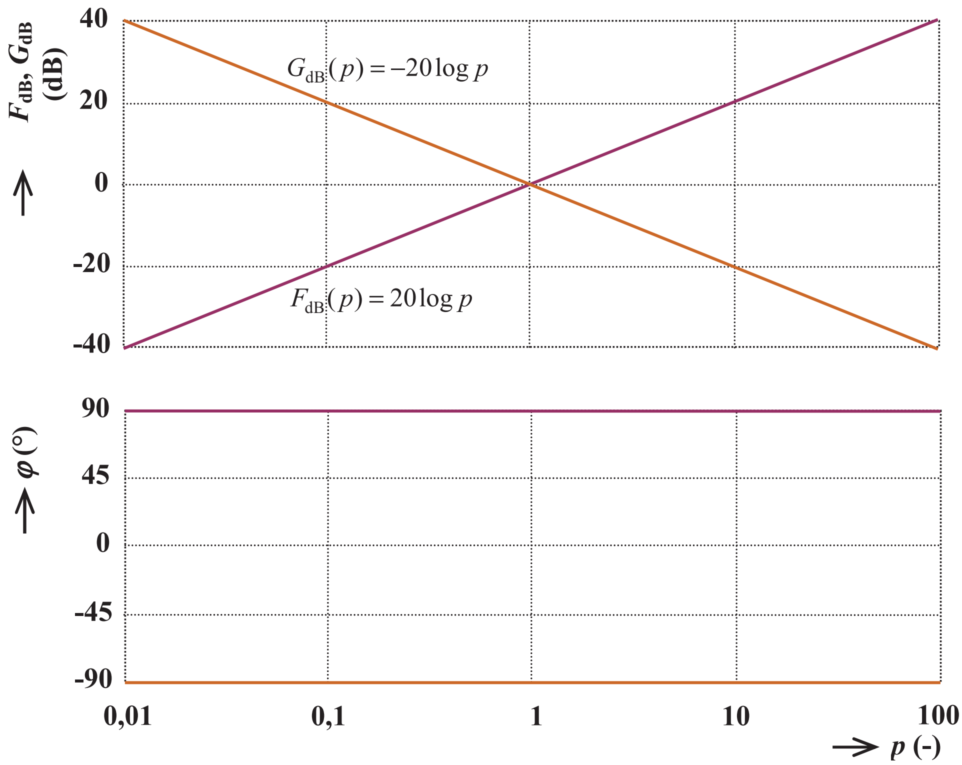
$$F_{dB}(p) = 20\log\left|\hat{F}(p)\right| = 20\log p, \qquad G_{dB}(p) = 20\log\left|\frac{1}{\hat{F}(p)}\right| = -20\log\left|\hat{F}(p)\right| = -20\log p.$$

V semilogaritmických souřadnicích jejich zobrazení odpovídají přímky, které protínají normovanou, logaritmickou kmitočtovou osu v bodě $p = 1$ a mají sklon +20 dB a -20 dB na dekádu.

Jejich fázové charakteristiky jsou konstantní a mají rovnice

$$\varphi_F(p) = 90°, \quad \varphi_G(p) = -90°.$$

Obě dvojice charakteristik jsou vyneseny na obr. 4.25.



Obr. 4.25 Normované kmitočtové charakteristiky proměnné, ryze imaginární komplexní funkce: logaritmicko amplitudová, semilogaritmická fázová

❑ Normovaná komplexní funkce je polynom se setrvačností 1. řádu

Pro normovanou logaritmicko amplitudovou charakteristiku a její inverzní tvar platí

$$F_{dB}(p) = 20\log\left|\hat{F}(p)\right| = 20\log\sqrt{1+p^2},$$

$$G_{dB}(p) = 20\log\left|\frac{1}{\hat{F}(p)}\right| = -20\log\left|\hat{F}(p)\right| = -20\log\sqrt{1+p^2}.$$

Asymptoty logaritmických amplitudových charakteristik získáme diskuzí rovnic charakteristik pro hodnoty parametru *p*. Pro $p << 1$ pod odmocninou můžeme zanedbat čtverec parametru p^2, takže pro oba případy charakteristik platí, že první část asymptotické charakteristiky má rovnici $F_{1\mathrm{dB}}(p) = 20\log 1 = 0\,\mathrm{dB}$ a $G_{1\mathrm{dB}}(p) = -20\log 1 = 0\,\mathrm{dB}$. Pro $p >> 1$ pod odmocninou můžeme zanedbat jedničku vůči členu p^2, takže druhá část asymptotické charakteristiky je dána rovnicí $F_{2\mathrm{dB}}(p) = 20\log\sqrt{p^2} = 20\log p$ a pro inverzní případ charakteristiky rovnicí $G_{2\mathrm{dB}}(p) = -20\log p$. Obě části asymptotické charakteristiky jsou přímky, které se protínají v bodě definovaném normovaným kmitočtem $p = 1$ a hodnotou amplitudy 0 dB. První asymptota má v obou případech charakteristik hodnotu amplitudy 0 dB a druhá má směrnici +20 dB/dekádu resp. v inverzním případě -20 dB/dekádu. Výsledná asymptotická logaritmicko amplitudová charakteristika je popsána funkcí

$$F_{1\mathrm{dB}}(p) = 0\,\mathrm{dB} \text{ pro } p \in \langle 0,1) ,$$

$$F_{2\mathrm{dB}}(p) = 20\log\sqrt{p^2} = 20\log p \text{ pro } p \in \langle 1,\infty)$$

a její inverzní případ

$$G_{1\mathrm{dB}}(p) = 0\,\mathrm{dB} \text{ pro } p \in \langle 0,1) ,$$

$$G_{2\mathrm{dB}}(p) = -20\log\sqrt{p^2} = -20\log p \text{ pro } p \in \langle 1,\infty) .$$

Skutečné charakteristiky se od asymptotických charakteristik však odchylují. Největší hodnota odchylky amplitudy asymptotické charakteristiky je v bodě $p = 1$, ve kterém má hodnotu $\Delta F_{1\mathrm{dB}}(1) = 20\log\sqrt{2} - 0 \doteq 3\,\mathrm{dB}$ a v inverzním případě charakteristiky -3 dB.

Skutečné fázové charakteristiky dané funkcemi

$$\varphi_{\mathrm{F}}(p) = \arctan(p), \qquad \varphi_{\mathrm{G}}(p) = \arctan(-p)$$

aproximujeme asymptotickými průběhy tak, že je složíme ze tří asymptot vymezených dvěma kmitočty, a to kmitočtem o dekádu nižším a o dekádu vyšším než je normovaný kmitočet, což odpovídá hodnotám parametrů $p = 0{,}1$ a $p = 10$. Výsledná asymptotická fázová charakteristika je v semilogaritmických souřadnicích popsána funkcí

$$\varphi_{0\mathrm{F}}(p) = 0^\circ \text{ pro } p \in \langle 0,\ 0{,}1) ,$$

$$\varphi_{1\mathrm{F}}(p) = 45\log(p) + 45 \text{ pro } p \in \langle 0{,}1, 10 \rangle ,$$

$$\varphi_{2\mathrm{F}}(p) = 90^\circ \text{ pro } p \in (10,\infty)$$

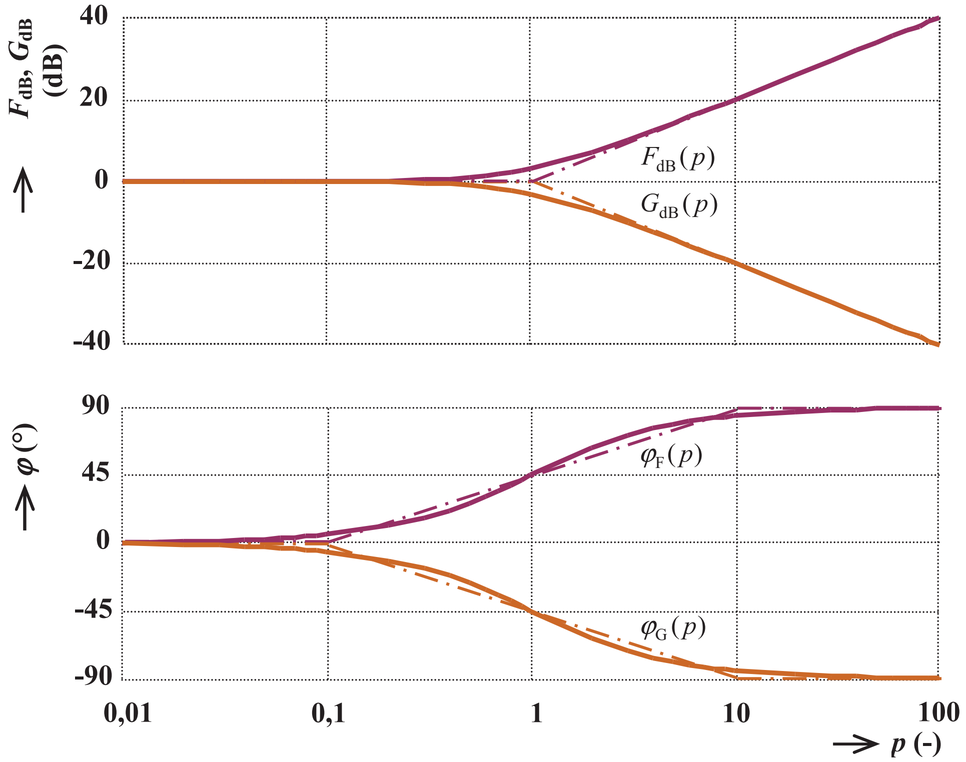
a v případě inverzní fázové charakteristiky funkcí

$$\varphi_{0\mathrm{G}}(p) = 0^\circ \text{ pro } p \in \langle 0,\ 0{,}1) ,$$

$$\varphi_{1\mathrm{G}}(p) = -45\log(p) - 45 \text{ pro } p \in \langle 0{,}1, 10 \rangle ,$$

$$\varphi_{2\mathrm{G}}(p) = -90^\circ \text{ pro } p \in (10,\infty) .$$

Asymptoty se zobrazují v semilogaritmických souřadnicích jako přímky. První asymptota má konstantní hodnotu fáze 0 ° stupňů pro oba případy charakteristik, druhá má směrnici 45 ° a pro inverzní případ -45 ° a třetí má konstantní hodnotu fáze 90 ° a pro inverzní případ -90 °. První a druhá asymptota má společný bod definovaný hodnotou parametru $p = 0{,}1$ a nulovou hodnotou fáze, přičemž odchylka asymptotické fázové charakteristiky v tomto bodě od skutečné činí $\Delta\varphi_{1\mathrm{F}}(0{,}1) = 0^\circ - \arctan(0{,}1) \doteq -5{,}7^\circ$ a pro inverzní případ $5{,}7^\circ$. Druhá a třetí asymptota má společný bod definovaný hodnotou parametru $p = 10$ a hodnotou fáze 90 ° resp. pro inverzní případ hodnotou fáze -90 °, přičemž odchylka asymptotické fázové charakteristiky v tomto bodě od skutečné činí $\Delta\varphi_{2F}(10) = 90° - \arctan(10) \doteq 5{,}7°$ a pro inverzní případ $-5{,}7°$. Obě dvojice charakteristik jsou vyneseny na obr. 4.26.



Obr. 4.26 Normované kmitočtové charakteristiky komplexní funkce 1. řádu: logaritmicko amplitudová, semilogaritmická fázová

❑ Normovaná komplexní funkce je polynom 2. řádu

Pro normovanou logaritmicko amplitudovou charakteristiku a její inverzní tvar platí

$$F_{dB}(p) = 20\log\left|\hat{F}(p)\right| = 20\log\sqrt{p^4 + p^2\left(4a^2 - 2\right) + 1}\,,$$

$$G_{dB}(p) = 20\log\left|\frac{1}{\hat{F}(p)}\right| = -20\log\left|\hat{F}(p)\right| = -20\log\sqrt{p^4 + p^2\left(4a^2 - 2\right) + 1}.$$

Asymptoty logaritmických amplitudových charakteristik získáme diskuzí rovnic charakteristik pro hodnoty parametru p a parametru $a = 1$, který je mezním případem charakteristiky. Pro $p << 1$ pod odmocninou můžeme zanedbat členy polynomu 2. a 4. řádu, takže pro oba případy charakteristik platí, že první část asymptotické charakteristiky má rovnici $F_{1dB}(p) = 20\log 1 = 0\,\mathrm{dB}$ a $G_{1dB}(p) = -20\log 1 = 0\,\mathrm{dB}$. Pro $p >> 1$ pod odmocninou můžeme zanedbat členy s 0. a 2. řádem polynomu vůči členu p^4, takže druhá část asymptotické charakteristiky je dána rovnicí $F_{2dB}(p) = 20\log\sqrt{p^4} = 20\log p^2 = 40\log p$ a pro inverzní případ charakteristiky rovnicí $F_{2dB}(p) = -40\log p$. Obě části asymptotické charakteristiky jsou přímky, které se protínají v bodě definovaném normovaným kmitočtem $p = 1$ a hodnotou amplitudy 0 dB. První asymptota má v obou případech charakteristik hodnotu amplitudy 0 dB a druhá má směrnici +40 dB/dekádu resp. v inverzním případě -40 dB/dekádu. Výsledná asymptotická logaritmicko amplitudová charakteristika je popsána funkcí

$$F_{1\mathrm{dB}}(p) = 0\,\mathrm{dB} \text{ pro } p \in <0,\ 0{,}1),$$

$$F_{2\mathrm{dB}}(p) = 40\log p \text{ pro } p \in <1, \infty)$$

a její inverzní případ

$$G_{1\mathrm{dB}}(p) = 0\,\mathrm{dB} \text{ pro } p \in <0{,}1),$$

$$G_{2\mathrm{dB}}(p) = -40\log p \text{ pro } p \in <1, \infty).$$

Skutečné charakteristiky se od asymptotických charakteristik však odchylují. Hodnota odchylky amplitudy asymptotické charakteristiky je v bodě $p = 1$ obecně $\Delta F_{1\mathrm{dB}}(p) = 20\log(2a) = 20\log(2a) + 20\log(a) \doteq 6 + 20\log(a)$, tedy pro parametr $a = 1$ má typickou hodnotu $6\,\mathrm{dB}$ a v inverzním případě charakteristiky $\Delta G_{1\mathrm{dB}}(p) \doteq -6 - 20\log(a)$ a pro parametr $a = 1$ $-6\,\mathrm{dB}$.

Skutečné fázové charakteristiky jsou dané funkcemi

$$\varphi_{\mathrm{F}}(p) = \arctan\left(-\frac{a\,p}{p^2 - 1}\right) \text{ pro } p \in <0{,}1),$$

$$\varphi_{\mathrm{F}}(p) = \pi + \arctan\left(-\frac{a\,p}{p^2 - 1}\right) \text{ pro } p \geq 1$$

a pro inverzní tvar

$$\varphi_{\mathrm{G}} = \arctan\left(\frac{a\,p}{p^2 - 1}\right) \text{ pro } p \in <0{,}1),$$

$$\varphi_{\mathrm{G}} = -\pi + \arctan\left(\frac{a\,p}{p^2 - 1}\right) \text{ pro } p \geq 1.$$

Tyto charakteristiky můžeme aproximovat asymptotickými průběhy tak, že je složíme ze tří asymptot vymezených dvěma kmitočty, a to kmitočtem o dekádu nižším a o dekádu vyšším než je normovaný kmitočet, což odpovídá hodnotám parametrů $p = 0{,}1$ a $p = 10$. Výsledná asymptotická fázová charakteristika je v semilogaritmických souřadnicích popsána funkcí pro parametr $a = 1$

$$\varphi_{0\mathrm{F}}(p) = 0^\circ \text{ pro } p \in <0,\ 0{,}1),$$

$$\varphi_{1\mathrm{F}}(p) = 90\log(p) + 90^\circ \text{ pro } p \in <0{,}1, 10>,$$

$$\varphi_{2\mathrm{F}}(p) = 180^\circ \text{ pro } p \in (10, \infty)$$

a v případě inverzní fázové charakteristiky funkcí

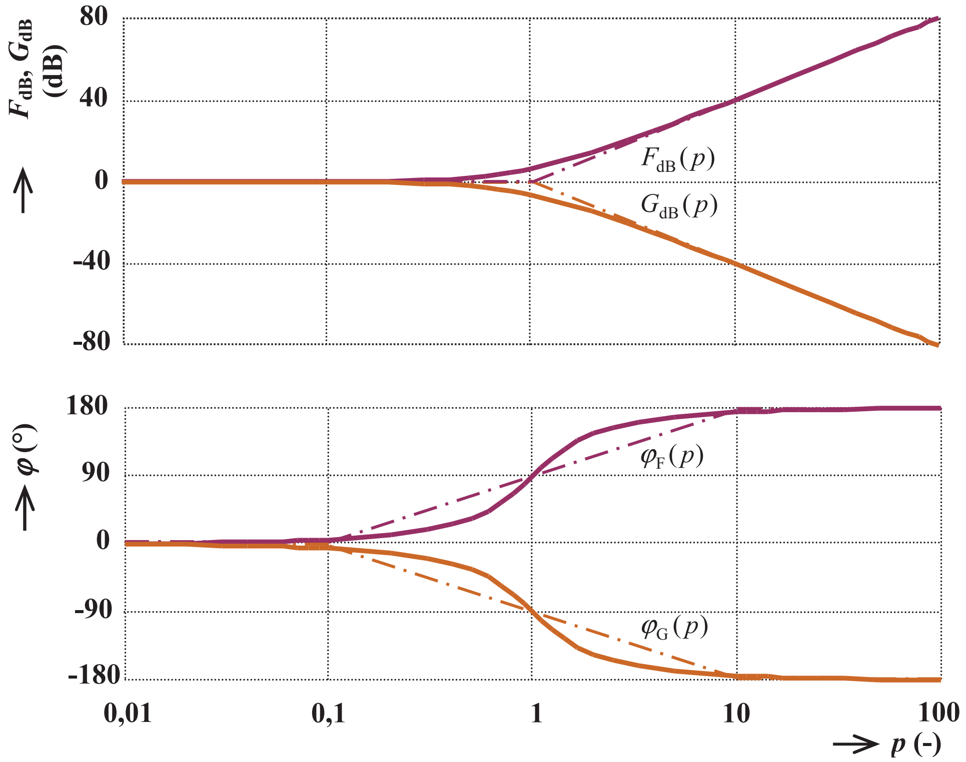
$$\varphi_{0\mathrm{G}}(p) = 0^\circ \text{ pro } p \in <0,\ 0{,}1),$$

$$\varphi_{1\mathrm{G}}(p) = -90\log(p) - 90^\circ \text{ pro } p \in <0{,}1, 10>,$$

$$\varphi_{2\mathrm{G}}(p) = -180^\circ \text{ pro } p \in (10, \infty).$$

Asymptoty se zobrazují v semilogaritmických souřadnicích jako přímky. První asymptota má konstantní hodnotu fáze 0 ° stupňů pro oba případy charakteristik, druhá má směrnici 90 ° a pro inverzní případ -90 ° a třetí má konstantní hodnotu fáze 180 ° a pro inverzní případ -180 °. První a druhá asymptota má společný bod definovaný hodnotou parametru $p = 0{,}1$ a nulovou hodnotou fáze, přičemž odchylka asymptotické fázové charakteristiky v tomto bodě od skutečné činí

$\Delta\varphi_{1F}(0{,}1) = 0° - \lim\limits_{p\to 0{,}1} \arctan\left(-\dfrac{p}{p^2-1}\right) \doteq -5{,}7°$ a pro inverzní případ $5{,}7°$. Druhá a třetí asymptota má společný bod definovaný hodnotou parametru $p = 10$ a hodnotou fáze $180°$ resp. pro inverzní případ hodnotou fáze -180 °, přičemž odchylka asymptotické fázové charakteristiky v tomto bodě od skutečné činí $\Delta\varphi_{2F}(10) = 180° - 180° + \lim\limits_{p\to 10} \arctan\left(-\dfrac{p}{p^2-1}\right) \doteq 5{,}7°$ a pro inverzní případ $-5{,}7°$. Obě dvojice charakteristik jsou vyneseny na obr. 4.27.



Obr. 4.27 Standardní tvar normované kmitočtové charakteristiky komplexní funkce 2. řádu: logaritmicko amplitudová, semilogaritmická fázová

Příklad 4.4.

Nakreslete logaritmicko amplitudové a fázové kmitočtové charakteristiky normované funkce $\hat{F}(p) = \mathrm{j}^2 p^2 + \mathrm{j}p\,2a + 1$ *v semilogaritmických souřadnicích pro hodnoty parametru a = 10 a a = 0,1. Určete funkční hodnoty těchto charakteristik pro hodnoty parametrů p = 10, p = 1 a a = 10, a = 0,1.*

♦

Funkční hodnoty amplitudové charakteristiky vypočítáme dosazením zadaných parametrů do vztahu

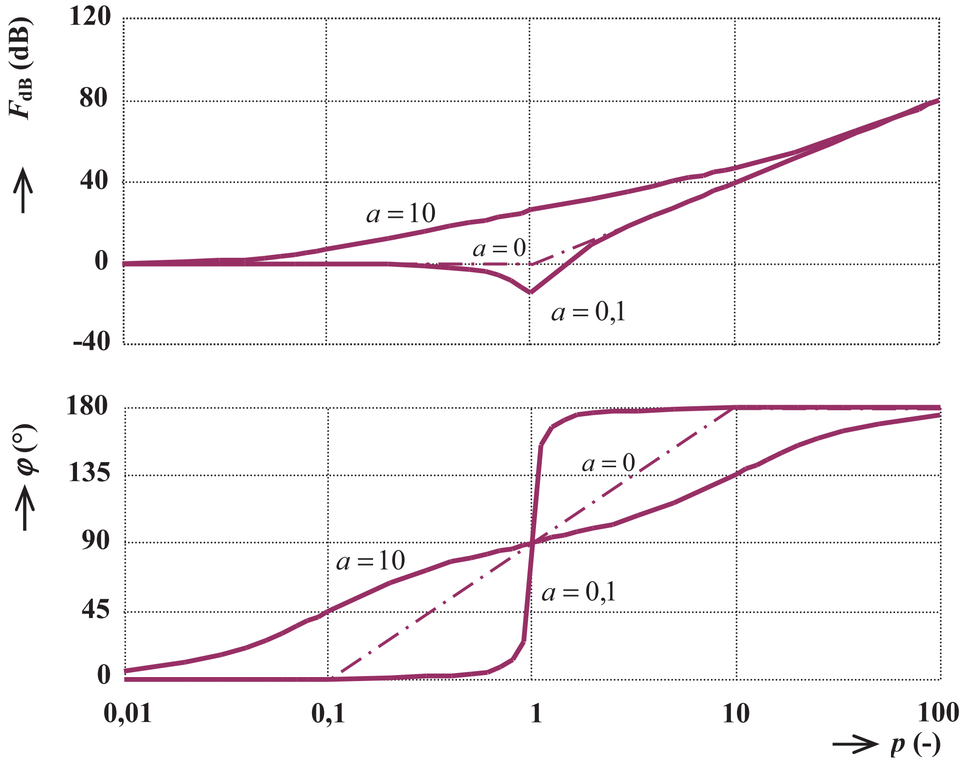
$$F_{dB}(p) = 20\log\left|F(p)\right| = 20\log\sqrt{p^4 + p^2\left(4a^2 - 2\right) + 1}$$

a fázové charakteristiky

$$\varphi_F(p) = \arctan\left(-\frac{ap}{p^2-1}\right) \quad \text{pro } p \in <0{,}1),$$

$$\varphi_{\mathrm{F}}(p) = \pi + \arctan\left(-\frac{a\,p}{p^2-1}\right) \text{ pro } p \geq 1\,.$$

Obě jsou vyneseny na obr. 4.28. Normovaný kmitočet je vynášený v logaritmickém měřítku, takže pro zobrazení funkce postačí tabelovat hodnoty v rámci každé dekády v deseti jejích bodech, které odpovídají dílkům dekády log(1) = 0, log(2) = 0,30, log(3) = 0,48, log(4) = 0,60, log(5) = 0,70, log(6) = 0,78, log(7) = 0,85, log(8) = 0,90, log(9) = 0,95, log(1) = 1,00.



Obr. 4.28 Standardní tvar normované kmitočtové charakteristiky komplexní funkce 2. řádu: logaritmicko amplitudová, semilogaritmická fázová, příklad 4.4

Hodnoty amplitudové a fázové charakteristiky pro zadané hodnoty parametru p a hodnotu parametru $a = 10$ jsou

$$F(10) = \lim_{p\to 10} F_{\mathrm{dB}}(p) = \lim_{p\to 10} 20\log\left(\sqrt{p^4 + p^2(400-2)+1}\right) \doteq 40{,}2\ \mathrm{dB}\,,$$

$$\varphi_{\mathrm{P}}(10) = \lim_{p\to 10} \varphi_{\mathrm{P}}(p) = \lim_{p\to 10}\left(180^\circ + \arctan\left(-\frac{10p}{p^2-1}\right)\right) = 134{,}7^\circ\,,$$

$$F(1) = \lim_{p\to 1} F_{\mathrm{dB}}(p) = \lim_{p\to 1} 20\log\left(\sqrt{p^4 + p^2(400-2)+1}\right) \doteq 26{,}0\ \mathrm{dB}\,,$$

$$\varphi_{\mathrm{P}}(1) = \lim_{p\to 1} \varphi_{\mathrm{P}}(p) = \lim_{p\to 1}\left(\pi + \arctan\left(-\frac{10p}{p^2-1}\right)\right) = 90^\circ\,,$$

$$F(0{,}1) = \lim_{p\to 0{,}1} F(p) = \lim_{p\to 0{,}1} 20\log\left(\sqrt{p^4 + p^2(400-2)+1}\right) \doteq 7{,}0\ \mathrm{dB}\,,$$

$$\varphi_{\mathrm{P}}(0{,}1) = \lim_{p\to 0{,}1} \varphi_{\mathrm{P}}(p) = \lim_{p\to 0{,}1} \arctan\left(-\frac{10p}{p^2-1}\right) \doteq 45{,}3^\circ$$

a pro hodnotu parametru $a = 0{,}1$

$$F(10)=\lim_{p\to10}F_{\mathrm{dB}}(p)=\lim_{p\to10}20\log\left(\sqrt{p^4+p^2(0{,}04-2)+1}\right)\doteq 40{,}1\,\mathrm{dB}\,,$$

$$\varphi_{\mathrm{P}}(10)=\lim_{p\to10}\varphi_{\mathrm{P}}(p)=\lim_{p\to10}\left(180\,^\circ+\arctan\left(-\frac{0{,}1p}{p^2-1}\right)\right)=179{,}4\,^\circ\,,$$

$$F(1)=\lim_{p\to1}F_{\mathrm{dB}}(p)=\lim_{p\to1}20\log\left(\sqrt{p^4+p^2(0{,}04-2)+1}\right)\doteq -14{,}0\,\mathrm{dB}\,,$$

$$\varphi_{\mathrm{P}}(1)=\lim_{p\to1}\varphi_{\mathrm{P}}(p)=\lim_{p\to1}\left(\pi+\arctan\left(-\frac{0{,}1p}{p^2-1}\right)\right)=90\,^\circ\,,$$

$$F(0{,}1)=\lim_{p\to0{,}1}F(p)=\lim_{p\to0{,}1}20\log\left(\sqrt{p^4+p^2(0{,}04-2)+1}\right)\doteq -0{,}2\,\mathrm{dB}\,,$$

$$\varphi_{\mathrm{P}}(0{,}1)=\lim_{p\to0{,}1}\varphi_{\mathrm{P}}(p)=\lim_{p\to0{,}1}\arctan\left(-\frac{0{,}1p}{p^2-1}\right)\doteq 0{,}6\,^\circ\,.$$

Komplexní racionální lomené funkce

Komplexní funkce reprezentující zpravidla hodografy napětí a napěťové přenosy, můžeme obecně popsat komplexní lomenou racionální funkcí

$$\hat{F}_{\mathrm{z}}(\hat{z})=\frac{\hat{F}_{\mathrm{a}}(\hat{z})}{\hat{F}_{\mathrm{b}}(\hat{z})}\,,$$

kde funkce $\hat{F}_{\mathrm{a}}(\hat{z})$ představuje komplexní polynom čitatele, funkce $\hat{F}_{\mathrm{b}}(\hat{z})$ komplexní polynom jmenovatele a $\hat{z}$ je komplexní proměnná. Zapíšeme-li je součinem kořenových činitelů, polynomy mají tvar

$$\hat{F}_{\mathrm{a}}(\hat{z})=a\left(\hat{z}-\hat{z}_{\mathrm{a}1}\right)\left(\hat{z}-\hat{z}_{\mathrm{a}2}\right)\ldots\left(\hat{z}-\hat{z}_{\mathrm{a}m}\right)$$

a

$$\hat{F}_{\mathrm{b}}(\hat{z})=b\left(\hat{z}-\hat{z}_{\mathrm{b}1}\right)\left(\hat{z}-\hat{z}_{\mathrm{b}2}\right)\ldots\left(\hat{z}-\hat{z}_{\mathrm{b}n}\right),$$

kde a, b jsou reálné konstanty a m a n stupeň polynomu čitatele a jmenovatele. Kořeny polynomu čitatele nazýváme nuly a kořeny polynomu jmenovatele póly. Poznamenejme jen, že poloha pólů přenosové funkce v komplexní rovině je důležitá pro posouzení stability zpětnovazebního obvodu (Nyquistovo kritérium). Budeme-li uvažovat, že komplexní proměnná je ryze imaginární a funkcí proměnného kmitočtu ω, pak pro ni platí rovnost $\hat{z}=\mathrm{j}\omega$. Pro pasivní obvody RLC jsou kořeny čitatele a jmenovatele vždy reálné a záporné, v krajním případě komplexně sdružené, s reálnou částí zápornou a stupeň čitatele a jmenovatele se liší maximálně o hodnotu 1, čili $m = n+1$ (pozitivně reálná funkce, Bruneho věta), takže pro kořeny čitatele i jmenovatele, pak platí $\omega_{\mathrm{a}m}=-\mathrm{Re}\{\hat{z}_{\mathrm{a}m}\}$ a $\omega_{\mathrm{b}n}=-\mathrm{Re}\{\hat{z}_{\mathrm{b}n}\}$ a komplexní lomenou racionální funkci můžeme zapsat

$$\hat{F}_{\mathrm{z}}(\mathrm{j}\omega)=\frac{a\left(\mathrm{j}\omega+\omega_{\mathrm{a}1}\right)\left(\mathrm{j}\omega+\omega_{\mathrm{a}2}\right)\ldots\left(\mathrm{j}\omega+\omega_{\mathrm{a}m}\right)}{b\left(\mathrm{j}\omega+\omega_{\mathrm{b}1}\right)\left(\mathrm{j}\omega+\omega_{\mathrm{b}2}\right)\ldots\left(\mathrm{j}\omega+\omega_{\mathrm{b}n}\right)}=\frac{a}{b}\frac{\prod_{k=1}^{k=m}\left(\mathrm{j}\omega+\omega_{\mathrm{a}k}\right)}{\prod_{l=1}^{l=n}\left(\mathrm{j}\omega+\omega_{\mathrm{b}l}\right)}=k_{\omega}\frac{\prod_{k=1}^{k=m}\left(\mathrm{j}\omega+\omega_{\mathrm{a}k}\right)}{\prod_{l=1}^{l=n}\left(\mathrm{j}\omega+\omega_{\mathrm{b}l}\right)}\,,$$

která po normování kořenových činitelů čitatele $p_{\mathrm{a}k}=\dfrac{\omega}{\omega_{\mathrm{a}k}}$ a jmenovatele $p_{\mathrm{b}l}=\dfrac{\omega}{\omega_{\mathrm{b}l}}$ přejde do tvaru

$$\hat{F}_{\mathrm{z}}(\mathrm{j}\omega, p_{\mathrm{a}1}, \cdots, p_{\mathrm{a}m}, p_{\mathrm{b}1}, \cdots, p_{\mathrm{b}n}) = k_{\omega}\, \frac{\omega_{\mathrm{a}1}\omega_{\mathrm{a}2}\ldots\omega_{\mathrm{a}m}}{\omega_{\mathrm{b}1}\omega_{\mathrm{b}2}\ldots\omega_{\mathrm{b}n}}\, \frac{\left(\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_{\mathrm{a}1}}+1\right)\left(\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_{\mathrm{a}2}}+1\right)\ldots\left(\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_{\mathrm{a}m}}+1\right)}{\left(\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_{\mathrm{b}1}}+1\right)\left(\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_{\mathrm{b}2}}+1\right)\ldots\left(\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_{\mathrm{b}n}}+1\right)} =$$

$$= k_{\omega}\, \frac{\prod\limits_{k=1}^{k=m}\omega_{\mathrm{a}k}}{\prod\limits_{l=1}^{l=n}\omega_{\mathrm{b}l}}\, \frac{(1+\mathrm{j}p_{\mathrm{a}1})(1+\mathrm{j}p_{\mathrm{a}2})\ldots(1+\mathrm{j}p_{\mathrm{a}m})}{(1+\mathrm{j}p_{\mathrm{b}1})(1+\mathrm{j}p_{\mathrm{b}2})\ldots(1+\mathrm{j}p_{\mathrm{b}n})} = k_{\mathrm{P}}\, \frac{\prod\limits_{k=1}^{k=m}(1+\mathrm{j}p_{\mathrm{a}k})}{\prod\limits_{l=1}^{l=n}(1+\mathrm{j}p_{\mathrm{b}l})}.$$

Členy čitatele normované komplexní funkce $\hat{F}_{\mathrm{z}}(\mathrm{j}\omega, p_{\mathrm{a}1}, \cdots, p_{\mathrm{a}m}, p_{\mathrm{b}1}, \cdots, p_{\mathrm{b}n})$ odpovídají prototypu normované funkce $\hat{F}(p)$ z kapitoly 4.3 a členy čitatele převrácené hodnotě prototypu normované funkce $\hat{G}(p)$ z téže kapitoly čili součinu prototypů funkcí $\hat{F}(p)\cdot\hat{G}(p)$, které definují dílčí členy racionální lomené funkce vystupující v definici $\hat{F}_{\mathrm{z}}(\mathrm{j}\omega, p_{\mathrm{a}1}, \cdots, p_{\mathrm{a}m}, p_{\mathrm{b}1}, \cdots, p_{\mathrm{b}n})$.

Pro modul či amplitudu této funkce definovanou absolutní hodnotou komplexní funkce $\hat{F}_{\mathrm{z}}(\mathrm{j}\omega)$ platí

$$F_{\mathrm{z}}(\omega) = \left|\hat{F}_{\mathrm{z}}(\mathrm{j}\omega)\right| = k_{\omega}\, \frac{\left|\prod\limits_{k=1}^{k=m}(\mathrm{j}\omega+\omega_{\mathrm{a}k})\right|}{\left|\prod\limits_{l=1}^{l=n}(\mathrm{j}\omega+\omega_{\mathrm{a}l})\right|} = k_{\omega}\, \frac{\prod\limits_{k=1}^{k=m}\sqrt{\omega^2+\omega_{\mathrm{a}k}^2}}{\prod\limits_{l=1}^{l=n}\sqrt{\omega^2+\omega_{\mathrm{b}l}^2}}$$

nebo v logaritmickém měřítku

$$F_{\mathrm{zdB}}(\omega) = 20\log\left(k_{\omega}\, \frac{\prod\limits_{k=1}^{k=m}\sqrt{\omega^2+\omega_{\mathrm{a}k}^2}}{\prod\limits_{l=1}^{l=n}\sqrt{\omega^2+\omega_{\mathrm{b}l}^2}}\right) = 20\log(k_{\omega}) + 20\log\left(\sum_{k=1}^{k=m}\sqrt{\omega^2+\omega_{\mathrm{a}k}^2}\right) - 20\log\left(\sum_{l=1}^{l=n}\sqrt{\omega^2+\omega_{\mathrm{b}l}^2}\right),$$

kdy dílčí logaritmické charakteristiky můžeme s výhodou sčítat.

Pro fázovou charakteristiku platí

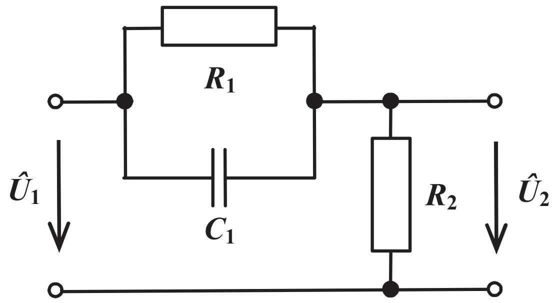
$$\varphi_{\mathrm{F_z}}(\omega) = \arg\left(\hat{F}_{\mathrm{z}}(\mathrm{j}\omega)\right) = \arg\left(\frac{a}{b}\, \frac{\prod\limits_{k=1}^{k=m}(\mathrm{j}\omega+\omega_{\mathrm{a}k})}{\prod\limits_{l=1}^{l=n}(\mathrm{j}\omega+\omega_{\mathrm{b}l})}\right) = \arg\left(\frac{a}{b}\right) + \arg\left(\prod_{k=1}^{k=m}(\mathrm{j}\omega+\omega_{\mathrm{a}k})\right) - \arg\left(\prod_{l=1}^{l=n}(\mathrm{j}\omega+\omega_{\mathrm{b}l})\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{k=m}\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{a}k}}\right) - \sum_{l=1}^{l=n}\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_{\mathrm{b}l}}\right),$$

kterou dostaneme součtem dílčích fázových charakteristik. Jelikož a, b jsou reálná čísla, je fázová charakteristika prvního členu nulová a nemá tedy vliv na výslednou charakteristiku.

Příklad 4.5.

Nakreslete asymptotickou modulovou a fázovou charakteristiku napěťového přenosu obvodu z obr. 4.29 pro parametry R_1 = 25 kΩ, R_2 = 2 kΩ, C_1 = 200 nF.



Obr. 4.29 Obvodový model kmitočtově závislého děliče napětí, příklad 4.5

♦

Napěťový přenos určíme z impedančního děliče

$$\hat{P}_\mathrm{U}(\mathrm{j}\omega)=\hat{F}_\mathrm{z}(\mathrm{j}\omega)=\frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1}=\frac{\hat{Z}_2}{\hat{Z}_1+\hat{Z}_2}=\frac{R_2}{\dfrac{R_1}{1+\mathrm{j}\omega R_1C_1}+R_2}=\frac{R_2}{\dfrac{R_1+R_2(1+\mathrm{j}\omega R_1C_1)}{1+\mathrm{j}\omega R_1C_1}}=\frac{R_2(1+\mathrm{j}\omega R_1C_1)}{R_1+R_2+\mathrm{j}\omega R_1R_2C_1},$$

kde jsme dosadili za impedance

$$\hat{Z}_1=\frac{1}{\hat{Y}_1}=\frac{1}{\dfrac{1}{R_1}+\mathrm{j}\omega C_1}=\frac{R_1}{1+\mathrm{j}\omega R_1C_1}\quad \mathrm{a}\quad \hat{Z}_2=R_2,$$

a který upravíme buď do tvaru

$$\hat{P}_\mathrm{U}(\mathrm{j}\omega)=\frac{R_2(1+\mathrm{j}\omega R_1C_1)}{R_1+R_2+\mathrm{j}\omega R_1R_2C_1}=\frac{R_2}{R_1+R_2}\,\frac{(1+\mathrm{j}\omega R_1C_1)}{\left(1+\mathrm{j}\dfrac{\omega R_1R_2C_1}{R_1+R_2}\right)}=k_\mathrm{P}\,\frac{1+\mathrm{j}p_\mathrm{a1}}{1+\mathrm{j}p_\mathrm{b1}}$$

nebo

$$\hat{P}_\mathrm{U}(\mathrm{j}\omega)=\frac{R_2(1+\mathrm{j}\omega R_1C_1)}{R_1+R_2+\mathrm{j}\omega R_1R_2C_1}=\frac{R_1R_2C_1\left(\dfrac{1}{R_1C_1}+\mathrm{j}\omega\right)}{R_1R_2C_1\left(\dfrac{R_1+R_2}{R_1R_2C_1}+\mathrm{j}\omega\right)}=\frac{\dfrac{1}{R_1C_1}+\mathrm{j}\omega}{\dfrac{R_1+R_2}{R_1R_2C_1}+\mathrm{j}\omega}=\frac{\omega_\mathrm{a1}+\mathrm{j}\omega}{\omega_\mathrm{b1}+\mathrm{j}\omega}$$

$$=\frac{\omega_\mathrm{a1}}{\omega_\mathrm{b1}}\,\frac{1+\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_\mathrm{a1}}}{1+\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_\mathrm{b1}}}=k_\mathrm{P}\,\frac{1+\mathrm{j}p_\mathrm{a1}}{1+\mathrm{j}p_\mathrm{b1}},$$

kde

$$\omega_{a1} = \frac{1}{R_1 C_1} = \frac{1}{25 10^3 \cdot 200 10^{-9}} = 200 = 0{,}2\,\mathrm{krad\cdot s^{-1}},$$

$$\omega_{b1} = \frac{R_1 + R_2}{R_2 R_1 C_1} = \frac{R_1 + R_2}{R_2}\omega_{a1} = \frac{1}{k_P}\omega_{a1} = \frac{1}{\frac{2}{27}} 200 = 2700 = 2{,}7\,\mathrm{krad\cdot s^{-1}},$$

$$k_P = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{2 10^3}{25 10^3 + 2 10^3} = \frac{2}{27} \text{ nebo } k_P = \frac{\omega_{a1}}{\omega_{b1}} = \frac{0{,}2}{2{,}7} = \frac{2}{27},$$

$$p_{a1} = \omega R_1 C_1 = \frac{\omega}{\omega_{a1}} = \frac{\omega}{200},$$

$$p_{b1} = \frac{\omega R_1 R_2 C_1}{R_1 + R_2} = \frac{\omega}{\omega_{b1}} = \frac{\omega}{2700} \text{ nebo } p_{b1} = \frac{\omega}{\omega_{b1}} = \frac{\omega}{\frac{1}{k_P}\omega_{a1}} = k_P \frac{\omega}{\omega_{a1}} = \frac{2}{27}\frac{\omega}{200}.$$

Po zavedení substituce $\hat{F}_z(j\omega) = \hat{P}_U(j\omega)$ kvůli konstrukci asymptotických charakteristik označme nově jednotlivé členy racionální lomené funkce

$$\hat{F}_z(j\omega) = \hat{P}_U(j\omega) = k_P \frac{1 + jp_{a1}}{1 + jp_{b1}} = \hat{F}_{kp}(j\omega)\frac{\hat{F}_{a1}(j\omega)}{\hat{F}_{b1}(j\omega)},$$

takže pro logaritmicko amplitudovou charakteristiku platí

$$F_{zdB}(\omega) = 20\log\left|\hat{F}_z(j\omega)\right| = 20\log\left|\hat{F}_{kp}(j\omega)\frac{\hat{F}_{a1}(j\omega)}{\hat{F}_{b1}(j\omega)}\right| = 20\log\left|\hat{F}_{kp}(j\omega)\right| + 20\log\left|\hat{F}_{a1}(j\omega)\right| - 20\log\left|\hat{F}_{b1}(j\omega)\right| =$$

$$= F_{kpdB}(\omega) + F_{a1dB}(\omega) - F_{b1dB}(\omega),$$

kde

$$F_{kpdB}(\omega) = 20\log\left|\hat{F}_{kp}(\omega)\right| = 20\log(k_P) = 20\log\left(\frac{2}{27}\right) \doteq -22{,}6\,\mathrm{dB},$$

$$F_{a1dB}(\omega) = 20\log\left|\hat{F}_{a1}(\omega)\right| = 20\log\left|1 + jp_{a1}\right| = 20\log\left(\sqrt{1 + p_{a1}^2}\right) = 20\log\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{a1}}\right)^2}\right) =$$

$$= 20\log\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{200}\right)^2}\right),$$

$$F_{b1dB}(\omega) = 20\log\left|\hat{F}_{b1}(\omega)\right| = 20\log\left|1 + jp_{b1}\right| = 20\log\left(\sqrt{1 + p_{b1}^2}\right) = 20\log\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{b1}}\right)^2}\right) =$$

$$= 20\log\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{2700}\right)^2}\right)$$

a fázovou charakteristiku

$$\varphi_{F_z}(\omega)=\arg\left(\hat{F}_z(j\omega)\right)=\arg\left(\hat{F}_{kp}(j\omega)\frac{\hat{F}_{a1}(j\omega)}{\hat{F}_{b1}(j\omega)}\right)=\arg\left(\hat{F}_{kp}(j\omega)\right)+\arg\left(\hat{F}_{a1}(j\omega)\right)-\arg\left(\hat{F}_{b1}(j\omega)\right)=$$
$$=\varphi_{kpP}(\omega)+\varphi_{a1P}(\omega)-\varphi_{b1P}(\omega),$$

kde

$$\varphi_{kpF}(\omega)=\arg\left(\hat{F}_{kp}(j\omega)\right)=\arg\left(k_p\right)=\arctan\left(\frac{0}{\frac{2}{27}}\right)=0\,°,$$

$$\varphi_{a1F}(\omega)=\arg\left(\hat{F}_{a1}(j\omega)\right)=\arg\left(1+jp_{a1}\right)=\arctan\left(p_{a1}\right)=\arctan\left(\frac{\omega}{200}\right),$$

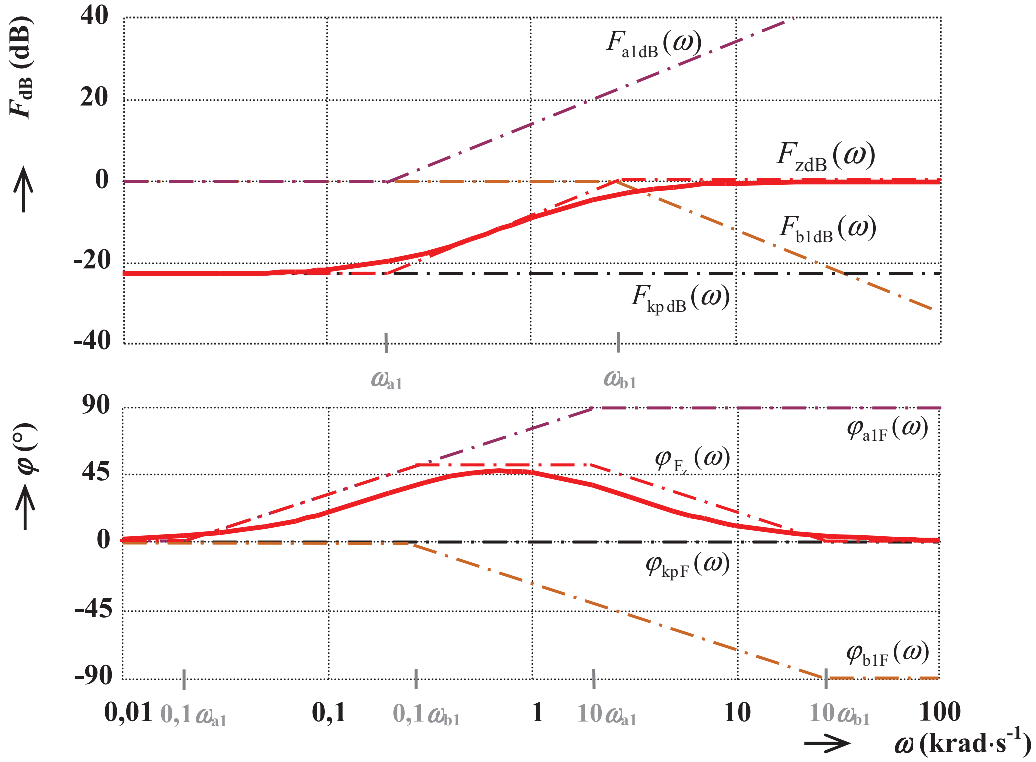
$$\varphi_{b1F}(\omega)=\arg\left(\hat{F}_{b1}(j\omega)\right)=\arg\left(1+jp_{b1}\right)=\arctan\left(p_{b1}\right)=\arctan\left(\frac{\omega}{2700}\right).$$

Asymptoty amplitudových charakteristik v semilogaritmických souřadnicích konstruujeme tak, že dílčí funkce vyneseme do grafu. Amplituda funkce $F_{kpdB}(\omega)$ nezávisí na kmitočtu, je to konstantní funkce s hodnotou -22,6 dB. Asymptoty funkce $F_{a1dB}(\omega)$ jsou tvořeny dvěma přímkami, které se protínají v bodě daném kmitočtem ω_{a1} a amplitudou 0 dB. První část asymptoty je tedy konstantní funkce s amplitudou 0 dB, která aproximuje funkci $F_{a1dB}(\omega)$ pro úhlové kmitočty $\omega << \omega_{a1}$, kdy platí $F_{a1dB}(\omega)=20\log(1)=0\,\mathrm{dB}$. Druhá část asymptoty je přímka, která aproximuje funkci $F_{a1dB}(\omega)$ pro úhlové kmitočty $\omega >> \omega_{a1}$, kdy platí $F_{a1dB}(\omega)=20\log\left(\frac{\omega}{\omega_{a1}}\right)=20\log\left(\frac{\omega}{200}\right)$. Přímka má počátek v bodě daném kmitočtem ω_{a1} a amplitudou 0 dB a má sklon +20 dB/dek. Podobně asymptoty funkce $F_{b1dB}(\omega)$ jsou tvořeny dvěma přímkami, které se protínají v bodě daném kmitočtem ω_{b1} a amplitudou 0 dB. První část asymptoty je tedy konstantní funkce s amplitudou 0 dB, která aproximuje funkci $F_{b1dB}(\omega)$ pro úhlové kmitočty $\omega << \omega_{b1}$, kdy platí $F_{b1dB}(\omega)=20\log(1)=0\,\mathrm{dB}$. Druhá část asymptoty je přímka, která aproximuje funkci $F_{b1dB}(\omega)$ pro úhlové kmitočty $\omega >> \omega_{b1}$, kdy platí $F_{b1dB}(\omega)=20\log\left(\frac{\omega}{\omega_{b1}}\right)=20\log\left(\frac{\omega}{200}\right)$. Přímka má počátek v bodě daném kmitočtem ω_{b1} a amplitudou 0 dB a má sklon -20 dB/dek.

Asymptoty fázových charakteristik v semilogaritmických souřadnicích konstruujeme tak, že dílčí funkce opět vyneseme do grafu. Fáze funkce $\varphi_{kpF}(\omega)$ nezávisí na kmitočtu, je to konstantní funkce s hodnotou 0 °. Asymptoty funkce $\varphi_{a1F}(\omega)$ jsou tvořeny třemi přímkami. První část asymptoty je konstantní funkce s fází 0 °, která aproximuje funkci $\varphi_{a1F}(\omega)$ pro úhlové kmitočty $\omega << 0{,}1\omega_{a1}$, kdy platí $\varphi_{a1P}(\omega)=0\,°$. Druhá část asymptoty je přímka, která aproximuje funkci $\varphi_{a1F}(\omega)$ pro úhlové kmitočty $\omega \in (0{,}1\omega_{a1}, 10\omega_{a1})$, kdy platí $\varphi_{a1F}(\omega)=90\log\left(\frac{\omega}{\omega_{a1}}\right)+90\,°=90\log\left(\frac{\omega}{200}\right)+90\,°$, která má semilogaritmických souřadnicích sklon 45 °/dek. Třetí část asymptoty je konstantní funkce s fází 90 °, která aproximuje funkci $\varphi_{a1F}(\omega)$ pro úhlové kmitočty $\omega >> 10\omega_{a1}$, kdy platí $\varphi_{a1F}(\omega)=90\,°$. Podobně asymptoty funkce $\varphi_{b1F}(\omega)$ jsou tvořeny třemi přímkami. První část asymptoty je konstantní funkce s fází 0 °, která aproximuje funkci $\varphi_{b1F}(\omega)$ pro úhlové kmitočty $\omega << 0{,}1\omega_{b1}$, kdy platí $\varphi_{b1F}(\omega)=0\,°$.

Druhá část asymptoty je přímka, která aproximuje funkci $\varphi_{\mathrm{a1P}}(\omega)$ pro úhlové kmitočty $\omega \in (0{,}1\omega_{\mathrm{b1}}, 10\omega_{\mathrm{b1}})$, kdy platí $\varphi_{\mathrm{b1F}}(\omega) = -90\log\left(\dfrac{\omega}{\omega_{\mathrm{b1}}}\right) - 90\,° = -90\log\left(\dfrac{\omega}{2700}\right) - 90\,°$, která má semilogaritmických souřadnicích sklon -45 °/dek. Třetí část asymptoty je konstantní funkce s fází $-90\,°$, která aproximuje funkci $\varphi_{\mathrm{b1F}}(\omega)$ pro úhlové kmitočty $\omega >> 10\omega_{\mathrm{b1}}$, kdy platí $\varphi_{\mathrm{b1F}}(\omega) = 90\,°$.

Výslednou asymptotickou logaritmicko amplitudovou a fázovou charakteristiku získáme superpozicí příslušných tří diskutovaných funkcí, viz obr. 4.30.



Obr. 4.30 Konstrukce Bodeho amplitudové a fázové charakteristiky napěťového přenosu obvodu z obr. 4.29, příklad 4.5

Σ Shrnutí pojmů 4.4.

Bodeho logaritmické amplitudové a fázové charakteristiky jsou asymptotické charakteristiky aproximující skutečné funkce, které zobrazujeme v semilogaritmických souřadnicích, kdy kmitočtová osa má logaritmické měřítko. Asymptoty jsou přímky, které u jednoduchých tvarů racionálních lomených funkcí jdou snadno a rychle konstruovat a poskytují orientační představu o chování kmitočtově závislých obvodů. Amplitudová osa je logaritmická, jednotka osy již není bezrozměrná, ale je cejchovaná v decibelech a má lineární měřítko, které umožňuje zobrazit velký rozsah amplitud funkcí. Logaritmicko amplitudová a fázová charakteristika prototypu komplexní funkce $\hat{F}_{\mathrm{dB}}(p)$ a jejího inverzního tvaru $\hat{G}_{\mathrm{dB}}(p)$ jsou zrcadlově souměrné kolem osy kmitočtu.

? Otázky 4.4.

1. Co jsou to Bodeho charakteristiky?

2. V jakých souřadnicích jsou kresleny Bodeho charakteristiky?
3. Jakou jednotku a měřítko má Bodeho amplitudová charakteristika?
4. Jakou jednotku a měřítko má Bodeho fázová charakteristika?
5. Proč vynášíme kmitočtovou osu Bodeho charakteristik v logaritmickém měřítku?
6. Proč je výhodné zobrazovat grafy Bodeho charakteristik v semilogaritmickém měřítku?
7. Jaká je výhoda zobrazení amplitudové osy v logaritmickém měřítku?
8. Co mají společné a v čem se liší logaritmicko amplitudová charakteristika normované komplexní funkce $\hat{F}_{\mathrm{dB}}(p)$ a jí odpovídající inverzní funkce $\hat{G}_{\mathrm{dB}}(p)$?
9. Jaký je vztah mezi fázovou charakteristikou normované komplexní funkce $\hat{F}_{\mathrm{dB}}(p)$ a její inverzní funkcí $\hat{G}_{\mathrm{dB}}(p)$?
10. Jaký je obecný postup konstrukce asymptot Bodeho charakteristik?
11. Co jsou to nuly a póly přenosové funkce?

Úloha k řešení 4.4.

Určete komplexní hodnoty funkce $\hat{F}(p) = \mathrm{j}^2 p^2 + \mathrm{j}p\, 2a + 1$, její velikost a fázi pro hodnoty parametrů p = 10, p = 1 a p = 0,1 a hodnoty parametru a = 10, a = 0,1.

Řešení:

Hodnoty 10 a 0,1 parametru p odpovídají u normované kmitočtové charakteristiky hodnotě kmitočtu o dekádu vyššímu a o dekádu nižšímu vůči hodnotě normovaného kmitočtu tj. hodnotě parametru p = 1.

Funkční hodnoty jsou uvedeny v tab. 4.1:

Tab. 4.1 Tabulka vypočtených hodnot, úloha k řešení 4.4

p	a	$\hat{F}(p)$	$F(p)$	$\arg(\hat{F}(p))$
0,1	10	0,99+j2	2,2316	63,66°
1	10	j20	20	90°
10	10	-99+ j200	223,16	-63,66°
0,1	1	0,99+j0,2	1,01	11,42°
1	1	j2	2	90°
10	1	-99+j20	101	-11,42°

5. Nastavení pracovního bodu nelineárního dvojbranu

Motivace Po prostudování této kapitoly budete umět

- popsat nelineární dvojbran sítí AV a VA charakteristik
- definovat statické a diferenciální parametry nelineárního dvojbranu
- nakreslit linearizovaný model nelineárního dvojbranu
- nastavit pracovní bod nelineárního dvojbranu
- navrhnout a popsat tranzistorový zesilovač třídy A

5.1. Bipolární tranzistor jako dvojbran

K zesilování signálů se používají elektronické prvky, jejichž charakteristiky jsou nelineární. Mezi základní elektronické součástky patří bipolární tranzistor, jehož vlastnosti v okolí pracovního bodu modelujeme aktivním, lineárním dvojbranem. Vzhledem k tomu, že se soustředíme na dvojbranový přístup k modelování tranzistoru, nemusíme se podrobně zabývat fyzikálním principem činnosti tranzistoru a konstatujme jen, že bipolární tranzistor je elektronická součástka tvořená třemi polovodivými vrstvami, vyvedenými na elektrody – bázi (B), emitor (E) a kolektor (C). Vrstvy vytvořené na krystalu polovodiče jsou odděleny dvěma polovodivými přechody, jejichž vodivost řídíme polaritou přiloženého zdroje napětí. V aktivním režimu je jeden přechod tranzistoru polován propustně a druhý závěrně. V polovodičové struktuře tranzistoru vzniká tranzistorový jev, jehož podstata spočívá v tom, že velikost proudu procházejícího závěrně pólovaným přechodem je výrazně ovlivňována napětím resp. proudem propustně pólovaného přechodu. Z tohoto důvodu ho můžeme přirozeně modelovat zdrojem proudu řízeným proudem a pro jeho náhradní obvodové schéma použít odporový dvojbran popsaný charakteristickými rovnicemi s *h* parametry, a to nejen v oblasti nízkých kmitočtů (do 0,1 MHz), ale i středních kmitočtů (až jednotky MHz), kdy se ještě významně neprojeví parazitní kapacity a indukčnosti tranzistoru. Dvojbran je to však degenerovaný, neboť má vždy jednu elektrodu společnou pro vstupní a výstupní obvod. Za účelem linearizace charakteristik tohoto nelineárního dvojbranu a předpokladu periodických průběhů obvodových veličin v ustáleném stavu, můžeme rozložit vstupní napětí u_1 a proud i_1 a výstupní napětí u_2 a proud i_2 na složku stejnosměrnou, rozlišenou indexem $_{\mathrm{DC}}$, a složku střídavou, s indexem $_{\mathrm{AC}}$, tedy

$$u_1 = U_{1\mathrm{DC}} + u_{1\mathrm{AC}}, \qquad i_1 = I_{1\mathrm{DC}} + i_{1\mathrm{AC}},$$

$$u_2 = U_{2\mathrm{DC}} + u_{2\mathrm{AC}}, \qquad i_2 = I_{2\mathrm{DC}} + i_{2\mathrm{AC}}.$$

Stejnosměrné složky obvodových veličin odpovídají souřadnicím klidového pracovního bodu *P* tranzistoru, viz obr. 5.11 a střídavé složky působí změnu polohy pracovního bodu.

❑ Statické parametry tranzistoru

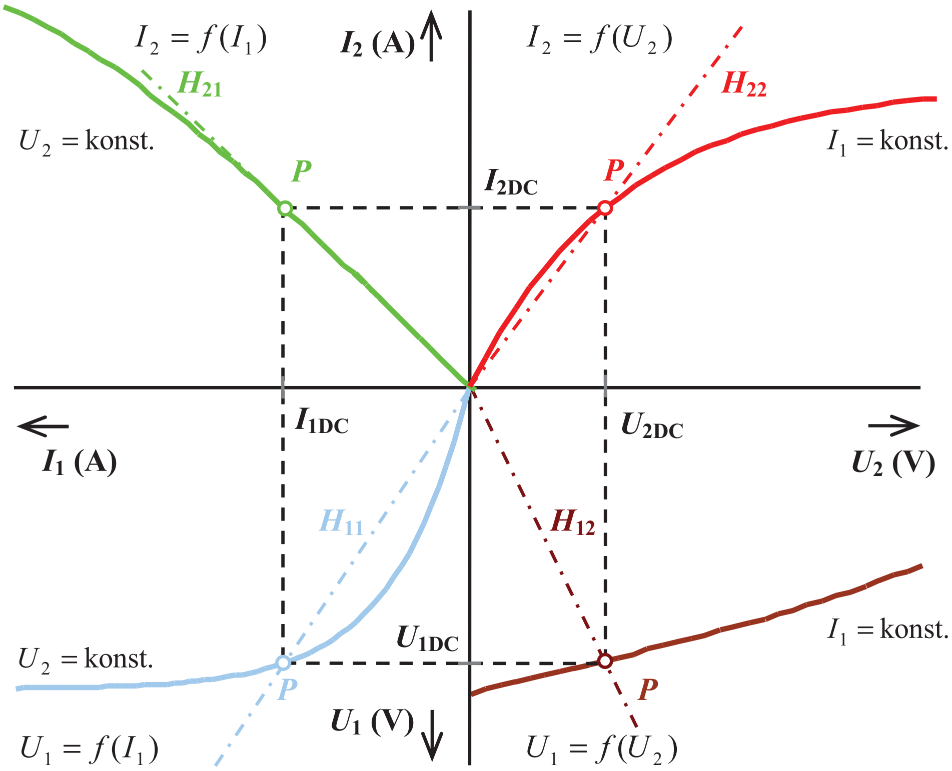
Statické (stejnosměrné) vlastnosti bipolárního tranzistoru, nejčastěji popisujeme čtyřmi hlavními nelineárními statickými charakteristikami (z 15-ti možných závislostí dvojic veličin tranzistoru tj. 3 proudy a 3 napětí), které zachycují vztahy mezi třemi veličinami tranzistoru, když dvě veličiny volíme za závislé a třetí veličinu jako parametr. Jsou to

vstupní charakteristika $U_1 = f(I_1)$ při $U_2 = \mathrm{konst.}$,

výstupní charakteristika $I_2 = f(U_2)$ při $I_1 = \mathrm{konst.}$,

převodní proudová charakteristika $I_2 = f(I_1)$ při $U_2 = \mathrm{konst.}$,

převodní napěťová charakteristika $U_1 = f(U_2)$ při $I_1 = \mathrm{konst.}$, zobrazené na obr. 5.1. Není-li tranzistor buzen střídavým signálem, tj. je-li nastaven pouze do klidového pracovního bodu, platí pro vstupní a výstupní veličiny dvojbranu



Obr. 5.1 Statické charakteristiky a parametry nelineárního dvojbranu

$$u_1 = U_{1DC}, \qquad i_1 = I_{1DC}, \qquad u_2 = U_{2DC}, \qquad i_2 = I_{2DC}.$$

Statický model bipolárního tranzistoru je popsán stejnosměrnými rovnicemi s *H* parametry, které jsou definovány v libovolném bodě s nenulovou hodnotou příslušné statické charakteristiky, tudíž i v pracovním bodě *P* či přesněji v pracovních bodech jednotlivých charakteristik

$$U_{1DC} = H_{11} I_{1DC} + H_{12} U_{2DC},$$

$$I_{2DC} = H_{21} I_{1DC} + H_{22} U_{2DC}.$$

Statické *H* parametry definované provozními stavy dvojbranu, jejichž charakteristiky jsou zobrazené na obr. 5.1 čerchovanými polopřímkami (sečnami) jsou dány

$$H_{11} = \left.\frac{U_{1DC}}{I_{1DC}}\right|_{U_{2DC}=0\,\text{V}}$$ - vstupní stejnosměrný odpor nakrátko,

$$H_{12} = \left.\frac{U_{1DC}}{U_{2DC}}\right|_{I_{1DC}=0\,\text{A}}$$ - zpětný stejnosměrný napěťový přenos naprázdno,

$$H_{21} = \left.\frac{I_{2DC}}{I_{1DC}}\right|_{U_{2DC}=0\,\text{V}}$$ - zpětný stejnosměrný proudový přenos nakrátko,

$$H_{22} = \left.\frac{I_{2DC}}{U_{2DC}}\right|_{I_{1DC}=0\,\text{A}}$$ - výstupní stejnosměrná vodivost naprázdno.

Poznamenejme, že v odborné literatuře se stejnosměrné parametry většinou označují malým písmenem *h*, když se k jejich indexu přidávají kvůli rozlišení podle zapojení tranzistoru velká písmena E, C, B. Příkladem je značení stejnosměrného proudového zesilovacího činitele v zapojení SE $h_{21\mathrm{E}} = H_{21\mathrm{E}}$.

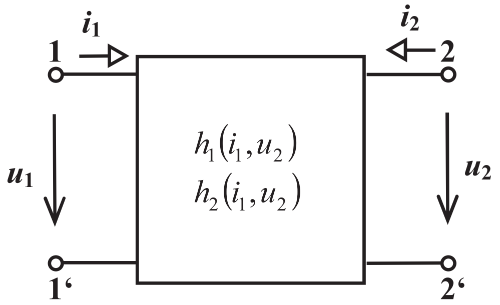
❑ Diferenciální parametry tranzistoru

Diferenciální (střídavé) parametry tranzistoru jsou definovány pro malé změny signálu v okolí pracovního bodu, které působí jeho pohyb v síti parametrických statických charakteristik, viz obr. 5.11. Tranzistor modelujeme soustavou nelineárních diferenciálních rovnic. Zanedbáme-li vliv parazitních parametrů tranzistoru, nebudou vztahy mezi obvodovými veličinami obsahovat časové změny a vystačíme tak pouze se soustavou obyčejných nelineárních rovnic dvojbranu či jeho charakteristik. Soustava nelineárních rovnic je definována

$$u_1 = h_1(i_1, u_2),$$

$$i_2 = h_2(i_1, u_2)$$

a odpovídající blokové schéma dvojbranu na obr. 5.2.



Obr. 5.2 Blokové schéma nelineárního dvojbranu

Analytické řešení soustavy nelineárních rovnic či grafické řešení nelineárních charakteristik je složité, a proto se ho snažíme zjednodušit tím, že nelineární funkce h_1, h_2 či charakteristiky linearizujeme v okolí pracovního bodu *P*, což je v praxi dostatečně přesný způsob řešení obvodu právě pro malé změny obvodových veličin. Poznamenejme, že jsou-li tyto změny teoreticky infinitisimálně malé, můžeme je popsat diferenciály $\lim \mathrm{d}u_1 \to 0, \lim \mathrm{d}i_1 \to 0, \lim \mathrm{d}u_2 \to 0, \lim \mathrm{d}i_2 \to 0$.

Grafická linearizace spočívá v nahrazení křivočarých charakteristik v uvažovaném pracovním bodě *P* tečnami, viz obr. 5.3. Analytická linearizace je založena na diferenciaci soustavy nelineárních rovnic dvojbranu v okolí pracovního bodu *P* (totální diferenciál), díky které získáme diferenciály (míry změn) závislých veličin dvojbranu $\mathrm{d}u_1$ a $\mathrm{d}i_2$ jako funkci infinitisimálně malých změn nezávislých veličin dvojbranu $\mathrm{d}i_1$ a $\mathrm{d}u_2$, takže platí

$$\mathrm{d}u_1 = \left.\frac{\partial u_1}{\partial i_1}\right|_P \mathrm{d}i_1 + \left.\frac{\partial u_1}{\partial u_2}\right|_P \mathrm{d}u_2,$$

$$\mathrm{d}i_2 = \left.\frac{\partial i_2}{\partial i_1}\right|_P \mathrm{d}i_1 + \left.\frac{\partial i_2}{\partial u_2}\right|_P \mathrm{d}u_2.$$

Zavedením diferenciálních *h* parametrů potom můžeme zapsat změnu závislých veličin dvojbranu

$$\mathrm{d}u_1 = h_{11}\,\mathrm{d}i_1 + h_{12}\,\mathrm{d}u_2,$$

$$\mathrm{d}i_2 = h_{21}\,\mathrm{d}i_1 + h_{22}\,\mathrm{d}u_2,$$

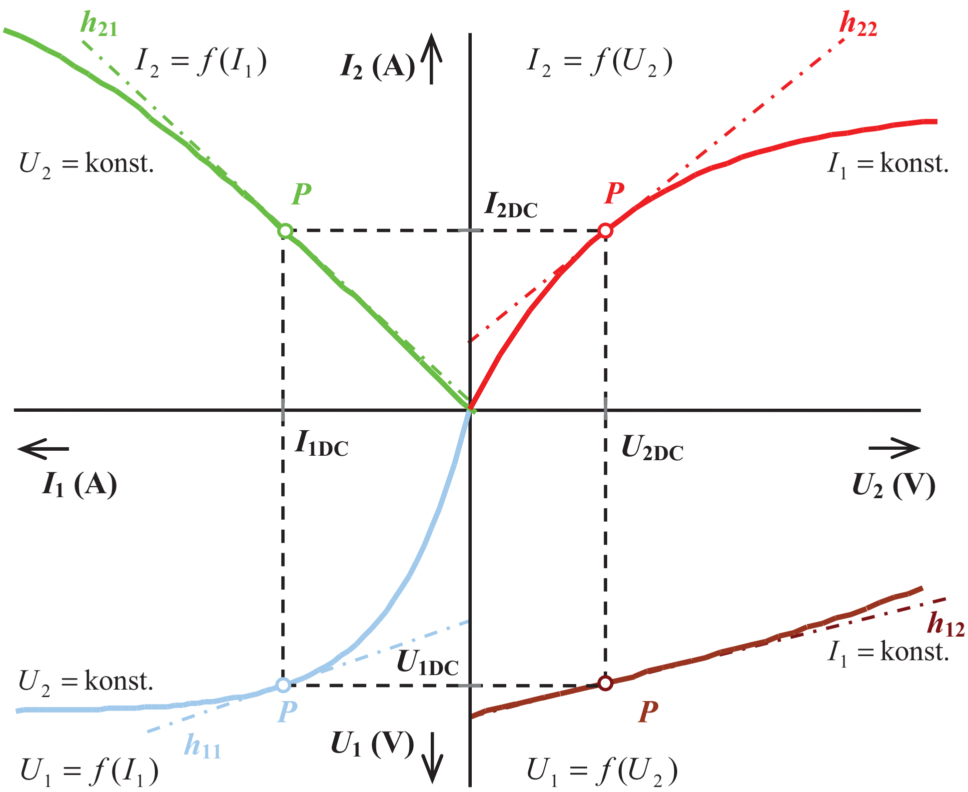
kde jsou:

$h_{11} = \left.\dfrac{\partial u_1}{\partial i_1}\right|_P$ - vstupní diferenciální odpor nakrátko v bodě P při $\mathrm{d}u_2 = 0\,\mathrm{V}$, tj. při $u_2 = U_2 = \text{konst.}$,

$h_{12} = \left.\dfrac{\partial u_1}{\partial u_2}\right|_P$ - zpětný diferenciální napěťový přenos naprázdno v bodě P při $\mathrm{d}i_1 = 0\,\mathrm{A}$, tj. při $i_1 = I_1 = \text{konst.}$,

$h_{21} = \left.\dfrac{\partial i_2}{\partial i_1}\right|_P$ - zpětný diferenciální proudový přenos nakrátko v bodě P při $\mathrm{d}u_2 = 0\,\mathrm{V}$, tj. při $u_2 = U_2 = \text{konst.}$,

$h_{22} = \left.\dfrac{\partial i_2}{\partial u_2}\right|_P$ - výstupní diferenciální vodivost naprázdno v pracovním bodě P při $\mathrm{d}i_1 = 0\,\mathrm{A}$, tj. při $i_1 = I_1 = \text{konst.}$



Obr. 5.3 Diferenciální parametry nelineárního dvojbranu

Chápeme-li změny polohy pracovního bodu P jako projev střídavých složek obvodových veličin, můžeme diferenciály, tj. změny obvodových veličin nahradit právě střídavými složkami veličin a linearizované rovnice nakonec zapsat

$$u_{1\mathrm{AC}} = h_{11} i_{1\mathrm{AC}} + h_{12} u_{2\mathrm{AC}},$$

$$i_{2\mathrm{AC}} = h_{21} i_{1\mathrm{AC}} + h_{22} u_{2\mathrm{AC}},$$

kde jsou:

$h_{11} = \dfrac{u_{1AC}}{i_{1AC}}$ - vstupní střídavý (diferenciální) odpor nakrátko,

$h_{12} = \dfrac{u_{1AC}}{u_{2AC}}$ - zpětný střídavý (diferenciální) napěťový přenos naprázdno,

$h_{21} = \dfrac{i_{2AC}}{i_{1AC}}$ - zpětný střídavý (diferenciální) proudový přenos nakrátko,

$h_{22} = \dfrac{i_{2AC}}{u_{2AC}}$ - výstupní střídavá (diferenciální) vodivost naprázdno.

