Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava
Západočeská univerzita v Plzni

SPOLEHLIVOST A BEZPEČNOST STAVEB

-

interaktivní studijní materiál

Martin Krejsa a Petr Konečný

esf evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Obsah

2. strana ze 283

Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

© Martin Krejsa a Petr Konečný, 2011-2012

Verze 1.9

Text byl vysázen pomocí sázecího systému TEX ve formátu pdfLATEX.

Předmluva

Učební text byl vytvořen v rámci projektu Matematika pro inženýry 21. století, který zahrnuje tvorbu výukových modulů, jenž by měly být aplikovány ve výuce během tzv. pilotních kurzů. Mezioborový modul Spolehlivost a bezpečnost staveb, v rámci něhož vznikl i tento učební materiál, byl garantován Ing. Martinem Krejsou, Ph.D. Výukové materiály v elektronické formě i formě pro tisk by měly sloužit jako inovativní prvek výuky předmětu Spolehlivost a bezpečnost staveb, jenž se vyučuje v rámci prezenčního i kombinovaného studia na Fakultě stavební Vysoké školy báňské - Technické univerzity Ostrava na oborech Prostředí staveb (3607R040), Dopravní inženýrství (3607R042) a Stavební hmoty a diagnostika staveb (3647R019) studijního plánu Stavební inženýrství (B3607). Výukové materiály mohou dále posloužit studentům prezenčního studia oboru Konstrukce staveb (3607R037) studijního plánu Stavební inženýrství (B3607), v rámci výuky předmětu "Pravděpodobnostní posuzování konstrukcí".

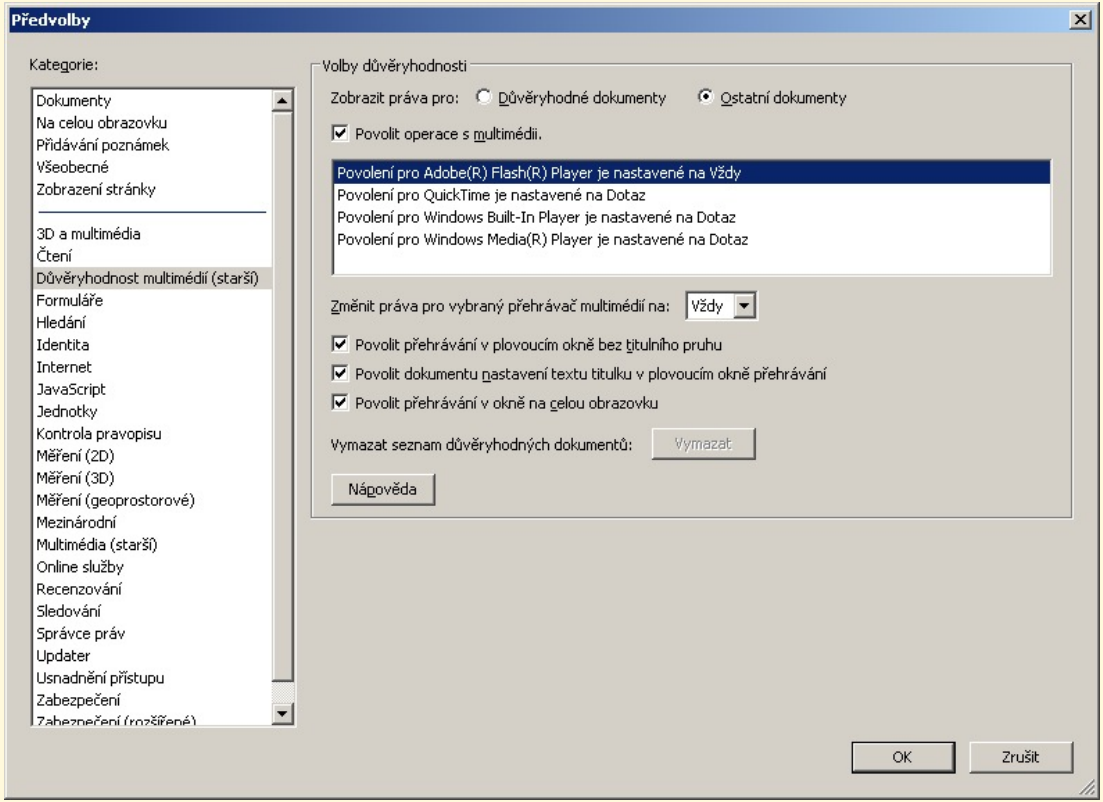
Tato publikace obsahuje základní přehled z oblasti pravděpodobnostních metod a jejich využití v úlohách spolehlivosti konstrukcí. V úvodních kapitolách jsou uvedeny základní poznatky z teorie pravděpodobnosti a spolehlivosti konstrukcí, se kterými souvisí také přehled

používaných pravděpodobnostních metod, postupů i softwarových prostředků. V současnosti existuje celá řada simulačních i analytických nástrojů pro hodnocení spolehlivosti. Velká část z nich je založena na různých alternativách simulační techniky Monte Carlo, která je zpracovaná v samostatné kapitole. Zvláštní důraz byl také kladen na původní metodu Přímého Optimalizovaného Pravděpodobnostního výpočtu - POPV, která je od roku 2002 vyvíjena na pracovišti Katedry stavební mechaniky FAST VŠB-TUO. Metoda je již podložena účinnými softwarovými prostředky, které se významnou měrou využívají i ve výuce.

Součástí obrazovkové verze výukového materiálu jsou názorné ukázky využití počítačových programů vhodných pro pravděpodobnostní analýzu spolehlivosti. Tyto ukázky jsou zpracovány ve formátu Adobe Flash a vloženy do dokumentu. Animace jsou dostupné samostatně i na webové adrese projektu: http://mi21.vsb.cz. Pro spuštění animací je nutno povolit operace s multimédii typu Adobe Flash (podrobné nastavení viz obr. 1).

V obrazovkové verzi jsou rovněž interaktivní testy, které následují za jednotlivými kapitolami. Tyto testy umožňují automatické vyhodnocení zadaných odpovědí. K jejich spuštění slouží tlačítko na počátku testu. Ukončení testu se zadává na jeho konci, kde se dají vyvolat i správné odpovědí. Součástí testu jsou i zadávací pole. Číselné hodnoty se do vstupních polí zadávají s desetinným oddělovačem tečkou (např. $\gamma_m = 1.0$). Tlačítko pro správný výsledek se zadávacím polem sousedí. Správný výsledek se zobrazí na liště vpravo od textu.

V Ostravě 30. 6. 2012 Autoři



Obr. 1 Nastavení animací Adobe Flash v prohlížeči Adobe Reader. Položka **Důvěryhodnost multimédií starší** se nachází v **Nabídce / Úpravy / Předvolby.** Pro nastavení je nutno otevřít dokument mimo webový prohlížeč a stisknutím klávesy **Esc** opustit zobrazení na celou obrazovku.

Obsah

Předmluva **3**

1 Úvod do teorie pravděpodobnostních výpočtů a spolehlivosti konstrukcí **10**

2 Základy teorie pravděpodobnosti **13**
2.1 Náhodný experiment 13
2.2 Náhodný jev 14
2.3 Náhodná veličina 20
2.3.1 Diskrétní náhodná veličina 21
2.3.2 Spojitá náhodná veličina 23
2.3.3 Kvantil náhodné proměnné 32
2.3.4 Interpretace náhodných veličin v pravděpodobnostních výpočtech . . 33
2.4 Funkce náhodných veličin 37
2.4.1 Citlivost náhodných proměnných 38
2.4.2 Náhodné pole 39
2.5 Test 40

3 Spolehlivost konstrukcí **48**
3.1 Účinek zatížení 50

3.2 Odolnost konstrukce . . . 51
3.3 Funkce spolehlivosti . . . 51
3.4 Pravděpodobnost poruchy . . . 53
3.5 Návrhová pravděpodobnost poruchy p_d . . . 57
3.6 Test . . . 67

4 Pravděpodobnostní metody řešení modelu s náhodnými proměnnými 75
4.1 Přehled pravděpodobnostních metod a jejich aplikace . . . 76
4.1.1 Simulační metody . . . 77
4.1.2 Aproximační metody . . . 78
4.1.3 Přímé (numerické) řešení . . . 80
4.1.4 Pokročilé způsoby pravděpodobnostních výpočtů . . . 81
4.2 Software . . . 81
4.3 Test . . . 86

5 Metody typu Monte Carlo 88
5.1 Klasická metoda Monte Carlo . . . 88
5.1.1 Historie metody Monte Carlo . . . 89
5.1.2 Generátor pseudonáhodných čísel . . . 95
5.1.3 Integrace metodou Monte Carlo . . . 99
5.1.4 Generování realizace náhodné veličiny s omezeným typem rozdělení . . . 106
5.1.5 Výpočet pravděpodobnosti zkoumaného jevu . . . 108
5.1.6 Chyba výpočtu s využitím simulace Monte Carlo . . . 109
5.2 Metoda Simulation Based Reliability Assessment (SBRA) . . . 111
5.2.1 Sotware pro aplikaci metody SBRA . . . 114

5.2.2 Ukázky výpočtů metodou SBRA . . . 116
5.3 Další pravděpodobnostní metody, založené na simulacích . . . 117
5.3.1 Metoda Importance Sampling . . . 119
5.3.2 Metoda Latin Hypercube Sampling (LHS) . . . 120
5.4 Test . . . 123

6 Přímý Optimalizovaný Pravděpodobnostní Výpočet (POPV) 127
6.1 Podstata metody POPV . . . 128
6.2 Základní výpočetní algoritmus . . . 132
6.3 Programový systém ProbCalc . . . 140
6.3.1 Program HistAn . . . 140
6.3.2 Program HistOp . . . 142
6.3.3 Program ProbCalc . . . 142
6.4 Program ProbCalc z hlediska uživatele . . . 148
6.4.1 Neparametrická rozdělení pravděpodobnosti . . . 148
6.4.2 Parametrická rozdělení pravděpodobnosti . . . 151
6.4.3 Zpracování naměřených dat . . . 157
6.4.4 Statisticky závislé vstupní veličiny . . . 164
6.4.5 Optimalizace výpočtu v programu ProbCalc . . . 165
6.4.6 Grupování vstupních náhodně proměnných veličin . . . 166
6.4.7 Intervalová optimalizace výpočtu . . . 169
6.4.8 Zónová optimalizace výpočtu . . . 173
6.4.9 Trendová optimalizace výpočtu . . . 179
6.4.10 Grupování dílčích výsledků výpočtu . . . 183
6.4.11 Kombinace jednotlivých optimalizačních postupů . . . 184
6.4.12 Paralelizace výpočtu . . . 187

6.4.13 Úlohy řešené programem ProbCalc 189
6.5 Aplikace metody POPV v dalších pravděpodobnostních úlohách 190
6.6 Závěrečné poznámky 200
6.7 Test 202

7 Vybrané případy posudku spolehlivosti nosných stavebních konstrukcí 205
7.1 Řešené příklady 206
7.2 Zadání příkladů k procvičení 240
Příklady k procvičení 240
7.3 Test 250

Literatura 255

Rejstřík 273

Obsah
9. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Kapitola 1

Úvod do teorie pravděpodobnostních výpočtů a spolehlivosti konstrukcí

Spolehlivost a bezpečnost konstrukcí je jedním z rozhodujících faktorů při jejich navrhování. Stavební konstrukce jsou objekty, které jsou z hlediska spolehlivosti popisovány jako neopakovatelné. Na proces návrhu, posudku spolehlivosti, jednotlivých etap výroby, montáže či provozu stavební konstrukce má vliv řada nejistot, ovlivňujících spolehlivost těchto objektů svou náhodností, kterou nelze opomenout. Variabilita vlastností stavebních objektů tak vstupuje do procesu projektování i realizace.

Nosný systém každé stavební konstrukce by měl splňovat řadu podmínek, které se v proceduře posuzování objevují ve formě kritérií spolehlivosti. Určováním pravděpodobnosti,

s jakou budou požadované vlastnosti stavebních objektů zachovány, se zabývá vědní obor teorie spolehlivosti konstrukcí. Aplikace teorie spolehlivosti vede k využívání pravděpodobnostních výpočetních postupů, založených na teorii pravděpodobnosti a matematické statistiky, jejichž vývoj zažívá v poslední době značný vzestup.

Hlavním rysem pravděpodobnostních metod je možnost vyjádření variability vstupních veličin stochasticky (pravděpodobnostně) např. formou histogramů. Narozdíl od současně platných normových postupů [3], které jsou sice založeny na poznatcích teorie spolehlivosti stavebních konstrukcí, ale z pohledu uživatele těchto přepisů se mohou jevit jako deterministické, neboť modelují vstupní veličiny jako hodnoty - konstanty). Pravděpodobnostní postupy pak vedou ke kvalitativně vyšší úrovni posudku spolehlivosti, protože umožňují vyčíslit míru spolehlivosti a bezpečnosti uživatelů stavebních objektů.

Tento učební text si klade za cíl zmapovat současné uplatnění pravděpodobnostních metod při posuzování spolehlivosti nosných konstrukcí. Po nezbytném přehledu a následném vysvětlení základních pojmů z teorie pravděpodobnosti, matematické statistiky (kap. 2) a spolehlivosti (kap. 3) je v kapitole 4 provedeno bližší seznámení s v současnosti používanými pravděpodobnostními metodami a postupy, jenž umožňují výpočet pravděpodobnosti poruchy u posuzovaných nosných konstrukcí. Nejpočetnější a nejpoužívanější skupinu pravděpodobnostních metodik představují simulační metody, založené na simulační technice Monte Carlo, kterým je věnována samostatná kapitola 5 s bližším vysvětlením jejich principu a praktického využití. Následující kapitola 6 se detailně zaobírá pravděpodobnostní metodou Přímého Optimalizovaného Pravděpodobnostního Výpočtu (POPV), která pracuje ryze numerickým způsobem bez aplikace některé ze simulačních technik, což vede k přesnějšímu řešení pravděpodobnostních úloh a v určitých situacích i k mnohem rychlejšímu výpočtu.

Úvodem je nutno zdůraznit, že univerzální pravděpodobnostní metoda, která by byla

schopna řešit pravděpodobnostní úlohy v reálném čase při dosažení uspokojivé přesnosti výpočtu, prozatím neexistuje. V pravděpodobnostních technických výpočtech je proto nutno zvolit způsob výpočtu, který je pro danou úlohu výhodný a nejvhodnější, což vyžaduje znalost dostupných metod a všeobecný přehled v dané problematice.

Obsah

12. strana ze 283

Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Kapitola 2

Základy teorie pravděpodobnosti

Teorie pravděpodobnosti (např. [79]) (pravděpodobnostní počet) je matematická disciplína, popisující zákonitosti týkající se jevů, které mohou a nemusí nastat, resp. jejichž výsledná hodnota není předem jistá. Takové jevy jsou označovány jako **náhodné**.

2.1. Náhodný experiment

Teorie pravděpodobnosti je využívána v situacích, kdy jsou zkoumány tzv. **náhodné experimenty** (**pokusy**). Při náhodném experimentu není jeho výsledek jednoznačně určen počátečními podmínkami, což jej odlišuje od experimentu deterministického, kdy lze výsledek na základě stanovených počátečních podmínek stanovit jednoznačně a také jej lze předem určit. Při zachování počátečních podmínek deterministického experimentu bude při jeho opakování výsledek stále stejný. Při opakování náhodného experimentu lze naopak získat

pokaždé různé výsledky (při stejných počátečních podmínkách), přičemž výsledek kteréhokoliv z těchto experimentů nelze předpovědět jednoznačně. Náhodnost určitého experimentu je obvykle spojena s nedostatečnou znalostí počátečních podmínek daného experimentu. K určení předpovědi výsledku experimentu se využívají metody teorie pravděpodobnosti.

2.2. Náhodný jev

Výsledek náhodného experimentu je označován jako **náhodný jev**. Po provedení náhodného experimentu lze určit, zda náhodný jev nastal či nikoliv. Náhodný jev tedy představuje událost, která za určitých podmínek buď nastane nebo nenastane. Množina všech náhodných jevů, které mohou za daných podmínek nastat, tvoří **základní prostor** Ω.

Typickým příkladem náhodného experimentu je hod hrací kostkou, jenž se často využívá k demonstračním účelům. Prvky základního prostoru tohoto náhodného experimentu tvoří elementární náhodné jevy E_1 (padne číslo 1, $E_1 = 1$), E_2 (padne číslo 2, $E_2 = 2$), E_3 (padne číslo 3, $E_3 = 3$), E_4 (padne číslo 4, $E_4 = 4$), E_5 (padne číslo 5, $E_5 = 5$) a E_6 (padne číslo 6, $E_6 = 6$). Při hodu kostkou pak mohou nastat např. náhodné jevy:

$$A = E_1 + E_3 + E_5$$

padne-li liché číslo, $A = 1, 3, 5$ nebo:

$$B = E_2 + E_4 + E_6$$

padne-li sudé číslo, $B = 2, 4, 6$.

Lze rovněž definovat jev jistý (označuje se I), který nastane vždy (např. padne číslo < 7), nebo jev nemožný (označuje se $\emptyset$), který při daném náhodném experimentu nenastane nikdy

(např. padne číslo > 6). Také lze hovořit o neslučitelných (nekompatibilních, disjunktních) jevech, u nichž je nemožný jejich současný výskyt (např. A a B - liché a zároveň sudé číslo nemůže být vrženo).

Obdobně lze analyzovat náhodný experiment hodu mincí. Základní prostor $\Omega = H, O$ je tvořen dvěma prvky - elementárními náhodnými jevy E_1 (padne hlava, $E_1 = H$) a E_2 (padne orel, $E_2 = O$). V případě tří hodů mincí je základní prostor dán $\Omega = HHH, HHO, HOO, OOO, OOH, OHH, HOH, OHO$. Pokud např. při třech hodech padne dvakrát hlava, nastal náhodný jev $E_1 = HHO, OHH, HOH$, v případě dvou orlů se naopak může jednat o náhodný jev $E_2 = OOH, HOO, OHO$.

Lze rovněž definovat operace s náhodnými jevy. V případě, že nastane alespoň jeden z náhodných jevů A, B, se jedná o součet jevů označovaný jako $A+B$ nebo množinově $A \cup B$ (sjednocení). Pokud nastanou oba náhodné jevy A, B současně, jedná se o součin obou jevů s množinovým vyjádřením $A \cap B$ (průnik). Situaci, kdy nastane náhodný jev A a nenastane náhodný jev B, je možno označit jako rozdíl obou jevů s množinovým vyjádřením $A - B$. Náhodný jev $\overline{A}$ je jevem opačným k náhodnému jevu A a platí tedy: $\overline{A} = \Omega - A$. Pokud se jedná o jevy neslučitelné, musí $A \cdot B = \emptyset$. V případě, že jevy $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jsou neslučitelné, musí být součin $A_i \cdot A_j = 0$ pro všechna $i \neq j$. Systém neslučitelných náhodných jevů je úplný, pokud platí: $A_1 + A_2 + ... + A_n = I = \Omega$.

Jelikož výsledky náhodného pokusu - náhodné jevy, se modelují jako systém podmnožin, lze zavést i některé číselné funkce náhodných jevů. Jednou z takových funkcí je **pravděpodobnost**.

Pravděpodobnost $P(A)$ měří (ohodnocuje) možnost výskytu jevu A v náhodném experimentu. Pro každý náhodný jev A je pravděpodobnost $P(A)$ funkce (míra) jevu s těmito vlastnostmi:

a) $0 \leqq P(A) \leqq 1$ (pravděpodobnost je nezáporná a normovaná funkce),

Obsah
15. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

b) $P(I) = 1$ (pravděpodobnost je nezáporná a normovaná funkce),

c) Je-li $A \cap B = \emptyset$, pak $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (pravděpodobnost sjednocení disjunktních jevů je rovna součtu pravděpodobností jevů).

Tvrzení a), b), c) se označují jako **axiomy teorie pravděpodobnosti**.

Pokud základní prostor náhodného jevu tvoří konečný počet elementárních jevů se stejnou mírou výskytu, lze pravděpodobnost definovat:

Definice 2.1. Nechť je dáno n elementárních jevů $E_1, E_2, \ldots, E_n$, které tvoří úplný systém neslučitelných jevů a jsou stejně možné. Rozkládá-li se jev A na m ($m \leqq n$) elementárních jevů z tohoto systému, pak pravděpodobnost náhodného jevu A je reálné číslo $P(A) = \frac{m}{n}$.

Všechny elementární jevy $E_{i=1\ldots n}$ se obvykle označují jako všechny *možné* případy. Všechny elementární jevy, na které se rozkládá jev A, se nazývají všechny *příznivé* případy. Ve vztahu z definice 2.1:

$$P(A) = \frac{m}{n} \tag{2.1}$$

pak m představuje počet všech příznivých případů a n počet všech možných případů.

Poznámka 2.2. Pravděpodobnost náhodného jevu je tedy číslo, udávající s jakou jistotou, či nejistotou, lze daný náhodný jev očekávat. Míra pravděpodobnosti náleží do uzavřeného intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, kde nula znamená, že událost nemůže nastat, a jednička, že jev je jistý. Po vynásobení hodnotou 100 lze pravděpodobnost vyjádřit i procentuálně.

Poznámka 2.3. V teorii spolehlivosti konstrukcí platí $p_f + p_s = 1$, kde p_f je pravděpodobnost, že v konstrukci nastane porucha, a p_s pravděpodobnost, že konstrukce zůstane zachovaná.

Rovněž lze definovat pravděpodobnost podmíněnou:

Definice 2.4. Pravděpodobnost uskutečnění jevu A za předpokladu, že nastal jev B, se zapisuje $P(A \mid B)$ a nazývá se **podmíněná pravděpodobnost**. Je rovna:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \,. \tag{2.2}$$

Pro dva vzájemně nezávislé jevy A a B platí:

$$P(A \mid B) = P(A) \,, \tag{2.3}$$

a také

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \,. \tag{2.4}$$

Obecně lze tedy tvrdit, že jevy $A_1, \ldots, A_n$ jsou vzájemně nezávislé, jestliže pro každou jejich podmnožinu platí, že pravděpodobnost průniku jevů je rovna součinu pravděpodobností těchto jevů.

Pro dva neslučitelné jevy A a B zase platí:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \,. \tag{2.5}$$

Pokud je nutno určit pravděpodobnost jevu A, který může nastat pouze současně s některým z jevů $H_1, H_2, \ldots, H_n$, které tvoří úplný systém neslučitelných jevů, pak je možno definovat větu o úplné pravděpodobnosti:

Věta 2.5 (o úplné pravděpodobnosti). *Nechť je dán úplný systém vzájemně neslučitelných jevů $H_1, H_2, \ldots, H_n$ a libovolný jev A, který může nastat pouze současně s některým z jevů H_i. Pro pravděpodobnost jevu A platí:*

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(A \mid H_2) + \cdots + P(H_n) \cdot P(A \mid H_n) = \\ = \sum_{i=1}^{n} P(H_n) \cdot P(A \mid H_n) \,. \tag{2.6}$$

Pokud je nutno naopak určit pravděpodobnost jevu H_i za předpokladu, že nastal jev A, pak je možno definovat Bayesovu větu o podmíněné pravděpodobnosti:

Věta 2.6 (Bayesova). *Nechť je dán úplný systém vzájemně neslučitelných jevů H_1, H_2 až H_n a libovolný jev A, který může nastat jen současně s některým z jevů H_i. Pravděpodobnost, že nastane jev H_i, za předpokladu, že nastal jev A, je rovna:*

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)}{P(A)} \,, \tag{2.7}$$

kde $P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k) \cdot P(A \mid H_k)$.

Obsah
18. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Příklad 2.7. Jev A nastane, padne-li na šestistěnné hrací kostce číslo šest. Jaká je pravděpodobnost $P(A)$, že v následujícím hodu kostkou nastane jev A (padne číslo šest)?

Řešení. Při hodu šestihrannou kostkou může nastat jeden z šesti možných elementráních jevů, může padnout jedno z čísel od jedné do šesti. Z šesti možných elementárních jevů splní zadanou podmínku jev jeden. Pravděpodobnost výskytu jevu $P(A)$ (padne číslo šest)je:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{6}, \tag{2.8}$$

kde je $n = 6$ počet možných jevů a kde je $m = 1$ počet příznívých případů. ▲

Příklad 2.8. Jev A nastane padne-li na šestistěnné hrací kostce číslo pět, jev B nastane padne-li na číslo dvě. Jaká je pravděpodobnost $P(A \cup B)$, že v následujícím hodu kostkou nastane jev A nebo jev B?

Řešení. Z šesti možných elementárních jevů splní zadanou podmínku dva, padne číslo pět nebo dvě. Chceme-li vědět jaká je pravděpodobnost $P(A \cup B)$, že se vyskytne jev A (padne číslo pět) nebo jev B (padne číslo dvě), můžeme psát:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{m}{n} = \frac{2}{6}, \tag{2.9}$$

kde je $n = 6$ počet možných jevů a kde je $m = 2$ počet příznívých případů. ▲

Obsah
19 strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Příklad 2.9. Jaká je celková pravděpodobnost poruchy p_f u konstrukce vystavené působení požáru? Pravděpodobnost poruchy za požáru $p_{f,požár}$ je 0,5, přičemž požár nastane s pravděpodobností $p_{požár} = 0,01$. Při běžném provozu je pravděpodobnost poruchy $p_{f,provoz} = 0,00001$.

Řešení. Pokud je nadefinována porucha jako jev A a systém vzájemně neslučitelných jevů H sestává z požáru H_1 a běžného provozu H_2, pak je možno s využitím věty o úplné pravděpodobnosti a vztahu (2.6) psát:

$$\begin{aligned} p_f = P(A) &= P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(A \mid H_2) = \\ &= p_{požár} \times p_{f,požár} + p_{provoz} \times p_{f,provoz} = \\ &= 0,01 \times 0,5 + (1 - 0,01) \times 0,00001 = 5,01 \times 10^{-3}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

kde je $p_{provoz} = 1 - p_{požár}$. ▲

2.3. Náhodná veličina

Výsledky náhodných experimentů (pokusů), tedy elementární jevy, lze vyjádřit číselně. Číselné hodnoty, které jsou takto přiřazeny elementárním jevům, tvoří obor hodnot M proměnné, nazývané **náhodnou veličinou** a označované např. X, Y, Z.

Definice 2.10. Náhodná veličina X je reálná funkce definovaná na množině všech elementárních jevů, která každému jevu přiřadí reálné číslo.

Obsah
20. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Podle oboru hodnot M lze náhodné veličiny rozdělit na dva typy:

- **diskrétní**, kdy je obor hodnot M tvořen konečnou nebo nekonečnou posloupností čísel,
- **spojité**, kdy je obor hodnot M definován otevřeným nebo uzavřeným intervalem.

Poznámka 2.11. Náhodná veličina může například popisovat výsledek zkoušek krychlené pevnosti betonu. V laboratoři se vyrobí série vzorků betonových krychlí. Ty se podrobí pevnostní zkoušce. Výsledky se zaznamenají. Výsledkem statistického vyhodnocení jsou parametry popisující náhodnou veličinu - krychelnou pevnost betonu.

2.3.1. Diskrétní náhodná veličina

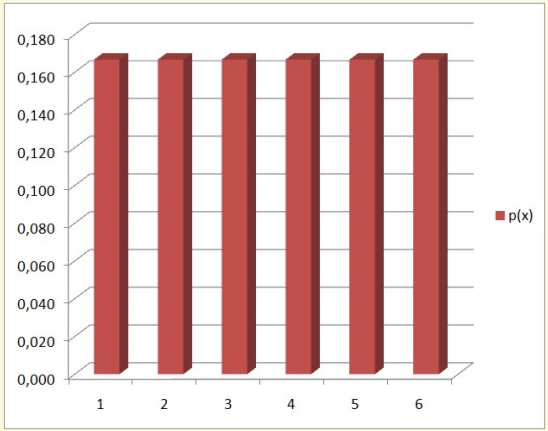
Nechť X je diskrétní náhodná veličina s oborem možných hodnot $x_1, x_2, \ldots, x_n$, která tyto hodnoty nabývá s pravděpodobnostmi $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Každé hodnotě x_i je tedy přiřazena právě jedna hodnota pravděpodobnosti p_i, což lze chápat jako určení funkce, nazývané **pravděpodobnostní funkcí**:

Definice 2.12. Pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny X je funkce $p(x) = P(X = x)$.

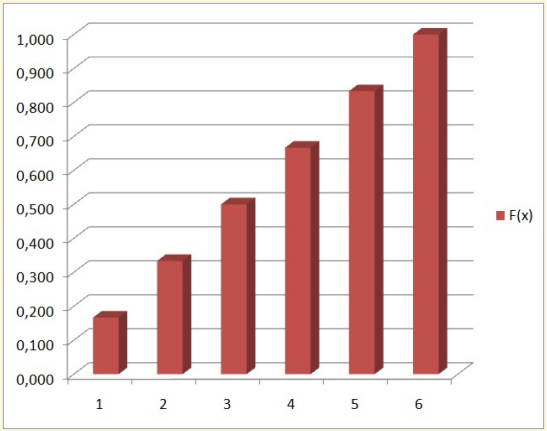
Funkční hodnota pravděpodobnostní funkce v x_i tedy představuje pravděpodobnost, že náhodná veličina X nabude hodnotu x_i.

Pravděpodobnostní funkce diskrétní náhodné veličiny (např. obr. 2.1.a) má následující vlastnosti:

- $p(x_i) \geqq 0$,
- $\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$.



a) Pravděpodobnostní funkce $P(X)$



b) Distribuční funkce $F(X)$

Obr. 2.1 Diskrétní náhodná veličina X, vyjadřující výsledky náhodného jevu hodu hrací kostkou

Rovněž lze definovat funkci, která se nazývá **funkce distribuční**, jenž je určena vzta-

Obsah
22. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

hem:

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i) \ . \tag{2.11}$$

Znamená to tedy, že distribuční funkce je reálná funkce, která přiřazuje každé hodnotě x_i diskrétní náhodné veličiny X pravděpodobnost, že X nabude hodnoty menší než je hodnota x_i.

Vlastnosti diskrétní náhodné veličiny (např. obr. 2.1.b) lze shrnout do následujících bodů:

- $0 \leqq F(x) \leqq 1$,
- $P(x_1 \leqq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$ pro $x_1 < x_2$,
- $F(x)$ je neklesající funkce,
- $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$,
- $F(x)$ je zleva spojitá v bodech $x = x_{i=1,2,\ldots}$ diskrétní náhodné veličiny a spojitá v ostatních bodech.

Poznámka 2.13. V praktických aplikacích se často uvažuje, že distribuní funkce přiřazuje každé hodnotě x_i diskrétní náhodné veličiny X pravděpodobnost, že X nabude hodnoty **menší nebo rovno** než je hodnota x_i (např. obr. 2.1.b). $F(x)$ lze pak vyjádřit jako $F(x) = = P(X <= x)$.

2.3.2. Spojitá náhodná veličina

Spojité náhodné veličiny bývají vyjádřeny pravděpodobnostní funkcí, která se nazývá hustota pravděpodobnosti.

Definice 2.14. Hustota pravděpodobnosti $\varphi(x)$ spojité náhodné veličiny X, definované na intervalu $\langle a, b\rangle$, je nezáporná reálná funkce, vyjádřená vztahem:

$$\varphi(x) = \lim_{h \to 0} \frac{P(x \leqq X < x + h)}{h} , \tag{2.12}$$

kde hodnoty x a $x + h \in \langle a, b\rangle$. Pro $x \ni \langle a, b\rangle$ je $\varphi(x) = 0$.

Vlastnosti hustoty pravděpodobnosti $\varphi(x)$ (např. obr. 2.3.a) spojité náhodné veličiny X jsou následující:

- pro $\forall\, x \in R$ platí: $\varphi(x) \geqq 0$,
- $\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1$, kde hodnoty a a b jsou krajní meze intervalu, ve kterém je $\varphi(x) \neq 0$ (obecně platí $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1$).

Ze znalosti hustoty pravděpodobnosti $\varphi(x)$ lze určit pravděpodobnost, že spojitá náhodná veličina X bude mít hodnotu z intervalu $\langle x_1, x_2\rangle$, tedy:

$$P(x_1 \leqq X \leqq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)\,\mathrm{d}x . \tag{2.13}$$

U spojité náhodné veličiny se podobně jako u diskrétní náhodné veličiny používá k její vyjádření i distribuční funkce $F(x)$, definovaná stejně jako u diskrétní náhodné veličiny vztahem:

$$F(x_i) = P(X < x_i) . \tag{2.14}$$

Vlastnosti distribuční funkce $F(x)$ (např. obr. 2.3.b) pro spojitou náhodnou veličinu X lze shrnout do následujících bodů:

- $0 \leqq F(x) \leqq 1$,
- $F(x)$ je neklesající funkce,
- $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$,
- $F(x) = P(X < x) = \int_a^x \varphi(x)\,\mathrm{d}x$, resp. $= \int_{-\infty}^x \varphi(x)\,\mathrm{d}x$,
- $P(x_1 \leqq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ pro $x_1 < x_2$.

Mezi hustotou pravděpodobnosti $\varphi(x)$ a distribuční funkcí $F(x)$ platí vztah:

$$\varphi(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}\,. \tag{2.15}$$

Spojitá náhodná veličina X je tedy jednoznačně určena rozdělením pravděpodobnosti pomocí pravděpodobnostní funkce (hustoty pravděpodobnosti $\varphi(x)$) nebo také distribuční funkcí $F(x)$. Tyto funkce jsou většinou velmi složité, proto se často definují číselnými charakteristikami (viz obr. 2.2). Jednou z možností je vyjádření těchto charakteristik tzv. **statistickými momenty**.

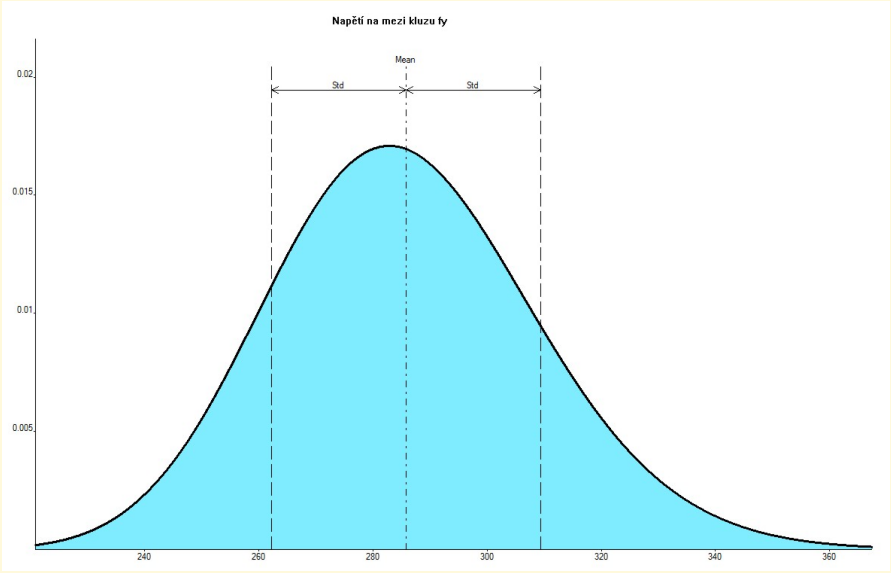
První počáteční moment představuje **střední hodnotu** (mean value) náhodné veličiny X a bývá označován μ. Pro diskrétní náhodnou veličinu jej lze určit ze vztahu:

$$\mu = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p(x_i) \tag{2.16}$$

a pro veličinu spojitou je dán:

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \varphi(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{2.17}$$

Obsah
25. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obr. 2.2 Charakteristiky rozdělení pravděpodobnosti spojité náhodné veličiny - parametry (střední hodnota $\mu = 285,74$ a směrodatná odchylka $\sigma = 23,566$) u lognormálního dvojparametrického rozdělení pravděpodobnosti (vytvořeno v programu Freet)

Druhý centrální moment vyjadřuje rozptyl náhodné veličiny a jeho označení je σ^2. Lze

Obsah
26. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

jej stanovit s využitím vztahů:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot p(x_i) \tag{2.18}$$

pro veličinu diskrétní, resp.

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot \varphi(x)\, \mathrm{d}x \tag{2.19}$$

pro veličinu spojitou. Druhá odmocnina σ^2, tedy σ, se pak nazývá **směrodatná odchylka** (standard deviation) a vyjadřuje „rozptýlenost“ hodnot náhodné veličiny X vůči její střední hodnotě μ.

Třetí centrální moment vyjadřuje míru asymetrie a bývá označován jako **šikmost** (skewness). Pro diskrétní, příp. spojitou veličinu jej lze určit na základě:

$$\alpha = \frac{1}{n \cdot \sigma^3} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^3 = \frac{1}{\sigma^3} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^3 \cdot p(x_i)\ , \tag{2.20}$$

resp.

$$\alpha = \frac{1}{\sigma^3} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^3 \cdot \varphi(x)\, \mathrm{d}x\ . \tag{2.21}$$

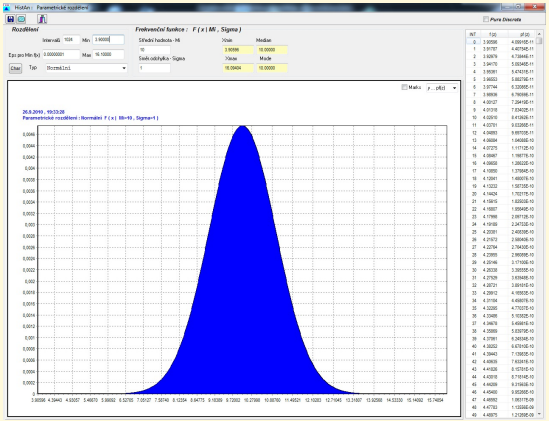
Čtvrtý centrální moment vede k stanovení míry strmosti - **špičatosti** (kurtosis), jenž je pro diskrétní, resp. spojitou veličinu určen pomocí vztahů:

$$\beta = \frac{1}{n \cdot \sigma^4} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^4 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^4 \cdot p(x_i) - 3\ , \tag{2.22}$$

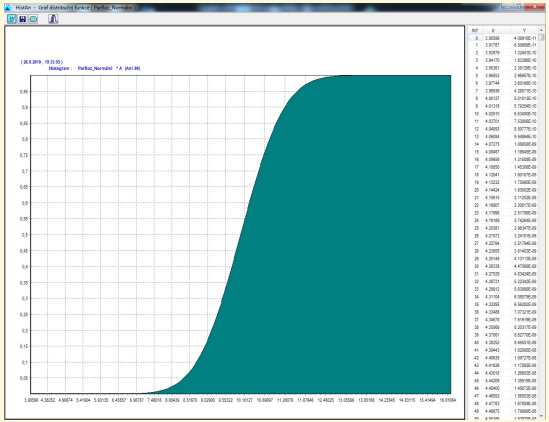
příp.

$$\beta = \frac{1}{\sigma^4} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^4 \cdot \varphi(x)\,\mathrm{d}x - 3\,. \tag{2.23}$$

Uvedené charakteristiky představují vstupní parametry pro konstrukci tzv. parametrických rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny X.



a) Pravděpodobnostní funkce $P(X)$



b) Distribuční funkce $F(X)$

Obr. 2.3 Spojitá náhodná veličina X, vyjádřená normálním rozdělením pravděpodobnosti ($\mu = 10$, $\sigma = 1$)

K nejzákladnějším parametrickým rozdělením patří **normální rozdělení** (nebo také Gaussovo), k jehož sestrojení stačí znát střední hodnotu μ a směrodatnou odchylku σ. Jedná se tedy o tzv. dvojparametrické rozdělení pravděpodobnosti. Náhodná veličina X má

normální rozdělení pravděpodobnosti v případě, že její hustota pravděpodobnosti nabývá tvar daný vztahem:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] . \tag{2.24}$$

Definiční obor náhodné veličiny X je v tomto případě $-\infty \leqq X \leqq \infty$.

V souvislosti s normálním rozdělením pravděpodobnosti je možno hovořit i o tzv. **normovaném normálním rozdělení pravděpodobnosti**, které je speciálním případem obecného normálního rozdělení pravděpodobnosti s parametry $\mu = 0$ a $\sigma^2 = 1$.

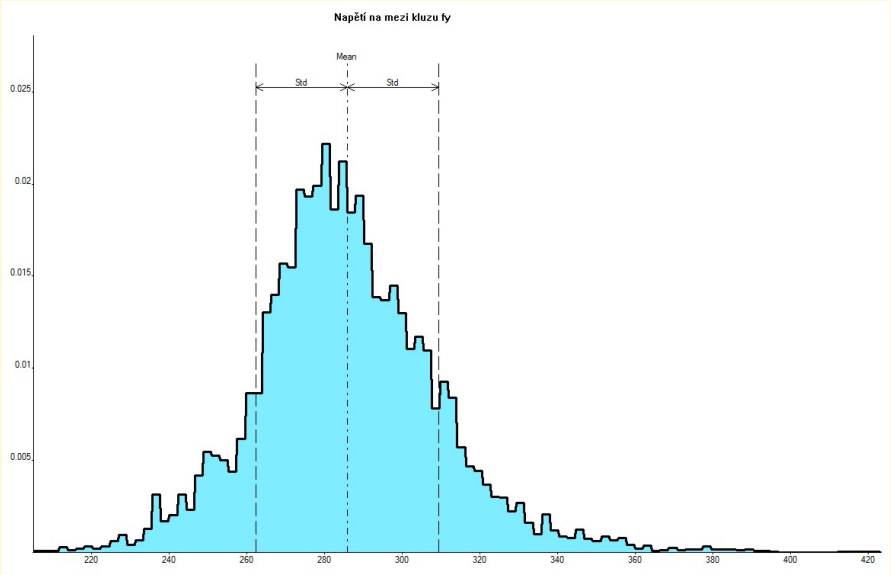
K dalším v technické praxi používaným parametrickým rozdělením pravděpodobnosti patří i tzv. **lognormální dvojparametrické rozdělení pravděpodobnosti** (viz obr. 2.2). Náhodná veličina X má lognormální rozdělení pravděpodobnosti tehdy, pokud její hustota pravděpodobnosti nabývá tvar daný vztahem:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi} \cdot x} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right)^2\right] . \tag{2.25}$$

Definiční obor náhodné veličiny X je v tomto případě omezen zleva hodnotou x_0, a tedy $x_0 \leqq X \leqq \infty$.

K dalším využívaným parametrickým rozdělením pravděpodobnosti patří rozdělení Weibullovo, Pearsonovo, Studentovo, Gumbelovo, χ^2, Beta nebo Gamma, jejichž definice lze najít např. v [70, 21, 22, 78]. Definice lognormálního rozdělení pravděpodobnosti s třemi parametry byla publikováno např. v [99].

Spojité náhodné veličiny lze vyjádřit i **empirickým rozdělením** v **neparametrické formě** pomocí **histogramu** (obr. 2.4). **Histogram** v praxi vystihuje chování reálných náhodných veličin často daleko lépe než teoretická parametrická rozdělení pravděpodobnosti. Lze je sestrojit např. na základě statistického vyhodnocení naměřených dat dané



Obr. 2.4 Neparametrické (empirické) rozdělení pravděpodobnosti spojité náhodné veličiny (vytvořeno v programu Freet)

náhodné veličiny (blíže viz kap. 6.4.1 a kap. 6.4.3). Histogram ve formě sloupcového grafu četností je grafickou reprezentací pravděpodobnostní funkce, jejíž definiční obor je rozdělen na disjunktní intervaly (třídy). Nad každým intervalem je zkonstruován obdélník o ploše odpovídající pravděpodobnosti v dané třídě.

Obsah
30. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Obr. 2.5 Tvorba ohraničeného histogramu popsaného parametry normálního rozdělení v programu HistAn [36]

2.3.3. Kvantil náhodné proměnné

Nechť náhodná veličina X je popsána distribuční funkcí $\varphi(x)$. Hodnota p-kvantilu x_p je hodnota náhodné veličiny X, pro níž platí, že výskyt hodnot menších než x_p nastane pouze s pravděpodobností p, tj. pro niž je distribuční funkce $\varphi(x)$ rovna pravděpodobnosti p:

$$P(X < x_p) = \varphi(x) = p\,. \tag{2.26}$$

Poznámka 2.15. Kvantil $x_{0,05}$, odpovídající pravděpodobnosti $p = 0,05$ (pětiprocentní kvantil), se využívá při stanovení charakteristické hodnoty materiálových vlastností (krychelná i válcová pevnost betonu v tlaku, napětí na mezi kluzu oceli, pevnost zdiva v tlaku).

Poznámka 2.16. Kvantil $x_{0,5}$, odpovídající pravděpodobnosti $p = 0,5$ (padesátiprocentní kvantil), se nazývá **medián** náhodné veličiny. Dalšími používanými kvantily jsou **kvartily** $x_{0,25}, x_{0,50}, x_{0,75}$, které rozdělí obor možných hodnot náhodné veličiny na čtyři části se stejnou pravděpodobností 25%; decily $x_{0,1}, x_{0,2}, \ldots, x_{0,9}$, které rozdělí obor možných hodnot náhodné veličiny na deset částí se stejnou pravděpodobností 10%; a **percentily** $x_{0,01}, x_{0,02}, \ldots, x_{0,99}$, které rozdělí obor možných hodnot náhodné veličiny na sto částí se stejnou pravděpodobností 1%.

Poznámka 2.17. Další důležitou hodnotou náhodné veličiny je **modus**, což je hodnota ve které frekvenční funkce dosahuje maxima. U diskrétní náhodné veličiny se jedná o hodnotu, v níž pravděpodobnostní funkce $p(x_i)$ dosahuje největší velikost. V případě spojité náhodné veličiny představuje modus hodnotu, v níž hustota pravděpodobnosti $\varphi(x)$ nabývá lokálního maxima.

2.3.4. Interpretace náhodných veličin v pravděpodobnostních výpočtech

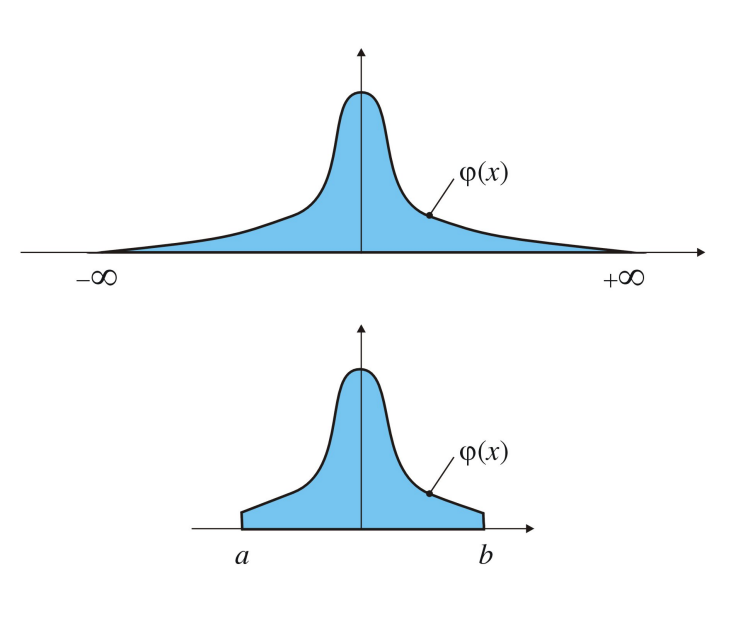
Při výpočtech se rozdělení pravděpodobnosti omezují tzv. „useknutím“ zejména z důvodů:

- reálná náhodná veličina může nabývat hodnot pouze v úzkém spektru definičního oboru daného parametrického rozdělení (např. definiční obor normálního rozdělení pravděpodobnosti je $-\infty \leqq X \leqq \infty$ a mnoho náhodných veličin nemůže nabývat záporných hodnot - viz pozn. 2.18),
- definiční obor rozdělení pravděpodobnosti reálné náhodné veličiny je omezen z důvodu počítačové interpretace,
- okrajové části definičního oboru daného parametrického rozdělení pravděpodobnosti mají na výsledek pravděpodobnostního výpočtu prakticky zanedbatelný vliv a jejich zakomponování do výpočtu se pak jeví jako neefektivní.

Omezený obor rozdělení pravděpodobnosti dané náhodné spojité veličiny X je schématicky zobrazen na obr. 2.6.

Poznámka 2.18. Omezený definiční obor rozdělení pravděpodobnosti reálné náhodné veličiny lze ukázat např. na geometrii nosné konstrukce (průřezové charakteristiky nebo krytí výztuže nemohou nabývat záporných hodnot), případně na materiálových charakteristikách použitého materiálu (Poissonův součinitel příčné deformace se musí pohybovat v rozmezí 0 až $0,5$, pevnost nemůže být záporná, apod.).

Poznámka 2.19. Při omezení rozsahu definičního oboru rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny z důvodu počítačové interpretace je při programování nutno brát v úvahu rozsah datových typů jednotlivých programových proměnných, které nabývají rozsahy:



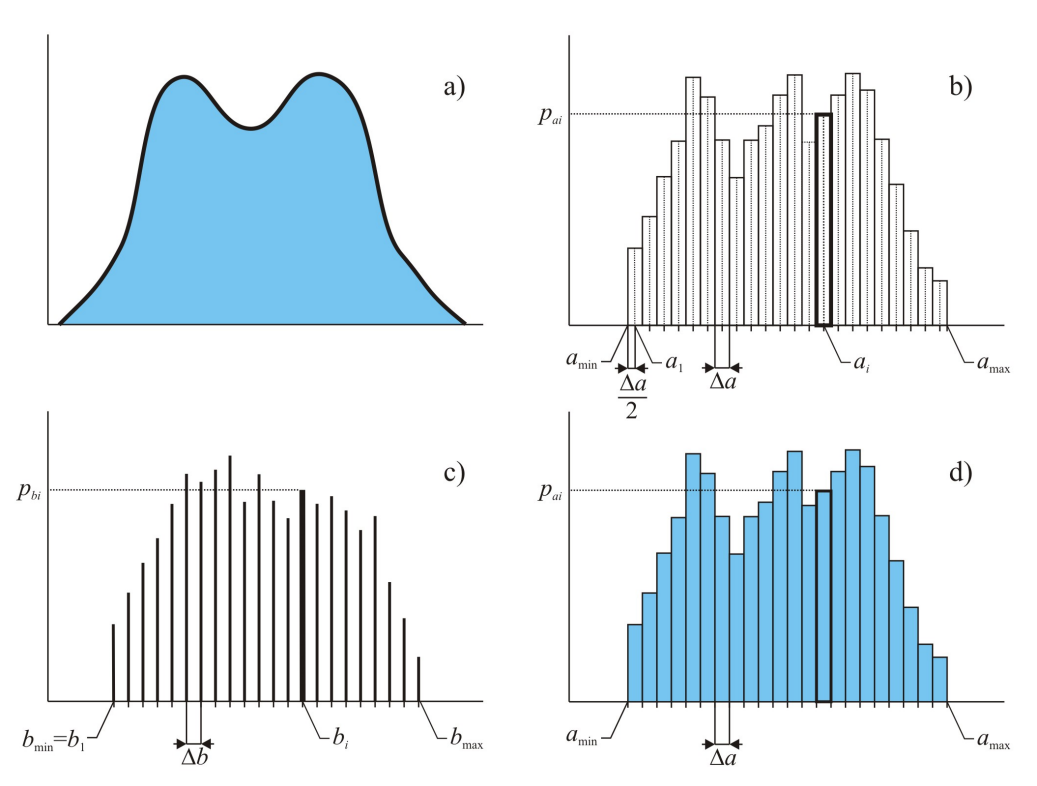
Obr. 2.6 Omezení definičního oboru rozdělení pravděpodobnosti spojité náhodné veličiny

Obsah
34. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

- **Celočíselné typy**:
  - *Byte* (8 bitů / 1 bajt) - rozsah 0 až 255,
  - *Integer* (16 bitů / 2 bajty) - rozsah -32768 až +32767,
  - *Word* (16 bitů / 2 bajty) - rozsah 0 až 65535,
  - *Integer* (32 bitů / 4 bajty) - rozsah -2147483648 až 2147483647.
- **Typy s plovoucí čárkou**:
  - *Float* (32 bitů / 4 bajty) - rozsah $\pm 3,4 \cdot 10^{-38}$ až $3,4 \cdot 10^{-38}$,
  - *Double* (64 bitů / 8 bajtů) - rozsah $\pm 1,7 \cdot 10^{-308}$ až $1,7 \cdot 10^{308}$,
  - *Long double* (80 bitů / 10 bajtů) - rozsah $\pm 3,4 \cdot 10^{-4932}$ až $3,4 \cdot 10^{4932}$.

Histogramy, vstupující při pravděpodobnostních úlohách do výpočtu, je např. podle [18] nutno považovat za aproximaci původního rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny (obr. 2.7.a). V případě rovnoměrného rozdělení hodnot uvnitř jednotlivých tříd histogramu se jedná o aproximaci původního rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny **rozdělením po částech rovnoměrným** (obr. 2.7.d). Pokud jsou jednotlivé třídy histogramu reprezentovány jedinou hodnotou, originální rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny je aproximováno **diskrétním rozdělením pravděpodobnosti** (obr. 2.7.b a 2.7.c).

Poznámka 2.20. S vyjádřením náhodné veličiny diskrétním (obr. 2.7.b) a čistě diskrétním rozdělením pravděpodobnosti (obr. 2.7.c) se lze setkat např. v metodě POPV. Po částech rovnoměrné rozdělení pravděpodobnosti (obr. 2.7.d) se používá např. v metodě SBRA. U metody LHS, aplikované např. v programu Freet, lze pracovat s náhodnými veličinami s diskrétním vyjádřením (obr. 2.7.b) a s po částech rovnoměrným rozdělením pravděpodobnosti (obr. 2.7.d).



Obr. 2.7 Aproximace omezených rozdělení pravděpodobnosti: a) Původní (originální) rozdělení pravděpodobnosti, b) Diskrétní (discrete) rozdělení pravděpodobnosti, c) Čistě diskrétní (pure discrete) rozdělení pravděpodobnosti, d) Po částech rovnoměrné rozdělení pravděpodobnosti

2.4. Funkce náhodných veličin

V pravděpodobnostních výpočtech se výpočetní model definuje funkcí s obecně n náhodnými veličinami $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Výsledná veličina Z, zapsaná obecně

$$Z = f(X_1, X_2, \ldots, X_n) \,, \tag{2.27}$$

je rovněž náhodnou veličinou, která může být vyjádřena statistickými momenty, parametrickým rozdělením pravděpodobnosti nebo empirickým rozdělením pravděpodobnosti pomocí neparametricky definovaného histogramu.

Náhodné veličiny vstupující do výpočtu mohou být navzájem statisticky závislé, což se nejčastěji popisuje koeficientem korelace ρ. Pro dvě náhodné veličiny X a Y se určí:

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{\sigma_x^2 \cdot \sigma_y^2}} \,, \tag{2.28}$$

kde $\mathrm{cov}(X,Y)$ je kovariance, tedy střední hodnota součinu odchylek náhodných veličin X a Y od jejich středních hodnot, což lze pro diskrétní náhodné veličiny stanovit s využitím vztahu

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \sum_i \sum_j x_i \cdot y_j \cdot p(x_i, y_j) - \mu_x \cdot \mu_y \,, \tag{2.29}$$

a pro spojité náhodné veličiny naopak na základě výrazu

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_i \cdot y_j \cdot \varphi(x_i, y_j)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y - \mu_x \cdot \mu_y \,. \tag{2.30}$$

Pro vzájemně nezávislé náhodné veličiny X a Y platí:

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \rho(X,Y) = 0 \,. \tag{2.31}$$

Obsah
37. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Detailnější výklad zaměřený na stanovení statistické závislosti náhodných proměnných, související s teorií náhodných vektorů, i množství řešených příkladů je podrobně publikováno např. v [79].

Poznámka 2.21. Typickým příkladem ze stavební praxe dvou statisticky závislých veličin je např. pevnost betonu v tahu a tlaku. Předpokládá se, že vyšší pevnost v tahu se bude vyskytovat u zkušebních vzorků s vyšší pevností v tlaku.

2.4.1. Citlivost náhodných proměnných

Citlivostní analýza zkoumá vliv rozptylu jednotlivých vstupních náhodných proměnných na výslednou funkci náhodných veličin $f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Výstupem citlivostní analýzy je identifikace dominantních vstupních parametrů. Citlivost výsledné náhodné veličiny $Z = f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ na variabilitu vstupních náhodných veličin $X_1, X_2, \ldots, X_n$ lze definovat např. na základě porovnání variačních koeficientů [96].

Relativní vliv vstupní veličiny X_i na výslednou náhodnou veličinu Z_i lze získat porovnáním variačního koeficientu v_{X_i} vstupní náhodné proměnné X_i a variačního koeficientu v_{Z_i} výsledné náhodné veličiny Z_i .

Variační koeficient v_{X_i} vstupní náhodné proměnné X_i může být určen vztahem:

$$v_{X_i} = \frac{\sigma_{X_i}}{\mu_{X_i}} \,. \tag{2.32}$$

Výpočet variačního koeficientu v_{Z_i} lze provést za předpokladu, že při stanovení výsledné náhodné veličiny Z_i bude za náhodnou vstupní veličinu považovaná jen X_i a zbývající vstupní proměnné $X_{j=1,2,\ \ldots,\ i-1,i+1,\ \ldots,\ n}$ budou zadány pouze svou střední hodnotou

Obsah
38. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

μ_j. Tak lze získat i střední hodnotu μ_{Z_i} a směrodatnou odchylku σ_{Z_i} výsledné veličiny Z_i, ze které se určí i požadovaný variační koeficient v_{Z_i}.

Na základě porovnání variačních součinitelů podle vztahu (2.33) se může stanovit faktor citlivosti α_i^v

$$\alpha_i^v = \frac{v_{Z_i}}{v_{X_i}} \,, \tag{2.33}$$

který vyjadřuje citlivost výsledné náhodné veličiny Z_i na vstupní veličině X_i.

Další postupy, související s citlivostní analýzou pravděpodobnostní úlohy, lze najít v [15].

2.4.2. Náhodné pole

Náhodnost jevů, vznikajících na nosných konstrukcích, se již nezřídka vyjadřuje tzv. náhodnými poli (viz např. [8]). Náhodná pole popisují prostorovou závislost modelovaného parametru. U náhodného pole je pravděpodobné, že se parametry blíží v závislosti na vzdálenosti sousedních sledovaných elementů. Čím jsou elementy blížší tím je pravděpodobnější, že i hodnota sledovaného parametru bude bližší. V práci [109]) je například modelována plošná korelace pevnosti betonu.

2.5. Test

Spustit test Odpovězte na otázky v tomto testu. Test musíte spustit kliknutím na tlačítko, poté vyplňte odpovědi a ukončete test. Správná může být více než jedna odpověď.

1. Výsledek náhodného experimentu

   (a) je jednoznačně určen. (b) není jednoznačně určen.
   (c) nezávisí na počátečních podmínkách. (d) lze vyjádřit číselně.

2. Pravděpodobnost náhodného jevu

   (a) je číslo větší než 1 a udává s jakou jistotou lze daný jev očekávat.
   (b) je číslo udávající s jakou jistotou lze daný jev očekávat.
   (c) je číslo náležící do uzavřeného intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.
   (d) nelze popsat číslem.

