

Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava Západočeská univerzita v Plzni



ŘADY

(interaktivní učební text)

Jiří Bouchala a Petr Vodstrčil

Obsah

1. strana ze 91



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



Jiří Bouchala a Petr Vodstrčil
Řady

© Jiří Bouchala a Petr Vodstrčil, 10. srpna 2012
ISBN

Obsah

2. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Předmluva

Výslednou podobu těchto skript ovlivnili mnozí z našich učitelů, kolegů i studentů. Všem jsme jim upřímně vděční.

Čtenáře prosíme o shovívavost a sdělení všech připomínek.¹

Tento i ostatní v rámci projektu *Matematika pro inženýry 21. století* připravované výukové materiály lze najít na stránkách <http://mi21.vsb.cz/>. Podívejte se na ně!

V Ostravě, v létě 2012

Jiří Bouchala a Petr Vodstrčil

¹Všechny připomínky (výhrady, komentáře, doporučení, výhrůžky a dary) zasílejte (prosíme) na naše e-mailové adresy: jiri.bouchala@vsb.cz, petr.vodstrcil@vsb.cz

Obsah

3. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Obsah

Předmluva	3
1 Řady (reálných) čísel	5
1.1 Součet a konvergence číselné řady	5
1.2 Kritéria absolutní konvergence	12
1.3 Kritéria (neabsolutní) konvergence	31
1.4 Několik poznámek nakonec	38
1.5 Kontrolní testy	42
2 Posloupnosti a řady funkcí	56
2.1 Bodová a stejnoměrná konvergence	56
2.2 Kritéria stejnoměrné konvergence	61
2.3 Vlastnosti stejnoměrně konvergentních posloupností a řad funkcí	65
2.4 Mocninné a Taylorovy řady	70
2.5 Kontrolní testy	85
Literatura	88
Rejstřík	89



Obsah

4. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno



Kapitola 1

Řady (reálných) čísel

1.1. Součet a konvergence číselné řady

Definice 1.1. Řadou (reálných čísel) rozumíme výraz

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (1.1)$$

kde pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n \in \mathbb{R}$.^a

^aTzn. že (a_n) je posloupností reálných čísel.

Obsah

5. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



Číslo a_n nazýváme n -tým členem řady (1.1), posloupnost (s_n) definovanou předpisem

$$s_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

nazýváme posloupností částečných součtů řady (1.1).

Existuje-li limita

$$s := \lim s_n \in \mathbb{R}^*,$$

nazýváme ji součtem řady (1.1) a píšeme ^a

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s;$$

je-li navíc $s \in \mathbb{R}$, říkáme, že řada (1.1) konverguje. Nemá-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ součet, ^b nebo je-li

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \{+\infty, -\infty\}$, nazýváme (1.1) divergentní řadou.

^aZde nepřehlédněme, že symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ značíme řadu i její součet, tj. číslo! Ale nebojme se, z kontextu bude vždy jasné, o které z těchto dvou možností právě mluvíme.

^bTím rozumíme, že $\lim s_n$ neexistuje.

Obsah

6. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Příklady 1.2.

1)

$$1 + 2 + 3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n = +\infty \quad \dots \text{divergentní (aritmetická) řada.}$$

$$\left(s_n = \frac{n(n+1)}{2} \rightarrow +\infty. \right)$$

2)

$$1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \quad \dots \text{divergentní řada (nemá součet).}$$

$$\left(s_n = \begin{cases} 0, & \text{je-li } n \text{ sudé,} \\ 1, & \text{je-li } n \text{ liché.} \end{cases} \right)$$

Zde pozor na umístění závorek. Platí totiž:

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots = 0,$$

$$1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots = 1 + 0 + 0 + \dots = 1.$$

3) Součet (geometrické) řady

$$1 + q + q^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1},$$



Obsah

7. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

kde $q \in \mathbb{R}$, existuje právě tehdy, je-li $q > -1$, a platí pro něj

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \begin{cases} +\infty, & \text{je-li } q \geq 1, \\ \frac{1}{1-q}, & \text{je-li } -1 < q < 1. \end{cases}$$

$$(s_n = \begin{cases} n, & \text{je-li } q = 1, \\ \frac{1-q^n}{1-q}, & \text{je-li } q \neq 1. \end{cases})$$

4)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty \dots \text{divergentní (tzv. harmonická) řada.}$$

(Pokuste se dokázat uvedenou rovnost pomocí (zřejmě platícího) tvrzení

$$\forall k \in \mathbb{N}: \frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \frac{1}{2^k+3} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}} \geq \frac{1}{2^{k+1}} (2^{k+1} - 2^k) = \frac{1}{2}.)$$

Věta 1.3 (Nutná podmínka konvergence). Konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, je $\lim a_n = 0$.

Důkaz. Podle předpokladu pro posloupnost částečných součtů (tj. pro posloupnost $s_n := \sum_{k=1}^n a_k$) platí

$$s := \lim s_n \in \mathbb{R} (!),$$



Obsah

8. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

a proto

$$\lim a_n = \lim(s_n - s_{n-1}) = \lim s_n - \lim s_{n-1} = s - s = 0.$$

□

Příklady 1.4.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2$ diverguje, protože $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n n^2$ neexistuje.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ diverguje, protože $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = +\infty$.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje, a to přesto, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

(Tvzení 1.3 tedy nelze obrátit!)

Věta 1.5 (Bolzanova–Cauchyho podmínka). Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, platí-li

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall m, n \in \mathbb{N}; n_0 \leq m < n) : \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| < \varepsilon.$$

Důkaz. Věta je snadným důsledkem známého tvrzení, že reálná posloupnost je konvergentní právě tehdy, je-li cauchyovská, a pozorování, že výše uvedená podmínka je ekvivalentní



Obsah

9. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

s tvrzením, že posloupnost $s_n := \sum_{k=1}^n a_k$ částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je cauchyovská, tzn.

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n, m \in \mathbb{N}; n, m \geq n_0) : |s_n - s_m| < \varepsilon.$$

□

Věta 1.6. Konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Důkaz. Nejdříve definujeme (pro každé $n \in \mathbb{N}$):

$$a_n^+ := \max\{a_n, 0\} = \frac{1}{2}(|a_n| + a_n) \geq 0,$$

$$a_n^- := \max\{-a_n, 0\} = \frac{1}{2}(|a_n| - a_n) \geq 0;$$

$$s_n^+ := a_1^+ + a_2^+ + \cdots + a_n^+,$$

$$s_n^- := a_1^- + a_2^- + \cdots + a_n^-.$$

Máme dokázat, že posloupnost částečných součtů

$$s_n := \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (a_k^+ - a_k^-) = \sum_{k=1}^n a_k^+ - \sum_{k=1}^n a_k^- = s_n^+ - s_n^-$$



Obsah

10. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

je konvergentní, tzn. že má konečnou limitu. K tomu stačí ukázat, že jsou konvergentní posloupnosti (s_n^+) a (s_n^-) . Obě tyto posloupnosti jsou však zřejmě neklesající a díky předpokladu

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| =: s \in \mathbb{R}$$

a vztahům

$$s_n^+ = a_1^+ + a_2^+ + \cdots + a_n^+ \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = s,$$

$$s_n^- = a_1^- + a_2^- + \cdots + a_n^- \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = s,$$

které platí pro každé $n \in \mathbb{N}$, i shora omezené. Jejich konvergence tak plyne přímo ze známého tvrzení o limitě monotónní posloupnosti. ¹ □

¹Věta o limitě monotónní posloupnosti.

Je-li posloupnost (α_n) neklesající, je

$$\lim \alpha_n = \sup \{ \alpha_n : n \in \mathbb{N} \}.$$

Je-li posloupnost (β_n) nerostoucí, je

$$\lim \beta_n = \inf \{ \beta_n : n \in \mathbb{N} \}.$$



Obsah

11. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Definice 1.7. Konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, říkáme, že (konvergentní!) řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně. Konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a současně řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje, nazýváme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ neabsolutně konvergentní řadou.^a

^aVšimněme si, že součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ existuje vždy (odpovídající posloupnost částečných součtů je neklesající), může být však roven $+\infty$.

Příklady 1.8.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$... neabsolutně konvergentní řada.

(Důkaz bude proveden později pomocí Leibnizova kritéria.)

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$... absolutně konvergentní řada.

(Důkaz bude proveden později pomocí integrálního kritéria.)

1.2. Kritéria absolutní konvergence

Úmluva. Napíšeme-li

„ $V(n)$ platí pro všechna dost velká $n \in \mathbb{N}$ “,



Obsah

12. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

rozumíme tím, že

$$„(\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) : V(n)“.$$

Věta 1.9 (srovnávací kritérium). *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou takové řady, že*

i) $|a_n| \leq b_n$ pro všechna dost velká $n \in \mathbb{N}$,

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje.

Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně.

