Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava
Západočeská univerzita v Plzni

Vybrané kapitoly z pravděpodobnosti (interaktivní učební text) - Řešené příklady

Martina Litschmannová

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

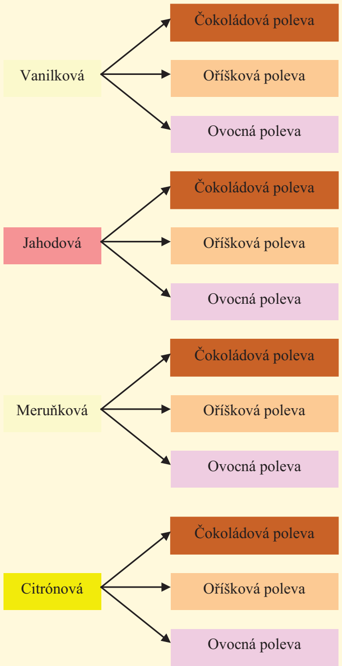
Obsah

Kapitola 1

Kombinatorika - řešené příklady

Příklad 1.1. U stánku nabízejí čtyři druhy zmrzliny a tři polevy. Kolik různých zmrzlin s polevou lze vytvořit, jestliže nechceme míchat více druhů zmrzliny ani více polev?

Řešení. Následující diagram zobrazuje všechny možnosti výběru:



Ke každému ze čtyř druhů zmrzliny můžeme přidat jednu ze tří polev, celkem je proto možné vytvořit $4 \cdot 3 = 12$ různých zmrzlin s polevou.

▲

Příklad 1.2. V první fotbalové lize je 16 mužstev. Kolika způsoby mohou být na konci soutěže obsazeny stupně vítězů?

Řešení. Vybíráme trojici mužstev, která obsadí stupně vítězů. Na pořadí v této trojici samozřejmě záleží.

$$V(16,3) = \frac{16!}{(16-3)!} = 16 \cdot 15 \cdot 14 = 3360$$

Stupně vítězů mohou být obsazeny 3 360 způsoby.

▲

Příklad 1.3. Předsednictvo zastupitelstva města Bopamar je složeno z 5 osob – předsedy, 1. místopředsedy, 2. místopředsedy, ekonoma a řadového člena. Předpokládejme, že předsednictvo je už zvoleno a je pouze třeba rozdělit si funkce. Kolik je možností, jak si funkce rozdělit?

Řešení. Je zřejmé, že jde o permutace (přesmyčky) 5 členné množiny.

$$P(5) = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Předsednictvo si tedy může rozdělit funkce 120 způsoby.

▲

Příklad 1.4. Určete kolik je možností jak sestavit 6 místné telefonní číslo.

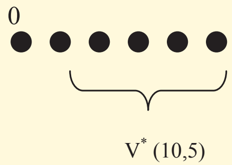
Řešení. V tomto případě si zvolíme množinu M, $M = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Potřebujeme obsadit 6 míst.

Je zřejmé, že existuje celkem

$$V^*(10, 6) = 10^6$$

možností jak uspořádat 10 číslic do šestice.

V tuto chvíli si musíme uvědomit, že telefonní číslo nemůže začínat „0“, proto musíme tyto možnosti od celkového počtu odečíst.



$$V^*(10, 5) = 10^5$$

Mezi všemi 6 místnými čísly je 10^5 čísel začínajících „0“. Existuje tedy 900000 $(10^6 - 10^5)$ možností jak vytvořit 6 místné telefonní číslo.

▲

Příklad 1.5. Na plakátovací plochu o kapacitě 10 míst se mají vylepit reklamní plakáty 4 společností. Společnost ARMA si předplatila 3 plakáty, společnost BRUNO 2 plakáty, společnost CEKO 1 plakát a společnost DINA 4 plakáty. Určete, kolika různými způsoby lze plochu pokrýt.

Řešení. Předpokládáme-li, že každá společnost dodala pouze jediný druh plakátu, pak jednotlivé varianty polepení tvoří permutace s opakováním.

$$P^*(3,2,1,4) = \frac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 4!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 2} = 12600$$

Plakátovací plochu lze polepit 12 600 různými způsoby.

▲

Příklad 1.6. Ve čtvrtém ročníku ZŠ studuje 30 chlapců a 50 děvčat. Pro reprezentaci ročníku v lehké atletice je třeba sestavit smíšené 10 členné družstvo (5 chlapců, 5 dívek). Kolik je možností jak takovéto družstvo sestavit?

Řešení. Pro výpočet použijeme kombinatorické pravidlo o součinu: Celkový počet možností jak sestavit družstvo (n) je dán součinem počtu možností jak vybrat 5 chlapců ze 30 (ch) a 5 dívek z 50 (d).

Počet možností jak vybrat 5 chlapců ze 30 je zřejmě

$$ch = C(30,5) = \binom{30}{5} = \frac{30!}{(30-5)! \cdot 5!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 142506.$$

Počet možností jak vybrat 5 dívek z 50 je

$$d = C(50,5) = \binom{50}{5} = \frac{50!}{(50-5)! \cdot 5!} = \frac{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 2118760.$$

A celkový počet možností jak sestavit družstvo je tedy

$$n = ch \cdot d = 142506 \cdot 2118760 = 301936012560, \text{tj. téměř 302 miliard.}$$

▲

Příklad 1.7. Z dvacetičlenného zastupitelstva (8 z ODS, 6 z ČSSD, 4 z KDU-ČSL, 2 ze SZ) se musí zvolit pětičlenné předsednictvo (předseda, místopředseda, 3 členové). Kolika různými způsoby lze předsednictvo sestavit:

(a) nejsou-li na výběr funkcí žádná další omezení

(b) je-li stanoveno, že předseda a místopředseda musí být ze dvou nejsilnějších stran

Řešení.

(a) Nejsou-li stanovena žádná omezení pro výběr předsednictva, je 380 $(= V(2,20) = 20 \cdot 19)$ možností jak vybrat předsedu a místopředsedu. Zbylá tři místa v předsednictvu mohou obsadit libovolní tři lidé ze zbývajících osmnácti. Takových možností je

$$C(18,3) = \binom{18}{3} = \frac{18!}{(18-3)! \cdot 3!} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16}{6} = 816.$$

Uplatníme-li kombinatorické pravidlo součinu, zjistíme, že celkový počet možností, jak sestavit předsednictvo, je 310 080 $(= 380 \cdot 816)$.

(b) Nyní je stanoveno, že předseda a místopředseda musí být ze dvou nejsilnějších stran (není řečeno, že předseda musí být z nejsilnější strany). Možností jak zvolit předsedu a místopředsedu je tedy:

$$8 \cdot 6 + 6 \cdot 8$$

Počet možností, jak zvolit předsedu z ODS a zároveň místopředsedupředsedu z ČSSD

Počet možností, jak zvolit předsedu z ODS a zároveň místopředsedupředsedu z ČSSD

Zbylá tři místa v předsednictvu mohou obsadit libovolní tři lidé ze zbývajících osmnácti (bez ohledu na stranickou příslušnost). Takových možností je 816, jak bylo určeno v bodě a).

Uplatníme-li kombinatorické pravidlo součinu, zjistíme, že celkový počet možností, jak v případu takových požadavků sestavit předsednictvo, je 78 336 $(= 96 \cdot 816)$.

▲

Příklad 1.8. Kvalita výrobku se rozlišuje třemi stupni jakosti: A, B, C.

(a) Určete, kolik různých výsledků může mít výstupní kontrola výroby, testuje-li se kvalita 10 náhodně vybraných vzorků.

(b) Kolik různých výsledků nebude obsahovat ani jeden výrobek kvality C?

Řešení.

(a) Testovaný vzorek je 10 prvková skupina složená z výrobků až tří typů jakosti. Počet různých výsledků kontroly je tedy dán vztahem

$$C^*(3,10) = \binom{3+10-1}{10} = \frac{12!}{(3-1)! \cdot 10!} = 66.$$

Existuje 66 různých výsledků kontroly kvality 10 výrobků.

(b) Chceme-li zjistit, kolik výběrů 10-ti výrobků neobsahuje výrobek kvality C, musíme omezit počet povolených tříd ve vzorku na 2 (A, B).

$$C^*(2,10) = \binom{2+10-1}{10} = \frac{11!}{(2-1)! \cdot 10!} = 11.$$

V 11 různých výsledcích kontroly kvality nenajdeme výrobek kvality C.

▲

Kapitola 2

Úvod do teorie pravděpodobnosti - řešené příklady

Příklad 2.1. Náhodný pokus spočívá v jednom hodu klasickou hrací kostkou se stěnami očíslovanými od 1 do 6. Náhodný jev A nastane, jestliže padne liché číslo a náhodný jev B nastane, jestliže padne číslo menší než 4. Určete $\Omega, \mathbb{A}, \bar{A}, \bar{B}$,
$A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A$.

Řešení. Rozumné bude za základní prostor zvolit šestiprvkovou množinu . Její prvky jsou elementární jevy $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$. Jevy A a B jsou podmnožinami základního prostoru Ω.

Příslušné jevové pole $\mathbb{A}$ je množinou všech podmnožin základního prostoru.

$\mathbb{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{1,2\}, \{1,5\}, \ldots, \{5,6\}, \ldots, \{2,3,4,5,6\}, \Omega\}$

$A = \{1, 3, 5\}$...padne liché číslo,
$B = \{1, 2, 3\}$...padne číslo menší než 4.

Nyní můžeme určit hledané jevy.

$\bar{A} = \Omega - A = \{2, 4, 6\}$...padne sudé číslo,
$\bar{B} = \Omega - B = \{4, 5, 6\}$...padne číslo větší než 3,
$A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$...padne liché číslo nebo 2,
$A \cap B = \{1, 3\}$...padne 1 nebo 3,
$A \setminus B = \{5\}$...padne 5,
$B \setminus A = \{2\}$...padne 2.

Příklad 2.2. Ve třídě 20 chlapců a 12 dívek jsou losem určeni 2 mluvčí. Jaká je pravděpodobnost, že oba mluvčí budou různého pohlaví?

Řešení. Protože výběr mluvčích je prováděn losem, má každý z žáků třídy stejnou šanci stát se mluvčím. Pro výpočet hledané pravděpodobnosti proto použijeme klasickou definici pravděpodobnosti.

Počet možných výsledků pokusu je dán počtem různých dvojic z 32 žáků $(20 + 12)$ a lze jej vyjádřit kombinačním číslem C(2, 32). Počet příznivých výsledků je 240 $(20 \cdot 12)$. Hledaná pravděpodobnost je tedy dána podílem

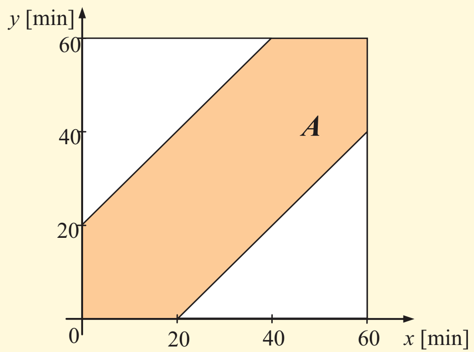
$$P(A) = \frac{240}{C(2,32)} = \frac{240}{\binom{32}{2}} = \frac{240}{\frac{32!}{(32-2)! \cdot 2!}} \doteq 0,484$$

Pravděpodobnost zkoumaného jevu je přibližně 0,484.

▲

Příklad 2.3. Petr a Tereza, zapřisáhlí odpůrci mobilních telefonů, se domluví, že se sejdou na určitém místě mezi 15. a 16. hodinou, přičemž doba čekání je 20 minut. Jaká je pravděpodobnost, že se po této dohodě setkají?

Řešení. Každý teoretický okamžik setkání Petra a Terezy má stejnou šanci, počet všech možných okamžiků setkání je nespočetný, proto použijeme pro výpočet geometrickou definici pravděpodobnosti.



Obr. 2.1: Vymezení doby setkání Petra a Terezy

$x[min]$ ... doba po 15. hodině v níž přijde Tereza, $x \in \langle 0, 60 \rangle$

$y[min]$ ... doba po 15. hodině v níž přijde Petr, $y \in \langle 0, 60 \rangle$

Nechť čas příchodu Terezy určuje souřadnici x a čas příchodu Petra určuje souřadnici y ve čtverci (Obr. 2.1). Všechny možné okamžiky příchodů Petra a Terezy jsou vymezeny plochou čtverce.

$|\Omega| = 60.60 = 3600$ Oblast A vymezená čtvercem a řešením nerovnice obsahuje okamžiky, v nichž se Petr s Terezou skutečně setkají.

$|A| = 3600$ - $40.40 = 2000$

Hledaná pravděpodobnost je dána podílem

$$P(A) = \frac{2000}{3600} = \frac{5}{9} = 0,56.$$

Pravděpodobnost setkání Petra a Terezy je 0,56.

▲

Příklad 2.4. Jaká je pravděpodobnost, že na poctivé hrací kostce padne dvakrát po sobě jednička?

Řešení. Definujme si jevy A, B takto:

A – „padne jednička v prvním hodu“
B – „padne jednička ve druhém hodu“

Jestliže v prvním hodu padne jednička, nijak to neovlivní pravděpodobnost, že jednička padne také ve druhém hodu. Jevy A, B jsou nezávislé, proto je pravděpodobnost, že v obou hodech padnou jedničky, součinem jednotlivých pravděpodobností.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \doteq 0,028$$

Pravděpodobnost, že při dvou hodech kostkou padnou dvě jedničky, je přibližně 2,00 %.

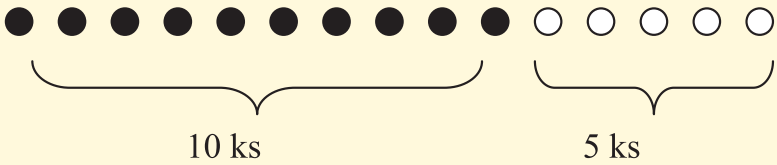
▲

Příklad 2.5. Neprůhledný pytlík obsahuje 10 černých a 5 bílých kuliček. Budeme provádět náhodný pokus – vytažení jedné kuličky, přičemž kuličku do pytlíku nevracíme. Určete pravděpodobnost, že v druhém tahu vytáhneme bílou kuličku.

