ŘADY

Jiří Bouchala a Petr Vodstrčil

Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století* (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Jiří Bouchala a Petr Vodstrčil
Řady

ISBN

Předmluva

Výslednou podobu těchto skript ovlivnili mnozí z našich učitelů, kolegů i studentů. Všem jsme jim upřímně vděční.

Čtenáře prosíme o shovívavost a sdělení všech připomínek.[1]

Tento i ostatní v rámci projektu *Matematika pro inženýry 21. století* připravované výukové materiály lze najít na stránkách http://mi21.vsb.cz/. Podívejte se na ně!

V Ostravě, a to v lednu 2011 — Jiří Bouchala a Petr Vodstrčil

[1] Všechny připomínky (výhrady, komentáře, doporučení, výhružky a dary) zasílejte (prosíme) na naše e-mailové adresy: `jiri.bouchala@vsb.cz`, `petr.vodstrcil@vsb.cz`

Obsah

Kapitola 1

Řady (reálných) čísel

1.1 Součet a konvergence číselné řady

Definice 1.1. Řadou (reálných čísel) rozumíme výraz

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{1.1}$$

kde pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n \in \mathbb{R}$.[a]
Číslo a_n nazýváme n-tým členem řady (1.1), posloupnost (s_n) definovanou předpisem

$$s_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

nazýváme posloupností částečných součtů řady (1.1).
Existuje-li limita

$$s := \lim s_n \in \mathbb{R}^*,$$

nazýváme ji součtem řady (1.1) a píšeme [b]

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s;$$

je-li navíc $s \in \mathbb{R}$, říkáme, že řada (1.1) konverguje. Nemá-li řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ součet,[c] nebo je-li $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \in \{+\infty, -\infty\}$, nazýváme (1.1) divergentní řadou.

[a] Tzn. že (a_n) je posloupností reálných čísel.

[b] Zde nepřehlédněme, že symbolem $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ značíme řadu i její součet, tj. číslo! Ale nebojme se, z kontextu bude vždy jasné, o které z těchto dvou možností právě mluvíme.

[c] Tím rozumíme, že $\lim s_n$ neexistuje.

Příklady 1.2.

1)

$$1+2+3+\dots\ =\sum_{n=1}^{\infty} n=+\infty \quad \text{... divergentní (aritmetická) řada.}$$

$$\Bigl(s_n=\frac{n(n+1)}{2}\to+\infty\,.\Bigr)$$

2)

$$1+(-1)+1+(-1)+\dots\ =\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \quad \text{... divergentní řada (nemá součet).}$$

$$\Bigl(s_n=\begin{cases}0, & \text{je-li } n \text{ sudé,}\\ 1, & \text{je-li } n \text{ liché.}\end{cases}\Bigr)$$

Zde pozor na `umístění závorek`. Platí totiž:

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots\ =0+0+0+\dots\ =0,$$

$$1+(-1+1)+(-1+1)+\dots\ =1+0+0+\dots\ =1.$$

3) Součet (geometrické) řady

$$1+q+q^2+\dots\ =\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1},$$

kde $q\in\mathbb{R}$, existuje právě tehdy, je-li $q>-1$, a platí pro něj

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}=\begin{cases}+\infty, & \text{je-li } q\geqq 1,\\ \frac{1}{1-q}, & \text{je-li } -1<q<1.\end{cases}$$

$$\Bigl(s_n=\begin{cases}n, & \text{je-li } q=1,\\ \frac{1-q^n}{1-q}, & \text{je-li } q\neq 1.\end{cases}\Bigr)$$

4)

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots\ =\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty \quad \text{... divergentní (tzv. harmonická) řada.}$$

(Pokuste se dokázat uvedenou rovnost pomocí (zřejmě platícího) tvrzení

$$\forall k\in\mathbb{N}:\quad \frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\frac{1}{2^k+3}+\dots+\frac{1}{2^{k+1}}\geqq\frac{1}{2^{k+1}}\left(2^{k+1}-2^k\right)=\frac{1}{2}.)$$

Věta 1.3 (Nutná podmínka konvergence). *Konverguje-li řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*, je* $\lim a_n = 0$.

Důkaz. Podle předpokladu pro posloupnost částečných součtů (tj. pro posloupnost $s_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$) platí

$$s := \lim s_n \in \mathbb{R} \ (!),$$

a proto

$$\lim a_n = \lim(s_n - s_{n-1}) = \lim s_n - \lim s_{n-1} = s - s = 0.$$

$\square$

Příklady 1.4.

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2$ diverguje, protože $\lim(-1)^n n^2$ neexistuje.

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2$ diverguje, protože $\lim n^2 = +\infty$.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje, a to přesto, že $\lim \frac{1}{n} = 0$.

   (Tvrzení 1.3 tedy `nelze obrátit`!)

Věta 1.5 (Bolzanova–Cauchyho podmínka). *Řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje právě tehdy, platí-li*

$$\left(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+\right) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) \left(\forall m, n \in \mathbb{N};\ n_0 \leqq m < n\right) : \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon.$$

Důkaz. Věta je snadným důsledkem známého tvrzení, že reálná posloupnost je konvergentní právě tehdy, je-li cauchyovská, a pozorování, že výše uvedená podmínka je ekvivalentní s tvrzením, že posloupnost $s_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ částečných součtů řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je cauchyovská, tzn.

$$\left(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+\right) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) \left(\forall n, m \in \mathbb{N};\ n, m \geqq n_0\right) : \ |s_n - s_m| < \varepsilon.$$

$\square$

Věta 1.6. *Konverguje-li řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, *konverguje i řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Důkaz. Nejdříve definujme (pro každé $n \in \mathbb{N}$):

$$\begin{aligned} a_n^+ &:= \max\{a_n, 0\} = \frac{1}{2}\big(|a_n| + a_n\big) \geqq 0, \\ a_n^- &:= \max\{-a_n, 0\} = \frac{1}{2}\big(|a_n| - a_n\big) \geqq 0; \\ s_n^+ &:= a_1^+ + a_2^+ + \cdots + a_n^+, \\ s_n^- &:= a_1^- + a_2^- + \cdots + a_n^-. \end{aligned}$$

Máme dokázat, že posloupnost částečných součtů

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k^+ - a_k^-) = \sum_{k=1}^{n} a_k^+ - \sum_{k=1}^{n} a_k^- = s_n^+ - s_n^-$$

je konvergentní, tzn. že má konečnou limitu. K tomu stačí ukázat, že jsou konvergentní posloupnosti (s_n^+) a (s_n^-). Obě tyto posloupnosti jsou však zřejmě neklesající a díky předpokladu

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| =: s \in \mathbb{R}$$

a vztahům

$$\begin{aligned} s_n^+ &= a_1^+ + a_2^+ + \cdots + a_n^+ \leqq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = s, \\ s_n^- &= a_1^- + a_2^- + \cdots + a_n^- \leqq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = s, \end{aligned}$$

které platí pro každé $n \in \mathbb{N}$, i shora omezené. Jejich konvergence tak plyne přímo ze známého tvrzení o limitě monotónní posloupnosti. [1] $\square$

[1]**Věta o limitě monotónní posloupnosti.**

Je-li posloupnost (α_n) *neklesající, je*

$$\lim \alpha_n = \sup\{\alpha_n : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Je-li posloupnost (β_n) *nerostoucí, je*

$$\lim \beta_n = \inf\{\beta_n : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Definice 1.7. Konverguje-li řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, říkáme, že (konvergentní!) řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně. Konverguje-li řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a současně řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje, nazýváme $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ neabsolutně konvergentní řadou. [a]

[a] Všimněme si, že součet řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ existuje vždy (odpovídající posloupnost částečných součtů je neklesající), může být však roven $+\infty$.