Důkaz. Z předpokladů plyne, že posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ je shora omezená, a protože je – jak jsme si již uvědomili dříve – navíc neklesající, má konečnou limitu. Touto limitou je $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.¹ □

Příklad 1.10.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(\frac{1}{1977} \right)^n$$

¹Čtenář by si měl předložený důkaz, pokud mu není zcela jasný, rozepsat a rozmyslet podrobně!



Obsah

13. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

konverguje absolutně, protože pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left| \frac{(-1)^n}{n} \left(\frac{1}{1977} \right)^n \right| \leq \left(\frac{1}{1977} \right)^n$$

a $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1977} \right)^n$ je konvergentní (geometrická) řada ($-1 < q := \frac{1}{1977} < 1$).

Pozorování (a zřejmý důsledek věty 1.9.)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou takové řady, že $0 \leq a_n \leq b_n$ pro všechna dost velká $n \in \mathbb{N}$ a že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$. Potom platí $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$.

Příklad 1.11.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1966 + n)}{n}$$

diverguje, protože platí

$$0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{\ln(1966 + n)}{n} \quad (\text{pro každé } n \in \mathbb{N})$$

a navíc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.



Obsah

14. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Věta 1.12 (podílové kritérium, d'Alembertovo). Uvažujme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Pak platí tato tvrzení:

i) Existuje-li $q \in (0, 1)$ takové, že

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q \quad \text{pro všechna dost velká } n \in \mathbb{N},$$

konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně.

ii) Je-li

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1 \quad \text{pro všechna dost velká } n \in \mathbb{N},$$

tak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.



Obsah

15. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Důkaz.

a) Nejdříve dokažme tvrzení i).

$$\begin{aligned}
 & |a_1| + |a_2| + \dots + |a_{n_0}| + |a_{n_0+1}| + |a_{n_0+2}| + \dots \leq \\
 & \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_{n_0-1}| + |a_{n_0}| + q|a_{n_0}| + q^2|a_{n_0}| + \dots = \\
 & = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_{n_0-1}| + |a_{n_0}|(1 + q + q^2 + \dots) = \\
 & = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_{n_0-1}| + |a_{n_0}| \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \\
 & = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_{n_0-1}| + |a_{n_0}| \frac{1}{1-q} < +\infty.
 \end{aligned}$$

b) I důkaz tvrzení ii) je snadný. Z předpokladu

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1 \quad \text{pro všechna dost velká } n \in \mathbb{N}$$

plyne, že

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) : |a_{n+1}| \geq |a_n| > 0,$$



Obsah

16. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

a proto

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) : |a_n| \geq |a_{n_0}| > 0.$$

Odtud lze snadno usoudit, že neplatí nutná podmínka konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, tj.

tvrzení $\lim a_n = 0$ (viz větu 1.3). Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

□

Snadným důsledkem věty 1.12 je následující věta.

Věta 1.13 (limitní podílové (d'Alembertovo) kritérium).

i) *Je-li*

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1,$$

konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně.

ii) *Je-li*

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1,$$

tak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.



Obsah

17. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Důkaz.

a) Nejdříve se podívejme, proč platí tvrzení i). Zvolme (libovolně)

$$q \in \left(\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|, 1 \right) \subset (0, 1).$$

Pak zřejmě platí

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q \quad \text{pro všechna dost velká } n \in \mathbb{N},$$

a dokazované tvrzení proto plyne přímo z již dokázaného tvrzení i) věty 1.12.

b) Důkaz tvrzení ii). Je-li

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1,$$

je

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1 \quad \text{pro všechna dost velká } n \in \mathbb{N}.$$

Dokazovaná divergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tak plyne přímo z tvrzení ii) věty 1.12.

□



Obsah

18. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Příklady 1.14.

1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{3^n} \text{ konverguje absolutně,}$$

protože

$$\left| \frac{(-1)^{n+1} \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}}{(-1)^n \frac{n^2}{3^n}} \right| = \frac{1}{3} \frac{(n+1)^2}{n^2} \rightarrow \frac{1}{3} < 1.$$

2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n} \text{ diverguje,}$$

protože

$$\left| \frac{\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}}{\frac{n!}{10^n}} \right| = \frac{1}{10} \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{1}{10} (n+1) \rightarrow +\infty > 1.$$

3) **Pozor!** Při vyšetřování konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ se podílové kritérium nehodí, protože

$$1 > \left| \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \right| = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1.$$



Obsah

19. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno



Věta 1.15 (odmocninové kritérium, Cauchyho). Uvažujme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Pak platí tato tvrzení:

i) Existuje-li $q \in (0, 1)$ takové, že

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q \text{ pro všechna dost velká } n \in \mathbb{N},$$

tak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně.

ii) Je-li pro nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1,$$

tak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Důkaz.

a) Nejprve dokažme tvrzení i). Z předpokladů plyne, že

$$|a_n| \leq q^n \text{ pro všechna dost velká } n \in \mathbb{N}$$

a že řada $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ konverguje (jedná se o geometrickou řadu s kvocientem $q \in (0, 1)$).

Dokazované tvrzení proto plyne ze srovnávacího kritéria (viz větu 1.9).

Obsah

20. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

- b) Nyní dokažme tvrzení ii). Z předpokladů plyne, že pro nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$ platí $|a_n| \geq 1$. To však znamená, že neplatí $\lim a_n = 0$, tj. není splněna nutná podmínka konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (viz větu 1.3). Proto řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

□

I tato věta má svou „limitní“ verzi.

Věta 1.16 (limitní odmocninové (Cauchyho) kritérium).

i) *Je-li*

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1,$$

konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně.

ii) *Je-li*

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} > 1,$$

tak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

[Obsah](#)[21. strana ze 91](#)[Zavřít dokument](#)[Celá obrazovka/Okno](#)

Důkaz.

a) Důkaz tvrzení i). Zvolme (libovolně)

$$q \in \left(\lim \sqrt[n]{|a_n|}, 1 \right) \subset (0, 1).$$

Pak zřejmě platí

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q \quad \text{pro všechna dost velká } n \in \mathbb{N}.$$

Dokazované tvrzení plyne z první části věty 1.15.

b) Důkaz tvrzení ii). Je-li

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} > 1,$$

je

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1 \quad \text{pro všechna dost velká } n \in \mathbb{N},$$

a proto

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1 \quad \text{pro nekonečně mnoho } n \in \mathbb{N}.$$

Dokazovaná divergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tak plyne přímo z tvrzení ii) věty 1.15.

□



Obsah

22. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Příklady 1.17.

1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-1} \right)^n \text{ konverguje absolutně,}$$

protože

$$\sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{3n-1} \right)^n} = \frac{2n+1}{3n-1} \rightarrow \frac{2}{3} < 1.$$

2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^{1993}} \text{ diverguje,}$$

protože

$$\sqrt[n]{\frac{2^n}{n^{1993}}} = \frac{2}{(\sqrt[n]{n})^{1993}} \rightarrow 2 > 1.$$

3) **Pozor!** Ani odmocninové kritérium nám při rozhodování, zda řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ konverguje, nepomůže. Platí totiž (pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$)

$$1 > \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow 1.$$



Obsah

23. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno



Věta 1.18 (Raabeovo kritérium). Uvažujme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Pak platí tato tvrzení:

i) Existuje-li $q > 1$ takové, že

$$n \left(1 - \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right) \geq q \quad \text{pro všechna dost velká } n \in \mathbb{N},$$

tak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně.

ii) Je-li

$$n \left(1 - \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right) \leq 1 \quad \text{pro všechna dost velká } n \in \mathbb{N},$$

tak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nekonverguje absolutně (tj. tato řada buď konverguje neabsolutně, nebo diverguje).

Důkaz.

a) Nejprve dokažme tvrzení i).

Z podmínky $n \left(1 - \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right) \geq q$ plyne $n(|a_n| - |a_{n+1}|) \geq q|a_n|$. Předpokládáme tedy, že

Obsah

24. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, platí

$$\begin{aligned} n_0(|a_{n_0}| - |a_{n_0+1}|) &\geq q|a_{n_0}|, \\ (n_0 + 1)(|a_{n_0+1}| - |a_{n_0+2}|) &\geq q|a_{n_0+1}|, \\ &\dots \\ n(|a_n| - |a_{n+1}|) &\geq q|a_n|. \end{aligned}$$

Sečtením těchto nerovností dostaneme

$$n_0|a_{n_0}| + (|a_{n_0+1}| + \dots + |a_n|) - n|a_{n+1}| \geq q|a_{n_0}| + q(|a_{n_0+1}| + \dots + |a_n|),$$

odkud snadno odvodíme

$$(q - 1)(|a_{n_0+1}| + \dots + |a_n|) \leq n_0|a_{n_0}| - n|a_{n+1}| - q|a_{n_0}| \leq n_0|a_{n_0}|.$$

Vzhledem k tomu, že $q - 1 > 0$, dostaneme

$$|a_{n_0+1}| + \dots + |a_n| \leq \frac{n_0|a_{n_0}|}{q - 1} \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}, n > n_0.$$

Vidíme, že posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ je shora omezená, a proto řada

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně.

b) Nyní ukažme, proč platí tvrzení ii), tj. proč (jsou-li splněny uvedené předpoklady) řada

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje.