Jak již bylo zmíněno, tyto rovnice platí pro malé změny obvodových veličin. Na jejich základě potom můžeme sestavit malosignálový model tranzistoru. Dosazením do těchto rovnic za střídavé složky, vyjádřené rozdílem příslušné obvodové veličiny a její stejnosměrné složky, dostaneme rovnice úplného linearizovaného modelu bipolárního tranzistoru

$$u_1 - U_{1DC} = h_{11}(i_1 - I_{1DC}) + h_{12}(u_2 - U_{2DC}),$$

$$i_2 - I_{2DC} = h_{21}(i_1 - I_{1DC}) + h_{22}(u_2 - U_{2DC}),$$

které po jednoduché úpravě můžeme zapsat ve tvaru

$$u_1 = U_1 + h_{11} i_1 + h_{12} u_2,$$

$$i_2 = I_2 + h_{21} i_1 + h_{22} u_2,$$

kde

$$U_1 = U_{1DC} - h_{11} I_{1DC} - h_{12} U_{2DC},$$

$$I_2 = I_{2DC} - h_{21} I_{1DC} - h_{22} U_{2DC}.$$

Tento obvodový model je platný pro všechna zapojení tranzistoru (SE, SC, SB), která se však liší hodnotou střídavých (diferenciálních) parametrů *h*, z tohoto důvodu se *h* parametrům přidávají kvůli rozlišení k indexu podle způsobu zapojení malá písmena e, c, b. Jsou-li tato písmena velká, jedná se o parametry stejnosměrné, jak již bylo zmíněno výše.

Příklad 5.1.

Nakreslete náhradní obvodové schéma úplného linearizovaného modelu bipolárního tranzistoru.

♦

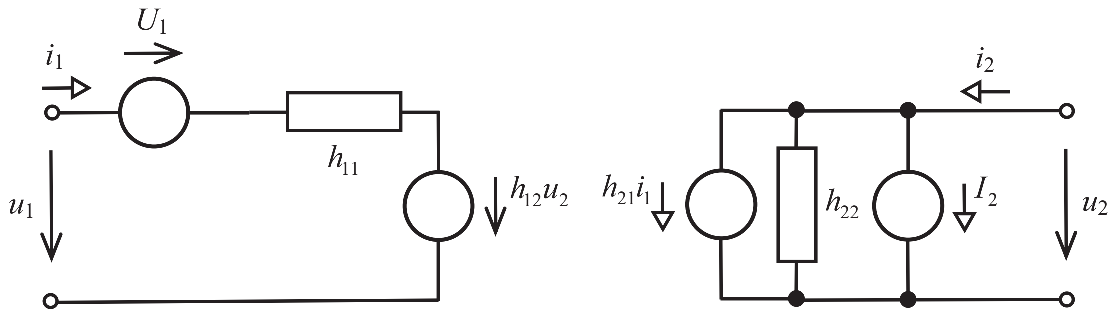
Postup sestavení obvodového modelu je stejný jako u modelu dvojbranu se smíšenými *h* parametry. První rovnice linearizovaného dvojbranu je

$$u_1 = U_1 + h_{11} i_1 + h_{12} u_2,$$

kterou modelujeme v duchu 2. Kirchhoffova zákona sériovým řazením nezávislého stejnosměrného zdroje o hodnotě U_1, rezistoru o hodnotě h_{11} a řízeného zdroje napětí o hodnotě $h_{12} u_2$. Druhá rovnice linearizovaného dvojbranu je

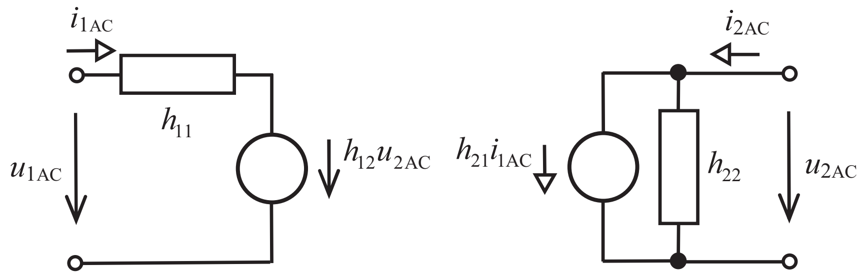
$$i_2 = I_2 + h_{21} i_1 + h_{22} u_2,$$

kterou modelujeme v duchu 1. Kirchhoffova zákona paralelním řazením nezávislého stejnosměrného zdroje o hodnotě I_2, vodivosti o hodnotě h_{22} a řízeného zdroje proudu o hodnotě $h_{21} i_1$. Obvodový schéma tohoto modelu je na obr. 5.4.



Obr. 5.4 Úplné obvodové schéma linearizovaného modelu bipolárního tranzistoru, příklad 5.1

Stejnosměrný zdroj napětí U_1 se chová pro střídavý signál jako zkrat a stejnosměrný zdroj proudu I_2 jako rozpojená větev, takže pro střídavý signál platí náhradní schéma na obr. 5.5.



Obr. 5.5 Obvodové schéma linearizovaného modelu bipolárního tranzistoru pro střídavý signál, příklad 5.1

❑ Přenosy a impedance tranzistoru

Jak jsme se již zmínili, budeme se zabývat pouze odporovým modelem bipolárního tranzistoru, k jehož popisu používáme okamžité hodnoty střídavých složek vstupních a výstupních veličin tranzistoru a reálné hodnoty *h* parametrů. Definice jeho přenosů i vstupní a výstupní impedance by tak mohly být reálné, pokud v náhradním modelu na obr. 5.6 budou reálné i vnitřní impedance $\hat{Z}_\mathrm{i}$ zdroje napětí $\hat{U}_\mathrm{i}$ a zatěžovací impedance tranzistoru $\hat{Z}_\mathrm{s}$, což je častý případ využití tranzistorového zesilovače v praxi. Přesto dále uvažujme zcela obecně komplexní popis obvodu s tranzistorem, kde střídavé složky veličin tranzistoru nahradíme komplexními efektivními hodnotami, čímž automaticky předpokládáme, že průběhy těchto veličin jsou harmonické a nemá tedy smysl v jejich označení ponechávat na pozici indexu symbol AC. *h* parametry budeme zapisovat také jako komplexní čísla, i když mají jen reálnou část. Platí tedy následující korespondence

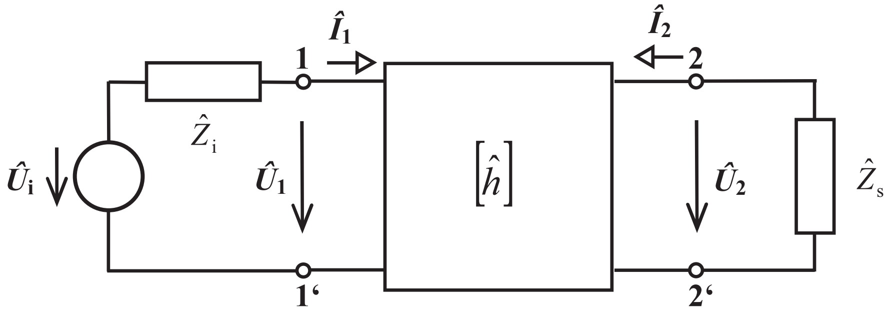
$$u_{1\mathrm{AC}} \to \hat{U}_1, \qquad i_{1\mathrm{AC}} \to \hat{I}_1, \qquad u_{2\mathrm{AC}} \to \hat{U}_2, \qquad i_{2\mathrm{AC}} \to \hat{I}_2$$

a rovnosti

$$\hat{h}_{11} = h_{11}, \qquad \hat{h}_{12} = h_{12}, \qquad \hat{h}_{21} = h_{21}, \qquad \hat{h}_{22} = h_{22}.$$

(Střídavý) napěťový přenos tranzistoru je definován $\hat{P}_\mathrm{U} = \dfrac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1}$, ale v literatuře zabývající se problematikou zesilovačů je obvykle označován $\hat{A}_\mathrm{U}$ a je nazýván činitelem zesílení napětí, takže platí

$$\hat{A}_\mathrm{U} = \hat{P}_\mathrm{U} = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1}.$$



Obr. 5.6 Model zatíženého, linearizovaného dvojbranu, buzeného ze skutečného zdroje napětí

Hodnotu napěťového přenosu tranzistoru určíme úpravou jeho linearizovaných rovnic

$$\hat{U}_1 = \hat{h}_{11}\hat{I}_1 + \hat{h}_{12}\hat{U}_2\,,$$

$$\hat{I}_2 = \hat{h}_{21}\hat{I}_1 + \hat{h}_{22}\hat{U}_2\,.$$

Vynásobením 1. rovnice parametrem $\hat{h}_{21}$ a 2. rovnice parametru $-\hat{h}_{11}$ a následným jejich sečtením, eliminujeme z rovnic vstupní proud $\hat{I}_1$, čímž obdržíme rovnici

$$\hat{h}_{21}\hat{U}_1 - \hat{h}_{11}\hat{I}_2 = \hat{h}_{21}\hat{h}_{12}\hat{U}_2 - \hat{h}_{11}\hat{h}_{22}\hat{U}_2\,,$$

do které dosadíme z zobecněného Ohmova zákona za výstupní proud $\hat{I}_2 = -\dfrac{\hat{U}_2}{\hat{Z}_\mathrm{s}}$ a upravíme do tvaru

$$\frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = \frac{\hat{h}_{21}}{\hat{h}_{21}\hat{h}_{12} - \hat{h}_{11}\hat{h}_{22} - \hat{h}_{11}\dfrac{1}{\hat{Z}_\mathrm{s}}} = \frac{\hat{h}_{21}\hat{Z}_\mathrm{s}}{\hat{h}_{12}\hat{h}_{21}\hat{Z}_\mathrm{s} - \hat{h}_{11}\hat{h}_{22}\hat{Z}_\mathrm{s} - \hat{h}_{11}} = \frac{-\hat{h}_{21}\hat{Z}_\mathrm{s}}{\hat{h}_{11} + \left(\hat{h}_{11}\hat{h}_{22} - \hat{h}_{12}\hat{h}_{21}\right)\hat{Z}_\mathrm{s}}\,,$$

což je obecný vztah pro napěťový přenos $\hat{A}_\mathrm{U}$.

(Střídavý) proudový přenos tranzistoru resp. činitel zesílení proudu je definován

$$\hat{A}_\mathrm{I} = \hat{P}_\mathrm{I} = \frac{\hat{I}_2}{\hat{I}_1}\,.$$

Hodnotu proudového přenosu tranzistoru určíme z 2. rovnice smíšeného modelu bipolárního tranzistoru, kam za výstupní napětí dosadíme $\hat{U}_2 = -\hat{Z}_\mathrm{s}\hat{I}_2$, čímž získáme rovnici $\hat{I}_2 = \hat{h}_{21}\hat{I}_1 + \hat{h}_{22}\hat{Z}_\mathrm{s}\left(-\hat{I}_2\right)$ a po její úpravě i poměr

$$\frac{\hat{I}_2}{\hat{I}_1} = \frac{\hat{h}_{21}}{1 + \hat{h}_{22}\hat{Z}_\mathrm{s}}\,.$$

Komplexní výkonový přenos resp. činitelem zesílení výkonu je potom definován součinem napěťového a komplexně sdruženého proudového přenosu

$$\hat{A}_\mathrm{P} = \hat{A}_\mathrm{U}\hat{A}_\mathrm{I}^* = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1}\frac{\hat{I}_2^*}{\hat{I}_1^*} = \frac{U_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_{\mathrm{u}2}}}{U_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_{\mathrm{u}1}}}\frac{I_2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi_{\mathrm{i}2}}}{I_1\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi_{\mathrm{i}1}}} = \frac{U_2 I_2}{U_1 I_1}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\varphi_{\mathrm{u}2} - \varphi_{\mathrm{i}2}\right)}}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\varphi_{\mathrm{u}1} - \varphi_{\mathrm{i}1}\right)}} = \frac{\hat{S}_2}{\hat{S}_1}\,.$$

Poznamenejme, že proudové zesílení dosahuje maximální hodnoty při minimální hodnotě zátěže, tedy ve stavu nakrátko. Napěťové zesílení dosahuje maximální hodnoty při velké hodnotě zátěže, tedy přibližně ve stavu naprázdno. Výkonové zesílení dosahuje maximální hodnoty, je-li impedance zátěže impedančně přizpůsobena impedanci generátoru.

Vstupní impedanci určíme úpravou linearizovaných rovnic tranzistoru do kaskádního tvaru charakteristických rovnic dvojbranu tak, že z 2. rovnice si vyjádříme proud $\hat{I}_1$ a dosadíme jej do rovnice 1. rovnice

$$\hat{I}_1 = \frac{\hat{I}_2 - \hat{h}_{22}\hat{U}_2}{\hat{h}_{21}} = -\frac{1}{\hat{h}_{21}}\left(\hat{h}_{22}\hat{U}_2 - \hat{I}_2\right),$$

$$\hat{U}_1 = \hat{h}_{11}\hat{I}_1 + \hat{h}_{12}\hat{U}_2 = \hat{h}_{11}\left(-\frac{1}{\hat{h}_{21}}\left(\hat{h}_{22}\hat{U}_2 - \hat{I}_2\right)\right) + \hat{h}_{12}\hat{U}_2 = -\frac{1}{\hat{h}_{21}}\left[\left(\hat{h}_{11}\hat{h}_{22} - \hat{h}_{12}\hat{h}_{21}\right)\hat{U}_2 - \hat{h}_{11}\hat{I}_2\right],$$

takže pro vstupní impedanci $\hat{Z}_1$ platí po úpravě a dosazení za impedanci zátěže $\hat{Z}_s = \dfrac{\hat{U}_2}{-\hat{I}_2}$

$$\hat{Z}_1 = \frac{\hat{U}_1}{\hat{I}_1} = \frac{-\dfrac{1}{\hat{h}_{21}}\left[\left(\hat{h}_{11}\hat{h}_{22} - \hat{h}_{12}\hat{h}_{21}\right)\hat{U}_2 - \hat{h}_{11}\hat{I}_2\right]}{-\dfrac{1}{\hat{h}_{21}}\left(\hat{h}_{22}\hat{U}_2 - \hat{I}_2\right)} = \frac{-\hat{I}_2}{-\hat{I}_2}\,\frac{\left(\hat{h}_{11}\hat{h}_{22} - \hat{h}_{12}\hat{h}_{21}\right)\hat{Z}_s + \hat{h}_{11}}{\hat{h}_{22}\hat{Z}_s + 1} = \frac{\left(\hat{h}_{11}\hat{h}_{22} - \hat{h}_{12}\hat{h}_{21}\right)\hat{Z}_s + \hat{h}_{11}}{\hat{h}_{22}\hat{Z}_s + 1}.$$

Příklad 5.2.

Určete vstupní impedanci bipolárního tranzistoru zatíženého impedancí $\hat{Z}_s$ užitím vztahu pro vstupní impedanci kaskádního modelu dvojbranu.

♦

Vstupní impedance zatíženého kaskádního modelu dvojbranu je definována

$$\hat{Z}_1 = \frac{\hat{a}_{11}\hat{Z}_s + \hat{a}_{12}}{\hat{a}_{21}\hat{Z}_s + \hat{a}_{22}},$$

když za kaskádní parametry dosadíme odpovídající hodnoty $\hat{h}$ parametrů linearizovaných rovnic tranzistoru upravených do kaskádního tvaru viz tab. 3.1 v kapitole 3.3, dostaneme soustavu rovnic

$$\hat{U}_1 = -\frac{1}{\hat{h}_{21}}\left[\left(\hat{h}_{11}\hat{h}_{22} - \hat{h}_{12}\hat{h}_{21}\right)\hat{U}_2 + \hat{h}_{11}\left(-\hat{I}_2\right)\right],$$

$$\hat{I}_1 = -\frac{1}{\hat{h}_{21}}\left[\hat{h}_{22}\hat{U}_2 + \left(-\hat{I}_2\right)\right],$$

kde platí

$$\hat{a}_{11} = -\frac{\hat{h}_{11}\hat{h}_{22} - \hat{h}_{12}\hat{h}_{21}}{\hat{h}_{21}}, \qquad \hat{a}_{12} = -\frac{\hat{h}_{11}}{\hat{h}_{21}}, \quad \hat{a}_{21} = -\frac{\hat{h}_{22}}{\hat{h}_{21}}, \quad \hat{a}_{22} = -\frac{1}{\hat{h}_{21}}.$$

Dosazením kaskádních rovnic dvojbranu do definice vstupní impedance dvojbranu $\hat{Z}_1$ získáme vztah

$$\hat{Z}_1 = \frac{\hat{a}_{11}\hat{Z}_s + \hat{a}_{12}}{\hat{a}_{21}\hat{Z}_s + \hat{a}_{22}} = \frac{\left(-\dfrac{\hat{h}_{11}\hat{h}_{22} - \hat{h}_{12}\hat{h}_{21}}{\hat{h}_{21}}\right)\hat{Z}_s + -\dfrac{\hat{h}_{11}}{\hat{h}_{21}}}{\left(-\dfrac{\hat{h}_{22}}{\hat{h}_{21}}\right)\hat{Z}_s + \left(-\dfrac{1}{\hat{h}_{21}}\right)} = \frac{\left(\hat{h}_{11}\hat{h}_{22} - \hat{h}_{12}\hat{h}_{21}\right)\hat{Z}_s + \hat{h}_{11}}{\hat{h}_{22}\hat{Z}_s + 1}.$$

Výstupní impedanci tranzistoru určíme pomocí její definice, odvozené v kapitole 7.1, když analogickým způsobem jako u impedance vstupní, dosadíme za kaskádní parametry odpovídající hodnoty $\hat{h}$ parametrů, tedy

$$\hat{Z}_2 = \frac{\hat{a}_{22}\hat{Z}_\mathrm{i} + \hat{a}_{12}}{\hat{a}_{21}\hat{Z}_\mathrm{i} + \hat{a}_{11}} = \frac{\left(-\dfrac{1}{\hat{h}_{21}}\right)\hat{Z}_\mathrm{i} + \left(-\dfrac{\hat{h}_{11}}{\hat{h}_{21}}\right)}{\left(-\dfrac{\hat{h}_{22}}{\hat{h}_{21}}\right)\hat{Z}_\mathrm{i} + \left(-\dfrac{\hat{h}_{11}\hat{h}_{22} - \hat{h}_{12}\hat{h}_{21}}{\hat{h}_{21}}\right)} = \frac{\hat{Z}_\mathrm{i} + \hat{h}_{11}}{\hat{h}_{22}\hat{Z}_\mathrm{i} + \left(\hat{h}_{11}\hat{h}_{22} - \hat{h}_{12}\hat{h}_{21}\right)}.$$

Σ Shrnutí pojmů 5.1.

Bipolární tranzistor je nelineární polovodičový prvek, jehož činnost je založena na tranzistorovém jevu, jehož podstata spočívá v tom, že velikost proudu procházejícího závěrně pólovaným přechodem je výrazně ovlivňována napětím resp. proudem propustně pólovaného přechodu. Vlastnosti tranzistoru jsou popsány sítí hlavních charakteristik: vstupní, výstupní, převodní a zpětně převodní. Vstupní a výstupní veličiny tranzistoru je výhodné rozložit na stejnosměrnou a střídavou složku. Stejnosměrná složka veličin tranzistoru definuje jeho pracovní bod a střídavá složka charakterizuje změnu jeho parametrů.

Linearizace jeho charakteristik v okolí pracovního bodu nám umožňuje modelovat bipolární tranzistor pro malé změny jeho obvodových veličin charakteristickými rovnicemi dvojbranu s diferenciálními (střídavými) $\hat{h}$ parametry. V oblasti nízkých a středních kmitočtů jsou tyto parametry reálné a tranzistor modelujeme degenerovaným odporovým dvojbranem, tedy trojpólem. Přenosy napětí, proudu a výkonu tranzistoru nazýváme rovněž činiteli zesílení a stejně jako jeho vstupní a výstupní impedance jsou obecně funkcí komplexních $\hat{h}$ parametrů, zatěžovací impedance $\hat{Z}_\mathrm{s}$ a vnitřní impedance budícího zdroje $\hat{Z}_\mathrm{i}$. Hodnoty $\hat{h}$ parametrů závisí na způsobu zapojení tranzistoru.

? **Otázky 5.1.**

1. Na čem je založen tranzistorový jev?
2. Jaký obvodový model dvojbranu používáme k modelování tranzistorového jevu a proč?
3. Proč rozkládáme vstupní a výstupní veličiny tranzistoru na stejnosměrnou a střídavou složku?
4. Která ze složek obvodových veličin definuje pracovní bod tranzistoru?
5. Která ze složek obvodových veličin je odpovědná za pohyb pracovního bodu tranzistoru?
6. Jak modelujeme změnu polohy pracovního bodu tranzistoru?
7. Jaký je účel linearizace charakteristik tranzistoru v okolí pracovního bodu?
8. V čem se liší náhradní obvodové schéma tranzistoru pro střídavé složky jeho obvodových veličin od náhradního schématu pro obě jeho složky obvodových veličiny?
9. Pro jaké kmitočty můžeme považovat hodnoty $\hat{h}$ parametrů tranzistoru za reálné?
10. Proč můžeme linearizovaný model tranzistoru modelovat odporovým dvojbranem?
11. Co rozumíme malosignálovým modelem tranzistoru?
12. Které definice činitelů zesílení znáte a jak jsou definovány?

13. Na čem závisí činitelé zesílení tranzistoru a jeho impedance?
14. Má vliv zapojení tranzistoru na hodnotu h parametrů tranzistoru?

Úloha k řešení 5.1.

K modelování bipolárního tranzistoru se často používá dvojbran popsaný admitančními parametry. Odvoďte transformační rovnice, které platí mezi modelem popsaným y parametry a h parametry. Nakreslete náhradní obvodové schéma malosignálového admitančního modelu tranzistoru.

Řešení:

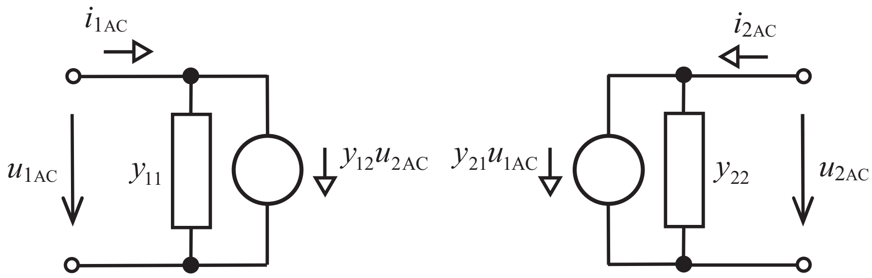
Admitanční model, jehož obvodové schéma je na obr. 5.7, získáme ze smíšeného modelu rovnic bipolárního tranzistoru tak, že z 1. rovnice smíšeného modelu si vyjádříme proud i_1 a ten dosadíme do 2. rovnice jeho modelu. Získáme tak soustavu rovnic

$$i_{1AC} = \frac{u_{1AC} - h_{12}u_{2AC}}{h_{11}} = \frac{1}{h_{11}}u_{1AC} + \left(-\frac{h_{12}}{h_{11}}\right)u_{2AC},$$

$$i_{2AC} = h_{21}\frac{u_{1AC} - h_{12}u_{2AC}}{h_{11}} + h_{22}u_{2AC} = \frac{h_{21}u_{1AC} + (h_{11}h_{22} - h_{21}h_{12})u_{2AC}}{h_{11}} = \frac{h_{21}}{h_{11}}u_{1AC} + \frac{h_{11}h_{22} - h_{21}h_{12}}{h_{11}}u_{2AC},$$

takže prvky admitanční matice jsou dány

$$y_{11} = \frac{1}{h_{11}}, \qquad y_{12} = -\frac{h_{12}}{h_{11AC}}, \qquad y_{21} = \frac{h_{21}}{h_{11}}, \qquad y_{22} = \frac{h_{11}h_{22} - h_{21}h_{12}}{h_{11}}.$$



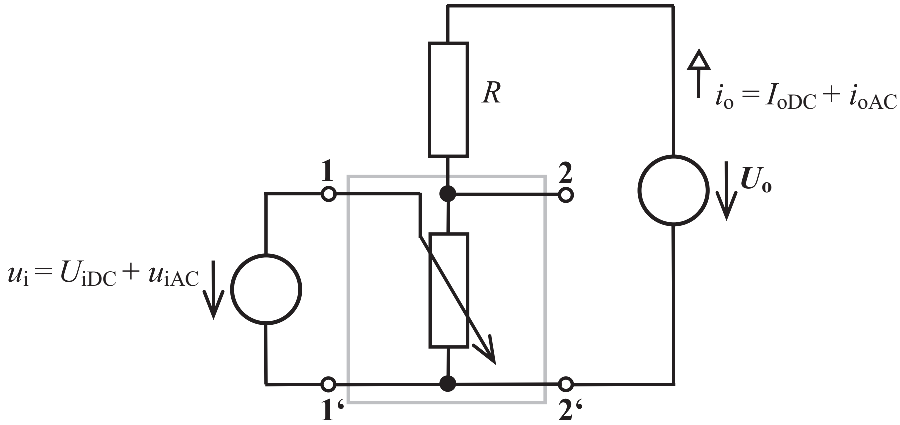
Obr. 5.7 Náhradní schéma linearizovaného, admitančního modelu bipolárního tranzistoru pro střídavý signál, úloha k řešení 5.1

5.2. Tranzistor jako zesilovač

I když tranzistor nazýváme aktivním polovodičovým prvkem, modelujeme ho neautonomním dvojbranem, což znamená, že jeho model obsahuje řízené zdroje, které ale nejsou nezávislé, takže jsou schopny dodat jen omezený výkon. Fakticky to znamená, že aby tranzistor jako součástka se choval jako aktivní prvek, musí být napájen z nezávislého stejnosměrného zdroje. Stejnosměrný zdroj připojený k tranzistoru póluje tranzistor tak, aby byl zapojen v aktivním režimu, ve kterém vzniká tranzistorový jev a naopak tranzistor změnou vodivosti způsobenou střídavým zdrojem připojeným k jeho propustně pólovanému přechodu distribuuje energii nezávislého stejnosměrného zdroje.

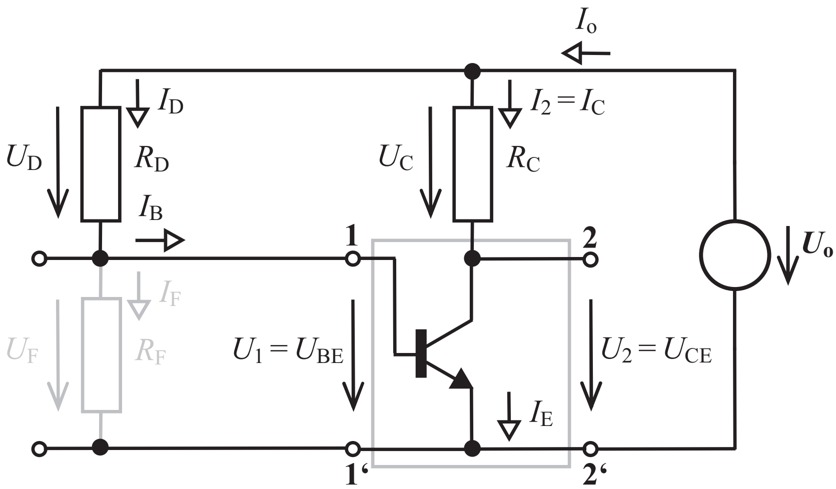
❑ Nastavení pracovního bodu tranzistoru

Abychom tranzistor využili k zesilování signálu, musíme ho nastavit do stejnosměrného pracovního bodu, který umístíme do sítě jeho výstupních charakteristik tak, aby se co nejméně projevilo zkreslení zesilovaného signálu nelinearitou jeho charakteristik. V okolí pracovního bodu provedeme linearizaci jeho parametrů a modelujeme ho střídavými *h* parametry. Pracovní bod nastavujeme rezistorem *R*, kterým omezujeme velikost proudu stejnosměrného zdroje, viz obr. 5.8.



Obr. 5.8 Princip nastavení pracovního bodu bipolárního tranzistoru

Odpovídající hodnoty souřadnic pracovního bodu v síti vstupních charakteristik, které musíme nastavit rezistory připojenými k stejnosměrnému zdroji, získáme průmětem pracovního bodu *P* v síti výstupních charakteristik přes charakteristiku převodní. Postup si ilustrujme na zapojení NPN tranzistoru se společným emitorem na obr 5.9.



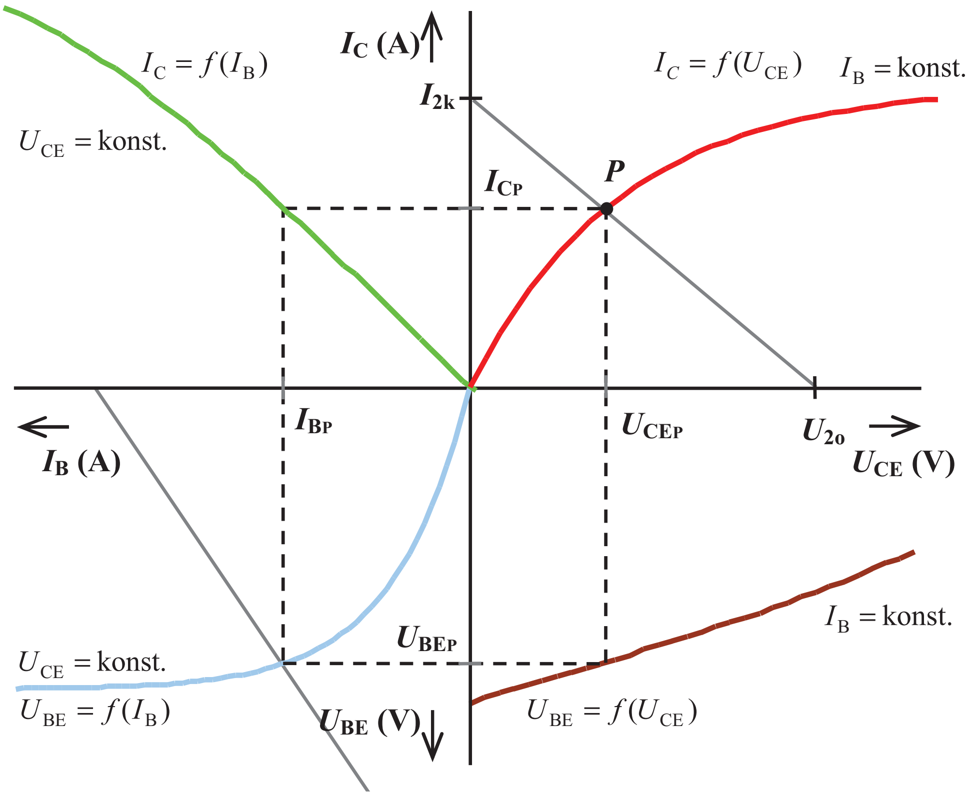
Obr. 5.9 Obvodové schéma k praktickému nastavení pracovního bodu bipolárního tranzistoru

Pracovní bod tranzistoru *P*, na obr. 5.10, daný souřadnicemi U_{CEP} , I_{CP} ve výstupní charakteristice $I_C = f(U_{CE})$ nastavíme do požadované polohy volbou hodnoty rezistoru

$$R_C = \frac{U_o - U_{CEP}}{I_{CP}} .$$

Průmětem hodnoty proudu I_{CP} do převodní charakteristiky $I_C = f(I_B)$ získáme hodnotu potřebného bázového proudu I_{BP}, pro kterou odečteme ze vstupní charakteristiky hodnotu odpovídajícího napětí U_{BEP}. Souřadnicím vstupní charakteristiky I_{BP}, U_{BEP} odpovídá poloha pracovního bodu ve vstupní charakteristice $U_{BE} = f(I_B)$ .Tyto hodnoty musíme nastavit rezistory R_D, R_F. Pro proudové buzení, kdy lim $R_F \to \infty$, bude hodnota rezistoru

$$R_D = \frac{U_D}{I_D} = \frac{U_o - U_{BEP}}{I_{BP}} .$$



Obr. 5.10 Nastavení pracovního bodu bipolárního tranzistoru v síti statických charakteristik

Pro napěťové buzení hodnoty rezistorů R_D, R_F nejde určit ze známých hodnot veličin I_{BP}, U_{BEP} a U_o bez další podmínky, protože máme k dispozici jedinou rovnici $I_D = I_F + I_{BP}$ pro dvě neznámé hodnoty rezistorů R_D, R_F. Zvolíme-li hodnotu proudu I_F k-násobkem proudu báze I_{BP}, tedy $I_F = kI_{BP}$ bude proud $I_D = (k+1)I_{BP}$ a hodnoty rezistorů děliče napětí určíme z rovnic

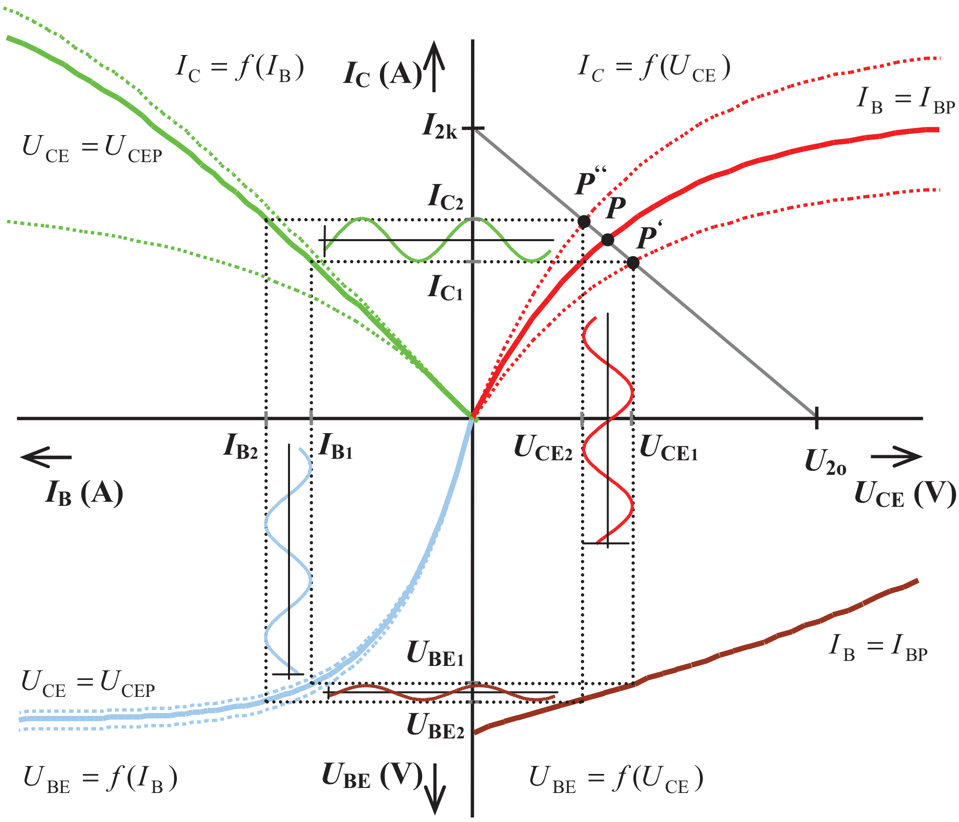
$$R_D = \frac{U_o - U_{BEP}}{(k+1)I_{BP}},$$

$$R_F = \frac{U_F}{I_F} = \frac{U_{BEP}}{kI_{BP}},$$

neboť platí $U_F = U_{BEP}$. Aby byl dělič přizpůsoben napěťově, volíme hodnotu konstanty k 5-10. Poznamenejme, že pro $k = 0$ získáme vztahy pro proudové buzení. Nevýhodou proudového buzení je ale, že s teplotou se mění odpor tranzistoru, a tím i bázový proud a pracovní bod tranzistoru, což se u napěťového buzení neděje.

❑ Diferenční parametry bipolárního tranzistoru v zapojení SE

Ze stejnosměrných charakteristik v okolí pracovního bodu, získaných měřením, můžeme určit diferenční parametry tranzistoru, tak že v definičních vztazích střídavých parametrů tranzistoru nahradíme diferenciály veličin jejich diferencemi. Diference určujeme s ohledem na pohyb pracovního bodu v sítích (soustavách) charakteristik tranzistoru, ke kterému dochází při jeho střídavém buzení. Pracovní bod P tranzistoru v síti výstupních charakteristik $I_C = f(U_{CE})$, $I_B = \text{konst.}$ se nachází na zatěžovací přímce (charakteristice) zdroje $U_2 = U_o - R_C I_2$, která je definována dvěma body, a to napětím naprázdno $U_{2o} = U_o$ zdroje napájejícího tranzistor a jeho proudem nakrátko $I_{2k} = \dfrac{U_o}{R_C}$. Konkrétní polohu pracovního bodu nejsnáze určíme graficky, jako průsečík zatěžovací přímky a jedné výstupní charakteristiky ze soustavy výstupních charakteristik pro konkrétní hodnotu bázového proudu $I_B = \text{konst.}$, která leží v okolí výstupní charakteristiky pro hodnotu bázového proudu $I_B = I_{BP}$, což je hodnota jedné ze souřadnic stejnosměrného pracovního bodu v síti vstupních charakteristik. Polohy měnícího se pracovního bodu v systému ostatních hlavních charakteristik tranzistoru získáme jeho průměty, viz obr. 5.11. Poznamenejme, že diferenci výstupní charakteristiky ale neurčujeme z konstrukce sečny (tečny) v okolí pracovního bodu, tak jak to činíme u ostatních tří charakteristik. Linearizujeme totiž pro síť charakteristik a ne jen jednu charakteristiku, tak jako na obr. 5.3. Linearizace provádíme v okolí pracovního bodu hlavních charakteristik.



Obr. 5.11 Pohyb pracovního bodu bipolárního tranzistoru v síti statických charakteristik

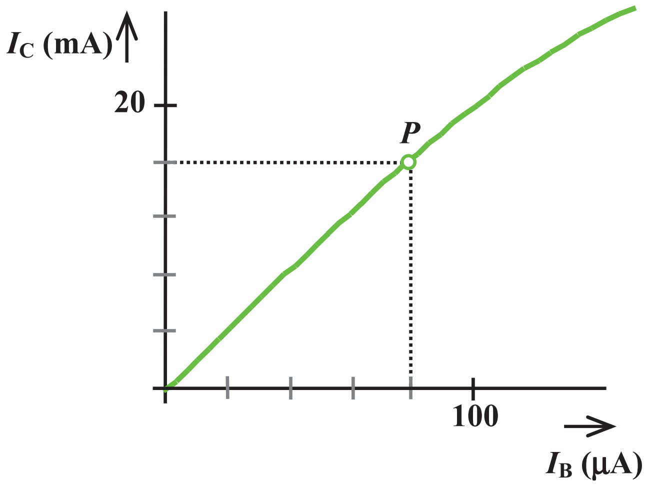
Diferenční parametry v okolí pracovního bodu stanovené ze známých hlavních charakteristik tranzistoru jsou definovány

$$h_{11e} = \frac{\Delta U_{BE}}{\Delta I_B} = \frac{U_{BE2} - U_{BE1}}{I_{B2} - I_{B1}}, \qquad h_{12e} = \frac{\Delta U_{BE}}{\Delta U_{CE}} = -\frac{U_{BE2} - U_{BE1}}{U_{CE2} - U_{CE1}},$$

$$h_{21e} = \frac{\Delta I_C}{\Delta I_B} = \frac{I_{C2} - I_{C1}}{I_{B2} - I_{B1}}, \qquad h_{22e} = \frac{\Delta I_C}{\Delta U_{CE}} = \frac{I_{C2} - I_{C1}}{U_{CE2} - U_{CE1}}.$$

Příklad 5.3.

Ze zadané převodní charakteristiky na obr. 5.12 stanovte hodnotu stejnosměrného parametru h_{21E} a střídavého parametru h_{21e} bipolárního tranzistoru pomocí odhadu polohy tečny v pracovním bodě převodní charakteristiky. Obě vypočtené hodnoty parametrů porovnejte.



Obr. 5.12 Převodní charakteristika bipolárního tranzistoru, příklad 5.3

♦

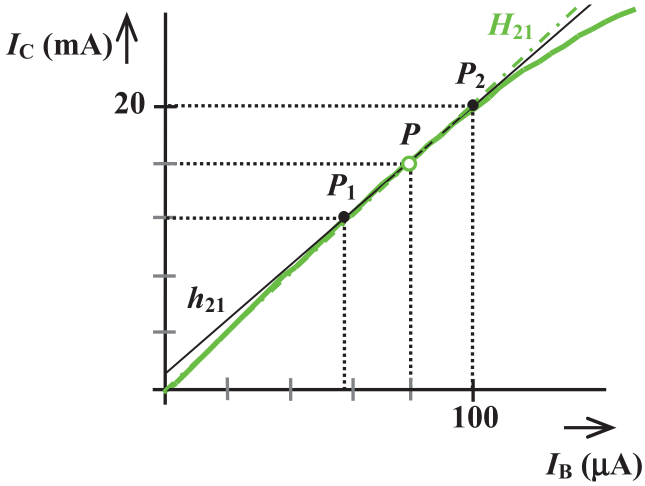
Dosazením souřadnic hodnot pracovního bodu v převodní charakteristice tranzistoru získáme hodnotu stejnosměrného proudového zesilovacího činitele

$$H_{21E} = h_{21E} = \frac{0{,}016}{80 \cdot 10^{-6}} = 200\,.$$

Ze sklonu tečny h_{21} v pracovním bodě P a sklonu přímky statické charakteristiky proudového přenosu (zesilovacího činitele) H_{21} na obr. 5.13, vidíme, že hodnota stejnosměrného činitele $H_{21E} = h_{21E}$ a diferenciálního (střídavého) činitele h_{21e} definovaného směrnicí tečny v okolí pracovního bodu jsou co do hodnoty směrnice blízké. Stanovení směrnice tečny je pak z praktického hlediska snazší nahradit konstrukcí sečny v okolí pracovního bodu P, čímž určíme na místo diferenciální hodnoty parametru h_{21e} jeho diferenční hodnotu, která je fakticky velmi blízká hodnotě diferenciálního parametru h_{21e}, takže není důvod značit oba parametry různě. Diferenční hodnotu parametru h_{21e} vypočteme ze zadané převodní charakteristiky dosazením souřadnic bodů P_1 a P_2, které odčteme z charakteristiky, viz obr. 5.13, po zavedení měřítek os

$$h_{21e} = \frac{\Delta I_C}{\Delta I_B} = \frac{I_{CP2} - I_{CP1}}{I_{BP2} - I_{BP1}} = \frac{20 \cdot 10^{-3} - 12 \cdot 10^{-3}}{100 \cdot 10^{-6} - 58{,}75 \cdot 10^{-6}} \doteq 193{,}94\,.$$

Tato hodnota se liší jen o 3,03 % od hodnoty statického zesilovacího činitele, takže v okolí pracovního bodu prakticky platí $h_{21e} \cong h_{21E} = H_{21E}$, která je běžně udávána v datovém listu bipolárního tranzistoru.



Obr. 5.13 Převodní charakteristika bipolárního tranzistoru, náhrada tečny sečnou, příklad 5.3

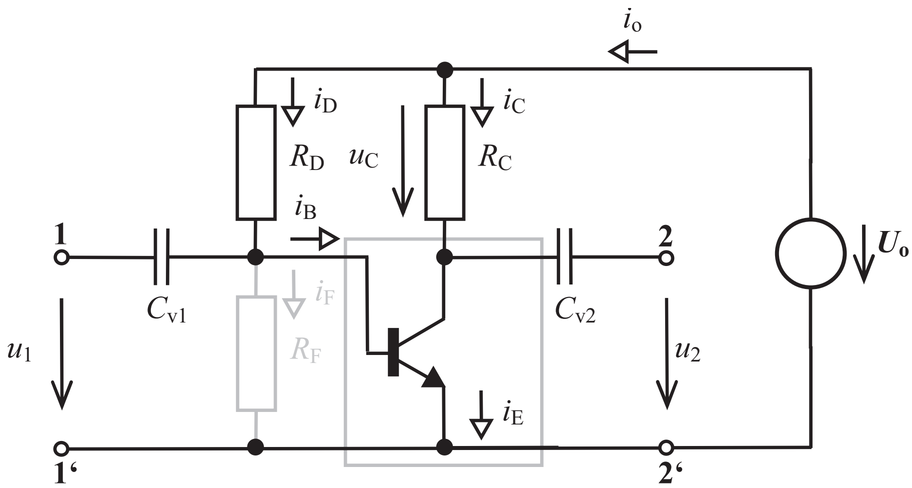
Zesilovač s bipolárním tranzistorem v zapojení SE

V okolí pracovního bodu můžeme využít tranzistor k zesilování malých střídavých signálů. Aby však nedošlo k nežádoucímu zkreslení rozkmitu výstupního napětí tranzistoru nebo dokonce až k omezení jeho amplitudy, volíme polohu pracovního bodu uprostřed zatěžovací přímky, takže souřadnice pracovního bodu výstupní charakteristiky jsou po dosazení tohoto napětí do výše uvedených vztahů v kapitole 5.2

$$U_{CEP} = U_{2o} = \frac{U_o}{2} \text{ a } I_{CP} = \frac{1}{2} I_{2k} = \frac{1}{2} \frac{U_o}{R_C}.$$

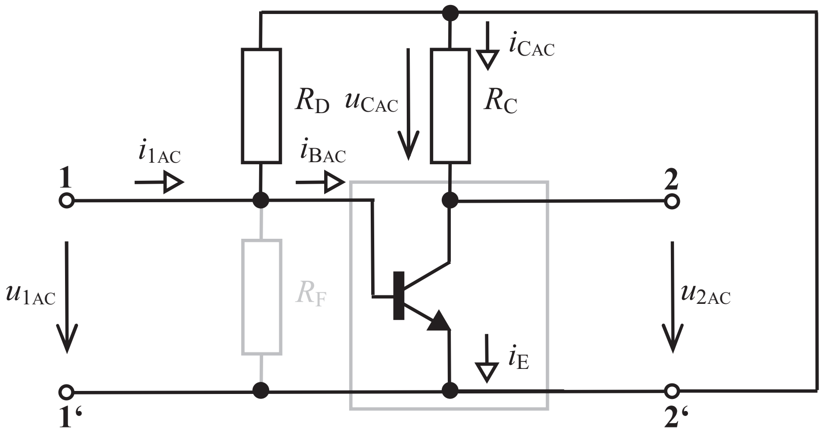
V síti hlavních charakteristik tranzistoru potom k těmto vypočteným hodnotám grafickou metodou odečteme odpovídající hodnoty souřadnic pracovního bodu v síti vstupních charakteristik I_{BP}, U_{BEP}, podobně jako na obr. 5.10.

Abychom zamezili nežádoucímu ovlivňování stejnosměrného pracovního bodu tranzistoru parametry vstupního střídavého zdroje nebo stejnosměrnými poměry navazujícího obvodu či tranzistorového stupně, připojme na vstup a výstup tranzistoru vazební kapacitory C_{v1} a C_{v2}. Připomeňme si jen, že střídavý signál je nasuperponován na stejnosměrné složce odpovídající pracovnímu bodu tranzistoru, z tohoto důvodu jsou veličiny v náhradním schématu na obr. 5.14 okamžité a označeny malými písmeny.

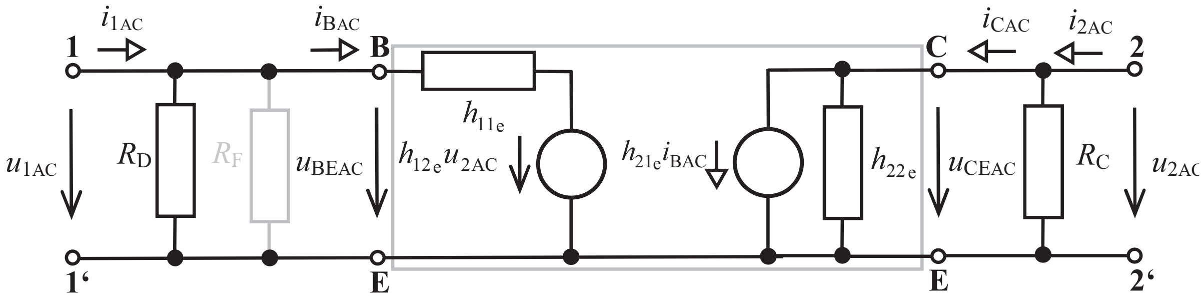


Obr. 5.14 Schéma zapojení tranzistorového zesilovače

Kapacitor, jak víme, se chová v pásmu středních kmitočtů při dostatečně velké hodnotě kapacity jako zkrat (má téměř nulovou reaktanci) a při nulovém kmitočtu jako přerušená větev (má nekonečně velkou reaktanci). Po vyřazení kapacitorů a stejnosměrného zdroje, který se chová pro střídavý signál jako zkrat, můžeme obvod překreslit a střídavý obvod jednoduše řešit jako čistě odporový. Náhradní schéma střídavého obvodu je na obr. 5.15 a jeho malosignálový, dvojbranový model na obr.5.16.



Obr. 5.15 Náhradní schéma zapojení tranzistorového zesilovače pro střídavý signál



Obr. 5.16 Malosignálový model střídavého zesilovače

Jelikož obvod je odporový, můžeme vztah pro napěťové zesílení zesilovače zapsat místo komplexních hodnot parametrů a veličin reálnými hodnotami parametrů a střídavými okamžitými hodnotami veličin

$$A_U = \frac{u_{2AC}}{u_{1AC}} = \frac{u_{CEAC}}{u_{BEAC}} = \frac{-h_{21e} R_s}{h_{11e} + (h_{11e} h_{22e} - h_{12e} h_{21e}) R_s} ,$$

podobně pro proudové zesílení zesilovače užitím vztahu pro dělič proudu na vstupu zesilovače

$$A_I = \frac{i_{CAC}}{i_{1AC}} = \frac{i_{CAC}}{\dfrac{1}{\dfrac{\frac{R_D R_F}{R_D + R_F}}{\frac{R_D R_F}{R_D + R_F} + R_{BE}}} i_{BAC}} = \frac{\dfrac{R_D R_F}{R_D + R_F} + R_{BE}}{\dfrac{R_D R_F}{R_D + R_F}} \frac{h_{21e}}{1 + h_{22e} R_s} = \left(1 + \frac{R_{BE}}{\dfrac{R_D R_F}{R_D + R_F}} \right) \frac{h_{21e}}{1 + h_{22e} R_s} ,$$

kde R_{BE} je vstupní odpor tranzistoru definovaný

$$R_{BE} = \frac{u_{BEAC}}{i_{BAC}} = \frac{h_{11e} + (h_{11e} h_{22e} - h_{12e} h_{21e}) R_s}{1 + h_{22e} R_s} .$$

Vstupní odpor zesilovače je dán paralelním řazením rezistorů R_{D}, R_{F}, R_{BE} rovnicí

$$R_{1} = \frac{R_{D} R_{F} + R_{D} R_{BE} + R_{F} R_{BE}}{R_{D} R_{F} R_{BE}}$$

a výstupní odpor

$$R_{2} = \frac{u_{2AC}}{i_{CAC}} = \frac{u_{CEAC}}{i_{CAC}} = \frac{R_{i} + h_{11e}}{h_{22e} R_{i} + \left(h_{11e} h_{22e} - h_{12e} h_{21e}\right)},$$

kde $R_{s} = R_{C}$ a pro buzení ideálním zdrojem napětí $R_{i} = 0\,\Omega$ a buzení reálným zdrojem napětí s vnitřním odporem R_{g} má hodnotu $R_{i} = \dfrac{R_{g} R_{D} + R_{g} R_{F} + R_{F} R_{D}}{R_{g} R_{D} R_{F}}$.

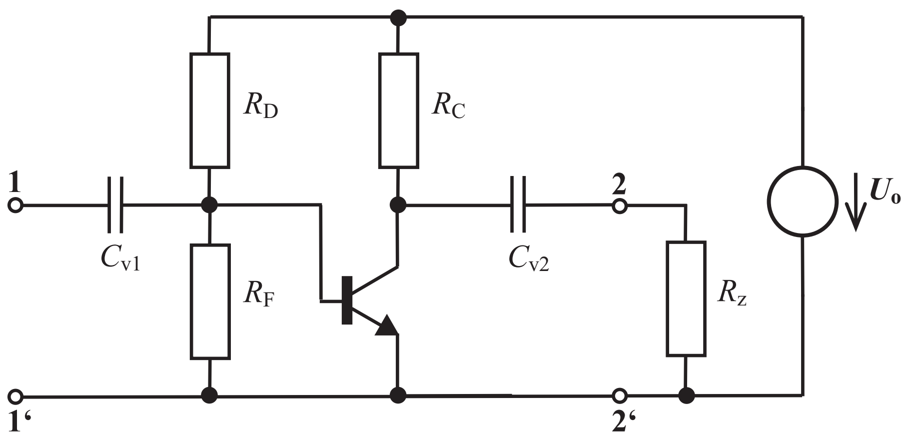
V praxi většinou můžeme zanedbat parametry h_{12e}, h_{22e}, takže výše uvedené vztahy můžeme zapsat

$$A_{U} = -\frac{h_{21e}}{h_{11e}} R_{C}, \qquad A_{I} = \left(1 + \frac{R_{BE}}{\dfrac{R_{D} R_{F}}{R_{D} + R_{F}}}\right) \frac{h_{21e}}{1 + h_{22e} R_{C}},$$

$$R_{BE} = h_{11e}, \qquad R_{2} \to \infty.$$

Příklad 5.4.

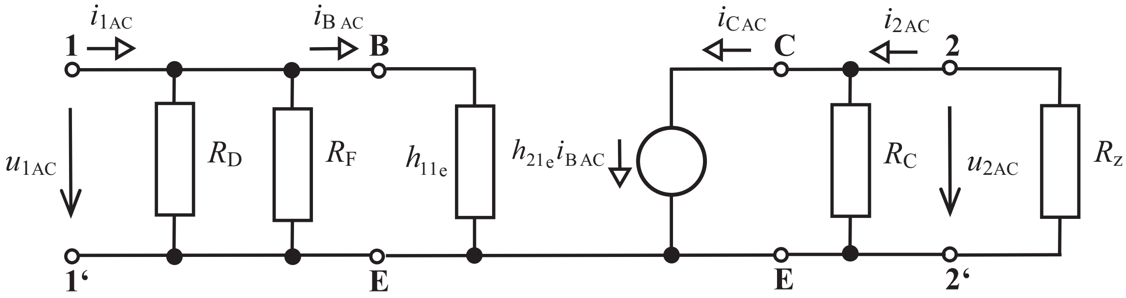
Určete hodnotu vstupního odporu, napěťového zesílení (přenosu) a kmitočty, na kterých dojde k lomu amplitudové kmitočtové charakteristiky tranzistorového zesilovače zatíženého rezistorem R_z nakresleného na obr. 5.17. V náhradním modelu tranzistoru neuvažujte hodnoty parametrů modelu tranzistoru h_{12e}, h_{22e} a nakreslete jeho zjednodušený malosignálový model.



Obr. 5.17 Schéma zapojení zatíženého tranzistorového zesilovače, příklad 5.4

♦

Malosignálový model zatíženého tranzistorového zesilovače pro střídavý signál je nakreslený na obr. 5.18.



Obr. 5.18 Malosignálový model zatíženého tranzistorového zesilovače, příklad 5.4

Vstupní odpor R_1 i napěťové zesílení určíme ze zjednodušeného náhradního modelu tranzistoru, ze kterého je zřejmé, že po zanedbání parametru h_{12e} ztrácí výstupní obvod vliv na vstupní obvod, takže pro vstupní odpor samotného tranzistoru platí $R_{BE} = h_{11e}$ a vstupní odpor zesilovače je dán výslednou hodnotou paralelního řazení rezistorů R_D, R_F, h_{11e}

$$R_1 = \frac{R_D R_F + R_D h_{11e} + R_F h_{11e}}{R_D R_F h_{11e}}$$

a hodnota napěťového přenosu

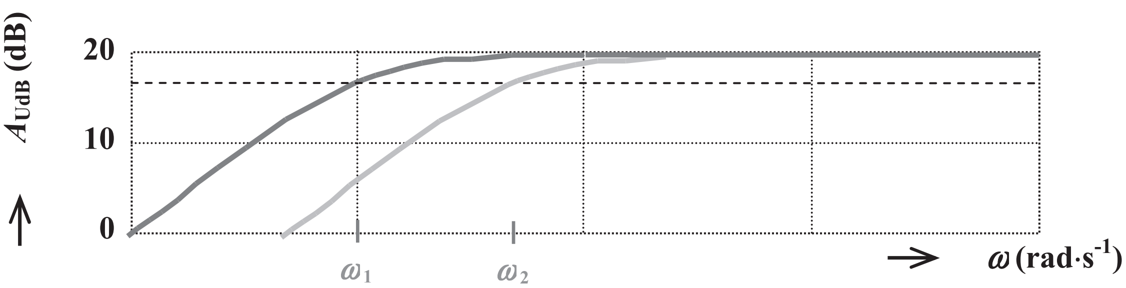
$$A_U = -\frac{h_{21e}}{h_{11e}} R_s ,$$

kde

$$R_s = \frac{R_C R_z}{R_C + R_z} .$$

Lomové úhlové kmitočty amplitudové kmitočtové charakteristiky na obr. 5.19, jsou určeny derivačními články. První článek, na vstupu zesilovače, je tvořen vazebním kapacitorem C_{v1} a vstupním odporem tranzistoru R_1 a druhý, na jeho výstupu vazebním kapacitorem C_{v2} a zatěžovacím odporem tranzistoru R_z. Jejich úhlové kmitočty jsou

$$\omega_1 = \frac{1}{R_1 C_{v1}} \text{ a } \omega_2 = \frac{1}{R_z C_{v2}} .$$



Obr. 5.19 Logaritmická amplitudová charakteristika tranzistorového zesilovače, příklad 5.4

❑ Účinnost s bipolárním tranzistorem v zapojení SE

Uvažujme zapojení bipolárního tranzistoru s nastaveným stejnosměrným pracovním bodem v polovině zatěžovací přímky zdroje. Při střídavém buzení vstupu tranzistoru zdrojem napětí $u_1 = U_m \sin(\omega t)$, jelikož se chová jako odporový dvojbran, budou se harmonicky měnit i ostatní napětí. Pro výstupní napětí tranzistoru, které je rovno napětí u_{CE} platí

$$u_2 = u_{\mathrm{CE}} = U_{\mathrm{CEDC}} + u_{\mathrm{CEAC}} = \frac{U_\mathrm{o}}{2} + \frac{U_\mathrm{o}}{2}\sin(\omega t) = \frac{U_\mathrm{o}}{2}\left(1+\sin(\omega t)\right)$$

a pro napětí na kolektorovém rezistoru R_C

$$u_\mathrm{C} = U_\mathrm{o} - \frac{U_\mathrm{o}}{2}\left(1+\sin(\omega t)\right) = \frac{U_\mathrm{o}}{2}\left(1-\sin(\omega t)\right)$$

a jeho proud z Ohmova zákona

$$i_\mathrm{C} = \frac{u_\mathrm{C}}{R_\mathrm{C}} = \frac{U_\mathrm{o}}{2R_\mathrm{C}}\left(1-\sin(\omega t)\right),$$

kde

$$I_{\mathrm{CDC}} = \frac{U_\mathrm{o}}{2R_\mathrm{C}} \text{ a } i_{\mathrm{CAC}} = \frac{U_\mathrm{o}}{2R_\mathrm{C}}\sin(\omega t).$$

Okamžitý výkon stejnosměrného napájecího zdroje dodaný do větve s kolektorovým rezistorem je definován

$$p_\mathrm{o} = U_\mathrm{o} i_\mathrm{C} = U_\mathrm{o}\frac{U_\mathrm{o}}{2R_\mathrm{C}}\left(1-\sin(\omega t)\right) = \frac{U_\mathrm{o}^2}{2R_\mathrm{C}}\left(1-\sin(\omega t)\right)$$

a okamžitý střídavý výkon kolektorového rezistoru je

$$p_{\mathrm{CAC}} = u_{\mathrm{CAC}} i_{\mathrm{CAC}} = u_{\mathrm{CAC}}\frac{u_{\mathrm{CAC}}}{R_\mathrm{C}} = \frac{u_{\mathrm{CAC}}^2}{R_\mathrm{C}} = \frac{\left(\frac{U_\mathrm{o}}{2}\sin(\omega t)\right)^2}{R_\mathrm{C}} = \frac{U_\mathrm{o}^2}{4R_\mathrm{C}}\left(\sin(\omega t)\right)^2 = \frac{U_\mathrm{o}^2}{4R_\mathrm{C}}\frac{1}{2}\left(1-\cos(2\omega t)\right) =$$
$$= \frac{U_\mathrm{o}^2}{8R_\mathrm{C}}\left(1-\cos(2\omega t)\right).$$

Pro činný výkon zdroje platí

$$P_\mathrm{o} = \frac{1}{T}\int_0^T p_\mathrm{o}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{U_\mathrm{o}^2}{2R_\mathrm{C}}\left(1-\sin(\omega t)\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\frac{U_\mathrm{o}^2}{2R_\mathrm{C}}\left[t-\left(-\cos(\omega t)\right)\right]_0^T = \frac{1}{T}\frac{U_\mathrm{o}^2}{2R_\mathrm{C}}\left[T+\cos(\omega T)-0-\cos(\omega\cdot 0)\right] =$$
$$= \frac{1}{T}\frac{U_\mathrm{o}^2}{2R_\mathrm{C}}\left[T+\cos(\omega T)-1\right]$$

a po úpravě a dosazení za $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$P_\mathrm{o} = \frac{1}{T}\frac{U_\mathrm{o}^2}{2R_\mathrm{C}}\left[T+\cos\left(\frac{2\pi}{T}T\right)-1,\right] = \frac{U_\mathrm{o}^2}{2R_\mathrm{C}}.$$

Pro činný výkon střídavého signálu kolektorového rezistoru platí

$$P_{\mathrm{CAC}} = \frac{1}{T}\int_0^T p_\mathrm{C}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{U_\mathrm{o}^2}{8R_\mathrm{C}}\left(1-\cos(2\omega t)\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\frac{U_\mathrm{o}^2}{8R_\mathrm{C}}\left[t-\sin(2\omega t)\right]_0^T = \frac{1}{T}\frac{U_\mathrm{o}^2}{8R_\mathrm{C}}\left[T-\sin(2\omega T)-0-\sin(2\omega\cdot 0)\right] =$$
$$= \frac{1}{T}\frac{U_\mathrm{o}^2}{8R_\mathrm{C}}\left[T-\sin(2\omega T)\right]$$

a po úpravě

$$P_{\mathrm{CAC}} = \frac{1}{T}\frac{U_{\mathrm{o}}^2}{8R_{\mathrm{C}}}\left[T - \sin\left(2\frac{2\pi}{T}T\right)\right] = \frac{U_{\mathrm{o}}^2}{8R_{\mathrm{C}}}.$$

Pro maximální hodnotu účinnosti střídavého tranzistorového zesilovače v pracovním bodě nastaveném do poloviny zatěžovací přímky zdroje platí

$$\eta = \frac{P_{\mathrm{CAC}}}{P_{\mathrm{o}}} = \frac{\dfrac{U_{\mathrm{o}}^2}{8R_{\mathrm{C}}}}{\dfrac{U_{\mathrm{o}}^2}{2R_{\mathrm{C}}}} = \frac{1}{4}.$$

Σ Shrnutí pojmů 5.2.

Nastavení stejnosměrného pracovního bodu výstupu tranzistoru provádíme pomocí zatěžovací přímky zdroje zakreslené v síti výstupních charakteristik tranzistoru, která je geometrickým místem možných poloh pracovních bodů tranzistoru, a která je určena parametry stejnosměrného napájecího zdroje a kolektorového odporu tranzistoru. Aby byl rozkmit střídavého výstupního napětí nezkreslený, volíme polohu pracovního bodu uprostřed zatěžovací přímky. Nastavení odpovídajícího stejnosměrného pracovního bodu na vstupu tranzistoru provádíme při proudovém buzení jediným rezistorem a při napěťovém buzení děličem napětí. Z naměřených charakteristik tranzistoru v praxi graficky určujeme namísto diferenciálních parametrů diferenční parametry tranzistoru. Ty potom definují střídavé parametry tranzistoru. Vlivem nasuperponovaného střídavého signálu na stejnosměrné složky veličin tranzistoru dochází ke změně polohy pracovního bodu tranzistoru. Naopak kvůli zamezení nežádoucího posunu nastaveného stejnosměrného pracovního bodu tranzistorového zesilovače malého signálu připojujeme vstup a výstup zesilovače vazební kapacitory. Zjednodušený náhradní obvodový model zesilovače malého střídavého signálu v pásmu středních kmitočtů získáme náhradou kapacitorů a stejnosměrného zdroje napětí v místech jejich původního umístění prostým propojením jejich svorek, tj. jejich zkratováním. Z takto získaného, již jen odporového náhradního zapojení obvodu snadno, analýzou zapojení určíme střídavé přenosy zesilovače a jeho vstupní a výstupní odpory. Šířku pásma definují tranzistorového zesilovače definují vazební kapacity tranzistoru. Účinnost střídavého tranzistorového zesilovače v pracovním bodě nastaveném do poloviny zatěžovací přímky zdroje je maximálně 25 %. Tento typ zesilovače tedy není vhodné napájet z baterie.

? **Otázky 5.2.**

1. Kde se nachází v síti výstupních charakteristik tranzistoru pracovní bod?
2. Čím je definovaná zatěžovací přímka zdroje napájejícího tranzistor?
3. Jak volíme polohu pracovního bodu tranzistoru, aby zesílený signál nebyl zkreslený?
4. Jak určujeme diferenční parametry dvojbranu?
5. Jak nastavíme pracovní bod tranzistoru na jeho vstupu?
6. Co je to proudové a napěťové buzení tranzistoru?
7. Uveďte případ nežádoucí změny pracovního bodu tranzistoru?
8. K čemu slouží vazební kapacitory?
9. Jak zjednodušujeme náhradní obvodové schéma zesilovače malého střídavého signálu?

10. Proč se bipolární tranzistorový zesilovač s nastaveným pracovním bodem do poloviny zatěžovací přímky zdroje nehodí ke konstrukci bateriově napájených zařízení?

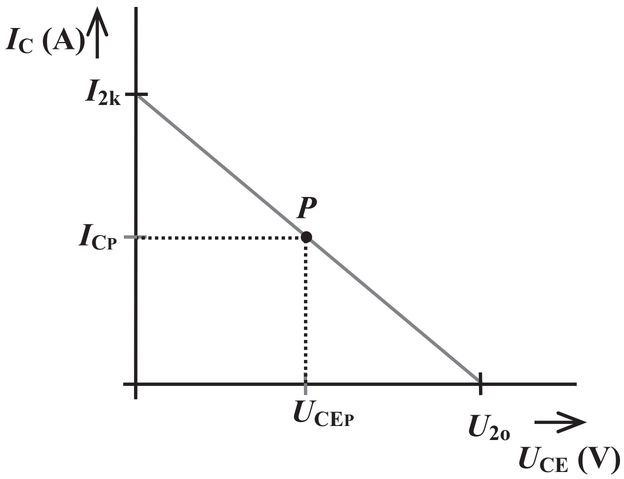
Úloha k řešení 5.2.

Sestrojte zatěžovací charakteristiku zdroje pro pracovní bod definovaný souřadnicemi výstupní charakteristiky $U_{\mathrm{CEP}} = 4{,}5\ \mathrm{V}, I_{\mathrm{CP}} = 3\ \mathrm{mA}$ pro zesilovače třídy A, určete hodnoty napětí stejnosměrného zdroje a zatěžovacího odporu.