Řešení.

Jev	**Definice jevu**
B1	při první realizaci náh. pokusu byla vytažena bílá kulička
C1	při první realizaci náh. pokusu byla vytažena černá kulička
B2	při druhé realizaci náh. pokusu byla vytažena bílá kulička
C2	při druhé realizaci náh. pokusu byla vytažena černá kulička

Stav pytlíku před první realizací pokusu:



Pravděpodobnost, že při první realizaci pokusu vytáhnu bílou (resp. černou) kuličku, je zřejmě

$$P(B1) = \frac{5}{15}, \text{resp. } P(C1) = \frac{10}{15}$$

Je taktéž zřejmé, že stav pytlíku před druhou realizací pokusu závisí na výsledku první realizace.

Stav pytlíku před druhou realizací pokusu, byla-li při prvním pokusu vytažena bílá kulička:

$$\underbrace{\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet}_{10\text{ ks}}\;\underbrace{\circ\,\circ\,\circ\,\circ}_{4\text{ ks}}$$

Stav pytlíku před druhou realizací pokusu, byla-li při prvním pokusu vytažena černá kulička:

$$\underbrace{\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet}_{9\text{ ks}}\;\underbrace{\circ\,\circ\,\circ\,\circ\,\circ}_{5\text{ ks}}$$

Z obrázku vidíme a z logického úsudku plyne, že výsledek druhé realizace pokusu **závisí** na výsledku první realizace pokusu, jinými slovy: výsledek druhé realizace pokusu **je podmíněn** výsledkem první realizace pokusu.

Můžeme tedy určit pravděpodobnosti následujících jevů.

Obsah
22. strana ze 102
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Jev	Definice jevu
B2|B1	při druhé realizaci náh. pokusu byla vytažena bílá kulička, jestliže při první realizaci náh. pokusu byla vytažena bílá kulička
C2|B1	při druhé realizaci náh. pokusu byla vytažena černá kulička, jestliže při první realizaci náh. pokusu byla vytažena bílá kulička
B2|C1	při druhé realizaci náh. pokusu byla vytažena bílá kulička, jestliže při první realizaci náh. pokusu byla vytažena černá kulička
C2|C1	při druhé realizaci náh. pokusu byla vytažena černá kulička, jestliže při první realizaci náh. pokusu byla vytažena černá kulička

Na základě obrázků odpovídajících stavu pytlíku před druhou realizací pokusu při splnění příslušných podmínek (za svislou čarou) můžeme určit:

$$P(B2|B1) = \frac{4}{14}, \quad P(C2|B1) = \frac{10}{14}, \quad P(B2|C1) = \frac{5}{14}, \quad P(C2|C1) = \frac{9}{14}$$

Pozn.: *Všimněte si, že* $P(A|B) = 1 - P(\bar{A}|B)$.

Chceme-li tedy určit například pravděpodobnost toho, že při druhé realizací náhodného pokusu vytáhneme bílou kuličku, musíme vzít v úvahu, že k tomuto jevu může dojít ve dvou případech:

$(B2 \cap B1)$ nebo $(B2 \cap C1)$

Proto platí: $P(B2) = P((B2 \cap B1) \cup (B2 \cap C1))$

Jelikož jevy $(B2 \cap B1)$ a $(B2 \cap C1)$ jsou neslučitelné (nemohou nastat zároveň), platí $P(B2) = P(B2 \cap B1) + P(B2 \cap C1)$,

$$P(B2) = P(B2|B1) \cdot P(B1) + P(B2|C1) \cdot P(C1) = \frac{4}{14} \cdot \frac{5}{15} + \frac{5}{14} \cdot \frac{10}{15} = \frac{14}{42} = \frac{1}{3}.$$

Pravděpodobnost, že ve druhém tahu vytáhneme bílou kuličku je přibližně 33 %.

▲

Příklad 2.6. Pravděpodobnost, že selže hasicí systém továrny je 20 %, pravděpodobnost, že selže poplachové zařízení je 10 % a pravděpodobnost, že selžou jak hasící systém, tak i poplachové zařízení jsou 4 %. Jaká je pravděpodobnost, že

a) alespoň jeden systém bude fungovat,
b) budou fungovat oba dva systémy.

Řešení. Označme si možné jevy takto:

H ... hasící systém funguje
S ... poplachové zařízení (siréna) funguje

Víme, že:

$$P(\bar{H}) = 0,20$$
$$P(\bar{S}) = 0,10$$
$$P(\bar{H} \cap \bar{S}) = 0,04$$

Máme zjistit:

ada) $P(H \cup S)$

K řešení této otázky můžeme přistupovat dvojím způsobem.

Podle definice: Nejde o jevy neslučitelné (mohou nastat zároveň), proto

$$P(H \cup S) = P(H) + P(S) - P(H \cap S),$$

což můžeme vyčíslit přímo.

$P(H \cup S) = 1 - 0,04 = 0,96$

Pravděpodobnost, že bude fungovat alespoň jeden z ochranných systémů je 96 %.

adb) $P(H \cap S)$

Tuto pravděpodobnost nelze určit přímo ze vztahu

$P(H \cap S) = P(H|S) \cdot P(S) = P(S|H) \cdot P(H),$

neboť nemáme informace o závislosti poruch jednotlivých ochranných systémů.
Proto zkusíme znovu postupovat **přes jev opačný**.

$$P(H \cap S) = 1 - P(\overline{H \cap S}) = 1 - P(\bar{H} \cup \bar{S}) = 1 - \left[P(\bar{H}) + P(\bar{S}) - P(\bar{H} \cap \bar{S})\right],$$

$$P(H \cap S) = 1 - \left[P(\bar{H}) + P(\bar{S}) - P(\bar{H} \cap \bar{S})\right] = 1 - [0,20 + 0,10 - 0,04] = 0,74$$

Pravděpodobnost, že oba dva ochranné systémy budou fungovat je 74 %.

▲

Příklad 2.7. 120 studentů absolvovalo zkoušky z matematiky a z fyziky. 30 z nich nesložilo obě zkoušky, 8 nesložilo pouze zkoušku z matematiky a 5 nesložilo pouze zkoušku z fyziky. Určete pravděpodobnost, že náhodně vybraný student

a) složil zkoušku z matematiky, víme-li, že nesložil zkoušku z fyziky,
b) složil zkoušku z fyziky, víme-li, že nesložil zkoušku z matematiky,
c) složil zkoušku z matematiky, víme-li, že složil zkoušku z fyziky.

Řešení. Označme si možné jevy takto:
M ... student složil zkoušku z matematiky
F ... student složil zkoušku z fyziky

Víme, že:

$$P(\bar{M} \cap \bar{F}) = \frac{30}{120},$$
$$P(\bar{M} \cap F) = \frac{8}{120},$$
$$P(M \cap \bar{F}) = \frac{5}{120}.$$

Máme zjistit:

ada) $P(M|\bar{F})$

což určíme jednoduše podle definice podmíněné pravděpodobnosti

$$P(M|\bar{F}) = \frac{P(M \cap \bar{F})}{P(\bar{F})} = \frac{P(M \cap \bar{F})}{P(M \cap \bar{F}) + P(\bar{M} \cap \bar{F})}$$

kde pravděpodobnost, že student nesložil zkoušku z fyziky, určujeme jako součet pravděpodobnosti, že student nesložil pouze zkoušku z fyziky a pravděpodobnosti, že student nesložil obě zkoušky.

Po vyčíslení tedy víme, že:

$$P(M|\bar{F}) = \frac{P(M \cap \bar{F})}{P(M \cap \bar{F}) + P(\bar{M} \cap \bar{F})} = \frac{\frac{5}{120}}{\frac{5}{120} + \frac{30}{120}} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7} \doteq 0,14$$

Pravděpodobnost, že student složil zkoušku z matematiky, víme-li že nesložil zkoušku z fyziky je asi 14 %.

adb) $P(F|\bar{M})$

což určíme obdobně jako při řešení předcházející úlohy.

$$P(F|\bar{M}) = \frac{P(F \cap \bar{M})}{P(\bar{M})} = \frac{P(F \cap \bar{M})}{P(F \cap \bar{M}) + P(\bar{F} \cap \bar{M})},$$

Po vyčíslení tedy víme, že:

$$P(F|\bar{M}) = \frac{P(F \cap \bar{M})}{P(F \cap \bar{M}) + P(\bar{F} \cap \bar{M})} = \frac{\frac{8}{120}}{\frac{8}{120} + \frac{30}{120}} = \frac{8}{38} = \frac{4}{19} \doteq 0,21$$

Pravděpodobnost, že student složil zkoušku z fyziky, víme-li že nesložil zkoušku z matematiky, je přibližně 21 %.

adc) $P(M|F)$

Opět si napíšeme definiční vztah

$$P(M|F) = \frac{P(M\cap F)}{P(F)},$$

k němuž můžeme přistoupit dvojím způsobem. Buď se pokusíme tento **vztah upravit** na základě známých vztahů tak, abychom jej mohli prostřednictvím zadaných parametrů vyčíslit

$$P(M|F) = \frac{P(M\cap F)}{P(F)} = \frac{1-P(\overline{M\cap F})}{1-P(\bar{F})} = \frac{1-P(\bar{M}\cup\bar{F})}{1-\left[P(\bar{F}\cap M)+P(\bar{F}\cap\bar{M})\right]} =$$

$$= \frac{1-\left[P(\bar{F})+P(\bar{M})+P(\bar{F}\cap\bar{M})\right]}{1-\left[P(\bar{F}\cap M)+P(\bar{F}\cap\bar{M})\right]} =$$

$$= \frac{1-\left[\left[P(\bar{F}\cap M)+P(\bar{F}\cap\bar{M})\right]+\left[P(F\cap\bar{M})+P(\bar{F}\cap\bar{M})\right]-P(\bar{F}\cap\bar{M})\right]}{1-\left[P(\bar{F}\cap M)+P(\bar{F}\cap\bar{M})\right]} =$$

$$= \frac{1-\left[P(\bar{F}\cap M)+P(F\cap\bar{M})+P(\bar{F}\cap\bar{M})\right]}{1-\left[P(\bar{F}\cap M)+P(\bar{F}\cap\bar{M})\right]} = \frac{1-\left[\frac{5}{120}+\frac{8}{120}+\frac{30}{120}\right]}{1-\left[\frac{5}{120}+\frac{30}{120}\right]} = \frac{\frac{77}{120}}{\frac{85}{120}} = \frac{77}{58} \doteq$$

$$\doteq 0,91$$

Obsah
29. strana ze 102
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

nebo se pokusíme **potřebné pravděpodobnosti vyčíst přímo ze zadání**.

Zadané údaje si zapíšeme do tabulky:

	Složili zkoušku z matematiky	**Nesložili zkoušku z matematiky**	**Celkem**
Složili zkoušku z fyziky		8	
Nesložili zkoušku z fyziky	5	30	35
Celkem		38	**120**

a chybějící údaje v tabulce jednoduše dopočítáme.

Kolik studentů složilo zkoušku z fyziky? To je celkový počet (120) mínus počet studentů, kteří zkoušku z fyziky nesložili (35), což je 85. Obdobně určíme počet studentů, kteří složili zkoušku z matematiky, což je 120˘38 = 82. A konečně počet těch, kteří složili obě zkoušky určíme např. jako počet těch, kteří složili zkoušku z matematiky (82) mínus počet těch, kteří složili pouze zkoušku z matematiky (5), což je 77.

	Složili zkoušku z matematiky	**Nesložili zkoušku z matematiky**	**Celkem**
Složili zkoušku z fyziky	77	8	85
Nesložili zkoušku z fyziky	5	30	35
Celkem	82	38	**120**

Hledané pravděpodnosti jsou

$$P(M \cap F) = \frac{77}{120}; \qquad P(F) = \frac{85}{120}$$

z čehož plyne

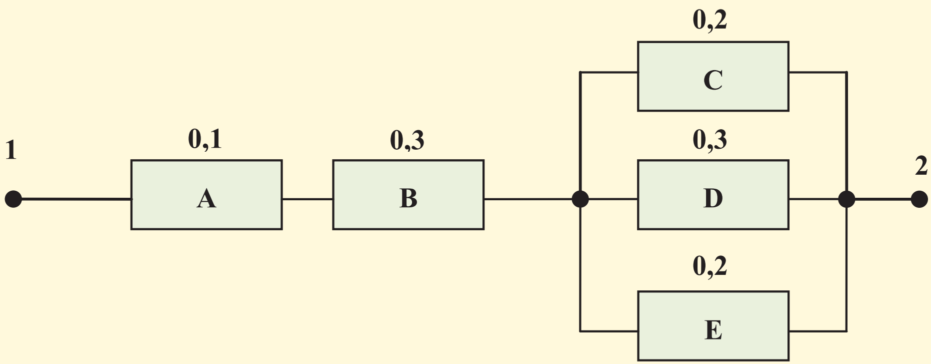
$$P(M|F) = \frac{P(M \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{77}{120}}{\frac{85}{120}} = \frac{77}{85} \doteq 0,91.$$

Pravděpodobnost, že student složil zkoušku z matematiky, víme-li že složil zkoušku z fyziky, je přibližně 91 %.

Pozn.: Podle údajů v tabulce bychom mohli snadno řešit i úkoly a) a b).

▲

Příklad 2.8. Spočtěte pravděpodobnost toho, že části obvodu mezi body 1 a 2 bude protékat elektrický proud, je-li příslušná část elektrického obvodu včetně pravděpodobnosti poruch jednotlivých součástek vyznačena na následujícím obrázku. Poruchy jednotlivých součástek jsou na sobě nezávislé. (Dojde-li k poruše součástky, dojde k přerušení obvodu.)