Obsah

25. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Podmínku $n \left(1 - \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) \leq 1$ lze psát ve tvaru $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$. Předpokládáme tedy existenci $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \geq 2$, takového, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}}\right| &\geq \frac{n_0-1}{n_0}, \\ \left|\frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}}\right| &\geq \frac{n_0}{n_0+1}, \\ &\dots \\ \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &\geq \frac{n-1}{n}. \end{aligned}$$

Vynásobíme-li výše uvedené nerovnosti (jsou to nerovnosti mezi kladnými čísly), dostaneme

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_{n_0}}\right| \geq \frac{n_0-1}{n},$$

a proto

$$|a_{n+1}| \geq |a_{n_0}|(n_0-1) \frac{1}{n} \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}, n \geq n_0.$$

Odtud a z divergence harmonické řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ vyplývá, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1}|$ (a tedy i $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$) diverguje (viz důsledek věty 1.9).

□

Následující věta je snadným důsledkem věty 1.18.



Obsah

26. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

**Věta 1.19 (limitní Raabeovo kritérium).**i) *Je-li*

$$\lim n \left(1 - \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right) > 1,$$

*konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně.*ii) *Je-li*

$$\lim n \left(1 - \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right) < 1,$$

řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nekonverguje absolutně (tj. buď tato řada konverguje neabsolutně, nebo diverguje).

Důkaz. Důkaz lze provést podobným způsobem jako u věty 1.13. Přenechme jej proto zcela pilnému čtenáři. $\square$

Obsah

27. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno



Příklady 1.20.

1) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ konverguje, neboť

$$\begin{aligned} \lim n \left(1 - \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right) &= \lim n \left(1 - \frac{n^3}{(n+1)^3} \right) = \\ &= \lim \frac{n((n+1)^3 - n^3)}{(n+1)^3} = \lim \frac{3n^3 + 3n^2 + n}{n^3 + 3n^2 + 3n + 1} = 3 > 1. \end{aligned}$$

2) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$ je divergentní, neboť

$$\begin{aligned} \lim n \left(1 - \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right) &= \lim n \left(1 - \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} \right) = \\ &= \lim n \left(1 - \frac{2n+1}{2(n+1)} \right) = \lim \frac{n}{2n+2} = \frac{1}{2} < 1. \end{aligned}$$

O konvergenci této řady bychom podílovým kritériem nerozhodli, protože

$$1 > \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \rightarrow 1.$$

Věta 1.21 (integrální kritérium). *Nechť funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je nerostoucí na intervalu $\langle 1, +\infty \rangle$ a nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí, že $|a_n| = f(n)$.*

Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně právě tehdy, konverguje-li nevlastní integrál $\int_1^{\infty} f(x) dx$ (tzn. existuje-li konečná limita $\lim_{c \rightarrow \infty} \int_1^c f(x) dx$.)

Obsah

28. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Důkaz. Nejdříve pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujeme

$$s_n := \sum_{k=1}^n |a_k|$$

a všimněme si, že existují limity ¹

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \in \mathbb{R}^*,$$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \int_1^c f(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x) \, dx = \int_1^{\infty} f(x) \, dx \in \mathbb{R}^*.$$

Máme vlastně dokázat ekvivalenci

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x) \, dx < +\infty. \quad (1.2)$$

Z předpokladů plyne²

$$s_n = \sum_{k=1}^n |a_k| = \sum_{k=1}^n f(k) \geq \int_1^{n+1} f(x) \, dx \geq \sum_{k=2}^{n+1} f(k) = \sum_{k=2}^{n+1} |a_k| = s_{n+1} - |a_1|.$$

Odtud limitním přechodem ($n \rightarrow \infty$) získáme nerovnosti

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \geq \int_1^{\infty} f(x) \, dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| - |a_1|,$$

¹Otázka čtenáři: „Proč existují?“

²Zde je užitečné nakreslit si obrázek!



Obsah

29. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

z nichž již snadno plyne dokazovaná ekvivalence (1.2). □

Příklady 1.22.

1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \text{ konverguje absolutně,}$$

protože

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^{\infty} = 0 - (-1) = 1 < +\infty.$$

2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverguje,}$$

protože

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^{\infty} = +\infty - 0 = +\infty.$$

(Čtenář by si měl rozmyslet, pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.)



Obsah

30. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

1.3. Kritéria (neabsolutní) konvergence

Možná bude užitečné upozornit čtenáře už teď, že v literatuře běžně užívaný termín „kritéria neabsolutní konvergence“ je poněkud matoucí. V následujících větách se netvrdí, že příslušná řada (za jistých předpokladů) **konverguje neabsolutně**, ale pouze to, že **konverguje**.

Nejdříve si uveďme kritérium týkající se konvergence tzv. alternujících řad (to jsou řady, jejichž členy pravidelně „střídají znaménka“).

Věta 1.23 (Leibnizovo kritérium). *Nechť (a_n) je monotónní posloupnost definovaná na $\mathbb{N}$ a taková, že $\lim a_n = 0$.^a Potom řada*

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

konverguje.

^aVšimněme si, že pro monotónní posloupnost (a_n) s nulovou limitou platí jedna z možností:

- i) $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq a_{n+1} \leq a_n$,
- ii) $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \geq a_{n+1} \geq a_n$.

Důkaz. Předpokládejme například, že

$$\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq a_{n+1} \leq a_n,$$

a vyberme z posloupnosti

$$s_n := \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_k$$



Obsah

31. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

částečných součtů zkoumané řady posloupnost lichých (vyjma prvního) a posloupnost sudých členů. Tzn. uvažujme posloupnosti

$$s_n^* := s_{2n+1}, \quad s_n^{**} := s_{2n}.$$

Protože díky předpokladu ii) víme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned} s_{n+1}^* &= s_{2n+3} = s_{2n+1} - a_{2n+2} + a_{2n+3} \leq s_{2n+1} = s_n^*, \\ s_{n+1}^{**} &= s_{2n+2} = s_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq s_{2n} = s_n^{**}, \end{aligned}$$

existují limity:¹

$$\begin{aligned} \lim s_n^* &\in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \\ \lim s_n^{**} &\in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}. \end{aligned}$$

Navíc ale díky předpokladu iii) platí, že

$$\lim(s_n^* - s_n^{**}) = \lim(s_{2n+1} - s_{2n}) = \lim a_{2n+1} = 0,$$

a proto

$$\lim s_n^* = \lim s_n^{**} =: s \in \mathbb{R}!$$

Odtud již snadno plyne (čtenář si laskavě promyslí sám!), že

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = \lim s_n = s \in \mathbb{R},$$

což jsme měli dokázat.

□

¹Viz Větu o limitě monotónní posloupnosti.



Obsah

32. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Příklad 1.24. Řada

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

je neabsolutně konvergentní, protože platí:

- $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n},$
- $\lim \frac{1}{n} = 0;$
- $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^{n+1} \frac{1}{n}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$

Věta 1.25 (Dirichletovo kritérium). *Nechť (a_n) je monotónní posloupnost definovaná na $\mathbb{N}$, pro niž platí $\lim a_n = 0$, a nechť posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je omezená. Pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergentní.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že posloupnost (a_n) je nerostoucí (v případě neklesající posloupnosti by stačilo uvažovat posloupnost $(-a_n)$). To (vzhledem k podmínce $\lim a_n = 0$) znamená, že $a_n \geq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Dále z předpokladů vyplývá, že pro posloupnost

$$s_n := \sum_{k=1}^n b_k$$



Obsah

33. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ platí

$$(\exists k \in \mathbb{R}^+) (\forall n \in \mathbb{N}) : |s_n| \leq k.$$

Nyní ukážeme (což díky větě 1.5 stačí), že pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ platí Bolzanova–Cauchyho podmínka

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall m, n \in \mathbb{N}; n_0 \leq m < n) : \left| \sum_{k=m+1}^n a_k b_k \right| < \varepsilon.$$

Bud' $\varepsilon > 0$ dáno. Z předpokladu $\lim a_n = 0$ vyplývá, že

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}; n \geq n_0) : a_n = |a_n| < \frac{\varepsilon}{2k}.$$

Zbývá dokázat, že pro každé $m, n \in \mathbb{N}$, $n_0 \leq m < n$, platí $\left| \sum_{k=m+1}^n a_k b_k \right| < \varepsilon$.