Řešení:

Zatěžovací charakteristika zdroje je dána napětím naprázdno a proudem nakrátko. Pro zesilovač třídy A nastavujeme pracovní bod doprostřed zatěžovací charakteristiky, což znamená, že napětí naprázdno $U_{2\mathrm{o}}$ je dvojnásobkem napětí pracovního bodu, tj. $U_{2\mathrm{o}} = 9\ \mathrm{V}$, rovněž proud nakrátko je dvojnásobkem proudu pracovního bodu, tj. $I_{2\mathrm{k}} = 6\ \mathrm{mA}$. Z těchto hodnot sestrojíme zatěžovací charakteristiku zdroje na obr. 5.20 a vypočteme potřebnou hodnotu kolektorového rezistoru

$$R_{\mathrm{C}} = \frac{U_0}{I_{\mathrm{K}}} = \frac{9}{6 \cdot 10^{-3}} = 1{,}5\ \mathrm{k\Omega}\,.$$



Obr. 5.20 Zatěžovací charakteristika zdroje, úloha k řešení 5.2

6. Zpětná vazba

Motivace Po prostudování této kapitoly budete umět

- definovat základní zapojení obvodů se zpětnou vazbou
- modelovat ideální operační zesilovač a definovat jeho vlastnosti
- realizovat a popsat základní zapojení s operačním zesilovačem
- definovat vliv zpětné vazby na vlastnosti obvodu

|6.1. Základní zapojení obvodů se zpětnou vazbou

Se zpětnou vazbou se nejčastěji setkáváme v elektronických obvodech např. zesilovačích, jejímž úkolem je zlepšení jeho parametrů. Chování obvodu se zpětnou vazbou co do jeho funkce nejsnáze popíšeme tak, že ho rozčleníme na dvě části, dvě přenosové cesty – přímou a zpětnovazební. Každou z nich nahradíme dvojbranem charakterizovaným jediným parametrem – přenosem dvojbranu (zbylé tři parametry považujeme za nulové, a proto obě cesty považujeme za unilaterální, kdy řízený zdroj na výstupní straně dvojbranu je funkcí řídícího napětí na vstupní straně dvojbranu; poznamenejme že, obecně je unilaterální dvojbran charakterizován třemi parametry, chybí pouze parametr, který zohledňuje přenos z výstupní strany dvojbranu na stranu vstupní, viz kapitola 3.5, aktivní dvojbrany). Přímá cesta, modelovaná aktivním dvojbranem s jedním řízeným zdrojem, zajišťuje přenos energie nebo signálu ze vstupní strany na výstup obvodu. Zpětnovazební cesta (síť, článek), modelovaná zpravidla pasivním dvojbranem realizuje přenos části energie či signálu z výstupní strany zpět na vstup obvodu. Od obou dvojbranů (cest) požadujeme, aby byly unilaterální. Unilaterita, tj. jednocestný přenos energie je zpravidla splněn právě u elektronických obvodů s tranzistory, modelovaných dvojbrany s řízenými zdroji, které dobře zaručují podmínku unilaterity přímé cesty. Zpětnovazební cesta, tvořená obvykle pasivními obvodovými prvky je bilaterální. Umožňuje tedy obousměrný přenos energie, protože jak víme, pasivní dvojbran je reciproký. Podmínka unilaterity tu není obecně splněna, a proto od zpětnovazební cesty alespoň požadujeme, aby její přenos ze vstupu na výstup obvodu byl zanedbatelně malý. Vstupní veličina či veličiny obvodu jsou po zavedení zpětné vazby ovlivněny výstupní veličinou či veličinami obvodu, což umožňuje cíleně měnit jeho vlastnosti. Zapojení obvodů dělíme podle toho, zda je zpětnovazební veličinou napětí nebo proud. Vlastnosti obvodů se zpětnou vazbou tedy závisí, zda veličinou přiváděnou na vstup obvodu je napětí nebo proud a od které výstupní veličiny je zpětná vazba odvozena. Existují tak čtyři způsoby propojení přímé a zpětnovazební cesty.

❑ Zpětná vazba paralelní proudová

U tohoto typu vazby je zpětnovazební veličinou proud $\hat{I}_z$, odvozený z výstupu obvodu, který zavádíme paralelně s budícím proudem zdroje $\hat{I}_i$, viz obr. 6.1. Pro vstupní část obvodu platí podle 1. Kirchhoffova zákona

$$\hat{I}_\mathrm{i} = \hat{I}_1 + \hat{I}_z ,$$

takže pro vstupní proud přímé cesty $\hat{I}_1$ a její přenos $\hat{P}_\mathrm{a}$ platí

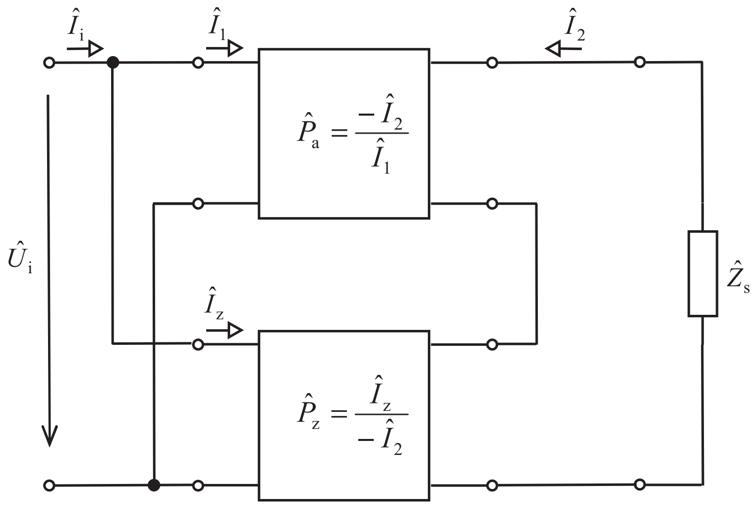
$$\hat{I}_1 = \hat{I}_\mathrm{i} - \hat{I}_z \qquad \text{a} \qquad \hat{P}_\mathrm{a} = \frac{-\hat{I}_2}{\hat{I}_1} .$$

Po dosazení tohoto proudu do upraveného přenosu přímé cesty a dosazení upraveného přenosu zpětnovazební cesty $\hat{P}_\mathrm{z} = \dfrac{\hat{I}_\mathrm{z}}{-\hat{I}_2}$ získáme vztah pro výstupní proud

$$-\hat{I}_2 = \hat{P}_a\,\hat{I}_1 = \hat{P}_a\left(\hat{I}_i - \hat{I}_z\right) = \hat{P}_a\,\hat{I}_i + \hat{P}_a\hat{P}_z\,\hat{I}_2\,,$$

ze kterého po úpravě obdržíme vztah pro výsledný přenos obvodu se zpětnou vazbou

$$\hat{P}_i = \frac{-\hat{I}_2}{\hat{I}_i} = \frac{\hat{P}_a}{1+\hat{P}_a\hat{P}_z}\,.$$



Obr. 6.1 Blokové schéma zpětné vazby paralelní proudové

❑ Zpětná vazba paralelní napěťová

U tohoto typu vazby je zpětnovazební veličinou napětí $\hat{U}_z$, odvozené z výstupu obvodu, které je transformováno na proud, takže zpětná vazba je připojena paralelně s budícím proudem zdroje $\hat{I}_i$, viz obr. 6.2. Pro vstupní část obvodu platí podle 1. Kirchhoffova zákona

$$\hat{I}_i = \hat{I}_1 + \hat{I}_z\,,$$

takže pro vstupní proud přímé cesty $\hat{I}_1$ a její přenos $\hat{P}_a$ platí

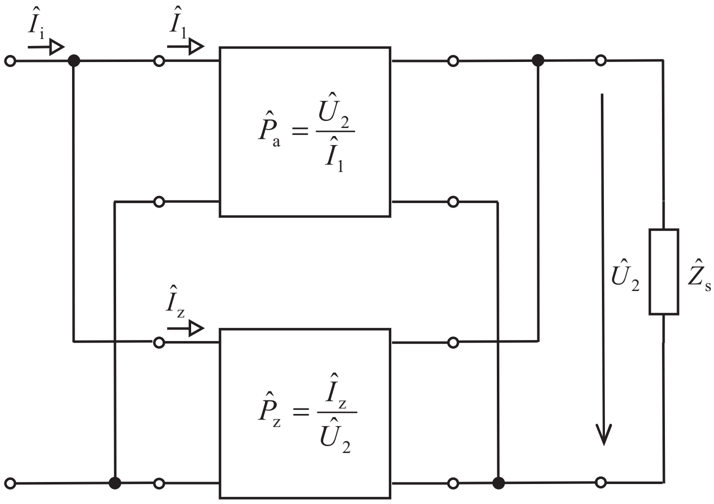
$$\hat{I}_1 = \hat{I}_i - \hat{I}_z \qquad \text{a} \qquad \hat{P}_a = \frac{\hat{U}_2}{\hat{I}_1}\,.$$

Po dosazení tohoto proudu do upraveného přenosu přímé cesty a dosazení upraveného přenosu zpětnovazební cesty $\hat{P}_z = \frac{\hat{I}_z}{\hat{U}_2}$ získáme vztah pro výstupní napětí

$$\hat{U}_2 = \hat{P}_a\,\hat{I}_1 = \hat{P}_a\left(\hat{I}_i - \hat{I}_z\right) = \hat{P}_a\,\hat{I}_i - \hat{P}_a\hat{P}_z\,\hat{U}_2\,,$$

ze kterého po úpravě obdržíme vztah pro výsledný přenos obvodu se zpětnou vazbou

$$\hat{P}_i = \frac{\hat{U}_2}{\hat{I}_i} = \frac{\hat{P}_a}{1+\hat{P}_a\hat{P}_z}\,.$$



Obr. 6.2 Blokové schéma zpětné vazby paralelní napěťové

❑ Zpětná vazba sériová proudová

U tohoto typu vazby je zpětnovazební veličinou proud $\hat{I}_z$, odvozený z výstupu obvodu, který je transformován na napětí, takže zpětná vazba je zařazena sériově s budícím napětím zdroje $\hat{U}_i$, viz obr. 6.3. Pro vstupní část obvodu platí podle 2. Kirchhoffova zákona

$$\hat{U}_i = \hat{U}_1 + \hat{U}_z ,$$

takže pro vstupní napětí přímé cesty $\hat{U}_1$ a její přenos $\hat{P}_a$ platí

$$\hat{U}_1 = \hat{U}_i - \hat{U}_z \quad \text{a} \qquad \hat{P}_a = \frac{-\hat{I}_2}{\hat{U}_1} .$$

Po dosazení tohoto napětí do upraveného přenosu přímé cesty a dosazení upraveného přenosu zpětnovazební cesty $\hat{P}_z = \dfrac{\hat{U}_z}{-\hat{I}_2}$ získáme vztah pro výstupní napětí

$$-\hat{I}_2 = \hat{P}_a \hat{U}_1 = \hat{P}_a \left(\hat{U}_i - \hat{U}_z\right) = \hat{P}_a \hat{U}_i + \hat{P}_a \hat{P}_z \hat{U}_2 ,$$

ze kterého po úpravě obdržíme vztah pro výsledný přenos obvodu se zpětnou vazbou

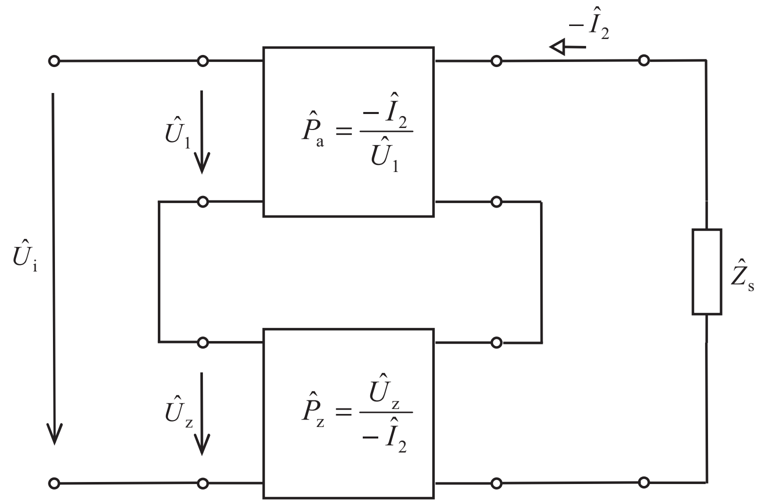
$$\hat{P}_i = \frac{-\hat{I}_2}{\hat{U}_i} = \frac{\hat{P}_a}{1 + \hat{P}_a \hat{P}_z} .$$

❑ Zpětná vazba sériová napěťová

U tohoto typu vazby je zpětnovazební veličinou napětí $\hat{U}_z$, odvozené z výstupu obvodu, které zavádíme sériově s budícím napětím zdroje $\hat{U}_i$, viz obr. 6.4. Pro vstupní část obvodu platí podle 2. Kirchhoffova zákona

$$\hat{U}_i = \hat{U}_1 + \hat{U}_z ,$$

takže pro vstupní napětí přímé cesty $\hat{U}_1$ a její přenos $\hat{P}_a$ platí



Obr. 6.3 Blokové schéma zpětné vazby sériové proudové

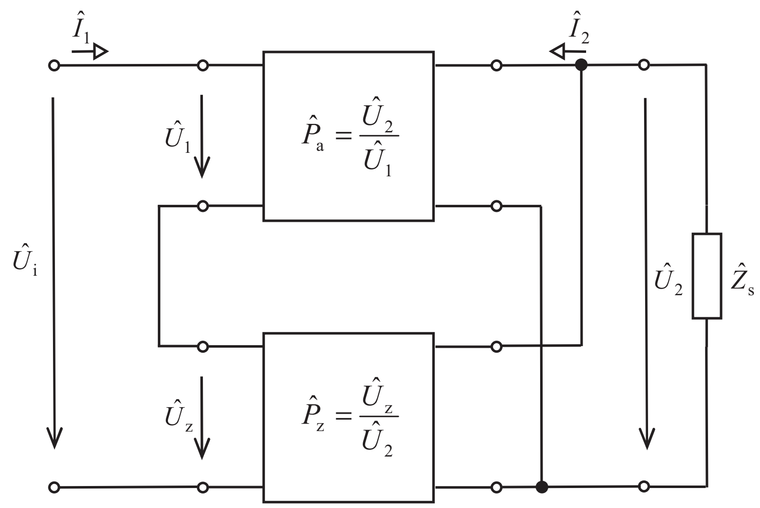
$$\hat{U}_1 = \hat{U}_i - \hat{U}_z \quad \text{a} \qquad \hat{P}_a = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1}.$$

Po dosazení tohoto napětí do upraveného přenosu přímé cesty a dosazení upraveného přenosu zpětnovazební cesty $\hat{P}_z = \frac{\hat{U}_z}{\hat{U}_2}$ získáme vztah pro výstupní napětí

$$\hat{U}_2 = \hat{P}_a \hat{U}_1 = \hat{P}_a \left(\hat{U}_i - \hat{U}_z\right) = \hat{P}_a \hat{U}_i - \hat{P}_a \hat{P}_z \hat{U}_2,$$

ze kterého po úpravě obdržíme vztah pro výsledný přenos obvodu se zpětnou vazbou

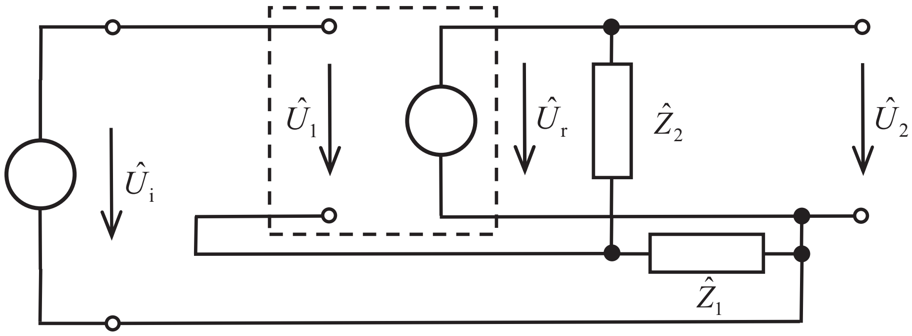
$$\hat{P}_i = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_i} = \frac{\hat{P}_a}{1 + \hat{P}_a \hat{P}_z}.$$



Obr. 6.4 Blokové schéma zpětné vazby sériové napěťové

Příklad 6.1.

V náhradním obvodu se zdrojem napětí řízeným napětím, zakresleným na obr. 6.5, určete typ zpětné vazby, přenos přímé a zpětnovazební cesty, platí-li pro řízený zdroj $\hat{U}_{\mathrm{r}} = \hat{K}_{21}\hat{U}_1$.



Obr. 6.5 Zpětnovazební obvod s ideálním zdrojem napětí řízeným napětím, příklad 6.1

♦

Jak plyne z obr. 6.5, napětí zpětné vazby $\hat{U}_{\mathrm{z}}$ je dáno úbytkem napětí na impedanci $\hat{Z}_1$, které je odvozeno z výstupního napětí a řazeno sériově s budícím napětím zdroje $\hat{U}_{\mathrm{o}}$, takže zpětná vazba je sériová, napěťová, viz obr. 6.4. Přenos zpětné vazby $\hat{P}_{\mathrm{z}}$ určíme z děliče napětí, když vzhledem k topologii obvodu platí $\hat{U}_2 = \hat{U}_r$ a tedy

$$\hat{U}_{\mathrm{z}} = \frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2}\hat{U}_2,$$

takže pro něj platí

$$\hat{P}_{\mathrm{z}} = \frac{\hat{U}_{\mathrm{z}}}{\hat{U}_2} = \frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2}.$$

Přenos přímé cesty, která je unilaterální, je dán definicí napětí řízeného zdroje

$$\hat{P}_{\mathrm{a}} = \frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_{\mathrm{r}}} = \frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_2} = \frac{1}{\hat{K}_{21}}.$$

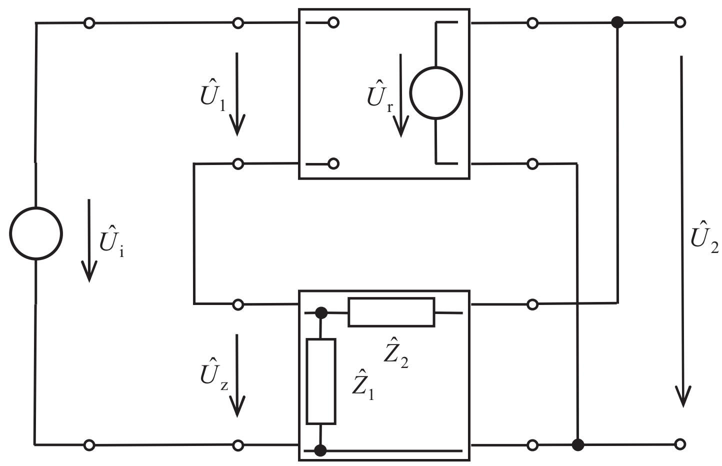
Výsledný přenos mezi výstupním napětím a budícím napětím dostaneme dosazením do definičního vztahu obvodu se zpětnou vazbou

$$\hat{P}_{\mathrm{i}} = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_{\mathrm{i}}} = \frac{\hat{P}_{\mathrm{a}}}{1 + \hat{P}_{\mathrm{a}}\hat{P}_{\mathrm{z}}} = \frac{\dfrac{1}{\hat{K}_{21}}}{1 + \dfrac{1}{\hat{K}_{21}}\dfrac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2}}.$$

Bude-li přenos přímé cesty neomezeně velký, bude výsledný přenos daný pouze přenosem zpětné cesty, tedy

$$\hat{P}_{\mathrm{i}} = \lim_{\hat{P}_{\mathrm{a}} \to \infty} \frac{\hat{P}_{\mathrm{a}}}{1 + \hat{P}_{\mathrm{a}}\hat{P}_{\mathrm{z}}} = \lim_{\hat{P}_{\mathrm{a}} \to \infty} \frac{\hat{P}_{\mathrm{a}}}{\hat{P}_{\mathrm{a}}} \frac{1}{\dfrac{1}{\hat{P}_{\mathrm{a}}} + \hat{P}_{\mathrm{z}}} = \frac{1}{\hat{P}_{\mathrm{z}}} = \frac{1}{\dfrac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2}} = 1 + \frac{\hat{Z}_2}{\hat{Z}_1},$$

což je identický vztah odvozený přímou aplikací Kirchhoffových zákonů v následující kapitole 6.2.



Obr. 6.6 Zpětnovazební obvod z příkladu 6.1 umístěný do blokového schématu zpětné vazby sériové, napěťové, příklad 6.1

Σ Shrnutí pojmů 6.1.

Obvod se zpětnou vazbou charakterizujeme přímou a zpětnovazební přenosovou cestou. Přímá cesta modeluje přenos energie nebo signálu ze vstupu na výstup obvodu. Zpětnovazební cesta modeluje přenos části energie či signálu z výstupu na vstup obvodu. Obě přenosové cesty považujeme za unilaterální, tedy přenos energie je realizován jen jedním směrem. Úkolem zpětné vazby je změna vlastností obvodu. Typ zpětné vazby obvodu je odvozován od výstupní veličiny obvodu a způsobu řazení zpětnovazební veličiny na vstupu obvodu. Vazba je napěťová nebo proudová a sériová nebo paralelní. Sériová řadí na vstupu obvodu zpětnovazební veličinu - napětí do série s budícím napětím zdroje a paralelní řadí na vstupu obvodu zpětnovazební veličinu - proud paralelně s budícím proudem zdroje.

? **Otázky 6.1.**

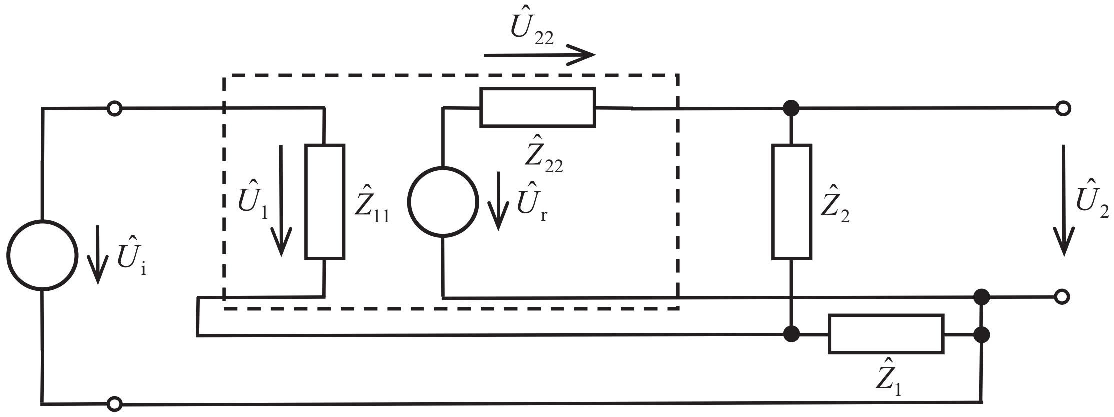
1. Co je to přímá přenosová cesta?
2. Co je to zpětnovazební přenosová cesta?
3. Jak zajistíme, aby pasivní zpětnovazební cesta byla unilatereální?
4. Z jakého zdroje budíme vstup obvodu při sériové napěťové vazbě?
5. Z jakého zdroje budíme vstup obvodu při paralelní proudové vazbě?
6. Které typy zpětné vazby rozlišujeme podle druhu výstupní veličiny?
7. Které typy zpětné vazby rozlišujeme podle způsobu řazení zpětnovazební veličiny na vstupu obvodu, má-li zpětnou vazbu?
8. Jaký tvar má výsledný přenos obvodu bez ohledu na typ zpětné vazby?

Úloha k řešení 6.1.

Do náhradního obvodu z příkladu 6.1 zakreslete vstupní impedanci a výstupní impedanci zdroje napětí řízeného napětím. Změní se tím přenos přímé cesty?

Řešení:

Doplněním vstupní a výstupní impedanci zdroje vznikne obvod na obr. 6.7, kde přenos přímé cesty,



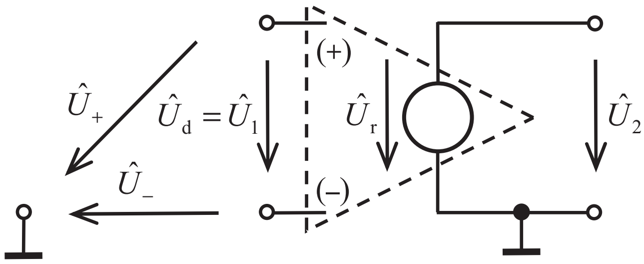
Obr. 6.7 Zpětnovazební obvod se skutečným zdrojem napětí řízeným napětím s konečnou hodnotou vstupní impedance, úloha k řešení 6.1

definovaný $\hat{P}_a = \dfrac{\hat{U}_1}{\hat{U}_2}$ se změní, protože se změní poměry napětí na vstupní i výstupní straně zdroje napětí řízeného napětím. Na vstupní straně vznikl dělič napětí tvořený impedancemi $\hat{Z}_{11}$ a $\hat{Z}_1$, který ovlivňuje přenosy na vstupní i výstupní straně obvodu. Podobně výstupní napětí řízeného zdroje ovlivňuje úbytek na impedanci $\hat{Z}_{22}$. Přes zdánlivou jednoduchost obvodu je výpočet přenosů přímé, ale i zpětnovazební cesty na základě teorie zpětné vazby složitý. Navíc v tomto případě není zpětnovazební síť plně unilaterální, protože dochází k přenosu signálu ze vstupního do výstupního obvodu, takže nakonec je jednodušší řešit tento obvod sestavením obvodových rovnic.

6.2. Operační zesilovač

Operační zesilovač je dnes v analogové elektronice nejrozšířenějším funkčním blokem. Jeho diferenční uspořádání je nakresleno na obr. 6.8. Z dvojbranového pohledu je to zdroj napětí řízený napětím, viz kapitola 3.5. Je-li ideální, jsou proudy do řídících vstupů nulové, což znamená, že diferenční odpor mezi neinvertujícím vstupem (+) a invertujícím vstupem (-) je nekonečně velký, naproti tomu, jak plyne z náhradního schématu, jeho výstupní odpor je nulový. Další vlastností ideálního operačního zesilovače je nekonečně velká hodnota napěťového zesílení $\hat{K}_{21}$.

Výstupní napětí je nejčastěji vztaženo vůči referenčnímu uzlu. Je-li výstupní i vstupní napětí vztaženo vůči zemi, jedná se o trojpól a tedy dvojbran s krajní příčnou nesouměrností. Na tomto místě poznamenejme, že i když je pro popis veličin operačního zesilovače následně zvolen symbolický počet, který pracuje s komplexními čísly, která, jak víme, zastupují v komplexní rovině časové průběhy harmonických napětí a proudů v podobě fázorů, viz kapitola 1.2, platí níže uvedené vztahy i pro veličiny stejnosměrné a okamžité hodnoty. Budou-li parametry operační sítě kmitočtově nezávislé, tj. bude-li síť složena čistě z rezistorů, získáme tedy příslušné vztahy pouhou formální změnou jejich zápisu.



Obr. 6.8 Obvodový model a schematická značka ideálního operačního zesilovače

Pro napětí mezi vstupy ideálního operačního zesilovače $\hat{U}_1$, které také nazýváme diferenční (rozdílové) napětí $\hat{U}_d$, platí z přenosu řízeného zdroje napětí

$$\hat{U}_d = \hat{U}_1 = \lim_{\hat{K}_{21} \to \infty} \frac{\hat{U}_2}{\hat{K}_{21}} = 0\,\mathrm{V},$$

což znamená, že pro rozdíl napětí neinvertujícího a invertujícího vstupu zesilovače platí podle 2. Kirchhoffova zákona

$$\hat{U}_d = \hat{U}_1 = \hat{U}_+ - \hat{U}_- = 0$$

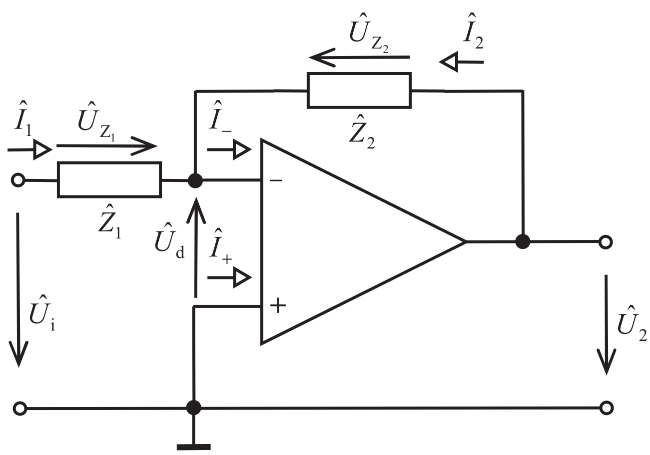
a tedy i

$$\hat{U}_+ = \hat{U}_-.$$

Napětí na invertujícím vstupu a neinvertujícím vstupu ideálního operačního zesilovače jsou stále stejná, a proto hovoříme o tzv. virtuálním zkratu (propojení). Virtuální proto, že diferenční napětí je sice nulové, ale nevtéká žádný proud do vstupů zesilovače, což s výhodou využíváme při analýze obvodů s operačními zesilovači v lineárním režimu, kdy existuje úměra mezi vstupním a výstupním napětím zesilovače.

❑ Invertující zesilovač s ideálním operačním zesilovačem

Invertující zesilovač získáme doplněním ideálního operačního zesilovače o paralelní napěťovou zpětnou vazbu zařazením impedance $\hat{Z}_2$ mezi výstup a invertující vstup zesilovače a zapojením impedance $\hat{Z}_1$ do uzlu s invertujícím vstupem zesilovače podle obr. 6.9.



Obr. 6.9 Zapojení invertujícího operačního zesilovače

Napěťový přenos zesilovače určíme přímou aplikací Kirchhoffových zákonů. Z 1. Kirchhoffova zákona pro uzel na vstupu zesilovače platí pro kladný referenční proud orientovaný z uzlu

$$-\hat{I}_1 - \hat{I}_2 + \hat{I}_- = 0 .$$

Ideální zesilovač má nekonečně velký diferenční (vstupní) odpor, takže proud $\hat{I}_-$ je nulový a platí

$$\hat{I}_1 = -\hat{I}_2 .$$

Pro smyčku na vstupu zesilovače podle 2. Kirchhoffova zákona platí pro kladný oběh smyčky zvolený ve směru hodinových ručiček

$$\hat{U}_{Z_1} - \hat{U}_{\mathrm{d}} - \hat{U}_{\mathrm{i}} = 0$$

a zpětnovazební smyčku

$$\hat{U}_2 + \hat{U}_{\mathrm{d}} - \hat{U}_{Z_2} = 0 .$$

Ideální zesilovač má diferenční napětí $\hat{U}_{\mathrm{d}}$ nulové (virtuální zkrat), takže pro obě smyčky platí po aplikaci zobecněného Ohmova zákona

$$\hat{U}_{\mathrm{i}} = \hat{U}_{Z_1} = \hat{Z}_1 \hat{I}_1$$

a

$$\hat{U}_2 = \hat{U}_{Z_2} = \hat{Z}_2 \hat{I}_2 .$$

Po vyjádření proudů z těchto rovnic a dosazení do 1. Kirchhoffova zákona získáme rovnici

$$\frac{\hat{U}_{\mathrm{i}}}{\hat{Z}_1} = -\frac{\hat{U}_2}{\hat{Z}_2} .$$

Napěťový přenos, který udává zesílení obvodu, obdržíme úpravou této rovnice

$$\hat{P}_{\mathrm{U}} = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_{\mathrm{i}}} = -\frac{\hat{Z}_2}{\hat{Z}_1} .$$

Z definice napěťového přenosu plyne, že invertující zapojení zesilovače, pokud je zpětná vazba kmitočtově nezávislá, obrací fázi budícího napětí $\hat{U}_{\mathrm{i}}$. Zpětná vazba je záporná, protože výstupní napětí je přivedeno na invertující vstup operačního zesilovače.

Vstupní impedanci invertujícího zapojení určíme ze zobecněného Ohmova zákona

$$\hat{Z}_{\mathrm{vst}} = \frac{\hat{U}_{\mathrm{i}}}{\hat{I}_1} = \frac{\hat{U}_{Z_1}}{\hat{I}_1} = \frac{\hat{Z}_1 \hat{I}_1}{\hat{I}_1} = \hat{Z}_1 ,$$

ze kterého vidíme, že její hodnota není již neomezeně velká, tak jako v případě diferenčního (vstupního) odporu ideálního zesilovače. Výstupní impedance je nulová.

Příklad 6.2.

Odvoďte napěťový přenos invertujícího zesilovače s ideálním operačním zesilovačem užitím vztahu pro celkový přenos obvodu se zpětnou vazbou.

♦

Pro paralelní napěťovou zpětnou vazbu zavedenou přes impedanci $\hat{Z}_2$ z výstupu na invertující vstup operačního zesilovače a její přenos platí

$$\hat{P}_\mathrm{z} = \frac{\hat{I}_1}{\hat{U}_2}.$$

Z 1. Kirchhoffova zákona pro uzel na vstupu zesilovače na obr. 6.9 platí

$$\hat{I}_1 = -\hat{I}_2$$

a přenos zpětovazební cesty je

$$\hat{P}_\mathrm{z} = \frac{\hat{I}_1}{\hat{U}_2} = \frac{-\hat{I}_2}{\hat{U}_2} = -\frac{1}{\hat{Z}_2}.$$

Ideální operační zesilovač má nekonečně velké zesílení, takže přenos přímé cesty $\hat{P}_\mathrm{a}$ je neomezený a celkový přenos je dán přenosem zpětnovazební cesty

$$\hat{P}_\mathrm{i} = \lim_{\hat{P}_\mathrm{a}\to\infty} \frac{\hat{P}_\mathrm{a}}{1+\hat{P}_\mathrm{a}\hat{P}_\mathrm{z}} = \lim_{\hat{P}_\mathrm{a}\to\infty} \frac{\hat{P}_\mathrm{a}}{\hat{P}_\mathrm{a}} \frac{1}{\frac{1}{\hat{P}_\mathrm{a}}+\hat{P}_\mathrm{z}} = \frac{1}{\hat{P}_\mathrm{z}} = -\hat{Z}_2.$$

Bezrozměrný napěťový přenos pak získáme dosazením za proud $\hat{I}_1$ do zobecněného Ohmova zákona a úpravou celkového přenosu

$$\hat{P}_\mathrm{i} = \frac{1}{\hat{P}_z} = \frac{\hat{U}_2}{\hat{I}_1} = \frac{\hat{U}_2}{\frac{\hat{U}_\mathrm{i}}{\hat{Z}_1}} = -\hat{Z}_2$$

do tvaru

$$\hat{P}_\mathrm{U} = \frac{\hat{P}_\mathrm{i}}{\hat{Z}_1} = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_\mathrm{i}} = -\frac{\hat{Z}_2}{\hat{Z}_1}.$$

❑ Neinvertující zesilovač s ideálním operačním zesilovačem

Neinvertující zesilovač získáme doplněním ideálního operačního zesilovače o sériovou napěťovou zpětnou vazbu zařazením impedance $\hat{Z}_2$ mezi výstup a neinvertující vstup zesilovače, která s impedancí $\hat{Z}_1$ tvoří dělič napětí, viz obr. 6.10.

Napěťový přenos zesilovače určíme přímou aplikací Kirchhoffových zákonů. Z 1. Kirchhoffova zákona pro uzel na vstupu zesilovače platí pro kladný referenční proud orientovaný z uzlu

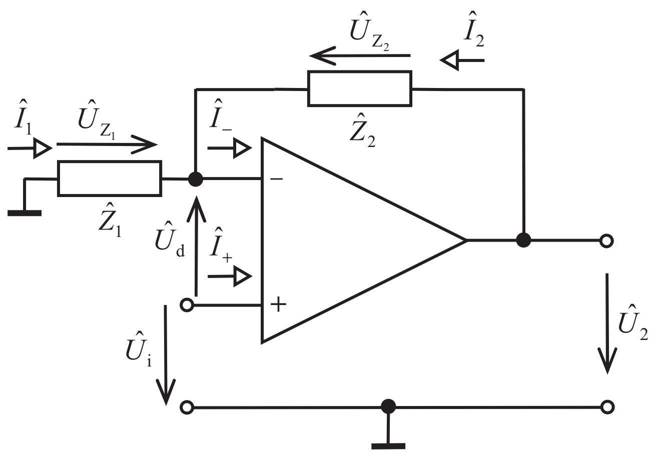
$$-\hat{I}_1 - \hat{I}_2 + \hat{I}_- = 0.$$

Ideální zesilovač má nekonečně velký diferenční (vstupní) odpor, takže proud $\hat{I}_-$ je nulový a platí tedy

$$\hat{I}_1 = -\hat{I}_2.$$

Pro smyčku na vstupu zesilovače podle 2. Kirchhoffova zákona platí pro kladný oběh smyčky zvolený ve směru hodinových ručiček

$$\hat{U}_{\mathrm{Z}_1} - \hat{U}_\mathrm{d} + \hat{U}_\mathrm{i} = 0$$



Obr. 6.10 Zapojení neinvertujícího operačního zesilovače

a zpětnovazební smyčku

$$\hat{U}_2 + \hat{U}_{Z_1} - \hat{U}_{Z_2} = 0 .$$

Ideální zesilovač má diferenční napětí $\hat{U}_d$ nulové (virtuální zkrat), což zjednoduší zápis rovnice první smyčky. Aplikací zobecněného Ohmova zákona a 1. Kirchhoffova zákona na obě smyčky dostaneme

$$\hat{U}_i = -\hat{U}_{Z_1} = -\hat{Z}_1 \hat{I}_1 = \hat{Z}_1 \hat{I}_2$$

a

$$\hat{U}_2 = -\hat{U}_{Z_1} + \hat{U}_{Z_2} = -\hat{Z}_1 \hat{I}_1 + \hat{Z}_2 \hat{I}_2 = \hat{Z}_1 \hat{I}_2 + \hat{Z}_2 \hat{I}_2 = \left(\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2\right)\hat{I}_2 .$$

Dosazením těchto napětí do vztahu pro napěťový přenos obdržíme rovnici

$$\hat{P}_U = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_i} = \frac{\left(\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2\right)\hat{I}_2}{\hat{Z}_1 \hat{I}_2} = \frac{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2}{\hat{Z}_1} = 1 + \frac{\hat{Z}_2}{\hat{Z}_1} .$$

Z definice napěťového přenosu plyne, že neinvertující zapojení zesilovače, pokud je zpětná vazba kmitočtově nezávislá, zachovává fázi budícího napětí $\hat{U}_i$. Zpětná vazba je záporná, protože výstupní napětí je přivedeno na neinvertující vstup operačního zesilovače.

Vstupní impedance neinvertujícího zapojení je stejná jako diferenční (vstupní) odpor ideálního zesilovače, čili nekonečně velká a výstupní impedance je nulová.

Jak již bylo úvodem zmíněno, ideální operační zesilovač je elektronický prvek modelovaný zdrojem napětí řízeným napětím, tedy aktivním dvojbranem se závislým zdrojem. Jeho technická realizace, reálný operační zesilovač je neautonomní dvojbran, který vyžaduje ke své činnosti externí napájení ze souměrného stejnosměrného zdroje napětí o velikosti napětí $\pm U_N$. Z tohoto důvodu je v dalším textu u schematické značky operačního zesilovače kresleno i napájecí napětí, které se objeví na jeho výstupu, a to v polaritě dle jeho zapojení, jestliže absolutní hodnota součinu zesílení a vstupního napětí vyhoví podmínce $\left|\hat{K}_{21}\hat{U}_1\right| \geq \left|\pm U_N\right|$. Poznamenejme, že podmínka je splněna jen za předpokladu, že zanedbáme úbytky napětí na prvcích obvodu, pomocí kterých v technické praxi realizujeme operační zesilovač. Zesilovač je potom v saturaci a přestává pracovat jako lineární prvek. Kladné saturaci odpovídá $u_2 = +U_{2sat} = +U_N$ a záporné $u_2 = -U_{2sat} = -U_N$.

Komparátor

Komparátor, je ideální operační zesilovač s nezapojenou zpětnou vazbou, viz obr. 6.11, který pracuje v nelineárním režimu, protože jeho diferenční napětí je nenulové s výjimkou rovnosti napětí $u_+ = u_-$, kdy má právě nulovou hodnotu a kdy na jeho výstupu dochází k okamžité změně polarity výstupního napětí. Říkáme také, že ideální operační zesilovač má nekonečně velkou dobu přeběhu tj. $\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}$ a nekonečně velkou šířku pásma, tudíž výstupní napětí je pravoúhlé. Kladnou hodnotu má, platí-li na vstupu zesilovače pro napětí podmínka $u_+ > u_-$ a zápornou hodnotu při podmínce $u_+ < u_-$. Velikost výstupního napětí ideálního operačního zesilovače s nezapojenou zpětnou vazbou je vzhledem k jeho nekonečně velkému zesílení neomezená, ale u reálného operačního zesilovače je limitována velikostí napájecího napětí. Mluvíme o saturaci výstupního napětí, zmíněné na konci předcházejícího odstavce této kapitoly. Zavedením kladné zpětné vazby tvořené děličem napětí R_1, R_2 můžeme zlepšit vlastnosti komparátoru. Pro napětí neinvertujícího vstupu u_+ ideálního operačního zesilovače, kam je zavedena zpětná vazba, platí podle 2. Kirchhoffova zákona

$$u_+ = U_\mathrm{i} + u_{\mathrm{R}_1},$$

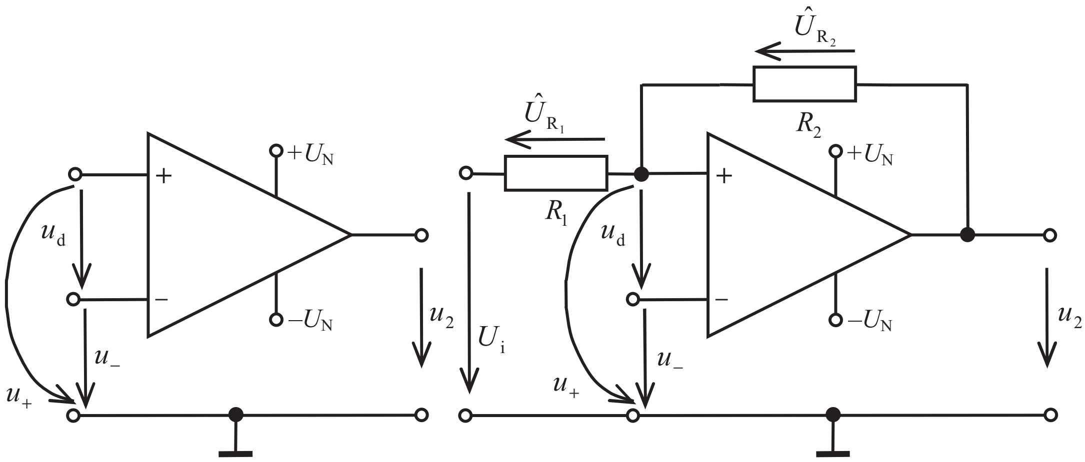
kde U_i je referenční napětí a pro napětí na rezistoru R_1 platí z děliče napětí

$$u_{\mathrm{R}_1} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}\left(u_2 - U_\mathrm{i}\right).$$

Po dosazení a úpravě získáme vztah

$$u_+ = U_\mathrm{i} + \frac{R_1}{R_1 + R_2}\left(u_2 - U_\mathrm{i}\right) = \frac{R_1}{R_1 + R_2}u_2 + \left(1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2}\right)U_\mathrm{i} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}u_2 + \frac{R_2}{R_1 + R_2}U_\mathrm{i}.$$

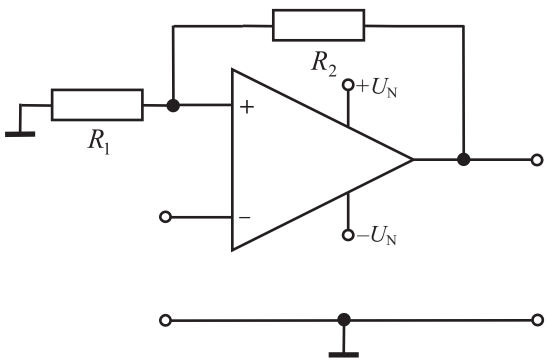
Při dané hodnotě referenčního napětí U_i a měnícím se napětí u_- se při dosažení komparační podmínky $u_+ = u_-$ mění polarita napětí, takže při kladné saturaci výstupního napětí má hodnotu $u_+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2}U_{2\mathrm{sat}} + \frac{R_2}{R_1 + R_2}U_\mathrm{i}$ a záporné saturaci hodnotu $u_+ = -\frac{R_1}{R_1 + R_2}U_{2\mathrm{sat}} + \frac{R_2}{R_1 + R_2}U_\mathrm{i}$. Vlivem kladné zpětné vazby vykazuje výstupní napětí hysterezi s absolutní hodnotou danou vztahem $2 \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}\left|u_2\right|$, tedy při symetrickém napájení $2 \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}U_\mathrm{N}$, takže při dostatečné šířce hystereze, komparační podmínka není citlivá na šumy napětí u_-. U kladné polarity výstupního napětí totiž nedojde k překlopení polarity výstupního napětí při hodnotě napětí $u_- = \frac{R_2}{R_1 + R_2}U_\mathrm{i}$, ale až při dosažení hodnoty napětí $u_- = \frac{R_1}{R_1 + R_2}U_{2\mathrm{sat}} + \frac{R_2}{R_1 + R_2}U_\mathrm{i}$. Podobně u záporné polarity výstupního napětí nedojde k překlopení polarity výstupního napětí při hodnotě napětí $u_- = \frac{R_2}{R_1 + R_2}U_\mathrm{i}$, ale až při dosažení hodnoty napětí $u_- = -\frac{R_1}{R_1 + R_2}U_{2\mathrm{sat}} + \frac{R_2}{R_1 + R_2}U_\mathrm{i}$.



Obr. 6.11 Zapojení komparátoru: komparátor, komparátor s kladnou zpětnou vazbou (s hysterezí)

Příklad 6.3.

Určete hodnoty napětí, při kterých bude docházet ke změně výstupního napětí komparátoru na obr. 6.12 při napájení jeho invertujícího vstupu harmonickým napětím o efektivní hodnotě 2 V, který je napájen ze souměrného stejnosměrného zdroje o napětích $U_N = \pm 15$ V. Rezistory zpětnovazební sítě mají hodnoty $R_1 = 10$ kΩ a $R_2 = 90$ kΩ. Nakreslete časové průběhy vstupních a výstupního napětí.



Obr. 6.12 Komparátor s hysterezí, příklad 6.3

♦

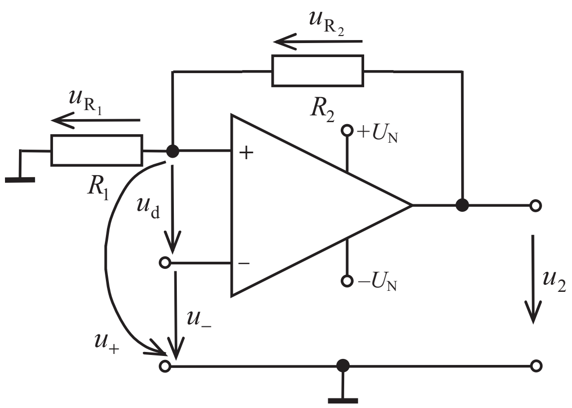
V důsledku velkého zesílení operačního zesilovače, ale i díky účinku kladné zpětné vazby bude výstupní napětí zesilovače v saturaci podle relace mezi napětími u_+ a u_-, a to kladné, kdy výstupní napětí bude $u_2 = +15\,\mathrm{V}$ pro $u_+ > u_-$ a záporné, kdy bude $u_2 = -15\,\mathrm{V}$ a $u_+ < u_-$. Počítací šipky jsou zakresleny na obr. 6.13. Napětí neinvertujícího vstupu je definováno děličem napětí. Ke změně výstupního napětí dochází při rovnosti napětí invertujícího a neinvertujícího vstupu operačního zesilovače

$$u_- = u_+ = u_{R_1} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u_2 = \frac{10 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^3 + 90 \cdot 10^3} 15 = 1{,}5\,\mathrm{V} \qquad \text{a} \qquad u_2 = +15\,\mathrm{V}$$

a

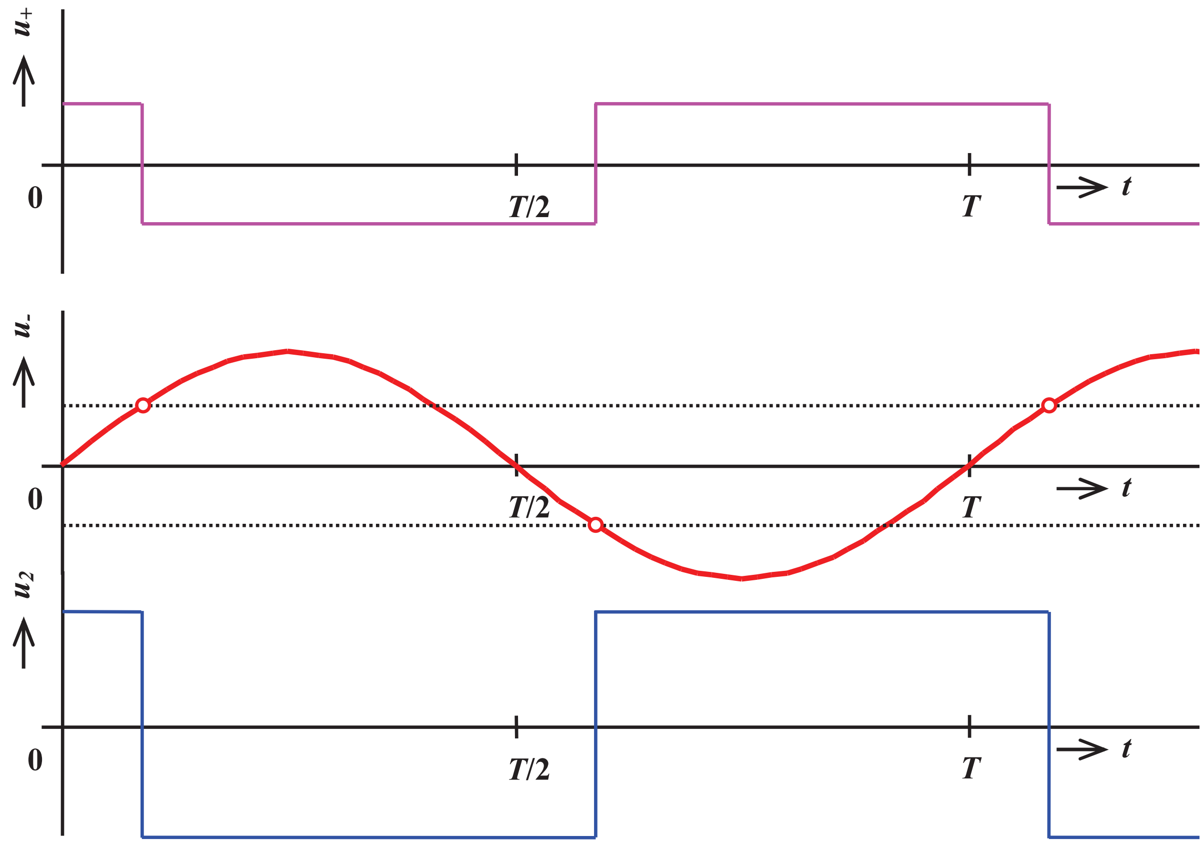
$$u_{-} = u_{+} = u_{R_1} = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} u_2 = -\frac{10 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^3 + 90 \cdot 10^3} 15 = -1{,}5\ \mathrm{V} \quad \text{a} \qquad u_2 = -15\ \mathrm{V},$$

protože rezistor R_1 je uzemněn, srovnej s obr. 6.11, dosadíme do výše odvozených vztahů komparátoru za hodnotu napětí $U_\mathrm{i} = 0\ \mathrm{V}$. Kmitočet výstupního napětí je stejný jako má harmonické napětí u_{-}, protože výstupní napětí je vedeno harmonickým zdrojem.



Obr. 6.13 Komparátor s hysterezí, příklad 6.3, zavedení počítacích šipek napětí

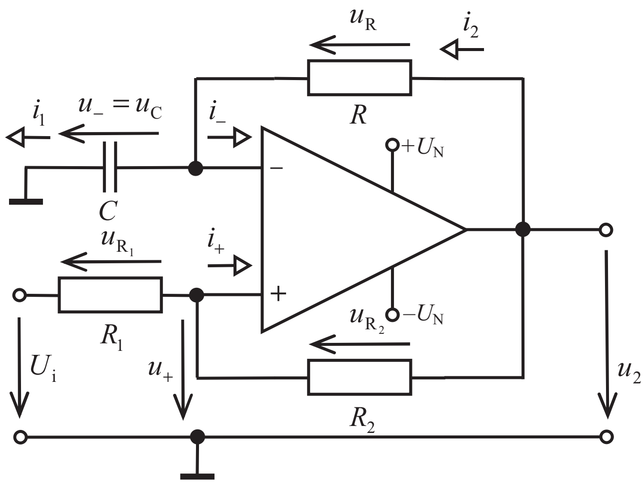
Časové průběhy napětí komparátoru jsou zobrazeny na obr. 6.14. Okamžiky komparace jsou v grafu vyznačeny červenými body a jsou vedeny harmonickým napětím invertujícího vstupu u_{-}. Výstupní obdélníkové napětí u_2 tak má stejný kmitočet jako harmonické napětí. Komparátor s hysterezí tedy slouží jako tvarovací obvod.



Obr. 6.14 Komparátor s hysterezí: okamžité hodnoty napětí neinvertujícího vstupu, invertujícího vstupu, výstupu operačního zesilovače, příklad 6.3

❑ Astabilní klopný obvod

Astabilní klopný obvod, jak plyne z obr. 6.15, využívá ke své funkci kladnou i zápornou zpětnou vazbu ke generování výstupního pravoúhlého průběhu napětí klopného obvodu, jehož kmitočet závisí na hodnotách parametrů zpětnovazební sítě. Jde o spojení komparátoru a invertujícího zapojení operačního zesilovače.



Obr. 6.15 Astabilní klopný obvod s operačním zesilovačem

Úrovně, při kterých dochází k změně výstupního napětí komparátoru u_2 cyklicky ze saturační úrovně $+U_{2sat} = +U_N$ na $-U_{2sat} = -U_N$ a z úrovně $-U_{2sat} = -U_N$ na $+U_{2sat} = +U_N$ jsou dány rovnicí

$$u_+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u_2 + \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_i ,$$

kam dosadíme za $u_2 = +U_{2sat}$ a $u_2 = -U_{2sat}$.

Tato hodnota výstupního napětí slouží jako počáteční podmínka napětí kapacitoru $u_C(0)$.

Zápornou zpětnou vazbu operačního zesilovače tvoří RC obvod, jehož odezva je daná změnou výstupního napětí komparátoru, který má obdélníkový průběh. Modelujeme jím odezvu RC obvodu na jednotkový skok, viz kapitola 2.1.

Uvažujme nejprve chování RC obvodu v přechodném ději při změně výstupního napětí ze záporné saturační hodnoty $-U_{2sat}$ na kladnou $+U_{2sat}$ podle obr. 6.16. Obvod je popsán rovnicí

$$u_R + u_C = u_2 ,$$

ze které po dosazení za napětí u_R z Ohmova zákona, užití rovnice kontinuity $i = i_1 = i_2 = \frac{dq}{dt} = C\frac{du_C}{dt}$ a dosazení hodnoty výstupního napětí $u_2 = +U_{2sat}$ získáme lineární diferenciální rovnici 1. řádu, viz kapitola 2.2,

$$Ri + u_C = R\frac{dq}{dt} + u_C = RC\frac{du_C}{dt} + u_C = U_{2sat} ,$$

jejímž řešením je odezva, napětí kapacitoru

$$u_C = U_{2sat}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + u_C(0)e^{-\frac{t}{\tau}} = U_{2sat} + \left(u_C(0) - U_{2sat}\right)e^{-\frac{t}{\tau}} ,$$

kde časová konstanta je $\tau = RC$. Počáteční napětí kapacitoru $u_C(0)$ má v našem případě hodnotu první komparační úrovně U_{k_1}. Je to minimálně možná hodnota napětí, na kterou se nabije kapacitor *C*, což zapíšeme

$$u_C(0) = U_{k_1} = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} U_{2sat} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_i .$$

Výsledný tvar řešení rovnice je tedy

$$u_C = U_{2sat}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + u_C(0)\, e^{-\frac{t}{\tau}} = U_{2sat} + \left(U_{k_1} - U_{2sat}\right) e^{-\frac{t}{\tau}} .$$

Dobu trvání kladného obdélníkového pulsu na výstupu klopného obvodu T_1 zakončenou přechodem výstupního napětí do záporné polarity, určíme tak, že za hodnotu napětí kapacitoru u_C dosadíme hodnotu druhé komparační úrovně

$$U_{k_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U_{2sat} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_i ,$$

která je maximálně možnou kladnou hodnotou, na níž se může nabít kapacitor *C*. Napětí kapacitoru dosáhne této úrovně napětí právě v čase $t = T_1$, což zapíšeme

$$u_C(T_1) = U_{k_2} = U_{2sat} + \left(U_{k_1} - U_{2sat}\right) e^{-\frac{T_1}{\tau}}$$

a po přeskupení členů dostaneme

$$\frac{U_{k_2} - U_{2sat}}{U_{k_1} - U_{2sat}} = e^{-\frac{T_1}{\tau}} .$$

Následnou úpravou získáme vztah

$$\frac{U_{k_1} - U_{2sat}}{U_{k_2} - U_{2sat}} = \frac{1}{e^{-\frac{T_1}{\tau}}} = \frac{e^0}{e^{-\frac{T_1}{\tau}}} = e^{\left(0 - \left(-\frac{T_1}{\tau}\right)\right)} = e^{\frac{T_1}{\tau}} ,$$

jehož logaritmováním a po úpravě nalezneme hledaný vztah pro dobu trvání

$$T_1 = \tau \ln\left(\frac{U_{k_1} - U_{2sat}}{U_{k_2} - U_{2sat}}\right) = \tau \ln\left(\frac{-\frac{R_1}{R_1 + R_2} U_{2sat} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_i - U_{2sat}}{\frac{R_1}{R_1 + R_2} U_{2sat} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_i - U_{2sat}}\right) =$$

$$= \tau \ln\left(\frac{-\frac{2R_1 + R_2}{R_1 + R_2} U_{2sat} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_i}{-\frac{R_2}{R_1 + R_2} U_{2sat} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_i}\right).$$

Dobu trvání záporného obdélníkového pulsu na výstupu klopného obvodu T_2 zakončenou přechodem výstupního napětí do kladné polarity, určíme analogickým postupem, když v příslušných rovnicích si vymění pozice komparační úrovně a otočí se znaménka výstupního saturačního napětí, takže pro dobu trvání T_2 platí

$$T_2 = \tau \ln\left(\frac{U_{k_2} + U_{2sat}}{U_{k_1} + U_{2sat}}\right) = \tau \ln\left(\frac{\frac{R_1}{R_1 + R_2}U_{2sat} + \frac{R_2}{R_1 + R_2}U_i + U_{2sat}}{-\frac{R_1}{R_1 + R_2}U_{2sat} + \frac{R_2}{R_1 + R_2}U_i + U_{2sat}}\right) =$$

$$= \tau \ln\left(\frac{\frac{2R_1 + R_2}{R_1 + R_2}U_{2sat} + \frac{R_2}{R_1 + R_2}U_i}{\frac{R_2}{R_1 + R_2}U_{2sat} + \frac{R_2}{R_1 + R_2}U_i}\right).$$

Součtem dob T_1 a T_2 dostaneme periodu výstupního napětí astabilního klopného obvodu

$$T = T_1 + T_2 = \tau \ln\left(\frac{U_{k_1} - U_{2sat}}{U_{k_2} - U_{2sat}}\right) + \tau \ln\left(\frac{U_{k_2} + U_{2sat}}{U_{k_1} + U_{2sat}}\right) = \tau\left(\ln\left(\frac{U_{k_1} - U_{2sat}}{U_{k_2} - U_{2sat}}\right) + \ln\left(\frac{U_{k_2} + U_{2sat}}{U_{k_1} + U_{2sat}}\right)\right) =$$

$$= \tau \ln\left(\frac{U_{k_1} - U_{2sat}}{U_{k_2} - U_{2sat}} \cdot \frac{U_{k_2} + U_{2sat}}{U_{k_1} + U_{2sat}}\right).$$

Poměrem doby T_1 a T_2 k době periody T je definována střída výstupního napětí. Udává se v procentech. Střída 50 % : 50 % tak odpovídá poměru dob 1:1.

Po dosazení komparačních úrovní a úpravě platí

$$T = \tau \ln\left(\frac{-\left(\frac{2R_1 + R_2}{R_1 + R_2}U_{2sat}\right)^2 + \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}U_i\right)^2}{-\left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}U_{2sat}\right)^2 + \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}U_i\right)^2}\right) = \tau \ln\left(\frac{-\left(\frac{2R_1 + R_2}{R_1 + R_2}U_{2sat}\right)^2 + \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}U_i\right)^2}{\left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right)^2\left(-U_{2sat}^2 + U_i^2\right)}\right).$$

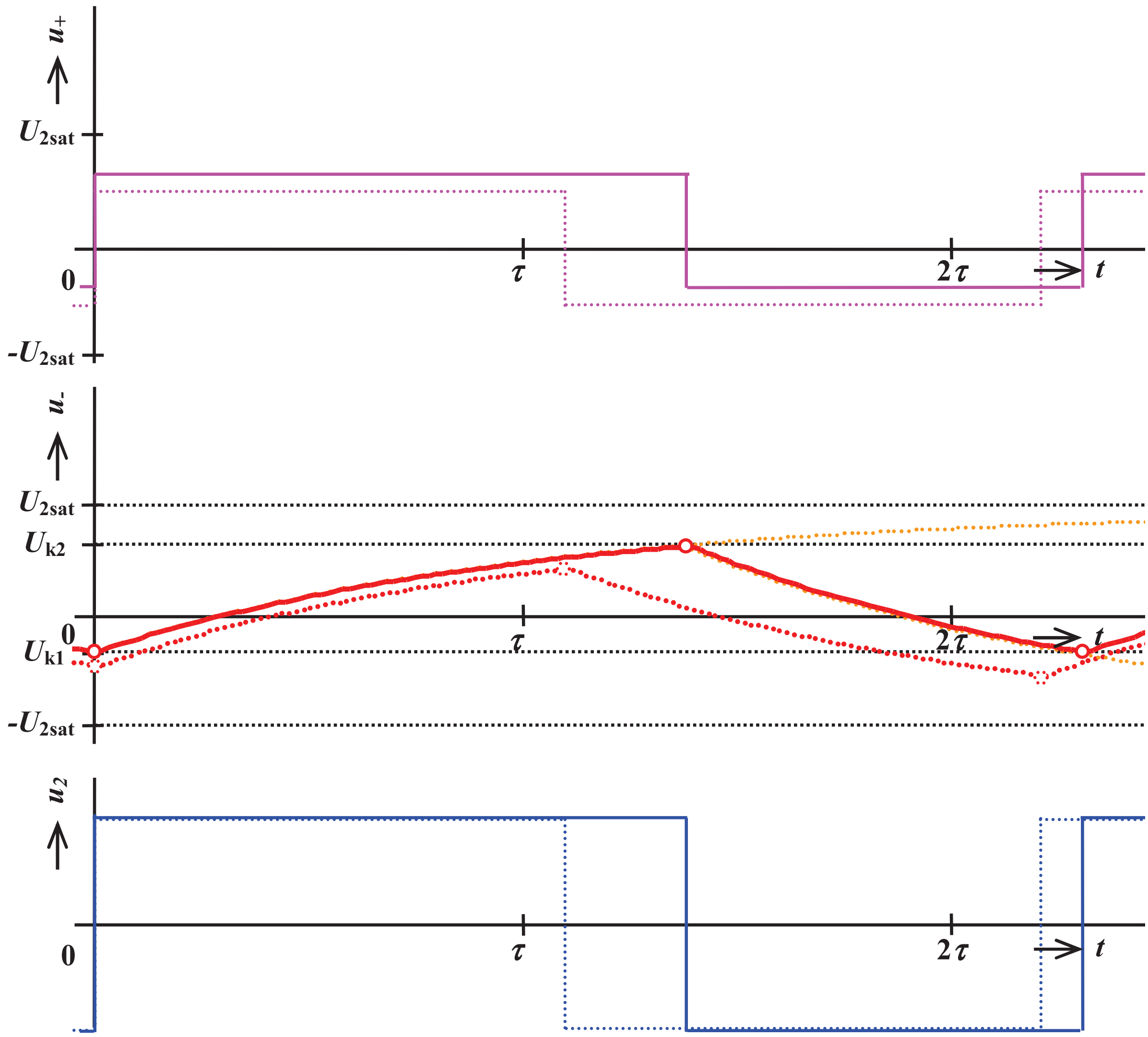
Bude-li napětí $U_i = 0\,\mathrm{V}$, potom se vztah pro periodu T zjednoduší na tvar

$$T = \tau \ln\left(\frac{-\left(\frac{2R_1 + R_2}{R_1 + R_2}U_{2sat}\right)^2}{-\left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}U_{2sat}\right)^2}\right) = 2\tau \ln\left(\frac{2R_1 + R_2}{R_2}\right)$$

a pro $R_1 = R_2$ je $T_1 = T_2$, má perioda výstupního napětí hodnotu

$$T = 2\tau \ln(3)$$

a astabilní klopný obvod generuje pravoúhlé napětí s poměrem doby trvání jeho kladné a záporné okamžité hodnoty 1:1, což je případ tečkovaných průběhů napětí na obr. 6.16. Je-li hodnota napětí nenulová, doby T_1 a T_2 jsou různé a můžeme ním řídit střídu výstupního napětí klopného obvodu, viz obr. 6.16 a průběhy zakreslené plnou čarou, neboť dochází k posunutí obou komparačních úrovní, které již nejsou symetricky umístěné kolem časové osy právě vlivem posunutí průběhu napětí neinvertujícího vstupu operačního zesilovače u_+, způsobeného napětím U_i.



Obr. 6.16 Astabilní klopný obvod s operačním zesilovačem s parametry kladné zpětné vazby $R_1 = R_2$: okamžité hodnoty napětí neinvertujícího vstupu, invertujícího vstupu, výstupu operačního zesilovače pro $U_i = 0$ V (tečkované průběhy) a pro $U_i = U_{2sat}/3$ (průběhy plnou čarou)

Σ Shrnutí pojmů 6.2.

Zápornou zpětnou vazbu využíváme u operačního zesilovače k realizaci jeho invertujícího a neinvertujícího zapojení. Pokud není výstup zesilovače v saturaci vstupní napětí je úměrné výstupnímu napětí. Zesílení obvodu s operačním zesilovačem je dáno vlastnostmi zpětnovazební sítě, jelikož zesílení ideálního zesilovače je nekonečně velké. Neomezené zesílení má za následek i nulové diferenční (rozdílové) napětí mezi jeho neinvertujícím a invertujícím vstupem. Kromě nulového diferenčního napětí, nazývaného také virtuálním zkratem, má ideální operační zesilovač nulové vstupní proudy a tím i nekonečně velký vstupní odpor. Jeho výstupní odpor je nulový, protože obvodovým modelem je zdroj napětí řízený napětím. Operační zesilovač bez zpětné vazby nazýváme komparátorem. Je-li diferenční napětí kladné, je i výstup zesilovače v kladné saturaci. Při záporném diferenčním napětí je výstup zesilovače v záporné saturaci. Zavedením kladné zpětné vazby komparátoru se zavede hystereze do překlápění výstupního napětí. Současné zavedení kladné i zpětné vazby využíváme při realizaci astabilního klopného obvodu, u něhož kmitočet výstupního pravoúhlého napětí závisí na parametrech kladné i záporné zpětné vazby. Pokud je zapojen zdroj napětí s nenulovou hodnotou v obvodu kladné zpětné vazby liší se střída výstupního pravoúhlého napětí astabilního klopného obvodu daná poměrem dob odpovídajících kladné a záporné okamžité hodnotě výstupního napětí vůči době trvání jeho periody od 50 % : 50 % resp. od poměru 1:1. Výstup operačního zesilovače je v saturaci, překročí-li u reálného operačního zesilovače napájeného symetricky ze zdroje o velikosti napětí $\pm U_{\mathrm{N}}$ absolutní hodnota součinu zpětnovazebního zesílení a vstupního napětí absolutní hodnotu napájecího napětí, což se projeví nenulovou hodnotou diferenční napětí zesilovače.

? Otázky 6.2.

1. Jaké jsou vlastnosti ideálního operačního zesilovače?
2. Co je to virtuální zkrat?
3. Čím jsou určeny přenosové vlastnosti obvodu s ideálním operačním zesilovačem?
4. Kterou zpětnou vazbu vyžíváme u invertujícího a neinvertujícího zapojení operačního zesilovače?
5. Jak se co do velikosti liší zesílení invertujícího a neinvertujícího operačního zesilovače?
6. Co je to komparátor a jak je realizován?
7. Jaký vliv má kladná zpětná vazba na funkci komparátoru?
8. Kterou zpětnou vazbu vyžíváme u astabilního klopného obvodu?
9. Na čem závisí kmitočet výstupního napětí astabilního klopného obvodu?
10. Jakým způsobem lze měnit střídu výstupního napětí astabilního klopného obvodu s operačním zesilovačem?

Úloha k řešení 6.2.

Určete velikost výstupního napětí obvodu s reálným operačním zesilovačem zapojeným v neinvertujícím zapojení, který je napájen ze symetrického zdroje napětí o velikosti $\pm 15\,\mathrm{V}$ pro hodnotu odporu rezistoru $R_1 = 10\,\mathrm{k\Omega}$ a hodnoty odporů rezistoru a) $R_2 = 100\,\mathrm{k\Omega}$ a $R_2 = 150\,\mathrm{k\Omega}$ b) při hodnotě vstupního stejnosměrného napětí 1 V.

Řešení:

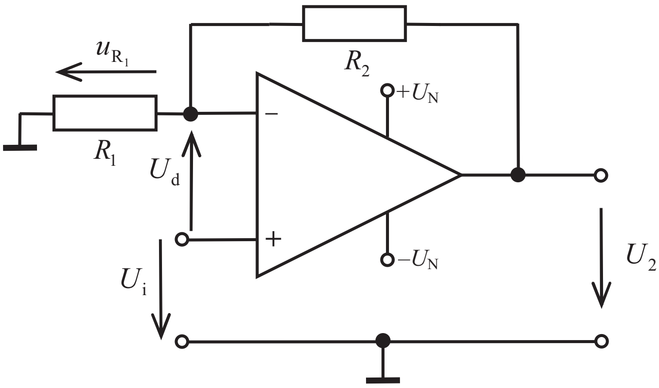
Operační zesilovač na obr. 6.17 je buzen stejnosměrně, takže ho můžeme popsat stejnosměrnými veličinami a nemusíme používat k popisu fázory. Za předpokladu, že pro diferenční odpor zesilovače platí $R_{\mathrm{d}} >> R_1, R_2$ a zesílení $A_{\mathrm{d}} >> 1 + \frac{R_1}{R_2}$ můžeme zesilovač považovat za ideální. Pro přenos zesilovače tak platí $P_{\mathrm{U}} = \frac{U_2}{U_{\mathrm{i}}} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$. Reálně je zesilovač napájen ze souměrného zdroje napětí, takže výstupní napětí zesilovače nemůže přesáhnout jeho hodnotu.

a) $U_2 = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) U_{\mathrm{i}} = \left(1 + \frac{10^5}{10^4}\right) \cdot 1 = 11\,\mathrm{V}$, $U_{\mathrm{d}} = U_{\mathrm{i}} - U_{\mathrm{R_1}} = U_{\mathrm{i}} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} U_2 = 1 - \frac{10^4}{10^4 + 10^5} 11 = 0\,\mathrm{V}$,

zesilovač pracuje v lineárním režimu, neboť $U_{\mathrm{d}} = 0\,\mathrm{V}$,

b) $U_2 = \left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)U_\mathrm{i} = \left(1+\frac{15\cdot 10^4}{10^4}\right)\cdot 1 = 16\,\mathrm{V}$, $U_2 > U_\mathrm{N}$, takže $U_2 = 15\,\mathrm{V}$ a $U_\mathrm{d} = U_\mathrm{i} - U_{\mathrm{R}_1} =$

$= U_\mathrm{i} - \frac{R_1}{R_1+R_2}U_2 = 1 - \frac{10^4}{10^4+15\cdot 10^4}15 = 62{,}5\,\mathrm{mV}$, zesilovač pracuje v nelineárním režimu, neboť $U_\mathrm{d} \neq 0\,\mathrm{V}$.