3. Náhodná veličina

   (a) je reálná funkce definovaná na množině všech elementárních jevů, která každému jevu přiřadí reálné číslo.
   (b) je je nezáporná a normovaná funkce.
   (c) je matematický popis výsledku náhodných experimentů (pokusů).
   (d) je číslo náležící do uzavřeného intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

4. Jev A nastane, padne-li na šestistěnné hrací kostce číslo 6. Jev B nastane, padne-li kterékoliv jiné číslo. Jaká je pravděpodobnost, že v následujícím hodu kostkou nastane jev A nebo jev B?

   (a) $\frac{5}{36}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) 0 (d) 1

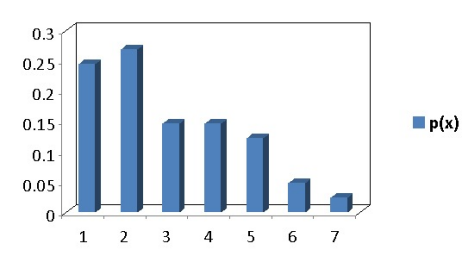
Obsah
40. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

5. Na šestistěnné hrací kostce je dán jev A, padne-li číslo 6. Jaká je pravděpodobnost, že ve dvou následujících hodech nastane jev A?

(a) $\frac{1}{36}$ (b) $\frac{2}{6}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) 0

6. Jaká je celková pravděpodobnost poruchy p_f u konstrukce vystavené působení požáru? Pravděpodobnost poruchy za požáru $p_{f,požár}$ je 0,6, přičemž požár nastane s pravděpodobností $p_{požár} = 0,03$. Při běžném provozu je pravděpodobnost poruchy $p_{f,provoz} = 0,00005$. Pravděpodobnost poruchy p_f je:

(a) $p_f = 0,018$ (b) $p_f \cong 0,06$ (c) $p_f = 0,00005$ (d) $p_f = 0$



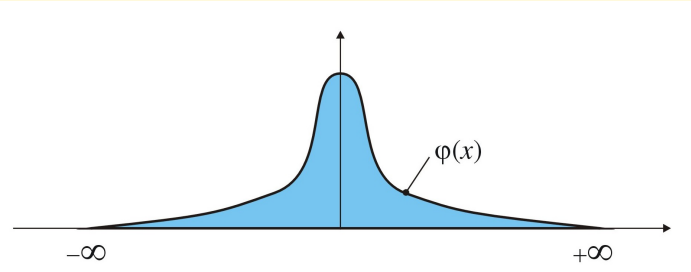
Obr. 2.8 Pravděpodobnostní rozdělení náhodné veličiny

7. Na obr. 2.8

(a) je zobrazeno spojité pravděpodobnostní rozdělení náhodné veličiny.
(b) je zobrazeno diskrétní pravděpodobnostní rozdělení náhodné veličiny.
(c) je zobrazen histogram.
(d) je zobrazeno ohraničené normální rozdělení.

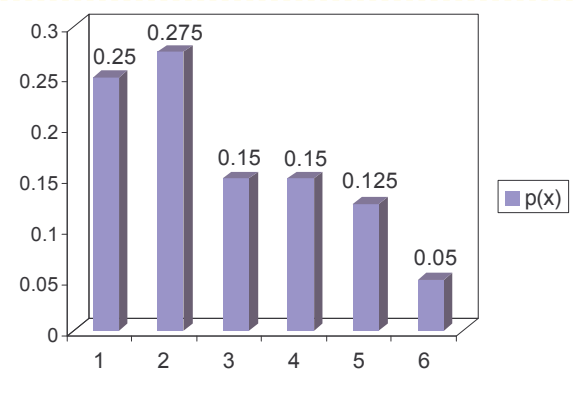
8. Na obr. 2.9

(a) je zobrazeno spojité pravděpodobnostní rozdělení náhodné veličiny.
(b) je zobrazeno diskrétní pravděpodobnostní rozdělení náhodné veličiny.
(c) je zobrazen histogram.
(d) je zobrazeno normální rozdělení.



Obr. 2.9 Pravděpodobnostní rozdělení náhodné veličiny

Obsah
42. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obr. 2.10 Pravděpodobnostní rozdělení náhodné veličiny

9. Pravděpodobnost výskytu čísla 2 ve frekvenční histogramu na Obr. 2.10 je?

(a) 0.275, (b) $\frac{1}{4}$, (c) $0,0$, (d) 0.25.

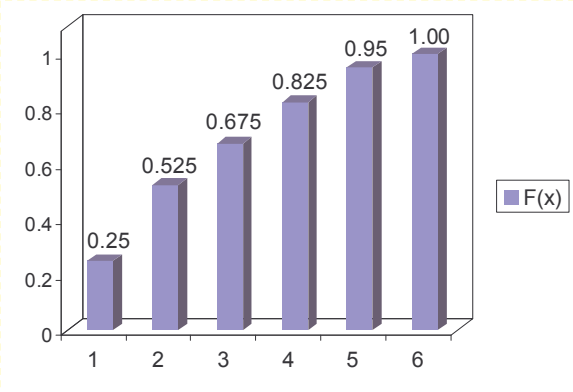
10. Pravděpodobnost výskytu čísla menšího než 3 ve frekvenčním histogramu na Obr. 2.10 je?

(a) 0.15, (b) $0,525$, (c) $0,0$, (d) 0.675.

11. Pravděpodobnost překročení čísla 3 u frekvenčního histogramu na Obr. 2.10 je?

(a) 0.475, (b) $0,5$, (c) $1,0$, (d) 0.325.

Obsah
43. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obr. 2.11 Distribuční funkce náhodné veličiny zobrazené na Obr. 2.10

12. Uvažíme-li distribuční funkci uvedenou na Obr. 2.11, pak tato distribuční funkce nabyde pro $x = 4$ hodnotu?

(a) 0.675, (b) $0,825$, (c) $0,0$, (d) 0.15.

13. Jaká je pravděpodobnost překročení hodnoty 5 u distribuční funkce z Obr. 2.11? Je to:

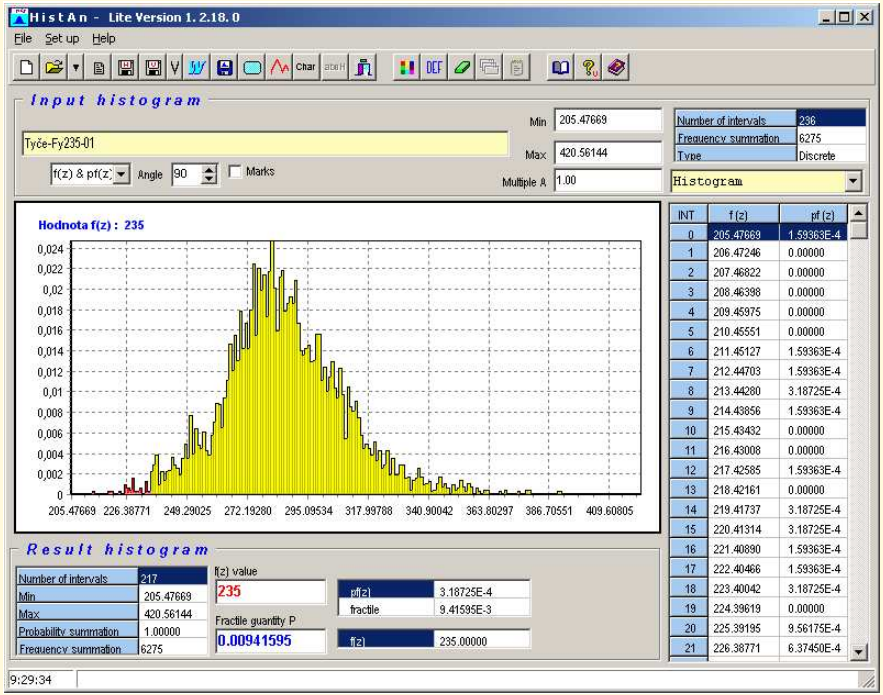
(a) 0.825, (b) $0,05$, (c) 0.95, (d) 0.0.

14. Jaká je naopak pravděpodobnost, že u stejné distribuční funkce (Obr. 2.11) nebude překročena hodnota 2? Je to:

(a) 0.25, (b) $0,675$, (c) 0.0, (d) 0.525.

15. Obr. 2.12 zobrazuje rozdělení meze kluzu pro válcované tyče z oceli S235. Pravděpodobnost, že se u této náhodně proměnné vyskytne hodnota menší než 235 MPa je:

(a) $3,19 \cdot 10^{-4}$, (b) $9,42 \cdot 10^{-3}$, (c) 0,00942, (d) 205,5.

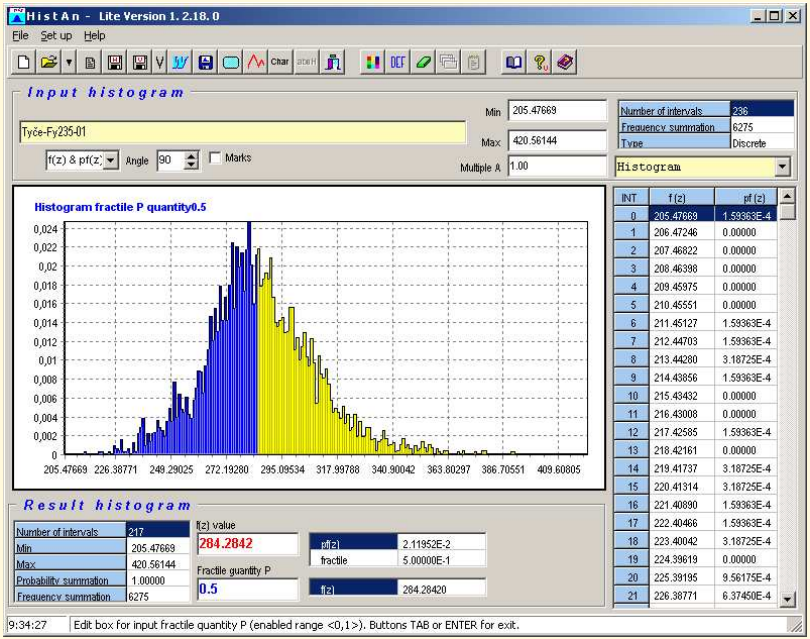


Obr. 2.12 Rozdělení meze kluzu fy pro válcované tyče z oceli S235 [MPa]

Obsah
45. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

16. Jakou velikost má střední hodnota rozdělení meze kluzu oceli zobrazeného na obr. 2.13?
[ ] MPa

Desetiny se ve vstupním poli oddělují **tečkou**.



Obr. 2.13 Rozdělení meze kluzu fy pro válcované tyče z oceli S235 [MPa]

17. U datového souboru uvedeného v Tab. 2.1 vypočtěte střední hodnotu μ:

Obsah
46. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Desetiny se ve vstupním poli oddělují **tečkou**.

18. U datového souboru uvedeného v Tab. 2.1 vypočtěte směrodatnou odchylku σ.

Desetiny se ve vstupním poli oddělují **tečkou**.

7,156	0,736	4,211	6,561	0,895	3,504	9,483	3,413	1,697	9,97
4,447	3,293	3,471	8,237	7,628	8,16	7,612	6,621	7,851	7,012

Tab. 2.1 Datový soubor

Konec testu

Počet správných odpovědí:

Vyznačení oprav do testu: Opravit

Kliknutím na tlačítko *Ans* po opravení testu zobrazíte na pravé straně obrazovky správnou odpověď.

Kapitola 3

Spolehlivost konstrukcí

V procesu návrhu konstrukce se provádí řada výpočetních operací souvisejících s posudkem spolehlivosti jednotlivých konstrukčních částí nebo konstrukce jako celku (např. [98]). Musí být splněna různá kritéria spolehlivosti definovaná příslušnými normovými předpisy [3].

Veličiny, vstupující do výpočtů, se mnohdy vážou na řadu nahodilostí a nejistot. Jejich charakter bývá náhodný s různou proměnlivostí. Jako zdroje nahodilostí lze považovat např.:

1. Vlastnosti konstrukce:
   (a) vlastnosti materiálu,
   (b) geometrické nepřesnosti:
   - výrobní:
     – tvar,
     – průřezové charakteristiky,

- montážní.

2. Zatížení (viz také: [45]):
   (a) stálé zatížení:
   - tíha všech trvalých součástí objektu,
   - trvale působící tlaky hornin, sypkých hmot a kapalin,
   - účinky předpětí konstrukce,

   (b) nahodilé zatížení:
   - užitné zatížení,
   - klimatické zatížení:
     - vítr,
     - sníh,
     - námraza,
     - teplota,
     - vlhkost,
   - deformační zatížení,
     - nerovnoměrný pokles podpor,

   (c) mimořádná zatížení:
   - účinky zemětřesení,
   - účinky výbuchů a jiných tlakových vln.

Uvedené zdroje nahodilostí vstupních veličin souvisí s tzv. nejistotami fyzikálními. Na výslednou spolehlivost konstrukce však mají vliv i nejistoty pramenící z použitého výpočetního modelu, statistického zpracování vstupních veličin a v neposlední řadě i lidský faktor vstupující do procesu návrhu, realizace i používání objektu.

Poznámka 3.1. Na Fakultě stavební VŠB-TU Ostrava byla v součinnosti s ČHMÚ vyvinuta digitální sněhová mapa, která poskytuje údaje rovněž pro pravděpodobnostní analýzu konstrukcí, včetně křivek trvání zatížení (viz str. 83). Mapa [91] je volně přístupná a je schválená normalizační komisí TNK 38 jako Změna Z4 k normě ČSN EN 1991-1-3 [4].

3.1. Účinek zatížení

Zatížení je jednou z nejvýznamnějších veličin, která vstupuje do procesu posudku spolehlivosti konstrukcí. Při stanovení účinků zatížení v pravděpodobnostních výpočtech je nutno brát v úvahu zdroj zatížení, způsob působení na konstrukci, intenzitu, směr, dobu trvání, ale i vliv prostředí - např. změnu teploty či vlhkosti.

Účinek zatížení S (označuje se rovněž písmenem E) je nutno považovat za náhodnou veličinu zejména vzhledem k náhodné proměnlivosti zatížení v čase a prostoru. Pravděpodobnostní vyjádření zatížení jako náhodného procesu je sice velice výstižné, nicméně velice pracné zejména vzhledem k získání potřebných údajů. Náhodné veličiny spojené se zatížením se nejčastěji vyjadřují pomoci histogramů středních nebo extrémních hodnot. Zatížení lze také vyjádřit pomocí tzv. křivek trvání zatížení (viz [64] a [65]), kdy se po určitý časový úsek sleduje proměnlivost zatížení a získané hodnoty se nakonec seřadí vzestupně.

Veličina vyjadřující účinek zatížení se váže na mezní stav, podle něhož se daný pravděpodobnostní posudek provádí. V případě mezního stavu únosnosti tak může účinek zatížení představovat skutečnou velikost dané vnitřní síly, příp. napětí. U mezního stavu použitelnosti může být účinek zatížení vyjádřen přetvořením konstrukce či frekvencemi vlastních tvarů kmitání.

3.2. Odolnost konstrukce

Definice odolnosti konstrukce R je závislá zejména na výpočetním modelu, materiálových vlastnostech konstrukce (pevnostní a tuhostní charakteristiky použitých materiálů) a jejích geometrických charakteristikách (tvar, rozměr nosných prvků, průřezové charakteristiky, výrobní a montážní nepřesnosti).

Veličina vyjadřující odolnost konstrukce se váže na mezní stav, podle něhož se daný pravděpodobnostní posudek spolehlivosti provádí. V případě mezního stavu únosnosti tak může odolnost konstrukce představovat únosnost v daném namáhání, kterou lze určit na úrovni vnitřní síly nebo daného napětí. U mezního stavu použitelnosti je odolnost konstrukce dána mezním přetvořením konstrukce, příp. přípustnou frekvencí kmitání.

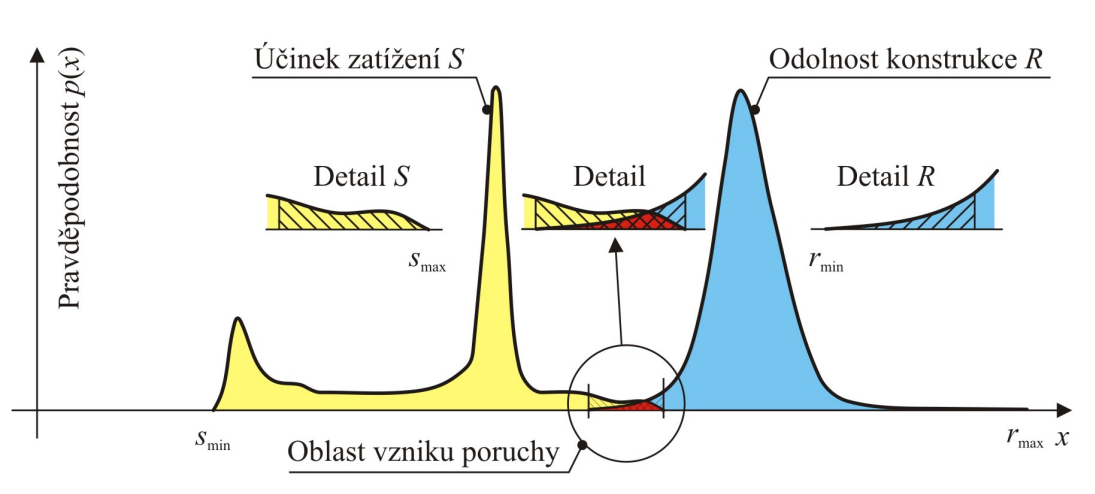
S mezním stavem, v rámci něhož se pravděpodobnostní výpočet provádí, souvisí i samotná tvorba výpočetního modelu. Svou roli přitom hraje použitá metodika výpočtu (teorie 1. či 2. řádu) nebo matematický popis chování materiálu konstrukce (pružné chování materiálu, kdy je limitním stavem dosažení napětí na mezi kluzu, nebo využití plastických vlastností, kdy je limitní plastická únosnost, přípustná velikost trvalé deformace, případně tažnost materiálu).

Na výpočetní model může mít rozhodující vliv i skutečnost, zda je předmětem pravděpodobnostního posudku spolehlivosti část nosné konstrukce (prvek, průřez) nebo celý nosný systém.

3.3. Funkce spolehlivosti

Konstrukce musí být navržena tak, aby odolnost konstrukce R byla větší než je účinek zatížení S. S přihlédnutím ke všem nahodilostem v zatížení, výrobním a montážním ne-

přesnostem a prostředí, v němž konstrukce plní svou funkci, odolnost konstrukce R i účinek zatížení S je nutno považovat za veličiny náhodné, jak je zobrazeno na obr. 3.1. Je nezbytné, aby obě veličiny vykazovaly stejný rozměr.



Obr. 3.1 Křivky hustoty pravděpodobnosti účinku zatížení S a odolnosti konstrukce R s vyznačenou oblastí možného vzniku poruchy

Pravděpodobnostní posudek spolehlivosti je založen na podmínce spolehlivosti, kterou lze vyjádřit ve tvaru:

$$RF = R - S \geqq 0\,, \tag{3.1}$$

Obsah
52. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

kde R je odolnost konstrukce a S účinek zatížení. Levá strana nerovnice (3.1) se nazývá funkce spolehlivosti RF (*reliability function*), ale bývá také označována jako funkce poruchy G či rezerva spolehlivosti Z.

Podmínku spolehlivosti je však možno vyjádřit rovněž vztahy [70]

$$\frac{R}{S} \geqq 1 \,, \tag{3.2}$$

případně

$$\ln(R) - \ln(S) \geqq 0 \,, \tag{3.3}$$

$$\frac{R}{S} - 1 \geqq 0 \tag{3.4}$$

nebo

$$\ln\left(\frac{R}{S}\right) \geqq 1 \,. \tag{3.5}$$

Nesplnění kterékoliv podmínky spolehlivosti (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) nebo (3.5) představuje z hlediska spolehlivosti nepříznivý, tzn. poruchový stav, kdy účinek zatížení S převyšuje velikost odolnosti konstrukce R. Oblast, kde lze očekávat vznik poruchy, je graficky zobrazena na obr. 3.1.

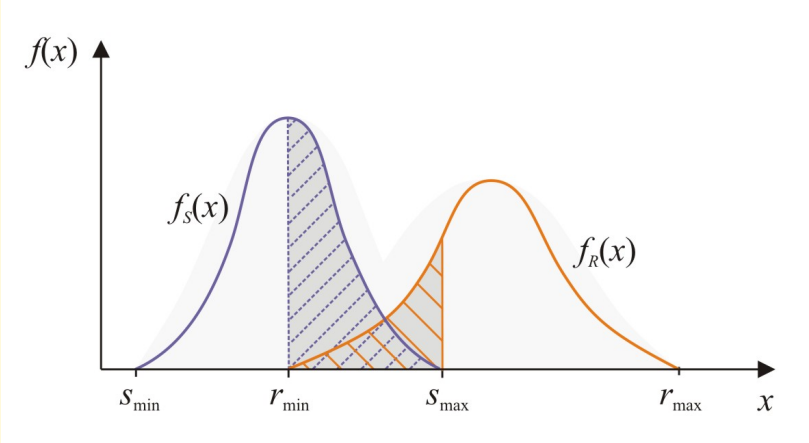
Podrobný teoretický rozbor funkce spolehlivosti obsahuje např. [9].

3.4. Pravděpodobnost poruchy

V oblasti překrývajících se histogramů odolnosti konstrukce R a účinku zatížení S z obr. 3.1 je pak možno stanovit pravděpodobnost poruchy p_f:

$$p_f = P(Z < 0) = P(R - S < 0) \,. \tag{3.6}$$

Její velikost je tedy ovlivněna zápornou částí histogramu rezervy spolehlivosti Z. Pravděpodobnost bezporuchového stavu P_s je pak rovna $1 - p_f$ (viz např. obr. 3.3).



Obr. 3.2 Křivky hustoty pravděpodobnosti účinku zatížení S a odolnosti konstrukce R s vyznačenými kvantily, jenž se mohou podílet na pravděpodobnosti poruchy p_f

Proměnlivost odolnosti konstrukce R a účinku zatížení S lze vyjádřit histogramy nebo podle [96] i s pomocí funkce hustoty pravděpodobnosti (frekvenční funkce) $f_R(x)$, resp. $f_S(x)$. Pravděpodobnost poruchy pro dvě náhodné proměnné vstupní veličiny (účinek zatížení S a odolnost konstrukce R) pak lze schématicky znázornit i podle obr. 3.2, kde jsou tyto křivky hustoty pravděpodobnosti účinku zatížení $f_S(x)$ a odolnosti konstrukce $f_R(x)$ zobrazeny. Vzájemná poloha těchto křivek $f_S(x)$ a $f_R(x)$ charakterizuje a specifikuje oblast,

Obsah
54. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

ve které může vznikat porucha, a současně umožňuje pravděpodobnost poruchy p_f vypočíst. Tato oblast je pro hustotu $f_S(x)$ i $f_R(x)$ na obr. 3.2 vyšrafována samostatně.

Porucha nastane, nebude-li splněna podmínka (3.1), tzn. v případech, kdy odolnost konstrukce bude menší než účinek jejího zatížení. Pravděpodobnost poruchy p_f se pak může vyjádřit např. podle [70] :

$$p_f = P(R - S \leqq 0) = \iint_{D_f} f_{R,S}(r,s)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s\ , \tag{3.7}$$

kde D_f je oblast poruchy s rezervou spolehlivosti $Z(\mathbf{X}) < 0$, a $f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ funkce sdružené hustoty pravděpodobnosti náhodných veličin $\mathbf{X} = X_1, X_2, \ldots, X_n$.

V případě statistické nezávislosti odolnosti konstrukce R a účinku zatížení S je $f_{R,S}(r,s) = f_R(r) \cdot f_S(s)$ a vztah (3.7) lze upravit na:

$$p_f = P(R - S \leqq 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{r \leqq s} f_R(r) \cdot f_S(s)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s\ . \tag{3.8}$$

Existují-li průsečíky hustoty pravděpodobnosti $f_R(x)$ s osou x s hodnotou $x = r_{\min}$ a hustoty pravděpodobnosti $f_S(x)$ s osou x s hodnotou $x = s_{\max}$, pak pro libovolnou hodnotu s porucha

- nenastane, je-li $r > s_{\max}$. Pravděpodobnosti poruchy je pak $p_f = 0$,
- může, ale nemusí nastat, je-li $r_{\min} \leqq s \leqq s_{\max}$. Pravděpodobnosti poruchy pak pro všechny možné hodnoty s může nabývat velikost $0 \leqq p_f \leqq 1$,
- nastane vždy, je-li $r_{\max} < s_{\min}$. Pravděpodobnost poruchy je pak $p_f = 1$.

Poznámka 3.2. Teoreticky mohou tyto průsečíky vzniknout i v nekonečnu, např. pro parametrické normální rozdělení (viz kap. 6.4.2).

Pravděpodobnost, že odolnost konstrukce R je menší než daná hodnota x, se dá určit i na základě distribuční funkce $\Phi_R(x)$:

$$P(R \leqq x) = \Phi_R(x) \,. \tag{3.9}$$

Pravděpodobnost, že účinek zatížení S se bude nacházet v intervalu $< x - \mathrm{d}x; x + \mathrm{d}x >$, je rovna:

$$P\left(x - \frac{\mathrm{d}x}{x} \leqq S \leqq x + \frac{\mathrm{d}x}{x}\right) = f_S(x) \,. \tag{3.10}$$

Pravděpodobnost současné platnosti obou výrazů (3.9) i (3.10) je dána součinem $\mathrm{d}p_f = f_S(x) \cdot \Phi_R(x)\,\mathrm{d}x$. Pro x z intervalu $(-\infty; \infty)$ je pravděpodobnost poruchy p_f dána integrálem:

$$p_f = P(R - S \leqq 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p_f = \int_{-\infty}^{\infty} f_S(x) \cdot \Phi_R(x)\,\mathrm{d}x \,. \tag{3.11}$$

Obecný zápis odhadu pravděpodobnosti poruchy p_f, vztaženého k podmínce spolehlivosti, je definován vztahem:

$$p_f = P(R - S \leqq 0) = \int_{D_f} f(X_1, X_2, \ldots, X_n)\,\mathrm{d}X_1, \mathrm{d}X_2, \ldots, \mathrm{d}X_n \,, \tag{3.12}$$

kde D_f je oblast poruchy s rezervou spolehlivosti $Z(\mathbf{X}) < 0$, a $f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ funkce sdružené hustoty pravděpodobnosti náhodných veličin $\mathbf{X} = X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Určení pravděpodobnosti poruchy p_f na základě explicitního výpočtu integrálu (3.12) bývá velice obtížné. Pro řešení (3.12) byla vyvinuta a stále se vyvíjí řada stochastických metod, jejichž přehled je uveden v kap. 4.1. Metoda POPV při využívaní základů pravděpodobnostního počtu uvedený integrál řeší numericky.

Obsah
56. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

3.5. Návrhová pravděpodobnost poruchy p_d

Mírou spolehlivosti konstrukce je v pravděpodobnostním výpočtu mezní návrhová hodnota pravděpodobnosti poruchy p_d (dále jen návrhová pravděpodobnost) nebo index spolehlivosti β. Konstrukce je spolehlivá za splnění podmínky spolehlivosti:

$$p_f < p_d \,, \tag{3.13}$$

resp.

$$\beta_d < \beta \,. \tag{3.14}$$

Návrhová hodnota pravděpodobnosti poruchy p_d (resp. indexu spolehlivosti β) se určuje na základě požadované úrovně spolehlivosti, druhu mezního stavu a předpokládané doby životnosti konstrukce T_d. Při volbě úrovně spolehlivosti příslušné konstrukce se mají uvážit okolnosti zahrnující:

- možnou příčinu a/nebo způsob dosažení mezního stavu,
- možné následky poruchy vyjádřené rizikem ztráty života, zraněním a možnými ekonomickými ztrátami,
- společenskou závažností poruchy,
- náklady a postupy nutné ke snížení rizika poruchy.

V normě [2], která již pozbyla platnosti, byly návrhové pravděpodobnosti p_d stanoveny pro oba mezní stavy podle tab. 3.1.

Směrné hodnoty návrhových pravděpodobností p_d, resp. indexu spolehlivosti β podle platných evropských normových dokumentů [3] jsou uvedeny v tab. 3.2 a 3.3. Směrné hodnoty jsou odvozeny pro tzv. *referenční dobu*, která představuje návrhovou životnost.

Úroveň spolehlivosti	*Mezní stav únosnosti*	*Mezní stav použitelnosti*
Zvýšená	$8 \cdot 10^{-6}$	$2,3 \cdot 10^{-2}$
Obvyklá	$7 \cdot 10^{-5}$	$7,0 \cdot 10^{-2}$
Snížená	$5 \cdot 10^{-4}$	$16,0 \cdot 10^{-2}$

Tab. 3.1 Návrhové pravděpodobnosti poruchy p_d podle [2]

Třída (úroveň) spolehlivosti	Minimální hodnoty β		p_d
	referenční doba 1 rok	referenční doba 50 let	
RC3 (velké důsledky)	5,2	4,3	$8,4 \cdot 10^{-6}$
RC2 (střední důsledky)	4,7	3,8	$7,2 \cdot 10^{-5}$
RC1 (malé důsledky)	4,2	3,3	$4,8 \cdot 10^{-4}$

Tab. 3.2 Doporučené minimální hodnoty indexu spolehlivosti β a návrhové pravděpodobnosti p_d pro **mezní stav únosnosti** podle [3]

Pro účely diferenciace spolehlivosti byly v [3] zavedeny třídy následku CC1, CC2 a CC3 (CC - *consequences classes*), které zohlednují následky poruchy nebo nefunkcní nezpusobilosti konstrukce (viz tab. 3.4). Na základe indexu spolehlivosti β pak byly nadefinovány i třídy spolehlivosti RC1, RC2 a RC3 (RC - *reliability classes*), které souvisí se tremi třídami následku CC1, CC2 a CC3.

Na obr. 3.3 je zobrazeno schéma, které vychází z definice funkce spolehlivosti podle (3.1) při uvážení normálního rozdělení pravděpodobnosti odolnosti konstrukce R a účinku

Obsah
58. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Třída (úroveň) spolehlivosti	Minimální hodnoty β		p_d
	referenční doba 1 rok	referenční doba 50 let	
RC2	2,9	1,5	$6,7 \cdot 10^{-2}$

Tab. 3.3 Směrné hodnoty indexu spolehlivosti β a návrhové pravděpodobnosti p_d pro **mezní stav použitelnosti** pro nosné prvky třídy spolehlivosti RC2 podle [3]

zatížení S. Porucha konstrukce nastává v souladu s (3.6) v případě, že $G < 0$. Součin indexu spolehlivosti β a směrodatné odchylky σ_G představuje vzdálenost střední hodnoty funkce spolehlivosti G od počátku. Pro index spolehlivosti pak platí:

$$\beta = \frac{\mu_G}{\sigma_G} , \tag{3.15}$$

kde střední hodnota μ_G je dána rozdílem:

$$\mu_G = \mu_R - \mu_S , \tag{3.16}$$

a směrodatná odchylka σ_G vztahem

$$\sigma_G = \sqrt{\sigma_R^2 - \sigma_S^2} , \tag{3.17}$$

kde $\mu_{R,S}$ jsou odpovídající střední hodnoty odolnosti konstrukce R, resp. účinku zatížení S, a $\sigma_{R,S}$, jejich směrodatné odchylky.

Grafická interpretace indexu spolehlivosti β je uvedena i na obr. 3.4 (např.[47]). Veličiny $\alpha_{R,S}$ představují separační součinitele náhodné proměnné S od R a naopak. Přímka určující poruchovou oblast je pak definována:

Obsah
59. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Třídy následků	*Popis*	*Příklady pozemních nebo inženýrských staveb*
CC3	**Velké** následky s ohledem na ztráty lidských životů nebo **velmi významné** následky ekonomické, sociální nebo pro prostředí	Stadióny, budovy určené pro veřejnost, kde jsou následky poruchy vysoké (např. koncertní sály)
CC2	**Střední** následky s ohledem na ztráty lidských životů nebo **značné** následky ekonomické, sociální nebo pro prostředí	Obytné a administrativní budovy určené pro veřejnost, kde jsou následky poruchy středně závažné (např. kancelářské budovy)
CC1	**Malé** následky s ohledem na ztráty lidských životů nebo **malé/zanedbatelné** následky ekonomické, sociální nebo pro prostředí	Zemědělské budovy, kam lidé běžně nevstupují (např. budovy pro skladovací účely, skleníky)

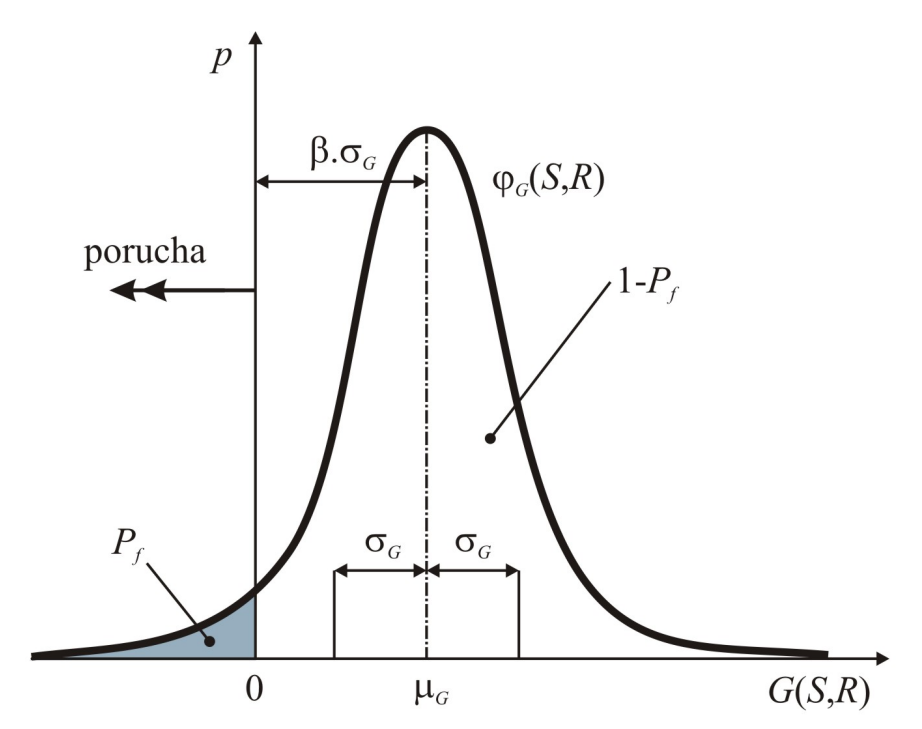
Tab. 3.4 Definice tříd následků podle [3]

$$\mu_G - \beta \cdot \sigma_G = 0, \tag{3.18}$$

kde G je funkce spolehlivosti.

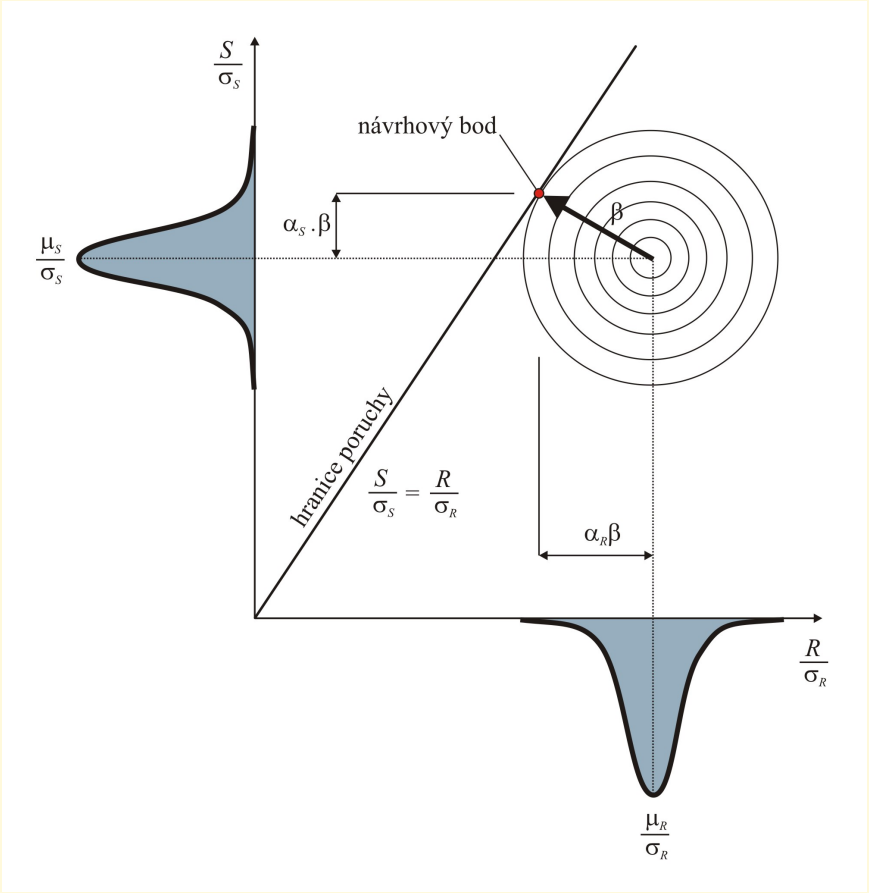
Poznámka 3.3. V normě EN 1990 [3] se koeficienty $\alpha_{R,S}$ nazývají součinitele citlivosti podle metody FORM.

Obsah
60. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obr. 3.3 Stanovení indexu spolehlivosti β

Obsah
61. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obr. 3.4 Geometrická interpretace indexu spolehlivosti β

Obsah
62. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Z rovnice (3.18) lze odvodit index spolehlivosti β, který se váže k tzv. návrhovému bodu (*design point*):

$$\beta = \frac{\mu_G}{\sigma_G} = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 - \sigma_S^2}} \geqq \beta_d. \tag{3.19}$$

Z rovnice (3.18) podle [3] vyplývá i přímý vztah mezi indexem spolehlivosti β a pravděpodobností poruchy p_f:

$$p_f = \Phi(-\beta)\,, \qquad p_d = \Phi(-\beta_d)\,, \tag{3.20}$$

kde Φ označuje distribuční funkci normovaného normálního rozdělení ($\mu_N = 0, \sigma_N = 1$), resp.

$$\beta = -\Phi^{-1}(p_f)\,, \qquad \beta_d = -\Phi^{-1}(p_d)\,, \tag{3.21}$$

kde Φ^{-1} je inverzní distribuční funkce normovaného normálního rozdělení pro pravděpodobnost poruchy p_f.

Závislost mezi pravděpodobností poruchy p_f a indexem spolehlivosti β je rovněž uvedena v tab. 3.5 [3, 6] .

p_f	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}
β	1,28	2,32	3,09	3,72	4,27	4,75	5,20

Tab. 3.5 Závislost mezi p_f a β podle [3, 6]

V publikaci [46] jsou uvedeny i aproximační výrazy na výpočet pravděpodobnosti poruchy p_f a indexu spolehlivosti β pro interval $10^{-7} \leqq p_f \leqq 10^{-1}$ ve tvaru

$$p_f \approx 10^{[-0,1981 \cdot (-\beta - 0,605)^2 - 0,297]}\,, \tag{3.22}$$

Obsah
63. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

$$\beta_d \approx -0,605 + \sqrt{-\frac{\log p_f}{0,198} - 1,5}\,. \tag{3.23}$$

Příklad 3.4. Návrhová hodnota indexu spolehlivosti β_d pro třídu spolehlivosti RC2 a návrhovou životnost 50 let podle tab. 3.2 činí 3,8. Tutéž hodnotu lze získat dosazením návrhové pravděpodobnosti $p_d = 7,2 \cdot 10^{-5}$ téže třídy spolehlivosti do vztahu (3.22):

$$\beta_d \approx -0,605 + \sqrt{-\frac{\log(7,2 \cdot 10^{-5})}{0,198} - 1,5} = 3,802104 \approx 3,8$$

nebo s využitím vztahu (3.21). Pro výpočet inverzní distribuční funkce normovaného normálního rozdělení lze použít tabulkový procesor Excel s tabulkovou funkcí NORMSINV s výsledným řešením

$$\beta_d = -\Phi^{-1}(7,2 \cdot 10^{-5}) = 3,801195 \approx 3,8\,.$$

Příklad 3.5. Hodnotu návrhové pravděpodobnosti p_d lze naopak určit dosazením indexu spolehlivosti $\beta_d = 3,8$ (třída spolehlivosti RC2 s návrhovou životností 50 let podle tab. 3.2) do vztahu (3.23):

$$p_d \approx 10^{[-0,1981 \cdot (-3,8 - 0,605)^2 - 0,297]} = 7,228741 \cdot 10^{-5} \approx 7,2 \cdot 10^{-5}$$

nebo s využitím vztahu (3.20). Pro výpočet distribuční funkce normovaného normálního rozdělení lze opět použít tabulkový procesor Excel s tabulkovou funkcí NORMSDIST, která určí výslednou hodnotu návrhové pravděpodobnosti p_d:

$$p_d = \Phi(-3.8) = 7,234804 \cdot 10^{-5} \approx 7,2 \cdot 10^{-5}\,.$$

Při stanovení hodnoty návrhové pravděpodobnosti p_d lze brát v úvahu i návrhovou životnost konstrukce, tedy předpokládanou dobu, po kterou má být konstrukce nebo její část používaná při běžné údržbě pro stanovený účel, avšak bez nutnosti zásadnější opravy [23]. Tab. 3.6 uvádí pět informativních kategorií návrhové životnosti a orientační hodnoty životnosti konstrukcí v letech, včetně příkladů staveb podle doporučení národní přílohy [3].

Kategorie návrhové životnosti	*Informativní návrhová životnost T_d (v letech)*	*Příklady*
1	10	Dočasné konstrukce
2	10 až 20	Vyměnitelné konstrukční části, např. jeřábové nosníky, ložiska
3	25 až 50	zemědělské a obdobné stavby
4	80	budovy a další běžné stavby
5	100	monumentální stavby, mosty a jiné inženýrské konstrukce

Tab. 3.6 Informativní návrhové životnosti podle [3]

Pro konstrukce s jinou návrhovou životností T_{dx} než je referenční návrhová životnost T_d lze určit návrhovou pravděpodobnost P_{dx} s využitím vztahu z [46]:

$$P_{dx} = 1 - (1 - p_d)^{\frac{T_{dx}}{T_d}} \quad , \tag{3.24}$$

kde p_d je návrhová pravděpodobnost pro návrhovou dobu životnosti T_d a P_{dx} je návrhová pravděpodobnost v době $T_{dx} \leqq T_d$. Je však nutno upozornit, že pravděpodobnost poruchy je funkcí času $p_f(t)$.

Obsah
66. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

3.6. Test

Spustit test Odpovězte na otázky v tomto testu. Test musíte spustit kliknutím na tlačítko, poté vyplňte odpovědi a ukončete test. Správná může být více než jedna odpověď.

1. Funkce spolehlivosti RF porovnává:

(a) zatížení a geometrii konstrukce,
(b) účinek zatížení a pravděpodobnost poruchy,
(c) účinek zatížení a odolnost konstrukce,
(d) odolnost konstrukce a mez kluzu.

2. Při stanovení účinku zatížení S (nebo také E) je nutno v pravděpodobnostních výpočtech brát v úvahu mj.:

(a) zdroj zatížení, způsob působení na konstrukci, intenzitu, směr, dobu trvání, ale také vliv prostředí,
(b) mez kluzu oceli S235.

3. Odolnost konstrukce R je závislá zejména na:

(a) výsledku náhodného experimentu,
(b) výpočetním modelu, materiálových vlastnostech konstrukce a jejích geometrických charakteristikách.

4. Podmínku spolehlivosti lze vyjářit v následujícím tvaru:

(a) $RF = R - S \geqq 0$,
(b) $RF = R - S \leqq 0$,
(c) $RF = R - S = 0$,
(d) $RF = R - S < 0$.

Obsah
67. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

5. Pravděpodobnost poruchy získáme:

(a) statistickou analýzou náhodně proměnného účinku zatížení S.
(b) statistickým vyhodnocením náhodně proměnné funkce spolehlivosti RF.
(c) statistickým vyhodnocením náhodně proměnné odolnosti konstrukce R.
(d) výpočtem pětiprocentního kvantilu náhodně proměnné funkce spolehlivosti RF.

6. Pravděpodobnost poruchy p_f je možno stanovit jako:

(a) $p_f = P(R - S \leqq 0)$,
(b) $p_f = P(R - S < 0)$,
(c) $p_f = P(R - S = 0)$,
(d) $p_f = P(R - S \geqq 0)$.

7. Při pravděpodobnostní analýze konstrukce dle mezního stavu únosnosti byla zjištěna pravděpodbnost poruchy $p_d = 6,9 \cdot 10^{-6}$. Vyhoví hodnocená konstrukce podle mezní stav únosnosti a Třídy spolehlivosti RC2 (střední důsledky) (viz tab. 3.2, [3])? Platí tedy, že:

(a) navržená konstrukce nevyhoví podle mezního stav únosnosti a Třídy spolehlivosti RC2 [3] .
(b) navržená konstrukce vyhoví podle mezního stav únosnosti a Třídy spolehlivosti RC2 [3] .

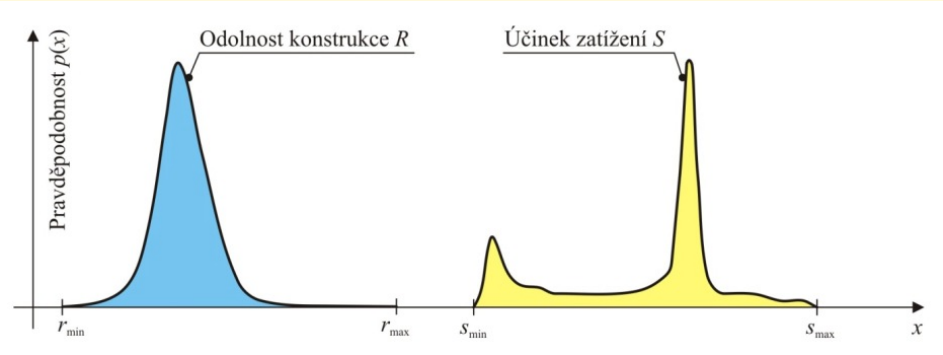
8. Index spolehlivosti β

(a) je roven pravděpodobnosti poruchy pf,
(b) je střední hodnota funkce spolehlivosti RF,
(c) je směrodatná odchylka funkce spolehlivosti RF,
(d) umožňuje vyčíslit úroveň spolehlivosti podobně jako pravděpodobnost poruchy pf.

Obsah
68. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

9. Jakou velikost má pravděpodobnost poruchy p_f zobrazená na obr. 3.5?

Desetiny se ve vstupním poli oddělují **tečkou**.



Obr. 3.5 Porovnání odolnosti R a účinku zatížení S

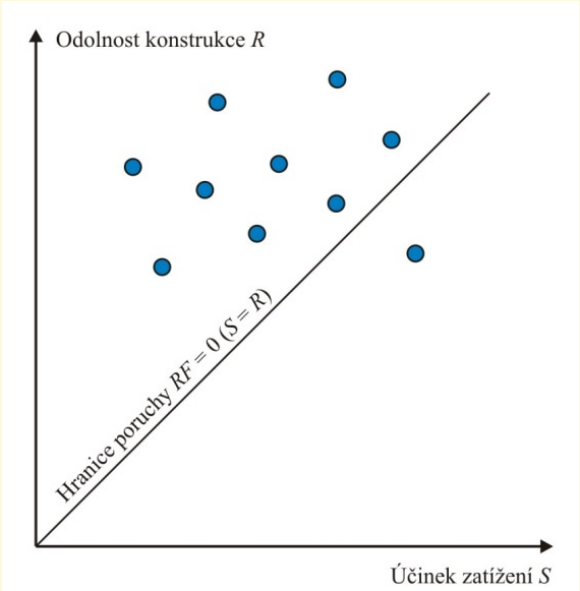
10. Návrhová pravděpodobnost poruchy p_d má pro mezní stav únosnosti a Třídu spolehlivosti RC2 (střední důsledky) (viz tab. 3.2, [3]) velikost:

(a) $8,4 \cdot 10^{-6}$, (b) $7,2 \cdot 10^{-5}$, (c) $4,8 \cdot 10^{-4}$, (d) $6,7 \cdot 10^{-2}$.

Obsah
69. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

11. Jaká pravděpodobnost poruchy p_f je zobrazena na obr. 3.6?

Desetiny se ve vstupním poli oddělují **tečkou**.

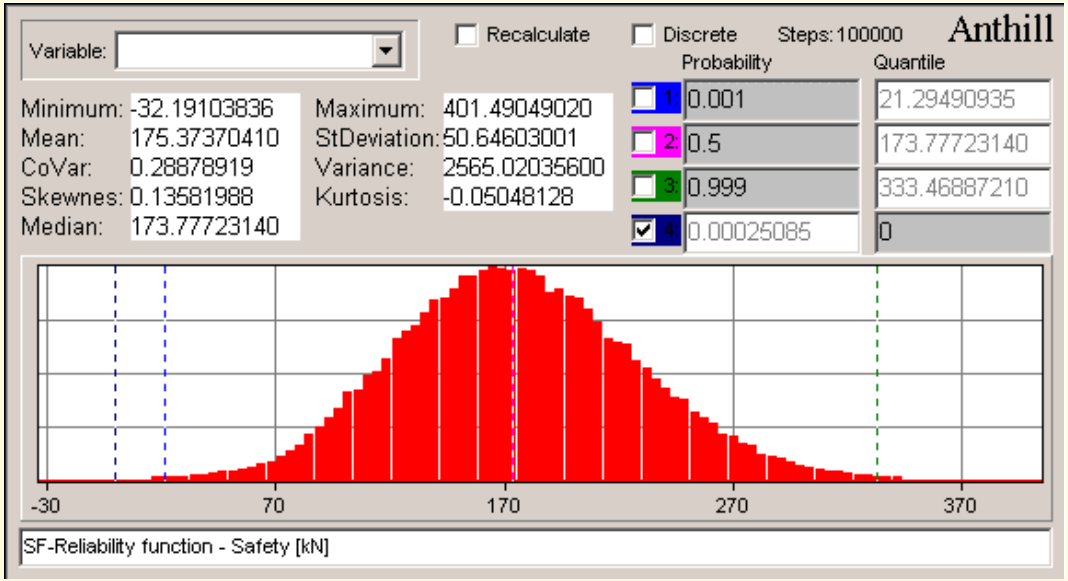


Obr. 3.6 2D zobrazení závislosti odolnosti R a účinku zatížení S

Obsah
70. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

12. Na obr. 3.7 je výstup z programu Anthill [19], který obsahuje rozdělení funkce spolehlivosti RF. Jaká je pravděpodobnost poruchy p_d?

(a) $1,0 \cdot 10^{-3}$, (b) $333,47$, (c) $2,5 \cdot 10^{-4}$, (d) 0.00025.

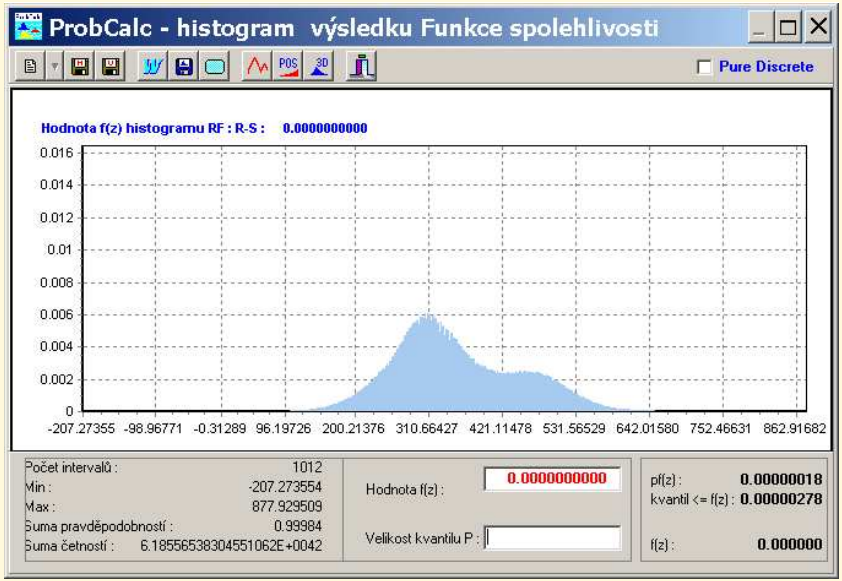


Obr. 3.7 Rozdělení funkce spolehlivosti RF, výstup programu Anthill [19]

Obsah
71. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

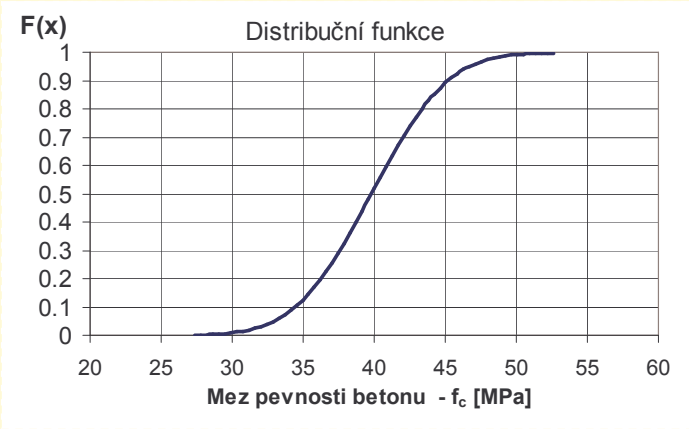
13. Na obr. 3.8 je výstup z programu ProbCalc [38], který obsahuje rozdělení funkce spolehlivosti RF. Jaká je pravděpodobnost poruchy p_d?

(a) $1,8 \cdot 10^{-7}$, (b) $2,8 \cdot 10^{-6}$, (c) $0,99984$, (d) 0 .



Obr. 3.8 Rozdělení funkce spolehlivosti RF, ProbCalc [38]

Obsah
72. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obr. 3.9 Distribuční funkce meze pevnosti betonu

14. Uvažujme distribuční funkci meze pevnosti betonu o střední hodnotě $\mu = 40$ MPa a směrodatné odchylce $\sigma = 4.2$ MPa (viz obr. 3.9). Jaká je pravděpodobnost, že bude střední hodnota μ překročena?

[ ] MPa

Desetiny se ve vstupním poli oddělují **tečkou**.

15. Jaká je pravděpodobnost, že u stejné distribuční funkce meze pevnosti betonu (obr. 3.9) nebude překročena hodnota $f_c = 35$ MPa? Je to:

(a) $0,0$, (b) $0,126$, (c) $0,55$, (d) $1,0$.

Obsah
73. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

16. Jaká je naopak pravděpodobnost, že u též výše uvedené distribuční funkce meze pevnosti betonu /newline (obr. 3.9) bude překročena hodnota $f_c = 35$ MPa? Je to:

(a) $0,0$, (b) $0,45$, (c) $0,874$, (d) $1,0$.

17. Z následujících hodnot vyberte tu, která nejlépe odpovídá charakteristické hodnotě meze pevnosti betonu jehož distribuční funkce je zobrazena na obr. 3.9). Je to:

(a) $60,0$, (b) $32,9$, (c) $40,0$, (d) $37,35$.

Konec testu

Počet správných odpovědí:

Vyznačení oprav do testu: Opravit

Kliknutím na tlačítko *Ans* po opravení testu zobrazíte na pravé straně obrazovky správnou odpověď.

Kapitola 4

Pravděpodobnostní metody řešení modelu s náhodnými proměnnými

Obecný výpočet integrálu pravděpodobnosti poruchy (3.12) je velmi složitý. Rozvoj metod integrace tohoto vztahu souvisí zejména s vývojem výkonné výpočetní techniky. V minulosti byla vyvinuta řada pravděpodobnostních postupů, jejichž přehled je uveden v kap. 4.1.

Tyto postupy umožňují provádět zejména:

- Statistickou analýzu - jsou tedy zaměřeny na odhad statistických momentů výpočetních parametrů jako jsou např. střední hodnoty nebo rozptyly (viz kap. 2.3).
- Citlivostní analýzu, při které se kvantifikuje citlivost výstupu v závislosti na proměnlivosti vstupních veličin.
- Spolehlivostní analýzu, při níž lze pravděpodobnostním výpočtem stanovit teoretickou

hodnotu pravděpodobnosti poruchy na základě analýzy funkce spolehlivosti (poruchy).

4.1. Přehled pravděpodobnostních metod a jejich aplikace

Uvedený přehled pravděpodobnostních metod byl publikován např. v [75].

1. Simulační metody
   (a) Klasická simulace Monte Carlo (Direct Sampling)
      - Simulation Based Reliability Assessment (SBRA)

   (b) Stratifikované simulační techniky
      - Latin Hypercube Sampling (LHS)
      - Stratified Sampling (SS)

   (c) Pokročilé simulační metody
      - Importance Sampling (IS)
      - Adaptive Sampling (AS)
      - Directional Sampling (DS)
      - Line Sampling (LS)
      - Design Point Sampling (DPS)
      - Axis Orthogonal Sampling (AOS)

2. Aproximační metody
   (a) First (Second) Order Reliability Method (FORM/SORM)

   (b) Metody výběru vhodného rozdělení pravděpodobnosti založené na náhodném výběru rezervy spolehlivosti

(c) Perturbační techniky

(d) Metody plochy odezvy

- Response Surface (RS)
- Adaptive Response Surface (ARS)

3. Přímé (numerické) metody

   (a) Přímý Optimalizovaný Pravděpodobnostní Výpočet (POPV)

4. Pokročilé způsoby pravděpodobnostních výpočtů

4.1.1. Simulační metody

Do skupiny simulačních metod spadá většina pravděpodobnostních metod, které jsou založeny na numerické integraci Monte Carlo, tedy na opakovaných vyčísleních (realizacích, simulacích) funkce spolehlivosti (poruchy). Klasickou simulaci Monte Carlo, která je snadno aplikovatelná a všeobecně srozumitelná (blíže viz kap. 5), však není možné aplikovat na výpočtově náročné problémy, neboť metoda vyžaduje velký počet simulací.

Z tohoto důvodu je patrný rozvoj dalších metod založených na simulacích, u kterých lze dosáhnout zvýšené efektivity vyčíslení výsledné pravděpodobnosti poruchy redukcí rozptylu jednotlivých simulací a jejich koncentrováním do oblasti poruchy, což umožňuje výrazné snížení výpočetního času. Tyto postupy se souhrnně nazývají zdokonalené simulační metody. V současnosti jsou využívány zejména metody Importance Sampling (IS), Adaptive Sampling (AS) [14] a Directional Sampling (DS), které poskytují dostatečně přesné odhady pravděpodobnosti poruchy. Další ze zdokonalených simulačních metod - Stratified Sampling (SS) byla publikovaná např. v [83]. Z množství účinných pravděpodobnostních metod,

vyvinutých v posledních desetiletích, je nutno zmínit i stratifikovanou simulační techniku Latin Hypercube Sampling (LHS), o které je krátce pojednáno i v kap. 5.3.2.