A to lze udělat přímým výpočtem:

$$\begin{aligned} |a_{m+1}b_{m+1} + \cdots + a_nb_n| &= |a_{m+1}(s_{m+1} - s_m) + \cdots + a_n(s_n - s_{n-1})| = \\ &= |-a_{m+1}s_m + (a_{m+1} - a_{m+2})s_{m+1} + \cdots + (a_{n-1} - a_n)s_{n-1} + a_ns_n| \leq \\ &\leq a_{m+1}|s_m| + (a_{m+1} - a_{m+2})|s_{m+1}| + \cdots + (a_{n-1} - a_n)|s_{n-1}| + a_n|s_n| \leq \\ &\leq ka_{m+1} + k(a_{m+1} - a_{m+2}) + \cdots + k(a_{n-1} - a_n) + ka_n = 2ka_{m+1} < \varepsilon. \end{aligned}$$

□



Obsah

34. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Poznámka 1.26. Věta 1.23 je nyní jednoduchým důsledkem věty 1.25. Stačí totiž volit $b_n := (-1)^{n+1}$. Je jasné, že posloupnost částečných součtů řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$$

je pak omezená.

Příklad 1.27. Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^{\alpha}}$$

je konvergentní pro libovolné $\alpha > 0$, neboť posloupnost $(\frac{1}{n^{\alpha}})$ je monotónní a konverguje k nule a řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$ má omezenou posloupnost částečných součtů¹ (viz větu 1.25).

Věta 1.28 (Abelovo kritérium). *Nechť (a_n) je monotónní omezená posloupnost definovaná na $\mathbb{N}$ a nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje. Pak je konvergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.*

¹ Tento fakt není úplně triviální. Čtenář si může (např. matematickou indukcí, popř. pomocí komplexních čísel) dokázat, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$s_n := \sum_{k=1}^n \sin k = \frac{\sin \frac{n+1}{2} \sin \frac{n}{2}}{\sin \frac{1}{2}}, \text{ a proto } |s_n| \leq \frac{1}{\sin \frac{1}{2}}.$$



Obsah

35. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Důkaz. Z předpokladů věty plyne, že existuje **konečná** $\lim a_n =: a$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujeme

$$a_n^* := a_n - a.$$

Pak posloupnost (a_n^*) je jistě monotónní a konverguje k nule; navíc, protože je řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní, je posloupnost částečných součtů této řady omezená. Odtud a z Dirichletova kritéria (viz větu 1.25) plyne, že je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^* b_n$ konvergentní.

A dál je to snadné, protože pro posloupnost (s_n) částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ platí

$$s_n := \sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^n (a_k^* + a) b_k = \sum_{k=1}^n a_k^* b_k + a \sum_{k=1}^n b_k \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k^* b_k + a \sum_{k=1}^{\infty} b_k \in \mathbb{R}.$$

□

Příklady 1.29.

1) Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctg n \frac{\sin n}{n^{\alpha}} \right)$$

je konvergentní pro libovolné $\alpha > 0$. V příkladu 1.27 jsme totiž ukázali konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^{\alpha}}$. Dále je zřejmé, že posloupnost $(\arctg n)$ je monotónní a omezená. Tvrzení tak plyne přímo z věty 1.28.



Obsah

36. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

2) Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ libovolná konvergentní řada, tak je (viz větu 1.28) konvergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} b_n$, neboť posloupnost $\left(\frac{n+1}{n}\right)$ je monotónní a omezená.

[Obsah](#)[37. strana ze 91](#)[Zavřít dokument](#)[Celá obrazovka/Okno](#)

1.4. Několik poznámek nakonec

Poznámka 1.30 (k odhadu zbytku řady). Uvažujme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $n \in \mathbb{N}$. Řadu

$$a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \dots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

nazýváme zbytkem řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ po n -tém členu.¹

Často je užitečné odhadnout (pro konvergentní řadu) součet tohoto zbytku.² To však nemusí být snadné. Zde si – pro ilustraci – alespoň uvedme, že například při splnění předpokladů Leibnizova kritéria pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí³

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n - \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k \right| \leq |a_{n+1}|.$$

(Můžete se pokusit odhadnout zbytek řady i „za situace z některého z ostatních kritérií“.)

¹Symbolu „ $\sum_{n=\alpha}^{\infty} a_n$ “, kde $1 < \alpha \in \mathbb{N}$, se užívá i pro označení „celých“ řad, nejen pro označení zbytku jisté řady (konečkonců **zbytek řady je „celá“ řada**). Čtenář určitě nebude mít problém porozumět, jaké řady jsou míněny, napíšeme-li – například – $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n-2}$, $\sum_{n=18}^{\infty} \frac{\ln(n-17)}{n^5}$, $\dots$.

²Nepřehlédněme zřejmé tvrzení:

Řada konverguje právě tehdy, konverguje-li její zbytek po n -tém členu.

³Čtenář by měl považovat za věc cti, že si příslušný odhad dokáže.



Obsah

38. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Poznámka 1.31 (k přerovnávání řad). Je-li zobrazení

$$\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

- definované na celém $\mathbb{N}$,
- prosté,
- na (tzn. že $\varphi(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$),

říkáme, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$$

vznikla přerovnáním řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.



Obsah

39. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Dá se dokázat, že platí:

- i) Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **absolutně konvergentní**, konverguje absolutně i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ a má stejný součet.
- ii) Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje **neabsolutně**, lze ji přerovnat tak, aby nově získaná řada měla za svůj součet libovolné (předem zadané) číslo $z \in \mathbb{R}^*$, nebo tak, aby součet řady vzniklé přerovnáním vůbec neexistoval.

Poznámka 1.32 (k řadám komplexních čísel). Řadou komplexních čísel rozumíme výraz

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

kde pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n \in \mathbb{C}$.

Označme pro každé $n \in \mathbb{N}$:

$$\alpha_n = \operatorname{Re} a_n,$$

$$\beta_n = \operatorname{Im} a_n,$$

tzn. že

$$a_n = \alpha_n + \beta_n i;$$

$$\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}.$$



Obsah

40. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Existují-li **konečné(!)** součty řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n =: \alpha \in \mathbb{R},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n =: \beta \in \mathbb{R},$$

říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, a součtem řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ rozumíme (komplexní) číslo

$$s := \alpha + \beta i.$$

Více si lze o řadách komplexních čísel přečíst např. v [2].



Obsah

41. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

1.5. Kontrolní testy

Test 1. Doplňte součty řad:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} =$,

2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} =$,

3. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{4^n} =$,

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n =$,

5. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n =$,

6. $\sum_{n=3}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n =$,



Obsah

42. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{12^n} =$,

8. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + (-4)^n}{12^n} =$,

9. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3^n - 4^n}{12^n} =$.

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:



Obsah

43. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Test 2. Sestavte pravdivé výroky.

1. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ je

absolutně konvergentní.

neabsolutně konvergentní.

divergentní.

2. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n}$ je

absolutně konvergentní.

neabsolutně konvergentní.

divergentní.

3. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ je

absolutně konvergentní.

neabsolutně konvergentní.

divergentní.



Obsah

44. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

4. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ je

absolutně konvergentní.

neabsolutně konvergentní.

divergentní.

5. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{\sqrt{n}}}$ je

absolutně konvergentní.

neabsolutně konvergentní.

divergentní.

6. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ je

absolutně konvergentní.

neabsolutně konvergentní.

divergentní.



Obsah

45. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

7. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^3}}$ je

absolutně konvergentní.

neabsolutně konvergentní.

divergentní.

8. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2}$ je

absolutně konvergentní.

neabsolutně konvergentní.

divergentní.

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:



Obsah

46. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Test 3. Sestavte pravdivé výroky.

1. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{2\sqrt{n}}$ je

absolutně konvergentní.

neabsolutně konvergentní.

divergentní.

2. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}} \cos \frac{1}{n^3}$ je

absolutně konvergentní.

neabsolutně konvergentní.

divergentní.

3. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{n^2}$ je

absolutně konvergentní.

neabsolutně konvergentní.

divergentní.



Obsah

47. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

4. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ je

absolutně konvergentní.

neabsolutně konvergentní.

divergentní.

5. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$ je

absolutně konvergentní.

neabsolutně konvergentní.

divergentní.

6. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ je

absolutně konvergentní.

neabsolutně konvergentní.

divergentní.



Obsah

48. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

7. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$ je

absolutně konvergentní.

neabsolutně konvergentní.

divergentní.

8. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+7}{3n-2012} \right)^n$ je

absolutně konvergentní.

neabsolutně konvergentní.

divergentní.

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:



Obsah

49. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Test 4. Sestavte pravdivé výroky.

1. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{3n+1} \right)^n$ je

absolutně konvergentní.

neabsolutně konvergentní.

divergentní.

2. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{3n+1}$ je

absolutně konvergentní.

neabsolutně konvergentní.

divergentní.

3. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n+1}$ je

absolutně konvergentní.

neabsolutně konvergentní.

divergentní.



Obsah

50. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

4. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2 + 1}$ je

absolutně konvergentní.

neabsolutně konvergentní.

divergentní.

5. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}$ je

absolutně konvergentní.

neabsolutně konvergentní.

divergentní.

6. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ je

absolutně konvergentní.

neabsolutně konvergentní.

divergentní.