Řešení. Označme si:

A	...	součástka A funguje,	C	...	součástka C funguje,
B	...	součástka B funguje,	D	...	součástka D funguje,
			E	...	součástka E funguje

Pak:

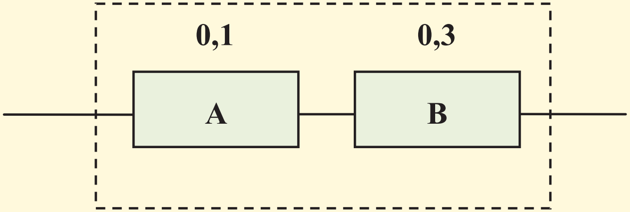
$$P(\bar{A}) = 0,1 \Rightarrow P(A) = 0,9 \qquad P(\bar{C}) = 0,2 \Rightarrow P(C) = 0,8$$
$$P(\bar{B}) = 0,1 \Rightarrow P(B) = 0,7 \qquad P(\bar{D}) = 0,3 \Rightarrow P(D) = 0,7$$
$$P(\bar{E}) = 0,2 \Rightarrow P(E) = 0,8$$

Pro zjednodušení si obvod představíme jako sériové zapojení dvou bloků. Blok 1 je tvořen sériovým zapojením součástek A a B, Blok 2 je tvořen paralelním zapojením součástek C, D a E. V první fázi si určíme pravděpodobnosti poruch jednotlivých bloků.

Blok 1

$B1$ ... Blok 1 funguje

Blok 1 funguje právě tehdy, jsou-li funkční součástky A i B.



Blok 1

Máme–li **sériově zapojené součástky**, je vhodné určovat přímo pravděpodobnost, že systém (blok) funguje. Vzhledem k nezávislosti poruch jednotlivých součástek můžeme říci, že

$$P(B1) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0,9 \cdot 0,7 = 0,63.$$

Obsah
33. strana ze 102
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

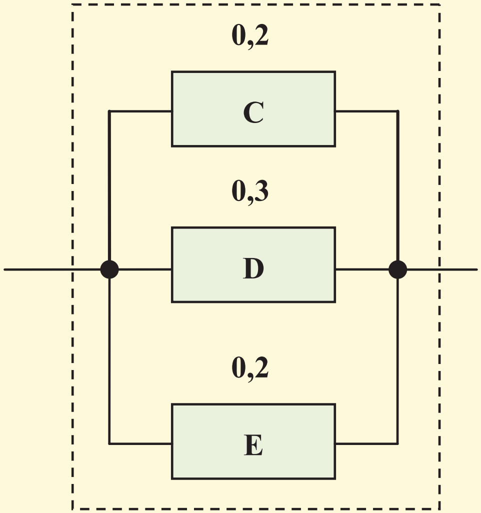
Blok 2

$B2$ ... Blok 2 funguje

Blok 2 nefunguje právě tehdy, není-li funkční ani jedna ze součástek C, D, E.

Máme–li **paralelně zapojené součástky**, je vhodné pravděpodobnost toho, že systém (blok) funguje určovat z pravděpodobnosti, že systém (blok) nefunguje.

Vzhledem k nezávislosti poruch jednotlivých součástek můžeme říci, že



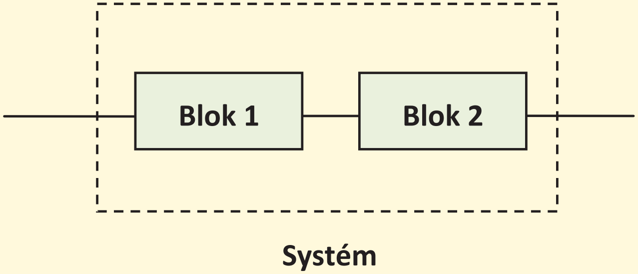
Blok 2

$P(\bar{B}2) = P(\bar{C} \cap \bar{D} \cap \bar{E}) = P(\bar{C}) \cdot P(\bar{D}) \cdot P(\bar{E}) = 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,2 = 0,012,$
$P(B2) = 1 - P(\bar{B}2) = 1 - 0,012 = 0,988.$

Celý systém je při tomto značení dán sériovým zapojením Bloku 1 a Bloku 2. Zbývá nám již určit jen spolehlivost celého systému (pravděpodobnost, že systém bude funkční).

Obsah
34. strana ze 102
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

S ... systém je funkční



$P(S) = P(B1 \cap B2) = P(B1) \cdot P(B2) = 0,63 \cdot 0,988 \doteq 0,62$

Pravděpodobnost toho, že části obvodu mezi body 1 a 2 bude protékat elektrický proud, je přibližně 62 %.

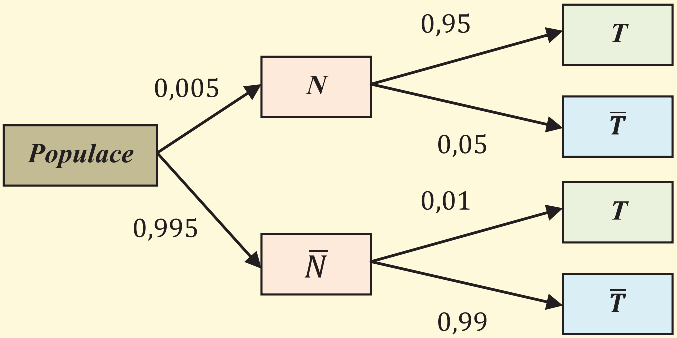
▲

Příklad 2.9. Laboratoř, která provádí rozbory krve, potvrdí s pravděpodobností 95 % existencí protilátek na virus určité nemoci, jestliže jí pacient skutečně trpí. Zároveň test určí jako pozitivní 1 % osob, které však touto nemocí netrpí. Jestliže 0,5 % populace trpí zmíněnou nemocí, jaká je pravděpodobnost, že určitá osoba, jejíž test byl pozitivní, skutečně onu nemoc má?

Řešení. Takovéto problémy směřují k řešení pomocí věty o úplné pravděpodobnosti, popř. pomocí Bayesovy věty. Pro přehledný zápis situace použijeme rozhodovací strom.

Označme si: N ... pacient trpí nemocí
T ... test na protilátky vyšel pozitivní

Rozhodovací strom vidíme na 2.2



$$P(T \cap N) = 0{,}95 \cdot 0{,}005 = 0{,}00475$$

$$P(\overline{T} \cap N) = 0{,}05 \cdot 0{,}005 = 0{,}00025$$

$$P(T \cap \overline{N}) = 0{,}01 \cdot 0{,}995 = 0{,}00995$$

$$P(\overline{T} \cap \overline{N}) = 0{,}99 \cdot 0{,}995 = 0{,}98505$$

Obr. 2.2: Rozhodovací strom prezentující výsledek testování populace

Na spojnice prvního větvení zapisujeme pravděpodobnosti výskytu daného stavu, tj. $P(N)$ a $P(\bar{N})$, přičemž součet pravděpodobností v jednom větvení dává vždy 1 (100%). V našem případě tedy $P(N)$ známe ze zadání a $P(\bar{N})$ určíme jako $1 - P(N)$.

Na spojnice druhého větvení se pak zapisují podmíněné pravděpodobnosti – „výsledek testu“ za předpokladu „daný stav“. V našem případě jsou to pravděpodobnosti: $P(T|N)$, $P(\bar{T}|N)$, $P(T|\bar{N})$, $P(\bar{T}|\bar{N})$. Opět platí, že součet pravděpodobností v jednom větvení dává vždy 1. Ze zadání známe $P(T|N)$ a $P(T|\bar{N})$ zbylé dvě podmíněné pravděpodobnosti dopočítáme jako doplňky do 1.

Chceme–li určit, jaká je pravděpodobnost toho, že nastal „daný stav“ a zároveň „výsledek testu“, stačí vynásobit hodnoty uvedené u příslušné větve. Např.: pravděpodobnost toho, že pacient trpí nemocí a zároveň mu vyšel negativní test je 0,00025 ($P(N \cap \bar{T}) = P(\bar{T}|N) \cdot$ $\cdot P(N) = 0,05 \cdot 0,005 = 0,00025$). Příslušné pravděpodobnosti jsou uvedeny ve sloupci vedle rozhodovacího stromu.

Pravděpodobnosti toho, že dojde k určitému výsledku testu, se určují prostřednictvím věty o úplné pravděpodobnosti. My je okamžitě vyčteme ze sloupce uvedeného vedle rozhodovacího stromu. Např. $P(T) = P(N \cap T) + P(\bar{N} \cap T) = 0,00475 + 0,00995 = 0,0147$.

A nyní již přejděme k naší otázce: Měli jsme určit, **jaká je pravděpodobnost, že určitá osoba, jejíž test byl pozitivní, skutečně onu nemoc má** – neboli $P(N|T)$.

Tuto podmíněnou pravděpodobnost z rozhodovacího stromu přímo nevyčteme, pro její určení použijeme Bayesovu větu

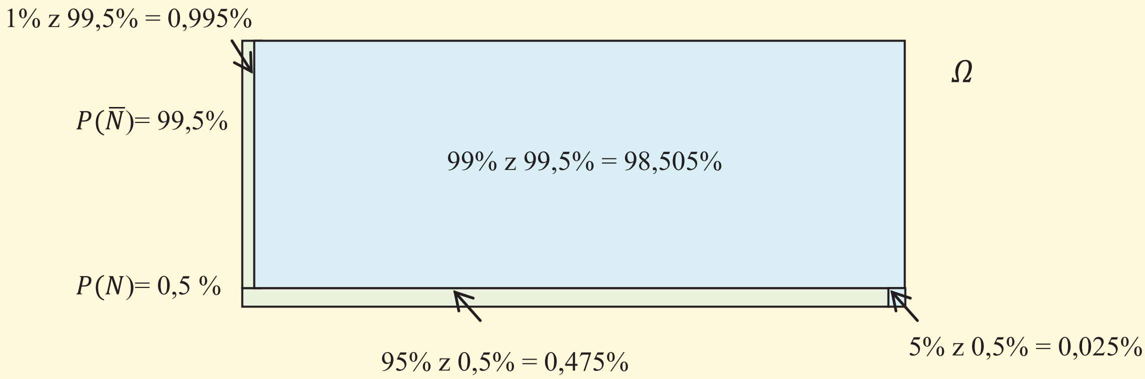
$$P(N|T) = \frac{P(N \cap T)}{P(T)},$$

do které stačí dosadit hodnoty vyčtené z rozhodovacího stromu.

$$P(N|T) = \frac{P(N \cap T)}{P(T)} = \frac{0,00475}{0,0147} = 0,323$$

Pravděpodobnost toho, že osoba, jejíž test vyšel pozitivní, skutečně onu nemoc má je asi 32,3%. (*Zamyslete se nad tím, co by znamenalo, kdyby lékař pouze na základě jednoho pozitivního výsledku testu označil člověka za nemocného (např. AIDS)*).

A na závěr si ukážeme, jak problém znázornit pomocí pravoúhlého Vennova diagramu. V Obr. 2.3 představuje základní prostor Ω celou lidskou populaci, zelená výplň odpovídá pozitivnímu výsledku testu, modrá výplň odpovídá negativnímu výsledku testu.



Obr. 2.3: Pravoúhlý Vennův diagram pro výsledek testování populace

Obsah
38. strana ze 102
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Kapitola 3

Náhodná veličina - řešené příklady

Příklad 3.1. V dílně pracují dva stroje (nezávisle na sobě). První stroj se porouchá s pravděpodobností 20%. Pravděpodobnost poruchy druhého stroje je 30%. Náhodná veličina bude označovat počet porouchaných strojů v dílně. Určete pravděpodobnostní funkci a distribuční funkci této náhodné veličiny.

Řešení.
X ... počet porouchaných strojů v dílně

Náhodná veličina X může nabývat pouze konečně mnoha (tří) hodnot $0; 1; 2$, je tedy zřejmé, že se jedná o diskrétní náhodnou veličinu.

Označme jevy

$S1$ ... první stroj se porouchá,
$S2$ ... druhý stroj se porouchá.

Pak $P(S1) = 0,2$, $P(S2) = 0,3$.

Nyní můžeme určit pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny X.

$P(X = 0) = P(\overline{S1} \cap \overline{S2}) = P(\overline{S1}) \cdot P(\overline{S2}) = 0,8 \cdot 0,7 = 0,56$,
$P(X = 1) = P\left((S1 \cap \overline{S2}) \cup (\overline{S1} \cap S2)\right) = P(S1) \cdot P(\overline{S2}) + P(\overline{S1}) \cdot P(S2) = 0,2 \cdot 0,7 +$
$+ 0,8 \cdot 0,3 = 0,38$,
$P(X = 2) = P(S1 \cap S2) = P(S1) \cdot P(S2) = 0,2 \cdot 0,3 = 0,06$.

Tab. 3.1: Pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny z řešeného příkladu 3.1

x_i	$P(X = x_i)$
0	0,56
1	0,38
2	0,06
Σ	1,00

(Např. $P(X = 1)$ čteme: pravděpodobnost, že v dílně se porouchá právě jeden stroj). Uvědomte si, že v Tab. 3.2 jsou uvedeny pouze **nenulové** hodnoty pravděpodobnostní funkce. Je zřejmé, že

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \Omega : P(X = x) = 0.$$

(Např. $P(X = 1,5) = P(X = -3) = \ldots = 0$). Všimněte si zároveň, že $\sum\limits_{(i)} P(x_i) = 1$.

Dalším úkolem je určit distribuční funkci náhodné veličiny X.
Vzhledem k tomu, že X je diskrétní náhodná veličina, půjde o schodovitou zleva spojitou funkci. z vlastností distribuční funkce vyplývá, že body nespojitosti této funkce jsou ty body, v nichž je pravděpodobnostní funkce nenulová (protože $P(X = a) = \lim_{x\to a^+} F(x) - F(a)$). Proto si určíme hodnoty distribuční funkce na všech intervalech vymezených body nespojitosti.