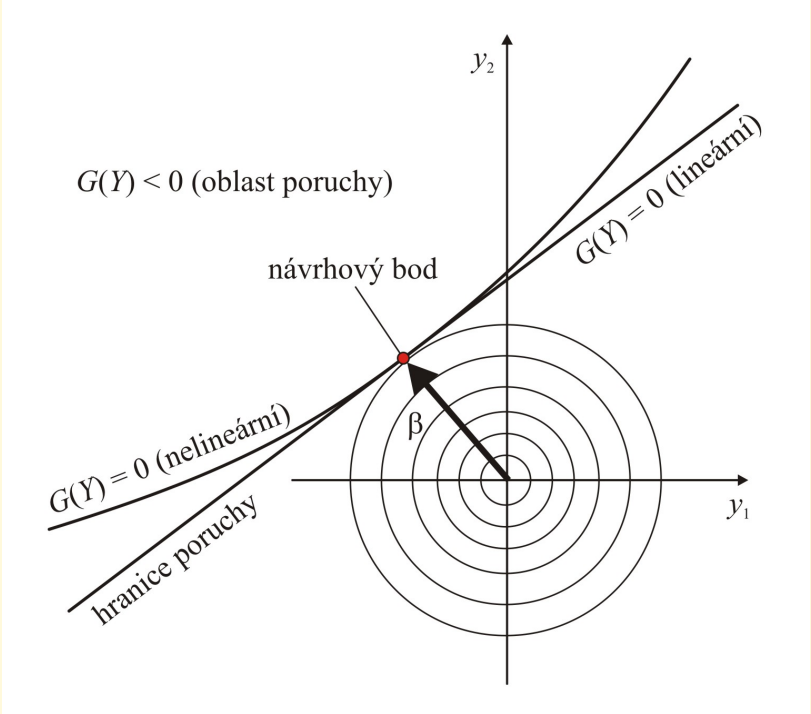
4.1.2. Aproximační metody

Do této kategorie spadají metody, nazývané rovněž metodami analytickými. Tyto výpočetní postupy vedou k aproximaci výsledné funkce spolehlivosti (poruchy) jednoduchou aproximační funkcí. Metody FORM a SORM byly navzdory problémům s dosažením přesnosti přijaty odbornou veřejností a dnes jsou obsaženy v normových předpisech jako standardní nástroje pro jejich kalibraci.

Jednou z prvních prací, které se zabývaly přibližnými aproximačními postupy pro stanovení spolehlivosti, byla [20], kde je již obsažena definice návrhového bodu (design point) a indexu spolehlivosti Hasofer-Lind. Problematika využití aproximačních metod v oblasti posuzování spolehlivosti pak byla souhrnně zpracovaná např. v [61, 15].

Metoda FORM (First Order Reliability Method) je jednou ze základních metod teorie spolehlivosti, která slouží pro stanovení pravděpodobnosti poruchy p_f, příp. indexu spolehlivosti β. Je založena na linearizaci funkce poruchy G. Pokud bude náhodný vektor $\mathbf{X}$ obsahovat základní náhodné veličiny $\mathbf{X} = X_1, X_2, \ldots, X_n$, obsažené ve funkci poruchy $G(\mathbf{X})$, výpočet metodou FORM se pak skládá z následujících výpočetních kroků:

- Transformace základních veličin X_i na normované normální veličiny Y_i a funkce poruchy $G(\mathbf{X})$ na $G(\mathbf{Y})$.
- Aproximace hranice poruchy $G(\mathbf{Y}) = 0$ lineární funkcí v návrhovém bodě. Návrhový bod je definován jako bod na hranici poruchy (pro $G(\mathbf{Y}) = 0$), který je nejblíže průměru v prostoru normalizovaných veličin.



Obr. 4.1 Postup aproximačních metod FORM/SORM s použitím návrhového bodu - dvourozměrný případ

Obsah
79 strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

- Stanovení indexu spolehlivosti β jako vzdálenost návrhového bodu od počátku (viz obr. 4.1). Na základě indexu spolehlivosti β lze s pomocí (3.20) určit i pravděpodobnost poruchy p_f.

Postup je zobrazen i na obr. 3.4, kde jsou znázorněny i náhodné veličiny E a R s normálním rozdělením.

Spolehlivostní metoda SORM (Second Order Reliability Method) pak používá k aproximaci hranice poruchy $G(\mathbf{Y}) = 0$ v návrhovém bodě kvadratickou funkci (viz obr. 4.1). Tak lze dosáhnout mnohem přesnějšího řešení než metodou FORM.

K řešení výpočetně náročných úloh se v současnosti často využívá i metod plochy odezvy, zejména metoda Response Surface (RS), které je věnovaná např. [51]. Výpočetní postup Response Surface bývá používán ve spojitosti s metodou stochastických konečných prvků (SFEM), kde jsou náhodné vlastnosti materiálu a geometrie modelovány jako náhodná pole. V [50] je tato pokročilá výpočetní metoda využita při posouzení spolehlivosti jaderných elektráren na Slovensku.

4.1.3. Přímé (numerické) řešení

K metodám, jenž řeší integrál pravděpodobnosti poruchy (3.12) přímo, patří metoda Přímého Optimalizovaného Pravděpodobnostního Výpočtu (POPV), která je detailně popsaná v kap. 6. S jejím využitím lze v současnosti řešit řadu pravděpodobnostních úloh, což je rovněž dokumentováno v kap. 6.4.13 a kap. 6.5.

4.1.4. Pokročilé způsoby pravděpodobnostních výpočtů

Z pokročilých a nově vyvíjených způsobů pravděpodobnostních výpočtů, které nejsou předmětem tohoto didakticky zaměřeného učebního textu stojí za zmínku metodiky založené na využití genetických (evolučních) algoritmů (např. [102]), fuzzy množinách (viz např. [72], [77]) a principech teorie chaosu (viz např. [24]).

4.2. Software

Uvedené pravděpodobnostní postupy jsou většinou v různých modifikacích implementovány do stále vyvíjených programů, které mohou být zaměřeny na zmiňovanou statistickou, citlivostní nebo spolehlivostní analýzu řešené úlohy.

Za zmínku jistě stojí zejména programový systém tří výpočetních modulů **Comrel**, **Sysrel** a **Strurel** [94], které umožňují provádět mj. statistickou a citlivostní analýzu náhodných proměnných veličin, posudek spolehlivosti konstrukcí, rizikové analýzy nebo deterministické i pravděpodobnostní výpočty v oborech únavové a lomové mechaniky, kompozitních materiálů a lineární, nelineární či dynamické analýzy konstrukcí metodou konečných prvků (FEM).

Dalším programovým systémem je **Cossan**, jehož název je odvozen z označení COmputational Stochastic Structural ANalysis [80]. Programový systém umožňuje provádět posudek spolehlivosti na základě simulačních výpočtů a pravděpodobnostní výpočty spojené se stochastickou metodou konečných prvků (SFEM).

Software **Phimeca** [82] je založen na simulacích, statistické analýze, teorii pravděpodobnosti a pravděpodobnostních metodách posuzování konstrukcí.

Programem **Proban** [86] lze uskutečnit pravděpodobnostní posuzování konstrukcí s využitím aproximačních metod FORM/SORM, klasické metody Monte Carlo i řady pokročilých

pravděpodobnostních metod a simulačních technik např. Adaptive Response Surface (ARS), Stratified Sampling (SS), Directional Sampling (DS), Design Point Sampling (DPS), Axis Orthogonal Sampling (AOS) a Latin Hypercube Sampling (LHS).

Systém **SLang** [90] v sobě integruje metodu konečných prvků s možností stochastického modelování. Vstupní veličiny lze vyjádřit stochasticky a výpočetní model vyřešit s použitím klasické metody Monte Carlo nebo metody Response Surface (RS).

Další komerční systém integrující metodu konečných prvků s možností stochastického modelování je **ANSYS** [1]. Pravděpodobnostní modul tohoto programu nabízí řešení metodami: Monte Carlo, Latin Hypercube Sampling (LHS) a Response Surface (RS).

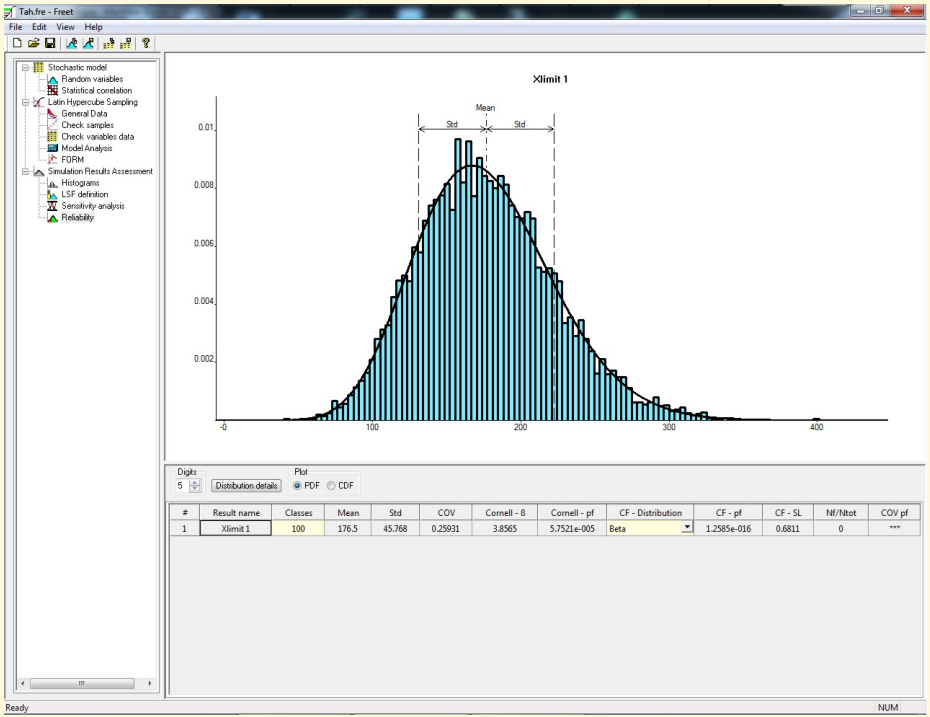
Program **VaP** (zkratka pro Variable Processor) [81], který vedle aproximačních metod FORM/SORM využívá i klasickou simulační metodu Monte Carlo a Importance Sampling (IS). Je vhodný pro řešení jednodušších časově nezávislých úloh.

Nessus [74] je modulový počítačový systém pro provádění pravděpodobnostní analýzy konstrukčních komponentů a systémů, u kterých se vyskytují variabilní zatížení, materiálové charakteristiky, tvar, okrajové podmínky, jenž jsou v průběhu výpočtu simulovány. Software byl původně vyvíjen pro NASA pro pravděpodobnostní výpočty vesmírných raketoplánů. V současné době jej firma SwRI vyvíjí pro daleko širší okruh řešených problémů v leteckém a automobilovém průmyslu, biomechanice, geomechanice a dynamice.

Z tuzemských softwarových produktů je možno uvést velmi rozšířený program **Anthill** [19], využívající k pravděpodobnostním výpočtům klasickou simulaci Monte Carlo.

Software **Freet** (zkratka pro Feasible REliability Engineering Tool) [76] (viz obr. 4.2) umožňuje vyřešit řadu stochastických úloh s využitím simulačních technik LHS či klasické metody Monte Carlo, příp. aproximačních postupů FORM/SORM.

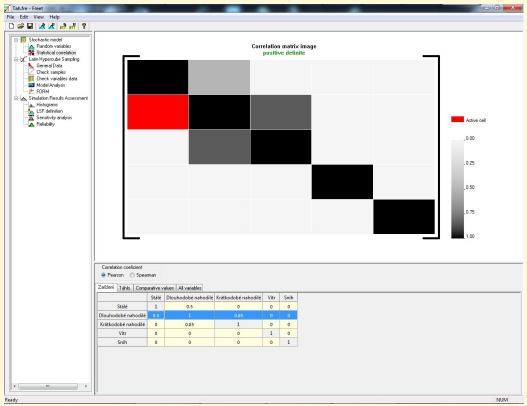
Statistickou závislost vstupních veličin lze v programu Freet zadat pomocí korelační matice, což se při samotném pravděpodobnostním výpočtu zohlední s využitím metody



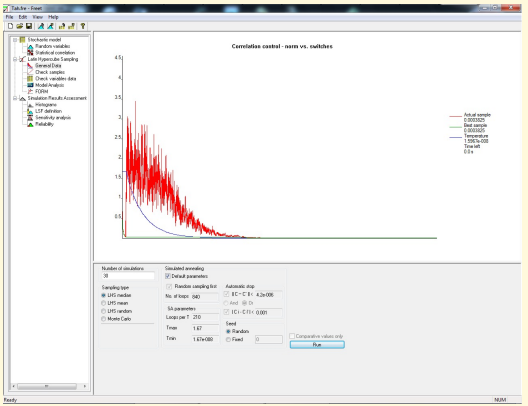
Obr. 4.2 Pracovní plocha programu Freet s výsledným grafem funkce spolehlivosti a vypočtenou pravděpodobností poruchy p_f

Obsah
83. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

simulovaného žíhání (viz obr. 4.3).



a) Panel pro zadání korelační matice



b) Zavádění statistické závislosti metodou simulovaného žíhání

Obr. 4.3 Statistická závislost vstupních náhodných veličin v programu Freet

Výpočetní modul Freet-D umožňuje řešit pravděpodobnostní úlohy zaměřené na degradaci materiálu nosných konstrukcí, jako např. analýza železobetonové konstrukcí z hlediska její životnosti (např. [108]).

Ve spojitosti s dalšími programovými produkty **Sara** (Structural Analysis and Reliability Assessment, interface) a **Atena** (MKP program pro modelování nelineárních úloh z oblasti betonových a železobetonových konstrukcí a prvků) lze uvedeným softwarem řešit i velmi složité úlohy.

Pravděpodobnostní výpočet pomocí simulace Monte Carlo umožňuje program **Monte**

Obsah
84. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

[10], který lze propojit s MKP řešičem **uFEM** [11].

Programový balík **ProbCalc** [42] obsahuje moduly **HistAn** [36], **HistOp** [37] a **ProbCalc** [38], kterými je možno počítat pravděpodobnostní úlohy přímým numerickým řešením metodou POPV. Všechny tři uvedené programové produkty jsou podrobně popsány v kap. 6.3.1, kap. 6.3.2 a kap. 6.3.3.

Velmi účinným nástrojem pro matematické výpočty, a tedy i pravděpodobnostní analýzy, je prostředí **Matlab** [69].

4.3. Test

Spustit test Odpovězte na otázky v tomto testu. Test musíte spustit kliknutím na tlačítko, poté vyplňte odpovědi a ukončete test. Správná může být více než jedna odpověď.

1. Pravděpodobnostní metody řešení modelu nejsou určeny k provádění:
   - (a) odhadu statistických parametrů (střední hodnoty, rozptylu),
   - (b) analýzy bez náhodných proměnných,
   - (c) kvantifikaci závislosti mezi proměnlivosti vstupních veličin a výstupních veličin,
   - (d) odhadu pravděpodobnosti poruchy.
2. Mezi simulační metody nepatří:
   - (a) Monte Carlo,
   - (b) First Order Reliability method (FORM),
   - (c) Latin Hypercube Sampling (LHS),
   - (d) Importance Sampling.
3. Mezi přímé numerické metody patří:
   - (a) Přímý optimalizovaný pravděpodobnostní výpočet (POPV),
   - (b) First Order Reliability method (FORM),
   - (c) Latin Hypercube Sampling (LHS),
   - (d) Importance Sampling.
4. Který software není určen k pravděpodobnostním výpočtům:
   - (a) Freet,
   - (b) Nessus,
   - (c) Scia Engineer,
   - (d) Anthill.

Obsah
86. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

5. Který z níže uvedených programových nástrojů umožňuje kombinovat pravděpodobnostní posudek a analýzu metodou konečných prvků?

(a) Anthill,
(b) systém SARA a Athena,
(c) Scia Engineer,
(d) ANSYS.

Konec testu

Počet správných odpovědí:

Vyznačení oprav do testu: Opravit

Obsah

87. strana ze 283

Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Kapitola 5

Metody typu Monte Carlo

Společným rysem metod založených na simulační technice Monte Carlo je numerická simulace, která využívá náhodné realizace vstupních náhodných veličin. Náhodné veličiny se generují podle jejich teoretické definice rozdělení pravděpodobnosti s využitím generátoru (pseudo)náhodných čísel.

5.1. Klasická metoda Monte Carlo

Klasickou metodou Monte Carlo je nazývána skupina algoritmů, které ve stochastických metodách provádějí simulaci náhodných jevů generováním pseudonáhodných čísel, vyjadřujících chování náhodné veličiny. Jejich rozvoj je spojen zejména s výpočtem vícerozměrných integrálů hustot pravděpodobností spojitých náhodných veličin, kde běžné numerické metody nejsou příliš efektivní.

Metoda Monte Carlo má široké využití od simulací experimentů až po řešení diferenciálních rovnic. Její podstata je blízká inženýrskému myšlení, neboť umožňuje numericky simulovat rozptyl parametrů charakterizujících skutečné chování konstrukce.

Obr. 5.1 Georges-Louis Leclerc, Comte de Buffon (1707-1788)

5.1.1. Historie metody Monte Carlo

Jedním z nejstarších popsaných případů využití metody je problém tzv. *Buffonovy jehly*, nazvaný po francouzském matematikovi Georges-Louis Leclerc Comte de Buffonovi (obr. 5.1, převzato z [12]), který se v roce 1777 pokoušel odhadnout hodnotu Ludolfova čísla π náhodným vrháním jehly na linkovaný papír, na kterém je vzdálenost mezi všemi linkami stejná. Pokud bude mít používaná jehla délku stejnou, jako je vzdálenost mezi linkami, lze s pomocí tohoto experimentu určit přibližnou hodnotu Ludolfova čísla π. Pravděpodobnost jevu, kdy jehla po dopadu na papír zůstane ležet na papíře tak, že protíná některou z linek, je totiž rovna (důkaz viz např. [13]):

$$p = \frac{2}{\pi} \tag{5.1}$$

a lze tedy po určitém množství hodů a vyhodnocením poměru: kolikrát z celkového množství hodů jehla protnula některou z linek, uvedený vztah vyhodnotit. Jedná se tedy skutečně o první aplikaci metody Monte Carlo.

Obsah
89. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Pravděpodobně první systematické využití metody Monte Carlo s reálnými výsledky je datováno až k roku 1930, kdy Nobelovou cenou oceněný italský fyzik Enrico Fermi (obr. 5.2, převzato z [16]) tento přístup využíval ke generování pseudonáhodných čísel, potřebných k výpočtu vlastností v té době nově objevené částice - neutronu. Za 2. světové války se podílel na utajeném vývoji americké atomové bomby. V rámci projektu s krycím názvem Manhattan pak společně s vedoucím vědeckých prací Robertem Oppenheimerem provedl 2.prosince 1942 řetězovou reakci štěpení jader uranu. Výsledkem jejich společného vývoje byly první jaderné pokusy, následně pak sestrojení pum Fat Man a Little Boy, jenž byly 6. a 9. srpna 1945 použity k útoku na japonská města Hirošimu a Nagasaki.

Obr. 5.2 Enrico Fermi (1901-1954)

Dalším, kdo se podílel na zmiňovaném projektu Manhattan, byl rovněž polský matematik židovského původu Stanisław Marcin Ulam (obr. 5.3, převzato z [103]), který kromě podstaty štěpné reakce u vodíkové pumy a principu nukleárního pohonu vymyslel množství matematických nástrojů v numerice, teorii množin a algebraice. Byl to také on, kdo navrhl metodu Monte Carlo pro vyčíslení složitých matematických integrálů, vyskytujících se v teorii nukleárních řetězových reakcí, a pro samotnou simulaci odhadované štěpné reakce (nevěděl ovšem, že Fermi a jeho spolupracovníci využívali podobnou metodu již dříve). Pro dnes již zavedené pojmenování - metoda Monte Carlo, se Ulam nechal inspirovat známým kasinem v Monaku, kde Ulamův strýc kdysi sázel. Náhodnost jevů a opakování jejich výskytu jsou prakticky identické k činnostem prováděných v kasinech, kde ruleta představuje jednoduchý fyzikální generátor náhodných čísel.

Ulamovou zásluhou se metoda rozšířila při řešení složitých matematických úloh využívajících „statistical sampling“ - statistický výběr s náhodnými čísly. Metoda Monte Carlo byla dále systematicky rozvíjena Johnem von Neumannem, Nicholasem Metropolisem (jedna z prvních publikaci věnovaným metodě Monte Carlo [71]) a dalšími.

Metoda Monte Carlo je založena na provádění náhodných experimentů s modelem systému a jejich vyhodnocení. Výsledkem provedení velkého množství experimentů je obvykle určení **pravděpodobnosti určitého jevu**. Výhodou je jednoduchá implementace, nevýhodou je vysoká výpočetní náročnost nutná pro dosažení dostatečné přesnosti výpočtu.

Obr. 5.3 Stanislaw Ulam (1909-1984)

Předností metody je jednoduchá struktura výpočtového algoritmu, jenž je vytvořen pro uskutečnění jednoho náhodného výběru, který se N-krát opakuje. Každý pokus je nezávislý na ostatních, díky čemuž je metoda často nazývána také metodou statistických pokusů (Simple Random Sampling).

Počet opakování může být libovolný a závisí na požadované přesnosti výpočtu (viz kap. 5.1.6). Při velkém počtu nezávislých pokusů je možné téměř jistě očekávat, že relativní četnost se bude blížit teoretické hodnotě pravděpodobnosti, což je dáno zákonem velkých čísel. Ten lze popsat s pomocí střední hodnoty náhodné veličiny:

$$\overline{X}_n = \frac{1}{N}(X_1 + X_2 \ldots + X_n), \tag{5.2}$$

kde $X_1, X_2, \ldots, X_n$ představuje nekonečnou posloupnost vzájemně nezávislých náhodných čísel s konečnou střední hodnotou $\mu < \infty$. Se zvyšujícím se počtem historií $n \to \infty$ bude

Obsah
91. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

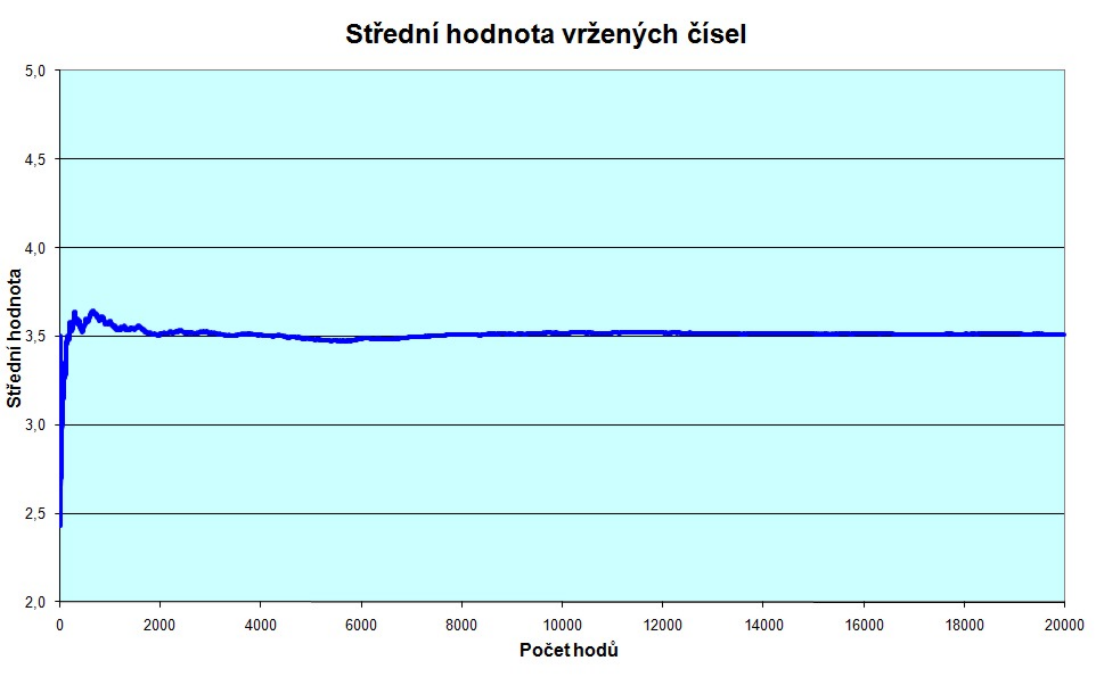
střední hodnota vygenerované posloupnosti konvergovat ke střední hodnotě $\overline{X}_n \to \mu$, což lze demonstrovat na jednoduchém příkladu s hrací kostkou.

Příklad 5.1. V případě hrací kostky o šesti stranách je aritmetický průměr součtu čísel na jednotlivých stranách roven:

$$\mu = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = 3,5\ .$$

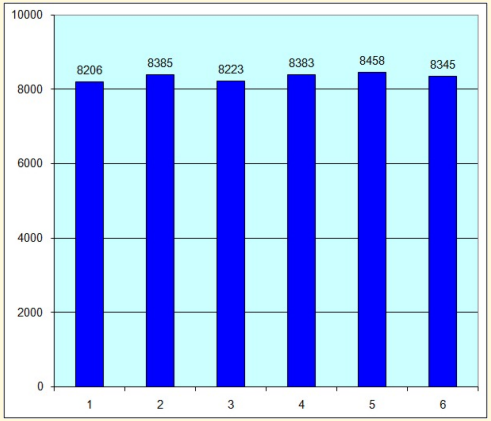
Tato střední hodnota byla postupně určena pro 65528 vygenerovaných čísel a jak ukazuje graf na obr. 5.4, konverguje k předpokládané hodnotě. Na obr. 5.5 je pak pro zajímavost uveden sloupcový graf s počty zastoupení vržených čísel v 50000 hodech kostkou a vývoj procentuálního zastoupení jednotlivých vržených čísel.

Obsah
92. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

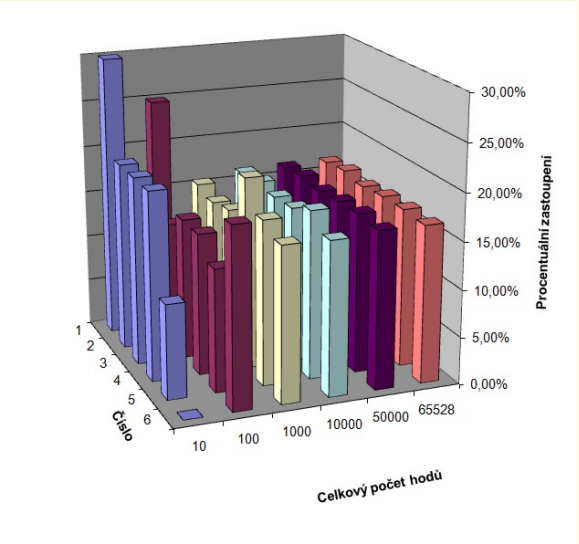


Obr. 5.4 Vývoj vypočtené střední hodnoty vržených čísel (pro přehlednost pouze pro prvních 20000 vržených čísel)

Obsah
93. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



a) Počty zastoupení vržených čísel v 50000 hodech kostkou



b) Zastoupení vržených čísel v %

Obr. 5.5 Demonstrační ukázka práce generátoru pseudonáhodných čísel na ukázce hodu hrací kostky

Obsah
94. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

5.1.2. Generátor pseudonáhodných čísel

V úlohách založených na zákoně velkých čísel hraje významnou roli generátor pseudonáhodných čísel. Je žádoucí, aby se mechanismus generování ani po velkém množství vygenerovaných čísel neopakoval. Nejjednoduššími generátory jsou generátory fyzikální - hod mincí nebo kostkou, příp. ruleta. V souvislosti s generováním náhodných čísel algoritmicky s využitím výpočetní techniky se hovoří o **generátorech pseudonáhodných čísel**. V současnosti nejpoužívanějšími algoritmy jsou tzv. **kongruenční** generátory (pseudo)náhodných čísel, poprvé zavedené americkým matematikem Derrickem Henry Lehmerem (obr. 5.6, převzato z [60]) v roce 1948. Slouží pro generování posloupností náhodných veličin s rovnoměrným rozdělením. Generování pseudonáhodných čísel se provádí s využitím rekurentního vztahu:

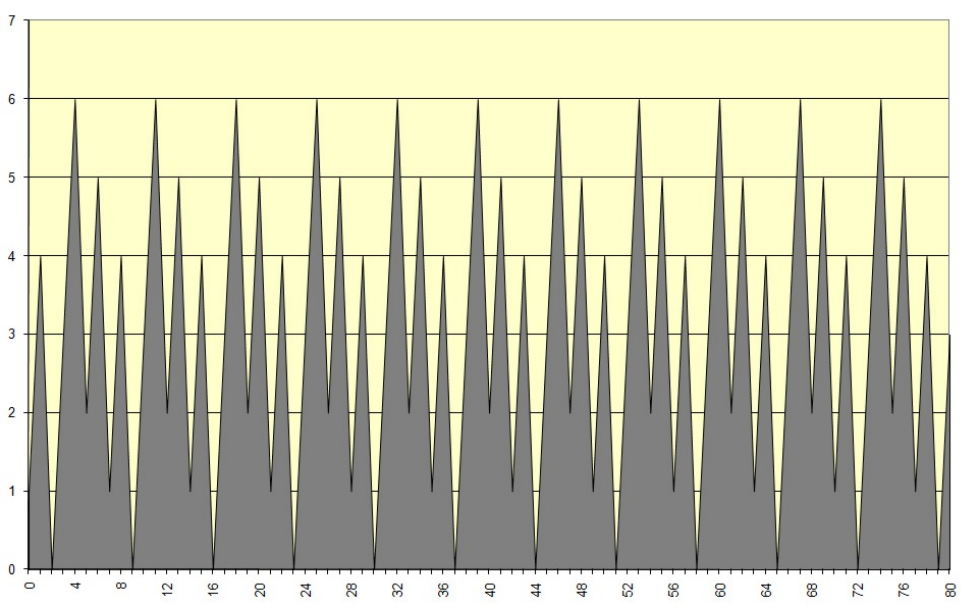
Obr. 5.6 Derrick Henry Lehmer (1905-1991)

$$U_{n+1} = (A \cdot U_n + C) \mod M \,, \tag{5.3}$$

kde konstanty A, C, a M určují statistickou kvalitu generátoru (žádoucí nesoudělnost A a M).

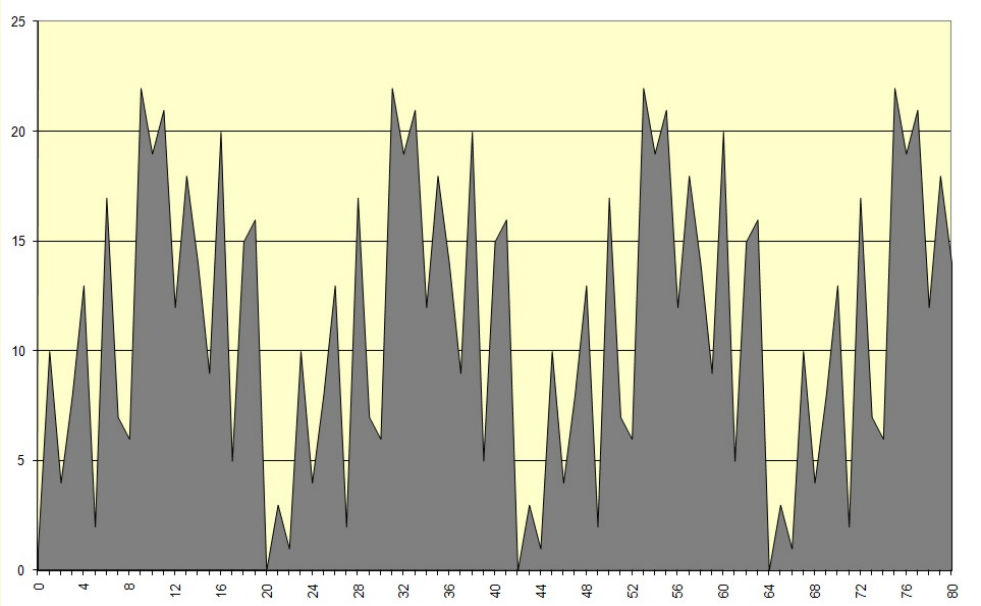
Pro demonstrování činnosti jednoduchého kongruenčního generátoru, vytvořeného v tabulkovém procesoru Excel, jsou na obr. 5.7 až obr. 5.10 uvedeny posloupnosti 80 náhodných čísel s uvedením vstupních parametrů. Lze tedy vypozorovat vliv těchto vstupních údajů na generovaná čísla. V případě obr. 5.7 a obr. 5.8 se jedná o velice nekvalitní generování náhodných čísel, u nichž je patrná opakovatelnost, a tudíž i nepoužitelnost pro účely úloh dle zákona velkých čísel. V případě obr. 5.10 se už jedná o kvalitní posloupnost náhodných čísel, kdy jsou čísla v rozmezí 0 až 1 generována rovnoměrně a bez opakování (viz obr. 5.11).

S využitím popisovaného mechanismu lze vygenerovat i např. hodnoty dvojic čísel -



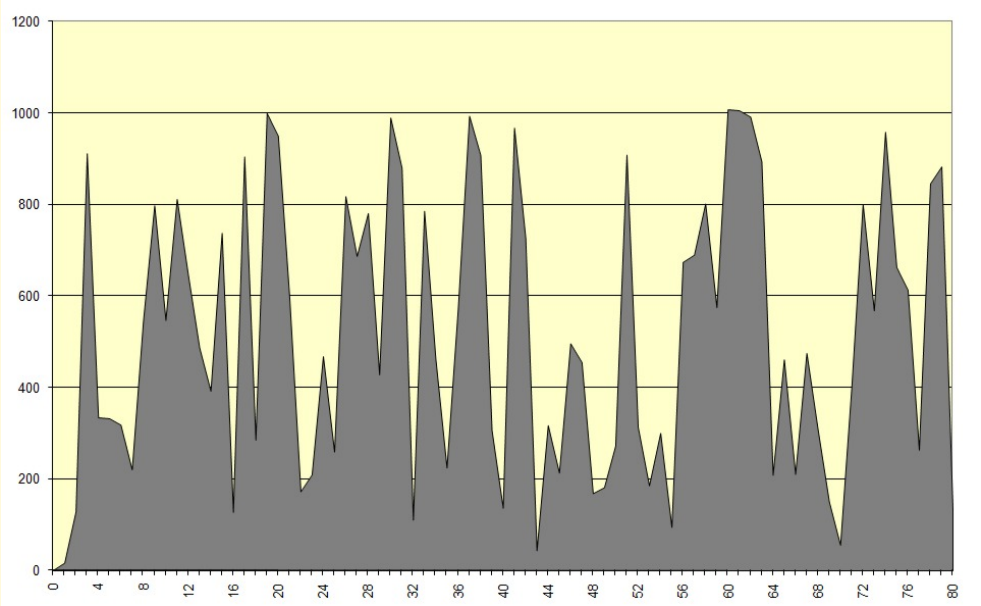
Obr. 5.7 Osmdesát vygenerovaných pseudonáhodných čísel se vstupními parametry $x_0 = = 1; A = 1; C = 3$ a $M = 7$.

Obsah
96. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obr. 5.8 Osmdesát vygenerovaných pseudonáhodných čísel se vstupními parametry $x_0 = = 1; A = 7; C = 3$ a $M = 23$.

Obsah
97. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obr. 5.9 Osmdesát vygenerovaných pseudonáhodných čísel se vstupními parametry $x_0 = = 1; A = 7; C = 10$ a $M = 1011$.

Obsah
98. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

dvojrozměrného pole na obr. 5.12, které o kvalitě generátoru vypovídají ještě výrazněji. Pro některé uvedené úlohy byla vygenerována posloupnost 65528 pseudonáhodných čísel se vstupními parametry dle obr. 5.10, ve které se žádné z vygenerovaných čísel nevyskytuje dvakrát.

V praxi lze popsaný algoritmus dále zkvalitnit např. spojením vstupních konstant se systémovým časem a datem operačního systému počítače, čímž lze docílit další zvýšení nahodilosti generovaných pseudonáhodných čísel.

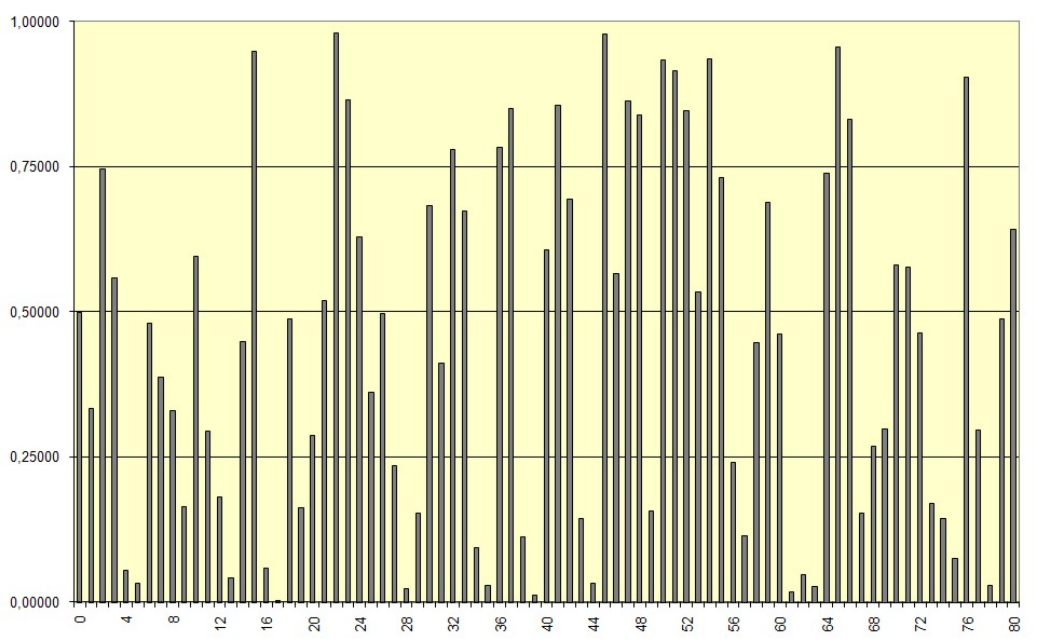
Poznámka 5.2. Kvalitu generátoru řady pseudonáhodných čísel lze ohodnotit pomocí tzv. periody, tedy neopakovatelné délky řady. Například software MCD 1.0 [55] vyvinutý na Fakultě stavební VŠB-TUO pro řešení rovinných rámů metodou SBRA [56] užívá lineární kongruenční generátor s následujícími konstantami rekurentního vztahu: multiplikativní konstanta $A = 134775813$; aditivní konstanta $C = 1$; modul $M = 232$. Perioda generované posloupnosti má délku $l = 23^2$, což je přibližně 4,3 miliardy členů řady. Pro předpokládaný počet 10 miliónů simulací Monte Carlo se jedná o dostatečnou hodnotu.

5.1.3. Integrace metodou Monte Carlo

Jak již bylo řečeno dříve, metoda Monte Carlo se využívá nejčastěji k řešení vícerozměrných integrálů, např.:

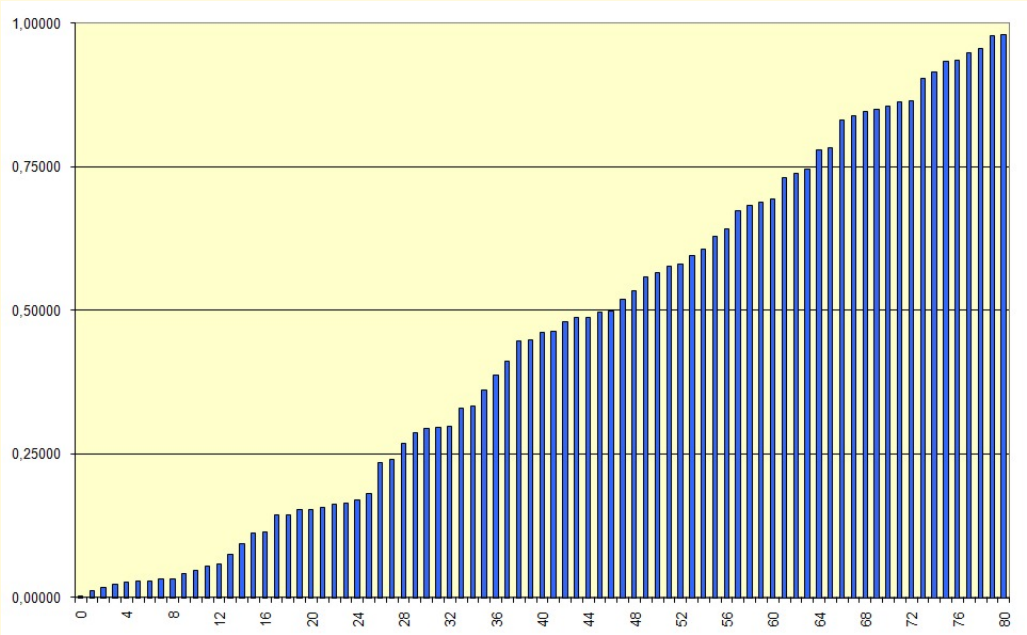
$$I = \int_{x_d}^{x_h} \int_{y_d}^{y_h} f(x, y, \dots)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \ \dots \ . \tag{5.4}$$

Algoritmus numerického integrování s využitím metody Monte Carlo spočívá ve stanovení hodnoty funkce f v n náhodných bodech, ležících v integrované oblasti V. Hlavní



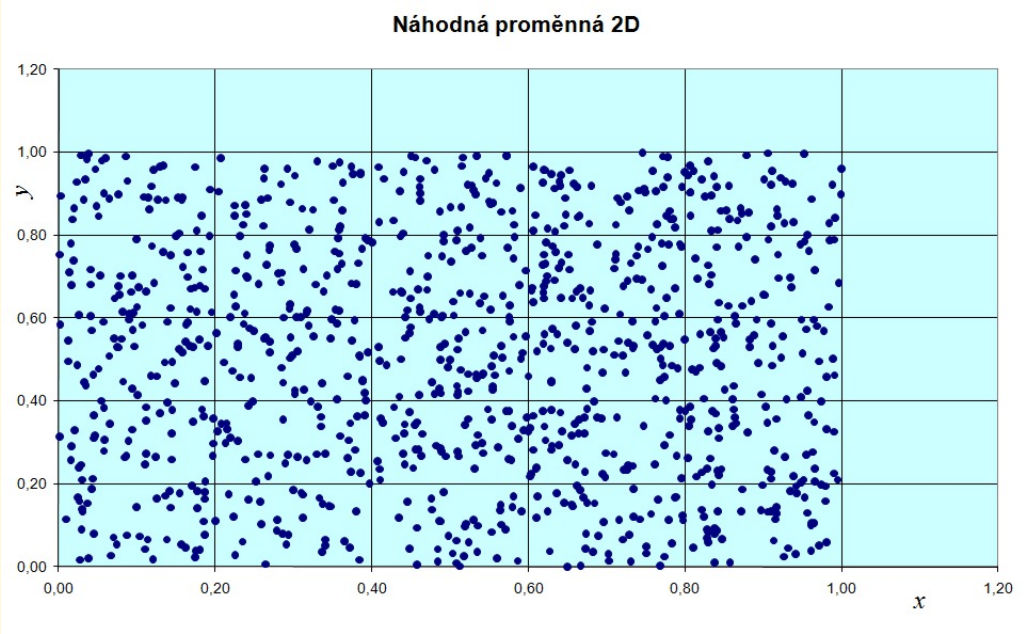
Obr. 5.10 Osmdesát vygenerovaných pseudonáhodných čísel se vstupními parametry $x_0 = = 0,5; A = 758; C = 0,333$ a $M = 1$.

Obsah
100. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obr. 5.11 Osmdesát vygenerovaných pseudonáhodných čísel se vstupními parametry $x_0 = 0,5; A = 758; C = 0,333$ a $M = 1$ vzestupně setříděny podle velikosti.

Obsah
101. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obr. 5.12 Tisíc vygenerovaných pseudonáhodných dvojic čísel se vstupními parametry $x_0 = 0,5; A_x = 758; C_x = 0,333; M_x = 1$ a $y_0 = 0,5; A_y = 239; C_y = 0,666; M_y = 1$, které jsou zobrazeny jako graf 2D náhodné proměnné.

Obsah
102. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

výhodou integrace touto metodou je její jednoduchost, přesnost výpočtu je ale velice nízká. Výsledný integrál pak lze vyjádřit:

$$I(f;n) \approx V \cdot \langle f \rangle = \frac{V}{N} \cdot \sum_{i=1}^{n} f_i \,, \tag{5.5}$$

kde $\langle f \rangle$ představuje střední hodnotu funkce f, vypočtenou v n náhodných bodech. Odchylku od střední hodnoty funkce f zachycuje směrodatná odchylka:

$$\sigma(f;n) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (\langle f \rangle - f_i)^2}{n}} \,. \tag{5.6}$$

Podobně lze stanovit i odchylku od střední hodnoty výsledného integrálu I:

$$\sigma(I;n) = \frac{V}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\langle f \rangle - f_i)^2} \,, \tag{5.7}$$

což lze považovat za ukazatel nepřesnosti výpočtu.

Algoritmus výpočtu integrálu metodou Monte Carlo lze zefektivnit. Integrační oblast se může uzavřít do oblasti se známým objemem V^*, ve které lze snadno generovat náhodné body. Zavedená funkce $\widetilde{f}$ pak nabývá hodnot:

$$\widetilde{f} = \begin{cases} 0 & x \ni V \\ f(x) & x \in V \end{cases} \tag{5.8}$$

Obsah
103. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Po vygenerování n náhodných bodů, ležících v oblasti V^*, pak bude přibližná hodnota výsledného integrálu rovna:

$$I \approx \frac{V^*}{N} \sum_{i=1}^{n} \widetilde{f}(x) \,. \tag{5.9}$$

Pro demonstraci postupu numerického integrování s využitím simulace Monte Carlo poslouží následující příklad.

Příklad 5.3. Je dána funkce:

$$f(x,y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \,, \tag{5.10}$$

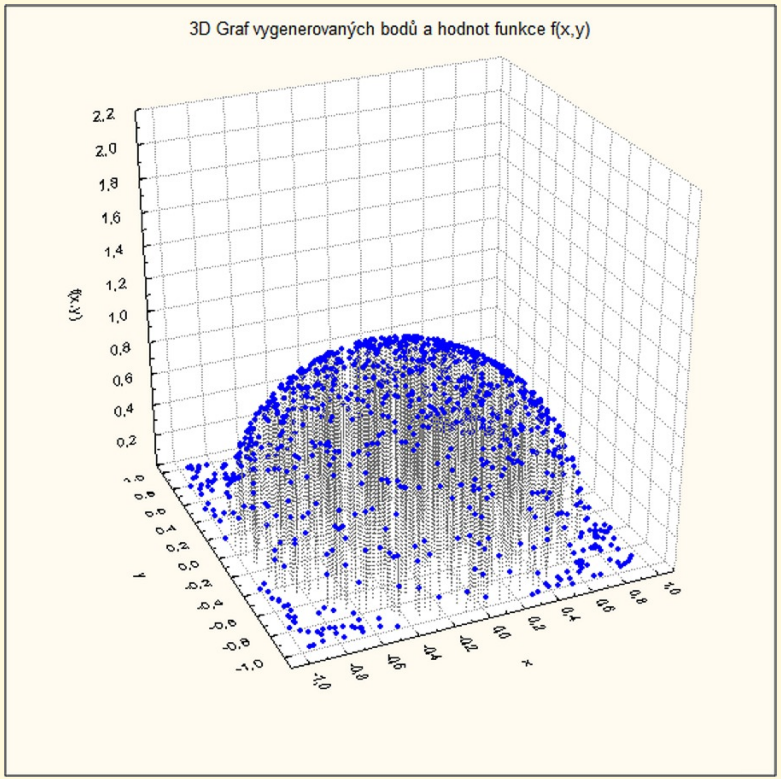
která představuje rovnici polokoule. Oblastí V pak je kružnice s poloměrem r, oblast V^* představuje čtverec o straně $2 \cdot r$, v němž bude kružnice vepsaná. Funkce $\widetilde{f}$ pak bude mít tvar:

$$\widetilde{f} = \begin{cases} 0 & x^2 + y^2 > r^2 \\ f(x,y) & x^2 + y^2 \leqq r^2 \end{cases} \tag{5.11}$$

a směrodatná odchylka vypočteného odhadu integrálu se bude rovnat:

$$\sigma(I;n) = \frac{V^*}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\langle f \rangle - f_i)^2} \,. \tag{5.12}$$

Ukázkový výpočet byl proveden pro 1000 pseudonáhodných čísel, jenž byly vygenerovány na ukázku v předchozí kapitole a jsou zobrazeny na obr. 5.12 a 5.13. Poloměr polokoule r se rovná 1 m. Výsledná hodnota odhadu integrálu pak vychází $I = 2,17707$ (přesná hodnota 2,09440) a směrodatná odchylka odhadu integrálu $\sigma = 0,04347$.



Obr. 5.13 Graf hodnot funkce $\widetilde{f}$ v $N = 1000$ vygenerovaných bodech.

Obsah
105. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

5.1.4. Generování realizace náhodné veličiny s omezeným typem rozdělení

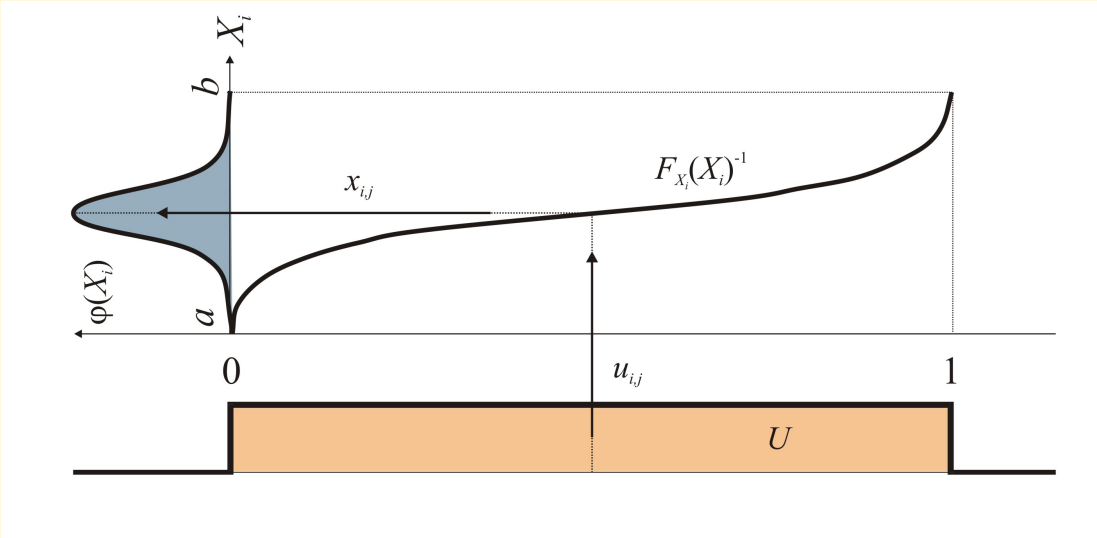
První výpočetní operací v procesu uskutečňování náhodného výběru je generování rovnoměrně rozdělených náhodných čísel například s využitím standardních procedur softwarových aplikací, které generují pseudonáhodná čísla z intervalu $< 0; 1 >$. Následuje převedení čísla z tohoto intervalu na náhodnou veličinu s příslušným rozdělením pravděpodobnosti pomocí standardních transformačních vztahů nebo s využitím distribuční funkce.

Nechť X_i je generovaná náhodná veličina se spojitým rozdělením pravděpodobnosti. Pokud je známa její distribuční funkce $F_{X_i}(X_i)$, lze na základě generování pseudonáhodného čísla $u_{i,j}$ z rovnoměrného rozdělení pravděpodobnosti o rozsahu $< 0; 1 >$ realizovat náhodnou veličinu X_i následujícím způsobem:

$$x_{i,j} = F_{X_i}^{-1}(u_{i,j}) \,, \tag{5.13}$$

kde i je číslo náhodné veličiny, j představuje číslo simulace a $F_{X_i}^{-1}(u_{i,j})$ je inverzní distribuční funkce náhodné veličiny X_i. Postup generování realizace náhodné veličiny X_i s určitým typem rozdělení pravděpodobnosti je patrný rovněž z obr.5.14.

Obsah
106. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obr. 5.14 Princip generování omezených rozdělení a transformace na požadované rozdělení

Obsah
107. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

5.1.5. Výpočet pravděpodobnosti zkoumaného jevu

Pokud se metoda Monte Carlo používá pro určení pravděpodobností zkoumaných náhodných jevů, vychází se přitom z elementární definice pravděpodobnosti (2.1):

$$P = \frac{N_p}{N} \,, \tag{5.14}$$

kde N je celkový počet simulací a N_p počet příznivých případů, tj. kdy nastal vyšetřovaný náhodný jev.

V případě posudku spolehlivosti je pak výsledná pravděpodobnost poruchy p_f získána vztahem

$$p_f = \frac{N_f}{N} \,, \tag{5.15}$$

kde N_f je počet případů, kdy nastává porucha, v průběhu všech N simulací.

Obsah
108. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

5.1.6. Chyba výpočtu s využitím simulace Monte Carlo

K obecnému odhadu chyby výsledku získaného metodou Monte Carlo se většinou používá střední kvadratická chyba aritmetického průměru. Chyba výsledku získaného pomocí N náhodných experimentů (historií - simulací - simulačních kroků) je úměrná hodnotě:

$$\sqrt{\frac{B}{N}}\,, \tag{5.16}$$

kde B je konstanta vyjadřující povahu konkrétního příkladu. Je zřejmé, že při snaze snížit chybu výpočtu desetkrát je nutno zvýšit počet simulačních kroků N stonásobně. Pro zvýšení přesnosti výsledku o jeden řád je tedy nutno zvýšit počet simulací alespoň o dva řády (např. [92]).

Při pravděpodobnostním posouzení a výpočtu pravděpodobnosti poruchy p_f závisí přesnost odhadu nejenom na celkovém počtu simulací N, ale také na řádu určované pravděpodobnosti poruchy p_f. Čím větší je hodnota N a N_f z (5.15), tím přesnější je i dosažená hodnota pravděpodobnosti poruchy p_f. Variační koeficient pravděpodobnosti poruchy v_{p_f} lze pro malé pravděpodobnosti definovat podle [96] ve tvaru

$$v_{p_f} = \frac{1}{\sqrt{N \cdot p_f}}\,. \tag{5.17}$$

Příklad 5.4. Pokud je odhad určované pravděpodobnosti poruchy p_f řádu 10^{-4} a výpočet byl proveden s počtem simulačních kroků $N = 10^4$, variační koeficient pravděpodobnosti poruchy v_{p_f} se rovná

$$v_{p_f} = \frac{1}{\sqrt{10^{-4} \cdot 10^4}} = 1\,. \tag{5.18}$$

Znamená to, že charakteristika rozptylu výsledné pravděpodobnosti poruchy p_f, vyjadřující nepřesnost výpočtu, dosahuje v daném případě 100%. Pokud se počet simulací zvýší na $N = 10^6$, variační koeficient pravděpodobnosti poruchy v_{p_f} již dosahuje příznivější hodnoty

$$v_{p_f} = \frac{1}{\sqrt{10^{-4} \cdot 10^6}} = \frac{1}{\sqrt{10^2}} = \frac{1}{10} = 0,1 \tag{5.19}$$

a rozptyl nepřesnosti výsledné hodnoty by se neměl lišit oproti přesnému řešení o více než 10%.

Vhodný počet simulačních kroků N_n pro kvalitní odhad pravděpodobnosti poruchy P_f u simulace metodou Monte Carlo lze určit např. dle [89] pomocí vztahu:

$$N_n = P_f(1 - P_f)\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^2, \tag{5.20}$$

kde je t násobek směrodatné odchylky u normálního rozdělení pravděpodobnosti dle zvolené úrovně spolehlivosti, a kde je ε přípustná absolutní tolerance. Práce [106] uvádí, že P_f lze zaměnit za návrhovou pravděpodobnost P_d.Vhodný počet simulačních kroků v závislosti na návrhové pravděpodobnosti poruchy P_d je tedy:

$$N_n = P_d(1 - P_d)\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^2. \tag{5.21}$$

Obsah
110. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Příklad 5.5. Kolik simulačních kroků je potřeba k dostatečně přesnému vyšetření spolehlivosti metodou Monte Carlo. Uvažujte: $P_d = 7 \times 10^{-5}$, konfidenční interval $\varepsilon = 1,4 \times 10^{-5}$, spolehlivost odhadu P_f stanovenou na 99 %.

Řešení. Uvažujme velikost pravděpodobnosti poruchy P_f jako náhodný jev, který při dostatečnš velkém počtu opakování nabyde tvar normálního rozdělení pravděpodobnosti. Parametr t lze odečíst z distribuční funkce normovaného normálního rozdělení. Pro 99 % konfidenční interval je $t = 2,57583$. Počet simulačních kroků N_n je pak:

$$N_n = P_d(1 - P_d)\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^2 = 7 \times 10^{-5}(1 - 7 \times 10^{-5})\left(\frac{2,57583}{1,4 \times 10^{-5}}\right)^2 = 2369441. \qquad (5.22)$$

K odhadu pravděpodnosti poruchy postačí 2,4 mil. simulačních kroků metodou Monte Carlo při 99 % pravděpodobnosti, že se bude P_f se pohybovat v toleranci $P_d \pm \varepsilon$. ▲

5.2. Metoda Simulation Based Reliability Assessment (SBRA)

Pravděpodobnostní metoda SBRA (Simulation Based Reliability Assessment) byla vyvíjena především v poslední dekádě minulého století [63]. Byla podrobně zdokumentovaná v knihách [64, 65, 66], které obsahují značné množství řešených příkladů.

Metoda SBRA [62], obdobně jako současné normy [3], vychází z postupů založených na „filozofii“ mezních stavů konstrukce, tj. neřeší se spolehlivost konstrukce jako celku, ale vyhodnotí se relevantní mezní stavy a ty se posoudí. Dalšími prvky metody SBRA je aplikace tzv. **křivek trvání zatížení** (viz dále) a simulace Monte Carlo.

Metodika SBRA je založena na principu mezních stavů [62], který je aplikován formou dílčích součinitelů rovněž v současných normách , a především na simulaci Monte Carlo.

Posudek spolehlivosti metodou SBRA spočívá v porovnání vypočtené pravděpodobnosti poruchy p_f s návrhovou pravděpodobností p_d. Úroveň spolehlivosti je rozlišena na základě příslušné návrhové pravděpodobnosti. Návrhová pravděpodobnost p_d pak odpovídá posuzovanému meznímu stavu (viz 3.2 a 3.3). Návrhová pravděpodobnost p_d by měla rovněž zohlednit tzv. referenční úroveň, ke které se vztahuje posudek spolehlivosti (u oceli se jedná např. o dosažení meze kluzu v krajních vláknech nebo nebo vznik plastického kloubu) (blíže v kap. 5.2.2).