Obsah

51. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

7. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{3^n}$ je

absolutně konvergentní.

neabsolutně konvergentní.

divergentní.

8. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ je

absolutně konvergentní.

neabsolutně konvergentní.

divergentní.

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:



Obsah

52. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Test 5. Sestavte pravdivé výroky.

1. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n - \ln n}$ je

absolutně konvergentní.

neabsolutně konvergentní.

divergentní.

2. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{1}{n}$ je

absolutně konvergentní.

neabsolutně konvergentní.

divergentní.

3. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{1}{n^2}$ je

absolutně konvergentní.

neabsolutně konvergentní.

divergentní.



Obsah

53. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

4. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \cos \frac{1}{n}$ je

absolutně konvergentní.

neabsolutně konvergentní.

divergentní.

5. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12n^5 - 4n^3 + 2012}{2012n^5 + n^4 - 2}$ je

absolutně konvergentní.

neabsolutně konvergentní.

divergentní.

6. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 - 4n^3 + 2012}{n^5 + n^4 - 1}$ je

absolutně konvergentní.

neabsolutně konvergentní.

divergentní.



Obsah

54. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

7. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^4 - 4n^3 + 2012}{12n^6 + n^4 - 1}$ je

absolutně konvergentní.

neabsolutně konvergentní.

divergentní.

8. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{3n^4 + 4n^3 + 2012}}{3n^2 - 2}$ je

absolutně konvergentní.

neabsolutně konvergentní.

divergentní.

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:



Obsah

55. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno



Kapitola 2

Posloupnosti a řady funkcí

2.1. Bodová a stejnoměrná konvergence

Definice 2.1. Řekneme, že posloupnost reálných funkcí (f_n) konverguje bodově na množině $M \subset \mathbb{R}$ k funkci f , a píšeme $f_n \rightarrow f$ na M , platí-li

$$\forall x \in M : \lim f_n(x) = f(x),$$

tj. platí-li

$$(\forall x \in M) (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Obsah

56. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Poznámka 2.2. Přirozené číslo n_0 vyskytující se ve výše uvedené podmínce závisí obecně na volbě $x \in M$ a $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Jestliže lze číslo n_0 zvolit nezávisle na volbě bodu $x \in M$, mluvíme o stejnoměrné konvergenci na M . Řekněme to přesněji:

Definice 2.3. Řekneme, že posloupnost reálných funkcí (f_n) konverguje stejnoměrně na množině $M \subset \mathbb{R}$ k funkci f , a píšeme $f_n \rightrightarrows f$ na M , platí-li

$$\lim \left[\sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| \right] = 0,$$

tj. platí-li

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) (\forall x \in M) : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Poznámka 2.4. Rozmysleme si, že zřejmě platí:

$$f_n \rightrightarrows f \text{ na } M \Rightarrow f_n \rightarrow f \text{ na } M.$$

Příklad 2.5. Buď pro každé $n \in \mathbb{N}$ funkce f_n definovaná předpisem

$$f_n(x) := x^n - x^{2n}.$$

Rozhodněme, zda je posloupnost funkcí (f_n) bodově, resp. stejnoměrně konvergentní na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.



Obsah

57. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Řešení. Hledání bodové limity není těžké. Stačí si uvědomit, že pro libovolné (ale pevné) $x \in \langle 0, 1 \rangle$ je

$$\lim x^{2n} = \lim x^n = \begin{cases} 0, & \text{je-li } x \in \langle 0, 1 \rangle, \\ 1, & \text{je-li } x = 1, \end{cases}$$

a proto

$$\lim f_n(x) = \lim(x^n - x^{2n}) = 0.$$

To znamená, že posloupnost (f_n) konverguje bodově na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ k funkci

$$f(x) := 0.$$

Zbývá odpovědět na otázku (a to díky předchozí poznámce 2.4 stačí), zda $f_n \rightrightarrows 0$ na $\langle 0, 1 \rangle$, tj. zda platí

$$\lim \left(\sup_{x \in \langle 0, 1 \rangle} |f_n(x) - f(x)| \right) = \lim \left(\sup_{x \in \langle 0, 1 \rangle} |f_n(x)| \right) = 0.$$

Není obtížné spočítat, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ je

$$\sup_{x \in \langle 0, 1 \rangle} |f_n(x)| = \sup_{x \in \langle 0, 1 \rangle} (x^n - x^{2n}) = \max_{x \in \langle 0, 1 \rangle} (x^n - x^{2n}) = \frac{1}{4},$$

a proto posloupnost (f_n) není na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ stejnoměrně konvergentní.

Ilustrace: Posloupnost (f_n) je znázorněna na následujícím obrázku,



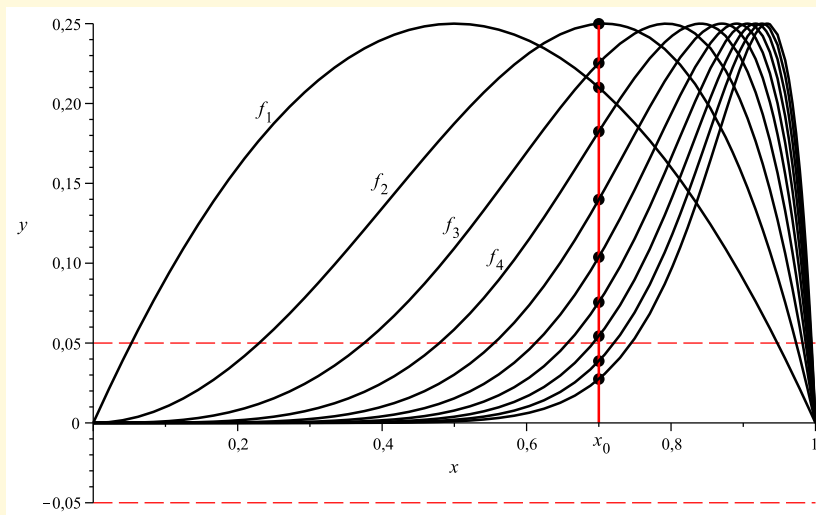
Obsah

58. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



z něhož lze vyčíst, že pro libovolné (ale pevné) $x_0 \in \langle 0, 1 \rangle$ se posloupnost $(f_n(x_0))$ blíží k 0, tj. že bodovou limitou (f_n) je (na $\langle 0, 1 \rangle$) nulová funkce.

Pokud kolem grafu limitní (nulové) funkce sestrojíme pás o šířce $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$ (v našem obrázku jsme volili $\varepsilon = 0,05$), zjistíme, že žádný z grafů funkcí f_n v tomto pásu **celý** neleží. To ovšem znamená, že konvergence posloupnosti (f_n) k funkci $f(x) := 0$ není na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ stejnoměrná.



Definice 2.6. Buďte pro každé $n \in \mathbb{N}$ funkce f_n a f definované na množině $M \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že řada funkcí

$$f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots \stackrel{\text{ozn.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (2.1)$$

konverguje bodově (resp. stejněměrně) na množině M ke svému součtu f , konverguje-li posloupnost (s_n) částečných součtů řady (2.1) ^a bodově (resp. stejněměrně) na M k funkci f .

$$^a s_n(x) := \sum_{k=1}^n f_k(x).$$

[Obsah](#)[60. strana ze 91](#)[Zavřít dokument](#)[Celá obrazovka/Okno](#)

2.2. Kritéria stejnoměrné konvergence

Důkazy vět uvedených v této a následující kapitole jsou technicky náročnější, a nebudeme je zde proto uvádět. Zájemci si je mohou nalistovat např. v [5] a v [6].

Věta 2.7 (Bolzanova–Cauchyho podmínka). *Posloupnost funkcí (f_n) je stejnoměrně konvergentní na množině $M \subset \mathbb{R}$ právě tehdy, když*

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall m, n \in \mathbb{N}; m, n \geq n_0) (\forall x \in M) : |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Věta 2.8 (Bolzanova–Cauchyho podmínka pro řady funkcí). *Řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ je stejnoměrně konvergentní na množině $M \subset \mathbb{R}$ právě tehdy, když*

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall m, n \in \mathbb{N}; n_0 \leq m < n) (\forall x \in M) : \left| \sum_{k=m+1}^n f_k(x) \right| < \varepsilon.$$

(Porovnejte s větou 1.5.)



Obsah

61. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno



Věta 2.9 (Weierstrassovo kritérium). *Nechť $M \subset \mathbb{R}$ a nechť $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jsou takové řady, že*

i) $|f_n(x)| \leq b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a pro každé $x \in M$,

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje.

Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na M .

(Porovnejte s větou 1.9.)

Příklad 2.10. Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 + x^2}$$

stejnoměrně konverguje na $\mathbb{R}$, neboť

$$(\forall n \in \mathbb{N}) (\forall x \in \mathbb{R}) : \left| \frac{\sin nx}{n^2 + x^2} \right| \leq \frac{1}{n^2 + x^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

a reálná řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje (např. podle integrálního kritéria – viz větu 1.21).