Příklady 1.8.

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ ... `neabsolutně konvergentní` řada.
   (Důkaz bude proveden později pomocí `Leibnizova kritéria`.)
2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ ... `absolutně konvergentní` řada.
   (Důkaz bude proveden později pomocí `integrálního kritéria`.)

1.2 Kritéria absolutní konvergence

Úmluva. Napíšeme-li

„*$V(n)$ platí pro všechna dost velká $n \in \mathbb{N}$*“,

rozumíme tím, že

$$„(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqq n_0):\ V(n)“.$$

Věta 1.9 (srovnávací kritérium). *Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou takové řady, že*

i) *$|a_n| \leqq b_n$ pro všechna dost velká $n \in \mathbb{N}$,*

ii) *$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje.*

Pak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně.

Důkaz. Z předpokladů plyne, že posloupnost částečných součtů řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ je shora omezená, a protože je – jak jsme si již uvědomili dříve – navíc neklesající, má `konečnou` limitu. Touto limitou je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.[1] $\square$

Příklad 1.10.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(\frac{1}{1977} \right)^n$$

`konverguje absolutně`, protože pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left| \frac{(-1)^n}{n} \left(\frac{1}{1977} \right)^n \right| \leqq \left(\frac{1}{1977} \right)^n$$

a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1977}\right)^n$ je konvergentní (geometrická) řada $(-1 < q := \frac{1}{1977} < 1)$.

Pozorování (a zřejmý důsledek věty 1.9.)

Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou takové řady, že $0 \leqq a_n \leqq b_n$ pro všechna dost velká $n \in \mathbb{N}$ a že $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$. Potom platí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$.

Příklad 1.11.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1966+n)}{n}$$

diverguje, protože platí

$$0 \leqq \frac{1}{n} \leqq \frac{\ln(1966+n)}{n} \text{ (pro každé } n \in \mathbb{N})$$

a navíc $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

[1] Čtenář by si měl předložený důkaz, pokud mu není zcela jasný, rozepsat a rozmyslet podrobně!

Věta 1.12 (podílové kritérium, d'Alembertovo). *Uvažujme řadu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. *Pak platí tato tvrzení:*

i) *Existuje-li* $q \in (0,1)$ *takové, že*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leqq q \quad \textit{pro všechna dost velká } n \in \mathbb{N},$$

konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolutně.*

ii) *Je-li*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leqq 1 \quad \textit{pro všechna dost velká } n \in \mathbb{N},$$

tak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Důkaz.

a) Nejdříve dokažme tvrzení i).

$$|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{n_0}| + |a_{n_0+1}| + |a_{n_0+2}| + \ldots \leqq$$

$$\leqq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{n_0-1}| + |a_{n_0}| + q|a_{n_0}| + q^2|a_{n_0}| + \ldots =$$

$$= |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{n_0-1}| + |a_{n_0}|(1 + q + q^2 + \ldots) =$$

$$= |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{n_0-1}| + |a_{n_0}| \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} =$$

$$= |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{n_0-1}| + |a_{n_0}| \frac{1}{1-q} < +\infty.$$

b) I důkaz tvrzení ii) je snadný. Z předpokladu

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geqq 1 \quad \text{pro všechna dost velká } n \in \mathbb{N}$$

plyne, že

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqq n_0): \ |a_{n+1}| \geqq |a_n| > 0,$$

a proto
$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqq n_0):\ |a_n| \geqq |a_{n_0}| > 0.$$
Odtud lze snadno usoudit, že neplatí nutná podmínka konvergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, tj. tvrzení $\lim a_n = 0$ (viz větu 1.3). Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

□

Snadným důsledkem věty 1.12 je následující věta.

Věta 1.13 (limitní podílové (d'Alembertovo) kritérium).

i) *Je-li*
$$\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1,$$
konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolutně.*

ii) *Je-li*
$$\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1,$$
tak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Důkaz.

a) Nejdříve se podívejme, proč platí tvrzení i). Zvolme (libovolně)
$$q \in \left(\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|, 1\right) \subset (0,1).$$
Pak zřejmě platí
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leqq q \quad \text{pro všechna dost velká } n \in \mathbb{N},$$
a dokazované tvrzení proto plyne přímo z již dokázaného tvrzení i) věty 1.12.

b) Důkaz tvrzení ii). Je-li
$$\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1,$$
je
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geqq 1 \quad \text{pro všechna dost velká } n \in \mathbb{N}.$$

Dokazovaná divergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ tak plyne přímo z tvrzení ii) věty 1.12.

□

Příklady 1.14.

1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{3^n} \quad \text{konverguje absolutně,}$$

protože

$$\left| \frac{(-1)^{n+1} \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}}{(-1)^n \frac{n^2}{3^n}} \right| = \frac{1}{3} \frac{(n+1)^2}{n^2} \to \frac{1}{3} < 1.$$

2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n} \quad \text{diverguje,}$$

protože

$$\left| \frac{\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}}{\frac{n!}{10^n}} \right| = \frac{1}{10} \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{1}{10}(n+1) \to +\infty > 1.$$

3) `Pozor!` Při vyšetřování konvergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ se podílové kritérium nehodí, protože

$$1 > \left| \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \right| = \frac{n}{n+1} \to 1.$$

Věta 1.15 (odmocninové kritérium, Cauchyho). *Uvažujme řadu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. *Pak platí tato tvrzení:*

i) *Existuje-li* $q \in (0,1)$ *takové, že*

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leqq q \quad \textit{pro všechna dost velká } n \in \mathbb{N},$$

tak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně.*

ii) *Je-li pro nekonečně mnoho* $n \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geqq 1,$$

tak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Důkaz.

a) Nejdříve dokažme tvrzení i). Z předpokladů plyne, že

$$|a_n| \leqq q^n \quad \text{pro všechna dost velká } n \in \mathbb{N}$$

a že řada $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ konverguje (jedná se o geometrickou řadu s kvocientem $q \in (0,1)$). Dokazované tvrzení proto plyne ze srovnávacího kritéria (viz větu 1.9).

b) Nyní dokažme tvrzení ii). Z předpokladů plyne, že pro nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$ platí $|a_n| \geqq 1$. To však znamená, že neplatí $\lim a_n = 0$, tj. není splněna nutná podmínka konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (viz větu 1.3). Proto řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

□

I tato věta má svou „limitní“ verzi.

Věta 1.16 (limitní odmocninové (Cauchyho) kritérium).

i) *Je-li*

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1,$$

konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolutně.*

ii) *Je-li*

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} > 1,$$

tak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Důkaz.

a) Důkaz tvrzení i). Zvolme (libovolně)

$$q \in \left(\lim \sqrt[n]{|a_n|}, 1\right) \subset (0,1).$$

Pak zřejmě platí

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leqq q \quad \text{pro všechna dost velká } n \in \mathbb{N}.$$

Dokazované tvrzení plyne z první části věty 1.15.

b) Důkaz tvrzení ii). Je-li

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} > 1,$$

je

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geqq 1 \quad \text{pro všechna dost velká } n \in \mathbb{N},$$

a proto

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geqq 1 \quad \text{pro nekonečně mnoho } n \in \mathbb{N}.$$

Dokazovaná divergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ tak plyne přímo z tvrzení ii) věty 1.15.

□

Příklady 1.17.