Distribuční funkci náh. veličiny X můžeme vyjádřit pomocí pravděpodobnostní funkce jako

$$F(x) = \sum_{x_i<x} P(x_i).$$

$\forall x \in (-\infty; 0\rangle : F(x) = P(X < x) = 0$

(pravděpodobnost, že se porouchá méně než 0 strojů),

$\forall x \in (0; 1\rangle : F(x) = P(X < x) = P(X = 0) = 0,56$

(pravděpodobnost, že se porouchá méně než 1 stroj),

$\forall x \in (1; 2\rangle : F(x) = P(X < x) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,56 + 0,38 = 0,94$

(pravděpodobnost, že se porouchá méně než 2 stroje),

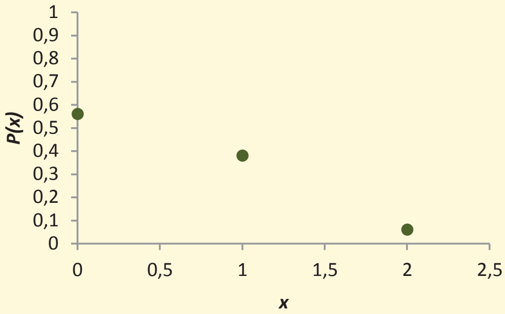
$\forall x \in (2; \infty\rangle : F(x) = P(X < x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0,56 + 0,38 + 0,06 = 1$

(pravděpodobnost, že se porouchají oba stroje).

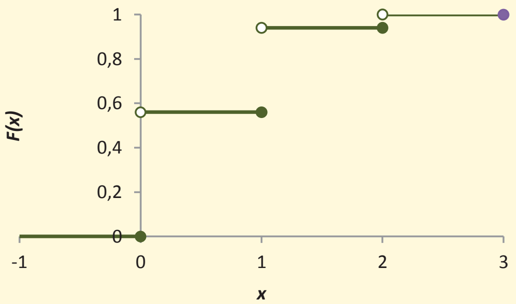
Hodnoty distribuční funkce na celém definičním oboru ($\mathbb{R}$) jsou uvedeny v Tab. 3.2.

Tab. 3.2: Distribuční funkce náhodné veličiny X z řešeného příkladu 3.1

x	$F(x)$
$(-\infty; 0\rangle$	0
$(0; 1\rangle$	0,56
$(1; 2\rangle$	0,94
$(2; \infty)$	1



Obr. 3.1: Pravděpodobnostní funkce náh. veličiny X



Obr. 3.2: Distribuční funkce náh. veličiny X

▲

Obsah
42. strana ze 102
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Příklad 3.2. Nechť X je spojitá náhodná veličina definována hustotou pravděpodobnosti $f(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x)(1+x) & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

a) Nalezněte konstantu c tak, aby $f(x)$ byla korektně zadána,
b) zakreslete hustotu pravděpodobnosti $f(x)$,
c) nalezněte a zakreslete distribuční funkci $F(x)$,
d) určete $P(X = 0,3), P(0 < X < 11), P(X > 0,5)$.

Řešení.

a) Pro nalezení konstanty c využijeme toho, že plocha pod křivkou hustoty pravděpodobnosti musí být rovna 1.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

$$\int_{-\infty}^{-1} 0\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} c(1-x^2)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{\infty} 0\,\mathrm{d}x = 1$$

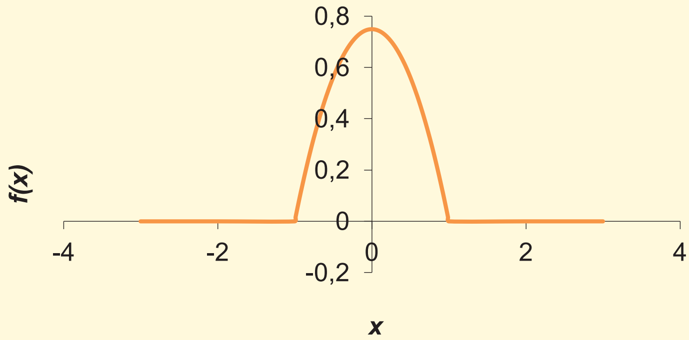
$$0 + c\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} + 0 = 1$$

$$c\left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 - \frac{(-1)}{3}\right)\right] = 1$$

$$c \cdot \frac{4}{3} = 1 \Rightarrow c = \frac{3}{4} = 0,75$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} 0,75(1-x)(1+x) = 0,75(1-x^2) & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$



Obr. 3.3: Hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny z řešeného příkladu 3.2

c) Distribuční funkci určíme pomocí hustoty pravděpodobnosti.

$$\forall x \in \mathbb{R} : F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

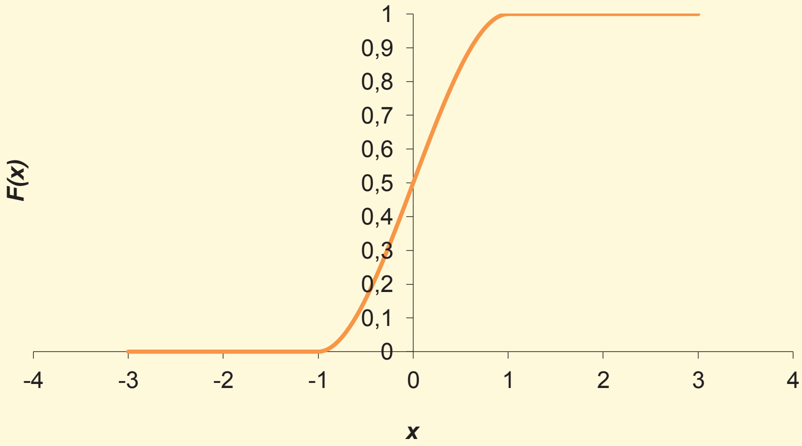
$\forall x \in (-\infty; -1) : \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0$

$\forall x \in \langle -1; 1) : \quad F(x) = \int_{-\infty}^{-1} 0\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{x} \frac{3}{4}(1-t^2)\,\mathrm{d}t = 0 + \frac{3}{4}\left[t - \frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{x} =$

$$= \tfrac{1}{4}(-x^3 + 3x + 2)$$

$$\forall x \in \langle 1; \infty) : \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{-1} 0 \,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} \tfrac{3}{4}(1 - t^2) \,\mathrm{d}t + \int_{1}^{\infty} 0 \,\mathrm{d}t =$$
$$= 0 + \tfrac{3}{4}\left[t - \tfrac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} + 0 = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; -1) \\ \tfrac{1}{4}(-x^3 + 3x + 2) & x \in \langle -1; 1) \\ 1 & x \in \langle 1; \infty) \end{cases}$$



Obr. 3.4: Distribuční funkce Hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny z řešeného příkladu 3.2

d) Pravděpodobnosti výskytu náhodné veličiny X na určitém intervalu určíme pomocí příslušných vztahů.

- $P(X = 0,3) = 0$
- $P(0 < X < 11) = F(11) - F(0) = 1 - \frac{1}{4}(0 + 0 + 2) = \frac{1}{2} = 50\%$
- $P(X > 0,5) = 1 - F(0,5) = 1 - \dfrac{1}{4}\left(-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3 + 3 \cdot \dfrac{1}{2} + 2\right) = 1 - \dfrac{27}{32} = \dfrac{5}{32} \doteq 15,6\%$

▲

Příklad 3.3. Vraťme se k diskrétní náhodné veličině X (počet porouchaných strojů v dílně) z řešeného příkladu 3.1. Řešením příkladu 3.1 byl popis rozdělení této náhodné veličiny pomocí pravděpodobnostní i distribuční funkce. Nyní určete její

a) střední hodnotu,

b) rozptyl,

c) směrodatnou odchylku,

d) modus.

Řešení.
Připomeňme si pravděpodobnostní a distribuční funkci náhodné veličiny X z příkladu 3.1.

x_i	$P(X=x_i)$
0	0,56
1	0,38
2	0,06
Σ	1,00

x	$F(x)$
$(-\infty; 0\rangle$	0
$(0; 1\rangle$	0,56
$(1; 2\rangle$	0,94
$(2; \infty)$	1

a) $E(X) = \sum\limits_{(i)} x_i \cdot P(x_i) = 0 \cdot 0,56 + 1 \cdot 0,38 + 2 \cdot 0,06 = 0,50.$

Průměrný počet porouchaných strojů v dílně je 0,5.

b) Pro výpočet rozptylu použijeme tvrzení, že $DX = E(X^2) - (E(X))^2$, kde $E(X^2)$ značí druhý obecný moment a $(E(X))^2$ je druhou mocninou střední hodnoty.

$$E(X^2) = \sum_{(i)} x_i^2 \cdot P(x_i) = 0^2 \cdot 0,56 + 1^2 \cdot 0,38 + 2^2 \cdot 0,06 = 0,62$$

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 0,62 - 0,50^2 = 0,37$$

Při „ručním“ výpočtu střední hodnoty a rozptylu je vhodné zaznamenat si dílčí výsledky výpočtu do tabulky ve formátu prezentovaném v Tab. 3.3.

Tab. 3.3: Dílčí výsledky při výpočtu $E(X)$ a $E(X^2)$

x_i	$P(x_i)$	$x_i \cdot P(x_i)$	$x_i^2 \cdot P(x_i)$
0	0,56	0,00	0,00
1	0,38	0,38	0,38
2	0,06	0,12	0,24
Σ	1,00	**0,50**	**0,62**
		EX	***EX***^{2}

c) $\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,37} \doteq 0,61$

Všimněte si vysoké variability počtu porouchaných strojů v dílně. Zatímco střední hodnota počtu porouchaných strojů je 0,5, směrodatná odchylka je 0,6.

Obsah

48. strana ze 102

Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

d) Modus je hodnota, které diskrétní náhodná veličina nabývá s největší pravděpodobností, proto $\hat{x} = 0$.

▲

Příklad 3.4. Majitel autorizovaného servisu nabídl půjčovně automobilů své služby. Za každý automobil zapůjčený jeho prostřednictvím obdrží od půjčovny automobilů 500,- Kč. Zároveň se však zavázal, že každý den investuje do údržby zapůjčených automobilů 800,- Kč. Počet automobilů zapůjčených prostřednictvím autorizovaného servisu za 1 den je popsán pravděpodobnostní funkci v Tab. 3.5.

Tab. 3.4: Pravděpodobnostní funkce počtu zapůjčených automobilů za 1 den

x_i	0	1	2	3	4	5	6
$P(x_i)$	0,01	0,40	0,25	0,15	0,10	?	0,03

a) Pravděpodobnost, že majitel autoservisu zapůjčí v jednom dni 5 automobilů je špatně čitelná. Určete ji.

b) Určete střední hodnotu, směrodatnou odchylku a modus počtu zapůjčených automobilů během jednoho dne.

c) Určete pravděpodobnostní funkci, střední hodnotu, směrodatnou odchylku a modus zisku majitele servisu z automobilů zapůjčených během jednoho dne.

Řešení.

a) Nechť náhodná veličina X označuje počet zapůjčených automobilů během jednoho dne. Je zřejmé, že jde o diskrétní náhodnou veličinu. Musí tedy platit, že

$$\sum_{(i)} P(x_i) = 1.$$

Z toho plyne, že $P(X = 5) = 1 - (0,01 + 0,40 + 0,25 + 0,15 + 0,10 + 0,03) = 0,06$.

b) Dílčí výpočty potřebné pro stanovení střední hodnoty a směrodatné odchylky můžeme zaznamenat do tabulky.

								Σ
x_i	0	1	2	3	4	5	6	
$P(X=x_i)$	0,01	0,40	0,25	0,15	0,10	0,06	0,03	1
$x_i . P(X=x_i)$	0	0,4	0,5	0,45	0,4	0,3	0,18	2,23
$x_i^2 . P(X=x_i)$	0	0,4	1	1,35	1,6	1,5	1,08	6,93

$$E(X) = \sum_{(i)} x_i \cdot P(X = x_i) = 2,23,$$

$$E(X^2) = \sum_{(i)} x_i^2 \cdot P(X = x_i) = 6,93,$$

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 9,93 - (2,23)^2 = 1,96,$$

$$\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{1,96} = 1,40.$$

Střední počet automobilů zapůjčených během jednoho dne je 2,23, směrodatná odchylka je 1,40 automobilů.

Modem je hodnota s nejvyšší pravděpodobnosti. s nejvyšší pravděpodobností půjčuje majitel autorizovaného servisu jedno auto denně ($\hat{x} = 1$).

c) Zisk majitele autorizovaného servisu se odvíjí od počtu zapůjčených automobilů. Nechť náhodná veličina Z označuje zisk majitele autorizovaného servisu ze zapůjčování automobilů. Vzhledem k dohodnutým podmínkám lze tvrdit, že

$$Z = 500 \cdot X - 800\,[\text{Kč}].$$

Pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny Z bude odvozena z pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny X.

$$P(X = x_i) = P\left(\frac{Z + 800}{500} = x_i\right) = P(Z = 500x_i - 800)$$

(Pravděpodobnost toho, že majitel servisu zapůjčí denně 2 automobily je stejná jako pravděpodobnost, že jeho denní zisk bude 200,- Kč $(500 \cdot 2 - 800)$, apod.)

x_i	0	1	2	3	4	5	6
$P\ (X=x_i)$	0,01	0,40	0,25	0,15	0,10	0,06	0,03

z_i [Kč]	-800	-300	200	700	1 200	1 700	2 200
$P\ (Z=z_i)$	0,01	0,40	0,25	0,15	0,10	0,06	0,03

Pro výpočet středního zisku a směrodatné odchylky zisku využijeme vlastností střední hodnoty a rozptylu.

$$E(Z) = E(500X - 800) = 500E(X) - 800 = 500 \cdot 2,23 - 800 = 315\ [\text{Kč}]$$

$$D(Z) = D(500X - 800) = 500^2 D(X) = 500^2 \cdot 1,96 \doteq 979\ [\text{Kč}^2]$$

$$\sigma_Z = \sqrt{D(Z)} = \sqrt{979} \doteq 31 \text{ [Kč]}$$

Očekávaný denní zisk majitele servisu je 315,- Kč se směrodatnou odchylkou 31,- Kč.

$$\hat{x} = -300 \text{ [Kč]}$$

Modem denního zisku je ztráta 300,- Kč. Lze říci, že i když to tak většinou nevypadá (modem je ztráta), průměrně majitel autoservisu na poskytované službě vydělá (střední hodnota denního zisku je kladná).