Pro splnění kritéria spolehlivosti musí platit podmínka (3.13), tedy $p_f < p_d$. K určení pravděpodobnosti poruchy p_f je nutné provést analýzu funkce spolehlivosti RF RF, která může být definovaná např. vztahem (3.1), tedy ve tvaru $RF = R - S$.

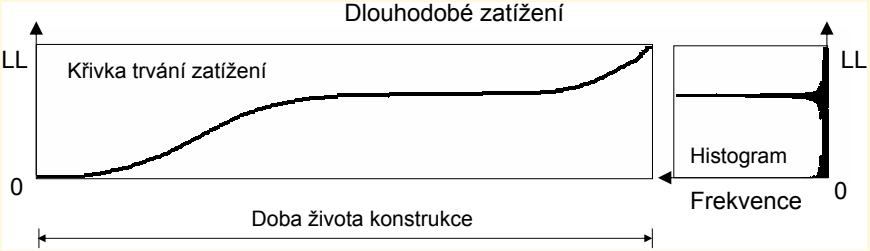
Poznámka 5.6. Simulační technika Monte Carlo, použitá např. v metodě SBRA, slouží jako generátor jednotlivých „zatěžovacích stavů“ v závislosti na relativní váze aplikovaných, náhodně proměnných zatíženích. V posudku spolehlivosti je aplikován přístup Arbitrary Point in Time (náhodný bod v čase). V přístupu APT by návrhová životnost měla být zavedena pomocí příslušně upravené hodnoty návrhové pravděpodobnosti p_d (přísnější návrhová pravděpodobnost p_d pro delší dobu návrhové životnosti).

Poznámka 5.7. Metodika aplikovaná podle metody JCSS [7] vede, oproti APT přístupu, „pouze“ k pravděpodobnostnímu rozšíření normového postupu [3]. Charakteristické a návrhové hodnoty jsou nahrazeny pravděpodobnostním rozdělením. Návrhová životnost se pak promítne do úpravy pravděpodobnostního rozdělení zatížení.

Popis vstupních náhodných veličin je v metodě SBRA založen na aplikaci empirických rozdělení pravděpodobnosti v neparametrické formě (např.obr. 2.4). Pravděpodobnostní

rozdělení náhodných vstupních parametrů jsou popsána useknutými histogramy (bounded histogram), které jsou blíže popsány např. v kap. 6.4.1.

Přínosem metody SBRA je zejména popis proměnlivosti zatížení v čase formou křivek trvání zatížení. Proměnná zatížení, vstupující do pravděpodobnostního výpočtu, jsou vyjádřena extrémní hodnotou a odpovídající křivkou trvání zatížení (load duration curve) pro všechny mezní stavy. Křivky trvání zatížení mohou být jednokomponentní (např. dlouhodobé zatížení uvedené na obr. 5.15) nebo vícekomponentní (např. větrná ružice popisující rozdělení rychlostí větru z dvanácti směrů a jejich příslušné četnosti [73, 48]).



Obr. 5.15 Křivka trvání zatížení pro dlouhodobé zatížení [64]

Poznámka 5.8. Použití pravděpodobnostních metod není v rozporu s platnými normami pro posuzování spolehlivosti konstrukcí. Použití křivek trvání zatížení však není v platných normách nijak zakotveno (v normách se předpokládá použití rozdělení ročních maxim). Vztahování posudku spolehlivosti (při využití křivek trvání zatížení) k návrhovým pravděpodobnostem (viz 3.2 a 3.3) uvedeným v EN 1990 [3] může být proto zavádějící a může vést k významným systematickým chybám.

Obsah
113. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Poznámka 5.9. Práce [58] naznačuje, že i pravděpodobností posudky spolehlivosti provedené v souladu s EN1990 [3] a JCSS [7] vedou k velmi kontroverzním výsledkům s ohledem na volbu návrhové hodnoty indexu spolehlivosti či pravděpodobnosti poruchy podle normy EN 1990.

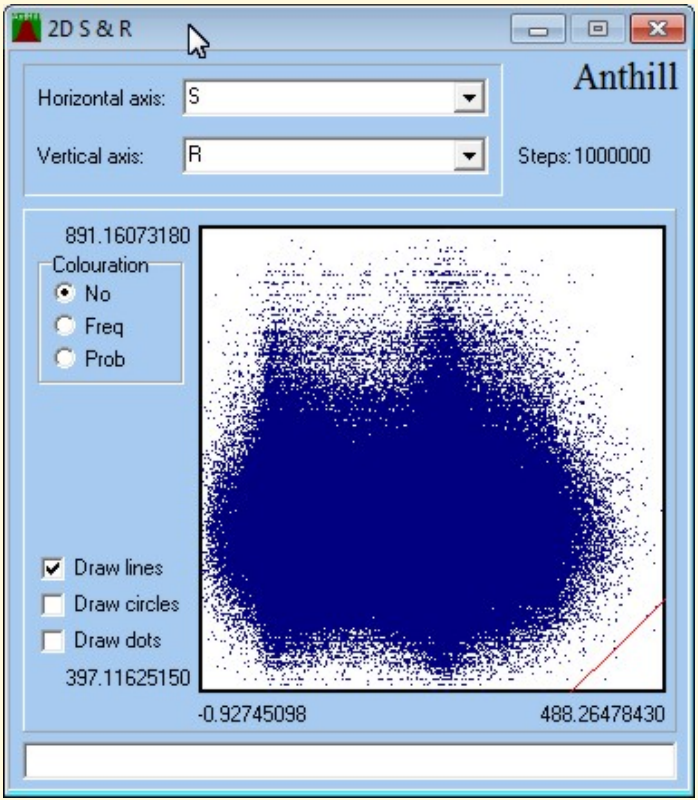
Poznámka 5.10. Autoři metodiky SBRA se významně zasloužili o rozvoj pravděpodobnostních metod v oboru teorie spolehlivosti inženýrských úloh v ČR (viz např. [2]). Cestu k zavádění jejich spolehlivostního postupu do inženýrské praxe otevřela především stále dostupnější výkonná výpočetní technika.

5.2.1. Sotware pro aplikaci metody SBRA

Metoda SBRA byla aplikována zejména v programu **Anthill** [19], což je uživatelsky značně přívětivý softwarový produkt. Omezením tohoto programu je možnost definice vypočetního matematicko-fyzikálního modelu pouze v uzavřené textové podobě bez možnosti použití např. dynamické knihovny.

Na obr. 5.16 je zobrazena pracovní plocha programu Anthill s plošně zobrazenou funkcí spolehlivosti RF, na níž je možno vysvětlit podstatu aplikace metody SBRA. Množina náhodně vytvořených bodů, odpovídajících kombinacím interakce odolnosti konstrukce R a účinku zatížení S, je rozdělena přímkou $R - S = 0$ na **oblast poruchy** a **oblast bezpečnou**. Součet bodů v poruchové oblasti dělený celkovým počtem bodů odpovídá podle (5.15) pravděpodobnosti poruchy p_f.

Výpočetní postup, založený na metodě SBRA, lze rovněž aplikovat v programu **Monte** [10]. Tento software již umožňuje implementování rozsáhlejšího a složitějšího výpočetního modelu formou procedury, zkompilované do tzv. „externí DLL knihovny“. Vstupní parametry pravděpodobnostních úloh lze definovat podobně jako u programu Anthill ve formě



Obr. 5.16 Pracovní plocha programu [19] s plošně zobrazenou funkcí spolehlivosti RF (vodorovná osa účinek zatížení S, svislá osa odolnost konstrukce R)

Obsah
115. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

histogramů s empirickým neparametrickým rozdělením. U výpočtů úloh, řešených metodou MKP, lze prostřednictvím programu Monte navíc využít i programový modul uFEM [11].

Ke geometricky nelineárnímu řešení rovinných ocelových rámů s tuhými i polotuhými styčníky metodou SBRA (např. [56]) byl vytvořen program **MCD** [55].

5.2.2. Ukázky výpočtů metodou SBRA

Ukázky pravděpodobnostních výpočtů, které byly provedeny metodou SBRA s využitím klasické simulační metody Monte Carlo, byly dostatečně demonstrovány ve značném množství odborných publikací.

Příklad posudku ocelového prutu, který je díky kombinaci účinků zatížení střídavě namáhán vzpěrným tlakem nebo tahem, byl vyřešen v [68].

V případě pravděpodobnostního posudku spolehlivosti dvakrát staticky neurčitého ocelového rámu v [67] byla spolehlivost konstrukce určena nejprve podle metody dílčích součinitelů, pak simulační metodou SBRA. Výsledky byly porovnány a analyzovány.

V publikaci [52] byl proveden pravděpodobnostní posudek nosné ocelové konstrukce roštu, kdy byla přesně definována referenční úroveň, ke které byl vztažen posudek únosnosti prvků roštu.

Podle obrázku 5.17 lze definovat čtyři alternativy referenční úrovně:

(a) dosažení napětí na mezi kluzu (vyčerpání pružného chování materiálu),

(b) dosažení malých tolerovatelných pružno-plastických přetvoření, jenž mohou být vyjádřena např. přípustným trvalým průhybem nosníku nebo přípustným poměrným přetvořením oceli v nejvíce namáhaném průřezu nosníku,

(c) tolerovatelné porušení nosníku, které je omezeno např. zplastizováním krajních čtvrtin průřezu,

(d) vznik plastického kloubu a počátek kolapsu konstrukce.

Tyto referenční úrovně lze rozdělit do dvou skupin: případ (a) a (b) nemá vliv na použitelnost konstrukce, případ (c) a (d) vyžaduje opravu či výměnu části nosné konstrukce vzhledem ke vzniku velkých trvalých deformací.

Aplikace metody SBRA v oblasti ocelových konstrukcí s polotuhými styčníky a vzájemné porovnání s metodikou podle norem Eurocode [5] je uvedena v [54] . Problematika je dále rozpracovaná i na příkladě patrového mnohonásobně staticky neurčitého rovinného rámu při uvážení geometrické nelinearity v [56] .

Problematika posudku spolehlivosti konstrukce namáhané dynamickými účinky podle mezního stavu použitelnosti je předmětem článku [105], kde je zhodnocen vliv zrychlení stavebního objektu na jeho uživatele.

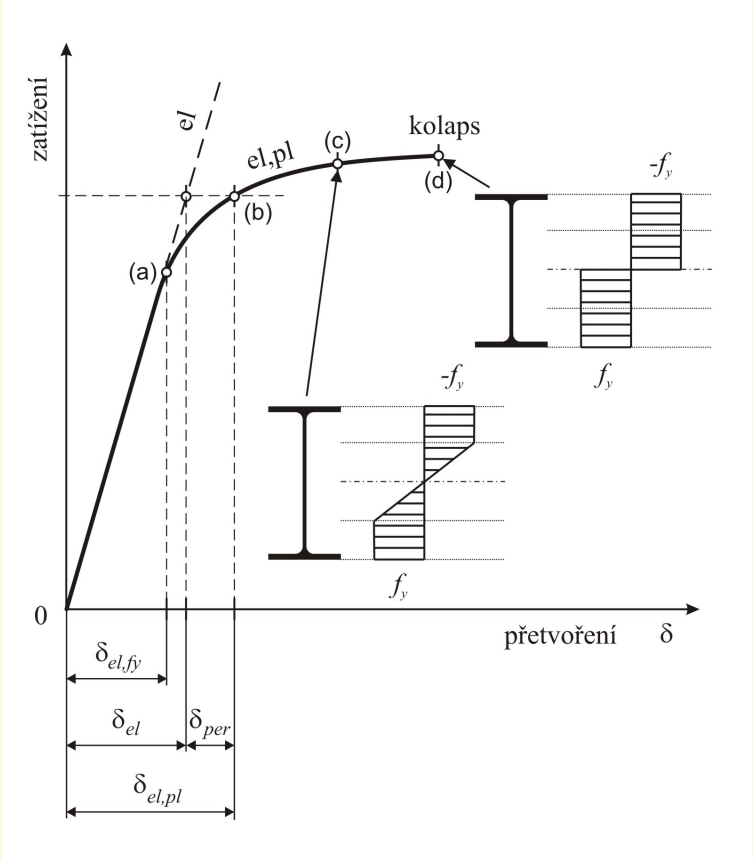
Posudek spolehlivosti dřevěných konstrukcí s uvážením dlouhodobého účinku zatížení je řešen např. v [59].

K úlohám, jenž řeší problémy spojené s akumulací poškození stavebních objektů, patří rovněž posudek trvanlivosti železobetonové mostovky, vystavené riziku vzniku koroze vyvolané působením posypových solí. V [97] je uveden výpočetní postup pro případ nechráněné výztuže. Při uvážení ochrany výztuže povlakem z epoxidové pryskyřice a zohlednění možnosti vzniku trhlin v železobetonu je zapotřebí řešit danou úlohu jako 2D problém. K řešení náhodné interakce trhliny a poškození epoxidové ochrany ocelové výztuže bylo proto použito i MKP řešení v [49].

5.3. Další pravděpodobnostní metody, založené na simulacích

V kapitole 4.1.1 byly představeny pravděpodobnostní metody, které se při řešení pravděpodobnostních úloh opírají o simulace, tedy na opakovaných realizacích (vyčísleních) prvků

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
Obsah
117. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obr. 5.17 Přesná definice referenční úrovně

Obsah
118. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

náhodných veličin, tedy i funkce spolehlivosti (poruchy).

Klasická simulační technika Monte Carlo, která byla detailně popsaná v předchozích kapitolách, se často potýká s problémem malé efektivnosti u složitějších spolehlivostních úloh, u nichž lze provést jen omezený počet simulací. Další nevýhodou přímé metody Monte Carlo je potřeba velkého množství simulací k odhadu pravděpodobnosti poruchy p_f, která je obvykle velmi malá.

Cestou ke snížení výpočetní náročnosti jsou zdokonalené simulační metody.

5.3.1. Metoda Importance Sampling

Simulační techniky typu Importance sampling provádějí generování náhodných veličin odlišným způsobem, než je tomu u klasické metody Monte Carlo. Simulace jsou koncentrovány do oblasti poruchy D_f, aby k záporné hodnotě funkce poruchy $G(\mathbf{X}) < 0$ náhodných veličin $\mathbf{X} = X_1, X_2, \ldots, X_n$ záměrně docházelo velmi často. Oblast, která při simulacích nejvíce přispívá k pravděpodobnosti poruchy p_f, leží v blízkosti návrhového bodu. Ten je definován jako bod, ležící na hranici poruchy $G(\mathbf{X}) = 0$ s minimální vzdáleností od počátku souřadnic v normalizovaném prostoru náhodných veličin (viz kap. 4.1.2, obr. 3.4 a 4.1). Do výpočtu vstupuje k tomuto účelu vhodně zvolená váhová funkce $h_Y(\mathbf{X})$. Simulace pak probíhá v poněkud rozdílném prostoru než u klasické metody Monte Carlo, kde se odhad pravděpodobnosti poruchy p_f blíží její střední hodnotě. Odhad pravděpodobnosti poruchy p_f při simulaci typu Importance sampling se dá pro N simulací vyjádřit následujícím vztahem:

$$p_f = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_{G(\mathbf{X})} \cdot \frac{f_X(\mathbf{X}_i)}{h_Y(\mathbf{X}_i)}\,, \tag{5.23}$$

kde

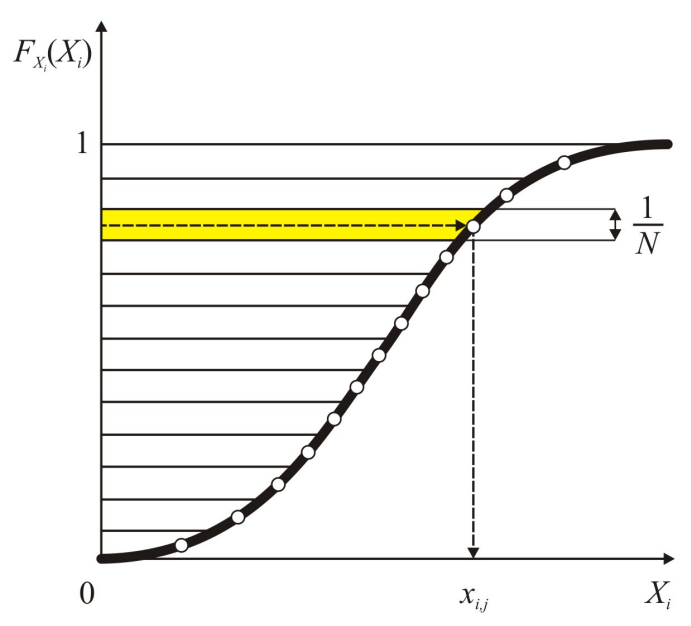
$$f_{G(\mathbf{X})} = \begin{cases} 1 & \text{pro } G(\mathbf{X}) < 0 \\ 0 & \text{pro } G(\mathbf{X}) \geqq 0 \end{cases}\,. \tag{5.24}$$

Tímto způsobem, detailně popsaném např. v [93], lze určit dostatečně přesný odhad i velmi malé hodnoty pravděpodobnosti poruchy p_f s relativně malým počtem simulací (N se pohybuje řádově v tisících).

Modifikace metody Importance Sampling s váhovou funkcí $h_Y(\mathbf{X})$ ve tvaru rovnoměrného rozdělení se rozvíjí rovněž na VŠB-TU Ostrava [84]. Výhodou aplikace rovnoměrného rozdělení je, že lze získat kvalitní výsledky bez předchozí znalosti zkoumané úlohy. Konvergence k výsledku s nízkou pravděpodobností výskytu je rychlejší než u klasické metody Monte Carlo. Viz např. [85].

5.3.2. Metoda Latin Hypercube Sampling (LHS)

Metoda Latin Hypercube Sampling - LHS, patřící do kategorie stratifikovaných simulačních metod, byla podrobně popsána např. v [8]. Podobně jako u klasické simulace Monte Carlo je i u metody LHS odhad pravděpodobnosti poruchy p_f získán z určitého počtu realizací funkce poruchy $G(\mathbf{X})$ n náhodných veličin $\mathbf{X} = X_1, X_2, \ldots, X_n$. Metoda LHS je vhdná pro odhad statistických parametrů funkce poruchy $G(\mathbf{X})$ při malém počtu simulací N. Definiční obor distribuční funkce $F(X_i)$ každé náhodné veličiny X_i je ale přitom rozdělen na N intervalů (tříd) o stejné pravděpodobnosti $\frac{1}{N}$ (viz obr. 5.18).



Obr. 5.18 Rozdělení definičního oboru distribuční funkce spojité náhodné veličiny při výpočtu metodou LHS

Reprezentativní hodnoty dané veličiny jsou při simulaci vybírány na základě náhodných permutací celých čísel $j = 1, 2, \ldots, N$. Při výpočtu je provedeno právě N simulací, během nichž je každý z intervalů vybrán pouze jednou. Z každého intervalu je vybrána buď jeho

Obsah
121. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

střední hodnota, hodnota odpovídající mediánu nebo naprosto náhodně zvolená hodnota, ze které se na základě inverzní distribuční funkce $F_{X_i}^{-1}(X_i)$ určí odpovídající reprezentativní hodnota $x_{i,j}$ náhodné veličiny X_i. Tímto způsobem lze zajistit, že se při simulacích rovnoměrně pokryje celý rozsah distribuční funkce náhodné veličiny, což vede k uspokojivým odhadům výsledných pravděpodobností při relativně malém počtu simulací.

Při pravděpodobnostních výpočtech využívajících metodu LHS, např. s využitím programu Freet [76], je možno zadat statistickou závislost jednotlivých vstupních veličin pomocí korelační matice, která obsahuje korelační koeficienty mezi jednotlivými náhodnými veličinami. Při výpočtu se pak iteračně (např. metodou simulovaného žíhání) upraví (přeuspořádá) obsah tzv. tabulky náhodných permutací (obsahuje N řádků s příslušnými vygenerovanými hodnotami simulací $j = 1, 2, \ldots, N$ a n sloupců pro každou náhodnou veličinu $X_1, X_2, \ldots, X_n$) tak, aby se korelační matice výsledných náhodných veličin co nejvíce blížila korelační matici zadané.

Obsah
122. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

5.4. Test

Spustit test Odpovězte na otázky v tomto testu. Test musíte spustit kliknutím na tlačítko, poté vyplňte odpovědi a ukončete test. Správná může být více než jedna odpověď.

1. Metoda typu Monte Carlo:

   (a) popisuje teoretické rozdělní pravděpodobnosti,
   (b) využívá náhodné realizace vstupních náhodných veličin,
   (c) je metoda aproximační,
   (d) nepoužívá generátor pseudonáhodných čísel.

2. Přesnost analýzy metodou Monte Carlo:

   (a) nezávisí na počtu simulačních kroků,
   (b) závisí na počtu simulačních kroků,
   (c) závisí na počtu tříd vstupních histogramů,
   (d) je ovlivněna počtem náhodně proměnných vstupních veličin.

3. Pravděpodobnostní rozdělení hodnot získaným generátorem pseudonáhodných čísel pro přímou metodu Monte Carlo odpovídá:

   (a) Gaussovu normálnímu rozdělení,
   (b) rovnoměrnému rozdělení,
   (c) Weibullově rozdělení,
   (d) Poissonovu rozdělení.

4. Popis vstupních náhodných veličin je v metodě SBRA založen na aplikaci:

(a) neomezených spojitých parametrických rozdělení pravděpodobnosti,
(b) omezených rozdělení pravděpodobnosti popsaných frekvenčními histogramy,
(c) empirických rozdělení pravděpodobnosti v neparametrické formě,
(d) normálních rozdělení pravděpodobnosti.

5. Doba návrhové životnosati by měla být u metody SBRA zohledněna:

(a) úpravou návrhové pravděpodobnosti p_d (čím delší návrhová životnost tím vyšší p_d),
(b) úpravou návrhové pravděpodobnosti p_d (čím delší návrhová životnost tím nižší p_d),
(c) zavedením součinitele spolehlivosti γ_t (čím delší návrhová životnost tím vyšší γ_t),
(d) zavedením součinitele spolehlivosti γ_t (čím delší návrhová životnost tím nižší γ_t).

6. Křivka trvání zatížení:

(a) odpovídá distribuční funkci parametrického rozdělení,
(b) odpovídá distribuční funkci empirického rozdělení zatížení,
(c) představuje setřízenou historii zatížení,
(d) představuje histogram desetiletých maxim.

7. Metoda Importance Sampling:

(a) není založená na simulacích,
(b) se snaží redukovat nutný počet simulačních kroků koncentrací simulací do oblasti poruchy,
(c) se snaží redukovat nutný počet simulačních kroků snížením počtu tříd vstupních histogramů,
(d) je založena na iteračním přístupu.

8. Metoda Latin Hypercube Sampling:

(a) se snaží redukovat nutný počet simulačních kroků koncetrací simulací do oblasti poruchy,
(b) pracuje s rozdělením definičního oboru distribuční funkce $F(X_i)$ každé náhodné veličiny X_i na N intervalů (tříd) o stejné pravděpodobnosti,
(c) neumí pracovat s více než jednou náhodně proměnnou veličinou X popsanou distribuční funkcí $F(X)$,
(d) není zdokonalenou odnoží přímé metody Monte Carlo.

9. Metoda Latin Hypercube Sampling:

(a) je vhodná k odhadu pravděpodobnosti poruchy p_f i pro malé množství simulací/intervalů N,
(b) nepoužívá generátor pseudonáhodných čísel,
(c) je vhodná k odhadu statistických parametrů funkce spolehlivosti.
(d) používá trendovou optimalizaci.

10. Kolik simulačních kroků je potřeba k dostatečně přesnému vyšetření spolehlivosti metodou Monte Carlo. Uvažujte: $P_d = 7 \times 10^{-2}$, konfidenční interval $\varepsilon = 1,4 \times 10^{-2}$, spolehlivost odhadu P_f stanovenou na 99 %. Nutný počet simulačních kroků N_n je:

(a) cca. 20,
(b) 5,
(c) 2204,
(d) více než jeden milion.

Konec testu

Počet správných odpovědí:

Vyznačení oprav do testu: Opravit

Obsah

126. strana ze 283

Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Kapitola 6

Přímý Optimalizovaný Pravděpodobnostní Výpočet (POPV)

Metoda pojmenovaná jako Přímý Optimalizovaný Pravděpodobnostní Výpočet (dále jen POPV) je vyvíjena od roku 2002 [26] původně jako alternativa simulační techniky Monte Carlo v metodě SBRA. Původní označení metody Přímý Determinovaný Pravděpodobnostní Výpočet (PDPV) bylo odvozeno od skutečnosti, že postup výpočtu je pro danou úlohu jednoznačně determinován svým algoritmem, na rozdíl od metody Monte Carlo, kde se výpočetní data pro danou simulaci náhodně generují. Řada konzultací a diskusí s odborníky v oboru pravděpodobnostních metod však ukázala, že slovo „determinovaný“ v názvu metody je poněkud zavádějící. Po konzultaci s odborníky zabývajícími se spolehlivostí kon-

Obsah
127. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

strukcí (Šejnoha, Novák, Keršner, Teplý, [30]), byl název upřesněn na Přímý Optimalizovaný Pravděpodobnostní Výpočet - POPV.

Pojem „optimalizovaný“ vychází z následující skutečnosti: počet náhodných veličin vstupujících do výpočtu pravděpodobnosti poruchy p_f je omezen možností danou úlohu numericky zvládnout. Při velkém počtu náhodně proměnných je totiž úloha časově velmi náročná i při dostupné výkonné výpočetní technice. Hledaly a rozvíjely se proto cesty optimalizace výpočtů, které snižují počet operací při zachování korektnosti výpočtu (detailně viz kap. 6.4.5).

V současné době již lze metodou POPV s využitím optimalizačních kroků výhodně řešit značné množství pravděpodobnostních úloh. Pro aplikaci metody POPV je možno použít stále vyvíjený programový systém ProbCalc (viz kap. 6.3.3, [42]), do něhož lze relativně jednoduše implementovat analytický transformační model řešené pravděpodobnostní úlohy.

6.1. Podstata metody POPV

Stejně jako u jiných pravděpodobnostních metod jsou i u metody POPV vstupní náhodně proměnné veličiny (zatížení, geometrické a materiálové charakteristiky, imperfekce ad.) vyjádřeny histogramy s tzv. **neparametrickým rozdělením** (viz kap. 6.4.1), přičemž metoda není omezena ani pro použití **parametrických rozdělení** (viz kap. 6.4.2). Tato rozdělení většinou vycházejí z pozorování a měření často i dlouhodobých.

Výpočetní algoritmus metody POPV vychází ze základních pojmů a postupů teorie pravděpodobnosti, které je pro názorné vysvětlení následující problematiky nutno blíže přiblížit.

V případě, že má za určitých podmínek nastat jeden z n navzájem se vylučujících náhodných jevů (žádný z nich nemá větší možnost výskytu než jiný), pak lze tvrdit, že tyto

náhodné jevy mají stejnou pravděpodobnost:

$$p = \frac{1}{n} . \tag{6.1}$$

Poznámka 6.1. Detailnější výklad pojmu náhodný jev a pravděpodobnost jeho výskytu byl proveden v kap. 2.2.

Je-li nějaký náhodný jev A důsledkem kteréhokoliv z m náhodných jevů při daném počtu n možných náhodných jevů (navzájem se vylučujících a stejně pravděpodobných), je pravděpodobností jevu A poměr

$$p = \frac{m}{n} . \tag{6.2}$$

Pravděpodobnost současného výskytu několika nezávislých jevů se rovná **součinu pravděpodobností** těchto jevů, pravděpodobnost výskytu stejného jevu z několika navzájem se vylučujících jevů se rovná **součtu pravděpodobností** těchto jevů.

Příklad 6.2. Výše uvedené poznatky lze jednoduše dokumentovat na příkladě. Jako optimální příklad pro demonstraci fungování těchto principu může posloužit elementární náhodný experiment hodu hrací kostkou o šesti stranách (na každé straně má jedno číslo 1 až 6), jenž se v literatuře často využívá k demonstračním účelům. Lze při něm totiž jednoznačně stanovit prvky základního prostoru tohoto náhodného experimentu, které tvoří elementární náhodné jevy E_1 (padne číslo 1, $E_1 = 1$), E_2 (padne číslo 2, $E_2 = 2$), E_3 (padne číslo 3, $E_3 = 3$), E_4 (padne číslo 4, $E_4 = 4$), E_5 (padne číslo 5, $E_5 = 5$) a E_6 (padne číslo 6, $E_6 = 6$). Výsledky tohoto náhodného pokusu tedy představují náhodné jevy $E1$ až $E6$, u nichž lze zavést i některé číselné funkce jako je např. pravděpodobnost jejich výskytu.

Při hodu hrací kostkou je pravděpodobnost, že padne libovolné ze šesti čísel:

$$p_1 = \frac{1}{6} = 0,1\overline{6}\ . \tag{6.3}$$

Při druhém hodu hrací kostky je pravděpodobnost výskytu libovolného čísla stejná a to opět:

$$p_2 = \frac{1}{6} = 0,1\overline{6}\ . \tag{6.4}$$

Pravděpodobnost současného výskytu dvou libovolných čísel ve dvou hodech po sobě se rovná v daném případě součinu:

$$p = p_1 \cdot p_2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} = 0,02\overline{7}\ . \tag{6.5}$$

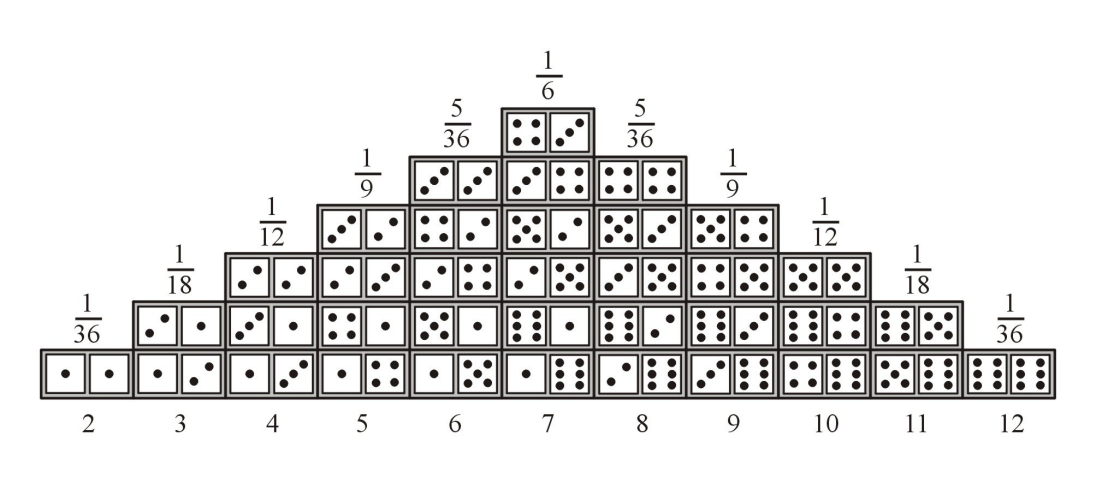
Tuto pravděpodobnost výskytu mají při dvou hodech hrací kostkou všechny libovolné dvojice čísel, které mohou ve dvou po sobě jdoucích hodech padnout. Pokud je nutno určit pravděpodobný výsledek součtu čísel ze dvou po sobě jdoucích hodů, pak nebude u všech možností stejný, přestože platí výše uvedené pro pravděpodobnost dvojice čísel. Číslo 2 je např. výsledkem součtu $1 + 1$ a pravděpodobnost jeho výskytu je

$$p(2) = \frac{1}{36}\ . \tag{6.6}$$

Číslo 3 již ale může být výsledkem součtu $1 + 2$ nebo $2 + 1$ a pravděpodobnost jeho výskytu je dána součtem pravděpodobností v daném případě dvou navzájem se vylučujících možností tj.

$$p(3) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{2}{36}\ . \tag{6.7}$$

Obsah
130. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obr. 6.1 Schématické znázornění všech kombinací tažených čísel při hodu hrací kostkou pro stanovení pravděpodobnosti jejich součtu (36 možností)

Obsah
131. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Obdobně tomu bude při výpočtu pravděpodobnosti výskytu všech ostatních možností výskytu součtu s dvou zcela libovolných čísel z prvního nebo druhého hodu. Veškeré kombinace všech čísel z obou hodů hrací kostky jsou pro větší názornost znázorněny na obr. 6.1. Princip sestavení výsledného histogramu pro součet je pak schématicky znázorněn na obr. 6.2.

K výslednému histogramu pro součet je pak možno ještě uvést, že součet všech pravděpodobností je roven

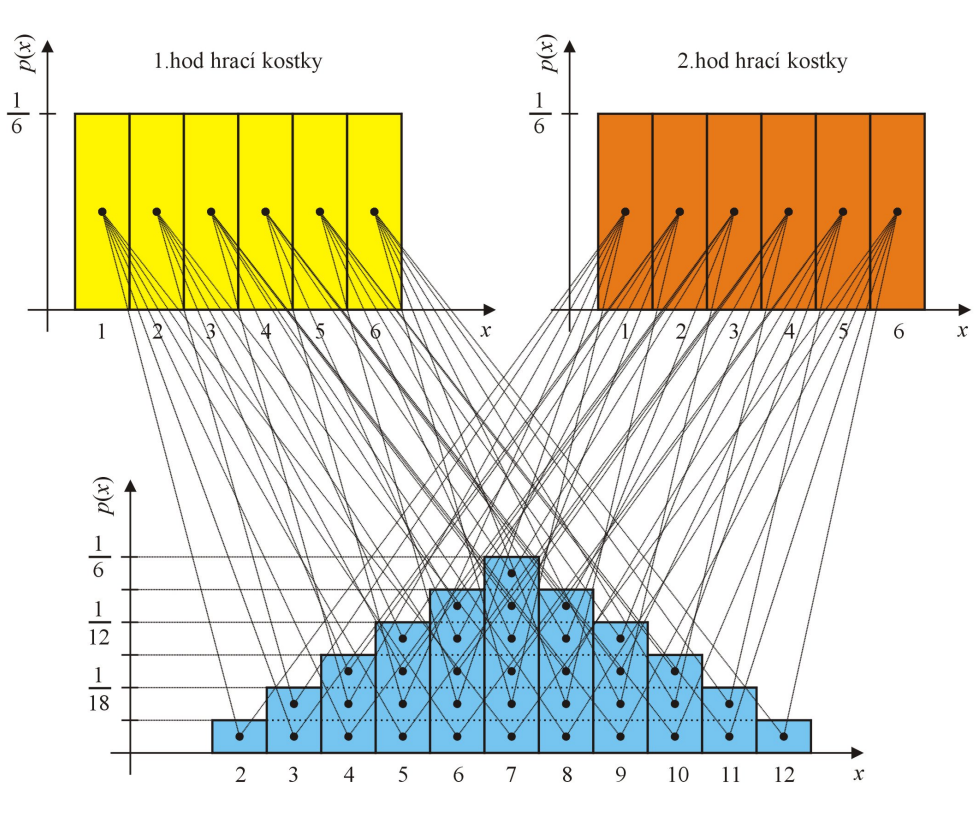
$$p_s = \sum_{s=2}^{12} p(s) = 1 \,. \tag{6.8}$$

Naprosto shodným způsobem lze postupovat v případě součinu, rozdílu a podílu čísel ze dvou po sobě jdoucích hodů hrací kostkou. Výsledná rozdělení pravděpodobnosti jednotlivých aritmetických úkonů pak lze získat fundamentálním ručním výpočtem, lze jej i jednoduše aplikovat v některém z dostupných vývojářských prostředí, příp. i v programech HistOp (viz 6.3.2) nebo ProbCalc (viz 6.3.3).

6.2. Základní výpočetní algoritmus

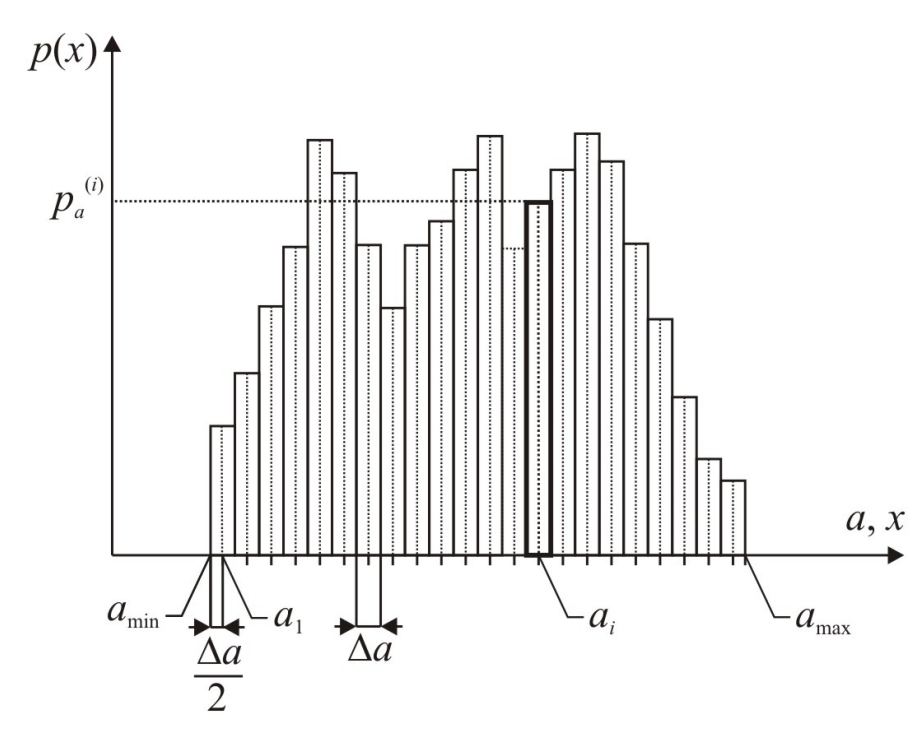
Obdobně se při pravděpodobnostních výpočtech metodou POPV provádí výpočetní operace s jakýmkoliv histogramem náhodné vstupní veličiny. Náhodné veličiny mohou být v metodě POPV vyjádřeny histogramy s diskrétním (*discrete*) nebo čistě diskrétním (*pure discrete*) rozdělením. Způsob, jakým jsou tato rozdělení definována, je nejvíce zřejmý z obr. 6.3 a obr. 6.4.

Poznámka 6.3. Ve výpočtech metodou POPV se v převážné většině případů vyjadřují vstupní náhodné veličiny histogramem s *diskrétním rozdělením*. Tyto histogramy mohou

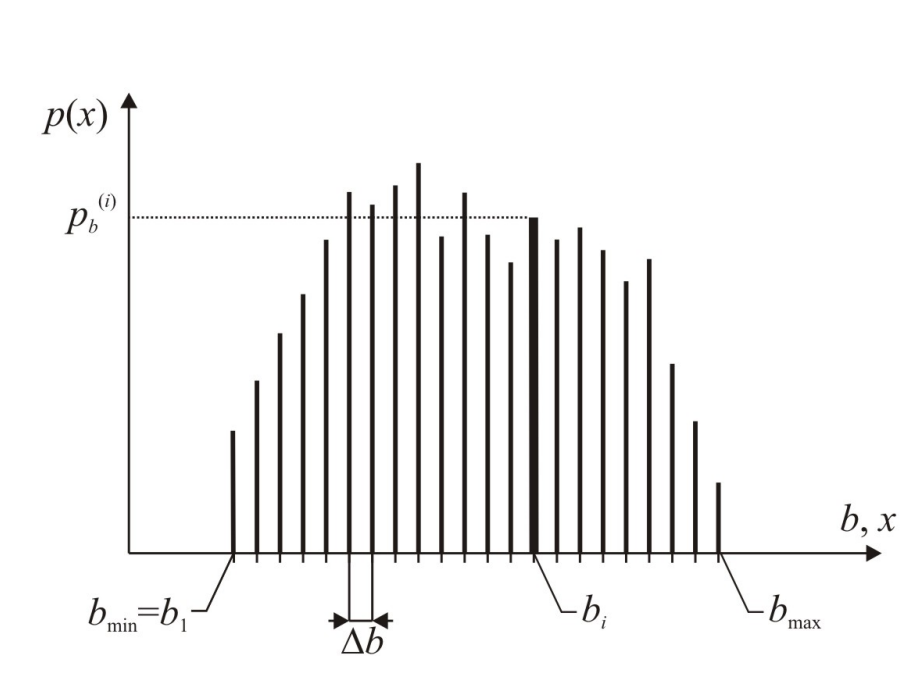


Obr. 6.2 Princip sestavení výsledného histogramu pro součet dvou čísel tažených při dvou po sobě jdoucích hodech hrací kostkou (36 možností)

Obsah
133. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obr. 6.3 Histogram diskrétní náhodné veličiny



Obr. 6.4 Histogram čistě diskrétní náhodné veličiny

Obsah
135. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

vzniknout na základě statistického zpracování naměřených hodnot (viz kap. 6.4.3) nebo diskretizací původně spojité frekvenční funkce některého parametrického rozdělení (viz kap. 6.4.2).

S histogramem *čistě diskrétního rozdělení*, který vyjadřuje náhodnost veličiny s pevně danými hodnotami (většinou celými čísly, což ale principiálně nemusí být pravidlem), se lze setkat např. při testovacích výpočtech s hrací kostkou nebo u pravděpodobnostních výpočtů rizikové analýzy [57], kdy se během rozboru rizik spojených s blíže identifikovaným a ohroženým segmentem a příslušným zdrojem nebezpečí využívá histogram obsahující pouze hodnoty definované stupnicí závažnosti nebezpečí (stupeň závažnosti může nabývat hodnot 0, 1, 2 nebo 3 podle toho, zda-li expertem posuzované nebezpečí je nepatrné, malé, střední či velké).

Další výklad je zaměřen na matematický popis základního výpočetního algoritmu metody POPV. Uvedené postupy byly publikovány v [39].

Nechť histogram B je libovolnou funkcí f histogramů A_j, kde j nabývá hodnot od 1 do n. Platí tedy

$$B = f(A_1, A_2, A_3, \ldots, A_j, \ldots, A_n) \,. \tag{6.9}$$

Každý histogram A_j má i_j intervalů (tříd), přičemž každý interval je omezen hodnotou $a_{j,i}$ zdola a hodnotou $a_{j,i+1}$ shora. Znamená to například, že v intervalu $i_j = 1$ budou hodnoty:

$$a_{j,1} \leqq a_j < a_{j,2} \,, \tag{6.10}$$

přičemž

$$a_{j,2} = a_{j,1} + \Delta a_j \,, \tag{6.11}$$

kde

$$\Delta a_j = \frac{a_{j,\max} - a_{j,\min}}{i_j} \,. \tag{6.12}$$

Obsah
136. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

V intervalu i_j bude tedy obecně:

$$a_{j,i} \leqq a_j < a_{j,i+1} \ . \tag{6.13}$$

Hodnoty a_j v tomto intervalu budou dále označeny $a_j^{(ij)}$. Obdobné platí i pro histogram B. Je-li zde počet intervalů i, pak v i-tém intervalu nabývá histogram hodnot b_i až b_{i+1}, (dále označované $b^{(i)}$), které jsou dány funkcí:

$$b^{(i)} = f\left(a_1^{(i1)}, a_2^{(i2)}, \ldots, a_j^{(ij)}, \ldots, a_n^{(in)}\right) \tag{6.14}$$

pro danou kombinaci argumentů funkce $a_1^{(i1)}, a_2^{(i2)}, \ldots, a_j^{(ij)}, \ldots, a_n^{(in)}$. Totožné hodnoty funkce $b^{(i)}$ však může být dosaženo i při jiných hodnotách (nebo alespoň některých) $a_j^{(ij)}$. Označí-li se možná kombinace l hodnot $a_j^{(ij)}$, pak lze obecně psát:

$$b^{(i)} = f\left(a_1^{(i1)}, a_2^{(i2)}, \ldots, a_j^{(ij)}, \ldots, a_n^{(in)}\right)_l \ . \tag{6.15}$$

Pravděpodobnost p_{bl}^i výskytu hodnoty funkce $b^{(i)}$ je dána součinem pravděpodobnosti $p_{aj}^{(ij)}$ výskytu hodnot a_j^{ij}. Platí tedy:

$$p_{bl}^i = \left(p_{aj}^{(i1)} \cdot p_{aj}^{(i2)} \cdot p_{aj}^{(i3)} \cdot \ \ldots \ \cdot p_{aj}^{(ij)} \cdot \ \ldots \ \cdot p_{aj}^{(in)}\right) \ . \tag{6.16}$$

Pravděpodobnost výskytu všech možných kombinací $\left(a_1^{i1}, a_2^{i2}, \ldots, a_j^{ij}, \ldots, a_n^{in}\right)_l$ funkce f, jejichž výsledkem je hodnota $b^{(i)}$, se pak rovná:

$$p_b^{(i)} = \sum_{l=1}^{l} p_{bl}^{(i)} \ . \tag{6.17}$$

Obsah
137. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Počet intervalů i_j v každém histogramu A_j může být různý stejně jako počet intervalů i v histogramu B. Pro počet potřebných početních operací a potřebnou dobu výpočtu je přitom tento počet intervalů rozhodujícím faktorem. Rovněž podstatně ovlivňuje přesnost pravděpodobnostního výpočtu.

Princip provádění numerických operací pravděpodobnostního výpočtu se dvěma náhodnými veličinami, vyjádřenými histogramem, je zobrazen na obr. 6.5. V daném případě se jedná o kombinaci dvou složek zatížení neboli o součet dvou histogramů.

Poznámka 6.4. Výpočetní náročnost je u metody POPV dána zejména:

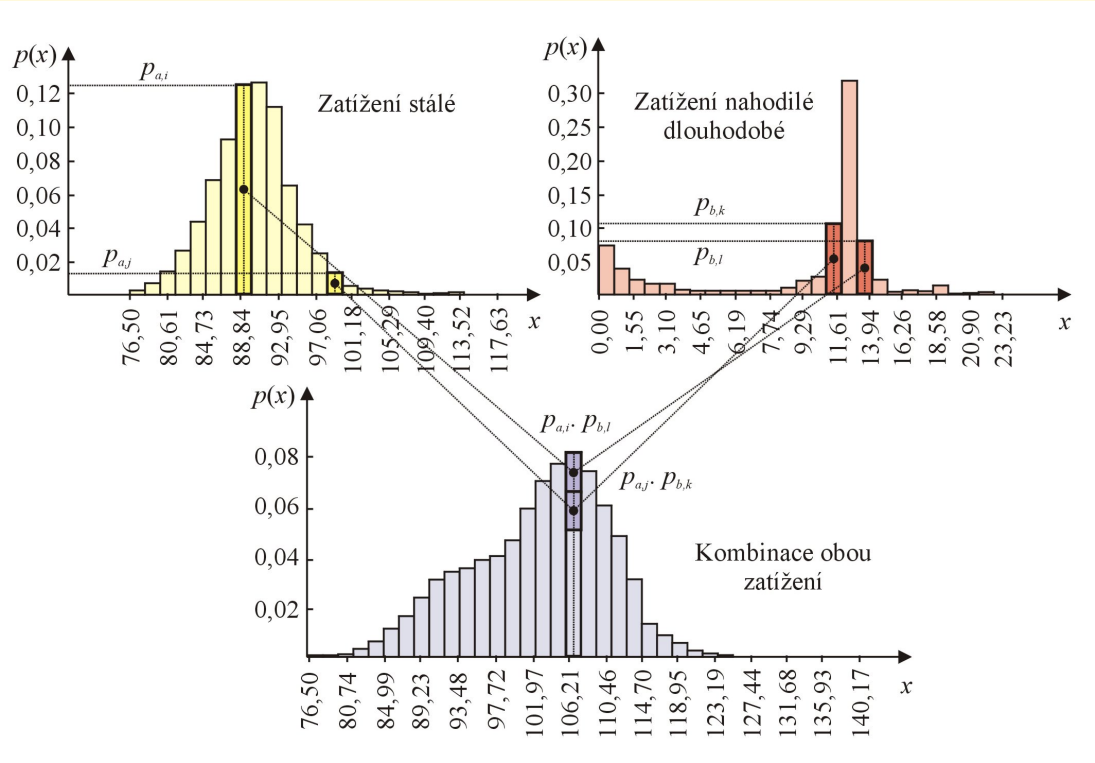
- Počtem náhodných vstupních veličin $i = 1 \dots N$,
- Počtem tříd (intervalů) histogramu každé náhodné vstupní veličiny n_i,
- Náročností řešené úlohy (výpočetního modelu),
- Algoritmem pravděpodobnostního výpočtu (způsobem, jakým je výpočetní model nadefinován v prostředí tzv. „kalkulačky“ nebo dynamické knihovny). Viz kap. 6.3.3.

Příklad 6.5. Pro N histogramů, vyjadřujících náhodnost vstupních veličin, o stejném počtu n tříd je počet výpočetních operací úměrný:

$$P_0 = n^N \,. \tag{6.18}$$

Pro konkrétní hodnoty $N = 10$ a $n = 256$ je pak počet výpočetních operací roven:

$$P_0 = n^N = 256^{10} = 1208925819614629174706176 = 1,208926 \cdot 10^{24} \,. \tag{6.19}$$



Obr. 6.5 Princip provádění numerických operací se dvěma histogramy (kombinace dvou složek zatížení)

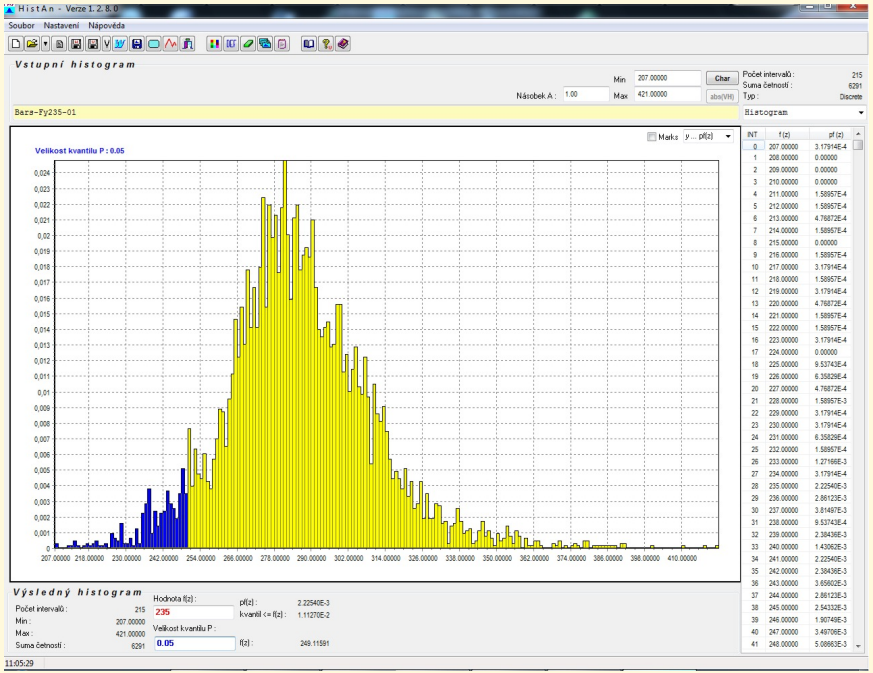
Obsah
139. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

6.3. Programový systém ProbCalc

Postupem času vyvstala potřeba softwarového produktu, jenž by umožnil univerzálně definovat jakýkoliv matematický model pravděpodobnostního výpočtu metodou POPV. Výsledkem se stal stále vyvíjený programový systém ProbCalc, jenž sestává ze tří samostatných výpočetních modulů, které byly poprvé představeny v [32]. Software je v lite verzi ke stažení na [42] a byl prezentován např. na [29].

6.3.1. Program HistAn

Programový nástroj HistAn [36] (viz obr. 6.6) slouží k podrobnější analýze vstupních histogramů. S jeho pomocí lze získat základní charakteristiky histogramu - minimum a maximum funkční hodnoty (okrajové hranice histogramu), počet intervalů a četnosti v nich definované. Lze provádět jednoduché výpočty - stanovení funkční hodnoty s odpovídajícím kvantilem i operaci inverzní - stanovení kvantilu pro zadanou funkční hodnotu proměnné. Rovněž lze provádět určení kombinace několika vstupních histogramů a tzv. sumárního histogramu, kterého lze využít pro výpočty s tzv. větrnou růžicí (viz např. [73] a [48]). V neposlední řadě lze v programu sestavit parametrické rozdělení se zadáním dvou nebo tří parametrů - střední hodnoty, směrodatné odchylky příp. třetího parametru, závisejícího od použitého rozdělení. Uživatel si může vybrat se seznamu dvou desítek nejrozšířenějších typů parametrických rozdělení. Histogramy s parametrickým či neparametrickým rozdělením lze vytvořit i na základě naměřených dat, jenž jsou statisticky vyhodnoceny a zařazeny do tříd. V případě parametrických rozdělení je na základě koeficientu determinace pro zvolená data doporučen nejvhodnější typ parametrického rozdělení. Tyto výpočetní operace lze provádět v odpovídající podobě i v ostatních výpočetních modulech programového systému ProbCalc. Jejich detailnější popis bude proveden v následujících kapitolách 6.4.2 a 6.4.3.



Obr. 6.6 Pracovní plocha programu HistAn

Obsah
141. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

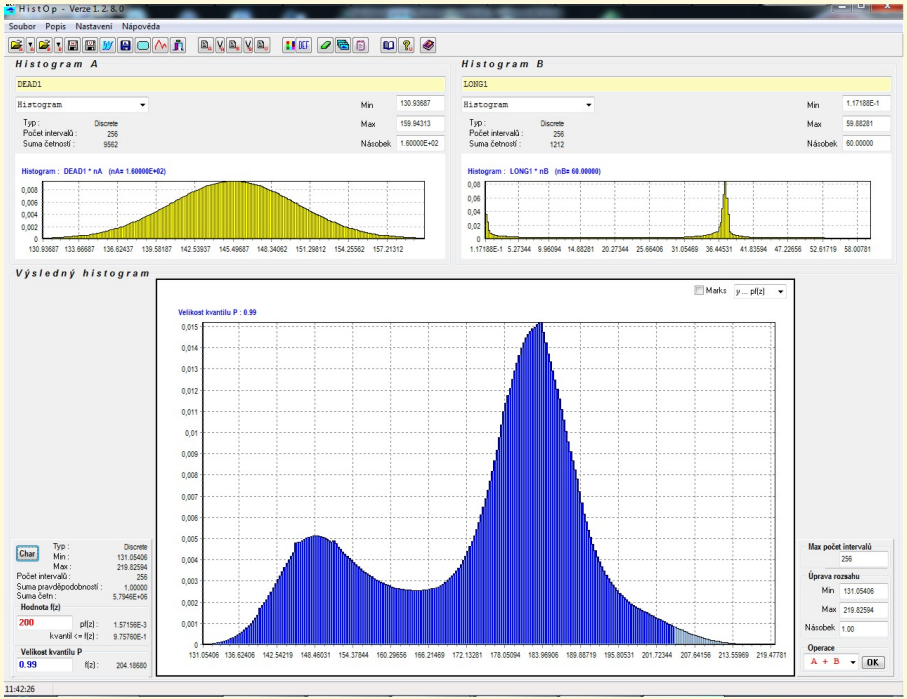
Samozřejmostí jsou běžné uživatelské operace - nastavení pracovního prostředí dle představ uživatele, ukládání výsledného histogramu v numerické i grafické podobě a funkce umožňující export výsledných entit např. do textového editoru.

6.3.2. Program HistOp

S histogramy je možno provádět základní matematické operace. Např. v případě kombinování zatížení se z těchto matematických úkonů využívá zejména sčítání histogramů jednotlivých typů zatížení. Pro provádění základních aritmetických operací s histogramy byl vytvořen programový prostředek HistOp [37] (viz obr. 6.7), který umožňuje s dvojicí histogramů provádět následující aritmetické operace: součet, rozdíl, součin a podíl obou histogramů, druhou mocninu a absolutní hodnotu prvního z histogramů.

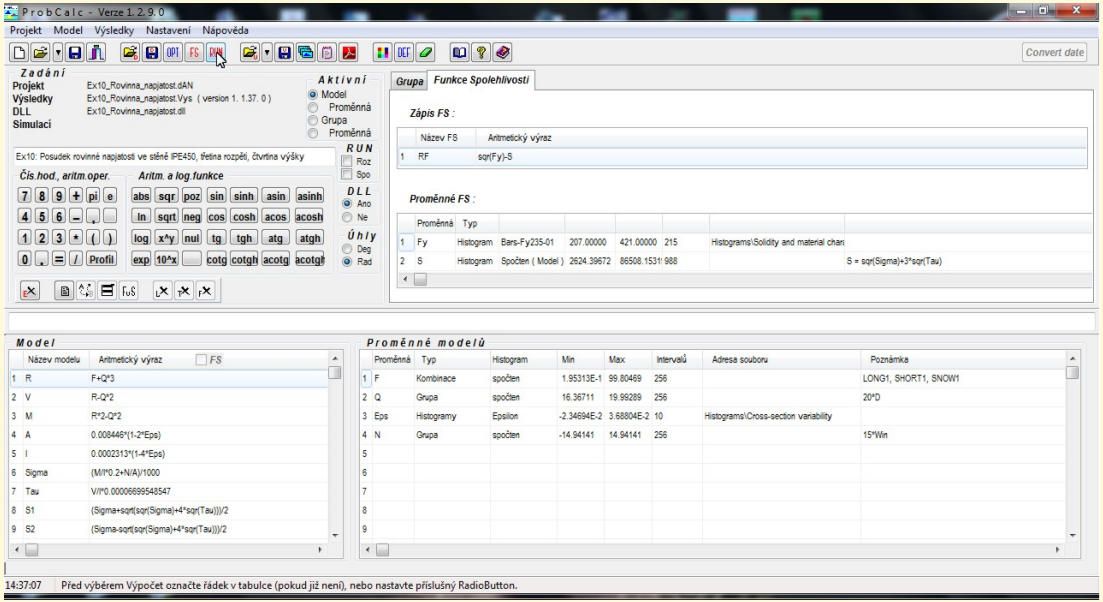
6.3.3. Program ProbCalc

V běžné praxi je s histogramy potřebné provádět složitější operace, související s definicí výpočetního modelu. Principiálně se však jedná stále o tytéž výpočetní postupy, jde jen o vytvoření účinného výpočetního nástroje, kde by uživatel byl schopen zadat výpočtový model - např. v textové podobě. Z tohoto důvodu byl vyvinut program ProbCalc [38] (viz obr. 6.8), do kterého byly implementovány všechny možnosti předchozích programových prostředků. Program navíc umožňuje provádět pravděpodobnostní výpočet zadaného matematického modelu, jenž může být v programu vyjádřen analyticky formou aritmetického výrazu ve znakové podobě (s využitím tzv. „kalkulačky“) nebo pomocí tzv. dynamické knihovny (soubor s příponou DLL), která může být vytvořena v kterémkoliv programovacím jazyce (např. Delphi, C++ nebo Fortran).