1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-1} \right)^n \text{ konverguje absolutně,}$$

protože

$$\sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{3n-1} \right)^n} = \frac{2n+1}{3n-1} \to \frac{2}{3} < 1.$$

2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^{1993}} \text{ diverguje,}$$

protože

$$\sqrt[n]{\frac{2^n}{n^{1993}}} = \frac{2}{(\sqrt[n]{n})^{1993}} \to 2 > 1.$$

3) `Pozor!` Ani odmocninové kritérium nám při rozhodování, zda řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ konverguje, nepomůže. Platí totiž (pro každé $n \in \mathbb{N},\ n > 1$)

$$1 > \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1.$$

Věta 1.18 (Raabeovo kritérium). *Uvažujme řadu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. *Pak platí tato tvrzení:*

i) *Existuje-li* $q > 1$ *takové, že*

$$n\left(1 - \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) \geqq q \quad \textit{pro všechna dost velká } n \in \mathbb{N},$$

tak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně.*

ii) *Je-li*

$$n\left(1 - \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) \leqq 1 \quad \textit{pro všechna dost velká } n \in \mathbb{N},$$

tak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *nekonverguje absolutně (tj. tato řada buď konverguje neabsolutně, nebo diverguje).*

Důkaz.

a) Nejprve dokažme tvrzení i).
Z podmínky $n\left(1 - \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) \geqq q$ plyne $n(|a_n| - |a_{n+1}|) \geqq q|a_n|$. Předpokládáme tedy, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, platí

$$\begin{aligned} n_0(|a_{n_0}| - |a_{n_0+1}|) &\geqq q|a_{n_0}|, \\ (n_0+1)(|a_{n_0+1}| - |a_{n_0+2}|) &\geqq q|a_{n_0+1}|, \\ &\dots \\ n(|a_n| - |a_{n+1}|) &\geqq q|a_n|. \end{aligned}$$

Sečtením těchto nerovností dostaneme

$$n_0|a_{n_0}| + (|a_{n_0+1}| + \cdots + |a_n|) - n|a_{n+1}| \geqq q|a_{n_0}| + q(|a_{n_0+1}| + \cdots + |a_n|),$$

odkud snadno odvodíme

$$(q-1)(|a_{n_0+1}| + \cdots + |a_n|) \leqq n_0|a_{n_0}| - n|a_{n+1}| - q|a_{n_0}| \leqq n_0|a_{n_0}|.$$

Vzhledem k tomu, že $q - 1 > 0$, dostaneme

$$|a_{n_0+1}| + \cdots + |a_n| \leqq \frac{n_0|a_{n_0}|}{q-1} \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}, n > n_0.$$

Vidíme, že posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ je shora omezená, a proto řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně.

b) Nyní ukažme, proč platí tvrzení ii), tj. proč (jsou-li splněny uvedené předpoklady) řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje.

Podmínku $n\left(1 - \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) \leqq 1$ lze psát ve tvaru $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geqq 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$. Předpokládáme tedy existenci $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \geqq 2$, takového, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geqq n_0$, platí

$$\left|\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}}\right| \geqq \frac{n_0 - 1}{n_0},$$
$$\left|\frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}}\right| \geqq \frac{n_0}{n_0 + 1},$$
$$\dots$$
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geqq \frac{n - 1}{n}.$$

Vynásobíme-li výše uvedené nerovnosti (jsou to nerovnosti mezi kladnými čísly), dostaneme

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_{n_0}}\right| \geqq \frac{n_0 - 1}{n},$$

a proto

$$|a_{n+1}| \geqq |a_{n_0}|(n_0 - 1)\frac{1}{n} \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}, n \geqq n_0.$$

Odtud a z divergence harmonické řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ vyplývá, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{n+1}|$ (a tedy i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$) diverguje (viz důsledek věty 1.9).

□

Následující věta je snadným důsledkem věty 1.18.

Věta 1.19 (limitní Raabeovo kritérium).

i) *Je-li*

$$\lim n \left(1 - \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) > 1,$$

konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolutně.*

ii) *Je-li*

$$\lim n \left(1 - \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) < 1,$$

řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *nekonverguje absolutně (tj. buď tato řada konverguje neabsolutně, nebo diverguje).*

Důkaz. Důkaz lze provést podobným způsobem jako u věty 1.13. Přenechme jej proto zcela pilnému čtenáři. □

Příklady 1.20.

1) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ konverguje, neboť

$$\lim n\left(1-\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) = \lim n\left(1-\frac{n^3}{(n+1)^3}\right) =$$
$$= \lim \frac{n((n+1)^3-n^3)}{(n+1)^3} = \lim \frac{3n^3+3n^2+n}{n^3+3n^2+3n+1} = 3 > 1.$$

2) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}$ je divergentní, neboť

$$\lim n\left(1-\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) = \lim n\left(1-\frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2}\right) =$$
$$= \lim n\left(1-\frac{2n+1}{2(n+1)}\right) = \lim \frac{n}{2n+2} = \frac{1}{2} < 1.$$

O konvergenci této řady bychom podílovým kritériem nerozhodli, protože

$$1 > \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to 1.$$

Věta 1.21 (integrální kritérium). *Nechť funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je* `nerostoucí` *na intervalu $\langle 1, +\infty)$ a nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí, že $|a_n| = f(n)$.*
Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně právě tehdy, konverguje-li nevlastní integrál $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ (tzn. existuje-li konečná limita $\lim_{c\to\infty} \int_1^c f(x)\,\mathrm{d}x$.)

Důkaz. Nejdříve pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujme

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

a všimněme si, že existují limity [1]

$$\lim s_n = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \in \mathbb{R}^*,$$

$$\lim_{c\to\infty} \int_1^c f(x) = \lim \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}^*.$$

[1] Otázka čtenáři: „*Proč existují?*“

Máme vlastně dokázat ekvivalenci

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty \;\Leftrightarrow\; \int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x < +\infty. \tag{1.2}$$

Z předpokladů plyne[1]

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k| = \sum_{k=1}^{n} f(k) \geqq \int_1^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \geqq \sum_{k=2}^{n+1} f(k) = \sum_{k=2}^{n+1} |a_k| = s_{n+1} - |a_1|.$$

Odtud limitním přechodem ($n \to \infty$) získáme nerovnosti

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \geqq \int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \geqq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| - |a_1|,$$

z nichž již snadno plyne dokazovaná ekvivalence (1.2). □

Příklady 1.22.

1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \text{ konverguje absolutně,}$$

protože

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\infty} = 0 - (-1) = 1 < +\infty.$$

2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverguje,}$$

protože

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln x]_1^{\infty} = +\infty - 0 = +\infty.$$

(Čtenář by si měl rozmyslet, pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.)

[1] Zde je užitečné nakreslit si obrázek!

1.3 Kritéria (neabsolutní) konvergence

Možná bude užitečné upozornit čtenáře už teď, že v literatuře běžně užívaný termín „kritéria neabsolutní konvergence“ je poněkud matoucí. V následujících větách se netvrdí, že příslušná řada (za jistých předpokladů) `konverguje neabsolutně`, ale pouze to, že `konverguje`.

Nejdříve si uveďme kritérium týkající se konvergence tzv. alternujících řad (to jsou řady, jejichž členy pravidelně „střídají znaménka“).

Věta 1.23 (Leibnizovo kritérium). *Nechť (a_n) je monotónní posloupnost definovaná na $\mathbb{N}$ a taková, že* $\lim a_n = 0$.[a] *Potom řada*

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\, a_n$$

konverguje.

[a] Všimněme si, že pro monotónní posloupnost (a_n) s nulovou limitou platí jedna z možností:

i) $\forall n \in \mathbb{N}:\ 0 \leqq a_{n+1} \leqq a_n$,
ii) $\forall n \in \mathbb{N}:\ 0 \geqq a_{n+1} \geqq a_n$.