▲

Příklad 3.5. V tomto příkladě budeme pracovat se spojitou náhodnou veličinou X, jejíž rozdělení (hustota pravděpodobnosti a distribuční funkce) bylo určeno v řešeném příkladu 3.2.

Pro náhodnou veličinu X určete

a) střední hodnotu,

b) rozptyl,

c) směrodatnou odchylku,

d) medián, $x_{0,5}$, tj. hodnotu, pro kterou platí: $P(X < x_{0,5}) = 0,5$

e) modus.

Dále mějme náhodnou veličinu Y, která je dána jako funkce náhodné veličiny X.

$$Y = 5X + 6$$

Určete

f) distribuční funkci $F_Y(y)$ náhodné veličiny Y,

g) hustotu pravděpodobnosti $f_Y(y)$ náhodné veličiny Y,

h) střední hodnotu $E(Y)$ náhodné veličiny Y,

i) rozptyl $D(Y)$ náhodné veličiny Y.

Řešení.
Připomeňme si, že náhodná veličina z řešeného příkladu 3.2 je popsána hustotou pravděpodobnosti

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1-x^2) & x \in (-1;1), \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

a distribuční funkcí

$$F(X) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty;-1), \\ \frac{1}{4}(-x^3+3x+2) & x \in \langle -1;1) , \\ 1 & x \in \langle 1;\infty) . \end{cases}$$

a) Střední hodnota je

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{1} x \cdot 0\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} x \cdot \frac{3}{4}(1-x^2)\mathrm{d}x + \int_{1}^{\infty} x \cdot 0\mathrm{d}x =$$

$$= 0 + \frac{3}{4}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} + 0 = \underline{0,00}$$

b) Rozptyl určíme pomocí výpočetního vztahu: $D(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{1} x^2 \cdot 0\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} x^2 \cdot \frac{3}{4}(1-x^2)\mathrm{d}x + \int_{1}^{\infty} x^2 \cdot 0\mathrm{d}x =$$

$$= 0 + \frac{3}{4}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} + 0 = \underline{0,20}$$

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 0,2 - 0^2 = 0,2$$

c) Směrodatná odchylka je odmocninou rozptylu. $\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,2} \doteq 0,45$

d) Pravděpodobnost, že náhodná veličina nabývá hodnot menších než $x_{0,5}$ je 0,5.

$$P(X < x_{0,5}) = F(x_{0,5}) = 0,5$$

Ze vztahu pro distribuční funkci je zřejmé, že medián může být pouze hodnota z intervalu $\langle -1; 1)$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(-{x_{0,5}}^3 + 3x_{0,5} + 2) &= 0,5 \\ -{x_{0,5}}^3 + 3x_{0,5} &= 0 \\ x_{0,5}(-{x_{0,5}}^2 + 1) &= 0 \end{aligned}$$

$$x_{0,5} = \begin{cases} 0 & \in \langle -1; 1) \\ -\sqrt{3} & \notin \langle -1; 1) \\ \sqrt{3} & \notin \langle -1; 1) \end{cases} \Rightarrow x_{0,5} = 0$$

e) Modus spojité náhodné veličiny je hodnota, v níž hustota pravděpodobnosti této NV nabývá svého maxima.

Pro maximum spojité funkce platí, že první derivace v něm musí být nulová (nebo nedefinována) a druhá derivace v něm musí být záporná nebo nedefinována.

Je zřejmé, že rovněž modus budeme hledat na intervalu $\langle -1; 1)$.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} &= 0\\
\frac{\mathrm{d}\left(\frac{3}{4}(1-x^2)\right)}{\mathrm{d}x} &= 0\\
-\frac{3x}{2} &= 0\\
x &= 0 \text{ ... bod podezřelý z maxima}\\
\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} &= -\frac{3}{2}\\
\frac{\mathrm{d}^2 f(0)}{\mathrm{d}x^2} &= -\frac{3}{2} < 0 \text{ ... } f(x) \text{ má v } x = 0 \text{ maximum}\\
\hat{x} &= 0
\end{aligned}$$

(Modus (hodnotu, v níž má hustota pravděpodobnosti maximum) jste mohli identifikovat pouhým pohledem na graf $f(x)$, který je uveden na Obr. 3.10.)

Nyní se zaměříme na popis náhodné veličiny Y, která je dána vztahem

$$Y = 5X + 6.$$

Pro určení rozdělení náhodné veličiny Y využijeme znalosti distribuční funkce, střední hodnoty a rozptylu náhodné veličiny X.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; -1), \\ \frac{1}{4}(-x^3 + 3x + 2) & x \in \langle -1; 1), \quad EX = 0, \quad DX = 0,2 \\ 1 & x \in \langle 1; \infty) . \end{cases}$$

f) $F_Y(y) = P(Y < y) = P(5X + 6 < y) = P\left(X < \dfrac{y-6}{5}\right) = F_X\left(\dfrac{y-6}{5}\right)$

Nyní určíme distribuční funkci $F_Y(y)$ tak, že v předpisu pro distribuční funkci $F_X(x)$ provedeme substituci $x = \left(\dfrac{y-6}{5}\right)$.

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \left(\frac{y-6}{5}\right) \in (-\infty; -1), \\ \frac{1}{4}\left(-\left(\frac{y-6}{5}\right)^3 + 3\left(\frac{y-6}{5}\right) + 2\right) & \left(\frac{y-6}{5}\right) \in \langle -1; 1), \\ 1 & \left(\frac{y-6}{5}\right) \in \langle 1; \infty) . \end{cases}$$

Po úpravě dostaneme

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \in (-\infty; 1), \\ -\frac{1}{500}(y^3 - 18y^2 + 33y - 16) & y \in \langle 1; 11), \\ 1 & y \in \langle 11; \infty) . \end{cases}$$

g) Hustotu pravděpodobnosti určíme jako derivaci distribuční funkce.

$$f_Y(y) = \frac{\mathrm{d}F_Y(y)}{\mathrm{d}y}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} -\frac{1}{500}(3y^2 - 36y + 33) & y \in \langle 1; 11) \,, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

Po úpravě

$$f_Y(y) = \begin{cases} -\frac{1}{500}(y^2 - 12y + 11) & y \in \langle 1; 11) \,, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

h) z vlastností střední hodnoty plyne, že

$$E(Y) = E(5X + 6) = 5E(X) + 6 = 5 \cdot 0 + 6 = 6.$$

i) z vlastností rozptylu plyne, že

$$D(Y) = D(5X + 6) = 5^2 D(X) = 25 \cdot 0,2 = 5.$$

Význam číselných charakteristik popisujících náhodnou veličinu může být prezentován pouze v případech, kdy víte, jaký problém je náhodnou veličinou modelován. v tomto příkladě jste si měli pouze procvičit matematické úkony spojené s výpočtem číselných charakteristik, konkrétní význam není číselným charakteristikám přiřazen.

▲

Kapitola 4

Náhodný vektor - řešené příklady

Příklad 4.1. Představme si, že budeme třikrát opakovat hod poctivou mincí. Za úspěch budeme považovat padnutí rubu mince. Nechť náhodné veličiny

$$Y \text{ ... počet pokusů do prvního úspěchu,}$$

$$Z \text{ ... počet po sobě jdoucích úspěchů}$$

tvoří složky náhodného vektoru $\boldsymbol{X} = (Y, Z)$.

Sestavte
a) sdruženou pravděpodobnostní funkci náhodného vektoru X,
b) sdruženou distribuční funkci náhodného vektoru X.

Řešení.
ada) Abychom mohli sestavit sdruženou pravděpodobnostní funkci, vypíšeme si nejdříve všechny možné výsledky, k nimž by mohlo dojít při trojím hodu poctivou mincí (U – úspěch, N – neúspěch) a určíme jejich pravděpodobnosti.

Pro přehlednost budeme používat zjednodušené zápisy $(N \cap N \cap N) = NNN, (U \cap N \cap \cap N) = UNN$, apod.

Možné výsledky trojího hodu mincí: $\{NNN, UNU, UUN, UUU, NUU, NUN, NNU, UNN, UUU\}$

Je-li výsledek hodu NNN, pak položme počet pokusů do prvního úspěchu $Y = 3$ a počet po sobě jdoucích úspěchů $Z = 0$; je-li výsledek hodu UNU, pak počet pokusů do prvního úspěchu $Y = 0$ a počet po sobě jdoucích úspěchů $Z = 1$, atd. Je zřejmé, že
náhodná veličina Y může nabývat hodnot $0, 1, 2, 3$,
náhodná veličina Z může nabývat hodnot $0, 1, 2, 3$.

Nyní sestavíme tabulku sdružených pravděpodobností. Nejdříve si do pomocné tabulky vypíšeme jevy, které vyhovují příslušným podmínkám a poté na základě jejich neslučitelnosti určíme pravděpodobnosti výskytu příslušných skupin jevů.

Vzhledem k tomu, že se jedná o hody poctivou mincí, je $P(U) = P(N) = 0,5$. Je zřejmé, že výsledky jednotlivých hodů jsou nezávislé, proto

$$P(NNN) = P(N) \cdot P(N) \cdot P(F) = 0.5^3 = 0,125.$$

Tab. 4.1: Výčet jevů příznivých jednotlivým hodnotám náhodného vektoru X

Y/Z	0	1	2	3
0	-	UNU, UNN	UUN	UUU
1	-	NUN	NUU	-
2	-	NNU	-	-
3	NNN	-	-	-

Obdobně dostaneme, že
$P(UNU) = P(UUN) = P(NUU) = P(NUN) = P(NNU) = P(UNN) = P(UUU) = 0,125$
Vzhledem k neslučitelnosti (disjunktnosti) jevů UNU a UNN je

$$P(UNU \cup UNN) = P(UNU) + P(UNN) = 0.250.$$

Tab. 4.2: Tabulka sdružených pravděpodobností náhodného vektoru X

Y/Z	0	1	2	3
0	0	0,250	0,125	0,125
1	0	0,125	0,125	0
2	0	0,125	0	0
3	0,125	0	0	0

adb) Ze sdružené pravděpodobnostní funkce určíme sdruženou distribuční funkci, která je pro přehlednost uvedena v Tab. 4.4.

Tab. 4.3: Distribuční funkce náhodného vektoru X

Y/Z	$(-\infty;0\rangle$	$(0;1\rangle$	$(1;2\rangle$	$(2;3\rangle$	$(3;\infty)$
$(-\infty;0\rangle$	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
$(0;1\rangle$	*0*	*0*	*0,250*	*0,375*	*0,500*
$(1;2\rangle$	*0*	*0*	*0,375*	*0,625*	*0,750*
$(2;3\rangle$	*0*	*0*	*0,500*	*0,750*	*0,875*
$(3;\infty)$	*0*	*0,125*	*0,625*	*0,875*	*1*

Postup výpočtu sdružené distribuční funkce $F(y,z)$ ze sdružené pravděpodobnostní funkce $p(y,z)$ ukážeme například na $F(0,5;2,7)$, tj. na výpočtu distribuční funkce na intervalu $(0;1\rangle \times (2;3\rangle$.

$F(0,5;2,7) = P(Y < 0,5; Z < 2,7) = P((Y = 0) \wedge ((Z = 0) \vee (Z = 1) \vee (Z = 2)) = P((Y = 0 \wedge Z = 0) \vee (Y = 0 \wedge Z = 1) \vee (Y = 0 \wedge Z = 2) = p(0,0) + p(0,1) + p(0,2) = 0 + 0,250 + 0,125 = 0,375$

▲

Příklad 4.2. Najděte konstantu c tak, aby funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} c(x+y), & (x,y) \in \langle 0;1\rangle \times \langle 0;1\rangle \\ 0, & (x,y) \notin \langle 0;1\rangle \times \langle 0;1\rangle \end{cases}$$

mohla být hustotou pravděpodobnosti nějakého náhodného vektoru (X,Y).

Řešení. Aby funkce $f(x,y)$ mohla být hustotou náhodného vektoru, musí být splněna podmínka, že

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1.$$

$$\int_0^1\int_0^1 c(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1$$

$\int_0^1\int_0^1 c(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = c\int_0^1 [\frac{x^2}{2}+xy]_0^1\,\mathrm{d}y = c\int_0^1 (\frac{1}{2}+y)\,\mathrm{d}y = c[\frac{1}{2}y+\frac{y^2}{2}]_0^1 = c$

Takže musí platit $c = 1$. z toho plyne, že

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & (x,y) \in \langle 0;1\rangle \times \langle 0;1\rangle \\ 0, & (x,y) \notin \langle 0;1\rangle \times \langle 0;1\rangle \end{cases}$$

▲

Příklad 4.3. Navážeme na řešený příklad 4.1. Náhodný vektor X je popsán sdruženou pravděpodobnostní funkcí uvedenou v tabulce.

Y/Z	*0*	*1*	*2*	*3*
0	*0*	*0,250*	*0,125*	*0,125*
1	*0*	*0,125*	*0,125*	*0*
2	*0*	*0,125*	*0*	*0*
3	*0,125*	*0*	*0*	*0*

Určete
a) marginální pravděpodobnosti $P_y(y_i)$,$P_z(z_j)$.
b) marginální distribuční funkce F_y(y),F_z(y).

Řešení. Jak již víte, marginální rozdělení slouží k popisu jednotlivých složek náhodného vektoru.

ada)
Je zřejmé, že marginální pravděpodobnost $P_y(y_i)$, tj. pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny Y, získáme dosazením do vztahu:

$$P_y(y_j) = \sum_{(z_j)} p(y_i, z_j), 1 \leqq j \leqq 4.$$

To odpovídá sečtení čísel v jednotlivých řádcích tabulky sdružené pravděpodobnosti. Např. P_y(0)=p(0,0)+p(0,1)+p(0,2)+p(0,3)=0+0,250+0,125+0,125=0,500.

Analogicky získáte marginální pravděpodobnost $P_z(z_j)$.