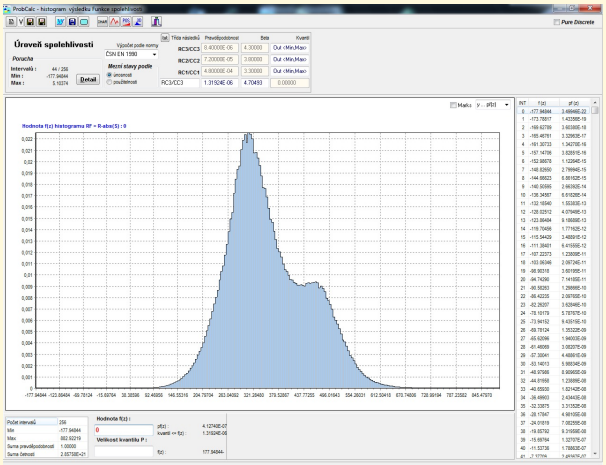
Obr. 6.7 Pracovní plocha programu HistOp

Obsah
143. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

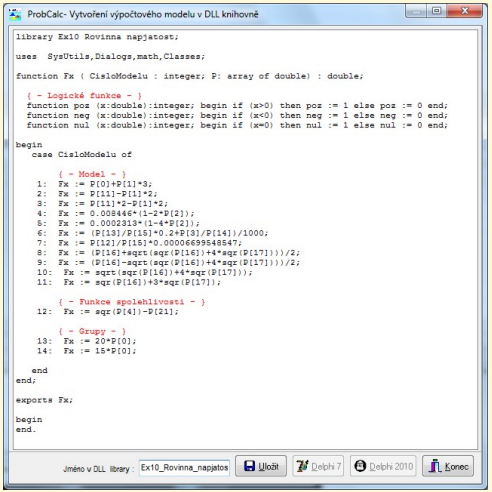


Obr. 6.8 Pracovní plocha programu ProbCalc

Obsah
144. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



a) Okno s výsledným posouzením spolehlivosti řešené konstrukce



b) Převedení nadefinovaného výpočetního modelu z „kalkulačky“ programu ProbCalc do dynamické knihovny

Obr. 6.9 Dílčí pracovní okna programu ProbCalc

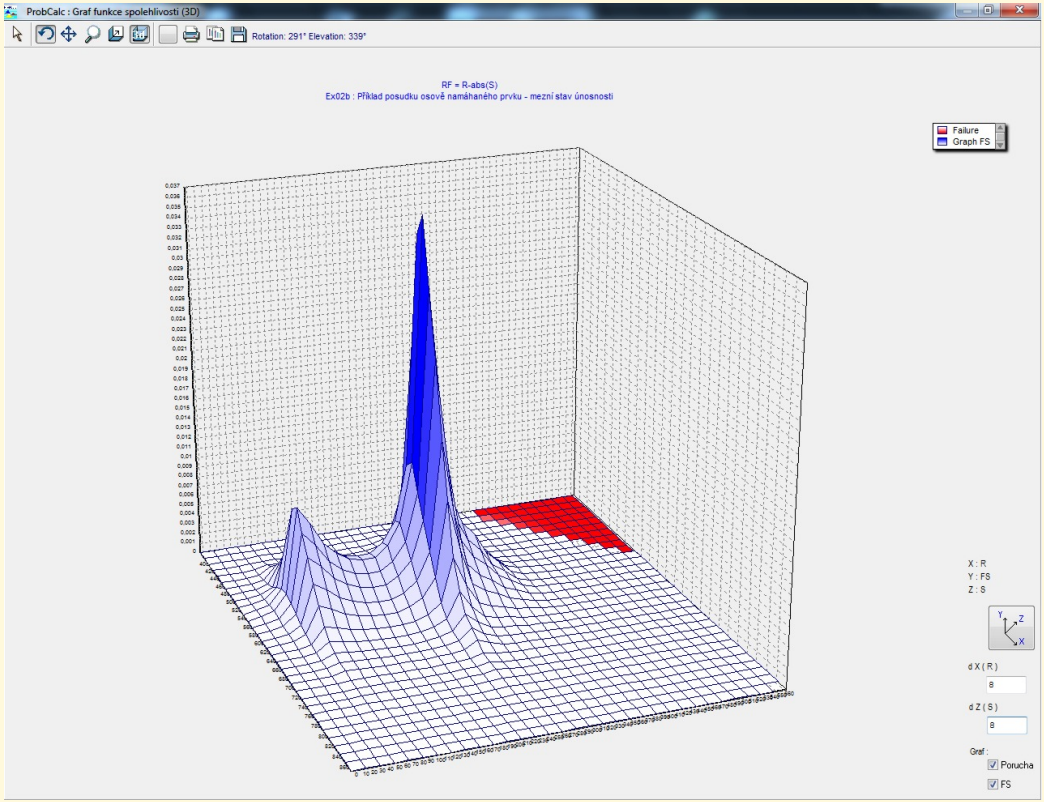
Obsah
145. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Poznámka 6.6. Hlavní výhodou použití dynamických knihoven při pravděpodobnostních výpočtech s využitím programu ProbCalc je možnost definování matematického modelu, který je omezen pouze možnostmi použitého programovacího softwaru (v režimu tzv. „kalkulačky“ je definice matematického modelu limitována použitím maximálně 30 řádků textu). Tímto způsobem lze do výpočetního modelu zakomponovat veškeré programátorské techniky (logická rozhodování, cykly), příp. pro pravděpodobnostní výpočet použít algoritmy numerické analýzy (např.[87]).

Poznámka 6.7. Pro pravděpodobnostní výpočty matematického modelu, který je nadefinován v prostředí tzv. „kalkulačky“ (tedy v textovém režimu), existuje v programu ProbCalc možnost automatického vygenerování zdrojového textu pro vytvoření dynamické knihovny v Delphi (viz obr. 6.9b). Po zadání názvu souboru pak lze vygenerovaný text pouze vyvolat v daném programovacím prostředí, překompilovat do strojového kódu a připojit k programu ProbCalc. Tímto způsobem lze docílit cca čtyřnásobného zkrácení strojového času výpočtu (program již nemusí převádět definici matematického modelu z textového režimu do instrukcí strojového kódu).

Pokud je předmětem pravděpodobnostního výpočtu posouzení spolehlivosti řešené konstrukce, výpočet pravděpodobnosti poruchy p_f i samotné posouzení podle [3] lze provést s výsledným histogramem analyzované funkce spolehlivosti RF (viz např. obr. 6.9a). K zajímavostem programu však patří i možnost 3D zobrazení analyzované funkce spolehlivosti (obr. 6.10), které vede k detailnější analýze řešené pravděpodobnostní úlohy.

Do vyvíjeného softwaru byla implementována řada optimalizačních postupů [33] (optimalizace intervalová, zónová a tzv.trendová, kdy se sleduje trend vlivu dané vstupní veličiny



Obr. 6.10 3D zobrazení funkce spolehlivosti v programu ProbCalc

Obsah
147. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

na výslednou pravděpodobnost poruchy p_f), které umožňují výrazné snížení tzv. výpočetních kroků a tudíž i strojového času výpočtu (blíže viz kap. 6.4.5). Tyto optimalizační techniky pracují do značné míry nezávisle na uživateli.

Dalším ze způsobů snížení časové náročnosti řešených pravděpodobnostních úloh je také jejich *paralelizace*. Výpočetní operace probíhající při řešení složitějších úloh metodou POPV lze totiž snadno upravit tak, aby probíhaly paralelně, což bylo rovněž implementováno do programu ProbCalc (viz kap. 6.4.12). Má-li využívaný počítač dva případně více procesorů, pak lze tímto způsobem dobu výpočtu podstatně zkrátit.

6.4. Program ProbCalc z hlediska uživatele

Programový systém ProbCalc, jehož lite verzi je možno stáhnout z [42], je vyvíjen od roku 2004 v programovém prostředí Delphi (nejprve v Borland Delphi verzi 7.0, nyní v Embarcadero Delphi 2010) s nadstavbou TeeChart (nejprve ve verzi 7.12, pak 8.06) pro tvorbu grafů. V současné době je k dispozici již verze 1.2.15, která obsahuje všechny tři programové prostředky, souhrnně popsané v kap. 6.3.1, 6.3.2 a 6.3.3.

Software byl od počátku vyvíjen s ohledem na uživatelsky příjemné prostředí, kompatibilní se standartem operačního systému Windows. Následující kapitoly 6.4.1 až 6.4.12 si kladou za cíl bližší seznámení s programovým systémem ProbCalc z hlediska uživatele se zaměřením na zmiňované výpočetní utility.

6.4.1. Neparametrická rozdělení pravděpodobnosti

Do pravděpodobnostního výpočtu, prováděného v programu ProbCalc, mohou být vstupní veličiny vyjádřeny histogramem s neparametrickým (empirickým) rozdělením, které jsou

definovány na obr. 6.3 pro **diskrétní veličinu**, příp. na obr. 6.4 pro **čistě diskrétní veličinu**.

Samotný datový soubor s definicí požadovaného histogramu variabilní veličiny je textový soubor s příponou *.dis, jenž obsahuje údaje následujícího tvaru:

```
[Description] (1. oddíl datového souboru)
Identification= volitelný popis datového souboru
Type= Pure Discrete | Discrete (typ neparametrického rozdělení)

[Parameters] (2. oddíl datového souboru)
Min= minimální funkční hodnota
Max= maximální funkční hodnota
Bins= celkový počet tříd daného histogramu
Total= součet četností ve všech třídách

[Bins] (3. oddíl datového souboru)
...
```

kde položka *Identification* obsahuje popis daného histogramu, např. o jaká data se jedná, příp. jejich původ. Minimální funkční hodnota $a_{\min}$ dané veličiny, resp. její maximální funkční hodnota $a_{\max}$, je určena podle obr. 6.3 nebo 6.4 podle typu daného neparametrického rozdělení. V oddíle **[Bins]** jsou na každém dalším řádku uvedeny četnosti jednotlivých intervalů (tříd). Jejich součet musí odpovídat uvedené hodnotě *Total* v předchozím oddílu datového souboru.

Datové soubory uvedené syntaxe pak lze využít pro pravděpodobnostní výpočty nejenom v programu ProbCalc, ale i Freet nebo Anthill, neboť u všech zmiňovaných softwarových produktů je zajištěna jejich kompatibilita.

Poznámka 6.8. V datovém souboru jsou tedy uvedeny četnosti v jednotlivých intervalech (třídách). Po načtení do programu se převádějí na pravděpodobnosti, např. pro interval i, následujícím způsobem:

$$p_a^i = \frac{c_i}{t} \,, \tag{6.20}$$

kde c_i je četnost v intervalu i a c součet četností ve všech intervalech (třídách) daného histogramu, uvedený v datovém souboru v položce Total. Součet všech hodnot p_a^i musí být roven 1.

Příklad 6.9. Datový soubor, definující histogram s neparametrickým rozdělením pravděpodobnosti pro napětí na mezi kluzu [17], vypadá následovně:

```
[Description]
Identification=Yield stress Fy [MPa]
Type=Discrete

[Parameters]
Min=207
Max=421
Bins=214
Total=6291

[Bins]
2
0
0
```

Obsah
150. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

```
1
1
0
4
1
...
```

Následují četnosti ve zbývající intervalech (třídách), jejichž součet musí být 6291, což je celkový počet naměřených hodnot.

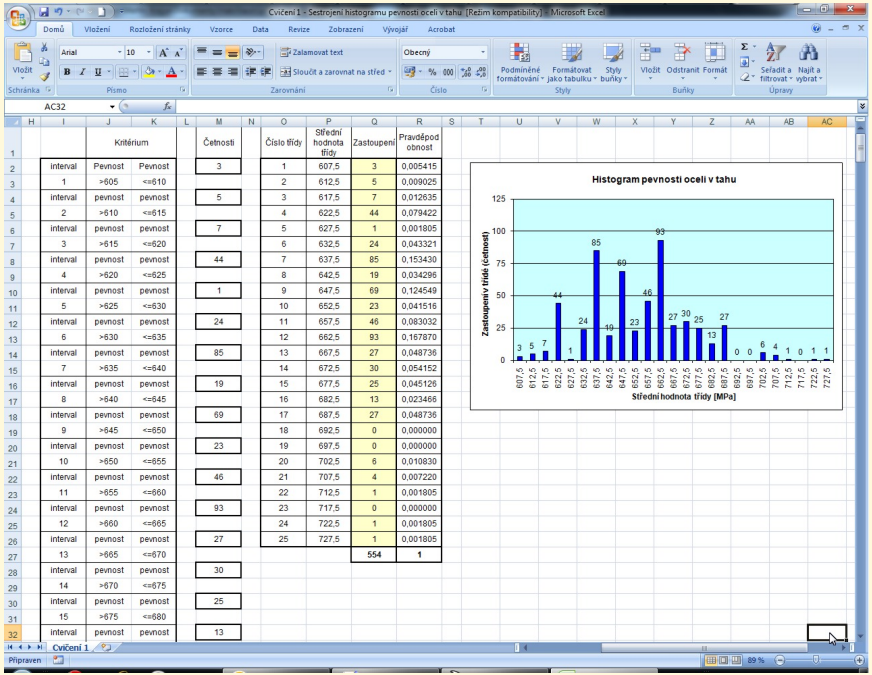
Poznámka 6.10. Pokud má uživatel k dispozici soubor naměřených dat, lze uvedený datový soubor v textové podobě vytvořit ručně. Četnosti v jednotlivých intervalech (třídách) lze určit jednoduše i s pomocí tabulkového procesoru Excel s využitím tabulkové funkce DPOČET (viz např. obr. 6.11).

Datový soubor lze vytvořit i automaticky v některém ze tří programů softwarového balíku ProbCalc, kdy při zadávání typu vstupní veličiny uživatel zvolí Prvotní data (raw data) - viz následující příklad.

Příklad 6.11. Datový soubor z příkladu 6.9 lze jednoduše vytvořit např. v programu HistAn - viz obr. 6.12. Po zadání požadovaného počtu intervalů (tříd), minimální a maximální funkční hodnoty dané veličiny se vytvoří výsledný histogram, který lze uložit v podobě požadovaného datového souboru.

6.4.2. Parametrická rozdělení pravděpodobnosti

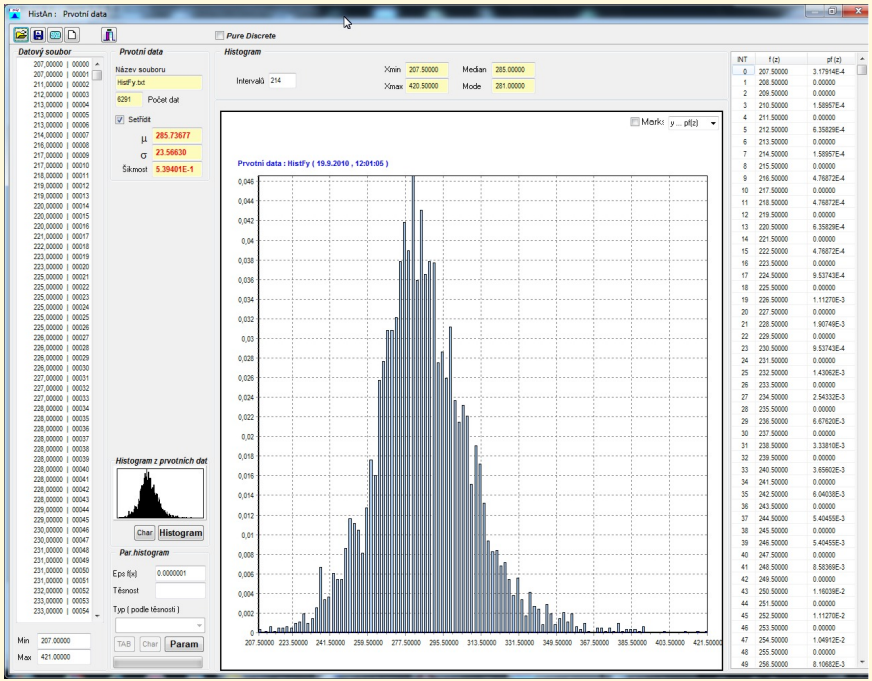
Při pravděpodobnostních výpočtech lze variabilitu vstupních náhodných veličin vyjádřit i histogramem s vhodným parametrickým rozdělením pravděpodobnosti, které připadá



	Kritérium			Četnosti	Číslo třídy	Střední hodnota třídy	Zastoupení	Pravděpodobnost
interval	Pevnost	Pevnost		1	607,5	3	0,005415
1	>605	<=610		2	612,5	5	0,009025
interval	pevnost	pevnost	3	3	617,5	7	0,012635
2	>610	<=615		4	622,5	44	0,079422
interval	pevnost	pevnost	5	5	627,5	1	0,001805
3	>615	<=620		6	632,5	24	0,043321
interval	pevnost	pevnost	7	7	637,5	85	0,153430
4	>620	<=625		8	642,5	19	0,034296
interval	pevnost	pevnost	44	9	647,5	69	0,124549
5	>625	<=630		10	652,5	23	0,041516
interval	pevnost	pevnost	1	11	657,5	46	0,083032
6	>630	<=635		12	662,5	93	0,167870
interval	pevnost	pevnost	24	13	667,5	27	0,048736
7	>635	<=640		14	672,5	30	0,054152
interval	pevnost	pevnost	85	15	677,5	25	0,045126
8	>640	<=645		16	682,5	13	0,023468
interval	pevnost	pevnost	19	17	687,5	27	0,048736
9	>645	<=650		18	692,5	0	0,000000
interval	pevnost	pevnost	69	19	697,5	0	0,000000
10	>650	<=655		20	702,5	6	0,010830
interval	pevnost	pevnost	23	21	707,5	4	0,007220
11	>655	<=660		22	712,5	1	0,001805
interval	pevnost	pevnost	46	23	717,5	0	0,000000
12	>660	<=665		24	722,5	1	0,001805
interval	pevnost	pevnost	93	25	727,5	1	0,001805
13	>665	<=670				554	1
interval	pevnost	pevnost	27				
14	>670	<=675					
interval	pevnost	pevnost	30				
15	>675	<=680					
interval	pevnost	pevnost	25				
			13				

Obr. 6.11 Tabulkový procesor Excel a tvorba histogramu s neparametrickým rozdělením

Obsah
152. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obr. 6.12 Program HistAn a tvorba histogramu s neparametrickým rozdělením

Obsah
153. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

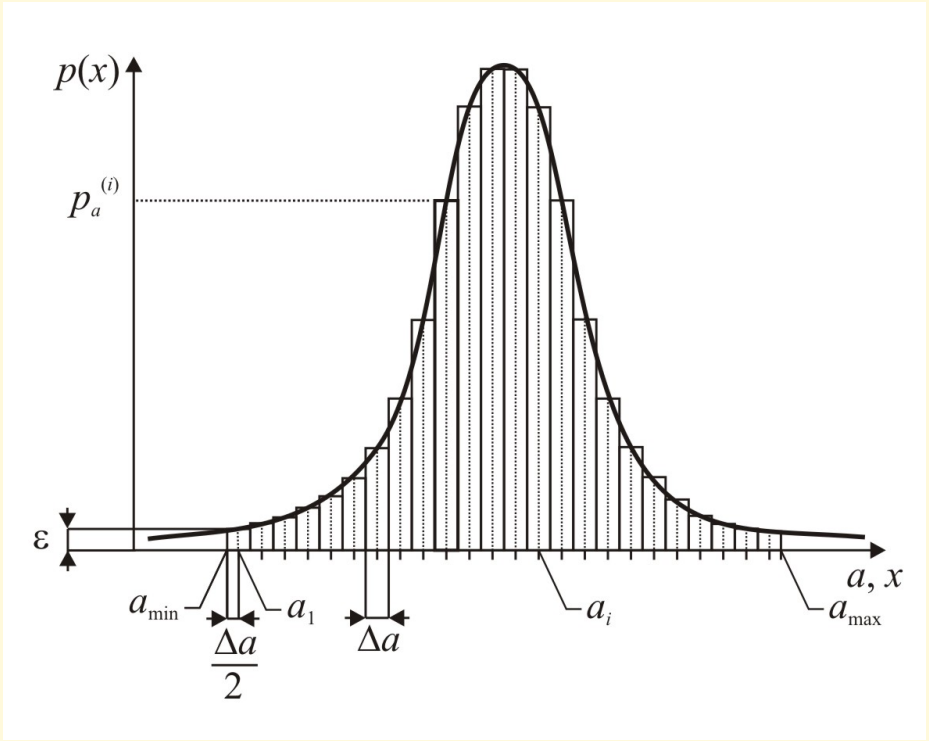
v úvahu zejména při nedostatečném množství naměřených hodnot nebo v situacích, kdy nelze danou veličinu změřit, ale jen odhadnout.

Programový systém ProbCalc disponuje v současné době 24 typy parametrických rozdělení pravděpodobnosti (např. normální, lognormální dvoj i tříparametrické, Gumbelovo, Raised-cosine, Cauchyho, Fisher-Tippettovo, Laplaceovo, Weibullovo, Rayleighovo, Studentovo, Beta, Gamma, Exponenciální nebo χ^2), které se při tvorbě histogramů diskretizují (aproximují) postupem zřejmým z obr. 6.13. Jejich sestrojení je možné po zadání potřebných parametrů, požadovaného počtu intervalů (tříd) a veličiny ε potřebné k omezení definičního oboru rozdělení pravděpodobnosti spojité náhodné veličiny (viz obr. 6.13). Tato veličina odpovídá pravděpodobnosti v místě tzv. „useknutí“ (viz obr. 2.6), které se stanoví pro zvolený typ parametrického rozdělení pravděpodobnosti na základě iteračního výpočtu.

Uvedená konstrukce histogramu diskretizované náhodné veličiny s parametrickým rozdělením pravděpodobnosti se může vytvořit automaticky v některém ze tří programů softwarového balíku ProbCalc, kdy při zadávání typu vstupní veličiny uživatel zvolí Parametrické rozdělení - viz následující příklad.

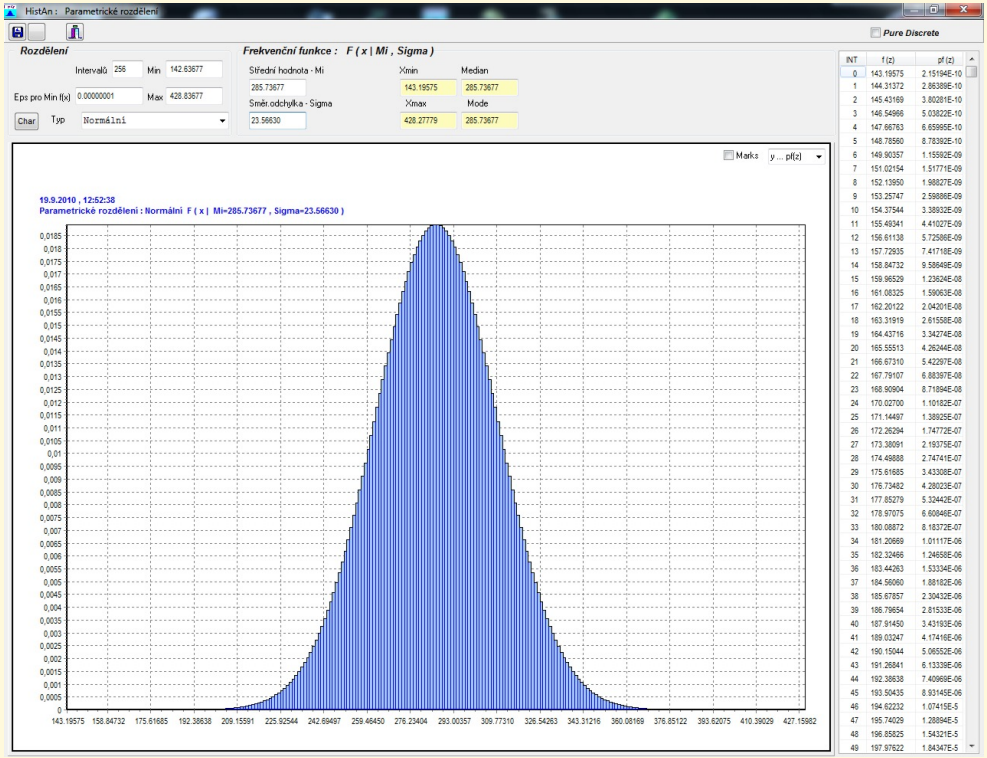
Příklad 6.12. Naměřené hodnoty z příkladů 6.9 a 6.11 mají střední hodnotu $\mu = 285,737$ MPa a směrodatnou odchylku $\sigma = 23,566$ MPa. Tyto parametry je nutno zadat např. do zvolených editačních políček programu HistAn, společně s počtem požadovaných intervalů (tříd), např. $n = 256$ a parametrem omezení definičního oboru parametrického rozdělení pravděpodobnosti, např. $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-8}$. Pracovní plocha programu, společně s výsledným histogramem náhodné veličiny, je zobrazena na obr. 6.14.

Poznámka 6.13. Potřebné parametry pro zadání parametrického rozdělení pravděpodobnosti lze stanovit např. s pomocí tabulkových funkcí AVERAGEA (střední hodnota) a SMODCH (směrodatná odchylka) tabulkového procesoru Excel.



Obr. 6.13 Histogram diskretizované náhodné veličiny s parametrickým rozdělením pravděpodobnosti

Obsah
155. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obr. 6.14 Histogram diskretizované náhodné veličiny s parametrickým normálním rozdělením pravděpodobnosti, vytvořený v programu HistAn

Obsah
156. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Příklad 6.14. Vytvoření omezeného parametrického normálního rozdělení pravděpodobnosti je možno sledovat v animaci na obr. 6.4.2.

6.4.3. Zpracování naměřených dat

Do programů HistAn, HistOp a ProbCalc byl implementován modul pro vkládání naměřených dat a pro jejich vyhodnocování. Hodnoty uložené v textovém souboru lze v programu načíst, vytvářet z nich histogramy s neparametrickým rozdělením pravděpodobnosti s možností volby počtu intervalů nebo histogramy s parametrickým rozdělením pravděpodobnosti. K dispozici je škála 24 již zmiňovaných typů parametrických rozdělení pravděpodobnosti s možností výběru nejvhodnějšího z nich pro daný soubor získaných či naměřených hodnot.

Jako míru vhodnosti křivky hustoty pravděpodobnosti parametrického rozdělení pravděpodobnosti lze použít např. **koeficient determinace**:

$$\frac{s_Y^2}{s_y^2} = 1 - \frac{s_{y,x}^2 + \frac{2}{n} \cdot \sum_i (y_i - Y_i) \cdot (Y_i - \overline{y})}{s_y^2} \,, \tag{6.21}$$

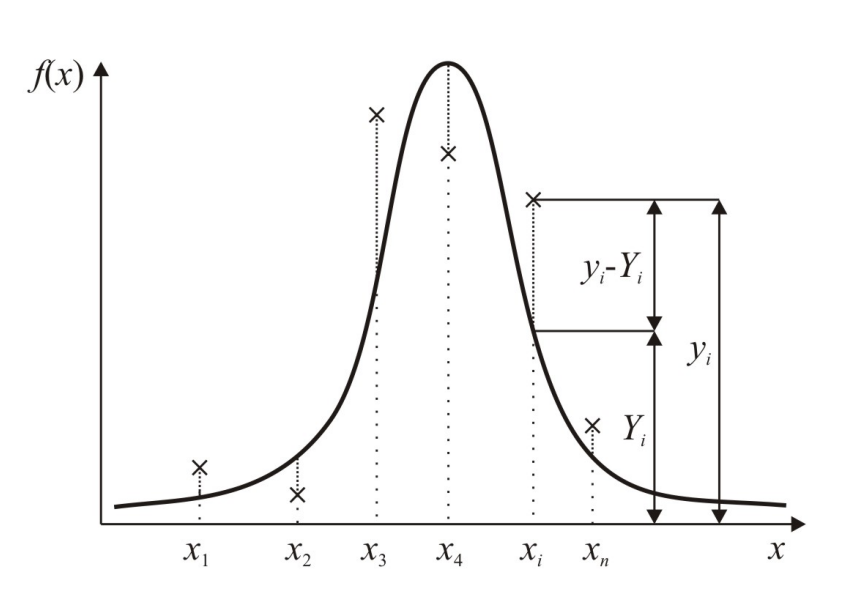
kde jednotlivé rozptyly pro n intervalů (tříd) lze stanovit následujícím způsobem (viz obr. 6.16):

$$s_y^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_i (y_i - \overline{y})^2 \,, \tag{6.22}$$

$$s_Y^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_i (Y_i - \overline{y})^2 \,, \tag{6.23}$$

Obr. 6.15 Tvorba histogramu useknutého normálního rozdělení v programu HistAn [36] se vstupními parametry: střední hodnota = 1, směrodatná odchylka = 5/300, minimum = 0,95, maximum = 1,05

Obsah
158. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obr. 6.16 Výpočet koeficientu determinace pro stanovení vhodného parametrického rozdělení pravděpodobnosti

Obsah
159. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

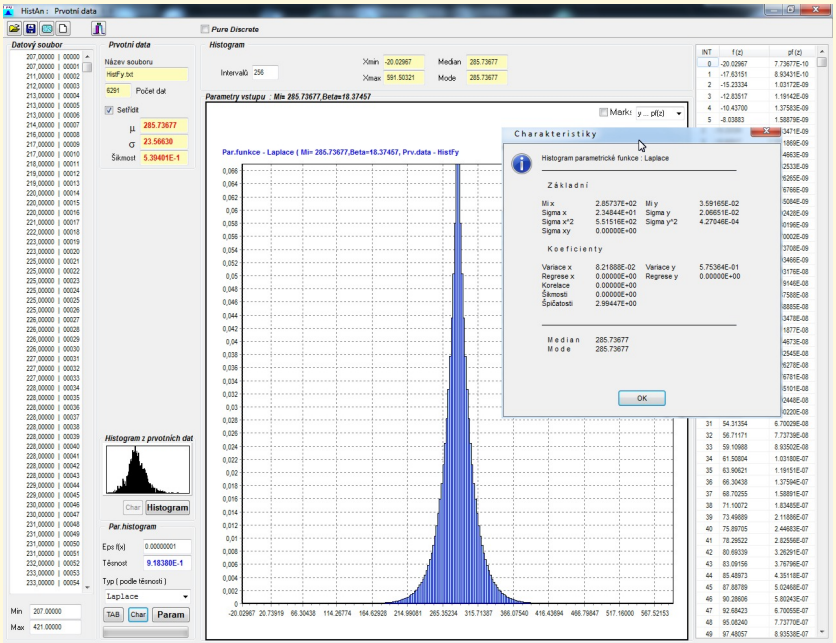
$$s_{y,x}^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_i (y_i - Y_i)^2 \ . \tag{6.24}$$

V uvedených vztazích Y_i představuje hodnotu funkce hustoty pravděpodobnosti parametrického rozdělení v příslušné hodnotě x_i, $\overline{y}_i$ je střední hodnota určená ze všech hodnot y_i. Výsledná hodnota koeficientu determinace se pohybuje v rozmezí hodnot 0 až 1. Čím je hodnota koeficientu determinace bližší hodnotě 1, tím je analyzovaná funkce vhodnější pro dané hodnoty vstupních dat.

Pro stanovení nejvhodnějšího parametrického rozdělení pravděpodobnosti může sloužit i reziduální (zbytkový) součet čtverců - rozptyl (6.24), u něhož je žádoucí nejmenší hodnota.

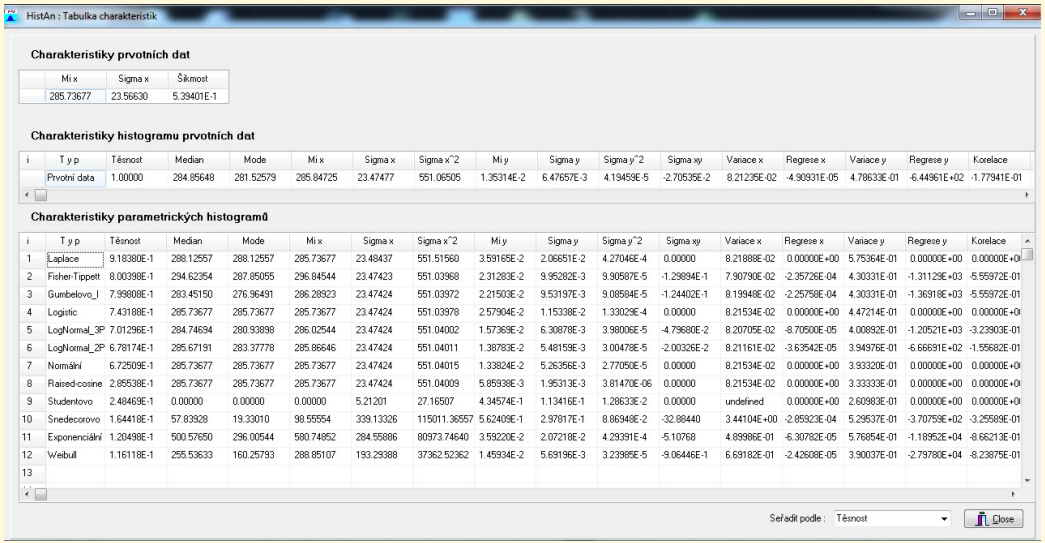
Příklad 6.15. Jako demonstrační příklad tvorby histogramu s parametrickým rozdělením pravděpodobnosti poslouží naměřená data z příkladů 6.9, 6.11 a 6.12. Po jejich načtení do některého programu z softwarového balíku ProbCalc ve formě textového souboru je nutno zadat počet požadovaných intervalů (tříd), např. $n = 256$ a parametr omezení definičního oboru parametrického rozdělení pravděpodobnosti, např. $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-8}$. Nyní je možno spustit iterační výpočet funkčních hodnot omezení histogramů u všech 24 typů parametrických rozdělení pravděpodobnosti tlačítkem „Param“. Rovněž se provede vyhodnocení nejvhodnějšího typu parametrického rozdělení pravděpodobnosti s využitím koeficientu determinace. Zobrazí se histogram s největší hodnotou tohoto koeficientu - viz obr. 6.17, u kterého je rovněž možno zobrazit všechny statistické parametry a momenty.

Pokud programem nabízený nejvhodnější typ parametrického rozdělení pravděpodobnosti nevyhovuje, lze zobrazit tabulku s dalšími již méně vhodnými typy rozdělení s menší nenulovou hodnotou koeficientu determinace (viz obr. 6.18). Tak lze vytvořit např. i histogram s parametrickým normálním rozdělením pravděpodobnosti, jenž byl předmětem příkladu 6.12.



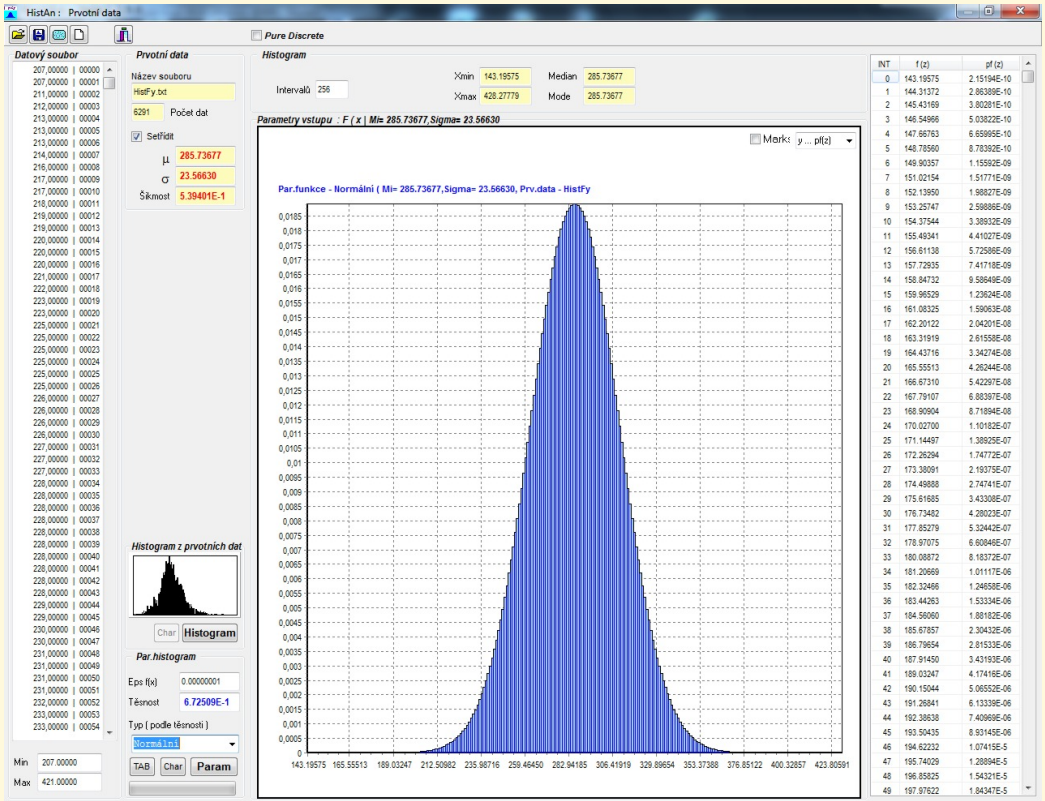
Obr. 6.17 Histogram s nejvhodnějším parametrickým rozdělením pravděpodobnosti

Obsah
161. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obr. 6.18 Tabulka se seznamem nejvhodnějších parametrických rozdělení pravděpodobnosti i jejich parametry

Obsah
162. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obr. 6.19 Histogram s diskretizovanou náhodnou veličinou s parametrickým normálním rozdělením pravděpodobnosti, vytvořený v programu HistAn na základě naměřených dat

Obsah
163. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Uvedené postupy tvorby histogramů vstupních náhodných veličin z naměřených hodnot při řešení úloh metodou POPV v prostředí programového systému ProbCalc byly publikovány v [35]. Zmiňovaná publikace demonstruje výpočet hodnot odchylek normových hodnot průřezu a mechanických vlastností válcovaných tyčí typu K, P a TH, používaných pro ocelovou obloukovou výztuž důlních a podzemních děl, které byly získány na základě měření zkušebních vzorků.

6.4.4. Statisticky závislé vstupní veličiny

Při posuzování spolehlivosti konstrukcí pravděpodobnostními metodami vstupují do výpočtu většinou nezávislé náhodné veličiny. Některé vstupní veličiny však statisticky závislé být mohou - například průřezové charakteristiky, pevnostní a tuhostní charakteristiky materiálů. Vliv statistické závislosti vstupních náhodných veličin na spolehlivost konstrukce byl zkoumán např. v [95].

Statisticky závislé vstupní veličiny mohou do výpočtu metodou POPV vstoupit zprostředkovaně (nepřímo) jako funkce vhodných nezávislých vstupních veličin. Přímé zadávání statisticky závislých vstupních veličin při výpočtech metodou POPV jsou ve fázi rozpracování [31].

Problematice náhodně proměnných statisticky závislých vstupních veličin byla doposud věnována pozornost zejména u průřezových charakteristik válcovaných profilů, které lze ve výpočtech metodou POPV zadávat pomocí nezávislých veličin, zadaných např. formou histogramů. Tato problematika pro průřezové charakteristiky byla řešena např. v [107, 88], kde je uveden způsob zadávání průřezových charakteristik pomocí nezávislých histogramů.

6.4.5. Optimalizace výpočtu v programu ProbCalc

Optimalizační techniky, jenž byly v metodě POPV vyvinuty, mají za cíl minimalizovat dobu výpočtu, neboť v kap. 6.2 zmiňovaný základní algoritmus má jistá omezení daná zejména náročností rozsáhlých úloh, kdy počet výpočetních kroků je velmi vysoký. S jejich využitím lze při aplikaci POPV pravděpodobnost poruchy p_f určit v reálném čase při zachování korektnosti a dostatečné přesnosti řešení i u relativně náročných pravděpodobnostních úloh.

K vyvinutým optimalizačním krokům patří:

(a) **Grupování vstupních náhodně proměnných veličin** (např. složek zatížení), které mohou do výpočtu vstupovat společně a lze pro ně předem zpracovat společný histogram. Tento postup je aplikován např. v situacích, kdy je kombinace zatížení tvořena několika složkami náhodně proměnných zatížení se stejným působištěm, takže je pak lze vyjádřit jediným společným histogramem. Lze využít i v obdobných situacích s jinými vstupními veličinami.

(b) **Intervalová optimalizace**, při níž dochází ke snižování počtu intervalů náhodně proměnných vstupních veličin jednotlivých histogramů při zachování celého rozsahu každé náhodné vstupní veličiny. Tento způsob zrychlení výpočtu se využívá tak, aby nebyl podstatně ovlivněn výsledek a korektnost řešení úlohy byla zachována. Při tomto postupu se proto nejdříve testuje vliv počtu intervalů každé náhodné veličiny na výsledek řešení a následně se tento počet intervalů minimalizuje.

(c) **Zónová optimalizace**, kdy se při výpočtu využívá pouze intervalů, které se podílejí na hledané hodnotě, např. pravděpodobnosti poruchy p_f konstrukce.

(d) **Trendová optimalizace**, jenž při výpočtu zohledňuje vhodný směr (trend) v algoritmu pravděpodobnostního výpočtu,

(e) **Grupování dílčích výsledků výpočtu**, například při sestavování výsledné funkce spolehlivosti RF,

(f) **Paralelizace výpočtu**, kdy výpočet probíhá současně na několika procesorech či jádrech,

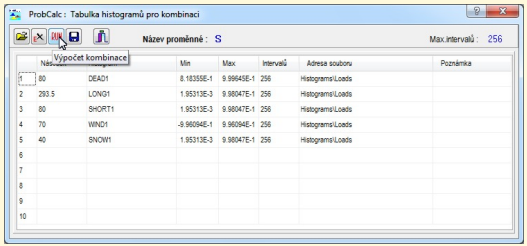
(g) **Kombinace uvedených optimalizačních postupů**.

Uvedené optimalizační techniky již byly postupně implementovány do programového systému ProbCalc, kde je lze rovněž při pravděpodobnostním výpočtu vzájemně kombinovat.

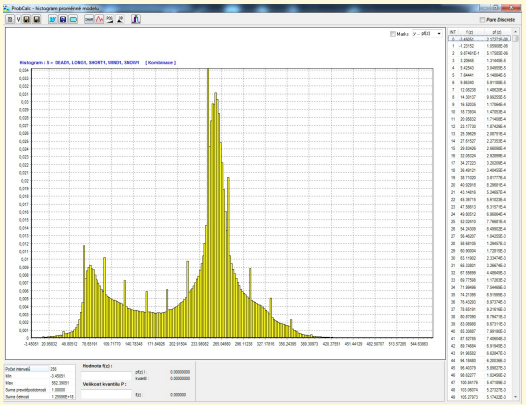
6.4.6. Grupování vstupních náhodně proměnných veličin

Grupování vstupních veličin umožňuje eliminovat počet histogramů vstupních veličin tím, že se v situacích, kde je to možné, určí na základě požadované matematické operace jejich výsledný histogram, se kterým se nakonec provede výsledný pravděpodobnostní výpočet definovaného výpočetního modelu. Tímto způsobem lze dosáhnout velkého snížení výpočetních operací.

Nejčastější použití této optimalizační techniky lze hledat zejména ve výpočtu kombinace zatížení (viz obr. 6.20) nebo tzv. sumárního histogramu pro vyjádření účinku zatížení větru tzv. větrnou růžicí (viz např. [73] a [48]), což lze v jednotlivých modulech programu ProbCalc vyvolat v tabulce vstupních veličin. Pro zadání grupy vstupních veličin s jiným matematickým předpisem, než je součet, je na pracovní ploše programu ProbCalc okno s názvem záložky *Grupy*.



a) Pracovní plocha programu ProbCalc s tabulkou pro zadání jednotlivých složek zatížení



b) Výsledný histogram kombinace složek zatížení

Obr. 6.20 Výpočet kombinace zatížení v programu ProbCalc

Obsah
167. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Příklad 6.16. Nechť

$$B = (A_1, A_2, \ldots, A_N) \,, \tag{6.25}$$

kde $A_{i=1\ldots N}$ představuje N histogramů vstupních veličin pravděpodobnostního výpočtu (např. histogramy složek zatížení) a B jejich „grupu“ (např. kombinaci jednotlivých složek zatížení).

Při použití zadání z příkladu 6.5 ($N = 10$ a $n = 256$) je počet všech možných kombinací pravděpodobnostního výpočtu:

$$P_0 = n^N = 256^{10} = 1208925819614629174706176 \doteq 1,208926 \cdot 10^{24} \,. \tag{6.26}$$

Stejný výsledek však lze získat postupným sčítáním vždy dvou histogramů. Pak se počet výpočetních operací sníží na

$$P_0^* = (N-1) \cdot n^2 = 9 \cdot 256^2 = 9 \cdot 65536 = 589824 \,, \tag{6.27}$$

a poměr počtu výpočetních operací obou případů se rovná

$$\frac{P_0^*}{P_0} = \frac{(N-1) \cdot n^2}{n^N} = (N-1) \cdot n^{2-N} = 9 \cdot 256^{-8} \doteq 4,878910 \cdot 10^{-19} \tag{6.28}$$

a odpovídá dosaženému snížení výpočetních operací při pravděpodobnostním výpočtu použitím této optimalizační techniky.

Poznámka 6.17. Uvedená optimalizační technika se nemusí týkat pouze sčítání jednotlivých vstupních veličin, ale i složitějších aritmetických operací s histogramy.

Pokud je vytváření společných histogramů vstupních veličin - „grupování“ možné a korektní, představuje velmi racionální a účinnou optimalizační techniku, která razantně snižuje počet výpočetních operací pravděpodobnostního výpočtu.

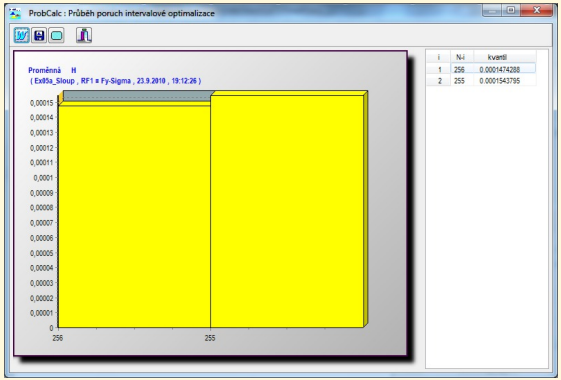
6.4.7. Intervalová optimalizace výpočtu

Smyslem intervalové optimalizace je minimalizovat počet tříd v histogramech vstupních veličin, čímž lze docílit snížení početních operací a minimalizovat tak strojový čas pravděpodobnostního výpočtu. Závaznou podmínkou této optimalizační techniky je však zachování dostatečné přesnosti požadovaných výsledků řešení. Při tomto optimalizačním způsobu je nutno ověřit, do jaké míry se zmenšení počtu intervalů projeví na výsledku. V [27] byla publikována studie, při níž se při průběžném snižování počtu intervalů vždy u jedné ze vstupních veličin sledoval rozdíl mezi dosaženou pravděpodobností poruchy p_f a přesnou hodnotou této veličiny, získanou při výpočtu s maximálním počtem intervalů.

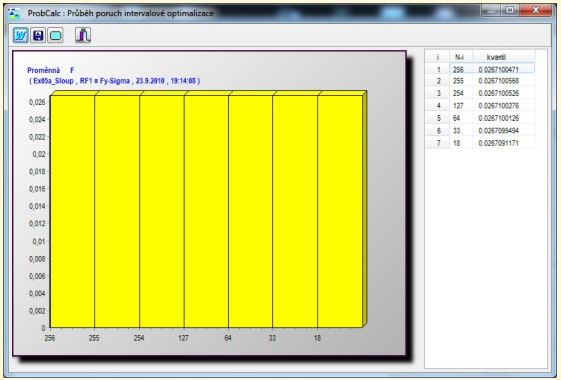
Příklad 6.18. Pro demonstraci činnosti intervalové optimalizace v programu ProbCalc poslouží příklad pravděpodobnostního posudku spolehlivosti ocelového prvku namáhaného rovinným ohybem a osovým namáháním (prostým tlakem) podle mezního stavu únosnosti a teorie II. řádu s uvažováním vlivu počátečních imperfekcí. Úloha, jejíž výpočetní model vychází z [104], byla publikována v [34].

Při intervalové optimalizaci se provede citlivostní analýza vlivu jednotlivých vstupních veličin na výsledek. U veličin, které mají citlivost nižší, se zpravidla může počet intervalů snížit výrazněji. Dovolenou odchylku od přesného řešení lze zadat pomocí parametru ε, např. hodnota $0,01$ odpovídá odchylce 1% od přesného řešení.

V daném případě vykazuje největší rozdíly a tedy i největší citlivost vztaženou k výsledku, kombinace složek bočního zatížení H. Vliv této veličiny na pravděpodobnost poruchy je vysoký, počet intervalů při zachování korektnosti řešení lze tudíž snížit velmi omezeně. Na obr. 6.21 a) je patrné, že již nepatrné snížení počtu intervalů u této veličiny vykazuje značnou odchylku oproti přesnému řešení, přesahující zadanou hodnotu ε. U kombinace bočních účinků tedy nelze počet intervalů snížit.



a) Citlivostní analýza kombinace bočních složek zatížení H



b) Citlivostní analýza kombinace svislých složek zatížení F

Obr. 6.21 Průběh intervalové optimalizace v programu ProbCalc

Obsah
170. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

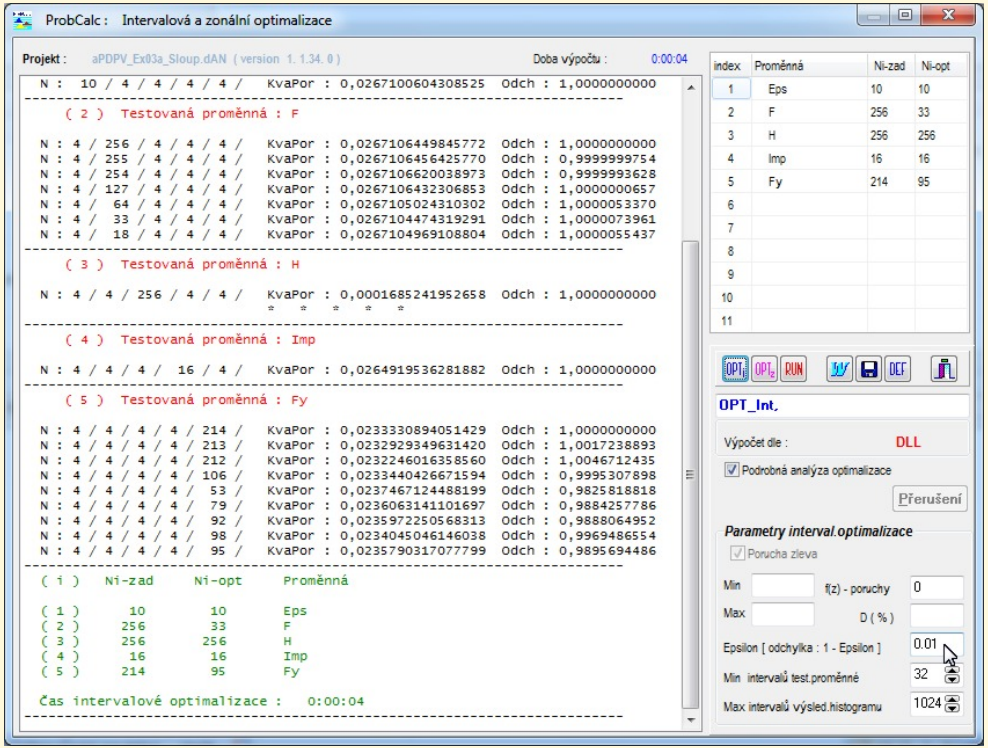
Naopak vliv kombinace svislých složek zatížení F na výslednou pravděpodobnost poruchy je malý. Počet intervalů histogramu této veličiny lze při zachování korektnosti řešení snížit výrazně. Výsledná hodnota pravděpodobnosti poruchy se u tohoto histogramu téměř nemění ani při velmi malém počtu intervalů, což je zřejmé z obr. 6.21 b).

Původní i snížený počet intervalů vstupních veličin dané úlohy je uveden na obr. 6.22, kde je zobrazena pracovní plocha modulu Intervalové optimalizace v programu ProbCalc se samotným průběhem výpočtu.

Výsledná pravděpodobnost poruchy bez použití intervalové optimalizace vychází $p_f = 3,54323 \cdot 10^{-5}$. Po aplikaci intervalové optimalizace se vstupním parametrem $\varepsilon = 0,01$ je výsledek $p_f = 3,53004 \cdot 10^{-5}$. Rozdíl oproti přesné hodnotě výsledku provedeného bez intervalové optimalizační techniky odpovídá požadované odchylce 1% dané vstupním parametrem ε.

Výpočet, který bez využití tohoto optimalizačního kroku trval 1 minutu a 3 sekundy (Parametry počítače: procesor Intel(R) Core(TM)2 Duo CPU T7250, 2.00 GHz, 2 jádra, 2 logické procesory; 4 GB RAM; operační systém Microsoft Windows 7 Professional; ProbCalc v.1.2.14), se při použití intervalové optimalizace zkrátil na 7 sekund. Samotná intervalová optimalizace s vstupním parametrem $\varepsilon = 0,01$ trvala 4 sekundy.

Obsah
171. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obr. 6.22 Pracovní plocha modulu Intervalové optimalizace v programu ProbCalc

Obsah
172. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

6.4.8. Zónová optimalizace výpočtu

V zónové analýze se každý histogram vstupních veličin rozdělí na tzv. „zóny“, které se podílejí na vzniku pravděpodobnosti poruchy p_f při všech možných hodnotách v ostatních histogramech:

1.zóna - intervaly (třídy) histogramů vstupních veličin, které se na pravděpodobnosti poruchy p_f **podílejí vždy**, tzn. při jakékoliv kombinaci intervalů zbývajících vstupních veličin (v programu ProbCalc je tato zóna označena v histogramu červenou barvou),

2.zóna - intervaly (třídy) histogramů vstupních veličin, které se na pravděpodobnosti poruchy p_f **mohou**, ale **nemusejí podílet**, tzn. pouze při některých kombinacích intervalů ostatních vstupních veličin (v programu ProbCalc je zóna v histogramu označena žlutě),

3.zóna - intervaly (třídy) histogramů vstupních veličin, které se na pravděpodobnosti poruchy p_f **nepodílejí nikdy**, a proto lze tedy při určování pravděpodobnosti poruchy p_f tuto část histogramu vynechat úplně (v programu ProbCalc je zóna v histogramu označena modře).

Znalost zón umožňuje výpočet pravděpodobnosti poruchy p_f, která se pak skládá ze dvou hodnot:

$$p_f = p_{f,1} + p_{f,2} \ , \tag{6.29}$$

kde $p_{f,1}$ je součet všech pravděpodobností v intervalech **zóny 1** analyzovaného histogramu (pokud tato zóna existuje, pravděpodobnosti intervalů zóny 1 se na pravděpodobnosti poruchy p_f podílejí ve všech případech), $p_{f,2}$ představuje část (porucha může vzniknout, ale nemusí) pravděpodobnosti poruchy p_f vznikající v intervalech částí daného histogramu,

která spadá do **zóny 2** (pravděpodobnosti intervalů zóny 3 se na pravděpodobnosti poruchy p_f nepodílejí).

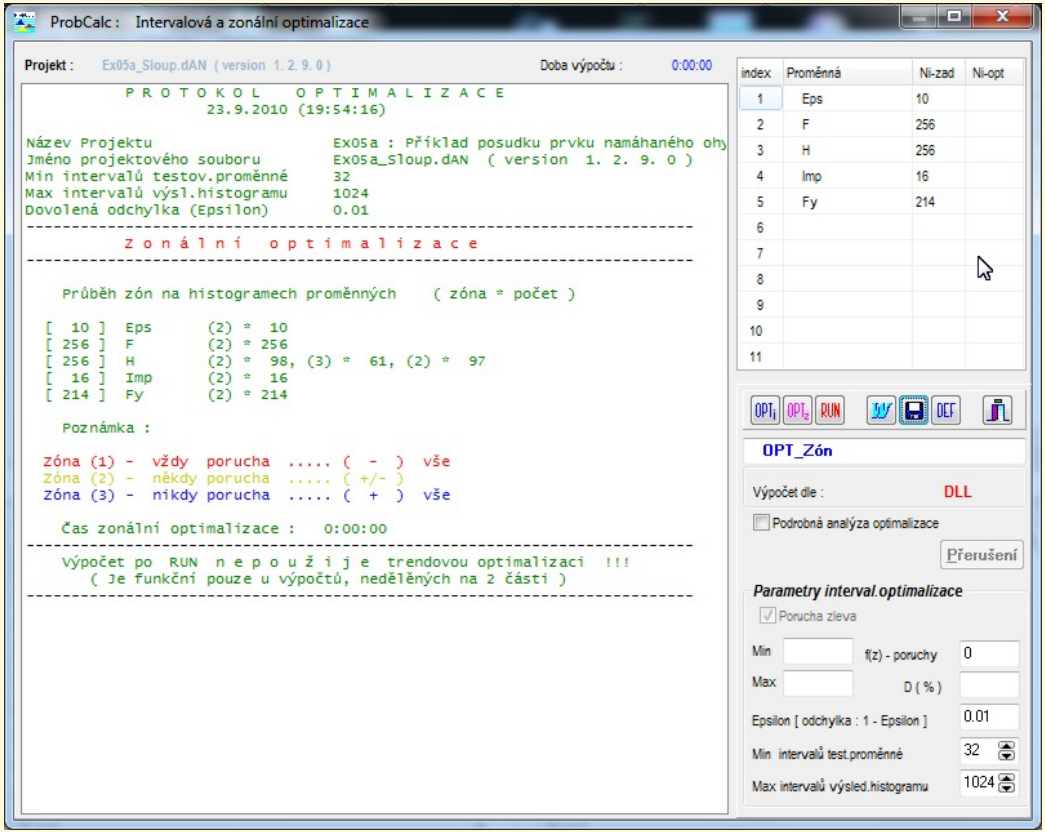
Algoritmus zónové optimalizace i její praktické aspekty byly dokumentovány v [25, 39, 40, 41].

Příklad 6.19. Pro demonstraci činnosti zónové optimalizace v rámci programu ProbCalc s výhodou poslouží úloha, která byla v souvislosti s tímto optimalizačním postupem publikována v [34].