Důkaz. Předpokládejme například, že

$$\forall n \in \mathbb{N}:\ 0 \leqq a_{n+1} \leqq a_n,$$

a vyberme z posloupnosti

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$$

částečných součtů zkoumané řady posloupnost lichých (vyjma prvního) a posloupnost sudých členů. Tzn. uvažujme posloupnosti

$$s_n^* := s_{2n+1}, \quad s_n^{**} := s_{2n}.$$

Protože díky předpokladu ii) víme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$s_{n+1}^* = s_{2n+3} = s_{2n+1} - a_{2n+2} + a_{2n+3} \leqq s_{2n+1} = s_n^*,$$
$$s_{n+1}^{**} = s_{2n+2} = s_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \geqq s_{2n} = s_n^{**},$$

existují limity:[1]

$$\lim s_n^* \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\},$$
$$\lim s_n^{**} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

[1] Viz Větu o limitě monotónní posloupnosti.

Navíc ale díky předpokladu iii) platí, že

$$\lim(s_n^* - s_n^{**}) = \lim(s_{2n+1} - s_{2n}) = \lim a_{2n+1} = 0,$$

a proto

$$\lim s_n^* = \lim s_n^{**} =: s \in \mathbb{R}\,!$$

Odtud již snadno plyne (čtenář si laskavě promyslí sám!), že

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\, a_n = \lim s_n = s \in \mathbb{R},$$

což jsme měli dokázat.

$\square$

Příklad 1.24. Řada

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \; = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

je `neabsolutně konvergentní`, protože platí:

- $\forall n \in \mathbb{N}: \; \frac{1}{n+1} \leqq \frac{1}{n}$,
- $\lim \frac{1}{n} = 0$;
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^{n+1} \frac{1}{n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

Věta 1.25 (Dirichletovo kritérium). *Nechť (a_n) je monotónní posloupnost definovaná na $\mathbb{N}$, pro niž platí $\lim a_n = 0$, a nechť posloupnost částečných součtů řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ je omezená. Pak je řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergentní.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že posloupnost (a_n) je nerostoucí (v případě neklesající posloupnosti by stačilo uvažovat posloupnost $(-a_n)$). To (vzhledem k podmínce $\lim a_n = 0$) znamená, že $a_n \geqq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Dále z předpokladů vyplývá, že pro posloupnost

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} b_k$$

částečných součtů řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ platí

$$\big(\exists k \in \mathbb{R}^+\big)\,(\forall n \in \mathbb{N}): \; |s_n| \leqq k.$$

Nyní ukážeme (což díky větě 1.5 stačí), že pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ platí Bolzanova–Cauchyho podmínka

$$\left(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+\right) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall m, n \in \mathbb{N};\ n_0 \leqq m < n) : \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k \right| < \varepsilon.$$

Buď $\underline{\varepsilon > 0 \text{ dáno}}$. Z předpokladu $\lim a_n = 0$ vyplývá, že

$$\left(\underline{\exists n_0 \in \mathbb{N}}\right) (\forall n \in \mathbb{N};\ n \geqq n_0) :\ a_n = |a_n| < \frac{\varepsilon}{2k}.$$

Zbývá dokázat, že <u>pro každé $m, n \in \mathbb{N}$, $n_0 \leqq m < n$, platí</u> $\left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k \right| < \varepsilon$. A to lze udělat přímým výpočtem:

$$\begin{aligned}\underline{|a_{m+1}b_{m+1} + \cdots + a_n b_n|} &= |a_{m+1}(s_{m+1} - s_m) + \cdots + a_n(s_n - s_{n-1})| = \\ &= | - a_{m+1}s_m + (a_{m+1} - a_{m+2})s_{m+1} + \cdots + (a_{n-1} - a_n)s_{n-1} + a_n s_n| \leqq \\ &\leqq a_{m+1}|s_m| + (a_{m+1} - a_{m+2})|s_{m+1}| + \cdots + (a_{n-1} - a_n)|s_{n-1}| + a_n|s_n| \leqq \\ &\leqq k a_{m+1} + k(a_{m+1} - a_{m+2}) + \cdots + k(a_{n-1} - a_n) + k a_n = 2k a_{m+1} \underline{< \varepsilon}.\end{aligned}$$

□

Poznámka 1.26. Věta 1.23 je nyní jednoduchým důsledkem věty 1.25. Stačí totiž volit $b_n := (-1)^{n+1}$. Je jasné, že posloupnost částečných součtů řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$$

je pak omezená.

Příklad 1.27. Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^\alpha}$$

je konvergentní pro libovolné $\alpha > 0$, neboť posloupnost $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ je monotónní a konverguje k nule a řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$ má omezenou posloupnost částečných součtů[1] (viz větu 1.25).

[1] Tento fakt není úplně triviální. Čtenář si může (např. matematickou indukcí, popř. pomocí komplexních čísel) dokázat, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} \sin k = \frac{\sin \frac{n+1}{2} \sin \frac{n}{2}}{\sin \frac{1}{2}}, \text{ a proto } |s_n| \leqq \frac{1}{\sin \frac{1}{2}}.$$

Věta 1.28 (Abelovo kritérium). *Nechť (a_n) je monotónní omezená posloupnost definovaná na $\mathbb{N}$ a nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje. Pak je konvergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.*

Důkaz. Z předpokladů věty plyne, že existuje **konečná** $\lim a_n =: a$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujme

$$a_n^\star := a_n - a.$$

Pak posloupnost $(a_n^\star)$ je jistě monotónní a konverguje k nule; navíc, protože je řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní, je posloupnost částečných součtů této řady omezená. Odtud a z Dirichletova kritéria (viz větu 1.25) plyne, že je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^\star b_n$ konvergentní.

A dál je to snadné, protože pro posloupnost (s_n) částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ platí

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k^\star + a) b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k^\star b_k + a \sum_{k=1}^{n} b_k \to \sum_{k=1}^{\infty} a_k^\star b_k + a \sum_{k=1}^{\infty} b_k \in \mathbb{R}.$$

□

Příklady 1.29.

1) Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} n \, \frac{\sin n}{n^\alpha} \right)$$

je konvergentní pro libovolné $\alpha > 0$. V příkladu 1.27 jsme totiž ukázali konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^\alpha}$. Dále je zřejmé, že posloupnost $(\operatorname{arctg} n)$ je monotónní a omezená. Tvrzení tak plyne přímo z věty 1.28.

2) Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ libovolná konvergentní řada, tak je (viz větu 1.28) konvergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} b_n$, neboť posloupnost $\left(\frac{n+1}{n}\right)$ je monotónní a omezená.

1.4 Několik poznámek nakonec

Poznámka 1.30 (k odhadu zbytku řady). Uvažujme řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $n \in \mathbb{N}$. Řadu

$$a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \dots \ = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

nazýváme zbytkem řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ po n-tém členu. [1]

Často je užitečné odhadnout (pro konvergentní řadu) součet tohoto zbytku. [2] To však nemusí být snadné. Zde si – pro ilustraci – alespoň uveďme, že například při splnění předpokladů Leibnizova kritéria pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí[3]

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k\right| \leqq |a_{n+1}|.$$

(Můžete se pokusit odhadnout zbytek řady i „za situace z některého z ostatních kritérií“.)

Poznámka 1.31 (k přerovnávání řad). Je-li zobrazení

$$\varphi : \ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

- `definované na celém` $\mathbb{N}$,
- `prosté`,
- `na` (tzn. že $\varphi(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$),

říkáme, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$$

vznikla přerovnáním řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

---

[1] Symbolu „$\sum\limits_{n=\alpha}^{\infty} a_n$“, kde $1 < \alpha \in \mathbb{N}$, se užívá i pro označení „celých“ řad, nejen pro označení zbytku jisté řady (koneckonců `zbytek řady je` „celá“ `řada`). Čtenář určitě nebude mít problém porozumět, jaké řady jsou míněny, napíšeme-li – například – $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n-2}$, $\sum\limits_{n=18}^{\infty} \frac{\ln(n-17)}{n^5}$, … .

[2] Nepřehlédněme zřejmé tvrzení:

Řada konverguje právě tehdy, konverguje-li její zbytek po n-tém členu.