Tab. 4.4: Tabulka sdružené pravděpodobnosti rozšířená o marginální pravděpodobnosti

Y/Z	0	1	2	3	$P_Y(y_i)$
0	0	0,250	0,125	0,125	0,500
1	0	0,125	0,125	0	0,250
2	0	0,125	0	0	0,125
3	0,125	0	0	0	0,125
$P_Z(z_j)$	0,125	0,500	0,250	0,125	1

adb) Pro nalezení marginálních distribučních funkcí již stačí využít zkušeností, které jste získali při popisu náhodné veličiny.

Y je diskrétní náhodná veličina popsaná pravděpodobnostní funkcí $P_y(y_i)$. Je tedy zřejmé, že

Y	$P_Y(y_i)$
0	0,500
1	0,250
2	0,125
3	0,125

$\Rightarrow$

Y	$F_Y(y)$
$(-\infty, 0\rangle$	0
$(0, 1\rangle$	0,500
$(1, 2\rangle$	0,750
$(2, 3\rangle$	0,875
$(3, \infty)$	1

Analogicky lze určit $F_z(z)$.

Z	$P_Z(z_j)$
0	0,125
1	0,500
2	0,250
3	0,125

$\Rightarrow$

Z	$F_Z(z)$
$(-\infty, 0\rangle$	0
$(0, 1\rangle$	0,125
$(1, 2\rangle$	0,625
$(2, 3\rangle$	0,875
$(3, \infty)$	1

Poznámka: *Uvědomte si, že zatímco součet hodnot pravděpodobnostní funkce musí být vždy roven 1 (a lze jej tedy použít například jako kontrolní údaj), součet hodnot distribuční funkce je číslo, které nemá žádný význam.*

▲

Příklad 4.4. Tato úloha navazuje na příklad 4.2. Nechť je spojitý náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X, Y)$ popsán sdruženou hustotou $f(x, y)$.

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y), & (x,y) \in \langle 0;1\rangle \times \langle 0;1\rangle \\ 0, & (x,y) \notin \langle 0;1\rangle \times \langle 0;1\rangle \end{cases}$$

Určete
a) marginální hustoty pravděpodobnosti $f_x(x)$ a $f_y(y)$,
b) marginální distribuční funkce $F_x(x)$ a $F_y(y)$.

Řešení.

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \begin{cases} \int_0^1 (x+y)\,\mathrm{d}y = [xy + \frac{y^2}{2}]_0^1 = x + 0,5, & (x,y) \in \langle 0;1\rangle \\ 0, & (x,y) \notin \langle 0;1\rangle \end{cases}$$

$$f_x(x) = \begin{cases} x + 0,5, & (x,y) \in \langle 0;1\rangle \\ 0, & (x,y) \notin \langle 0;1\rangle \end{cases}$$

$$f_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \int_0^1 (x+y)\,\mathrm{d}x = [\frac{x^2}{2} + xy]_0^1 = y + 0,5, & x \in \langle 0;1\rangle \\ 0, & y \notin \langle 0;1\rangle \end{cases}$$

$$f_y(y) = \begin{cases} y + 0,5, & y \in \langle 0;1\rangle \\ 0, & y \notin \langle 0;1\rangle \end{cases}$$

adb)

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(t)\,\mathrm{d}t$$

$$F_x(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \int_0^x (t + 0,5)\,\mathrm{d}t = [\frac{t^2}{2} + 0,5t]_0^x = 0,5(x^2 + x), & 0 \leqq x \leqq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

$$F_x(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0,5(x^2 + x), & 0 \leqq x \leqq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

Analogicky lze určit, že

$$F_y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 0,5(y^2 + y), & 0 \leqq x \leqq 1 \\ 1, & y > 1 \end{cases}$$

▲

Příklad 4.5. Nechť $\boldsymbol{X}$ je náhodný vektor, s nímž jsme pracovali v příkladech 4.1 a 4.3. Připomeňme si, že náhodným pokusem je trojí opakování hodu poctivou mincí. Za úspěch považujeme padnutí rubu mince. Náhodné veličiny Y a Z jsou definovány jako

Y ... počet pokusů do prvního úspěchu,
Z ... počet po sobě jdoucích úspěchů.

Rozdělení tohoto náhodného vektoru (sdružená a marginální pravděpodobnostní funkce) jsou uvedeny v následující tabulce. Určete

Y/Z	0	1	2	3	$P_Y(y_i)$
0	0	0,250	0,125	0,125	0,500
1	0	0,125	0,125	0	0,250
2	0	0,125	0	0	0,125
3	0,125	0	0	0	0,125
$P_Z(z_j)$	0,125	0,500	0,250	0,125	1

a) $P(y|z)$,
b) zda jsou náhodné veličiny Y a Z nezávislé.

Řešení.
ad a)
$P(y|z) = \frac{p(y,z)}{P_Z(z)}, P_Z(z) \neq 0$

Například pravděpodobnost, že při třech hodech mincí padl rub poprvé při druhém hodu

$(Y = 1)$, víme-li, že padl ve třech hodech dvakrát $(z = 2)$ je

$$P(Y = 1|Z = 2) = \frac{p(1,2)}{p_Z(2)} = \frac{0,125}{0,250} = 0.500.$$

Ostatní podmíněné pravděpodobnosti určíme obdobně a zapíšeme je do tabulky.

Tab. 4.5: Podmíněné pravděpodobnosti $P(y|z)$

Y/Z	*0*	*1*	*2*	*3*
0	*0*	*0,500*	*0,500*	*1*
1	*0*	*0,250*	*0,500*	*0*
2	*0*	*0,250*	*0*	*0*
3	*1*	*0*	*0*	*0*

ad b)
Jsou-li náhodné veličiny Y, Z nezávislé, pak $1 \leqq i \leqq 4, 1 \leqq j \leqq 4$:

$$p(y_i, z_j) = P_Y(y_i) \cdot P_Z(z_j).$$

Každá z hodnot sdružené pravděpodobnosti uvedené v rozšířené tabulce sdružených pravděpodobností (Tab. 4.6) by musela být rovna součinu příslušných marginálních pravděpodobností. Toto zcela zřejmě neplatí (např.: $0 = p(0,0) \neq P_Y(0) \cdot P_Z(0) = 0,500 \cdot 0,125$). Náhodné veličiny Y, Z proto nejsou nezávislé.

▲

Příklad 4.6. Vrátíme se naposledy k řešenému příkladu 4.1. Náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (Y, Z)$ je popsán sdruženou pravděpodobnostní funkci, známe jeho marginální pravděpodobnosti (Tab. 4.6) a v řešeném příkladu 4.5 jsme určili podmíněnou pravděpodobnostní funkcí $P(y|z)$ (Tab. 4.7). Nyní určete:

a) $E(Y)$,$E(Z)$,$D(Y)$,$D(Z)$,

b) $E(\boldsymbol{X})$,$D(\boldsymbol{X})$,

c) $cov(Y, Z)$, $var(\boldsymbol{X})$, $\rho(Y, Z)$,$cor(\boldsymbol{X})$,

d) $E(Y|Z = 2)$.

Řešení.

ada)

$E(Y)$, $E(Z)$, $D(Y)$ a $D(Z)$ jsou číselné charakteristiky náhodných veličin Y a Z (marginální charakteristiky vektoru $\boldsymbol{X}$). Pro jejich nalezení použijeme marginální pravděpodobnosti vektoru $\boldsymbol{X}$.

Pomocné výpočty si můžeme zaznamenat do tabulky. (Hodnoty uvedené ve žlutě zvýrazněných polích jsou rovny součtům hodnot v příslušných řádcích, resp. sloupcích.)

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{4} y_i \cdot P_Y(y_i) = 0 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.25 + 2 \cdot 0.125 + 3 \cdot 0.125 = 0,875$$

Y/Z	0	1	2	3	$P_Y(y_i)$	$y_i.P_Y(y_i)$	$y_i^2.P_Y(y_i)$
0	0	0,25	0,125	0,125	0,5	0	0
1	0	0,125	0,125	0	0,25	0,25	0,25
2	0	0,125	0	0	0,125	0,25	0,5
3	0,125	0	0	0	0,125	0,375	1,125
$P_Z(z_j)$	0,125	0,5	0,25	0,125	1	**0,875**	**1,875**
$z_j.P_Z(z_j)$	0	0,5	0,5	0,375	**1,375**		
$z_j^2.P_Z(z_j)$	0	0,5	1	1,125	**2,625**		

$$E(Y^2) = \sum_{i=1}^{4} y_i^2 \cdot P_Y(y_i) = 0^2 \cdot 0.5 + 1^2 \cdot 0.25 + 2^2 \cdot 0.125 + 3^2 \cdot 0.125 = 1,875$$

$$D(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = 1,875 - 0,875^2 = 1,109$$

Obdobně určíme $E(Z)$ a $D(Z)$

$$E(Z) = \sum_{j=1}^{4} z_j \cdot P_z(z_i) = 0 \cdot 0.125 + 1 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.25 + 3 \cdot 0.125 = 1,375$$

$$E(Z^2) = \sum_{j=1}^{4} z_j^2 \cdot P_z(z_j) = 0^2 \cdot 0.125 + 1^2 \cdot 0.5 + 2^2 \cdot 0.25 + 3^2 \cdot 0.125 = 2,625$$

$$D(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 = 2,625 - 1,375^2 = 0,734$$

adb)

$E(\boldsymbol{X}) = (E(Y), E(Z)) = (0,875; 1,375)$

$D(\boldsymbol{X}) = (D(Y), D(Z)) = (0,875; 1,375)$

adc)

Podobně jako pro výpočet rozptylu, i pro výpočet kovariance je vhodnější použít místo definičního tzv. výpočetní vztah ($cov(Y,Z) = E(YZ) - E(Y) \cdot E(Z)$)

$$E(YZ) = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} y_i \cdot z_j \cdot p(y_i, z_j) = 0 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot 0,25 + 0 \cdot 2 \cdot 0,125 + 0 \cdot 3 \cdot 0,125 + 1 \cdot 0 \cdot 0 +$$
$$+ 1 \cdot 1 \cdot 0,125 + \cdots + 3 \cdot 3 \cdot 0 = 0,625$$

$cov(Y,Z) = E(YZ) - E(Y) \cdot E(Z) = 0,625 - 0,875 \cdot 1,375 = -0,578,$

$cov(Z,Y) = cov(Y,Z).$

Kovarianční matice je

$$var(X) = \begin{pmatrix} D(X) & cov(Y,Z) \\ cov(Z,Y) & D(Z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,109 & -0,578 \\ -0,578 & 0,734 \end{pmatrix}$$

Pomocí kovarianční matice určíme korelační koeficient a tím i korelační matici.

$$\rho(Y,Z) = \frac{cov(Y,Z)}{\sqrt{D(Y) \cdot D(Z)}} = \frac{-0,578}{\sqrt{1,109 \cdot 0,734}} = -0,641$$

$\rho(Z,Y) = \rho(Y,Z)$

Na základě této hodnoty korelačního koeficientu můžeme říci, že mezi náhodnými veličinami Y a Z existuje **středně silná negativní korelace**, tj. že pravděpodobně s růstem Y bude Z klesat (lineárně).

$$cor(\boldsymbol{X}) = \begin{pmatrix} 1 & \rho(Y,Z) \\ \rho(Z,Y) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0,641 \\ -0,641 & 1 \end{pmatrix}$$

add)

Pro výpočet $E(Y|Z=2)$ potřebujeme znát podmíněnou pravděpodobnostní funkci $P(y|z)$. $P(z|y)$ jsme určili v příkladu 4.3. Je dána Tab. 4.7, kterou pro přehlednost uvádíme znovu.

$P(Y\|z)$				
Y/Z	0	1	2	3
0	0	0,500	0,500	1
1	0	0,250	0,500	0
2	0	0,250	0	0
3	1	0	0	0

$$E(Y|Z=2) = \sum_{i=1}^{4} y_i \cdot P(y_i|Z=2) = 0 \cdot 0,500 + 1 \cdot 0,500 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0,500$$

▲

Příklad 4.7. Poslední příklad v této kapitole bude věnován výpočtu číselných charakteristik popisujících spojitý náhodný vektor definovaný v příkladu 4.2.

Nechť $\boldsymbol{X} = (X, Y)$ je spojitý náhodný vektor popsaný hustotou

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, & (x,y) \in \langle 0;1\rangle \times \langle 0;1\rangle \\ 0, & (x,y) \notin \langle 0;1\rangle \times \langle 0;1\rangle \end{cases}$$

Určete:
a) $E(X)$, $E(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$,
b) $cov(X,Y)$, $var(\boldsymbol{X})$, $\rho(X,Y)$, $cor(\boldsymbol{X})$,
c) $E(X|Y) = 0,3$.

Řešení.
ada)
Pro určení marginálních charakteristik náhodného vektoru X využijeme marginální hustoty, které byly určeny v příkladu 4.4.

$$f_X(x) = \begin{cases} x+0,5, & x \in \langle 0;1\rangle \\ 0, & x \notin \langle 0;1\rangle \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} y+0,5, & y \in \langle 0;1\rangle \\ 0, & y \notin \langle 0;1\rangle \end{cases}$$

$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_x(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x \cdot (x+0,5)dx = [\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4}]_0^1 = \frac{7}{12}$

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_x(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 \cdot (x + 0,5)\,\mathrm{d}x = [\frac{x^4}{3} + \frac{x^3}{6}]_0^1 = \frac{5}{12}$

$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{5}{12} - (\frac{7}{12})^2 = \frac{11}{144}$

Vzhledem k symetrii $f_X(x)$ a $f_Y(y)$ můžeme přímo napsat, že $E(Y) = \frac{7}{12}$, $D(Y) = \frac{11}{144}$.

adb)

Pro určení kovariance použijeme opět její výpočetní vztah, tzn. že nejdříve musíme určit $E(XY)$.