Obsah

62. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



Definice 2.11. Řekneme, že posloupnost funkcí (f_n) je monotónní na množině $M \subset \mathbb{R}$, platí-li jedna z možností:

- i) $(\forall n \in \mathbb{N}) (\forall x \in M) : f_n(x) \leq f_{n+1}(x),$
- ii) $(\forall n \in \mathbb{N}) (\forall x \in M) : f_n(x) \geq f_{n+1}(x).$

Definice 2.12. Řekneme, že posloupnost funkcí (f_n) je stejněměrně omezená na množině $M \subset \mathbb{R}$, platí-li

$$(\exists c \in \mathbb{R}^+) (\forall n \in \mathbb{N}) (\forall x \in M) : |f_n(x)| \leq c.$$

Věta 2.13 (Dirichletovo kritérium pro řady funkcí). *Nechť (f_n) je monotónní posloupnost funkcí na množině M , pro niž platí $f_n \rightarrow 0$ na M , a nechť posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ je stejněměrně omezená na M .^a Pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(x)$ stejněměrně konvergentní na M .*

^aTzn. $(\exists c \in \mathbb{R}^+) (\forall n \in \mathbb{N}) (\forall x \in M) : \left| \sum_{k=1}^n g_k(x) \right| \leq c.$

(Porovnejte s větou 1.25.)

Obsah

63. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Příklad 2.14. Díky Dirichletovu kritériu 2.13 víme, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

konverguje stejnoměrně na intervalu

$$I_{\alpha} = \langle \alpha, 2\pi - \alpha \rangle,$$

kde $\alpha \in (0, \pi)$.

(Posloupnost konstantních funkcí $(\frac{1}{n})$ je monotónní, $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ na I_{α} a posloupnost částečných součtů řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$$

je stejnoměrně omezená na I_{α} .¹⁾)

¹⁾Z tvrzení

$$(\forall x \in I_{\alpha}) (\forall n \in \mathbb{N}) : \sum_{k=1}^n \sin kx = \frac{\sin \left(\frac{n+1}{2} x \right) \sin \left(\frac{n}{2} x \right)}{\sin \frac{x}{2}},$$

které lze dokázat např. matematickou indukcí, snadno obdržíme

$$(\forall n \in \mathbb{N}) (\forall x \in I_{\alpha}) : \left| \sum_{k=1}^n \sin kx \right| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|} \leq \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} =: c \in \mathbb{R}^+,$$

což je přesně výše zmíněná stejnoměrná omezenost posloupnosti částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$.



Obsah

64. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Poznámka 2.15. V posledním příkladu jsme ukázali, že pro jakkoliv malé $\alpha \in (0, \pi)$ je řada funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

stejněměrně konvergentní na $\langle \alpha, 2\pi - \alpha \rangle$. Lze ukázat, že na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ tato řada sice konverguje, ale konvergence zde není stejnoměrná.

Věta 2.16 (Abelovo kritérium pro řady funkcí). *Nechť (f_n) je monotónní a stejnoměrně omezená posloupnost funkcí na množině M a nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ je stejnoměrně konvergentní na M . Pak je stejnoměrně konvergentní na množině M i řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(x)$.*

(Porovnejte s větou 1.28.)

2.3. Vlastnosti stejnoměrně konvergentních posloupností a řad funkcí

Věta 2.17. *Nechť posloupnost funkcí (f_n) stejnoměrně konverguje k funkci f na intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Jsou-li funkce f_n spojité na I pro všechna dost velká $n \in \mathbb{N}$, je i funkce f spojitá na I .*



Obsah

65. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Poznámka 2.18. Předpoklad stejnoměrné konvergence nelze nahradit konvergencí bodovou. Uvažujme například posloupnost funkcí (f_n) definovaných na intervalu $I = \langle 0, 1 \rangle$ předpisu

$$f_n(x) := x^n.$$

Je zřejmé, že pro každé $x \in I$ platí

$$\lim f_n(x) = f(x),$$

kde

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in \langle 0, 1 \rangle, \\ 1 & \text{pro } x = 1. \end{cases}$$

Všechny funkce f_n jsou na I spojité, $f_n \rightarrow f$ na I , ale limitní funkce f na I spojitá není.

Důsledek 2.19. *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a nechť řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na I ke svému součtu*

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Jsou-li funkce f_n spojité na I pro všechna $n \in \mathbb{N}$, je i funkce f spojitá na I .

Věta 2.17 nám říká, že stejnoměrná limita spojitých funkcí je spojitá funkce. Uvidíme, že toto tvrzení lze (za vhodných dodatečných předpokladů) v jistém smyslu obrátit.



Obsah

66. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



Věta 2.20 (Diniho). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť*

- i) (f_n) *je monotónní posloupnost spojitých funkcí na intervalu $\langle a, b \rangle$,*
- ii) $f_n \rightarrow f$ *na $\langle a, b \rangle$,*
- iii) *funkce f je spojitá na $\langle a, b \rangle$.*

Pak $f_n \Rightarrow f$ na $\langle a, b \rangle$.

Důsledek 2.21. *Nechť (f_n) je posloupnost nezáporných (resp. nekladných) spojitých funkcí na intervalu $I = \langle a, b \rangle$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť funkce $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ je spojitá na I . Pak řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně k funkci f na I .*

Věta 2.22. *Nechť posloupnost funkcí (f_n) stejnoměrně konverguje k funkci f na intervalu $\langle a, b \rangle$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Jsou-li všechny funkce f_n (Riemannovsky) integrovatelné na $\langle a, b \rangle$, je i funkce f integrovatelná na $\langle a, b \rangle$ a platí*

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim \int_a^b f_n(x) \, dx.$$

Poznámka 2.23. Předchozí věta nám říká, že za uvedených předpokladů můžeme zaměnit limitu a integrál, tj.

$$\int_a^b \lim f_n(x) \, dx = \lim \int_a^b f_n(x) \, dx.$$

Obsah

67. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Pokud je konvergence pouze bodová, limitu a integrál **obecně** zaměnit nemůžeme, jak je ukázáno v následujícím příkladu.

Příklad 2.24. Uvažujme posloupnost funkcí (f_n) definovaných na intervalu $I = \langle 0, 1 \rangle$ předpis

$$f_n(x) := \begin{cases} n^2 x & \text{pro } x \in \langle 0, \frac{1}{2n} \rangle, \\ n - n^2 x & \text{pro } x \in (\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}), \\ 0 & \text{pro } x \in \langle \frac{1}{n}, 1 \rangle. \end{cases}$$

Všechny funkce f_n jsou spojitě (a tedy integrovatelné) na I a není těžké si uvědomit, že pro každé $x \in I$ platí

$$\lim f_n(x) = 0.$$

Přímým výpočtem ale zjistíme, že

$$\int_0^1 \lim f_n(x) dx = \int_0^1 0 dx = 0 \neq \frac{1}{4} = \lim \int_0^1 f_n(x) dx.$$

Důsledek 2.25. *Nechť řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na intervalu $\langle a, b \rangle$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, ke svému součtu*

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Jsou-li všechny funkce f_n (Riemannovsky) integrovatelné na $\langle a, b \rangle$, je i funkce f integrovatelná na $\langle a, b \rangle$ a platí

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b f_n(x) dx \right).$$



Obsah

68. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Poznámka 2.26. V předchozím důsledku se tvrdí, že (za uvedených předpokladů) můžeme zaměnit integrál a sumu, tj.

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b f_n(x) dx \right).$$

Věta 2.27. *Nechť (f_n) je posloupnost funkcí, které mají na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$ derivaci, nechť posloupnost (f_n) konverguje (bodově) k funkci f na I a nechť posloupnost derivací (f'_n) je stejnoměrně konvergentní na I . Pak funkce f má na I derivaci a platí*

$$f'(x) = \lim f'_n(x) \text{ pro každé } x \in I,$$

tj.

$$(\lim f_n)' = \lim f'_n \text{ na } I.$$

Důsledek 2.28. *Nechť (f_n) je posloupnost funkcí, které mají na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$ derivaci. Dále nechť $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverguje (bodově) k f na I a nechť řada derivací $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ je stejnoměrně konvergentní na I . Pak funkce f má na I derivaci a platí*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) \text{ pro každé } x \in I,$$

tj.

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) \text{ na } I.$$



Obsah

69. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

2.4. Mocninné a Taylorovy řady

Definice 2.29. Mocninnou řadou se středem $x_0 \in \mathbb{R}$ rozumíme řadu funkcí tvaru

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \quad (2.2)$$

kde pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ je $a_n \in \mathbb{R}$.