[3] Čtenář by měl považovat za věc cti, že si příslušný odhad dokáže.

Dá se dokázat, že platí:

i) Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ `absolutně konvergentní`, konverguje absolutně i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ a má stejný součet.

ii) Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ `konverguje neabsolutně`, lze ji přerovnat tak, aby nově získaná řada měla za svůj součet libovolné (předem zadané) číslo z $\mathbb{R}^*$, nebo tak, aby součet řady vzniklé přerovnáním vůbec neexistoval.

Poznámka 1.32 (k řadám komplexních čísel). Řadou komplexních čísel rozumíme výraz

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots \ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

kde pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n \in \mathbb{C}$.

Označme pro každé $n \in \mathbb{N}$:

$$\alpha_n = \operatorname{Re} a_n,$$
$$\beta_n = \operatorname{Im} a_n,$$

tzn. že

$$a_n = \alpha_n + \beta_n i;$$
$$\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}.$$

Existují-li `konečné`(!) součty řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n =: \alpha \in \mathbb{R},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n =: \beta \in \mathbb{R},$$

říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, a součtem řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ rozumíme (komplexní) číslo

$$s := \alpha + \beta i.$$

Více si lze o řadách komplexních čísel přečíst např. v [2].

Kapitola 2

Posloupnosti a řady funkcí

2.1 Bodová a stejnoměrná konvergence

Definice 2.1. Řekneme, že posloupnost reálných funkcí (f_n) konverguje bodově na množině $M \subset \mathbb{R}$ k funkci f, a píšeme $\underline{f_n \to f \text{ na } M}$, platí-li

$$\forall x \in M: \ \lim f_n(x) = f(x),$$

tj. platí-li

$$(\forall x \in M) \left(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+\right) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}, \ n \geqq n_0): \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Poznámka 2.2. Přirozené číslo n_0 vyskytující se ve výše uvedené podmínce závisí obecně na volbě $x \in M$ a $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Jestliže lze číslo n_0 zvolit nezávisle na volbě bodu $x \in M$, mluvíme o stejnoměrné konvergenci na M. Řekněme to přesněji:

Definice 2.3. Řekneme, že posloupnost reálných funkcí (f_n) konverguje stejnoměrně na množině $M \subset \mathbb{R}$ k funkci f, a píšeme $\underline{f_n \rightrightarrows f \text{ na } M}$, platí-li

$$\lim \left[\sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)|\right] = 0,$$

tj. platí-li

$$\left(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+\right) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}, \ n \geqq n_0) (\forall x \in M): \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Poznámka 2.4. Rozmysleme si, že zřejmě platí:

$$\boxed{f_n \rightrightarrows f \text{ na } M \ \Rightarrow \ f_n \to f \text{ na } M.}$$

Příklad 2.5. Buď pro každé $n \in \mathbb{N}$ funkce f_n definovaná předpisem

$$f_n(x) := x^n - x^{2n}.$$

Rozhodněme, zda je posloupnost funkcí (f_n) bodově, resp. stejnoměrně konvergentní na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

Řešení. Hledání bodové limity není těžké. Stačí si uvědomit, že pro libovolné (ale pevné) $x \in \langle 0, 1 \rangle$ je

$$\lim x^{2n} = \lim x^n = \begin{cases} 0, & \text{je-li } x \in \langle 0, 1), \\ 1, & \text{je-li } x = 1, \end{cases}$$

a proto

$$\lim f_n(x) = \lim(x^n - x^{2n}) = 0.$$

To znamená, že posloupnost (f_n) konverguje bodově na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ k funkci

$$f(x) := 0.$$

Zbývá odpovědět na otázku (a to díky předchozí poznámce 2.4 stačí), zda $f_n \rightrightarrows 0$ na $\langle 0, 1 \rangle$, tj. zda platí

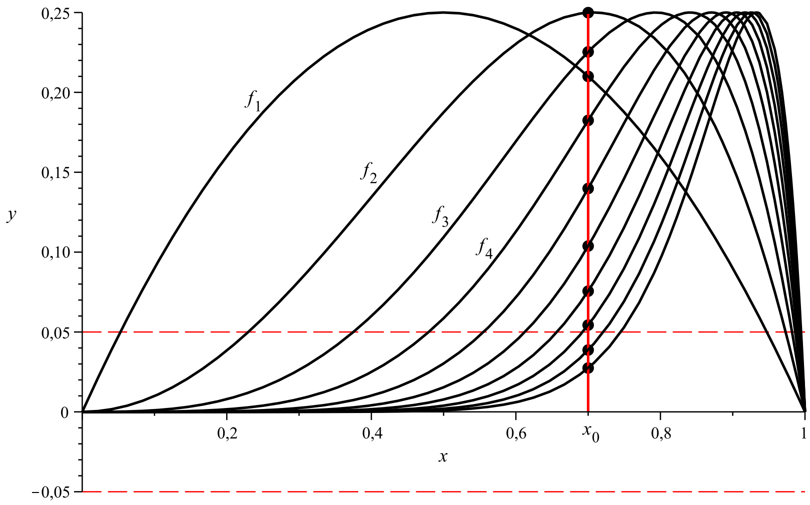
$$\lim \left(\sup_{x \in \langle 0,1 \rangle} |f_n(x) - f(x)| \right) = \lim \left(\sup_{x \in \langle 0,1 \rangle} |f_n(x)| \right) = 0.$$

Není obtížné spočítat, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ je

$$\sup_{x \in \langle 0,1 \rangle} |f_n(x)| = \sup_{x \in \langle 0,1 \rangle} (x^n - x^{2n}) = \max_{x \in \langle 0,1 \rangle} (x^n - x^{2n}) = \frac{1}{4},$$

a proto posloupnost (f_n) není na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ stejnoměrně konvergentní.

Ilustrace: Posloupnost (f_n) je znázorněna na následujícím obrázku,



z něhož lze vyčíst, že pro libovolné (ale pevné) $x_0 \in \langle 0,1\rangle$ se posloupnost $\big(f_n(x_0)\big)$ blíží k 0, tj. že bodovou limitou (f_n) je (na $\langle 0,1\rangle$) nulová funkce.

Pokud kolem grafu limitní (nulové) funkce sestrojíme pás o šířce $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$ (v našem obrázku jsme volili $\varepsilon = 0,05$), zjistíme, že žádný z grafů funkcí f_n v tomto pásu `celý` neleží. To ovšem znamená, že konvergence posloupnosti (f_n) k funkci $f(x) := 0$ není na intervalu $\langle 0,1\rangle$ stejnoměrná.

▲

Definice 2.6. Buďte pro každé $n \in \mathbb{N}$ funkce f_n a f definované na množině $M \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že řada funkcí

$$f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \ldots \overset{ozn.}{=} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{2.1}$$

konverguje bodově (resp. stejnoměrně) na množině M ke svému součtu f, konverguje-li posloupnost (s_n) částečných součtů řady (2.1) [a] bodově (resp. stejnoměrně) na M k funkci f.

[a] $s_n(x) := \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$.

2.2 Kritéria stejnoměrné konvergence

Důkazy vět uvedených v této a následující kapitole jsou technicky náročnější, a nebudeme je zde proto uvádět. Zájemci si je mohou nalistovat např. v [5] a v [6].

Věta 2.7 (Bolzanova–Cauchyho podmínka). *Posloupnost funkcí (f_n) je stejnoměrně konvergentní na množině $M \subset \mathbb{R}$ právě tehdy, když*

$$\left(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+\right)(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall m, n \in \mathbb{N};\ m, n \geqq n_0)\,(\forall x \in M): \ |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Věta 2.8 (Bolzanova–Cauchyho podmínka pro řady funkcí). *Řada funkcí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ je stejnoměrně konvergentní na množině $M \subset \mathbb{R}$ právě tehdy, když*

$$\left(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+\right)(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall m, n \in \mathbb{N};\ n_0 \leqq m < n)\,(\forall x \in M): \ \left|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)\right| < \varepsilon.$$

(Porovnejte s větou 1.5.)