$E(XY) = \int_0^1 \int_0^1 xy(x + y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^1 x^2y + xy^2)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 [\frac{x^2y^2}{2} + \frac{xy^3}{3}]_0^1\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (\frac{x^2}{2} + + \frac{x}{3})\,\mathrm{d}x = [\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{6}]_0^1 = \frac{1}{3}$

$cov(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y) = \frac{1}{3} - \frac{7}{12}\frac{7}{12} = -\frac{1}{144}$

$cov(Y, X) = cov(X, Y)$.

Kovarianční matice je

$$var(\boldsymbol{X}) = \begin{pmatrix} D(X) & cov(X, Y) \\ cov(Y, X) & D(Z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{144} & -\frac{1}{144} \\ -\frac{1}{144} & \frac{11}{144} \end{pmatrix}$$

Pomocí hodnot z kovarianční matice určíme korelační koeficient a tím i korelační matici.

$\rho(X, Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{D(X) \cdot D(Y)}} = \frac{-\frac{1}{144}}{\sqrt{\frac{11}{144}\frac{11}{144}}} = -\frac{1}{11}$

Z velikosti korelačního koeficientu můžeme usuzovat na to, že mezi X a Y je pravděpodobně slabá lineární závislost, tj. X a Y jsou **slabě negativně korelované** náhodné veličiny.

$$cor(\boldsymbol{X}) = \begin{pmatrix} 1 & \rho(X,Y) \\ \rho(Y,X) & 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{11} \\ -\frac{1}{11} & 1 \end{pmatrix}$$

adc)

Pro nalezení podmíněné střední hodnoty $E(X|Y=0,3)$ musíme určit podmíněnou hustotu $f(x|Y=0,3)$.

Je-li f_Y(y)$\neq$ 0:

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \begin{cases} \frac{x+y}{y+0{,}5}, & (x,y) \in \langle 0;1\rangle \\ 0, & (x,y) \notin \langle 0;1\rangle \end{cases}$$

$$f(x|Y=0,3) = \frac{f(x,0,3)}{f_Y(0,3)} \begin{cases} \frac{x+0{,}3}{0{,}3+0{,}5}, & x \in \langle 0;1\rangle \\ 0, & x \notin \langle 0;1\rangle \end{cases}$$

$$f(x|Y=0,3) = \begin{cases} \frac{10x+3}{8}, & x \in \langle 0;1\rangle \\ 0, & x \notin \langle 0;1\rangle \end{cases}$$

$$E(X|Y=0,3) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x|y)dx = \int_0^1 x \cdot \frac{10x+3}{8}dx = [\frac{10x^3}{24} + \frac{3x^2}{16}]_0^1 = \frac{29}{48}$$

▲

Obsah

78. strana ze 102

Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Kapitola 5

Diskrétní rozdělení pravděpodobnosti - řešené příklady

Příklad 5.1. Předpokládejme, že pravděpodobnost narození dívky je 0,49. Jaká je pravděpodobnost, že v rodině s 8 dětmi jsou
a) právě 3 dívky,
b) více než 2 dívky,
c) méně než 3 dívky.

Řešení. Považujeme-li narození dítěte za náhodný pokus, pak studovanou náhodnou veličinou X je počet dívek v rodině s 8 dětmi.

Předpokládejme, že náhodné pokusy jsou nezávislé, tj. že pohlaví dříve narozených dětí neovlivní pravděpodobnost narození dítěte určitého pohlaví při dalším „pokusu“. Pak můžeme náhodnou veličinu X považovat za binomickou (určuje počet úspěchů (narození dívky) v $n = 8$ pokusech, přičemž pravděpodobnost úspěchu $p = 0,49$ je stejná pro všechny pokusy).

$$X \text{ ... počet dívek v rodině s 8 dětmi}$$

$$X \to Bi(n; p), \text{ tj. } X \to Bi(8; 0,49)$$

Pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny X je pak dána

$$P(X = k) = \binom{8}{k}(0,49)^k(1 - 0,49)^{8-k} = \binom{8}{k}(0,49)^k(0,51)^{8-k}.$$

Nyní můžeme přistoupit ke hledání odpovědí na položené otázky.

ada) $P(X = 3) = \binom{8}{3}(0,49)^3(0,51)^{8-3} = \dfrac{8!}{5! \cdot 3!} \cdot (0,49)^3(0,51)^5 = 0,23$

V rodině s 8 dětmi jsou právě 3 dívky s pravděpodobností 0,23.

adb) $k > 2$; tj. $k = 3; 4; 5; 6; 7; 8$

$$P(X > 2) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7)+$$

$$+P(X = 8) = \sum_{k=3}^{8} \binom{8}{k} 0,49^k (0,51)^{8-k}$$

Vzhledem k tomu, že tento výpočet je poněkud zdlouhavý, pokusíme se hledanou pravděpodobnost najít pomocí pravděpodobnosti doplňku jevu $X > 2$.

$P(X > 2) = 1 - P(X \leqq 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] =$
$= 1 - \sum_{k=0}^{2} \binom{8}{k} 0,49^k (0,51)^{8-k} = 1 - 0,16 = 0,84$

V rodině s 8 dětmi jsou více než 2 dívky s pravděpodobností 0,84.

adc) $k < 3$; tj. $k = 0; 1; 2$

$$P(X < 3) = [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] = \sum_{k=0}^{2} \binom{8}{k} 0,49^k (0,51)^{8-k} = 0,16$$

V rodině s 8 dětmi jsou méně než 3 dívky s pravděpodobností 0,16.

▲

Příklad 5.2. Mezi 200 vajíčky určenými pro prodej v jisté maloobchodní prodejně je 50 vajíček prasklých. Jaká je pravděpodobnost, že vybereme-li si náhodně 20 vajec, bude 8 z nich prasklých?

Řešení. Jde o výběr bez vracení (vybrané vajíčko nevracíme zpět), jednotlivé pokusy jsou závislé.

Nadefinujeme-li náhodnou veličinu X jako

počet prasklých vajíček mezi 20-ti vybranými,

pak má tato náhodná veličina hypergeometrické rozdělení s parametry: $N = 200$; $M = 50; n = 20$.

$$X \to H(200; 50; 20)$$

200 (celkový počet vajec)

$\swarrow$ $\searrow$

50 (počet prasklých vajec) **150** (počet dobrých vajec)

Vzorec pro pravděpodobnostní funkci hypergeometrického rozdělení si nemusíme pamatovat, hledanou pravděpodobnost určíme z klasické definice pravděpodobnosti.

Počet všech možností určíme jako $C(200; 20)$, neboť celkem vybíráme 20 vajec z 200 vajec (bez ohledu na pořadí).

$$C(200; 20) = \binom{200}{20}$$

Počet příznivých možností určíme jako $C(50; 8) \cdot C(150; 12)$, neboť mezi vybranými 20-ti vejci má být 8 prasklých, tj. vybíráme 8 prasklých vajec z 50-ti prasklých a zároveň 12 (20-8) dobrých vajec ze 150-ti.

$$C(50; 8) \cdot C(150; 12) = \binom{50}{8} \cdot \binom{150}{12}$$

Pak

$$P(X = 8) = \frac{\binom{50}{8} \cdot \binom{150}{12}}{\binom{200}{20}} = 0,057.$$

Pravděpodobnost, že mezi 20 vybranými vejci je 8 prasklých je 0,057.

▲

Příklad 5.3. Jaká je pravděpodobnost, že aby padla na klasické kostce šestka, musíme házet
a) právě 5x,
b) více než 3x.

Řešení. Považujeme-li za náhodný pokus hod kostkou (opakované hody tvoří Bernoulliho pokusy), pak počet hodů nutných k 1. úspěchu (padnutí „6“) je geometrickou náhodnou veličinou X s parametrem $p = 1/6$ (pravděpodobnost úspěchu v každém pokusu).

$$X \to G\left(\frac{1}{6}\right)$$

Pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny X je pak definována jako

$$P(X = n) = \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{n-1} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}, 1 \leqq n < \infty.$$

ada)
Pravděpodobnost, že „6“ padne v 5. hodu určíme přímým dosazením do vztahu pro pravděpodobnostní funkci.

$$P(X = 5) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{5-1} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{4} \doteq 0,080$$

Pravděpodobnost, že poprvé padne šestka v 5. hodu je 8,0% .

Poznámka: *v případě, že bychom hodnotu pravděpodobnostní funkce hledali pomocí softwaru, v němž je geometrická náhodná veličina definována jako počet pokusů před prvním úspěchem, museli bychom otázku přeformulovat. Hledáme-li pravděpodobnost, že šestka* *padne v 5. hodu, je to totéž jako bychom hledali pravděpodobnost, že před prvním padnutím šestky musíme házet 4 krát.*

adb)

$$\begin{aligned} P(X>3) &= P(X=4)+P(X=5)+\ldots = \\ &= 1-P(X\leqq 3) = 1-[P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)] = \\ &= 1-\left[p+p(1-p)+p(1-p)^2\right] = \\ &= 1-\left[\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^2\right] \doteq 0,578 \end{aligned}$$

Pravděpodobnost, že poprvé padne šestka nejdříve ve 4. hodu je přibližně 0,578.

▲

Příklad 5.4. Dle http://ksicht.natur.cuni.cz/serialy/detektivni-chemie/3 je pravděpodobnost výskytu krevní skupiny A+ 35% . v polní nemocnici nutně potřebují najít 3 dárce krve s touto krevní skupinou. Potenciálních dárců je dostatek, nikdo z nich však nezná svou krevní skupinu. Jaká je pravděpodobnost, že pro nalezení 3 dárců krevní skupiny A+, budeme muset postupně vyšetřit

a) právě 10 potenciálních dárců,
b) více než 9 potenciálních dárců,
c) více než 7 a méně než 12 potenciálních dárců.

Řešení. Za náhodný pokus budeme považovat vyšetření jedné osoby (2 možné výsledky - má krevní skupinu A+ (úspěch), nemá krevní skupinu A+). Definujeme-li náhodnou veličinu X jako

počet osob, které musíme vyšetřit, chceme-li najít 3 dárce s krevní skupinou A+,

můžeme X považovat za negativně binomickou náhodnou veličinu.

$$X \to NB(3; 0,35)$$

Pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny X pak vypadá takto:

$$P(X = n) = \binom{n-1}{3-1}(0,35)^3(1-0,35)^{n-3} = \binom{n-1}{2}(0,35)^3(0,65)^{n-3};\ 3 \leqq n < \infty.$$

Nyní můžeme přistoupit k hledání konkrétních pravděpodobností.

ada) $P(X = 10) = \binom{9}{2}(0,35)^3(0,65)^7 \doteq 0,076.$

Pravděpodobnost, že pro nalezení 3 dárců krevní skupiny A+ musíme vyšetřit právě 10 potencionálních dárců je 0,076.

adb) $P(X > 9) = 1 - P(X \leqq 9) = 1 - \sum_{n=3}^{3} \binom{n-1}{2}(0,35)^3(0,65)^{n-3} \doteq 0,337.$

Pravděpodobnost, že pro nalezení 3 dárců krevní skupiny A+ musíme vyšetřit více než 9 potencionálních dárců je 0,337.

adc) $P(7 < X < 12) = \sum_{n=8}^{11} \binom{n-1}{2}(0,35)^3(0,65)^{n-3} \doteq 0,332.$

Pravděpodobnost, že pro nalezení 3 dárců krevní skupiny A+ musíme vyšetřit více než 7 a méně než 12 potencionálních dárců je 0,332.

▲

Příklad 5.5. V jisté nemocnici se průměrně 30 krát ročně vyskytne porucha srdeční činnosti po určité operaci. Předpokládejme, že se jednotlivé poruchy srdeční činnosti po dané operaci vyskytují nezávisle na sobě, s konstantní rychlosti výskytu. Určete
a) pravděpodobnost, že se v této nemocnici vyskytne příští měsíc právě 5 těchto poruch,
b) pravděpodobnost, že se v této nemocnici vyskytne příští měsíc 2 a více těchto poruch,
c) střední hodnotu a směrodatnou odchylku počtu těchto poruch během jednoho měsíce.

Řešení. Náhodnou veličinu

X ... počet výskytu poruch srdeční činnosti během měsíce (po dané operaci)

můžeme považovat za náhodnou veličinu s Poissonovým rozdělením. Její parametr λt určíme jako průměrný počet výskytu poruch srdeční činnosti během měsíce (střední hodnota Poissonova rozdělení je rovna λt).

$$t = 1 \text{ měsíc} \Rightarrow E(X) = \lambda t = \frac{30}{12} = 2,5 \Rightarrow X \to Po(2,5)$$

$$P(X = k) = \frac{(\lambda t)^k \, \mathrm{e}^{-\lambda t}}{k!}; \, 0 \leqq k < \infty$$

ada) Pravděpodobnost, že se v nemocnici vyskytne příští měsíc právě 5 těchto poruch, určíme jednoduše dosazením do pravděpodobnostní funkce.

$$P(X = 5) = \frac{(2,5)^5 \mathrm{e}^{-2,5t}}{5!} = 0,067 = 6,7\%$$

adb) Pravděpodobnost, že se v nemocnici vyskytne příští měsíc 2 a více těchto poruch, bychom museli určit jako součet pravděpodobností pro počet výskytu (k) od 2 do

∞. Proto pro výpočet použijeme v tomto případě pravděpodobnost doplňku daného jevu.

$$P(X \geqq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] = 1 - \sum_{k=0}^{1} \frac{(\lambda t)^k \, \mathrm{e}^{-\lambda t}}{k!} =$$

$$= 1 - \left[\mathrm{e}^{-2,5} + 2,5\mathrm{e}^{-2,5}\right] = 1 - 3,5\mathrm{e}^{-2,5} \doteq 0,713 = 71,3\%$$

adc) Střední hodnota i rozptyl náhodné veličiny X jsou rovny jejímu parametru, směrodatná odchylka je rovna odmocnině z rozptylu.

$$E(X) = D(X) =; \ \lambda t = 2,5 \ \sigma_x = \sqrt{D(X)} = \sqrt{2,5} \doteq 1,6.$$

V uvedené nemocnici dochází k $(2,5 \pm 1,6)$ poruchám srdeční činnosti (po určité operaci) měsíčně.