Obr. 6.17 Neinvertující zapojení stejnosměrně buzeného operačního zesilovače, úloha k řešení 6.2

|6.3. Vliv zpětné vazby na vlastnosti zesilovače

Jak bylo ukázáno úvodem kapitoly 6.1, bez ohledu na zapojení zpětnovazebního obvodu, můžeme obecně popsat obvod se zpětnou vazbou přenosem

$$\hat{P} = \frac{\hat{P}_\mathrm{a}}{1+\hat{P}_\mathrm{a}\hat{P}_\mathrm{z}}$$

a vyšetřovat vlastnosti zpětné vazby zcela obecně bez ohledu na zapojení zesilovače.

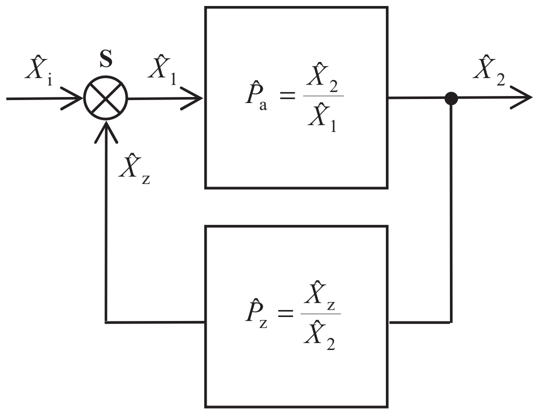
❑ Obecná zpětná vazba

Obecné blokové schéma zpětnovazební struktury je na obr. 6.18, kde blok **S** definuje způsob slučování zpětnovazebního $\hat{X}_\mathrm{z}$ a vstupního $\hat{X}_\mathrm{i}$ signálu. Přenos přímé větve je $\hat{P}_\mathrm{a} = \frac{\hat{X}_2}{\hat{X}_1}$ a zpětné větve $\hat{P}_\mathrm{z} = \frac{\hat{X}_\mathrm{z}}{\hat{X}_2}$. Pro vstupní signál platí $\hat{X}_\mathrm{i} = \hat{X}_1 + \hat{X}_\mathrm{z}$, tedy i $\hat{X}_1 = \hat{X}_\mathrm{i} - \hat{X}_\mathrm{z}$, takže zpětná vazba je záporná, výstupní signál se odečítá od vstupního signálu a pro přenos zpětnovazební struktury můžeme odvodit výše uvedený vztah

$$\hat{P} = \frac{\hat{P}_\mathrm{a}}{1+\hat{P}_\mathrm{a}\hat{P}_\mathrm{z}},$$

dosazením a úpravou přenosu

$$\hat{X}_2 = \hat{P}_a\hat{X}_1 = \hat{P}_a\left(\hat{X}_i - \hat{X}_z\right) = \hat{P}_a\left(\hat{X}_i - \hat{P}_z\hat{X}_2\right).$$



Obr. 6.18 Blokové schéma zpětnovazební struktury

Vlastnosti zpětnovazební struktury jsou dány jmenovatelem přenosu $\hat{P}$. Typ zpětné vazby posuzujeme podle relace mezi absolutní hodnotou přenosu zpětnovazební struktury a absolutní hodnotou přenosu přímé cesty, pro který platí

$$\left|\hat{P}\right| = \left|\frac{\hat{P}_a}{1+\hat{P}_a\hat{P}_z}\right| = \frac{\left|\hat{P}_a\right|}{\left|1+\hat{P}_a\hat{P}_z\right|} \geq \left|\hat{P}_a\right| .$$

Je-li absolutní hodnota jmenovatele přenosu $\left|1+\hat{P}_a\hat{P}_z\right| > 1$, velikost přenosu zpětnovazební struktury $\left|\hat{P}\right|$ je menší než velikost přenosu přímé cesty $\left|\hat{P}_a\right|$, protože působí proti stavu bez zpětné vazby a zpětnou vazbu nazýváme zápornou. Platí-li $\left|1+\hat{P}_a\hat{P}_z\right| \leq 1$, velikost přenosu zpětnovazební struktury $\left|\hat{P}\right|$ je větší než velikost přenosu přímé cesty $\left|\hat{P}_a\right|$ a zpětnou vazbu nazýváme kladnou. Budeme-li uvažovat, že přenosy přímé a zpětnovazební cesty jsou čistě reálné, což je typický případ nízkofrekvenčních zesilovačů s odporovou zpětnovazební sítí, výstupní signál po průchodu zpětnovazební cesty je při záporné zpětné vazbě v protifázi se vstupním signálem a při kladné zpětné vazbě je s ním ve fázi. Reálný je tedy i přenos zpětnovazební struktury a pro zápornou zpětnou vazbu tak platí $P < P_a$ a kladnou zpětnou vazbu $P > P_a$. Poznamenejme, že v případě záporné zpětné vazby je obecně jedno, zda je signál invertován přenosem přímé cesty (obvodem se záporným zesílením např. operační zesilovač) nebo přenosem zpětnovazební cesty (obvodem otáčejícím fázi výstupního signálu).

Zvláštním případem kladné zpětné vazby, je případ kdy hodnota jmenovatele přenosu $\hat{P}$ je nulová, což nastane, platí-li obecně $\hat{P}_z = -\frac{1}{\hat{P}_a}$, kdy přenos zpětnovazební struktury roste nade všechny meze (díky nelinearitě reálných struktur však v praxi dosáhne konečné hodnoty). Struktura se dostává na mez stability a produkuje výstupní signál i tehdy, je-li vstupní signál nulový. Zpětnovazební struktura tak samovolně generuje kmity na kmitočtu daném jejími parametry. Stává se zdrojem oscilací, které mohou být žádoucí, ale i nežádoucí. Jde-li o oscilace žádoucí, mluvíme o oscilátorech nebo klopných obvodech, u kterých je podmínka oscilací splněna v širokém pásmu kmitočtů.

Jak již bylo uvedeno v kapitole 6.1, roste-li hodnota přenosu přímé cesty nade všechny meze $\hat{P}_a \to \infty$, jsou vlastnosti zpětnovazební struktury (obvodu) určeny výhradně přenosem zpětnovazební cesty $\hat{P}_z$, takže platí $\hat{P} = \frac{1}{\hat{P}_z}$. Abychom postihli vliv zpětné vazby na změnu přenosu přímé cesty, derivujme přenos zpětnovazební struktury podle přenosu přímé cesty

$$\frac{\mathrm{d}\hat{P}}{\mathrm{d}\hat{P}_\mathrm{a}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}P_a}\left(\frac{\hat{P}_\mathrm{a}}{1+\hat{P}_\mathrm{a}\hat{P}_\mathrm{z}}\right) = \frac{1\cdot(1+\hat{P}_\mathrm{a}\hat{P}_\mathrm{z})-\hat{P}_\mathrm{a}\hat{P}_\mathrm{z}}{(1+\hat{P}_\mathrm{a}\hat{P}_\mathrm{z})^2} = \frac{1}{(1+\hat{P}_\mathrm{a}\hat{P}_\mathrm{z})^2},$$

kterou normujme vůči hodnotě poměru přenosů $\dfrac{\hat{P}}{\hat{P}_\mathrm{a}}$

$$\frac{\dfrac{\mathrm{d}\hat{P}}{\mathrm{d}\hat{P}_\mathrm{a}}}{\dfrac{\hat{P}}{\hat{P}_\mathrm{a}}} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\hat{P}}{\hat{P}}}{\dfrac{\mathrm{d}\hat{P}_\mathrm{a}}{\hat{P}_\mathrm{a}}} = \frac{\hat{P}_\mathrm{a}}{\hat{P}}\frac{\mathrm{d}\hat{P}}{\mathrm{d}\hat{P}_\mathrm{a}} = \frac{\hat{P}_\mathrm{a}}{\dfrac{\hat{P}_\mathrm{a}}{1+\hat{P}_\mathrm{a}\hat{P}_\mathrm{z}}}\frac{1}{(1+\hat{P}_\mathrm{a}\hat{P}_\mathrm{z})^2} = \frac{1}{1+\hat{P}_\mathrm{a}\hat{P}_\mathrm{z}}$$

a nazvěme ji normovanou diferenciální citlivostí $S_\mathrm{dn}(\hat{P}_\mathrm{a})$. Ze vztahu je zřejmé, že velká hodnota součinu $\hat{P}_\mathrm{a}\hat{P}_\mathrm{z}$ vede ke zmenšení vlivu změny přenosu $\hat{P}_\mathrm{a}$ na přenos $\hat{P}$, což je důležitý poznatek pro technickou praxi, který umožňuje navrhovat zpětnovazební cestu tak, aby zaručovala požadované kmitočtové parametry přenosu zpětnovazební struktury (zesilovače, filtru, korektoru, apod.). V ideálním případě, kdy přenos $\hat{P}_a \to \infty$ je normovaná diferenciální citlivost nulová, protože platí

$$S_\mathrm{dn}(\hat{P}_\mathrm{a}) = \lim_{\hat{P}_a\to\infty}\frac{1}{1+\hat{P}_\mathrm{a}\hat{P}_\mathrm{z}} = 0\,.$$

Příklad 6.4.

Určete, kolikrát se vlivem zpětné vazby změní hodnota přenosu, snížíme-li zápornou zpětnou vazbou přenos zpětnovazební struktury 10-krát, uvažujeme-li změnu hodnoty přenosu přímé cesty 20 %.

♦

Desetinásobnému snížení přenosu působením záporné zpětné vazby odpovídá hodnota jmenovatele normované diferenciální citlivosti 10 a hodnota normované diferenciální citlivosti $S_\mathrm{dn} = \dfrac{1}{10}$. Dosadíme-li do definičního vztahu pro normovanou diferenciální citlivost na místo diferenciálu diference, potom získáme vztah

$$S_\mathrm{dn} = \frac{\dfrac{\Delta\hat{P}}{\hat{P}}}{\dfrac{\Delta\hat{P}_\mathrm{a}}{\hat{P}_\mathrm{a}}},$$

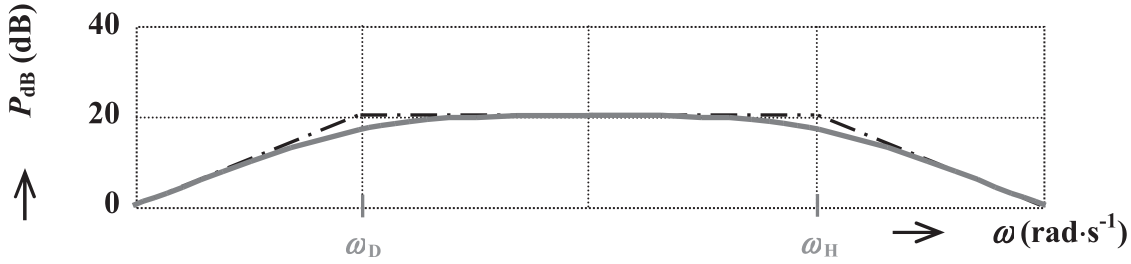
takže pro změnu přenosu zpětnovazební struktury platí

$$\frac{\Delta\hat{P}}{\hat{P}} = S_\mathrm{dn}\frac{\Delta\hat{P}_\mathrm{a}}{\hat{P}_\mathrm{a}} = \frac{1}{10}20 = 2\,\%\,.$$

Vlivem zpětné vazby se tedy změní hodnota přenosu o 2 %.

❑ Vliv zpětné vazby na přenos zesilovače

Uvažujme přenosovou charakteristiku zesilovače, jehož amplitudová charakteristika je nakreslena na obr. 6.19, kterou si za účelem zjednodušení analýzy vlivu zpětné vazby rozdělme na dvě části, a to na část kolem dolního úhlového kmitočtu ω_D a horního úhlového kmitočtu ω_H, což můžeme provést za podmínky $\omega_{\mathrm{D}} << \omega_{\mathrm{H}}$. Pro jednoduchost rovněž uvažujme, že přenos zpětnovazební cesty je reálný a má hodnotu P_z.



Obr. 6.19 Logaritmická amplitudová kmitočtová charakteristika operačního zesilovače

Přenos přímé cesty, tedy přenos zesilovače bez zpětné vazby v okolí horního úhlového kmitočtu je dán

$$\hat{P}_{\mathrm{a}} = P_{\mathrm{a0}} \frac{\omega_{\mathrm{H}}}{\mathrm{j}\omega + \omega_{\mathrm{H}}} = P_{\mathrm{a0}} \frac{1}{1 + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_{\mathrm{H}}}},$$

kde P_{a0} je zesílení zesilovače bez zpětné vazby. Poznamenejme, že pokud bychom použili údaje z katalogového listu, platí následující substituce $P_{\mathrm{a0}} = A_{\mathrm{o}}$, $\omega_{\mathrm{H}} = \omega_1$ a extrapolovaný tranzitní kmitočet operačního zesilovače $\omega_{\mathrm{T}} = A_{\mathrm{o}}\,\omega_1$.
Pro přenos zesilovače se zpětnou vazbou potom platí

$$\hat{P} = \frac{\hat{P}_{\mathrm{a}}}{1 + \hat{P}_{\mathrm{a}} P_{\mathrm{z}}} = \frac{P_{\mathrm{a0}} \dfrac{1}{1 + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_{\mathrm{H}}}}}{1 + P_{\mathrm{a0}} \dfrac{1}{1 + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_{\mathrm{H}}}} P_{\mathrm{z}}} = \cdots = \frac{P_{\mathrm{a0}}}{1 + P_{\mathrm{a0}} P_{\mathrm{z}}} \frac{1}{1 + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_{\mathrm{H}}} \dfrac{1}{1 + P_{\mathrm{a0}} P_{\mathrm{z}}}},$$

ze kterého plyne, že přenos pro nízké kmitočty, kdy $\omega < \omega_{\mathrm{H}}$, je definován vztahem $\dfrac{P_{\mathrm{a0}}}{1 + P_{\mathrm{a0}} P_{\mathrm{z}}}$.
Amplitudová a fázová kmitočtová charakteristika je na obr. 6.20.

K poklesu přenosu o 3 dB pod tuto hodnotu dochází při úhlovém kmitočtu ω_{Hz}, kdy platí

$$\frac{\omega_{\mathrm{Hz}}}{\omega_{\mathrm{H}}} \frac{1}{1 + P_{\mathrm{a0}} P_{\mathrm{z}}} = 1$$

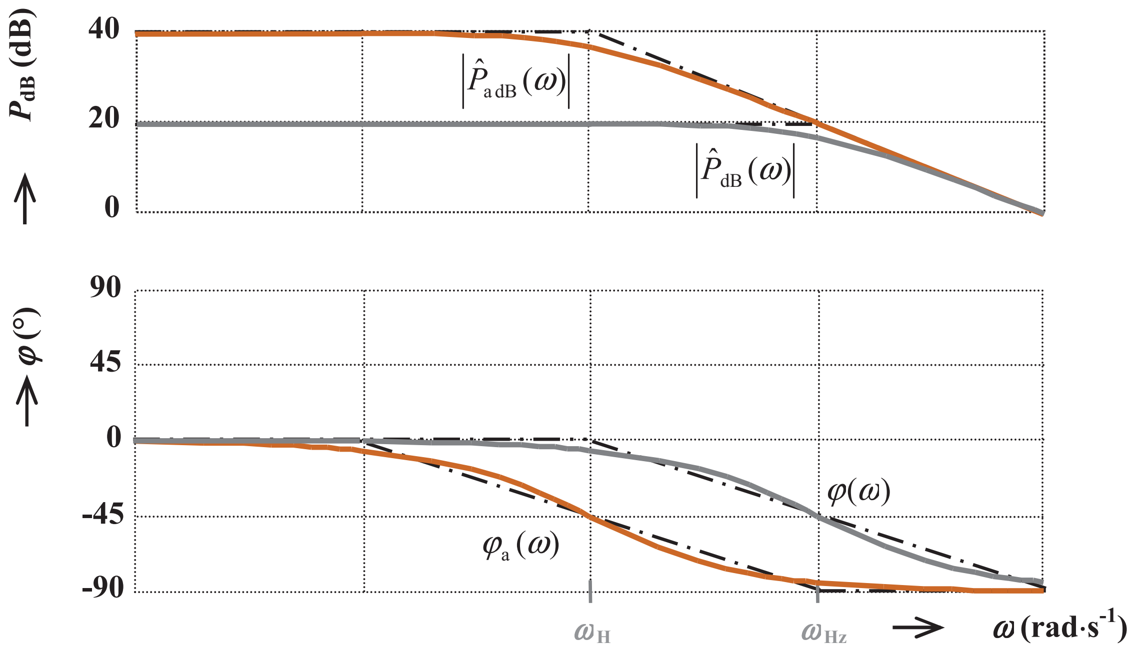
tedy i

$$\omega_{\mathrm{Hz}} = \omega_{\mathrm{H}} \left(1 + P_{\mathrm{a0}} P_{\mathrm{z}}\right).$$

Záporná zpětná vazba, kdy $1 + P_{\mathrm{a0}} P_{\mathrm{z}} > 1$ tedy kmitočtové pásmo rozšiřuje, ovšem za cenu poklesu zesílení proti stavu bez vazby.
Podobně přenos zesilovače bez zpětné vazby v okolí dolního úhlového kmitočtu je dán

$$\hat{P}_{\mathrm{a}} = P_{\mathrm{a0}} \frac{\mathrm{j}\omega}{\mathrm{j}\omega + \omega_{\mathrm{D}}} = P_{\mathrm{a0}} \frac{\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_{\mathrm{D}}}}{1 + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_{\mathrm{D}}}},$$

kde P_{a0} je zesílení zesilovače bez zpětné vazby. Pro přenos zesilovače se zpětnou vazbou potom platí



Obr. 6.20 Vliv zpětné vazby na logaritmicko amplitudovou a semilogaritmicko fázovo kmitočtovou charakteristikou operačního zesilovače v oblasti horního úhlového kmitočtu: bez zpětné vazby (hnědá barva), se zpětnou vazbou (šedá barva)

$$\hat{P} = \frac{\hat{P}_{\mathrm{a}}}{1+\hat{P}_{\mathrm{a}}P_{\mathrm{z}}} = \frac{P_{\mathrm{a0}}\dfrac{\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_{\mathrm{D}}}}{1+\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_{\mathrm{D}}}}}{1+P_{\mathrm{a0}}\dfrac{\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_{\mathrm{D}}}}{1+\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_{\mathrm{D}}}}P_{\mathrm{z}}} = \cdots = \frac{P_{\mathrm{a0}}}{1+P_{\mathrm{a0}}P_{z}}\frac{\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_{\mathrm{D}}}\left(1+P_{\mathrm{a0}}P_{\mathrm{z}}\right)}{1+\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_{\mathrm{D}}}\left(1+P_{\mathrm{a0}}P_{\mathrm{z}}\right)},$$

ze kterého plyne, že přenos pro vysoké kmitočty, kdy $\omega > \omega_{\mathrm{D}}$, je definován vztahem $\dfrac{P_{\mathrm{a0}}}{1+P_{\mathrm{a0}}P_{\mathrm{z}}}$.

Amplitudová a fázová kmitočtová charakteristika je na obr. 6.21.

K nárůstu přenosu o 3 dB nad tuto hodnotu dochází při úhlovém kmitočtu ω_{Dz}, kdy platí

$$\frac{\omega_{\mathrm{Dz}}}{\omega_{\mathrm{D}}}\left(1+P_{\mathrm{a0}}P_{\mathrm{z}}\right)=1$$

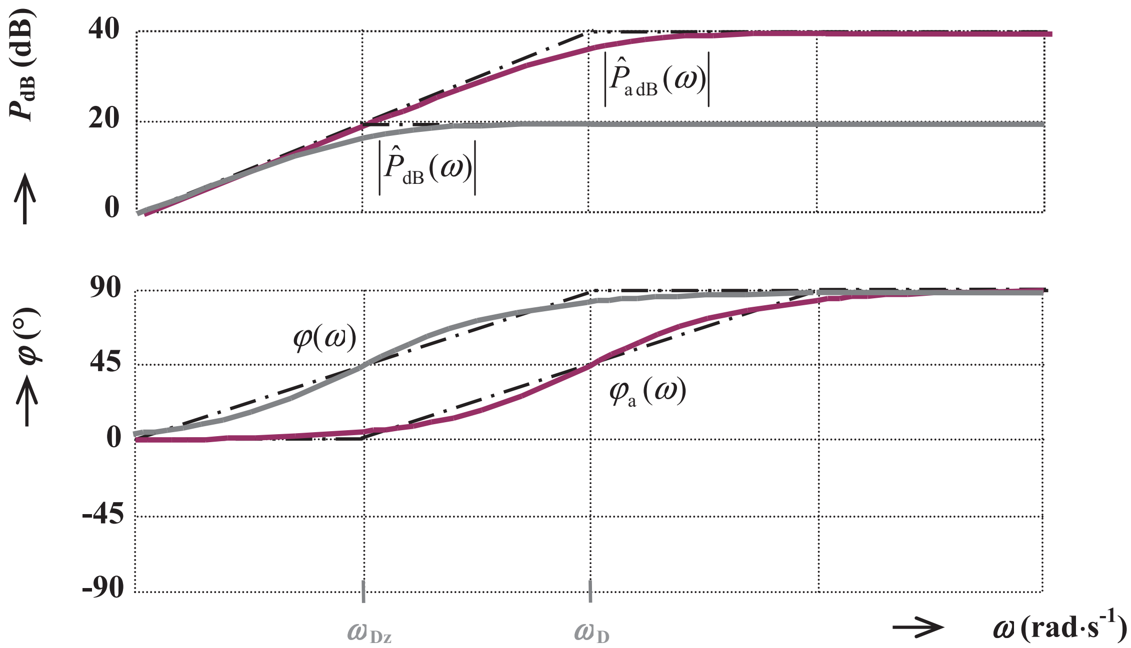
tedy i

$$\omega_{\mathrm{Dz}} = \frac{\omega_{\mathrm{D}}}{1+P_{\mathrm{a0}}P_{\mathrm{z}}}.$$

Záporná zpětná vazba, kdy $1+P_{\mathrm{a0}}P_{\mathrm{z}} > 1$, tedy opět kmitočtové pásmo rozšiřuje, ovšem opět za cenu poklesu zesílení proti stavu bez vazby.

❑ Vliv zpětné vazby na vstupní impedanci obvodu

Při zkoumání vlivu zpětné vazby na vstupní impedanci $\hat{Z}_{\mathrm{v1}}$ nebo výstupní impedanci $\hat{Z}_{\mathrm{v2}}$ přímé cesty nevystačíme jen s blokovým schématem zpětnovazební struktury, protože obě impedance závisí na zapojení obvodu. Vstupní impedance obvodu se sériovou vazbou proudovou i napěťovou je definována Ohmovým zákonem v symbolickém tvaru



Obr. 6.21 Vliv zpětné vazby na logaritmicko amplitudovou a semilogaritmicko fázovo kmitočtovou charakteristikou operačního zesilovače v oblasti dolního úhlového kmitočtu: bez zpětné vazby (fialová barva), se zpětnou vazbou (šedá barva)

$$\hat{Z}_{v1z} = \frac{\hat{U}_i}{\hat{I}_i} = \frac{\hat{U}_i}{\hat{I}_1} = \frac{\hat{U}_1 + \hat{U}_Z}{\hat{I}_1} = \frac{\hat{U}_1 + \hat{U}_1 \hat{P}_a \hat{P}_z}{\frac{\hat{U}_1}{\hat{Z}_{v1}}} = \hat{Z}_{v1}\left(1 + \hat{P}_a \hat{P}_z\right),$$

ze kterého je zřejmé, že pro zápornou sériovou zpětnou vazbu roste modul vstupní impedance $|\hat{Z}_{v1}|$ nad hodnotu modulu bez zpětné vazby podle relace

$$|\hat{Z}_{v1z}| = |\hat{Z}_{v1}| \cdot |1 + \hat{P}_a \hat{P}_z| \geq |\hat{Z}_{v1}|.$$

Vstupní admitance obvodu s paralelní vazbou proudovou i napěťovou je definována duálním vztahem

$$\hat{Y}_{v1z} = \frac{\hat{I}_i}{\hat{U}_i} = \frac{\hat{I}_i}{\hat{U}_1} = \frac{\hat{I}_1 + \hat{I}_Z}{\hat{U}_1} = \frac{\hat{I}_1 + \hat{I}_1 \hat{P}_a \hat{P}_z}{\frac{\hat{I}_1}{\hat{Y}_{v1}}} = \hat{Y}_{v1}\left(1 + \hat{P}_a \hat{P}_z\right),$$

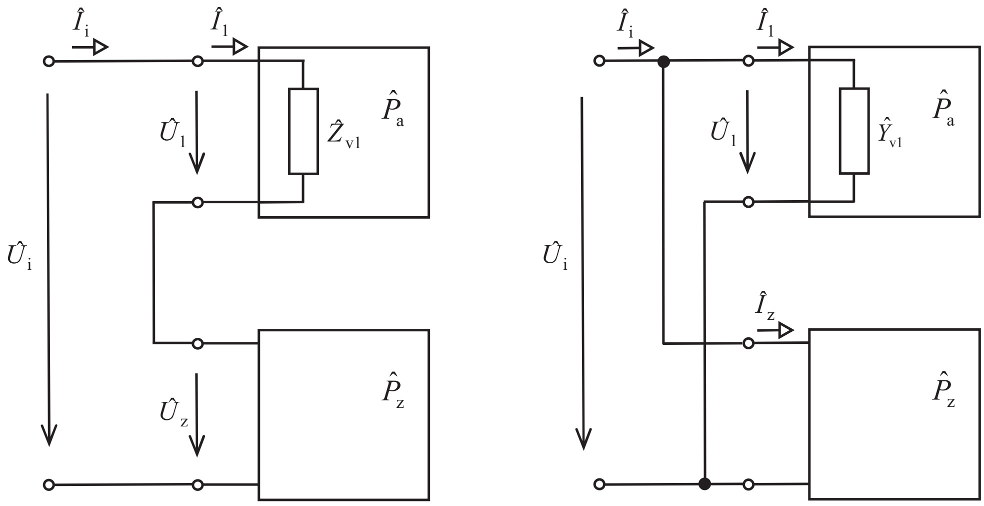
ze kterého je zřejmé, že pro zápornou paralelní zpětnou vazbu roste modul vstupní admitance $|\hat{Y}_{v1}|$ pod hodnotu modulu bez zpětné vazby podle relace

$$|\hat{Y}_{v1z}| = |\hat{Y}_{v1}| \cdot |1 + \hat{P}_a \hat{P}_z| \geq |\hat{Y}_{v1}|.$$

Pokud by nebyla dána vstupní admitance obvodu $\hat{Y}_{v1}$ s paralelní vazbou, ale její inverzní hodnota, vstupní impedance $\hat{Z}_{v1}$ platila by relace

$$|\hat{Z}_{v1z}| = \frac{|\hat{Z}_{v1}|}{|1 + \hat{P}_a \hat{P}_z|} \leq |\hat{Z}_{v1}|,$$

takže pro zápornou paralelní zpětnou vazbu klesá modul vstupní impedance pod hodnotu modulu bez zpětné vazby. Modely obvodu k určení vstupních imitancí obvodu jsou na obr. 6.22.



Obr. 6.22 Blokové schéma zpětnovazebního obvodu k určení vstupní imitance: impedanční model, admitanční model

❑ Vliv zpětné vazby na výstupní impedanci obvodu

Výstupní impedance závisí na veličině, od níž je zpětná vazba odvozena. Jak již víme z kapitoly 6.1, vazba je proudová nebo napěťová. V případě proudové vazby výstupní admitanci určíme pomocí Nortonova teorému, z poměru výstupního proudu nakrátko $\hat{I}_{2k}$ a napětí naprázdno $\hat{U}_{2o}$. Ve stavu nakrátko není zpětná vazba rozpojena, takže výstupní proud nakrátko určíme z proudového přenosu $\hat{P}_i = \dfrac{-\hat{I}_2}{\hat{I}_i} = \dfrac{\hat{P}_a}{1+\hat{P}_a\hat{P}_z}$, který je

$$\hat{I}_{2k} = -\hat{I}'_{2k} = -\frac{\hat{P}_a}{1+\hat{P}_a\hat{P}_z}\hat{I}_i\,.$$

Ve stavu naprázdno je na výstupu obvodu nulový proud, takže je zpětná vazba rozpojena, vstupní proud přímé cesty $\hat{I}_1$ je roven proudu vstupnímu $\hat{I}_i$, tedy $\hat{I}_1 = \hat{I}_i$ a proudový přenos je dán jen přenosem přímé cesty $\hat{P}_a = \dfrac{-\hat{I}_2}{\hat{I}_1} = \dfrac{\hat{I}'_2}{\hat{I}_1}$. Proud, který prochází výstupní admitancí $\hat{Y}_{v2}$ ve stavu naprázdno je $\hat{I}_{2o} = -\hat{I}'_{2o} = -\hat{P}_a\hat{I}_1 = -\hat{P}_a\hat{I}_i$, takže výstupní napětí naprázdno je

$$\hat{U}'_{2o} = \frac{\hat{I}'_{2o}}{\hat{Y}_{v2}} = \frac{\hat{P}_a\hat{I}_i}{\hat{Y}_{v2}}\,.$$

Výstupní admitance s proudovou vazbou je nakonec definována

$$\hat{Y}_{v2z} = \frac{\hat{I}'_{2k}}{\hat{U}_{2o}} = \frac{-\hat{I}_{2k}}{\hat{U}_{2o}} = \frac{\dfrac{\hat{P}_a}{1+\hat{P}_a\hat{P}_z}\hat{I}_i}{\dfrac{\hat{P}_a\hat{I}_i}{\hat{Y}_{v2}}} = \frac{\hat{Y}_{v2}}{1+\hat{P}_a\hat{P}_z}\,.$$

Z definice je zřejmé, že pro zápornou napěťovou zpětnou vazbu klesá modul výstupní admitance $|\hat{Y}_{v2}|$ pod hodnotu modulu bez zpětné vazby podle relace

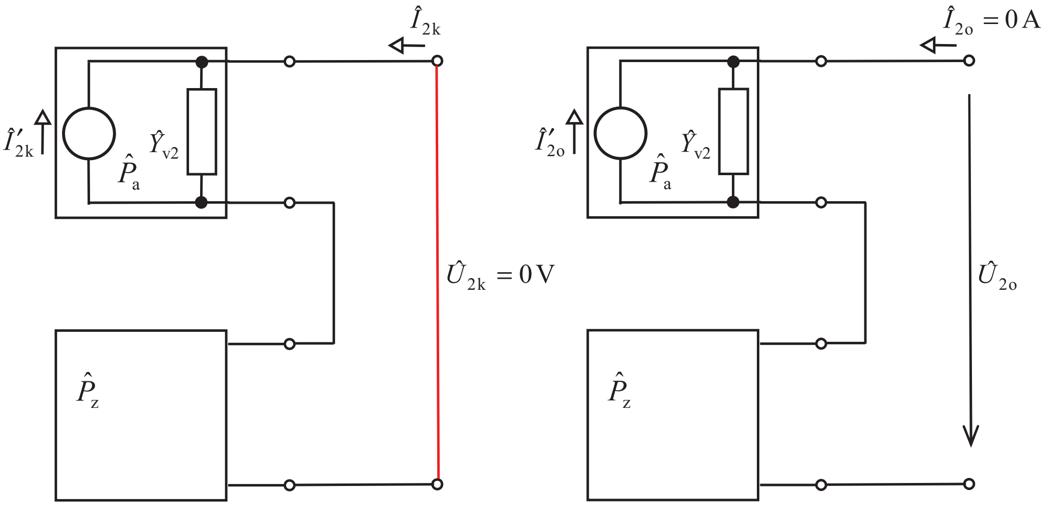
$$\left|\hat{Y}_{\mathrm{v2z}}\right| = \frac{\left|\hat{Y}_{\mathrm{v2}}\right|}{\left|1+\hat{P}_{\mathrm{a}}\hat{P}_{\mathrm{z}}\right|} \le \left|\hat{Y}_{\mathrm{v2}}\right| .$$

Ideálně, a to v případě, kdy $\left(1+\hat{P}_{\mathrm{a}}\hat{P}_{\mathrm{z}}\right) \to \infty$ klesá až k nulové hodnotě, takže výstup obvodu s proudovou zpětnou vazbou se chová jako zdroj proudu.

Pokud by nebyla dána výstupní admitance obvodu $\hat{Y}_{\mathrm{v2}}$ s proudovou vazbou, ale její inverzní hodnota, pro výstupní impedanci $\hat{Z}_{\mathrm{v2}}$ platila by relace

$$\left|\hat{Z}_{\mathrm{v2z}}\right| = \left|\hat{Z}_{\mathrm{v2}}\right| \cdot \left|1+\hat{P}_{\mathrm{a}}\hat{P}_{\mathrm{z}}\right| \ge \left|\hat{Z}_{\mathrm{v2}}\right| ,$$

takže pro zápornou proudovou zpětnou vazbu roste modul vstupní impedance nad hodnotu modulu bez zpětné vazby. Modely obvodu k určení výstupní admitance obvodu jsou na obr. 6.23.



Obr. 6.23 Blokové schéma zpětnovazebního obvodu k určení výstupní admitance: Nortonova věta, Théveninova věta

V případě napěťové vazby výstupní impedanci určíme pomocí Théveninova teorému, z poměru výstupního napětí naprázdno $\hat{U}_{2\mathrm{o}}$ a proudu nakrátko $\hat{I}_{2\mathrm{k}}$. Ve stavu naprázdno není zpětná vazba rozpojena, takže výstupní napětí naprázdno určíme z napěťového přenosu $\hat{P}_{\mathrm{i}} = \dfrac{\hat{U}_2}{\hat{U}_{\mathrm{i}}} = \dfrac{\hat{P}_{\mathrm{a}}}{1+\hat{P}_{\mathrm{a}}\hat{P}_{\mathrm{z}}}$, které je

$$\hat{U}_{2\mathrm{o}} = \hat{U}'_{2\mathrm{o}} = \frac{\hat{P}_{\mathrm{a}}}{1+\hat{P}_{\mathrm{a}}\hat{P}_{\mathrm{z}}}\hat{U}_{\mathrm{i}} .$$

Ve stavu nakrátko je na výstupu obvodu nulové napětí, takže je zpětná vazba rozpojena a vstupní napětí přímé cesty $\hat{U}_1$ je rovno napětí vstupnímu $\hat{U}_{\mathrm{i}}$, tedy $\hat{U}_1 = \hat{U}_{\mathrm{i}}$ a napěťový přenos je dán jen přenosem přímé cesty $\hat{P}_{\mathrm{a}} = \dfrac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1}$. Napětí, které se objeví na výstupní impedanci $\hat{Z}_{\mathrm{v2}}$ ve stavu nakrátko je $\hat{U}'_{2\mathrm{k}} = \hat{P}_{\mathrm{a}}\hat{U}_1 = \hat{P}_{\mathrm{a}}\hat{U}_{\mathrm{i}}$, takže výstupní proud nakrátko je

$$\hat{I}_{2\mathrm{k}} = -\frac{\hat{U}'_{2\mathrm{k}}}{\hat{Z}_{\mathrm{v2}}} = -\frac{\hat{P}_{\mathrm{a}}\hat{U}_{\mathrm{i}}}{\hat{Z}_{\mathrm{v2}}} .$$

Výstupní impedance s napěťovou vazbou je nakonec definována

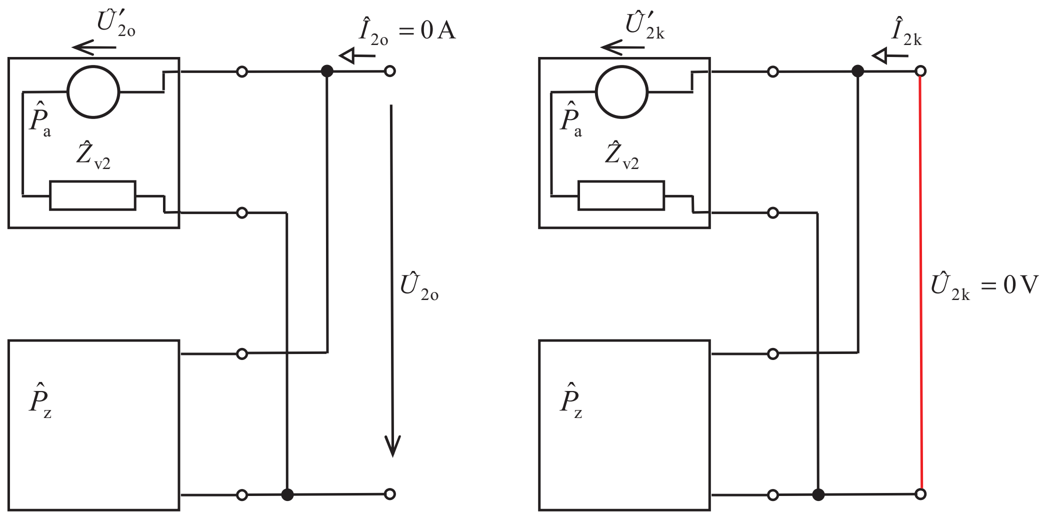
$$\hat{Z}_{\mathrm{v2z}} = -\frac{\hat{U}_{2\mathrm{o}}}{\hat{I}_{2\mathrm{k}}} = -\frac{\dfrac{\hat{P}_{\mathrm{a}}}{1+\hat{P}_{\mathrm{a}}\hat{P}_{\mathrm{z}}}\hat{U}_{\mathrm{i}}}{-\dfrac{\hat{P}_{\mathrm{a}}\hat{U}_{\mathrm{i}}}{\hat{Z}_{\mathrm{v2}}}} = \frac{\hat{Z}_{\mathrm{v2}}}{1+\hat{P}_{\mathrm{a}}\hat{P}_{\mathrm{z}}}\,.$$

Z definice je zřejmé, že pro zápornou napěťovou zpětnou vazbu klesá modul výstupní impedance $\left|\hat{Z}_{\mathrm{v2}}\right|$ pod hodnotu modulu bez zpětné vazby podle relace

$$\left|\hat{Z}_{\mathrm{v2z}}\right| = \frac{\left|\hat{Z}_{\mathrm{v2}}\right|}{\left|1+\hat{P}_{\mathrm{a}}\hat{P}_{\mathrm{z}}\right|} \le \left|\hat{Z}_{\mathrm{v2}}\right|.$$

Ideálně, a to v případě kdy $\left(1+\hat{P}_{\mathrm{a}}\hat{P}_{\mathrm{z}}\right)\to\infty$, klesá až k nulové hodnotě, takže výstup obvodu s napěťovou zpětnou vazbou se chová jako zdroj napětí. Modely obvodu k určení výstupní impedance obvodu jsou na obr. 6.24.

Poznamenejme, že přenosy a impedance reálné struktury se zesilovačem jsou obecně kmitočtově závislé, což v zápisech není důsledně zapisováno.



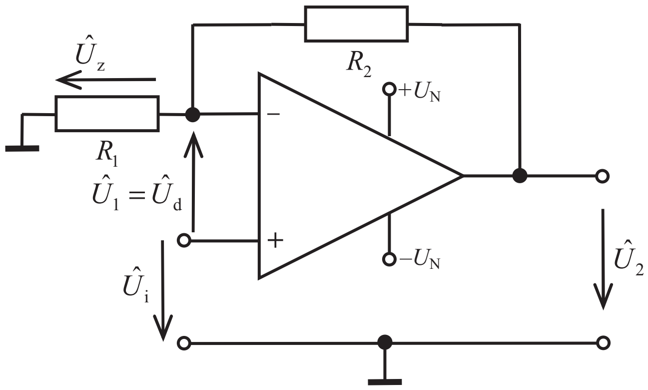
Obr. 6.24 Blokové schéma zpětnovazebního obvodu k určení výstupní impedance: Théveninova věta, Nortonova věta

Příklad 6.5.

Určete vlastnosti zesilovací struktury na obr. 6.17. Uvažujte, že operační zesilovač není ideální, ale že je reálný s parametry: zesílení $P_{\mathrm{a0}} \equiv A_{\mathrm{o}} = 200000$, *horní mezní kmitočet* $\omega_{\mathrm{H}} = 2\pi\cdot 5\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, *dolní mezní kmitočet* $\omega_{\mathrm{D}} = 0\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, *diferenční odpor (odpor mezi vstupy)* $\hat{Z}_{\mathrm{v1}} = R_{\mathrm{d}} = 1\,\mathrm{M\Omega}$, *výstupní odpor* $\hat{Z}_{\mathrm{v2}} = R_{\mathrm{o}} = 100\ \Omega$. *Parametry zpětnovazební sítě jsou* $R_1 = 1000\,\Omega$ *a* $R_2 = 100\,\mathrm{k\Omega}$.

♦

Popis obvodu vychází z obr. 6.25, kde jsou zavedeny počítací šipky napětí.



Obr. 6.25 Neinvertující zapojení operačního zesilovače, zavedení počítacích šipek, příklad 6.5

Jedná se o napěťovou zpětnou vazbu sériovou, zápornou. Vzhledem k hodnotám odporové zpětnovazební sítě, je podmínka unilaterity zpětnovazební sítě téměř dokonale splněna. Odpor R_2 je totiž mnohonásobně větší než výstupní odpor operačního zesilovače R_o, vstupní odpor zpětnovazebního dvojbranu lze z tohoto hlediska považovat za téměř nekonečný. Současně je diferenční odpor R_d mnohonásobně větší než odpor R_1, výstupní odpor zpětnovazebního dvojbranu lze z tohoto hlediska považovat za téměř nulový.

Přenos neinvertujícího zesilovače (přímé cesty) je kmitočtově závislý a daný vztahem

$$\hat{P}_a(j\omega) = P_{a0}\frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_H}} = 200000\frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{2\pi \cdot 5}}.$$

Přenos zpětnovazební sítě (cesty) je dán děličem R_1, R_2, je kmitočtově nezávislý a definovaný

$$\hat{P}_z = \frac{\hat{U}_z}{\hat{U}_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{1000}{1000 + 99000} = 0{,}01.$$

Celkový přenos struktury s operačním zesilovačem se zesílením

$$P_0 = \frac{P_{a0}}{1 + P_{a0}P_z} = \frac{200000}{1 + 200000 \cdot 0{,}01} \doteq 99{,}95$$

a mezním úhlovým kmitočtem

$$\omega_{Hz} = \omega_H\left(1 + \hat{P}_{a0}\hat{P}_z\right) = 2\pi \cdot 5\left(1 + 200000 \cdot 0{,}01\right) = 2\pi \cdot 10005\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$$

nebo kmitočtem

$$f_{Hz} = \frac{\omega_{Hz}}{2\pi} = \frac{2\pi \cdot 10005}{2\pi} = 10005\,\mathrm{Hz}$$

je kmitočtově závislý a je daný vztahem

$$\hat{P}_i(j\omega) = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_i} = \frac{\hat{P}_a}{1 + \hat{P}_a\hat{P}_z} = \frac{P_{a0}}{1 + P_{a0}P_z}\frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_H}\dfrac{1}{1 + P_{a0}P_z}} = P_0\frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_{Hz}}} = 99{,}95\frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{2\pi \cdot 10005}}.$$

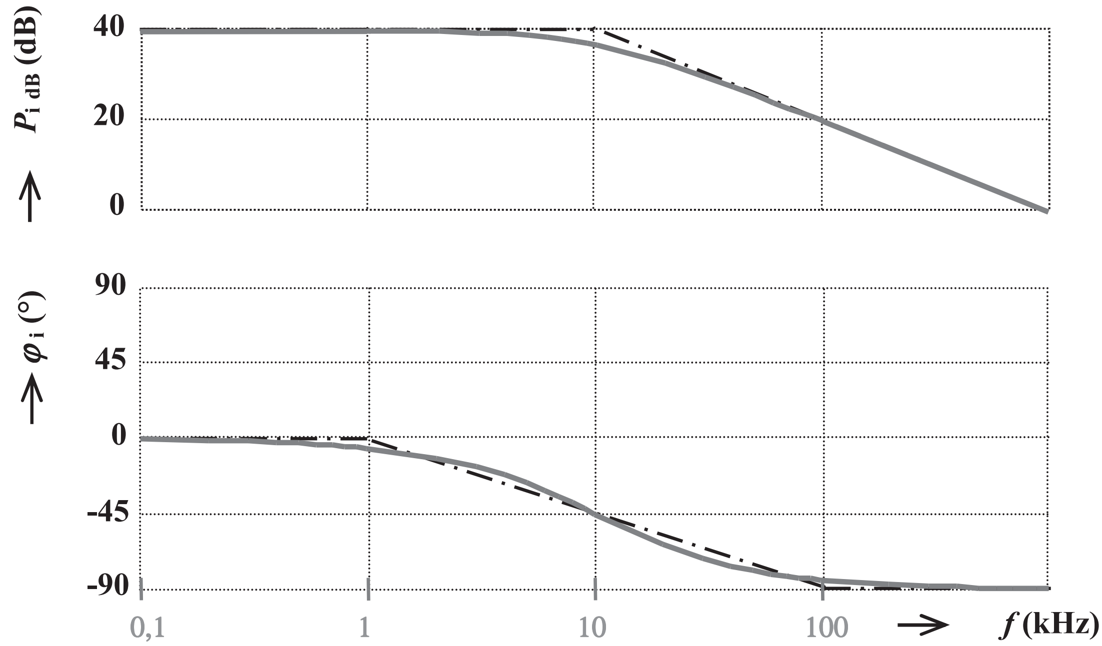
Vstupní impedanci struktury pro nulový kmitočet určíme ze vztahu

$$\hat{Z}_{v1z}(0) = \hat{Z}_{v1}\left(1 + \hat{P}_a(0) \cdot \hat{P}_z\right) = 1 \cdot 10^6\left(1 + 200000 \cdot 0{,}01\right) = 2{,}001\,\mathrm{G\Omega}$$

a výstupní impedanci ze vztahu

$$\hat{Z}_{\mathrm{v2z}}(0)=\frac{\hat{Z}_{\mathrm{v2}}}{1+\hat{P}_{\mathrm{a}}(0)\cdot\hat{P}_{\mathrm{z}}}=\frac{100}{1+200000\cdot 0{,}01}\doteq 49{,}98\,\mathrm{m\Omega}\,.$$

Amplitudová a fázová kmitočtová charakteristika obvodu je na obr. 6.26.



Obr. 6.26 Logaritmická amplitudová a semilogaritmická fázová kmitočtová charakteristika neinvertujícího zapojení operačního zesilovače, příklad 6.5

Σ Shrnutí pojmů 6.3.

Zpětná vazba může být záporná nebo kladná a definujeme ji podle absolutní hodnoty jmenovatele přenosu zpětnovazební struktury $\left|1+\hat{P}_{\mathrm{a}}\hat{P}_{\mathrm{z}}\right|$. Je-li $\left|1+\hat{P}_{\mathrm{a}}\hat{P}_{\mathrm{z}}\right|>1$ jde o zápornou zpětnou vazbu, jinak jde o vazbu kladnou. Zvláštním případem kladné zpětné vazby je nulová hodnota jmenovatele přenosu $\hat{P}$, kdy velikosti přenosu přímé a zpětnovazební cesty jsou stejné a fáze se liší o 180 °. Zpětnovazební struktura tak produkuje výstupní signál i bez přítomnosti vstupního signálu a chová se jako oscilátor. Je-li podmínka oscilací splněna v širokém pásmu kmitočtů, mluvíme o klopném obvodu. Normovanou diferenciální citlivost zavádíme, abychom postihli vliv zpětné vazby na změnu přenosu přímé cesty. Amplitudová přenosová charakteristika zesilovače má tvar obrácené „vanové“ charakteristiky a je vymezena dolním úhlovým kmitočtem ω_{D} a horním úhlovým kmitočtem ω_{H}, jejichž rozdíl definuje šířku pásma zesilovače. Záporná zpětná vazba sice zmenšuje zesílení zesilovače, ale zvětšuje jeho šířku pásma a stabilitu. Záporná sériová zpětná vazba proudová i napěťová zvyšuje velikost vstupní impedance obvodu. Naproti tomu záporná paralelní zpětná vazba proudová i napěťová snižuje velikost vstupní impedance obvodu. Záporná proudová zpětná vazba zvyšuje velikost výstupní impedance obvodu. Naproti tomu záporná napěťová zpětná vazba snižuje velikost vstupní impedance obvodu.

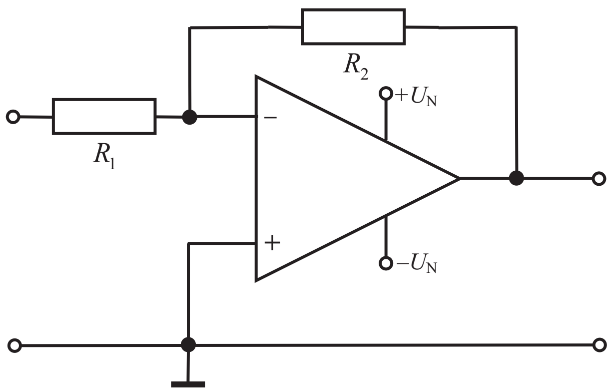
? Otázky 6.3.

1. Podle čeho posuzujeme vlastnosti struktury se zpětnou vazbou?

2. Jak byste obecně definovali zápornou a kladnou zpětnou vazbu?
3. Jaký typ zpětné vazby využívá oscilátor?
4. Definujte klopný obvod?
5. K čemu slouží normovaná diferenciální citlivost?
6. Čím je vymezena amplitudová charakteristika zesilovače?
7. Jak ovlivňuje záporná zpětná vazba amplitudovou charakteristiku zesilovače?
8. Jak ovlivňuje zpětná vazba vstupní a výstupní impedanci či admitanci zesilovače?

Úloha k řešení 6.3.

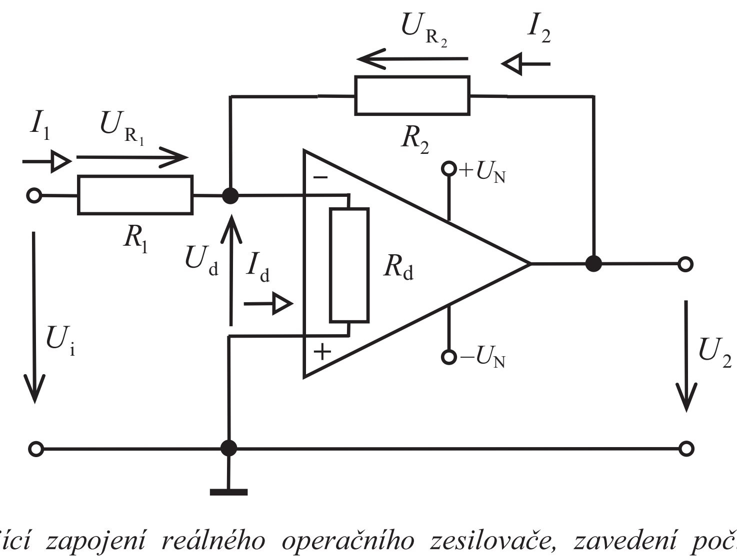
Určete vstupní odpor struktury s reálným operačním zesilovačem na obr. 6.27, víte-li že přenos zesilovače je $P_a = A_o$, uvažujete-li diferenční odpor operačního zesilovače R_d a zanedbáte-li jeho výstupní odpor R_o.



Obr. 6.27 Invertující zapojení operačního zesilovače, úlohy k řešení 6.3

Řešení:

Nejprve si zakreslíme do obvodového schématu na obr. 6.28 vstupní diferenční odpor reálného operačního zesilovače a poté i počítací šipky napětí.



Obr. 6.28 Invertující zapojení reálného operačního zesilovače, zavedení počítacích šipek, úloha k řešení 6.3

Na vstupní straně obvodu platí podle 2. Kirchhoffova zákona pro kladný oběh ve směru hodinových ručiček rovnice

$$-U_\mathrm{i} + U_{\mathrm{R}_1} - U_\mathrm{d} = 0,$$

ze které si vyjádříme napětí

$$U_\mathrm{i} = U_{\mathrm{R}_1} - U_\mathrm{d}.$$

Po dosazení z Ohmova zákona do členů na pravé straně rovnice získáme

$$U_\mathrm{i} = R_1 I_1 - R_\mathrm{d} I_\mathrm{d}.$$

Pro uzel na vstupní straně obvodu platí podle 1. Kirchhoffova zákona pro kladný referenční směr proudu ven z uzlu rovnice

$$-I_1 - I_2 - I_\mathrm{d} = 0$$

a pro vstupní proud

$$I_1 = -I_2 - I_\mathrm{d}.$$

Po dosazení rovnic do definice vstupního odporu obvodu získáme

$$R_\mathrm{i} = \frac{U_\mathrm{i}}{I_1} = \frac{R_1 I_1 - R_\mathrm{d} I_\mathrm{d}}{I_1} = R_1 - \frac{R_\mathrm{d} I_\mathrm{d}}{-I_2 - I_\mathrm{d}} = R_1 + \frac{R_\mathrm{d}}{\frac{I_2}{I_\mathrm{d}} + 1}$$

a po dosazení za proudy I_1 a I_2 z Ohmova zákona a zesílení operačního zesilovače $P_\mathrm{a} = A_\mathrm{o} = \frac{U_2}{U_\mathrm{d}}$

$$R_\mathrm{i} = R_1 + \frac{R_\mathrm{d}}{\frac{\frac{U_{\mathrm{R}_2}}{R_2}}{\frac{U_\mathrm{d}}{R_\mathrm{d}}} + 1} = R_1 + \frac{R_\mathrm{d}}{\frac{\frac{U_2 + U_\mathrm{d}}{R_2}}{\frac{U_\mathrm{d}}{R_\mathrm{d}}} + 1} = R_1 + \frac{R_\mathrm{d}}{\frac{R_\mathrm{d}}{R_2}\left(\frac{U_2}{U_\mathrm{d}} + 1\right) + 1} = R_1 + \frac{R_\mathrm{d}}{\frac{R_\mathrm{d}}{R_2}\left(A_\mathrm{o} + 1\right) + 1} =$$

$$= R_1 + \frac{R_\mathrm{d} R_2}{R_\mathrm{d}\left(A_\mathrm{o} + 1\right) + R_2}.$$

Ze vztahu je patrné, že obvod s ideálním operačním zesilovačem, tj. pro $A_\mathrm{o} \to \infty$ a $R_\mathrm{d} \to \infty$, má vstupní odpor

$$R_\mathrm{i} = \lim_{\substack{A_\mathrm{o} \to \infty \\ R_\mathrm{d} \to \infty}} \left(R_1 + \frac{R_2}{A_\mathrm{o} + 1 + \frac{R_2}{R_\mathrm{d}}} \right) = R_1.$$

7. Přenosy a obrazové parametry dvojbranů

Motivace Po prostudování této kapitoly budete umět

- definovat přenosy souměrného dvojbranu a pochopit jejich význam
- definovat obrazové parametry souměrného dvojbranu a pochopit jejich význam
- definovat přenosy nesouměrného dvojbranu
- definovat obrazové parametry nesouměrného dvojbranu

7.1. Přenosy dvojbranů

Kaskádní parametry dvojbranů nejčastěji používáme k popisu přenosové cesty mezi zdrojem a spotřebičem. Zvláštním případem těchto parametrů jsou obrazové parametry dvojbranu, definované pro pasivní a podélně souměrné dvojbrany. Obrazové parametry jsou důležité pro modelování dlouhého vedení, jehož dílčí úseky můžeme realizovat kaskádním řazením článkových filtrů typu T, Π, L nebo Γ. Míru vlivu dvojbranu na přenášenou energii mezi zdrojem a spotřebičem či branami kaskádně řazených dvojbranů posuzujeme přenosy.

Přenosy dvojbranů jsou definovány přenosovými funkcemi, které dávají jednoznačnou informaci o přenosu energie nebo signálu z jedné brány na druhou obvykle v harmonicky ustáleném stavu. Můžeme je získat na základě analýzy modelu přenosové cesty nebo měřením v požadovaném kmitočtovém pásmu. Znalost jejich funkční závislosti umožňuje posoudit vliv přenosové cesty. Naopak při syntéze usilujeme o to, aby přenosové funkce byly přesně definované a ovlivňovaly přenos energie požadovaným způsobem např. filtry.

V definicích přenosů dvojbranů vystupují poměry komplexních efektivních hodnot napětí a proudů vstupních a výstupních bran dvojbranů stejného typu veličin nebo jejich smíšené tvary. V harmonicky ustáleném stavu tak definujeme kmitočtové přenosy

$$\hat{P} = \frac{\hat{X}_2}{\hat{X}_1}$$

a inverzní kmitočtové přenosy

$$\hat{G} = \frac{\hat{X}_1}{\hat{X}_2},$$

kde $\hat{X}_1, \hat{X}_2$ jsou příslušné komplexní efektivní hodnoty veličin. Dosazením branových veličin do definičního vztahu získáme následující bezrozměrné přenosy

napěťový přenos

$$\hat{P}_{\mathrm{U}} = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1},$$

proudový přenos

$$\hat{P}_{\mathrm{I}} = \frac{-\hat{I}_2}{\hat{I}_1}$$

a smíšené přenosy (transimitance):

přenosovou impedanci s jednotkou Ω

$$\hat{P}_{\mathrm{UI}} = \frac{\hat{U}_2}{\hat{I}_1},$$

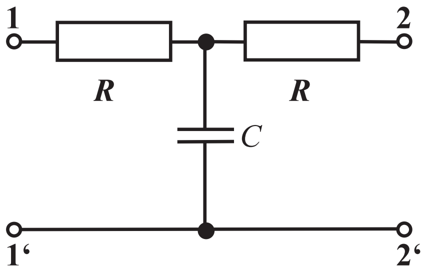
přenosovou admitanci s jednotkou S

$$\hat{P}_{\mathrm{IU}} = \frac{-\hat{I}_2}{\hat{U}_1}.$$

Záporné znaménko proudu respektuje u kaskádního modelu pasivního, reciprocitního dvojbranu skutečnost, že proud fakticky vytéká z druhé brány, viz kapitola 3.2. Směr postupu energie dvojbranem je z brány vstupní na bránu výstupní.

Příklad 7.1.

Určete napěťový přenos naprázdno a proudový přenos nakrátko T článku na obr. 7.1, je-li k vstupní bráně připojen harmonický zdroj napětí o úhlovém kmitočtu ω.

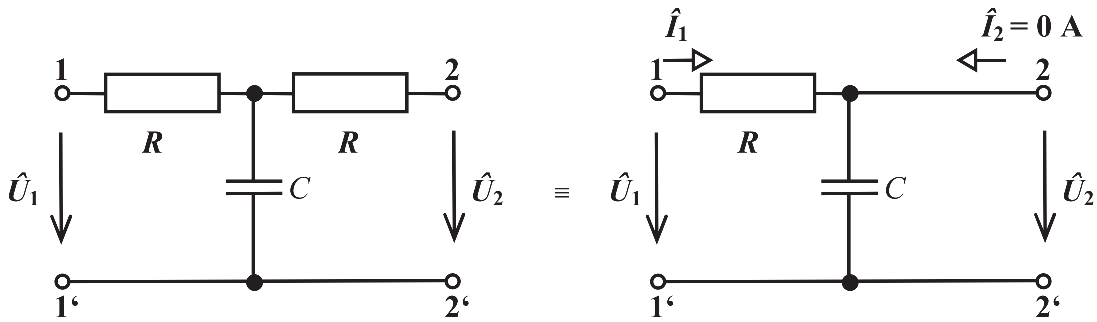


Obr. 7.1 Zapojení T článku, příklad 7.1

♦

Napěťový přenos naprázdno T článku je dán přenosem RC článku na obr. 7.2, protože na rezistoru R (spojeném se svorkou 2) nevzniká úbytek napětí. Z děliče napětí proto snadno určíme

$$\hat{P}_{\mathrm{U}} = \left.\frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1}\right|_{\hat{I}_2=0} = \frac{\hat{Z}_{\mathrm{C}}}{\hat{Z}_{\mathrm{R}} + \hat{Z}_{\mathrm{C}}} = \frac{\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\omega RC}$$

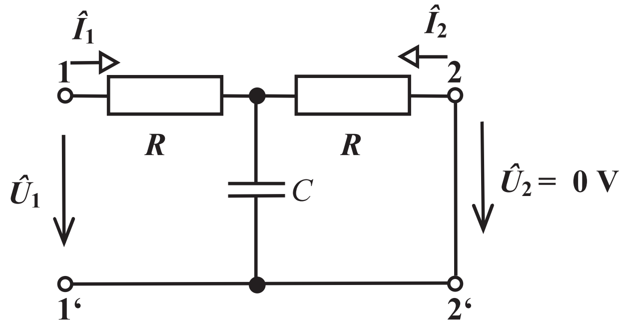


Obr. 7.2 T článek naprázdno, příklad 7.1

a proudový přenos nakrátko z děliče proudu zobrazeného na obr. 7.3

$$\hat{P}_{\mathrm{I}} = \left.\frac{-\hat{I}_2}{\hat{I}_1}\right|_{\hat{U}_2=0} = \frac{\hat{Y}_{\mathrm{R}}}{\hat{Y}_{\mathrm{R}} + \hat{Y}_{\mathrm{C}}} = \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R} + \mathrm{j}\omega C} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\omega RC}.$$

Proud $\hat{I}_1$ nemusíme určovat, protože nás nezajímá přenosová admitance $\hat{P}_{\mathrm{IU}} = \frac{-\hat{I}_2}{\hat{U}_1}$.



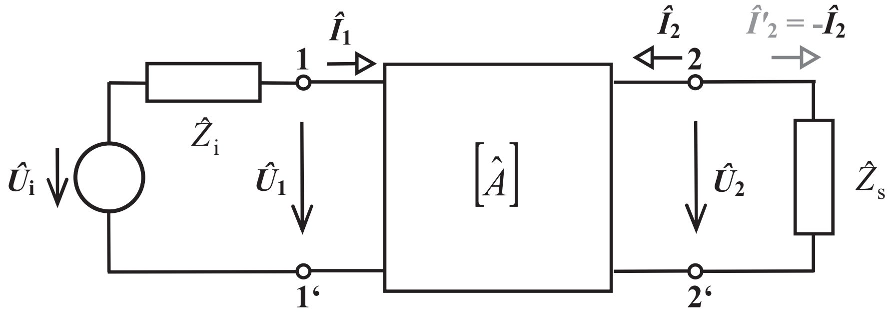
Obr. 7.3 T článek nakrátko, příklad 7.1

Oba přenosy vyšly stejné, protože T článek je podélně souměrný.

Model přenosové cesty tvořený na vstupní straně dvojbranu skutečným zdrojem napětí s parametry vnitřním napětím $\hat{U}_{\mathrm{i}}$ a impedancí $\hat{Z}_{\mathrm{i}}$, kaskádním modelem dvojbranu a zátěží o impedanci $\hat{Z}_{\mathrm{s}}$ připojenou k jeho výstupu je nakreslen na obr. 7.4 a popsán rovnicemi, viz kapitola 3.2,

$$\hat{U}_1 = \hat{A}_{11}\hat{U}_2 + \hat{A}_{12}\left(-\hat{I}_2\right) = \hat{A}_{11}\hat{U}_2 + \hat{A}_{12}\hat{I}'_2,$$

$$\hat{I}_1 = \hat{A}_{21}\hat{U}_2 + \hat{A}_{22}\left(-\hat{I}_2\right) = \hat{A}_{21}\hat{U}_2 + \hat{A}_{22}\hat{I}'_2.$$



Obr. 7.4 Model přenosové cesty

V následujícím výkladu uvažujme orientaci počítacích šipek jako u pasivního dvojbranu na obr. 3.1 vlevo a pokusme se vytvořit ekvivalentní impedanční obvodový model přenosové cesty nakreslený na obr. 7.5, neboť jak víme z kapitoly 3.2, pro kaskádní model samotného dvojbranu neexistuje náhradní schéma zapojení.

Nejprve určíme vstupní impedanci přenosové cesty (zatíženého dvojbranu) dosazením rovnic modelu dvojbranu do zobecněného Ohmova zákona, kde jednoduchou úpravou získáme její závislost na zatěžovací impedanci dvojbranu $\hat{Z}_{\mathrm{s}}$

$$\hat{Z}_1 = \frac{\hat{U}_1}{\hat{I}_1} = \frac{\hat{A}_{11}\hat{U}_2 + \hat{A}_{12}(-\hat{I}_2)}{\hat{A}_{21}\hat{U}_2 + \hat{A}_{22}(-\hat{I}_2)} = \frac{-\hat{I}_2}{-\hat{I}_2}\frac{\hat{A}_{11}\dfrac{\hat{U}_2}{-\hat{I}_2} + \hat{A}_{12}}{\hat{A}_{21}\dfrac{\hat{U}_2}{-\hat{I}_2} + \hat{A}_{22}} = \frac{\hat{A}_{11}\hat{Z}_\mathrm{s} + \hat{A}_{12}}{\hat{A}_{21}\hat{Z}_\mathrm{s} + \hat{A}_{22}}\,.$$

Pomocí vstupní impedance kaskádního dvojbranu určíme napětí vstupní brány

$$\hat{U}_1 = \frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_\mathrm{i}+\hat{Z}_1}\hat{U}_\mathrm{i}$$

a externí napěťový přenos

$$\hat{P}_\mathrm{Ue} = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_\mathrm{i}} = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1}\frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_\mathrm{i}} = \hat{P}_\mathrm{U}\frac{\hat{Z}_1}{\hat{Z}_\mathrm{i}+\hat{Z}_1}\,.$$

Výstupní impedanci přenosové cesty (dvojbranu zatíženého vnitřní impedancí $\hat{Z}_\mathrm{i}$) stanovíme z poměru napětí naprázdno $\hat{U}_{2\mathrm{o}}$ a proudu nakrátko $\hat{I}_{2\mathrm{k}}$ „v duchu vět“ o náhradním zdroji.

Výstupní napětí naprázdno určíme podle obr. 7.4 pro $\hat{Z}_\mathrm{s} \to \infty\,\Omega$, tj. $\hat{I}_2 = 0\,\mathrm{A}$ (Théveninova věta)

$$\hat{U}_{2\mathrm{o}} = \hat{U}_2\Big|_{\hat{I}_2=0} = \frac{1}{\hat{A}_{11}}\hat{U}_{1\mathrm{o}} = \frac{1}{\hat{A}_{11}}\frac{\hat{Z}_{1\mathrm{o}}}{\hat{Z}_\mathrm{i}+\hat{Z}_{1\mathrm{o}}}\hat{U}_\mathrm{i} = \frac{1}{\hat{A}_{11}}\frac{\dfrac{\hat{A}_{11}}{\hat{A}_{21}}}{\hat{Z}_\mathrm{i}+\dfrac{\hat{A}_{11}}{\hat{A}_{21}}}\hat{U}_\mathrm{i} = \frac{1}{\hat{A}_{21}\hat{Z}_\mathrm{i} + \hat{A}_{11}}\hat{U}_\mathrm{i}\,,$$

které jsme si vyjádřili z 1. kaskádní rovnice

$$\hat{U}_{1\mathrm{o}} = \hat{U}_1\Big|_{\hat{I}_2=0} = \lim_{\hat{I}_2\to 0}\left(\hat{A}_{11}\hat{U}_2 + \hat{A}_{12}\left(-\hat{I}_2\right)\right) = \hat{A}_{11}\hat{U}_{2\mathrm{o}}\,,$$

když jsme dosadili za napětí vstupní brány naprázdno

$$\hat{U}_{1\mathrm{o}} = \hat{U}_1\Big|_{\hat{I}_2=0} = \frac{\hat{Z}_{1\mathrm{o}}}{\hat{Z}_i+\hat{Z}_{1\mathrm{o}}}\hat{U}_\mathrm{i}$$

a za hodnotu vstupní impedance naprázdno

$$\hat{Z}_{1\mathrm{o}} = \hat{Z}_1\Big|_{\hat{I}_2=0} = \lim_{\hat{Z}_\mathrm{s}\to\infty}\frac{\hat{A}_{11}\hat{Z}_\mathrm{s} + \hat{A}_{12}}{\hat{A}_{21}\hat{Z}_\mathrm{s} + \hat{A}_{22}} = \frac{\hat{A}_{11}}{\hat{A}_{21}}\,.$$

Výstupní proud nakrátko určíme podle obr. 7.4 pro $\hat{Z}_\mathrm{s} \to 0\,\Omega$, tj. $\hat{U}_2 = 0\,\mathrm{V}$ (Nortonova věta)

$$\hat{I}_{2\mathrm{k}} = \hat{I}_2\Big|_{\hat{U}_2=0} = \frac{1}{-\hat{A}_{12}}\hat{U}_{1\mathrm{k}} = -\frac{1}{\hat{A}_{12}}\frac{\hat{Z}_{1\mathrm{k}}}{\hat{Z}_\mathrm{i}+\hat{Z}_{1\mathrm{k}}}\hat{U}_\mathrm{i} = -\frac{1}{\hat{A}_{12}}\frac{\dfrac{\hat{A}_{12}}{\hat{A}_{22}}}{\hat{Z}_\mathrm{i}+\dfrac{\hat{A}_{12}}{\hat{A}_{22}}}\hat{U}_\mathrm{i} = -\frac{1}{\hat{A}_{22}\hat{Z}_\mathrm{i} + \hat{A}_{12}}\hat{U}_\mathrm{i}\,,$$

který jsme si vyjádřili z 1. kaskádní rovnice

$$\hat{U}_{1\mathrm{k}} = \hat{U}_1\Big|_{\hat{U}_2=0} = \lim_{\hat{U}_2\to 0}\left(\hat{A}_{11}\hat{U}_2 + \hat{A}_{12}\left(-\hat{I}_2\right)\right) = -\hat{A}_{12}\hat{I}_{2\mathrm{k}}\,,$$

když jsme dosadili za napětí vstupní brány nakrátko

$$\hat{U}_{1k} = \hat{U}_1\Big|_{\hat{U}_2=0} = \frac{\hat{Z}_{1k}}{\hat{Z}_i + \hat{Z}_{1k}}\hat{U}_i$$

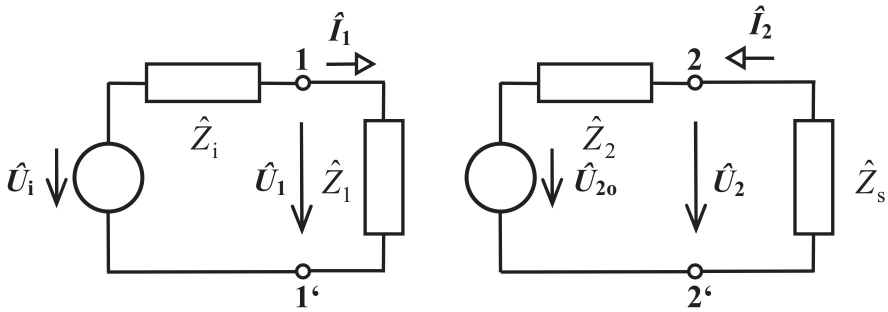
a za hodnotu vstupní impedance nakrátko

$$\hat{Z}_{1k} = \hat{Z}_1\Big|_{\hat{U}_2=0} = \lim_{\hat{Z}_2\to 0}\frac{\hat{A}_{11}\hat{Z}_s + \hat{A}_{12}}{\hat{A}_{21}\hat{Z}_s + \hat{A}_{22}} = \frac{\hat{A}_{12}}{\hat{A}_{22}}.$$

Impedanci výstupní brány nakonec určíme dosazením odvozených výstupních veličin do zobecněného Ohmova zákona

$$\hat{Z}_2 = \frac{\hat{U}_{2o}}{-\hat{I}_{2k}} = \frac{\dfrac{1}{\hat{A}_{21}\hat{Z}_i + \hat{A}_{11}}\hat{U}_i}{-\left(-\dfrac{1}{\hat{A}_{22}\hat{Z}_i + \hat{A}_{12}}\hat{U}_i\right)} = \frac{\hat{A}_{22}\hat{Z}_i + \hat{A}_{12}}{\hat{A}_{21}\hat{Z}_i + \hat{A}_{11}}.$$

Odvozené hodnoty vstupní impedance, výstupního napětí naprázdno a výstupní impedance umožňují nahradit kaskádní model dvojbranu impedančním modelem, u kterého ale chybí v náhradním zapojení vstupní brány zdroj napětí, viz obr. 7.5, takže veličiny výstupní brány neovlivňují veličiny vstupní brány.