Věta 2.9 (Weierstrassovo kritérium). *Nechť $M \subset \mathbb{R}$ a nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jsou takové řady, že*

i) $|f_n(x)| \leqq b_n$ *pro každé $n \in \mathbb{N}$ a pro každé $x \in M$,*

ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *konverguje.*

Pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na M.

(Porovnejte s větou 1.9.)

Příklad 2.10. Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 + x^2}$$

stejnoměrně konverguje na $\mathbb{R}$, neboť

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,(\forall x \in \mathbb{R}): \ \left|\frac{\sin nx}{n^2 + x^2}\right| \leqq \frac{1}{n^2 + x^2} \leqq \frac{1}{n^2}$$

a reálná řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje (např. podle integrálního kritéria – viz větu 1.21).

Definice 2.11. Řekneme, že posloupnost funkcí (f_n) je monotónní na množině $M \subset \mathbb{R}$, platí-li jedna z možností:

i) $(\forall n \in \mathbb{N})\,(\forall x \in M): \; f_n(x) \leqq f_{n+1}(x)$,

ii) $(\forall n \in \mathbb{N})\,(\forall x \in M): \; f_n(x) \geqq f_{n+1}(x)$.

Definice 2.12. Řekneme, že posloupnost funkcí (f_n) je stejnoměrně omezená na množině $M \subset \mathbb{R}$, platí-li

$$\left(\exists c \in \mathbb{R}^+\right)(\forall n \in \mathbb{N})\,(\forall x \in M): \; |f_n(x)| \leqq c.$$

Věta 2.13 (Dirichletovo kritérium pro řady funkcí). *Nechť (f_n) je monotónní posloupnost funkcí na množině M, pro niž platí $f_n \rightrightarrows 0$ na M, a nechť posloupnost částečných součtů řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ je stejnoměrně omezená na M.*[a] *Pak je řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) g_n(x)$ stejnoměrně konvergentní na M.*

[a] Tzn. $(\exists c \in \mathbb{R}^+)\,(\forall n \in \mathbb{N})\,(\forall x \in M): \; \left|\sum\limits_{k=1}^{n} g_k(x)\right| \leqq c$.

(Porovnejte s větou 1.25.)

Příklad 2.14. Díky Dirichletovu kritériu 2.13 víme, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

konverguje stejnoměrně na intervalu

$$I_\alpha = \langle \alpha, 2\pi - \alpha \rangle,$$

kde $\alpha \in (0, \pi)$.

(Posloupnost konstantních funkcí $\left(\frac{1}{n}\right)$ je monotónní, $\frac{1}{n} \rightrightarrows 0$ na I_α a posloupnost částečných součtů řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$$

je stejnoměrně omezená na I_α.[1])

Poznámka 2.15. V posledním příkladu jsme ukázali, že pro jakkoliv malé $\alpha \in (0, \pi)$ je řada funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

stejnoměrně konvergentní na $\langle \alpha, 2\pi - \alpha \rangle$. Lze ukázat, že na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ tato řada sice konverguje, ale konvergence zde není stejnoměrná.

Věta 2.16 (Abelovo kritérium pro řady funkcí). *Nechť (f_n) je monotónní a stejnoměrně omezená posloupnost funkcí na množině M a nechť řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ je stejnoměrně konvergentní na M. Pak je stejnoměrně konvergentní na množině M i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) g_n(x)$.*

(Porovnejte s větou 1.28.)

2.3 Vlastnosti stejnoměrně konvergentních posloupností a řad funkcí

Věta 2.17. *Nechť posloupnost funkcí (f_n) stejnoměrně konverguje k funkci f na intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Jsou-li funkce f_n spojité na I pro všechna dost velká $n \in \mathbb{N}$, je i funkce f spojitá na I.*

---

[1] Z tvrzení

$$(\forall x \in I_\alpha)\,(\forall n \in \mathbb{N}) : \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\,\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}},$$

které lze dokázat např. matematickou indukcí, snadno obdržíme

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,(\forall x \in I_\alpha) : \left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \leqq \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|} \leqq \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} =: c \in \mathbb{R}^+,$$

což je přesně výše zmíněná stejnoměrná omezenost posloupnosti částečných součtů řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin nx$.

Poznámka 2.18. Předpoklad stejnoměrné konvergence nelze nahradit konvergencí bodovou. Uvažujme například posloupnost funkcí (f_n) definovaných na intervalu $I = \langle 0, 1 \rangle$ předpisy

$$f_n(x) := x^n.$$

Je zřejmé, že pro každé $x \in I$ platí

$$\lim f_n(x) = f(x),$$

kde

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in \langle 0, 1), \\ 1 & \text{pro } x = 1. \end{cases}$$

Všechny funkce f_n jsou na I spojité, $f_n \to f$ na I, ale limitní funkce f na I spojitá není.

Důsledek 2.19. *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a nechť řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na I ke svému součtu*

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Jsou-li funkce f_n spojité na I pro všechna $n \in \mathbb{N}$, je i funkce f spojitá na I.

Věta 2.17 nám říká, že stejnoměrná limita spojitých funkcí je spojitá funkce. Uvidíme, že toto tvrzení lze (za vhodných dodatečných předpokladů) v jistém smyslu obrátit.

Věta 2.20 (Diniho). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť*

i) *(f_n) je monotónní posloupnost spojitých funkcí na intervalu $\langle a, b \rangle$,*

ii) *$f_n \to f$ na $\langle a, b \rangle$,*

iii) *funkce f je spojitá na $\langle a, b \rangle$.*

Pak $f_n \rightrightarrows f$ na $\langle a, b \rangle$.

Důsledek 2.21. *Nechť (f_n) je posloupnost nezáporných (resp. nekladných) spojitých funkcí na intervalu $I = \langle a, b \rangle$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť funkce $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ je spojitá na I. Pak řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně k funkci f na I.*

Věta 2.22. *Nechť posloupnost funkcí (f_n) stejnoměrně konverguje k funkci f na intervalu $\langle a, b\rangle$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Jsou-li všechny funkce f_n (Riemannovsky) integrovatelné na $\langle a, b\rangle$, je i funkce f integrovatelná na $\langle a, b\rangle$ a platí*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Poznámka 2.23. Předchozí věta nám říká, že za uvedených předpokladů můžeme zaměnit limitu a integrál, tj.

$$\int_a^b \lim f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pokud je konvergence pouze bodová, limitu a integrál `obecně` zaměnit nemůžeme, jak je ukázáno v následujícím příkladu.

Příklad 2.24. Uvažujme posloupnost funkcí (f_n) definovaných na intervalu $I = \langle 0, 1\rangle$ předpisy

$$f_n(x) := \begin{cases} n^2 x & \text{pro } x \in \langle 0, \frac{1}{2n}\rangle, \\ n - n^2 x & \text{pro } x \in (\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}), \\ 0 & \text{pro } x \in \langle \frac{1}{n}, 1\rangle. \end{cases}$$

Všechny funkce f_n jsou spojité (a tedy integrovatelné) na I a není těžké si uvědomit, že pro každé $x \in I$ platí

$$\lim f_n(x) = 0.$$

Přímým výpočtem ale zjistíme, že

$$\int_0^1 \lim f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 0\,\mathrm{d}x = 0 \neq \frac{1}{4} = \lim \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důsledek 2.25. *Nechť řada funkcí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na intervalu $\langle a, b\rangle$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, ke svému součtu*

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Jsou-li všechny funkce f_n (Riemannovsky) integrovatelné na $\langle a, b\rangle$, je i funkce f integrovatelná na $\langle a, b\rangle$ a platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \right).$$

Poznámka 2.26. V předchozím důsledku se tvrdí, že (za uvedených předpokladů) můžeme zaměnit integrál a sumu, tj.