▲

Kapitola 6

Spojitá rozdělení pravděpodobnosti - řešené příklady

Příklad 6.1. Výrobce žárovek Edison ví, že průměrná životnost žárovek Edison je 10.000 h. v rámci své propagační kampaně chce garantovat dobu T, do níž se nespálí více než 3% žárovek. Určete tuto dobu. (Pro modelování doby života žárovek použijte exponenciální rozdělení.)

Řešení. X ... životnost žárovky (doba do poruchy) má exponenciální rozdělení.

$$X \rightarrow Exp(\lambda)$$

- Určíme parametr λ.
  $E(X) = 10\ 000h$.

$E(X) = \frac{1}{\lambda} \qquad \Rightarrow \lambda = 10^{-4}h^{-1}$

- Na základě zadané pravděpodobnosti najdeme dobu T. $P(X < T) \leqq 0,03$

  $F(T) \leqq 0,03$

  $1 - \mathrm{e}^{-\lambda T}$

  $0,97 \leqq \mathrm{e}^{-\lambda T}$

  $ln(0,97) \leqq -\lambda T$

  $T \leqq -\frac{1}{\lambda} \cdot ln(0,97)$

  $T \leqq -10^4 \cdot ln(0,97)$

  $T \doteq 304h.$

Výrobce může tvrdit, že více než 97% žárovek má životnost delší než 304 hodin.

▲

Příklad 6.2. Předpokládejme, že doba do poruchy určitého systému je modelována Weibullovým rozdělením s lineární a rostoucí intenzitou poruch a parametrem měřítka $\Theta = 50$.
a) Jaká je intenzita poruch systému po deseti hodinách bezporuchové funkce?
b)Jaká je pravděpodobnost, že systém bude pracovat bez poruchy během počátečních 100 hodin?

Řešení.

$$X\text{...doba do poruchy, } X \to W(50;\beta)$$

Hodnotu parametru tvaru β určíme na základě poznámky, že intenzita poruch je lineární a rostoucí. Obecný tvar intenzity poruch Weibullova rozdělení je

$$\lambda(t) = konstanta \cdot t^{\beta-1},$$

z čehož vyplývá, že $\beta = 2$.

$$X \to W(\Theta = 50; \beta = 2)$$

ada) Hledanou intenzitu poruch určíme dosazením do vztahu

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\Theta^{\beta} t^{\beta-1}}.$$

$\lambda(10) = \frac{2}{50^2} 10^{2-1} = 0,008$

Intenzita poruch daného systému je po 10 hodinách provozu 0,008. Tj. pokud byl systém po 10 hodin bezporuchový, pak pravděpodobnost, že v následujícím velmi krátkém časovém intervalu Δt dojde k poruše, je 0,008Δt.

adb) Pravděpodobnost, že systém bude prvních 100 hodin bezporuchový, určíme přes jev opačný, jehož pravděpodobnost udává distribuční funkce

$$F(t) = 1 - \mathrm{e}^{-(\frac{t}{\Theta})^{\beta}}, t > 0, \Theta > 0, \beta > 0.$$

$$P(X > 100) = 1 - F(100) = 1 - [1 - \mathrm{e}^{-(\frac{100}{50})^2}] = \mathrm{e}^{-(\frac{100}{50}^2)} = \mathrm{e}^{-4} = 0,018$$

Pravděpodobnost, že daný systém bude prvních 100 hodin bezporuchový je 0,018.

▲

Příklad 6.3. Určete:
a) $\phi(0,54)$,
b) $\phi(-2,42)$,
c) $z_{0,75}$,
d) $z_{0,25}$.

Řešení. ada) Příslušnou distribuční funkci nalezneme v Tabulce 1 (příloha Tabulky). V prvním sloupci je uveden argument distribuční funkce s přesností na jedno desetinné místo (0, 5), identifikátor druhého sloupce udává druhé desetinné místo argumentu (4).

$$\phi(0,54) = 0,705$$

adb) Pro nalezení distribuční funkce záporného argumentu musíme použít převodní vztah

$$\phi(z) = 1 - \phi(-z); \qquad -\infty < z < \infty$$

V našem případě:

$$\begin{aligned} \phi(-2,42) &= 1 - \phi(2,42) \\ \phi(-2,42) &= 1 - 0,992 \quad \text{(viz Tabulka 1)} \\ \phi(-2,42) &= 0,008 \end{aligned}$$

adc) Pro určení 100p%-ního kvantilu se musíme pokusit najít p uvnitř tabulky a určit pro ně příslušnou hodnotu z_p.

$$\phi(z_p = p)$$

V našem případě:

$$\begin{aligned} \phi(z_{0,75}) &= 0,75 \\ z_{0,75} &\doteq 0,67 \quad \text{(viz Tabulka 1)} \end{aligned}$$

Obsah
94. strana ze 102
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

add) v Tabulce 1 nalezneme hodnoty (50 až 100)%-ních kvantilů. Pro nalezení (0 až 50)%-ních kvantilů musíme použít převodní vztah mezi kvantily, který si tímto odvodíme:

$$\phi(z_p) = p; \phi(z_{1-p} = 1 - p)$$

$$1 - \phi(z_p) = 1 - p$$

$$\phi(-z_p) = \phi(z_{1-p})$$

$$-z_p = z_{1-p}$$

V našem případě:

- $z_{0,25}$ v Tabulce 1 nenajdeme.
- $z_{0,25} = -z_{1-0,25} = -z_{0,75}$
- Nalezneme $z_{0,75}$.
  $\phi(z_{0,75}) = 0,75$
  $z_{0,75} = 0,67$
- Určíme $z_{0,25}$.
  $z_{0,25} = -z_{0,75} = -0,67$

▲

Příklad 6.4. Nechť náhodná veličina X modelující odchylku šířky výrobku od požadované hodnoty má normální rozdělení se střední hodnotou 10 mm a směrodatnou odchylkou 5 mm.
Určete:
a) $F(7)$,
b) $x_{0,75}$,
a) $x_{0,30}$,
Vysvětlete praktický význam nalezených informací.

Řešení.

$$X \to N(10; 25) \Rightarrow \mu = 10; \sigma^2 = 25$$

ada) Distribuční funkci normální náhodné veličiny určíme pomocí standardizace.

$$\begin{aligned}
F(x) &= \phi(\tfrac{x-\mu}{\sigma}) \\
F(7) &= \phi\left(\frac{7-10}{\sqrt{(25)}}\right) = \phi(-0,6) \\
F(7) &= 1 - \phi(0,6) \\
F(7) &= 1 - 0,726 \qquad \text{(viz Tabulka 1)} \\
F(7) &= 0,274
\end{aligned}$$

Hodnota distribuční funkce $F(7)$ udává pravděpodobnost, že $X < 7$.

$$\begin{aligned}
F(7) &= P(X < 7) \\
P(X < 7) &= 0,274
\end{aligned}$$

V našem případě lze tedy tvrdit, že pravděpodobnost toho, že odchylka šířky výrobku od požadované hodnoty bude maximálně $7\,mm$, je 27,4 %.

adb) Postup při určení horního kvartilu je následující (opět využijeme standardizace).

$$\begin{aligned}
F(x_{0,75}) &= 0,75 \\
\phi\left(\frac{x_{0,75}-10}{\sqrt{25}}\right) &= 0,75 \\
\frac{x_{0,75}-10}{\sqrt{25}} &= 0,67 \qquad \text{(viz Tabulka 1)} \\
x_{0,75} &= 5 \cdot 0,67 + 10 \\
x_{0,75} &= 13,35 \doteq 13
\end{aligned}$$

Horní kvartil udává hodnotu náhodné veličiny, která nebude překročena s pravděpodobností 75 %.

$$\begin{aligned}
F(x_{0,75}) &= 0,75 \\
P(X < x_{0,75}) &= 0,75 \\
P(X < 13) &\doteq 0,75
\end{aligned}$$

Tzn., že s pravděpodobností 75 % nepřekročí odchylka šířky od požadované hodnoty $13\,mm$.

adc) Poněkud odlišný postup musíme použít pro nalezení 30 % kvantilu:

$$\begin{aligned}
F(x_{0,30}) &= 0,30 \\
\phi\left(\frac{x_{0,30}-10}{\sqrt{25}}\right) &= 0,30
\end{aligned}$$

Zavedeme-li substituci $y = \frac{x_{0,3}-10}{\sqrt{25}} = \frac{x_{0,3}-10}{5}$, pak $\phi(y) = 0,3$.

V této chvíli však ještě pro nalezení y nemůžeme použít Tabulku 1, protože v této tabulce jsou uvedeny pouze hodnoty distribuční funkce od 0,50 do 1,00. Využijeme toho, že $\phi(-y) = 1 - \phi(y)$ a rovnici upravíme do vhodnějšího tvaru.

$$\begin{aligned} \phi(y) &= 0,30 \\ 1-\phi(y) &= 1-0,30 \\ \phi(-y) &= 0,7 \end{aligned}$$

Nyní můžeme Tabulku 1 použít pro nalezení $(-y)$.

$$(-y) = 0,525 \qquad \text{(viz Tabulka 1)}$$

Zpětnou substitucí získáme hodnotu $x_{0,3}$.

$$\begin{aligned} \left(-\frac{x_{0,3}-10}{5}\right) &= 0,525 \\ x_{0,3} &= -5 \cdot 0,525 + 10 \\ x_{0,3} &= 7,375 \doteq 7 \end{aligned}$$

30 % kvantil udává hodnotu náhodné veličiny, která nebude překročena s pravděpodobností 30 %.

$$\begin{aligned} F(x_{0,3}) &= 0,3 \\ P(X < x_{0,3}) &= 0,3 \\ P(X < 7) &\doteq 0,3 \end{aligned}$$

Tzn., že u cca. 30 % výrobků bude šířka výrobku větší než požadovaná hodnota o méně než 7 mm.

▲

Příklad 6.5. Stanovme pravděpodobnost, že náhodná veličina X mající rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ bude mít hodnotu z intervalu $(\mu - k \cdot \sigma; \mu + k \cdot \sigma)$ pro dané kladné k.

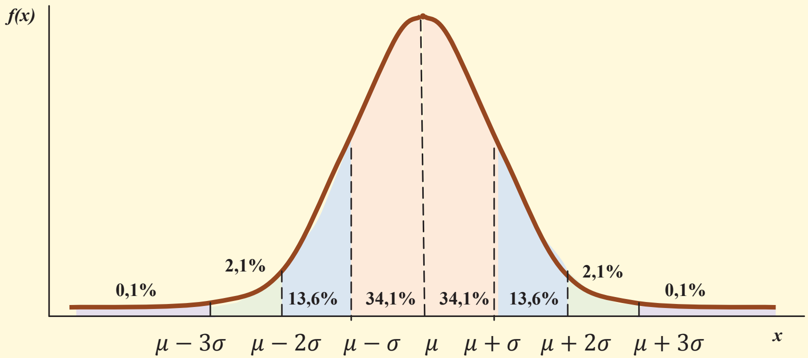
Řešení. Pro $k > 0$:

$$P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) = F(\mu + k\sigma) - F(\mu - k\sigma) = \phi(\frac{(\mu+k\sigma)-\mu}{\sigma}) - \phi(\frac{(\mu-k\sigma)-\mu}{\sigma} =)$$
$$= \phi(k) - \phi(-k) = \phi(k) - [1 - \phi(k)] = 2 \cdot \phi(k - 1)$$

Hodnoty této pravděpodobnosti pro některé hodnoty k uvádí Tab. 6.1 a Obr. 6.1.

Tab. 6.1: Pravděpodobnost výskytu realizace normální náhodné veličiny v intervalu $(\mu - k\sigma; \mu + + k\sigma)(k = 1, 2, 3)$

k	$P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma)$
1	0,682
2	0,954
3	0,998



Obr. 6.1: Pravděpodobnost výskytu realizace normální náhodné veličiny ve znázorněných intervalech

▲

Příklad 6.6. Nechť X je náhodná veličina s logaritmicko-normálním rozdělením s parametry: $\mu=2$; $\sigma^2=9$.
Určete:
a) pravděpodobnost, že náhodná veličina X je z intervalu (0;30),
b) medián dané náhodné veličiny,
c) střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X.

Řešení.

$$X \to LN(2;9)$$

ada) Pravděpodobnost, že náhodná veličina X je z intervalu (0;30) můžeme určovat rovněž jako pravděpodobnost, že náhodná veličina X je menší než 30, neboť logaritmicko-normální náhodná veličina může nabývat pouze kladných hodnot.

Připomeňme si vztah pro určování distribuční funkce logaritmicko-normální náhodné veličiny.

$$F(X) = \begin{cases} \phi(\frac{lnx-\mu}{\sigma}), & x > 0 \\ 0, & x \leqq 0 \end{cases}$$

A nyní již přejděme k určení hledané pravděpodobnosti.

$$P(0 < X < 30) = F(30) - F(0) = \phi(\tfrac{ln30-2}{\sqrt{9}}) - 0 = \phi(0,47) = 0,681$$

nebo

$$P(0 < X < 30) = F(30) = \phi(\tfrac{ln30-2}{\sqrt{9}}) = \phi(0,47) = 0,681$$

adb) Pro určení mediánu můžeme použít vztah pro 100p% kvantil.

$x_p = \mathrm{e}^{\mu+\sigma\cdot x_p}$

$z_{0,5} = 0$ (viz Tabulka 1)$\Rightarrow x_{0,5} = \mathrm{e}^{2+\sqrt{(}9)} = \mathrm{e}^2 \doteq 7,4.$

adc) Střední hodnotu a rozptyl určíme na základě výše uvedených vztahů.

$EX = \mathrm{e}^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} \Rightarrow EX = \mathrm{e}^{2+\frac{9}{2}} = \mathrm{e}^{\frac{13}{2}} \doteq 665,1$

$DX = \mathrm{e}^{2\mu+\sigma^2}(\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1) \Rightarrow DX = \mathrm{e}^{2\cdot 2+9}(\mathrm{e}^9 - 1) \doteq 3,6 \cdot 10^2$

▲