Obr. 7.5 Náhradní schéma přenosové cesty, impedanční model

Příklad 7.2.

Určete vstupní impedanci naprázdno a výstupní impedanci dvojbranu z příkladu 7.1. Uvažujte, že ze vstupní strany je dvojbran buzen zdrojem napětí $\hat{U}_1$, který má nulovou vnitřní impedanci.

♦

Vstupní a výstupní impedanci dvojbranu naprázdno stanovíme pomocí kaskádních parametrů dvojbranu $\hat{A}_{11}, \hat{A}_{12}, \hat{A}_{21}, \hat{A}_{22}$. Parametry $\hat{A}_{11}, \hat{A}_{22}$ určíme ze známého napěťového a proudového přenosu z příkladu 7.1, neboť platí

$$\hat{A}_{11} = \frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_2} = \frac{1}{\hat{P}_U} = 1 + j\omega RC,$$

$$\hat{A}_{22} = \frac{\hat{I}_1}{-\hat{I}_2} = \frac{1}{\hat{P}_I} = 1 + j\omega RC.$$

Parametr $\hat{A}_{12}$ stanovíme ze stavu nakrátko dvojbranu, viz obr. 7.3, když zkrat provedeme na jeho výstupu. Z jeho definice v kapitole 3.2 pro buzení vstupní brány dvojbranu zdrojem napětí o hodnotě $\hat{U}_1$ plyne

$$\hat{A}_{12} = \left.\frac{\hat{U}_1}{-\hat{I}_2}\right|_{\hat{U}_2=0} = \frac{\hat{U}_1}{-\hat{I}_{2\mathrm{k}}},$$

kde pro výstupní proud nakrátko platí

$$-\hat{I}_{2\mathrm{k}} = -\hat{I}_2\Big|_{\hat{U}_2=0} = \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R}+\mathrm{j}\omega C}\hat{I}_{1\mathrm{k}} = \frac{1}{1+\mathrm{j}\omega RC}\hat{I}_{1\mathrm{k}} = \frac{1}{1+\mathrm{j}\omega RC}\,\frac{1+\mathrm{j}\omega RC}{R(1+\mathrm{j}\omega RC)+R}\hat{U}_1 = \frac{1}{R(1+\mathrm{j}\omega RC)+R}\hat{U}_1 =$$

$$= \frac{1}{2R}\,\frac{1}{1+\mathrm{j}\frac{\omega RC}{2}}\hat{U}_1 .$$

Tento proud je totožný s proudem odporové větve vzniklého děliče proudu, do kterého „vtéká“ proud vstupní brány $\hat{I}_{1\mathrm{k}}$, vyvolaný zdrojem napětí o hodnotě $\hat{U}_1$. Jeho hodnotu určíme ze zobecněného Ohmova zákona při zkratovaném výstupu dvojbranu

$$\hat{I}_{1\mathrm{k}} = \hat{I}_1\Big|_{\hat{U}_2=0} = \left.\frac{\hat{U}_1}{\hat{Z}_1}\right|_{\hat{U}_2=0} = \frac{\hat{U}_1}{R+\frac{1}{\frac{1}{R}+\mathrm{j}\omega C}} = \frac{\hat{U}_1}{R+\frac{R}{1+\mathrm{j}\omega RC}} = \frac{\hat{U}_1}{\frac{R(1+\mathrm{j}\omega RC)+R}{1+\mathrm{j}\omega RC}} = \frac{1+\mathrm{j}\omega RC}{R(1+\mathrm{j}\omega RC)+R}\hat{U}_1 .$$

Dosazením proudu nakrátko do definičního vztahu stanovíme parametr

$$\hat{A}_{12} = \frac{\hat{U}_1}{-\hat{I}_{2\mathrm{k}}} = \frac{\hat{U}_1}{\frac{1}{2R}\,\frac{1}{1+\mathrm{j}\frac{\omega RC}{2}}\hat{U}_1} = 2R\left(1+\mathrm{j}\frac{\omega RC}{2}\right).$$

Parametr $\hat{A}_{21}$ určíme ze stavu naprázdno dvojbranu, viz obr. 7.2, kdy jsou jeho výstupní svorky nezatížené. Z definice plyne

$$\hat{A}_{21} = \frac{\hat{I}_{1\mathrm{o}}}{\hat{U}_{2\mathrm{o}}} = \left.\frac{\hat{I}_1}{\hat{U}_2}\right|_{\hat{I}_2=0} .$$

Protože dvojbran je nezatížený, je jeho výstupní proud nulový, a proto na rezistoru R (spojeném se svorkou 2) nevzniká úbytek napětí, takže výstupní napětí naprázdno je rovno napětí na kapacitoru, které odvodíme z děliče napětí

$$\hat{U}_{2\mathrm{o}} = \hat{U}_2\Big|_{\hat{I}_2=0} = \frac{\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{R+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}\hat{U}_1 = \frac{1}{1+\mathrm{j}\omega RC}\hat{U}_1 .$$

Vstupní proud je proudem nezatíženého děliče, tedy i proudem kapacitoru, takže určíme jeho hodnotu z úbytku napětí na kapacitoru a impedance kondenzátoru podle zobecněného Ohmova zákona

$$\hat{I}_{1\mathrm{o}} = \hat{I}_1\Big|_{\hat{I}_2=0} = \frac{\hat{U}_{2\mathrm{o}}}{\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}} = \frac{\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega RC}\hat{U}_1}{\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}} = \frac{\mathrm{j}\omega C}{1+\mathrm{j}\omega RC}\hat{U}_1 .$$

Dosazením obou veličin do definičního vztahu získáme parametr

$$\hat{A}_{21}=\frac{\dfrac{\mathrm{j}\omega C}{1+\mathrm{j}\omega RC}\hat{U}_1}{\dfrac{1}{1+\mathrm{j}\omega RC}\hat{U}_1}=\mathrm{j}\omega C\,.$$

Dosazením vypočtených konstant do definičních vztahů určíme vstupní impedanci naprázdno

$$\hat{Z}_{1\mathrm{o}}=\hat{Z}_1\Big|_{\hat{I}_2=0}=\lim_{\hat{Z}_\mathrm{s}\to\infty}\frac{\hat{A}_{11}\hat{Z}_\mathrm{s}+\hat{A}_{12}}{\hat{A}_{21}\hat{Z}_\mathrm{s}+\hat{A}_{22}}=\frac{\hat{A}_{11}}{\hat{A}_{21}}=\frac{1+\mathrm{j}\omega RC}{\mathrm{j}\omega C}$$

a výstupní impedanci dvojbranu naprázdno (vnitřní impedance zdroje $\hat{Z}_\mathrm{i}$ je nulová)

$$\hat{Z}_{2\mathrm{o}}=\hat{Z}_2\Big|_{\hat{I}_1=0}=\lim_{\hat{Z}_\mathrm{i}\to 0}\frac{\hat{A}_{22}\hat{Z}_\mathrm{i}+\hat{A}_{12}}{\hat{A}_{21}\hat{Z}_\mathrm{i}+\hat{A}_{11}}=\frac{\hat{A}_{12}}{\hat{A}_{11}}=\frac{2R\left(1+\mathrm{j}\dfrac{\omega RC}{2}\right)}{1+\mathrm{j}\omega RC}.$$

Σ Shrnutí pojmů 7.1.

Míru přenesené energie z jedné brány dvojbranu k druhé posuzujeme pomocí přenosů. Přenosy jsou definovány v harmonicky ustáleném stavu v kmitočtové oblasti poměry branových veličin. Nejsou-li dány poměrem veličin stejného typu mluvíme o přenosech smíšených. Externí napěťový přenos užíváme, je-li dvojbran napájen ze zdroje s nenulovou vnitřní impedancí. Vstupní a výstupní impedanci přenosové cesty a její náhradní obvodový model určíme aplikací zobecněného Ohmova zákona, kaskádních rovnic a užitím věty o náhradním napěťovém zdroji případně věty o náhradním proudovém zdroji.

? Otázky 7.1.

1. K čemu slouží přenosy?
2. Jak jinak nazýváme smíšené přenosy?
3. Jaký je vztah mezi inverzními přenosy a kaskádními parametry dvojbranu?
4. Kdy je napěťový a proudový přenos shodný?
5. Co je to externí napěťový přenos?
6. Který model dvojbranu je výhodný pro určení vstupní impedance přenosové cesty?
7. Jakým způsobem lze určit výstupní impedanci přenosové cesty?
8. Na základě čeho můžeme nakreslit obvodový model přenosové cesty?

Úloha k řešení 7.1.

Určete přenosovou admitanci nakrátko dvojbranu z příkladu 7.1.

Řešení:

Proud nakrátko přenosové cesty, viz obr. 7.4, je obecně definován

$$-\hat{I}_{2k} = \frac{1}{\hat{A}_{22}\hat{Z}_i + \hat{A}_{12}}\hat{U}_i \,.$$

Je-li ke vstupní bráně dvojbranu připojený ideální zdroj napětí o hodnotě $\hat{U}_i$, je $\hat{Z}_i = 0\ \Omega$ a platí

$$-\hat{I}_{2k} = \frac{1}{\hat{A}_{12}}\hat{U}_i \qquad \text{a} \qquad \hat{U}_1 = \hat{U}_i \,,$$

takže přenosová admitance nakrátko T článku z obr. 7.1 je

$$\hat{P}_{IU} = \frac{-\hat{I}_{2k}}{\hat{U}_1} = \frac{\frac{1}{\hat{A}_{12}}\hat{U}_i}{\hat{U}_i} = \frac{1}{\hat{A}_{12}} = \frac{1}{\frac{1}{j\omega C}} = j\omega C \,.$$

7.2. Obrazové parametry souměrného dvojbranu

Pasivní souměrný dvojbran má stejné vlastnosti pro přenos energie v obou směrech a je-li popsaný kaskádními parametry, platí pro něj $\hat{A}_{11} = \hat{A}_{22}$. Pro přenos energie nebo signálu je navíc výhodné, aby přenosová cesta byla impedančně přizpůsobená. To v našem případě znamená, že vnitřní impedance zdroje $\hat{Z}_i$ by měla být rovna vstupní impedanci přenosové cesty $\hat{Z}_1$ a její výstupní impedance $\hat{Z}_2$ rovna impedanci zátěže $\hat{Z}_s$, tedy $\hat{Z}_1 = \hat{Z}_i$ a $\hat{Z}_2 = \hat{Z}_s$. Impedance přenosové cesty, která tuto podmínku splňuje, se nazývá obrazová a značí se $\hat{Z}_o$. Po jejím dosazení do vstupní a výstupní impedance získáme rovnice

$$\hat{Z}_1 = \hat{Z}_o = \frac{\hat{A}_{11}\hat{Z}_o + \hat{A}_{12}}{\hat{A}_{21}\hat{Z}_o + \hat{A}_{22}} \,,$$

$$\hat{Z}_2 = \hat{Z}_o = \frac{\hat{A}_{22}\hat{Z}_o + \hat{A}_{12}}{\hat{A}_{21}\hat{Z}_o + \hat{A}_{11}} \,.$$

Z první nebo druhé rovnice si můžeme vyjádřit obrazovou impedanci jako funkci parametrů přenosové cesty, s tím že dosadíme za $\hat{A}_{22} = \hat{A}_{11}$, čímž dostaneme

$$\hat{Z}_o = \frac{\hat{A}_{11}\hat{Z}_o + \hat{A}_{12}}{\hat{A}_{21}\hat{Z}_o + \hat{A}_{11}} \,.$$

Po vynásobení levé i pravé strany $\hat{A}_{21}\hat{Z}_o + \hat{A}_{11}$ získáme

$$\hat{Z}_o\left(\hat{A}_{21}\hat{Z}_o + \hat{A}_{11}\right) = \hat{A}_{11}\hat{Z}_o + \hat{A}_{12}$$

a algebraické úpravě

$$\hat{Z}_o^2 = \frac{\hat{A}_{12}}{\hat{A}_{21}} \,.$$

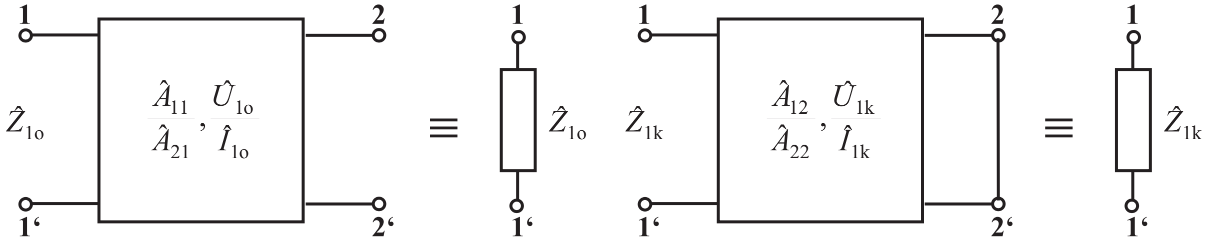
Rozšíříme-li pravou stranu rovnice formálně členem $\frac{\hat{A}_{11}}{\hat{A}_{11}}$ dostaneme

$$\hat{Z}_o^2 = \frac{\hat{A}_{11}}{\hat{A}_{21}}\frac{\hat{A}_{12}}{\hat{A}_{11}} \,,$$

kde první člen představuje vstupní impedanci naprázdno a druhý vstupní impedanci nakrátko, tedy

$$\hat{Z}_{\mathrm{o}} = \sqrt{\frac{\hat{A}_{12}}{\hat{A}_{21}}} = \sqrt{\hat{Z}_{1\mathrm{o}}\,\hat{Z}_{1\mathrm{k}}}$$

a jak vidíme, je obrazová impedance rovna geometrickému průměru impedancí vstupní brány při nezatížené a zkratované bráně výstupní, což můžeme využít k jejich experimentálnímu stanovení, viz obr. 7.6.



Obr. 7.6 Stanovení vstupní impedance: naprázdno, nakrátko

Definujme dále oba inverzní přenosy při obrazovém přizpůsobení zátěže. Pro napěťový přenos platí

$$\hat{G}_{\mathrm{oU}} = \left.\frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_2}\right|_{\hat{Z}_{\mathrm{s}}=\hat{Z}_{\mathrm{o}}}$$

a proudový přenos

$$\hat{G}_{\mathrm{oI}} = \left.\frac{\hat{I}_1}{-\hat{I}_2}\right|_{\hat{Z}_{\mathrm{s}}=\hat{Z}_{\mathrm{o}}} .$$

Dosadíme-li do proudového přenosu ze zobecněného Ohmova zákona za proudy obou bran, získáme

$$\hat{G}_{\mathrm{oI}} = \left.\frac{\dfrac{\hat{U}_1}{\hat{Z}_{\mathrm{o}}}}{-\left(-\dfrac{\hat{U}_2}{\hat{Z}_{\mathrm{o}}}\right)}\right|_{\hat{Z}_{\mathrm{s}}=\hat{Z}_{\mathrm{o}}} = \left.\frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_2}\right|_{\hat{Z}_{\mathrm{s}}=\hat{Z}_{\mathrm{o}}} .$$

Jak vidíme, proudový přenos je stejný jako přenos napěťový a nazvěme ho obrazový

$$\hat{G}_{\mathrm{o}} = \hat{G}_{\mathrm{oU}} = \hat{G}_{\mathrm{oI}} = \left.\frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_2}\right|_{\hat{Z}_{\mathrm{s}}=\hat{Z}_{\mathrm{o}}} .$$

Dosadíme-li do obrazového přenosu kaskádní napěťovou rovnici, dostaneme

$$\hat{G}_{\mathrm{o}} = \frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_2} = \frac{\hat{A}_{11}\hat{U}_2 + \hat{A}_{12}(-\hat{I}_2)}{\hat{U}_2} = \hat{A}_{11} + \hat{A}_{12}\,\frac{1}{\dfrac{\hat{U}_2}{-\hat{I}_2}} = \hat{A}_{11} + \frac{\hat{A}_{12}}{\hat{Z}_{\mathrm{o}}}$$

a po dosazení za

$$\hat{Z}_{\mathrm{o}} = \sqrt{\frac{\hat{A}_{12}}{\hat{A}_{21}}} \text{ a } \sqrt{\hat{A}_{12}\hat{A}_{21}} = \sqrt{\hat{A}^2{}_{11} - 1} \text{ (odvozeno z } \left|\hat{A}\right| = \hat{A}_{11}\hat{A}_{22} - \hat{A}_{12}\hat{A}_{21} = \hat{A}^2{}_{11} - \hat{A}_{12}\hat{A}_{21} = 1\text{)}$$

získáme

$$\hat{G}_{\mathrm{o}} = \hat{A}_{11} + \hat{A}_{12}\sqrt{\frac{\hat{A}_{21}}{\hat{A}_{12}}} = \hat{A}_{11} + \sqrt{\hat{A}_{12}\,\hat{A}_{21}} = \hat{A}_{11} + \sqrt{\hat{A}_{11}^2 - 1}\,.$$

K obrazovému přenosu $\hat{G}_{\mathrm{o}}$ definujme obrazovou míru přenosu $\hat{g}_{\mathrm{o}}$ vztahem

$$\hat{G}_{\mathrm{o}} = \left|\hat{G}_{\mathrm{o}}\right| \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\arg(\hat{G}_{\mathrm{o}})} = \mathrm{e}^{\hat{g}_{\mathrm{o}}} = \mathrm{e}^{a_{\mathrm{o}} + \mathrm{j}b_{\mathrm{o}}} = \mathrm{e}^{a_{\mathrm{o}}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}b_{\mathrm{o}}}\,.$$

Po logaritmování obdržíme obrazovou míru přenosu

$$\hat{g}_{\mathrm{o}} = a_{\mathrm{o}} + \mathrm{j}b_{\mathrm{o}} = \ln\hat{G}_{\mathrm{o}} = \ln\!\left(\left|\hat{G}_{\mathrm{o}}\right| \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\arg(\hat{G}_{\mathrm{o}})}\right) = \ln\left|\hat{G}_{\mathrm{o}}\right| + \mathrm{j}\arg(\hat{G}_{\mathrm{o}})\,,$$

kde jeho reálná složka

$$a_{\mathrm{o}} = \ln\left|\hat{G}_{\mathrm{o}}\right| = \ln\left|\frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_2}\right| = \ln\left|\frac{\hat{I}_1}{\hat{I}_2}\right|$$

je obrazový útlum (konstanta tlumení), který je definován logaritmem velikosti napěťového a proudového přenosu a jeho imaginární složka

$$b_{\mathrm{o}} = \arg\!\left(\hat{G}_{\mathrm{o}}\right) = \arg\!\left(\frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_2}\right) = \arg\!\left(\frac{\hat{I}_1}{\hat{I}_2}\right)$$

je obrazový úhel přenosu (obrazová fáze, fázová konstanta), který je definován argumentem napěťového nebo proudového přenosu. Udává fázový posun mezi vstupním a výstupním napětím a současně i vstupním a výstupním proudem. Obrazový útlum udává míru tlumení přenosové cesty, který je u pasivního, souměrného dvojbranu vždy nezáporný.

Jak víme, pasivní a souměrný dvojbran je charakterizován dvěma kaskádními parametry. Hledejme nyní vztah mezi těmito parametry a obrazovými parametry. Vyjděme z následujících rovnic

$$\hat{G}_{\mathrm{o}} = \mathrm{e}^{\hat{g}_{\mathrm{o}}} = \hat{A}_{11} + \sqrt{\hat{A}_{12}\,\hat{A}_{21}}\,,$$

$$\hat{A}_{11}^2 - \hat{A}_{12}\hat{A}_{21} = \left(\hat{A}_{11} - \sqrt{\hat{A}_{12}\hat{A}_{21}}\right)\left(\hat{A}_{11} + \sqrt{\hat{A}_{12}\hat{A}_{21}}\right) = 1\,,$$

když upravíme druhou rovnici s využitím rovnice první do tvaru

$$\left(\hat{A}_{11} - \sqrt{\hat{A}_{12}\hat{A}_{21}}\right) = \frac{1}{\left(\hat{A}_{11} + \sqrt{\hat{A}_{12}\hat{A}_{21}}\right)} = \frac{1}{\hat{G}_{\mathrm{o}}} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\hat{g}_{\mathrm{o}}}} = \mathrm{e}^{-\hat{g}_{\mathrm{o}}}\,.$$

Součtem a rozdílem těchto rovnic získáme

$$\hat{G}_{\mathrm{o}} + \frac{1}{\hat{G}_{\mathrm{o}}} = 2\hat{A}_{11} = \mathrm{e}^{\hat{g}_{\mathrm{o}}} + \mathrm{e}^{-\hat{g}_{\mathrm{o}}}\,,$$

$$\hat{G}_{\mathrm{o}} - \frac{1}{\hat{G}_{\mathrm{o}}} = 2\sqrt{\hat{A}_{12}\,\hat{A}_{21}} = \mathrm{e}^{\hat{g}_{\mathrm{o}}} - \mathrm{e}^{-\hat{g}_{\mathrm{o}}}\,.$$

Užitím hyperbolických funkcí dostaneme rovnice pro káskádní parametry

$$\hat{A}_{22} = \hat{A}_{11} = \frac{\mathrm{e}^{\hat{g}_{\mathrm{o}}} + \mathrm{e}^{-\hat{g}_{\mathrm{o}}}}{2} = \cosh(\hat{g}_{\mathrm{o}})\,,$$

$$\sqrt{\hat{A}_{12}\,\hat{A}_{21}} = \frac{\mathrm{e}^{\hat{g}_{\mathrm{o}}} - \mathrm{e}^{-\hat{g}_{\mathrm{o}}}}{2} = \sinh(\hat{g}_{\mathrm{o}})\,,$$

kdy druhou rovnici užitím upravených vztahů pro obrazovou impedanci

$$\hat{Z}_o = \sqrt{\frac{\hat{A}_{12}}{\hat{A}_{21}}}\,\frac{\sqrt{\hat{A}_{21}}}{\sqrt{\hat{A}_{21}}} = \frac{\sqrt{\hat{A}_{12}\,\hat{A}_{21}}}{\sqrt{\hat{A}_{21}}\,\sqrt{\hat{A}_{21}}} = \frac{\sqrt{\hat{A}_{12}\,\hat{A}_{21}}}{\hat{A}_{21}} \quad \text{nebo} \quad \hat{Z}_o = \sqrt{\frac{\hat{A}_{12}}{\hat{A}_{21}}}\,\frac{\sqrt{\hat{A}_{12}}}{\sqrt{\hat{A}_{12}}} = \frac{\sqrt{\hat{A}_{12}}\,\sqrt{\hat{A}_{12}}}{\sqrt{\hat{A}_{12}\,\hat{A}_{21}}} = \frac{\hat{A}_{12}}{\sqrt{\hat{A}_{12}\,\hat{A}_{21}}}$$

přepíšeme do následujících tvarů

$$\hat{A}_{21} = \frac{\sinh(\hat{g}_o)}{\hat{Z}_o},$$

$$\hat{A}_{12} = \hat{Z}_o \sinh(\hat{g}_o).$$

Kaskádní matice recipročního podélně souměrného dvojbranu vyjádřená pomocí obrazových parametrů má tvar

$$[\hat{A}] = \begin{bmatrix} \cosh(\hat{g}_o) & \hat{Z}_o \sinh(\hat{g}_o) \\ \frac{1}{\hat{Z}_o}\sinh(\hat{g}_o) & \cosh(\hat{g}_o) \end{bmatrix}.$$

Dále si pomocí obrazových parametrů vyjádřeme vstupní impedance naprázdno a nakrátko

$$\hat{Z}_{1o} = \frac{\hat{A}_{11}}{\hat{A}_{21}} = \frac{\cosh(\hat{g}_o)}{\frac{\sinh(\hat{g}_o)}{\hat{Z}_o}} = \hat{Z}_o \coth(\hat{g}_o),$$

$$\hat{Z}_{1k} = \frac{\hat{A}_{12}}{\hat{A}_{22}} = \frac{\hat{Z}_o \sinh(\hat{g}_o)}{\cosh(\hat{g}_o)} = \hat{Z}_o \tanh(\hat{g}_o),$$

které dejme do poměru, a to tak, že impedanci nakrátko podělíme impedancí naprázdno, čímž získáme

$$\frac{\hat{Z}_{1k}}{\hat{Z}_{1o}} = \frac{\hat{Z}_o \tanh(\hat{g}_o)}{\hat{Z}_o \coth(\hat{g}_o)} = \frac{\tanh(\hat{g}_o)}{\frac{1}{\tanh(\hat{g}_o)}} = \tanh^2(\hat{g}_o)$$

a po úpravě

$$\tanh(\hat{g}_o) = \sqrt{\frac{\hat{Z}_{1k}}{\hat{Z}_{1o}}}.$$

Změříme-li na vstupní straně přenosové cesty impedanci naprázdno a nakrátko, můžeme pomocí těchto hodnot určit obrazové parametry pasivního, souměrného dvojbranu. Obrazovou impedanci určíme z již dříve odvozeného vztahu

$$\hat{Z}_o = \sqrt{\hat{Z}_{1o}\,\hat{Z}_{1k}}$$

a obrazový přenos

$$\hat{g}_o = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sqrt{\frac{\hat{Z}_{1k}}{\hat{Z}_{1o}}}}{1-\sqrt{\frac{\hat{Z}_{1k}}{\hat{Z}_{1o}}}}\right),$$

odvozený z relací mezi hyperbolickými funkcemi

$$\mathrm{tgh}(\hat{g}_o) = \frac{\sinh(\hat{g}_o)}{\cosh(\hat{g}_o)} = \frac{\dfrac{e^{\hat{g}_o} - e^{-\hat{g}_o}}{2}}{\dfrac{e^{\hat{g}_o} + e^{-\hat{g}_o}}{2}} = \frac{e^{\hat{g}_o}\left(1 - \dfrac{e^{-\hat{g}_o}}{e^{\hat{g}_o}}\right)}{e^{\hat{g}_o}\left(1 + \dfrac{e^{-\hat{g}_o}}{e^{\hat{g}_o}}\right)} = \frac{1 - e^{-2\hat{g}_o}}{1 + e^{-2\hat{g}_o}} .$$

Osamostatnění členu $e^{-2\hat{g}_o}$ docílíme vynásobením obou stran rovnice členem $1 + e^{-2\hat{g}_o}$ a následnými úpravami

$$\mathrm{tgh}(\hat{g}_o)\left(1 + e^{-2\hat{g}_o}\right) = 1 - e^{-2\hat{g}_o},$$

$$\mathrm{tgh}(\hat{g}_o)\, e^{-2\hat{g}_o} + e^{-2\hat{g}_o} = 1 - \mathrm{tgh}(\hat{g}_o),$$

$$e^{-2\hat{g}_o}\left(1 + \mathrm{tgh}(\hat{g}_o)\right) = 1 - \mathrm{tgh}(\hat{g}_o),$$

$$e^{-2\hat{g}_o} = \frac{1 - \mathrm{tgh}(\hat{g}_o)}{1 + \mathrm{tgh}(\hat{g}_o)},$$

případně

$$e^{2\hat{g}_o} = \frac{1 + \mathrm{tgh}(\hat{g}_o)}{1 - \mathrm{tgh}(\hat{g}_o)} .$$

Je-li za sebou řazeno v kaskádě více dvojbranů se stejnou obrazovou impedancí, viz obr. 7.7, platí pro výsledný přenos přenosové cesty

$$\hat{G}_o = \frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_n} = \frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_2}\frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_3} \dots \frac{\hat{U}_{n-1}}{\hat{U}_n} = \hat{G}_{o1}\,\hat{G}_{o2} \dots \hat{G}_{on} \quad \text{nebo} \quad \hat{G}_o = \frac{\hat{I}_1}{-\hat{I}_n} = \frac{\hat{I}_1}{-\hat{I}_2}\frac{-\hat{I}_2}{-\hat{I}_3} \dots \frac{\hat{I}_{n-1}}{\hat{I}_n} = \hat{G}_{o1}\,\hat{G}_{o2} \dots \hat{G}_{on}$$

a pro výsledný obrazový přenos

$$\hat{G}_o = e^{\hat{g}_o} = e^{\hat{g}_{o1}} e^{\hat{g}_{o2}} \dots e^{\hat{g}_{on}}$$

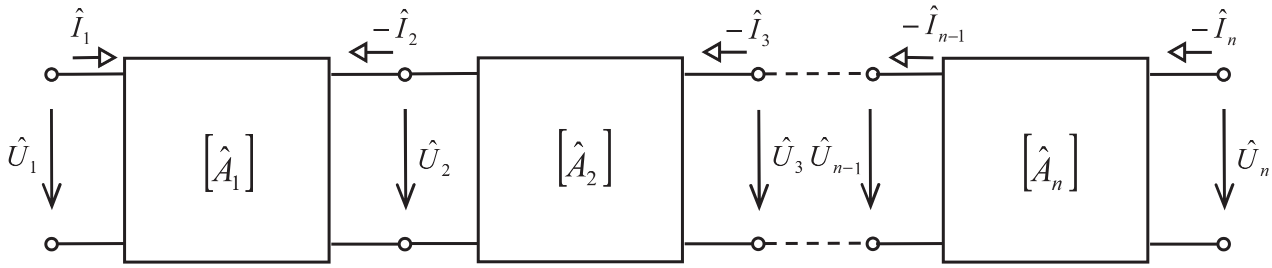
a obrazovou míru přenosu a její složky

$$\hat{g}_o = \hat{g}_{o1} + \hat{g}_{o2} + \dots + \hat{g}_{on},$$

$$a_o = a_{o1} + a_{o2} + \dots + a_{on},$$

$$b_o = b_{o1} + b_{o2} + \dots + b_{on} .$$

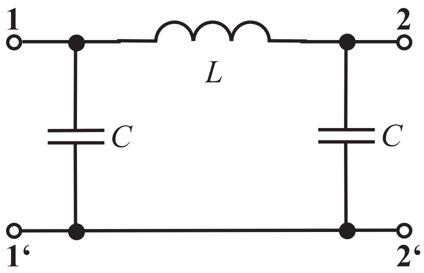
Výsledná obrazová míra přenosu je dána součtem jednotlivých obrazových měr přenosu, tedy i jejich složky (obrazový útlum a úhel přenosu) jsou dány součty parametrů jednotlivých dvojbranů.



Obr. 7.7 Kaskádní řazení dvojbranů

Příklad 7.3.

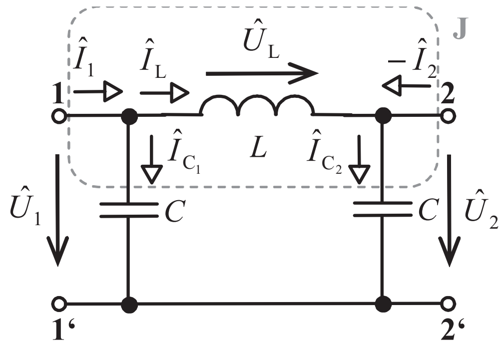
Určete obrazové parametry dvojbranu z obr. 7.8.



Obr. 7.8 Zapojení Π článku, příklad 7.3

♦

Odvození kaskádních parametrů si ukažme, jiným způsobem než ze stavů dvojbranu naprázdno a nakrátko, a to přímou aplikací Kirchhoffových zákonů a užitím zobecněného Ohmova zákona. Počítací šipky jsou zavedeny na obr. 7.9



Obr. 7.9 Π článek, zavedení počítacích šipek, příklad 7.3

První kaskádní rovnici získáme na základě 2. Kirchhoffova zákona

$$\hat{U}_1 = \hat{U}_\mathrm{L} + \hat{U}_2 = \mathrm{j}\omega L\,\hat{I}_\mathrm{L} + \hat{U}_2 = \mathrm{j}\omega L\left(\hat{I}_{\mathrm{C}_2} - \left(-\hat{I}_2\right)\right) + \hat{U}_2 = \mathrm{j}\omega L\,\mathrm{j}\omega C\,\hat{U}_2 + \mathrm{j}\omega L\,\hat{I}_2 + \hat{U}_2 =$$
$$= \left(1 - \omega^2 LC\right)\hat{U}_2 + \mathrm{j}\omega L\,\hat{I}_2$$

a druhou kaskádní rovnici z 1. Kirchhoffova zákona aplikovaného na řez J

$$\hat{I}_1 = \hat{I}_{\mathrm{C}_1} + \hat{I}_{\mathrm{C}_2} - \left(-\hat{I}_2\right) = \mathrm{j}\omega C\,\hat{U}_1 + \mathrm{j}\omega C\,\hat{U}_2 + \hat{I}_2 = \mathrm{j}\omega C\left[\left(1 - \omega^2 LC\right)\hat{U}_2 + \mathrm{j}\omega L\,\hat{I}_2\right] + \mathrm{j}\omega C\,\hat{U}_2 + \hat{I}_2 =$$
$$= \mathrm{j}\omega C\left(2 - \omega^2 LC\right)\hat{U}_2 + \left(1 - \omega^2 LC\right)\hat{I}_2 .$$

Srovnáním členů u závislých veličin s obecným modelem kaskádního dvojbranu

$$\hat{U}_1 = \hat{A}_{11}\hat{U}_2 + \hat{A}_{12}\left(-\hat{I}_2\right),$$
$$\hat{I}_1 = \hat{A}_{21}\hat{U}_2 + \hat{A}_{22}\left(-\hat{I}_2\right)$$

získáme následující hodnoty prvků kaskádní matice dvojbranu

$$\hat{A}_{11} = 1 - \omega^2 LC\,, \qquad \hat{A}_{12} = \mathrm{j}\omega L\,,$$
$$\hat{A}_{21} = \mathrm{j}\omega C\left(2 - \omega^2 LC\right), \qquad \hat{A}_{22} = 1 - \omega^2 LC\,.$$

Jelikož platí $\hat{A}_{11} = \hat{A}_{22} = 1-\omega^2 LC$, je dvojbran souměrný a můžeme pro něj určit obrazové parametry.

Dosazením do definice obrazové impedance získáme

$$\hat{Z}_o = \sqrt{\frac{\hat{A}_{12}}{\hat{A}_{21}}} = \sqrt{\frac{j\omega L}{j\omega C\left(2-\omega^2 LC\right)}} = \sqrt{\frac{L}{C}}\sqrt{\frac{1}{2-\omega^2 LC}}.$$

Pro stanovení obrazového útlumu musíme ze známých kaskádních parametrů nejdříve určit obrazový přenos

$$\hat{G}_o = \hat{A}_{11} + \sqrt{\hat{A}_{11}^2 - 1} = 1-\omega^2 LC + \sqrt{\left(1-\omega^2 LC\right)^2 - 1} = 1-\omega^2 LC + \sqrt{-\omega^2 LC\left(2-\omega^2 LC\right)} =$$
$$= 1-\omega^2 LC + j\omega\sqrt{LC}\sqrt{2-\omega^2 LC},$$

který použijeme ke stanovení složek obrazové míry přenosu. Reálnou složku, obrazový útlum určíme z definice jako velikost jeho modulu

$$a_o = \ln\left|\hat{G}_o\right| = \ln\left(\left|1-\omega^2 LC + j\omega\sqrt{LC}\sqrt{2-\omega^2 LC}\right|\right) = \ln\left(1-2\,\omega^2 LC + \left(\omega^2 LC\right)^2 + \omega^2 LC\left(2-\omega^2 LC\right)\right) =$$
$$= \ln(1) = 0\,(-)$$

a imaginární složku,obrazový úhel přenosu z jeho argumentu

$$b_o = \arg\left(\hat{G}_o\right) = \arctan\left(\omega\sqrt{LC}\,\frac{\sqrt{2-\omega^2 LC}}{1-\omega^2 LC}\right).$$

Protože obrazový útlum je nulový, je zkoumaný dvojbran bezeztrátový a pro jeho obrazovou míru přenosu platí

$$\hat{g}_o = jb_o = j\arctan\left(\omega\sqrt{LC}\,\frac{\sqrt{2-\omega^2 LC}}{1-\omega^2 LC}\right).$$

Σ Shrnutí pojmů 7.2.

K posouzení vlivu přenosové cesty na přenos energie nebo signálu slouží napěťový a proudový přenos. Oba tyto přenosy jsou u obrazově přizpůsobeného dvojbranu stejné a definujeme pro ně obrazovou míru přenosu, která má dvě složky obrazový útlum a obrazový úhel přenosu. Obrazově přizpůsobený dvojbran má stejnou hodnotu vstupní i výstupní impedance, která je rovna hodnotě obrazové impedance. Hodnotu obrazové impedance můžeme experimentálně určit výpočtem z naměřených hodnot vstupní impedance naprázdno a nakrátko. V případě kaskádního řazení výslednou obrazovou míru přenosu určíme součtem jednotlivých obrazových měr přenosu jednotlivých dvojbranů.

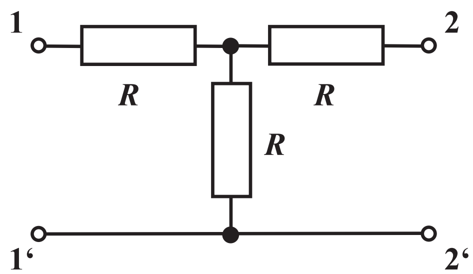
? **Otázky 7.2.**

1. Co jsou to obrazové parametry a k čemu slouží?
2. Kolika obrazovými parametry jsou definovány vlastnosti obrazového dvojbranu?
3. Jaký je vztah mezi napěťovým a proudovým přenosem pasivního, souměrného dvojbranu?

4. Pro jaký dvojbran jsou obrazové parametry definovány?
5. Jak můžeme stanovit hodnotu obrazové impedance?
6. Co znamená, řekne-li se, že zátěž je obrazově přizpůsobena?
7. Jak zajistíme, aby celá přenosová cesta byla obrazově přizpůsobená?
8. Jak je definována obrazová míru přenosu?
9. Jakou hodnotu má obrazový útlum pasivního dvojbranu?
10. Co udává obrazový úhel přenosu?
11. Pomocí kterých funkcí můžeme zapsat obrazové parametry dvojbranu?
12. Čemu je rovna výsledná obrazová míra přenosu kaskádně řazených obrazových dvojbranů?

Úloha k řešení 7.2.

Určete obrazovou impedanci odporového dvojbranu z obr. 7.10.



Obr. 7.10 Zapojení T článku, úloha k řešení 7.2

Řešení:

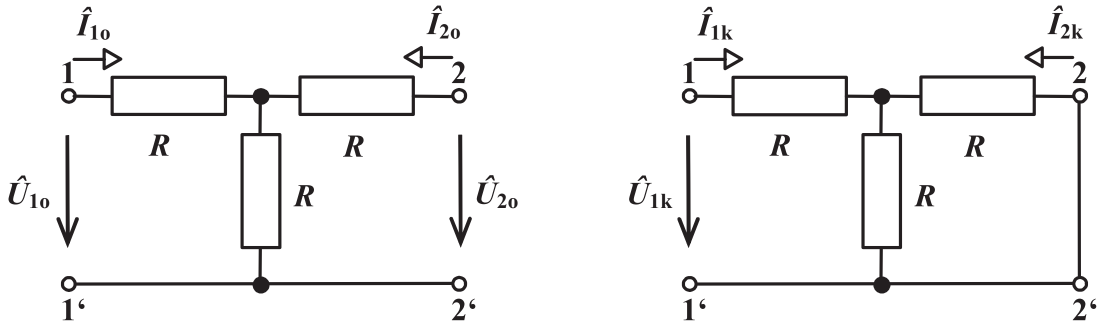
Z hodnot kaskádních parametrů dvojbranu určených z jeho provozních stavů podle obr. 7.11 nejprve ověříme jeho souměrnost

$$\hat{A}_{11} = \left.\frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_2}\right|_{\hat{I}_2=0} = \frac{\hat{U}_{1\text{o}}}{\hat{U}_{2\text{o}}} = \frac{\hat{U}_1}{\frac{R}{R+R}\hat{U}_1} = \frac{\hat{U}_1}{\frac{\hat{U}_1}{2}} = 2\,,$$

$$\hat{A}_{22} = \left.\frac{\hat{I}_1}{-\hat{I}_2}\right|_{\hat{U}_2=0} = \frac{\hat{I}_{1\text{k}}}{-\hat{I}_{2\text{k}}} = \frac{\dfrac{\hat{U}_1}{R+\dfrac{RR}{R+R}}}{\dfrac{R}{R+R}\,\dfrac{\hat{U}_1}{R+\dfrac{RR}{R+R}}} = \frac{\dfrac{1}{\frac{3}{2}R}}{\dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{\frac{3}{2}R}} = 2\,.$$

Jelikož platí $\hat{A}_{11} = \hat{A}_{22}$, je dvojbran souměrný. Pomocí zbývajících hodnot kaskádních parametrů

$$\hat{A}_{12} = \left.\frac{\hat{U}_1}{-\hat{I}_2}\right|_{\hat{U}_2=0} = \frac{\hat{U}_{1\text{k}}}{-\hat{I}_{2\text{k}}} = \frac{\hat{U}_1}{\dfrac{R}{R+R}\,\dfrac{\hat{U}_1}{R+\dfrac{RR}{R+R}}} = \frac{\hat{U}_1}{\dfrac{1}{2}\,\dfrac{\hat{U}_1}{\frac{3}{2}R}} = 3R\,,$$



Obr. 7.11 Provozní stavy T článku: naprázdno, nakrátko, úlohy k řešení 7.2

$$\hat{A}_{21} = \left.\frac{\hat{I}_1}{\hat{U}_2}\right|_{\hat{I}_2=0} = \frac{\hat{I}_{1\mathrm{o}}}{\hat{U}_{2\mathrm{o}}} = \frac{\dfrac{\hat{U}_1}{R+R}}{\dfrac{\hat{U}_1}{2}} = \frac{\dfrac{\hat{U}_1}{2R}}{\dfrac{\hat{U}_1}{2}} = \frac{1}{R}$$

stanovíme jeho obrazovou impedanci

$$\hat{Z}_{\mathrm{o}} = \sqrt{\frac{\hat{A}_{12}}{\hat{A}_{21}}} = \sqrt{\frac{3R}{\dfrac{1}{R}}} = \sqrt{3}R\,.$$

7.3. Obrazové parametry nesouměrného dvojbranu

Nesouměrný dvojbran je určen třemi kaskádními parametry a nemá v obou směrech přenosu stejné vlastnosti. Z tohoto důvodu u něj definujeme dvě obrazové impedance, vstupní $\hat{Z}_{\mathrm{o}1}$ a výstupní $\hat{Z}_{\mathrm{o}2}$, viz obr. 7.12. Vstupní obrazová impedance $\hat{Z}_{\mathrm{o}1}$ je definována při zatížení výstupní brány zátěží o hodnotě impedance $\hat{Z}_{\mathrm{o}2}$ a výstupní obrazová impedance $\hat{Z}_{\mathrm{o}2}$ při zatížení vstupní brány zátěží o hodnotě impedance $\hat{Z}_{\mathrm{o}1}$. Dosazením těchto podmínek do vstupní a výstupní impedance dvojbranu dostaneme

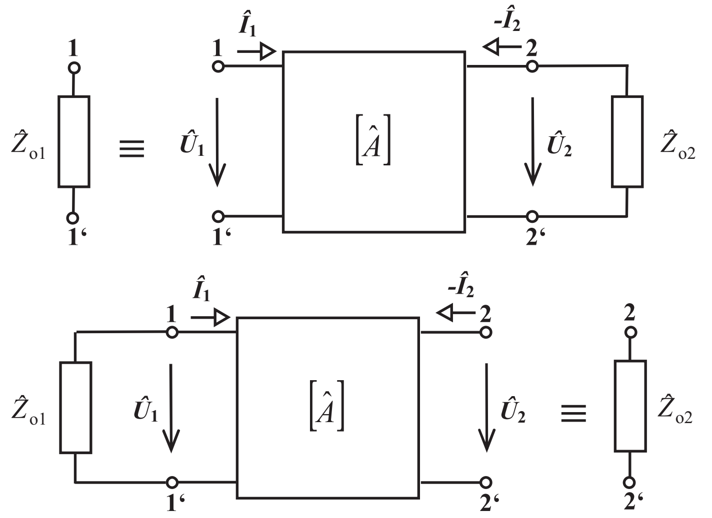
$$\hat{Z}_1 = \hat{Z}_{\mathrm{o}1} = \frac{\hat{A}_{11}\hat{Z}_{\mathrm{o}2} + \hat{A}_{12}}{\hat{A}_{21}\hat{Z}_{\mathrm{o}2} + \hat{A}_{22}}\,,$$

$$\hat{Z}_2 = \hat{Z}_{\mathrm{o}2} = \frac{\hat{A}_{22}\hat{Z}_{\mathrm{o}1} + \hat{A}_{12}}{\hat{A}_{21}\hat{Z}_{\mathrm{o}1} + \hat{A}_{11}}\,.$$

Analogickými úpravami jako u souměrného dvojbranu získáme definiční vztahy obou těchto obrazových impedancí z provozních stavů naprázdno a nakrátko

$$\hat{Z}_{\mathrm{o}1} = \sqrt{\hat{Z}_{1\mathrm{o}}\,\hat{Z}_{1\mathrm{k}}} = \sqrt{\frac{\hat{A}_{11}}{\hat{A}_{21}}\frac{\hat{A}_{12}}{\hat{A}_{22}}}\,,$$

$$\hat{Z}_{\mathrm{o}2} = \sqrt{\hat{Z}_{2\mathrm{o}}\,\hat{Z}_{2\mathrm{k}}} = \sqrt{\frac{\hat{A}_{22}}{\hat{A}_{21}}\frac{\hat{A}_{12}}{\hat{A}_{11}}}\,.$$



Obr. 7.12 Definice obrazových impedancí nesouměrného dvojbranu

Vynásobíme-li obě obrazové impedance mezi sebou, dostaneme

$$\hat{Z}_{o1}\,\hat{Z}_{o2} = \sqrt{\frac{\hat{A}_{11}}{\hat{A}_{21}}\frac{\hat{A}_{12}}{\hat{A}_{22}}}\sqrt{\frac{\hat{A}_{22}}{\hat{A}_{21}}\frac{\hat{A}_{12}}{\hat{A}_{11}}} = \frac{\hat{A}_{12}}{\hat{A}_{21}} = \hat{Z}_o^{\,2},$$

kde poměr $\frac{\hat{A}_{12}}{\hat{A}_{21}}$ je roven čtverci obrazové impedance souměrného dvojbranu $\hat{Z}_o$, takže platí

$$\hat{Z}_o = \sqrt{\frac{\hat{A}_{12}}{\hat{A}_{21}}} = \sqrt{\hat{Z}_{o1}\,\hat{Z}_{o2}}\,.$$

Obrazová impedance souměrného dvojbranu je tedy definována geometrickým průměrem obrazových hodnot vstupní a výstupní impedance nesouměrného dvojbranu. Podělíme-li obě obrazové impedance, získáme poměr, který udává míru nesymetrie dvojbranu

$$\frac{\hat{Z}_{o1}}{\hat{Z}_{o2}} = \frac{\sqrt{\frac{\hat{A}_{11}}{\hat{A}_{21}}\frac{\hat{A}_{12}}{\hat{A}_{22}}}}{\sqrt{\frac{\hat{A}_{22}}{\hat{A}_{21}}\frac{\hat{A}_{12}}{\hat{A}_{11}}}} = \frac{\sqrt{\frac{\hat{A}_{11}}{\hat{A}_{22}}}}{\sqrt{\frac{\hat{A}_{22}}{\hat{A}_{11}}}} = \frac{\hat{A}_{11}}{\hat{A}_{22}},$$

který po odmocnění můžeme zapsat

$$\hat{k}_s = \sqrt{\frac{\hat{Z}_{o1}}{\hat{Z}_{o2}}} = \sqrt{\frac{\hat{A}_{11}}{\hat{A}_{22}}}\,.$$

Pomocí koeficientu nesymetrie dvojbranu $\hat{k}_s$ a obrazové impedance souměrného dvojbranu $\hat{Z}_o$ můžeme zapsat obrazové impedance takto

$$\hat{Z}_{o1} = \sqrt{\frac{\hat{A}_{11}}{\hat{A}_{22}}}\sqrt{\frac{\hat{A}_{12}}{\hat{A}_{21}}} = \hat{k}_s\hat{Z}_o,$$

$$\hat{Z}_{o2} = \sqrt{\frac{\hat{A}_{22}}{\hat{A}_{11}}}\sqrt{\frac{\hat{A}_{12}}{\hat{A}_{21}}} = \frac{1}{\hat{k}_s}\hat{Z}_o\,.$$

Zatížíme-li nesouměrný dvojbran obrazovou impedancí $\hat{Z}_{o2}$, platí pro výstupní proud ze zobecněného Ohmova zákona rovnosti

$$-\hat{I}_2 = \frac{\hat{U}_2}{\hat{Z}_{o2}} = \frac{\hat{U}_2}{\frac{1}{\hat{k}_s}\hat{Z}_o} = \hat{k}_s \frac{\hat{U}_2}{\hat{Z}_o}$$

nebo po úpravě pro výstupní napětí

$$\hat{U}_2 = \frac{\hat{Z}_o\left(-\hat{I}_2\right)}{\hat{k}_s},$$

které dosadíme do kaskádních rovnic

$$\hat{U}_1 = \hat{A}_{11}\hat{U}_2 + \hat{A}_{12}\left(-\hat{I}_2\right) = \hat{A}_{11}\hat{U}_2 + \hat{A}_{12}\,\hat{k}_s \frac{\hat{U}_2}{\hat{Z}_o} = \left(\hat{A}_{11} + \hat{k}_s \frac{\hat{A}_{12}}{\hat{Z}_o}\right)\hat{U}_2,$$

$$\hat{I}_1 = \hat{A}_{21}\hat{U}_2 + \hat{A}_{22}\left(-\hat{I}_2\right) = \hat{A}_{21}\frac{\hat{Z}_o\left(-\hat{I}_2\right)}{\hat{k}_s} + \hat{A}_{22}\left(-\hat{I}_2\right) = \left(\hat{A}_{21}\frac{\hat{Z}_o}{\hat{k}_s} + \hat{A}_{22}\right)\left(-\hat{I}_2\right),$$

ze kterých si vyjádříme přenosy, napěťový

$$\hat{G}_{oU} = \left.\frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_2}\right|_{\hat{Z}_s=\hat{Z}_{o2}} = \hat{A}_{11} + \hat{k}_s\frac{\hat{A}_{12}}{\hat{Z}_o} = \hat{k}_s\left(\frac{\hat{A}_{11}}{\hat{k}_s} + \frac{\hat{A}_{12}}{\hat{Z}_o}\right) = \hat{k}_s\left(\frac{\hat{A}_{11}}{\sqrt{\frac{\hat{A}_{11}}{\hat{A}_{22}}}} + \frac{\hat{A}_{12}}{\sqrt{\frac{\hat{A}_{12}}{\hat{A}_{21}}}}\right) = \hat{k}_s\left(\sqrt{\hat{A}_{11}\hat{A}_{22}} + \sqrt{\hat{A}_{12}\hat{A}_{21}}\right)$$

a proudový přenos

$$\hat{G}_{oI} = \left.\frac{\hat{I}_1}{-\hat{I}_2}\right|_{\hat{Z}_s=\hat{Z}_{o2}} = \hat{A}_{21}\frac{\hat{Z}_o}{\hat{k}_s} + \hat{A}_{22} = \frac{1}{\hat{k}_s}\left(\hat{A}_{21}\hat{Z}_o + \hat{k}_s\hat{A}_{22}\right) = \frac{1}{\hat{k}_s}\left(\hat{A}_{21}\sqrt{\frac{\hat{A}_{12}}{\hat{A}_{21}}} + \sqrt{\frac{\hat{A}_{11}}{\hat{A}_{22}}}\hat{A}_{22}\right) =$$

$$= \frac{1}{\hat{k}_s}\left(\sqrt{\hat{A}_{11}\hat{A}_{22}} + \sqrt{\hat{A}_{12}\hat{A}_{21}}\right),$$

kde jsme k úpravě použili definice obrazové impedance souměrného dvojbranu $\hat{Z}_o$ a koeficientu nesymetrie dvojbranu $\hat{k}_s$. Z definičních vztahů přenosů nesouměrného dvojbranu zatíženého obrazovou impedancí $\hat{Z}_{o2}$ vidíme, že oba přenosy se nerovnají.

Vynásobíme-li oba přenosy, dostaneme

$$\hat{G}_{oU}\,\hat{G}_{oI} = \hat{k}_s\left(\sqrt{\hat{A}_{11}\hat{A}_{22}} + \sqrt{\hat{A}_{12}\hat{A}_{21}}\right)\frac{1}{\hat{k}_s}\left(\sqrt{\hat{A}_{11}\hat{A}_{22}} + \sqrt{\hat{A}_{12}\hat{A}_{21}}\right) = \left(\sqrt{\hat{A}_{11}\hat{A}_{22}} + \sqrt{\hat{A}_{12}\hat{A}_{21}}\right)^2,$$

takže můžeme definovat geometrickou střední hodnotu obrazového přenosu

$$\hat{G}_o = \sqrt{\hat{G}_{oU}\,\hat{G}_{oI}} = \sqrt{\hat{A}_{11}\hat{A}_{22}} + \sqrt{\hat{A}_{12}\hat{A}_{21}}\ .$$

Výše uvedené přenosy tak můžeme zapsat

$$\hat{G}_{oU} = \left.\frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_2}\right|_{\hat{Z}_s=\hat{Z}_{o2}} = \hat{k}_s\left(\sqrt{\hat{A}_{11}\hat{A}_{22}} + \sqrt{\hat{A}_{12}\hat{A}_{21}}\right) = \hat{k}_s\hat{G}_o,$$

$$\hat{G}_{\mathrm{oI}} = \left.\frac{\hat{I}_1}{-\hat{I}_2}\right|_{\hat{Z}_s=\hat{Z}_{o2}} = \frac{1}{\hat{k}_s}\left(\sqrt{\hat{A}_{11}\hat{A}_{22}} + \sqrt{\hat{A}_{12}\hat{A}_{21}}\right) = \frac{1}{\hat{k}_s}\hat{G}_o,$$

a jejich obrazové míry přenosu

$$\hat{g}_{\mathrm{oU}} = \ln\left(\hat{G}_o\hat{k}_s\right) = \ln\left(\hat{G}_o\right) + \ln\left(\hat{k}_s\right) = \hat{g}_o + g_s,$$

$$\hat{g}_{\mathrm{oI}} = \ln\left(\frac{\hat{G}_o}{\hat{k}_s}\right) = \ln\left(\hat{G}_o\right) - \ln\left(\hat{k}_s\right) = \hat{g}_o - \hat{g}_s$$

kde

$$\hat{g}_o = \ln\left(\hat{G}_o\right)$$

je střední obrazová míra přenosu

$$\hat{g}_s = \ln\left(\hat{k}_s\right)$$

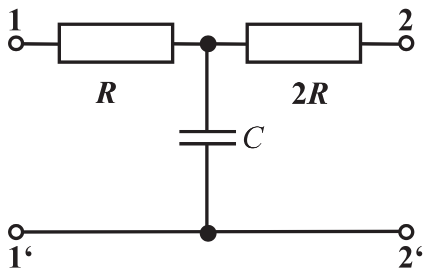
je obrazová míra nesouměrnosti.

Obrazová míra napěťového a proudového přenosu je tedy dána součtem a rozdílem střední obrazové míry přenosu $\hat{g}_o$ a obrazové míry nesouměrnosti $\hat{g}_s$.

Závěrem konstatujme, že pro $\hat{k}_s \to 1$ přejdou vztahy pro nesouměrný dvojbran zatížený obrazovou impedancí $\hat{Z}_{o2}$ na vztahy odvozené pro souměrný dvojbran zatížený obrazovou impedancí $\hat{Z}_o$.

Příklad 7.4.

Určete obrazové parametry dvojbranu na obr. 7.13, je-li k vstupní bráně připojen harmonický zdroj napětí o úhlovém kmitočtu ω.



Obr. 7.13 Zapojení T článku, nesouměrný dvojbran, příklad 7.4

♦

Abychom mohli stanovit obrazové parametry dvojbranu, musíme nejprve určit kaskádní parametry dvojbranu, napěťový přenos naprázdno

$$\hat{A}_{11} = \left.\frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_2}\right|_{I_2=0} = \frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_{2o}} = \frac{\hat{U}_1}{\dfrac{1}{1+\mathrm{j}\omega RC}\hat{U}_1} = 1+\mathrm{j}\omega RC$$

určený z děliče napětí naprázdno tvořeného RC obvodem, viz obr. 7.14, kde

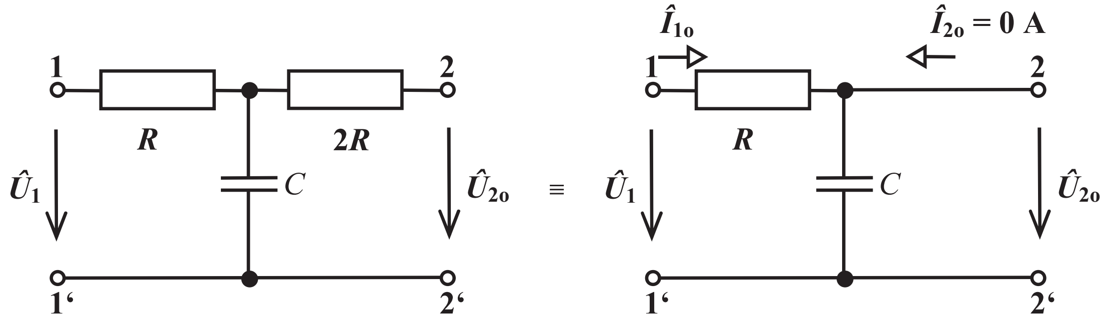
$$\hat{U}_{2o} = \frac{\dfrac{1}{j\omega C}}{R + \dfrac{1}{j\omega C}} \hat{U}_1 = \frac{1}{1 + j\omega RC} \hat{U}_1 ,$$

a přenosovou admitanci naprázdno

$$\hat{A}_{21} = \left. \frac{\hat{I}_1}{\hat{U}_2} \right|_{I_2 = 0} = \frac{\hat{I}_{1o}}{\hat{U}_{2o}} = \frac{\dfrac{j\omega C}{1 + j\omega RC} \hat{U}_1}{\dfrac{1}{1 + j\omega RC} \hat{U}_1} = j\omega C ,$$

kde

$$\hat{I}_{1o} = \frac{\hat{U}_1}{R + \dfrac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega C}{1 + j\omega RC} \hat{U}_1 .$$



Obr. 7.14 T článek, nesouměrný dvojbran stav naprázdno, příklad 7.4

Přenosovou impedance nakrátko

$$\hat{A}_{12} = \left. \frac{\hat{U}_1}{-\hat{I}_2} \right|_{U_2 = 0} = \frac{\hat{U}_1}{-\hat{I}_{2k}} = \frac{\dfrac{3R + j\omega 2R^2 C}{1 + j\omega 2RC} \hat{I}_{1k}}{\dfrac{1}{1 + j\omega 2RC} \hat{I}_{1k}} = 3R + j\omega 2R^2 C$$

jsme určili z děliče proudu, vzniklého po vytvoření zkratu na výstupu dvojbranu, viz obr. 7.15 a pomocí zobecněného Ohmova zákona podle následujících rovnic

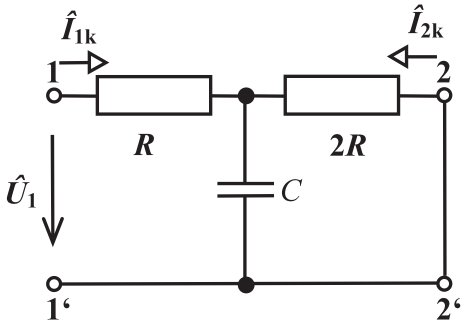
$$-\hat{I}_{2k} = \frac{\dfrac{1}{2R}}{\dfrac{1}{2R} + j\omega C} \hat{I}_{1k} = \frac{1}{1 + j\omega 2RC} \hat{I}_{1k} ,$$

$$\hat{Z}_{1k} = R + \frac{1}{\dfrac{1}{2R} + j\omega C} = R + \frac{2R}{1 + j\omega 2RC} = \frac{3R + j\omega 2R^2 C}{1 + j\omega 2RC} ,$$

$$\hat{U}_1 = \hat{Z}_{1k} \hat{I}_{1k} = \frac{3R + j\omega 2R^2 C}{1 + j\omega 2RC} \hat{I}_{1k} .$$

Pro proudový přenos nakrátko potom platí

$$\hat{A}_{22}=\left.\frac{\hat{I}_1}{-\hat{I}_2}\right|_{U_2=0}=\frac{\hat{I}_{1k}}{-\hat{I}_{2k}}=\frac{\hat{I}_{1k}}{\dfrac{1}{1+\mathrm{j}\omega 2RC}\hat{I}_{1k}}=1+\mathrm{j}\omega 2RC\,.$$



Obr. 7.15 T článek, nesouměrný dvojbran stav nakrátko, příklad 7.4

Obrazové impedance jsou

$$\hat{Z}_{o1}=\sqrt{\frac{\hat{A}_{11}}{\hat{A}_{22}}\frac{\hat{A}_{12}}{\hat{A}_{21}}}=\sqrt{\frac{(1+\mathrm{j}\omega RC)\left(3R+\mathrm{j}\omega 2R^2C\right)}{(1+\mathrm{j}\omega 2RC)\mathrm{j}\omega C}}=\sqrt{\frac{3R-\omega^2\,2R^3C^2+\mathrm{j}\omega 6R^2C}{(1+\mathrm{j}\omega 2RC)\mathrm{j}\omega C}}\,,$$

$$\hat{Z}_{o2}=\sqrt{\frac{\hat{A}_{22}}{\hat{A}_{11}}\frac{\hat{A}_{12}}{\hat{A}_{21}}}=\sqrt{\frac{(1+\mathrm{j}\omega 2RC)\left(3R+\mathrm{j}\omega 2R^2C\right)}{(1+\mathrm{j}\omega RC)\mathrm{j}\omega C}}=\sqrt{\frac{3R-\omega^2\,4R^3C^2+\mathrm{j}\omega 8R^2C}{(1+\mathrm{j}\omega RC)\mathrm{j}\omega C}}\,,$$

koeficientu nesymetrie dvojbranu

$$\hat{k}_s=\sqrt{\frac{1+\mathrm{j}\omega RC}{1+\mathrm{j}\omega 2RC}}\,,$$

obrazový napěťový přenos

$$\hat{G}_{oU}=\hat{k}_s\left(\sqrt{\hat{A}_{11}\hat{A}_{22}}+\sqrt{\hat{A}_{12}\hat{A}_{21}}\right)=\sqrt{\frac{1+\mathrm{j}\omega RC}{1+\mathrm{j}\omega 2RC}}\left(\sqrt{(1+\mathrm{j}\omega RC)(1+\mathrm{j}\omega 2RC)}+\sqrt{\left(3R+\mathrm{j}\omega 2R^2C\right)\mathrm{j}\omega C}\right)=$$

$$=(1+\mathrm{j}\omega RC)+\sqrt{\frac{(1+\mathrm{j}\omega RC)\left(3R+\mathrm{j}\omega 2R^2C\right)\mathrm{j}\omega C}{1+\mathrm{j}\omega 2RC}}=(1+\mathrm{j}\omega RC)+\sqrt{\frac{\left(3R+\mathrm{j}\omega 5R^2C-\omega^2\,2R^3C^2\right)\mathrm{j}\omega C}{1+\mathrm{j}\omega 2RC}}=$$

$$=(1+\mathrm{j}\omega RC)+\sqrt{\frac{-\omega^2\,5R^2C^2+\mathrm{j}\omega\left(3RC-\omega^2\,2R^3C^3\right)}{1+\mathrm{j}\omega 2RC}}$$

získaný vytknutím členu $\sqrt{1+\mathrm{j}\omega RC}$ a obrazový proudový přenos

$$\hat{G}_{oI}=\frac{1}{\hat{k}_s}\left(\sqrt{\hat{A}_{11}\hat{A}_{22}}+\sqrt{\hat{A}_{12}\hat{A}_{21}}\right)=\sqrt{\frac{1+\mathrm{j}\omega 2RC}{1+\mathrm{j}\omega RC}}\left(\sqrt{(1+\mathrm{j}\omega RC)(1+\mathrm{j}\omega 2RC)}+\sqrt{\left(3R+\mathrm{j}\omega 2R^2C\right)\mathrm{j}\omega C}\right)=$$

$$=(1+\mathrm{j}\omega 2RC)+\sqrt{\frac{(1+\mathrm{j}\omega 2RC)\left(3R+\mathrm{j}\omega 2R^2C\right)\mathrm{j}\omega C}{1+\mathrm{j}\omega RC}}=(1+\mathrm{j}\omega 2RC)+$$

$$+\sqrt{\frac{\left(3R-\omega^2\,4R^3C^2+\mathrm{j}\omega 8R^2C\right)\mathrm{j}\omega C}{1+\mathrm{j}\omega RC}}=(1+\mathrm{j}\omega 2RC)+\sqrt{\frac{-\omega^2\,8R^2C^2+\mathrm{j}\omega\left(3RC-\omega^2\,4R^3C^3\right)}{1+\mathrm{j}\omega RC}}\,,$$

získaný vytknutím členu $\sqrt{1+\mathrm{j}\omega 2RC}$.

Shrnutí pojmů 7.3.

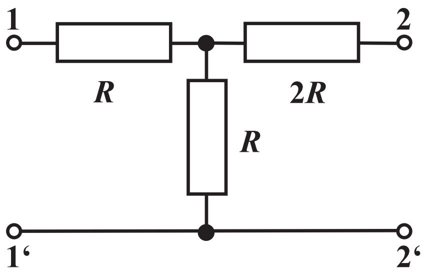
Nesouměrný dvojbran je charakterizován dvěma obrazovými impedancemi, vstupní $\hat{Z}_{o1}$ a výstupní $\hat{Z}_{o2}$ a dvěma obrazovými přenosy, napětí $\hat{G}_{oU}$ a proudu $\hat{G}_{oI}$ nebo jejich obrazovými mírami přenosu $\hat{g}_{oU}$ a $\hat{g}_{oI}$. Zavedením koeficientu nesymetrie dvojbranu $\hat{k}_s$ můžeme parametry nesouměrného dvojbranu vyjádřit pomocí parametrů souměrného dvojbranu, které jsou definovány geometrickým průměrem parametrů nesouměrného dvojbranu.

Otázky 7.3.

1. Jak jsou definovány obrazové impedance nesouměrného dvojbranu?
2. Mají obrazové impedance nesouměrného dvojbranu stejné hodnoty?
3. Proč zavádíme koeficient nesymetrie dvojbranu?
4. Jakou hodnotu má koeficient nesymetrie souměrného dvojbranu?
5. V jakém vztahu je obrazový přenos napětí a proudu nesouměrného dvojbranu?
6. Čím je dána obrazová míra napěťového a proudového přenosu nesouměrného dvojbranu?

Úloha k řešení 7.3.

Určete koeficient nesymetrie dvojbranu na obr. 7.16.



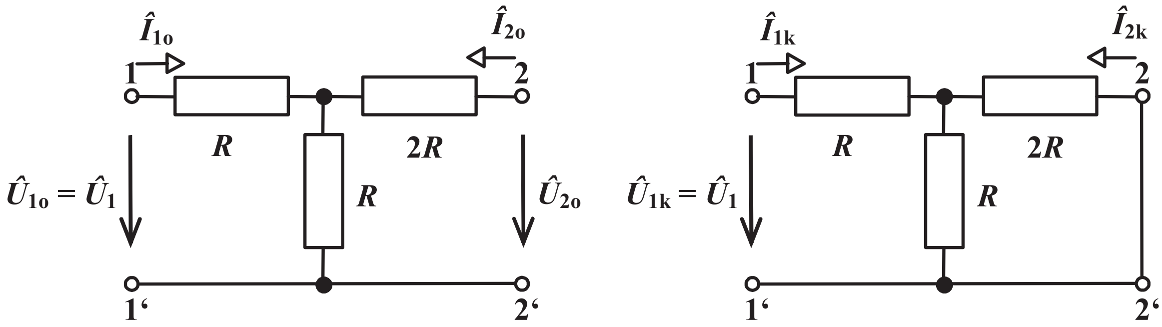
Obr. 7.16 Zapojení T článku, nesouměrný odporový dvojbran, úlohy k řešení 7.3

Řešení:

Koeficient nesymetrie je určen kaskádními parametry dvojbranu $\hat{A}_{11}$ a $\hat{A}_{22}$ z odpovídajících provozních stavů dvojbranu na obr. 7.17. Pro požadované kaskádní parametry platí

$$\hat{A}_{11} = \frac{\hat{U}_{1o}}{\hat{U}_{2o}} = \frac{\hat{U}_1}{\frac{R}{R+R}\hat{U}_1} = \frac{\hat{U}_1}{\frac{\hat{U}_1}{2}} = 2\,, \qquad \hat{A}_{22} = \frac{\hat{I}_{1k}}{-\hat{I}_{2k}} = \frac{\frac{\hat{U}_1}{R+\frac{R2R}{R+2R}}}{\frac{R}{R+2R}\frac{\hat{U}_1}{R+\frac{R2R}{R+2R}}} = \frac{\frac{1}{\frac{5}{3}R}}{\frac{1}{3}\frac{1}{\frac{5}{3}R}} = 3\,,$$

takže dvojbran není souměrný, protože $\hat{A}_{11} \neq \hat{A}_{22}$.



Obr. 7.17 Provozní stavy T článku, nesouměrný odporový dvojbran: naprázdno, nakrátko, úloha k řešení 7.3

Po dosazení těchto hodnot kaskádních parametrů a vyčíslení koeficientu nesymetrie

$$\hat{k}_s = \sqrt{\frac{\hat{A}_{11}}{\hat{A}_{22}}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

vidíme, že koeficient má jen reálnou část.