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \right).$$

Věta 2.27. *Nechť (f_n) je posloupnost funkcí, které mají na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$ derivaci, nechť posloupnost (f_n) konverguje (bodově) k funkci f na I a nechť posloupnost derivací (f_n') je stejnoměrně konvergentní na I. Pak funkce f má na I derivaci a platí*

$$f'(x) = \lim f_n'(x) \quad \textit{pro každé } x \in I,$$

tj.

$$(\lim f_n)' = \lim f_n' \quad \textit{na } I.$$

Důsledek 2.28. *Nechť (f_n) je posloupnost funkcí, které mají na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$ derivaci. Dále nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje (bodově) k f na I a nechť řada derivací $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ je stejnoměrně konvergentní na I. Pak funkce f má na I derivaci a platí*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \quad \textit{pro každé } x \in I,$$

tj.

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \quad \textit{na } I.$$

2.4 Mocninné a Taylorovy řady

Definice 2.29. <u>Mocninnou řadou se středem</u> $x_0 \in \mathbb{R}$ rozumíme řadu funkcí tvaru

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \tag{2.2}$$

kde pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ je $a_n \in \mathbb{R}$.

Zabývejme se nyní konvergencí řady (2.2), tj. zkoumejme, pro jaká $x \in \mathbb{R}$ příslušná `číselná` řada konverguje. Je zřejmé, že řada (2.2) konverguje pro $x = x_0$, tj. ve svém středu, a má tam součet a_0. Předpokládejme nyní, že řada (2.2) konverguje v bodě $x_1 \neq x_0$, a buď $x \in \mathbb{R}$ takový bod, že $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$|a_n(x - x_0)^n| = |a_n(x_1 - x_0)^n| \left| \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right|^n . \tag{2.3}$$

Z předpokladu, že řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x_1 - x_0)^n$ konverguje, vyplývá (viz nutnou podmínku konvergence 1.3)

$$\lim\,(a_n(x_1 - x_0)^n) = 0,$$

a proto existuje $k \in \mathbb{R}^+$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $|a_n(x_1 - x_0)^n| \leqq k$. Navíc, z předpokladu $\left|\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right| < 1$ plyne konvergence (geometrické) řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} k \left| \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right|^n ,$$

a proto ze vztahu (2.3) (a srovnávacího kritéria 1.9) vyplývá, že řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ absolutně konverguje. Toto zjištění je zobecněno v následující větě.

Věta 2.30 (Abelova). *Nechť řada (2.2) konverguje v bodě $x_1 \neq x_0$ a označme*

$$\varepsilon = |x_1 - x_0| > 0.$$

Pak

(i) *pro každé $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ řada (2.2) konverguje absolutně,*

(ii) *mocninná řada (2.2) konverguje lokálně stejnoměrně na intervalu* [a]

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

Důsledek. *Pokud mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ diverguje v bodě $x_2 \in \mathbb{R}$, diverguje i v každém bodě množiny*

$$\{x \in \mathbb{R} : \ |x - x_0| > |x_2 - x_0|\}.$$

[a] Lokálně stejnoměrnou konvergencí na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ rozumíme stejnoměrnou konvergenci na každém `uzavřeném omezeném` intervalu $\langle a, b\rangle \subset I$.

Tvrzení Abelovy věty nás přímo ponouká k následující definici.

Definice 2.31. Číslo

$$R := \sup\left\{|x - x_0| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \text{ konverguje}\right\}$$

nazýváme poloměrem konvergence mocninné řady (2.2).

Poznámka 2.32. Nepřehlédněme tyto zřejmé důsledky Abelovy věty 2.30 a následující definice 2.31 poloměru konvergence $R \in \langle 0, +\infty) \cup \{+\infty\}$:

(i) je-li

$$R = 0,$$

řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ konverguje právě tehdy, platí-li $x = x_0$;

(ii) je-li

$$R > 0,$$

konverguje řada (2.2) absolutně a lokálně stejnoměrně na intervalu[1]

$$(x_0 - R, x_0 + R);$$

(iii) řada (2.2) diverguje, je-li $|x - x_0| > R$.

Poznámka 2.33. Předpokládejme, že pro poloměr konvergence R mocninné řady (2.2) platí

$$0 < R < +\infty.$$

Uvědomme si, že `obecně` nelze říci `nic` o konvergenci této řady v krajních bodech intervalu konvergence, tj. v bodech $x_0 - R$ a $x_0 + R$.

Situaci ilustrujme těmito třemi mocninnými řadami:[2]

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

Protože pro každé $0 \neq x \in \mathbb{R}$ platí

$$\left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| \to |x|, \quad \left|\frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}}\right| \to |x|, \quad \left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{x^n}{n^2}}\right| \to |x|,$$

[1] Mluvíme o tzv. intervalu konvergence mocninné řady (2.2).

[2] Jedná se ve všech třech případech o mocninné řady tvaru $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, kde $x_0 = 0$ a $a_0 = 0$.

je každá z uvedených řad konvergentní, je-li $|x| < 1$, a divergentní, je-li $|x| > 1$ (viz d'Alembertovo kritérium 1.13). Proto je (podívejme se znovu na poznámku 2.32) poloměr konvergence každé z těchto mocninných řad roven 1 a intervalem konvergence je vždy interval $(-1, 1)$. Podívejme se, co lze říci o konvergenci uvažovaných řad v bodech -1 a 1.

- řada $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ diverguje pro $x = -1$ i pro $x = 1$ (ani v jednom z případů není splněna nutná podmínka konvergence řady – viz větu 1.3);
- řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ konverguje (neabsolutně) pro $x = -1$ a diverguje pro $x = 1$ (viz Leibnizovo kritérium 1.23 a integrální kritérium 1.21);
- řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ konverguje (absolutně) pro $x = -1$ i pro $x = 1$ (i tato tvrzení plynou snadno z integrálního kritéria 1.21).

Věta 2.34. *Nechť existuje*

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \overset{ozn.}{=} L, \quad resp. \quad \lim \sqrt[n]{|a_n|} \overset{ozn.}{=} K.$$

Pak pro poloměr konvergence R mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ platí, že

$$R = \begin{cases} \frac{1}{L}, & \textit{je-li } 0 < L < +\infty, \\ 0, & \textit{je-li } L = +\infty, \\ +\infty, & \textit{je-li } L = 0, \end{cases} \qquad resp. \quad R = \begin{cases} \frac{1}{K}, & \textit{je-li } 0 < K < +\infty, \\ 0, & \textit{je-li } K = +\infty, \\ +\infty, & \textit{je-li } K = 0. \end{cases}$$

Důkaz. Stačí si uvědomit, že pro $x \neq x_0$ je

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}(x - x_0)^{n+1}}{a_n (x - x_0)^n} \right| = L|x - x_0|, \quad \text{resp.} \quad \lim \sqrt[n]{|a_n (x - x_0)^n|} = K|x - x_0|,$$

a užít d'Alembertovo 1.13, resp. Cauchyho 1.16 kritérium.

□

Příklad 2.35. Určete obor konvergence mocninné řady [1] (se středem v bodě 1)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} (x-1)^n.$$

Řešení.

$$\lim \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \lim \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2},$$

a proto $R = 2$; daná řada konverguje (absolutně) pro každé $x \in (-1, 3)$ a diverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$ takové, že $|x - 1| > 2$.

Pro $x = -1$ ani pro $x = 3$ řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} (x-1)^n$ nekonverguje, protože není ani v jednom z bodů splněna nutná podmínka konvergence[2] (viz větu 1.3).