Zabývejme se nyní konvergencí řady (2.2), tj. zkoumejme, pro jaká $x \in \mathbb{R}$ příslušná číselná řada konverguje. Je zřejmé, že řada (2.2) konverguje pro $x = x_0$, tj. ve svém středu, a má tam součet a_0 . Předpokládejme nyní, že řada (2.2) konverguje v bodě $x_1 \neq x_0$, a buď $x \in \mathbb{R}$ takový bod, že $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$|a_n(x - x_0)^n| = |a_n(x_1 - x_0)^n| \left| \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right|^n. \quad (2.3)$$

Z předpokladu, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_1 - x_0)^n$ konverguje, vyplývá (viz nutnou podmínku konvergence 1.3)

$$\lim (a_n(x_1 - x_0)^n) = 0,$$

a proto existuje $k \in \mathbb{R}^+$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $|a_n(x_1 - x_0)^n| \leq k$.

Navíc, z předpokladu $\left| \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right| < 1$ plyne konvergence (geometrické) řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} k \left| \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right|^n,$$



Obsah

70. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

a proto ze vztahu (2.3) (a srovnávacího kritéria 1.9) vyplývá, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ absolutně konverguje. Toto zjištění je zobecněno v následující větě.

Věta 2.30 (Abelova). *Nechť řada (2.2) konverguje v bodě $x_1 \neq x_0$ a označme*

$$\varepsilon = |x_1 - x_0| > 0.$$

Pak

- (i) *pro každé $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ řada (2.2) konverguje absolutně,*
- (ii) *mocnná řada (2.2) konverguje lokálně stejnoměrně na intervalu ^a*

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

Důsledek. *Pokud mocnná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ diverguje v bodě $x_2 \in \mathbb{R}$, diverguje i v každém bodě množiny*

$$\{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| > |x_2 - x_0|\}.$$

^aLokálně stejnoměrnou konvergencí na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ rozumíme stejnoměrnou konvergenci na každém uzavřeném omezeném intervalu $\langle a, b \rangle \subset I$.

Tvrzení Abelovy věty nás přímo ponouká k následující definici.



Obsah

71. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



Definice 2.31. Číslo

$$R := \sup \left\{ |x - x_0| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \text{ konverguje} \right\}$$

nazýváme poloměrem konvergence mocinné řady (2.2).

Poznámka 2.32. Nepřehlédněme tyto zřejmé důsledky Abelovy věty 2.30 a následující definice 2.31 poloměru konvergence $R \in \langle 0, +\infty \rangle \cup \{+\infty\}$:

(i) je-li

$$R = 0,$$

řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ konverguje právě tehdy, platí-li $x = x_0$;

(ii) je-li

$$R > 0,$$

konverguje řada (2.2) absolutně a lokálně stejnoměrně na intervalu¹

$$(x_0 - R, x_0 + R);$$

(iii) řada (2.2) diverguje, je-li $|x - x_0| > R$.

¹Mluvíme o tzv. intervalu konvergence mocinné řady (2.2).

Obsah

72. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Poznámka 2.33. Předpokládejme, že pro poloměr konvergence R mocninné řady (2.2) platí

$$0 < R < +\infty.$$

Uvědomme si, že **obecně** nelze říci **nic** o konvergenci této řady v krajních bodech intervalu konvergence, tj. v bodech $x_0 - R$ a $x_0 + R$.

Situaci ilustrujme těmito třemi mocninnými řadami:¹

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

Protože pro každé $0 \neq x \in \mathbb{R}$ platí

$$\left| \frac{x^{n+1}}{x^n} \right| \rightarrow |x|, \quad \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}} \right| \rightarrow |x|, \quad \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{x^n}{n^2}} \right| \rightarrow |x|,$$

je každá z uvedených řad konvergentní, je-li $|x| < 1$, a divergentní, je-li $|x| > 1$ (viz d'Alembertovo kritérium 1.13). Proto je (podívejme se znovu na poznámku 2.32) poloměr konvergence každé z těchto mocninných řad roven 1 a intervalem konvergence je vždy interval $(-1, 1)$. Podívejme se, co lze říci o konvergenci uvažovaných řad v bodech -1 a 1 .

- řada $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ diverguje pro $x = -1$ i pro $x = 1$ (ani v jednom z případů není splněna nutná podmínka konvergence řady – viz větu 1.3);

¹Jedná se ve všech třech případech o mocninné řady tvaru $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, kde $x_0 = 0$ a $a_0 = 0$.



Obsah

73. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

- řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ konverguje (neabsolutně) pro $x = -1$ a diverguje pro $x = 1$ (viz Leibnizovo kritérium 1.23 a integrální kritérium 1.21);
- řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ konverguje (absolutně) pro $x = -1$ i pro $x = 1$ (i tato tvrzení plynou snadno z integrálního kritéria 1.21).

Věta 2.34. *Necht existuje*

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \stackrel{\text{ozn.}}{=} L, \quad \text{resp.} \quad \lim \sqrt[n]{|a_n|} \stackrel{\text{ozn.}}{=} K.$$

Pak pro poloměr konvergence R mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ platí, že

$$R = \begin{cases} \frac{1}{L}, & \text{je-li } 0 < L < +\infty, \\ 0, & \text{je-li } L = +\infty, \\ +\infty, & \text{je-li } L = 0, \end{cases} \quad \text{resp.} \quad R = \begin{cases} \frac{1}{K}, & \text{je-li } 0 < K < +\infty, \\ 0, & \text{je-li } K = +\infty, \\ +\infty, & \text{je-li } K = 0. \end{cases}$$

Důkaz. Stačí si uvědomit, že pro $x \neq x_0$ je

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}(x - x_0)^{n+1}}{a_n(x - x_0)^n} \right| = L|x - x_0|, \quad \text{resp.} \quad \lim \sqrt[n]{|a_n(x - x_0)^n|} = K|x - x_0|,$$



Obsah

74. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

a užít d'Alembertovo 1.13, resp. Cauchyho 1.16 kritérium.

□

Příklad 2.35. Určete obor konvergence mocninné řady¹ (se středem v bodě 1)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} (x-1)^n.$$

Řešení.

$$\lim \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \lim \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2},$$

a proto $R = 2$; daná řada konverguje (absolutně) pro každé $x \in (-1, 3)$ a diverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$ takové, že $|x-1| > 2$.

Pro $x = -1$ ani pro $x = 3$ řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} (x-1)^n$ nekonverguje, protože není ani v jednom z bodů splněna nutná podmínka konvergence² (viz větu 1.3).

Oborem konvergence dané řady je interval $(-1, 3)$.

▲

¹Tzn. určete množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro něž daná řada konverguje.

²Tzn. neplatí rovnost

$$\lim \frac{n}{2^n} (x-1)^n = 0.$$



Obsah

75. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Příklad 2.36. Určete poloměr konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n.$$

Řešení.

$$\frac{\frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} \rightarrow 4,$$

a proto $R = \frac{1}{4}$.



Následující – velmi důležitá věta – plyne z důsledků 2.28, 2.25 a Abelovy věty 2.30.



Obsah

76. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno



Věta 2.37 (o derivování a integrování mocninné řady člen po členu).

Nechť mocninná řada

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \quad (2.4)$$

má poloměr konvergence $R > 0$. Pak i mocninné řady

$$a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x - x_0)^{n-1},$$

$$a_0(x - x_0) + \frac{a_1}{2}(x - x_0)^2 + \frac{a_2}{3}(x - x_0)^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1}$$

(vzniklé derivováním, resp. integrováním řady (2.4) „člen po členu“) mají poloměr konvergence R a navíc pro funkci S definovanou předpisem

$$S(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

a pro každé $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ platí:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x - x_0)^{n-1},$$

$$\int_{x_0}^x S(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1}.$$

Obsah

77. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Poznámka 2.38. Znovu si prohlédneme předcházející větu a nepřehlédneme, že (za daných předpokladů) platí pro součet S mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ následující dvě tvrzení:

- i) S má na intervalu konvergence všechny derivace a pro každé $p \in \mathbb{N}$ a pro každé $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ platí

$$S^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1) \dots (n-p+1) a_n (x - x_0)^{n-p},$$

- ii) funkce

$$x \mapsto \int_{x_0}^x S(t) dt$$

je na intervalu $(x_0 - R, x_0 + R)$ primitivní funkcí k funkci S .

Věta 2.39 (Abelova). *Nechť $0 < R < +\infty$ a nechť řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ konverguje v bodě $x = x_0 + R$, resp. v bodě $x = x_0 - R$. Pak pro funkci S definovanou předpisem*

$$S(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

platí, že je spojitá zleva v bodě $x = x_0 + R$, resp. zprava v bodě $x = x_0 - R$, tzn.

$$S(x_0 + R) = \lim_{x \rightarrow x_0 + R -} S(x), \text{ resp. } S(x_0 - R) = \lim_{x \rightarrow x_0 - R +} S(x).$$



Obsah

78. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Příklad 2.40. Vypočtěme součet řady

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}.$$

Řešení. Předně si uvědomme, že Leibnizovo kritérium 1.23 nám poskytuje argument, že uvedená řada konverguje. Uvažujme nyní funkci S definovanou předpisem

$$S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

Pak (protože poloměr konvergence výše uvedené mocninné řady je zřejmě 1) z věty 2.37 plyne

$$\forall x \in (-1, 1) : S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^{n-1} = \frac{1}{1+x}.$$

Odtud (a ze zřejmého faktu $S(0) = 0$) víme, že

$$\forall x \in (-1, 1) : S(x) = \ln(1+x).$$

A vše ostatní snadno vyplývá z Abelovy věty 2.39:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = S(1) = \lim_{x \rightarrow 1-} S(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} \ln(1+x) = \ln 2.$$



Obsah

79. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Příklad 2.41. Vyjádřeme v okolí bodu 0 funkci

$$S(x) := \operatorname{arctg} x$$

jako součet mocninné řady.