8. Obvody s rozprostřenými parametry

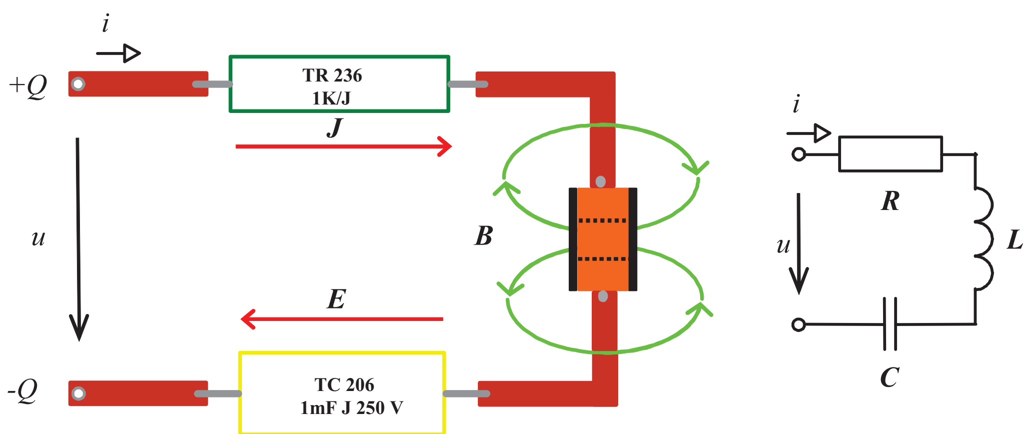
Motivace Po prostudování této kapitoly budete umět

- vymezit pojem „obvod s rozprostřenými parametry“
- odvodit obecné rovnice homogenního vedení
- definovat přímou a zpětnou vlnu napětí a proudu
- analyzovat bezeztrátové vedení
- definovat vlnový odpor bezeztrátového vedení

8.1. Odvození rovnic homogenního vedení

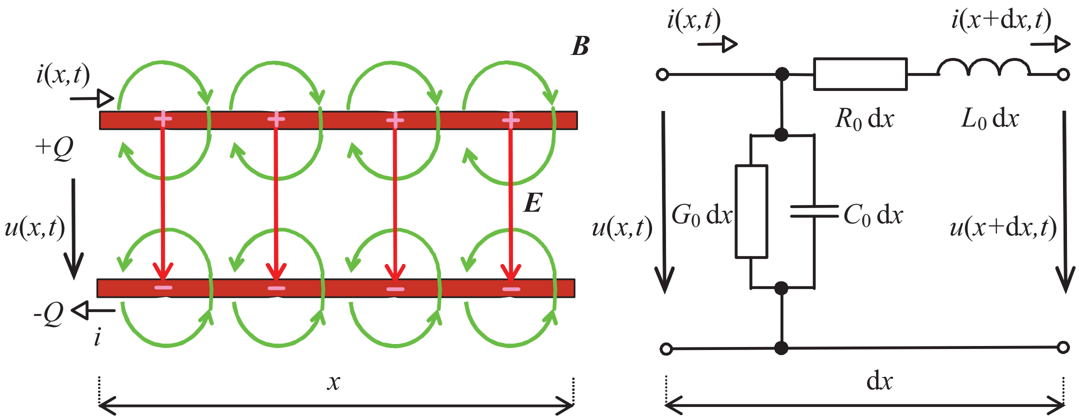
U některých elektrických zařízení není přípustné při jejich modelování oddělit elektrickou a magnetickou složku elektromagnetického pole a nadále předpokládat, že energie složek pole je soustředěna do prostorově malých částí obvodu modelovaných obvodovými prvky se soustředěnými parametry, neboť tento model již dostatečně přesně nepostihuje fyzikální realitu. Je to důsledek konečné rychlost šíření elektromagnetického pole, jehož metody modelování dávají obecně přesnější výsledky než metody teorie obvodů. Za určitých předpokladů můžeme tato zařízení modelovat „obvodářskými“ postupy, ale napětí a proudy v jednotlivých částech elektrického zařízení musíme modelovat v závislosti nejen na čase, ale i na prostorové souřadnici. Mluvíme o obvodech s rozprostřenými parametry a energii obvodu nedáváme pouze přívlastek elektrická, nýbrž elektromagnetická.

V obvodech se soustředěnými parametry je elektrická (elektromagnetická) energie koncentrována do konečného počtu prostorově oddělených obvodových prvků s konstantními parametry, viz obr. 8.1, které reprezentují navzájem oddělená fyzikální pole, a to proudové $\boldsymbol{J}$ modelované rezistorem R, elektrické $\boldsymbol{E}$ modelované kapacitorem C a magnetické $\boldsymbol{B}$ modelované induktorem L, buzená náboji $\pm Q$, existujícími na svorkách zdroje v důsledku působení jeho rozdělujících sil. Energie obvodových prvků, tím že jsou prostorově oddělené, se navzájem neovlivňují, a proto nemají ani vliv na základní funkci obvodových prvků. Vztahy mezi elektrickými veličinami obvodu můžeme popsat jen časovými funkcemi a řešit je prostředky teorie obvodů. Tím, že zanedbáváme prostorové závislosti veličin, mlčky předpokládáme, že rozruch elektrické energie (signál) vybuzený zdrojem napětí nebo proudu existuje ve všech místech obvodu současně v daném čase. Elektromagnetické vlnění přenášející elektrickou energii podél obvodu má tak neomezenou rychlost, což je však ryzí abstrakce, neboť jak víme, jeho rychlost je vždy konečná a má hodnotu rychlosti světla v daném prostředí. Tohoto zjednodušení se můžeme dopustit prakticky jen tehdy, jsou-li rozměry modelovaného elektrického zařízení mnohem větší, než je délka elektromagnetické vlny vybuzené zdrojem, který ho napájí.



8.1 Model obvodu se soustředěnými obvodovými parametry: technická realizace, schéma zapojení

Není-li tato podmínka splněna, prostorovou závislost obvodových veličin již nelze zanedbat. Spojitě rozložené energie polí nejsou prostorově oddělené, což znamená, že současně existují ve stejných bodech prostoru v podobě jednotného elektromagnetického pole. Chceme-li toto pole modelovat přesto jako obvod, musíme jeho linie nahradit spojitě rozloženými obvodovými parametry v prostoru. Toto lze s výhodou provést za předpokladu, že podélné rozměry elektrického zařízení jsou mnohem větší než příčné. Typickým představitelem takového elektrického zařízení je dlouhé, homogenní vedení na obr. 8.2 vlevo, které modelujeme v rámci délkového elementu dx (bodu prostoru) podélným zapojením technické cívky a příčným zapojením technického kondenzátoru s konstantními měrnými parametry na jednotku délky R_0, L_0, G_0, C_0. Tyto parametry jednoznačně charakterizují homogenní vedení a říkáme jim primární parametry vedení. Hodnoty primárních parametrů jsou vztaženy na jednotku délky. Na obr. 8.2 vpravo je nakresleno jedno z možných náhradních obvodových schémat vedení. Zpřesněním modelu vedení po zavedení prostorově rozložených parametrů se mění i způsob řešení obvodu, neboť děje mají vlnový charakter. Podél vedení tak existuje postupné elektromagnetické vlnění v podobě proudové a napěťové vlny šířící se od zdroje ke spotřebiči kolem vedení konečnou rychlostí.



8.2 Model obvodu s prostorově rozloženými parametry: technická realizace, náhradní schéma zapojení elementu vedení s měrnými parametry modelované Γ článkem

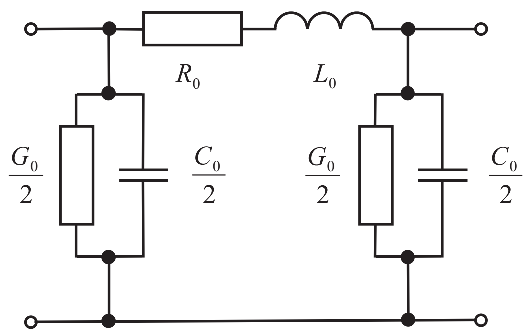
Příklad 8.1.

Vytvořte další možné schéma náhradního obvodu dlouhého vedení.

♦

Kromě již použitého Γ-článku, může pro modelování nekonečně malého elementu vedení využít další základní modely podélně souměrných dvojbranů, a to T-článek a Π-článek. Příklad náhradního modelu vedení využívajícího posledně uvedeného článku je na obr. 8.3. Je z něj patrné rozdělní původních parametrů R_0 a C_0 modelujících elektrickou složku elektromagnetického pole na dvě části zapojené na vstup a výstup elementu vedení, tak aby byl model souměrný.

Odvození rovnic si ukažme pro náhradní model vedení s Γ-článkem. Postup odvození je stejný jako u obvodů se soustředěnými parametry, s tím rozdílem, že uvažujeme kromě časové závislosti obvodových veličin i jejich závislost na souřadnici zavedené ve směru délky vedení, což je v našem případě souřadnice x. Dále uvažujeme, že napětí a proud se změní na elementu vedení dx z hodnoty napětí $u(x,t)$ a proudu $i(x,t)$ na jeho počátku (vstupu) na hodnoty napětí $u(x+\mathrm{d}x,t)$ a proudu $i(x+\mathrm{d}x,t)$ na jeho konci (výstupu) a že hodnoty parametrů vedení se s jeho délkou mění, což respektujeme v matematickém modelu změnou hodnot primárních parametrů homogenního vedení na elementu vedení dx o přírůstek odporu $\mathrm{d}R = R_0\,\mathrm{d}x$, indukčnosti $\mathrm{d}L = L_0\,\mathrm{d}x$, vodivosti $\mathrm{d}G = G_0\,\mathrm{d}x$ a



8.3 Obvodové schéma elementu vedení – T článek

kapacity $\mathrm{d}C = C_0\,\mathrm{d}x$. Smyčková rovnice sestavená potom podle 2. Kirchhoffova zákona pro kladný smysl oběhu zvolený ve směru hodinových ručiček, viz obr. 8.4 vlevo, má tvar

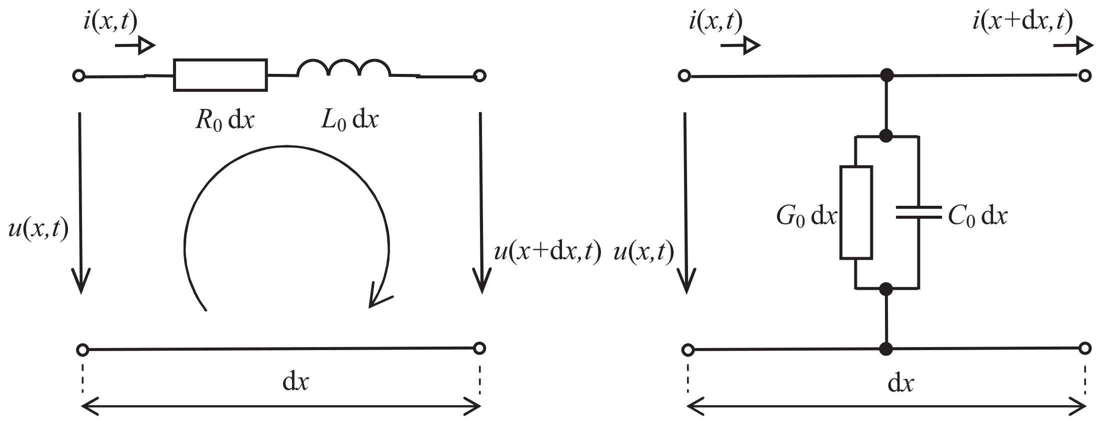
$$-u(x,t) + R_0\,\mathrm{d}x\; i(x+\mathrm{d}x,t) + L_0\,\mathrm{d}x\,\frac{\partial i(x+\mathrm{d}x,t)}{\partial t} + u(x+\mathrm{d}x,t) = 0\,,$$

kde členy uprostřed rovnice představují úbytky napětí na elementu vedení vzniklé od proudu $i(x+\mathrm{d}x,t)$ v podélném směru vedení.

Uzlová rovnice sestavená potom podle 1. Kirchhoffova zákona, duální k předchozí rovnici, sestavená podle obvodu na obr. 8.4 vpravo má tvar

$$-i(x,t) + G_0\,\mathrm{d}x\,u(x,t) + C_0\,\mathrm{d}x\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + i(x+\mathrm{d}x,t) = 0\,,$$

kde členy uprostřed rovnice představují „úbytky“ proudu na elementu vedení vzniklé od napětí $u(x,t)$ v příčném směru vedení.



8.4 Aplikace Kirchhoffových zákonů na element vedení: smyčka, uzel

Poznamenejme, že vzhledem k závislosti obvodových veličin na více proměnných derivace vystupující ve smyčkové rovnici (Faradayův indukční zákon) a v rovnici pro uzel elementu vedení (rovnice kontinuity proudu) jsme nezapsali jako obyčejné ($\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$), ale parciální ($\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}$).

Následně rovnice upravíme do přírůstkového tvaru na intervalu $dx \to 0$ (tj. předpokládáme spojitě rozložené parametry)

$$\frac{u(x+\mathrm{d}x,t) - u(x,t)}{\mathrm{d}x} = -\left[R_0\, i(x+\mathrm{d}x,t) + L_0\,\frac{\partial i(x+\mathrm{d}x,t)}{\partial t}\right]$$

a

$$\frac{i(x+\mathrm{d}x,t)-i(x,t)}{\mathrm{d}x}=-\left[G_0\;u(x,t)+C_0\;\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right],$$

které po stanovení limit pro $\mathrm{d}x \to 0$

$$\lim_{\mathrm{d}x\to 0}\frac{u(x+\mathrm{d}x,t)-u(x,t)}{\mathrm{d}x}=-\lim_{\mathrm{d}x\to 0}\left[R_0\,i(x+\mathrm{d}x,t)+L_0\frac{\partial i(x+\mathrm{d}x,t)}{\partial t}\right],$$

$$\lim_{\mathrm{d}x\to 0}\frac{i(x+\mathrm{d}x,t)-i(x,t)}{\mathrm{d}x}=-\lim_{\mathrm{d}x\to 0}\left[G_0\;i(x,t)+C_0\;\frac{\partial i(x,t)}{\partial t}\right]$$

přejdou do tvaru

$$-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=R_0\;i(x,t)+L_0\;\frac{\partial i(x,t)}{\partial t}$$

a

$$-\frac{\partial i(x,t)}{\partial x}=G_0\;u(x,t)+C_0\;\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\,.$$

Obě rovnice tvoří soustavu parciálních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty, kterou eliminací jedné z obvodových veličin převedeme na řešení jediné parciální (hyperbolické) diferenciální rovnice 2. řádu pro proud nebo napětí následujícím postupem.

Za účelem eliminace proudu derivujeme podle souřadnice x parciální diferenciální rovnici pro napětí a podle času t parciální diferenciální rovnici pro proud, platí tedy

$$-\frac{\partial\left(\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)}{\partial x}=\frac{\partial\left(R_0\;i(x,t)+L_0\;\dfrac{\partial i(x,t)}{\partial t}\right)}{\partial x},$$

$$-\frac{\partial\left(\dfrac{\partial i(x,t)}{\partial x}\right)}{\partial t}=\frac{\partial\left(G_0\;u(x,t)+C_0\;\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)}{\partial t}$$

a pro provedení naznačených operací

$$-\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=R_0\;\frac{\partial i(x,t)}{\partial x}+L_0\;\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial t\,\partial x}\,,$$

$$-\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial x\,\partial t}=G_0\;\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+C_0\;\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\,.$$

Kvůli eliminaci napětí derivujeme podle souřadnice x parciální diferenciální rovnici pro proud a podle času t parciální diferenciální rovnici pro napětí, platí tedy

$$-\frac{\partial\left(\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)}{\partial t}=\frac{\partial\left(R_0\;i(x,t)+L_0\;\dfrac{\partial i(x,t)}{\partial t}\right)}{\partial t},$$

$$-\frac{\partial\left(\dfrac{\partial i(x,t)}{\partial x}\right)}{\partial x}=\frac{\partial\left(G_0\;u(x,t)+C_0\;\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)}{\partial x}$$

a pro provedení naznačených operací

$$-\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x\,\partial t} = R_0 \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} + L_0 \frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial t^2},$$

$$-\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial x^2} = G_0 \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + C_0 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t\,\partial x}.$$

Dosazením do pravé strany parciální diferenciální rovnice 2. řádu pro napětí za parciální diferenciální rovnici pro proud 1. řádu a za smíšenou parciální diferenciální rovnici 2. řádu pro proud získáme vlnovou rovnici pro napětí

$$-\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = -R_0\left[G_0\, u(x,t) + C_0 \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right] - L_0\left[G_0 \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + C_0 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\right]$$

a úpravě

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = R_0\, G_0\, u(x,t) + \left(R_0\, C_0 + L_0\, G_0\right)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + L_0\, C_0 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

nebo po dosazení do pravé strany parciální diferenciální rovnice 2. řádu pro proud za parciální diferenciální rovnici pro napětí 1. řádu a za smíšenou parciální diferenciální rovnici 2. řádu pro napětí získáme vlnovou rovnici pro proud

$$-\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial x^2} = -G_0\left[R_0\, i(x,t) + L_0 \frac{\partial i(x,t)}{\partial t}\right] - C_0\left[R_0 \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} + L_0 \frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial t^2}\right]$$

a úpravě

$$\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial x^2} = G_0\, R_0\, i(x,t) + \left(G_0\, L_0 + C_0\, R_0\right)\frac{\partial i(x,t)}{\partial t} + C_0\, L_0 \frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial t^2}.$$

Podobně jako při řešení diferenciálních rovnic s konstantními parametry s nezávislou proměnnou časem t používaných při řešení přechodných dějů v elektrických obvodech, musí být dány i pro řešení vlnových rovnic počáteční podmínky, které udávají rozložení napětí a proudu podél vedení v čase $t = 0$ s a navíc i okrajové (Dirichletovy) podmínky, které udávají časový průběh napětí a proudu v libovolném místě x vedení, zpravidla na jeho počátku nebo konci.

Σ Shrnutí pojmů 8.1.

U obvodů s prostorově rozloženými parametry zohledňujeme jak časovou, tak i prostorovou závislost obvodových veličin, neboť se u těchto obvodů projevuje konečná rychlost šíření elektromagnetického vlnění. Typickým představitelem obvodu s rozprostřenými parametry je dlouhé, homogenní vedení charakterizované primárními parametry R_0, L_0, G_0, C_0, což jsou měrné hodnoty parametrů vedení udávané na jednotku délky. Jevy na vedení popisujeme vlnovými rovnicemi, jejichž řešením získáme proudové a napěťové vlny na vedení pro dané počáteční a okrajové podmínky.

? Otázky 8.1.

1. V čem se liší obvod s prostorově rozloženými parametry od obvodu s parametry soustředěnými?
2. Co je kriteriem pro posouzení modelování obvodu soustředěnými nebo rozloženými parametry?
3. Co je to dlouhé vedení a jak ho modelujeme?

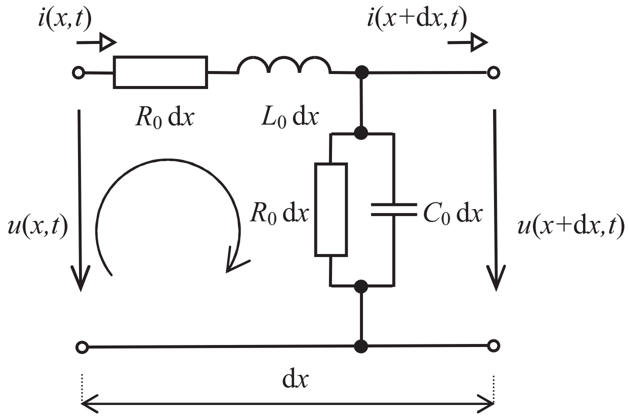
4. Co jsou to primární parametry homogenního vedení a jakou mají jednotku?
5. Jakou vlastnost má homogenní vedení?
6. Jak můžeme modelovat element homogenního vedení?
7. Jaký je postup odvození vlnových rovnic dlouhého vedení?
8. K čemu slouží okrajové a počáteční podmínky vlnových rovnic vedení?

Úloha k řešení 8.1.

Odvoďte vlnové rovnice homogenního vedení pro element vedení modelovaný L článkem.

Řešení:

Náhradní schéma L článku je na obr. 8.5.



8.5 Obvodové schéma elementu vedení modelovaného L článku, úloha k řešení 8.1

Smyčková rovnice sestavená potom podle 2. Kirchhoffova zákona pro kladný smysl oběhu zvolený ve směru hodinových ručiček má tvar

$$-u(x,t)+R_0\,\mathrm{d}x\;i(x,t)+L_0\;\mathrm{d}x\,\frac{\partial i(x,t)}{\partial t}+u(x+\mathrm{d}x,t)=0\,.$$

Uzlová rovnice sestavená potom podle 1. Kirchhoffova zákona pro kladný směr proudu orientovaný ven z uzlu má tvar

$$-i(x,t)+G_0\;\mathrm{d}x\,u(x+\mathrm{d}x,t)+C_0\;\mathrm{d}x\,\frac{\partial u(x+\mathrm{d}x,t)}{\partial t}+i(x+\mathrm{d}x,t)=0\,.$$

Následně rovnice upravíme do přírůstkového tvaru

$$\frac{u(x+\mathrm{d}x,t)-u(x,t)}{\mathrm{d}x}=-\left[R_0\;i(x,t)+L_0\;\frac{\partial i(x,t)}{\partial t}\right],$$

$$\frac{i(x+\mathrm{d}x,t)-i(x,t)}{\mathrm{d}x}=-\left[G_0\;u(x+\mathrm{d}x,t)+C_0\;\frac{\partial u(x+\mathrm{d}x,t)}{\partial t}\right],$$

které po stanovení limit pro $\mathrm{d}x\to 0$

$$\lim_{\mathrm{d}x\to 0}\frac{u(x+\mathrm{d}x,t)-u(x,t)}{\mathrm{d}x}=-\lim_{\mathrm{d}x\to 0}\left[R_0\;i(x,t)+L_0\;\frac{\partial i(x,t)}{\partial t}\right],$$

$$\lim_{dx\to 0}\frac{i(x+dx,t)-i(x,t)}{dx}=-\lim_{dx\to 0}\left[G_0\ u(x+dx,t)+C_0\ \frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial t}\right]$$

přejdou do tvaru

$$-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=R_0\ i(x,t)+L_0\ \frac{\partial i(x,t)}{\partial t}$$

a

$$-\frac{\partial i(x,t)}{\partial x}=G_0\ u(x,t)+C_0\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\ .$$

8.2. Bezeztrátové vedení

Pro vytvoření názoru na jevy probíhající na vedení není zapotřebí řešit vlnové rovnice v úplném tvaru. Za předpokladu, že vedení má nulové hodnoty parametrů R_0, G_0 přejdou vlnové rovnice do jednoduššího tvaru

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-L_0\,C_0\ \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=0$$

a

$$\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial x^2}-L_0\,C_0\ \frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial t^2}=0\,,$$

který je modelem bezeztrátového (ideálního) vedení, jenž je dobrou aproximací v technické praxi používaného vedení vysokofrekvenčního.

Oba tvary vlnových rovnic bezeztrátového vedení jsou homogenní vlnové rovnice, protože jejich pravá strana je nulová. Mají stejný tvar, proto obě vlnové rovnice můžeme popsat jediným typem rovnice

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}-\frac{1}{v_\mathrm{f}^2}\ \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2}=0\,,$$

kde funkce $v(x,t)$ zastupuje obvodové veličiny $u(x,t)$ a $i(x,t)$ a pro konstantu v_f platí po úpravě vlnové rovnice

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial^2 v(x,t)}=\frac{1}{v_\mathrm{f}^2}\ \frac{\partial x^2}{\partial t^2}\ ,$$

tedy i

$$1=\frac{1}{v_\mathrm{f}^2}\ \frac{\partial x^2}{\partial t^2}\qquad \text{a}\qquad v_\mathrm{f}=\frac{\partial x}{\partial t}=\frac{1}{\sqrt{L_0\,C_0}}\ .$$

Konstanta v_f má tedy fyzikální význam rychlosti šíření rozruchu v daném prostředí.

Nula na pravé straně znamená, že homogenní rovnice popisuje šíření vln obvodových veličin vedení až po jejich vybuzení, tedy bez přítomnosti zdrojů podél vedení. Ty se nacházejí jen na počátku nebo konci vedení a jejich vliv je tak v rovnicích zastoupen okrajovými podmínkami. Napěťová a proudová vlna (elektromagnetické vlnění) se tedy podél vedení samovolně pohybuje. Jelikož se jedná o homogenní vlnovou rovnici, existuje pouze obecné řešení této rovnice, pro které se dá odvodit záměnou nezávisle proměnných x a t, že každá (dvakrát diferencovatelná) funkce tvaru

$$v(x,t) = f_z(x + v_f t) + f_p(x - v_f t)$$

je jejím řešením. První část řešení, funkce $f_z(x + v_f t)$ se vrůstajícím časem se „posouvá doleva“ rychlostí v_f. Tato část řešení tedy popisuje postupnou vlnu šířící se v záporném směru osy x (zpětná vlna). Obdobně, druhá část řešení, funkce $f_p(x - v_f t)$ představuje vlnu šířící se v kladném směru osy x (přímá vlna). Obě funkce jsou netlumené a mají stálý tvar v daném čase určený funkcemi f_z a f_p. Důsledkem stálého tvaru funkce je i stálá hodnota obou argumentů $x \pm v_f t$, i když se souřadnice x a čas t mění. To vyžaduje, aby se účinek změny času dt i změny dráhy dx navzájem rušil, tak aby platilo $dx \pm v_f\, dt = 0$ nebo $x \pm v_f t = \text{konst.}$ V teorii vlnění se oba argumenty $x \pm v_f t$ funkcí f_z a f_p nazývají fází vlny, což znamená, že body určité fáze ve vlně se pohybují konstantní rychlostí v_f, kterou nazýváme fázovou. Obě funkce f_z i f_p se tedy posunou v příslušném směru vůči referenčnímu časovému okamžiku za časový interval dt o vzdálenost $dx = \mp v_f\, dt$. Funkci $v(x,t)$ tak můžeme interpretovat v tom smyslu, že každý děj popsaný homogenní vlnovou rovnicí je tvořen superpozicí dvou vln, které nemění svůj tvar a velikost a které se šíří v opačných směrech rychlostí v_f. Toto vedení tedy nezkresluje. Obecné řešení, je potom součtem teoreticky nekonečně mnoha takových vln, prakticky však lineární kombinací všech možných řešení, daných okrajovými podmínkami.

Příklad 8.2.

Nakreslete rozložení napětí stejnosměrného bezeztrátového vedení délky l v časovém okamžiku t_a a časový průběh napětí v místě x_a kam vlna dorazí v čase t_a po připojení zdroje napětí k vedení.

♦

Za předpokladu, že časový okamžik t_a je menší než doba t_l potřebná k tomu, aby napěťová vlna dorazila na konec vedení, definovaná vztahem

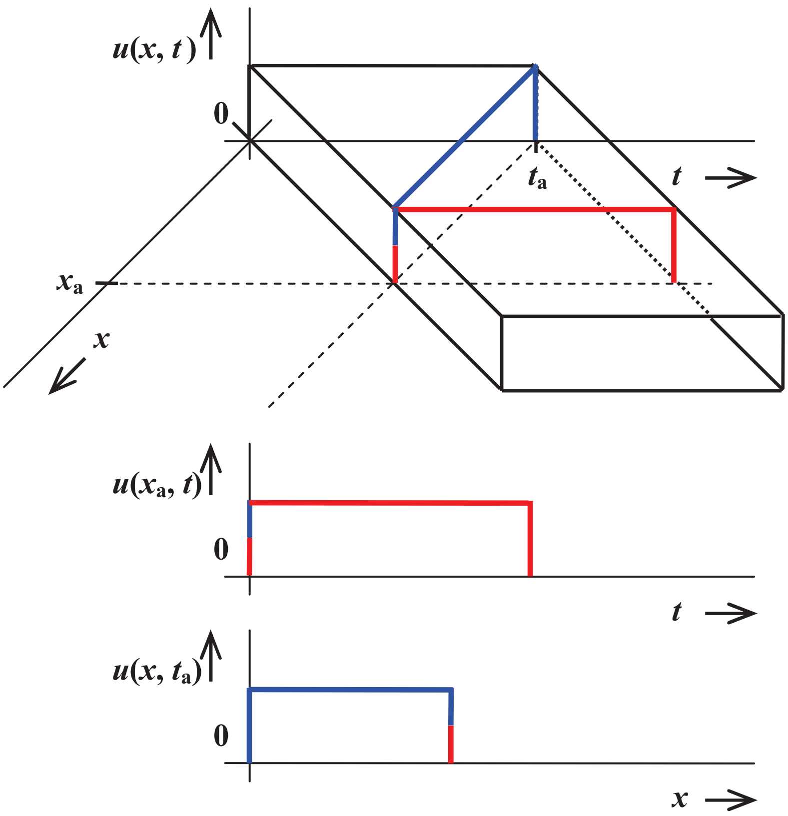
$$t_l = \frac{l}{v_f}$$

bude rozložení napětí, ale i proudu avšak v jiném měřítku odpovídat situaci na obr. 8.6. Místo kam vlna v zadaném čase dorazí, určíme ze vztahu

$$x_a = v_f t_a$$

a odpovídající časový průběh v místě x_a vedení je obr. 8.6.

Grafy obou závislostí, tj. časového průběhu napětí ve zvoleném místě a rozložení napětí podél vedení ve zvoleném čase, získáme řezy vedenými přes tvar časové funkce zobrazené v časoprostoru pro t = konst. a x = konst. V našem případě se jedná o čas t_a a místo x_a, takže podle obr. 8.6 pro tyto řezy platí $t = t_a$ a $x = x_a$. Časovou funkci v časoprostoru na obr. 8.6 reprezentuje kvádr, jehož podstava tvarem odpovídá časovému průběhu stejnosměrného zdroje napětí, který je umístěn na počátku vedení. Jedna strana podstavy tak odpovídá hodnotě stejnosměrného napětí zdroje a druhá době jeho připojení. Za účelem snazšího porozumění grafům je okamžik připojení stejnosměrného zdroje napětí k vedení a tedy i čelo stejnosměrné vlny napětí, pohybující se podél vedení fázovou rychlostí, rozlišeno červenomodrou kombinací barev.



Obr. 8.6 Přímá vlna napětí bezeztrátového vedení: časový průběh v místě x_a, rozložení napětí podél vedení v čase t_a

Určeme nyní diferenciální hodnotu odporu bezeztrátového vedení z poměru rovnic vedení pro napětí a proud

$$-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = L_0 \frac{\partial i(x,t)}{\partial t},$$

$$-\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = C_0 \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}.$$

Po úpravě obdržíme

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial^2 i(x,t)} = \frac{L_0}{C_0}$$

a následně vztah pro diferenciální odpor vedení

$$R_v = \frac{\partial u(x,t)}{\partial i(x,t)} = \pm\sqrt{\frac{L_0}{C_0}},$$

kde kladná hodnota řešení kvadratické rovnice náleží vlně přímé a záporná vlně zpětné.

Diferenciální odpor bezeztrátového vedení R_v je tedy konstanta, definovaná nenulovými primárními parametry vedení a má až na znaménko stejnou hodnotu pro přímou i zpětnou vlnu. Jelikož je diferenciální odpor vedení konstantní má jeho hodnotu i statický odpor vedení. Odporu vedení tak dáváme společný přívlastek vlnový nebo charakteristický. Jelikož vlnový odpor má reálnou hodnotu, znamená to, že přímá i zpětná napěťová a proudová vlna mají stejný tvar i fázi a liší se jen měřítkem. Pro přímou vlnu tak platí

$$u_{\mathrm{p}}(x,t) = R_{\mathrm{v}}\, i_{\mathrm{p}}(x,t)$$

a pro zpětnou vlnu

$$u_{\mathrm{z}}(x,t) = -R_{\mathrm{v}}\, i_{\mathrm{z}}(x,t)\,.$$

Vlnový odpor udává ekvivalentní hodnotu odporu, které klade prostředí elektromagnetickému vlnění, které se šíří podél vedení.

Poznamenejme, že dorazí-li přímá vlna napětí nebo proudu vybuzená zdrojem připojeným k počátku vedení na jeho konec a není-li vedení impedančně přizpůsobené, čili zatížené vlnovým odporem, dojde k odrazu vlny na konci vedení a následnému šíření vlny v opačném směru. Odrazem dochází ke vzniku zpětné vlny, protože na konci vedení není žádný zdroj, který by ji vybudil. Reálně však na vedení existuje jen výsledná vlna napětí a proudu. Obě vlny jsou součtem dvou složek matematického řešení diferenciálních rovnic dlouhého vedení, které interpretujeme právě jako přímou a zpětnou vlnu napětí a proudu. Na skutečném elementu vedení dále vznikají ještě další jevy a přeměny energie, než které zachycuje model vedení popsaný primární parametry vedení. Z nevratných přeměn jsou to ztráty v dielektriku a magnetiku vyvolané jeho polarizací a magnetizaci. První jsou úměrné časové změně intenzity elektrického pole $\boldsymbol{E}$, nebo též napětí mezi vodiči, a lze je tudíž zahrnout do příčné vodivosti. Druhé jsou úměrné časové změně intenzity magnetického pole $\boldsymbol{B}$, tj. proudu a zahrnují se do podélného odporu R_0. Do podélné indukčnosti L_0 není rovněž zahrnuté pole uvnitř vodičů, které lze respektovat zvětšením indukčnosti L_0 o tzv. vnitřní indukčnost L_{i}. Dále jsme zanedbali magnetické pole příčných posuvných proudů (příčná indukčnost) a elektrické pole ve směru osy vodičů (podélná kapacita). Tato pole jsou obvykle zanedbatelná, neboť změna napětí $u(x,t)$ a proudu $i(x,t)$ podél vedení probíhá velmi pozvolna ve srovnání s příčnou vzdáleností vodičů.

Σ Shrnutí pojmů 8.2.

Bezeztrátové vedení je ideální vedení, které modeluje bezeztrátový přenos elektrické (elektromagnetické) energie od zdroje ke spotřebiči. Má nulové hodnoty měrných parametrů vedení R_0, G_0. Řešením homogenní vlnové rovnice bezeztrátového vedení jsou dvě netlumené vlny napětí a proudu, a to přímá a zpětná vlna, které postupují podél vedení proti sobě konstantní fázovou rychlostí v_{f} bez změny svého tvaru. Toto vedení nezkresluje. Fázová rychlost udává rychlost pohybu bodů vlnění, které mají stejnou fázi. Kromě fázové rychlosti bezeztrátové vedení charakterizuje i vlnový odpor vedení, který je reálný a kmitočtově nezávislý, takže vlna napětí a proudu má stejnou fázi i tvar a liší se jen měřítkem velikosti. Ekvivalentní odpor elektromagnetického prostředí vedení zastupuje v náhradním obvodovém modelu vedení vlnový odpor.

? Otázky 8.2.

1. Co je to bezeztrátové vedení a které parametry ho charakterizují?
2. Jaké vedení v praxi lze modelovat bezeztrátovým vedením?
3. Jaké vlastnosti má řešení homogenní vlnové rovnice bezeztrátového vedení a jakou má interpretaci?
4. Co je to fázová rychlost?
5. Liší se nějak hodnoty fázové rychlosti přímé a zpětné vlny?
6. Proč bezeztrátové vedení nezkresluje?
7. Co udává vlnový odpor vedení?
8. Proč má napěťová a proudová vlna bezeztrátového vedení stejný tvar?

Úloha k řešení 8.2.

Nakreslete rozložení napětí dlouhého bezeztrátového vedení v časovém okamžiku t_a, nedošlo-li ještě k odrazu vlny na konci vedení a časový průběh napětí v odpovídajícím místě vedení x_a, je-li časový průběh napětí zdroje na vstupu vedení zpožděn o čas t_d, má periodu T a tvar napěťové rampy, platí-li $t_a = t_d + T$.

Řešení:

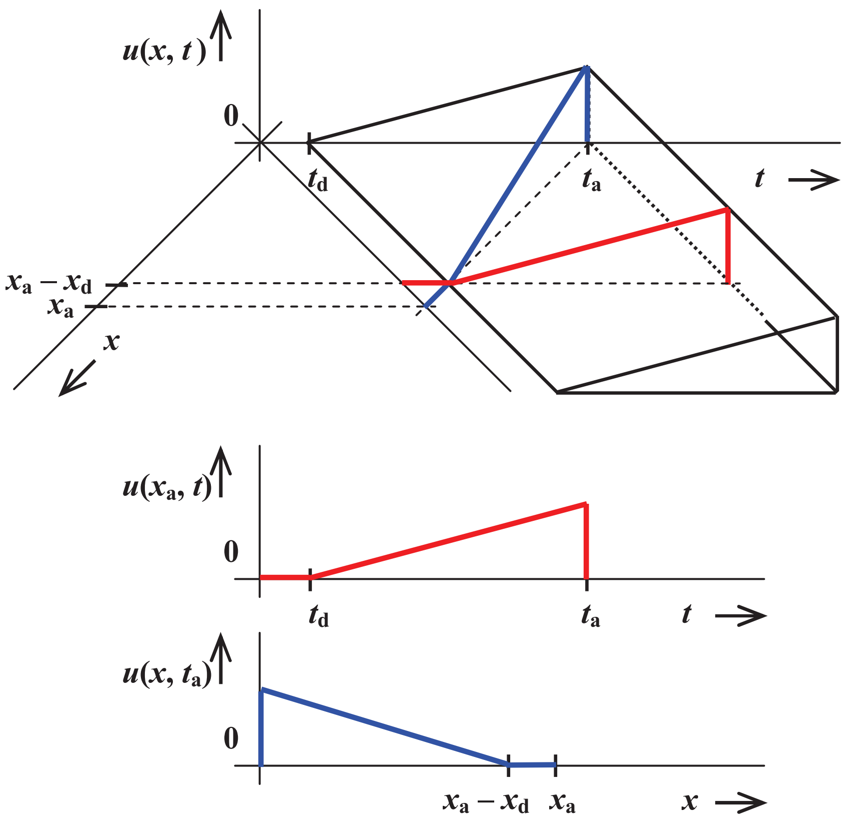
Napěťová vlna s fázovou rychlostí v_f v čase t_a dospěje do místa

$$x_a = v_f t_a .$$

Počátek rozruchu v čase je zpožděn o čas t_d. Tomuto zpoždění odpovídá v prostoru posunutí rozložení napětí podél vedení v čase t_a o hodnotu

$$x_d = v_f t_d ,$$

takže počáteční rozruch vybuzený zdrojem napětí na vstupu vedení se objeví v místě $x_a - x_d$. Rozložení napětí na vedení je zakresleno na obr. 8.7.



Obr. 8.7 Přímá vlna napětí bezeztrátového vedení: časový průběh v místě x_a, rozložení napětí podél vedení v čase t_a, úloha k řešení 8.2

9. Analýza homogenního vedení

Motivace Po prostudování této kapitoly budete umět

- odvodit rovnice homogenního vedení v harmonicky ustáleném stavu
- definovat sekundární parametry vedení
- definovat ekvivalentní dvojbranový model vedení
- určit délku vlny a její fázovou rychlost
- definovat činitele odrazu
- přizpůsobit přenosovou cestu
- analyzovat a graficky zobrazit rovnice dlouhého vedení

9.1. Analýza dlouhého vedení v harmonicky ustáleném stavu

Analýza dlouhého vedení v harmonicky ustáleném stavu je důležitá k určení rozložení obvodových veličin podél vedení a k popisu jevů, které na vedení vznikají a neprojevují se v obvodech modelovaných soustředěnými parametry. Provádíme ji v komplexní rovině, do které transformujeme obvodové veličiny vedení závislé na čase t i prostorové souřadnici x, abychom zjednodušili řešení vlnových rovnic vedení odvozených v kapitole 8.1. V harmonicky ustáleném stavu časově prostorové závislosti napětí a proudu mají tyto parametry: obecně proměnnou jak amplitudu $U_{\mathrm{m}}(x)$, $I_{\mathrm{m}}(x)$, tak i fázi $\psi_{\mathrm{U}}(x)$, $\psi_{\mathrm{I}}(x)$ závislou na souřadnici x a konstantní úhlový kmitočet ω. Jsou popsány vztahy

$$u(x,t)=U_{\mathrm{m}}(x)\sin[\omega t+\psi_{\mathrm{U}}(x)] \qquad \text{a} \qquad i(x,t)=I_{\mathrm{m}}(x)\sin[\omega t+\psi_{\mathrm{I}}(x)],$$

které po transformaci do komplexní roviny mají tvar

$$u(x,t)=U_{\mathrm{m}}(x)\sin[\omega t+\psi_{\mathrm{U}}(x)]=\sqrt{2}U(x)\mathrm{Im}\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\psi_{\mathrm{U}}(x))}\right\}=\sqrt{2}\,\mathrm{Im}\left\{U(x)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_{\mathrm{U}}(x)}\right\}=\sqrt{2}\,\mathrm{Im}\left\{\hat{U}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\},$$

$$i(x,t)=I_{\mathrm{m}}(x)\sin[\omega t+\psi_{\mathrm{I}}(x)]=\sqrt{2}I(x)\mathrm{Im}\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\psi_{\mathrm{I}}(x))}\right\}=\sqrt{2}\,\mathrm{Im}\left\{I(x)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_{\mathrm{I}}(x)}\right\}=\sqrt{2}\,\mathrm{Im}\left\{\hat{I}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\}.$$

Komplexor napětí $\hat{U}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ a komplexor proudu $\hat{I}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ se v komplexní rovině při daném úhlovém kmitočtu natočí v čase t o stejný úhel ωt, takže časovou závislost obvodových veličin vedení lze z jejich popisu eliminovat a uvažovat jen jejich závislost na souřadnici x, reprezentovanou fázory napětí $\hat{U}(x)$ a proudu $\hat{I}(x)$. Soustava parciálních diferenciálních rovnic vedení 1. řádu o dvou nezávislých proměnných t a x z kapitoly 8.1 tak přejde v komplexní rovině na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic s nezávislou proměnou x

$$-\frac{\mathrm{d}\hat{U}(x)}{\mathrm{d}x}=(R_0+\mathrm{j}\omega L_0)\hat{I}(x)=\hat{Z}_1\hat{I}(x),$$

$$-\frac{\mathrm{d}\hat{I}(x)}{\mathrm{d}x}=(G_0+\mathrm{j}\omega C_0)\hat{U}(x)=\hat{Y}_{\mathrm{q}}\hat{U}(x),$$

a vlnové rovnice přejdou do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}^2\hat{U}(x)}{\mathrm{d}x^2}-\hat{Z}_1\,\hat{Y}_{\mathrm{q}}\,\hat{U}(x)=0,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\hat{I}(x)}{\mathrm{d}x^2}-\hat{Y}_{\mathrm{q}}\,\hat{Z}_1\,\hat{I}(x)=0.$$

Vlnové rovnice jsou navzájem duální. Obě zahrnují imitance podélné a příčné větve elementu vedení dané obvodovými schématy zakreslenými na obr. 8.4. Měrné parametry podélné větve vedení definují měrnou podélnou impedanci vedení $\hat{Z}_l = R_0 + \mathrm{j}\omega L_0$ (pozor, na pozici indexu není číslice 1, ale malé písmeno „l“), která má jednotku Ω/m. Měrné parametry příčné větve definují měrnou příčnou admitanci vedení $\hat{Y}_\mathrm{q} = G_0 + \mathrm{j}\omega C_0$, která má jednotkou S/m.

U obou vlnových rovnic vystupuje součin měrné podélné impedance $\hat{Z}_l$ a příčné admitance $\hat{Y}_\mathrm{q}$, který definuje první sekundární parametr vedení, činitel šíření $\hat{\gamma}$, přesněji jeho kvadrát

$$\hat{\gamma}^2 = \hat{Z}_l \hat{Y}_\mathrm{q} = (R_0 + \mathrm{j}\omega L_0)(G_0 + \mathrm{j}\omega C_0).$$

Dosazením jednotek měrné podélné impedance a příčné admitance, snadno zjistíme, že činitel šíření $\hat{\gamma}$ má jednotku m^{-1}. Jeho význam bude vyložen později.

Vlnové rovnice řešíme analogickým způsobem jako diferenciální rovnice popisující chování RLC obvodu v přechodném ději v kapitole 2.3, s tím rozdílem, že časovou závislost nahradíme závislostí na souřadnici x. Nejprve tedy nalezneme charakteristickou rovnici, která má stejný tvar jak pro vlnovou rovnici napětí, tak i proudu, a to

$$\hat{\lambda}^2 - \hat{\gamma}^2 = 0.$$

Ta má dva komplexní kořeny

$$\hat{\lambda}_{1,2} = \mp\hat{\gamma} = \mp\sqrt{\hat{Z}_l \hat{Y}_\mathrm{q}} = \mp\sqrt{(R_0 + \mathrm{j}\omega L_0)(G_0 + \mathrm{j}\omega C_0)}.$$

Další postup řešení vlnové rovnice si ukažme na případu vlnové rovnice napětí, které má tvar

$$\hat{U}(x) = \hat{A}_\mathrm{p}\mathrm{e}^{-\hat{\lambda}_1 x} + \hat{A}_\mathrm{z}\mathrm{e}^{\hat{\lambda}_2 x} = \hat{A}_\mathrm{p}\mathrm{e}^{-\hat{\gamma} x} + \hat{A}_\mathrm{z}\mathrm{e}^{\hat{\gamma} x},$$

kde $\hat{A}_\mathrm{p}$ a $\hat{A}_\mathrm{z}$ jsou integrační konstanty, které závisí na známých okrajových podmínkách vedení. Jelikož v řešení vystupují dvě neznámé hodnoty konstanty, potřebujeme k jejich určení další rovnici. Tou je diferenciální rovnice 1. řádu pro napětí, do které dosadíme řešení vlnové rovnice

$$\frac{\mathrm{d}\hat{U}(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\left(\hat{A}_\mathrm{p}\mathrm{e}^{-\hat{\gamma} x} + \hat{A}_\mathrm{z}\mathrm{e}^{\hat{\gamma} x}\right)}{\mathrm{d}x} = -\hat{\gamma}\hat{A}_\mathrm{p}\mathrm{e}^{-\hat{\gamma} x} + \hat{\gamma}\hat{A}_\mathrm{z}\mathrm{e}^{\hat{\gamma} x} = -\hat{Z}_l\hat{I}(x).$$

Jejím derivování získáme současně i řešení rozložení proudu podél vedení, protože po jednoduché úpravě platí

$$\hat{I}(x) = \frac{\hat{\gamma}}{\hat{Z}_l}\left(\hat{A}_\mathrm{p}\mathrm{e}^{-\hat{\gamma} x} - \hat{A}_\mathrm{z}\mathrm{e}^{\hat{\gamma} x}\right) = \frac{\sqrt{\hat{Z}_l \hat{Y}_\mathrm{q}}}{\hat{Z}_l}\left(\hat{A}_\mathrm{p}\mathrm{e}^{-\hat{\gamma} x} - \hat{A}_\mathrm{z}\mathrm{e}^{\hat{\gamma} x}\right) = \sqrt{\frac{\hat{Y}_\mathrm{q}}{\hat{Z}_l}}\left(\hat{A}_\mathrm{p}\mathrm{e}^{-\hat{\gamma} x} - \hat{A}_\mathrm{z}\mathrm{e}^{\hat{\gamma} x}\right) = \frac{1}{\hat{Z}_\mathrm{v}}\left(\hat{A}_\mathrm{p}\mathrm{e}^{-\hat{\gamma} x} - \hat{A}_\mathrm{z}\mathrm{e}^{\hat{\gamma} x}\right),$$

kde odmocnina podílu měrné podélné impedance a příčné admitance definuje tzv. vlnovou nebo charakteristickou impedanci vedení

$$\hat{Z}_\mathrm{v} = \sqrt{\frac{\hat{Z}_l}{\hat{Y}_\mathrm{q}}} = \sqrt{\frac{R_0 + \mathrm{j}\omega L_0}{G_0 + \mathrm{j}\omega C_0}},$$

která je druhým sekundárním parametrem vedení. Je to ekvivalentní hodnota impedance, která jak uvidíme, udává hodnotu impedance nekonečně dlouhého či přizpůsobeného vedení v jeho libovolném místě.

Poznamenejme, že v teorii elektromagnetického pole vlnová impedance představuje zdánlivý odpor, který klade okolní prostředí elektromagnetickému vlnění šířícímu se podél dlouhého vedení. V teorii obvodů elektrickou složku pole vedení modeluje vlna napětí, primární parametry vedení G_0, C_0 a v harmonicky ustáleném stavu pak i měrná příčná admitance vedení $\hat{Y}_{\mathrm{q}}$. Magnetickou složku pole vedení potom vlna proudu, primární parametry R_0, L_0 a měrná podélná impedance vedení $\hat{Z}_1$. Protože v teorii obvodů používáme k modelování hodnoty parametrů obvodu soustředěných do jednoho bodu, nezajímají nás geometrické a materiálové parametry samotného vedení a jeho okolí. Způsobem jejich stanovení se zabývá právě teorie elektromagnetického pole.

Okrajové podmínky na vedení tj. hodnoty napětí a proudu na začátku nebo konci vedení je nutné znát, kvůli určení integračních konstant řešení vlnové rovnice vedení. Vyjdeme-li při stanovení integračních konstant ze vstupních okrajových podmínek tj. podmínek na počátku vedení, tedy v místě $x = 0$ m, dostaneme po dosazení za hodnotu prostorové souřadnice soustavu rovnic

$$\hat{U}_1 = \hat{U}(0) = \hat{A}_{\mathrm{p}}\mathrm{e}^{-\hat{\gamma}0} + \hat{A}_{\mathrm{z}}\mathrm{e}^{\hat{\gamma}0} = \hat{A}_{\mathrm{p}} + \hat{A}_{\mathrm{z}},$$

$$\hat{I}_1 = \hat{I}(0) = \frac{1}{\hat{Z}_{\mathrm{v}}}\left(\hat{A}_{\mathrm{p}}\mathrm{e}^{-\hat{\gamma}0} - \hat{A}_{\mathrm{z}}\mathrm{e}^{\hat{\gamma}0}\right) = \frac{1}{\hat{Z}_{\mathrm{v}}}\left(\hat{A}_{\mathrm{p}} - \hat{A}_{\mathrm{z}}\right).$$

Jejím vyřešením, např. Cramerovým pravidlem, získáme integrační konstanty

$$\hat{A}_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}\left(\hat{U}_1 + \hat{Z}_{\mathrm{v}}\hat{I}_1\right) \qquad \text{a} \qquad \hat{A}_{\mathrm{z}} = \frac{1}{2}\left(\hat{U}_1 - \hat{Z}_{\mathrm{v}}\hat{I}_1\right),$$

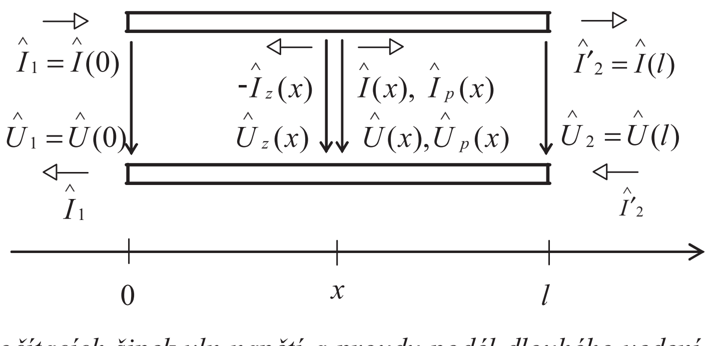
kde $\hat{U}_1$ a $\hat{I}_1$ jsou známé hodnoty napětí a proudu na počátku vedení.

Po jejich dosazení do výchozích rovnic získáme rovnice popisující rozložení napětí a proudu podél vedení

$$\hat{U}(x) = \hat{U}_{\mathrm{p}}(x) + \hat{U}_{\mathrm{z}}(x) = \frac{1}{2}\left(\hat{U}_1 + \hat{Z}_{\mathrm{v}}\hat{I}_1\right)\mathrm{e}^{-\hat{\gamma}x} + \frac{1}{2}\left(\hat{U}_1 - \hat{Z}_{\mathrm{v}}\hat{I}_1\right)\mathrm{e}^{\hat{\gamma}x},$$

$$\hat{I}(x) = \hat{I}_{\mathrm{p}}(x) + \hat{I}_{\mathrm{z}}(x) = \frac{\hat{U}_{\mathrm{p}}(x)}{\hat{Z}_{\mathrm{v}}} - \frac{\hat{U}_{\mathrm{z}}(x)}{\hat{Z}_{\mathrm{v}}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\hat{U}_1}{\hat{Z}_{\mathrm{v}}} + \hat{I}_1\right)\mathrm{e}^{-\hat{\gamma}x} - \frac{1}{2}\left(\frac{\hat{U}_1}{\hat{Z}_{\mathrm{v}}} - \hat{I}_1\right)\mathrm{e}^{\hat{\gamma}x},$$

ze kterých je patrné, že na vedení existují dvě vlny, vlna přímá, označená indexem p, která postupuje od počátku vedení směrem k jeho konci a vlna zpětná, označená indexem z, která postupuje od konce vedení směrem k jeho počátku. Výsledná vlna napětí $\hat{U}(x)$ je obecně složena z postupných vln, a to přímé vlny napětí $\hat{U}_{\mathrm{p}}(x)$ a zpětné vlny napětí $\hat{U}_{\mathrm{z}}(x)$. Podobně výsledná vlna proudu $\hat{I}(x)$ je složena z přímé vlny proudu $\hat{I}_{\mathrm{p}}(x)$ a zpětné vlny proudu $\hat{I}_{\mathrm{z}}(x)$. Situaci na vedení délky l ilustruje obr. 9.1 a model přenosové cesty na obr. 7.4, kde kaskádnímu modelu dvojbranu odpovídají ekvivalentní kaskádní parametry vedení, viz dále.



Obr. 9.1 Zavedení počítacích šipek vln napětí a proudu podél dlouhého vedení v souřadnici x: přímá vlna, zpětná vlna, výsledná vlna

Jednoduchou úpravou a využitím definic hyperbolických funkcí získáme rovnice vedení ve tvaru

$$\hat{U}(x) = \hat{U}_1 \frac{e^{\hat{\gamma}x} + e^{-\hat{\gamma}x}}{2} - \hat{Z}_v \hat{I}_1 \frac{e^{\hat{\gamma}x} - e^{-\hat{\gamma}x}}{2} = \hat{U}_1 \cosh(\hat{\gamma}x) - \hat{Z}_v \hat{I}_1 \sinh(\hat{\gamma}x)\,,$$

$$\hat{I}(x) = \hat{I}_1 \frac{e^{\hat{\gamma}x} + e^{-\hat{\gamma}x}}{2} - \frac{\hat{U}_1}{\hat{Z}_v} \frac{e^{\hat{\gamma}x} - e^{-\hat{\gamma}x}}{2} = -\frac{\hat{U}_1}{\hat{Z}_v} \frac{e^{\hat{\gamma}x} - e^{-\hat{\gamma}x}}{2} + \hat{I}_1 \frac{e^{\hat{\gamma}x} + e^{-\hat{\gamma}x}}{2} = -\frac{\hat{U}_1}{\hat{Z}_v} \sinh(\hat{\gamma}x) + \hat{I}_1 \cosh(\hat{\gamma}x)$$

nebo v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} \hat{U}(x) \\ \hat{I}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\hat{\gamma}x) & -\hat{Z}_v \sinh(\hat{\gamma}x) \\ -\dfrac{1}{\hat{Z}_v} \sinh(\hat{\gamma}x) & \cosh(\hat{\gamma}x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{I}_1 \end{bmatrix}.$$

Dosadíme-li do rovnic v hyperbolickém tvaru za $x = l$, získáme hodnoty napětí $\hat{U}_2$ a proudu $\hat{I}'_2$ na konci vedení

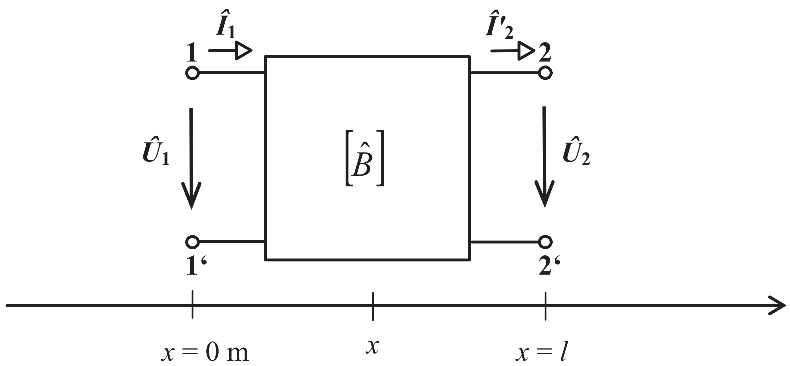
$$\hat{U}_2 = \hat{U}(l) = \hat{U}_1 \cosh(\hat{\gamma}l) - \hat{Z}_v \hat{I}_1 \sinh(\hat{\gamma}l)\,,$$

$$\hat{I}'_2 = \hat{I}(l) = -\frac{\hat{U}_1}{\hat{Z}_v} \sinh(\hat{\gamma}l) + \hat{I}_1 \cosh(\hat{\gamma}l)\,,$$

které v maticovém tvaru zapíšeme

$$\begin{bmatrix} \hat{U}_2 \\ \hat{I}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\hat{\gamma}l) & -\hat{Z}_v \sinh(\hat{\gamma}l) \\ -\dfrac{1}{\hat{Z}_v} \sinh(\hat{\gamma}l) & \cosh(\hat{\gamma}l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{I}_1 \end{bmatrix}.$$

Vytvořili jsme tak model vedení, který tvarem zápisu odpovídá zpětně kaskádnímu modelu dvojbranu, viz kapitola 3.3. Dlouhé vedení jako celek (z pohledu jeho okrajů) lze modelovat souměrným, reciprokým dvojbranem, tedy obvodem se soustředěnými parametry. Blokové schéma vedení modelované zpětně kaskádními parametry dvojbranu je nakresleno na obr. 9.2.



Obr. 9.2 Blokové schéma vedení v souřadnici x, model zpětně kaskádního dvojbranu

Z rovnic vedení je patrné, že sekundární parametry vedení $\hat{\gamma}, \hat{Z}_v$, někdy také nazývané provozní parametry vedení, jednoznačně charakterizují dlouhé homogenní vedení.

Příklad 9.1.

Ověřte, že vedení jako celek lze modelovat souměrným, reciprokým dvojbranem.

♦

Vyjděme nejprve ze zpětně kaskádního modelu vedení. Pro souměrný dvojbran, popsaný zpětně kaskádními parametry dvojbranu platí rovnost parametrů $\hat{B}_{11} = \hat{B}_{22}$, což je u vedení splněno, neboť tyto parametry mají hodnotu $\hat{B}_{11} = \cosh(\hat{\gamma}l)$ a $\hat{B}_{22} = \cosh(\hat{\gamma}l)$. Pro reciprocitní dvojbran platí, že jeho determinat je jednotkový, tedy $\left|\hat{B}\right| = \hat{B}_{11}\,\hat{B}_{22} - \hat{B}_{12}\,\hat{B}_{21} = 1$. Dosadíme-li do této definice za hodnoty parametrů zpětně kaskádní matice vedení, dostaneme

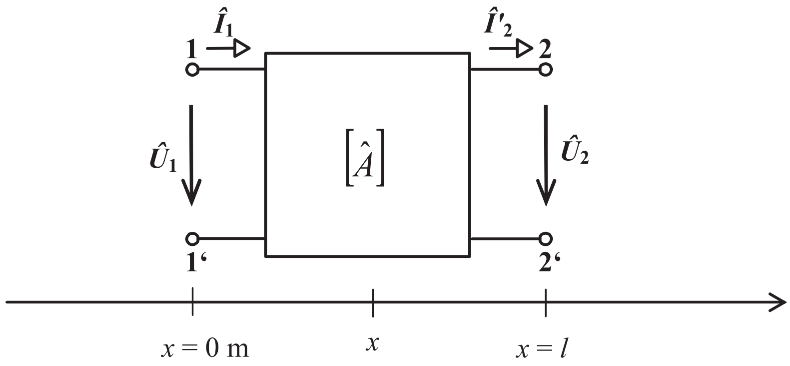
$$\cosh(\hat{\gamma}l)\cosh(\hat{\gamma}l) - \left(-\hat{Z}_{\mathrm{v}}\sinh(\hat{\gamma}l)\right)\left(-\frac{1}{\hat{Z}_{\mathrm{v}}}\sinh(\hat{\gamma}l)\right) = \cosh^2(\hat{\gamma}l) - \sinh^2(\hat{\gamma}l) = 1\,,$$

takže vedení tuto podmínku splňuje a je reciprocitním dvojbranem.

Ke stejným závěrům dospějeme, použijeme-li častěji používaný, kaskádní model vedení, přepočet viz kapitola 3.3,

$$\begin{bmatrix}\hat{U}_1\\ \hat{I}_1\end{bmatrix} = \frac{1}{\left|\hat{B}\right|}\begin{bmatrix}\hat{B}_{22} & -\hat{B}_{12}\\ -\hat{B}_{21} & \hat{B}_{11}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cosh(\hat{\gamma}l) & \hat{Z}_{\mathrm{v}}\sinh(\hat{\gamma}l)\\ \dfrac{1}{\hat{Z}_{\mathrm{v}}}\sinh(\hat{\gamma}l) & \cosh(\hat{\gamma}l)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{U}_2\\ \hat{I}'_2\end{bmatrix},$$

kde jsme dosadili za determinant zpětně kaskádní matice hodnotu jedna. Blokové schéma vedení modelované kaskádními parametry dvojbranu je na obr. 9.3.



Obr. 9.3 Blokové schéma vedení v souřadnici x, model kaskádního dvojbranu, příklad 9.1

❑ Diskuze rovnic vedení

Pro vysvětlení významu rovnic dlouhého vedení v harmonicky ustáleném stavu, ale i pro analýzu většiny praktických úloh je výhodnější vyjít při určování integračních konstant řešení vlnových rovnic vedení ze známých výstupních okrajových podmínek tj. podmínek na konci vedení, tedy v místě $x = l$. Pro odvození hodnot integračních konstant vlnové rovnice ze známých výstupních obvodových veličin vedení je výhodné zavést nový souřadný systém s nezávislou souřadnicí s, který udává polohu místa na vedení vůči jeho konci. Je-li poloha místa na vedení vůči jeho počátku dána souřadnicí x, potom vztah mezi oběma souřadnicemi při délce vedení l udává rovnice

$$s = l - x\,,$$

viz obr. 9.4. Pro element vedení v nové souřadnici s, po diferenciaci předchozího vztahu, platí $\mathrm{d}s = -\mathrm{d}x$, takže rovnice vedení v nově zavedené proměnné změní svůj tvar na

$$\frac{\mathrm{d}\hat{U}(s)}{\mathrm{d}s} = \left(R_0 + \mathrm{j}\omega L_0\right)\hat{I}(s) = \hat{Z}_1\hat{I}(s)\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{I}(s)}{\mathrm{d}s} = \left(G_0 + \mathrm{j}\omega C_0\right)\hat{U}(s) = \hat{Y}_\mathrm{q}\hat{U}(s),$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\hat{U}(s)}{\mathrm{d}s^2} - \hat{Z}_1\hat{Y}_\mathrm{q}\hat{U}(s) = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\hat{I}(s)}{\mathrm{d}s^2} - \hat{Z}_1\hat{Y}_\mathrm{q}\,\hat{I}(s) = 0.$$

Následující odvození řešení vlnové rovnice v souřadnici s je analogické postupu, použitému při jejím řešení v souřadnici x. Charakteristická rovnice se nezmění a řešení vlnové rovnice napětí zapíšeme

$$\hat{U}(s) = \hat{B}_\mathrm{p}\mathrm{e}^{\hat{\lambda}_1 s} + \hat{B}_\mathrm{z}\mathrm{e}^{-\hat{\lambda}_2 s} = \hat{B}_\mathrm{p}\mathrm{e}^{\hat{\gamma}s} + \hat{B}_\mathrm{z}\mathrm{e}^{-\hat{\gamma}s}.$$

Integrační konstanty stanovíme z výstupních okrajových podmínek

$$\hat{U}_2 = \hat{U}(0) = \hat{B}_\mathrm{p}\mathrm{e}^{\hat{\gamma}0} + \hat{B}_\mathrm{z}\mathrm{e}^{-\hat{\gamma}0} = \hat{B}_\mathrm{p} + \hat{B}_\mathrm{z}$$

$$\hat{I}_2' = \hat{I}(0) = \frac{1}{\hat{Z}_\mathrm{v}}\left(\hat{B}_\mathrm{p}\mathrm{e}^{\hat{\gamma}0} - \hat{B}_\mathrm{z}\mathrm{e}^{-\hat{\gamma}0}\right) = \frac{1}{\hat{Z}_\mathrm{v}}\left(\hat{B}_\mathrm{p} - \hat{B}_\mathrm{z}\right).$$

Řešením soustavy rovnic získáme neznámé integrační konstanty

$$\hat{B}_\mathrm{p} = \frac{1}{2}\left(\hat{U}_2 + \hat{Z}_\mathrm{v}\hat{I}_2'\right) \qquad \text{a} \qquad \hat{B}_\mathrm{z} = \frac{1}{2}\left(\hat{U}_2 - \hat{Z}_\mathrm{v}\hat{I}_2'\right).$$

Po jejich dosazení do výchozích rovnic získáme vztahy popisující rozložení napětí a proudu podél vedení v souřadnici s

$$\hat{U}(s) = \hat{U}_\mathrm{p}(s) + \hat{U}_\mathrm{z}(s) = \frac{1}{2}\left(\hat{U}_2 + \hat{Z}_\mathrm{v}\hat{I}_2'\right)\mathrm{e}^{\hat{\gamma}s} + \frac{1}{2}\left(\hat{U}_2 - \hat{Z}_\mathrm{v}\hat{I}_2'\right)\mathrm{e}^{-\hat{\gamma}s} =$$

$$= \frac{1}{2}\hat{I}_2'\left(\frac{\hat{U}_2}{\hat{I}_2'} + \hat{Z}_\mathrm{v}\right)\mathrm{e}^{\hat{\gamma}s} + \frac{1}{2}\hat{I}_2'\left(\frac{\hat{U}_2}{\hat{I}_2'} - \hat{Z}_\mathrm{v}\hat{I}_2'\right)\mathrm{e}^{-\hat{\gamma}s} = \frac{1}{2}\left(\hat{Z}_\mathrm{s} + \hat{Z}_\mathrm{v}\right)\hat{I}_2'\,\mathrm{e}^{\hat{\gamma}s} + \frac{1}{2}\left(\hat{Z}_\mathrm{s} - \hat{Z}_\mathrm{v}\right)\hat{I}_2'\,\mathrm{e}^{-\hat{\gamma}s},$$

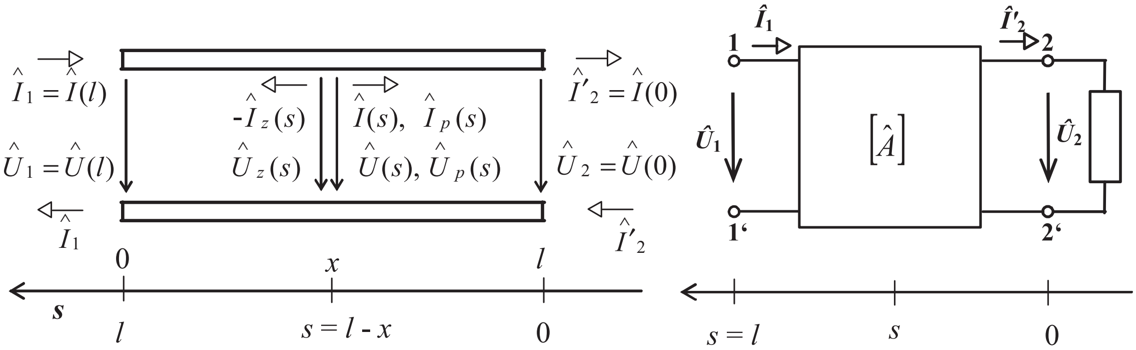
$$\hat{I}(s) = \hat{I}_\mathrm{p}(s) - \hat{I}_\mathrm{z}(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{\hat{U}_2}{\hat{Z}_\mathrm{v}} + \hat{I}_2'\right)\mathrm{e}^{\hat{\gamma}s} - \frac{1}{2}\left(\frac{\hat{U}_2}{\hat{Z}_\mathrm{v}} - \hat{I}_2'\right)\mathrm{e}^{-\hat{\gamma}s} =$$

$$= \frac{1}{2}\hat{I}_2'\left(\frac{\hat{U}_2}{\hat{I}_2'\hat{Z}_\mathrm{v}} + 1\right)\mathrm{e}^{\hat{\gamma}s} - \frac{1}{2}\hat{I}_2'\left(\frac{\hat{U}_2}{\hat{I}_2'\hat{Z}_\mathrm{v}} - 1\right)\mathrm{e}^{-\hat{\gamma}s} = \frac{1}{2}\left(\frac{\hat{Z}_\mathrm{s}}{\hat{Z}_\mathrm{v}} + 1\right)\hat{I}_2'\,\mathrm{e}^{\hat{\gamma}s} - \frac{1}{2}\left(\frac{\hat{Z}_\mathrm{s}}{\hat{Z}_\mathrm{v}} - 1\right)\hat{I}_2'\,\mathrm{e}^{-\hat{\gamma}s}.$$

Z rovnic je patrné, že na vedení existují dvě vlny, vlna přímá, označená indexem p, která postupuje od počátku vedení směrem k jeho konci a vlna zpětná, označená indexem z, která postupuje od konce vedení směrem k jeho počátku. Výsledná vlna napětí $\hat{U}(s)$ je obecně složena z postupných vln, a to přímé vlny napětí $\hat{U}_\mathrm{p}(s)$ a zpětné vlny napětí $\hat{U}_\mathrm{z}(s)$. Podobně výsledná vlna proudu $\hat{I}(s)$ je složena z přímé vlny proudu $\hat{I}_\mathrm{p}(s)$ a zpětné vlny proudu $\hat{I}_\mathrm{z}(s)$. Situaci na vedení ilustruje obr. 9.4.