Po spuštění zónové optimalizace v programu ProbCalc (obr. 6.23), která proběhla v reálném čase, se u histogramu každé vstupní veličiny zobrazí barevně odlišené zóny. Všechny tři typy zón se zpravidla zobrazí pouze u nejcitlivější ze vstupních veličin, což je kombinace bočních účinků H (obr. 6.24). Samotný pravděpodobnostní výpočet pak trvá pro danou kombinaci vstupních hodnot 48 sekund, zatímco při řešení úlohy bez zónové optimalizace 1 minutu a 3 sekundy. (Parametry počítače: procesor Intel(R) Core(TM)2 Duo CPU T7250, 2.00 GHz, 2 jádra, 2 logické procesory; 4 GB RAM; operační systém Microsoft Windows 7 Professional; ProbCalc v.1.2.14)

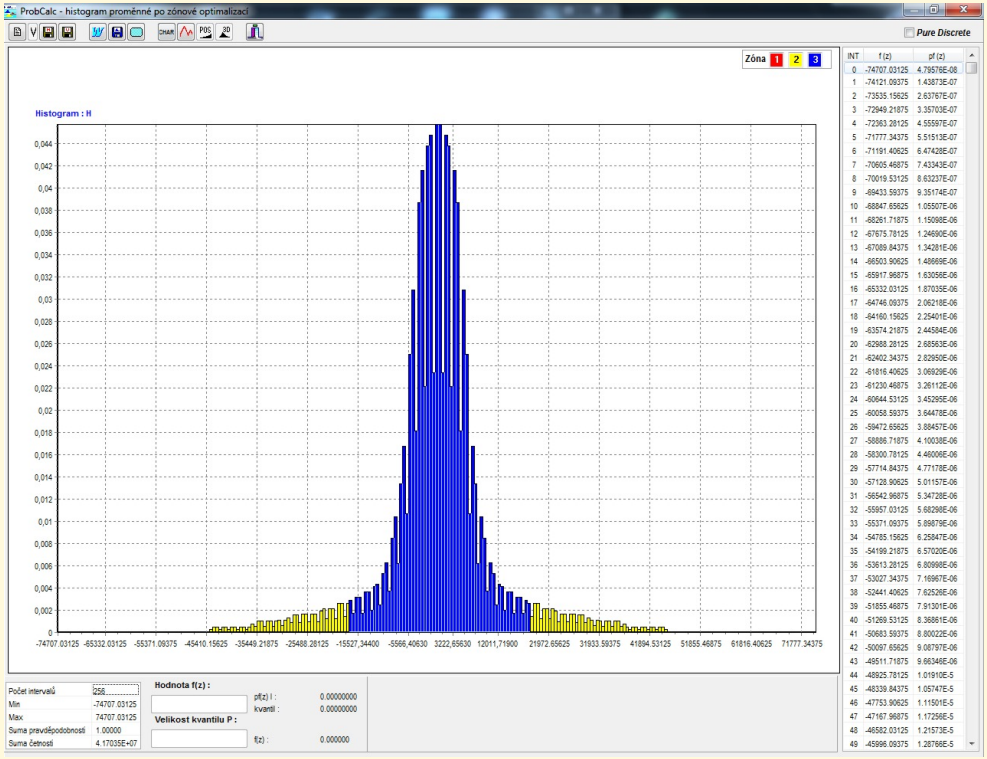
Kombinaci bočních účinků zatížení ovlivňují dvě složky - zatížení větrem WIN a zemětřesení EQ. Pokud se jejich extrémní hodnoty budou měnit, změní se i typy zón u jednotlivých intervalů a v konečném důsledku i výsledný čas výpočtu, neboť výpočet se provádí pouze u zón typu 2 označených žlutou barvou - viz obr. 6.25.

Poznámka 6.20. Nevýhodou uvedeného řešení je možnost zobrazení pouze části výsledného histogramu rezervy spolehlivosti Z - tzv. „zkráceného histogramu“ Z^*, který je zobrazen např. na obr. 6.26. Uvedená skutečnost ale nemá žádný vliv na výpočet pravděpodobnosti p_f.



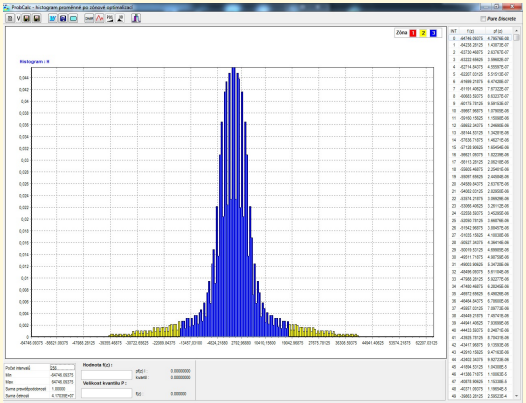
Obr. 6.23 Pracovní plocha modulu Zónové optimalizace v programu ProbCalc

Obsah
175. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

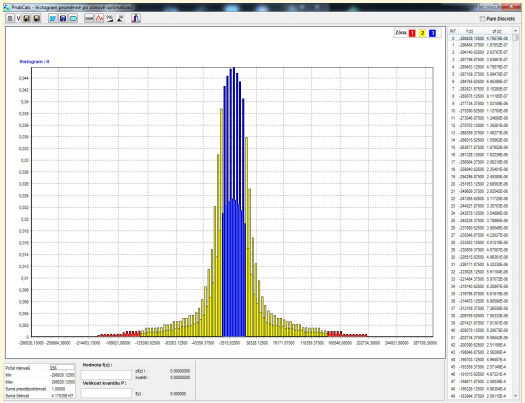


Obr. 6.24 Grafické znázornění výsledků zónové analýzy pro kombinaci složek bočních zatížení H

Obsah
176. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



a) Extrémní hodnoty složek bočních zatížení $WIN = 40$ kN a $EQ = 25$ kN



b) Extrémní hodnoty složek bočních zatížení $WIN = 200$ kN a $EQ = 100$ kN

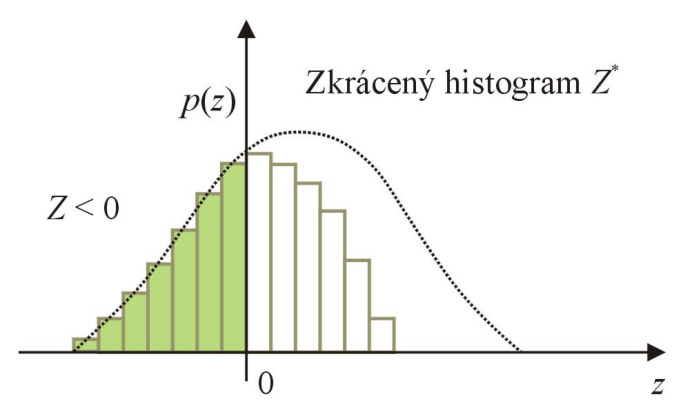
Obr. 6.25 Grafické znázornění výsledků zónové analýzy pro pozměněné kombinace složek bočních zatížení H

Obsah

177. strana ze 283

Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno



Obr. 6.26 Výsledný histogram funkce spolehlivosti RF metodou POPV při uplatnění zónové optimalizace - tzv. „zkrácený histogram“ Z^*

Obsah
178. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

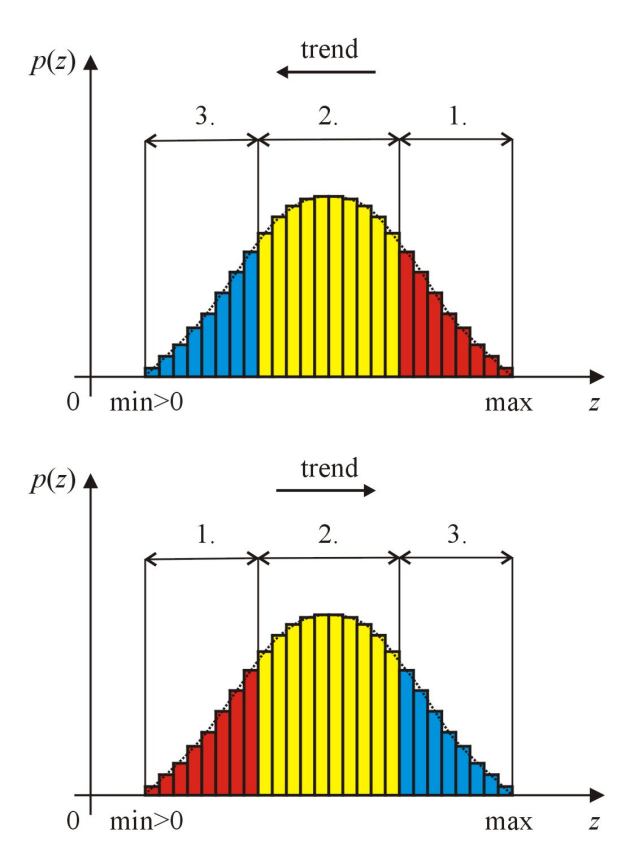
6.4.9. Trendová optimalizace výpočtu

Zónovou optimalizaci lze při pravděpodobnostních výpočtech doplnit i tzv. trendovou optimalizací, která byla teoreticky vysvětlena v kap. 6.4.9 a publikována v [25, 39, 40, 41] . Její spuštění se provádí automaticky se zónovou optimalizací, pokud je v roletě „Nastavení“ programu ProbCalc zaškrtnuta položka *Trendová optimalizace*.

V souvislosti se zónovou optimalizací se provádí výpočet pouze u intervalů zóny typu 2, označených žlutou barvou. Pokud je u náhodné proměnné zaznamenán trend, že se s měnící hodnotou dané proměnné zvyšuje výsledná kladná hodnota funkce spolehlivosti, provedení dalších výpočetních kombinací dané veličiny je již zbytečné. Pro takovou veličinu již nemůže funkce spolehlivosti dosáhnout záporných hodnot a nemůže tak ovlivnit pravděpodobnost poruchy p_f. Tímto způsobem se dá počet všech výpočetních kombinací eliminovat jen na nejnutnější počet.

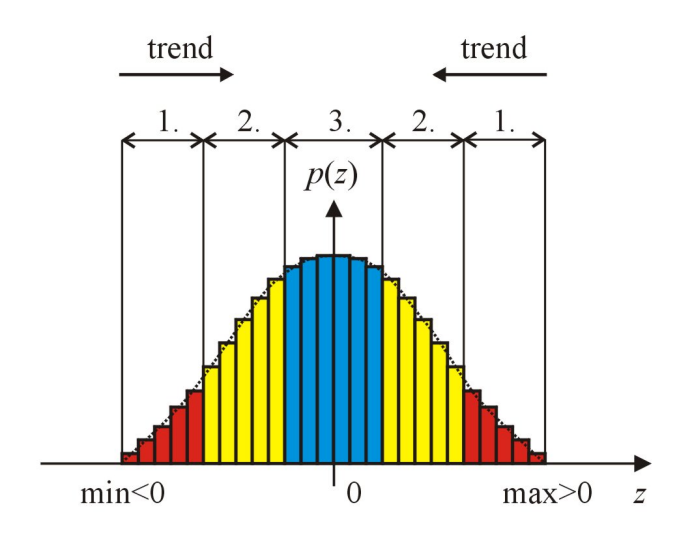
Poznámka 6.21. Tento poznatek lze nejlépe vysvětlit na konkrétních typech vstupních veličin. Pokud je zkoumanou veličinou např. variabilní pevnostní charakteristika použitého materiálu nebo variabilní průřezová charakteristika průřezu nosného prvku, se zvyšující se hodnotou těchto veličin se bude výsledná hodnota funkce spolehlivosti zvyšovat také a spolehlivost konstrukce pak bude zajištěna ve všech zbývajících případech. Není proto nutné pokračovat ve zbývajících kombinacích daného cyklu. Pro účinky zatížení je ve většině případů trend opačný - funkce spolehlivosti bude mít zvyšující se hodnotu při snižování hodnot zatížení. V obou případech se nicméně veličiny podílejí na pravděpodobnosti poruchy p_f monotónně.

Odlišné chování lze pozorovat u histogramů veličin, které se na pravděpodobnosti poruchy p_f podílí nemonotónně - např. zatížení větrem nebo montážní imperfekce. Oba typy chování náhodných veličin jsou zobrazeny na obr. 6.27 a obr. 6.28. V rámci pravděpodobnostního výpočtu metodou POPV lze vše algoritmicky ošetřit.



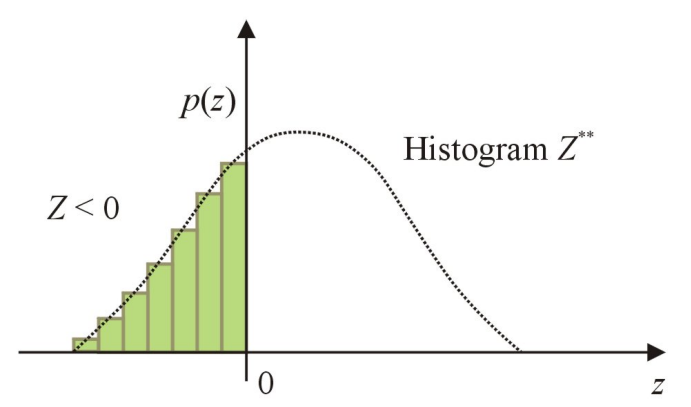
Obr. 6.27 Histogramy veličin, jenž se na pravděpodobnosti poruchy p_f podílí monotónně

Obsah
180. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obr. 6.28 Histogram veličiny, která se na pravděpodobnosti poruchy p_f podílí nemonotónně

Obsah
181. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obr. 6.29 Výsledný histogram rezervy spolehlivosti Z při uplatnění trendové optimalizace - histogram Z^{**} obsahující pouze zápornou část histogramu Z

Obsah
182. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Poznámka 6.22. Při výpočtu pravděpodobnosti p_f s uplatněním trendové optimalizace se určuje pouze záporná část výsledného histogramu rezervy spolehlivosti Z. Vynikne tak histogram, označený jako Z^{**}, který je zobrazen na obr. 6.29.

Poznámka 6.23. Trendová analýza se dá v programu ProbCalc použít v případě, že výpočetní model obsahuje pouze jednu definici funkce spolehlivosti.

6.4.10. Grupování dílčích výsledků výpočtu

Grupování dílčích výsledků výpočtu slouží k snížení výpočetních operací při závěrečném zhodnocení histogramů veličin, které vzešly z vyřešeného výpočetního modelu. V případě pravděpodobnostních posudků spolehlivosti bude tuto grupu definovat funkce spolehlivosti RF, do které se budou dosazovat vypočtená odolnost konstrukce R a účinek zatížení S. V některých případech lze do této grupy zadat přímo histogram vstupní veličiny (např. pevnostní charakteristika použitého materiálu, pokud se posudek spolehlivosti provádí na úrovni napětí a daná veličina již jinak nevstupuje do výpočetního modelu, nebo limitní průhyb v případě posudku podle mezního stavu použitelnosti).

6.4.11. Kombinace jednotlivých optimalizačních postupů

Počet výpočetních operací a tedy i výsledný strojový čas výpočtu může v programovém systému ProbCalc do jisté míry ovlivnit také uživatel při zadávání výpočetního modelu. Doporučená posloupnost optimalizačních postupů v programu ProbCalc je proto následující:

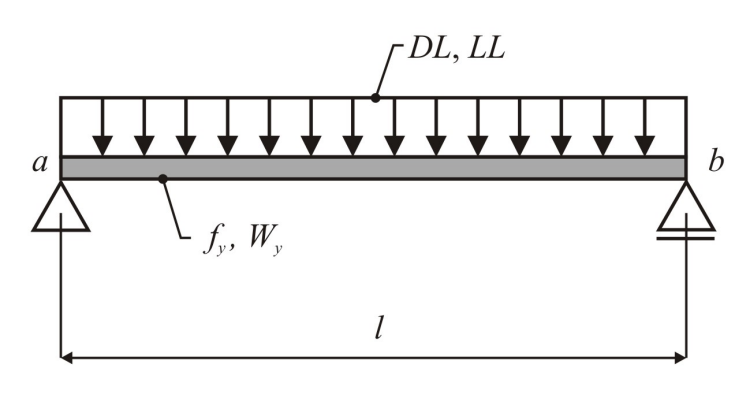
1. **Grupování**, které se doporučuje použít podle možností vždy,
2. **Intervalová optimalizace** - doporučuje se minimalizovat počet tříd histogramů zejména při odladňování algoritmu výpočtu, následně pak počet tříd histogramů optimalizovat pro dosažení korektního výsledku,
3. **Ostatní optimalizační postupy**, které se mohou použít podle možností a složitosti úlohy.

Příklad 6.24. Pro názornost, jak velký význam má tvůrčí přístup uživatele programu ProbCalc pro dosažený čas výpočtu, lze ukázat dva přístupy k řešení pravděpodobnostního posouzení jednoduchého prostého nosníku z obr. 6.30. Úloha má 4 náhodné vstupní proměnné - dvě složky zatížení, průřezový modul, jehož variabilita je vyjádřena postupem z [107], tedy 1 histogramem, a napětí na mezi kluzu oceli coby pevnostní charakteristika použitého materiálu.

- **Přístup méně zkušeného uživatele**

  Uživatel, který není v práci s programem ProbCalc dostatečně zběhlý, může výpočetní model zadat bez jakéhokoliv grupování následujícím způsobem:

```
S=1/8*(2.1*DL+3.5*LL)*36
R=Fy*1.087*power(10,-4)*(1-3*Epsilon)*1000
```



Obr. 6.30 Statické schéma posuzovaného nosníku

```
RF=R-S
```

Ve výpočetním modelu se tedy objevují všechny 4 náhodné proměnné a výpočet se provádí podle základního algoritmu metody POPV, popsaném v 6.2. Pokud budou mít histogramy variabilních veličin 256 tříd, počet výpočetních operací bude úměrný hodnotě $256^4 = 4294967296$.

Při samotném výpočtu takto zadané úlohy bylo dosaženo strojového času 2 minuty 57 sekund. (Parametry počítače: procesor Intel(R) Core(TM)2 Duo CPU T7250, 2.00 GHz, 2 jádra, 2 logické procesory; 4 GB RAM; operační systém Microsoft Windows 7 Professional; ProbCalc v.1.2.14)

Obsah
185. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

- **Přístup zkušeného uživatele**

  Uživatel, který je dostatečně zasvěcen do optimalizačních postupů metody POPV, by danou úlohu řešil s využitím grupování vstupních a výstupních veličin. Kombinaci obou složek zatížení lze vypočítat před samotným pravděpodobnostním výpočtem:

```
ZAT=2.1*DL+3.5*LL
```

  Tak lze docílit snížení počtu vstupních veličin ze čtyř na tři. Lze rovněž vypočítat další grupu vstupních veličin, která bude vyjadřovat variabilní hodnotu průřezového modulu W_y:

```
Wyvar=1.087*(1-3*Epsilon)
```

  Počet náhodných vstupních veličin se tímto sice nesníží, lze tak alespoň eliminovat některé přebytečné matematické operace ve výpočetním modelu, který bude mít výsledný tvar:

```
R=Fy*Wyvar*0.1
S=36/8*ZAT
```

  Na závěr pravděpodobnostního výpočtu lze obě vypočtené náhodné veličiny - odolnost konstrukce R i účinek zatížení S, dosadit do grupy výsledných veličin, která popisuje funkci spolehlivosti RF:

```
RF=R-S
```

a určit výslednou pravděpodobnost poruchy p_f.

Touto jednoduchou úpravou výpočetního postupu lze získat výsledek na počítači stejného výkonu v reálném čase (bez použití intervalové, zónové či trendové optimalizace), jelikož počet výpočetních operací bude úměrný hodnotě $256^2+256+256^3 = 16843008$, tedy zhruba 255krát méně než v prvním případě.

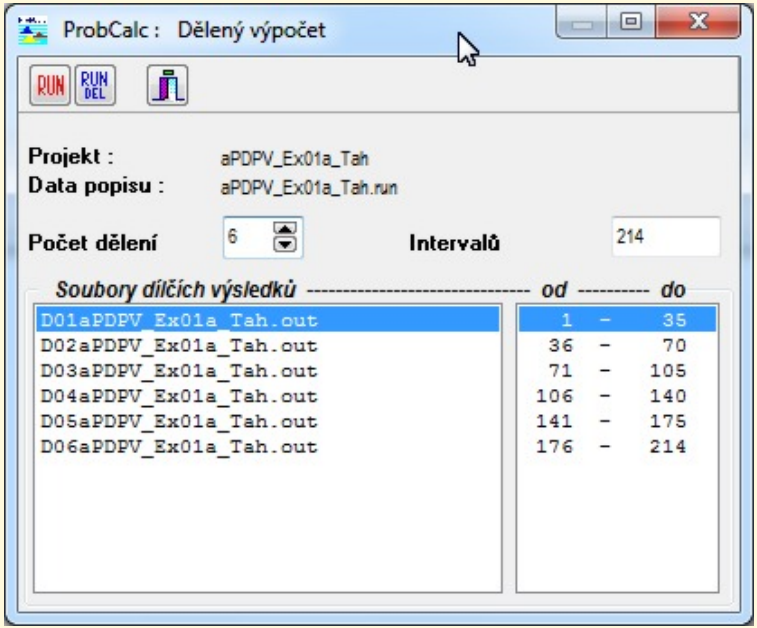
6.4.12. Paralelizace výpočtu

Algoritmus výpočtu metodou POPV je výhodný pro využití na počítačích se dvěma či více procesorovými jednotkami CPU či jejich jádry. V základním algoritmu metody POPV, popsaném v kap. 6.2, je možno rozdělit objem výpočetních operací na tolik částí, kolik je k dispozici výpočetních jednotek, a po provedení dílčích výpočtů lze z dílčích výsledků poskládat histogram výsledné veličiny, např. funkce spolehlivosti *RF* při pravděpodobnostním posouzení.

Samostatným programem ProbCalcDV se tyto samostatné části spočtou a nakonec se programem ProbCalc výsledky jednotlivých částí spojí v celek. Je třeba pouze v základním okně zaškrtnout políčko „RUN - Roz“ v případě rozdělení výpočtu na předpokládaný počet částí (viz obr. 6.31) nebo „RUN - Spo“ při jejich spojení.

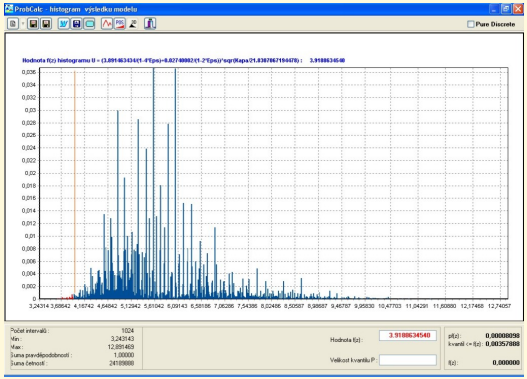
V obou případech je potřeba provést stejné pracovní operace do okamžiku spuštění výpočtu tlačítkem „Run“, tzn., že je již nutné mít provedené výpočty kombinací, sumárních histogramů nebo grup vstupních veličin. V případě výpočtů s intervalovou nebo zónovou optimalizací je potřebné jejich provedení před samotným dělením výpočtu, což se u následného spojování již nemusí provádět (nicméně není na závadu).

Paralelizace v rámci programu ProbCalc byla zatím odzkoušena na počítačích se dvěma procesory. Tento výpočetní postup zatím nebyl publikován.

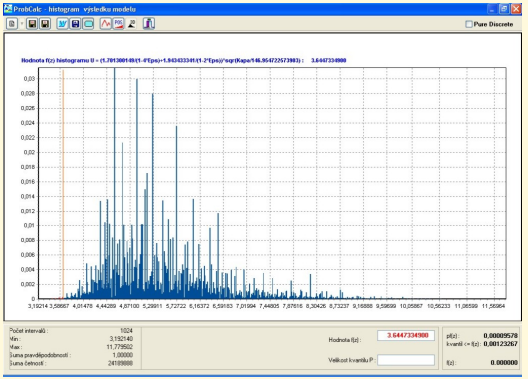


Obr. 6.31 Pracovní plocha programu ProbCalc s modulem, umožňujícím řešit pravděpodobnostní úlohy odděleně

Obsah
188. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



a) Poměr bočního a svislého zatížení $\varepsilon = 0,0$



b) Poměr bočního a svislého zatížení $\varepsilon = 1,0$

Obr. 6.32 Histogram přetvárné energie U_{var}

6.4.13. Úlohy řešené programem ProbCalc

Programový systém ProbCalc, aplikující metodu POPV, umožňuje bohaté uplatnění v pravděpodobnostních úlohách technické praxe.

Problematika geomechanických výpočtů, řešených pravděpodobnostně, byla rozšířena v [28], kdy byla na základě studia chování ocelové obloukové výztuže profilu K-24 (ocel 11500 s variabilně vyjádřenými materiálovými charakteristikami) v nepoddajném provedení, složené ze 4 kruhových segmentů s přeplátováním 400 mm (výztuž 00-0-16), při aktivním zatížení s přihlédnutím k jejím prokluzovým vlastnostem stanovena přetvárné energie U_{var} pravděpodobnostním způsobem (obr. 6.32).

V práci [57] bylo programu ProbCalc i samotné metodiky POPV využito k pravděpo-

Obsah
189. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

dobnostnímu přístupu řešení rizikové analýzy pozemních staveb.

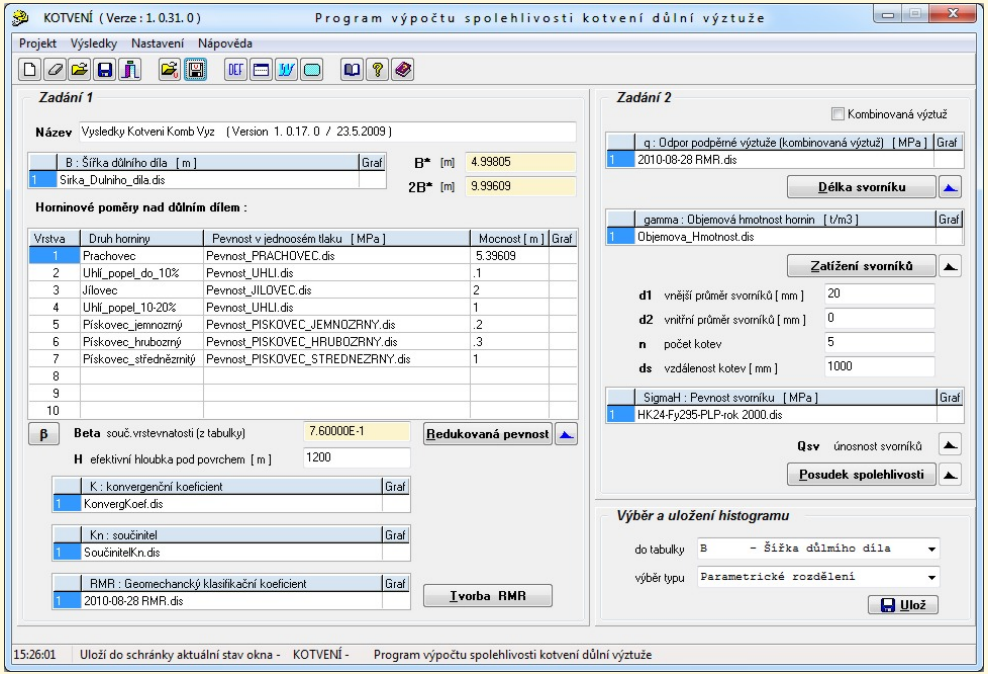
Metoda POPV je vhodná nejenom pro úlohy vedoucí k posouzení spolehlivosti, ale také k jiným pravděpodobnostním výpočtům, jako např. v [100, 101, 53] souhrnně teoreticky i prakticky zpracovaná metodika pravděpodobnostního přístupu k řešení šíření únavových trhlin z okraje i povrchu se zaměřením na jejich největší přípustný rozměr a návrh pravidelného systému prohlídek konstrukce.

6.5. Aplikace metody POPV v dalších pravděpodobnostních úlohách

Metodu POPV lze využít také pro navrhování prvků konstrukcí s předepsanou úrovní spolehlivosti, když alespoň některé vstupní veličiny návrhu mají náhodný charakter. Lze přitom velmi výhodně využít možností, které metoda POPV nabízí pro operace s náhodnými veličinami. Tohoto postupu se využilo při pravděpodobnostním návrhu a posouzení spolehlivosti kotevní výztuže dlouhých důlních a podzemních děl, tj. jejich délky l, počtu n a únosnosti Q_{sv}. Pro uvedené účely byl vyvinut speciální program Kotvení [43], jehož pracovní plocha je zobrazena na obr. 6.33.

Vstupní veličiny s náhodným charakterem mohou být v programu zadány useknutým histogramem s neparametrickým (empirickým) rozdělením pravděpodobnosti nebo zvoleným parametrickým rozdělením pravděpodobnosti. Obojího lze rovněž dosáhnout statistickým rozborem naměřených prvotních dat s následnou volbou nejvhodnějšího rozdělení (v případě parametrického rozdělení rozhoduje o vhodnosti koeficient determinace).

Tímto způsobem lze pravděpodobnostně vyjádřit šířku důlního díla B (obr. 6.34), pevnost v jednoosém tlaku σd v jednotlivých vrstvách, konvergenční součinitel K, součinitel



Obr. 6.33 Pracovní plocha programu Kotvení

Obsah
191. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

vlivu kotvení výztuže na snížení konvergence K_n, objemovou hmotnost hornin γ, odpor podpěrné výztuže q v případě kombinované výztuže a pevnost svorníku σ_H.

Deterministicky vyjádřenými vstupními veličinami zůstává součinitel vrstevnatosti β, efektivní hloubka pod povrchem H (v daném případě $H = 1200$ m), mocnosti jednotlivých vrstev m_i (viz obr. 6.33), vnější a vnitřní průměr svorníků d_1 a d_2 ($d_1 = 20$ mm, $d_2 = 0$ mm) a vzdálenost kotev d_s (v daném případě d_s =1000 mm, počet $n = 5$).

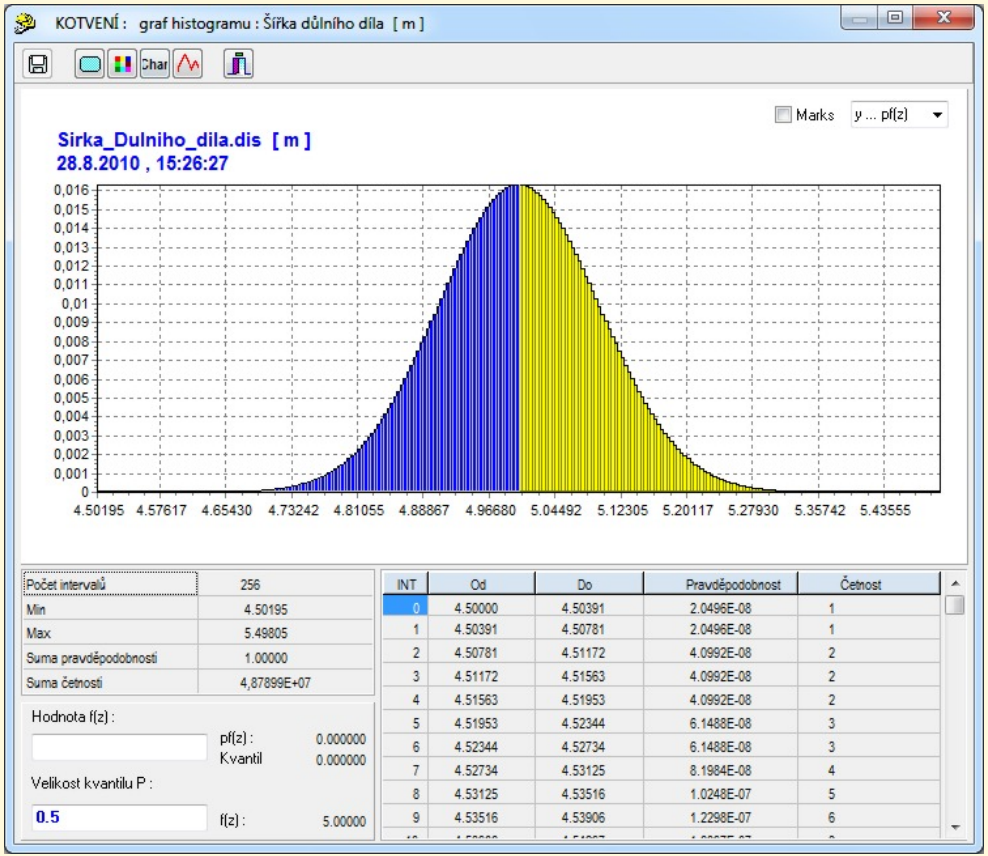
V první etapě pravděpodobnostního výpočtu lze nejprve určit histogram redukované pevnosti nadložních hornin σ (obr. 6.35). Je potřebný k určení délky kotev l a jejich zatížení Q včetně geomechanického klasifikačního koeficientu RMR podle Bienawského (1989), pro jehož stanovení slouží samostatná tabulka programu (obr. 6.36).

V dalším výpočtu pak lze získat výsledný histogram pro délku navrhovaného svorníku l (obr. 6.37.a) a histogram pro zatížení svorníku Q (obr. 6.37.b).

Nakonec se stanoví histogram únosnosti svorníků Q_{sv} (obr. 6.38), která se společně s histogramem Q dosadí do funkce spolehlivosti RF a provede se výsledné pravděpodobnostní posouzení na základě určení pravděpodobnosti poruchy p_f (obr. 6.39).

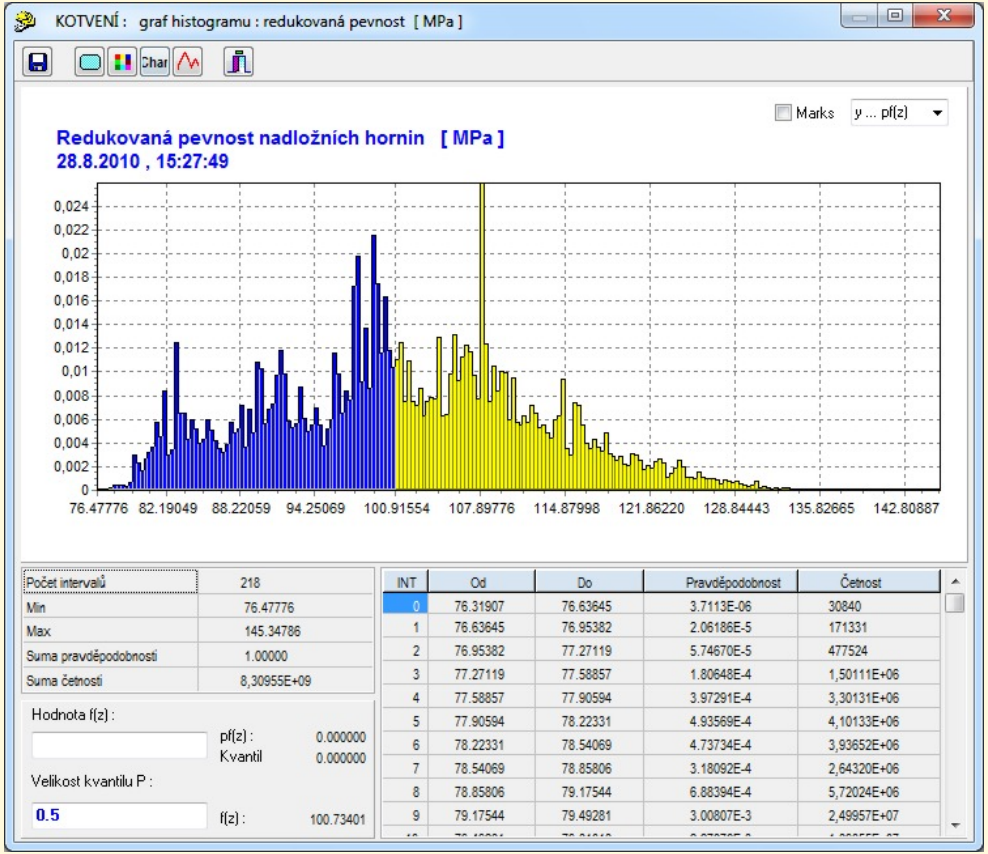
V případě pravděpodobnostního posouzení dané kotevní výztuže byla výsledná pravděpodobnost poruchy určena hodnotou $p_f = 7,0266 \cdot 10^{-4}$ a pro z hlediska důlních děl přísná kritéria uvedená např. v [3] by kotevní výztuž nevyhovovala, neboť návrhová pravděpodobnost p_d pro třídu spolehlivosti RC1 (malé důsledky) je v daném normovém předpisu rovna $4,8 \cdot 10^{-4}$ a podmínka spolehlivost $p_f < p_d$ tedy není splněna. Řešením je v daném případě např. zvýšení počtu kotev nebo zvětšení jejich průměru apod. Otevřená ovšem zůstává otázka přípustné hodnoty pravděpodobnosti poruchy p_d kotevní výztuže.

Předložený postup byl publikován v [44]. Umožňuje pravděpodobnostně navrhovat a posuzovat spolehlivost kotevní výztuže dlouhých důlních a podzemních děl. Předpokladem je ovšem dostatečná datová základna vstupních veličin včetně poznatků z praktické aplikace,



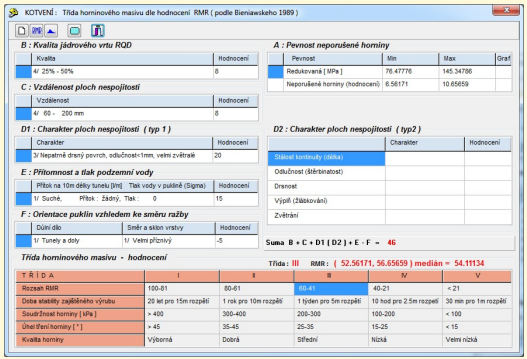
Obr. 6.34 Histogram šířky důlního díla B

Obsah
193. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

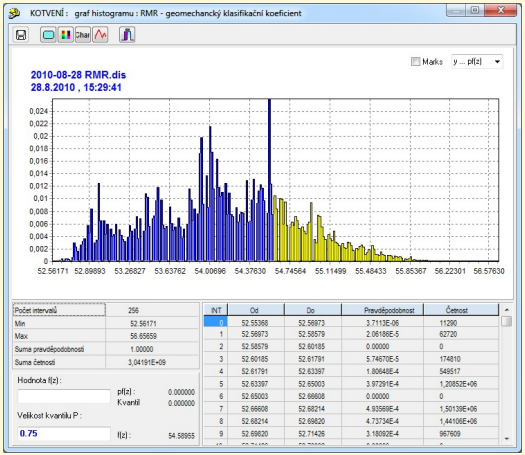


Obr. 6.35 Histogram redukované pevnosti nadložních hornin σ

Obsah
194. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



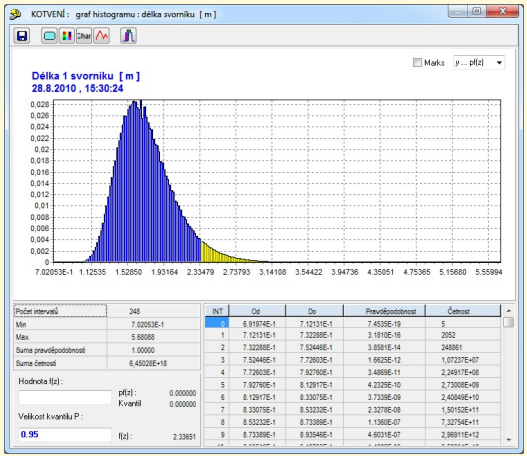
a) Tabulka pro stanovení RMR



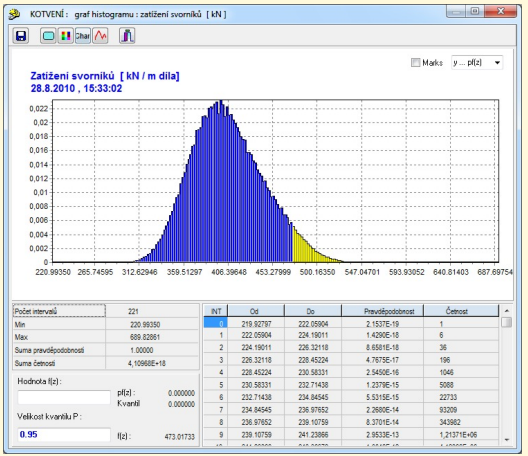
b) Výsledný histogram RMR

Obr. 6.36 Geomechanický klasifikační koeficient RMR podle Bienawského (1989)

Obsah
195. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



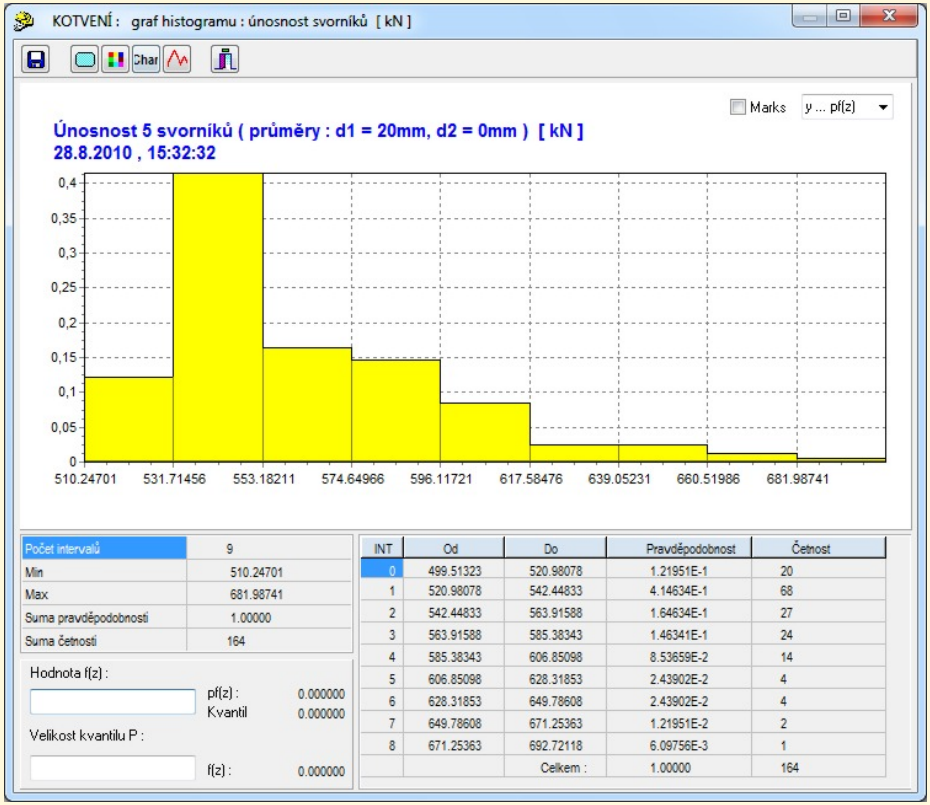
a) Délka svorníku l



b) Zatížení svorníků Q

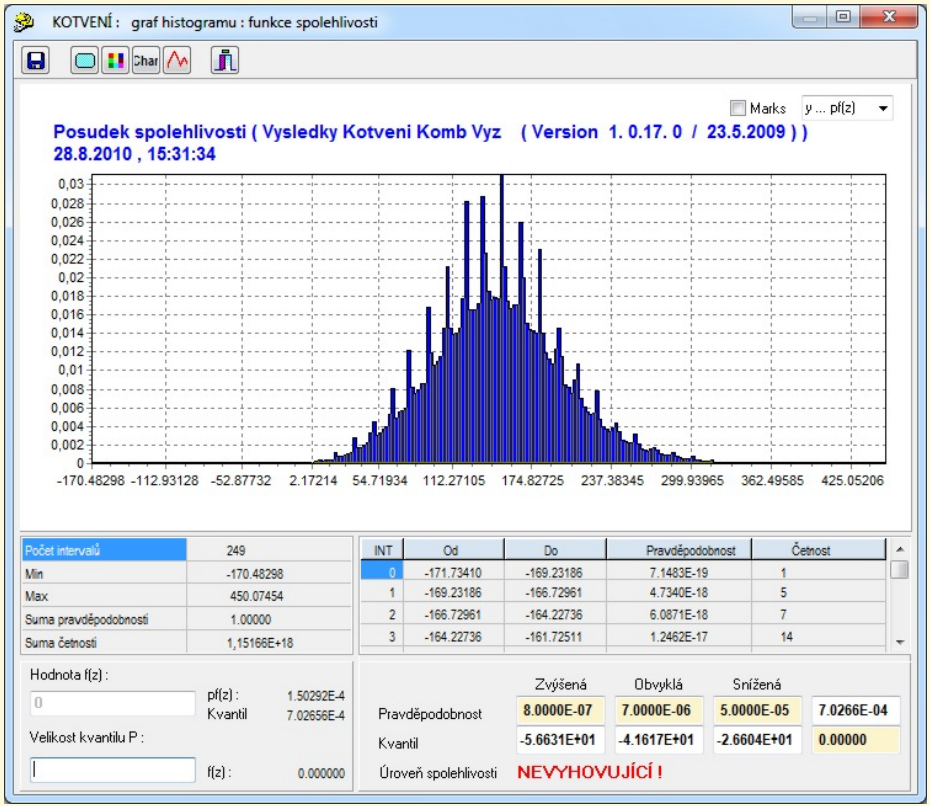
Obr. 6.37 Histogramy posuzovaných svorníků

Obsah
196. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obr. 6.38 Histogram únosnosti svorníků Q_{sv}

Obsah
197. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obr. 6.39 Histogram funkce spolehlivosti RF s výslednou pravděpodobností poruchy $p_f = 7,0266 \cdot 10^{-4}$

Obsah
198. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

neboť celou řadu vstupních údajů nelze opírat pouze o modelování a měření v laboratoři. Posuzování a navrhování kotevní výztuže pak lze s využitím programu Kotvení realizovat velmi operativně.

Obsah

199. strana ze 283

Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

6.6. Závěrečné poznámky

Kapitola 6 toho učebního textu měla posloužit zevrubnému přiblížení metody Přímého Optimalizovaného Pravděpodobnostního Výpočtu (POPV) ve spojení s vyvíjenými programovými prostředky, které jsou již v současné době schopny řešit řadu pravděpodobnostních výpočtů. Závěrem lze definovat následující poznámky, týkající se využití této původní metodiky:

- Metoda Přímého Optimalizovaného Pravděpodobnostního Výpočtu (POPV), může být vhodná pro celou řadu pravděpodobnostních výpočtů. Metoda se jeví jako velice efektivní prostředek pro získání řešení, zatíženého pouze numerickou chybou a chybou danou diskretizací vstupních a výstupních veličin. V případě pravděpodobnostního posouzení spolehlivosti konstrukcí vede pravděpodobnostní výpočet metodou POPV k přímému vyjádření pravděpodobnosti poruchy p_f, kterou lze porovnat s návrhovou pravděpodobností p_d, definovanou v současně platných normových předpisech.
- V situacích, kdy pravděpodobnost poruchy p_f dosahuje nulové hodnoty (konstrukce je nadměrně spolehlivá), případně se rovná 1 (všechny kombinace vstupních veličin vedou k poruchovému stavu), metoda POPV odhadne výsledek okamžitě a nemusí se provádět další pravděpodobnostní výpočet.
- Výpočetní algoritmus lze definovat relativně snadno v textové podobě s využitím tzv. „kalkulačky“ (je však omezen na 30 řádků textu a výpočet probíhá pomaleji) nebo s naprogramováním dynamické knihovny v jakémkoliv programovacím jazyku (omezení pouze vývojářským softwarem, výpočet je rychlejší).
- Je nutno zmínit, že možnosti metodiky POPV ještě nejsou zdaleka vyčerpány. Jako oblast dalšího bádání se ukazuje použití statisticky závislých vstupních veličin s přímým

zadáváním do výpočetního algoritmu, posouzení spolehlivosti konstrukčních systémů a rozvoj numerických postupů, jenž zefektivní použití metody POPV např. při maticových výpočtech.

- Největší nevýhodou metody Přímého Optimalizovaného Pravděpodobnostního Výpočtu - POPV, je výrazné zvýšení strojového času u pravděpodobnostních výpočtů s větším množstvím náhodných proměnných ve výpočetním modelu. Přesné určení maximálního počtu náhodných veličin závisí na složitosti výpočetního modelu dané úlohy a s tím související možnosti využití některého z popisovaných optimalizačních kroků.
- Zadávání pravděpodobnostní úlohy v programovém systému ProbCalc vyžaduje poněkud pokročilejší uživatelské schopnosti počtáře. Je nutno znát alespoň v základních rysech podstatu algoritmu metody, což má vliv na způsob definice výpočetního modelu a volbu vhodné optimalizační techniky. Tento nedostatek je odstraněn v případě tvorby aplikačního softwaru „na míru“ konkrétní pravděpodobnostní úlohy, jak tomu bylo např. v případě programu Kotvení.

6.7. Test

Spustit test Odpovězte na otázky v tomto testu. Test musíte spustit kliknutím na tlačítko, poté vyplňte odpovědi a ukončete test. Správná může být více než jedna odpověď.

1. Metoda POPV patří mezi:

   (a) simulační metody,
   (b) aproximační metody,
   (c) numerické metody,
   (d) iterační metody.

2. Počet vstupních náhodně proměnných výrazně ovlivňuje výpočetní náročnost při výpočtu pravděpodobnosti poruchy:

   (a) metodou POPV,
   (b) metodou Monte Carlo,
   (c) u deterministického výpočtu,
   (d) za pomoci tabulek.

3. Požadovaná přesnost ovlivňuje počet nutných výpočetních operací (simulací) u:

   (a) metody POPV,
   (b) metody Monte Carlo,
   (c) u deterministického výpočtu,
   (d) metody Latin Hypercube Sampling (LHS).

4. Mezi optimalizační nástroje metody POPV patří:

(a) grupování,
(b) intervalová optimalizace,
(c) zonová optimalizace,
(d) trendová optimalizace.

5. Cílem intervalové optimalizace je:

(a) snížení počtu tříd vstupních histogramů, tak aby byl výsledek deterministická hodnota,
(b) minimalizace výpočetní náročnosti vhodným snížením počtu tříd vstupních histogramů,
(c) zvýšení počtu tříd vstupních histogramů, tak aby byla zvýšena přesnost výpočtu,
(d) trendová analýza.

6. Zónová optimalizace má za cíl vyloučit z výpočtu ty části vstupních histogramů, které:

(a) se nikdy nepodílejí na výpočtu pf,
(b) se vždy podílejí na výpočtu pf,
(c) se podílejí na výpočtu pf jen v některých případech,
(d) jsou menší než 0.

7. Celý histogram funkce spolehlivosti získáme při analýze spolehlivosti:

(a) metodou Monte Carlo,
(b) metodou POPV s intervalovou optimalizací,

(c) metodou POPV se zónovou optimalizací.

(d) metodou POPV bez optimalizace.

Konec testu

Počet správných odpovědí:

Vyznačení oprav do testu: Opravit

Kapitola 7

Vybrané případy posudku spolehlivosti nosných stavebních konstrukcí

Následující kapitoly obsahují zadání i řešení příkladů, zabývajících se pravděpodobnostním posouzením spolehlivosti vybraných nosných konstrukcí. Účelem je názorně poukázat na způsoby výpočtu v současné době používanými programovými prostředky.

Poznámka 7.1. Pravděpodobnostní posudky spolehlivosti uvedené v následujících příkladech 7.3 a 7.6 využívají návrhové pravděpodobnosti p_d definované v ČSN EN 1990 [3]. V uvedených příkladech jsou některé náhodné veličiny popsány pomocí křivek trvání zatížení [64], což není plně v souladu s EN 1990. Je vhodné upozornit, že pravděpodobnostní

výpočet téhož problému při popisu zatížení dle metody JCSS [7] vypočtený stejným software může vést ke zcela odlišným výsledkům. Podrobnosti lze nalézt v práci [58]).

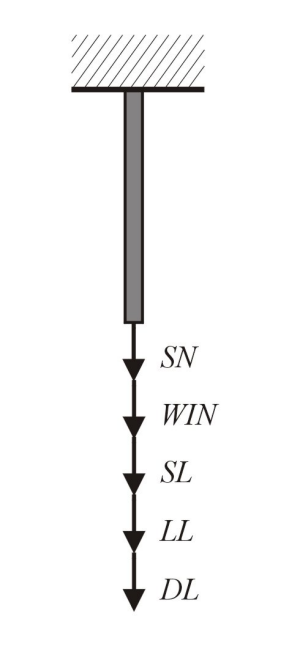
Poznámka 7.2. Krátkodobá a dlouhodobá (kvazistálá) složka užitného zatížení je v textu dále uváděna jako krátkodobé a dlouhodobé nahodilé zatížení. Krátkodobé zatížení větrem je dále uvedno jen jako zatížení větrem.

7.1. Řešené příklady

Příklad 7.3 (Posudek únosnosti táhla). Proveďte pravděpodobnostní posudek spolehlivosti ocelového osově namáhaného prutu délky $l = 6$ m uvedeného na obr. 7.1 podle mezního stavu únosnosti i použitelnosti. Konstrukce je vystavena stálému, dlouhodobému a krátkodobému náhodnému rovnoměrnému zatížení. Táhlo je rovněž vystaveno působení větru a sněhu. Je uvažováno pružné chování materiálu. Pro definování návrhové pravděpodobnosti p_d uvažujte třídu spolehlivosti RC2 (střední důsledky). K analýze použijte *Přímý optimalizovaný pravděpodobnostní výpočet* POPV, implementovaný v programu ProbCalc [42].

Vstupní náhodně proměnné

Osově namáhaný prut byl navržen z ocelového válcovaného profilu IPE160, jehož nominální průřezová plocha A_{nom} je 2009 mm^2. Pevnostní třída oceli je Fe360/S235. Modul pružnosti v tahu a tlaku $E = 210\,000$ MPa. Nahodně proměnné veličiny popisující zatížení, materiálové a geometrické parametry průřezu jsou popsány histogramy s empirickým rozdělením. Vstupní parametry jsou uvedeny v tab. 7.1. Zatížení je popsáno extrémní hodnotou a histogramy podle kap. 6. Histogramy pro napětí na mezi kluzu f_y a rozptyl průřezové plochy *eps* jsou získány z databáze programu ProbCalc.



Obr. 7.1 Statické schéma táhla zatíženého soustavou pěti náhodně proměnných zatížení

Obsah
207. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Proměnná		Nominální hodnota		Rozptyl (variabilita)	
				Histogram	Rozsah
Stálé zatížení	DL	80	[kN]	DEAD1	<0,75..1>
Dlouhodobé náhodné zatížení	LL	293,5	[kN]	LONG1	<0..1>
Krátkodobé náhodné zatížení	SL	80	[kN]	SHORT1	<0..1>
Vítr	WIN	70	[kN]	WIND1	<-1..0..1>
Sníh	SN	40	[kN]	SNOW1	<0..1>
Rozptyl plochy	eps	–	–	Epsilon	<-0,03..0,04>
Mez kluzu oceli	f_y	–	[MPa]	Tyče-Fy235-01	<200..435>

Tab. 7.1 Popis náhodně proměnných vyjádřených useknutými histogramy

Transformační vztahy

a) *Mezní stav únosnosti:*
Posudek dle mezního stavu únosnosti je proveden s uvážením kritéria spolehlivosti podle ČSN EN 1993-1-1 [5]:

$$\frac{N_E}{N_R} \leqq 1 \,, \tag{7.1}$$

kde N_E představuje normálvou sílu a N_R únosnost v osovém namáhání. Podle elementárních principů pružnosti a plasticity lze únosnost v osovém namáhání s uvažováním pružného chování materiálu a rovnoměrného roznesení normálové síly N do průřezu vyjádřit:

Obsah
208. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

$$N_R = f_y \cdot A \,, \tag{7.2}$$

kde A představuje plochu průřezu a f_y napětí na mezi kluzu použité oceli.

b) *Mezní stav použitelnosti:*
Posudek podle mezního stavu použitelnosti je proveden s uvážením kritéria spolehlivosti:

$$\Delta l_{max} \leqq \Delta l_{lim} \,, \tag{7.3}$$

kde Δl_{max} představuje maximální přetvoření osově namáhaného prvku délky l a Δl_{lim} limitní (mezní) přetvoření osově namáhaného prvku délky l. Podle Hookova zákona elementární pružnosti a plasticity lze protažení osově namáhaného prutu délky l s uvažováním pružného chování materiálu, konstantního průběhu normálové síly N v osově namáhaném prvku a rovnoměrného roznesení normálové síly N do průřezu vyjádřit jako:

$$\Delta l_{max} = \frac{N_E \cdot l}{E \cdot A} \,, \tag{7.4}$$

kde N_E představuje normálovou sílu v osově namáhaném prvku, l délku táhla, A plochu průřezu a E modul pružnosti v tahu a tlaku použité oceli.

Popis funkce spolehlivosti

a) *Mezní stav únosnosti:*
Funkce spolehlivosti (bezpečnosti) podle mezního stavu únosnosti je vyjádřena:

$$RF_1 = R_1 - S_1 = N_R - N_E \,, \tag{7.5}$$

kde R_1 představuje odolnost konstrukce, vyjádřenou únosností v osovém namáhání N_R podle [3], a S_1 účinek zatížení, který je vyjádřen normálovou sílou N_E.

Obsah
209. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

b) *Mezní stav použitelnosti:*
Funkce spolehlivosti (bezpečnosti) podle mezního stavu použitelnosti je vyjádřena:

$$RF_2 = R_2 - S_2 = \Delta l_{lim} - \Delta l_{max} \ , \tag{7.6}$$

kde R_2 představuje odolnost konstrukce, vyjádřenou limitním přetvořením osově namáhaného prvku, a S_2 účinek zatížení, který je vyjádřen maximálním přetvořením osově namáhaného prvku. Pro daný výpočet byla hodnota limitního přetvoření zadána deterministicky konstantní hodnotou 5 mm. Maximální přetvoření osově namáhaného prvku pak bylo určeno pro extrémní hodnoty zatížení podle (7.4).

Pravděpodobnostní posudek spolehlivosti

K pravděpodobnostnímu posudku spolehlivosti metodou POPV je použit program ProbCalc. Účinek zatížení S a variabilní průřezová plocha A_{var} je určena s využitím optimalizačního postupu s názvem *grupování vstupních veličin*, čímž lze docílit výrazného snížení výpočetní náročnosti.

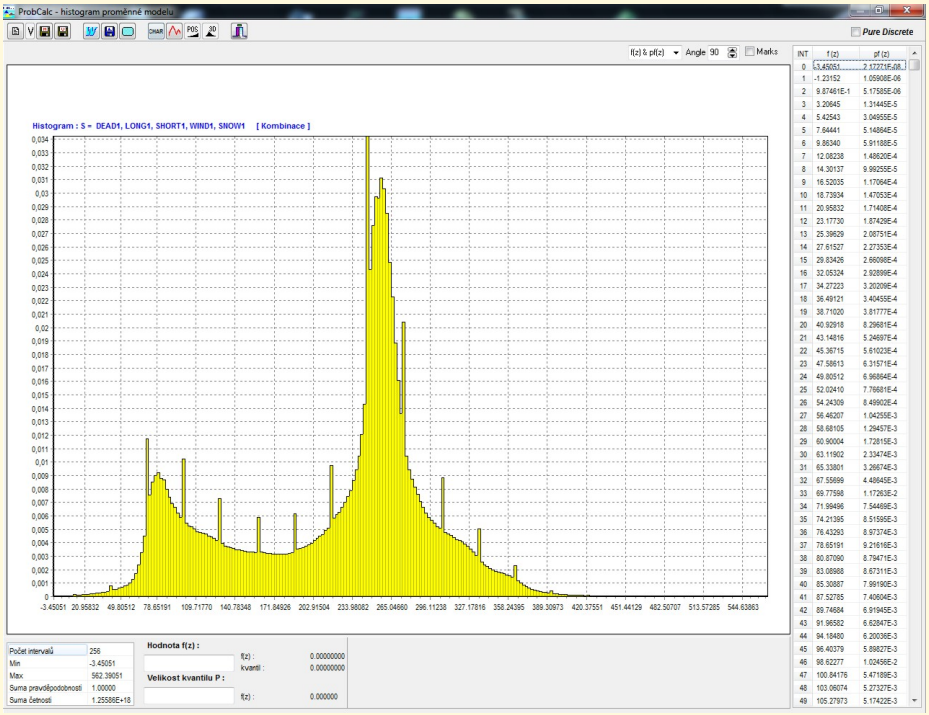
Grupy vstupních veličin

a) *Kombinace soustavy pěti náhodně proměnných sil, působících na osově namáhaný prvek*
Jednotlivá zatížení, podílející se na normálové síle v prvku, jsou vyjádřeny extrémní hodnotou podle tab. 7.1 a histogramem křivky trvání příslušného zatížení.
Normálová síla N_E představuje účinek zatížení S_1, který lze získat vzájemným kombinováním příslušných zatížení:

$$N_E = 80 \cdot DL + 293,5 \cdot LL + 80 \cdot SL + 70 \cdot WIN + 40 \cdot SN \ . \tag{7.7}$$

Výsledný histogram těchto účinků zatížení je zobrazen na obr. 7.2.