Řešení. Stačí si uvědomit, že

$$\forall x \in (-1, 1) : S'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n},$$

a proto (viz větu 2.37 a skutečnost, že $S(0) = \operatorname{arctg} 0 = 0$)

$$\forall x \in (-1, 1) : S(x) = \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Všimněme si, že nalezená mocninná řada konverguje v bodě $x = 1$ (viz Leibnizovo kritérium 1.23), a proto můžeme pomocí Abelovy věty 2.39 získat zajímavý bonus:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}.$$



Ukončeme naše povídání o řadách funkcí krátkou zmínkou o speciálním typu mocninných řad, o tzv. Taylorových řadách.



Obsah

80. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Definice 2.42. Předpokládejme, že existují všechny derivace funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Taylorovou řadou funkce f se středem x_0 pak rozumíme mocninnou řadu

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \quad (2.5)$$

(Nepřehlédněme zřejmou souvislost s Taylorovými polynomy funkce f v bodě x_0 .)

Je zajímavým úkolem zjistit, jak spolu souvisí součet Taylorovy řady (2.5), tzn. funkce S definovaná předpisem

$$S(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

a funkce f .



Obsah

81. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Příklad 2.43. Uvažujme součet Taylorovy řady funkce $f(x) := e^x$ se středem v bodě $x_0 = 0$, tj. funkci

$$S(x) := 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad (2.6)$$

Protože

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

má uvažovaná Taylorova řada poloměr konvergence $R = +\infty$ (viz větu 2.34), a proto můžeme díky větě 2.37 tvrdit, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ je

$$\underline{S'(x)} = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)' = 0 + 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \underline{S(x)}.$$

A to nám (pokud víme, že jediným řešením Cauchyho úlohy

$$\begin{cases} f'(x) = f(x), \\ f(0) = 1 (= S(0)), \end{cases}$$

na $\mathbb{R}$ je právě exponenciální funkce $f(x) := e^x$) dává jistotu, že $S(x) = e^x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.¹

¹Výše uvedený důkaz, že funkce e^x je rovna součtu své Taylorovy řady, a i samotné sestavení příslušné Taylorovy řady je poněkud problematické. Není totiž jasné, co rozumíme (jak definujeme) funkcí e^x . Často se exponenciální funkce **definuje** právě jako součet mocninné řady vyskytující se v (2.6).



Obsah

82. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Poznámka 2.44. Podobně jako v předcházejícím příkladu lze dokázat (či okomentovat), proč i pro mnoho dalších funkcí platí, že jsou součty svých Taylorových řad. Například

$$\bullet \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R},$$

$$\bullet \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R},$$

$$\bullet \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad \text{pro každé } x \in (-1, 1),$$

...



Obsah

83. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Pozor! Nemusí tomu tak být vždy. Vezměme třeba funkci

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Lze ukázat, že všechny derivace funkce f jsou spojité na $\mathbb{R}$ a že Taylorovou řadou funkce f se středem v bodě 0 je řada

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} 0$$

s nulovým součtem na $\mathbb{R}$. Funkce f je však nulová pouze v bodě 0.



Obsah

84. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

2.5. Kontrolní testy

Test 6. Určete poloměry konvergence daných mocninných řad:¹

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{2012}}, R =$,

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x - 2012)^n}{n}, R =$,

3. $\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x - 2012)^n, R =$,

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n, R =$,

5. $\sum_{n=0}^{\infty} (n^3 - 2n^2 + 1) x^n, R =$,

6. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n} (x + 2)^n, R =$,

¹ „∞“ pište jako „nekonečno“.



Obsah

85. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n} (x+2)^n$, $R =$,

8. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{5^{n+3}} x^n$, $R =$,

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n 2^n}$, $R =$,

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n 2^n} x^n$, $R =$,

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2012)!}$, $R =$.

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:



Obsah

86. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Test 7. Vypočtěte (a nebude to vždy lehká práce) pomocí věty o derivování a integrování mocnnné řady člen po členu (viz větu 2.37) součty daných řad:¹

$$1. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \quad ,$$

$$2. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2^n} = \quad ,$$

$$3. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = \quad ,$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n} = \quad .$$

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:

¹Pro inspiraci si prohlédněte řešený příklad 2.40.



Obsah

87. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno



Literatura

- [1] J. Bouchala: *Matematická analýza 1*, skripta VŠB-TU Ostrava, 1998.
- [2] J. Bouchala: *Funkce komplexní proměnné*, <http://mi21.vsb.cz/>, 2011.
- [3] J. Brabec, F. Martan, Z. Rozenský: *Matematická analýza I*, SNTL, Praha, 1985.
- [4] B. Budinský, J. Charvát: *Matematika I*, SNTL, Praha, 1987.
- [5] Z. Došlá, V. Novák: *Nekonečné řady*, skripta MU Brno, 1998.
- [6] V. Jarník: *Diferenciální počet (II)*, Academia, Praha, 1976.
- [7] K. Rektorys a spol.: *Přehled užití matematiky I a II*, Prometheus, Praha, 1995.
- [8] J. Veselý: *Matematická analýza pro učitele*, Matfyzpress, Praha, 1997.

Obsah

88. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Rejstřík

interval konvergence mocninné řady, 72

konvergence

bodová, 56, 60

lokálně stejnoměrná, 71

stejnoměrná, 57, 60

kritérium (neabsolutní) konvergence

Abelovo, 35

Dirichletovo, 33

Leibnizovo, 31

kritérium absolutní konvergence

integrální, 28

limitní odmocninové (Cauchyho), 21

limitní podílové (d'Alembertovo), 17

limitní Raabeovo, 27

odmocninové (Cauchyho), 20

podílové (d'Alembertovo), 15

Raabeovo, 24

srovnávací, 13

kritérium stejnoměrné konvergence

Abelovo, 65

Dirichletovo, 63

Weierstrassovo, 62

limita posloupnosti funkcí

bodová, 56

lokálně stejnoměrná, 71

stejnoměrná, 57

obor konvergence mocninné řady, 75

poloměr konvergence mocninné řady, 72

posloupnost

částečných součtů řady funkcí, 60

reálných funkcí, 56

částečných součtů řady, 6



Obsah

89. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

funkcí

monotónní na množině, 63
stejněměrně omezená na množině,
63

řada

n -tý člen, 6
(reálných) čísel, 5
(reálných) funkcí, 60
absolutně konvergentní, 12

alternující, 31

aritmetická, 7

divergentní, 6

funkcí

bodově konvergentní, 60
stejněměrně konvergentní, 60

geometrická, 7

harmonická, 8

komplexních čísel, 40

konvergentní, 6

mocninná, 70

interval konvergence, 72

obor konvergence, 75

poloměr konvergence, 72

neabsolutně konvergentní, 12

posloupnost částečných součtů, 6

přerovnaná, 39

součet, 6

Taylorova, 81

zbytek, 38

součet řady, 6

střed mocninné řady, 70

střed Taylorovy řady, 81

Taylorova řada, 81

věta

Abelova, 71, 78

Abelovo kritérium pro řady funkcí, 65

B–C podmínka pro řady funkcí, 61

Bolzanova–Cauchyho podmínka, 61

Diniho, 67

Dirichletovo kritérium pro řady funkcí,
63

o derivování a integrování řady člen
po členu, 77

o konvergenci řady

Abelovo kritérium, 35

Bolzanova–Cauchyho podmínka, 9

Dirichletovo kritérium, 33

integrální kritérium, 28

Leibnizovo kritérium, 31



Obsah

90. strana ze 91



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

limitní odmocninové (Cauchyho) kritérium, 21
limitní podílové (d'Alembertovo) kritérium, 17
limitní Raabeovo kritérium, 27
nutná podmínka, 8
odmocninové (Cauchyho) kritérium, 20
podílové (d'Alembertovo) kritérium, 15
Raabeovo kritérium, 24
srovnávací kritérium, 13
o limitě monotónní posloupnosti, 11
o výpočtu poloměru konvergence, 74
o záměnnosti limity a derivace, 69
o záměnnosti limity a integrálu, 67
Weierstrassovo kritérium, 62
zbytek řady po n -tém členu, 38

[Obsah](#)

91. strana ze 91

[Zavřít dokument](#)[Celá obrazovka/Okno](#)