Oborem konvergence dané řady je interval $(-1, 3)$.

▲

Příklad 2.36. Určete poloměr konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n.$$

Řešení.

$$\frac{\frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} \to 4,$$

a proto $R = \frac{1}{4}$.

▲

Následující – velmi důležitá věta – plyne z důsledků 2.28, 2.25 a Abelovy věty 2.30.

---

[1] Tzn. určete množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro něž daná řada konverguje.

[2] Tzn. neplatí rovnost

$$\lim \frac{n}{2^n} (x-1)^n = 0.$$

Věta 2.37 (o derivování a integrování mocninné řady člen po členu). *Nechť mocninná řada*

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \qquad (2.4)$$

má poloměr konvergence $R > 0$*. Pak i mocninné řady*

$$a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1},$$

$$a_0(x - x_0) + \frac{a_1}{2}(x - x_0)^2 + \frac{a_2}{3}(x - x_0)^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1}$$

(vzniklé derivováním, resp. integrováním řady (2.4) „člen po členu“) mají poloměr konvergence R *a navíc pro funkci* S *definovanou předpisem*

$$S(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

a pro každé $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ *platí:*

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1},$$

$$\int_{x_0}^{x} S(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1}.$$

Poznámka 2.38. Znovu si prohlédněme předcházející větu a nepřehlédněme, že (za daných předpokladů) platí pro součet S mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ následující dvě tvrzení:

i) S má na intervalu konvergence všechny derivace a pro každé $p \in \mathbb{N}$ a pro každé $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ platí

$$S^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{\infty} n\,(n-1)\,\ldots\,(n-p+1)\,a_n\,(x - x_0)^{n-p},$$

ii) funkce

$$x \mapsto \int_{x_0}^{x} S(t)\,\mathrm{d}t$$

je na intervalu $(x_0 - R, x_0 + R)$ primitivní funkcí k funkci S.

Věta 2.39 (Abelova). *Nechť* $0 < R < +\infty$ *a nechť řada* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *konverguje v bodě* $x = x_0+R$, *resp. v bodě* $x = x_0-R$. *Pak pro funkci* S *definovanou předpisem*

$$S(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

platí, že je spojitá zleva v bodě $x = x_0 + R$, *resp. zprava v bodě* $x = x_0 - R$, *tzn.*

$$S(x_0 + R) = \lim_{x \to x_0 + R-} S(x), \ \ \textit{resp. } S(x_0 - R) = \lim_{x \to x_0 - R+} S(x).$$

Příklad 2.40. Vypočtěme součet řady

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}.$$

Řešení. Předně si uvědomme, že Leibnizovo kritérium 1.23 nám poskytuje argument, že uvedená řada konverguje. Uvažujme nyní funkci S definovanou předpisem

$$S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

Pak (protože poloměr konvergence výše uvedené mocninné řady je zřejmě 1) z věty 2.37 plyne

$$\forall x \in (-1, 1): \ \ S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^{n-1} = \frac{1}{1 + x}.$$

Odtud (a ze zřejmého faktu $S(0) = 0$) víme, že

$$\forall x \in (-1, 1): \ \ S(x) = \ln(1 + x).$$

A vše ostatní snadno vyplývá z Abelovy věty 2.39:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = S(1) = \lim_{x \to 1-} S(x) = \lim_{x \to 1-} \ln(1 + x) = \ln 2.$$

▲

Příklad 2.41. Vyjádřeme v okolí bodu 0 funkci

$$S(x) := \operatorname{arctg} x$$

jako součet mocninné řady.

Řešení. Stačí si uvědomit, že

$$\forall x \in (-1,1): \; S'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, x^{2n},$$

a proto (viz větu 2.37 a skutečnost, že $S(0) = \operatorname{arctg} 0 = 0$)

$$\forall x \in (-1,1): \; S(x) = \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Všimněme si, že nalezená mocninná řada konverguje v bodě $x = 1$ (viz Leibnizovo kritérium 1.23), a proto můžeme pomocí Abelovy věty 2.39 získat zajímavý bonus:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, \frac{1}{2n+1}.$$

▲

Ukončeme naše povídání o řadách funkcí krátkou zmínkou o speciálním typu mocninných řad, o tzv. Taylorových řadách.

Definice 2.42. Předpokládejme, že existují všechny derivace funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Taylorovou řadou funkce f se středem x_0 pak rozumíme mocninnou řadu

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \tag{2.5}$$

(Nepřehlédněme zřejmou souvislost s Taylorovými polynomy funkce f v bodě x_0.)

Je zajímavým úkolem zjistit, jak spolu souvisí součet Taylorovy řady (2.5), tzn. funkce S definovaná předpisem

$$S(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

a funkce f.

Příklad 2.43. Uvažujme součet Taylorovy řady funkce $f(x) := \mathrm{e}^x$ se středem v bodě $x_0 = 0$, tj. funkci

$$S(x) := 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{2.6}$$

Protože

$$\lim \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim \frac{1}{n+1} = 0,$$

má uvažovaná Taylorova řada poloměr konvergence $R = +\infty$ (viz větu 2.34), a proto můžeme díky větě 2.37 tvrdit, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ je

$$\underline{S'(x)} = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right)' = 0 + 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \underline{S(x)}.$$

A to nám (pokud víme, že jediným řešením Cauchyho úlohy

$$\begin{cases} f'(x) = f(x), \\ f(0) = 1\,(= S(0)), \end{cases}$$

na $\mathbb{R}$ je právě exponenciální funkce $f(x) := \mathrm{e}^x$) dává jistotu, že $S(x) = \mathrm{e}^x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.[1]

Poznámka 2.44. Podobně jako v předcházejícím příkladu lze dokázat (či okomentovat), proč i pro mnoho dalších funkcí platí, že jsou součty svých Taylorových řad. Například

- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ pro každé $x \in \mathbb{R}$,
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ pro každé $x \in \mathbb{R}$,
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ pro každé $x \in (-1, 1\rangle$,

...

[1] Výše uvedený důkaz, že funkce e^x je rovna součtu své Taylorovy řady, a i samotné sestavení příslušné Taylorovy řady je poněkud problematické. Není totiž jasné, co rozumíme (jak definujeme) funkcí e^x. Často se exponenciální funkce `definuje` právě jako součet mocninné řady vyskytující se v (2.6).

`Pozor!` Nemusí tomu tak být vždy. Vezměme třeba funkci

$$f(x) := \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \text{ pro } x \neq 0, \\ 0 \text{ pro } x = 0. \end{cases}$$

Lze ukázat, že všechny derivace funkce f jsou spojité na $\mathbb{R}$ a že Taylorovou řadou funkce f se středem v bodě 0 je řada

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots = 0 + 0 + 0 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} 0$$

s nulovým součtem na $\mathbb{R}$. Funkce f je však nulová pouze v bodě 0.

Literatura

[1] J. Bouchala: *Matematická analýza 1*, skripta VŠB-TU Ostrava, 1998.

[2] J. Bouchala: *Funkce komplexní proměnné*, http://mi21.vsb.cz/, 2011.

[3] J. Brabec, F. Martan, Z. Rozenský: *Matematická analýza I*, SNTL, Praha, 1985.

[4] B. Budinský, J. Charvát: *Matematika I*, SNTL, Praha, 1987.

[5] Z. Došlá, V. Novák: *Nekonečné řady*, skripta MU Brno, 1998.

[6] V. Jarník: *Diferenciální počet (II)*, Academia, Praha, 1976.

[7] K. Rektorys a spol.: *Přehled užité matematiky I a II*, Prometheus, Praha, 1995.

[8] J. Veselý: *Matematická analýza pro učitele*, Matfyzpress, Praha, 1997.

Rejstřík