Obsah
210. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obr. 7.2 Histogram normálové síly N_E [kN] - kombinace 5 složek zatížení zatížení

Obsah
211. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

b) *Variabilní průřezová plocha:*
Osově namáhaný prvek byl navržen z ocelového válcovaného profilu IPE160, jehož nominální průřezová plocha A_{nom} je 2009 mm^2. Variabilita této průřezové charakteristiky je dána podle [107] vztahem:

$$A_{var} = A_{nom} \cdot (1-\varepsilon)^2 = A_{nom} \cdot (1 - 2 \cdot \varepsilon + \varepsilon^2) \cong= A_{nom} \cdot (1 - 2 \cdot \varepsilon) \,, \tag{7.8}$$

kde veličina ε je dána histogramem *eps* z tab. 7.1. Výsledný histogram proměnné průřezové plochy A_{var} ocelového válcovaného profilu IPE160 je na obr. 7.3.

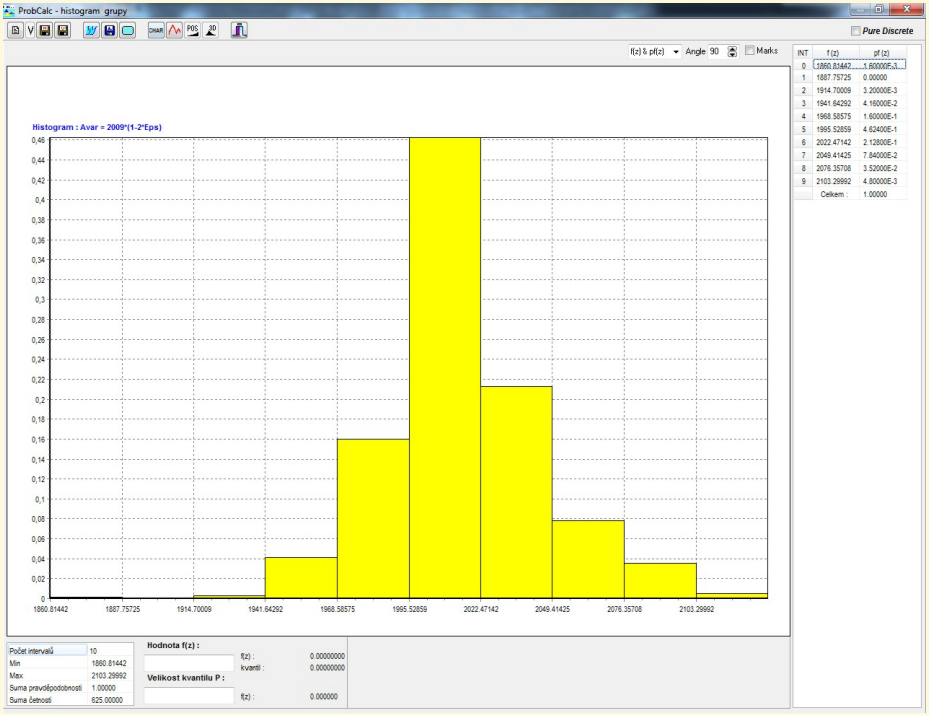
Dosažené výsledky

a) *Mezní stav únosnosti:*
Výsledná pravděpodobnost poruchy p_f vychází $1,28342 \cdot 10^{-6}$ (obr. 7.4). Pravděpodobnost poruchy p_f odpovídá kvantilu v záporné části histogramu funkce spolehlivosti RF, kterou lze v programu ProbCalc zobrazit detailně (viz obr. 7.5). Podrobnější analýzu výsledné funkce spolehlivosti RF_1 lze provést s využitím prostorového grafu z obr. 7.6. Pokud se dosažená pravděpodobnost poruchy porovná s návrhovou pravděpodobností p_d podle ČSN EN 1990 [3], viz tab. 3.2:

$$p_f = 1,28342 \cdot 10^{-6} < p_d = 8,4 \cdot 10^{-6} \tag{7.9}$$

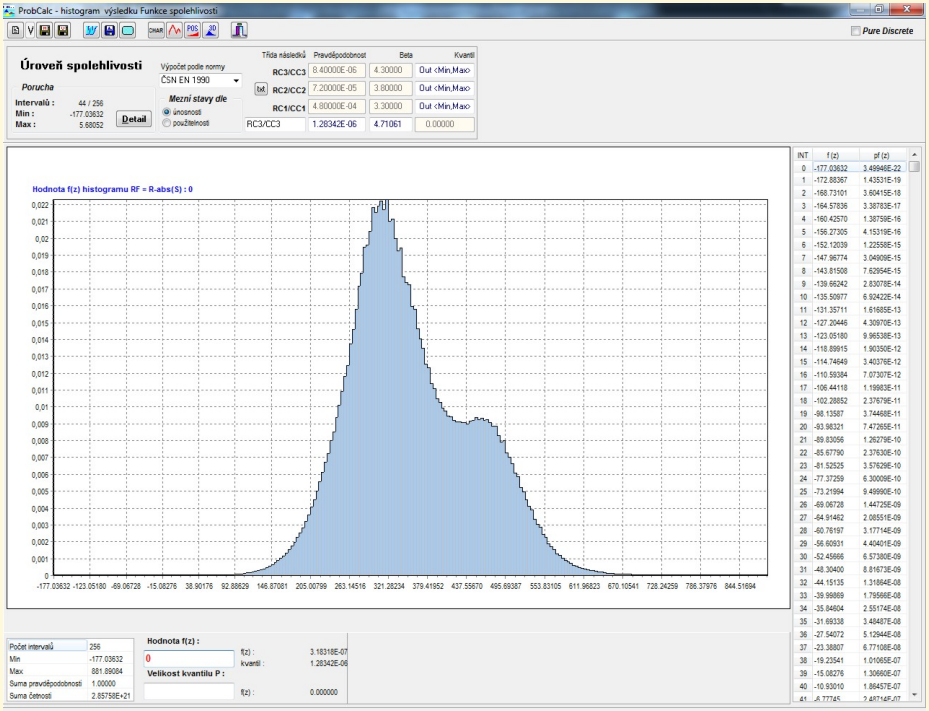
nosný prvek **vyhoví na třídu následků RC3/CC3 podle mezního stavu únosnosti**.

b) *Mezní stav použitelnosti:*
Analýzou funkce spolehlivosti RF_2 byla získána výsledná pravděpodobnost poruchy $p_f = 2,00632 \cdot 10^{-2}$. Porovnáním s návrhovou pravděpodobností p_d podle ČSN EN 1990 [3],



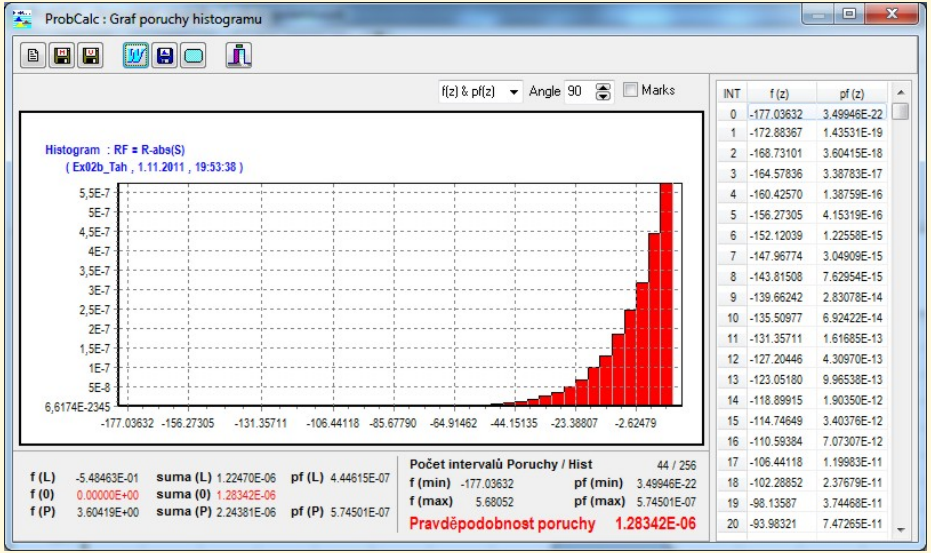
Obr. 7.3 Histogram proměnné průřezové plochy A_{var} [mm^2] ocelového válcovaného profilu IPE160

Obsah
213. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



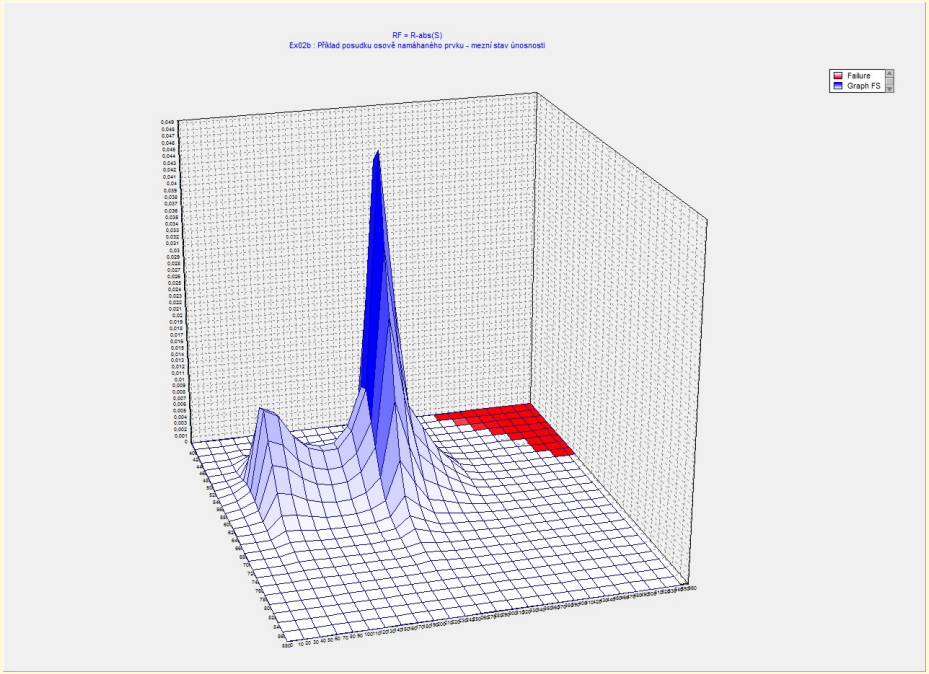
Obr. 7.4 Pracovní plocha programu ProbCalc se zobrazeným histogramem funkce spolehlivosti RF_1 [kN]. Pravděpodobnost poruchy $p_f = 1,28342 \cdot 10^{-6}$ je menší než návrhová pravděpodobnost $p_d = 8,4 \cdot 10^{-6}$ a nosný prvek vyhoví na třídu následků RC3/CC3 podle mezního stavu únosnosti.

Obsah
214. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obr. 7.5 Pracovní plocha programu ProbCalc s detailním zobrazením kvantilu v záporné části histogramu funkce spolehlivosti RF [kN], jež se podílí na pravděpodobnosti poruchy p_f.

Obsah
215. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obr. 7.6 Pracovní plocha programu ProbCalc s prostorovým zobrazením grafu funkce spolehlivosti RF_1 [kN]. Na pravděpodobnosti poruchy se podílí červená část grafu (vysoký účinek zatížení S a nízká odolnost konstrukce R).

Obsah
216. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Obr. 7.7 Řešení obdobné úlohy v programu ProbCalc [38] dle mezního stavu únosnosti. Zadání se liší velikostí zatížení a histogramem stálého zatížení.

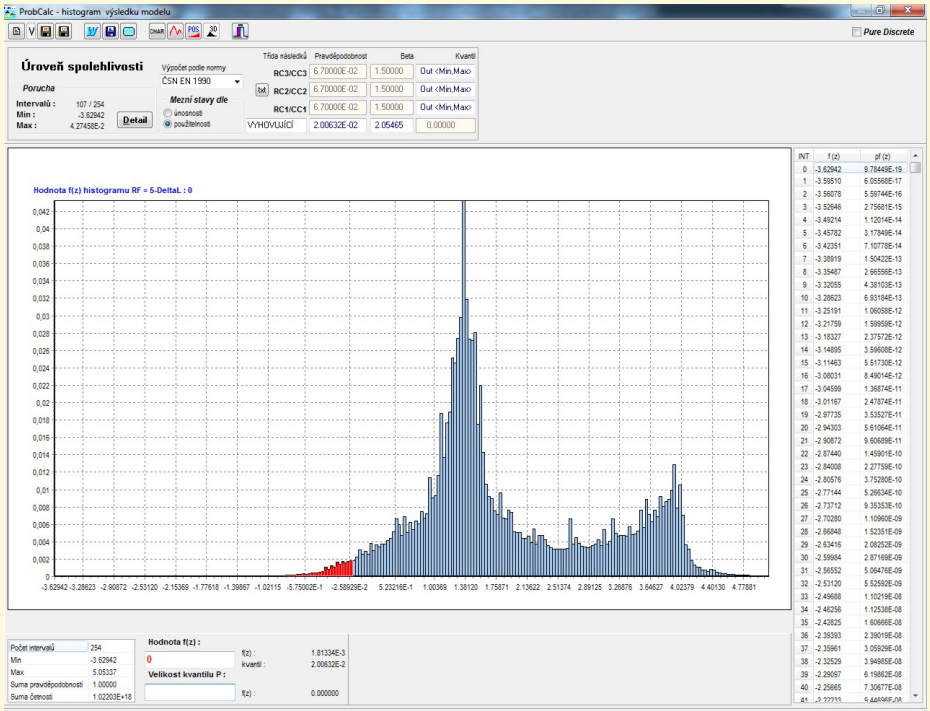
viz tab. 3.3:

$$p_f = 2,00632 \cdot 10^{-2} < p_d = 6,7 \cdot 10^{-2} \tag{7.10}$$

nosný prvek bezpečně vyhoví **podle mezního stavu použitelnosti**.

Poznámka 7.4. Postup zvaný „Kombinace“ je možno použít, neboť normálová síla představuje prostý součet vzájemně nezávislých sil, působících v jednom paprsku, přičemž zadané síly mají ve výpočtu vliv pouze na normálovou sílu.

Poznámka 7.5. Vhodným zadáním výpočetního modelu s využitím grup vstupních veličin není potřeba použití dalších optimalizačních postupů. Pravděpodobnostní výpočet i přesto proběhne v reálném čase.



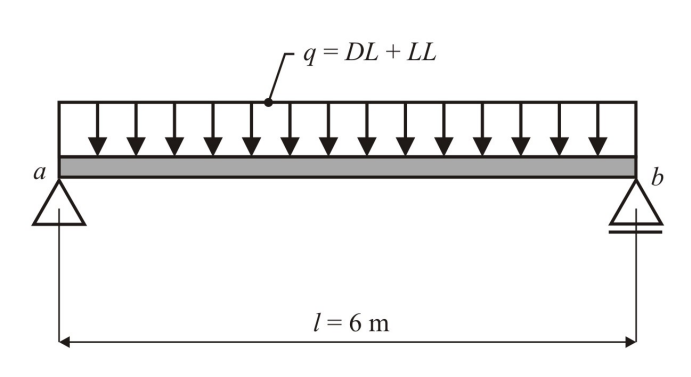
Obr. 7.8 Pracovní plocha programu ProbCalc se zobrazeným histogramem funkce spolehlivosti RF_2 [mm]. Pravděpodobnost poruchy $p_f = 2,00632 \cdot 10^{-2}$ je menší než návrhová pravděpodobnost $p_d = 6,7 \cdot 10^{-2}$ a nosný prvek vyhoví podle mezního stavu použitelnosti.

Obsah
219. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Příklad 7.6 (Posudek spolehlivosti ohýbaného nosníku). Posuďte spolehlivost válcovaného ocelového prostě podepřeného nosníku uvedeného na obr. 7.9, a to z hlediska únosnosti. Nosník je vystaven stálému a dlouhodobému rovnoměrnému zatížení. Je uvažováno příčné zajištění nosníku proti vybočení ze svislé roviny, dále je uvažována pružná odezva prvku na zatížení. Je zanedbán vliv vlastního pnutí. Pro definování návrhové pravděpodobnosti p_d uvažujte třídu spolehlivosti RC2 (střední důsledky). K posudku použijte metodu SBRA [64, 19].

Vstupní údaje

Válcovaný nosník je z I profilu a oceli třídy Fe360/S235. Extrémní hodnoty zatížení, nominální hodnota modulu průřezu I profilu jsou uvedeny v tab. 7.2. Délka nosníku je $l = 6$ m.



Obr. 7.9 Statické schéma a zatížení

Obsah
220. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Náhodně proměnné

Pravděpodobnostní rozdělení pro zatížení jsou popsána histogramy podle kap. 6. Mez kluzu f_y je popsána histogramem T235Fy01.dis získaným z [17], který je pod názvem Tyce-Fy235-01.DIS dostupný rovněž v databázi programu ProbCalc [42]. Sumarizace nominálních náhodných vstupních veličin a popis náhodně proměnných je uveden v tab. 7.2.

Transformační vztahy

Ohybový moment uprostřed prostého nosníku představuje účinek zatížení S:

$$S = \frac{1}{8}(DL + LL) \cdot l^2 \,. \tag{7.11}$$

Odolnost ocelového válcovaného průřezu R je vztažena k dosažení meze kluzu f_y v krajních vláknech průřezu. Odolnost je vyjádřena jako:

$$R = W_y \cdot f_y \,. \tag{7.12}$$

Funkce spolehlivosti RF je pro posudek spolehlivosti vyjádřena:

$$RF = R - S \,. \tag{7.13}$$

Poznámka 7.7. Při zadání vstupních parametrů je důležité zvolit jejich rozměr, tak aby vycházela odolnost R i účinek zatížení S ve stejných jednotkách. Je-li zatížení DL a LL v kNm^{-1}, délka l v m, modul průřezu v m^3, pak je vhodné dosadit mez kluzu f_y v kPa. Odolnost R, účinek zatížení S i funkce spolehlivosti RF vychází v kNm.

Proměnná		Nominální hodnota		Rozptyl (variabilita)	
				Histogram	Rozsah
Stálé zatížení	DL	2,1	[kNm^{-1}]	DEAD1	<0,818..1>
Dlouhodobé zatížení	LL	3,5	[kNm^{-1}]	LONG1	<0..1>
Modul průřezu	W	1,087.10^{-4}	[m^3]	N1-05	<0,95..1,05>
Mez kluzu oceli	f_y	–	[MPa]	Tyče-Fy235–01	<200..435>

Tab. 7.2 Popis náhodně proměnných vyjádřených useknutými histogramy

Pravděpodobnostní posudek únosnosti

K numerickému odhadu pravděpodobnosti poruchy podle metody SBRA je využito 2 milionů simulací metodou Monte Carlo. K výpočtu je použit program Anthill [19].

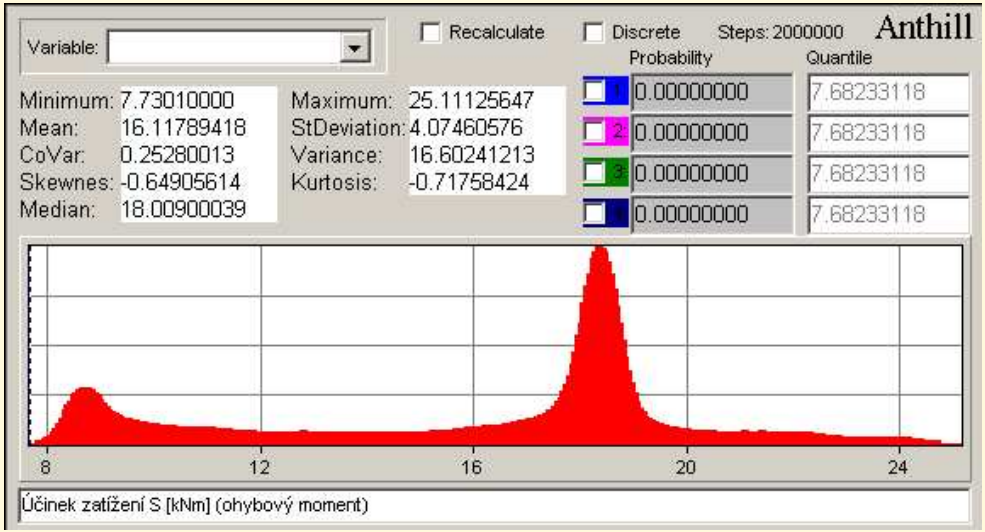
Ohybový moment uprostřed prostého nosníku představuje účinek zatížení S, viz vztah (7.11). Histogram ohybového momentu je zobrazen na obr. 7.10. Účinek zatížení je porovnán s únosností ocelového průřezu R, která je zobrazena formou histogramu na obr. 7.11.

Pravděpodobnostní analýzou funkce spolehlivosti RF (viz obr. 7.12 a vztah (7.13)) je proveden odhad pravděpodobnosti poruchy:

$$p_f = P(RF < 0) = 3,6 \cdot 10^{-5} \,. \tag{7.14}$$

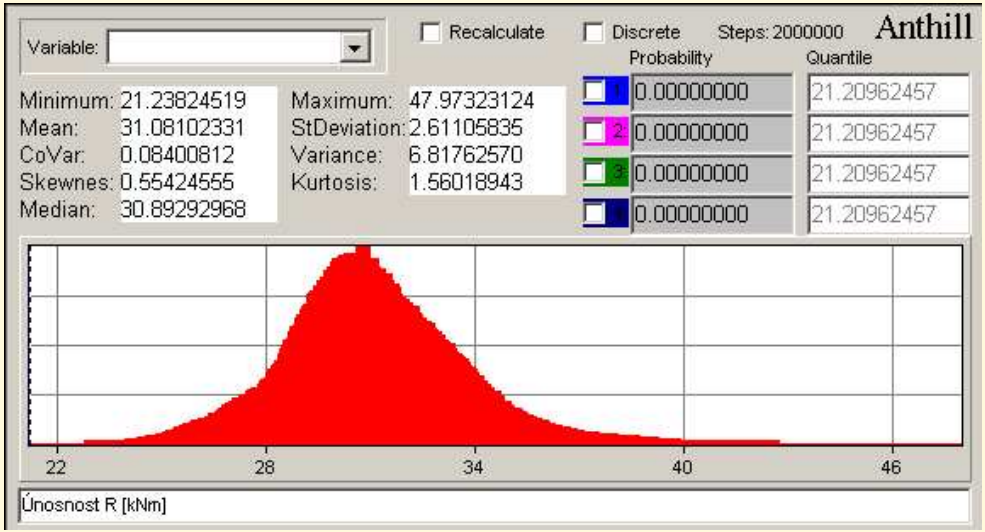
Princip stanovení pravděpodobnosti poruchy p_f je možno přehledně zobrazit formou 2D diagramu (viz obr. 7.13). Každý bod představuje náhodnou interakci mezi účinkem zatížení S na vodorovné ose a odolností na ose svislé R. Je-li účinek zatížení S větší než odolnost, dochází v daném simulačním kroku k poruše.

Obsah
222. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



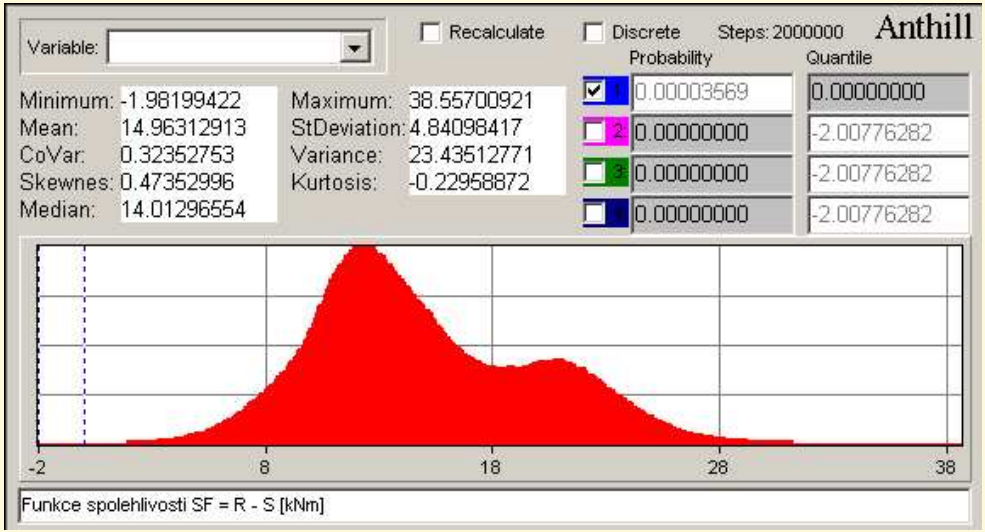
Obr. 7.10 Histogram ohybového momentu S [kNm]

Obsah
223. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obr. 7.11 Histogram únosnosti R [kNm]

Obsah
224. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obr. 7.12 Histogram funkce spolehlivosti RF [kNm] pro mezní stav únosnosti

Obsah
225. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Simulační kroky, při kterých byla identifikovaná porucha, se nachází pod čarou v levé dolní části grafu. Pravděpodobnost poruchy p_f představuje poměr mezi počtem identifikovaných poruch N_f a celkovým počtem simulačních kroků N:

$$p_f = \frac{N_f}{N} \,. \tag{7.15}$$

Porovnáním vypočtené pravděpodobnosti poruchy p_f a návrhové hodnoty p_d je proveden posudek spolehlivosti:

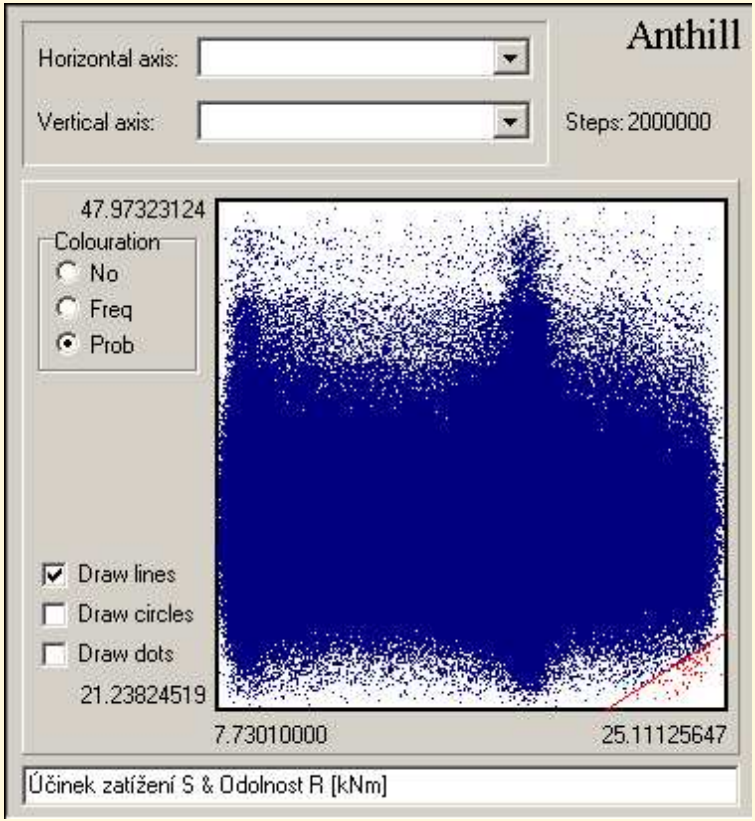
$$p_f = 3,6 \cdot 10^{-5} < p_d = 7,2 \cdot 10^{-5} \,. \tag{7.16}$$

Návrh vyhovuje na mezní stav únosnosti z hlediska 2 úrovně spolehlivosti (RC2) podle ČSN EN 1990 [3].

Zhodnocení a závěry

V pravděpodobnostním posudku spolehlivosti navrženého prostého nosníku bylo zjištěno, že ocelový I profil vyhoví na mezní stav únosnosti, a to pro úroveň spolehlivosti RC2 (Střední důsledky) podle [3], viz tab. 3.2.

Poznámka 7.8. Nominální hodnoty zatížení zadané uvedené v tab. 7.2 představují extrémní hodnoty těchto zatížení. při porovnávání pravděpodobnostního postupu s postupem normovým lze tyto parametry získat z návrhových hodnot pro příslušná zatížení.



Obr. 7.13 2D graf interakce účinku zatížení S (vodorovná osa) a únosnosti R (svislá osa) [kNm] pro mezní stav únosnosti

Obsah
227. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Obr. 7.14 Řešení úlohy 7.6 v programu Anthill [19]

Příklad 7.9 (Posudek únosnosti vetknutého lomeného nosníku). Posuďte ve vetknutí spolehlivost ocelového válcovaného lomeného nosníku uvedeného na obr. 7.15. Posudek proveďte z hlediska únosnosti v pravém krajním vláknu průřezu. Nosník je vystaven stálému, dlouhodobému náhodnému rovnoměrnému zatížení. Dále je nosník vystaven působení vodorovného větru a zatížení sněhem. Je uvažováno příčné zajištění nosníku proti vybočení ze svislé roviny, dále je uvažována pružná odezva prvku na zatížení. Je zanedbán vliv vlastního pnutí. Pro definování návrhové pravděpodobnosti p_d uvažujte třídu spolehlivosti RC2 (střední důsledky). K posudku použijte software FREET [76].

Vstupní údaje a náhodně proměnné

Válcovaný nosník je z ocelového válcovaného profilu. Ocel je třídy S235. Výška nosníku je $h = 2,2$ m a délka vyložení $b = 1,2$ m. Nahodně proměnné veličiny popisující zatížení, materiálové a geometrické parametry průřezu jsou popsány parametrickými rozděleními. Vstupní parametry jsou uvedeny v tab. 7.3. Je uvažována statistická závislost mezi průřezovou plochou a modulem průřezu válcovaného nosníku. Tato závislost je popsána korelačním koeficientem $\rho = 0,968$.

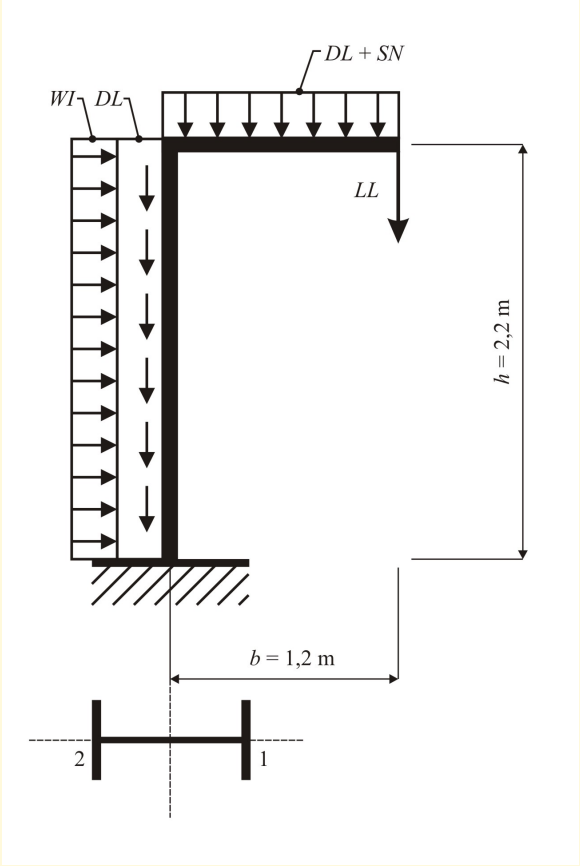
Transformační vztahy

Napětí v krajních vláknech vetknutého nosníku představuje účinek zatížení $S_{1,2}$:

$$S_{1,2} = \sigma_{1,2} = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{W} \,. \tag{7.17}$$

Do výpočtu napětí vstupuje normálová síla N:

$$N = DL \cdot h + (SN + DL) \cdot b + LL \tag{7.18}$$



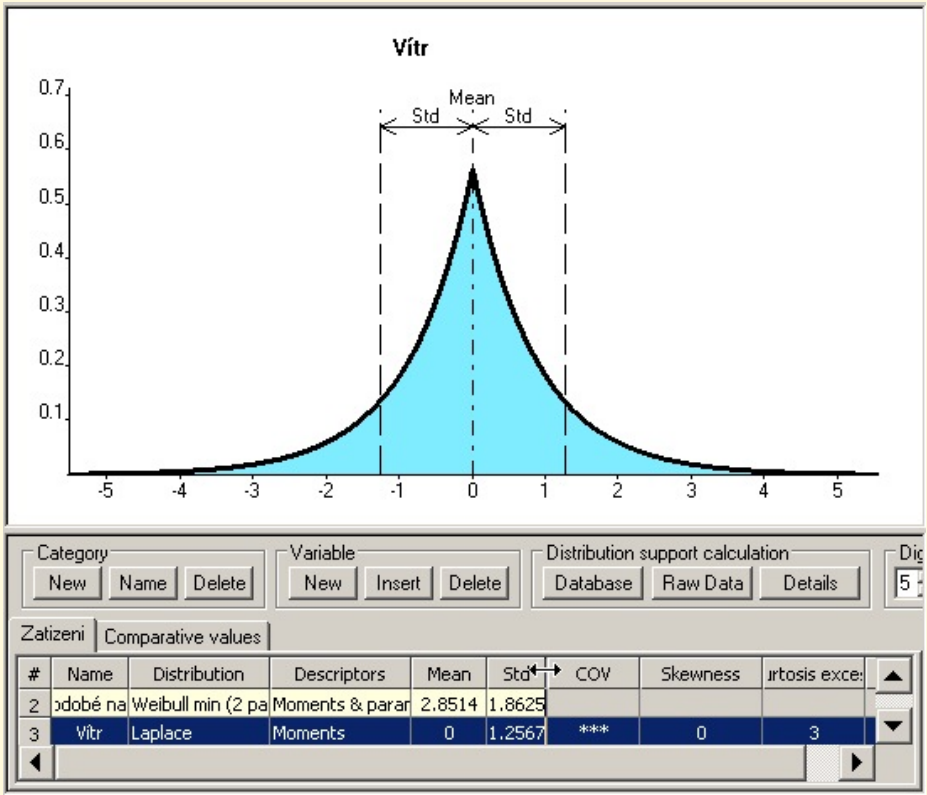
Obr. 7.15 Statické schéma lomeného nosníku se zatížením

Obsah
230. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Proměnná		Rozdělení	Parametry rozdělení	
			Průměr	Směrodatná odchylka
Stálé zatížení	DL [kNm^{-1}]	Normal	2,7	0,09
Dlouhodobé nah. zatížení	LL [kN]	Weibull min (2 par)	2,85138	1,58934
Vítr (obr. 7.16)	WI [kNm^{-1}]	Laplace	0,0	1,25658
Sníh (H<1000 m.n.m.)	SN [kNm^{-1}]	Gamma (2 par)	0,52532	1,4212
Mez kluzu oceli	f_y [MPa]	Lognormal (2 par)	285,75	23,387
Průřezová plocha	A [mm^2]	Normal	1995,7	60,671
Modul průřezu	W [mm^3]	Normal	$1,0495 \times 10^5$	3791,6

Tab. 7.3 Popis náhodně proměnných vyjádřených pomocí parametrickými rozděleními

Obsah
231. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obr. 7.16 Příklad zadání parametrického rozdělení pro zatížení větrem WI [kMm^{-1}]

Obsah
232. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

a ohybový moment:

$$M = (SN + DL) \cdot \frac{b^2}{2} + LL \cdot b + WI \cdot \frac{h^2}{2} \,. \tag{7.19}$$

Zadán je posudek únosnosti v pravém vláknu průřezu, a tedy v místě označeném na obr. 7.15 jako vlákno 1. Výsledný účinek zatížení představuje součet vlivu normálové síly a ohybového momentu (viz obr. 7.17):

$$S_1 = \frac{DL \cdot h + (SN + DL) \cdot b + LL}{A} + \frac{(SN + DL) \cdot \frac{b^2}{2} + LL \cdot b + WI \cdot \frac{h^2}{2}}{W} \,. \tag{7.20}$$

Únosnost je vyjádřena mezí kluzu oceli S235 (viz obr. 7.18).

$$R = f_y \,. \tag{7.21}$$

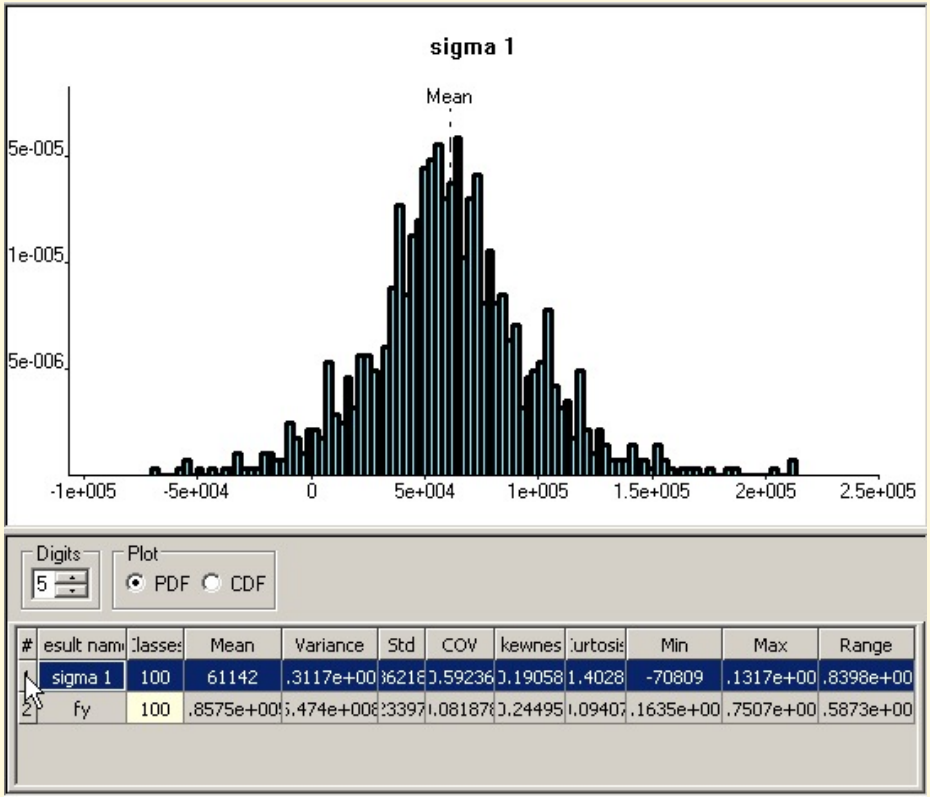
Funkce spolehlivosti RF je pro posudek spolehlivosti vyjádřena:

$$RF = R - S \,. \tag{7.22}$$

Pravděpodobnostní posudek únosnosti

K numerickému odhadu spolehlivosti v programu Freet je užito 1000 simulací metodou Latin Hypercube Sampling (LHS).

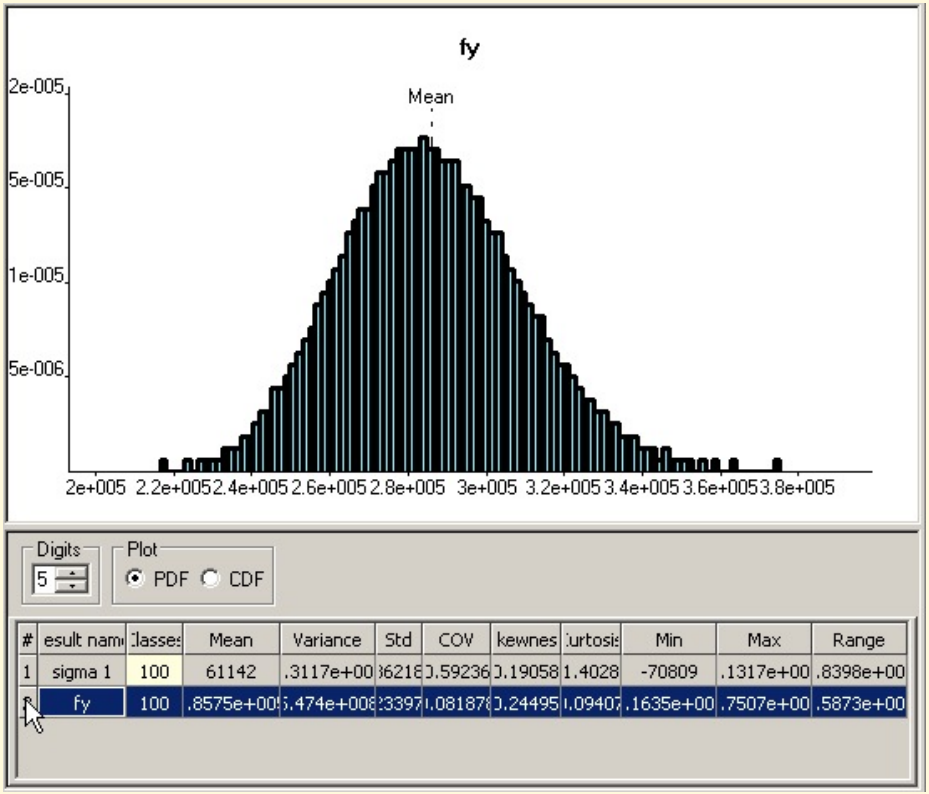
Pravděpodobnostní analýza v případě užití metody LHS spočívá v odhadu průměru a směrodatné odchylky rozdělení funkce spolehlivosti RF (viz obr. 7.19).



#	esult nam	lasses	Mean	Variance	Std	COV	kewnes	urtosis	Min	Max	Range
1	sigma 1	100	61142	.3117e+00	6218	0.59236	0.19058	1.4028	-70809	.1317e+00	.8398e+00
2	fy	100	.8575e+00	.474e+008	23397	0.08187	0.24495	1.0940	.1635e+00	.7507e+00	.5873e+00

Obr. 7.17 Rozdělení účinku zatížení S_1 [kPa] vyjadřené pomocí napětí ve vetknutí levého krajního vlákna sloupu

Obsah
234. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obr. 7.18 Rozdělení odolnosti R [kPa] vyjádřené pomocí meze kluzu

Obsah
235. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Chceme-li znát odhad pravděpodobnosti poruchy, nebyla-li detekována porucha, pak je na základě výsledků simulace vybráno nejvhodnější pravděpodobnostní rozdělení. Z vybraného rozdělení je odvozena pravděpodobnost poruchy. Vybereme-li pro vyjádření funkce spolehlivosti RF rozdělení pravděpodobnosti typu Logistic (viz obr. 7.19), pak je pravděpodobnost poruchy:

$$p_f = P(RF < 0) = 7,9 \cdot 10^{-5} \, . \tag{7.23}$$

Porovnáním vypočtené pravděpodobnosti poruchy p_f a návrhové hodnoty p_d je proveden posudek spolehlivosti:

$$p_f = 7,9 \cdot 10^{-6} < p_d = 4,8 \cdot 10^{-5} \, . \tag{7.24}$$

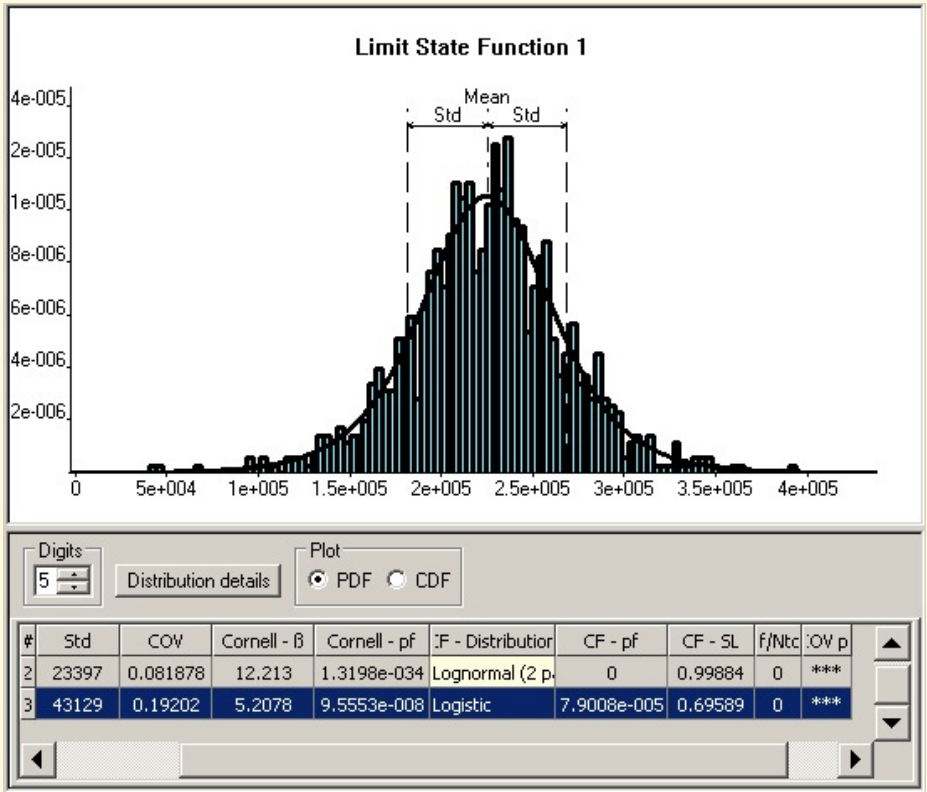
Návrh vyhovuje podle mezního stavu únosnosti, a to z hlediska 1 úrovně spolehlivosti (RC1 - Malé důsledky) podle ČSN EN 1990 [3].

Poznámka 7.10. Úroveň spolehlivosti je možné vyjádřit rovněž pomocí indexu spolehlivosti β, který vychází z předpokladu normálního rozdělení funkce spolehlivosti RF. Ve zvoleném příkladě vychází $\beta = 5,2$ a odpovídající pravděpodobnost poruchy $p_f = 9,6 \cdot 10^{-8}$ (viz obr. 7.19). Při předpokladu normálního rozdělení RF by návrh vyhovoval třídě spolehlivosti RC3 (Velké důsledky) dle ČSN EN 1990 [3].

Zhodnocení a závěry

Průřez v pravém krajním vláknu vetknutí ocelového lomeného nosníku vyhovuje na mezní stav únosnosti z hlediska 1 úrovně spolehlivosti (RC1 - Malé důsledky) podle ČSN EN 1990 [3], viz tab. 3.2. Posudek je proveden metodou LHS implementovanou v programu FREET. K posudku je použito pravděpodobnosti poruchy p_f dopočtené na základě předpokladu, že rozdělení funkce spolehlivosti RF odpovídá rozdělení typu Logistic.

Obsah
236. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obr. 7.19 Analýza funkce spolehlivosti RF pro mezní stav únosnosti

Obsah
237. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Poznámka 7.11. Pravděpodobnost poruchy vypočtená ve vetknutí ve vláknu 1 se obvykle liší od pravděpodobnosti poruchy ve vláknu 2. Rozdíl je způsoben díky nesymetrického zatížení a geometrii. Pravděpodobnost poruchy celého průřezu se pak nerovná prostému součtu těchto dvou pravděpodobností poruch.

Poznámka 7.12. Metodou LHS lze efektivně odhadnout tyto statistiky i při velmi malém počtu simulačních kroků. Odhad pravděpodobnosti poruchy metodou LHS však může být nepřesný vzhledem k nutnosti proložit malý počet simulací vhodným parametrickým rozdělením. Na volbě rozdělení, pak závisí odhadovaná pravděpodobnosti poruchy, která se může pro různá rozdělení lišit i řádově, jako tomu je v řešeném příkladu (viz obr. 7.19). Při předpokladu, že funkce spolehlivosti odpovídá normálnímu rozdělení vychází $p_f = 9,6 \cdot 10^{-8}$ (označeno jako $Cornell - p_f$), zatímco pro rozdělení Logistic vychází $p_f = 7,9 \cdot 10^{-5}$.

Obsah
238. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Obr. 7.20 Řešení úlohy 7.9 v programu Freet [36]

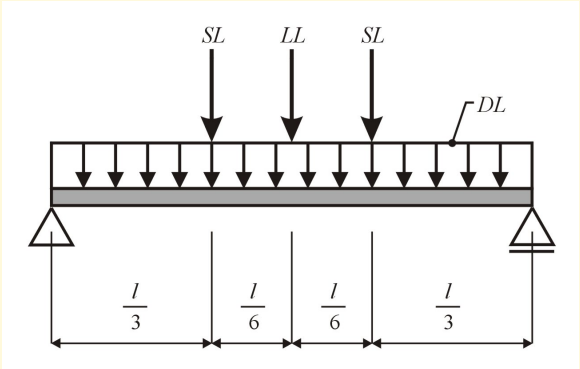
Obsah
239. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

7.2. Zadání příkladů k procvičení

Následující text obsahuje zadání příkladů k procvičení, jenž mají posloužit jako inspirace k samostudiu.

Příklady k procvičení

1. Posudek spolehlivosti ohýbaného nosníku



Obr. 7.21 Statické schéma nosníku a zatížení

Z hlediska mezního stavu únosnosti i použitelnosti ověřte spolehlivost ohýbaného nosníku zobrazeného na obr. 7.21. Konstrukce je vystavena stálému, dlouhodobému a krátkodobému náhodnému zatížení. Předpokládá se pružné chování materiálu s proměnnou velikostí napětí na mezi kluzu a variabilní průřez nosníku. Pro definování návrhové pravděpodobnosti p_d uvažujte třídu spolehlivosti RC2 (střední důsledky).

Obsah
240. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

2. Posudek spolehlivosti sloupu

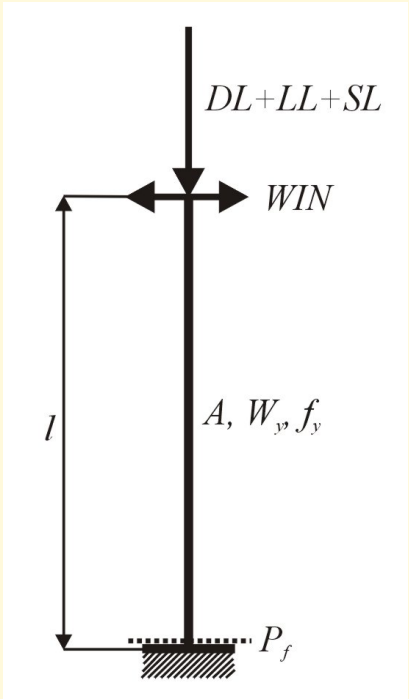
   Ověřte spolehlivost sloupu namáhaného prostým tlakem s ohybem jehož statické schéma je uvedeno na obr. 7.22.a. Posudek spolehlivosti proveďte podle mezního stavu únosnosti i použitelnosti. Konstrukce je vystavena stálému, dlouhodobému a krátkodobému náhodnému zatížení a větru. Předpokládá se pružné chování materiálu s proměnnou velikostí napětí na mezi kluzu a variabilní průřez nosníku. Pro definování návrhové pravděpodobnosti p_d uvažujte třídu spolehlivosti RC2 (střední důsledky).

3. Posudek spolehlivosti sloupu podle teorie II.řádu

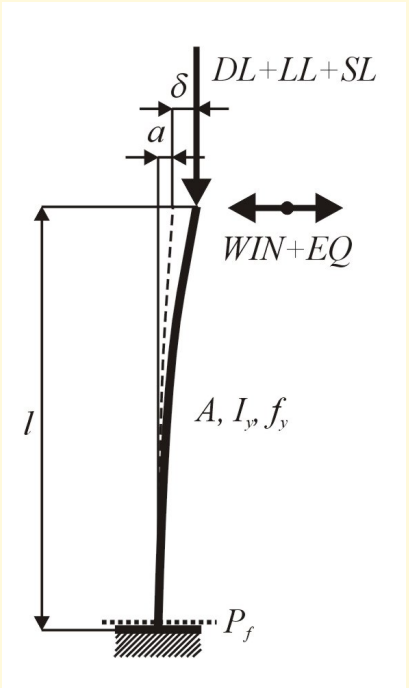
   Ověřte spolehlivost sloupu, namáhaného prostým tlakem s ohybem, jehož statické schéma je uvedeno na obr. 7.22.b. Posudek spolehlivosti proveďte podle mezního stavu únosnosti i použitelnosti s výpočtem podle teorie II.řádu. Konstrukce je vystavena stálému, dlouhodobému a krátkodobému náhodnému zatížení i zatížení větrem a zemětřesením. Předpokládá se pružné chování materiálu s proměnnou velikostí napětí na mezi kluzu, variabilní průřez nosníku i počáteční imperfekce (montážní nepřesnosti). Pro definování návrhové pravděpodobnosti p_d uvažujte třídu spolehlivosti RC2 (střední důsledky).

4. Posudek spolehlivosti prostorově namáhaného sloupu

   Ověřte spolehlivost ocelového sloupu, prostorově namáhaného prostým tlakem a ohybem jehož statické schéma je uvedeno na obr. 7.23 podle mezního stavu únosnosti. Konstrukce je vystavena kombinaci stálého, dlouhodobého a krátkodobého náhodného zatížení i zatížení sněhem a větrem. Předpokládá se pružné chování materiálu s proměnnou velikostí napětí na mezi kluzu a variabilní průřez sloupu. Pro definování návrhové pravděpodobnosti p_d uvažujte třídu spolehlivosti RC2 (střední důsledky).



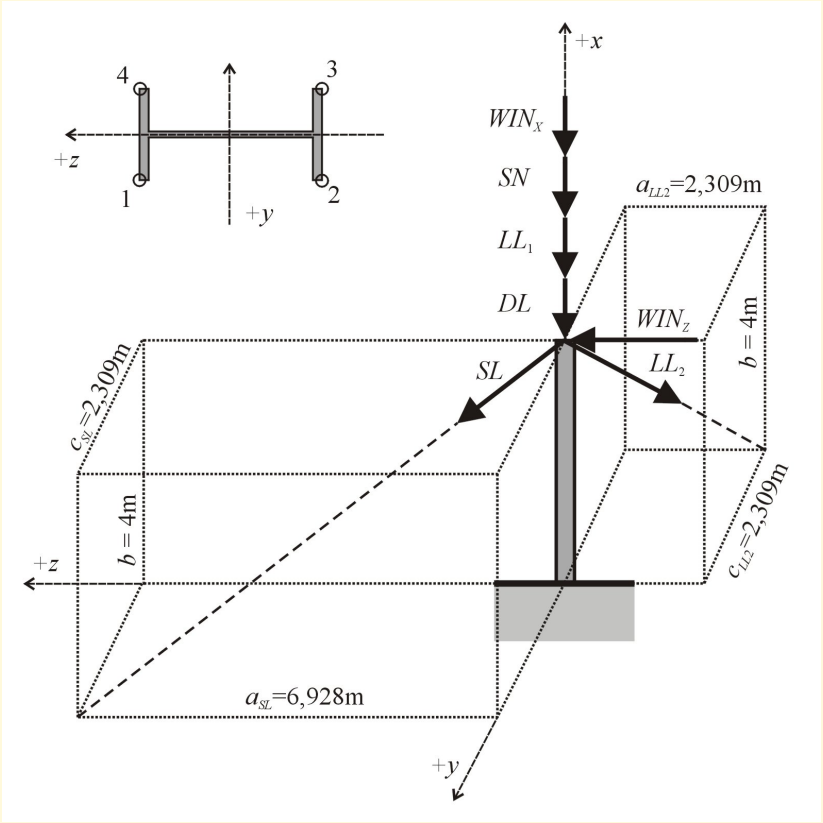
a)



b)

Obr. 7.22 Statické schéma sloupů a jejich zatížení

Obsah
242. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obr. 7.23 Statické schéma prostorově namáhaného sloupu

Obsah
243. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

5. Posudek spolehlivosti staticky neurčitého rámu

   Ověřte spolehlivost dvakrát staticky neurčitého ocelového rámu namáhaného ohybem a osovým namáháním (viz obr. 7.24). Konstrukci posuďte podle mezního stavu únosnosti. Konstrukce je vystavena dlouhodobému a krátkodobému náhodnému zatížení i zatížení větrem. Předpokládá se pružné chování materiálu s proměnnou velikostí napětí na mezi kluzu a variabilní průřez obou prutů. Pro definování návrhové pravděpodobnosti p_d uvažujte třídu spolehlivosti RC2 (střední důsledky).

6. Posudek spolehlivosti parabolického oblouku

   Ověřte spolehlivost ocelového parabolického oblouku namáhaného osovým namáháním a ohybem. Konstrukci posuďte podle mezního stavu únosnosti. Konstrukce, jejíž statické schéma je zobrazeno na obr. 7.25, je vystavena stálému, dlouhodobému a krátkodobému náhodnému zatížení. Předpokládá se pružné chování materiálu s proměnnou velikostí napětí na mezi kluzu a variabilní průřez nosníku. Pro definování návrhové pravděpodobnosti p_d uvažujte třídu spolehlivosti RC2 (střední důsledky).

7. Posudek spolehlivosti roštu

   Proveďte pravděpodobnostní posouzení roštu tvořeného dvěma zkříženými nosníky (viz obr. 7.26) z oceli dle mezního stavu únosnosti i použitelnosti. Konstrukce je vystavena stálému, dlouhodobému a krátkodobému náhodnému zatížení a zatížení větrem i sněhem. Předpokládá se pružné chování materiálu s proměnnou velikostí napětí na mezi kluzu a variabilní průřez obou nosníků. Pro definování návrhové pravděpodobnosti p_d uvažujte třídu spolehlivosti RC2 (střední důsledky).

8. Posudek spolehlivosti rovinné napjatosti ve stojině

   Proveďte pravděpodobnostní posudek spolehlivosti prvku namáhaného rovinným ohybem, smykem a osovým namáháním z oceli podle mezního stavu únosnosti ve třetině rozpětí a vláknu ve spodní čtvrtině výšky průřezu (viz obr. 7.27) s využitím Misesovy podmínky plasticity. Konstrukce je vystavena stálému, dlouhodobému a krátkodobému náhodnému zatížení i zatížení větrem a sněhem. Předpokládá se pružné chování materiálu s proměnnou velikostí napětí na mezi kluzu a variabilní průřez nosníku. Pro definování návrhové pravděpodobnosti p_d uvažujte třídu spolehlivosti RC2 (střední důsledky).