Analogicky jako v předchozím případě užitím definic hyperbolických funkcí lze odvodit rovnice vedení, které zapišme v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix}\hat{U}(s)\\ \hat{I}(s)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cosh(\hat{\gamma}s) & \hat{Z}_\mathrm{v}\sinh(\hat{\gamma}s)\\ \dfrac{1}{\hat{Z}_\mathrm{v}}\sinh(\hat{\gamma}s) & \cosh(\hat{\gamma}s)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\hat{U}_2\\ \hat{I}_2'\end{bmatrix}.$$



Obr. 9.4 Zavedení počítacích šipek vln napětí a proudu podél dlouhého vedení v souřadnici s: přímá vlna, zpětná vlna, výsledná vlna; blokové schéma zatíženého vedení v souřadnici s modelované kaskádními parametry dvojbranu

Z vlnových rovnic zapsaných v souřadnici *s* plyne, že zpětná složka vlny nebude existovat, platí-li

$$\hat{Z}_\mathrm{s} = \frac{\hat{U}_2}{\hat{I}'_2} = \hat{Z}_\mathrm{v},$$

tedy je-li vedení na svém konci zatíženo impedancí $\hat{Z}_\mathrm{s}$ o hodnotě vlnové impedance $\hat{Z}_\mathrm{v}$. Takovéto vedení nazýváme přizpůsobené. Na tomto vedení tedy existuje jen přímá vlna napětí a proudu a pro tyto vlny platí

$$\hat{U}(s) = \hat{U}_\mathrm{p}(s) = \frac{1}{2}\left(\hat{U}_2 + \hat{Z}_\mathrm{v}\hat{I}'_2\right)\mathrm{e}^{\hat{\gamma}s} = \frac{1}{2}\left(\hat{U}_2 + \hat{U}_2\right)\mathrm{e}^{\hat{\gamma}s} = \hat{U}_2\,\mathrm{e}^{\hat{\gamma}s},$$

$$\hat{I}(s) = \hat{I}_\mathrm{p}(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{\hat{U}_2}{\hat{Z}_\mathrm{v}} + \hat{I}'_2\right)\mathrm{e}^{\hat{\gamma}s} = \frac{1}{2}\left(\hat{I}'_2 + \hat{I}'_2\right)\mathrm{e}^{\hat{\gamma}s} = \hat{I}'_2\,\mathrm{e}^{\hat{\gamma}s}.$$

Dáme-li vlnu napětí a proudu do poměru, získáme hodnotu impedance vedení v závislosti na souřadnici *s*

$$\hat{Z}(s) = \frac{\hat{U}(s)}{\hat{I}(s)} = \frac{\hat{U}_\mathrm{p}(s)}{\hat{I}_\mathrm{p}(s)} = \frac{\hat{U}_2\,\mathrm{e}^{\hat{\gamma}s}}{\hat{I}'_2\,\mathrm{e}^{\hat{\gamma}s}} = \frac{\hat{U}_2}{\hat{I}'_2} = \hat{Z}_\mathrm{v}.$$

Přizpůsobené vedení má tedy pro přímou vlnu napětí a proudu v libovolném místě konstantní hodnotu impedance, která je právě rovna vlnové impedanci vedení. Vztah platí obecně, tedy i na počátku vedení, tj. v místě *s* = *l*, takže pro vstupní impedanci přizpůsobeného vedení platí $\hat{Z}_1 = \lim_{s\to l}\hat{Z}(s) = \hat{Z}_\mathrm{v}$.

Poznamenejme, že ke stejnému závěru dospějeme, vyjdeme-li z vlnových rovnic zapsaných v souřadnici *x*. Pouze přímá vlna napětí a proudu na vedení v tomto případě bude existovat za podmínky

$$\hat{Z}_1 = \frac{\hat{U}_1}{\hat{I}_1} = \hat{Z}_\mathrm{v},$$

tedy, bude-li impedance v místě *x* = 0 m, tj. vstupní impedance vedení rovna vlnové impedanci.

Z rovnic vedení zapsaných v souřadnici *x* dále plyne, že zpětná vlna napětí a proudu může podle matematické interpretace řešení teoreticky existovat jen za podmínky $\hat{Z}_1 = -\hat{Z}_\mathrm{v}$. Na vedení v tomto případě nevznikne přímá vlna napětí a proudu. Pro zpětné vlny napětí a proudu pak platí

$$\hat{U}(x) = \hat{U}_\mathrm{z}(x)\backslash = \frac{1}{2}\left(\hat{U}_1 - \hat{Z}_\mathrm{v}\hat{I}_1\right)\mathrm{e}^{\hat{\gamma}x} = \frac{1}{2}\left(\hat{U}_1 + \hat{Z}_1\hat{I}_1\right)\mathrm{e}^{\hat{\gamma}x} = \frac{1}{2}\left(\hat{U}_1 + \hat{U}_1\right)\mathrm{e}^{\hat{\gamma}x} = \hat{U}_1\,\mathrm{e}^{\hat{\gamma}x},$$

$$\hat{I}(x)=\hat{I}_\mathrm{z}(x)=-\frac{1}{2}\left(\frac{\hat{U}_1}{\hat{Z}_\mathrm{v}}-\hat{I}_1\right)\mathrm{e}^{\hat{\gamma}x}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\hat{U}_1}{-\hat{Z}_1}-\hat{I}_1\right)\mathrm{e}^{\hat{\gamma}x}=-\frac{1}{2}\left(-\hat{I}_1-\hat{I}_1\right)\mathrm{e}^{\hat{\gamma}x}=\hat{I}_1\,\mathrm{e}^{\hat{\gamma}x}$$

a pro jejich poměr

$$\hat{Z}(x)=\frac{\hat{U}(x)}{\hat{I}(x)}=\frac{\hat{U}_\mathrm{z}(x)}{\hat{I}_\mathrm{z}(x)}=\frac{\hat{U}_1\,\mathrm{e}^{\hat{\gamma}x}}{\hat{I}_1\,\mathrm{e}^{\hat{\gamma}x}}=\frac{\hat{U}_1}{\hat{I}_1}=-\hat{Z}_\mathrm{v}\,.$$

Vedení „přizpůsobené“ pro zpětnou vlnu napětí a proudu má tedy v libovolném místě x konstantní, zápornou hodnotu vlnové impedance.

Jak již víme, vedení z pohledu jeho vstupní a výstupní strany můžeme modelovat dvojbranem, který je souměrný a reciprocitní. Takovýto dvojbran charakterizují sekundární parametry dvojbranu: obrazová impedance $\hat{Z}_\mathrm{o}$ a obrazový činitel útlumu $\hat{g}_\mathrm{o}$, viz kapitola 7.2. Sekundárními parametry vedení jsou vlnová impedance a činitel šíření. Obě dvojice sekundárních parametrů jsou ekvivalentní a platí pro ně rovnosti

$$\hat{Z}_\mathrm{v}=\hat{Z}_\mathrm{o} \qquad \text{a} \qquad \hat{\gamma}=\hat{g}_\mathrm{o}l\,.$$

Pro obrazově přizpůsobený dvojbran, ale i přizpůsobené vedení platí, že celá přenosová cesta na obr. 7.4 je impedančně přizpůsobená, tj. vstupní i výstupní impedance dvojbranu/vedení je rovna obrazové/vlnové impedanci, tj. $\hat{Z}_1=\hat{Z}_2=\hat{Z}_\mathrm{o}=\hat{Z}_\mathrm{v}$, a to proto, že vnitřní impedance zdroje a zatěžovací impedance vedení jsou impedančně přizpůsobené, tj. platí $\hat{Z}_\mathrm{i}=\hat{Z}_\mathrm{s}=\hat{Z}_\mathrm{o}=\hat{Z}_\mathrm{v}$.

Z výše uvedeného je zřejmé, že impedance v libovolném místě vedení je pro přímou a zpětnou vlnu napětí a proudu konstantní a je definována vlnovou impedancí vedení. Vlnová impedance vystupuje v rovnicích vedení v součinu a podílu s obvodovými veličinami vedení, proto je výhodné pro její zápis použít exponenciální tvar komplexního čísla

$$\hat{Z}_\mathrm{v}=\sqrt{\frac{R_0+\mathrm{j}\omega L_0}{G_0+\mathrm{j}\omega C_0}}=\sqrt{\frac{\sqrt{R_0{}^2+\omega^2L_0{}^2}\,e^{\mathrm{j}arctg\frac{\omega L_0}{R_0}}}{\sqrt{G_0{}^2+\omega^2C_0{}^2}\,e^{\mathrm{j}arctg\frac{\omega C_0}{G_0}}}}=\sqrt[4]{\frac{R_0{}^2+\omega^2L_0{}^2}{G_0{}^2+\omega^2C_0{}^2}}\,e^{\mathrm{j}\frac{arctg\frac{\omega L_0}{R_0}-arctg\frac{\omega C_0}{G_0}}{2}}=Z_\mathrm{v}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_\mathrm{v}}\,.$$

Pro její modul (velikost) a fázi tedy platí

$$Z_\mathrm{v}=\sqrt[4]{\frac{R_0{}^2+\omega^2L_0{}^2}{G_0{}^2+\omega^2C_0{}^2}}\,, \qquad \varphi_\mathrm{v}=\frac{1}{2}\left[\arctan\left(\frac{\omega L_0}{R_0}\right)-\arctan\left(\frac{\omega C_0}{G_0}\right)\right].$$

Činitel šíření vystupuje v rovnicích vedení v argumentu exponenciální funkce. Z tohoto důvodu je ho účelné zapsat v podobě komplexního čísla ve složkovém tvaru

$$\hat{\gamma}=\alpha+\mathrm{j}\beta=\sqrt{(R_0+\mathrm{j}\omega L_0)(G_0+\mathrm{j}\omega C_0)}\,.$$

První složku α, nazýváme činitel útlumu nebo měrný útlum a druhou složku β činitel fáze nebo měrný posun. Obě složky mají samozřejmě stejnou jednotku jako činitel šíření, tedy m^{-1}. Definice obou činitelů získáme následujícím postupem, když vyjdeme ze vztahu pro čtverec činitele šíření

$$\hat{\gamma}^2=(\alpha+\mathrm{j}\beta)^2=\left(\sqrt{(R_0+\mathrm{j}\omega L_0)(G_0+\mathrm{j}\omega C_0)}\right)^2.$$

Po provedení naznačených operací a úpravě získáme komplexní rovnici

$$\alpha^2-\beta^2+2\mathrm{j}\alpha\beta-\left[R_0G_0-\omega^2L_0C_0+\mathrm{j}\omega(R_0C_0+L_0G_0)\right]=0+\mathrm{j}0\,.$$

Reálné hodnoty neznámých α a β získáme řešením soustavy dvou rovnic, které sestavíme ze složek komplexní rovnice, zvlášť zapsaných pro její reálnou a imaginární část. Soustava rovnic má tvar

$$\alpha^2 - \beta^2 - \left(R_0 G_0 - \omega^2 L_0 C_0\right) = 0 ,$$

$$2\alpha\beta - \omega\left(R_0 C_0 + L_0 G_0\right) = 0 .$$

Vyjádříme-li si z druhé rovnice činitel útlumu

$$\alpha = \frac{\omega\left(R_0 C_0 + L_0 G_0\right)}{2\beta}$$

a dosadíme-li ho do rovnice první dostaneme

$$\left(\frac{\omega\left(R_0 C_0 + L_0 G_0\right)}{2\beta}\right)^2 - \beta^2 - \left(R_0 G_0 - \omega^2 L_0 C_0\right) = 0 ,$$

dostaneme po úpravě bikvadratickou rovnici

$$\left(\beta^2\right)^2 + \beta^2\left(R_0 G_0 - \omega^2 L_0 C_0\right) - \frac{\omega^2\left(R_0 C_0 + L_0 G_0\right)^2}{4} = 0 ,$$

ze které po substituci $z = \beta^2$ získáme rovnici kvadratickou

$$z^2 + z\left(R_0 G_0 - \omega^2 L_0 C_0\right) - \frac{\omega^2\left(R_0 C_0 + L_0 G_0\right)^2}{4} = 0 .$$

Diskriminant rovnice je

$$D = \left(R_0 G_0 - \omega^2 L_0 C_0\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{\omega^2\left(R_0 C_0 + L_0 G_0\right)^2}{4} = \left(R_0 G_0 - \omega^2 L_0 C_0\right)^2 - \omega^2\left(R_0 C_0 + L_0 G_0\right)^2$$

a její řešení má kořeny

$$z_{1,2} = \frac{-(R_0 G_0 - \omega^2 L_0 C_0) \pm \sqrt{\left(R_0 G_0 - \omega^2 L_0 C_0\right)^2 - \omega^2\left(R_0 C_0 + L_0 G_0\right)^2}}{2} .$$

Záporný kořen kvadratické i bikvadratické rovnice nemá fyzikální význam. Z tohoto důvodu má smysl uvažovat jen nezápornou hodnotu činitele fáze. Pro kladný kořen řešení bikvadratické rovnice platí

$$\beta = \sqrt{z_1} = \mathrm{Im}\{\gamma\} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[-(R_0 G_0 - \omega^2 L_0 C_0) + \sqrt{(R_0{}^2 + \omega^2 L_0{}^2)(G_0{}^2 + \omega^2 C_0{}^2)}\right]} .$$

Dosazením činitele fáze do 1. rovnice pro reálnou část výchozí komplexní rovnice získáme rovnici

$$\alpha^2 - \left(\sqrt{\frac{1}{2}\left[-(R_0 G_0 - \omega^2 L_0 C_0) + \sqrt{(R_0{}^2 + \omega^2 L_0{}^2)(G_0{}^2 + \omega^2 C_0{}^2)}\right]}\right)^2 = R_0 G_0 - \omega^2 L_0 C_0 ,$$

ze které odvodíme definici činitele útlumu

$$\alpha = \mathrm{Re}\{\gamma\} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(R_0 G_0 - \omega^2 L_0 C_0) + \sqrt{(R_0{}^2 + \omega^2 L_0{}^2)(G_0{}^2 + \omega^2 C_0{}^2)}\right]} .$$

Z definic je zřejmé, že oba činitele jsou složitou funkcí kmitočtu a primárních parametrů vedení.

Hodnotu činitele útlumu můžeme určit i jiným způsobem, z rovnic přizpůsobeného vedení popsaného rovnicemi v souřadnici x

$$\hat{U}(x) = \hat{U}_1 e^{-\hat{\gamma} x} = \hat{U}_1 e^{-(\alpha + j\beta)x} = \hat{U}_1\, e^{-\alpha x} e^{-j\beta x},$$

$$\hat{I}(x) = \hat{I}_1 e^{-\hat{\gamma} x} = \hat{I}_1 e^{-(\alpha + j\beta)x} = \hat{I}_1\, e^{-\alpha x} e^{-j\beta x},$$

známe-li hodnoty napětí nebo proudu na počátku vedení $\hat{U}_1$, $\hat{I}_1$ a v jednotkové vzdálenosti od jeho počátku tj. v místě $x = 1$ m, platí pro moduly napětí a proudu

$$U_1 = U(0) = \left|\hat{U}(0)\right| = \left|\hat{U}_1\, e^{-\alpha 0} e^{-j\beta 0}\right| = \left|U_1\, e^{\psi_{U1}}\right| = U_1\, e^{\psi_{U1}},$$

$$U(1) = \left|\hat{U}(1)\right| = \left|\hat{U}_1\, e^{-\alpha 1} e^{-j\beta 1}\right| = \left|U_1\, e^{\psi_{U1}}\, e^{-\alpha 1}\, e^{-j\beta 1}\right| = U_1\, e^{\psi_{U1}}\, e^{-\alpha},$$

$$I_1 = I(0) = \left|\hat{I}(0)\right| = \left|\hat{I}_1\, e^{-\alpha 0} e^{-j\beta 0}\right| = \left|I_1 e^{\psi_{I1}}\right| = I_1 e^{\psi_{I1}},$$

$$I(1) = \left|\hat{I}(1)\right| = \left|\hat{I}_1\, e^{-\alpha 1} e^{-j\beta 1}\right| = \left|I_1 e^{\psi_{I1}}\, e^{-\alpha 1} e^{-j\beta 1}\right| = I_1 e^{\psi_{I1}}\, e^{-\alpha}.$$

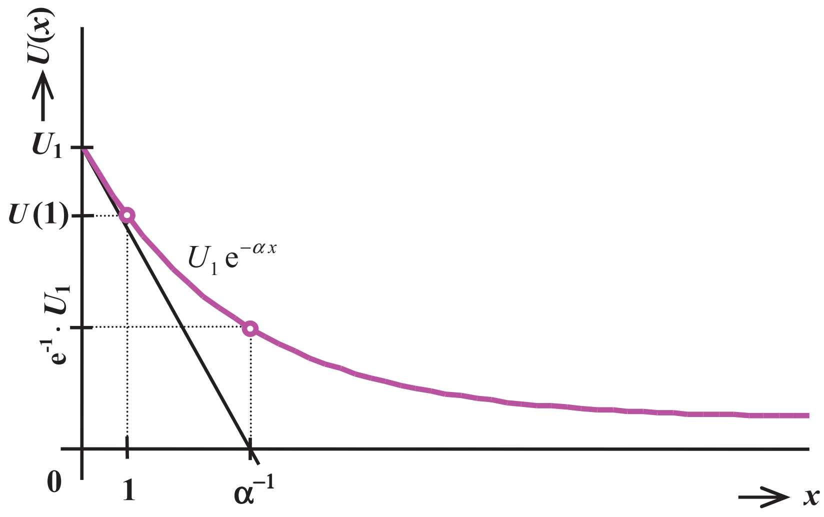
Pro činitel útlumu tedy platí

$$e^{-\alpha} = \frac{1}{e^{\alpha}} = \frac{U(1)}{U_1} = \frac{I(1)}{I_1}$$

a logaritmování

$$\alpha = \ln\left(\frac{U_1}{U(1)}\right) = \ln\left(\frac{I_1}{I(1)}\right).$$

Výše uvedený postup ilustruje obr. 9.5, ve kterém je naznačen ještě další způsob určení činitele útlumu, a to pomocí tečny v počátku ke grafu rozložení napětí přímé vlny. Jedná se vlastně o analogii definice časové konstanty obvodu 1. řádu v přechodném ději, viz kapitola 2.2, kde u dlouhého vedení má význam časové konstanty činitel útlumu.



Obr. 9.5 Rozložení napětí přímé vlny podél vedení, definice činitele útlumu

Obecnou definici činitele útlumu v libovolném místě vedení získáme, dáme-li do poměru dvě místa vedení vzdálená od sebe o jednotkovou vzdálenost, viz obr. 9.6. Pro moduly napětí v místě x a x+1 platí

$$U(x) = \left|\hat{U}(x)\right| = \left|\hat{U}_1\, e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}\right| = U_1\, e^{-\alpha x},$$

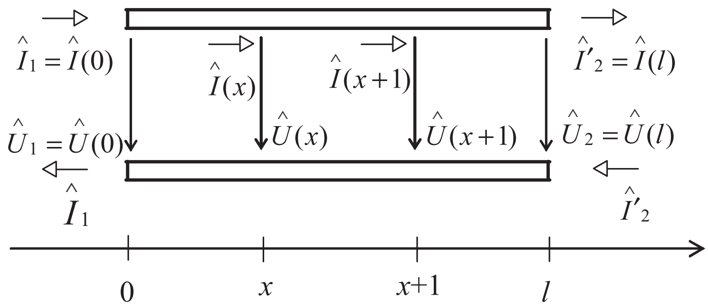
$$U(x+1)=\left|\hat{U}(x+1)\right|=\left|\hat{U}_1\ \mathrm{e}^{-\alpha(x+1)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta(x+1)}\right|=U_1\ \mathrm{e}^{-\alpha x}\ \mathrm{e}^{-\alpha}$$

a pro jejich poměr

$$\frac{U(x)}{U(x+1)}=\frac{U_1\ \mathrm{e}^{-\alpha x}}{U_1\ \mathrm{e}^{-\alpha x}\ \mathrm{e}^{-\alpha}}=\mathrm{e}^{\alpha}.$$

Činitel útlumu počítaný z poměru velikostí napětí, ale analogicky i z rozložení proudu podél vedení, určíme z následujícího vztahu

$$\alpha=\ln\left(\frac{U(x)}{U(x+1)}\right)=\ln\left(\frac{I(x)}{I(x+1)}\right).$$



Obr. 9.6 Počítací šipky přímých vln vedení, obecná definice činitele útlumu v místě x a x+1

Činitel útlumu α udává hodnotu poklesu napětí i proudu na jednotkovém úseku vedení na hodnotu $\mathrm{e}^{-\alpha}$ vůči hodnotě na počátku jednotkového úseku vedení. Je mírou tlumení amplitud vln podél vedení.

Podobně můžeme odvodit pro argument fází napětí ve dvou místech vedení vzdálených od sebe o jednotkovou vzdálenost

$$\arg\left(\hat{U}(x)\right)=\arg\left(\hat{U}_1\ \mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta x}\right)=-\beta x,$$

$$\arg\left(\hat{U}(x+1)\right)=\arg\left(\hat{U}_1\ \mathrm{e}^{-\alpha(x+1)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta(x+1)}\right)=-\beta(x+1).$$

Odečtením argumentů získáme vztah

$$\arg\left(\hat{U}(x)\right)-\arg\left(\hat{U}(x+1)\right)=-\beta x-\left[-\beta(x+1)\right]=\beta.$$

Činitel fáze β udává, jak se změní hodnota fáze napětí, ale i proudu na jednotkovém úseku vedení. Je mírou fázového posunu vln podél vedení a souvisí s rychlostí postupu vlny napětí a proudu podél vedení, viz rozbor argumentu funkce $f_{\mathrm{p}}(x-v_{\mathrm{f}}\,t)$ v kapitole 8.2.

Nebudou-li dvě místa na vedení od sebe vzdálena o jednotku délky, ale o vlnovou délku λ, bude se rozdíl argumentů vlny napětí dvou míst vedení lišit o úhel 2π, protože vlnová délka odpovídá periodě funkce $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta x}$, se kterou se opakuje fáze vlny napětí podél vedení. Pro dvě místa na vedení vzdálená o vlnovou délku λ tak platí

$$\arg\left(\hat{U}(x)\right)-\arg\left(\hat{U}(x+\lambda)\right)=-\beta x-\left[-\beta(x+\lambda)\right]=\beta\lambda=2\pi$$

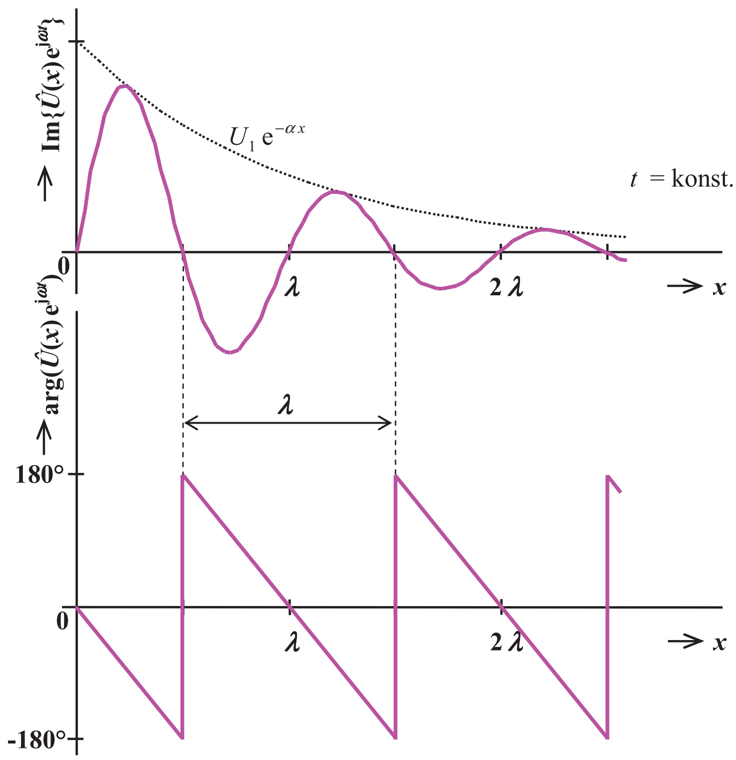
a pro vlnovou délku

$$\lambda=\frac{2\pi}{\beta}.$$

Argument ($-\beta x$) přímé vlny napětí (proudu) se podél vedení mnění lineárně se souřadnicí x, viz obr. 9.7. V komplexní rovině ho modelujeme funkcí $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta x}$, viz definice přímé vlny napětí $\hat{U}_1\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta x}$, která reprezentuje jeho periodicitu podél vedení a souvisí i s postupem vlny napětí podél vedení ve směru osy x. Postup vlny je způsoben v čase se měnícím průběhem harmonického zdroje napětí (obecně zdrojem rozruchu) umístěným na vstupní straně vedení, tj. v místě $x = 0$ m. Zdroj vlnění v komplexní rovině modelujeme komplexorem $\hat{U}_1 = U_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$, který má konstantní efektivní hodnotu napětí U_1 a argument ωt lineárně rostoucí s časem při daném úhlovém kmitočtu ω. Jeho koncový bod cyklicky obíhá po kružnici, viz 1. kapitola, kruhový hodograf na obr. 1.9 vpravo. I když hodograf rozložení přímé vlny napětí podél vedení má vlivem obecně nenulového tlumení tvar svinující spirály, viz obr. 9.8 vlevo, její argument se stále mění lineárně, takže mezi fází zdroje vlnění a fází přímé vlny neustále platí $-\beta x + \omega t = 0$. Tento vztah plyne z argumentu funkce $U_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \mathrm{e}^{-\alpha x} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta x}$, kterou získáme dosazením komplexoru zdroje vlnění za amplitudu přímé vlny napětí. Při rovnosti obou argumentů ($\beta x = \omega t$), jednomu oběhu v komplexní rovině odpovídá jednak čas $t = T = 1/f = \omega/2\pi$, tj. perioda zdroje vlnění, jednak souřadnice $x = \lambda$, tj. místo vzdálené od počátku vedení o vlnovou délku a úhel 360° nebo 2π, takže platí $\beta\lambda = \omega T = 2\pi$. Součin kmitočtu a vlnové délky potom definuje fázovou rychlost vlny napětí (proudu)

$$v_\mathrm{f} = \lambda f = \frac{2\pi f}{\beta} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} .$$

Ta udává rychlost pohybu místa konstantní fáze přímé (zpětné) vlny napětí a proudu podél vedení, podrobněji příklad 9.3. Poznamenejme, že vlnová délka vlnění λ je obecně definována nejkratší vzdáleností dvou míst na vedení se stejnou fází, viz obr. 9.7, kde zobrazeno rozložení hodnot a fáze přímé vlny napětí $\hat{U}(x)$ podél vedení v daném časovém okamžiku.



Obr. 9.7 Přímá vlna napětí na vedení, čas t = konst.: rozložení hodnot podél vedení, argument

Poznamenejme, že u přímé vlny napětí je fázová rychlost rovna rychlosti světla šířícího se v daném prostředí, takže při dané délce vedení l a kmitočtu f, můžeme podle délky vlny λ posoudit míru vlnových jevů na vedení. Je-li splněna podmínka $\lambda >> l$, vlnové jevy se výrazně neprojeví a vedení lze modelovat jako elektrický obvod, tedy obvod se soustředěnými parametry.

Příklad 9.2.

Určete kaskádní parametry vedení, vlnovou délku a fázovou rychlost vlny, jsou-li známy primární parametry vedení R_0 = 3,16 Ω/km, L_0 = 1,85 mH/km, G_0 = 0,5 μS/km, C_0 = 6,4 nF/km. Kmitočet vedení je 800 Hz a jeho délka je 100 km.

♦

K určení kaskádních parametrů vedení potřebujeme nejprve znát sekundární parametry vedení, jež jsou definovány hodnotami podélné impedance

$$\hat{Z}_1 = R_0 + \mathrm{j}2\pi f L_0 = 3{,}16 + \mathrm{j}2\pi\cdot 800\cdot 1{,}85\cdot 10^{-3} = 3{,}16 + \mathrm{j}9{,}3 = 9{,}82\mathrm{e}^{\mathrm{j}71{,}23°}\ \Omega\ \mathrm{km}^{-1}$$

a příčné admitance.

$$\hat{Y}_\mathrm{q} = G_0 + \mathrm{j}2\pi f C_0 = 0{,}5\cdot 10^{-6} + \mathrm{j}2\pi\cdot 800\cdot 1{,}85\cdot 10^{-3} = 5\cdot 10^{-7} + \mathrm{j}3{,}217\cdot 10^{-5} = 3{,}22\cdot 10^{-5}\mathrm{e}^{\mathrm{j}89{,}11°}\ \mathrm{S\ km}^{-1}.$$

Hodnotu činitele šíření vypočteme z definice

$$\hat{\gamma} = \sqrt{\hat{Z}_1\hat{Y}_\mathrm{q}} = \sqrt{9{,}82\mathrm{e}^{\mathrm{j}71{,}23°}\cdot 3{,}22\cdot 10^{-5}\mathrm{e}^{\mathrm{j}89{,}11°}} = \sqrt{3{,}16\cdot 10^{-4}\mathrm{e}^{\mathrm{j}160{,}34°}} = 1{,}78\cdot 10^{-2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}80{,}17°} =$$

$$= 3{,}03\cdot 10^{-3} + \mathrm{j}1{,}75\cdot 10^{-2}\ \mathrm{km}^{-1}$$

a vlnové impedance z definice

$$\hat{Z}_\mathrm{v} = \sqrt{\frac{\hat{Z}_1}{\hat{Y}_\mathrm{q}}} = \sqrt{\frac{9{,}82\mathrm{e}^{\mathrm{j}71{,}23°}}{3{,}22\cdot 10^{-5}\mathrm{e}^{\mathrm{j}89{,}11°}}} = \sqrt{305284{,}8\mathrm{e}^{-\mathrm{j}17{,}88°}} = 545{,}82 - \mathrm{j}85{,}85 = 552{,}53\mathrm{e}^{-\mathrm{j}8{,}94°}\ \Omega.$$

Činitel útlumu α určíme ze vztahu

$$\alpha = \mathrm{Re}\{\hat{\gamma}\} = \mathrm{Re}\{3{,}03\cdot 10^{-3} + \mathrm{j}1{,}75\cdot 10^{-2}\} = 3{,}03\cdot 10^{-3}\ \mathrm{km}^{-1}$$

a činitel fáze

$$\beta = \mathrm{Re}\{\hat{\gamma}\} = \mathrm{Im}\{3{,}03\cdot 10^{-3} + \mathrm{j}1{,}75\cdot 10^{-2}\} = 1{,}75\cdot 10^{-2}\ \mathrm{km}^{-1}.$$

Délku vlny určíme z definice

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{1{,}75\cdot 10^{-2}} = 359{,}04\ \mathrm{km}$$

a její fázovou rychlost ze vztahu

$$v_\mathrm{f} = \frac{2\pi f}{\beta} = \frac{2\pi 800}{1{,}75\cdot 10^{-2}} = 287231{,}33\ \mathrm{kms}^{-1}.$$

Pro kaskádní matici dlouhého vedení platí

$$[\hat{A}] = \begin{bmatrix} \cosh(\hat{\gamma}l) & \hat{Z}_\mathrm{v}\sinh(\hat{\gamma}l) \\ \dfrac{1}{\hat{Z}_\mathrm{v}}\sinh(\hat{\gamma}l) & \cosh(\hat{\gamma}l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh[(\alpha+\mathrm{j}\beta)l] & \hat{Z}_\mathrm{v}\sinh[(\alpha+\mathrm{j}\beta)l] \\ \dfrac{1}{\hat{Z}_\mathrm{v}}\sinh[(\alpha+\mathrm{j}\beta)l] & \cosh[(\alpha+\mathrm{j}\beta)l] \end{bmatrix}$$

a pro hodnoty dílčích parametrů matice

$$\hat{A}_{11} = \hat{A}_{22} = \cosh(\hat{\gamma}l) = \cosh[(3{,}03\cdot 10^{-3} + \mathrm{j}1{,}75\cdot 10^{-2})\cdot 100] = \cosh(3{,}03\cdot 10^{-1} + \mathrm{j}1{,}75) =$$

$$= \cosh(3{,}03\cdot 10^{-1})\cos(1{,}75) + \mathrm{j}\sinh(3{,}03\cdot 10^{-1})\sin(1{,}75) = -0{,}1865 + \mathrm{j}0{,}3027 = 0{,}3555\mathrm{e}^{\mathrm{j}121{,}64°}$$

$$\hat{A}_{12} = \hat{Z}_\mathrm{v}\sinh(\hat{\gamma}l) = (545{,}82 - \mathrm{j}85{,}85)\sinh\left(3{,}03\cdot 10^{-1} + \mathrm{j}1{,}75\right) =$$
$$= (545{,}82 - \mathrm{j}85{,}85)\left[\sinh(3{,}03\cdot 10^{-1})\cos(1{,}75) + \mathrm{j}\cosh(3{,}03\cdot 10^{-1})\sin(1{,}75)\right] =$$
$$= (545{,}82 - \mathrm{j}85{,}85)(-0{,}0548 + \mathrm{j}1{,}0295) = -118{,}29 + \mathrm{j}557{,}22 = 569{,}64\mathrm{e}^{\mathrm{j}101{,}99^\circ}\ \Omega$$

$$\hat{A}_{21} = \frac{1}{\hat{Z}_\mathrm{v}}\sinh(\hat{\gamma}l) = \frac{1}{545{,}82 - \mathrm{j}85{,}85}\sinh\left(3{,}03\cdot 10^{-1} + \mathrm{j}1{,}75\right) =$$
$$= \frac{1}{545{,}82 - \mathrm{j}85{,}85}\left[\sinh(3{,}03\cdot 10^{-1})\cos(1{,}75) + \mathrm{j}\cosh(3{,}03\cdot 10^{-1})\sin(1{,}75)\right] =$$
$$= \left(1{,}7879\cdot 10^{-3} - \mathrm{j}2{,}8121\cdot 10^{-4}\right)(-0{,}0548 + \mathrm{j}1{,}0295) =$$
$$= 1{,}9153\cdot 10^{-4} + \mathrm{j}1{,}8560\cdot 10^{-4} = 1{,}8659\mathrm{e}^{\mathrm{j}84{,}11^\circ}\ \mathrm{S}.$$

Vypočtené hodnoty kaskádních parametrů matice jsou

$$\left[\hat{A}\right] = \begin{bmatrix} -0{,}1865 + \mathrm{j}0{,}3027 & -118{,}29 + \mathrm{j}557{,}22 \\ 1{,}9153\cdot 10^{-4} + \mathrm{j}1{,}8560\cdot 10^{-4} & -0{,}1865 + \mathrm{j}0{,}3027 \end{bmatrix}.$$

Podmínku reciprocity kaskádního modelu pasivního dvojbranu $\hat{A}_{11}\cdot\hat{A}_{22} - \hat{A}_{21}\cdot\hat{A}_{12} = 1$, využijeme ke kontrole správnosti vypočtených hodnot kaskádních parametrů matice, kdy po dosazení získáme hodnotu

$$(-0{,}1865 + \mathrm{j}0{,}3027)\cdot(-0{,}1865 + \mathrm{j}0{,}3027) - \left(1{,}9153\cdot 10^{-4} + \mathrm{j}1{,}8560\cdot 10^{-4}\right)\cdot(-118{,}29 + \mathrm{j}557{,}22) =$$
$$= 1{,}00002217 - \mathrm{j}7{,}39\mathrm{E}\cdot 10^{-5},$$

která se liší vlivem zaokrouhlování od hodnoty 1. Absolutní chyba řešení je $2{,}2173\cdot 10^{-5}$.

K vyčíslení hodnot parametrů kaskádní matice jsme použili následující vztahy platné pro hyperbolické funkce

$$\cosh(\alpha + \mathrm{j}\beta) = \cosh(\alpha)\cosh(\mathrm{j}\beta) + \sinh(\alpha)\sinh(\mathrm{j}\beta) = \cosh(\alpha)\cos(\beta) + \mathrm{j}\sinh(\alpha)\sin(\beta),$$
$$\sinh(\alpha + \mathrm{j}\beta) = \sinh(\alpha)\cosh(\mathrm{j}\beta) + \cosh(\alpha)\sinh(\mathrm{j}\beta) = \sinh(\alpha)\cos(\beta) + \mathrm{j}cosh(\alpha)\sin(\beta).$$

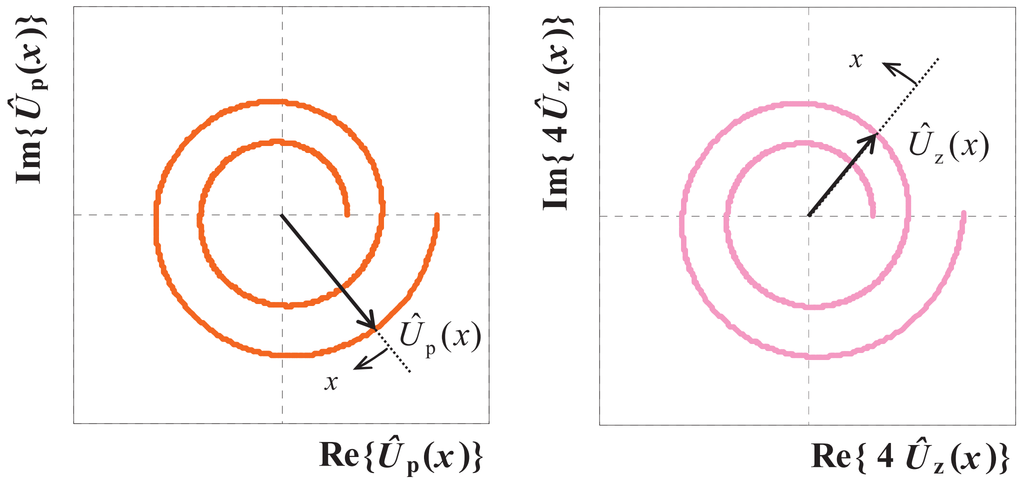
❑ Grafické zobrazení vln na vedení

Vlnové rovnice graficky znázorňujeme v komplexní rovině hodografy s proměnným parametrem, kterým je vzdálenost místa na vedení od jednoho z jeho okrajů, které jsou obecně reprezentovány geometrickým místem koncových bodů fázorů exponenciálně tlumené napěťové a proudové vlny, mají tvar spirál. Směr nárůstu parametru x je v grafech vyznačen šipkou. U přímé vlny se s rostoucí souřadnicí svinuje, u vlny zpětné se rozvinuje. Hodografy přímé a zpětné vlny napětí a proudu jsou zobrazeny na obr. 9.8 a 9.9. Výsledné vlny napětí a proudu získané superpozicí přímých a zpětných vln napětí a proudu z obr. 9.8 a 9.9 mají tvar deformovaných, svinujících se spirál a jsou zobrazeny na obr. 9.10.

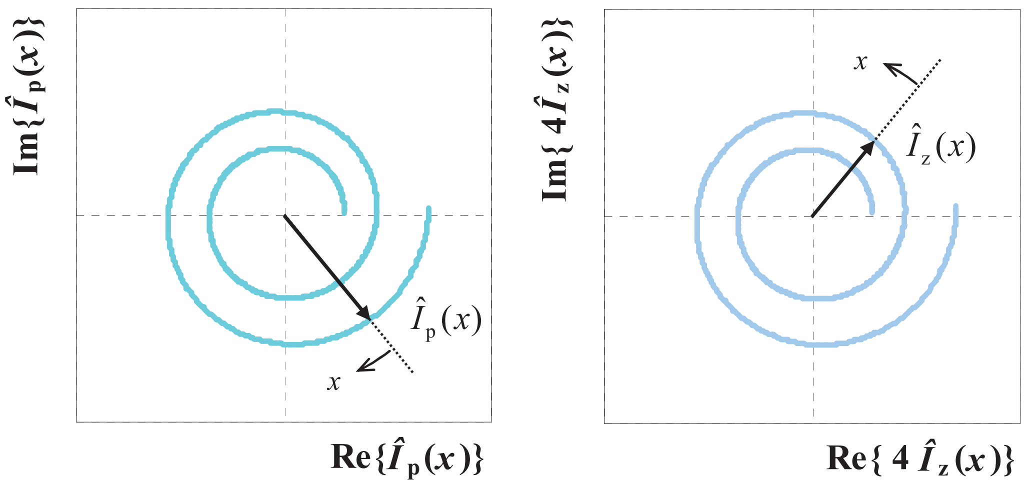
Tak jako u obvodů s nastavitelnými parametry v kapitole 4.3 závislých na parametru p, je možné hodografy vln napětí a proudu odděleně vyjádřit závislostmi jejich modulů a fází v závislosti na souřadnici x namísto parametru p. Pro velikosti přímých a zpětných vln vedení v souřadnici x platí

$$U_\mathrm{p}(x) = \left|\hat{U}_\mathrm{p}(x)\right| = \left|U_\mathrm{p}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_\mathrm{Up}}\mathrm{e}^{-\hat{\gamma}x}\right| = \left|U_\mathrm{p}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_\mathrm{Up}}\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta x}\right| = U_\mathrm{p}\,\mathrm{e}^{-\alpha x},$$

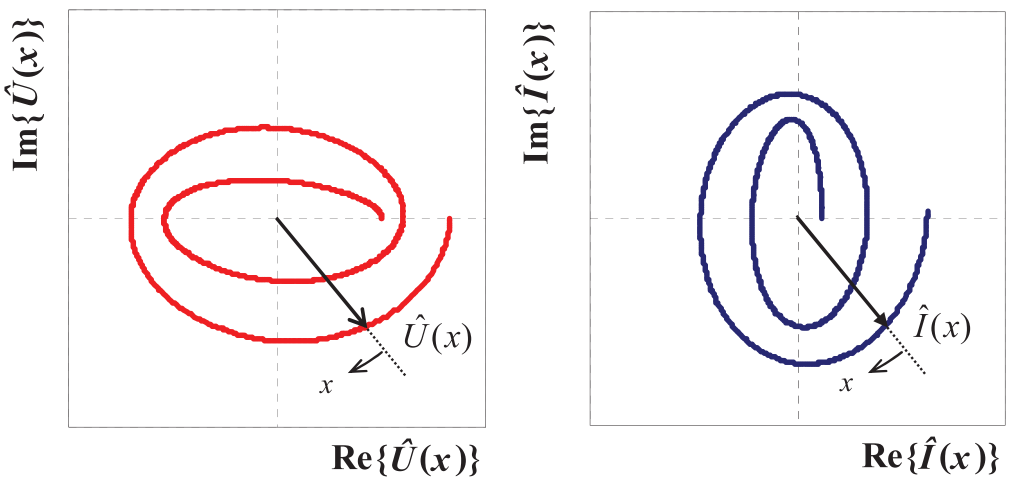
$$U_\mathrm{z}(x) = \left|\hat{U}_\mathrm{z}(x)\right| = \left|U_\mathrm{z}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_\mathrm{Uz}}\mathrm{e}^{\hat{\gamma}x}\right| = \left|U_\mathrm{z}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_\mathrm{Uz}}\mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta x}\right| = U_\mathrm{z}\,\mathrm{e}^{\alpha x},$$



Obr. 9.8 Hodograf vlny napětí vedení: přímá, zpětná vlna



Obr. 9.9 Hodograf vlny proudu vedení: přímá, zpětná vlna



Obr. 9.10 Hodograf výsledné vlny vedení: napětí, proud

$$I_{\mathrm{p}}(x)=\left|\hat{I}_{\mathrm{p}}(x)\right|=\left|I_{\mathrm{p}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_{\mathrm{Ip}}}\mathrm{e}^{-\hat{\gamma}x}\right|=\left|I_{\mathrm{p}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_{\mathrm{Ip}}}\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta x}\right|=I_{\mathrm{p}}\,\mathrm{e}^{-\alpha x},$$

$$I_{\mathrm{z}}(x)=\left|\hat{I}_{\mathrm{z}}(x)\right|=\left|I_{\mathrm{z}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_{\mathrm{Iz}}}\mathrm{e}^{\hat{\gamma}x}\right|=\left|I_{\mathrm{z}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_{\mathrm{Iz}}}\mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta x}\right|=I_{\mathrm{z}}\,\mathrm{e}^{\alpha x},$$

kde

$$U_{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{Re}\{\hat{U}_1+\hat{Z}_{\mathrm{v}}\hat{I}_1\}^2+\mathrm{Im}\{\hat{U}_1+\hat{Z}_{\mathrm{v}}\hat{I}_1\}^2}\,,\qquad U_{\mathrm{z}}=\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{Re}\{\hat{U}_1-\hat{Z}_{\mathrm{v}}\hat{I}_1\}^2+\mathrm{Im}\{\hat{U}_1-\hat{Z}_{\mathrm{v}}\hat{I}_1\}^2}\,,$$

$$I_{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{Re}\left\{\frac{\hat{U}_1}{\hat{Z}_{\mathrm{v}}}+\hat{I}_1\right\}^2+\mathrm{Im}\left\{\frac{\hat{U}_1}{\hat{Z}_{\mathrm{v}}}+\hat{I}_1\right\}^2}\,,\qquad I_{\mathrm{z}}=\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{Re}\left\{\frac{\hat{U}_1}{\hat{Z}_{\mathrm{v}}}-\hat{I}_1\right\}^2+\mathrm{Im}\left\{\frac{\hat{U}_1}{\hat{Z}_{\mathrm{v}}}-\hat{I}_1\right\}^2}\,.$$

Pro fáze přímých a zpětných vln vedení v souřadnici x platí

$$\psi_{\mathrm{p}}(x)=\arg\left(\hat{U}_{\mathrm{p}}(x)\right)=\arg\left(U_{\mathrm{p}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_{\mathrm{Up}}}\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta x}\right)=\psi_{\mathrm{Up}}-\beta x\,,$$

$$\psi_{\mathrm{z}}(x)=\arg\left(\hat{U}_{\mathrm{z}}(x)\right)=\arg\left(U_{\mathrm{z}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_{\mathrm{Uz}}}\mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta x}\right)=\psi_{\mathrm{Uz}}+\beta x\,,$$

$$\psi_{\mathrm{p}}(x)=\arg\left(\hat{I}_{\mathrm{p}}(x)\right)=\arg\left(I_{\mathrm{p}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_{\mathrm{Ip}}}\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta x}\right)=\psi_{\mathrm{Ip}}-\beta x\,,$$

$$\psi_{\mathrm{z}}(x)=\arg\left(\hat{I}_{\mathrm{z}}(x)\right)=\arg\left(I_{\mathrm{z}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_{\mathrm{Iz}}}\mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta x}\right)=\psi_{\mathrm{Iz}}+\beta x\,,$$

kde

$$\psi_{\mathrm{Up}}=\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\{\hat{U}_1+\hat{Z}_{\mathrm{v}}\hat{I}_1\}}{\mathrm{Re}\{\hat{U}_1+\hat{Z}_{\mathrm{v}}\hat{I}_1\}}\right)=\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\{\hat{Z}_1+\hat{Z}_{\mathrm{v}}\}}{\mathrm{Re}\{\hat{Z}_1+\hat{Z}_{\mathrm{v}}\}}\right)=\arctan\left(\frac{X_1+X_{\mathrm{v}}}{R_1+R_{\mathrm{v}}}\right),$$

$$\psi_{\mathrm{Uz}}=\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\{\hat{U}_1-\hat{Z}_{\mathrm{v}}\hat{I}_1\}}{\mathrm{Re}\{\hat{U}_1-\hat{Z}_{\mathrm{v}}\hat{I}_1\}}\right)=\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\{\hat{Z}_1-\hat{Z}_{\mathrm{v}}\}}{\mathrm{Re}\{\hat{Z}_1-\hat{Z}_{\mathrm{v}}\}}\right)=\arctan\left(\frac{X_1-X_{\mathrm{v}}}{R_1-R_{\mathrm{v}}}\right),$$

$$\psi_{\mathrm{Ip}}=\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\left\{\frac{\hat{U}_1}{\hat{Z}_{\mathrm{v}}}+\hat{I}_1\right\}}{\mathrm{Re}\left\{\frac{\hat{U}_1}{\hat{Z}_{\mathrm{v}}}+\hat{I}_1\right\}}\right)=\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\left\{\frac{1}{\hat{Z}_{\mathrm{v}}}+\frac{1}{\hat{Z}_1}\right\}}{\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\hat{Z}_{\mathrm{v}}}+\frac{1}{\hat{Z}_1}\right\}}\right)=\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\{\hat{Y}_{\mathrm{v}}+\hat{Y}_1\}}{\mathrm{Re}\{\hat{Y}_{\mathrm{v}}+\hat{Y}_1\}}\right)=\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\{B_{\mathrm{v}}+B_1\}}{\mathrm{Re}\{R_{\mathrm{v}}+R_1\}}\right),$$

$$\psi_{\mathrm{Iz}}=\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\left\{\frac{\hat{U}_1}{\hat{Z}_{\mathrm{v}}}-\hat{I}_1\right\}}{\mathrm{Re}\left\{\frac{\hat{U}_1}{\hat{Z}_{\mathrm{v}}}-\hat{I}_1\right\}}\right)=\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\left\{\frac{1}{\hat{Z}_{\mathrm{v}}}-\frac{1}{\hat{Z}_1}\right\}}{\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\hat{Z}_{\mathrm{v}}}-\frac{1}{\hat{Z}_1}\right\}}\right)=\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\{\hat{Y}_{\mathrm{v}}-\hat{Y}_1\}}{\mathrm{Re}\{\hat{Y}_{\mathrm{v}}-\hat{Y}_1\}}\right)=\arctan\left(\frac{B_{\mathrm{v}}-B_1}{R_{\mathrm{v}}-R_1}\right),$$

a

$$\hat{Z}_1=\frac{\hat{U}_1}{\hat{I}_1}=R_1+\mathrm{j}X_1\qquad\text{a}\qquad\hat{Y}_1=\frac{1}{\hat{Z}_1}=\frac{\hat{I}_1}{\hat{U}_1}=G_1+\mathrm{j}B_1\,,$$

což jsou vstupní impedance a admitance vedení.

Než přistoupíme k vyjádření modulu a fáze výsledných vln proveďme následující úpravy rovnic vedení, založené na vytknutí přímé vlny napětí a proudu, což nám umožní definovat činitele odrazu těchto vln v libovolném místě vedení

$$\hat{U}(x) = \hat{U}_{\mathrm{p}}(x) + \hat{U}_{\mathrm{z}}(x) = \hat{U}_{\mathrm{p}}(x)\left(1 + \frac{\hat{U}_{\mathrm{z}}(x)}{\hat{U}_{\mathrm{p}}(x)}\right) = \hat{U}_{\mathrm{p}}(x)\left(1 + \hat{\rho}_{\mathrm{U}}(x)\right),$$

$$\hat{I}(x) = \hat{I}_{\mathrm{p}}(x) - \hat{I}_{\mathrm{z}}(x) = \hat{I}_{\mathrm{p}}(x)\left(1 - \frac{\hat{I}_{\mathrm{z}}(x)}{\hat{I}_{\mathrm{p}}(x)}\right) = \hat{I}_{\mathrm{p}}(x)\left(1 - \hat{\rho}_{\mathrm{I}}(x)\right).$$

Činitel odrazu napětí je definován poměrem zpětné a přímé vlny napětí

$$\hat{\rho}_{\mathrm{U}}(x) = \frac{\hat{U}_{\mathrm{z}}(x)}{\hat{U}_{\mathrm{p}}(x)} = \frac{U_{\mathrm{z}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_{\mathrm{Uz}}}\mathrm{e}^{\hat{\gamma}x}}{U_{\mathrm{p}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_{\mathrm{Up}}}\mathrm{e}^{-\hat{\gamma}x}} = \frac{U_{\mathrm{z}}}{U_{\mathrm{p}}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\psi_{\mathrm{Uz}}-\psi_{\mathrm{Up}}\right)}\mathrm{e}^{\hat{\gamma}2x} = \frac{U_{\mathrm{z}}}{U_{\mathrm{p}}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\psi_{\mathrm{Uz}}-\psi_{\mathrm{Up}}\right)}\mathrm{e}^{\alpha 2x}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta 2x} = \frac{U_{\mathrm{z}}}{U_{\mathrm{p}}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(2\beta x+\psi_{\mathrm{Uz}}-\psi_{\mathrm{Up}}\right)}\mathrm{e}^{2\alpha x} =$$

$$= \frac{U_{\mathrm{z}}}{U_{\mathrm{p}}}\mathrm{e}^{2\alpha x}\left[\cos\left(2\beta x + \psi_{\mathrm{Uz}} - \psi_{\mathrm{Up}}\right) + \mathrm{j}\sin\left(2\beta x + \psi_{\mathrm{Uz}} - \psi_{\mathrm{Up}}\right)\right]$$

a činitel odrazu proudu poměrem zpětné a přímé vlny proudu

$$\hat{\rho}_{\mathrm{I}}(x) = \frac{\hat{I}_{\mathrm{z}}(x)}{\hat{I}_{\mathrm{p}}(x)} = \frac{I_{\mathrm{z}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_{\mathrm{Iz}}}\mathrm{e}^{\hat{\gamma}x}}{I_{\mathrm{p}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_{\mathrm{Ip}}}\mathrm{e}^{-\hat{\gamma}x}} = \frac{I_{\mathrm{z}}}{I_{\mathrm{p}}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\psi_{\mathrm{Iz}}-\psi_{\mathrm{Ip}}\right)}\mathrm{e}^{\hat{\gamma}2x} = \frac{I_{\mathrm{z}}}{I_{\mathrm{p}}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\psi_{\mathrm{Iz}}-\psi_{\mathrm{Ip}}\right)}\mathrm{e}^{\alpha 2x}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta 2x} = \frac{I_{\mathrm{z}}}{I_{\mathrm{p}}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(2\beta x+\psi_{\mathrm{Uz}}-\psi_{\mathrm{Up}}\right)}\mathrm{e}^{2\alpha x} =$$

$$= \frac{I_{\mathrm{z}}}{I_{\mathrm{p}}}\mathrm{e}^{2\alpha x}\left[\cos\left(2\beta x + \psi_{\mathrm{Iz}} - \psi_{\mathrm{Ip}}\right) + \mathrm{j}\sin\left(2\beta x + \psi_{\mathrm{Iz}} - \psi_{\mathrm{Ip}}\right)\right],$$

do kterých jsme dosadili sekundární parametry vedení.

K odrazům dochází na obou koncích (okrajích) vedení, tedy v místech $x = 0$ m a $x = l$. Podmínku odrazu vlny napětí a proudu na začátku vedení snadno odvodíme dosazením do definic činitelů odrazu v místě $x = 0$ m

$$\hat{\rho}_{\mathrm{U}_1} = \lim_{x\to 0}\hat{\rho}_{\mathrm{U}}(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\hat{U}_{\mathrm{z}}(x)}{\hat{U}_{\mathrm{p}}(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\left(\hat{U}_1 - \hat{Z}_{\mathrm{v}}\hat{I}_1\right)\mathrm{e}^{\hat{\gamma}x}}{\frac{1}{2}\left(\hat{U}_1 + \hat{Z}_{\mathrm{v}}\hat{I}_1\right)\mathrm{e}^{-\hat{\gamma}x}} = \frac{\hat{U}_1 - \hat{Z}_{\mathrm{v}}\hat{I}_1}{\hat{U}_1 + \hat{Z}_{\mathrm{v}}\hat{I}_1} = \frac{\hat{I}_1}{\hat{I}_1}\frac{\frac{\hat{U}_1}{\hat{I}_1} - \hat{Z}_{\mathrm{v}}}{\frac{\hat{U}_1}{\hat{I}_1} + \hat{Z}_{\mathrm{v}}} = \frac{\hat{Z}_1 - \hat{Z}_{\mathrm{v}}}{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_{\mathrm{v}}} = \frac{\hat{Z}_{\mathrm{i}} - \hat{Z}_{\mathrm{v}}}{\hat{Z}_{\mathrm{i}} + \hat{Z}_{\mathrm{v}}},$$

$$\hat{\rho}_{\mathrm{I}_1} = \lim_{x\to 0}\hat{\rho}_{\mathrm{I}}(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\hat{I}_{\mathrm{z}}(x)}{\hat{I}_{\mathrm{p}}(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}\left(\frac{\hat{U}_1}{\hat{Z}_{\mathrm{v}}} - \hat{I}_1\right)\mathrm{e}^{\hat{\gamma}x}}{\frac{1}{2}\left(\frac{\hat{U}_1}{\hat{Z}_{\mathrm{v}}} + \hat{I}_1\right)\mathrm{e}^{-\hat{\gamma}x}} = -\frac{\frac{\hat{U}_1}{\hat{Z}_{\mathrm{v}}} - \hat{I}_1}{\frac{\hat{U}_1}{\hat{Z}_{\mathrm{v}}} + \hat{I}_1} = -\frac{\frac{\hat{I}_1}{\hat{Z}_{\mathrm{v}}}\frac{\hat{U}_1}{\hat{I}_1} - \hat{Z}_{\mathrm{v}}}{\frac{\hat{I}_1}{\hat{Z}_{\mathrm{v}}}\frac{\hat{U}_1}{\hat{I}_1} + \hat{Z}_{\mathrm{v}}} = -\frac{\hat{Z}_1 - \hat{Z}_{\mathrm{v}}}{\hat{Z}_1 + \hat{Z}_{\mathrm{v}}} = -\frac{\hat{Z}_{\mathrm{i}} - \hat{Z}_{\mathrm{v}}}{\hat{Z}_{\mathrm{i}} + \hat{Z}_{\mathrm{v}}},$$

ze kterých je zřejmé, že platí

$$\hat{\rho}_{\mathrm{I}} = -\hat{\rho}_{\mathrm{U}}.$$

Podmínky odrazu vlny napětí a proudu na konci vedení bychom snáze odvodili z činitelů odrazu definovaných v souřadnici s, kde souřadnici $x = l$ odpovídá hodnota $s = 0$ m. Postup by byl analogický a získali bychom následující definice

$$\hat{\rho}_{\mathrm{U}_2} = \frac{\hat{Z}_{\mathrm{s}} - \hat{Z}_{\mathrm{v}}}{\hat{Z}_{\mathrm{s}} + \hat{Z}_{\mathrm{v}}} \qquad \text{a} \qquad \hat{\rho}_{\mathrm{I}_2} = -\frac{\hat{Z}_{\mathrm{s}} - \hat{Z}_{\mathrm{v}}}{\hat{Z}_{\mathrm{s}} + \hat{Z}_{\mathrm{v}}}.$$

Z definic činitelů odrazů plyne, že k odrazům nedochází jedině u přizpůsobené přenosové cesty, kdy jsou tyto činitele nulové. Zdůrazněme tedy, nebude-li splněna rovnost $\hat{Z}_{\mathrm{s}} = \hat{Z}_{\mathrm{v}}$ a současně i $\hat{Z}_{\mathrm{i}} = \hat{Z}_{\mathrm{v}}$, bude docházet k opakovaným odrazům vln na vedení na obou jeho okrajích.

Za účelem odvození výsledných funkcí vln napětí a proudu na vedení, určeme nejprve modul a fázi činitele odrazu zvětšeného o jedničku, tedy výrazu

$$\hat{r}_{\mathrm{U}}(x)=1+\hat{\rho}_{\mathrm{U}}(x)=1+\frac{U_{\mathrm{z}}}{U_{\mathrm{p}}}\mathrm{e}^{2\alpha x}\left[\cos\left(2\beta x+\psi_{\mathrm{Uz}}-\psi_{\mathrm{Up}}\right)+\mathrm{j}\sin\left(2\beta x+\psi_{\mathrm{Uz}}-\psi_{\mathrm{Up}}\right)\right]=$$

$$=1+\frac{U_{\mathrm{z}}}{U_{\mathrm{p}}}\mathrm{e}^{2\alpha x}\cos\left(2\beta x+\psi_{\mathrm{Uz}}-\psi_{\mathrm{Up}}\right)+\mathrm{j}\frac{U_{\mathrm{z}}}{U_{\mathrm{p}}}\mathrm{e}^{2\alpha x}\sin\left(2\beta x+\psi_{\mathrm{Uz}}-\psi_{\mathrm{Up}}\right).$$

Modul (velikost) tohoto členu je dán

$$r_{\mathrm{U}}(x)=\left|1+\hat{\rho}_{\mathrm{U}}(x)\right|=\sqrt{\left(1+\frac{U_{\mathrm{z}}}{U_{\mathrm{p}}}\mathrm{e}^{2\alpha x}\cos\left(2\beta x+\psi_{\mathrm{Uz}}-\psi_{\mathrm{Up}}\right)\right)^{2}+\left(\frac{U_{\mathrm{z}}}{U_{\mathrm{p}}}\mathrm{e}^{2\alpha x}\sin\left(2\beta x+\psi_{\mathrm{Uz}}-\psi_{\mathrm{Up}}\right)\right)^{2}}=$$

$$=\sqrt{1+2\frac{U_{\mathrm{z}}}{U_{\mathrm{p}}}\mathrm{e}^{2\alpha x}\cos\left(2\beta x+\psi_{\mathrm{Uz}}-\psi_{\mathrm{Up}}\right)+\left(\frac{U_{\mathrm{z}}}{U_{\mathrm{p}}}\mathrm{e}^{2\alpha x}\right)^{2}\cos^{2}\left(2\beta x+\psi_{\mathrm{Uz}}-\psi_{\mathrm{Up}}\right)+\left(\frac{U_{\mathrm{z}}}{U_{\mathrm{p}}}\mathrm{e}^{2\alpha x}\right)^{2}\sin^{2}\left(2\beta x+\psi_{\mathrm{Uz}}-\psi_{\mathrm{Up}}\right)}=$$

$$=\sqrt{1+2\frac{U_{\mathrm{z}}}{U_{\mathrm{p}}}\mathrm{e}^{2\alpha x}\cos\left(2\beta x+\psi_{\mathrm{Uz}}-\psi_{\mathrm{Up}}\right)+\left(\frac{U_{\mathrm{z}}}{U_{\mathrm{p}}}\mathrm{e}^{2\alpha x}\right)^{2}\left[\cos^{2}\left(2\beta x+\psi_{\mathrm{Uz}}-\psi_{\mathrm{Up}}\right)+\sin^{2}\left(2\beta x+\psi_{\mathrm{Uz}}-\psi_{\mathrm{Up}}\right)\right]}=$$

$$=\sqrt{1+2\frac{U_{\mathrm{z}}}{U_{\mathrm{p}}}\mathrm{e}^{2\alpha x}\cos\left(2\beta x+\psi_{\mathrm{Uz}}-\psi_{\mathrm{Up}}\right)+\left(\frac{U_{\mathrm{z}}}{U_{\mathrm{p}}}\mathrm{e}^{2\alpha x}\right)^{2}}$$

a jeho fáze

$$\psi_{\mathrm{r_U}}(x)=\arg\left(1+\hat{\rho}_{\mathrm{U}}(x)\right)=\operatorname{arctan}\left(\frac{\dfrac{U_{\mathrm{z}}}{U_{\mathrm{p}}}\mathrm{e}^{2\alpha x}\sin\left(2\beta x+\psi_{\mathrm{Uz}}-\psi_{\mathrm{Up}}\right)}{1+\dfrac{U_{\mathrm{z}}}{U_{\mathrm{p}}}\mathrm{e}^{2\alpha x}\cos\left(2\beta x+\psi_{\mathrm{Uz}}-\psi_{\mathrm{Up}}\right)}\right).$$

Analogickým postupem bychom získali pro velikost a fázi činitel odrazu proudu

$$r_{\mathrm{I}}(x)=\left|1-\hat{\rho}_{\mathrm{I}}(x)\right|=\sqrt{1-2\frac{I_{\mathrm{z}}}{I_{\mathrm{p}}}\mathrm{e}^{2\alpha x}\cos\left(2\beta x+\psi_{\mathrm{Iz}}-\psi_{\mathrm{Ip}}\right)+\left(\frac{I_{\mathrm{z}}}{I_{\mathrm{p}}}\mathrm{e}^{2\alpha x}\right)^{2}},$$

$$\psi_{\mathrm{r_I}}(x)=\arg\left(1-\hat{\rho}_{\mathrm{I}}(x)\right)=\operatorname{arctan}\left(\frac{\dfrac{I_{\mathrm{z}}}{I_{\mathrm{p}}}\mathrm{e}^{2\alpha x}\sin\left(2\beta x+\psi_{\mathrm{Iz}}-\psi_{\mathrm{Ip}}\right)}{1-\dfrac{I_{\mathrm{z}}}{I_{\mathrm{p}}}\mathrm{e}^{2\alpha x}\cos\left(2\beta x+\psi_{\mathrm{Iz}}-\psi_{\mathrm{Ip}}\right)}\right).$$

Po dosazení do rovnic vedení dostaneme

$$\hat{U}(x)=\hat{U}_{\mathrm{p}}(x)\left(1+\hat{\rho}_{\mathrm{U}}(x)\right)=\hat{U}_{\mathrm{p}}(x)\hat{r}_{\mathrm{U}}(x)=U_{\mathrm{p}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_{\mathrm{Up}}}\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta x}r_{\mathrm{U}}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_{\mathrm{r_U}}(x)},$$

$$\hat{I}(x)=\hat{I}_{\mathrm{p}}(x)\left(1-\hat{\rho}_{\mathrm{I}}(x)\right)=\hat{I}_{\mathrm{p}}(x)\hat{r}_{\mathrm{I}}(x)=I_{\mathrm{p}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_{\mathrm{Ip}}}\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta x}r_{\mathrm{I}}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_{\mathrm{r_I}}(x)}.$$

Výsledná vlna napětí má modul a fázi

$$U(x)=U_{\mathrm p}\mathrm e^{-\alpha x}r_{\mathrm U}(x)=U_{\mathrm p}\mathrm e^{-\alpha x}\sqrt{1+2\frac{U_{\mathrm z}}{U_{\mathrm p}}\mathrm e^{2\alpha x}\cos\left(2\beta x+\psi_{\mathrm{Uz}}-\psi_{\mathrm{Up}}\right)+\left(\frac{U_{\mathrm z}}{U_{\mathrm p}}\mathrm e^{2\alpha x}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{U_{\mathrm p}^2\mathrm e^{-2\alpha x}\left[1+2\frac{U_{\mathrm z}}{U_{\mathrm p}}\mathrm e^{2\alpha x}\cos\left(2\beta x+\psi_{\mathrm{Uz}}-\psi_{\mathrm{Up}}\right)+\left(\frac{U_{\mathrm z}}{U_{\mathrm p}}\mathrm e^{2\alpha x}\right)^2\right]}=$$

$$=\sqrt{U_{\mathrm p}^2\mathrm e^{-2\alpha x}+2U_{\mathrm p}U_{\mathrm z}\cos\left(2\beta x+\psi_{\mathrm{Uz}}-\psi_{\mathrm{Up}}\right)+U_{\mathrm z}^2\mathrm e^{2\alpha x}}$$

$$\psi_{\mathrm U}(x)=\arg\left(\hat U(x)\right)=-\beta x+\psi_{r_{\mathrm U}}(x)+\psi_{\mathrm{Up}}=-\beta x+\arctan\left(\frac{\frac{U_{\mathrm z}}{U_{\mathrm p}}\mathrm e^{2\alpha x}\sin\left(2\beta x+\psi_{\mathrm{Uz}}-\psi_{\mathrm{Up}}\right)}{1+\frac{U_{\mathrm z}}{U_{\mathrm p}}\mathrm e^{2\alpha x}\cos\left(2\beta x+\psi_{\mathrm{Uz}}-\psi_{\mathrm{Up}}\right)}\right)+\psi_{\mathrm{Up}}.$$

Modul a fáze výsledné vlny proudu je pak

$$I(x)=I_{\mathrm p}\mathrm e^{-\alpha x}r_{\mathrm I}(x)=\sqrt{I_{\mathrm p}^2\mathrm e^{-2\alpha x}-2I_{\mathrm p}I_{\mathrm z}\cos\left(2\beta x+\psi_{\mathrm{Iz}}-\psi_{\mathrm{Ip}}\right)+I_{\mathrm z}^2\mathrm e^{2\alpha x}},$$

$$\psi_{\mathrm I}(x)=\arg\left(\hat I(x)\right)=-\beta x+\psi_{r_{\mathrm I}}(x)+\psi_{\mathrm{Ip}}=-\beta x+\arctan\left(\frac{\frac{I_{\mathrm z}}{I_{\mathrm p}}\mathrm e^{2\alpha x}\sin\left(2\beta x+\psi_{\mathrm{Iz}}-\psi_{\mathrm{Ip}}\right)}{1-\frac{I_{\mathrm z}}{I_{\mathrm p}}\mathrm e^{2\alpha x}\cos\left(2\beta x+\psi_{\mathrm{Iz}}-\psi_{\mathrm{Ip}}\right)}\right)+\psi_{\mathrm{Ip}}.$$

Na rozdíl od přímých a zpětných vln jsou výsledné velikosti a fáze vln složitou funkcí parametrů vedení a souřadnice x. Právě vlivem přítomnosti členů s goniometrickými funkcemi jsou výsledné průběhy zvlněné (deformované), takže grafy velikostí modulů v závislosti na souřadnici x nejsou popsány hladkou exponenciální funkcí a grafy fází lineární funkcí, což znamená, že změna fáze v čase, tedy fázová rychlost vlny $v_{\mathrm f}$ není konstantní a rychlost postupu výsledné vlny je proměnná.

Příklad 9.3.

Dokažte, že fázová rychlost přímé vlny napětí je konstantní.

♦

Argument (fáze) přímé vlny napětí v závislosti na souřadnici x je lineární funkce daná rovnicí

$$\psi_{\mathrm{Up}}(x)=-\beta x+\psi_{\mathrm{Up}}.$$

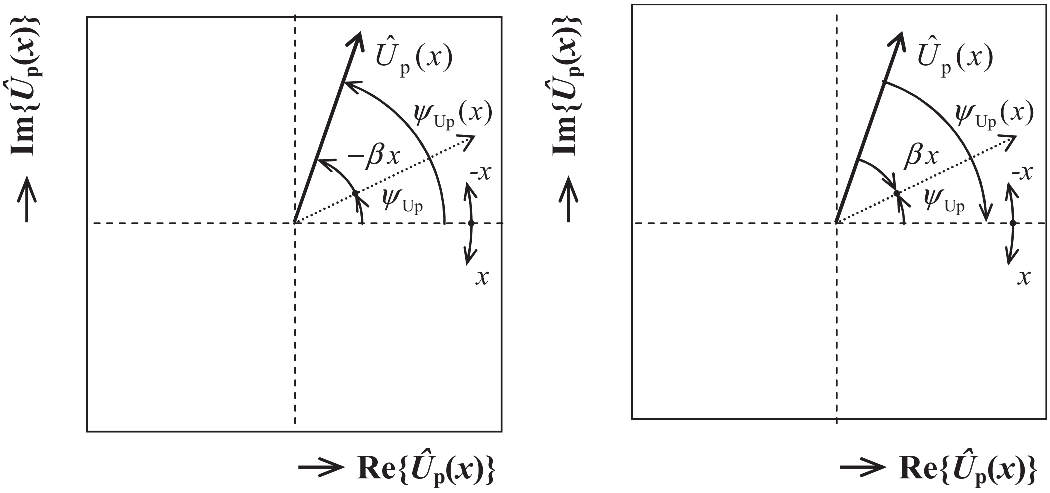
Znaménka členů rovnice jsou určená vůči kladnému smyslu nárůstu argumentu fázoru $\hat U_{\mathrm p}(x)$ v komplexní rovině, který je totožný se smyslem oběhu orientovaným proti směru chodu hodinových ručiček, tedy ve směru nárůstu souřadnice ($-x$) podle obr. 9.11 vlevo. Přímá vlna napětí ale postupuje od počátku ke konci vedení ve směru osy x, takže je výhodné změnit směr referenčního oběhu na opačný, který se pak shoduje se směrem nárůstu souřadnice x podle obr. 9.11 vpravo a odpovídá smyslu oběhu, orientovanému ve směru hodinových ručiček. Rovnice potom přejde do tvaru

$$\psi_{\mathrm{Up}}(x)=\beta x-\psi_{\mathrm{Up}}.$$

Bude-li místo x měnit svoji polohu v čase t, rovnici zapíšeme

$$\psi_{\mathrm{Up}}(x,t)=\beta x(t)-\psi_{\mathrm{Up}},$$

po jejímž derivování získáme fázovou úhlovou rychlost

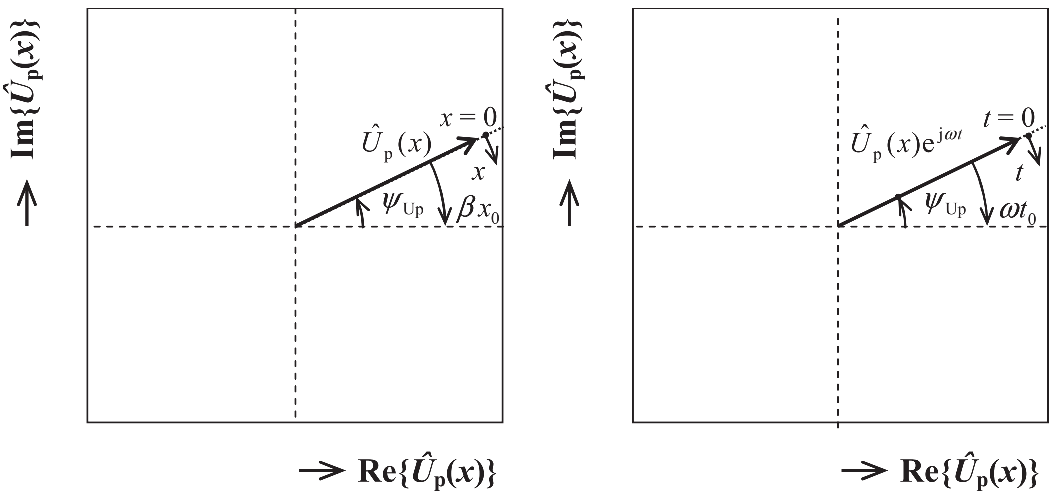


Obr. 9.11 Argument přímé vlny napětí v komplexní rovině, příklad 9.3

$$\omega_{\mathrm{f}} = \frac{\partial \psi_{\mathrm{Up}}(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial\left(\beta x(t) - \psi_{\mathrm{Up}}\right)}{\partial t} = \beta \frac{\partial x(x,t)}{\partial t} = \beta v_{\mathrm{f}}\,,$$

kde v_{f} je fázová rychlost přímé vlny napětí.

V harmonicky ustáleném stavu se místo x v čase t pohybuje podél dlouhého vedení rovnoměrným pohybem konstantní rychlostí v_{f}. Tomuto rovnoměrnému pohybu bodu po vedení odpovídá v komplexní rovině rovnoměrně otáčivý pohyb koncového bodu fázoru $\hat{U}_{\mathrm{p}}(x)$, který se pohybuje konstantní úhlovou rychlostí ω_{f} v čase t, která je rovna úhlovému kmitočtu ω zdroje připojenému k vedení. Otáčivý pohyb v komplexní rovině popisujeme komplexorem $\hat{U}_{\mathrm{p}}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$, kterému odpovídá natočení v čase o úhel ωt. Zjednodušená situace je zachycena na obr. 9.12 vlevo pro polohu fázoru $\hat{U}_{\mathrm{p}}(x)$ s počáteční fází ψ_{Up}. Místu vzdálenému od počátku o hodnotu x_0 odpovídá v komplexní rovině její reálná osa a úhel $\psi_{\mathrm{Up}}(x_0) = \psi_{\mathrm{Up}}(x_0) = -\psi_{\mathrm{Up}} = \beta x_0$. O stejný úhel se natočí fázor $\hat{U}_{\mathrm{p}}(x)$ obíhající v komplexní rovině úhlovou rychlostí totožnou s hodnotou úhlového kmitočtu ω za čas t_0, za který dorazí vlna do místa o souřadnici x_0, viz na obr. 9.12 vpravo. Po odečtení druhé rovnice od první platí



Obr. 9.12 Argument přímé vlny napětí v komplexní rovině: změna se souřadnicí x,změna v čase t, příklad 9.3

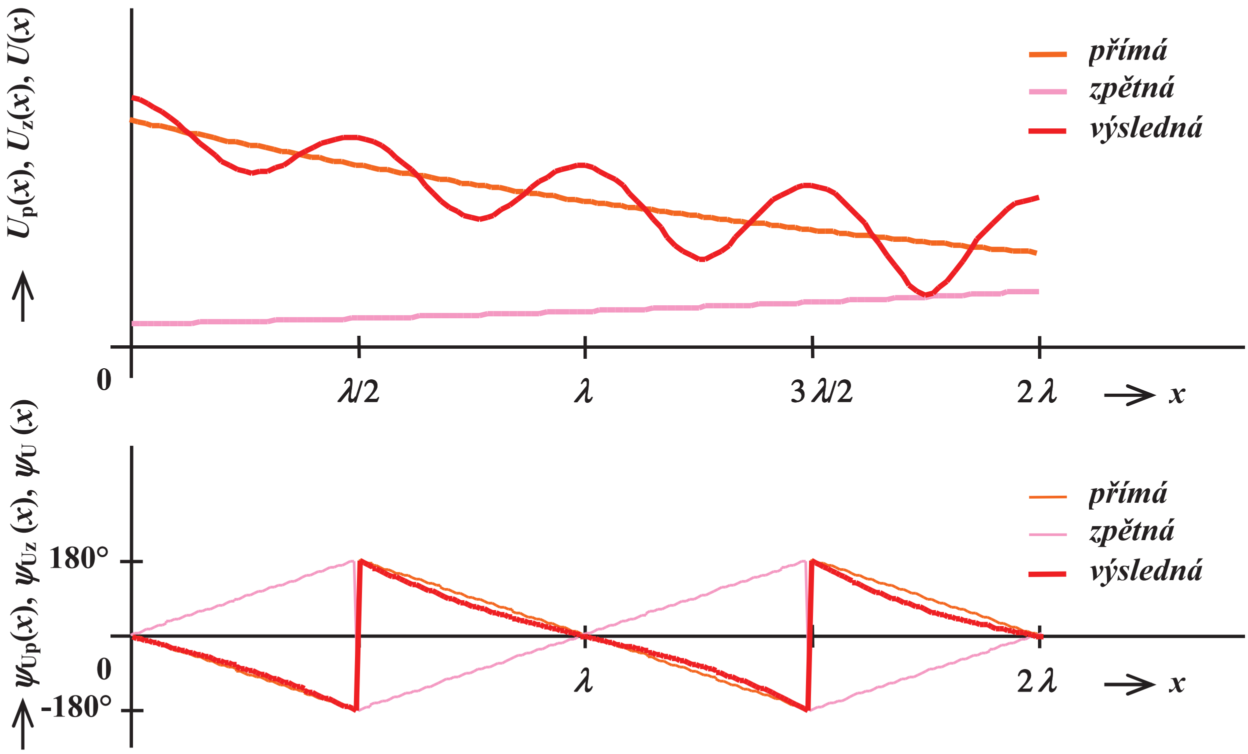
$$\omega t_0 - \beta x_0 = 0$$

a tedy i

$$v_f = \frac{x_0}{t_0} = \frac{\omega}{\beta}.$$

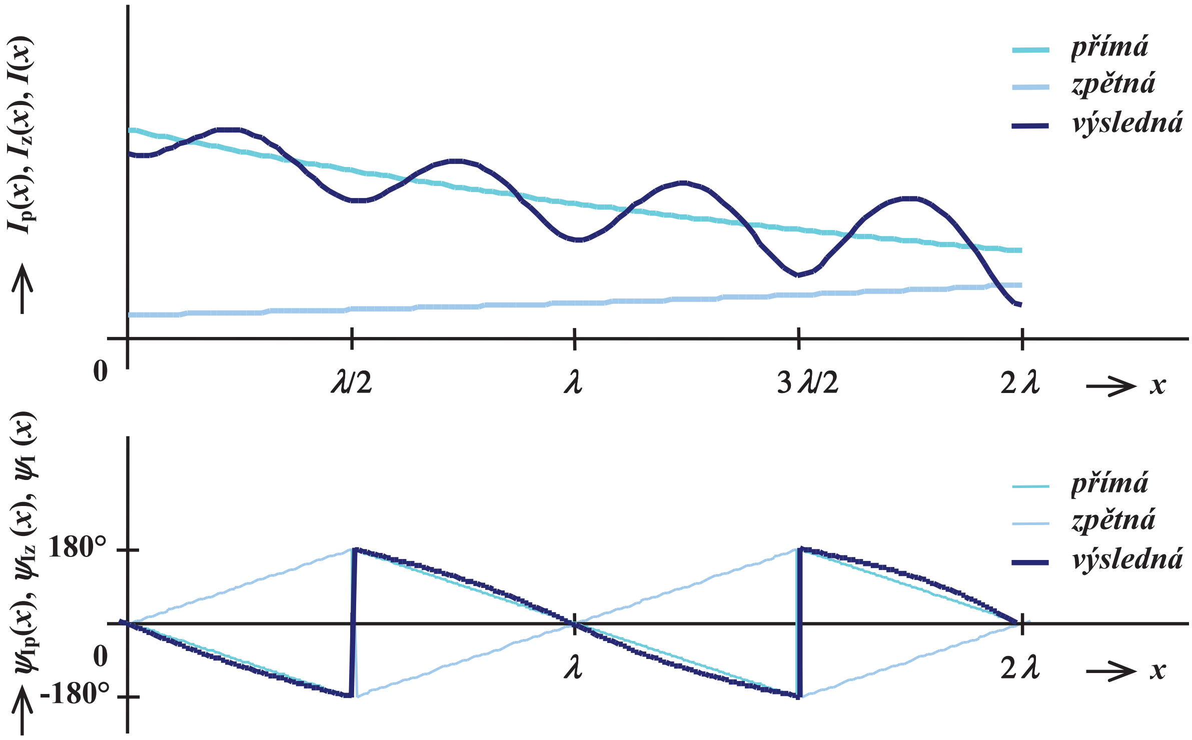
Stejným způsobem bychom postupovali i při odvození fázové rychlosti v_f z rovnice fáze přímé vlny proudu $\psi_{Ip}(x) = -\beta x + \psi_{Ip} = -\beta x + \psi_{Ip}$, ale i při odvození fázové rychlosti zpětné vlny napětí a proudu, které mají stejnou hodnotu fázové rychlosti jako přímá vlna napětí a proudu, ale opačné znaménko.

Moduly a fáze vln napětí a proudu jsou nakresleny na obr. 9.13 a 9.14.



Obr. 9.13 Modul a fáze vln napětí podél vedení: přímá vlna, zpětná vlna, výsledná vlna

Z grafů modulů výsledných vln napětí a proudu v horní části obr. 9.13 a 9.14 je patrné, že na vedení existují místa, kde jsou velikosti napětí nebo proudů menší než na konci vedení nebo mají větší velikosti než na počátku vedení. Obecně superpozicí přímé a zpětné vlny napětí a proudu tak vznikají na dlouhém vedení místa, kde jsou napětí a proudy v jeho určitých místech menší než v místech vzdálenějších a dochází na něm k tzv. Ferrantiho jevu. Lokální maxima napětí a proudu podél vedení nastávají v místech kde je jejich fáze nulová, minima jsou od nich vzdálena o $\lambda/4$. Maxima/minima napětí jsou vzdáleny od maxim/minim proudu o $\lambda/4$. Zvlnění velikostí napětí a proudu je důsledkem „přelévání" energie mezi $\lambda/4$ vlnnými úseky dlouhého vedení v čase. Při lokálním poklesu napětí přechází energie elektrické složky elektromagnetického pole vedení do složky magnetické, čímž dochází k lokálnímu nárůstu proudu vedení.



Obr. 9.14 Modul a fáze vln proudu podél vedení: přímá vlna, zpětná vlna, výsledná vlna

Časové závislosti vln na vedení v harmonicky ustáleném stavu získáme vynásobením fázorů vln na vedení komplexní funkcí $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ a vyčleněním buď reálné nebo imaginární části příslušného komplexoru reprezentujícího vlnu na vedení. V případě vyčlenění imaginární části jsou okamžité hodnoty přímých, zpětných a výsledných vln napětí a proudů definovány

$$u_\mathrm{p}(x,t) = \mathrm{Im}\left\{\hat{U}_\mathrm{p}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\} = \mathrm{Im}\left\{U_\mathrm{p}\,\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(-\beta x+\omega t+\psi_\mathrm{Up}\right)}\right\} = \sqrt{2}U_\mathrm{p}\mathrm{e}^{-\alpha x}\sin(-\beta x+\omega t+\psi_\mathrm{Up}),$$

$$u_\mathrm{z}(x,t) = \mathrm{Im}\left\{\hat{U}_\mathrm{z}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\} = \mathrm{Im}\left\{U_\mathrm{z}\,\mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\beta x+\omega t+\psi_\mathrm{Uz}\right)}\right\} = \sqrt{2}U_\mathrm{p}\mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x+\omega t+\psi_\mathrm{Uz}),$$

$$i_\mathrm{p}(x,t) = \mathrm{Im}\left\{\hat{I}_\mathrm{p}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\} = \mathrm{Im}\left\{I_\mathrm{p}\,\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(-\beta x+\omega t+\psi_\mathrm{Ip}\right)}\right\} = \sqrt{2}I_\mathrm{p}\mathrm{e}^{-\alpha x}\sin(-\beta x+\omega t+\psi_\mathrm{Ip}),$$

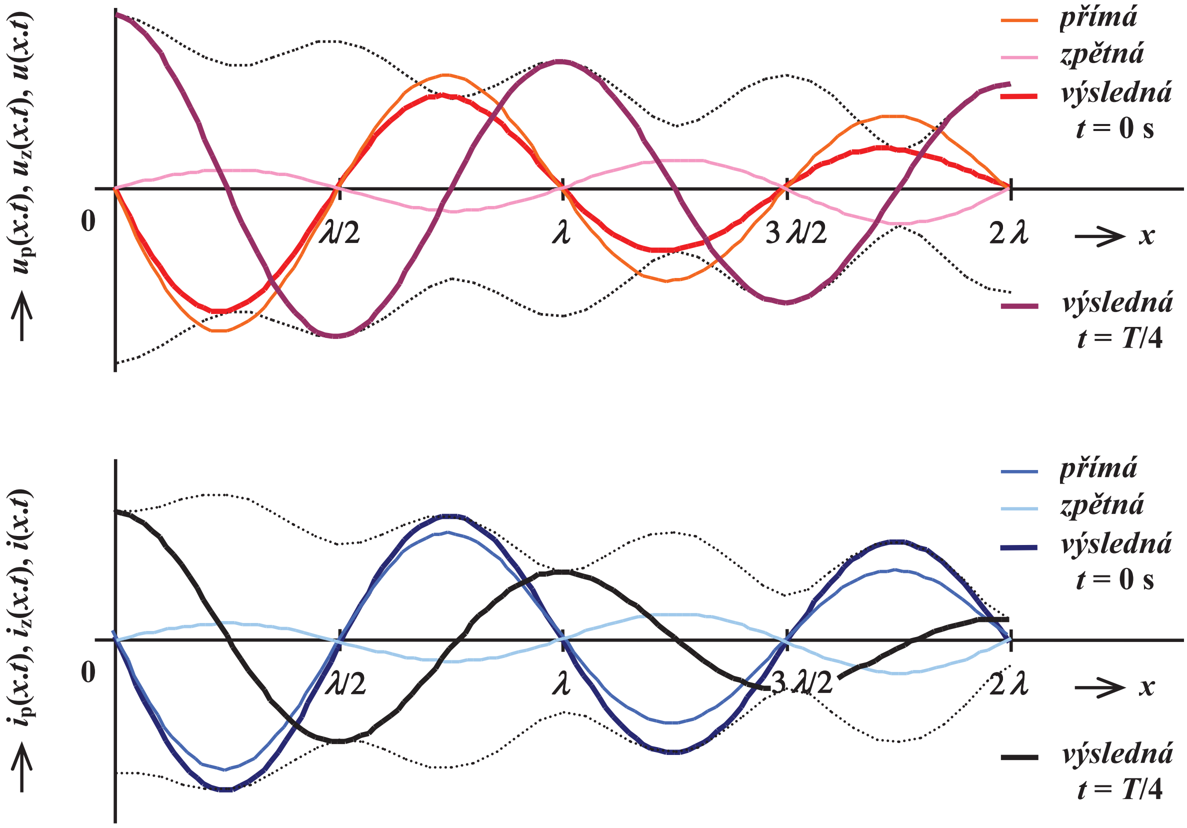
$$i_\mathrm{z}(x,t) = \mathrm{Im}\left\{\hat{I}_\mathrm{z}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\} = \mathrm{Im}\left\{I_\mathrm{z}\,\mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\beta x+\omega t+\psi_\mathrm{Iz}\right)}\right\} = \sqrt{2}\hat{I}_\mathrm{p}\mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x+\omega t+\psi_\mathrm{Iz}).$$

$$u(x,t) = u_\mathrm{p}(x,t)+u_\mathrm{z}(x,t) = \mathrm{Im}\left\{\hat{U}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\} = \mathrm{Im}\left\{U(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\psi_\mathrm{U}(x)+\omega t)}\right\} = \sqrt{2}U(x)\sin\left(\psi_\mathrm{U}(x)+\omega t\right),$$

$$i(x,t) = i_\mathrm{p}(x,t)-i_\mathrm{z}(x,t) = \mathrm{Im}\left\{\hat{I}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\} = \mathrm{Im}\left\{I(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\psi_\mathrm{I}(x)+\omega t)}\right\} = \sqrt{2}I(x)\sin\left(\psi_\mathrm{I}(x)+\omega t\right)$$

a zobrazeny na obr. 9.15 při zatížení vedení ohmickou zátěží. Z obr. 9.15 je vidět, že za dobu čtvrt periody se vlna napětí a proudu posunula ve směru osy x o vzdálenost $\lambda/4$ od počátku dlouhého vedení. Vlna napětí i proudu se s časem posunuje podél vedení fázovou rychlostí v_f a mění své rozložení v rámci „tečkovaných obálek“ daných modulem jejich výsledné vlny, viz obr. 9.13 a 9.14.

Vlna tak dorazí do daného místa x vedení za čas $t = \dfrac{x}{v_\mathrm{f}}$.



Obr. 9.15 Rozložení výsledné vlny napětí a proudu podél vedení, odporová zátěž: čas t = 0 s, čas t = T/4

Σ Shrnutí pojmů 9.1.

Analýzu dlouhého vedení v harmonicky ustáleném stavu provádíme v oboru komplexních hodnot zavedením sekundárních parametrů vedení, kterými jsou činitel šíření γ a vlnová impedance dlouhého vedení $\hat{Z}_{\mathrm{v}}$. Pro usnadnění porozumění jevů na vedení zavádíme složkový tvar činitele šíření. Jeho reálnou složku nazýváme činitel útlumu α, který je mírou exponenciálního tlumení velikosti vlnění podél vedení a imaginární složku činitel fáze β, který je mírou natočení fáze vlnění na jednotkovém úseku vedení. Činitel fáze definuje délku vlny λ na vedení, na jejíž relaci vůči délce vedení můžeme rozhodnout, budeme-li muset modelovat vedení jako obvod s prostorově rozloženými parametry. Zvláštním případem vedení je impedančně přizpůsobené vedení, které je na začátku i konci zatížené právě vlnovou impedancí. Takovéto vedení jako celek můžeme modelovat ekvivalentním souměrným, reciprocitním dvojbranem a jeho obrazovými parametry. Míru odrazu vln vedení na jeho okrajích definují činitele odrazu napětí $\hat{\rho}_{\mathrm{U}}$ a proudu $\hat{\rho}_{\mathrm{I}}$. Oba tyto činitele mají co do hodnoty stejné velikosti, avšak se liší znaménkem. K odrazům nedochází na přizpůsobeném vedení, kdy na vedení existuje pouze přímá vlna napětí a proudu. Rozložení vln na vedení znázorňujeme jednak hodografy ve tvaru spirály, jednak velikostmi a fázemi vln napětí a proudů podél vedení a prostorově časovými závislostmi vln napětí a proudů při konstantním parametru, kterým je daný čas t. Jev, kdy velikosti vlny napětí a proudu v určitých místech vedení mají hodnoty menší než v místech vzdálenějších, nazýváme Ferrantiho jev. K tomuto jevu nedochází u přizpůsobeného a nekonečně dlouhého vedení. Lokální maxima a minima velikostí vlny napětí a proudu jsou od sebe vzdálena o čtvrtinu vlnové délky vlnění. Lineární fázi má pouze přímá nebo zpětná vlna napětí nebo proudu, nikoli vlna výsledná.

Přímá nebo výsledná vlna postupuje v čase podél vedení fázovou rychlostí v_f, takže do daného místa x vedení dorazí v čase $t = \dfrac{x}{v_f}$.

Otázky 9.1.

1. Co jsou to sekundární parametry vedení?
2. Jak souvisí měrná podélná impedance a měrná příčná admitance vedení se sekundárními parametry vedení?
3. Jak je definován činitel útlumu a činitel fáze a co oba dva udávají?
4. Jaký je vztah mezi vlnovou délkou, fázovou rychlostí a činitelem fáze?
5. Které funkce definují ekvivalentní dvojbranové parametry vedení?
6. Co udává vlnová impedance vedení?
7. Jaký je vztah mezi sekundárními obrazovými parametry dvojbranu a dlouhého vedení?
8. Co je to přizpůsobené vedení?
9. Proč zavádíme při analýze rovnic vedení novou souřadnici s vztaženou k jeho konci?
10. Jaká posoudíte, že vedení délky l budete muset modelovat jako obvod s prostorově rozloženými parametry?
11. Jaký je vztah mezi činitelem odrazu napětí a proudu?
12. Jakou hodnotu mají činitele odrazu napětí a proudu přizpůsobeného vedení?
13. Za jakých podmínek bude docházet na vedení k mnohonásobným odrazům?
14. Jak graficky zobrazujeme vlny na vedení?
15. Co je to Ferrantiho jev?
16. Existují u přizpůsobeného vedení lokální extrémy velikostí výsledných vln na vedení?
17. Proč není fáze výsledného průběhu přímé a zpětné vlny napětí a proudu lineárně závislá na souřadnici x?
18. Jakou vzdálenost urazí vlna na vedení za čas odpovídající čtvrtině periody kmitočtu vlnění?

Úloha k řešení 9.1.

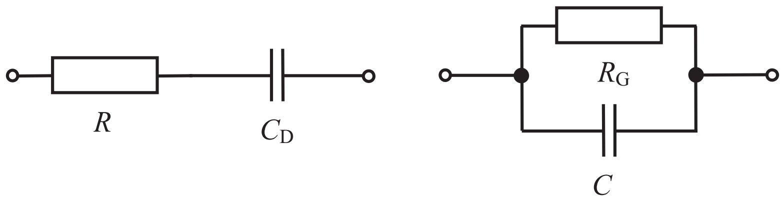
Určete ekvivalentní hodnoty náhradního zapojení zatěžovací impedance vedení z příkladu 9.2, tak aby vedení bylo impedančně přizpůsobené.

Řešení:

Aby vedení bylo přizpůsobené musí být na jeho konci připojena impedance

$$\hat{Z}_s = \hat{Z}_v = 545{,}82 - j85{,}85\,\Omega\,,$$

kterou můžeme zrealizovat, jelikož má kapacitní charakter, ekvivalentním náhradním sériovým zapojením rezistoru R a kapacitoru C_D nebo ekvivalentním náhradním paralelním zapojením rezistoru R_G a kapacitoru C, viz obr. 9.16.



Obr. 9.16 Ekvivalentní schéma přizpůsobené zátěže: sériové náhradní zapojení, paralelní náhradní zapojení, úloha k řešení 9.1

Hodnoty náhradních parametrů sériového modelu vypočítáme následujícím způsobem

$$\hat{Z}_{\mathrm{s}} = \hat{Z}_{\mathrm{v}} = R + \mathrm{j}X\,, \qquad R = \mathrm{Re}\{\hat{Z}_{\mathrm{s}}\} = 545{,}82\,\Omega\,, \qquad X = \mathrm{Im}\{\hat{Z}_{\mathrm{s}}\} = 85{,}85\,\Omega\,,$$

$$C_{\mathrm{D}} = \frac{1}{2\pi f X_{\mathrm{s}}} = \frac{1}{2\pi 800 \cdot 85{,}85} = 2{,}3156\,\mu\mathrm{F}\,.$$

K určení hodnot náhradních parametrů paralelního modelu musíme nejprve vypočítat vlnovou admitanci

$$\hat{Y}_{\mathrm{s}} = \hat{Y}_{\mathrm{v}} = G + \mathrm{j}B = \frac{1}{\hat{Z}_{\mathrm{v}}} = \frac{1}{545{,}82 - \mathrm{j}85{,}85} = \frac{1}{545{,}82 - \mathrm{j}85{,}85}\,\frac{545{,}82 + \mathrm{j}85{,}85}{545{,}82 + \mathrm{j}85{,}85} = \frac{545{,}82 + \mathrm{j}85{,}85}{545{,}82^2 + 85{,}85^2} =$$

$$= \frac{545{,}82 + \mathrm{j}85{,}85}{305289{,}69} = 1{,}788 \cdot 10^{-3} + \mathrm{j}281{,}21 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{S}$$

a poté analogickým postupem

$$G = \mathrm{Re}\{\hat{Y}_{\mathrm{s}}\} = 1{,}788 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{S}\,, \qquad B = \mathrm{Im}\{\hat{Y}_{\mathrm{s}}\} = 281{,}21 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{S}\,,$$

$$R_{\mathrm{G}} = \frac{1}{G} = \frac{1}{1{,}788 \cdot 10^{-3}} = 559{,}28\,\Omega\,, \qquad C = \frac{B}{2\pi f} = \frac{B}{2\pi 800} = \frac{281{,}21 \cdot 10^{-6}}{2\pi 800} = 55{,}94\,\mathrm{nF}\,.$$

? Závěrečný test

1. Určete činný výkon optimálně provozovaného trojfázového obvodu, znáte-li efektivní hodnotu fázového napětí souměrného trojfázového zdroje U = 230 V, efektivní hodnotu linkového proudu I = 10 A a účiník souměrné trojfázové zátěže 0,9.

   a) 6900 W

   b) 6310 W

   c) 6210 W

2. Určete okamžitou hodnotu třetí fáze trojfázové vyvážené soustavy napětí, znáte-li okamžité hodnoty napětí první a druhé fáze 162,635 V.

   a) 0 V

   b) -325,27 V

   c) -162,635 V

3. Určete efektivní hodnotu napětí mezi uzlem zdroje a zátěže souměrného trojfázového obvodu, u které došlo k přerušení jedné fáze zátěže. Efektivní hodnota souměrného zdroje je 230 V a odporová zátěž má hodnotu 10 Ω.

   a) 115 V

   b) 120 V

   c) 125 V

4. Určete natočení fázoru sdruženého napětí $\hat{U}_{BC}$ souměrného zdroje s efektivní hodnotou fázového napětí U = 230 V, víte-li, že soustava napětí je sousledná.

   a) -30°

   b) -60°

   c) -90°

5. O kolik se změní příkon souměrné odporové zátěže o hodnotě 10 Ω zapojené do trojúhelníku, zdvojnásobí-li se její hodnota v jedné její fázi? Zátěž je napájena ze souměrného trojfázového zdroje zapojeného do hvězdy o efektivní hodnotě napětí U = 230 V.

   a) 21660 W

   b) 7935 W

   c) 2645 W

6. Nestandardním spojením fází dvou dílčích souměrných trojfázových zdrojů zapojených do lomené hvězdy o stejné efektivní hodnotě fázového napětí může být efektivní hodnota výsledného fázového napětí lomené hvězdy několika násobkem fázového napětí dílčího zdroje, a to

   a) 1 násobkem

   b) $\sqrt{3}$ násobkem

   c) $\sqrt{2}$ násobkem

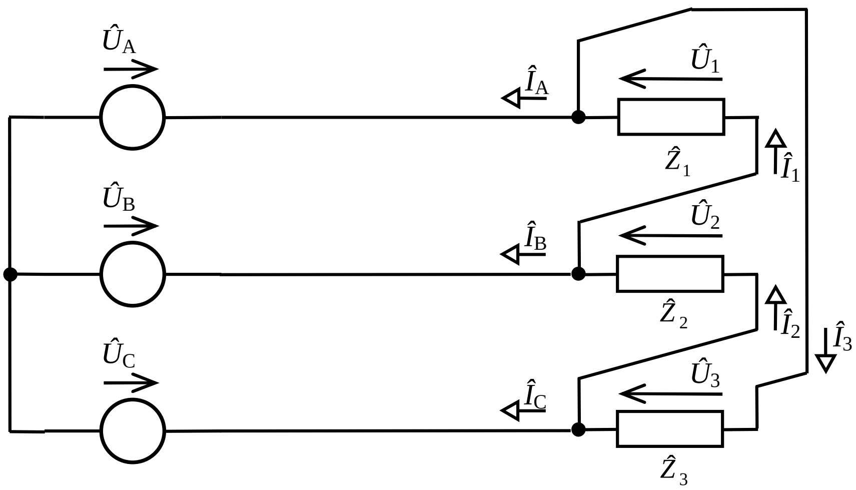
7. Kolikrát se změní příkon souměrné odporové zátěže o hodnotě 10 Ω zapojené do hvězdy, dojde-li k přerušení její první fáze? Zátěž je třemi vodiči připojena k souměrnému trojfázovému zdroji, který je zapojen do hvězdy a má efektivní hodnotu fázového napětí U = 230 V.

   a) 2/3-krát

b) 1/2-krát

c) 1/3-krát

8. Určete impedanci třetí fáze zátěže zapojené do trojúhelníka, znáte-li síťové proudy $\hat{I}_B = -(20\cdot\sqrt{3}+24) + 52j$, $\hat{I}_C = (-20\cdot\sqrt{3} + 24) - 52j$ a fázový proud $\hat{I}_1 = 20\cdot(\sqrt{3} + j)$ A. Zátěž je napájena ze souměrného trojfázového zdroje zapojeného do hvězdy o efektivní hodnotě sdruženého napětí U = 400 V.



a) 8+6j Ω

b) 6+8j Ω

c) 10 Ω

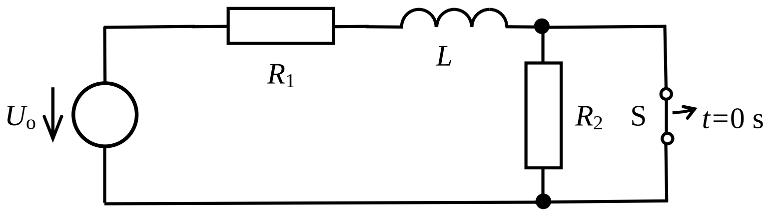
9. Určete velikost proudu nulového vodiče, došlo-li k záměně nulového a fázového vodiče na straně zátěže zapojené do hvězdy. Induktivní zátěž je souměrná a má jmenovité parametry: proud I_n = 10 A, příkon P_n = 5,52 kW a účiník cos φ_n = 0,8 a je čtyřmi vodiči připojena k souměrnému trojfázovému zdroji, který je zapojen do hvězdy a má efektivní hodnotu fázového napětí U = 230 V.

a) 10 A

b) $10\cdot\sqrt{3}$ A

c) 40 A

10. Určete počáteční hodnotu směrnice stavové veličiny po rozpojení spínače S, znáte-li U_o = 10 V, R_1 = 20 Ω, R_2 = 100 Ω, L = 50 mH.

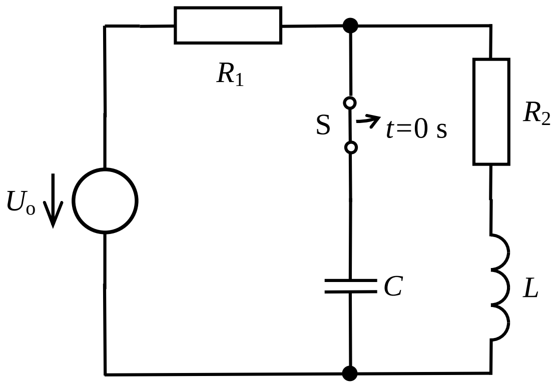


a) 1 kA s^{-1}

b) 0,5 kA s^{-1}

c) 0,1 kA s^{-1}

11. Určete počáteční hodnotu proudu induktoru po rozpojení spínače S, znáte-li hodnoty U_o = 50 V, R_1 = 10 kΩ, R_2 = 40 kΩ, C = 100 μF, L = 10 mH.

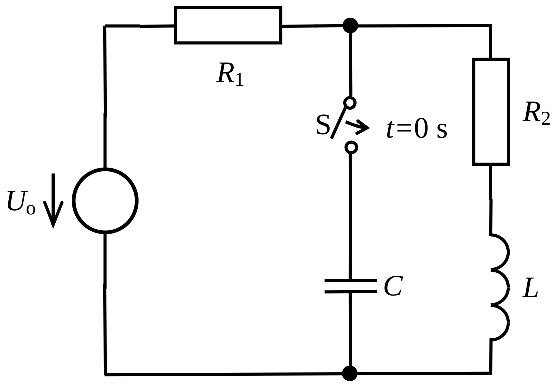


a) 5 mA

b) 1,25 mA

c) 1 mA

12. Určete ustálenou hodnotu napětí kapacitoru po sepnutí spínače S, znáte-li hodnoty U_o = 5 V, R_1 = 10 kΩ, R_2 = 40 kΩ, C = 100 μF, L = 10 mH.

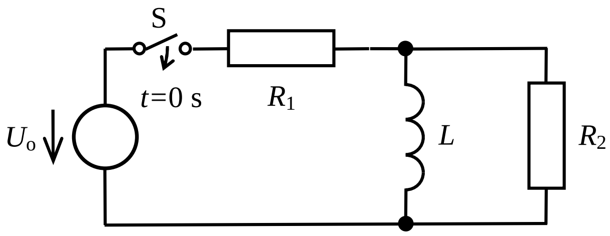


a) 1 V

b) 4 V

c) 5 V

13. Určete časovou konstantu obvodu po sepnutí spínače S, znáte-li hodnoty U_o = 5 V, R_1 = 10 Ω, R_2 = 40 Ω, L = 10 mH.

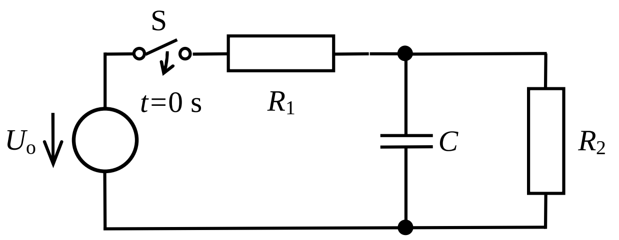


a) 1 ms

b) 1,25 ms

c) 4 ms

14. Určete počáteční hodnotu směrnice stavové veličiny po sepnutí spínače S, znáte-li U_0 = 1 V, R_1 = 10 kΩ, R_2 = 40 kΩ, C = 100 μF.

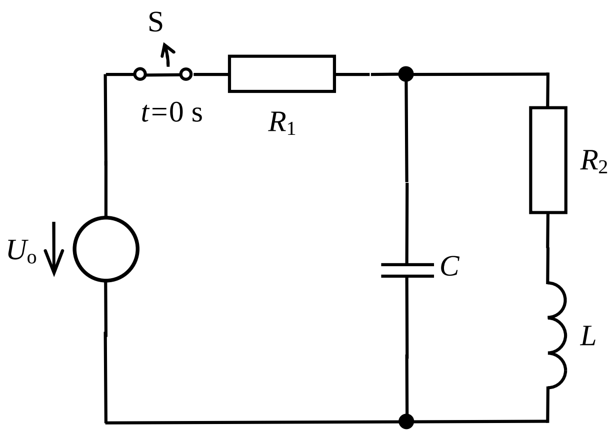


a) 1 Vs^{-1}

b) 1,25 Vs^{-1}

c) 0,2 Vs^{-1}

15. Určete vlastní kmitočet obvodu po rozpojení spínače S, znáte-li hodnoty U_o = 10 V, R_1 = 40 Ω, R_2 = 10 Ω, C = 10 μF, L = 40 mH.

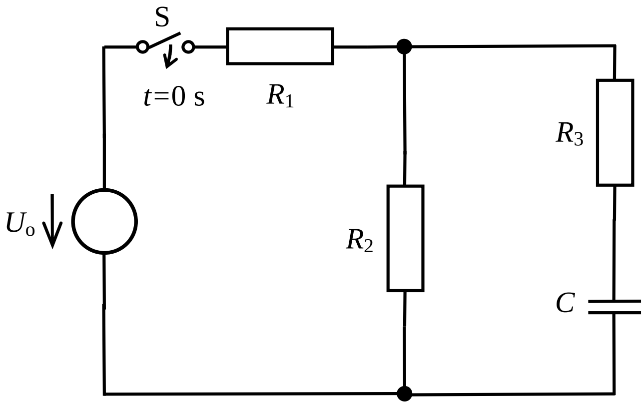


a) 750/π rad s^{-1}

b) 50·√3·√83/π rad s^{-1}

c) 125·√3·√53/2/π rad s^{-1}

16. Která z rovnic udává průběh napětí stavové veličiny v přechodném ději. Známé parametry obvodu jsou U_o = 10 V, R_1 = 10 kΩ, R_2 = 15 kΩ, R_3 = 14 kΩ, C = 20 μF, $u_C(0)$ = 3 V.

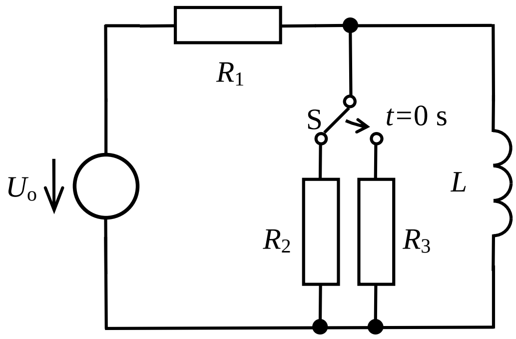


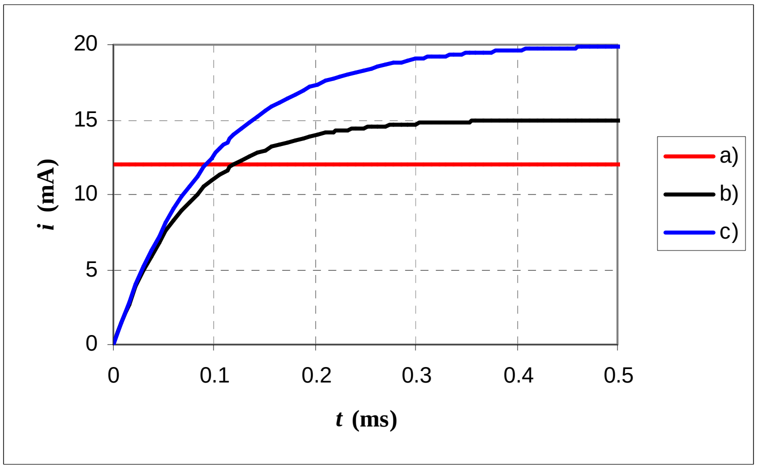
a) $6 - 3 \cdot e^{-25t}$

b) $6 - 6 \cdot e^{-25t}$

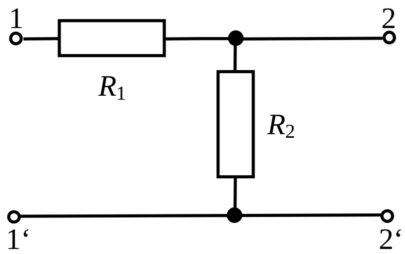
c) $6 + 3 \cdot e^{-25t}$

17. Který z grafů odpovídá průběhu stavové veličiny obvodu po přepnutí spínače, znáte-li parametry obvodu jsou U_o = 12 V, R_1 = 1 kΩ, R_2 = 4 kΩ, R_3 = 1,5 kΩ, L = 60 mH.





18. Určete koeficient napěťového přenosu kaskádního modelu dvojbranu z obrázku, znáte-li hodnoty R_1 = 10 kΩ, R_2 = 40 kΩ.

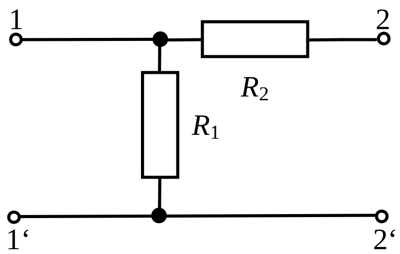


a) 0,2

b) 0,8

c) 1,25

19. Určete koeficient proudového přenosu kaskádního modelu dvojbranu z obrázku, znáte-li hodnoty R_1 = 10 kΩ, R_2 = 40 kΩ.

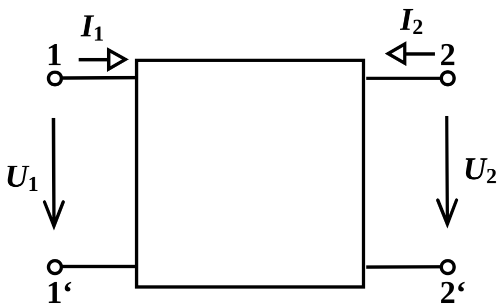


a) 5

b) 1,25

c) 0,8

20. Jakou hodnotu má proud druhé brány dvojbranu napájeného ze stejnosměrného zdroje, znáte-li U_1 = 12 V, I_1 = 0,5 A, U_2 = 2 V.

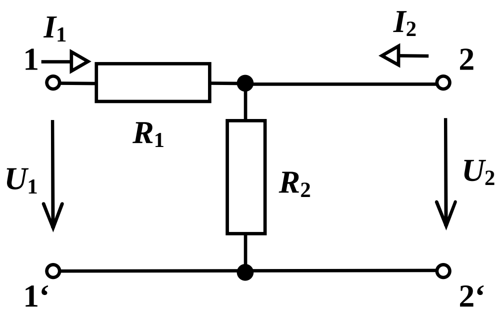


a) proud nelze určit

b) 3 A

c) -3 A

21. Která z rovnic nepřísluší smíšenému modelu dvojbranu napájeného ze stejnosměrného zdroje, znáte-li U_1 = 10 V, R_1 = 100 Ω, R_2 = 400 Ω.



a) $I_1 = 0{,}002 \cdot U_1 - 0{,}8 \cdot I_2$

b) $I_2 = -I_1 + 0{,}0025 \cdot U_2$

c) $I_1 = 1{,}25 \cdot U_2 - 100 \cdot I_2$

22. Určete hodnotu odporu souměrného odporového dvojbranu typu T-článku, znáte-li hodnoty konstant $\hat{A}_{11} = 2$, $\hat{A}_{12} = 3000$.

   a) 500 Ω

   b) 1 kΩ

   c) 3 kΩ

23. Určete hodnotu kaskádního parametru $\hat{A}_{12}$ výsledné kaskádní matice dvojbranu, který je tvořen dvěma kaskádně řazenými články stejných parametrů s hodnotami parametrů dílčí kaskádní matice $\hat{A}_{11} = 3$, $\hat{A}_{12} = 1000$, $\hat{A}_{21} = 0{,}002$, $\hat{A}_{22} = 1$.

   a) 4000

   b) 3

   c) 0,008

24. Určete hodnotu vstupní impedance gyrátoru, je-li gyrační odpor 1 kΩ a kapacitní reaktance má hodnotu 100 Ω.

   a) 100j Ω

   b) 10000j Ω

   c) -100j Ω

25. Jakou hodnotou impedance je zatížen ideální transformátor, má-li jeho vstupní impedance kapacitní charakter a velikost 10 Ω, znáte-li jeho primární napětí 230 V a sekundární napětí 10 V.

   a) -10j

   b) 10j

   c) 10

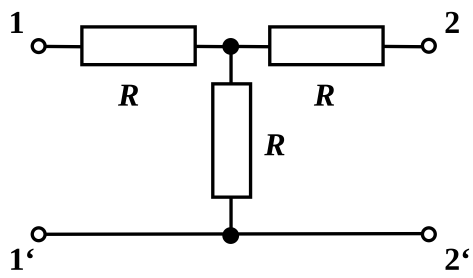
26. Určete efektivní hodnotu výstupní veličiny řízeného zdroje, víte-li, že efektivní hodnota vstupní (řídící) veličiny má jednotkovou hodnotu a je-li přenosová admitance 10 S.

   a) 0,1 V

   b) 10 V

   c) 10 A

27. Určete hodnotu přenosové impedance kaskádního modelu dvojbranu z obrázku pro R = 1 Ω.

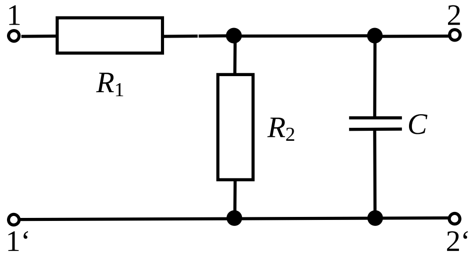


a) 1,5 Ω

b) 2 Ω

c) 3 Ω

28. Určete hodnotu lomového kmitočtu obvodu, znáte-li hodnoty R_1 = 6 kΩ, R_2 = 30 kΩ, C = 200 nF.

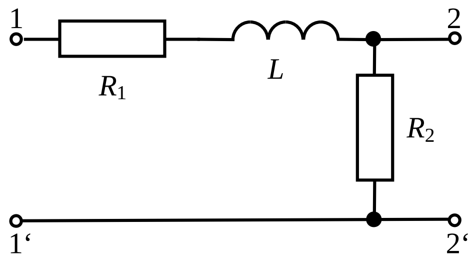


a) 625/9/π Hz

b) 500/π Hz

c) 1000/π Hz

29. Určete hodnotu inverzního napěťového přenosu při nulovém kmitočtu, znáte-li hodnoty R_1 = 10 Ω, R_2 = 40 Ω, L = 100 mH.

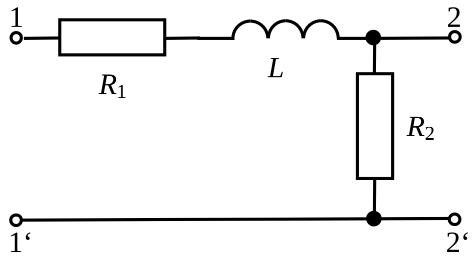


a) 1,25

b) 0,8

c) 0,2

30. Určete hodnotu napěťového přenosu v decibelech při úhlovém kmitočtu ω = 5 krad s^{-1}, znáte-li hodnoty R_1 = 10 Ω, R_2 = 40 Ω, L = 100 mH.

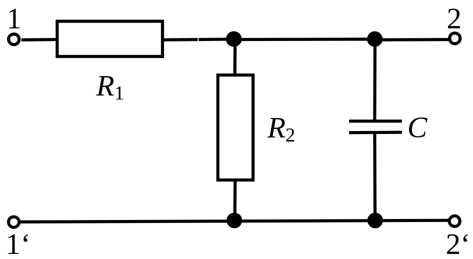


a) 20 dB

b) -21,98 dB

c) -1,94 dB

31. Určete hodnotu fáze napěťového přenosu při úhlovém kmitočtu $\omega = 10$ krad s^{-1}, znáte-li R_1 = 6 kΩ, R_2 = 30 kΩ, C = 200 nF

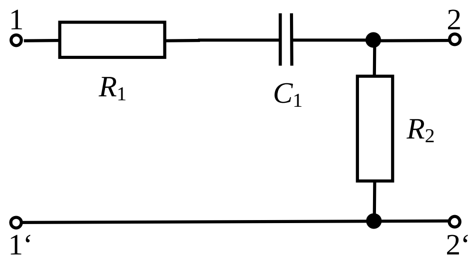


a) 84,3°

b) -45°

c) -84,3°

32. Která z komplexních přenosových funkcí odpovídá napěťovému přenosu obvodu z obrázku, znáte-li hodnoty R_1 = 33 kΩ, R_2 = 47 k Ω, C_1 = 10 μF.

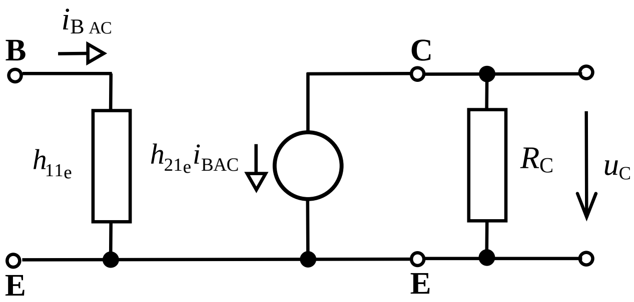


a) $\dfrac{1+0{,}33\,\mathrm{j}\omega}{1+0{,}8\,\mathrm{j}\omega}$

b) $\dfrac{0{,}33\,\mathrm{j}\omega}{1+0{,}8\,\mathrm{j}\omega}$

c) $\dfrac{0{,}47\,\mathrm{j}\omega}{1+0{,}8\,\mathrm{j}\omega}$

33. Určete efektivní hodnotu kolektorového napětí malosignálového modelu bipolárního tranzistoru, znáte-li $i_{\mathrm{B\,AC}} = 10^{-6}\sin(1000\pi t)$, hodnoty $h_{11\mathrm{e}}$ = 1 kΩ, $h_{21\mathrm{e}}$ = 150, R_{C} = 1 kΩ.

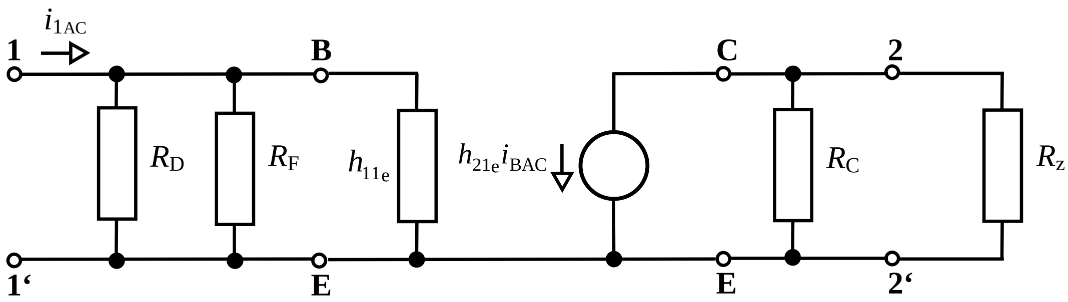


a) 3/2 V

b) 3/2/√2 V

c) 3/2·√2

34. Určete hodnotu vstupního odporu malosignálového modelu bipolárního tranzistoru, znáte-li $i_{1AC} = 10^{-6}\sin(1000\pi t)$, hodnoty h_{11e} = 1,125 kΩ, h_{21e} = 150, R_D = 9 kΩ, R_F = 1 kΩ, R_C = 1 kΩ.



a) 500 Ω

b) 900 Ω

c) 1125 Ω

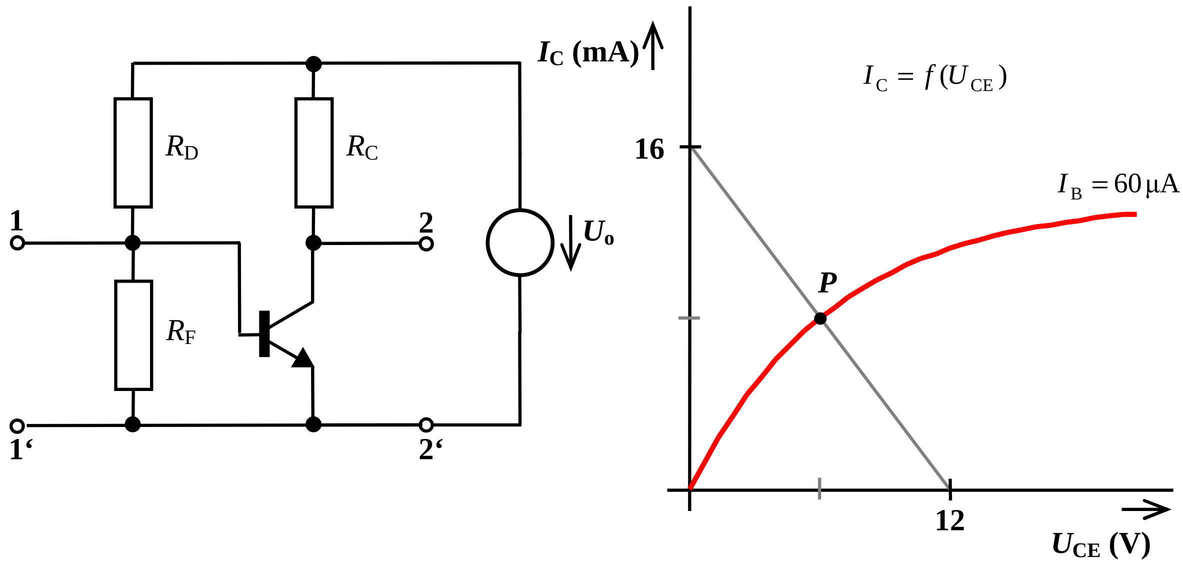
35. Určete hodnotu diferenčního parametru h_{21e}, znáte-li v okolí pracovního bodu převodní charakteristiky souřadnice dvou bodů s hodnotami P1[60µA;12mA], P2[100µA;19mA]

a) 200

b) 190

c) 175

36. Určete hodnotu kolektorového odporu tranzistoru z údajů jeho výstupní charakteristiky na obrázku. Pracovní bod tranzistoru je nastaven tak, aby bylo možné maximálně využít rozkmit výstupních veličin tranzistoru.

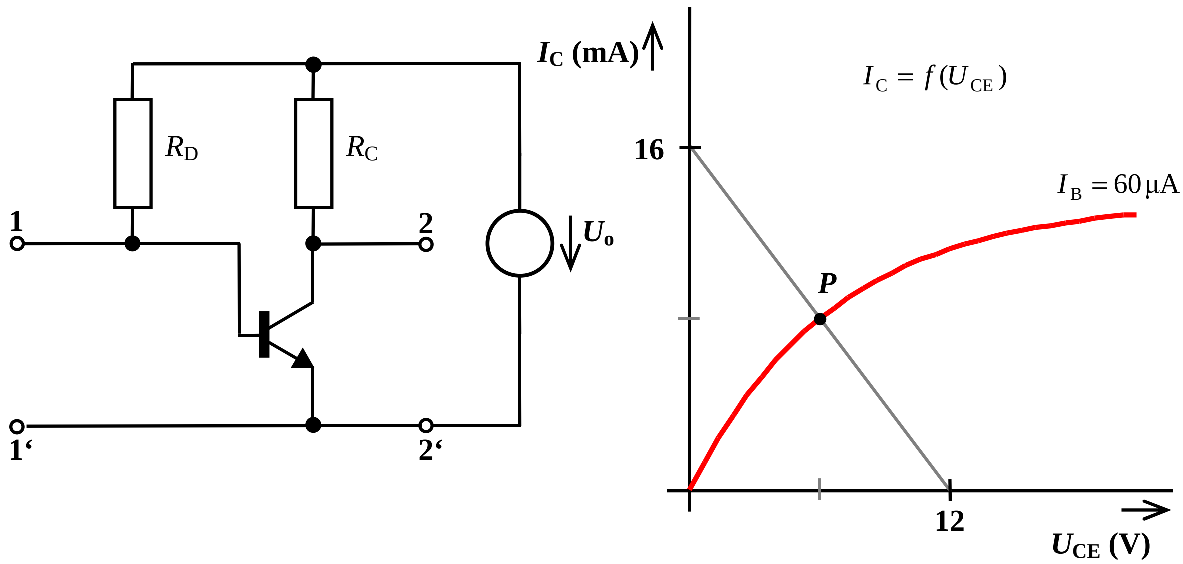


a) 375

b) 750

c) 1500

37. Určete hodnotu odporu R_D proudově buzeného tranzistoru z údajů uvedených v jeho výstupní charakteristice na obrázku. Pracovní bod tranzistoru je nastaven tak, aby bylo možné maximálně využít rozkmit výstupních veličin tranzistoru. Předpokládejte, že hodnota napětí U_{BE} = 0,75 V.

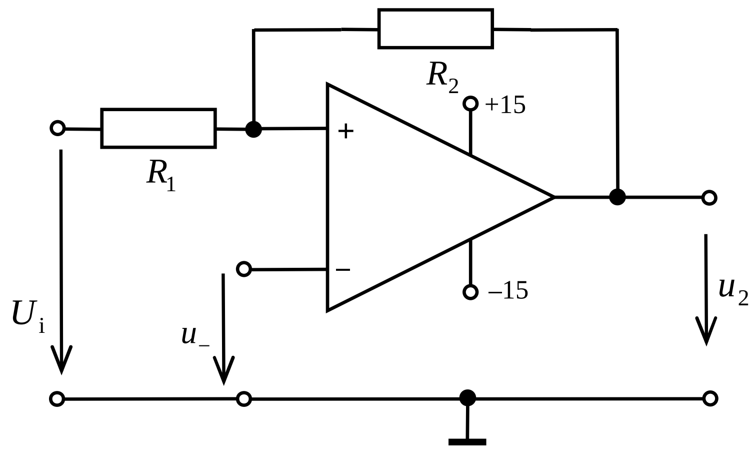


a) 187,5 kΩ

b) 200 kΩ

c) 12,5 kΩ

38. Při jakém napětí dojde ke změně polarity výstupního napětí komparátoru, je-li jeho výstup před komparací v kladné saturaci. Uvažujte parametry obvodu R_1 = 3,3 kΩ, R_2 = 4,7 kΩ, U_i = 1 V a ideální operační zesilovač.

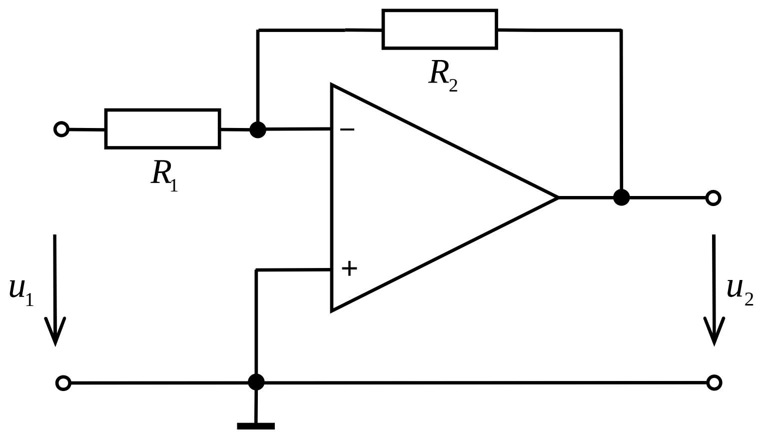


a) 6 V

b) 6,6 V

c) 9,4 V

39. Určete efektivní hodnotu výstupního napětí ideálního operačního zesilovače z obrázku, znáte-li $u_1 = 2\sin(1000\pi t)$, $R_1 = 10$ kΩ, $R_2 = 56$ kΩ.

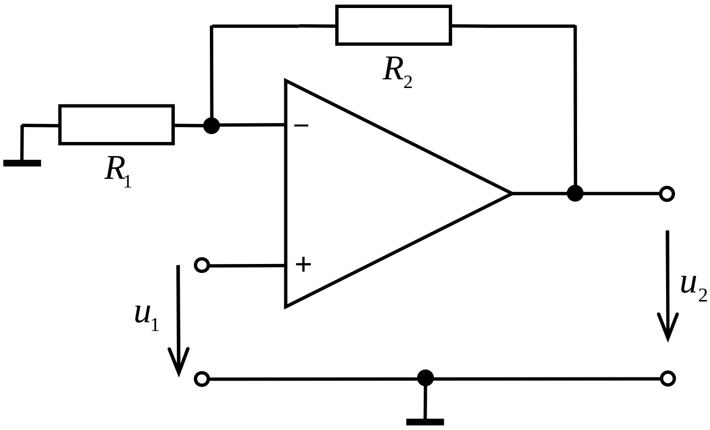


a) 5,6/√2 V

b) -√2 5,6 V

c) √2 5,6 V

40. Jakou hodnotu musí odpor R_1, aby při buzení vstupu ideálního operačního zesilovače z obrázku harmonickým signálem s amplitudou 0,5 V a zpětnovazebním odporem R_2 = 15 kΩ byla amplituda výstupního napětí 2 V.

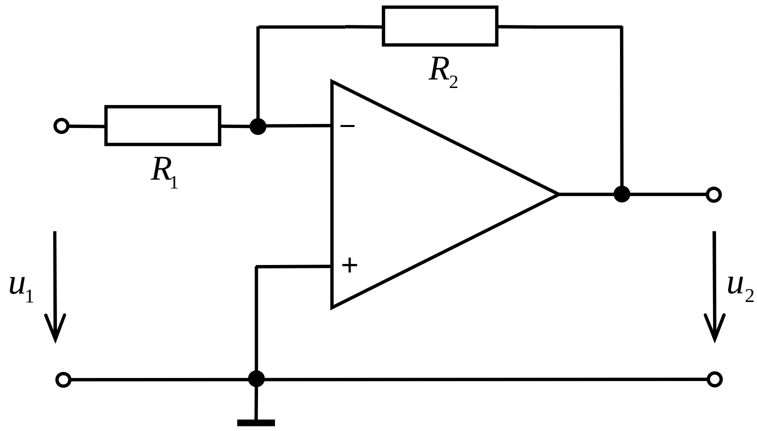


a) 3,75 kΩ

b) 5 kΩ

c) 60 kΩ

41. Určete hodnotu vstupního odporu obvodu s ideálním operačním zesilovačem z obrázku, znáte-li R_1 = 100 kΩ, R_2 = 820 kΩ.

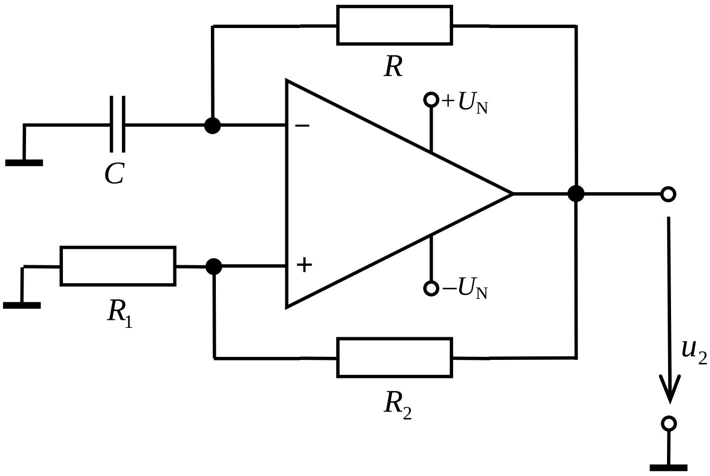


a) 100 kΩ

b) 920 kΩ

c) ∞ Ω

42. Určete periodu výstupního napětí astabilního klopného obvodu z obrázku, znáte-li R_1 = 82 kΩ, R_2 = 10 kΩ, R = 10 kΩ, C = 1 μF.

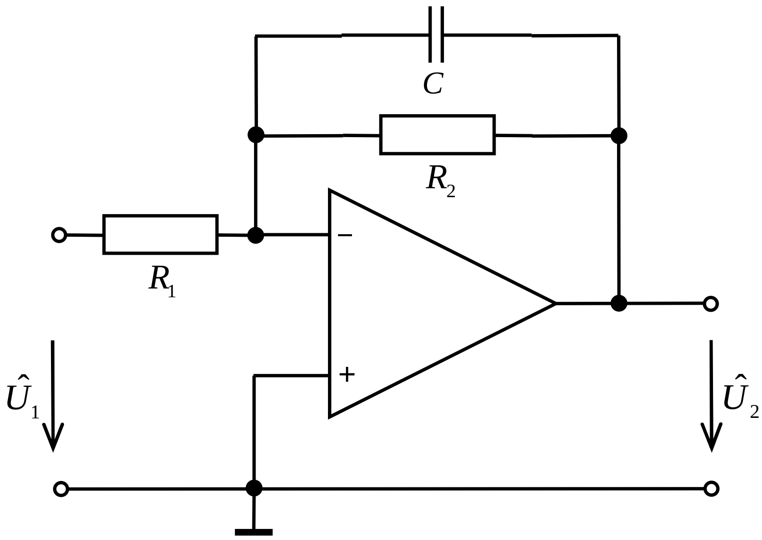


a) 28,6 ms

b) 44,4 ms

c) 57,1 ms

43. Která z komplexních přenosových funkcí odpovídá napěťovému přenosu obvodu z obrázku, znáte-li R_1 = 10 kΩ, R_2 = 22 kΩ, C = 5 μF.

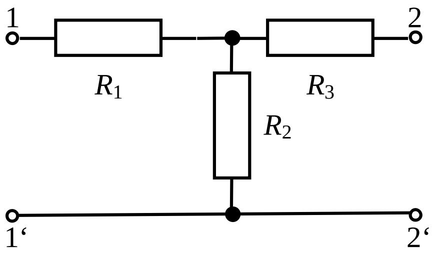


a) $\dfrac{2{,}2}{1+0{,}11\,\mathrm{j}\omega}$

b) $-\dfrac{2{,}2}{1+0{,}11\,\mathrm{j}\omega}$

c) $-\dfrac{0{,}05\,\mathrm{j}\omega}{1+0{,}11\,\mathrm{j}\omega}$

44. Určete hodnotu vlnové impedance dvojbranu z obrázku, znáte-li hodnoty R_1 = 10 kΩ, R_2 = 40 kΩ, R_3 = 10 kΩ.

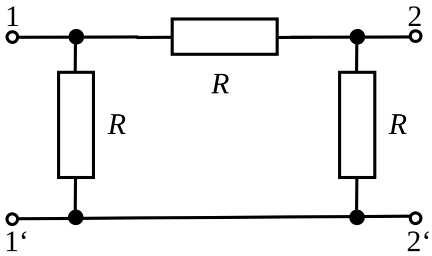


a) 30 kΩ

b) 50 kΩ

c) 18 kΩ

45. Určete hodnotu odporu dvojbranu z obrázku, je-li hodnota jeho vlnové impedance $\hat{Z}_o = 10$ kΩ .

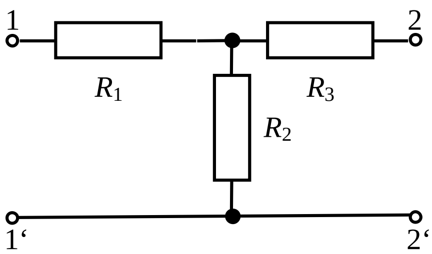


a) 10/√3 kΩ

b) 10 kΩ

c) 10√3 kΩ

46. Určete hodnotu inverzního obrazového přenosu dvojbranu z obrázku, znáte-li hodnoty $R_1 = 10$ kΩ, $R_2 = 40$ kΩ, $R_3 = 10$ kΩ.

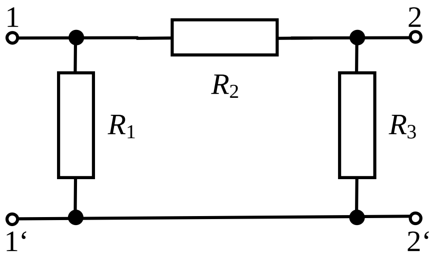


a) 0,5

b) 2

c) ln(2)

47. Určete hodnotu inverzní obrazové míry přenosu dvojbranu z obrázku, znáte-li hodnoty $R_1 = 10$ kΩ, $R_2 = 11{,}25$ kΩ, $R_3 = 10$ kΩ.

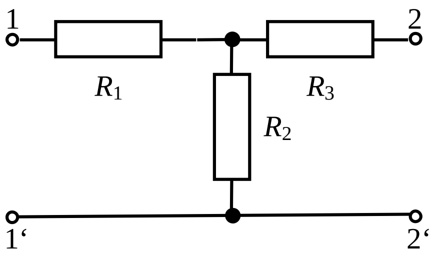


a) 0,25

b) ln(4)

c) 4

48. Určete koeficient nesymetrie dvojbranu z obrázku, znáte-li hodnoty R_1 = 10 kΩ, R_2 = 10 kΩ, R_3 = 20 kΩ.



a) √2/√3

b) 2/3

c) 3/2

49. Určete dobu, za kterou dorazí rozruch vyvolaný zdrojem na počátku přizpůsobeného vysokofrekvenčního vedení o délce 400 m po odrazu od konce vedení do místa x = 100 m vzdáleného konce vedení, znáte-li R_0 = 5 mΩ/m, G_0 = 0,1 nS/m, L_0 = 36 μH/m, C_0 = 1 pF/m, f = 1 GHz.

a) 600 ns

b) 2,4 μs

c) 3 μs

50. Určete vzdálenost, kterou urazí rozruch vyvolaný zdrojem na počátku přizpůsobeného vysokofrekvenčního vedení za čas t = 500 ns, znáte-li R_0 = 3 Ω/km, G_0 = 0,5 μS/km, L_0 = 2 mH/km, C_0 = 8 nF/km, f = 1 GHz.

a) 125 m

b) 85 m

c) 60 m

51. Určete hodnotu impedančně přizpůsobené zátěže připojené k dlouhému vysokofrekvenčnímu vedení, znáte-li R_0 = 5 mΩ/m, G_0 = 0,1 nS/m, L_0 = 40 μH/m, C_0 = 1 pF/m, f = 1 GHz.

a) 4 nΩ

b) 500 Ω

c) 2 mΩ

52. Určete délku vlny dlouhého vysokofrekvenčnímu vedení, znáte-li R_0 = 3 Ω/km, G_0 = 0,5 μS/km, L_0 = 2 mH/km, C_0 = 8 nF/km, f = 100 MHz.

a) 5 m

b) 1,25 m

c) 2,5 m

53. Určete hodnotu vstupní impedance přizpůsobeného vedení v místě x = 30 km vzdáleném od jeho počátku, znáte-li R_0 = 3 Ω/km, G_0 = 0,5 μS/km, L_0 = 2 mH/km, C_0 = 6 nF/km, f = 10 kHz

a) 577,40- j 6,51 Ω

b) 577,40+ j 6,51 Ω

c) 6,51+ j 577,40 Ω

54. Určete hodnotu činitele šíření přizpůsobeného vedení, znáte-li R_0 = 3 Ω/km, G_0 = 0,5 μS/km, L_0 = 2 mH/km, C_0 = 6 nF/km, f = 10 kHz

a) (2,74+ j 217,67)·10^{-6} km^{-1}

b) (2,74+ j 217,67)·10^{-3} km^{-1}

c) (217,67+ j 2,74)·10^{-3} km^{-1}

55. Určete měrnou hodnotu kapacitance bezeztrátového vedení, znáte-li Z_0 = 300 Ω, L_0 = 1,5 μH/m, β = 0,03 km^{-1}, f = 2/π kHz.

a) 25 nF/m

b) 25 pF/km

c) 25 nF/km

Odpovědi závěrečného testu

1.c, 2.b, 3.a, 4.c, 5.b, 6.a, 7.b, 8.c, 9.a, 10.a, 11.c, 12.b, 13.b, 14.a, 15.c, 16.a, 17.a, 18.c, 19.a, 20.b, 21.c, 22.b, 23.c,24.b, 25.a, 26.c, 27.c, 28.b, 29.a, 30.b, 31.c, 32.c, 33.b, 34.a, 35.c, 36.b, 37.a, 38.b, 39.c, 40.b, 41.a, 42.c, 43.b, 44.a, 45.c, 46.b, 47.b, 48.a, 49.c, 50.a, 51.b, 52.c, 53.a, 54.b, 55.c.