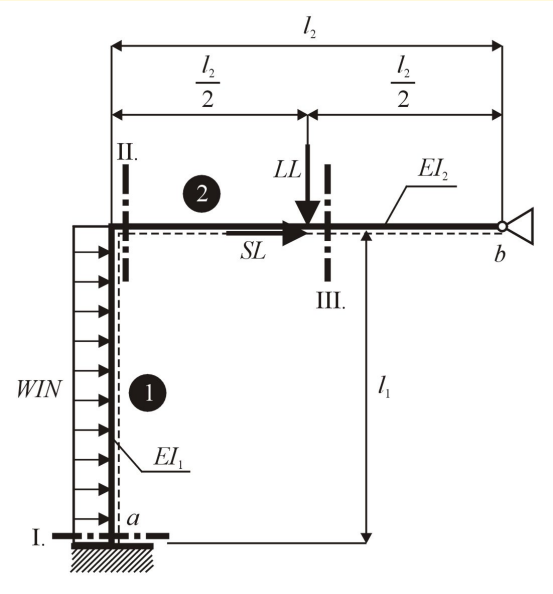
ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

Obsah

245. strana ze 283

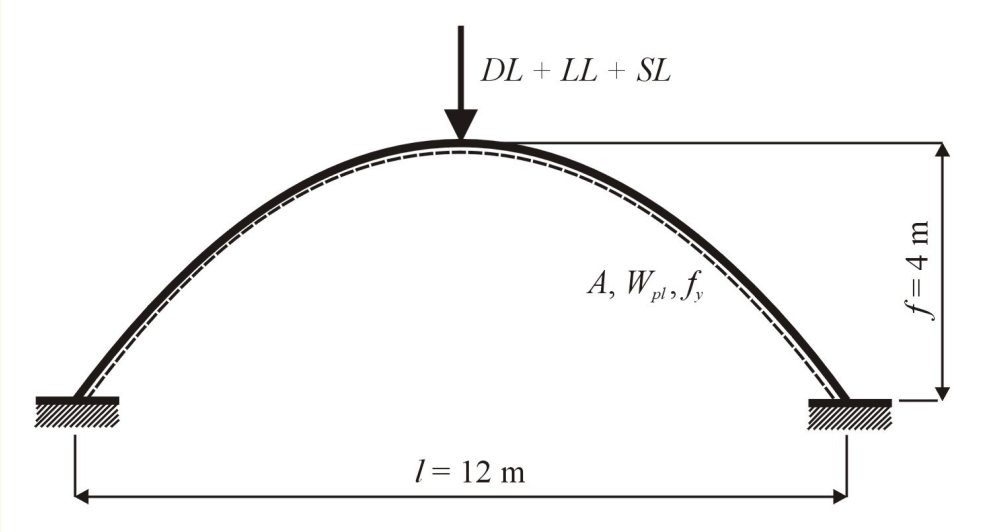
Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno



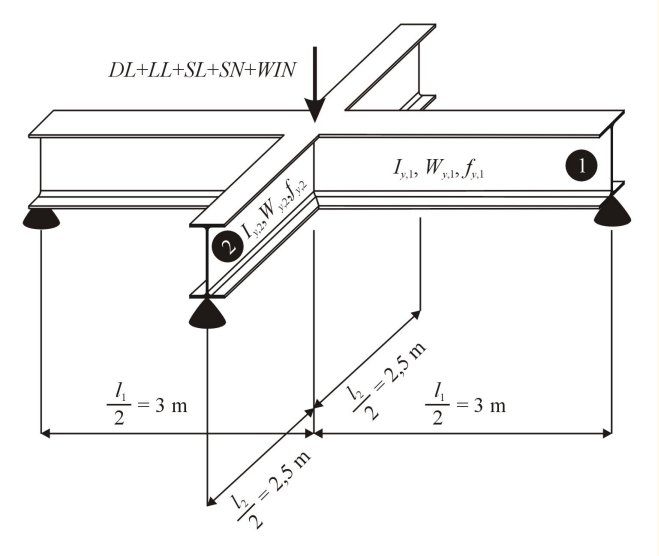
Obr. 7.24 Statické schéma dvakrát staticky neurčitého rámu a zatížení

Obsah
246. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



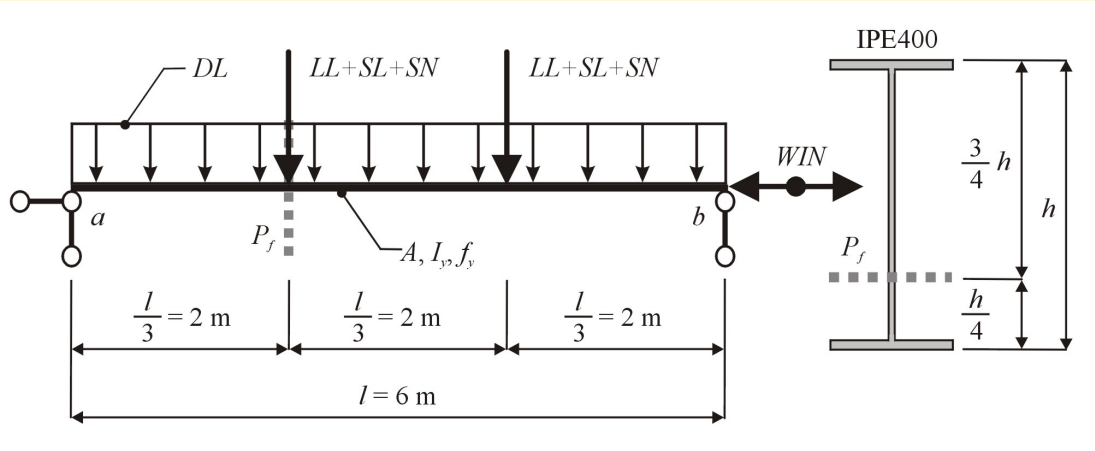
Obr. 7.25 Statické schéma parabolického oblouku a zatížení

Obsah
247. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obr. 7.26 Statické schéma roštu a zatížení

Obsah
248. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obr. 7.27 Statické schéma nosníku, jeho zatížení a posuzovaného řezu

Obsah
249. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

7.3. Test

Spustit test Odpovězte na otázky v tomto testu. Test musíte spustit kliknutím na tlačítko, poté vyplňte odpovědi a ukončete test. Správná může být více než jedna odpověď.

Následující otázky jsou vztaženy ke dvěma zadáním, a to k táhlu (viz 7.28 a Tab. 7.4) a k prostému nosníku (7.29 a Tab. 7.5). Tyto úlohy je možno řešit metodou Monte Carlo (viz kap. 5) nebo POPV (viz 6). Použité náhodně proměnné jsou dostupné v databázi programů Anthill [19] nebo ProbCalc [38].

Obr. 7.28 Statické schéma ocelového táhla

1. Určete hodnotu účinku zatížení S, která nebude překročena s pravděpodobností P=99,5 %. Účinek zatížení S popište pomocí normálové síly. Táhlo je uvedeno na Obr. 7.28. Nosník je vystavený dlohodobému nahodilému silovému zatížení. Popis parametrů je uveden v Tab. 7.4. Odpovídající účinek zatížení S je:

   (a) 0,995, (b) 498,3 kN, (c) 498,3 N, (d) 275 kNm.

Proměnná		Nominální hodnota		Rozptyl (variabilita)	
				Histogram	Rozsah
Dlouhodobé náhodné zatížení	LL	510	[kN]	LONG1	<0..1>
Mez kluzu oceli	f_y	–	[MPa]	Tyče-Fy235-01	<200..435>
Plocha	A	$2390 \cdot 10^{-6}$	[m^2]	–	–

Tab. 7.4 Popis vstupních parametrů ocelového táhla uvedeného na Obr. 7.28

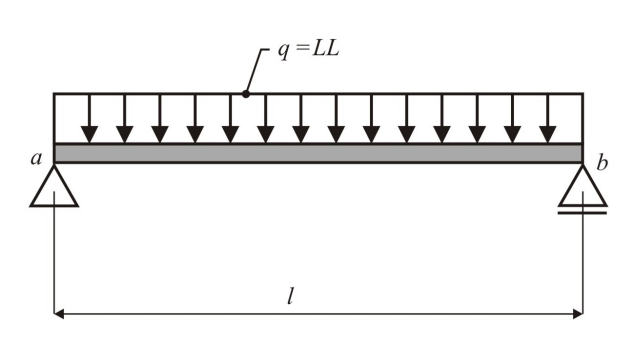
2. U výše uvedeného táhla z oceli Fe360/S235 (viz Obr. 7.28 a Tab. 7.4) určete hodnotu odolnosti R, tak aby 0,5 % hodnot výsledného rozdělení pravděpodobnosti bylo menších než výsledná hodnota. Odolnost R vyjádřete jako sílu. Odpovídající odolnost R je:

(a) 544,4 kN, (b) 0.995 , (c) $544{,}4 \cdot 10^{-3}$ MN, (d) $7{,}2 \cdot 10^{-5}$.

3. U stejného ocelového táhla uvedeného na Obr. 7.28 určete pravděpodobnost poruchy p_f. Táhlo je vystavené dlohodobému nahodilému rovnoměrnému spojitému zatížení. Popis parametrů je uveden v Tab. 7.4. Pravděpodobnost poruchy p_f je:

(a) 235 MPa, (b) $3.5 \cdot 10^{-6}$. (c) 0,000155, (d) $1,1 \cdot 10^{-12}$.

Obsah
251. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obr. 7.29 Statické schéma ocelového nosníku

4. Určete hodnotu účinku zatížení S, která nebude překročena s pravděpodobností P=99,0 %. Účinek zatížení S popište ohybovým momentem uprostřed rozpětí prostého nosníku z oceli Fe360/S235. Nosník je uveden na Obr. 7.29. Nosník je vystavený dlouhodobému nahodilému rovnoměrnému spojitému zatížení. Popis parametrů je uveden v Tab. 7.5. Odpovídající účinek zatížení S je:

(a) 0,000155, (b) 262,5 kNm, (c) 262,5 MPa, (d) 275 kNm.

Obsah
252. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Proměnná		Nominální hodnota		Rozptyl (variabilita)	
				Histogram	Rozsah
Dlouhodobé náhodné zatížení	LL	22	[kNm^{-1}]	LONG1	<0..1>
Mez kluzu oceli	f_y	–	[MPa]	Tyče-Fy235-01	<200..435>
Modul průřezu	W	$1147500 \cdot 10^{-9}$	[m^3]	–	–
Moment setrvačnosti	I	$329296875 \cdot 10^{-12}$	[m^4]	–	–
Modul pružnosti	E	$210 \cdot 10^{9}$	[MPa]	–	–
Rozpětí	l	10	[m]	–	–

Tab. 7.5 Popis vstupních parametrů ocelového nosníku uvedeného na Obr. 7.29

Obsah
253. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

5. U výše uvedeného ocelového nosníku (viz Obr. 7.29 a Tab. 7.5) určete hodnotu odolnosti R, která bude překročena s pravděpodobností P=99,0 %. Odolnost R vyjádřete za pomocí ohybového momentu. Odpovídající odolnost R je:

(a) 269,7 kNm, (b) 235,2 kNm, (c) $269{,}7 \cdot 10^{-3}$ MNm, (d) $7{,}2 \cdot 10^{-5}$.

6. U prostě podepřeného ocelového nosníku (viz Obr. 7.29 a Tab. 7.5) určete i pravděpodobnost poruchy p_f, a to s ohledem na posudek únosnosti za ohybu.

(a) $3{,}19 \cdot 10^{-7}$, (b) $1{,}55 \cdot 10^{-4}$, (c) 0,000155, (d) 2,35.

7. U ocelového prostě podepřeného nosníku uvedeného na Obr. 7.29, jehož vstupní parametry jsou uvedeny v Tab. 7.5, určete pravděpodobnost s jakou bude průhyb uprostřed rozpětí $\delta \leqq 20$ mm, tato pravděpodobnost je:

(a) 34,8 % MPa, (b) 0, (c) 0,348, (d) $6{,}7 \cdot 10^{-2}$.

8. U prostě podepřeného ocelového nosníku (viz Obr. 7.29 a Tab. 7.5) určete pravděpodobnost poruchy p_f, a to s ohledem na posudek použitelnosti. Limitní hodnota průhybu uprostře rozpětí je zvolena jako $l/350$. Pravděpodobnost poruchy p_f je:

(a) 235 MPa, (b) 0,0784, (c) 0,000155, (d) $7{,}84 \cdot 10^{-3}$.

Konec testu

Počet správných odpovědí:

Vyznačení oprav do testu: Opravit

Literatura

[1] *ANSYS*. Komerční software. [on-line]. <http://www.ansys.com/>. ANSYS, Inc., Canonsburg, Pennsylvania, USA. (Citováno na s 82.)

[2] ČSN 73 1401 *Navrhování ocelových konstrukcí*. Český normalizační institut, Praha, 1998. (Citováno na s 57 a 114.)

[3] ČSN EN 1990 (ČSN 73 0002) *Eurokód: Zásady navrhování konstrukcí*. Český normalizační institut, Praha, 2004. (Citováno na s 11, 48, 60, 57, 63, 146, 112, 192, 205, 209, 113, 114, 226 a 236.)

[4] ČSN EN 1991-1-3 (ČSN 73 0035) *Eurokód 1: Zatížení konstrukcí - Část 1-3: Obecná zatížení - Zatížení sněhem*. Český normalizační institut, Praha, 2005. (Citováno na s 50.)

[5] ČSN EN 1993-1-1 (ČSN 73 1401) *Eurokód 3: Navrhování ocelových konstrukcí - Část 1-1: Obecná pravidla a pravidla pro pozemní stavby*. Český normalizační institut, Praha, 2006. (Citováno na s 117 a s 208.)

[6] ČSN ISO 2394 (ČSN 73 0031) *Obecné zásady spolehlivosti konstrukcí*. Český normalizační institut, Praha, 2003. (Citováno na s 63.)

[7] *JCSS Probabilistic Model Code*. Joint Committee on Structural Safety, 2001-2006. [on-line]. <http://www.jcss.ethz.ch/publications/publications_pmc.html> ISBN 978-3-909386-79-6. (Citováno na s 112, s 114 a s 206.)

[8] Bitnar, Z. – Šejnoha, J. *Numerické metody mechaniky 2*. Vydavatelství ČVUT, Praha, 1992. (261 s). ISBN 80-01-00901-7. (Citováno na s 39 a 120.)

[9] Bolotin, V.V. *Použití metod teorie pravděpodobnosti a teorie spolehlivosti při navrhování konstrukcí*. SNTL - nakladatelství technické literatury, Praha, 1978. (299 s). (Citováno na s 53.)

[10] Brožovský, J. *Monte*. Webové stránky. [on-line]. <http://fast10.vsb.cz/brozovsky/monte>. Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava, 2006-2010. (Citováno na s 85 a s 114.)

[11] Brožovský, J. *uFEM*. Webové stránky. [on-line]. <http://fast10.vsb.cz/brozovsky/ufem>. Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava, 2003-2010. (Citováno na s 85 a s 116.)

[12] *Georges-Louis Leclerc, Comte de Buffon*. Článek v otevřené encyklopedii Wikipedia. [on-line]. <http://en.wikipedia.org/wiki/Georges-Louis_Leclerc,_Comte_de_Buffon>. (Citováno na s 89.)

[13] *Buffon's Needle Problem*. Článek v encyklopedii MathWorld. [on-line]. <http://mathworld.wolfram.com/BuffonsNeedleProblem.html>. (Citováno na s 89.)

[14] Bucher, C.G. *Adaptive Sampling - An Iterative Fast Monte Carlo Procedure*. Journal Structural Safety, Volume 5, Issue 2, June 1988. s 119-126 (8 s). (Citováno na s 77.)

[15] Ditlevsen, O. – Madsen, H.O. *Structural Reliability Methods* Monografie, 1.vydání, John Wiley & Sons Ltd, Chichester, 1996. (363 s). ISBN 0-471-96086-1. (Citováno na s 78 a 39.)

[16] *Enrico Fermi*. Článek v otevřené encyklopedii Wikipedia. [on-line]. <http://cs.wikipedia.org/wiki/Enrico_Fermi>. (Citováno na s 90.)

[17] Fajkus, M. *Naměřené hodnoty napětí na mezi kluzu*. Podklady pro tvorbu useknutých histogramů napětí na mezi kluzu válcovaných profilů. VÚHŽ, 739 51 Dobrá, 1998. (Citováno na s 150 a 221.)

[18] Guštar, M. *Omezené histogramy a SBRA*. Sborník příspěvků II. ročníku celostátní konference Spolehlivost konstrukcí na téma Cesta k pravděpodobnostnímu posudku bezpečnosti, provozuschopnosti a trvanlivosti konstrukcí. Dům techniky Ostrava, 21. březen 2001. s 5-8 (4 s). ISBN 80-02-01410-3. (Citováno na s 35.)

[19] Guštar, M. – Marek, P. *Výpočetní program Anthill*. Komerční software pro simulaci Monte Carlo, verze 2.6 Pro. [on-line]. <http://www.anthill-sbra.com>. ARTech, Nad Vinicí 7, 143 00 Praha 4, 1989-2007. (Citováno na s 114, 220, 222, 228 a 250.)

[20] Hasofer, A.M. – Lind, N.C. *Exact and invariant second-moment code format*. Journal of Engineering and Mechanical Division, vol.100, American Society of Civil Engineers, 1974. s 111-121 (11 s). (Citováno na s 78.)

[21] Holický, M. *Zásady ověřování spolehlivosti a životnosti staveb*. Skripta. Lektoroval J.Procházka. České vysoké učení technické v Praze, 1998. (101 s). ISBN 80-01-01880-6. (Citováno na s 29.)

[22] Holický, M. – Marková, J. *Základy teorie spolehlivosti a hodnocení rizik*. Základní poznatky teorie pravděpodobnosti, matematické statistiky, teorie spolehlivosti a hodnocení rizik použité v nových evropských a mezinárodních předpisech pro navrhování stavebních konstrukcí. Skripta. České vysoké učení technické v Praze, 2005. (115 s). ISBN 80-01-03129-2. (Citováno na s 29.)

[23] Holický, M. – Marková, J. *Zásady navrhování stavebních konstrukcí*. Příručka k EN 1990. Informační centrum České komory autorizovaných inženýrů a techniků činných ve výstavbě, Praha, 2007. ISBN 978-80-87093-27-6. (Citováno na s 65.)

[24] *Chaos theory*. Otevřená encyklopedie Wikipedia. [on-line]. <http://http://en.wikipedia.org/wiki/Chaos_theory>. (Citováno na s 81.)

[25] Janas, P. *Výpočet pravděpodobnosti poruchy metodou PDPV - teorie*. Sborník příspěvků mezinárodní konference Modelování v mechanice 2008. VŠB-TU Ostrava, Stavební fakulta, 13. až 14. únor 2008. s 3-4 (2 s) rozšířený abstrakt, (12 s) plné znění na CD-ROM. ISBN 978-80-248-1705-7. (Citováno na s 174 a 179.)

[26] Janas, P. – Krejsa, M. *Numerický výpočet pravděpodobnosti užitím useknutých histogramů při posuzování spolehlivosti konstrukcí*. Sborník vědeckých prací Vysoké školy báňské - Technické univerzity Ostrava, číslo 1, rok 2002, ročník II, řada stavební. VŠB-TU Ostrava, Stavební fakulta, 2002. s 47-58 (12 s). ISBN 80-248-0397-6, ISSN 1213-1962. (Citováno na s 127.)

[27] Janas, P. – Krejsa, M. *Přímý determinovaný pravděpodobnostní výpočet a jeho využití při posuzování spolehlivosti konstrukcí*. Sborník příspěvků I. celostátní konference Pravděpodobnost porušování konstrukcí. VUT V Brně, Stavební fakulta, 6. až 7. říjen 2004. Editoři D.Novák a S.Vejvoda. s 97-106 (10 s). ISBN 80-214-2718-3. (Citováno na s 169.)

[28] Janas, P. – Krejsa, M. *Pravděpodobnostní výpočet únosnosti a pružné deformační energie důlní obloukové výztuže*. Sborník příspěvků mezinárodní konference Modelování v mechanice 2007. VŠB-TU Ostrava, Stavební fakulta, 14. až 15. únor 2007. s 41-42 (2 s) rozšířený abstrakt, (15 s) plné znění na CD-ROM. ISBN 978-80-248-1330-1. (Citováno na s 189.)

[29] Janas, P. – Krejsa, M. *Softwarová aplikace Přímého Determinovaného Pravděpodobnostního Výpočtu (PDPV)*. Sborník rozšířených abstraktů odborné konference IDEAS 09. VŠB-TU Ostrava, Stavební fakulta, 5. až 6. listopad 2009. s 19-20 (2 s) rozšířený abstrakt, s 27-36 (10 s) plné znění na CD-ROM. ISBN 978-80-248-2016-3 a 978-80-01-04449-0 (CD-ROM). (Citováno na s 140.)

[30] Janas, P. – Krejsa, M. *Metoda Přímého Determinovaného Pravděpodobnostního Výpočtu - PDPV*. Odborná přednáška. VŠB-TU Ostrava, Stavební fakulta, 14. prosinec 2009. (Citováno na s 128.)

[31] Janas, P. – Krejsa, M. *Statistická závislost vstupních veličin při pravděpodobnostním výpočtu metodou POPV*. Dílčí výzkumná zpráva projektu CIDEAS - Centrum integrovaného navrhování progresivních stavebních konstrukcí VŠB-TU Ostrava, Stavební fakulta, listopad 2010. (Citováno na s 164.)

[32] Janas, P. – Krejsa, M. – Krejsa, V. *Aplikace přímého determinovaného pravděpodobnostního výpočtu v programu ProbCalc*. Sborník abstraktů VII. konference s mezinárodní účastí Staticko-konštrukčné a stavebno-fyzikálne problémy stavebných konštrukcií. Štrbské pleso, Vysoké Tatry, Slovensko, 23. až 25. listopad 2005. s 31-32 (2 s). ISBN 80-7099-742-7 a ISBN 80-8073-404-6 (CD-ROM). (Citováno na s 140.)

[33] Janas, P. – Krejsa, M. – Krejsa, V. *Optimalizace výpočtu v programovém systému ProbCalc*. Sborník příspěvků mezinárodní konference Modelování v mechanice 2006. VŠB-TU Ostrava, Stavební fakulta, 1. až 2. únor 2006. s 47-48 (2 s) rozšířený abstrakt, (11 s) plné znění na CD-ROM. ISBN 80-248-1035-2. (Citováno na s 146.)

[34] Janas, P. – Krejsa, M. - Krejsa, V. *Současné možnosti Přímého determinovaného pravděpodobnostního výpočtu při posuzování spolehlivosti konstrukcí*. Sborník vědeckých prací Vysoké školy báňské - Technické univerzity Ostrava, číslo 1, rok 2006, ročník VI, řada stavební. VŠB-TU Ostrava, Stavební fakulta, 2006. s 181-192 (12 s). ISBN 80-248-1248-7, ISSN 1213-1962. (Citováno na s 169 a 174.)

[35] Janas, P. – Krejsa, M. – Krejsa, V. *Využití naměřených hodnot při řešení úloh Přímým determinovaným pravděpodobnostním výpočtem*. Sborník příspěvků 6. mezinárodní konference Nové trendy v statike a dynamike stavebných konštrukcií. Stavební fakulta STU v Bratislave, Slovensko, 18. až 19. říjen 2007. Editoři N.Jendželovský a A.Grmanová. s 1-4 (4 s) rozšířený abstrakt, (8 s) plné znění na CD-ROM. ISBN 978-80-227-2732-7. (Citováno na s 164.)

[36] Janas, P. – Krejsa, M. – Krejsa, V. *Software HistAn [EXE] - Histogram Analysis*. Autorizovaný software, Lite verze 1.1, 2,8 MB. Ev.č. 004/27-01-2009_SW. VŠB-TU Ostrava, 2008. (Citováno na s 31, 85, 140 a 158.)

[37] Janas, P. – Krejsa, M. – Krejsa, V. *Software HistOp [EXE] - Basic Operations with Histograms*. Autorizovaný software, Lite verze 1.1, 7,5 MB. Ev.č. 002/27-01-2009_SW. VŠB-TU Ostrava, 2008. (Citováno na s 85 a 142.)

[38] Janas, P. – Krejsa, M. – Krejsa, V. *Software ProbCalc [EXE] - Program System for Probabilistic Reliability Assessment using DDFPM method*. Autorizovaný software, Lite verze 1.1, 12,4 MB. Ev.č. 003/27-01-2009_SW. VŠB-TU Ostrava, 2008. (Citováno na s 142, 217 a 250.)

[39] Janas, P. – Krejsa, M. – Krejsa, V. *Current Possibilities of Direct Determined Fully Probabilistic Method (DDPFM)*. 4rd International ASRANet Colloquium 2008, sborník referátů. Athény, Řecko, 25. až 27. červen 2008. (10 s) plné znění na CD-ROM. ISBN 978-0-9553550-2-8. (Citováno na s 136,174 a 179.)

[40] Janas, P. – Krejsa, M. – Krejsa, V. *Structural Reliability Assessment Using Direct Determined Probabilistic Calculation*. Twelfth International Conference on Civil, Structural and Environmental Engineering Computing, sborník příspěvků, článek č.72. Funchal, Madeira, Portugalsko, 1. až 4. září 2009. Civil-Comp Press, 2009. Editoři Topping, Costa Neves a Barros. (1 s) rozšířený abstrakt, (20 s) plné znění na CD-ROM. ISBN 978-1-905088-31-7 (CD-ROM). (Citováno na s 174 a 179.)

[41] Janas, P. – Krejsa, M. – Krejsa, V. *Using the Direct Determined Fully Probabilistic Method for determination of failure*. European Safety and Reliability Conference Esrel 2009, sborník příspěvků. Praha, 7. až 10. září 2009. Civil-Comp Press, 2009. Reliability, Risk and Safety: Theory and Applications. Taylor & Francis Group, London, 2010. Editoři Briš, Guedes Soares a Martorell. s 1467-1474 (8 s). ISBN 978-0-415-55509-8 (sada 3 knih + CD-ROM). (Citováno na s 174 a 174.)

[42] Janas, P. – Krejsa, M. – Krejsa, V. *ProbCalc software a publikace věnované metodě POPV*. Webové stránky. [on-line]. <http://www.fast.vsb.cz/popv>. Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava, 2004-2010. (Citováno na s 85, 128, 140, 206, 221 a **??**.)

[43] Janas, P. – Šňupárek, R. – Krejsa, M. – Krejsa, V. *Software Kotvení [EXE]*. Autorizovaný software, Lite verze 1.0, 2,8 MB. Ev.č. 001/26-01-2010_SW. VŠB-TU Ostrava, 2010. (Citováno na s 190.)

[44] Janas, P. – Šňupárek, R. – Krejsa, V. – Krejsa, M. *Pravděpodobnostní přístup k navrhování kotevní výztuže důlních děl v podmínkách ostravsko-karvinského revíru*. Článek v časopisu Tunel české tunelářské asociace a slovenskej tunelárskej asociácie ITA-AITES, č.4/2009, 18.ročník. Praha, 2009. s 37-43 (7 s). ISSN 1211-0728. (Citováno na s 192.)

[45] Kadlčák, J. – Kytýr, J. *Statika stavebních konstrukcí I.*. VUTIUM Brno, 1998. (349 s). ISSN 80-214-1204-6. (Citováno na s 49.)

[46] Kmeť, S. *Hodnoty návrhovej pravdepodobnosti P_{fd}*. Sborník příspěvků VI. ročníku konference Spolehlivost konstrukcí na téma Od deterministického k pravděpodobnostnímu pojetí inženýrského posudku spolehlivosti konstrukcí. Dům techniky Ostrava, 6. duben 2005. s 109-118 (10 s). ISBN 80-02-01708-0. (Citováno na s 63 a 66.)

[47] Kmeť, S. *Faktory a prístupy pri stanovovaní návrhovej pravdepodobnosti*. Sborník referátů VII. konference Spolehlivost konstrukcí, Praha, 2006. s 41-52 (12 s). ISBN 978-80-02-01897-1. (Citováno na s 59.)

[48] Konečný, P. *Větrová růžice - dvoukomponentní křivka zatížení.* Sborník referátů konference Spolehlivost konstrukcí, Ostrava, 2000. s 29-32 (4 s). ISBN 80-02-01344-1. (Citováno na s 113, s 140 a s 166.)

[49] Konečný, P.– Tikalsky, P.J.– Tepke, D.G. *Performance Evaluation of a Concrete Bridge Deck Affected by Chloride Ingress by Using Simulation-Based Reliability Assessment and Finite Element Modeling.* Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board, No. 2028, Washington, DC, 2007. s 3-82 (6 s). ISSN: 0361-1981, ISBN: 978-0-309-10455-5. (Citováno na s 113.)

[50] Králik, J. *Safety and Reliability of Nuclear Power Buildings in Slovakia.* Earthquake - Impact - Explosion. Slovenská technická univerzita v Bratislavě, 2009. (307 s) ISBN 978-80-227-3112-6. (Citováno na s 80.)

[51] Králik, J. *Reliability Analysis of Structures Using Stochastic Finite Element Method.* Slovenská technická univerzita v Bratislavě, 2009. (143 s) ISBN 978-80-227-3130-0. (Citováno na s 80.)

[52] Krejsa, M. *Pravděpodobnostní posudek nosné ocelové konstrukce s přesnou definicí referenční úrovně.* Sborník příspěvků II. ročníku celostátní konference Spolehlivost konstrukcí na téma Cesta k pravděpodobnostnímu posudku bezpečnosti, provozuschopnosti a trvanlivosti konstrukcí. Dům techniky Ostrava, 21. březen 2001. s 15-20 (6 s). ISBN 80-02-01410-3. (Citováno na s 116.)

[53] Krejsa, M. – Tomica, V. *Pravděpodobnostní přístup šíření únavových trhlin s ohledem na překročení meze pevnosti.* Dílčí výzkumná zpráva projektu CIDEAS - Centrum integrovaného navrhování progresivních stavebních konstrukcí VŠB-TU Ostrava, Stavební fakulta, listopad 2010. (Citováno na s 190.)

[54] Křivý, V. *Posudek polotuhých styčníků metodou SBRA*. Spolehlivost konstrukcí, 2003. s 119-124(6 s). ISBN 80-02-01551-7. (Citováno na s 117.)

[55] Křivý, V. *Výpočetní program MCD*. Software pro nelineární výpočet rovinných rámů, verze 1.0. (Citováno na s 99 a s 116.)

[56] Křivý, V. – Marek, P. *Pravděpodobnostní stabilitní posudek ocelového rámu s polotuhými spoji metodou SBRA*. Časopis Konstrukce, 5/2006, duben 2008. (132 s). ISSN 1213-8762. (Citováno na s 99, s 116 a 117.)

[57] Kubečka, K. *Rizika staveb, příčiny vzniku poruch, důsledky poruch a způsob hodnocení*. Habilitační práce. VŠB-TU Ostrava, Stavební fakulta, duben 2008. (132 s). (Citováno na s 136 a 189.)

[58] Křivý, V. – Stříž, M. *Reliability-based design of roof structural elements exposed to snow load*. Proceedings of the 5.th International conference ASRANet 2010. Edinburgh, ASRANet Ltd., Scotland, 2010. ISBN 978-0-9553550-6-6. (10 s). (Citováno na s 114 a s 206.)

[59] Lokaj, A. *Spolehlivost prvků dřevěných konstrukcí s uvážením vlivu doby trvání kombinací účinků zatížení.*. Spolehlivost konstrukcí, Ostrava, 2002. s 43-46 (4 s) ISBN 80-02-01489-8. (Citováno na s 117.)

[60] *The Lehmers at Berkeley*. Selections from the University Archives and the Lehmer Family Papers. Webové stránky. [on-line]. <http://bancroft.berkeley.edu/Exhibits/Math/intro.html>. (Citováno na s 95.)

[61] Madsen, H.O. – Krenk, S. – Lind, N.C. *Methods of structural safety*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1986. (Citováno na s 78.)

[62] Marek, P. *Mezní stavy kovových stavebních konstrukcí*. SNTL, 1981. (Citováno na s 112.)

[63] Marek, P. – Guštar, M. *Pravděpodobnostní rozbor kombinací odezev na zatížení = zdroj úspor oceli*. Celostátní konference Ocelové konstrukce, ZP ČSVTS OK Mostárna Hustopeče, prosinec 1988. (Citováno na s 111.)

[64] Marek, P. – Guštar, M. – Anagnos, T. *Simulation-Based Reliability Assessment for Structural Engineers*. CRC Press, Inc., Boca Raton, Florida, 1995. ISBN 0-8493-8286-6. (Citováno na s 205, 111,220 113 a 205.)

[65] Marek, P. – Brozzetti, J. – Guštar, M., ed. *Probabilistic Assessment of Structures using Monte Carlo Simulation. Background, Exercises, Software*. Kniha a CD-ROM. ITAM CAS Prague, 2001. ISBN 86-86246-08-6. (Citováno na s 50 a 111.)

[66] Marek, P. – Brozzetti, J. – Guštar, M. – Tikalsky, P.J., ed. *Probabilistic Assessment of Structures using Monte Carlo Simulation, Background, Exercises and Software*. Kniha a CD-ROM. ÚTAM AV ČR, Praha 2003. 2.vydání. ISBN 80-86246-19-1. (Citováno na s 111.)

[67] Marek, P. – Krejsa, M. *Reliability Assessment of Structural Steel Members Exposed to Multicomponent Load Effect*. Sborník referátů 2.evropské konference o ocelových konstrukcí Eurosteel'99. ČVUT, Stavební fakulta, Praha, 26. až 29. květen 1999. Editoři J.Studnička, F.Wald a J.Macháček. Zkrácená verze ve sborníku, plná verze na CD ROM. s 649-652 (4 s). ISBN 80-01-01963-2. (Citováno na s 116.)

[68] Marek, P. – Krejsa, M. *Transition from Deterministic to Probabilistic Structural Steel Reliability Assessment with Special Attention to Stability Problems*. 6th International

Colloquium on Stability & Ductility of Steel Structures, sborník příspěvků. Timisoara, Rumunsko, 9. až 11. září 1999. Elsevier Science Ltd., 1999. Editoři D.Dubina a M.Iványi. s 19-26 (8 s). ISBN 0-08-043016-3. (Citováno na s 116.)

[69] *MATLAB*. Komerční software. [on-line]. <http://www.matlab.com/>. The MathWorks, Inc., Massachusetts, USA (Citováno na s 85.)

[70] Melchers, R.E. *Structural Reliability Analysis and Prediction*. Second edition, John Wiley & Sons Ltd., England, 1999. (437 s) ISBN 0-471-98324-1. (Citováno na s 29, 53 a 55.)

[71] Metropolis, N. – Ulam, S. *The Monte Carlo method*. Journal of American Statistical Association, 44, no.247, 1949. s 335-341 (7 s). (Citováno na s 91.)

[72] Navara, M. – Olšák, P. *Základy fuzzy mnoľin*. Volně šířený učební text podle licence. [on-line]. <ftp://math.feld.cvut.cz/pub/olsak/fuzzy/>. Praha, 2001, 2002. (34 s). (Citováno na s 81.)

[73] Němec, L. *Zatížení sněhem a větrem*. Sborník referátů konference Spolehlivost konstrukcí, Ostrava, 2001. s 9-14 (6 s). ISBN 80-02-01410-3. (Citováno na s 113,a s 140 a s 166.)

[74] *Nessus software - Software for Probabilistic and Reliability Predictions*. Komerční software. [on-line]. <http://www.nessus.com/>. Southwest Research Institute, verze 9.5.3, 2010. (Citováno na s 82.)

[75] Novák, D. *Metody a software pro odhad spolehlivosti hodnocení inženýrských rizik*. Technický list 1.1.2.2. projektu CIDEAS, 2005. (Citováno na s 76.)

[76] Novák, D. – Rusina, R. – Vořechovský, M. *FReET (Feasible Reliability Engineering Tool)* . Multipurpose Probabilistic Software for Statistical, Sensitivity and Reliability Analysis, verze 1.5. [on-line]. <http://www.freet.cz>. Institute of Structural Mechanics, Faculty of Civil Engineering, Brno University of Technology, Brno, 2008. (Citováno na 229 a 239.)

[77] Omishore, A., Kala, Z. *Application limits of conventional models of systems* . Sborník příspěvků VII. ročníku celostátní konference Spolehlivost konstrukcí na téma Rozšiřování pravděpodobnostního posudku od prvků a dílců konstrukcí k systémům. Dům techniky Ostrava, 5. dubna 2006. s 157-162 (6 s). ISBN 80-02-01770-6. (Citováno na s **??**.)

[78] *Otevřená encyklopedie Wikipedia*. Webové stránky. [on-line]. <http://cs.wikipedia.org>. (Citováno na s 29.)

[79] Otipka, P. – Šmajstrla, V. *Pravděpodobnost a statistika*. Distanční učební text. VŠB-TU Ostrava, 2008. (268 s). ISBN 80-248-1194-4. (Citováno na s 13 a 38.)

[80] Patelli, E. – Pradlwarter, H.J. – Panayirci, H.M. – Pellissetti, M.F. *Cossan (Computational Stochastic Structural Analysis)*. Komerční software. [on-line]. Institute of Engineering Mechanics (IfM), University of Innsbruck, Rakousko, 1996-2006. (Citováno na s 81.)

[81] Petschacher, M. *VaP - Variables Processor*. Komerční software, verze 3.0. [on-line]. <http://www.petschacher.at>. PSP - Petschacher Software und Projektentwicklungs GmbH, Feldkirchen in (Citováno na s 82.)

[82] *Phimeca Soft - Reliability Software.* Komerční software. [on-line]. <http://www.phimeca.com>. 2008. (Citováno na s 81.)

[83] Praks, P. *Metoda Stratified Sampling pro efektivní určení spolehlivosti stavebních konstrukcí.* Sborník příspěvků III. ročníku celostátní konference Spolehlivost konstrukcí na téma Cesty k uplatnění pravděpodobnostního posudku bezpečnosti, provozuschopnosti a trvanlivosti konstrukcí v normativních předpisech a v projekční praxi. Dům techniky Ostrava, 10. duben 2002. s 75-80 (6 s). ISBN 80-02-01489-8. (Citováno na s 77.)

[84] Praks, P. *Numerical aspects of Simulation Based Reliability Assessment of Systems.* International Colloquium Euro-SiBRAM'2002. Volume II. Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Academy of Sciences of the Czech Republic, Prague, 2002. CD--ROM. ISBN 80-86246-17-5. (Citováno na s 120.)

[85] Praks, P., Brožovský, J. *Posudek spolehlivosti kloubové prutové konstrukce metodou SBRA užitím přímé metody Monte Carlo a metody Importance Sampling v MKP prostředí AFEM* . Sborník příspěvků IV. ročníku celostátní konference Spolehlivost konstrukcí na téma Posudek - poruchy - havárie. Dům techniky Ostrava, 23.-24. duben 2003. s 51-54 (4 s). ISBN 80-02-01551-7. (Citováno na s 120.)

[86] *Proban - Probabilistic Analysis.* Komerční software. [on-line]. <http://www.dnv.com/software>. (Citováno na s 81.)

[87] Ralston, A. *Základy numerické matematiky.* Academia, Praha 1973. (Citováno na s 146.)

[88] Randýsková, L. – Janas, P. *Pravděpodobnostní výpočty metodou PDPV se závislými náhodnými veličinami.* Sborník příspěvků 6. mezinárodní konference Nové trendy v sta-

tike a dynamike stavebných konštrukcií. Stavební fakulta STU v Bratislave, Slovensko, 18. až 19. říjen 2007. Editoři N.Jendželovský a A.Grmanová. (11 s). ISBN 978-80-227-2732-7. (Citováno na s 164.)

[89] Schuëller, G. *Past, present & Future of Simulation-based Structural Analysis*. In International Colloquium Euro-SiBRAM'2002. Volume II. Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Academy of Sciences of the Czech Republic, Prague, 2002. s 17-27 (11 s). ISBN 80-86246-17-5. (Citováno na s 110.)

[90] *SLang (Structural Language)*. Komerční software. [on-line]. Institute of Structural Mechanics, Bauhaus University Weimar, Německo, (Citováno na s 82.)

[91] *Mapa zatížení sněhem na zemi*. Internetová aplikace. [on-line] <http://www.snehovamapa.cz/>. Vysoká Škola Báňská - Technická Univerzita Ostrava a Český hydrometeorologický ústav Praha, (Citováno na s 50.)

[92] Sobol, I.M. *Metod Monte-Karlo*. Kniha z edice Populárně-naučná literatura matematiky, číslo 46. Nakladatelství Nauka, hlavní redakce fyzikálně-matematické literatury, Moskva, 1968. (64 s). (Citováno na s 109.)

[93] Srinivasan, R. *Importance Sampling*. Applications in Communications and Detection Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2002. (241 s). ISBN 3-540-43420-8. (Citováno na s 120.)

[94] *Strurel, Comrel a Sysrel - výpočetní programy*. Komerční software. [on-line]. <http://www.strurel.de>. RCP GmbH, Mnichov, Německo, 1997-2009. (Citováno na s 81.)

[95] Šejnoha, J. – Jarušková, D. – Kalousková, M. – Menšík, A. *Vliv statistické závislosti náhodných veličin na spolehlivost konstrukce*. Sborník příspěvků IV. ročníku celostátní konference Spolehlivost konstrukcí na téma Posudek - poruchy - havárie. Dům techniky Ostrava, 23.až 24. duben 2003. s 125-130 (6 s). ISBN 80-02-01551-7. (Citováno na s 164.)

[96] Teplý, B. – Novák, D. *Spolehlivost stavebních konstrukcí*. Teorie, numerické metody, navrhování, software. Skripta. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, únor 2004. (88 s). Akademické nakladatelství CERM, sr.o. Brno. ISBN 80-214-2577-6. (Citováno na s 38, 54 a 109.)

[97] Tikalsky, P.J. – Pustka, D. – Marek, P. *Statistical Variations in Chloride Diffusion in Concrete*. American Concrete Institute (ACI) Structural Journal, Vol. 102, No. 3, May 2005. ISSN: 0889-3241. (Citováno na s 117.)

[98] Tichý, M. *Aplied Methods of Structural Reliability*. Topics in safety, reliability and quality. Kluwer Academics Publishers, 1993. (172 s). ISBN 0-7923-2349-1. (Citováno na s 48.)

[99] Tichý, M. *Ovládání rizika*. Analýza a management. 1. vydání. C.H.Beck, Praha, 2006. (396 s). ISBN 80-7179-415-5. (Citováno na s 29.)

[100] Tomica, V. – Krejsa, M. *Optimal Safety Level of Acceptable Fatigue Crack*. 5th International Probabilistic Workshop, sborník referátů. Ghent, Belgie, 28. až 29. listopad 2007. Editoři L.Taerwe a D.Proske. (12 s). ISBN 978-3-00-022030-2. (Citováno na s 190.)

[101] Tomica, V. – Krejsa, M. *Únavová odolnost v metodě přípustných poškození*. Sborník referátů 22. české a slovenské mezinárodní konference Ocelové konstrukce a mosty

2009. Brněnské výstaviště, 23. až 25. září 2009. Akademické nakladatelství CERM, s.r.o. 2009. Editoři J.Melcher, J.Skyva a M.Karmazínová. s 327-332 (6 s). ISBN 978-80-7204-635-5. (Citováno na s 190.)

[102] Tvrdík, J. *Evoluční algoritmy*. Učební text. Prírodovedecká fakulta, Ostravská universita, 2004. (73 s). (Citováno na s 81.)

[103] *Ulam, S.* Academic dictionaries and encyclopedias. Webové stránky. [on-line]. <http://en.academic.ru/dic.nsf/enwiki/26341>. (Citováno na s 90.)

[104] Václavek, L. – Marek, P. *Posudek pravděpodobnosti poruchy ocelové nosné soustavy s přihlédnutím k montážním tolerancím*. Sborník příspěvků I. ročníku celostátní konference Spolehlivost konstrukcí. Dům techniky Ostrava, 15. březen 2000. s 41-46 (6 s). ISBN 80-02-01344-1. (Citováno na s 169.)

[105] Valihrach, J.– Marek, P. *Využití metody SBRA při posuzování dynamické odezvy vysokých budov zatížených větrem z hlediska použitelnosti.*. Konstrukce, pp.12 Û 16, ročník 7, číslo 5/2008 (5 s). ISSN:1213-8762. (Citováno na s 117.)

[106] Valihrach, J.– Konečný, P. *Podmínka ukončení pravděpodobnostního výpočtu prováděného metodou Monte Carlo*. Sborník vědeckých prací VŠB-TUO, řada stavební, pp.157 - 164, ročník 10, číslo 1/2010 (8 s). ISSN: 1213-1962. (Citováno na s 110.)

[107] Vokoun, S. *Rozptyl geometrických parametrů otevřených válcovaných profilů*. Sborník studentských prací Vysoké školy báňské - Technické univerzity Ostrava, sekce IV - Stavební mechanika. VŠB-TU Ostrava, Stavební fakulta, 2002. (15 s). ISBN 80-248-0139-6. (Citováno na s 164, 184 a 212.)

[108] Vořechovská, D. – Podroužek, J. – Chromá, M. – Rovnaníková, P. – Teplý, B. *Modeling of Chloride Concentration Effect on Reinforcement Corrosion.* Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering, číslo 24, 2009. (Citováno na s 84.)

[109] Vořechovský, M. – Matesová, D. *Interplay of Size Effects in Concrete Specimen by Computational Stochastic Fracture Mechanics.* Engineering Mechanics, 2006, paper No. 102. ISBN 80-86246-27-2. (Citováno na s 39.)

Rejstřík

A

algoritmus
- genetický, 81
- metody POPV, 127, 128, 132, 136, 165, 185

analýza
- citlivostní, 38, 39, 75, 81, 169
- numerická, 146
- riziková, 81, 136, 188
- spolehlivostní, 75, 81
- statistická, 75, 81

Anthill, 71

aproximace
- funkce
  - spolehlivosti, 78
- hranice poruchy, 78, 80
- rozdělení pravděpodobnosti, 35, 36

aritmetický průměr, 109

axiom
- teorie pravděpodobnosti, 16

B

Bienawski, 195

Buffon de, Georges-Louis Leclerc Comte, 89

Buffonova jehla, 89

C

citlivost náhodné veličiny, 38, 169, 174

D

data
- prvotní, 151, 191

decil, 32

deformace

trvalá, 51, 117
délka
svorníku, 195, 196
Delphi, 142, 146, 148
důlní dílo, 191, 193, 199
dynamická knihovna, 138, 142, 145, 146, 200

E
efektivní hloubka pod povrchem, 191
energie
přetvárná, 188, 190

F
faktor
citlivosti, 39
Fermi, Enrico, 90
frekvence kmitání
přípustná, 51
vlastní tvar, 50
funkce
aproximační, 78
času, 66
distribuční, 22–25, 28, 32, 44, 56, 106, 120–122
inverzní, 63, 64, 106, 122
normovaného normálního rozdělení, 63, 64
frekvenční, 32, 54, 136
hustoty pravděpodobnosti, 54–56
kvadratická, 80
lineární, 78
náhodných jevů, 15
náhodných veličin, 37, 38
neklesající, 23, 25
normovaná, 15, 16
parametrického rozdělení, 136
poruchy, 53, 77, 78, 119, 120
pravděpodobnostní, 21–23, 25, 28, 30, 32, 41–43, 45, 46, 73
reálná, 20, 23, 24, 40
spolehlivosti, 51, 53, 58–60, 71, 72, 77, 78, 83, 112, 114, 115, 119, 146, 147, 166, 178, 179, 183, 187, 195, 198
tabulková
AVERAGEA, 154
DPOČET, 151
NORMSDIST, 64
NORMSINV, 64
SMODCH, 154

Obsah
274. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

váhová, 119, 120
fuzzy množina, 81

G
generátor
náhodných čísel
fyzikální, 90, 95
pseudonáhodných čísel, 88, 94, 95, 106
kongruenční, 95–98, 100–102
geomechanika, 188

H
histogram, 211
monotónní, 180
nemonotónní, 179, 181
sumární, 166, 188
useknutý, 113, 208, 222
hloubka
efektivní, 191
hmotnost
objemová
hornin, 191
hrací kostka, 14, 22, 92–94, 129–133, 136
hranice
poruchy, 119
hustota
pravděpodobnosti, 23–25, 29, 32, 55, 88

Ch
chování
pružné, 116
chyba
střední
kvadratická, 109

I
index
spolehlivosti, 57–59, 61–64, 78, 80, 236
Hasofer-Lind, 78
integrace
metodou
Monte Carlo, 99

J
jev
náhodný, 14, 15, 22, 41–44, 73, 88, 128, 129
nemožný, 14
neslučitelný, 15–18
nezávislý, 17

Obsah
275. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

K
kloub
plastický, 117
koeficient
determinace, 140, 157, 159, 160, 191
geomechanický klasifikační RMR, 195
korelace, 37, 122
korelační, 229
variační, 38, 39, 109, 110
kolaps konstrukce, 117
kombinace zatížení, 116, 138, 142, 165–171, 174–177, 186
kompozitní materiál, 81
kovariance, 37
kritérium
spolehlivosti, 10, 48, 112
křivka
hustoty pravděpodobnosti, 52, 54
trvání zatížení, 50, 113
kvantil, 32, 54, 140
decil, 32
kvartil, 32
medián, 32
náhodné veličiny, 32
padesátiprocentní, 32
percentil, 32
pětiprocentní, 32
kvartil, 32

L
Lehmer, Derrick Henry, 95
lomová mechanika, 81

M
matematická statistika, 11
matice
korelační, 82, 84, 122
medián, 32, 122
metoda
Adaptive Response Surface (ARS), 77, 82
Adaptive Sampling (AS), 76, 77
analytická, 78
aproximační, 76, 78, 79, 81
Axis Orthogonal Sampling (AOS), 76, 82
Design Point Sampling (DPS), 76, 82
dílčích součinitelů, 116
Direct Sampling, 76
Directional Sampling (DS), 76, 77, 82
FEM, 81

Obsah
276. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

stochastická, 80, 81
FORM, 76, 78–82
Importance Sampling, 120
Importance Sampling (IS), 76, 77, 82, 119
Latin Hypercube Sampling (LHS), 35, 76, 78, 82, 120–122, 233, 236, 238
Line Sampling (LS), 76
Monte Carlo, 11, 76, 77, 81, 82, 88–91, 99, 103, 104, 108, 109, 111, 112, 116, 119, 120, 127, 220, 222
PDPV, 127
perturbační techniky, 77
plochy odezvy, 77, 80
POPV, 11, 35, 56, 77, 80, 85, 127, 128, 132, 136, 138, 140, 148, 164, 165, 178, 188, 191, 200, 201, 206
Response Surface (RS), 77, 80, 82
SBRA, 35, 76, 111, 114, 116, 127, 220, 222
Simple Random Sampling, 91
simulační, 11, 76, 77, 82
  pokročilá, 76
  stratifikovaná, 76, 78, 120
  zdokonalené, 77, 119
  simulovaného žíhání, 84, 122
  SORM, 76, 78–82
  statistických pokusů, 91
  Stratified Sampling (SS), 76, 77, 82
  výběru vhodného rozdělení pravděpodobnosti, 76
metods
  POPV, 210
Metropolis, Nicholas, 91
mez
  kluzu, 45, 46, 51, 116, 150, 184
mezní
  stav, 206, 220, 229
mezní stav, 57
  použitelnosti, 50, 51, 57, 183
  únosnosti, 50, 51, 57
míra
  asymetrie, 27
  pravděpodobnosti, 16
  strmosti, 27
Misesova podmínka plasticity, 245
množina
  fuzzy, 81
  náhodných jevů, 14
mocnost

vrstvy, 191
modul
průřezu, 184, 186
modus, 32
moment
statistický, 25, 37, 75, 160
montážní imperfekce, 179

N
náhodná
permutace, 121
veličina, 20, 21, 25–30, 32, 33, 35, 37–39, 41–46, 71–73, 88, 95, 106, 119, 120, 122, 128, 138, 154, 164, 165, 184–187, 191, 201
čistě diskrétní, 35, 132, 135
diskrétní, 21–25, 32, 35, 37, 132, 134, 136
nezávislá, 37
reálná, 29, 33
rovnoměrně rozdělená, 106
spojitá, 23–26, 28–30, 32–34, 37, 121, 154
náhodné
pole, 39, 80
náhodně
proměnná, 206
náhodný
experiment, 13–15, 20, 91, 109, 129
jev, 14–16, 88, 108, 128, 129
vektor, 38, 78
výběr, 106
návrhová
pravděpodobnost, 57, 64–66, 112, 199, 200
životnost konstrukce, 64–66
referenční, 66
návrhový
bod, 63, 78, 80, 119
Neumann von, John, 91
nezávislost
statistická, 55
vstupních veličin, 164, 200
numerická analýza, 146

O
oblast
bezpečná, 114
poruchy, 114
obor
definiční, 29, 30, 33, 34, 120, 121

Obsah
278. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

odolnost konstrukce, 51–56, 58, 59, 114, 115, 183, 187
odpor
  podpěrné výztuže, 191
optimalizace pravděpodobnostního výpočtu, 128, 165, 166, 168, 169, 174, 184, 186, 187, 201
  grupování, 184
    vstupních veličin, 165, 166, 168, 186, 188
    výstupních veličin, 166, 183, 186, 187
  intervalová, 146, 165, 169–172, 177, 184, 188
  paralelizace výpočtu, 148, 166, 187
  trendová, 146, 165, 179, 182, 183
  zónová, 146, 165, 173–176, 178, 179, 188

P

paralelizace pravděpodobnostního výpočtu, 148, 166, 187, 188
percentil, 32
permutace, 121
pevnost
  redukovaná, 191, 194
  svorníku, 191
  v jednoosém tlaku, 191
počáteční imperfekce, 169
podmínka
  spolehlivosti, 52, 53, 56, 57, 199
posudek
  použitelnosti, 206
  únosnosti, 206, 220, 229
posudek spolehlivosti, 10, 48, 50–52, 108, 146, 164, 188
  konstrukce
    namáhané střídavě vzpěrným tlakem a tahem, 116
  kotevní výztuže, 191, 199
  lomeného nosníku, 229
  ohýbaného nosníku, 220, 240
  parabolického oblouku, 244
  rámu, 116
  roštu, 116, 244
  rovinné napjatosti ve stojině, 245
  sloupu, 241
    podle teorie II.řádu, 241
    prostorově namáhaného sloupu, 241
  staticky neurčitého rámu, 244
  táhla, 206

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
Obsah
279. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

použitelnost konstrukce, 117
pravděpodobnost, 15–18, 21, 24, 30, 32, 108, 120
  bezporuchového stavu, 54
  náhodného jevu, 16–18
  návrhová, 57, 64–66, 112, 199, 200, 212, 214, 226, 236
  podmíněná , 17, 18
  poruchy, 11, 16, 53, 56, 57, 63, 66, 77, 78, 80, 83, 108–110, 112, 114, 119, 120, 128, 146, 148, 165, 169, 171, 173, 174, 179, 181, 183, 187, 195, 198, 200, 212, 222, 236
pravděpodobnostní
  návrh
    kotevní výztuže, 191, 199
  výpočet
    přetvárné energie, 188, 190
ProbCalc, 72
program
  ANSYS, 82
  Anthill, 82, 114, 115, 149, 222
  Atena, 84
  Comrel, 81
  Cossan, 81
  Freet, 26, 30, 35, 82–84, 122, 149, 229, 233, 236
  HistAn, 85, 140, 141, 151, 153, 154, 157, 163
  HistOp, 85, 132, 142, 143, 157
  Kotvení, 191, 192, 199, 201
  matlab, 85
  MCD, 116
  Monte, 85, 114
  Nessus, 82
  Phimeca, 81
  Proban, 81, 85
  ProbCalc, 85, 128, 132, 140, 142, 144–149, 151, 154, 157, 160, 164–167, 169–174, 177, 184, 187, 188, 201
  ProbCalcDV, 187, 189
  Sara, 84
  SLang, 82
  Strurel, 81
  Sysrel, 81
  tabulkový procesor Excel, 64, 94, 95, 151, 152, 154
  uFEM, 85, 116
  VaV, 82
prohlídka konstrukce, 188

Obsah
280. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

prostor
normalizovaný, 119
základní, 14–16, 129
průhyb nosníku
trvalý
přípustný, 116
pružné chování, 116
prvotní data, 151, 191
přesnost
odhadu, 109
výpočtu, 91, 103, 109, 138, 165, 169, 171
přetvoření
poměrné
přípustné, 116
pružno-plastické, 116
tolerovatelné, 116

R

referenční doba, 57
rezerva spolehlivosti, 53, 55, 56, 76, 174, 182, 183
riziková analýza, 81, 136, 188
rozdělení
rovnoměrné, 120
rozdělení pravděpodobnosti, 25, 33–35, 106
čistě diskrétní, 36
diskrétní, 35, 36
dvojparametrické, 28
empirické, 29, 30, 37, 112
neparametrické, 29, 30, 112, 148, 150, 152, 153, 157, 191
omezené, 36
originální, 35, 36
parametrické, 28, 29, 33, 37, 151, 154, 155, 157, 160–162, 191, 231
χ^2, 29, 154
Beta, 29, 154
Cauchyho, 154
Exponenciální, 154
Fisher-Tippettovo, 154
Gamma, 29, 154
Gaussovo, 28
Gumbelovo, 29, 154
Laplaceovo, 154
lognormální, 26, 29, 154
normální, 28, 29, 33, 55, 58, 154, 156, 160, 163
normované normální, 29

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

Obsah
281. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Pearsonovo, 29
Raised-cosine, 154
Rayleighovo, 154
Studentovo, 29, 154
Weibullovo, 29, 154
po částech rovnoměrné, 35, 36
rovnoměrné, 106
spojité, 106
teoretické, 29
tříparametrické, 29
rozměr únavové trhliny
přípustný, 188
rozptyl, 26, 38, 75, 157, 160

S
simulace, 106, 108–110, 117, 119–122
směrodatná odchylka, 26–28, 39, 104
součinitel
konvergenční, 191
separační, 59
variační, 39
vlivu kotvení výztuže na snížení konvergence, 191
vrstevnatosti, 191
střední hodnota, 25–28, 37–39, 75, 119, 122

Š
šikmost, 27
šířka
důlního díla, 191, 193
špičatost, 27

T
tabulka
náhodných permutací, 122
tažnost, 51
teorie
1. řádu, 51
2. řádu, 51, 169
chaosu, 81
množin, 90
pravděpodobnosti, 11, 13, 14, 16, 81, 128
spolehlivosti, 11, 78
trída spolehlivosti, 58
třída spolehlivosti, 64, 199

Ú
účinek zatížení, 50–56, 59, 114, 115, 170, 175–177, 179, 183, 187
Ulam, Stanisław Marcin, 90
únavová trhlina

z okraje , 188
z povrchu, 188
únosnost
plastická, 51
svorníku, 195, 197
úroveň
referenční, 116–118
spolehlivosti, 57, 191

V
věta
Bayesova, 18
o úplné pravděpodobnosti, 17, 18
větrná růžice, 166
vztah
transformační, 208, 221, 229

Z
zatížení
proměnná, 113
svorníku, 195, 196
větrem, 174, 179
zemětřesením, 174
závislost
statistická, 37, 38, 82, 84, 122, 164, 200

Ž
životnost konstrukce, 57, 65
návrhová, 64–66
referenční, 66

Obsah
283. strana ze 283
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno