Pružnost a plasticita

Martin Krejsa, Lenka Lausová a Vladimíra Michalcová

Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století* (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

© Martin Krejsa, Lenka Lausová a Vladimíra Michalcová, 2011-2012

Verze 1.7

Text byl vysázen pomocí sázecího systému TEX ve formátu pdfLATEX.

Předmluva

Vážený čtenáři,

text, který právě čtete, vznikl v rámci řešení projektu **„Matematika pro inženýry 21. století – inovace výuky matematiky na technických školách v nových podmínkách rychle se vyvíjející informační a technické společnosti“**. Projekt je řešen na Vysoké škole báňské - Technické univerzitě v Ostravě a Západočeské univerzitě v Plzni v období 2009 – 2012.

Hlavní motivací projektu je potřeba reagovat na změny významu jednotlivých partií matematiky při řešení praktických problémů, způsobenou zejména velkým pokrokem v matematickém modelování, dramatickým zlepšováním software a rychlým zvyšováním výpočetních kapacit moderních počítačů. Inženýři nyní běžně využívají stále se vyvíjející komplikované softwarové produkty založené na matematických pojmech, se kterými se v kurzech matematiky buďto nesetkají vůbec nebo v nevhodné formě. Na druhé straně prezentace některých pojmů v základních kurzech neodráží z nejrůznějších důvodů potřeby odborných kateder. Bohužel tento stav ztěžuje studentům aktivní používání získaných vědomostí v odborných předmětech i orientaci v rychle se vyvíjejících metodách inženýrské praxe.

Cílem projektu je inovace matematických a některých odborných kurzů na technických vysokých školách s cílem získat zájem studentů, zvýšit efektivnost výuky, zpřístupnit prakticky aplikovatelné výsledky moderní matematiky a vytvořit předpoklady pro efektivní výuku inženýrských předmětů. Zkvalitnění výuky matematiky budoucích inženýrů chceme dosáhnout po stránce formální využitím nových informačních technologií přípravy elektronických studijních materiálů a po stránce věcné pečlivým výběrem vyučované látky s důsledným využíváním zavedených pojmů v celém kurzu matematiky s promyšlenou integrací moderního matematického aparátu do vybraných inženýrských předmětů. Metodiku výuky matematiky a její atraktivnost pro studenty chceme zlepšit důrazem na motivaci a důsledným používáním postupu "od problému k řešení".

V rámci projektu vytváříme 40 nových výukových materiálů z oblastí matematické analýzy, lineární algebry, numerických metod, metod optimalizace, diskrétní matematiky, teorie grafů, statistiky a několika odborných kurzů. Všechny hotové výukové materiály budou volně k dispozici na webových stránkách projektu [15].

Mezioborový modul **Pružnost a plasticita**, v rámci něhož vznikl i tento učební materiál, byl garantován doc. Ing. Martinem Krejsou, Ph.D. Výukové materiály v elektronické formě i formě pro tisk by měly sloužit jako inovativní prvek výuky předmětu Pružnost a plasticita, jenž se vyučuje v rámci prezenčního i kombinovaného bakalářského studia na Fakultě stavební Vysoké školy báňské - Technické univerzity Ostrava na všech oborech studijních plánů Stavební inženýrství (B3607) a Architektura a stavitelství (B3502).

Předmět Pružnost a plasticita navazuje na kurz Stavební hmoty se základy mechaniky stavebních materiálů a předmět Stavební statika, ve kterém se posluchači seznamují se staticky i kinematicky určitými prutovými soustavami, u nichž jsou schopni s pomocí podmínek rovnováhy řešit reakce a vnitřní síly. Z tohoto předmětu využijí rovněž poznatky spojené s určováním těžiště u rovinných obrazců i jejich základních průřezových charakteristik.

Cílem výuky předmětu Pružnost a plasticita je seznámit studenty se základními principy navrhování a posuzování spolehlivosti konstrukčních prvků a dílců podle mezních stavů únosnosti i použitelnosti a současně platných normových předpisů s ohledem na základní způsoby namáhání staticky určitých i jednoduchých staticky neurčitých prutových konstrukcí. Pozornost je věnována také úvodu do rovinné napjatosti, úlohám s pružně-plastickým chováním materiálu a elementárním stabilitním problémům štíhlých tlačených prutů.

Autoři předem děkují za všechny případné nápady a návrhy k vylepšení textu i za upozornění na chyby.

V Ostravě 30. 6. 2012 Autoři

Obsah

Předmluva **iii**

1 Úvod do teorie pružnosti a plasticity, základní pojmy a principy **1**

1.1 Pružnost a plasticita ve stavebním inženýrství 1

1.2 Výchozí předpoklady klasické lineární pružnosti 1

1.3 Napětí 5

1.3.1 Napětí v průřezu obecně zatíženého prutu 6

1.3.2 Vztahy mezi napětími a vnitřními silami v průřezu obecně zatíženého prutu 7

1.3.3 Základní (prosté) namáhání prutu 9

1.3.4 Stav napjatosti tělesa 11

1.3.5 Stav napjatosti nosné stěny 13

1.4 Saint - Venantův princip lokálního účinku 14

2 Fyzikální vztahy mezi napětími a deformacemi **17**

2.1 Deformace a posuny v tělese 17

2.1.1 Poměrné deformace (přetvoření) 17

2.1.2 Posuny v tělese, geometrické rovnice 19

2.2 Fyzikální vztahy mezi napětími a deformacemi 22

2.2.1 Hookeův zákon, lineárně pružný materiál 22

2.2.2 Plasticita, tažnost 26

2.2.3 Pracovní diagramy stavebních látek 27

2.2.4 Mechanicko-fyzikální konstanty stavebních materiálů 32

2.2.5 Příklady k doplnění řešené problematiky 33

2.3 Deformace od změny teploty 35

3 Spolehlivost nosné konstrukce **38**
3.1 Metody navrhování a posuzování stavebních konstrukcí 39
3.1.1 Metoda dovolených namáhání 39
3.1.2 Metoda stupně bezpečnosti 40
3.1.3 Metoda mezních stavů 40
3.2 Metoda mezních stavů 41
3.2.1 Mezní stavy únosnosti 41
3.2.2 Dílčí součinitelé spolehlivosti 42
3.2.3 Zatížení stavebních konstrukcí 42
3.2.4 Pevnost stavebních materiálů 43
3.2.5 Mezní stav použitelnosti 45
3.3 Princip navrhování a posudku spolehlivosti stavebních konstrukcí . . 45
3.3.1 Účinek zatížení stavebních konstrukcí 46
3.3.2 Odolnost konstrukce 46
3.3.3 Výpočetní model posudku spolehlivosti 47

4 Osové namáhání (tah a prostý tlak) **48**
4.1 Napětí při osovém namáhání 49
4.2 Přetvoření osově namáhaného prutu 52
4.3 Návrh a posudek spolehlivosti taženého prutu 61
4.3.1 Mezní stavy únosnosti 61
4.3.2 Mezní stavy použitelnosti 62
4.4 Staticky neurčité případy osového namáhání 72
4.4.1 Oboustranně vetknutý osově namáhaný prut 73
4.4.2 Osově namáhaný nehomogenní nosný prvek 82
4.4.3 Staticky neurčité soustavy tažených prutů 85
4.5 Staticky neurčité soustavy prutů v pružnoplastickém oboru 91

5 Kroucení **98**
5.1 Prosté kroucení prutu s rotačně symetrickým průřezem 99
5.1.1 Úvod pro výpočet napětí v prostém kroucení 99
5.1.2 Deformace v kroucení 100
5.1.3 Napětí v pružné oblasti 101

5.1.4 Úhel zkroucení v pružné oblasti . . . 103
5.2 Kroucení prutů obecného průřezu . . . 108
5.2.1 Kroucení masivních průřezů . . . 108
5.2.2 Kroucení tenkostěnných prutů otevřeného průřezu . . . 110
5.2.3 Kroucení tenkostěnných prutů uzavřeného průřezu . . . 111
5.3 Návrh a posudek prutu namáhaného kroucením . . . 112
5.3.1 Mezní stavy únosnosti . . . 112
5.3.2 Mezní stavy použitelnosti . . . 114
5.4 Staticky neurčité případy kroucení . . . 116

6 Ohyb nosníků 122
6.1 Rovinný ohyb . . . 122
6.2 Normálová napětí při ohybu . . . 126
6.2.1 Ohyb nosníků v pružném stavu . . . 126
6.2.2 Návrh a posudek prutu namáhaného ohybem . . . 134
6.2.3 Ohyb nosníků v pružno-plastickém oboru . . . 137
6.3 Výpočet smykových napětí za ohybu . . . 145
6.3.1 Smyková napětí za ohybu obdélníkového průřezu . . . 145
6.3.2 Dimenzování prutů namáhaných smykem za ohybu . . . 149
6.3.3 Výpočet smykových napětí za ohybu u tenkostěnných průřezů 151
6.4 Střed smyku . . . 154
6.5 Složené nosníky . . . 157

7 Přetvoření ohýbaných nosníků 163
7.1 Diferenciální rovnice ohybové čáry . . . 164
7.2 Nerovnoměrné oteplení nosníků . . . 166
7.3 Metoda integrace diferenciální rovnice ohybové čáry . . . 167
7.3.1 Jednoduché zatížení staticky určitých nosníků – přímá integrace diferenciální rovnice ohybové čáry . . . 167
7.3.2 Příklady k doplnění řešené problematiky . . . 169
7.3.3 Clebschova metoda . . . 178
7.3.4 Jednoduché zatížení staticky neurčitých nosníků – přímá integrace diferenciální rovnice ohybové čáry . . . 181
7.3.5 Příklady k doplnění řešené problematiky . . . 183

7.4 Mohrova metoda 189
7.4.1 Příklady k doplnění řešené problematiky 191

8 Složené případy namáhání prutu 197
8.1 Prostorový ohyb 197
8.2 Mimostředný tah a tlak 201
8.3 Jádro průřezu 209

9 Stabilita a vzpěrná únosnost tlačených prutů 213
9.1 Eulerovo řešení stability přímého tlačeného prutu v pružném oboru . 213
9.1.1 Prut oboustranně kloubově uložený 214
9.1.2 Konzolový prut 216
9.1.3 Prut jednostranně vetknutý 219
9.1.4 Oboustranně vetknutý prut 222
9.1.5 Eulerova kritická síla - shrnutí 224
9.1.6 Eulerovo kritické napětí 226
9.2 Dimenzování tlačených prutů 227
9.2.1 Návrh a posouzení spolehlivosti prutu namáhaného prostým tlakem 228
9.2.2 Návrh a posouzení spolehlivosti prutu namáhaného vzpěrným tlakem 228
9.3 Příklady k procvičení 230
9.4 Kritické napětí v pružnoplastickém oboru 238
9.5 Posouzení ocelových prvků na vznik vzpěru podle Eurokódů 240

10 Úvod do rovinné napjatosti 243
10.1 Rovinná napjatost bodu tělesa 243
10.2 Napětí v šikmém řezu při rovinné napjatosti 249
10.3 Výpočet hlavních napětí při rovinnné napjatosti, jejich směry 254
10.4 Výpočet extrémních smykových napětí při rovinné napjatosti, jejich směry 255
10.5 Grafické řešení hlavních napětí pomocí Mohrových kružnic napětí . . 259
10.6 Vybrané případy rovinné napjatosti 262
10.7 Trajektorie hlavních napětí 273

11 Geometrické a základní průřezové charakteristiky vybraných ocelových profilů **276**

11.1 Tyče průřezu IPN 277

11.2 Tyče průřezu UPN 280

Literatura **282**

Rejstřík **284**

Kapitola 1

Úvod do teorie pružnosti a plasticity, základní pojmy a principy

1.1 Pružnost a plasticita ve stavebním inženýrství

Teorie **pružnosti a plasticity** je součástí mechaniky deformovatelných těles a slouží jako teoretický základ celé řady aplikačních oborů stavitelství (např. pozemní stavitelství, betonové, ocelové, dřevěné konstrukce a podzemní stavby).

Předmětem zkoumání teorie pružnosti a plasticity jsou především:

- **Napětí** (intenzita vnitřních sil) v nosné konstrukci (viz např. kap. 1.3),
- **Deformace** (přetvoření) - geometrické změny tvaru nosné konstrukce,
- **Stabilita** (kap. 9).

Poznatky spojené s touto trojicí oblastí bádání pak lze využít ve zmiňovaných stavařských disciplínách především k návrhu a posouzení spolehlivosti prvků nosných konstrukcí.

1.2 Výchozí předpoklady klasické lineární pružnosti

Teorie pružnosti a plasticity má několik odvětví. Za nejzákladnější obor této teorie lze označit klasickou lineární pružnost, jež se opírá o následující předpoklady řešení:

1. **Spojitost látky**: Těleso lze pokládat za *kontinuum*, mající celý objem bez mezer. Při výpočtu se tedy nezabývá mikrostrukturou materiálu. Díky tomu lze brát napětí i deformaci jako spojité funkce.
2. **Homogenita a izotropie**: *Homogenní* (stejnorodá) látka má fyzikální vlastnosti ve všech místech shodné. Nerespektují se přitom náhodné vady a nerovnoměrnosti. Za homogenní látky lze tedy považovat například beton, ocel a dřevo. Při kombinaci dvou a více materiálů (např. beton a ocel) se předpoklad homogenní látky opouští.
   Izotropní materiál má vlastnosti ve všech směrech totožné. Izotropním materiálem je například beton nebo ocel, dřevo vzhledem k rozdílným materiálovým vlastnostem ve směru rovnoběžném a kolmém k vláknům nelze za izotropní materiál považovat.
3. **Pružnost** je schopnost látky vracet se po odstranění příčin změn (např. zatížení) do původního stavu. Pokud platí přímá úměrnost mezi napětím a deformací – Hookeův zákon (kap. 2.2.1), jedná se o tzv. *fyzikální linearitu* (blíže viz kapitola 2).
4. **Malé deformace**: Změny tvaru konstrukce jsou vzhledem k rozměrům konstrukce malé, což umožňuje řadu matematických zjednodušení při řešení úloh pružnosti, které obvykle vedou k lineárním závislostem a tzv. *geometrické linearitě*.
5. **Statické zatěžování**: Při výpočtu se předpokládá postupné narůstání vnějších účinků (např. zatížení) a v důsledku toho i napětí a deformací. Časový úsek, v němž tyto změny probíhají, je dostatečně dlouhý, takže do výpočtu není potřeba zavádět setrvačné síly a dynamické účinky zatížení je možno zanedbat. Do výpočetního modelu jsou zaváděny hodnoty silových a deformačních veličin, které po dobu svého působení dosáhnou své maximální a dále již neměnné velikosti. Proměnná času pak není v úlohách zahrnuta.
6. **Počáteční nenapjatost**: Pokud na těleso nepůsobí žádné vnější vlivy, nevznikají v něm žádné vnitřní síly a napětí, která jsou ve výchozím stavu nulová. Vnitřní pnutí, vyvolaná např. výrobou (válcování ocelových nosníků, svařování), nejsou do výpočtu zahrnuta.

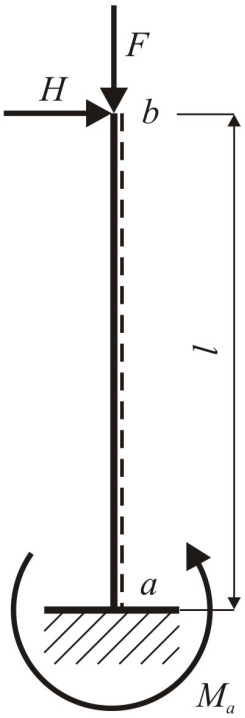
Tyto předpoklady jsou velmi hrubým obrazem objektivní skutečnosti, umožňují ale uplatnění některých zásadních matematicko-fyzikálních principů ve výpočtech jako např. principu **superpozice** (skládání účinků), který je založen na **linearitě** všech matematických závislostí.

Poznámka 1.1. Opakem izotropie je *anizotropie*, čímž se rozumí závislost vlastností zkoumané veličiny na směru. Speciálním případem anizotropie je *ortotropie*, neboli pravoúhlá anizotropie. Ortotropním materiálem může být např. zmiňované dřevo.

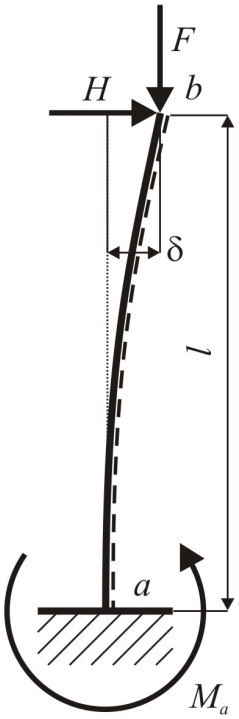
Poznámka 1.2. Jak již bylo řešeno, výpočet podle *teorie malých deformací* předpokládá velmi malé změny tvaru a posuny jednotlivých bodů nosné konstrukce vzhle-

dem k jejím rozhodujícím rozměrům. Pokud se podmínky rovnováhy sestavují pro nezdeformovanou konstrukci, hovoří se o tzv. *teorii I. řádu*, kdy je výpočet geometricky lineární. Výpočetní postup podle *teorie II. řádu* pak představuje sestavení podmínek rovnováhy na přetvořené konstrukci, čímž je porušena geometrická linearita a uplatnění principu superpozice je omezeno.

Příklad 1.3. Určete u jednostranně vetknutého sloupu, schématicky znázorněného na obrázku 1.1 a 1.2, momentovou reakci M_a ve vetknutí v bodě a výpočtem podle teorie I. i II. řádu.



Obr. 1.1 Výpočet podle teorie I. řádu



Obr. 1.2 Výpočet podle teorie II. řádu

Řešení. Momentová reakce ve vetknutí v bodě a se určí pomocí momentové podmínky rovnováhy $\sum M_a = 0$. V případě výpočtu podle teorie I. řádu se tato podmínka rovnováhy sestavuje na nezdeformované konstrukci, schématicky znázorněné na obrázku 1.1. Momentová reakce je pak rovna:

$$M_a = H \cdot l \,. \tag{1.1}$$

U výpočtu podle teorie II. řádu se momentová podmínka rovnováhy $\sum M_a = 0$ stanoví i s ohledem na deformaci konstrukce (viz obrázek 1.2). Na výslednou

momentovou reakci M_a pak bude mít vliv i svislá síla F:

$$M_a = H \cdot l + F \cdot \delta \ . \tag{1.2}$$

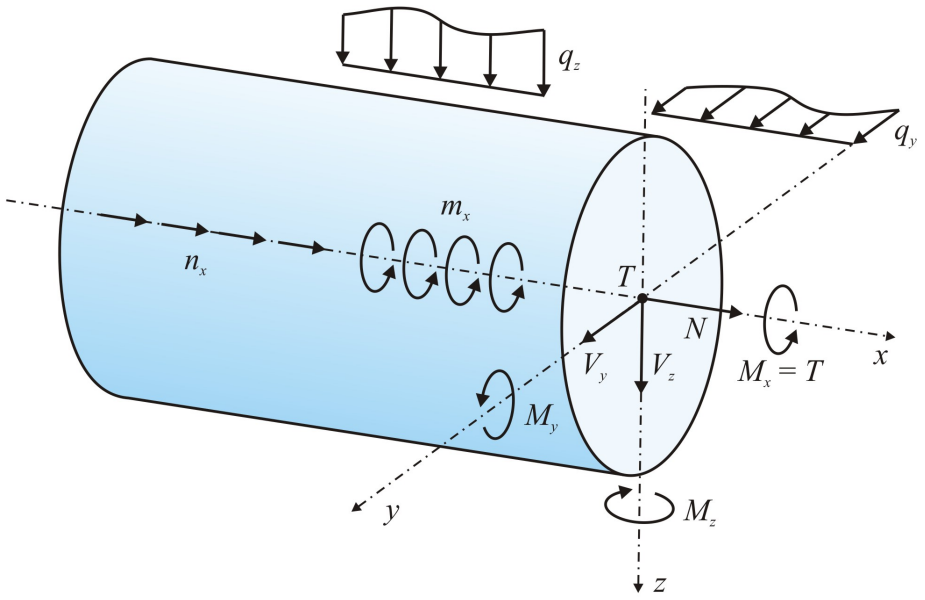
▲

Poznámka 1.4. Úlohami, kdy jsou posuny i deformace nosné konstrukce řádově srovnatelné s jejími rozměry, se zabývá tzv. *teorie konečných (velkých) deformací*. Uplatňuje se například u lanových nebo membránových konstrukcí.

Poznámka 1.5. Moderní mechanika jednotlivé předpoklady klasické teorie pružnosti postupně opouští a vznikají tak další vědní obory mechaniky kontinua. Omezení předpokladu o dokonale pružné látce vede k *teorii plasticity* (viz kap.2.2.2). Statické výpočty podle teorie II. řádu nebo teorie konečných (velkých) deformací, jakožto i úlohy spojené s fyzikální nelinearitou jsou předmětem oboru tzv. *nelineární mechaniky. Dynamika stavebních konstrukcí* se zase zabývá odezvou nosných konstrukcí na účinky zatížení proměnného v čase i prostoru.

1.3 Napětí

V předmětu Stavební statika [8] se lze seznámit s pojmem tzv. *vnitřních sil* (normálová síla N, posouvající síla V_y a V_z, ohybový moment M_y a M_z a kroutící moment $M_z = T$ - viz obrázek 1.3).



Obr. 1.3 Vnitřní síly v průřezu obecně zatíženého prutu

Vnitřní síly nevypovídají nic o míře namáhání tělesa nebo prvku konstrukce. Je nutné uvažovat také s vlivem tvaru a velikosti průřezové plochy, které do výpočtu vstupují ve formě průřezových charakteristik. Významnější veličinou je **napětí** – jeden z klíčových pojmů teorie pružnosti a plasticity.

Napětí lze formulovat jako míru intenzity vnitřních sil, tedy jako sílu vztaženou k ploše zkoumaného řezu prvkem konstrukce. Základní jednotkou napětí je *Pascal* (Pa), který lze charakterizovat:

$$\mathrm{Pa} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} \,. \tag{1.3}$$

Vzhledem k řádu vnitřních sil a průřezových veličin u prvků stavebních konstrukcí je pak vhodnou jednotkou pro napětí *Megapascal* (MPa), který může být popsán:

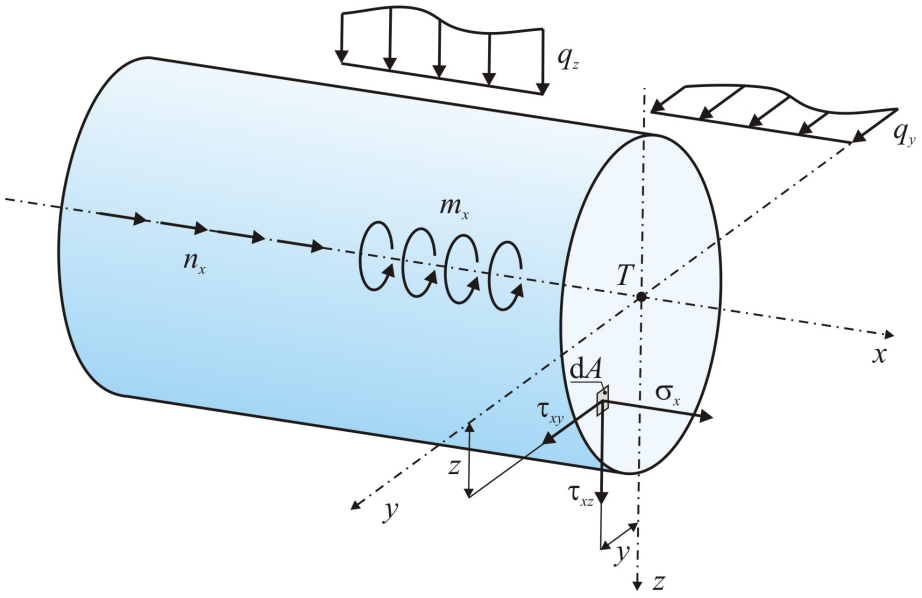
$$\mathrm{MPa} = 10^6\,\mathrm{Pa} = \frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{m}^2} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} \,. \tag{1.4}$$

Napětí je vektor, charakterizovaný svými složkami, který se může stanovit pro libovolný bod nosné konstrukce a rovinný řez, vedený tímto bodem.

1.3.1 Napětí v průřezu obecně zatíženého prutu

V případě obecně zatíženého prvku prutové nosné konstrukce s průřezovou plochou $A > 0$ lze napětí rozložit do dvou složek:

- **Normálové napětí**, označované písmenem σ, které působí ve směru kolmém k danému řezu (ve směru normály k danému řezu).
- **Smykové** (tečné, tangenciální) **napětí**, označované písmenem τ, působící v rovině daného řezu. Smykové napětí pak lze rozložit do dvou dílčích složek, které jsou na sebe kolmé ve směru hlavních centrálních os setrvačnosti průřezu (obvykle jde o vodorovnou a svislou osu - viz obrázek 1.4).



Obr. 1.4 Složky napětí v průřezu obecně zatíženého prutu

1.3.2 Vztahy mezi napětími a vnitřními silami v průřezu obecně zatíženého prutu

Při analýze prutu bude využita znaménková konvence a značení podle obrázku 1.4. Osa x je totožná s osou prutu, osy y a z jsou totožné s hlavními centrálními osami setrvačnosti průřezu.

Při studiu předmětu Stavební statika [8] byly vysvětleny **diferenciální podmínky rovnováhy přímého prutu**. *Osová úloha*, kdy vnější i vnitřní síly jsou rovnoběžné s osou x, se váže k diferenciální podmínce rovnováhy:

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x} = -n_x \ . \tag{1.5}$$

Diferenciální podmínky rovnováhy:

$$\frac{\mathrm{d}V_z}{\mathrm{d}x} = -q_z \tag{1.6}$$

a

$$\frac{\mathrm{d}M_y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{d}V_z \tag{1.7}$$

se vztahují k *příčné úloze ve svislé hlavní zatěžovací rovině* xz. Obdobně lze sestavit i diferenciální podmínky rovnováhy pro *úlohu příčnou ve vodorovné hlavní zatěžovací rovině* xy:

$$\frac{\mathrm{d}V_y}{\mathrm{d}x} = -q_y \tag{1.8}$$

a

$$\frac{\mathrm{d}M_z}{\mathrm{d}x} = \mathrm{d}V_y \ . \tag{1.9}$$

Poslední diferenciální rovnice:

$$\frac{\mathrm{d}M_x}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -m_x \tag{1.10}$$

se vztahuje ke *kroucení*.

Silové složky elementárních vnitřních sil ve vztazích (1.5) až (1.9): $\mathrm{d}N$, $\mathrm{d}V_y$ a $\mathrm{d}V_z$, které působí na libovolné elementární plošce průřezu prutu $\mathrm{d}A$ (viz obrázek 1.4), je možné získat vynásobením příslušné složky napětí σ_x, τ_{xy} a τ_{xz} touto elementární ploškou $\mathrm{d}A$:

$$\mathrm{d}N = \sigma_x \cdot \mathrm{d}A \ , \tag{1.11}$$

$$\mathrm{d}V_y = \tau_{xy} \cdot \mathrm{d}A \tag{1.12}$$

a

$$\mathrm{d}V_z = \tau_{xz} \cdot \mathrm{d}A \,, \tag{1.13}$$

neboť platí:

$$\sigma_x = \lim_{\mathrm{d}A \to 0} \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}A} \,, \tag{1.14}$$

$$\tau_{xy} = \lim_{\mathrm{d}A \to 0} \frac{\mathrm{d}V_y}{\mathrm{d}A} \tag{1.15}$$

a

$$\tau_{xz} = \lim_{\mathrm{d}A \to 0} \frac{\mathrm{d}V_z}{\mathrm{d}A} \,. \tag{1.16}$$

Momentové složky elementárních vnitřních sil $\mathrm{d}M_x = \mathrm{d}T$, $\mathrm{d}M_y$ a $\mathrm{d}M_z$ ve vztazích (1.7), (1.9) a (1.10) lze získat obdobně vynásobením příslušné silové složky elementárních vnitřních sil $\mathrm{d}N$, $\mathrm{d}V_y$ a $\mathrm{d}V_z$ s ramenem síly (souřadnicí y nebo z) podle obrázku 1.4 (kladný směr momentových veličin je proti směru hodinových ručiček při pohledu proti kladnému směru příslušné osy – pravidlo proti-proti):

$$\mathrm{d}M_x = \mathrm{d}T = \mathrm{d}V_z \cdot y - \mathrm{d}V_y \cdot z = \tau_{xz} \cdot \mathrm{d}A \cdot y - \tau_{xy} \cdot \mathrm{d}A \cdot z \,, \tag{1.17}$$

$$\mathrm{d}M_y = \mathrm{d}N \cdot z = \sigma_x \cdot \mathrm{d}A \cdot z \tag{1.18}$$

a

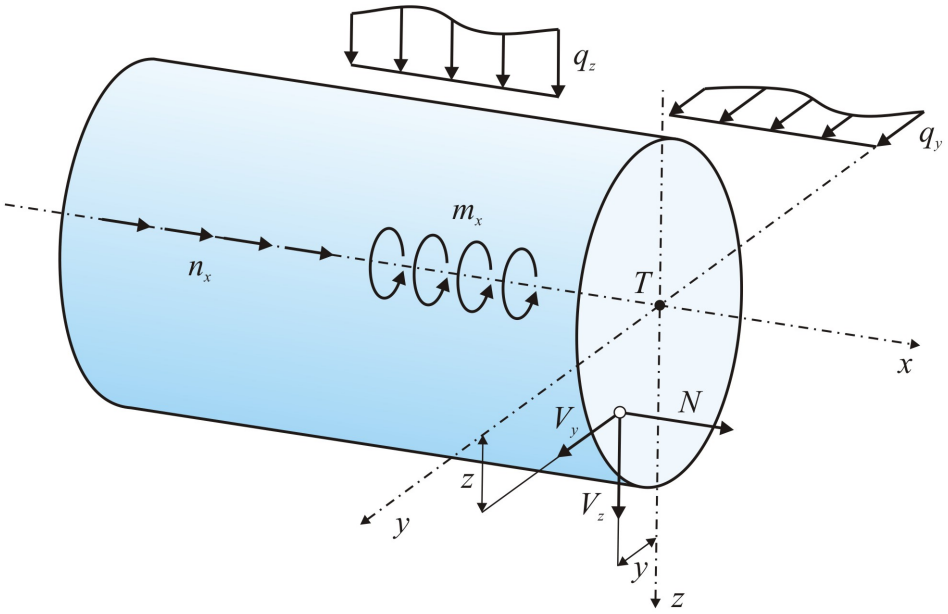
$$\mathrm{d}M_z = -\mathrm{d}N \cdot y = -\sigma_x \cdot \mathrm{d}A \cdot y \,. \tag{1.19}$$

Integrací všech silových a momentových účinků elementárních vnitřních sil po celé ploše průřezu přímého prutu se nakonec získají složky výslednice vnitřních sil v průřezu podle obrázku 1.5:

$$N = \int_A \sigma_x \,\mathrm{d}A \,, \tag{1.20}$$

$$V_y = \int_A \tau_{xy} \,\mathrm{d}A \,, \tag{1.21}$$

$$V_z = \int_A \tau_{xz} \,\mathrm{d}A \,, \tag{1.22}$$



Obr. 1.5 Výslednice vnitřních sil v průřezu obecně zatíženého prutu

$$M_x = T = V_z \cdot y - V_y \cdot z = \int_A (\tau_{xz} \cdot y - \tau_{xy} \cdot z)\,\mathrm{d}A\,, \tag{1.23}$$

$$M_y = N \cdot z = \int_A \sigma_x \cdot z\,\mathrm{d}A \tag{1.24}$$

a

$$M_z = -N \cdot y = -\int_A \sigma_x \cdot y\,\mathrm{d}A\,. \tag{1.25}$$

Rovnice (1.20) až (1.25) vyjadřují statickou rovnováhu vnitřních sil v průřezu prutu, neurčují však průběh napětí v daném průřezu.

Poznámka 1.6. Rovnice (1.23), jež se vztahuje k účinku kroutícího momentu $M_x = T$, platí pouze za předpokladu, že těžiště průřezu je totožné se středem smyku a jedná se tedy o oboustranně symetrický průřez. U nesymetrických průřezů je nutno tut podmínku rovnováhy vztahovat ke středu smyku (blíže kapitola 5).

1.3.3 Základní (prosté) namáhání prutu

Z rovnic (1.20), (1.24) a (1.25) je patrné, že normálové napětí v průřezu obecně zatíženého prutu vyvolávají normálová síla N a ohybové momenty M_y a M_z. Naopak

napětí smyková způsobují podle rovnic (1.21), (1.22) a (1.23) posouvající síly V_y a V_z a kroutící moment $M_x = T$.

V souvislosti s působením složek vnitřních sil v průřezu prutu je pak možno rozeznávat následující čtyři **základní (prosté) typy namáhání prutu**:

1. **osové namáhání**, při kterém normálová síla N způsobuje *prostý tah* nebo *tlak*,
2. **smyk**, který může vyvolat posouvající síla V_y nebo V_z,
3. **ohyb**, vyvolávaný ohybovým momentem M_y nebo M_z,
4. **kroucení**, které způsobuje kroutící moment $M_x = T$.

Rekapitulaci těchto čtyř základních (prostých) typů namáhání prutu obsahuje tabulka 1.1.

Typ základního (prostého) namáhání prutu	Vnitřní síla	Napětí
Osové namáhání (prostý tah nebo tlak)	N	σ_x
Smyk	V_y nebo V_z	τ_{xy} nebo τ_{xz}
Ohyb	M_y nebo M_z	σ_x
Kroucení	$M_x = T$	τ_{xy} a τ_{xz}

Tab. 1.1 Přehled základních (prostých) typů namáhání prutu

Poznámka 1.7. Prostý (čistý) smyk, kdy v průřezu působí pouze posouvající síla V_y nebo V_z, vzniká většinou jen teoreticky. Posouvající síly vznikají obvykle společně s ohybovým momentem (V_y s M_z a V_z s M_y) při příčném zatížení prutu.

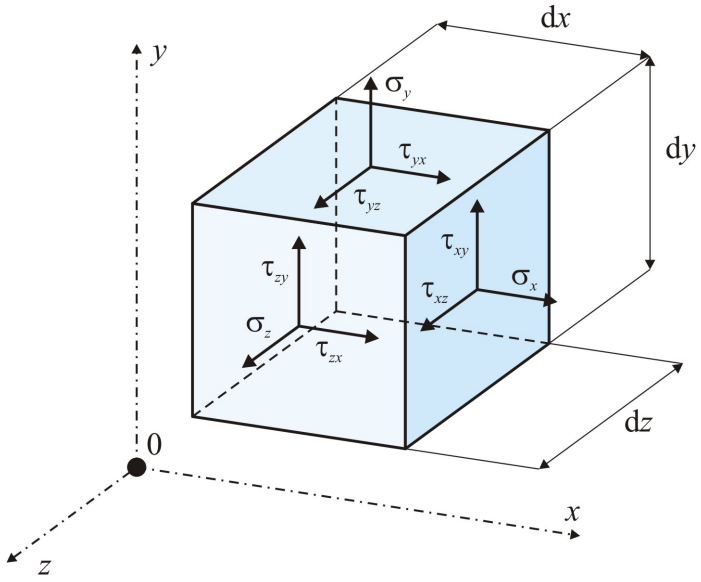
Poznámka 1.8. Při působení pouze jedné dvojice posouvající síly a ohybového momentu dochází k tzv. **rovinnému ohybu** (V_y s M_z vyvolávají rovinný ohyb ve vodorovné hlavní zatěžovací rovině xy, naopak V_z s M_y způsobují rovinný ohyb ve svislé hlavní zatěžovací rovině xz).

Poznámka 1.9. Pokud současně působí obě dvojice posouvajících sil a ohybových momentů (V_y s M_z a V_z s M_y), dochází k tzv. **prostorovému (obecnému) ohybu**. Další výklad k tomuto případu namáhání je obsažen v kapitole 8.

Poznámka 1.10. Kombinace základních (prostých) namáhání prutu představují tzv. **složené případy namáhání prutu**, které jsou blíže vysvětleny rovněž v kapitole 8. Jedná se například o *excentrický tah či tlak* (kombinace osového namáhání s ohybem) nebo o kroucení s tahem nebo tlakem a s ohybem.

1.3.4 Stav napjatosti tělesa

Při stanovení složek napětí v libovolném bodu tělesa se hovoří o tzv. **stavu napjatosti**. Každým bodem tělesa lze vést nekonečné množství rovinných řezů, ve kterých vznikají různé vektory napětí. Napjatost tělesa je jednoznačně určena složkami napětí ve třech odlišně orientovaných řezech, přičemž se obvykle vychází z řezů rovnoběžných se souřadnicovými rovinami (viz elementární kvádr o stranách dx, dy a d$z \to 0$ na obrázku 1.6).



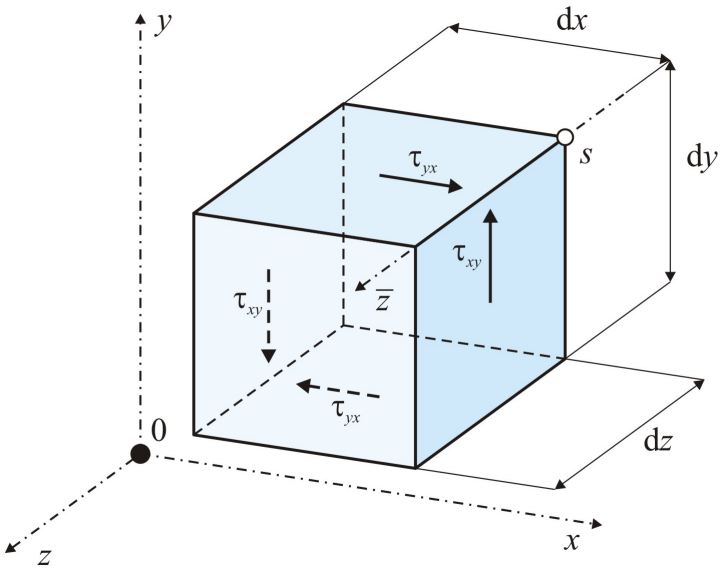
Obr. 1.6 Složky napětí na elementárním kvádru tělesa

Stav napjatosti má povahu tenzoru, který je definován v pravoúhlém souřadnicovém systému pomocí matice složek napětí, nazývané **tenzor napětí**:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} . \tag{1.26}$$

Mezi složkami smykových napětí platí závislost, která se může odvodit pomocí momentových podmínek rovnováhy. Na elementárním kvádru na obrázku 1.7 jsou uvedeny pouze ty složky smykových napětí, které vyvolají statické momenty k ose $\overline{z}$, rovnoběžné s osou z a probíhající pravou horní hranou elementárního kvádru.

Elementární síly na stěnách elementárního kvádru lze získat vynásobením složky smykového napětí plochou stěny elementárního kvádru, na které daná složka smykového napětí působí (podobně jako u vztahů 1.12 a 1.13), tedy:



Obr. 1.7 Vzájemnost smykových napětí

$$\mathrm{d}Q_{xy} = \tau_{xy} \cdot \mathrm{d}A_{xy} = \tau_{xy} \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z \tag{1.27}$$

a

$$\mathrm{d}Q_{yx} = \tau_{yx} \cdot \mathrm{d}A_{yx} = \tau_{yx} \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}z \ . \tag{1.28}$$

Momentová podmínka rovnováhy k ose $\overline{z}$ pak vypadá následovně:

$$\sum M_{\overline{z}} = 0 : \quad \mathrm{d}Q_{xy} \cdot \mathrm{d}x - \mathrm{d}Q_{yx} \cdot \mathrm{d}y = \tau_{xy} \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z - \tau_{yx} \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z = 0 \ . \tag{1.29}$$

Vydělením celé rovnice členem $\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z$ pak vychází:

$$\tau_{xy} - \tau_{yx} = 0 \quad \rightarrow \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} \ . \tag{1.30}$$

Obdobně lze pro zbývající dvojice složek smykových napětí určit:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \ , \tag{1.31}$$

resp.

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} \ . \tag{1.32}$$

Rovnice (1.30), (1.31) a (1.32) se označují jako **věta o vzájemnosti smykových napětí**, na jejímž základě lze dokázat, že matice (1.26), popisující tenzor napětí tělesa, je symetrická:

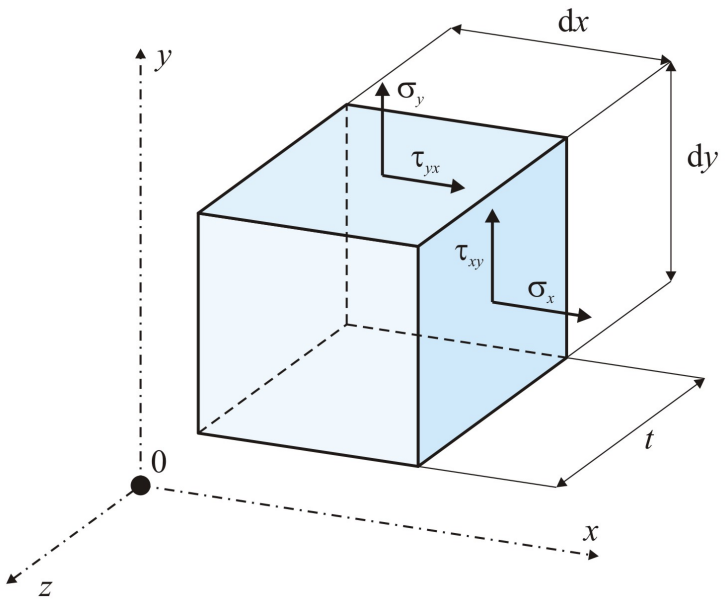
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \sigma_y & \tau_{yz} \\ sym. & & \sigma_z \end{bmatrix} , \tag{1.33}$$

a stav napjatosti v libovolném bodu tělesa je jednoznačně určen šesti nezávislými složkami napětí, které mohou být popsány rovněž **vektorem napětí**:

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}\}^T . \tag{1.34}$$

1.3.5 Stav napjatosti nosné stěny

Nosná stěna je jedním z typů *plošných nosných konstrukcí*. Oproti tělesům, které mají všechny tři rozměry řádově stejné, je u plošných nosných prvků jeden ze tří rozměrů - tloušťka, řádově menší nežli zbývající dva. Nosná stěna má *rovinnou střednicovou plochu*, což je množina bodů, která dělí tloušťku plošného prvku na dvě stejné části. Zatížení musí přitom působit pouze ve střednicové rovině nosné stěny.



Obr. 1.8 Složky napětí na elementárním kvádru nosné stěny

Při stanovení složek napětí v libovolném bodu nosné stěny lze vyjít, podobně jako v případě tělesa v kapitole 1.3.4, z elementárního kvádru z obrázku 1.8 o stranách

dx, d$y \to 0$ a tloušťce $t > 0$.

Stav napjatosti v libovolném bodu nosné stěny je tedy jednoznačně určen třemi nezávislými složkami napětí, které mohou být opět popsány v pravoúhlém souřadnicovém systému pomocí tenzoru napětí:

$$\left[\sigma\right] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ & \sigma_y & 0 \\ sym. & & 0 \end{bmatrix} \tag{1.35}$$

nebo redukovaným vektorem napětí:

$$\left\{\sigma\right\} = \left\{\sigma_x \quad \sigma_y \quad 0 \quad \tau_{xy} \quad 0 \quad 0\right\}^T \rightarrow \left\{\sigma\right\} = \left\{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}\right\}^T . \tag{1.36}$$

Stav napjatosti nosných stěn bude podrobněji vysvětlen v kapitole 10.1, jež je zaměřena úvodu do rovinné napjatosti.

Poznámka 1.11. Na základě poznatků, obsažených v kapitolách 1.3.1, 1.3.2 a 1.3.3 lze definovat i tenzor napětí pro libovolný bod obecně zatíženého prutu:

$$\left[\sigma\right] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & 0 & 0 \\ sym. & & 0 \end{bmatrix} , \tag{1.37}$$

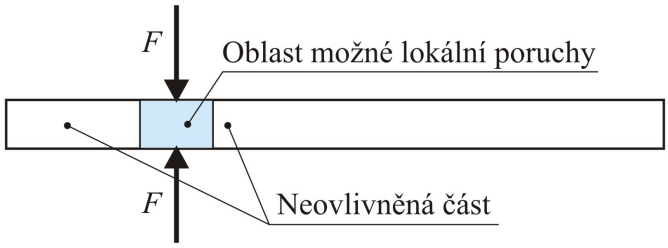
Stav napjatosti v libovolném bodu obecně zatíženého prutu je tedy jednoznačně určen třemi nezávislými složkami napětí, které mohou být popsány také redukovaným vektorem napětí:

$$\left\{\sigma\right\} = \left\{\sigma_x \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz}\right\}^T . \tag{1.38}$$

1.4 Saint - Venantův princip lokálního účinku

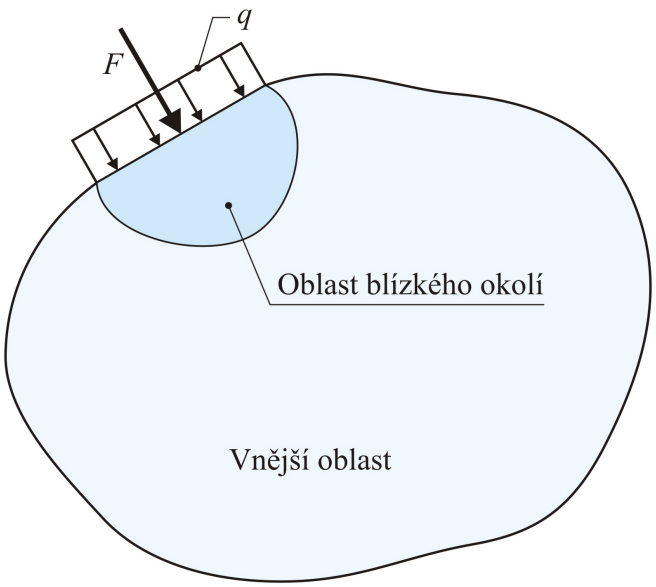
Saint-Venantův princip lokálního účinku, pojmenovaný podle francouzského matematika a fyzika Adhémara Jean Claude Barré de Saint-Venanta (1797-1886), usnadňuje řešení napjatosti těles. Lze jej popsat ve dvou variantách:

Definice 1.12. Rovnovážná soustava sil, působící na omezenou a relativně malou část pružného tělesa, vyvodí stav deformace a napjatost právě jen v této omezené oblasti, zatímco ostatní části tělesa zůstávají nedeformovány a nenapjaty. Uvedená soustava sil tedy může způsobit pouze lokální poruchu (např. obrázek 1.9).



Obr. 1.9 Rovnovážná soustava sil z definice 1.12

Definice 1.13. Působí-li na omezenou a relativně malou část pružného tělesa dvě různé, ale staticky ekvivalentní silové soustavy (např. obrázek 1.10), pak stav deformace a napjatost vně oblasti jsou v obou případech prakticky stejné. Uvnitř oblasti se stav deformace a napjatost podstatně liší podle druhu působících sil.

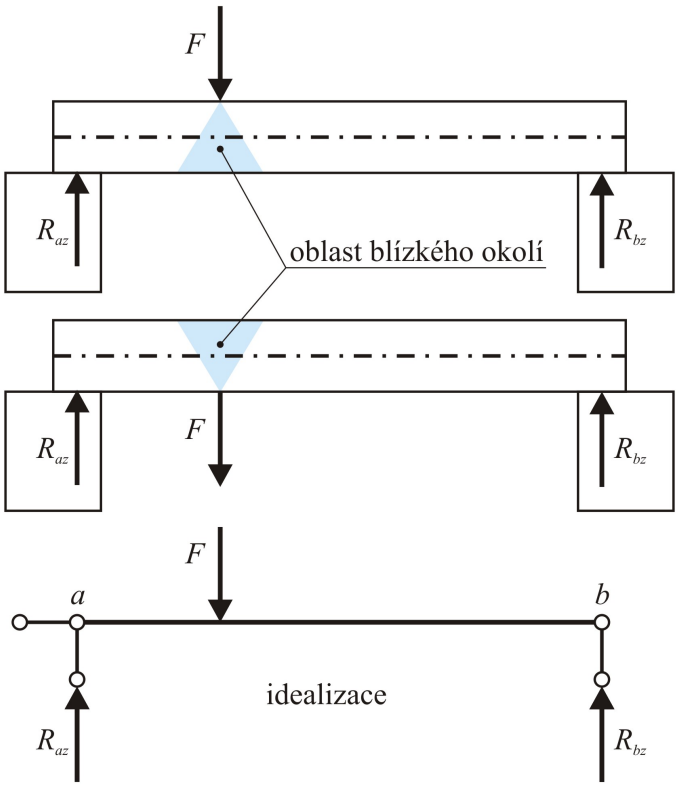


Obr. 1.10 Pružné těleso s dvojicí různých, staticky ekvivalentních zatížení

Saint-Venantova principu lokálního účinku se používá např.:

- ke zjednodušení povrchového zatížení - skutečné zatížení se při výpočtu nahradí staticky ekvivalentním a pro výpočet výhodnějším zatížením (např. spojité zatížení na malé ploše lze nahradit - idealizovat osamělým břemenem),
- k idealizaci skutečných rozměrů prutové konstrukce i působiště reálného zatížení do střednice nosného prvku (na obrázku 1.11 působí reálné osamělé

břemeno na horním nebo dolním okraji nosníku, při idealizaci je ale působiště tohoto zatížení přesunuto do osy prutu).



Obr. 1.11 Reálné působení zatížení na nosný prvek a provedená idealizace

Po provedení výpočtu s uvažováním Saint-Venantova principu lokálního účinku, zejména jsou-li vyčíslena i napětí v jednotlivých průřezech, je u konstrukčního řešení nosného prvku nutno provést korekce napětí s ohledem na provedené idealizace.

Kapitola 2

Fyzikální vztahy mezi napětími a deformacemi

2.1 Deformace a posuny v tělese

Účinkem zatížení (silového, deformačního nebo změnou teploty) se tělesa deformují (přetvoří, mění tvar). Změny geometrie tělesa je možno popsat pomocí:

- **poměrných deformací** (přetvoření),
- **posunů** (přemístění) konkrétních bodů zkoumaného tělesa.

2.1.1 Poměrné deformace (přetvoření)

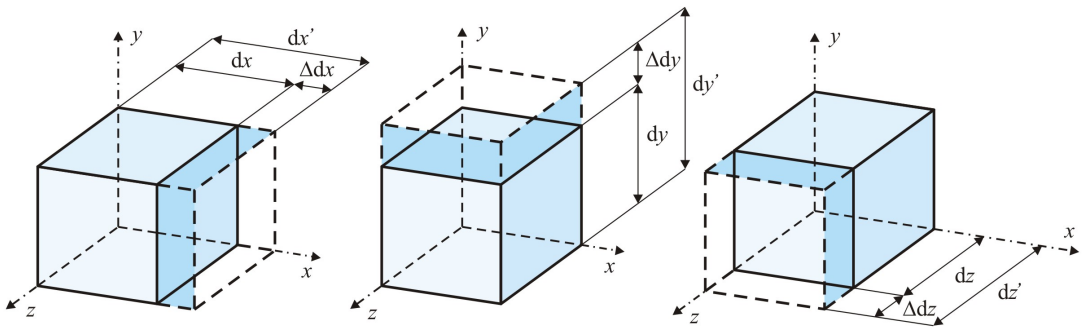
Stav deformace v libovolném bodě tělesa je možno popsat pomocí složek bezrozměrných poměrných deformací, které mohou být:

- **délkové** (poměrné protažení nebo zkrácení), označované písmenem ε,
- **úhlové** (zkosení), které bývají označovány písmenem γ.

Délkové poměrné deformace vyjadřují poměr přírůstku délky k její původní hodnotě, např.:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{l - l'}{l}\,, \tag{2.1}$$

kde l označuje původní rozměr tělesa (délku) v příslušném směru, l' rozměr tělesa po deformaci a Δl rozdíl obou rozměrů, tedy velikost deformace. Na obrázku 2.1 jsou poměrné délkové deformace znázorněny na elementárním kvádru o stranách dx, dy



Obr. 2.1 Složky délkových poměrných deformací na elementárním kvádru tělesa

a $\mathrm{d}z \to 0$, kterým lze schématicky znázornit **stav deformace** v libovolném bodu tělesa.

Délkové poměrné deformace tohoto elementárního prvku ve směrech rovnoběžných s osami souřadnicového systému pak vycházejí:

$$\varepsilon_x = \frac{\mathrm{d}x' - \mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = \frac{\Delta \mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} \,, \tag{2.2}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\mathrm{d}y' - \mathrm{d}y}{\mathrm{d}y} = \frac{\Delta \mathrm{d}y}{\mathrm{d}y} \tag{2.3}$$

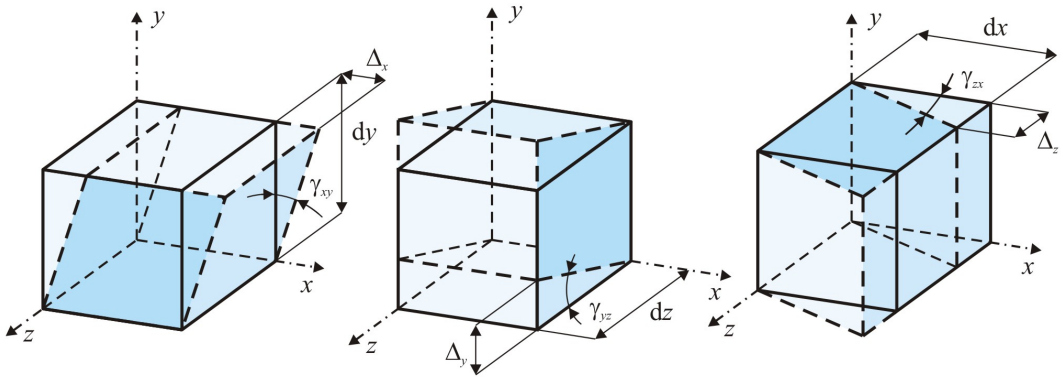
a

$$\varepsilon_z = \frac{\mathrm{d}z' - \mathrm{d}z}{\mathrm{d}z} = \frac{\Delta \mathrm{d}z}{\mathrm{d}z} \,. \tag{2.4}$$

Úhlová poměrná deformace vyjadřuje změnu úhlu mezi dvěma původně pravoúhlými úsečkami, jež byly vedeny rovnoběžně s osami pravoúhlého souřadnicového systému vyšetřovaným bodem. Na obrázku 2.2 jsou poměrné úhlové deformace znázorněny opět na elementárním kvádru o stranách $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ a $\mathrm{d}z \to 0$, znázorňujícího stav deformace v libovolném bodu tělesa.

Při splnění výchozího předpokladu malých deformací dosahují veškeré poměrné deformace velmi malých hodnot ($\varepsilon \ll 1$ a $\gamma \ll 1$), takže při odvozování a ve výpočtech lze uplatnit celou řadu matematických zjednodušení (např. úhly lze ztotožnit s jejich tangentami nebo délky šikmých úseků s jejich průměty). Úhlové poměrné deformace elementárního kvádru z obrázku 2.2 pak lze například odvodit následovně:

$$\tan \gamma_{xy} \approx \gamma_{xy} = \frac{\Delta_x}{\mathrm{d}y} \,, \tag{2.5}$$



Obr. 2.2 Složky úhlových poměrných deformací na elementárním kvádru tělesa

$$\tan \gamma_{yz} \approx \gamma_{yz} = \frac{\Delta_y}{\mathrm{d}z} \tag{2.6}$$

a

$$\tan \gamma_{zx} \approx \gamma_{zx} = \frac{\Delta_z}{\mathrm{d}x} \,. \tag{2.7}$$

Pro poměrné úhlové deformace také platí: $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$, $\gamma_{xz} = \gamma_{zx}$ a $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$. Obecně je tedy deformační stav ve zkoumaném bodě tělesa definován šesti složkami poměrných deformací, obsaženými v symetrické matici **tenzoru deformace**:

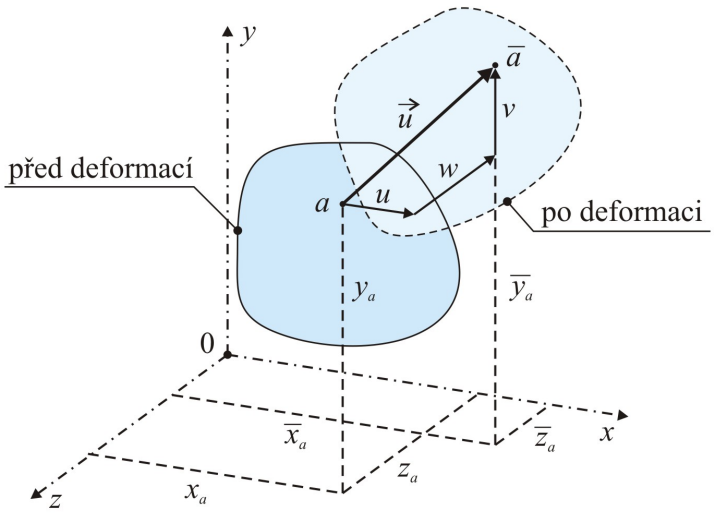
$$\left[\varepsilon\right] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ sym. & & \varepsilon_z \end{bmatrix} \,, \tag{2.8}$$

nebo ve **vektoru deformace**:

$$\left\{\varepsilon\right\} = \left\{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}\right\}^T \,. \tag{2.9}$$

2.1.2 Posuny v tělese, geometrické rovnice

Geometrii deformovatelného tělesa, vztaženého ke kartézskému pravoúhlému souřadnicovému systému (obrázek 2.3), lze popsat jednoznačně také pomocí složek **posunů** bodů tohoto tělesa.



Obr. 2.3 Složky posunutí bodu tělesa před a po deformaci

Dojde-li účinkem zatížení ke změně polohy a tvaru tělesa, každý bod a tohoto tělesa, který měl před těmito změnami polohu danou souřadnicemi x, y a z, se posune do polohy $\vec{a}$ o souřadnicích:

$$\bar{x} = x + u(x, y, z) \ , \tag{2.10}$$

$$\bar{y} = y + v(x, y, z) \tag{2.11}$$

a

$$\bar{z} = z + w(x, y, z) \ , \tag{2.12}$$

kde funkce u, v a w jsou **složky vektoru posunutí** $\vec{u}$ bodu a do polohy $\bar{a}$:

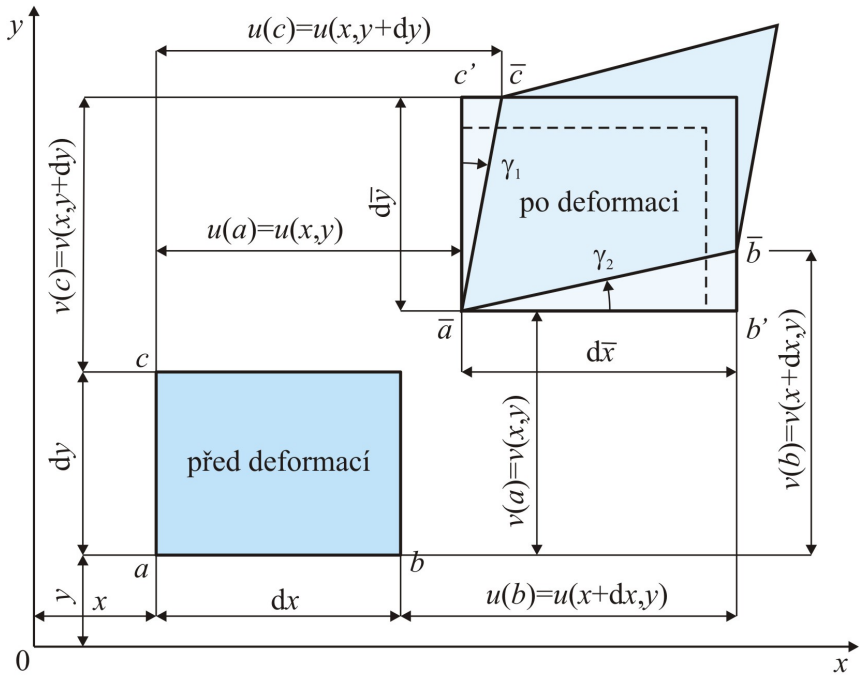
$$\{u\} = \langle u \quad v \quad w \rangle^T \ . \tag{2.13}$$

Při znalosti složek posunutí každého bodu tělesa je jednoznačně definována geometrie deformovaného tělesa. Z těchto složek posunutí lze také odvodit velikosti všech poměrných deformací pomocí **geometrických rovnic**.

Definice 2.1. Geometrické rovnice vyjadřují vztahy mezi složkami poměrných deformací tělesa a složkami posunů libovolných bodů v tomto tělese.

Závislosti mezi složkami posunutí a poměrnými deformacemi lze odvodit nejprve v rovině xy. Na obrázku 2.4 je schématicky znázorněn průmět elementárního

pravoúhlého kvádru do roviny xy i s vyznačeným posunutím jeho tří vrcholů a, b a c.



Obr. 2.4 Průmět elementárního kvádru do roviny xy k odvození geometrických rovnic

Délková poměrná deformace ve směru osy x pro hranu elementárního kvádru $\overline{ab}$ pak vychází:

$$\varepsilon_x = \frac{\mathrm{d}\bar{x} - \mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}x + u(b) - u(a) - \mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = \frac{u(x+\mathrm{d}x, y) - u(x,y)}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial u}{\partial x}\,. \tag{2.14}$$

Zkosení - úhlová poměrná deformace elementárního kvádru v rovině xy se pak s pomocí schématu na obrázku 2.4 odvodí jako součet dvou úhlů γ_1 a γ_2:

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} = \gamma_1 + \gamma_2 &\approx \frac{u(c) - u(a)}{\mathrm{d}y} + \frac{v(b) - v(a)}{\mathrm{d}x} = \\ &= \frac{u(x, y+\mathrm{d}y) - u(x,y)}{\mathrm{d}y} + \frac{v(x+\mathrm{d}x, y) - v(x,y)}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\,.\end{aligned} \tag{2.15}$$

Poznámka 2.2. Při odvození bylo opět přihlédnuto k malým deformacím. Pro malé hodnoty posunů bylo proto uvažováno, že $\mathrm{d}x \approx \mathrm{d}\bar{x}$, $\mathrm{d}y \approx \mathrm{d}\bar{y}$, $\tan\gamma_1 \approx \gamma_1$ a $\tan\gamma_2 \approx \gamma_2$, díky čemuž geometrické rovnice obsahují pouze lineární členy.

Obdobně lze odvodit závislosti i pro zbývající dvě roviny xz a yz. Všech šest geometrických rovnic pak nabývá tvaru:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}\,, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}\,, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}\,, \tag{2.16}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\,, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\,, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\,. \tag{2.17}$$

Znalost složek posunů tedy umožňuje jednoznačně stanovit všechny složky poměrných deformací v tělese.

Poznámka 2.3. Složky poměrných deformací v tělese nejsou vzájemně nezávislé. Platí mezi nimi vztahy, definované tzv. **podmínkami kompatibility** (spojitosti), které jsou uvedeny např. v [22]. Jejich splnění zaručuje, že těleso zůstává i po zdeformování spojité a mezi dílčími elementy tělesa nevznikají mezery nebo vzájemné průniky.

2.2 Fyzikální vztahy mezi napětími a deformacemi

Pro řešení napjatosti a stavu deformace nosného prvku zbývá ještě definovat vztahy, popisující vzájemnou závislost mezi napětími a deformacemi, označované jako **fyzikální rovnice** a související s mechanicko-fyzikálními vlastnostmi použitého materiálu.

2.2.1 Hookeův zákon, lineárně pružný materiál

Z nauky o materiálu je známo, že závislost napětí a přetvoření lze popsat pro prostý tah a tlak pomocí Hookeova zákona, který hovoří o přímé úměrnosti velikosti deformace a napětí v deformovaném tělese. Je pojmenován po britském fyzikovi, matematikovi, architektovi a přírodovědci Robertu Hookeovi (1635-1703), který svůj zákon pružnosti definoval v roce 1660 a publikoval jej roku 1678. Lze jej popsat následujícím způsobem:

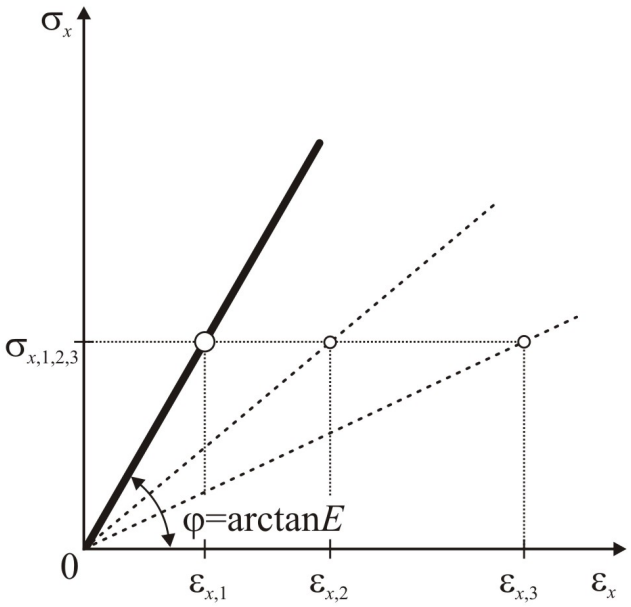
Obr. 2.5 Robert Hooke

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x \rightarrow \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}\,, \tag{2.18}$$

kde E [Pa] je mechanicko-fyzikální charakteristika příslušného materiálu, nazývaná modul pružnosti v tahu a tlaku nebo také Youngův modul pružnosti podle britského

polyhistora Thomase Younga (1773-1829), který v roce 1807 modul pružnosti poprvé matematicky definoval.

Definice 2.4. Při namáhání prostým tahem nebo tlakem je normálové napětí přímo úměrné délkové poměrné deformaci.



Obr. 2.6 Grafické ztvárnění Hookeova zákona v prostém tahu nebo tlaku

Výraz $\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x$ ve vztahu (2.18) lze vzhledem ke konstantní hodnotě modulu pružnosti v tahu a tlaku E interpretovat jako rovnici přímky, která je schématicky zobrazena na obrázku 2.6. Materiál, jenž se řídí touto lineární závislostí, se proto nazývá **lineárně pružný**. Úpravou vztahu (2.18) pak lze získat také výraz:

$$E = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} = \tan\varphi \rightarrow \varphi = \arctan E \,, \tag{2.19}$$

ze kterého lze vyjít při experimentálním ověřování této mechanicko-fyzikální materiálové charakteristiky.

Poznámka 2.5. Grafické vyjádření závislosti normálového napětí σ a délkové poměrné deformace ε, matematicky $\sigma = \sigma(\varepsilon)$, se označuje jako **pracovní diagram** daného materiálu.

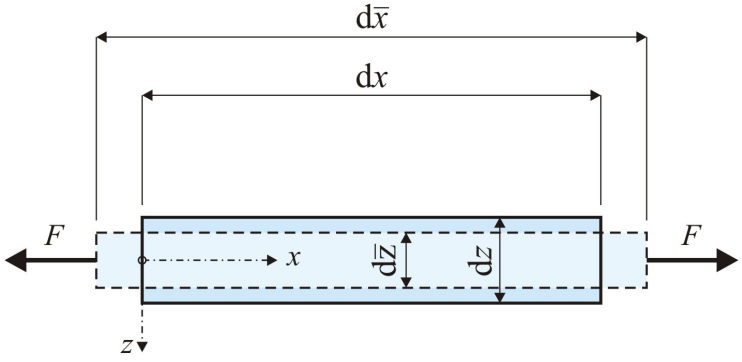
Poznámka 2.6. Vyšší hodnoty modulu pružnosti v tahu a tlaku E odpovídají méně poddajným materiálům, o čemž se lze přesvědčit i na grafu obrázku 2.6, kde jsou

zobrazeny tři přímky s odlišným sklonem - modulem tuhosti v tahu a tlaku. Pokud se ve zkoumaných nosných prvcích vyvolá stejné normálové napětí $\sigma_{x,1} = \sigma_{x,2} = \sigma_{x,3}$, délkové poměrné deformace budou u všech tří prvků různé právě díky odlišné tuhosti použitého materiálu - např. přímka s nejmenším úhlem φ odpovídá nejvíce poddajnému materiálu, který v daném nosném prvku způsobí největší deformaci.

Současně s poměrným přetvořením tělesa v podélném směru dochází také ke změnám příčných rozměrů jeho průřezu (viz obrázek 2.7), které lze vyjádřit příslušnými délkovými poměrnými deformacemi:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \cdot \varepsilon_x = -\nu \cdot \frac{\sigma_x}{E} \,, \tag{2.20}$$

kde ν je bezrozměrný Poissonův součinitel příčné deformace, pojmenovaný podle francouzského fyzika, matematika, geometra a astronoma Siméona Denise Poissona (1781-1840), jenž se zabýval chováním materiálu a významně obohatil matematickou teorií pružnosti.



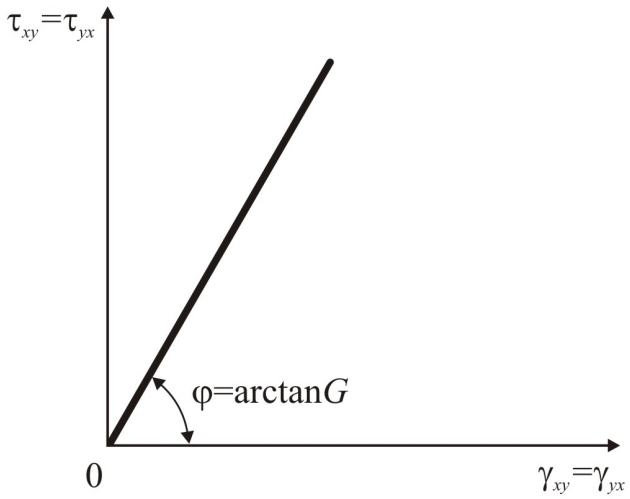
Obr. 2.7 Příčná kontrakce (zúžení) elementárního prvku při namáhání tahem

Poznámka 2.7. Znaménko minus ve vztahu (2.20) vyjadřuje odlišný smysl deformací v podélném a příčném směru. V případě prostého tahu $\sigma_x > 0$ se bude průřez zúžovat (dochází k tzv. **kontrakci**), při prostém tlaku $\sigma_x < 0$ bude naopak v příčném směru docházet k prodloužení.

Poznámka 2.8. Poissonův součinitel příčné deformace ν může nabývat hodnot 0 až 0,5. Hodnota $\nu = 0,5$ přitom představuje nestlačitelný materiál. Hodnoty $\nu > 0,5$ představují stav, jenž je z fyzikálního hlediska nemožný.

Hookeův zákon je možno odvodit i pro namáhání prostým smykem:

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} \rightarrow \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \,, \tag{2.21}$$



Obr. 2.8 Grafické ztvárnění Hookeova zákona v prostém smyku

kde G [Pa] je další mechanicko-fyzikální charakteristika příslušného materiálu, nazývaná modul pružnosti ve smyku. Hookeův zákon v prostém smyku lze podobně jako v případě Hookeova zákona v tahu a tlaku zobrazit graficky (viz obrázek 2.8).

Definice 2.9. Při namáhání prostým smykem je smykové napětí přímo úměrné úhlové poměrné deformaci.

U izotropní látky platí mezi třemi zavedenými mechanickou-fyzikálními charakteristikami E, G a ν vzájemná závislost, která se dá vyjádřit vztahem:

$$\frac{E}{G} = 2 \cdot (1 + \nu) \, . \tag{2.22}$$

Izotropní látku lze tedy charakterizovat pouze dvojicí mechanicko-fyzikálních konstant, zbývající třetí charakteristika se pak může určit ze vztahu (2.22).

Poznámka 2.10. Při uvážení vztahu (2.22) a dříve uvedeného rozmezí Poissonova součinitele příčné deformace $0 \leqq \nu \leqq 0,5$ pak lze stanovit i rozsah pro modul pružnosti ve smyku:

$$\frac{E}{3} \leqq G \leqq \frac{E}{2} \, . \tag{2.23}$$

Hookeův zákon vyjadřuje závislost mezi napětím a přetvořením pouze v případech, kdy je možno napětí i poměrnou deformaci jednoznačně popsat jedním parametrem (prostý tah a tlak nebo prostý smyk). I přesto nejde o závislost zcela obecnou,

neboť rozsah platnosti Hookeova zákona je omezen podmínkou, že deformace jsou velmi malé a nezasahují do plastické oblasti chování materiálu.

Při obecné (prostorové) napjatosti, kdy ve vyšetřovaném bodě působí všechny složky napětí, pak definuje lineární závislost deformací na napětích pro izotropní materiál tzv. **obecný Hookeův zákon**, popisující šest **fyzikálních rovnic**:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_x - \nu \cdot (\sigma_y + \sigma_z)] \,, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_y - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_z)] \,, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_z - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)] \,, \end{aligned} \tag{2.24}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \,, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \,, \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} \,. \tag{2.25}$$

Poznámka 2.11. Jednoduchou úpravou fyzikálních rovnic obecného Hookeova zákona lze získat i vztahy mezi složkami napětí a deformací při rovinné napjatosti (tzv. **rovinný Hookeův zákon**), např. pro libovolný bod nosné stěny v rovině xy platí:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_x - \nu \cdot \sigma_y) \,, \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_y - \nu \cdot \sigma_x) \,, \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \,. \tag{2.26}$$

Poznámka 2.12. Jak již bylo uvedeno ve výčtu výchozích předpokladů klasické lineární pružnosti pružný materiál se rovněž vyznačuje schopností vracet se po odstranění příčin tvarových změn (např. zatížení) do původního stavu, což bývá označováno jako pružné (vratné) deformace ε_{el} (*elastic* - *pružný*).

2.2.2 Plasticita, tažnost

Plasticitou se rozumí schopnost látky deformovat se bez porušení nevratným, tvárným způsobem. Zatížení a odlehčení se už neřídí shodnými zákonitostmi – po odstranění zatížení nosného prvku v něm zůstávají **trvalé deformace** ε_{pl}. Závislost mezi napětím a přetvořením již není lineární a hovoří se tedy o *fyzikální nelinearitě*, při které už nelze využít principu superpozice.

K tvárným materiálům, jenž se vyznačují výrazným plastickým chováním, patří ocel nebo plasty. Plastických vlastností oceli se využívá při navrhování ocelových a železobetonových konstrukcí.

Tažnost je mechanická vlastnost taženého tvárného materiálu, která vyjadřuje plastické protažení prvku při jeho přetržení, vyjádřené v procentech. Tabulka 2.1 obsahuje přehled orientačních hodnot tažností vybraných materiálů.

Název materiálu	Tažnost [%]
Ocel	15
Polyvinylchlorid (PVC)	15 až 30
Polyethylen nízkotlaký - tvrzený (IPE)	100 až 200
Polyethylen vysokotlaký - měkčený (rPE)	500 až 700
Polypropylen (PP)	500 až 700

Tab. 2.1 Přehled orientačních hodnot tažnosti vybraných materiálů

Norma [4] předepisuje protažení při přetržení (tažnost) nejméně 15%, což umožňuje stanovit mezní délkovou poměrnou deformaci taženého ocelového prvku:

$$\varepsilon_{x,\max} = \frac{\Delta l}{l} = \frac{0,15 \cdot l}{l} = 0,15 \ . \tag{2.27}$$

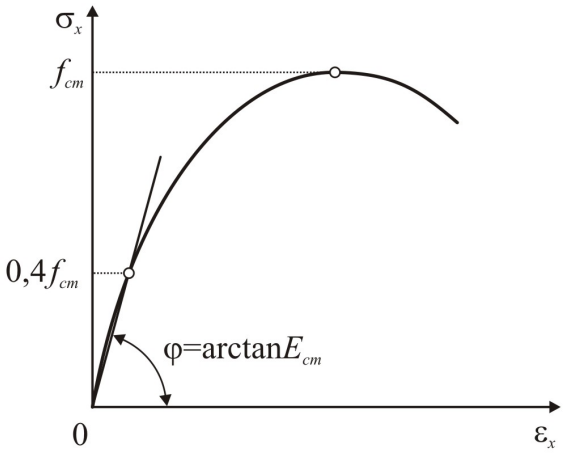
2.2.3 Pracovní diagramy stavebních látek

Reálné materiály se Hookeovým zákonem, popsaném v kapitole 2.2.1, řídí jen v omezené míře a některé pouze při malých hodnotách napětí. Skutečné chování těchto materiálů je mnohdy značně nelineární, což lze nejlépe vypozorovat prováděním zkoušek v laboratoři a experimentálním zjištěním jejich pracovních diagramů a pevnostních charakteristik (např. obrázek 2.9). Pro výpočet pak lze skutečné pracovní diagramy idealizovat do matematicky jednodušších závislostí.

a) zdiva

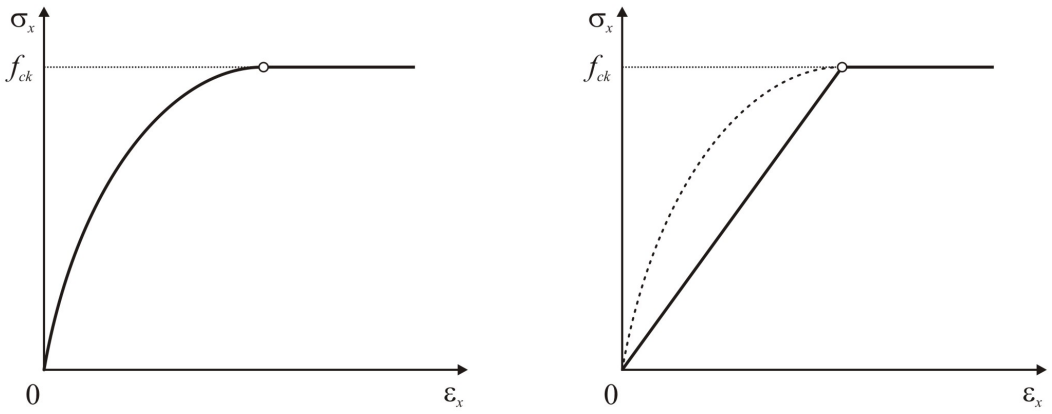
b) betonu (krychelná pevnost)

Obr. 2.9 Zkušební zařízení pro stanovení pracovního diagramu a pevnosti v tlaku



Obr. 2.10 Pracovní diagram betonu a sečna pro definici modulu pružnosti betonu

Například reálný pracovní diagram betonu v tlaku má po celé své délce parabolický průběh, jak lze shlédnout na obrázku 2.10. V jeho počáteční fázi však lze tuto parabolu aproximovat přímkou (sečnou) sečnou, která prochází parabolickým pracovním diagramem v místě, kde tlakové napětí σ_x dosahuje čtyřiceti procent průměrné hodnoty válcové pevnosti betonu v tlaku f_{cm}.



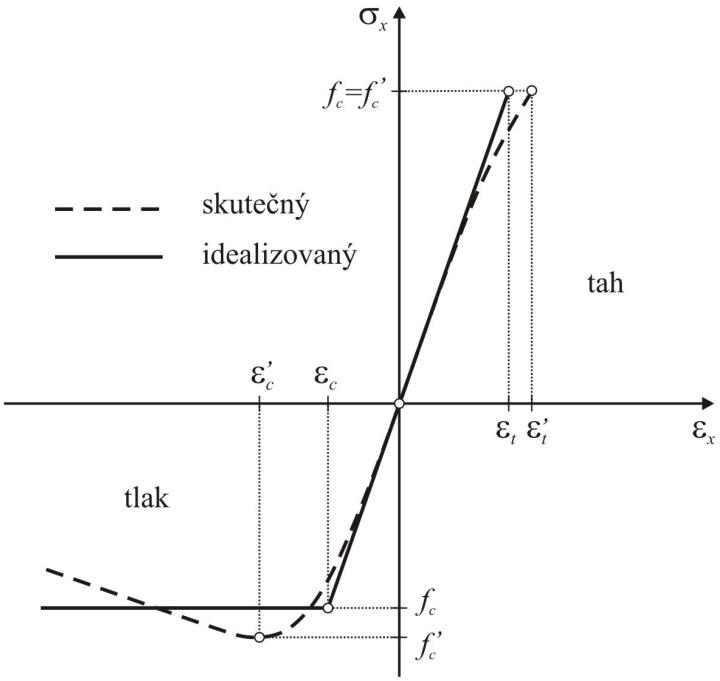
a) Parabolicko-rektangulární b) Bilineární

Obr. 2.11 Pracovní diagram pro beton namáhaný tlakem

Při navrhování průřezů betonových konstrukcí se také používá idealizovaný pracovní diagram parabolicko-rektangulární, zobrazený na obrázku 2.11 a). Lze použít i zjednodušený pracovní diagram bilineární z obrázku 2.11 b), pokud je rovnocenný nebo více konzervativní než pracovní diagram parabolicko-rektangulární. V obou

případech se vychází z charakteristické válcové pevnosti betonu v tlaku f_{ck} ve stáří 28 dní.

Idealizace pracovního diagramu se při výpočtech provádí i v případě dřeva. Na obrázku 2.12 jsou obě závislosti mezi normálovým napětím σ_x a délkovou poměrnou deformací ε_x zobrazeny pro případ tahu i prostého tlaku.



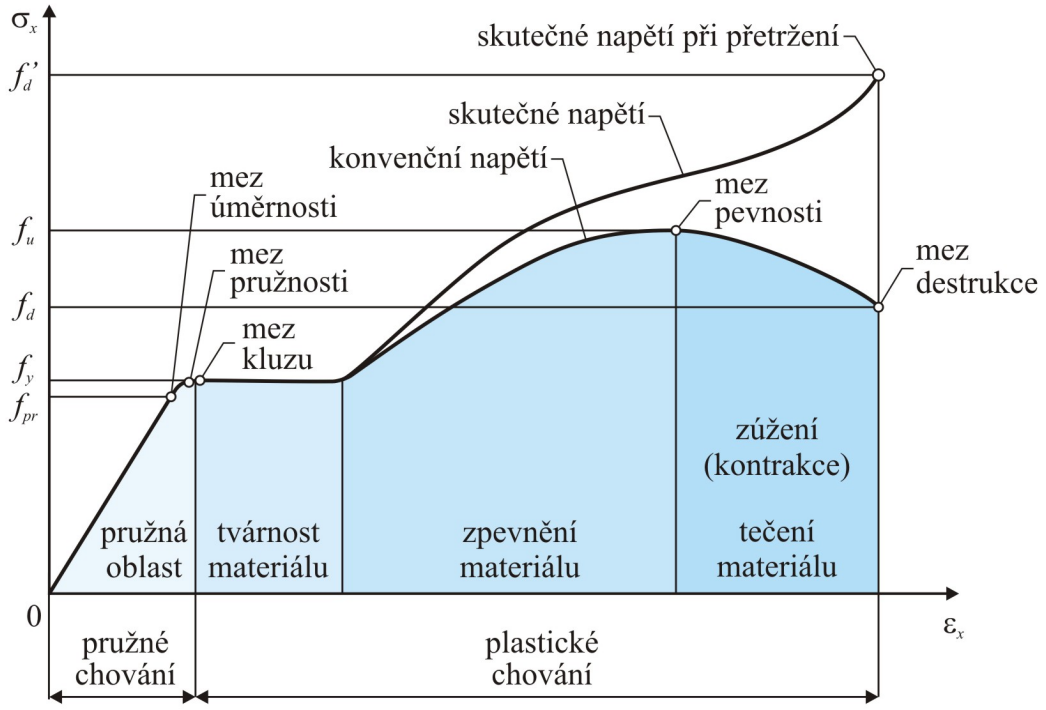
Obr. 2.12 Pracovní diagramy dřeva v tahu a prostém tlaku rovnoběžně s vlákny

Poznámka 2.13. Indexy, obsažené v názvech pevnostních veličin, vycházejí z počátečních písmen anglických výrazů *compression* - *tlak* a *tension* - *tah*.

Na obrázku 2.13 je schématicky zobrazen pracovní diagram konstrukční oceli, který lze získat tahovou zkouškou (viz obrázek 2.14).

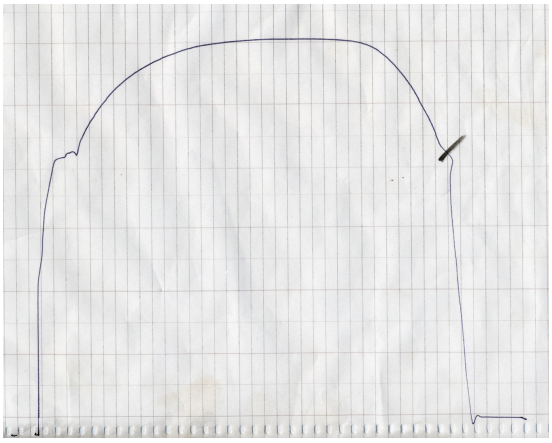
Lze na něm pozorovat několik charakteristických hodnot normálových napětí:

- **Mez úměrnosti** - normálové napětí je až po tuto mez přímo úměrné délkovým poměrným přetvořením. Platí zde Hookeův zákon a materiál se chová jako dokonale (lineárně) pružný.
- **Mez pružnosti** - ocel se až po dosažení této meze stále chová jako pružný materiál, tzn. že po odlehčení v nosném prvku nevznikají trvalé deformace. Hookeův zákon zde již neplatí.



Obr. 2.13 Konvenční a skutečný pracovní diagram tvárného materiálu, např. oceli (pro názornost není v měřítku)

a) Zkušební zařízení

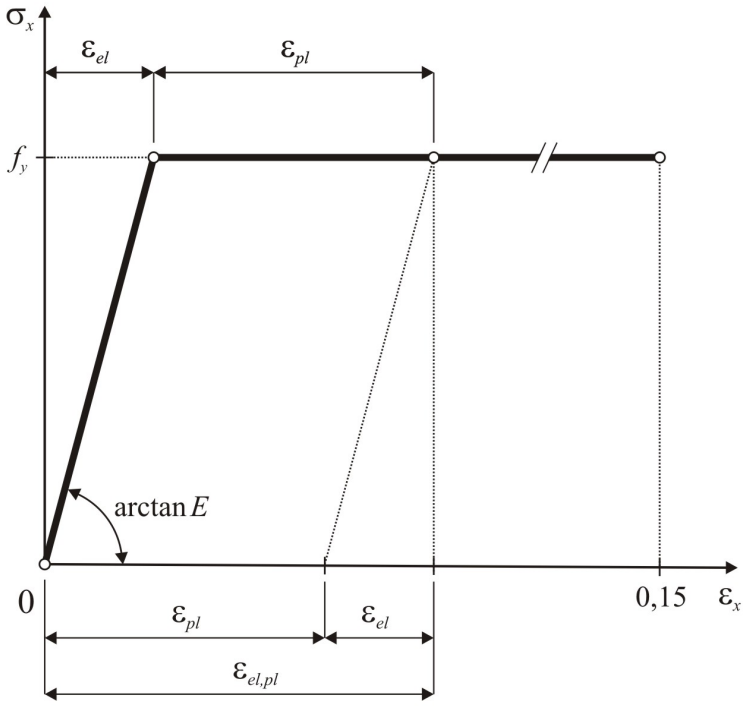


b) Výsledný pracovní diagram oceli

Obr. 2.14 Tahová zkouška oceli

- **Mez kluzu** - po dosažení meze kluzu se ocel stává plastickou a deformace se zvětšuje aniž by vzrůstalo normálové napětí. Mez kluzu je jednou z nejzákladnějších pevnostních charakteristik pro návrh prvků ocelových konstrukcí, kdy bývá touto hodnotou vyjádřena smluvní pevnost oceli v tahu a prostém tlaku.
- **Mez pevnosti** - než normálové napětí dosáhne mez pevnosti, tedy své maximální možné hodnoty, vlivem změn v krystalické struktuře materiálu dochází k tzv. zpevnění. Po dosažení meze pevnosti dochází ke kontrakci (zúžení) nosného prvku.
- **Mez destrukce** - nastane přetržení nosného prvku.

Při tvorbě pracovního diagramu se neuvažuje s kontrakcí (zúžením) taženého prvku a smluvní normálové napětí se vztahuje k původnímu průřezu. Takový pracovní diagram se nazývá **konvenční** a oproti pracovnímu diagramu se skutečným normálovým napětím se poněkud liší.



Obr. 2.15 Pracovní diagram tvárného ideálně pružnoplastického materiálu, např. oceli

Plastické chování tvárných materiálů, především oceli, lze při výpočtech s výhodou vyjádřit pomocí tzv. **ideálně pružnoplastického pracovního diagramu**, který je pro tažený nosný prvek znázorněn na obrázku 2.15.

Při výpočtu protažení nosného prvku pomocí tohoto pracovního diagramu se materiál řídí Hookeovým zákonem a chová se lineárně pružně až po dosažení meze kluzu f_y, resp. mezního pružného délkového poměrného protažení ε_{el}. Pak již dochází k plastizování materiálu a vzniku trvalých - nevratných deformací ε_{pl}, které narůstají při konstantním normálovém napětí (vodorovný úsek pracovního diagramu, který je zprava omezen tažností materiálu).

Poznámka 2.14. Pracovní diagram každého materiálu je výrazně závislý na několika důležitých faktorech - např. na rychlosti přitěžování a teplotě. Při laboratorním zkoušení je potřeba k této skutečnosti přihlédnout a měření provádět na základě postupů popsaných v příslušných normových předpisech [6].

2.2.4 Mechanicko-fyzikální konstanty stavebních materiálů

Mechanicko-fyzikální vlastnosti stavebních materiálů se v literatuře uvádí standardními hodnotami (např. [11]), byť ve skutečnosti vykazují určitý rozptyl. Orientační hodnoty těchto materiálových konstant vybraných materiálů uvádí tabulka 2.2.

Materiál	E[MPa]	G[MPa]	ν[−]
Ocel	190000 až **210000**	75000 až **81000**	0,27 až **0,30**
Beton (v tlaku)	27000 až 44000	$0,42 \cdot E$	0,20 (bez trhlin) 0,00 (s trhlinami)
Dřevo	8000 až 15000 ($\parallel$) 270 až 600 ($\perp$)	100 až 2000	není izotropní
Litina	83000 až 170000	32000 až 69000	0,20 až 0,30
Slitiny hliníku	70000 až 79000	26000 až 30000	0,33
Mosaz	96000 až 110000	36000 až 41000	0,34
Bronz	96000 až 120000	36000 až 44000	0,34
Měď a slitiny mědi	110000 až 120000	40000 až 47000	0,33 až 0,36
Titanová slitina	100000 až 120000	39000 až 44000	0,33
Sklo	48000 až 83000	19000 až 35000	0,17 až 0,27
Nylon	2100 až 3400	750 až 2380	0,40
Polyethylen (PE)	700 až 1400	250 až 500	0,40
PVC	2500 až 3000	1000	0,25
Silikon	130000 až 185000		
Pryž	0,7 až 4	0,2 až 1	0,45 až 0,50
Žula	40000 až 100000		0,20 až 0,30
Vápenec	20000 až 70000		0,20 až 0,30
Pískovec	20000 až 70000		0,20 až 0,30
Pevný jíl	15 až 30		0,35 až 0,43

Tab. 2.2 Přehled mechanicko-fyzikálních konstant vybraných materiálů

U betonu závisí modul pružnosti na pevnostní třídě a je uveden v tabulce 2.3 [3]. Při jeho odvození se vychází ze sečny parabolického pracovního diagramu z obrázku 2.10, proto je označován jako **sečnový modul pružnosti betonu** E_{cm}.

Pevnostní třída betonu	Sečnový modul pružnosti betonu E_{cm} [MPa]
C12/15	27000
C16/20	29000
C20/25	30000
C25/30	31000
C30/37	33000
C35/45	34000
C40/50	35000
C45/55	36000
C50/60	37000
C55/67	38000
C60/75	39000
C70/85	41000
C80/95	42000
C90/105	44000

Tab. 2.3 Sečnový modul pružnosti E_{cm} betonu pro jednotlivé pevnostní třídy

2.2.5 Příklady k doplnění řešené problematiky

Příklad 2.15. Určete protažení ocelové tyče délky $l = 2$ m, ve které účinkem silového zatížení vzniklo tahové normálové napětí $\sigma_x = 120$ MPa. Uvažujte ocel jako lineárně pružný materiál, jenž se řídí Hookeovým zákonem.

Řešení. Z tabulky 2.2 lze pro ocel odečíst hodnotu modulu pružnosti v tahu a tlaku $E = 210000$ MPa. Dosazením do vztahu (2.18) lze určit délkovou poměrnou deformaci ε_x:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{120\ [\text{MPa}]}{210000\ [\text{MPa}]} = 5,7143 \cdot 10^{-4}\ [-]\ , \tag{2.28}$$

ze které lze dosazením do vztahu (2.1) a jednoduchou úpravou získat:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l} \rightarrow \Delta l = \varepsilon_x \cdot l = 5,7143 \cdot 10^{-4}\ [-] \cdot 2\ [\text{m}] = \\ = 1,1429 \cdot 10^{-3}\ [\text{m}] \cong 1,14\ [\text{mm}]\ . \end{aligned} \tag{2.29}$$

Výsledné protažení ocelové tyče tedy činí $1,14$ mm. ▲

Poznámka 2.16. Ve výpočtech je obvyklé do řešených vztahů dosazovat hodnoty v jednotkách SI soustavy - *délky* v *metrech*, *úhly* v *radiánech*, *síly* v *newtonech* a *napětí* v *pascalech* (ve vztahu 2.28 toto nebylo provedeno vzhledem ke stejným jednotkám ve jmenovateli i čitateli zlomku). Výsledek je pak určen rovněž v jednotkách SI soustavy a převede se pomocí násobků na jednotky vhodnější stavařským úlohám (např. protažení ocelové tyče ve vztahu 2.29 předchozího příkladu bylo převedeno na vhodnější milimetry). Jedině tak se lze vyvarovat chybám, plynoucích z nesprávného převádění jednotek v řešených úlohách.

Příklad 2.17. Určete modul pružnosti ve smyku G pro materiál, jehož modul pružnosti v tahu a tlaku E je uveden hodnotou 195000 MPa a Poissonův součinitel příčné deformace $\nu = 0,3$.

Řešení. Dosazením do vztahu (2.22) a jeho jednoduchou úpravou lze získat:

$$\frac{E}{G} = 2 \cdot (1 + \nu) \rightarrow G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} = \frac{195000}{2 \cdot (1 + 0,3)} = 75000 \text{ [MPa]} . \tag{2.30}$$

Modul pružnosti ve smyku G zkoumaného materiálu je roven 75000 MPa. Materiál odpovídá mechanicko-fyzikálním vlastnostem oceli. ▲

Příklad 2.18. Ocelová tyč o délce $l = 3,6$ m byla protažena o $\Delta l_{el,pl} = 18$ mm. Určete trvalou deformaci po odlehčení Δl_{pl} je-li modul pružnosti v tahu a tlaku $E = 200000$ MPa a mez kluzu oceli $f_y = 355$ MPa. Plastické chování oceli vyjádřete pomocí pracovního diagramu pro ideálně pružnoplastický materiál z obrázku 2.15.

Řešení. Sled výpočetních úkonů je následující:

Celkové délkové poměrné přetvoření se určí na základě vztahu (2.1):

$$\varepsilon_{x,el,pl} = \frac{\Delta l}{l} = \frac{0,018 \text{ [m]}}{3,6 \text{ [m]}} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ [–]} . \tag{2.31}$$

Mezní pružné délkové poměrné protažení $\varepsilon_{x,el}$ se určí z Hookeova zákona (2.18) pro napětí na mezi kluzu $\sigma_x = f_y$:

$$\varepsilon_{x,el} = \frac{f_y}{E} = \frac{355 \text{ [MPa]}}{200000 \text{ [MPa]}} = 1,775 \cdot 10^{-3} \text{ [–]} . \tag{2.32}$$

Z tohoto dílčího výsledku je patrné, že při namáhání tahem se materiál ocelové tyče dostal v pracovním diagramu do plastické oblasti, neboť:

$$\varepsilon_{x,el} = 1,775 \cdot 10^{-3} \text{ [–]} < \varepsilon_{x,el,pl} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ [–]} . \tag{2.33}$$

Samotné přetržení tyče přitom zdaleka nehrozilo, protože pokud se bude uvažovat tažnost oceli 15% (mezní délkové poměrné přetvoření je tedy podle (2.27) $\varepsilon_{x,\max} = 0,15$) platí:

$$\varepsilon_{x,el,pl} = 5 \cdot 10^{-3}\ [-] \ll \varepsilon_{x,\max} = 0,15\ [-]\ . \tag{2.34}$$

Vzhledem ke skutečnosti, že celkové délkové poměrné přetvoření se rovná:

$$\varepsilon_{x,el,pl} = \varepsilon_{x,el} + \varepsilon_{x,pl} \tag{2.35}$$

lze stanovit hodnotu trvalé (plastické) délkové poměrné deformace $\varepsilon_{x,pl}$ úpravou tohoto vztahu (2.33):

$$\varepsilon_{x,pl} = \varepsilon_{x,el,pl} - \varepsilon_{x,el} = 5 \cdot 10^{-3} - 1,775 \cdot 10^{-3} = 3,225 \cdot 10^{-3}\ [-]\ . \tag{2.36}$$

Trvalá deformace po odlehčení Δl_{pl} se pak určí již známým způsobem pomocí vztahu (2.1) a jeho jednoduchou úpravou:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x,pl} = \frac{\Delta l_{pl}}{l} \rightarrow \Delta l_{pl} = \varepsilon_{x,pl} \cdot l = 3,225 \cdot 10^{-3}\ [-] \cdot 3,6\ [\mathrm{m}] = \\ = 11,61 \cdot 10^{-3}\ [\mathrm{m}] = 11,61\ [\mathrm{mm}]\ . \end{aligned} \tag{2.37}$$

Výsledná trvalá deformace ocelové tyče po odlehčení tedy činí 11,61 mm. ▲

2.3 Deformace od změny teploty

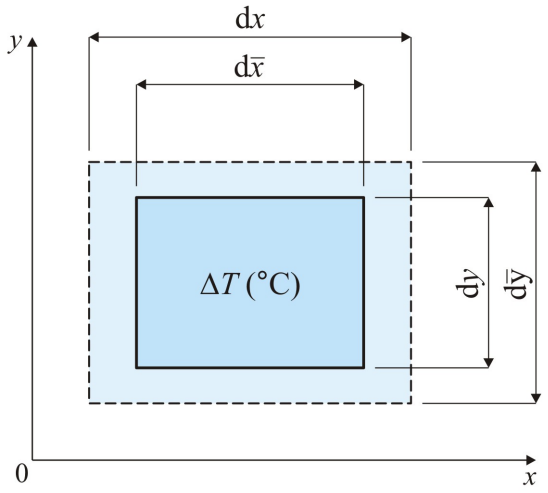
Pokud není u tělesa bráněno objemovým změnám, při rovnoměrné změně teploty se geometrie tělesa mění rovnoměrně ve všech třech směrech (obrázek 2.16), což lze vyjádřit pomocí délkových poměrných deformací:

$$\varepsilon_{x,T} = \varepsilon_{y,T} = \varepsilon_{z,T} = \alpha_T \cdot \Delta T\ , \tag{2.38}$$

kde α_T je součinitel teplotní délkové roztažnosti a ΔT teplotní rozdíl při rovnoměrném oteplení (kladná hodnota) nebo ochlazení (záporná hodnota). Úhlové poměrné deformace při účinku rovnoměrné změny teploty zůstávají přitom rovny nule:

$$\gamma_{xy,T} = \gamma_{yz,T} = \gamma_{zx,T} = 0\ . \tag{2.39}$$

Orientační číselné hodnoty součinitelů teplotní délkové roztažnosti α_T vybraných materiálů jsou uvedeny v tabulce 2.4 (podrobnější informace např. [11]).



Obr. 2.16 Objemové změny u elementárního kvádru, vyvolané rovnoměrnou změnou teploty - oteplením

Název materiálu	Součinitel teplotní délkové roztažnosti α_T (násobitel $\cdot 10^{-6}$) [°C^{-1}]
Ocel	10 až 15 (**12**) pro $T \leqq 100$°C
Beton	7 až 14 (**10**) pro -40°C $\leqq T \leqq 50$°C
Dřevo ve směru vláken	3
Cihelné zdivo	5
Slitiny hliníku	23
Mosaz	19,1 až 21,2
Bronz	18 až 21
Litina	9,9 až 12
Měď a slitiny mědi	16,6 až 17,6
Titanová slitina	8,1 až 11
Sklo	5 až 11
Nylon	70 až 140
Polyethylen (PE)	140 až 290
Polyvinylchlorid (PVC)	80 až 90
Pryž	130 až 200
Žula	7,89
Pískovec	11,74
Vápenec	8,49

Tab. 2.4 Přehled orientačních hodnot součinitelů teplotní délkové roztažnosti α_T vybraných materiálů

Příklad 2.19. Ocelový most délky $l = 60$ m byl smontován za teploty $t_0 = 5$ [°C]. Určete posun v mostním ložisku, pokud se konstrukce rovnoměrně ohřeje na teplotu $t_1 = 35$ [°C].

Řešení. Z tabulky 2.4 je možno odečíst součinitel teplotní délkové roztažnosti pro ocel $\alpha_T = 12 \cdot 10^{-6}$ [°C^{-1}].

Oteplení se stanoví:

$$\Delta T = t_1 - t_0 = 35 - 5 = 30 \text{ [°C]} . \tag{2.40}$$

Dosazením do vztahu (2.38) lze určit délkovou poměrnou deformaci vlivem rovnoměrného oteplení:

$$\varepsilon_{x,T} = \alpha_T \cdot \Delta T = 12 \cdot 10^{-6} \text{ [°C}^{-1}\text{]} \cdot 30 \text{ [°C]} = 3,6 \cdot 10^{-4} \text{ [–]} \tag{2.41}$$

a následně pomocí vztahu (2.1) a jeho jednoduchou úpravou také požadovaný posun v mostním ložisku:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x,T} = \frac{\Delta l}{l} \rightarrow \Delta l = \varepsilon_{x,T} \cdot l = 3,6 \cdot 10^{-4} \text{ [–]} \cdot 60 \text{ [m]} = \\ = 0,0216 \text{ [m]} = 21,6 \text{ [mm]} . \end{aligned} \tag{2.42}$$

Výsledné posunutí konstrukce v mostním ložisku v podélném směru vlivem rovnoměrného oteplení je rovno 21, 6 mm.

▲

Kapitola 3

Spolehlivost nosné konstrukce

Spolehlivost je obecně definovaná jako vlastnost věci sloužit účelu, pro který byla zhotovena. Spolehlivost stavební konstrukce nebo nosného prvku je schopnost plnit stanovené požadavky za určených podmínek během návrhové životnosti:

- bezpečnost,
- hospodárnost,
- životnost (trvanlivost) a použitelnost dílců a soustav navrhované nebo posuzované konstrukce.

V procesu návrhu stavební nosné konstrukce se provádí řada výpočetních operací, souvisejících s posudkem spolehlivosti jednotlivých konstrukčních částí nebo konstrukce jako celku.

a) Klimatické zatížení sněhem

b) Vliv prostředí – koroze

Obr. 3.1 Ukázky nahodilostí a nejistot vstupních veličin

Při návrhu musí být splněna různá kritéria spolehlivosti, definovaná příslušnými normovými předpisy (např. [1]). Přitom by měly být zohledněny veškeré podstatné

nahodilosti a nejistoty, které se ve výpočtu vážou na vstupní veličiny, kam v případě nosných prvků, dílců a soustav patří zejména: zatížení (stálé, užitné, klimatické, viz obrázek 3.1), vlivy prostředí (vlhkost – koroze, viz obrázek 3.1), odezva konstrukce, vlastnosti materiálů, nepřesnosti (imperfekce) geometrie konstrukce (montážní, průřezové), fyzikální imperfekce (vlastní pnutí, nehomogenita materiálu, defekty) a spolupůsobení se spodní stavbou nebo stavebním vybavením. Charakter těchto veličin bývá náhodný s různou proměnlivostí.

3.1 Metody navrhování a posuzování stavebních konstrukcí

Způsob zahrnutí nejistot a zajištění spolehlivosti konstrukcí při navrhování se vyvíjel a stále vyvíjí v úzké závislosti na dostupných experimentálních i teoretických poznatcích v oblasti stavební mechaniky, teoretické pružnosti a matematické statistiky. V minulosti byly konstrukce pozemních staveb navrhovány nejdříve empiricky. Vývoj různých metod navrhování stavebních konstrukcí se pak postupně ustálil na třech všeobecně používaných metodách, které se v různých modifikacích uplatňují v normách pro navrhování konstrukcí dodnes:

a) metoda dovolených namáhání (v mnoha zemích se používá dodnes),

b) metoda stupně bezpečnosti,

c) metoda mezních stavů.

3.1.1 Metoda dovolených namáhání

Metoda dovolených namáhání byla první celosvětově rozšířenou metodou pro navrhování stavebních konstrukcí. Koncepce metody dovolených namáhání spočívá v posouzení kritéria pevnosti v kritických lokalitách konstrukce, vyjádřeného vztahem:

$$\sigma \leqq \frac{\sigma_{dov}}{\mu} \,. \tag{3.1}$$

kde σ vyjadřuje základní (normové) účinky zatížení (napětí v konstrukci jako účinek provozního zatížení), σ_{dov} je normová únosnost vztažená k normové pevnosti příslušného materiálu (dovolené namáhání) a μ je deterministicky (upřesněn předcházejícími návrhy) určený součinitel bezpečnosti.

Součinitel μ je definován při stanovení účinku zatížení i odolnosti materiálu s ohledem na veškeré nejistoty návrhu, a má tedy s dostatečnou zárukou zajistit spolehlivost celé konstrukce. Hlavním nedostatkem této metodiky je nemožnost individuálního přihlédnutí k nejistotám jednotlivých základních veličin a výpočtových modelů pro stanovení účinku zatížení i odolnosti konstrukce.

3.1.2 Metoda stupně bezpečnosti

Druhou všeobecně rozšířenou metodou pro navrhování stavebních konstrukcí (např. u betonových konstrukcí), která byla do praxe zaváděná po II.světové válce, je metoda stupně bezpečnosti.

Metodika vychází z podmínky:

$$s = \frac{\overline{R}}{\overline{S}} > s_0 \ . \tag{3.2}$$

Jedná se o metodu s dokonalejším vystižením chování prvku a jeho průřezů, které je vyjádřeno odolností průřezu $\overline{R}$ a účinkem zatížení $\overline{S}$. Stupeň bezpečnosti s_0 je předepsán odlišnými hodnotami pro různé způsoby namáhání. Hlavním nedostatkem zůstává nemožnost přihlédnout k nejistotám jednotlivých základních veličin a teoretických modelů (stejně jako u metody dovolených namáhání).

3.1.3 Metoda mezních stavů

Metodika mezních stavů, která je obsažena i v současně platných normových předpisech - Eurokódech, byla do praxe zaváděna přibližně v polovině minulého století. V Československu se začala používat od počátku 60.let zejména zásluhou profesora Konráda Jaroslava Hrubana (1893 - 1977).

Obr. 3.2 Zavěšení konstrukce střechy hangáru „F“ na letišti Praha-Ruzyně – první haly v Československu, navržené podle metody mezních stavů (1966, M.Horák)

Hlavními přínosy této metodiky je progresivní přístup k hodnocení jednotlivých nahodile proměnných veličin vstupujících do podmínek spolehlivosti a komplexní pohled na soubor kritérií únosnosti a použitelnosti, opírajících se o statistiku a pravděpodobnostní počet.

Nosná konstrukce navrhovaná a posuzovaná touto metodikou ztrácí spolehlivost, jestliže překročí některý z mezních stavů, rozdělených do dvou skupin:

- mezní stavy únosnosti,
- mezní stavy použitelnosti.

3.2 Metoda mezních stavů

3.2.1 Mezní stavy únosnosti

Překročení některého z mezních stavů únosnosti má za následek porušení konstrukce a většinou vyvolá potřebu významné opravy nebo odstranění konstrukce:

- úplné nebo částečné zřícení (např. 3.3),
- porušení celistvosti prvků (zlomení, přetržení),
- ztráta stability jako celku (překlopení opěrné zdi, sesuv objektu).

a) celkový pohled na objekt po havárii

b) celkový pohled na budovu

Obr. 3.3 Havárie zděné budovy v Ostravě - Mariánských Horách (převzato z [14])

Rozlišují se čtyři druhy mezních stavů únosnosti:

a) **EQU**: ztráta statické rovnováhy konstrukce nebo její části uvažované jako tuhé těleso (pevnosti materiálů konstrukce nebo základové půdy nejsou obvykle významné),

b) **STR**: Vnitřní porucha nebo nadměrná deformace konstrukce nebo nosných prvků včetně základových patek, pilot, podzemních stěn atd., kde rozhoduje pevnost materiálu konstrukčních prvků,

c) **GEO**: Porucha nebo nadměrná deformace základové půdy, kde jsou pro únosnost významné pevnosti zeminy nebo skalního podloží,

d) **FAT**: Únavová porucha konstrukce nebo nosných prvků.

3.2.2 Dílčí součinitelé spolehlivosti

Ke snížení nebezpečí překročení některého z mezních stavů únosnosti se v procesu návrhu provádí dvojí opatření:

a) do výpočtu se zavádějí vyšší hodnoty zatížení než jsou hodnoty získané měřením a statistickým vyhodnocením,

b) při výpočtech se pevnosti materiálů uvažují naopak nižší, než smluvní nominální hodnoty.

Uvedené úpravy se provádějí s využitím tzv. **dílčích** (parciálních) **součinitelů spolehlivosti** $\gamma \geqq 1$, které lze získat:

- kalibrací těchto součinitelů na základě:
  - dlouhodobých zkušeností ze stavební praxe,
  - srovnáním s národními normami,
  - porovnávacími analýzami včetně pravděpodobnostních postupů, jenž se opírají o pravděpodobnostní metody teorie spolehlivosti,
- statistickým vyhodnocením experimentálních údajů a zkoušek.

Tento přístup bývá označován jako *polopravděpodobnostní metoda*. Dílčí součinitelé spolehlivosti jsou obsaženy v platných normových předpisech – Eurokódech, které jsou jednotně zavedeny v celé EU. Některé číselné hodnoty těchto součinitelů se však mohou v jednotlivých zemích EU lišit, což je specifikováno v příslušném Eurokódu tzv. Národní předmluvou nebo Národní přílohou.

3.2.3 Zatížení stavebních konstrukcí

Zatížení je jednou z nejvýznamnějších veličin, která vstupuje do procesu posudku spolehlivosti konstrukcí. Při stanovení účinků zatížení je nutno brát v úvahu zdroj zatížení, způsob působení na konstrukci, intenzitu, směr, dobu trvání, ale i vliv prostředí - např. změnu teploty či vlhkosti.

Jak již bylo řečeno v předchozí kapitole, zatížení a s ním spojené účinky zatížení S (např. napětí) se v procesu návrhu stavební konstrukce podle mezních stavů únosnosti zvyšuje, tedy:

$$F_d = F_k \cdot \gamma \ . \tag{3.3}$$

Zvýšená hodnota zatížení a jeho účinků F_d se nazývá **návrhová** (index d z anglického označení *design – návrh*) a je γ násobkem tzv. **charakteristické** hodnoty. Dílčí součinitel spolehlivosti γ bývá v souvislosti se zatížením a jeho účinky nazýván rovněž **součinitelem zatížení** a svou hodnotou bývá rozlišen podle proměnlivosti v čase na zatížení **stálá** – např. vlastní tíha (index G), **proměnná** – např. užitná a klimatická zatížení (index Q) a **mimořádná** – výbuchy nebo nárazy vozidel (index A).

Pro mezní stav únosnosti STR je například v [1] pro Českou republiku stanovena hodnota dílčího součinitele pro zatížení stálá hodnotou $\gamma_G = 1,35$ a pro zatížení proměnná $\gamma_Q = 1,5$ (obojí pro nepříznivé účinky). Veškeré charakteristické hodnoty zatížení jsou přesně definovány v [2], přičemž tyto hlavní reprezentativní hodnoty zatížení vycházejí z aritmetického průměru, z dolního nebo horního kvantilu statistického rozdělení příp. z nominální hodnoty (bez statistického významu). Jednotlivé složky zatížení se pak dále kombinují postupem, který je podrobně popsán v [1].

3.2.4 Pevnost stavebních materiálů

Pevnost materiálu f a s tím spojená odolnost konstrukce R se narozdíl od zatížení snižuje, což je obecně vyjádřeno vztahem:

$$f_d = \frac{f_k}{\gamma_M} \ , \tag{3.4}$$

kde f_d je návrhová hodnota pevnosti materiálu, f_k je charakteristická hodnota pevnosti materiálu a γ_M dílčí součinitel spolehlivosti materiálu, který má zohlednit případné nepříznivé odchylky pevnosti materiálu od její charakteristické hodnoty.

Charakteristické hodnoty pevnosti materiálu jsou uvedeny v příslušném normovém předpisu (např. pevnosti betonu v [3], oceli v [4] a dřeva v [5]), kde vycházejí z dolního kvantilu statistického rozdělení.

Beton

U betonu lze charakteristickou hodnotu pevnosti v tlaku v megapascalech určit z označení pevnostní třídy podle [3] (viz tabulka 2.3), které obsahuje dvě číselné hodnoty. První z nich udává charakteristickou válcovou pevnost betonu v tlaku f_{ck} ve stáří 25 dní, druhá pak charakteristickou krychelnou pevnost betonu v tlaku $f_{ck,cube}$. Například z označení pevnostní třídy C25/30 lze vyčíst $f_{ck} = 25$ [MPa] a $f_{ck,cube} = 30$ [MPa].

Dílčí součinitel spolehlivosti materiálu pro beton γ_C je v [3] pro návrhové situace trvalé a dočasné stanoven hodnotou 1,5 (pro betonářskou ocel γ_S pak hodnotou 1,15).

Ocel

Pro ocel lze podle [4] ve výpočtech využít např. jmenovité hodnoty meze kluzu f_y a meze pevnosti v tahu f_u konstrukčních ocelí válcovaných za tepla (viz tabulka 3.1).

Pevnostní třída oceli	Jmenovitá tloušťka prvku			
	$t \leqq 40$ mm		40 mm $< t \leqq 80$ mm	
	f_y [MPa]	f_u [MPa]	f_y [MPa]	f_u [MPa]
S235	235	360	215	360
S275	275	430	255	410
S355	355	510	335	470
S450	440	550	410	550

Tab. 3.1 Jmenovité hodnoty meze kluzu f_y a meze pevnosti v tahu f_u konstrukčních ocelí válcovaných za tepla podle EN 10025-2

Dílčí součinitelé spolehlivosti materiálu γ_M jsou v [4] definovány následovně:

- pro únosnost průřezů kterékoliv pevnostní třídy $\gamma_{M0} = 1,0$ (pro důležité konstrukce má být doloženo certifikátem dodavatele materiálu),
- pro únosnost průřezů při posuzování stability prutů (vzpěr) $\gamma_{M1} = 1,0$,
- pro únosnost průřezů při posuzování oslabeného průřezu v tahu (např. šroubový spoj) $\gamma_{M2} = 1,25$.

Dřevo

U dřeva se návrhová hodnota pevnostních charakteristik určuje podle [5] na základě upraveného vztahu (3.4) :

$$f_d = k_{mod} \cdot \frac{f_k}{\gamma_M} \ , \tag{3.5}$$

kde k_{mod} je modifikační součinitel, zohledňující vliv trvání zatížení (stálé, dlouhodobé, střednědobé, krátkodobé a okamžikové zatížení) a vlhkost (třídy provozu 1,2 a 3). V [5] jsou hodnoty k_{mod} uvedeny v samostatné tabulce 3.1, například pro rostlé dřevo a střednědobé zatížení ve třídě provozu 1 a 2 je hodnota modifikačního součinitele k_{mod} rovna 0,8 .

Dílčí součinitel materiálu pro dřevo se podle [5] volí hodnotami 1,2 pro překližku; 1,25 pro lepené lamelové dřevo a 1,3 pro rostlé dřevo, třískové a vláknité desky, příp. pro spoje (kromě kovových desek s prolisovanými trny).

3.2.5 Mezní stav použitelnosti

Mezní stavy použitelnosti se týkají zejména:

- funkce konstrukce nebo nosných prvků za běžného užívání,
- pohody osob,
- vzhledu stavby.

Při překročení některého z mezních stavů použitelnosti nejsou splněny stanovené provozní požadavky na konstrukci nebo nosný prvek jako jsou např. šířka trhlin, velikost přetvoření a kmitání, což obvykle nevede k vážným následkům. Po odstranění zatížení, která vyvolávají překročení daného mezního stavu použitelnosti, lze konstrukci většinou i nadále používat.

Pro mezní stavy použitelnosti by měly být dílčí součinitelé zatížení uvažovány hodnotou 1,0 (pokud není v příslušném Eurokódu stanoveno jinak). V praxi to znamená, že účinky zatížení – např. přetvoření nosné konstrukce, se určuje pro **charakteristické hodnoty zatížení**.

Pro posouzení podle mezních stavů použitelnosti pozemních staveb se používají kritéria spolehlivosti, která souvisí s tuhostí nosného systému a jsou vyjádřena mezními hodnotami pro svislé průhyby, vodorovná posunutí nebo kmitání.

V [4] je například uvedeno, že největší hodnoty svislých průhybů a vodorovných přetvoření se mají stanovit v projektu a dohodnout s objednatelem. Doporučené největší hodnoty těchto deformací od stálých a proměnných zatížení jsou pak stanoveny v národní příloze a některé z nich obsahuje i tabulka 3.2.

3.3 Princip navrhování a posudku spolehlivosti stavebních konstrukcí

U spolehlivě navrženého nosného prvku nebo konstrukce musí být splněna základní podmínka spolehlivosti:

$$E \leqq R \,, \tag{3.6}$$

kde E je účinek zatížení a R odolnost konstrukce. Je nezbytné, aby obě veličiny vykazovaly stejný rozměr. Podmínku spolehlivosti lze rovněž vyjádřit následujícím způsobem:

$$\frac{E}{R} \leqq 1 \,. \tag{3.7}$$

Nesplnění podmínky spolehlivosti (3.6) nebo (3.7) představuje z hlediska spolehlivosti nepříznivý, tzn. poruchový stav, kdy účinek zatížení E převyšuje velikost odolnosti konstrukce R.

Konstrukce, nosný dílec	Mezní hodnota
Střešní konstrukce	
vaznice	$\frac{L}{200}$
vazníky	$\frac{L}{250}$
s častým výskytem osob	$\frac{L}{300}$
Stropní konstrukce	
stropnice	$\frac{L}{250}$
průvlaky	$\frac{L}{400}$

Tab. 3.2 Doporučené největší hodnoty svislých průhybů vybraných nosných dílců (L je rozpětí nosníku nebo dvojnásobek délky konzoly)

3.3.1 Účinek zatížení stavebních konstrukcí

Veličina, vyjadřující účinek zatížení E (bývá také označována písmenem S), se váže na mezní stav, podle něhož se daný posudek spolehlivosti provádí. V případě mezních stavů únosnosti tak může účinek zatížení představovat skutečnou velikost dané vnitřní síly N_{Ed}, V_{Ed}, T_{Ed} nebo M_{Ed}, příp. napětí σ_{Ed} nebo τ_{Ed}. U mezních stav; použitelnosti je účinek zatížení dán např. skutečným přetvořením konstrukce.

Poznámka 3.1. Reálný účinek zatížení E je nutno považovat za náhodnou veličinu zejména vzhledem k náhodné proměnlivosti zatížení v čase a prostoru. Pravděpodobnostní vyjádření zatížení jako náhodného procesu je sice velice výstižné, nicméně velice pracné zejména vzhledem k získání potřebných údajů. Náhodné veličiny spojené se zatížením se nejčastěji vyjadřují pomoci histogramů středních nebo extrémních hodnot. Mnohdy se používají tzv. křivky trvání zatížení, kdy se po určitý časový úsek sleduje proměnlivost zatížení a získané hodnoty se nakonec seřadí vzestupně. S takto získanými daty je pak možno provádět pravděpodobnostní posouzení spolehlivosti (blíže viz např. [13]).

3.3.2 Odolnost konstrukce

Definice odolnosti konstrukce R je závislá zejména na výpočetním modelu, materiálových vlastnostech konstrukce (pevnostní a tuhostní charakteristiky použitých

materiálů) a jejích geometrických charakteristikách (tvar, rozměr nosných prvků, průřezové charakteristiky, výrobní a montážní nepřesnosti).

Veličina, vyjadřující odolnost konstrukce, se váže na mezní stav, podle něhož se daný posudek spolehlivosti provádí. V případě mezních stavů únosnosti tak může odolnost konstrukce představovat **únosnost v daném namáhání**, kterou lze určit na úrovni příslušné vnitřní síly N_{Rd}, V_{Rd}, T_{Rd} nebo M_{Rd}. Odolnost konstrukce lze také vztáhnout k mezním napětím f_d (pevnost materiálu v tahu, tlaku nebo smyku). U mezních stavů použitelnosti může být odolnost konstrukce dána mezním přetvořením konstrukce (např. z tabulky 3.2), příp. přípustnou frekvencí kmitání.

3.3.3 Výpočetní model posudku spolehlivosti

S mezním stavem, v rámci něhož se výpočet provádí, souvisí i samotná tvorba **výpočetního modelu**. Svou roli přitom hraje použitá metodika výpočtu (teorie I. či II. řádu) nebo matematický popis chování materiálu konstrukce (pružné chování materiálu, kdy je limitním stavem dosažení napětí na mezi kluzu f_y, nebo využití plastických vlastností např. s využitím pracovního diagramu ideálně pružnoplastického materiálu z obrázku 2.15, kdy je limitní plastická únosnost, přípustná velikost trvalé deformace, případně tažnost materiálu).

Na výpočetní model může mít rozhodující vliv i skutečnost, zda je předmětem posudku spolehlivosti pouze část nosné konstrukce (prvek, průřez) nebo celý nosný systém.

Poznámka 3.2. V následujících kapitolách se posluchači seznámí se základy správného **návrhu** a **posouzení spolehlivosti** nosného prvku nebo konstrukce, což se souhrnně nazývá procesem **dimenzování**. Důraz přitom bude kladen zejména na správné pochopení souvislostí teorie pružnosti a plasticity a k doporučením obsažených v normových předpisech, které se neustále vyvíjí a novelizují, bude přihlíženo pouze okrajově.

Kapitola 4

Osové namáhání (tah a prostý tlak)

Osovým namáháním se označuje stav, kdy jedinou nenulovou složkou vnitřních sil v kterémkoliv průřezu prutového nosného prvku je normálová síla N. Pokud je normálová síla kladná $N > 0$, jedná se o tah. V opačném případě ($N < 0$) o tlak, kdy se neuvažuje ztráta stability (vzpěr). V případě prostého tahu a tlaku jsou ostatní složky vnitřních sil rovny nule:

$$V_y = V_z = M_x = M_y = M_z = 0 \ . \tag{4.1}$$

Při zjišťování stavu napjatosti a stavu deformace osově namáhaného prvku se vychází z následujících předpokladů:

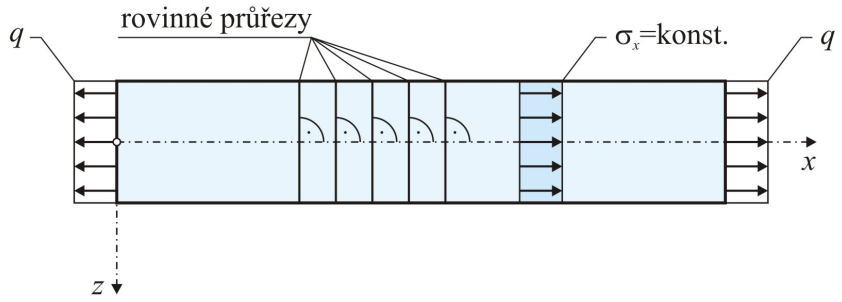
- průřezy zůstávají rovinné a kolmé i po účinku zatížení (Bernoulliho hypotéza),
- podélná vlákna na sebe vzájemně netlačí.

Z prvního předpokladu plyne, že příčné průřezy se účinkem zatížení nezkřiví a zůstanou vzájemně rovnoběžné (viz obrázek 4.1). Délkové poměrné přetvořením ve směru osy prutu ε_x pak musí být v řešeném průřezu o souřadnici x konstantní, takže s přihlédnutím k Hookeově zákonu v prostém tahu a tlaku (2.18) vyplývá:

$$\sigma_x(x) = \text{konst} \ . \tag{4.2}$$

Důsledkem je i skutečnost, že úhlová poměrná přetvoření γ_{xy} a γ_{xz} jsou nulová a z Hookeova zákona v prostém smyku (2.21) plyne:

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0 \ . \tag{4.3}$$



Obr. 4.1 Schématické znázornění přímého taženého prutu

Druhý předpoklad souvisí s normálovým napětím v příčném směru, tedy ve směru os y a z, která jsou rovny nule:

$$\sigma_y = \sigma_z = 0 \,. \tag{4.4}$$

4.1 Napětí při osovém namáhání

Stav napjatosti prutu je obecně vyjádřen tenzorem napětí se šesti nezávislými složkami napětí (1.33). V případě obecně zatíženého prutového nosného prvku dojde k redukci těchto složek napětí na tři (1.37). Při osovém namáhání prutu je pak nenulová pouze jediná složka napětí σ_x. Takový stav se označuje jako **jednoosá** (přímková) **napjatost**.

Napětí v průřezu prutu musí splňovat podmínky statické rovnováhy vnitřních sil, definované rovnicemi (1.20) až (1.25). Z rovnice (1.20) plyne za předpokladu (4.2) a nenulové průřezové plochy $A > 0$:

$$N = \int_A \sigma_x \,\mathrm{d}A = \sigma_x \cdot \int_A \mathrm{d}A = \sigma_x \cdot A \,. \tag{4.5}$$

Jednoduchou úpravou pak lze získat výsledný vztah pro určení normálových napětí σ_x při osovém namáhání:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} \,. \tag{4.6}$$

Poznámka 4.1. Odvozené řešení pro výpočet normálového napětí σ_x přestává platit pro případy zatížení soustředěného na malé ploše např. na koncích osově namáhaného prutu, nebo v situacích, kdy u prutového prvku dochází k náhlé změně průřezu (oslabení průřezu otvory šroubového spoje, náhlé zúžení, vruby) a normálové napětí

se pak v nejvíce oslabeném průřezu roznáší značně nerovnoměrně. Maximální hodnoty normálového napětí pak lze určit s využitím tzv. součinitele koncentrace napětí postupem, popsaném např. v [20].

Poznámka 4.2. Pro případy tlaku platí vztah (4.6) pouze pro přímé pruty, u nichž nedojde ke ztrátě stability a vzniku vzpěru.

Poznámka 4.3. U stavu jednoosé napjatosti vymizí smyková napětí τ_{xy} a τ_{xz} pouze v průřezech, které jsou kolmé k ose prutu x. V šikmých řezech jsou ale smyková napětí nenulová (blíže viz kapitola 10.1).

Příklad 4.4. Dvě tyče kruhového průřezu z různých materiálů (ocel, mosaz), schématicky znázorněné na obrázku 4.2, jsou tuze spojeny v bodě b a zatíženy centrickým osovým zatížením (konkrétní vstupní údaje jsou uvedeny v tabulce 4.1). Určete normálová napětí v obou tyčích a vykreslete jejich průběhy v průřezech.

Celková délka tyče l :	$5,5$ m
Délka úseku $\overline{ab}$ (ocelová tyč) l_1 :	$3,0$ m
Délka úseku $\overline{bc}$ (mosazná tyč) l_2 :	$2,5$ m
Zatěžovací bodová síla F_1 :	120 kN
Zatěžovací bodová síla F_2 :	50 kN
Průměr tyče d_1 v úseku $\overline{ab}$:	50 mm
Průměr tyče d_2 v úseku $\overline{bc}$:	30 mm
Průřezová plocha A_1 (úsek $\overline{ab}$) :	$\frac{\pi \cdot 0{,}050^2}{4} \cong 1,963 \cdot 10^{-3}$ m^2
Průřezová plocha A_2 (úsek $\overline{bc}$) :	$\frac{\pi \cdot 0{,}030^2}{4} \cong 7,069 \cdot 10^{-4}$ m^2

Tab. 4.1 Vstupní údaje příkladu 4.4

Řešení. Výpočet lze řadit do následujících výpočetních částí:

1. **Reakce a normálové síly:**
   Reakci $R_{a,x}$ lze určit ze silové podmínky rovnováhy $\sum F_{i,x} = R_x = 0$:

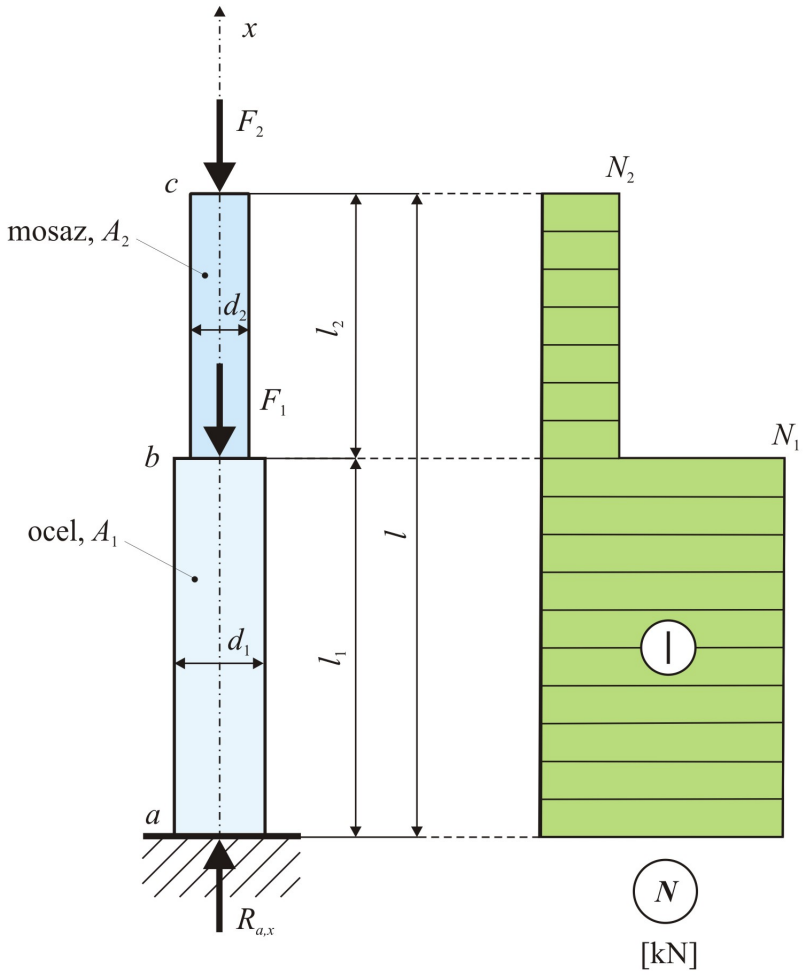
$$R_{a,x} - F_1 - F_2 = 0 \rightarrow R_{a,x} = F_1 + F_2 = 120 + 50 = 170 \text{ [kN]} . \tag{4.7}$$

   Normálové síly N_1 a N_2 na úsecích $\overline{ab}$ a $\overline{bc}$ se určí s využitím schématu na obrázku 4.2 následovně:

$$N_1 = -R_{a,x} = -170 \text{ [kN]} , \quad N_2 = -R_{a,x} + F_1 = -170 + 120 = -50 \text{ [kN]} . \tag{4.8}$$

2. **Normálová napětí:**
   Normálová napětí se stanoví na základě vztahu (4.6). Normálové napětí σ_1 v ocelové tyči (úsek $\overline{ab}$) se pak bude rovnat:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{-170 \cdot 10^3 \text{ [N]}}{1,963 \cdot 10^{-3} \text{ [m}^2\text{]}} = -86,58 \cdot 10^6 \text{ [Pa]} \cong -86,58 \text{ [MPa] (tlak)} . \tag{4.9}$$



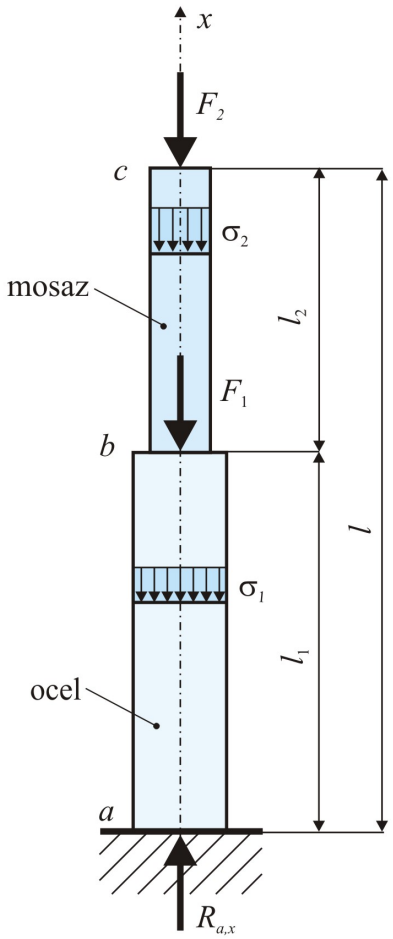
Obr. 4.2 Statické schéma osově namáhané konstrukce a průběh normálových sil N

Obdobně se určí i normálové napětí σ_2 v mosazné tyči (úsek $\overline{bc}$):

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{-50 \cdot 10^3 \text{ [N]}}{7,069 \cdot 10^{-4} \text{ [m}^2\text{]}} = -70,74 \cdot 10^6 \text{ [Pa]} \cong -70,74 \text{ [MPa] (tlak)} . \tag{4.10}$$

V ocelové tyči (úsek $\overline{ab}$) vzniká normálové napětí s hodnotou $\sigma_1 = -86,58$ MPa. Normálové napětí v mosazné tyči (úsek $\overline{bc}$) je rovno $\sigma_2 = -70,74$ MPa. Obě tyče jsou namáhány tlakovým normálovým napětím.

3. **Průběh normálového napětí v průřezu:**
Normálová napětí jsou konstantní v každém průřezu konstrukce (normálová síla se rovnoměrně rozloží do příslušné průřezové plochy). Jejich průběhy jsou schématicky vykresleny na obrázku 4.3.



Obr. 4.3 Průběh normálových napětí v průřezech obou tlačených tyči

▲

4.2 Přetvoření osově namáhaného prutu

Při stanovení přetvoření osově namáhaného prutu je nutno opět nejprve umínit výchozí předpoklady, se kterými bude výpočet proveden:

- Normálové napětí σ_x je v libovolném průřezu konstantní (4.2) a vychází ze vztahu (4.6) (neuvažují se tedy změny stavu napjatosti, např. způsobené náhlou změnou průřezu).
- U tlačených prutů platí odvozené vztahy pouze pro případ přímého prutu, u něhož nedojde ke ztrátě stability (vzpěru).

- Neuvažuje se s vlastní tíhou prvku. Ve zvláštním případě, kdy osa prutu bude orientována svisle, bude vlastní tíha brána jako samostatný zatěžovací stav.

Pokud bude prut s konstantní průřezovou plochou ($A(x) = \text{konst}$) zatížen pouze na koncích (např. jako na obrázku 4.1), takže normálová síla N je v tomto nosném prvku rovněž konstantní ($N(x) = \text{konst}$), pak lze odvodit vztah pro výsledné podélné přetvoření z Hookeova zákona pro prostý tah a tlak (2.18) s využitím definice (2.1) pro délkové poměrné přetvoření ε_x a vztahu (4.6) pro výpočet normálového napětí σ_x:

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x \rightarrow \frac{N}{A} = E \cdot \frac{\Delta l}{l} \rightarrow \Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A} \,. \tag{4.11}$$

Vztah (4.11) lze považovat za alternativní vyjádření Hookeova zákona pro prostý tah a tlak.

V rovnici (4.11) lze jednoduchou úpravou získat vztah:

$$N = \frac{E \cdot A}{l} \cdot \Delta l = k \cdot \Delta l \,, \tag{4.12}$$

kde k představuje veličinu, označovanou jako **tuhost prutu** stálého průřezu ($A(x) = = \text{konst}$) v tahu a tlaku:

$$k = \frac{E \cdot A}{l} \,. \tag{4.13}$$

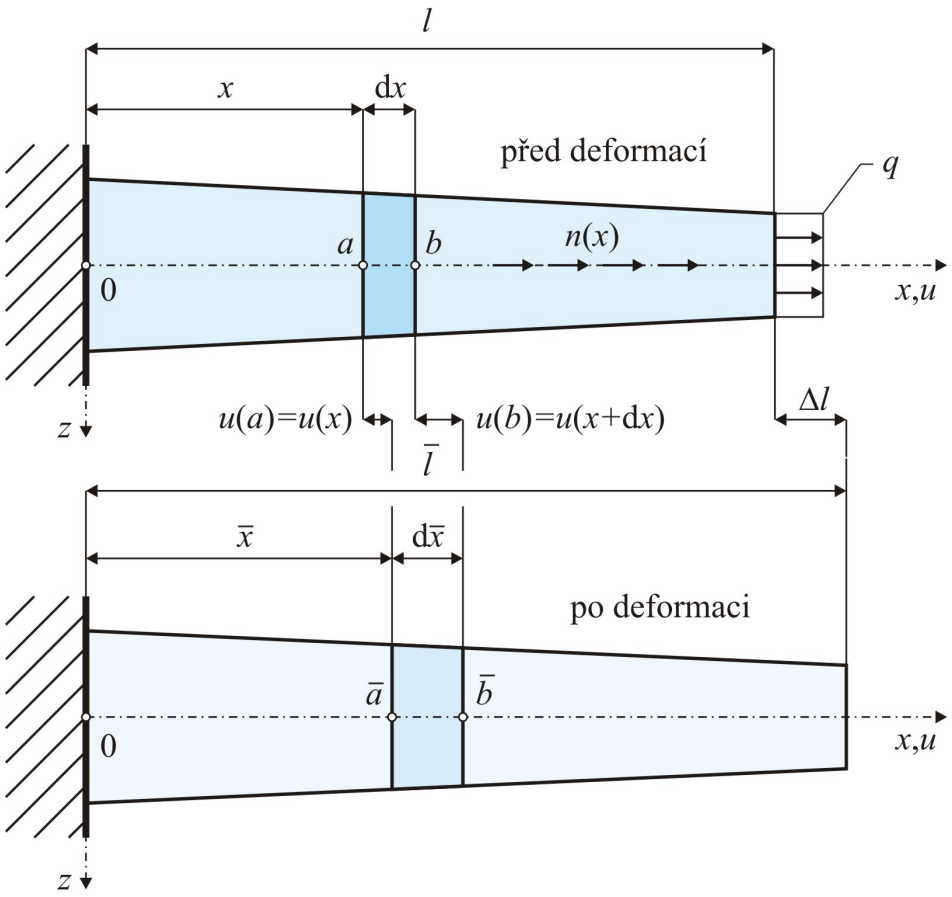
Tuhost prutu v tahu a tlaku k odpovídá normálové síle, která vyvolá přetvoření prutu o jednotku délky [$\text{kN} \cdot \text{m}^{-1}$]. Převrácená hodnota tuhosti v tahu a tlaku k:

$$c = \frac{1}{k} = \frac{l}{E \cdot A} \tag{4.14}$$

se pak nazývá **poddajnost prutu** v tahu a tlaku.

Poznámka 4.5. Deformace v příčném směru prutu z pružného materiálu probíhají úměrně Poissonovu součiniteli příčné deformace ν, což bylo dáno vztahem (2.20). U osově namáhaných prutů nemají přetvoření prutu v příčném směru praktický význam, proto se jim již v rámci tohoto učebního textu nebude věnovat další pozornost.

Vztah (4.11) lze použít k výpočtu přetvoření osově namáhaného prutu pouze v případě, kdy jsou všechny vstupní veličiny po délce prutu konstantní. Pro obecný případ spojitě osově zatíženého prutu ($N(x) \neq \text{konst}$) s proměnlivým průřezem ($A(x) \neq \text{konst}$), který je schématicky znázorněn na obrázku 4.4, je postup pro odvození přetvoření prutu analogický výpočtu deformace hrany elementárního kvádru podle vztahu (2.14). Vzhledem k výchozímu předpokladu zachování rovinnosti průřezů jsou posuny u ve směru osy x stejné ve všech bodech průřezu, a proto stačí



Obr. 4.4 Obecný případ osově namáhaného prutu

sledovat pouze posuny bodů na ose x. Délková poměrná deformace ve směru osy prutu x se pak určí:

$$\varepsilon_x = \frac{\mathrm{d}\bar{x} - \mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = \frac{(\mathrm{d}x + u(b) - u(a)) - \mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = \frac{u(x+\mathrm{d}x) - u(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial u}{\partial x} \,. \tag{4.15}$$

Vztah (4.15) je možno doplnit výrazem (2.18), jenž matematicky definuje Hookeův zákon v tahu a tlaku, čímž lze získat tzv. **diferenciální rovnici osově namáhaného prutu**:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{N(x)}{E \cdot A(x)} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{N(x)}{E \cdot A(x)} \,. \tag{4.16}$$

Rovnice (4.16) se může vyřešit integrací, která vede k obecnému vztahu pro výpočet podélných posunů v osově namáhaném prutu:

$$u(x) = \int \frac{N(x)}{E \cdot A(x)} \, \mathrm{d}x + C \, , \tag{4.17}$$

kde C je integrační konstanta. Tu lze určit z tzv. **okrajové** (počáteční) **deformační podmínky**, neboť v místě podepření je podélné posunutí nulové - např. na obrázku 4.4 je evidentní, že $u(x = 0) = 0$.

Příklad 4.6. Určete zkrácení ocelové a mosazné tyče Δl_1 a Δl_2 i celkovou deformaci na konstrukci z příkladu 4.4. Vstupní údaje v tabulce 4.1 jsou doplněny tuhostními charakteristikami obou materiálů v tabulce 4.2.

Modul pružnosti v tahu a tlaku oceli E_1 :	210000 MPa
Modul pružnosti v tahu a tlaku mosazi E_2 :	105000 MPa

Tab. 4.2 Vstupní údaje příkladu 4.6

Řešení. Hodnoty normálových sil N_1 a N_2, vypočtené pomocí vztahů (4.7) a (4.7), jsou po délce obou prutů konstantní (stejně jako průřezové plochy A_1 a A_2), proto je lze společně s příslušnými vstupními údaji (tabulky 4.1 a 4.2) postupně dosadit do vztahu (4.11), čímž lze získat podélná zkrácení obou tyčí. Zkrácení ocelové tyče Δl_1 vychází:

$$\begin{aligned} \Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E_1 \cdot A_1} = \frac{-170 \cdot 10^3 \ [\mathrm{N}] \cdot 3,0 \ [\mathrm{m}]}{2,10 \cdot 10^{11} \ [\mathrm{Pa}] \cdot 1,963 \cdot 10^{-3} \ [\mathrm{m}^2]} = \\ = -1,2369 \cdot 10^{-3} \ [\mathrm{m}] \cong -1,24 \ [\mathrm{mm}] \, . \end{aligned} \tag{4.18}$$

Obdobně se stanoví i změna délky tyče z mosazi Δl_2:

$$\begin{aligned} \Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{E_2 \cdot A_2} = \frac{-50 \cdot 10^3 \ [\mathrm{N}] \cdot 2,5 \ [\mathrm{m}]}{1,05 \cdot 10^{11} \ [\mathrm{Pa}] \cdot 7,069 \cdot 10^{-4} \ [\mathrm{m}^2]} = \\ = -1,6842 \cdot 10^{-3} \ [\mathrm{m}] \cong -1,68 \ [\mathrm{mm}] \, . \end{aligned} \tag{4.19}$$

Celkové zkrácení tlačené konstrukce Δl se vypočte:

$$\begin{aligned} \Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E_1 \cdot A_1} + \frac{N_2 \cdot l_2}{E_2 \cdot A_2} = \\ = -1,24 \ [\mathrm{mm}] - 1,68 \ [\mathrm{mm}] \cong -2,92 \ [\mathrm{mm}] \, . \end{aligned} \tag{4.20}$$

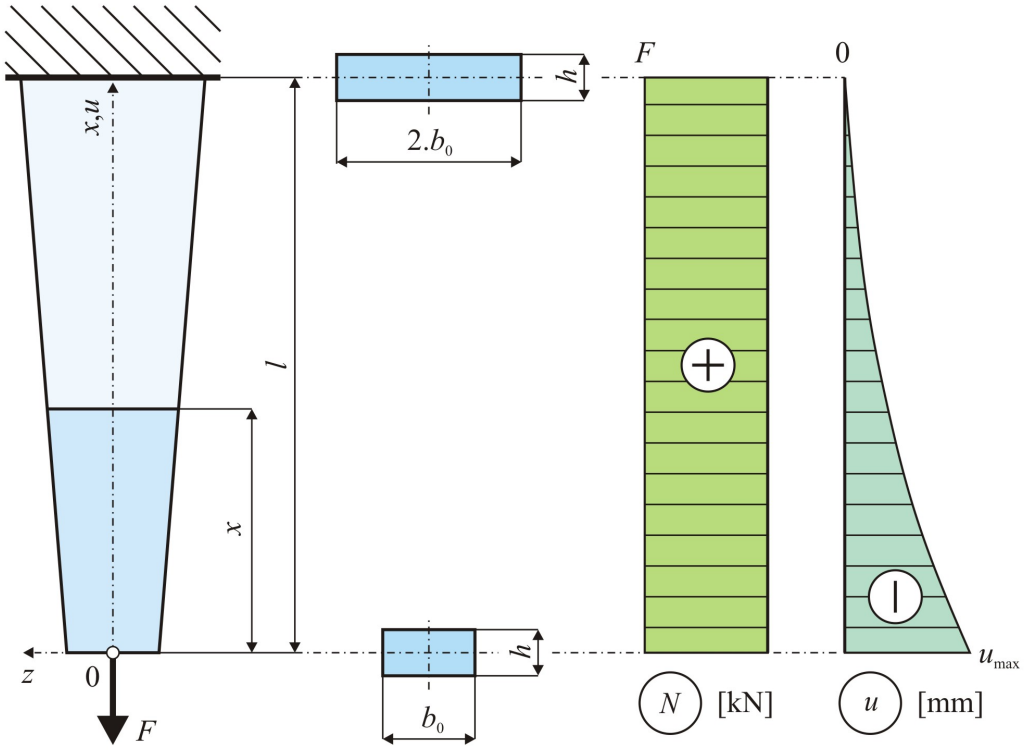
Konstrukce složená ze dvou tuze spojených tyčí se účinkem zatížení zkrátí celkem o 2,92 mm.

▲

Příklad 4.7. Vypočtěte protažení osově zatíženého ocelového prutu (táhla) s proměnlivým průřezem, jehož statické schéma je naznačeno na obrázku 4.5. Konkrétní vstupní údaje jsou uvedeny v tabulce 4.3. S vlivem vlastní tíhy konstrukce neuvažujte.

Zatěžovací bodová síla F :	160 kN
Délka prutu l :	6 m
Modul pružnosti v tahu a tlaku E :	210000 MPa
Výška obdélníkového průřezu h :	20 mm
Šířka obdélníkového průřezu b_0 :	40 mm

Tab. 4.3 Vstupní údaje příkladu 4.7



Obr. 4.5 Schéma osově namáhaného prutu s proměnlivým průřezem z příkladu 4.7 a průběhy normálové síly N a podélných posunů v osově namáhaném prutu u

Řešení. Řešený prut je případem osově namáhaného prvku s proměnlivou průřezovou plochou $A(x) \neq$ konst (normálová síla $N(x) =$ konst $= F$). K výpočtu protažení

je nutno použít vztahu (4.17), do něhož se dosadí parametricky vyjádřený předpis pro měnící se plochu průřezu v bodech $0 \leqq x \leqq l$. Průřezová plocha A nabývá svou nejmenší hodnotu v bodě $x = 0$:

$$A(x = 0) = b_0 \cdot h = A_0 \ , \tag{4.21}$$

což lze označit jako referenční hodnotu průřezové plochy A_0. V místě podepření táhla $(x = l)$ pak má průřezová plocha hodnotu:

$$A(x = l) = 2 \cdot b_0 \cdot h = 2 \cdot A_0 \ , \tag{4.22}$$

tedy dvojnásobek hodnoty na volném konci v bodě $x = 0$. Funkci, která by vyjadřovala tuto proměnlivost pak lze s využitím referenční hodnoty průřezové plochy A_0 vyjádřit následujícím způsobem:

$$A(x) = A_0 \cdot \frac{l + x}{l} \ . \tag{4.23}$$

Kontrola:

$$A(x = 0) = A_0 \cdot \frac{l + 0}{l} = A_0 \tag{4.24}$$

a

$$A(x = l) = A_0 \cdot \frac{l + l}{l} = 2 \cdot A_0 \ . \tag{4.25}$$

Dosazením vztahu (4.23) do rovnice (4.17) a následnou integrací lze získat:

$$\begin{aligned} u(x) &= \int \frac{F}{E \cdot A(x)} \, \mathrm{d}x = \int \frac{F \cdot l}{E \cdot A_0 \cdot (x + l)} \, \mathrm{d}x = \frac{F}{E \cdot A_0} \cdot \int \frac{l}{x + l} \, \mathrm{d}x = \\ &= \frac{F}{E \cdot A_0} \cdot l \cdot \ln(x + l) + C \ . \end{aligned} \tag{4.26}$$

Integrační konstanta C se určí pomocí okrajové deformační podmínky:

$$u(x = l) = 0 \ , \tag{4.27}$$

neboť v místě podepření táhla $x = l$ musí být pro zajištění nehybnosti konstrukce nulové posunutí. Dosazením okrajové podmínky (4.27) do vztahu (4.26) pak vychází:

$$u(x = l) = \frac{F}{E \cdot A_0} \cdot l \cdot \ln(l + l) + C = 0 \rightarrow C = -\frac{F}{E \cdot A_0} \cdot l \cdot \ln(2 \cdot l) \ . \tag{4.28}$$

Dosazením výsledného vztahu (4.28), vyjadřujícího hodnotu integrační konstanty C, do výrazu (4.26) se odvodí výsledná rovnice podélného přetvoření řešeného prutu:

$$u(x) = \frac{F}{E \cdot A_0} \cdot l \cdot \ln(x + l) - \frac{F}{E \cdot A_0} \cdot l \cdot \ln(2 \cdot l) = \frac{F \cdot l}{E \cdot A_0} \cdot [\ln(x + l) - \ln(2 \cdot l)] \ , \tag{4.29}$$

která nabývá platnosti v intervalu $x \in \langle 0; l\rangle$ a jejíž graf je schématicky znázorněn na obrázku 4.5.

Maximální posun $u_{\max}$ a tedy i hledané protažení Δl řešeného osově namáhaného prutu pak nastane na jeho volném okraji v bodě $x = 0$:

$$\begin{aligned} u(x=0) = u_{\max} = \Delta l &= \frac{F \cdot l}{E \cdot A_0} \cdot [\ln(0+l) - \ln(2 \cdot l)] = -\ln(2) \cdot \frac{F \cdot l}{E \cdot A_0} = \\ &= -\ln(2) \cdot \frac{F \cdot l}{E \cdot b_0 \cdot h} \approx -0,693147 \cdot \frac{F \cdot l}{E \cdot b_0 \cdot h} \,. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Do výsledného výrazu (4.30) pro výpočet protažení osově zatíženého ocelového prutu s proměnlivým průřezem lze dosadit konkrétní hodnoty všech vstupních veličin z tabulky 4.3:

$$\begin{aligned} u(x=0) = u_{\max} = \Delta l &= -\ln(2) \cdot \frac{160\ [\mathrm{kN}] \cdot 6\ [\mathrm{m}]}{210000\ [\mathrm{MPa}] \cdot 40\ [\mathrm{mm}] \cdot 20\ [\mathrm{mm}]} = \\ &= -\ln(2) \cdot \frac{160 \cdot 10^3\ [\mathrm{N}] \cdot 6\ [\mathrm{m}]}{210000 \cdot 10^6\ [\mathrm{Pa}] \cdot 40 \cdot 10^{-3}\ [\mathrm{m}] \cdot 20 \cdot 10^{-3}\ [\mathrm{m}]} = \\ &= -\ln(2) \cdot \frac{160 \cdot 6}{210000 \cdot 40 \cdot 20} \cdot 10^3\ [\mathrm{m}] = \\ &= -3,9608 \cdot 10^{-3}\ [\mathrm{m}] \cong -3,96\ [\mathrm{mm}] \,. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Protažení táhla s proměnlivým průřezem z obrázku 4.5 činí 3,96 mm.

▲

Poznámka 4.8. Definice souřadnicového systému na počátku výpočtu spočívá zejména v určení počátku v některém z bodů, ležících na ose prutu x, a stanovení směru kladné poloosy x. Zvolený souřadnicový systém pak musí zůstat nezměněn po celou dobu výpočtu (vztahují se k němu například okrajové podmínky). Volba vhodného souřadnicového systému souvisí pouze s pracností výpočtu a nemůže mít vliv na výsledky výpočtu.

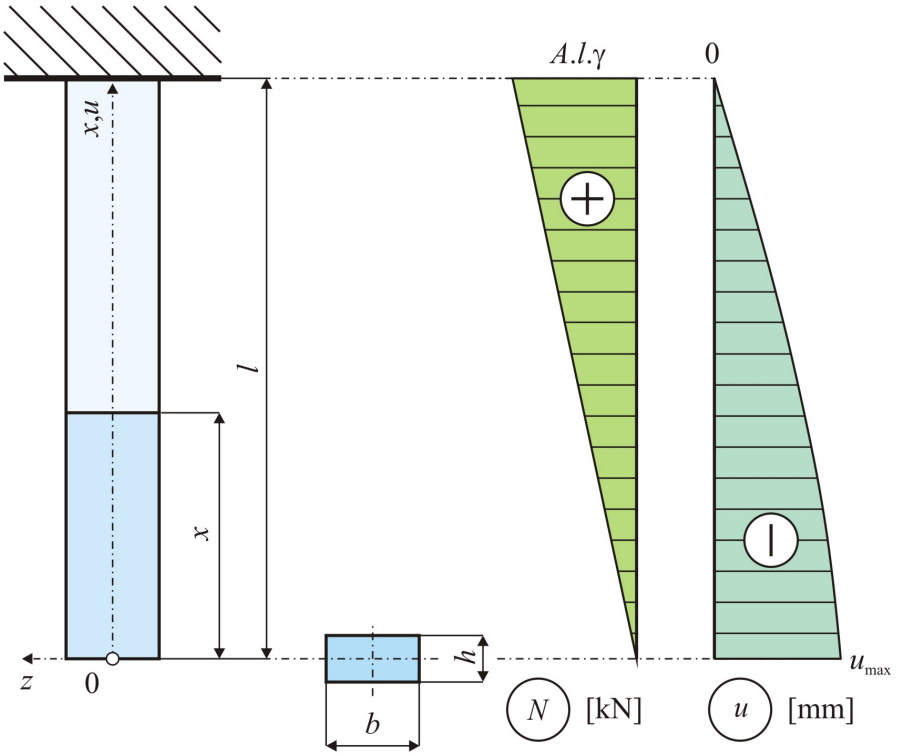
V případě příkladu 4.7 byl počátek souřadnicového systému $x = 0$ zvolen na volném okraji a směr kladné poloosy x směřuje k místě podepření se souřadnicí $x = l$, kde se uplatňuje okrajová podmínka. Z tohoto důvodu pak vychází výsledné protažení táhla se znaménkem minus.

Poznámka 4.9. Byť byl příklad 4.7 zadán s konkrétními hodnotami vstupních veličin v tabulce 4.3, výpočet byl proveden nejprve obecně a vstupní hodnoty byly dosazeny až do výsledného odvozeného vztahu. Tímto způsobem lze docílit statického výpočtu, který je nejen přehledný, ale také univerzální a použitelný i pro jiné hodnoty vstupních veličin. Obecně odvozené výrazy lze rovněž úspěšně aplikovat při automatizaci statického výpočtu, například s využitím tabulkového procesoru Excel.

Příklad 4.10. Vypočtěte protažení ocelového prutu s konstantním průřezem vlivem působení vlastní tíhy. Statické schéma je uvedeno na obrázku 4.6, konkrétní vstupní údaje pak obsahuje tabulka 4.4.

Objemová hmotnost oceli ρ :	7850 kg · m^{-3}
Tíhové zrychlení g :	10 m · s^{-2}
Délka prutu l :	160 m
Modul pružnosti v tahu a tlaku E :	210000 MPa

Tab. 4.4 Vstupní údaje příkladu 4.10



Obr. 4.6 Schéma prutu osově namáhaného vlastní tíhou z příkladu 4.10 a průběhy normálové síly N a podélných posunů v osově namáhaném prutu u

Řešení. Táhlo řešeného příkladu představuje osově namáhaný nosný prvek s proměnlivou hodnotou normálové síly $N(x) \neq \text{konst}$ (průřezová plocha $A(x) = \text{konst} = b{\cdot}h$). Pro výpočet jeho protažení je opět nutné využít obecného vztahu (4.17), be kterém se musí parametricky vyjádřit proměnlivost normálové síly $N(x)$ v bodech $0 \leqq x \leqq l$.

Normálová síla $N(x)$ v průřezu o souřadnici x se rovná tíze spodní oddělené části prutu v úseku 0 až x:

$$N(x) = A \cdot x \cdot \gamma \,, \tag{4.32}$$

kde γ je měrná tíha materiálu, která se určí:

$$\gamma = \rho \cdot g \; [\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^{-3}] \,. \tag{4.33}$$

Průběh normálové síly, který je definován vztahem (4.32), je lineární (viz obrázek 4.6). Předpis (4.32) pro výpočet normálové síly $N(x)$ nabývá platnosti v intervalu $x \in \langle 0; l \rangle$. Na volném okraji o souřadnici $x = 0$ je pak normálová síla rovna:

$$N(x = 0) = A \cdot 0 \cdot \gamma = 0 \,. \tag{4.34}$$

V místě podepření se souřadnici $x = l$ normálová síla dosahuje naopak maximální hodnotu:

$$N(x = l) = A \cdot l \cdot \gamma \,. \tag{4.35}$$

Rovnici protažení řešeného táhla lze získat dosazením vztahu (4.32) do výrazu 4.17 a jeho integrací:

$$u(x) = \int \frac{A \cdot x \cdot \gamma}{E \cdot A} \,\mathrm{d}x = \frac{\gamma}{E} \cdot \int x \,\mathrm{d}x = \frac{\gamma}{E} \cdot \frac{x^2}{2} + C \,, \tag{4.36}$$

kde C je integrační konstanta, kterou lze určit z okrajové deformační podmínky $u(x = l) = 0$ (nulový posun v místě podepření prutu):

$$u(x = l) = \frac{\gamma}{E} \cdot \frac{l^2}{2} + C = 0 \rightarrow C = -\frac{\gamma \cdot l^2}{2 \cdot E} \,. \tag{4.37}$$

Výsledná rovnice podélného přetvoření řešeného prutu se pak získá dosazením odvozené integrační konstanty C ve vztahu (4.37) do rovnice (4.36):

$$u(x) = \frac{\gamma}{E} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{\gamma \cdot l^2}{2 \cdot E} = \frac{\gamma}{2 \cdot E} \cdot (x^2 - l^2) \,. \tag{4.38}$$

Rovnice podélného přetvoření prutu (4.38) nabývá platnosti v intervalu $x \in \langle 0; l \rangle$. Její graf je schématicky znázorněn na obrázku 4.6.

Maximální posun $u_{\max}$ a tedy i hledané protažení Δl řešeného osově namáhaného prutu pak nastane opět na jeho volném okraji v bodě $x = 0$:

$$u(x = 0) = u_{\max} = \Delta l = \frac{\gamma}{2 \cdot E} \cdot (0^2 - l^2) = -\frac{\gamma \cdot l^2}{2 \cdot E} \,. \tag{4.39}$$

Nyní lze do odvozeného vztahu (4.40) dosadit konkrétní hodnoty všech vstupních veličin z tabulky 4.4:

$$\begin{aligned} u(x=0) = u_{\max} = \Delta l &= -\frac{7850 \cdot 10\ [\mathrm{N \cdot m^{-3}}] \cdot 160^2\ [\mathrm{m^2}]}{2 \cdot 210000\ [\mathrm{MPa}]} = \\ &= -\frac{78500 \cdot 160^2}{2 \cdot 210000 \cdot 10^6}\ [\mathrm{m}] = -4,7848 \cdot 10^{-3}\ [\mathrm{m}] \cong -4,78\ [\mathrm{mm}]\ . \end{aligned} \tag{4.40}$$

Protažení táhla z obrázku 4.6 s proměnlivou hodnotou normálové síly $N(x)$ vlivem účinku vlastní tíhy je rovno 4,78 mm.

▲

Poznámka 4.11. Při odvozování rovnice protažení táhla vlivem působení vlastní tíhy v příkladu 4.10 bylo zajímavé zjištění, že při úpravách vztahu (4.36) došlo k eliminaci průřezové plochy A. Protažení řešeného táhla je tedy nezávislé na velikost plochy průřezu A.

4.3 Návrh a posudek spolehlivosti taženého prutu

Tato kapitola je věnovaná zejména taženým nosným prvkům, neboť návrhu tlačených prutů je vzhledem k možným stabilitním problémům (vznik vzpěru) věnovaná kapitola 9.

Návrh a posudek spolehlivosti nosného prvku se souhrnněji označuje jako **dimenzování**, které představuje základní výpočetní operací statika - projektanta stavebních nosných konstrukcí.

Cílem dimenzování prutového nosného prvku je navrhnout jeho tvar průřezu tak, aby byla splněna požadovaná kritéria spolehlivosti daná mezními stavy únosnosti a použitelnosti.

4.3.1 Mezní stavy únosnosti

Podle [4] musí návrhová hodnota normálové síly N_{Ed} v každém průřezu splňovat podmínku:

$$\frac{N_{Ed}}{N_{Rd}} \leqq 1,0\ , \tag{4.41}$$

která je analogická vyjádření:

$$N_{Ed} \leqq N_{Rd}\ . \tag{4.42}$$

Ve výrazech (4.41) i (4.42) představuje veličina N_{Rd} tzv. **únosnost osově namáhaného** (taženého) **prvku**, která odpovídá maximální přípustné návrhové hodnotě

normálové síly v nosném prvku. Její výpočet vychází z výchozího požadavku, že normálová napětí σ_x v osově namáhaném (taženém) prvku nesmí překročit návrhovou hodnotu pevnosti materiálu v tahu a prostém tlaku, tedy:

$$\sigma_x \leqq f_d \ . \tag{4.43}$$

Podmínku spolehlivosti (4.43) lze dále doplnit vztahem (4.6) pro výpočet normálového napětí σ_x, určeného z návrhové hodnoty normálové síly N_{Ed}, a výrazem (3.4) pro definování návrhové hodnoty pevnosti materiálu:

$$\sigma_x = \frac{N_{Ed}}{A} \leqq f_d = \frac{f_k}{\gamma_M} \ . \tag{4.44}$$

Jednoduchou úpravou této nerovnice pak lze získat i vztah definující požadovanou únosnost osově namáhaného (taženého) nosného prvku N_{Rd}:

$$\frac{N_{Ed}}{A} \leqq \frac{f_k}{\gamma_M} \rightarrow N_{Ed} \leqq \frac{f_k}{\gamma_M} \cdot A = N_{Rd} \ . \tag{4.45}$$

V procesu návrhu osově namáhaného (taženého) nosného prvku je úkolem statika specifikovat jedinou průřezovou veličinu, vstupující do výpočtu – průřezovou plochu A. Výchozím vztahem pro její určení je opět nerovnice (4.44), ve které je potřeba osamostatnit hledanou průřezovou plochu A:

$$\frac{N_{Ed}}{A} \leqq \frac{f_k}{\gamma_M} \rightarrow A \geqq \frac{N_{Ed}}{\frac{f_k}{\gamma_M}} \rightarrow A_{\min} = \frac{N_{Ed}}{\frac{f_k}{\gamma_M}} \ , \tag{4.46}$$

kde $A_{\min}$ je minimální (nutná) hodnota průřezové plochy nosného prvku.

4.3.2 Mezní stavy použitelnosti

Pro posouzení osově namáhaného (taženého) prvku pozemních staveb podle mezních stavů použitelnosti se používají kritéria spolehlivosti, vycházející z nerovnice:

$$u_{\max} = \Delta l \leqq \delta_{\max} \ , \tag{4.47}$$

kde $u_{\max} = \Delta l$ je největší posunutí (deformace) v podélném směru prutového prvku, určené z charakteristických hodnot zatížení, a veličina označená jako $\delta_{\max}$ představuje největší (mezní, limitní) přetvoření daného nosného prvku. Doporučené hodnoty mezních přetvoření pozemních staveb od stálých a proměnných zatížení jsou uvedeny např. v národní příloze [4] a měly by být dohodnuty s objednatelem projektu.

Při návrhu osově namáhaného (taženého) nosného prvku podle mezních stavů použitelnosti je nutno opět specifikovat průřezovou plochu A nosného prvku. Pokud

se jedná o prut s konstantním průřezem ($A(x) = \text{konst}$) a konstantní hodnotou normálové síly ($N(x) = \text{konst}$) ve všech průřezech, lze vyjít ze vztahu 4.11:

$$u_{\max} = \Delta l = \frac{N_{Ek} \cdot l}{E \cdot A} \leqq \delta_{\max} \rightarrow A \geqq \frac{N_{Ek} \cdot l}{E \cdot \delta_{\max}} \rightarrow A_{\min} = \frac{N_{Ek} \cdot l}{E \cdot \delta_{\max}} \,, \tag{4.48}$$

kde $A_{\min}$ je minimální (nutná) hodnota průřezové plochy nosného prvku.

Poznámka 4.12. Aby nosný prvek vyhověl podle obou mezních stavů - únosnosti i použitelnosti, a splňoval tedy obě kritéria spolehlivosti, je třeba provést výsledný návrh. V případě osově namáhaného (taženého) nosného prvku to znamená, že minimální hodnota průřezové plochy $A_{\min}$ výsledného návrhu vzejde z větší hodnoty navržených ploch průřezu podle mezních stavů únosnosti a použitelnosti.

Posouzení spolehlivosti se pak pro obě skupiny mezních stavů provádí pouze pro průřez výsledného návrhu, tedy pro průřez reálného nosného prvku, který bude v nosném systému skutečně realizován.

Celý proces dimenzování lze nejlépe provést podle následujícího schématu:

1. **Návrh průřezu nosného prvku:**
   a) *Podle mezních stavů únosnosti:*
   Navržen průřez osově namáhaného (taženého) nosného prvku s průřezovou plochou A_1 s využitím vztahu (4.46).
   b) *Podle mezních stavů použitelnosti:*
   Navržen průřez osově namáhaného (taženého) nosného prvku s průřezovou plochou A_2, např. s využitím vztahu (4.48).
   c) *Výsledný návrh:*
   Navržen výsledný průřez osově namáhaného (taženého) nosného prvku s průřezovou plochou $A = \max(A_1, A_1)$.

2. **Posouzení spolehlivosti navrženého průřezu nosného prvku:**
   a) *Podle mezních stavů únosnosti:*
   Posudek spolehlivosti navrženého průřezu osově namáhaného (taženého) nosného prvku s průřezovou plochou A s využitím vztahu (4.41) nebo (4.42).
   b) *Podle mezních stavů použitelnosti:*
   Posudek spolehlivosti navrženého průřezu osově namáhaného (taženého) nosného prvku s průřezovou plochou A, např. s využitím vztahu (4.47).

Poznámka 4.13. U staticky určitých konstrukcí lze nosný prvek navrhnout podle schématu v poznámce 4.12 tak, že splnění podmínek spolehlivosti podle obou mezních stavů je dosaženo hned při prvním návrhu.

U staticky neurčitých konstrukcí je proces dimenzování složitější. Návrh nemusí vyhovět hned napoprvé a mnohdy se musí pozměnit i několikrát. Celý proces dimenzování pak probíhá v iteračním cyklu, který je ukončen až splněním kritérií spolehlivosti u obou skupin mezních stavů.

Příklad 4.14. Navrhněte a posuďte čtvercový průřez ocelového táhla, schématicky znázorněného na obrázku 4.7, podle mezních stavů únosnosti i použitelnosti. Navržený rozměr strany čtvercového průřezu zaokrouhlete na celé milimetry. Konkrétní vstupní údaje jsou uvedeny v tabulce 4.5.

Celková délka tyče l:	4 m
Délka úseku l_1 ($\overline{ac}$) :	3 m
Délka úseku l_2 ($\overline{cb}$) :	1 m
Zatěžovací bodová síla $F_{1,k}$ (zatížení stálé) :	50 kN
Zatěžovací bodová síla $F_{2,k}$ (zatížení stálé) :	30 kN
Dílčí součinitel spolehlivosti pro zatížení stálé γ_G :	1,35
Pevnostní třída oceli :	S235
Pevnost oceli v prostém tahu a tlaku f_{yk} :	235 MPa
Dílčí součinitel spolehlivosti materiálu γ_{M0} :	1,00
Modul pružnosti v tahu a tlaku E :	210000 MPa
Mezní protažení tyče $\delta_{\max}$:	5,0 mm

Tab. 4.5 Vstupní údaje příkladu 4.14

Řešení. Výpočet bude pro přehlednost řazen do samostatných výpočetních částí:

1. **Výpočet reakce a vnitřních sil:**

   a) *Charakteristické hodnoty:*

   Reakce $R_{ax,k}$ se určí ze silové podmínky rovnováhy $\sum F_{i,x} = R_x = 0$:

   $$-R_{ax,k} + F_{1,k} + F_{2,k} = 0 \rightarrow R_{ax,k} = F_{1,k} + F_{2,k} = 50 + 30 = 80 \text{ [kN]} . \quad (4.49)$$

   Normálové síly $N_{1,k}$ (úsek $\overline{ac}$) a $N_{2,k}$ (úsek $\overline{bc}$) se určí následujícím způsobem:

   $$N_{1,k} = R_{ax,k} = 80 \text{ [kN]} \quad (4.50)$$

   a

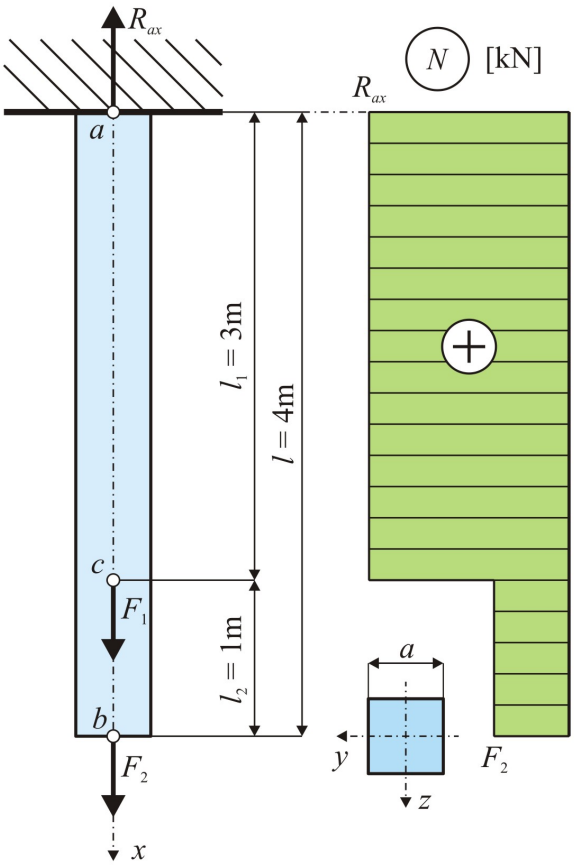
   $$N_{2,k} = R_{ax,k} - F_{1,k} = 80 - 50 = F_{2,k} = 30 \text{ [kN]} . \quad (4.51)$$

   Průběh normálové síly po délce řešeného prutu je uveden na obrázku 4.7.

   b) *Návrhové hodnoty:*

   Vzhledem ke skutečnosti, že navrhovaný tažený prut bude nadimenzován z jednoho průřezu ($A(x) = \text{konst}$ pro $x \in \langle 0; l \rangle$), pro další výpočet postačí stanovit pouze maximální hodnotu normálové síly v táhle N_{Ed}:

   $$N_{Ed} = N_{1,k} \cdot \gamma_G = 80 \cdot 1,35 = 108 \text{ [kN]} . \quad (4.52)$$



Obr. 4.7 Statické schéma a průřez řešeného táhla z příkladu 4.14 a průběh normálové síly N

2. **Návrh průřezu nosného prvku:**

a) *Návrh podle mezních stavů únosnosti:*

Návrhová hodnota pevnosti oceli v tahu a tlaku f_{yd} se určí podle (3.4):

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_{M0}} = 235 \text{ [MPa]} . \tag{4.53}$$

Minimální hodnotu plochy průřezu $A_{1,\min}$ lze stanovit na základě vztahu (4.46):

$$\begin{aligned} A_{1,\min} = \frac{N_{Ed}}{\frac{f_k}{\gamma_M}} = \frac{N_{Ed}}{f_d} = \frac{108 \text{ [kN]}}{235 \text{ [MPa]}} = \\ = \frac{108 \cdot 10^3}{235 \cdot 10^6} \text{ [m}^2\text{]} \cong 4,5957 \cdot 10^{-4} \text{ [m}^2\text{]} . \end{aligned} \tag{4.54}$$

V zadání úlohy je obsažen požadavek, aby průřez taženého průřezu byl čtvercový o straně a. Aby bylo splněno kritérium spolehlivosti podle mezních stavů

únosnosti, minimální hodnota tohoto rozměru pak musí být:

$$A_{1,\min} = a_{1,\min}^2 \rightarrow a_{1,\min} = \sqrt{A_{1,\min}} = \sqrt{4,5957 \cdot 10^{-4}}\ [\mathrm{m}] = \\ = 2,1438 \cdot 10^{-2}\ [\mathrm{m}] \cong 21,44\ [\mathrm{mm}]\ . \tag{4.55}$$

Při návrhu podle mezních stavů únosnosti tedy vychází minimální rozměr strany čtvercového průřezu $a_{1,\min} = 21,44$ mm.
Dalším požadavkem, který je obsažen v zadání, je zaokrouhlení navrženého rozměru strany čtvercového průřezu na celé milimetry. Aby bylo splněno kritérium spolehlivosti podle mezních stavů únosnosti, musí být navržený rozměr $a \geqq a_{1,\min}$ a tudíž se musí zaokrouhlení provádět směrem nahoru.
Výsledný návrh strany čtvercového průřezu podle mezních stavů únosnosti pak vede k hodnotě $a_1 = 22$ mm.

b) *Návrh podle mezních stavů použitelnosti:*

Celkové prodloužení taženého prutu Δl (posunutí bodu b) se vzhledem k rozdílné hodnotě normálových sil N_1 a N_2 určí jako součet přetvoření v úsecích $\overline{ac}$ a $\overline{bc}$:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2\ . \tag{4.56}$$

V obou úsecích je průřezová plocha $A(x)$ konstantní, stejně jako daná normálová síla $N(x)$ (viz průběh normálových sil na obrázku 4.7), a proto při stanovení přetvoření Δl_1 a Δl_2 v rovnici (4.56) lze vyjít ze vztahu 4.11:

$$\Delta l = \frac{N_{1,k} \cdot l_1}{E \cdot A} + \frac{N_{2,k} \cdot l_2}{E \cdot A} = \frac{N_{1,k} \cdot l_1 + N_{2,k} \cdot l_2}{E \cdot A}\ . \tag{4.57}$$

Pokud má být výsledné protažení řešeného prutu Δl menší nežli hodnota mezního protažení $\delta_{\max}$, která je v tabulce vstupních údajů 4.5 zadaná hodnotou 5 mm, v souladu s kritériem spolehlivosti (4.47) lze minimální hodnotu plochy průřezu $A_{2,\min}$ určit úpravou vztahu (4.57):

$$\Delta l = \frac{N_{1,k} \cdot l_1 + N_{2,k} \cdot l_2}{E \cdot A} \leqq \delta_{\max} \rightarrow A \geqq \frac{N_{1,k} \cdot l_1 + N_{2,k} \cdot l_2}{E \cdot \delta_{\max}} \rightarrow \\ \rightarrow A_{2,\min} = \frac{N_{1,k} \cdot l_1 + N_{2,k} \cdot l_2}{E \cdot \delta_{\max}}\ . \tag{4.58}$$

Dosazením konkrétních hodnot do výrazu (4.58) se stanoví výsledná hodnota minimální průřezové plochy podle mezních stavů použitelnosti $A_{2,\min}$:

$$A_{2,\min} = \frac{N_{1,k} \cdot l_1 + N_{2,k} \cdot l_2}{E \cdot \delta_{\max}} = \frac{80\ [\mathrm{kN}] \cdot 3\ [\mathrm{m}] + 30\ [\mathrm{kN}] \cdot 1\ [\mathrm{m}]}{210000\ [\mathrm{MPa}] \cdot 5\ [\mathrm{mm}]} = \\ = \frac{80 \cdot 10^3 \cdot 3 + 30 \cdot 10^3 \cdot 1}{210000 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}\ [\mathrm{m}^2] = 2,5714 \cdot 10^{-4}\ [\mathrm{m}^2]\ . \tag{4.59}$$

Z minimální hodnoty průřezové plochy $A_{2,\min}$ pak lze obdobně, jako v případě návrhu podle mezních stavů únosnosti, stanovit i minimální hodnotu rozměru čtvercového průřezu $a_{2,\min}$, který vychází:

$$A_{2,\min} = a_{2,\min}^2 \rightarrow a_{2,\min} = \sqrt{A_{2,\min}} = \sqrt{2,5714 \cdot 10^{-4}}\ [\mathrm{m}] = \\ = 1,6036 \cdot 10^{-2}\ [\mathrm{m}] \cong 16,04\ [\mathrm{mm}]\ . \tag{4.60}$$

Výsledný návrh délky strany čtvercového průřezu podle mezních stavů použitelnosti pak vede k hodnotě $a_2 = 17$ mm.

c) *Výsledný návrh:*

Porovnáním navržených rozměrů čtvercového průřezu lze zjistit, že pro výsledný návrh jsou rozhodující mezní stavy únosnosti. Výsledný návrh délky strany čtvercového průřezu podle mezních stavů únosnosti i použitelnosti odpovídá větší z hodnot a_1 a a_2, tedy hodnotě $a = 22$ mm s odpovídající průřezovou plochou:

$$A = a^2 = 22^2\ [\mathrm{mm}^2] = 484\ [\mathrm{mm}^2] = 484 \cdot 10^{-6}\ [\mathrm{m}^2]\ . \tag{4.61}$$

Byl navržen čtvercový průřez o straně 22 mm.

3. **Posouzení spolehlivosti navrženého průřezu nosného prvku:**

a) *Posouzení spolehlivosti podle mezních stavů únosnosti:*

V rámci posudku spolehlivosti navrženého průřezu taženého nosného prvku s průřezovou plochou $A = 484\ [\mathrm{mm}^2]$ se určí nejprve únosnost v osovém namáhání N_{Rd}, vycházející ze vztahu (4.45):

$$N_{Rd} = f_{yd} \cdot A = 235\ [\mathrm{MPa}] \cdot 484\ [\mathrm{mm}^2] = \\ = 235 \cdot 10^6 \cdot 484 \cdot 10^{-6}\ [\mathrm{N}] = 113,74\ [\mathrm{kN}]\ . \tag{4.62}$$

Posudek spolehlivosti podle mezních stavů únosnosti pak lze provést s využitím vztahů (4.41):

$$\frac{N_{Ed}}{N_{Rd}} = \frac{108\ [\mathrm{kN}]}{113,74\ [\mathrm{kN}]} \cong 0,9495 \leqq 1,0 \tag{4.63}$$

nebo (4.42):

$$N_{Ed} = 108\ [\mathrm{kN}] \leqq N_{Rd} = 113,74\ [\mathrm{kN}]\ . \tag{4.64}$$

Nerovnice v obou podmínkách spolehlivosti (4.63) i (4.64) jsou splněny.

Navržený čtvercový průřez vyhovuje na tah z hlediska mezních stavů únosnosti.

b) *Posouzení spolehlivosti podle mezních stavů použitelnosti:*

U posudku spolehlivosti podle mezních stavů použitelnosti lze nejprve stanovit přetvoření navrženého taženého prutu Δl pomocí vzorce (4.57):

$$\Delta l = \frac{N_{1,k} \cdot l_1 + N_{2,k} \cdot l_2}{E \cdot A} = \frac{80\ [\mathrm{kN}] \cdot 3\ [\mathrm{m}] + 30\ [\mathrm{kN}] \cdot 1\ [\mathrm{m}]}{210000\ [\mathrm{MPa}] \cdot 484\ [\mathrm{mm}^2]} = \\ = \frac{80 \cdot 10^3 \cdot 3 + 30 \cdot 10^3 \cdot 1}{210000 \cdot 10^6 \cdot 484 \cdot 10^{-6}}\ [\mathrm{m}] = 2,6564 \cdot 10^{-3}\ [\mathrm{m}] \cong 2,66\ [\mathrm{mm}]\ . \tag{4.65}$$

Posudek spolehlivosti podle mezních stavů použitelnosti se pak provede pomocí kritéria spolehlivosti (4.47):

$$\Delta l \cong 2,66\ [\mathrm{mm}] \leqq \delta_{\max} = 5\ [\mathrm{mm}]\ . \tag{4.66}$$

Podmínka spolehlivosti (4.66) je splněna.

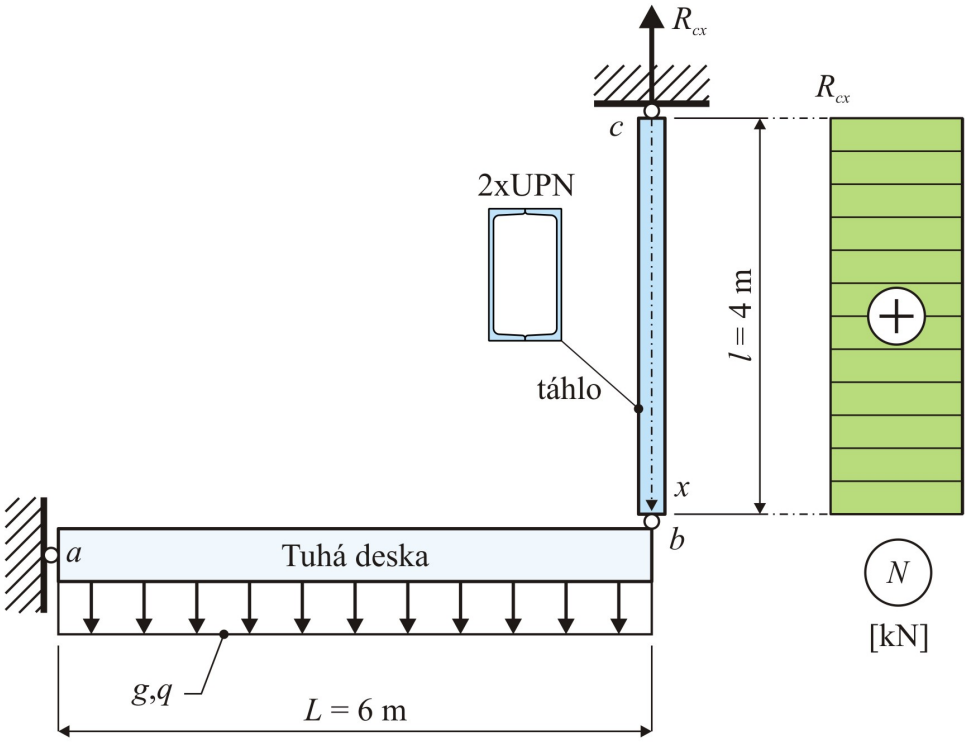
Navržený čtvercový průřez vyhovuje na tah z hlediska mezních stavů použitelnosti.

▲

Příklad 4.15. Nadimenzujte s ohledem na kritéria spolehlivosti mezních stavů únosnosti i použitelnosti ocelové táhlo zavěšeného stropního podhledu, schématicky znázorněného na obrázku 4.8. Pro návrh průřezu táhla uvažujte dvojici válcovaných UPN profilů, jejichž nominální průřezové plochy jsou uvedeny v tabulce 11.5. Konkrétní vstupní údaje jsou uvedeny v tabulce 4.6.

Délka táhla l :	4 m
Rozpětí tuhé desky L :	6 m
Velikost stálého spojitého zatížení g_k :	60 kN/m
Velikost proměnného spojitého zatížení q_k :	140 kN/m
Dílčí součinitel spolehlivosti pro zatížení stálé γ_G :	1,35
Dílčí součinitel spolehlivosti pro zatížení proměnné γ_Q :	1,5
Pevnostní třída oceli :	S275
Pevnost oceli v prostém tahu a tlaku f_{yk} :	275 MPa
Dílčí součinitel spolehlivosti materiálu γ_{M0} :	1,00
Modul pružnosti v tahu a tlaku E :	210000 MPa
Mezní protažení tyče $\delta_{\max}$:	5,0 mm

Tab. 4.6 Vstupní údaje příkladu 4.15



Obr. 4.8 Statické schéma konstrukce zavěšeného podhledu a průřez řešeného táhla z příkladu 4.15

Řešení. Jednotlivé výpočetní části jsou následující:

1. **Výpočet kombinace zatížení a normálové síly v táhle:**

   a) *Charakteristické hodnoty:*

   Celkové spojité zatížení p, působící na tuhou desku, tvoří dvě složky zatížení – stálé g a proměnné q. Jejich vzájemná kombinace se určí prostým součtem obou složek:

$$p_k = g_k + q_k = 60 + 140 = 200 \text{ [kN/m]} . \tag{4.67}$$

   Normálová síla N má konstantní průběh po délce táhla (viz obrázek 4.8) a je rovna reakci R_{cx} v místě zavěšení táhla v bodě c, kterou lze vypočítat např. z momentové podmínky rovnováhy k bodu a:

$$\begin{aligned} &\sum M_a = 0 : \quad -\frac{p_k \cdot L^2}{2} + R_{cx,k} \cdot L = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow R_{cx,k} = N_{Ek} = \frac{p_k \cdot L}{2} = \frac{200 \cdot 6}{2} = 600 \text{ [kN]} . \end{aligned} \tag{4.68}$$

b) *Návrhové hodnoty:*

Kombinaci obou složek zatížení (stálého g a proměnného q), působících na tuhou desku, lze pro návrhové hodnoty určit podobně jako v (4.67) vynásobením příslušným dílčím součinitelem spolehlivosti pro zatížení podle (3.3):

$$p_d = g_d + q_d = g_k \cdot \gamma_G + q_k \cdot \gamma_Q = 60 \cdot 1,35 + 140 \cdot 1,5 = 291 \text{ [kN/m]} . \quad (4.69)$$

Návrhová hodnota normálové síly v táhle N_{Ed} se vypočte s pomocí již odvozené momentové podmínky rovnováhy (4.68), do které se dosadí hodnota spojitého zatížení p_d ze vztahu (4.69):

$$R_{cx,d} = N_{Ed} = \frac{p_d \cdot L}{2} = \frac{291 \cdot 6}{2} = 873 \text{ [kN]} . \quad (4.70)$$

2. **Návrh průřezu nosného prvku:**

a) *Návrh podle mezních stavů únosnosti:*

Návrh průřezu táhla podle mezních stavů únosnosti se provede odvozením minimální hodnoty průřezové plochy $A_{1,\min}$ taženého nosného prvku s využitím vztahu (4.46):

$$\begin{aligned} A_{1,\min} = \frac{N_{Ed}}{\frac{f_k}{\gamma_M}} = \frac{873 \text{ [kN]}}{\frac{275 \text{ [MPa]}}{1,0}} = \frac{873 \cdot 10^3}{275 \cdot 10^6} \text{ [m}^2\text{]} = \\ = 3,174545 \cdot 10^3 \text{ [m}^2\text{]} \cong 3174,55 \text{ [mm}^2\text{]} . \end{aligned} \quad (4.71)$$

Vzhledem ke skutečnosti, že v průřez táhla bude tvořen dvojicí válcovaných ocelových profilů UPN, pro stanovení potřebné průřezové plochy jednoho profilu UPN se musí minimální hodnota průřezové plochy $A_{1,\min}$ z výrazu 4.71 vydělit dvěma:

$$A_{1,\min}(1 \times \text{UPN}) = \frac{A_{1,\min}}{2} = \frac{3174,55 \text{ [mm}^2\text{]}}{2} \cong 1587,27 \text{ [mm}^2\text{]} . \quad (4.72)$$

Při pohledu do tabulky 11.5 se tato hodnota nachází mezi hodnotami průřezových ploch profilů UPN100 ($A = 1350$ mm^2) a UPN120 ($A = 1700$ mm^2). Aby bylo splněno kritérium spolehlivosti podle mezních stavů únosnosti, musí být průřezová plocha navrženého profilu větší nežli hodnota minimální průřezové plochy $A_{1,\min}(1 \times \text{UPN})$ ve vztahu 4.72. Z dvojice válcovaných profilů, odečtených z tabulky 11.5, je proto nutné zvolit vždy ten větší – v daném případě UPN120 s průřezovou plochou $A = 1700$ mm^2).
Výsledný návrh průřezu táhla podle mezních stavů únosnosti je pak dán dvojicí válcovaných ocelových profilů 2xUPN120 s plochou průřezu:

$$A_1(2 \times \text{UPN120}) = 2 \cdot 1700 \text{ [mm}^2\text{]} = 3400 \text{ [mm}^2\text{]} = 3,40 \cdot 10^{-3} \text{ [m}^2\text{]} . \quad (4.73)$$

b) *Návrh podle mezních stavů použitelnosti:*

P5i návrhu průřezu táhla z dvojice válcovaných profilů UPN podle mezních stavů použitelnosti se postupuje značně analogickým způsobem jako v případě mezního stavu únosnosti. Minimální hodnota průřezové plochy $A_{2,\min}$ taženého nosného prvku se určí s pomocí výrazu (4.48):

$$\begin{aligned} A_{2,\min} &= \frac{N_{Ek} \cdot l}{E \cdot \delta_{\max}} = \frac{600\ [\mathrm{kN}] \cdot 4\ [\mathrm{m}]}{210000\ [\mathrm{MPa}] \cdot 5\ [\mathrm{mm}]} = \\ &= \frac{600 \cdot 10^3 \cdot 4}{210000 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}\ [\mathrm{m}^2] = \\ &= 2,285714 \cdot 10^{-3}\ [\mathrm{m}^2] \cong 2285,71\ [\mathrm{mm}^2]\ . \end{aligned} \tag{4.74}$$

Potřebná průřezová plocha jednoho profilu UPN se pak rovná:

$$A_{2,\min}(1 \times \mathrm{UPN}) = \frac{A_{2,\min}}{2} = \frac{2285,71\ [\mathrm{mm}^2]}{2} \cong 1142,86\ [\mathrm{mm}^2]\ , \tag{4.75}$$

což vede k návrhu válcovaného profilu UPN100 s průřezovou plochou $A = 1350\ \mathrm{mm}^2$.

Výsledný návrh průřezu táhla podle mezních stavů použitelnosti je tedy dán dvěma válcovanými ocelovými profily 2xUPN100 s plochou průřezu:

$$A_2(2 \times \mathrm{UPN100}) = 2 \cdot 1350\ [\mathrm{mm}^2] = 2700\ [\mathrm{mm}^2] = 2,70 \cdot 10^{-3}\ [\mathrm{m}^2]\ . \tag{4.76}$$

c) *Výsledný návrh:*

Porovnáním navržených válcovaných profilů průřezu táhla se lze přesvědčit, že pro výsledný návrh jsou stejně jako v příkladě 4.14 rozhodující mezní stavy únosnosti.

Výsledný návrh průřezu táhla podle mezních stavů únosnosti i použitelnosti pak odpovídá většímu z navržených profilů, tedy dvojici válcovaných profilů UPN120 s průřezovou plochou $A = 3400\ [\mathrm{mm}^2]$.

Byl navržen průřez tvořený dvojicí válcovaných profilů UPN120.

3. **Posouzení spolehlivosti navrženého průřezu nosného prvku:**

a) *Posouzení spolehlivosti podle mezních stavů únosnosti:*

V rámci posudku spolehlivosti navrženého průřezu ocelového táhla zavěšeného stropního podhledu s průřezovou plochou $A = 3400\ [\mathrm{mm}^2]$ se určí nejprve únosnost v osovém namáhání N_{Rd}, vycházející ze vztahu (4.45):

$$\begin{aligned} N_{Rd} &= f_{yd} \cdot A = 275\ [\mathrm{MPa}] \cdot 3400\ [\mathrm{mm}^2] = \\ &= 275 \cdot 10^6 \cdot 3400 \cdot 10^{-6}\ [\mathrm{N}] = 935\ [\mathrm{kN}]\ . \end{aligned} \tag{4.77}$$

Posudek spolehlivosti podle mezních stavů únosnosti pak lze provést s využitím vztahů (4.41):

$$\frac{N_{Ed}}{N_{Rd}} = \frac{873\ [\mathrm{kN}]}{935\ [\mathrm{kN}]} \cong 0,9337 \leqq 1,0 \tag{4.78}$$

nebo (4.42):

$$N_{Ed} = 873 \text{ [kN]} \leqq N_{Rd} = 935 \text{ [kN]} . \tag{4.79}$$

Nerovnice v obou podmínkách spolehlivosti (4.78) i (4.79) jsou splněny.

Navržený průřez vyhovuje na tah z hlediska mezních stavů únosnosti.

b) *Posouzení spolehlivosti podle mezních stavů použitelnosti:*

U posudku spolehlivosti řešeného táhla podle mezních stavů použitelnosti se nejprve stanoví přetvoření navrženého nosného prvku Δl pomocí vzorce (4.11):

$$\begin{aligned} \Delta l &= \frac{N_{Ek} \cdot l}{E \cdot A} = \frac{600 \text{ [kN]} \cdot 4 \text{ [m]}}{210000 \text{ [MPa]} \cdot 3400 \text{ [mm}^2\text{]}} = \\ &= \frac{600 \cdot 10^3 \cdot 4}{210000 \cdot 10^6 \cdot 3400 \cdot 10^{-6}} \text{ [m]} = 3,3613 \cdot 10^{-3} \text{ [m]} \cong 3,36 \text{ [mm]} . \end{aligned} \tag{4.80}$$

Posudek spolehlivosti podle mezních stavů použitelnosti se pak provede pomocí kritéria spolehlivosti (4.47):

$$\Delta l \cong 3,36 \text{ [mm]} \leqq \delta_{\max} = 5 \text{ [mm]} . \tag{4.81}$$

Podmínka spolehlivosti (4.81) je splněna.

Navržený průřez vyhovuje na tah z hlediska mezních stavů použitelnosti.

▲

4.4 Staticky neurčité případy osového namáhání

V tomto učebním textu byly doposud předmětem řešení pouze staticky určité úlohy, u nichž k získání neznámých veličin výpočtu stačilo sestavit odpovídající počet podmínek rovnováhy. U staticky neurčitých úloh je však již počet neznámých u každé z úloh větší než je počet podmínek rovnováhy. Z tohoto důvodu je třeba podmínky rovnováhy doplnit odpovídajícím počtem tzv. **deformačních** (přetvárných) **podmínek**, jejichž počet je roven stupni statické neurčitosti.

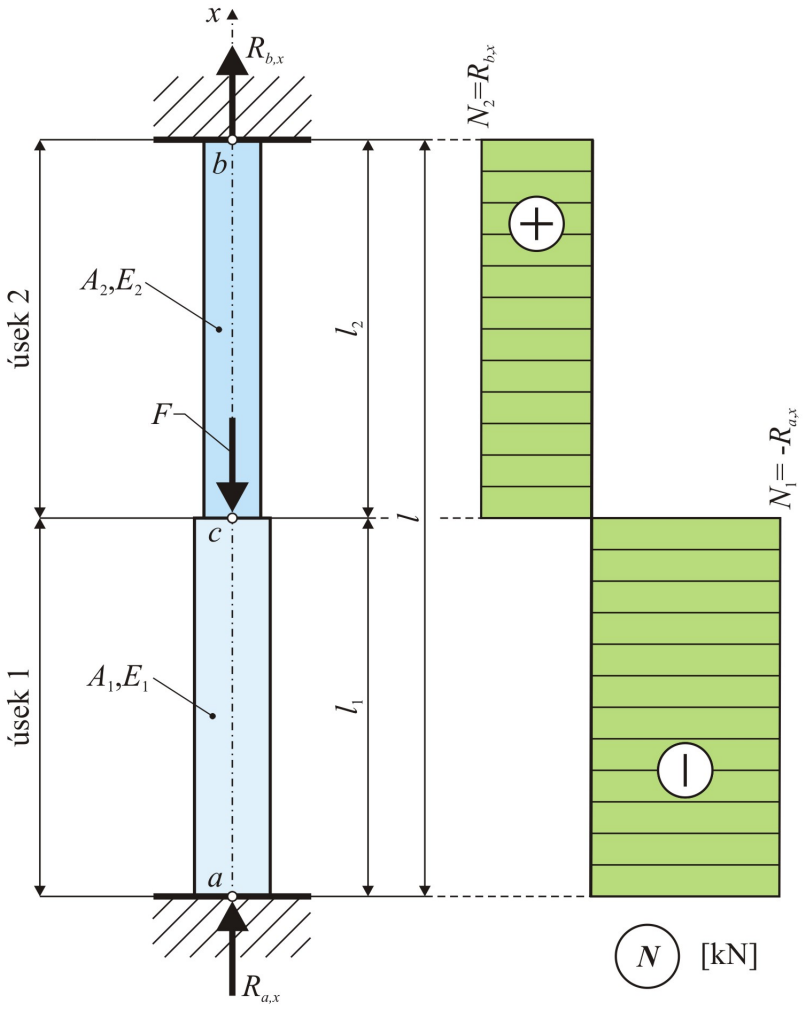
Vzájemná souvislost statických veličin, které jsou obsaženy v podmínkách rovnováhy, a přetvárných veličin z deformačních podmínek je definována fyzikálními rovnicemi, které byly obsahem kapitoly 2.2. Prostřednictvím fyzikálních rovnic vstupují do výpočtu mechanicko-fyzikální vlastnosti použitého materiálu (modul pružnosti v tahu a tlaku E) a geometrické charakteristiky průřezu řešeného prutového prvku (průřezová plocha A), které u staticky neurčitých úloh, narozdíl od úloh staticky určitých, ovlivňují rozdělení vnitřních sil v řešené konstrukci.

4.4.1 Oboustranně vetknutý osově namáhaný prut

U osově namáhaných konstrukcí, tvořených jediným prutovým prvkem, je k dispozici vždy jedna podmínka rovnováhy - silová $\sum F_i = R = 0$ ve směru osy daného prutu. Při podepření (kloubově, vetknutím) ve dvou bodech (viz např. schéma na obrázku 4.9) již jde o staticky neurčitý případ, kdy stupeň statické neurčitosti je roven 1. Deformační podmínka pak vychází ze vztahu:

$$\Delta l = 0 \,, \tag{4.82}$$

neboť při daném podepření musí být celková podélná deformace nulová.



Obr. 4.9 Statické schéma staticky neurčité osově namáhané konstrukce, tvořené oboustranně vetknutým osově namáhaným prutem s odstupňovaným průřezem

V případě oboustranně vetknutého osově namáhaného prutu, jehož schéma je uvedeno na obrázku 4.9, je k dispozici silová podmínka rovnováhy v daném souřadnicovém systému:

$$\sum F_{i,x} = R_x = 0 : \quad R_{a,x} - F + R_{b,x} = 0 \, . \tag{4.83}$$

a podmínka deformační, daná výrazem (4.84). Při uvážení rozdílných hodnot normálové síly N, průřezové plochy A i modulu pružnosti v tahu a tlaku E v obou úsecích prutové konstrukce s odstupňovaným průřezem a s předpokladem pružného chování obou materiálů (platí Hookeův zákon, vyjádřený vztahem (4.11)) bude nabývat deformační podmínka tvaru:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E_1 \cdot A_1} + \frac{N_2 \cdot l_2}{E_2 \cdot A_2} = 0 \, . \tag{4.84}$$

Normálové síly v obou úsecích jsou rovny:

$$N_1 = -R_{a,x} \, , \quad N_2 = R_{b,x} \, , \tag{4.85}$$

což je zohledněno i v průběhu normálové síly N na obrázku 4.9. Výsledná soustava dvou rovnic o neznámých staticky neurčitých reakcích $R_{a,x}$ a $R_{b,x}$ je pak dána podmínkou rovnováhy (4.89) a deformační rovnicí, jež se získá dosazením obou hodnot normálové sily N_1 a N_2 (4.85) do vztahu (4.84).

Řešením jsou pak analytické vztahy pro výpočet obou reakcí $R_{a,x}$ a $R_{b,x}$:

$$R_{a,x} = F \cdot \frac{l_1 \cdot E_2 \cdot A_2}{l_1 \cdot E_2 \cdot A_2 + l_2 \cdot E_1 \cdot A_1} \tag{4.86}$$

a

$$R_{b,x} = F \cdot \frac{l_2 \cdot E_1 \cdot A_1}{l_1 \cdot E_2 \cdot A_2 + l_2 \cdot E_1 \cdot A_1} \, , \tag{4.87}$$

u nichž lze pozorovat předpokládané rozložení zatěžovací bodové síly F do obou reakcí $R_{a,x}$ a $R_{b,x}$ v poměru:

$$\frac{R_{a,x}}{R_{b,x}} = \frac{F \cdot \dfrac{l_1 \cdot E_2 \cdot A_2}{l_1 \cdot E_2 \cdot A_2 + l_2 \cdot E_1 \cdot A_1}}{F \cdot \dfrac{l_2 \cdot E_1 \cdot A_1}{l_1 \cdot E_2 \cdot A_2 + l_2 \cdot E_1 \cdot A_1}} = \frac{l_1 \cdot E_2 \cdot A_2}{l_2 \cdot E_1 \cdot A_1} = \frac{k_2}{k_1} \, , \tag{4.88}$$

kde k_1 a k_2 jsou tuhosti v tahu a tlaku obou úseků řešené prutové konstrukce podle (4.13).

Příklad 4.16. Oboustranně vetknutý osově namáhaný ocelový sloup je zatížen podle statického schématu na obrázku 4.10. Určete velikosti reakcí $R_{a,x}$ a $R_{b,x}$, sestrojte průběh normálové síly N a vypočtěte velikosti normálových napětí v úsecích 1 až 4. Z cvičných důvodů stanovte také posunutí bodů a, b, c, d a e účinkem zatížení. Konkrétní vstupní údaje jsou uvedeny v tabulce 4.7.

Celková výška sloupu l :	3,6 m
Délka 1.úseku l_1 :	1,2 m
Délka 2.úseku l_2 :	0,6 m
Délka 3.úseku l_3 :	1,0 m
Délka 4.úseku l_4 :	0,8 m
Zatěžovací bodová síla F_1 :	240 kN
Zatěžovací bodová síla F_2 :	80 kN
Průměr kruhového průřezu v 1. a 2. úseku d_1 :	36 mm
Průměr kruhového průřezu ve 3. a 4. úseku d_2 :	28 mm
Průřezová plocha v 1. a 2. úseku A_1 :	$\frac{\pi \cdot 0{,}036^2}{4} \cong 1{,}0179 \cdot 10^{-3}$ m^2
Průřezová plocha ve 3. a 4. úseku A_2 :	$\frac{\pi \cdot 0{,}028^2}{4} \cong 6{,}1575 \cdot 10^{-4}$ m^2
Modul pružnosti v tahu a tlaku E :	210000 MPa

Tab. 4.7 Vstupní údaje příkladu 4.16

Řešení.

1. **Sestavení podmínky rovnováhy:**

   Silová podmínka rovnováhy $\sum F_{i,x} = R_x = 0$ podle obrázku 4.10 nabývá tvaru:

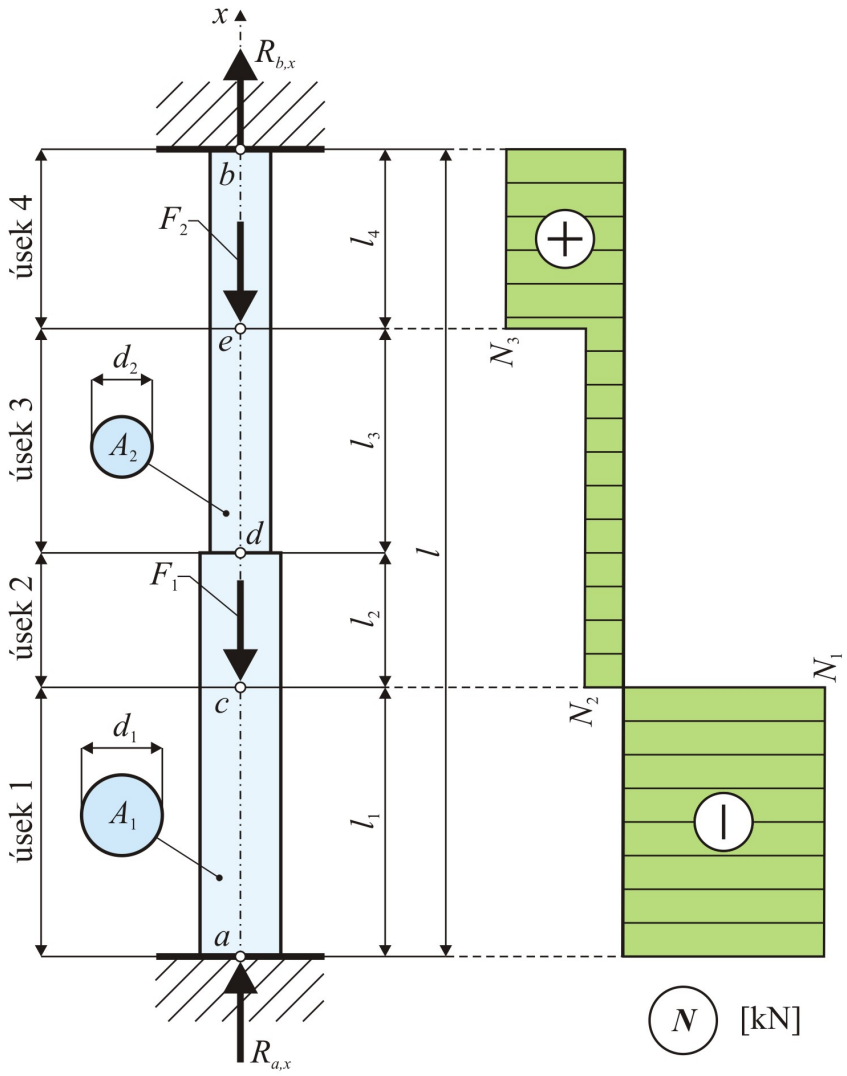
   $$R_{a,x} - F_1 - F_2 + R_{b,x} = 0 \,. \tag{4.89}$$

   V rovnici (4.89) figurují dvě neznámé veličiny – reakce $R_{a,x}$ a $R_{b,x}$. I přesto lze normálové síly v úsecích 1 až 4 vyjádřit obecně jako výslednici vnitřních sil v libovolném řezu daného úseku (z obou stran):

   $$\begin{aligned} N_1 &= -R_{a,x} = -F_1 - F_2 + R_{b,x} \,, \\ N_2 = N_3 &= -R_{a,x} + F_1 = -F_2 + R_{b,x} \,, \\ N_4 &= -R_{a,x} + F_1 + F_2 = R_{b,x} \,. \end{aligned} \tag{4.90}$$

2. **Sestavení deformační podmínky:**

   Vzhledem ke dvěma neznámým veličinám $R_{a,x}$ a $R_{b,x}$ je třeba podmínku rovnováhy doplnit jednou podmínkou deformační. V případě oboustranně vetknutého osově namáhaného prutu vychází deformační podmínka obecně ze vztahu (4.84), který lze s přihlédnutím k rozdílným průřezovým plochám A_1 (úsek 1 a 2) a A_2 (úsek



Obr. 4.10 Statické schéma a průřezy řešené staticky neurčité osově namáhané konstrukce z příkladu 4.16 a průběh normálové síly N

3 a 4) i k různým velikostem normálových sil N_1 (úsek 1), $N_2 = N_3$ (úsek 2 a 3) a N_4 (úsek 4) dále rozepsat:

$$\begin{aligned}\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \Delta l_4 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A_1} + \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot A_1} + \frac{N_2 \cdot l_3}{E \cdot A_2} + \frac{N_4 \cdot l_4}{E \cdot A_2} = \\ = \frac{1}{E} \cdot \left(\frac{N_1 \cdot l_1 + N_2 \cdot l_2}{A_1} + \frac{N_2 \cdot l_3 + N_4 \cdot l_4}{A_2} \right) = 0 \,.\end{aligned} \tag{4.91}$$

3. **Řešení soustavy rovnic:**

Soustavu dvou rovnic – statickou (4.89) a deformační (4.91), o dvou neznámých $R_{a,x}$ a $R_{b,x}$ lze nejlépe vyřešit dosazením vztahů pro normálové síly N_1, $N_2 = N_3$ a N_4 (4.96) do deformační podmínky (4.91), např.:

$$\begin{aligned}\Delta l &= \frac{-R_{a,x}\cdot l_1}{E\cdot A_1} + \frac{(-R_{a,x}+F_1)\cdot l_2}{E\cdot A_1} + \frac{(-R_{a,x}+F_1)\cdot l_3}{E\cdot A_2} + \\ &\quad + \frac{(-R_{a,x}+F_1+F_2)\cdot l_4}{E\cdot A_2} = \\ &= -R_{a,x}\cdot\left(\frac{l_1}{E\cdot A_1}+\frac{l_2}{E\cdot A_1}+\frac{l_3}{E\cdot A_2}+\frac{l_4}{E\cdot A_2}\right)+ \\ &\quad + F_1\cdot\left(\frac{l_2}{E\cdot A_1}+\frac{l_3}{E\cdot A_2}+\frac{l_4}{E\cdot A_2}\right)+F_2\cdot\left(\frac{l_4}{E\cdot A_2}\right)=0\,.\end{aligned} \tag{4.92}$$

V rovnici (4.92) figuruje pouze jedna neznámá – staticky neurčitá reakce $R_{a,x}$. Jejím osamostatněním pak lze získat výsledný analytický vztah, který má tvar:

$$\begin{aligned}R_{a,x} &= \frac{F_1\cdot\left(\frac{l_2}{E\cdot A_1}+\frac{l_3+l_4}{E\cdot A_2}\right)+F_2\cdot\frac{l_4}{E\cdot A_2}}{\frac{l_1+l_2}{E\cdot A_1}+\frac{l_3+l_4}{E\cdot A_2}} = \\ &= \frac{F_1\cdot\frac{A_2\cdot l_2+A_1\cdot(l_3+l_4)}{A_1\cdot A_2}+F_2\cdot\frac{l_4}{A_2}}{\frac{A_2\cdot(l_1+l_2)+A_1\cdot(l_3+l_4)}{A_1\cdot A_2}}\,.\end{aligned} \tag{4.93}$$

Dosazením konkrétních vstupních hodnot do vztahu (4.93) se získá i výsledná hodnota hledané staticky neurčité reakce $R_{a,x}$:

$$\begin{aligned}R_{a,x} &= \left[240\cdot\frac{0,61575\cdot 0,6+1,0179\cdot(1+0,8)}{1,0179\cdot 0,61575}+80\cdot\frac{0,8}{0,61575}\right]\cdot 10^3\cdot \\ &\quad\cdot\frac{1,0179\cdot 0,61575}{0,61575\cdot(1,2+0,6)+1,0179\cdot(1+0,8)}\ [\mathrm{N}] = \\ &= 201846,2\ [\mathrm{N}] \cong 201,85\ [\mathrm{kN}]\,.\end{aligned} \tag{4.94}$$

Druhá neznámá staticky neurčitá reakce $R_{b,x}$ se pak může dopočítat dosazením vztahu (4.93) do podmínky rovnováhy (4.89):

$$\begin{aligned}R_{a,x}-F_1-F_2+R_{b,x}=0 \rightarrow R_{b,x} &= F_1+F_2-R_{a,x} = \\ &= 240+80-201,85 = 118,15\ [\mathrm{kN}]\,.\end{aligned} \tag{4.95}$$

4. **Výsledné normálové síly a napětí:**
Obdobně jako v případě výpočtu reakce $R_{b,x}$ lze dosazením (4.93) do vztahů (4.96) získat hodnoty normálových sil N_1, $N_2 = N_3$ a N_4:

$$\begin{aligned} N_1 &= -R_{a,x} = -F_1 - F_2 + R_{b,x} = -240 - 80 + 118,15 = -201,85 \text{ [kN]} , \\ N_2 &= N_3 = -R_{a,x} + F_1 = -201,85 + 240 = -F_2 + R_{b,x} = \\ &= -80 + 118,15 = 38,15 \text{ [kN]} , \\ N_4 &= -R_{a,x} + F_1 + F_2 = -201,85 + 240 + 80 = R_{b,x} = 118,15 \text{ [kN]} , \end{aligned} \tag{4.96}$$

jejichž průběh je uveden v obrázku 4.10.
S využitím vzorce (4.6) pak lze určit také normálová napětí v jednotlivých úsecích:

$$\begin{aligned} \sigma_{x,1} &= \frac{N_1}{A_1} = \frac{-201,85.10^3}{1,0179 \cdot 10^{-3}} = -1,983013 \cdot 10^8 \text{ [Pa]} \cong \\ &\cong -198,30 \text{ [MPa] tlak} , \\ \sigma_{x,2} &= \frac{N_2}{A_1} = \frac{38,15.10^3}{1,0179 \cdot 10^{-3}} = 3,748379 \cdot 10^7 \text{ [Pa]} \cong 37,48 \text{ [MPa] tah} , \\ \sigma_{x,3} &= \frac{N_2}{A_2} = \frac{38,15.10^3}{6,1575 \cdot 10^{-4}} = 6,196299 \cdot 10^7 \text{ [Pa]} \cong 61,96 \text{ [MPa] tah} , \\ \sigma_{x,4} &= \frac{N_4}{A_2} = \frac{118,15.10^3}{6,1575 \cdot 10^{-4}} = 1,918854 \cdot 10^8 \text{ [Pa]} \cong 191,89 \text{ [MPa] tah} . \end{aligned} \tag{4.97}$$

5. **Výsledná posunutí bodů konstrukce:**
Posunutí v bodě a o souřadnici $x = 0$ je dáno okrajovou deformační podmínkou:

$$u_a(x = 0) = 0 . \tag{4.98}$$

Při výpočetním postupu ve směru kladné poloosy x následuje bod c o souřadnici $x = 1,2$, jehož posunutí účinkem zatížení se rovná:

$$\begin{aligned} u_c(x = 1,2) = \Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A_1} = \frac{-201,85 \cdot 10^3 \cdot 1,2}{210000 \cdot 10^6 \cdot 1,0179 \cdot 10^{-3}} \text{ [m]} = \\ = -1,1332 \cdot 10^{-3} \text{ [m]} \cong -1,13 \text{ [mm]} . \end{aligned} \tag{4.99}$$

Dalšími body jsou bod d o souřadnici $x = 1,8$ s posunutím účinkem zatížení:

$$\begin{aligned} u_d(x = 1,8) = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A_1} + \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot A_1} = \\ = \frac{-201,85 \cdot 10^3 \cdot 1,2 + 38,15 \cdot 10^3 \cdot 0,6}{210000 \cdot 10^6 \cdot 1,0179 \cdot 10^{-3}} \text{ [m]} = \\ = -1,1332 \cdot 10^{-3} + 1,0710 \cdot 10^{-4} \text{ [m]} = \\ = -1,0261 \cdot 10^{-3} \text{ [m]} \cong -1,03 \text{ [mm]} \end{aligned} \tag{4.100}$$

a bod e s souřadnicí $x = 2,8$ a posunutím:

$$\begin{aligned} u_{\mathrm{e}}(x=2,8) &= \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A_1} + \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot A_1} + \frac{N_2 \cdot l_3}{E \cdot A_2} = \\ &= \frac{-201,85 \cdot 10^3 \cdot 1,2 + 38,15 \cdot 10^3 \cdot 0,6}{210000 \cdot 10^6 \cdot 1,0179 \cdot 10^{-3}} + \\ &\quad + \frac{38,15 \cdot 10^3 \cdot 1}{210000 \cdot 10^6 \cdot 6,1575 \cdot 10^{-4}}\ [\mathrm{m}] = \\ &= -1,1332 \cdot 10^{-3} + 1,0710 \cdot 10^{-4} + 2,9506 \cdot 10^{-4}\ [\mathrm{m}] = \\ &= -7,3099 \cdot 10^{-4}\ [\mathrm{m}] \cong -0,73\ [\mathrm{mm}]\ . \end{aligned} \tag{4.101}$$

Posledním bodem pro určení posunutí vlivem účinku zatížení je bod b se souřadnicí $x = l = 3,6$, kde je řešená konstrukce vetknutá. Výsledné posunutí se určí následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} u_b(x=3,6) &= \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \Delta l_4 = \\ &= \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A_1} + \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot A_1} + \frac{N_2 \cdot l_3 + N_4 \cdot l_4}{E \cdot A_2} = \\ &= \frac{-201,85 \cdot 10^3 \cdot 1,2 + 38,15 \cdot 10^3 \cdot 0,6}{210000 \cdot 10^6 \cdot 1,0179 \cdot 10^{-3}} + \\ &\quad + \frac{38,15 \cdot 10^3 \cdot 1 + 118,15 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{210000 \cdot 10^6 \cdot 6,1575 \cdot 10^{-4}}\ [\mathrm{m}] = \\ &= -1,1332 \cdot 10^{-3} + 1,0710 \cdot 10^{-4} + 2,9506 \cdot 10^{-4} + \\ &\quad + 7,3099 \cdot 10^{-4}\ [\mathrm{m}] = 0\ . \end{aligned} \tag{4.102}$$

Výpočet podle vztahu (4.102) má kontrolní povahu, neboť k bodu b se vztahuje okrajová deformační podmínka:

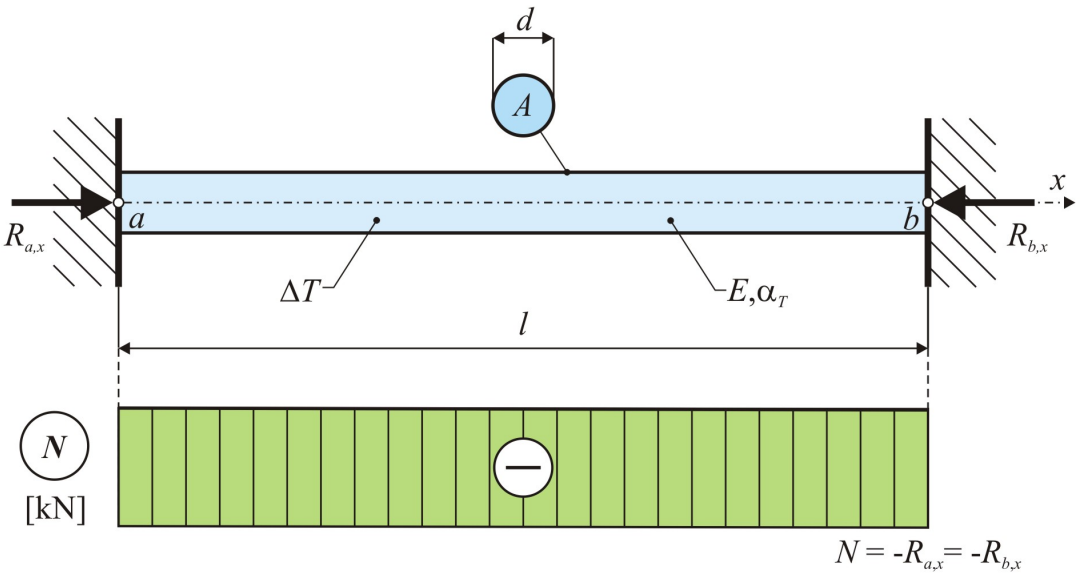
$$u_b(x = l = 3,6) = 0\ . \tag{4.103}$$

Výsledné nulové posunutí bodu b koresponduje rovněž s deformační podmínkou (4.91), na níž je založen celý výpočetní postup.

▲

Poznámka 4.17. Při odvozování analytického vztahu pro výpočet staticky neurčité reakce $R_{a.x}$ v příkladu 4.16 došlo při úpravách vztahu (4.93) k eliminaci modulu pružnosti v tahu a tlaku E. Statické veličiny řešeného nosného systému jsou na této materiálové charakteristice nezávislé díky skutečnosti, že celá konstrukce je vyrobena z jednoho materiálu - oceli.

Příklad 4.18. Stanovte normálovou sílu N a normálové napětí σ_x v litinovém oboustranně vetknutém prutovém prvku od rovnoměrného oteplení. Konstrukce je schématicky uvedena na obrázku 4.11. Konkrétní vstupní údaje jsou obsaženy v tabulce 4.8.



Obr. 4.11 Statické schéma staticky neurčité osově namáhané konstrukce z příkladu 4.18 a průběh normálové síly N

Celková délka prutového prvku l :	3 m
Velikost oteplení ΔT :	50 °C
Průměr kruhového průřezu d :	60 mm
Průřezová plocha A :	$\frac{\pi \cdot 0{,}06^2}{4} \cong 2{,}8274 \cdot 10^{-3}$ m^2
Modul pružnosti v tahu a tlaku E :	120000 MPa
Součinitel teplotní délkové roztažnosti α_T :	$10 \cdot 10^{-6}$ °C^{-1}

Tab. 4.8 Vstupní údaje příkladu 4.18

Řešení.

1. **Sestavení podmínky rovnováhy:**

   Silová podmínka rovnováhy $\sum F_{i,x} = R_x = 0$ podle obrázku 4.11 obsahuje pouze obě neznámé staticky neurčité reakce:

$$R_{a,x} - R_{b,x} = 0 \rightarrow R_{a,x} = R_{b,x} \ . \tag{4.104}$$

   Normálová síla N je pak rovna v libovolném řezu daného prutového prvku:

$$N = -R_{a,x} = -R_{b,x} \ . \tag{4.105}$$

2. **Sestavení deformační podmínky:**

   Vzhledem ke dvěma neznámým veličinám $R_{a,x}$ a $R_{b,x}$ je třeba podmínku rovnováhy doplnit jednou podmínkou deformační. V případě oboustranně vetknutého prutového prvku, který je namáhán rovnoměrným oteplením, vychází deformační podmínka ze vztahu (4.84), který se rozepíše s využitím vztahu pro výpočet deformace vlivem změny teploty (2.38):

   $$\varepsilon_{x,T} = \frac{\Delta l}{l} = \alpha_T \cdot \Delta T \rightarrow \Delta l = \alpha_T \cdot \Delta T \cdot l \tag{4.106}$$

   a rovnice pro alternativní vyjádření Hookeova zákona pro prostý tah a tlak (4.11). Výsledkem je pak deformační podmínka:

   $$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A} + \alpha_T \cdot \Delta T \cdot l = 0\ . \tag{4.107}$$

   Deformační podmínka (4.107) vyjadřuje skutečnost, že protažení vlivem rovnoměrného oteplení je eliminováno stejně velkým zkrácením díky vzniklé tlakové normálové síle, takže výsledná změna délky prutu je nulová, což odpovídá oboustranně nepoddajnému uložení řešeného prutového prvku.

3. **Výsledné normálové síly a napětí:**

   Z deformační podmínky je možno získat vztah pro výpočet neznámé hodnoty normálové síly:

   $$\begin{aligned} N &= -\frac{\alpha_T \cdot \Delta T \cdot l \cdot E \cdot A}{l} = -\alpha_T \cdot \Delta T \cdot E \cdot A = \\ &= -10 \cdot 10^{-6}\ [°\mathrm{C}^{-1}] \cdot 50\ [°\mathrm{C}] \cdot 120000 \cdot 10^6\ [\mathrm{Pa}] \cdot 2,8274 \cdot 10^{-3}\ [\mathrm{m}^2] = \\ &= -1,696460 \cdot 10^5\ [\mathrm{N}] \cong -169,65\ [\mathrm{kN}]\ (\text{tlak})\ . \end{aligned} \tag{4.108}$$

   Normálové napětí se pak určí s využitím vztahu (4.6):

   $$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{N}{A} = \frac{-\alpha_T \cdot \Delta T \cdot E \cdot A}{A} = -\alpha_T \cdot \Delta T \cdot E \\ &= -10 \cdot 10^{-6}\ [°\mathrm{C}^{-1}] \cdot 50\ [°\mathrm{C}] \cdot 120000 \cdot 10^6\ [\mathrm{Pa}] = \\ &= -6,0 \cdot 10^7\ [\mathrm{Pa}] = -60\ [\mathrm{MPa}]\ (\text{tlak})\ . \end{aligned} \tag{4.109}$$

   Výsledná normálová síla v litinovém prutovém prvku, namáhaném rovnoměrným oteplením, je tlaková a její hodnota je 169,65 kN. Normálové tlakové napětí má pak hodnotu 60 MPa.

▲

Poznámka 4.19. V příkladu 4.18 došlo při úpravách vztahu (4.108) pro výpočet normálové síly N k eliminaci délky prutu l. Na velikost normálové síly, a tedy ani normálového napětí σ_x, nemá délka prutu l vliv.

Poznámka 4.20. Při odvozování analytického vztahu pro výpočet normálového napětí σ_x v příkladu 4.18 došlo při úpravách vztahu (4.109) k eliminaci průřezové plochy A. Normálové napětí σ_x je při rovnoměrném oteplení v oboustranně vetknutém prutu nezávislé na průřezové ploše A.

4.4.2 Osově namáhaný nehomogenní nosný prvek

U osově namáhaného nehomogenního nosného prvku se předpokládá, že v jeho průřezu se vyskytuje více vzájemně dokonale spojených částí (obecně n, obvykle $n = 2$) s různými mechanicko-fyzikálními vlastnostmi. Normálová síla N se pak do těchto obecně n částí rozdělí:

$$N = N_1 + N_2 + \cdots + N_i + \cdots + N_n \ . \tag{4.110}$$

Rovnice (4.110) představuje statickou podmínku rovnováhy řešené úlohy. Poměr, ve kterém jednotlivé části průřezu převezmou odpovídající díl normálové síly N, se určí z výpočetního předpokladu, že jednotlivé materiály se v průřezu budou deformovat stejně:

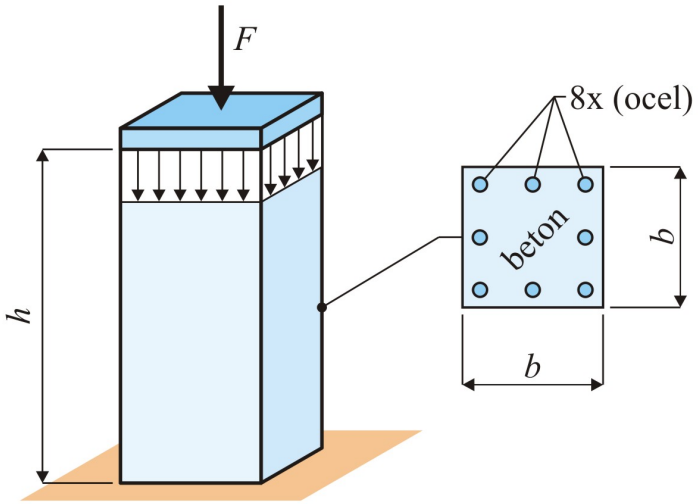
$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = \cdots = \Delta l_i = \cdots = \Delta l_n \ . \tag{4.111}$$

Vztah (4.111) představuje obecně $n-1$ deformačních podmínek, které jsou k zapotřebí při řešení tohoto obecně $n-1$ krát staticky neurčitého osově namáhaného nosného prvku.

Příklad 4.21. Vypočtěte normálovou sílu N a normálové napětí σ_x v ocelové a betonové části železobetonového sloupu, jehož statické schéma je uvedeno na obrázku 4.12. Konkrétní vstupní údaje jsou obsaženy v tabulce 4.9.

Šířka čtvercového průřezu sloupu b :	0,24 m
Velikost bodové zatěžovací síly F :	1800 kN
Počet prutů betonářské výztuže :	8 ks
Průměr betonářské výztuže d :	18 mm
Průřezová plocha 1 ks výztuže $A_{S,1}$:	$\frac{\pi \cdot 0{,}018^2}{4} \cong 2{,}5447 \cdot 10^{-4}$ m^2
Modul pružnosti v tahu a tlaku výztuže E_S :	200000 MPa
Pevnostní třída betonu:	C30/37
Sečnový modul pružnosti betonu $E_{cm} = E_C$:	33000 MPa

Tab. 4.9 Vstupní údaje příkladu 4.21



Obr. 4.12 Statické schéma staticky neurčitého osově namáhaného nehomogenního železobetonového sloupu z příkladu 4.21

Řešení.

1. **Statická podmínka rovnováhy:**

   Silová podmínka rovnováhy řešeného železobetonového sloupu nabývá tvaru:

$$N = N_C + N_S = -F \,, \tag{4.112}$$

   kde N_C je díl normálové síly, který přenáší betonová část průřezu sloupu (index C – *concrete*), a N_S zbývající část normálové síly, přenášená ocelovou betonářskou výztuží (index S – *steel*).

2. **Deformační podmínka:**

   Je-li soudržnost betonu a ocelové betonářské výztuže dokonalá, budou se obě části průřezu podle vztahu (4.111) deformovat stejně:

$$\Delta l_C = \Delta l_S \,. \tag{4.113}$$

   Pokud se bude uvažovat pružné chování obou materiálů, vztah (4.113) definující obecnou deformační podmínku lze s využitím výrazu (4.11) rozepsat:

$$\Delta l_C = \Delta l_S \rightarrow \frac{N_C \cdot h}{E_C \cdot A_C} = \frac{N_S \cdot h}{E_S \cdot A_S} \,. \tag{4.114}$$

3. **Výsledné normálové síly a napětí:**
Soustavu dvou rovnic (4.112) a (4.114) lze vyřešit analyticky a získat tím vztahy pro výpočet neznámé normálové síly N_C:

$$\begin{aligned} N_S = -F - N_C \;\rightarrow\; \frac{N_C \cdot h}{E_C \cdot A_C} = \frac{(-F - N_C) \cdot h}{E_S \cdot A_S} \;\rightarrow \\ \rightarrow\; N_C \cdot \left(\frac{h}{E_C \cdot A_C} + \frac{h}{E_S \cdot A_S} \right) = -\frac{F \cdot h}{E_S \cdot A_S} \;\rightarrow \\ \rightarrow\; N_C = -F \cdot \frac{E_C \cdot A_C}{E_S \cdot A_S + E_C \cdot A_C} \,, \end{aligned} \tag{4.115}$$

a obdobně i pro neznámou normálovou sílu N_S:

$$\begin{aligned} N_C = -F - N_S \;\rightarrow\; \frac{(-F - N_S) \cdot h}{E_C \cdot A_C} = \frac{N_S \cdot h}{E_S \cdot A_S} \;\rightarrow \\ \rightarrow\; N_S = -F \cdot \frac{E_S \cdot A_S}{E_S \cdot A_S + E_C \cdot A_C} \,. \end{aligned} \tag{4.116}$$

Zlomky, jimiž se násobí záporná hodnota bodové zatěžovací síly F ve výrazech (4.115) a (4.116), odpovídají poměru, ve kterém se zatížení bude roznášet do betonové, resp. ocelové části průřezu železobetonového sloupu. Součet obou zlomků je pak roven jedné, což odpovídá statické podmínce rovnováhy (4.112).
Při výpočtu s konkrétními hodnotami vstupních údajů je nejprve potřeba stanovit průřezovou plochu ocelové části A_S železobetonového sloupu:

$$A_S = 8 \cdot A_{S,1} = 8 \cdot 2,5447 \cdot 10^{-4}\ [\mathrm{m}^2] \cong 2,0358 \cdot 10^{-3}\ [\mathrm{m}^2] \tag{4.117}$$

a zbývající průřezovou plochu čtvercového průřezu železobetonového sloupu, která odpovídá betonové části průřezu A_C:

$$A_C = b^2 - A_S = 0,24^2 - 2,0358 \cdot 10^{-3}\ [\mathrm{m}^2] \cong 5,5564 \cdot 10^{-2}\ [\mathrm{m}^2] \,. \tag{4.118}$$

Výsledné hodnoty normálové síly N_C a N_S pro konkrétní vstupní údaje jsou pak následující:

$$\begin{aligned} N_C &= -F \cdot \frac{E_C \cdot A_C}{E_S \cdot A_S + E_C \cdot A_C} = \\ &= -1800 \cdot \frac{33000 \cdot 5,5564 \cdot 10^{-2}}{200000 \cdot 2,0358 \cdot 10^{-3} + 33000 \cdot 5,5564 \cdot 10^{-2}}\ [\mathrm{kN}] \cong \\ &\cong -1472,94\ [\mathrm{kN}]\ (\text{tlak}) \end{aligned} \tag{4.119}$$

a

$$\begin{aligned} N_S &= -F \cdot \frac{E_S \cdot A_S}{E_S \cdot A_S + E_C \cdot A_C} = \\ &= -1800 \cdot \frac{200000 \cdot 2,0358 \cdot 10^{-3}}{200000 \cdot 2,0358 \cdot 10^{-3} + 33000 \cdot 5,5564 \cdot 10^{-2}}\ [\mathrm{kN}] \cong \\ &\cong -327,06\ [\mathrm{kN}]\ (\text{tlak}) \,. \end{aligned} \tag{4.120}$$

Při výpočtu normálových napětí σ_x se obě vypočtené normálové síly N_C a N_S podělí příslušnou průřezovou plochou podle vztahu (4.6) :

$$\sigma_{x,C} = \frac{N_C}{A_C} = \frac{-1472,94 \cdot 10^3}{5,5564 \cdot 10^{-2}} \text{ [Pa]} = \\ = -2,6509 \cdot 10^7 \text{ [Pa]} \cong -26,51 \text{ [MPa] (tlak)} , \tag{4.121}$$

$$\sigma_{x,S} = \frac{N_S}{A_S} = \frac{-327,06 \cdot 10^3}{2,0358 \cdot 10^{-3}} \text{ [Pa]} = \\ = -1,606590 \cdot 10^8 \text{ [Pa]} \cong -160,66 \text{ [MPa] (tlak)} . \tag{4.122}$$

▲

Poznámka 4.22. Při odvozování vztahů (4.115) a (4.116) pro výpočet normálových sil N_C a N_S v betonové a ocelové části průřezu došlo k eliminaci výšky železobetonového sloupu h. Obě normálové síly N_C a N_S i příslušná normálová napětí $\sigma_{x,C}$ a $\sigma_{x,S}$ tedy na výšce sloupu h nezávisí.

Poznámka 4.23. Výpočet normálových sil N_C a N_S i příslušných normálových napětí $\sigma_{x,C}$ a $\sigma_{x,S}$ v betonové a ocelové části železobetonového sloupu v příkladu 4.21 je možný pouze za předpokladu rovnoměrného rozložení bodové zatěžovací síly F do průřezu např. s pomocí tuhé desky, jak je schématicky naznačeno na obrázku 4.12.

4.4.3 Staticky neurčité soustavy tažených prutů

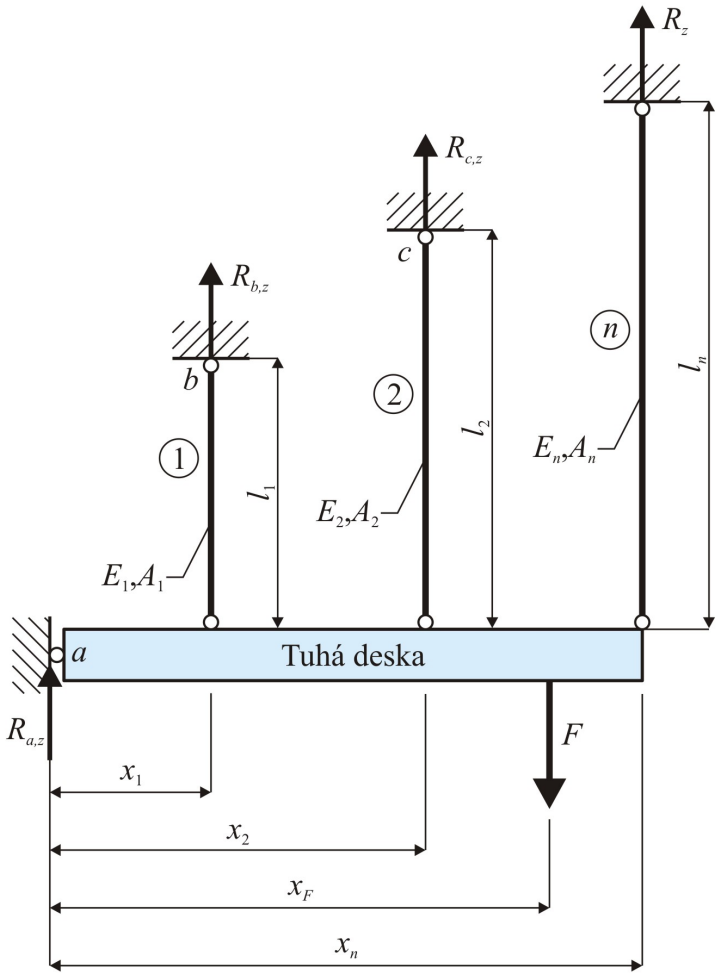
Dalším typem úloh se staticky neurčitým osově namáhaným nosným systémem je soustava obecně n táhel, na kterých je zavěšena dokonale tuhá (nedeformovatelná) nosná deska se svisle působícím zatížením (viz statické schéma na obrázku 4.13). Tato soustava tažených prutů je obecně $n-1$ krát staticky neurčitá. Vzhledem ke skutečnosti, že deska je rovněž kloubově podepřena v bodě a, výpočet normálových sil v táhlech N_i, které se rovnají příslušné reakci v bodě podepření (např. $N_1 = R_{b,z}$), se musí opírat o momentovou podmínku rovnováhy:

$$\sum M_a = 0 : \quad \sum_{i=1}^{n} N_i \cdot x_i - F \cdot x_F = 0 , \tag{4.123}$$

kde x_i jsou příslušné půdorysné vzdálenosti jednotlivých tažených prutů od bodu a a x_F půdorysná vzdálenost působiště bodové zatěžovací síly F od kloubové podpory v bodě a.

Silová podmínka rovnováhy:

$$\sum F_{i,z} = R_z = 0 : \quad R_{a,z} + \sum_{i=1}^{n} N_i - F = 0 \tag{4.124}$$

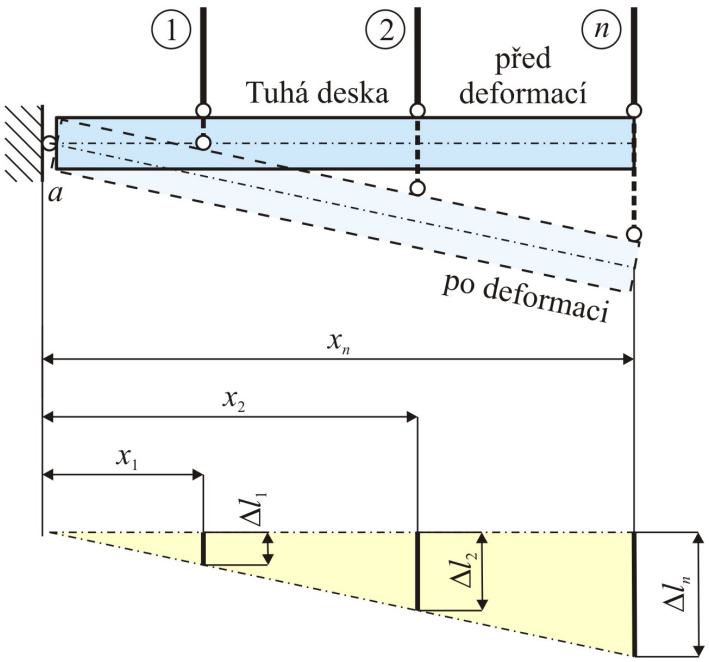


Obr. 4.13 Statické schéma staticky neurčité soustavy tažených prutů, na nichž je zavěšena tuhá deska

obsahuje oproti podmínce rovnováhy (4.123) o jednu neznámou veličinu více (pro výpočet nepotřebnou svislou reakci $R_{a,z}$), proto lze vztah (4.124) použít pouze ke kontrolním účelům.

Vzhledem k celkem obecně n neznámým normálovým silám v táhlech N_i je nutné jednu statickou podmínku (4.123) doplnit obecně $n-1$ podmínkami deformačními.

Sestavení deformačních podmínek vychází z předpokladu výpočtu, že dokonale tuhá deska se vlivem zatížení pootočí kolem kloubového podepření v bodu a, čímž ovlivní i podélné deformace jednotlivých táhel. Na protažení osově namáhaných prutů se pak bude vztahovat přímá úměra daná podobností trojúhelníka (viz schéma na obrázku 4.14), takže potřebných $n-1$ deformačních podmínek se může obecně



Obr. 4.14 Princip odvození deformační podmínky

definovat následujícím způsobem:

$$\frac{\Delta l_1}{x_1} = \frac{\Delta l_2}{x_2} = \cdots = \frac{\Delta l_i}{x_i} = \cdots = \frac{\Delta l_n}{x_n} \,. \tag{4.125}$$

Při uvažování pružného chování materiálu táhel je možno ve vztahu (4.125) jednotlivá protažení Δl_i rozepsat s využitím vztahu (4.11).

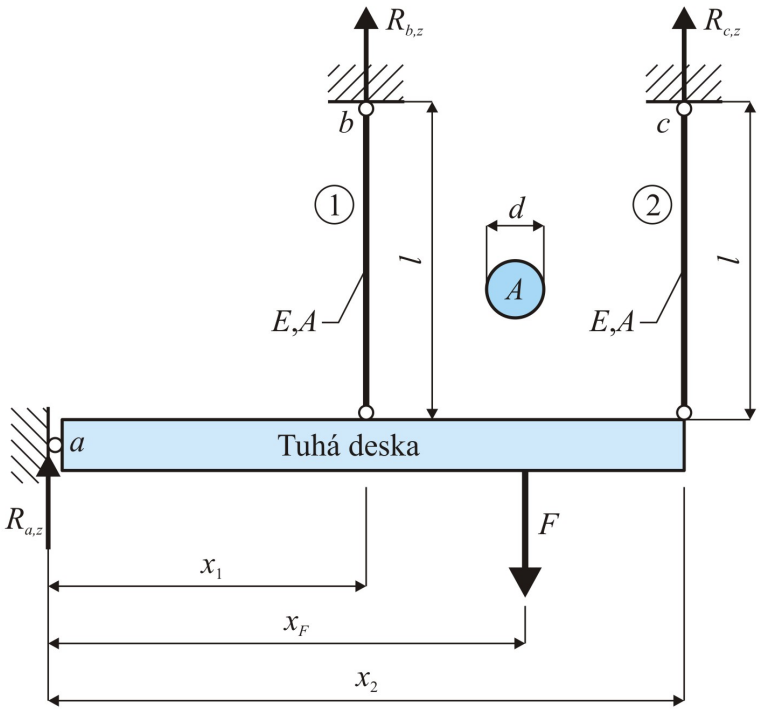
Příklad 4.24. Určete normálové síly N, protažení Δl a příslušná normálová napětí σ_x ve dvou táhlech, na nichž je zavěšena dokonale tuhá deska podle statického schématu na obrázku 4.15. Uvažujte pružné chování materiálu obou nosných prutových prvků. Konkrétní hodnoty vstupních veličin jsou obsaženy v tabulce 4.10.

Řešení.

1. **Statická podmínka rovnováhy:**
   Statická podmínka rovnováhy vychází ze součtu statických momentů k bodu podepření a podle (4.123) ($N_1 = R_{b,z}$ a $N_2 = R_{c,z}$):

$$\sum M_a = 0 : \quad N_1 \cdot x_1 + N_2 \cdot x_2 - F \cdot x_F = 0 \,, \tag{4.126}$$

   kde x_1, x_2 a x_F jsou půdorysné vzdálenosti od bodu a podle obrázku 4.15.



Obr. 4.15 Statické schéma staticky neurčité soustavy tažených prutů, na nichž je zavěšena tuhá deska, z příkladu 4.24

Délka táhel l :	2 m
Průměr kruhového průřezu táhel d :	16 mm
Průřezová plocha táhel A :	$\frac{\pi \cdot 16^2}{4} \cong 201,06$ mm^2
Modul pružnosti v tahu a tlaku E :	210000 MPa
Velikost bodové zatěžovací síly F :	60 kN
Půdorysná vzdálenost 1. táhla od bodu a (x_1) :	2 m
Půdorysná vzdálenost 2. táhla od bodu a (x_2) :	4 m
Půdorysná vzdálenost působiště síly F od bodu a (x_F) :	3 m

Tab. 4.10 Vstupní údaje příkladu 4.24

2. **Deformační podmínka:**

Pro podélné přetvoření obou táhel platí vztah, vycházející z výrazu (4.125):

$$\frac{\Delta l_1}{x_1} = \frac{\Delta l_2}{x_2} \,. \tag{4.127}$$

Rovnici (4.127) lze dále rozepsat díky předpokladu pružného chování materiálu

obou táhel, tedy platnosti Hookeova zákona, vyjádřeného vztahem (4.11):

$$\frac{\Delta l_1}{x_1} = \frac{\Delta l_2}{x_2} \;\rightarrow\; \frac{N_1 \cdot l}{E \cdot A \cdot x_1} = \frac{N_2 \cdot l}{E \cdot A \cdot x_2} \,. \tag{4.128}$$

3. **Výsledné normálové síly, protažení prutů a normálová napětí:**
Soustavu dvou rovnic (4.126) a (4.128) lze vyřešit analyticky. Např. vztah pro normálovou sílu v prvním táhle N_1 lze odvodit následujícím způsobem:

$$\begin{aligned}
&N_2 = -\frac{1}{x_2} \cdot (N_1 \cdot x_1 - F \cdot x_F) \;\rightarrow \\
&\rightarrow\; \frac{N_1 \cdot l}{E \cdot A \cdot x_1} = -\frac{(N_1 \cdot x_1 - F \cdot x_F) \cdot l}{E \cdot A \cdot x_2^2} \;\rightarrow \\
&\rightarrow\; N_1 \cdot \left(\frac{1}{x_1} + \frac{x_1}{x_2^2}\right) = \frac{F \cdot x_F}{x_2^2} \;\rightarrow\; N_1 \cdot \frac{x_2^2 + x_1^2}{x_1 \cdot x_2^2} = \frac{F \cdot x_F}{x_2^2} \;\rightarrow \\
&\rightarrow\; N_1 = \frac{F \cdot x_F \cdot x_1 \cdot x_2^2}{x_2^2 \cdot (x_1^2 + x_2^2)} \;\rightarrow\; N_1 = \frac{F \cdot x_F \cdot x_1}{x_1^2 + x_2^2} \,.
\end{aligned} \tag{4.129}$$

Obdobně lze určit i normálovou sílu v táhle č. 2 N_2:

$$\begin{aligned}
&N_1 = -\frac{1}{x_1} \cdot (N_2 \cdot x_2 - F \cdot x_F) \;\rightarrow \\
&\rightarrow\; \frac{N_2 \cdot l}{E \cdot A \cdot x_2} = -\frac{(N_2 \cdot x_2 - F \cdot x_F) \cdot l}{E \cdot A \cdot x_1^2} \;\rightarrow\; N_2 = \frac{F \cdot x_F \cdot x_2}{x_1^2 + x_2^2} \,.
\end{aligned} \tag{4.130}$$

Výsledné hodnoty normálových sil v obou táhlech N_1 a N_2 pro konkrétní vstupní údaje pak vycházejí následovně:

$$N_1 = \frac{F \cdot x_F \cdot x_1}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{60 \cdot 3 \cdot 2}{2^2 + 4^2}\ [\mathrm{kN}] \cong 18\ [\mathrm{kN}]\ (\mathrm{tah}) \tag{4.131}$$

a

$$N_2 = \frac{F \cdot x_F \cdot x_2}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{60 \cdot 3 \cdot 4}{2^2 + 4^2}\ [\mathrm{kN}] \cong 36\ [\mathrm{kN}]\ (\mathrm{tah}) \,. \tag{4.132}$$

S pomocí vypočtených normálových sil N_1 a N_2 je možno určit i výsledná podélná přetvoření obou tažených prutů na základě vztahu (4.11):

$$\begin{aligned}
\Delta l_1 &= \frac{N_1 \cdot l}{E \cdot A} = \frac{18 \cdot 10^3 \cdot 2}{210000 \cdot 10^6 \cdot 201,06 \cdot 10^{-6}}\ [\mathrm{m}] = \\
&= 8,5262 \cdot 10^{-4}\ [\mathrm{m}] \cong 0,85\ [\mathrm{mm}] \,,
\end{aligned} \tag{4.133}$$

resp.

$$\begin{aligned}
\Delta l_2 &= \frac{N_2 \cdot l}{E \cdot A} = \frac{36 \cdot 10^3 \cdot 2}{210000 \cdot 10^6 \cdot 201,06 \cdot 10^{-6}}\ [\mathrm{m}] = \\
&= 1,7052 \cdot 10^{-3}\ [\mathrm{m}] \cong 1,71\ [\mathrm{mm}] \,.
\end{aligned} \tag{4.134}$$

Výsledné hodnoty normálových napětí σ_x podle vztahu (4.6) se získají podílem obou vypočtených normálových sil N_1 a N_2 s průřezovou plochou A:

$$\begin{aligned}\sigma_{x,1} = \frac{N_1}{A} = \frac{18 \cdot 10^3}{201,06 \cdot 10^{-6}}\ [\text{Pa}] = \\ = 8,9525 \cdot 10^7\ [\text{Pa}] \cong 89,52\ [\text{MPa}]\ (\text{tah})\ ,\end{aligned} \tag{4.135}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{x,2} = \frac{N_2}{A} = \frac{36 \cdot 10^3}{201,06 \cdot 10^{-6}}\ [\text{Pa}] = \\ = 1,7905 \cdot 10^8\ [\text{Pa}] \cong 179,05\ [\text{MPa}]\ (\text{tah})\ .\end{aligned} \tag{4.136}$$

4. **Kontrola výpočtu:**

Výpočet lze zkontrolovat např. statickou podmínkou rovnováhy (4.124), do které se dosadí také hodnota reakce $R_{a,z}$, vypočtená například z následující momentové podmínky rovnováhy (součet statických momentů k bodu c):

$$\begin{aligned}&\sum M_c = 0: \quad -R_{a,z} \cdot x_2 - N_1 \cdot (x_2 - x_1) + F \cdot (x_2 - x_F) = 0 \ \rightarrow \\ &\rightarrow\ R_{a,z} = \frac{1}{x_2} \cdot [F \cdot (x_2 - x_F) - N_1 \cdot (x_2 - x_1)] = \\ &= \quad \frac{1}{4} \cdot [60 \cdot (4-3) - 18 \cdot (4-2)] = \frac{24}{4} = 6\ [\text{kN}]\ (\uparrow)\ .\end{aligned} \tag{4.137}$$

Kontrolní součet všech svislých sil pak vychází ($N_1 = R_{b,z}$ a $N_2 = R_{c,z}$):

$$\sum F_{i,z} = R_z = 0: \quad R_{a,z} + N_1 + N_2 - F = 0 \ \rightarrow\ 6 + 18 + 36 - 60 = 0\ . \tag{4.138}$$

Kontrolu lze provést také s pomocí deformační podmínky (4.127), například následující úpravou:

$$\frac{\Delta l_1}{x_1} = \frac{\Delta l_2}{x_2} \ \rightarrow\ \frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{x_1}{x_2}\ , \tag{4.139}$$

která s numerickými hodnotami nabývá tvaru:

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{0,85\ [\text{mm}]}{1,71\ [\text{mm}]} \approx \frac{x_1}{x_2} = \frac{2\ [\text{m}]}{4\ [\text{m}]} = 0,5\ . \tag{4.140}$$

▲

Poznámka 4.25. Při odvozování analytických vztahů pro výpočet normálových sil N_1 a N_2 došlo ve vztazích (4.129) a (4.130) k eliminaci tří vstupních veličin – délky táhel l, jejich průřezové plochy A a modulu pružnosti v tahu a tlaku E. Výsledné normálové síly N_1 a N_2 jsou na těchto vstupních parametrech nezávislé pouze z důvodu, že jsou u obou tažených prutů shodné.

4.5 Staticky neurčité soustavy prutů v pružnoplastickém oboru

U staticky určitých soustav je únosnost nosného systému vyčerpána v okamžiku, kdy hodnota normálového napětí σ_x v kterémkoliv průřezu nosné konstrukce dosáhne velikosti pevnosti daného materiálu v tahu nebo prostém tlaku (u oceli je vyjádřena napětím na mezi kluzu f_y).

Pokud se při výpočtech uvažuje také s možností plastického chování materiálu, u staticky neurčitých soustav pak nemusí vyčerpání únosnosti jednoho nebo více prutových prvků znamenat vyčerpání únosnosti celého nosného systému, ale pouze přechod těchto částí konstrukce do plastického stavu, tzn. počátek jejich **plastizování**. Při výpočtech pak lze pro vyjádření těchto procesů s výhodou využít pracovní diagram ideálně pružnoplastického materiálu z obrázku 2.15, který byl vysvětlen v kapitole 2.2.3.

Pro samotné řešení staticky neurčitých soustav tažených prutů v pružnoplastickém oboru je nutno zdůraznit, že podmínky rovnováhy zůstávají v platnosti po celou dobu výpočtu, nezávisle na stavu, ve kterém se materiál prutových prvků právě nachází (pružný nebo plastický). Totéž platí i pro podmínky deformační, definované ve vztahu (4.125). V případě fyzikálních rovnic je však nutno rozlišovat:

a) pokud velikost normálového napětí σ_x v daném prutu ještě nedosáhla pevnosti daného materiálu v tahu a prostém tlaku (u oceli napětí na mezi kluzu f_y), nosný prvek se stále chová pružně a řídí se Hookeovým zákonem, který je vyjádřen např. vztahem (4.11),

b) pokud velikost normálového napětí σ_x v daném prutu dosáhlo pevnosti daného materiálu v tahu a prostém tlaku (u oceli napětí na mezi kluzu f_y), normálová síla N je pak rovna únosnosti v osovém namáhání N_{Rd} (viz (4.45)), nosný prvek se začíná plastizovat a protažení se již neřídí velikostí normálové síly, nýbrž přetvořením prutů, které se ještě nacházejí v pružném stavu.

Únosnost staticky neurčité soustavy tažených prutů je pak vyčerpána ve chvíli, když velikost normálového napětí σ_x dosáhne pevnosti daného materiálu v tahu a prostém tlaku (u oceli napětí na mezi kluzu f_y) u všech prutů nosného systému.

Příklad 4.26. U konstrukce z příkladu 4.24 stanovte maximální možnou hodnotu zatěžovací bodové síly F (tzv. **zatížitelnost**), která vyvolá vyčerpání únosnosti této staticky neurčité soustavy. Při výpočtu uvažujte u obou ocelových táhel pevnostní třídy S235 s ideálně pružnoplastickým chováním materiálu.

Řešení. Pro názornost je řešení rozděleno do tří výpočetních etap, které jsou pojmenovány jako stav I, stav II a stav III podle chování obou tažených prutů staticky neurčité soustavy.

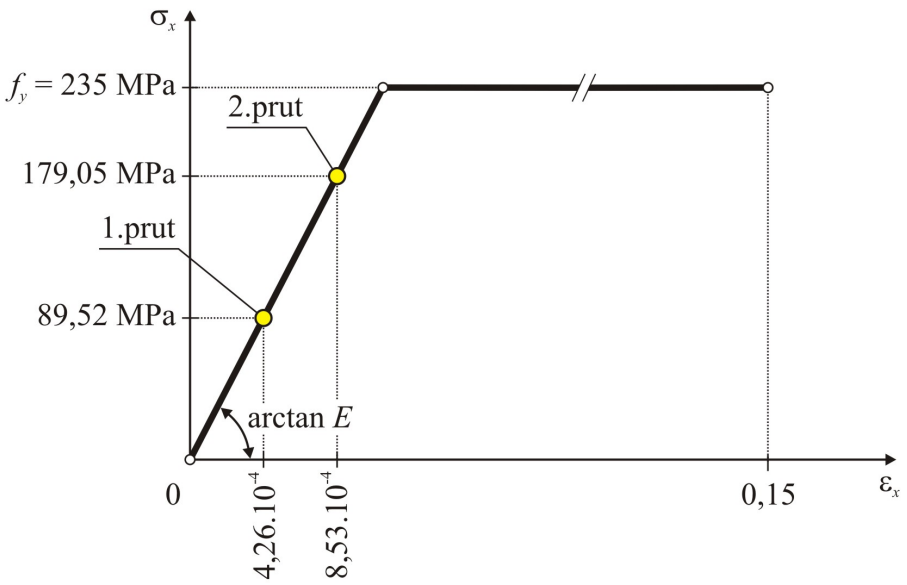
1. **Stav I:**

   V situaci, označené jako stav I, je normálové napětí σ_x obou tažených prutů menší nežli napětí na mezi kluzu f_y oceli pevnostní třídy S235, tedy $\sigma_x < f_y = 235$ MPa. Materiál táhel se stále vyznačuje pružným chováním a velikost podélného přetvoření tažených prutů se řídí Hookeovým zákonem (4.11).
   Ve stavu I se staticky neurčitá soustava tažených prutů nachází např. při řešení příkladu 4.24, kdy velikost bodové zatěžovací síly F byla rovna 60 kN. Celou situaci lze graficky znázornit i na pracovním diagramu z obrázku 4.16, kdy na svislé ose jsou uvedeny hodnoty normálového napětí σ_x v obou prutech, získané při řešení příkladu 4.24, a na vodorovné ose byly zakresleny hodnoty odpovídajících délkových poměrných deformací obou tažených prutů:

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta l_1}{l} = \frac{0,85\ [\text{mm}]}{2000\ [\text{mm}]} = 4,26 \cdot 10^{-4} \tag{4.141}$$

   a

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta l_2}{l} = \frac{1,71\ [\text{mm}]}{2000\ [\text{mm}]} = 8,53 \cdot 10^{-4}\ . \tag{4.142}$$



Obr. 4.16 Pracovní diagram ideálně pružnoplastického materiálu s vyznačenými body, které odpovídají chování obou táhel soustavy z příkladu 4.24 (stav I)

2. **Stav II (zplastizování prutu 2):**

   Stav II nastane v okamžiku, kdy v jednom z tažených prutů dosáhne hodnota normálového napětí σ_x velikosti napětí na mezi kluzu $f_y = 235$ MPa. K této

situaci dojde v táhle číslo 2, u něhož se velikost normálové síly N_2 bude rovnat únosnosti taženého nosného prvku N_{Rd}, získané na základě vztahu (4.45):

$$\begin{aligned} N_2 = N_{Rd} = f_y \cdot A = 235 \cdot 10^6 \cdot 201,06 \cdot 10^{-6}\ [\mathrm{N}] = \\ = 4,7250 \cdot 10^4\ [\mathrm{N}] \cong 47,25\ [\mathrm{kN}]\ . \end{aligned} \tag{4.143}$$

Normálové síle $N_2 = N_{Rd}$ pak odpovídá protažení:

$$\begin{aligned} \Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l}{E \cdot A} = \frac{47,25 \cdot 10^3 \cdot 2}{210000 \cdot 10^6 \cdot 201,06 \cdot 10^{-6}}\ [\mathrm{m}] = \\ = 2,2381 \cdot 10^{-3}\ [\mathrm{m}] \cong 2,24\ [\mathrm{mm}]\ . \end{aligned} \tag{4.144}$$

Z deformační podmínky (4.127) pak lze určit i protažení v táhle číslo 1:

$$\frac{\Delta l_1}{x_1} = \frac{\Delta l_2}{x_2} \ \rightarrow\ \Delta l_1 = \Delta l_2 \cdot \frac{x_1}{x_2} = 2,24 \cdot \frac{2}{4} \cong 1,12\ [\mathrm{mm}]\ , \tag{4.145}$$

kterému odpovídá velikost normálové síly podle (4.11):

$$\begin{aligned} \Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l}{E \cdot A}\ \rightarrow\ N_1 = \Delta l_1 \cdot \frac{E \cdot A}{l} = \\ = 1,12 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{210000 \cdot 10^6 \cdot 201,06 \cdot 10^{-6}}{2}\ [\mathrm{N}] = \\ = 2,36248 \cdot 10^4\ [\mathrm{N}] \cong 23,62\ [\mathrm{kN}]\ . \end{aligned} \tag{4.146}$$

Zbývá určit výslednou hodnotu bodové zatěžovací síly F, která se stanoví s využitím statické podmínky rovnováhy (4.126):

$$\begin{aligned} \sum M_a = 0: \quad N_1 \cdot x_1 + N_2 \cdot x_2 - F \cdot x_F = 0\ \rightarrow \\ \rightarrow\ F = \frac{1}{x_F} \cdot (N_1 \cdot x_1 + N_2 \cdot x_2) = \frac{1}{3} \cdot (23,62 \cdot 2 + 47,25 \cdot 4) \cong \\ \cong 78,75\ [\mathrm{kN}]\ . \end{aligned} \tag{4.147}$$

Pro úplnost je provedena i kontrola výpočtu stavu II. Svislá reakce $R_{a,z}$, určená na základě momentové podmínky rovnováhy k bodu c ve vztahu (4.137), nabývá hodnotu:

$$\begin{aligned} R_{a,z} = \frac{1}{x_2} \cdot [F \cdot (x_2 - x_F) - N_1 \cdot (x_2 - x_1)] = \\ = \frac{1}{4} \cdot [78,75 \cdot (4-3) - 23,62 \cdot (4-2)] \cong 7,87\ [\mathrm{kN}]\ (\uparrow)\ . \end{aligned} \tag{4.148}$$

Kontrolní součet všech svislých sil podle (4.138) pak vychází ($N_1 = R_{b,z}$ a $N_2 = R_{c,z}$):

$$\begin{aligned} \sum F_{i,z} = R_z = 0: \quad R_{a,z} + N_1 + N_2 - F = 0\ \rightarrow \\ \rightarrow\ 7,87 + 23,62 + 47,25 - 78,75 \approx 0\ . \end{aligned} \tag{4.149}$$

Chování obou tažených prutů soustavy ve stavu II lze opět graficky znázornit pomocí pracovního diagramu na obrázku 4.17. Na svislé ose grafu jsou uvedeny hodnoty normálového napětí σ_x v obou prutech. Vzhledem k výchozímu předpokladu stavu II, kdy v taženém prutu číslo 2 dosahuje hodnota normálového napětí σ_x velikosti napětí na mezi kluzu $f_y = 235$ MPa, zbývá dopočítat pouze normálové napětí σ_x v táhle č. 1:

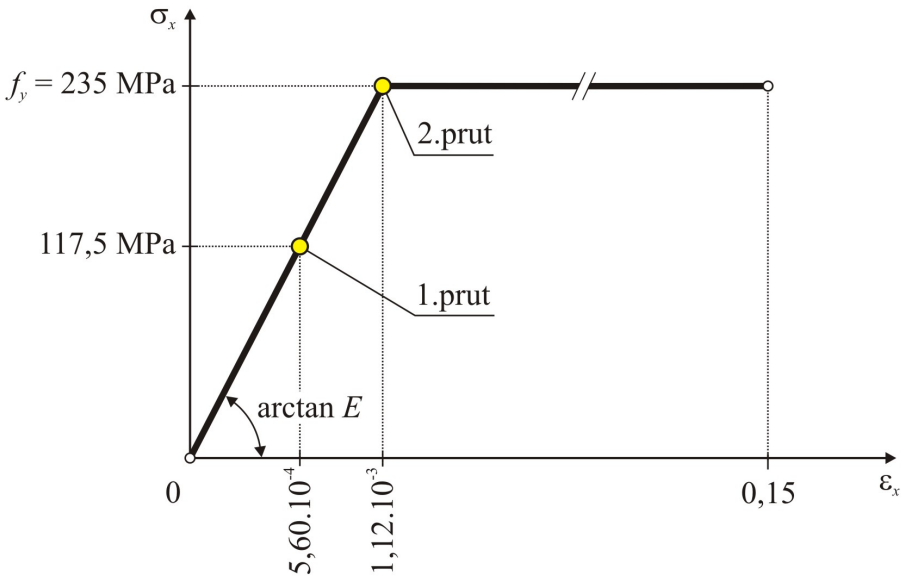
$$\begin{aligned} \sigma_{x,1} = \frac{N_1}{A} = \frac{23,62 \cdot 10^3}{201,06 \cdot 10^{-6}} \text{ [Pa]} = \\ = 1,1750 \cdot 10^8 \text{ [Pa]} \cong 117,50 \text{ [MPa]} \text{ (tah)} . \end{aligned} \tag{4.150}$$

Délkové poměrné deformace obou táhel, vynesené na vodorovné ose pracovního diagramu z obrázku 4.17, jsou získány pomocí vztahů:

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta l_1}{l} = \frac{1,12 \text{ [mm]}}{2000 \text{ [mm]}} = 5,60 \cdot 10^{-4} , \tag{4.151}$$

resp.

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta l_2}{l} = \frac{2,24 \text{ [mm]}}{2000 \text{ [mm]}} = 1,12 \cdot 10^{-3} . \tag{4.152}$$



Obr. 4.17 Pracovní diagram ideálně pružnoplastického materiálu s vyznačenými body, které odpovídají chování obou táhel soustavy z příkladu 4.26 ve stavu II

3. **Stav III (zplastizování prutu 1 i 2):**

Stav III představuje situaci, kdy únosnost staticky neurčité soustavy tažených prutů je vyčerpána, neboť v obou táhlech dosahuje hodnota normálového napětí σ_x velikosti napětí na mezi kluzu $f_y = 235$ MPa a normálové síly N_1 a N_2 tedy nabývají shodné hodnoty únosnosti osově namáhaného prutu N_{Rd}, získané s pomocí výrazu (4.45):

$$\begin{aligned} N_1 = N_2 = N_{Rd} = f_y \cdot A = 235 \cdot 10^6 \cdot 201,06 \cdot 10^{-6}\ [\mathrm{N}] = \\ = 4,7250 \cdot 10^4\ [\mathrm{N}] \cong 47,25\ [\mathrm{kN}]\ . \end{aligned} \tag{4.153}$$

Normálové síle $N_1 = N_{Rd}$ pak odpovídá protažení:

$$\begin{aligned} \Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l}{E \cdot A} = \frac{47,25 \cdot 10^3 \cdot 2}{210000 \cdot 10^6 \cdot 201,06 \cdot 10^{-6}}\ [\mathrm{m}] = \\ = 2,2381 \cdot 10^{-3}\ [\mathrm{m}] \cong 2,24\ [\mathrm{mm}]\ . \end{aligned} \tag{4.154}$$

Protažení v táhle číslo 2 se pak určí z deformační podmínky (4.127):

$$\frac{\Delta l_1}{x_1} = \frac{\Delta l_2}{x_2} \ \rightarrow\ \Delta l_2 = \Delta l_1 \cdot \frac{x_2}{x_1} = 2,24 \cdot \frac{4}{2} \cong 4,48\ [\mathrm{mm}]\ . \tag{4.155}$$

Výsledná hodnota bodové zatěžovací síly F se podobně jako u stavu II stanoví s využitím statické podmínky rovnováhy (4.126):

$$\begin{aligned} &\sum M_a = 0: \quad N_1 \cdot x_1 + N_2 \cdot x_2 - F \cdot x_F = 0\ \rightarrow \\ &\rightarrow\ F = \frac{1}{x_F} \cdot (N_1 \cdot x_1 + N_2 \cdot x_2) = \frac{1}{3} \cdot (47,25 \cdot 2 + 47,25 \cdot 4) \cong \\ &\quad \cong 94,50\ [\mathrm{kN}]\ . \end{aligned} \tag{4.156}$$

Kontrolní výpočet pak opět sestává nejprve z určení svislé reakce $R_{a,z}$ pomocí výrazu (4.137) s momentovou podmínkou rovnováhy k bodu c:

$$\begin{aligned} R_{a,z} = \frac{1}{x_2} \cdot [F \cdot (x_2 - x_F) - N_1 \cdot (x_2 - x_1)] = \\ = \frac{1}{4} \cdot [94,50 \cdot (4-3) - 47,25 \cdot (4-2)] = 0,0\ [\mathrm{kN}]\ . \end{aligned} \tag{4.157}$$

Kontrolní silová podmínka rovnováhy ve svislém směru podle (4.138) se pak rovná:

$$\begin{aligned} \sum F_{i,z} = R_z = 0: \quad R_{a,z} + N_1 + N_2 - F = 0\ \rightarrow \\ \rightarrow\ 0,0 + 47,25 + 47,25 - 94,50 = 0\ , \end{aligned} \tag{4.158}$$

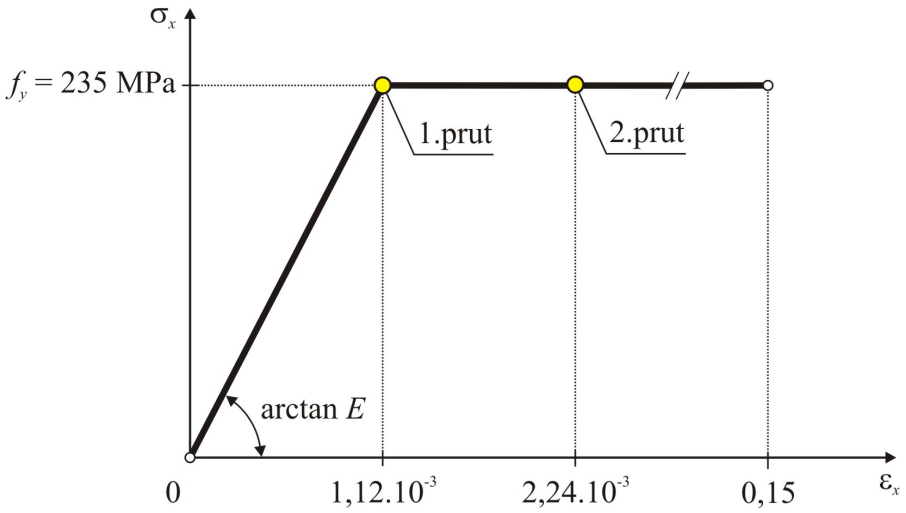
neboť platí, že $N_1 = R_{b,z}$ a $N_2 = R_{c,z}$.

Pracovní diagram, na němž lze graficky znázornit chování obou řešených táhel staticky neurčité soustavy ve stavu III, je uveden na obrázku 4.18. Délkové poměrné deformace obou táhel, vynesené na vodorovné ose pracovního diagramu z obrázku 4.18, jsou přitom stanoveny následovně:

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta l_1}{l} = \frac{2,24\ [\mathrm{mm}]}{2000\ [\mathrm{mm}]} = 1,12 \cdot 10^{-3}\ , \tag{4.159}$$

resp.

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta l_2}{l} = \frac{4,48\ [\mathrm{mm}]}{2000\ [\mathrm{mm}]} = 2,24 \cdot 10^{-3}\ . \tag{4.160}$$



Obr. 4.18 Pracovní diagram ideálně pružnoplastického materiálu s vyznačenými body, které odpovídají chování obou táhel soustavy z příkladu 4.26 ve stavu III

Pro přehlednost jsou veškeré výsledky příkladu 4.26 uvedeny souhrnně v tabulce 4.11.

Maximální možná velikost bodové zatěžovací síly F, která vyvolá vyčerpání únosnosti staticky neurčité soustavy tažených prutů s uvažováním ideálně pružnoplastického chování materiálu, nabývá hodnoty 94,50 kN.

▲

Poznámka 4.27. Pokud by se uvažovalo pouze s pružným chováním materiálu staticky neurčité soustavy tažených prutů, pak by byla vyčerpána únosnost tohoto nosného systému stavem II, kdy normálové napětí σ_x v prutu číslo 2 dosáhne hodnoty napětí na mezi kluzu f_y.

Stav I	$\boldsymbol{F}$	N_1	σ_1	Δl_1	ε_1
	60 kN	18 kN	89,52 MPa	0,85 mm	$4,26 \cdot 10^{-4}$
	$R_{a,z}$	N_2	σ_2	Δl_2	ε_2
	6 kN	36 kN	179,05 MPa	1,71 mm	$8,53 \cdot 10^{-4}$
Stav II	$\boldsymbol{F}$	N_1	σ_1	Δl_1	ε_1
	78,75 kN	23,62 kN	117,50 MPa	1,12 mm	$5,60 \cdot 10^{-4}$
	$R_{a,z}$	N_2	σ_2	Δl_2	ε_2
	7,87 kN	47,25 kN	235,00 MPa	2,24 mm	$1,12 \cdot 10^{-3}$
Stav III	$\boldsymbol{F}$	N_1	σ_1	Δl_1	ε_1
	94,50 kN	47,25 kN	235,00 MPa	2,24 mm	$1,12 \cdot 10^{-3}$
	$R_{a,z}$	N_2	σ_2	Δl_2	ε_2
	7,87 kN	47,25 kN	235,00 MPa	4,48 mm	$2,24 \cdot 10^{-3}$

Tab. 4.11 Výsledné hodnoty výpočtu z příkladu 4.26

Poznámka 4.28. Při řešení příkladu 4.26 bylo ukázáno, že využití ideálně pružnoplastického chování materiálu při výpočtech staticky neurčitých soustav tažených prutů vede ke zvýšené zatížitelnosti nosného systému. V případě návrhu pak vede statický výpočet k efektivněji a hospodárněji navrženému průřezu, neboť narozdíl od výpočtu s pružným chováním materiálu, který se řídí Hookeovým zákonem, využívá navíc také plastických rezerv tvárného materiálu nosné konstrukce.

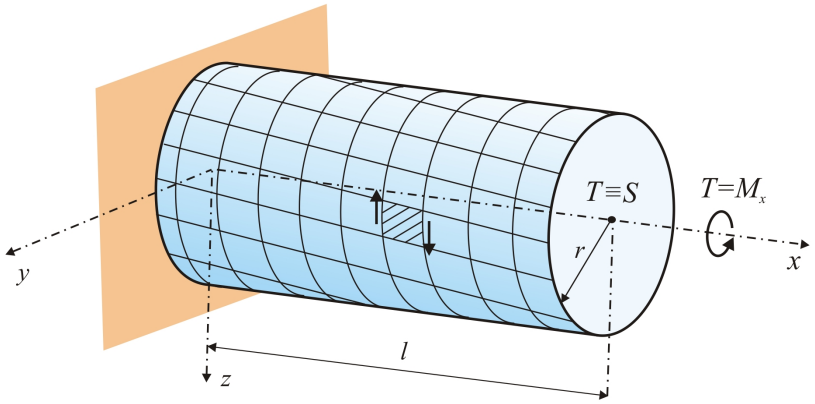
Kapitola 5

Kroucení

Prostým kroucením se označuje stav, kdy jedinou nenulovou složkou vnitřních sil v kterémkoliv průřezu prutového nosného prvku je **kroutící** (torzní) **moment** $T{=}M_x$:

$$N = V_y = V_z = M_y = M_z = 0\ . \tag{5.1}$$

Nejjednodušší řešení lze získat u prutů rotačně symetrického průřezu - kruhového a mezikruhového jak je znázorněno na obrázku 5.1.

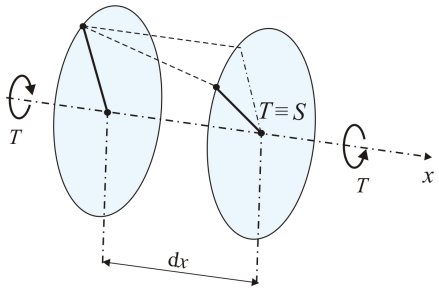


Obr. 5.1 Prosté kroucení přímého prutu kruhového průřezu

5.1 Prosté kroucení prutu s rotačně symetrickým průřezem

Při zjišťování stavu napjatosti a stavu deformace krouceného prvku se vychází z těchto předpokladů:

- osa prutu zůstane i po deformaci přímá,
- průřezy zůstávají rovinnými i po deformaci a vzájemně se nevzdálí,
- jednotlivé průřezy se otáčejí jako tuhé celky (průvodiče se nezkřiví).



Obr. 5.2 Zachování rovinnosti průřezů po deformaci

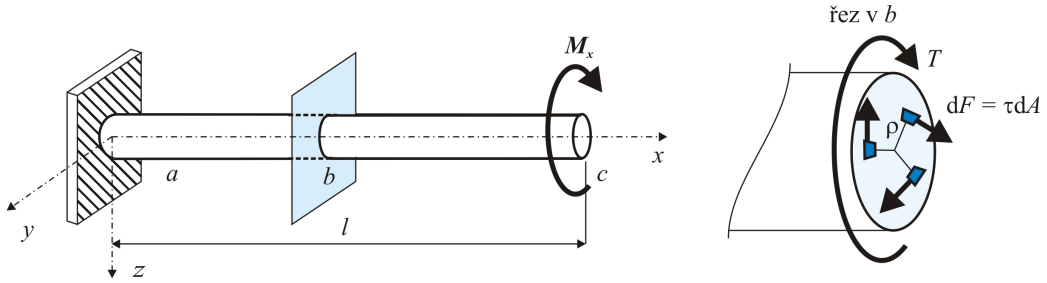
Z uvedených předpokladů vyplývá, že příčné průřezy se účinkem zatížení nezkřiví a zůstanou vzájemně rovnoběžné podle obrázku 5.2. Poměrné délkové přetvoření ve směru osy prutu ε_x je nulové, takže z Hookeova zákona v prostém tahu a tlaku (2.18) vyplývá, že nevznikají normálová napětí: $\sigma_x = 0$.

Posledního předpokladu lze využít pro určení rozložení smykového napětí v tyči kruhového průřezu. Důsledkem je skutečnost, že smykové napětí se mění lineárně s rostoucí vzdáleností od osy průřezu. Za předpokladu pružného chování materiálu a využitím Hookeova zákona v prostém smyku (2.21) lze určit průběh smykového napětí v kruhovém průřezu a odvodit rovnici pro prosté kroucení (5.12), což je učiněno v kapitole 5.1.3.

5.1.1 Úvod pro výpočet napětí v prostém kroucení

Napětí v průřezu prutu musí splňovat podmínky statické rovnováhy vnitřních sil. V obecném místě ve vzdálenosti ρ od osy (uvnitř prutu nikoli na povrchu) podle obrázku 5.3 platí :

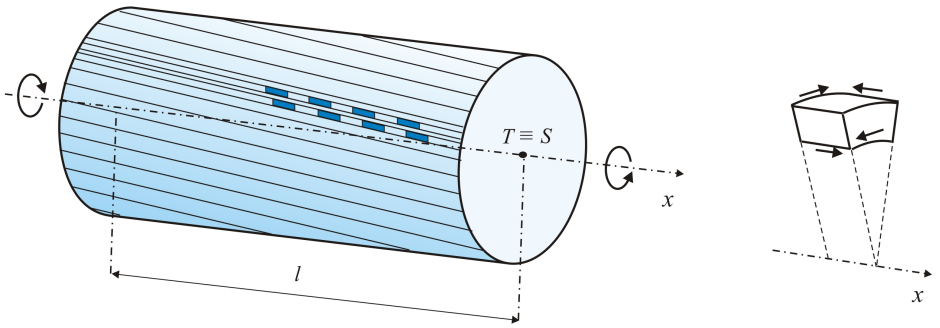
$$T = \int_A \rho \cdot \tau \, \mathrm{d}A. \tag{5.2}$$



Obr. 5.3 Vnitřní síla kroutícího momentu T v řezu tyče namáhané kroucením

Tento vztah vyjadřuje důležitou podmínku, která musí být splněna napětími v kterémkoliv řezu, ale nic nevypovídá o tom, jak jsou smyková napětí v průřezu rozložena. K tomu je zapotřebí provést také analýzu deformací, což je provedeno v následujícím odstavci 5.1.2.

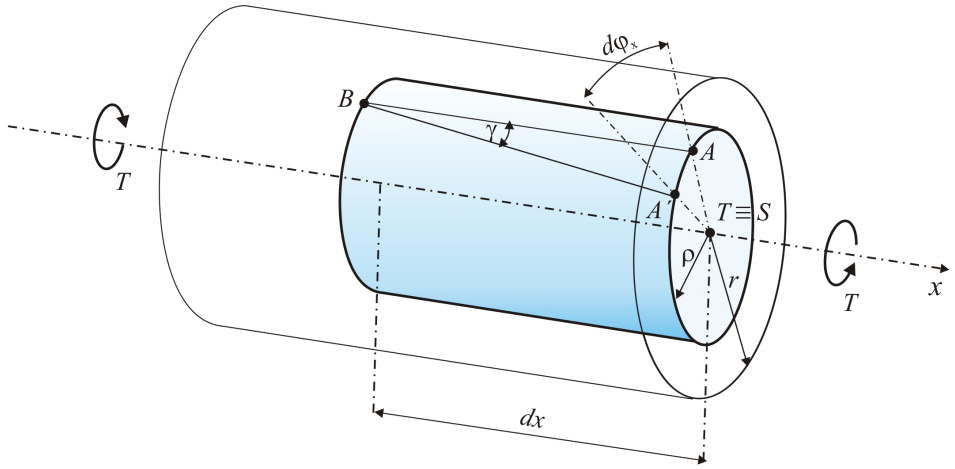
Je třeba také zmínit, jak bylo uvedeno v 1.3.4 ve větě o vzájemnosti smykových napětí, že smyk se nevyskytuje pouze v jedné rovině. Z obrázku 5.1 a také 5.3 je zřejmé, že kroucení způsobuje smykové napětí τ na kolmici k průvodiči v rovině kolmé k ose tyče. Vzájemnost smykových napětí vyžaduje existenci stejných napětí také v rovinách, kterými osa prutu prochází. Pro lepší názornost těchto napětí je na obrázku 5.4 vykreslena tyč, jejíž podélná vlákna si lze představit jako pásky, které při namáhání kroucením mají tendenci po sobě klouzat. Ačkoliv u homogenního materiálu k žádnému klouzání nedochází, lze si takto představit napětí vznikající v podélných rovinách současně s napětími v rovinách kolmých k ose prutu.



Obr. 5.4 Smyková napětí v rovinách procházejících osou prutu

5.1.2 Deformace v kroucení

Pro odvození deformace tyče při kroucení je zapotřebí využít třetího předpokladu z úvodní kapitoly 5.1. Deformace γ vznikne při namáhání kroucením na povrchu



Obr. 5.5 Element vnitřního válce o poloměru ϱ kroucené tyče

elementu vnitřního válce dané tyče o poloměru ρ podle obrázku 5.5. Pro malé hodnoty úhlu γ lze vyjádřit, že délka $A\acute{A} = \gamma \cdot \mathrm{d}x$. Současně $A\acute{A} = \rho \cdot \mathrm{d}\varphi_x$. Rovnost pravých stran $\gamma \cdot \mathrm{d}x = \rho \cdot \mathrm{d}\varphi_x$, nebo-li:

$$\gamma = \rho \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi_x}{\mathrm{d}x} \,. \tag{5.3}$$

Podobně lze vyjádřit maximální deformaci γ_{max} na povrchu tyče, kde ρ=r:

$$\gamma_{max} = r \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi_x}{\mathrm{d}x} \,. \tag{5.4}$$

Z rovnic (5.3) a (5.4) eliminujeme $\mathrm{d}\varphi_x$ a vyjádříme obecnou smykovou deformaci γ v závislosti na maximální smykové deformaci na povrchu tyče γ_{max} rovnicí:

$$\gamma = \frac{\rho}{r} \cdot \gamma_{max} \,. \tag{5.5}$$

5.1.3 Napětí v pružné oblasti

Pro odvození smykových napětí vznikajících při kroucení lze využít rovnici (5.5). Obě strany rovnice vynásobíme modulem pružnosti ve smyku G a získáme vztah:

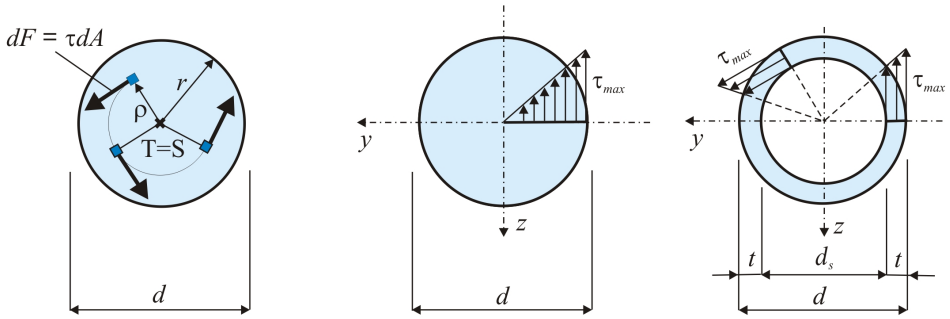
$$G \cdot \gamma = G \cdot \frac{\rho}{r} \cdot \gamma_{max} \,. \tag{5.6}$$

V pružné oblasti platí Hookeův zákon pro smyková napětí (2.21) a užitím tohoto zákona lze psát:

$$\tau = G \cdot \frac{\rho}{r} \cdot \gamma_{max} \tag{5.7}$$

a dále:

$$\tau = \frac{\rho}{r} \cdot \tau_{max} \ . \tag{5.8}$$



Obr. 5.6 Smyková napětí v kruhovém a mezikruhovém průřezu

Z rovnice vyplývá (5.8), že smykové napětí v kruhové tyči v pružném stavu se mění lineárně s rostoucí vzdáleností od osy prutu ρ. Na obrázku 5.6 je ukázáno rozložení smykového napětí v kruhovém průřezu o poloměru r a mezikruhovém průřezu. Z rovnice (5.7) lze odvodit minimální napětí na vnitřní straně mezikruhového průřezu, kde r_s je vnitřní poloměr a r je vnější poloměr mezikruží:

$$\tau_{min} = \frac{r_s}{r} \cdot \tau_{max} \ . \tag{5.9}$$

Nahrazením smykového napětí τ v rovnici (5.2) vztahem z rovnice (5.8) získáme vztah:

$$T = \int_A \rho \cdot \tau \, \mathrm{d}A = \frac{\tau_{max}}{r} \int_A \rho^2 \mathrm{d}A. \tag{5.10}$$

Integrál v posledním členu reprezentuje polární moment setrvačnosti průřezu I_p ke středu kruhu O. Lze tedy psát:

$$T = \frac{\tau_{max}}{r} \cdot I_p, \tag{5.11}$$

nebo při vyjádření napětí lze získat **rovnici pro prosté kroucení** ve tvaru:

$$\tau_{max} = \frac{T}{I_p} \cdot r. \tag{5.12}$$

Smykové napětí je úměrné vzdálenosti od středu kruhu (těžiště průřezu) a jeho maximální hodnoty dosahuje na okraji ve vzdálenosti poloměru r. V obecném místě ve vzdálenosti ρ od těžiště průřezu se smykové napětí vypočte:

$$\tau = \frac{T}{I_p} \cdot \rho. \tag{5.13}$$

Průřezová charakteristika pro namáhání kroucením je tedy **polární moment setrvačnosti** I_p [$\mathtt{m}^4$], který je pro kruhový průřez shodný s **momentem tuhosti v kroucení** I_t, kde r je poloměr kruhového průřezu, d je průměr kruhového průřezu:

$$I_t = I_p = \frac{\pi \cdot r^4}{2} = \frac{\pi \cdot d^4}{32}. \tag{5.14}$$

Odvozené vztahy platí rovněž pro prut mezikruhového průřezu s tím, že jeho polární moment setrvačnosti a tedy i moment tuhosti v kroucení se vypočte podle vztahu:

$$I_t = I_p = \frac{\pi \cdot (r^4 - r_s^4)}{2} = \frac{\pi \cdot (d^4 - d_s^4)}{32}. \tag{5.15}$$

5.1.4 Úhel zkroucení v pružné oblasti

Pro odvození vzájemného pootočení koncových průřezů φ_l (úhel zkroucení) podle obrázku 5.7 lze využít rovnici pro výpočet maximální deformace na obvodu pláště γ_{max} (5.4) v obecném řezu x:

$$\gamma_{max} = r \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi_x}{\mathrm{d}x} \tag{5.16}$$

a dále Hookeova zákona v prostém smyku (2.21):

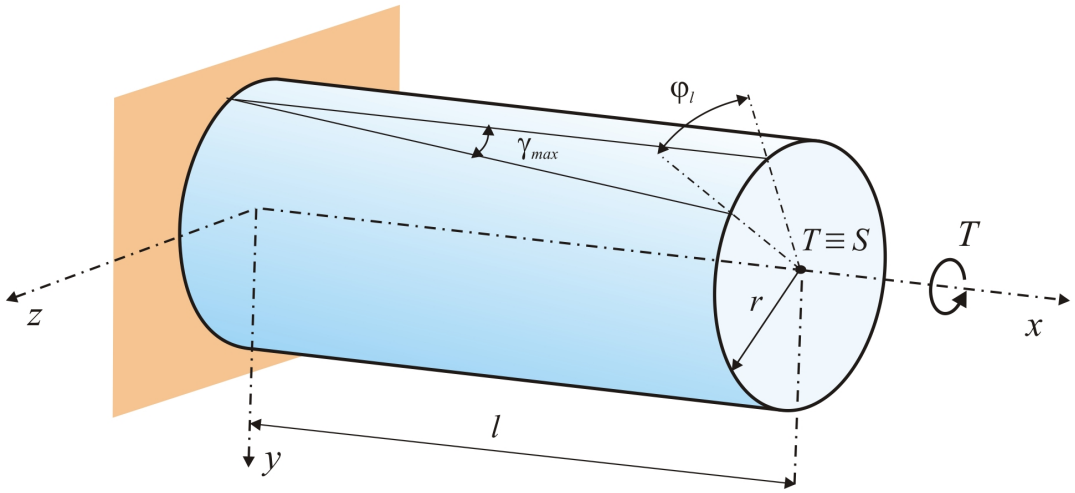
$$\gamma_{max} = \frac{\tau_{max}}{G} = \frac{T \cdot r}{G \cdot I_p}\ . \tag{5.17}$$

Porovnáním pravých stran rovnic (5.16) a (5.17) dostaneme výraz:

$$r \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi_x}{\mathrm{d}x} = \frac{T \cdot r}{G \cdot I_p}\ . \tag{5.18}$$

Vyjádřením diferenciálu úhlu zkroucení $\mathrm{d}\varphi_x$ z (5.18) získáme vztah:

$$\mathrm{d}\varphi_x = \frac{T}{G \cdot I_p} \cdot \mathrm{d}x\ . \tag{5.19}$$



Obr. 5.7 Deformace krouceného prutu γ_{max}, pootočení φ_l

Deformaci krouceného prutu φ_x v obecném místě x lze získat integrací **diferenciální rovnice kroucení přímého prutu** (5.19). Pro pootočení průřezu v obecném místě potom platí vztah:

$$\varphi_x(x) = \int \frac{T}{GI_p} \mathrm{d}x + C, \tag{5.20}$$

v němž integrační konstantu C určíme z podmínky, že v místě uložení je pootočení nulové. Pokud je prut uložen v počátku souřadnicové soustavy (x=0), je tato konstanta rovna nule. Pro základní případ prutu stálého průřezu ($I_t = konst.$) zatíženého koncovým zkrucujícím momentem (vnitřní síla kroutícího momentu je konstantní po celé délce prutu) je průběh pootočení po délce prutu lineární.

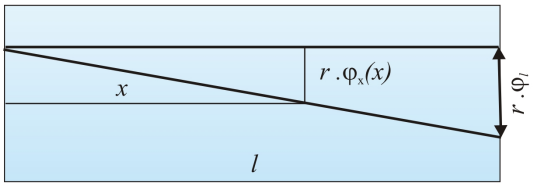
$$\varphi_x(x) = \int \frac{T}{GI_p} \mathrm{d}x = \frac{T}{GI_p} \int 1 \mathrm{d}x = \frac{T}{GI_p} \cdot x. \tag{5.21}$$

Původně přímá podélná vlákna se deformují do tvaru šroubovice (na rozvinutém plášti jsou to skloněné přímky).

Vzájemné pootočení koncových průřezů čili **úhel zkroucení** lze získat dosazením za obecnou vzdálenost x délku prutu l:

$$\varphi_l = \frac{T \cdot l}{G \cdot I_p} \tag{5.22}$$

Tento vztah lze pokládat za formulaci **Hookeova zákona pro základní případ kroucení prutu**. Sestává-li prut z několika úseků (i=1,2,...,n), ve kterých je konstantní kroutící moment T_i, polární moment setrvačnosti I_{pi} a modul pružnosti

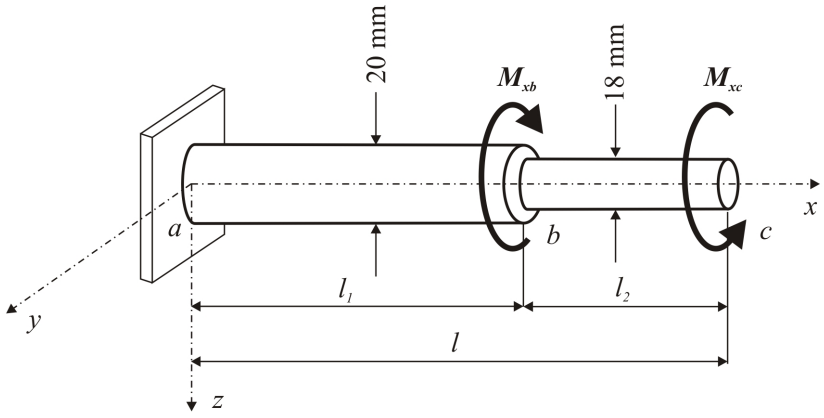


Obr. 5.8 Rozvinutý plášť

ve smyku G_i, potom vzájemné pootočení konců prutu lze určit součtem pootočení po dílčích úsecích:

$$\varphi_l = \sum \frac{T_i \cdot l_i}{G_i \cdot I_{pi}} \,. \tag{5.23}$$

Příklad 5.1. Dvě tyče kruhového průřezu jsou tuze spojeny v bodě b a vetknuty do zdi v bodě a podle obr. 5.9. Zatížení tyče je dáno vějšími kroutícími momenty M_{xb} a M_{xc} v bodě b a c. Určete smykové napětí, které vznikne na obou úsecích l_1 a l_2, úhel zkroucení v bodě b a na volném konci c a vykreslete průběh smykového napětí v obou tyčích. Konkrétní vstupní údaje jsou uvedeny v tabulce 5.1.



Obr. 5.9 Statické schéma tyče

Řešení. Výpočet lze řadit do následujících výpočetních částí:

1. **Reakce a vnitřní kroutící T momenty:**
   Ze statické podmínky rovnováhy $\sum M_{i,x} = 0$ lze určit momentovou reakci ve vetknutí podle obrázku 5.10. Znaménko vnějších kroutících momentů M_x (zatížení i podporové momenty) je uvažováno tak, že díváme-li se proti ose prutu x, tak

Celková délka tyče l:	$0,3$ m
Délka 1.úseku l_1:	$0,2$ m
Délka 2.úseku l_2:	$0,1$ m
Kroutící momentové zatížení M_{xb}:	$0,15$ kNm
Kroutící momentové zatížení M_{xc}:	$0,05$ kNm
Průměr tyče na 1.úseku d_1:	$0,020$ m
Průměr tyče na 2.úseku d_2:	$0,018$ m
Polární moment setrv. na 1.úseku $I_{p,1}$:	$\frac{1}{32} \cdot \pi \cdot 0,020^4 = 1,5708 \cdot 10^{-8}$ m^4
Polární moment setrv. na 2.úseku $I_{p,2}$:	$\frac{1}{32} \cdot \pi \cdot 0,018^4 = 1,0306 \cdot 10^{-8}$ m^4
Modul pružnosti oceli v tahu a tlaku E:	$2,1 \cdot 10^{11}$ Pa
Poissonův součinitel ν:	$0,3$ [-]
Modul pružnosti oceli ve smyku G:	$\frac{E}{2 \cdot (1+\nu)} = 80,8 \cdot 10^9$ Pa

Tab. 5.1 Vstupní údaje příkladu 5.1

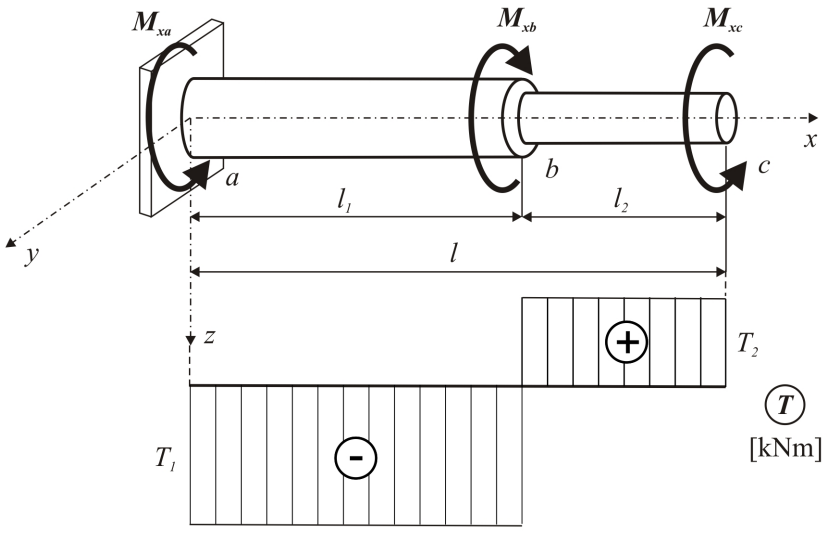
moment otáčející proti směru chodu hodinových ručiček je brán kladně:

$$M_{xa} - M_{xb} + M_{xc} = 0 \Rightarrow M_{xa} = 0,10[\mathtt{kNm}] \tag{5.24}$$

Vnitřní síly momentu v kroucení T podle obrázku 5.10 a definice uvedené v 10.16:

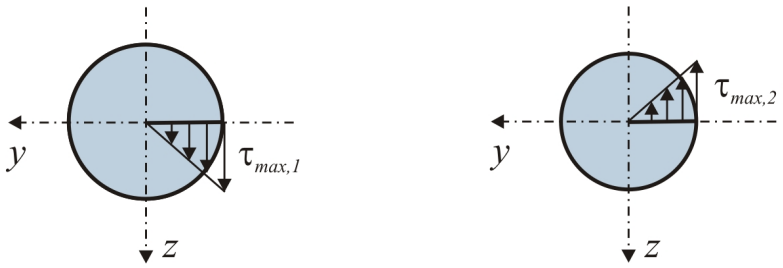
$$T_1 = -M_{xa} = -0,10[\mathtt{kNm}] \tag{5.25}$$

$$T_2 = -M_{xa} + M_{xb} = -0,10 + 0,15 = 0,05[\mathtt{kNm}] \tag{5.26}$$



Obr. 5.10 Průběh kroutících momentů T

2. **Výpočet smykového napětí na úsecích l_1 a l_2:**



Obr. 5.11 Průběh smykového napětí v tyči na úseku l_1 (vlevo) a l_2 (vpravo)

Hodnota smykového napětí τ_1 na úseku l_1:

$$\tau_{1,max} = \frac{T_1}{I_{p,1}} \cdot r_1 = \frac{-0,10 \cdot 10^3}{1,5708 \cdot 10^{-8}} \cdot 0,010 = -63,66 \cdot 10^6 [\mathtt{Pa}] = -63,66 [\mathtt{MPa}] \quad (5.27)$$

Hodnota smykového napětí τ_2 na úseku l_2:

$$\tau_{2,max} = \frac{T_2}{I_{p,2}} \cdot r_2 = \frac{0,05 \cdot 10^3}{1,0306 \cdot 10^{-8}} \cdot 0,009 = 43,66 \cdot 10^6 [\mathtt{Pa}] = 43,66 [\mathtt{MPa}] \quad (5.28)$$

3. **Výpočet úhlu zkroucení v bodě b a na volném konci c:**
Úhel zkroucení φ_b v bodě b:

$$\varphi_b = \frac{T_1 \cdot l_1}{G \cdot I_{p,1}} = \frac{-0,1 \cdot 10^3 \cdot 0,20}{81 \cdot 10^9 \cdot 1,5708 \cdot 10^{-8}} = -0,0157 [\mathtt{rad}] = -0,9 [\mathtt{deg}] \quad (5.29)$$

Úhel zkroucení φ_c v bodě c:

$$\begin{aligned} \varphi_c &= \frac{T_1 \cdot l_1}{G \cdot I_{p,1}} + \frac{T_2 \cdot l_2}{G \cdot I_{p,2}} = \frac{-0,1 \cdot 10^3 \cdot 0,20}{81 \cdot 10^9 \cdot 1,5708 \cdot 10^{-8}} + \frac{0,05 \cdot 10^3 \cdot 0,10}{81 \cdot 10^9 \cdot 1,0306 \cdot 10^{-8}} = \\ &= -0,016 + 0,006 = -0,010 [\mathtt{rad}] = -0,6 [\mathtt{deg}] \end{aligned} \quad (5.30)$$

4. **Průběhy napětí v tyči v obou úsecích l_1 a l_1:**
Průběh smykového napětí ve všech průřezech na úseku l_1 je stejný, maximální hodnota je na okraji průřezu a směr odpovídá znaménku vnitřního kroutícího momentu T_1 viz obrázek 5.11. Analogicky je vykresleno smykové napětí na úseku l_2.

▲

5.2 Kroucení prutů obecného průřezu

Řešení odvozené pro kroucení prutu kruhového a mezikruhového průřezu neplatí pro pruty obecného průřezu. Neplatí předpoklad o zachování rovinnosti průřezů - dochází k jejich **deplanaci** (porušení rovinnosti, prohnutí). Pokud není deplanaci bráněno (např. vnějšími vazbami) a může volně proběhnout, jedná se o tzv. **volné kroucení**. V tomto případě nevznikají normálová napětí v průřezu ($\sigma_x = 0$). Je-li bráněno deplanaci, hovoříme o **vázaném kroucení**, při kterém kromě smykových napětí vznikají také napětí normálová. Tato napětí nabývají na významu hlavně u kroucených tenkostěnných prutů otevřeného průřezu a je o nich pojednáno v kapitole 2.

Vnější zatížení u prutů obecného průřezu vyvozuje kroutící účinky k ose, která je spojnicí středů smyku. Střed smyku nemusí být shodný s těžištěm průřezu. U masivních průřezů není tento rozdíl významný, proto jej zanebáváme. U tenkostěnných prutů zejména otevřeného průřezu je třeba tuto skutečnost respektovat.

Obecné řešení **volného kroucení** přímého prutu stálého průřezu vychází ze dvou základních předpokladů:

- příčný tvar průřezů se nemění, každý průřez se pootáčí kolem osy prutu jako tuhý celek,
- normálová napětí v průřezu jsou nulová ($\sigma_x = 0$), vzniká však deplanace, která je stejná ve všech průřezech.

V absolutní hodnotě největší smykové napětí v průřezu se vypočte pomocí průřezového modulu v kroucení W_t [m^3], což je obdoba průřezového modulu v ohybu (6.4):

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_t}. \tag{5.31}$$

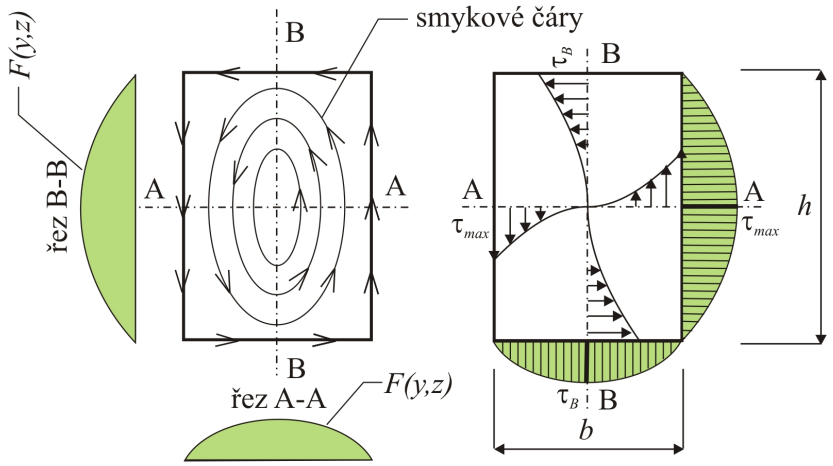
5.2.1 Kroucení masivních průřezů

Matematické odvození všech potřebných vztahů vychází z rovnic pro prostorovou napjatost tělesa. Vede ke stanovení tzv. Prandtlovy funkce napětí $F_{y,z}$, která má na okraji průřezu nulovou hodnotu a z níž vyplývají tyto složky napětí:

$$\tau_{xy} = \frac{\partial F}{\partial z}\,, \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial F}{\partial y}\,. \tag{5.32}$$

Funkce napětí představuje určitou plochu, která se klene nad průřezem (tzv. Prandtlův vrchlík). Vrstevnice tohoto vrchlíku jsou tzv. smykové čáry, smyková napětí působí ve směru tečen těchto čar, velikost smykových napětí v kolmém směru je dána sklonem vrchlíku v určitém místě podle obrázku 5.12. Lze dokázat, že výsledná

smyková síla na jednotku délky, tzv. smykový tok, je mezi dvěma smykovými čarami konstantní. Obrys průřezu představuje rovněž smykovou čáru. Na obrázku 5.12 jsou znázorněny smykové čáry u obdélníkového průřezu. Pro řešení úlohy krouceného prvku obecného průřezu se používají převážně numerické metody řešení parciálních diferenciálních rovnic - např. metoda sítí nebo metoda konečných prvků.



Obr. 5.12 Smyková napětí v prutu obdélníkového průřezu při kroucení

Výsledky podrobnější analýzy vedou ke stanovení momentu tuhosti v kroucení I_t a průřezového modulu v kroucení W_t. Moment tuhosti v kroucení I_t se získá z funkce napětí $F_{y,z}$ (odvození v [20] kapitola 9.6) podle vztahu:

$$I_t = \frac{2}{G\theta} \cdot \int F(y,z)\mathrm{d}A. \tag{5.33}$$

Největší smykové napětí v průřezu se vypočte podle (5.31).

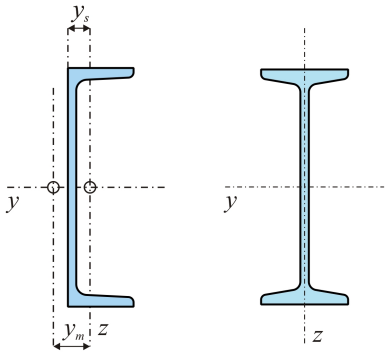
Pro **obdélníkový průřez** o stranách b, h (b<h) jsou odvozeny řešením obecné úlohy v [20] kapitola 9.6 bezrozměrné součinitele α a β a platí:

$$I_t = \alpha b^3 h, \quad W_t = \beta b^2 h. \tag{5.34}$$

Hodnoty součinitelů α a β jsou číselně uvedeny opět v [20] kapitola 5.2. Maximální napětí vznikají ve středech delších stran obdélníka, ve vrcholech jsou rovna nule podle obrázku 5.12.

5.2.2 Kroucení tenkostěnných prutů otevřeného průřezu

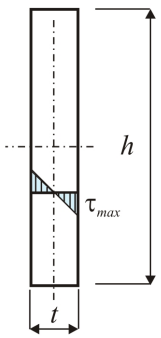
1. **Volné kroucení tenkostěnných prutů otevřeného průřezu**
   Obecně tenkostěnné pruty otevřeného průřezu (např. profily na obrázku 5.13) mají velmi malou tuhost při namáhání kroucením. Při poměrně nízké hodnotě maximálního smykového napětí dochází k velkému úhlu zkroucení.



Obr. 5.13 Tenkostěnné pruty otevřeného průřezu

Tenkostěnné pruty jsou složeny z dílčích stěn obvykle obdélníkového průřezu, u nichž je tloušťka mnohem menší než výška (šířka). Příčný řez sestává z velmi protáhlých obdélníkových částí viz obrázek 5.14, pro které platí:

$$I_t = \frac{1}{3}t^3 h, \quad W_t = \frac{1}{3}t^2 h = \frac{I_t}{t}. \tag{5.35}$$



Obr. 5.14 Kroucená stěna tenkostěnného profilu

V případě zakřivené střednice výškou h rozumíme délku rozvinuté střednice. Moment tuhosti v kroucení průřezu složeného z více úzkých obdélníků lze určit součtem dílčích obdélníků s jistou korekcí součinitelem η, který vyjadřuje vliv poměru t/h nebo zaoblení průřezu:

$$I_t = \eta \sum I_{ti}. \tag{5.36}$$

Součinitelé η jsou číselně uvedeny např. v tabulce v [20] kapitola 5.3 podle typu průřezu ocelového nosníku. Největší napětí vznikne v části s největší tloušťkou t_{max}, kde je minimální hodnota průřezového modulu v kroucení:

$$W_t = W_{t,min} = \frac{I_t}{t_{max}}. \tag{5.37}$$

Maximální smykové napětí v tenkostěnném prutu otevřeného průřezu lze vyjádřit podle vztahu (5.31). Tyto hodnoty smykových napětí neplatí v místech vzájemného styku stěn, kde vznikají koncentrace napětí závislé na detailním uspořádání styku (zaoblením vnitřních koutů se koncentrace snižuje).

2. **Vázané kroucení tenkostěnných prutů otevřeného průřezu**
Vázané kroucení obzvlášť u tenkostěnných prutů otevřeného průřezu nelze zanedbat, protože tyto průřezy mnohem více deplanují než průřezy masivní. Je-li zabráněno deplanaci např. dokonalým vetknutím konce prutu I-profilu, pásnice se ohýbají a vznikají v nich také normálová napětí σ_x. V průřezech vznikají dílčí ohybové momenty, které tvoří rovnovážnou soustavu charakterizovanou tzv. bimomentem B. V pásnicích vznikají také dílčí posouvající síly V vzájemně opačného smyslu. Volné a vázané kroucení se společně podílejí na přenesení účinku kroucení. Od dílčích posouvajících sil vznikají v pásnicích smyková napětí jako v ohýbaném prutu obdélníkového průřezu, která se superponují se smykovými napětími od volného kroucení. Takže při vázaném kroucení vznikají napětí normálová σ_x, napětí smyková od volného kroucení a napětí smyková od vázaného kroucení.

5.2.3 Kroucení tenkostěnných prutů uzavřeného průřezu

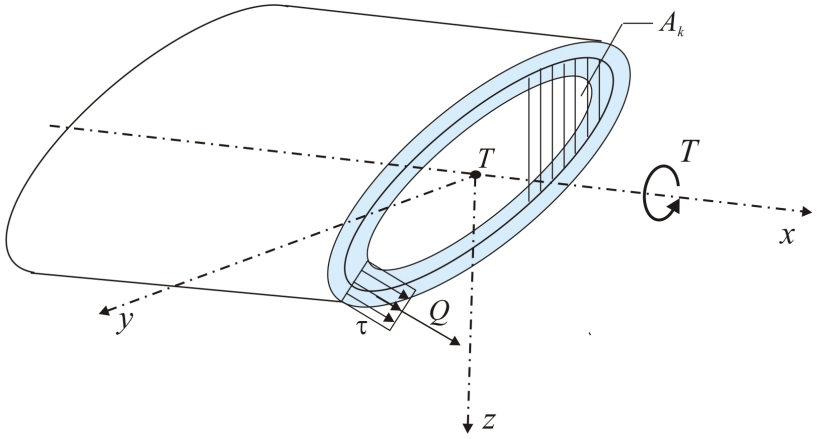
V kroucených tenkostěnných prutech uzavřeného průřezu vzniká zcela odlišné rozložení smykových napětí než u průřezů otevřených. Nejjednodušším případem je mezikruhový průřez viz obrázek (5.6). Je-li tloušťka t relativně malá, lze přibližně předpokládat, že smyková napětí jsou konstantní podél celé tloušťky a působí ve směru tečny vůči obrysu (střednici průřezu) (5.15). **Smykový tok** - výslednice Q [kN/m] smykových napětí v libovolném řezu je konstantní. Maximální smykové napětí vzniká v nejužším místě průřezu a pro jeho výpočet lze použít vztah 5.31.

Průřezový modul v kroucení pro tenkostěnné uzavřené průřezy (Bredtův vzorec) se vypočte podle vztahu:

$$W_t = 2 \cdot A_k \cdot t_{min}, \tag{5.38}$$

kde A_k je plocha ohraničená střednicí průřezu, t_{min} je tloušťka v nejužším místě průřezu.

Tuhost v kroucení se vypočte pomocí křivkového integrálu, který se vztahuje na celou délku střednice průřezu (tzv. Bredtova tuhost v kroucení):



Obr. 5.15Kroucení tenkostěnného prutu uzavřeného průřezu

$$I_t = \frac{4 \cdot A_k^2}{\oint \frac{ds}{t(s)}}, \tag{5.39}$$

U často se vyskytujících průřezů s tloušťkou t_s po částech konstantní se vztah (5.39) změní na výraz:

$$I_t = \frac{4 \cdot A_k^2}{\sum \frac{h_i}{t_i}}. \tag{5.40}$$

5.3 Návrh a posudek prutu namáhaného kroucením

5.3.1 Mezní stavy únosnosti

Tato kapitola je věnována dimenzování prvků namáhaných kroucením. Podle [4] musí návrhová hodnota vnitřní síly kroutícího momentu T_{Ed} v každém průřezu splňovat podmínku:

$$\frac{T_{Ed}}{T_{Rd}} \leqq 1,0\ , \tag{5.41}$$

která je analogická vyjádření:

$$T_{Ed} \leqq T_{Rd}\ . \tag{5.42}$$

Ve výrazech (5.41) a (5.42) představuje veličina T_{Rd} tzv. **únosnost prvku z hlediska kroucení**, která odpovídá maximální přípustné návrhové hodnotě kroutícího

momentu v nosném prvku. Vycházíme z požadavku, že smyková napětí τ_{max} v krouceném prvku nesmí překročit maximální dovolenou hodnotu τ_{dov}.

Hodnota dovoleného smykového napětí pro ocel se vypočte odvozením z meze kluzu oceli podle vztahu:

$$\tau_{dov} = \frac{f_{yd}}{\sqrt{3}} \ \text{[MPa]}. \tag{5.43}$$

Pro ostatní materiály je hodnota τ_{dov} dána příslušnými normami.

Pro podmínku spolehlivosti tedy platí:

$$\tau_{max} \leqq \tau_{dov} \ . \tag{5.44}$$

Podmínku spolehlivosti (5.44) můžeme dále doplnit vztahem (5.12) pro výpočet smykového napětí τ_{max}, určeného z návrhové hodnoty posouvající síly T_{Ed} :

$$\tau_{max} = \frac{T}{I_p} \cdot r \leqq \tau_{dov} \ . \tag{5.45}$$

Pro ocel potom bude platit:

$$\tau_{max} = \frac{T_{Ed}}{I_p} \cdot r \leqq \tau_{dov} = \frac{f_{yd}}{\sqrt{3}} = \frac{f_{yk}}{\sqrt{3} \cdot \gamma_M} \ . \tag{5.46}$$

Jednoduchou úpravou nerovnice (5.46) pak můžeme získat i vztah definující požadovanou únosnost z hlediska kroucení T_{Rd} :

$$T_{Ed} \leqq \frac{\tau_{dov} \cdot I_p}{r} = T_{Rd} \ \text{[kNm]}. \tag{5.47}$$

Při návrhu krouceného prvku kruhového průřezu je třeba specifikovat jedinou průřezovou veličinu, vstupující do výpočtu – např. průměr kruhového průřezu d (polární moment I_p nelze jednoduše osamostatnit). Výchozím vztahem je nerovnice (5.45), ze které vyjádříme průměr průřezu d:

$$\frac{T_{Ed}}{I_p} \cdot r = \frac{T_{Ed}}{\frac{\pi \cdot d^4}{32}} \cdot \frac{d}{2} = \frac{16 \cdot T_{Ed}}{\pi \cdot d^3} \leqq \frac{f_{yk}}{\sqrt{3} \cdot \gamma_M} = \tau_{dov} \rightarrow d_{min} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot T_{Ed}}{\pi \cdot \tau_{dov}}} \ , \tag{5.48}$$

kde $d_{\min}$ je minimální (nutná) hodnota průměru kruhového průřezu navrhovaného prvku.

Poznámka 5.2. Při návrhu kroucených prutů kruhového průřezu lze při návrhu a posouzení použít ve vztahu (5.46) nebo (5.47) průřezovou charakteristiku průřezový modul v kroucení, kde W_t pro kruhový průřez se vypočte podle vzorce $W_t = \frac{I_p}{r}$, pro mezikruhový průřez je třeba ve výpočtu použít vnější r - počítáme maximální napětí i únosnost na okraji průřezu ve vzdálenosti r od středu.

Poznámka 5.3. Platí dvojí značení minimálních (nutných) veličin: $r_{min} \equiv r_{nut}$, $d_{min} \equiv d_{nut}$, $I_{p,min} \equiv I_{p,nut}$.

5.3.2 Mezní stavy použitelnosti

Pro posouzení kroucením namáhaného prvku podle mezních stavů použitelnosti se používají kritéria spolehlivosti, vycházející z nerovnice:

$$\varphi_{\max} \leqq \varphi_{\lim} \ , \tag{5.49}$$

kde $\varphi_{\max}$ je největší úhel pootočení (deformace) určený z charakteristických hodnot zatížení a veličina označená jako $\varphi_{\lim}$ představuje největší dovolené (mezní, limitní) přetvoření daného nosného prvku.

Při návrhu kroucením namáháného prvku kruhového průřezu podle mezních stavů použitelnosti lze jednoduše vyjádřit průřezovou charakteristiku polární modul I_p. Pokud se jedná o prut s konstantním průřezem ($I_p(x) = \text{konst}$) a konstantní hodnotou normálové síly ($T(x) = \text{konst}$) ve všech průřezech, lze vyjít ze vztahu 5.19:

$$\varphi_{\max} = \frac{T_{Ek} \cdot l}{G \cdot I_p} \leqq \varphi_{\lim} \rightarrow I_p \geqq \frac{T_{Ek} \cdot l}{G \cdot \varphi_{\lim}} \rightarrow I_{p,min} = \frac{T_{Ek} \cdot l}{G \cdot \varphi_{\lim}} \ , \tag{5.50}$$

kde $I_{p,min}$ je minimální (nutná) hodnota polárního momentu nosného prvku.

Příklad 5.4. Ocelová tyč kruhového průřezu je zatížena proměnným zatížením způsobující kroucení volného konce momentem M_x. Navrhněte průměr dané tyče podle mezních stavů únosnosti, poté proveďte posouzení navržené tyče. Statické schéma je zobrazeno na obr. 5.16. Materiál nosníku je Fe360/S235. Konkrétní vstupní údaje jsou uvedeny v tabulce 5.2.

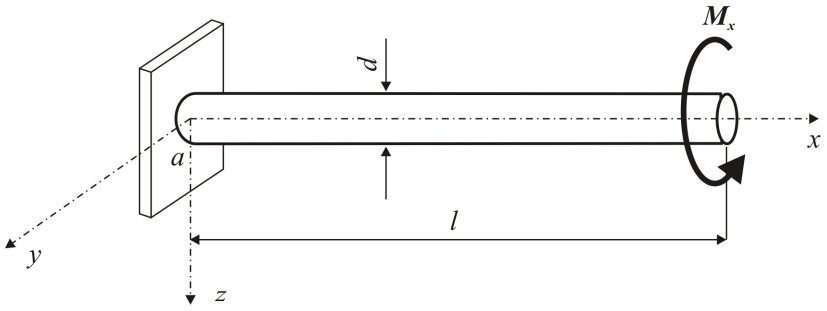
Řešení.

Návrhová hodnota torzního momentu podle obrázku 5.17:

$$T_{Ed} = T_{Ek} \cdot \gamma_Q = 0,50 \cdot 1,50 = 0,75[\mathtt{kNm}] \tag{5.51}$$

Návrhová hodnota pevnosti oceli ve smyku τ_{dov} odvozena z pevnosti v tahu a tlaku podle hodnot z tab.5.2:

$$\tau_{dov} = \frac{f_{yk}}{\gamma_{M0} \cdot \sqrt{3}} = 135,67 \cdot 10^6[\mathtt{Pa}] \tag{5.52}$$



Obr. 5.16 Statické schéma tyče

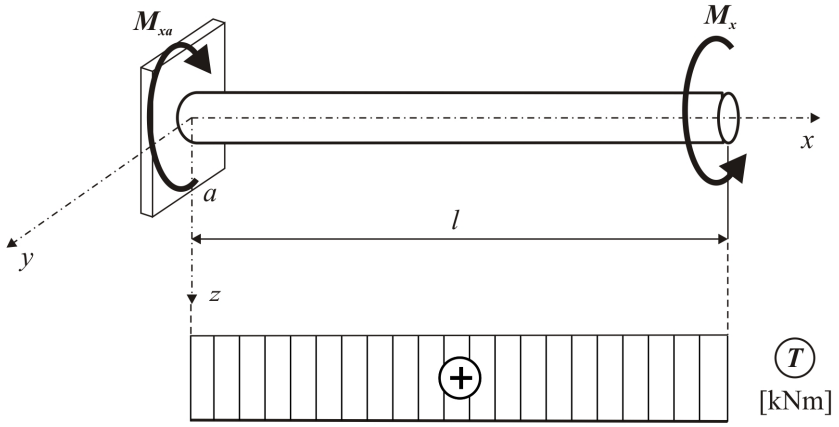
Délka tyče l:	$1,5$ m
Charakteristické kroutící momentové zatížení $M_{x,k}$:	$0,5$ kNm
Součinitel spolehlivosti pro zatížení proměnné γ_Q:	$1,50$[-]
Pevnost oceli v tahu a tlaku f_{yk}:	$235 \cdot 10^6$Pa
Součinitel spolehlivosti materiálu γ_{M0}:	$1,00$[-]

Tab. 5.2 Vstupní údaje příkladu 5.4

1. **Návrh průřezu podle mezních stavů únosnosti:**

   Pro návrh průměru kruhového průřezu kroucené tyče využijeme odvozeného postupu v (5.48):

$$\tau_{max} = \frac{T}{I_p} \cdot r = \frac{T}{\frac{\pi \cdot d^4}{32}} \cdot \frac{d}{2} = \frac{16 \cdot T}{\pi \cdot d^3} \tag{5.53}$$



Obr. 5.17 Průběh kroutících momentů T

Z (5.53) lze vyjádřit minimální hodnotu průměru tyče:

$$d_{nut} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot T_{Ed}}{\pi \cdot \tau_{dov}}} \tag{5.54}$$

Po dosazení do (5.54) konkrétní hodnoty z rovnic (5.52) a (5.51) vychází minimální průměr d_{nut}=0,031[m].

Je navržen průměr tyče d=32[mm].

2. **Posouzení navrženého průřezu tyče:**

Únosnost v kroucení lze určit ze vztahu (5.53):

$$T_{Rd} = \frac{\tau_{dov} \cdot \pi \cdot d^3}{16} = \frac{135,67 \cdot 10^6 \cdot \pi \cdot 0,032^3}{16} = 872,9[\mathtt{Nm}] = 0,87[\mathtt{kNm}]$$

Posudek spolehlivosti podle mezních stavů únosnosti je možné provést podle vztahů (5.41):

$$\frac{T_{Ed}}{T_{Rd}} = \frac{0,75\ [\mathrm{kN}]}{0,87\ [\mathrm{kN}]} \cong 0,9495 \leqq 1,0 \tag{5.55}$$

nebo (5.42):

$$T_{Ed} = 0,75\ [\mathrm{kNm}] \leqq T_{Rd} = 0,87\ [\mathrm{kN}]\ . \tag{5.56}$$

Nerovnice v obou podmínkách spolehlivosti (5.55) i (5.56) jsou splněny.

Navržený průřez vyhovuje na kroucení z hlediska mezních stavů únosnosti.

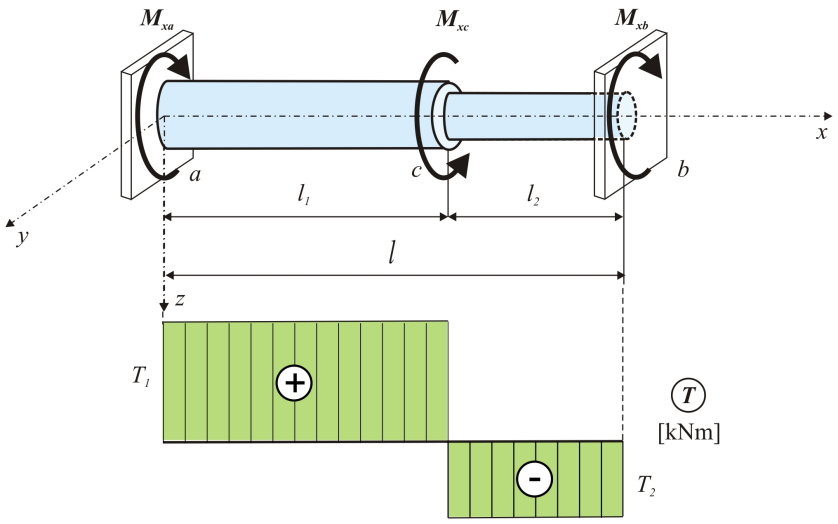
▲

5.4 Staticky neurčité případy kroucení

Staticky neurčité podepření prutu v kroucení vznikne tehdy, je-li zabráněno natočení prutu kolem jeho osy ve více než jednom průřezu, neboť pro výpočet podporových momentů máme k dispozici jen jednu statickou podmínku rovnováhy $\sum M_{x,i} = 0$ a to momentovou k ose prutu x. V tomto případě je třeba podmínky rovnováhy doplnit odpovídajícím počtem **deformačních** (přetvárných) **podmínek**, jejichž počet je roven stupni statické neurčitosti a které vyplývají ze zamezení rotace v podporách. Více o souvislostech statických a přetvárných veličin bylo pojednáno v kapitole 2.2 a 4.4.

U oboustranně vetknutého kroucením namáhaného prutu (viz schéma na obrázku 5.18) je stupeň statické neurčitosti je roven 1. Deformační podmínka pak vychází ze vztahu:

$$\varphi_l = 0\ , \tag{5.57}$$



Obr. 5.18 Statické schéma staticky neurčité kroucením namáhané konstrukce, tvořené oboustranně vetknutým prutem s odstupňovaným průřezem

neboť při daném podepření musí být celková deformace nulová.

K dispozici je momentová podmínka rovnováhy k ose prutu x:

$$\sum M_{i,x} = 0 : \quad -M_{xa} + M_{xc} - M_{xb} = 0 \,, \tag{5.58}$$

a podmínka deformační, daná výrazem (5.57). Při uvážení rozdílných hodnot vnitřních sil T, polárních momentů I_p i modulu pružnosti ve smyku G v obou úsecích prutové konstrukce bude nabývat deformační podmínka tvaru:

$$\varphi l = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{T_1 \cdot l_1}{G_1 \cdot I_{p1}} + \frac{T_2 \cdot l_2}{G_2 \cdot I_{p2}} = 0 \,. \tag{5.59}$$

Vnitřní síly kroutících momentů v obou úsecích jsou rovny (znaménková konvence je vysvětlena v definici 10.16):

$$T_1 = M_{xa} \,, \quad T_2 = -M_{xb} \,, \tag{5.60}$$

jak je ukázáno i v průběhu vnitřních sil kroutících momentů T na obrázku 4.9. Výsledná soustava dvou rovnic o neznámých staticky neurčitých reakcích M_{xa} a M_{xb} je dána podmínkou rovnováhy (5.58) a deformační rovnicí, jež se získá dosazením obou hodnot vnitřních kroutících momentů T_1 a T_2 (5.60) do vztahu (5.59).

Řešením jsou pak analytické vztahy pro výpočet obou podporových momentů M_{xa} a M_{xb}:

$$M_{xa} = M_{xc} \cdot \frac{l_2 \cdot G_2 \cdot I_{p2}}{l_1 \cdot G_2 \cdot I_{p2} + l_2 \cdot G_1 \cdot I_{p1}} \tag{5.61}$$

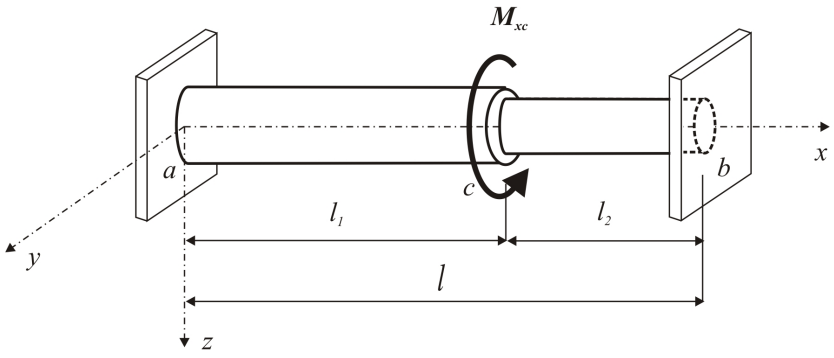
a

$$M_{xb} = M_{xc} \cdot \frac{l_1 \cdot G_1 \cdot I_{p1}}{l_1 \cdot G_2 \cdot I_{p2} + l_2 \cdot G_1 \cdot I_{p1}} , \tag{5.62}$$

a pro konstantní polární moment I_p i modul pružnosti ve smyku G v obou úsecích prutové konstrukce lze získat vztahy:

$$M_{xa} = M_{xc} \cdot \frac{l_2}{l} , \quad M_{xb} = M_{xc} \cdot \frac{l_1}{l} , \tag{5.63}$$

Příklad 5.5. Dvě trubky jsou pevně spojeny v bodě c, oba konce jsou vetknuty jak je zobrazeno na obr. 5.19. V místě spoje je dáno zatížení kroutícím momentem M_{xc}. Určete hodnoty vnitřních sil kroutících mometů T, hodnoty podporových mometů a smykové napětí v obou úsecích l_1 a l_2. Konkrétní vstupní údaje jsou uvedeny v tabulce 5.3.



Obr. 5.19 Statické schéma řešené trubky

Řešení.

1. **Výpočet potřebných průřezových charakteristik:**
   Polární moment setrvačnosti $I_{p,1}$ trubky 1:

$$I_{p,1} = \frac{1}{32} \cdot \pi \cdot (d_1^4 - d_{s1}^4) = \frac{1}{32} \cdot \pi \cdot (0,080^4 - 0,068^4) = 1,922 \cdot 10^{-6} [\mathrm{m}^4] , \tag{5.64}$$

   kde $d_{s1} = d_1 - 2 \cdot t_1$ je vnitřní průměr trubky 1.
   Polární moment setrvačnosti $I_{p,2}$ trubky 2:

$$I_{p,2} = \frac{1}{32} \cdot \pi \cdot (d_2^4 - d_{s2}^4) = \frac{1}{32} \cdot \pi \cdot ((0,060^4 - 0,052^4) = 5,545 \cdot 10^{-7} [\mathrm{m}^4] , \tag{5.65}$$

   kde $d_{s2} = d_2 - 2 \cdot t_2$ je vnitřní průměr trubky 2.

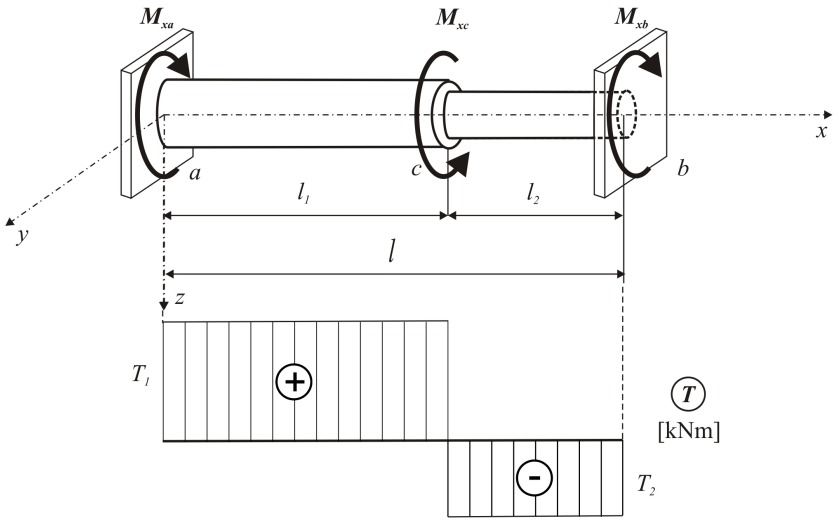
Celková délka tyče l:	$0,9$ m
Délka 1.úseku l_1:	$0,6$ m
Délka 2.úseku l_2:	$0,3$ m
Kroutící momentové zatížení v M_{xc}:	$0,75$ kNm
Vnější průměr trubky na 1.úseku d_1:	$0,080$ m
Tloušťka trubky na 1.úseku t_1:	$0,006$ m
Vnější průměr trubky na 2.úseku d_2:	$0,060$ m
Tloušťka trubky na 2.úseku t_2:	$0,004$ m
Modul pružnosti oceli v tahu a tlaku E:	$2,1 \cdot 10^{11}$ Pa
Poissonův součinitel příčné deformace ν:	$0,3$ [-]
Modul pružnosti oceli ve smyku G:	$\frac{E}{2\cdot(1+\nu)} = 80,8 \cdot 10^9$ Pa

Tab. 5.3 Vstupní údaje příkladu 5.5

2. **Statická podmínka rovnováhy:**
Momentová podmínka rovnováhy $\sum M_{i,x} = 0$ podle obrázku 5.20 nabývá tvaru:

$$-M_{xa} + M_{xc} - M_{xb} = 0. \tag{5.66}$$

V rovnici se vyskytnou dvě neznámé hodnoty reakcí M_{xa} a M_{xb}.



Obr. 5.20 Průběh kroutících momentů T

3. **Deformační podmínka:**
Vzhledem ke dvěma neznámým veličinám M_{xa} a M_{xb} je třeba podmínku rovnováhy doplnit jednou podmínkou deformační. V případě oboustranně vetknutého osově namáhaného prutu vychází deformační podmínka obecně ze vztahu (5.57):

$$\varphi_l = 0 \tag{5.67}$$

Deformační podmínka vyplývá z oboustranného vetknutí dané trubky, čímž je zajištěno, že úhel zkroucení dané tyče je v uložení roven nule. Dosazením výrazu pro výpočet úhlu zkroucení tyče (5.19) lze získat deformační podmínku ve tvaru:

$$\frac{T_1 \cdot l_1}{G \cdot I_{p,1}} + \frac{T_2 \cdot l_2}{G \cdot I_{p,2}} = 0 \tag{5.68}$$

4. **Řešení soustavy rovnic:**

Vnitřní síly T počítány zleva a vyjádřeny pomocí neznámé reakce M_{xa} podle obrázku 5.20:

$$T_1 = M_{xa} \tag{5.69}$$

$$T_2 = M_{xa} - M_{xc} \tag{5.70}$$

Při vyjádření vnitřních sil kroutících momentů prostřednictvím pouze jedné neznámé podporové reakce (5.69) a (5.70), dosazením do deformační podmínky (5.68) lze získat rovnici :

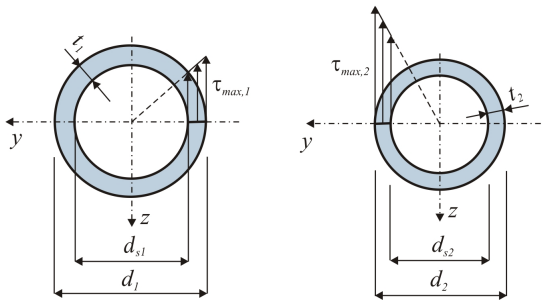
$$\frac{M_{xa} \cdot l_1}{G \cdot I_{p,1}} + \frac{(M_{xa} - M_{xc}) \cdot l_2}{G \cdot I_{p,2}} = 0;$$

jejímž řešením je přímo hodnota neznámé reakce M_{xa}=0,4756 [kNm]. Ze statické podmínky rovnováhy (5.66) lze dopočítat druhou neznámou momentovou reakci M_{xb} = 0,2744 [kNm].
Jsou-li známy reakce, lze dosazením do (5.69) a (5.70) určit vnitřní síly, které jsou znázorněny na obrázku 5.20:

$$T_1 = M_{xa} = 0,4756[\mathtt{kNm}] \tag{5.71}$$

$$T_2 = M_{xa} - M_{xc} = -0,2744[\mathtt{kNm}] \tag{5.72}$$

5. **Výpočet smykových napětí v trubce:**



Obr. 5.21 Smykové napětí v trubce na úseku l_1 (vlevo) a l_2 (vpravo)

Smyková napětí v jednotlivých úsecích l_1 a l_2 lze určit dosazením (5.71) a (5.72) do vztahu (5.12):

$$\tau_{max,1} = \frac{T_1}{I_{p,1}} \cdot \frac{d_1}{2} = \frac{0,4756 \cdot 10^3}{1,922 \cdot 10^{-6}} \cdot \frac{0,08}{2} = 9,9 \cdot 10^6 [\mathtt{Pa}] = 9,90 [\mathtt{MPa}] \qquad (5.73)$$

$$\tau_{max,2} = \frac{T_2}{I_{p,2}} \cdot \frac{d_2}{2} = \frac{-0,2744 \cdot 10^3}{5,545 \cdot 10^{-7}} \cdot \frac{0,06}{2} = -14,85 \cdot 10^6 [\mathtt{Pa}] = -14,85 [\mathtt{MPa}] \qquad (5.74)$$

6. **Průběh smykových napětí v trubce:**
   Smyková napětí v jednotlivých úsecích l_1 a l_2 jsou znázorněna na obrázku 5.21, přičemž maximální hodnota $\tau_{max,1}$, $\tau_{max,2}$ vznikne na vnějším okraji průřezu dané trubky a směry napětí odpovídají znaménkům z rovnic (5.73) a (5.74).

▲

Kapitola 6

Ohyb nosníků

6.1 Rovinný ohyb

Při ohybu nosníku (prutu) vznikají v jeho průřezech ohybové momenty a posouvající síly. Původně přímá osa prutu se změní v rovinnou (případně prostorovou) křivku. V této kapitole se zaměříme na **rovinný ohyb**, při něž vnější síly včetně reakcí leží v rovině xz. Budeme analyzovat napětí a deformace vyvolané působením ohybových momentů a posouvajících sil v průřezu prutu. Nejprve vysvětlíme vztahy pro normálové napětí při prostém ohybu vyvolaném působením ohybových momentů a potom pro smykové napětí od posouvajících sil.

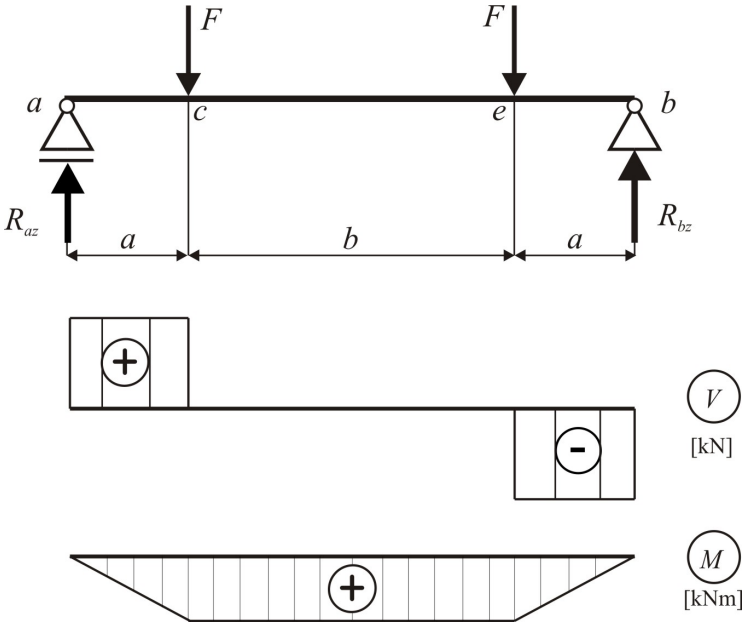
Pro rovinný ohyb v rovině xz platí:

$$N_x = 0, \qquad V_y = 0, \qquad M_x = 0, \qquad M_z = 0, \qquad V_z \neq 0, \qquad M_y \neq 0 \tag{6.1}$$

Poznámka 6.1. U rovinného ohybu v rovině xz jsou nenulové složky vnitřních sil: *ohybový moment* M_y a *posouvající síla* V_z. V případech, kdy je rovina ohybu (xz) zřejmá (pokud nebude uvedeno jinak - bude to ve všech následujících rovinných úlohách), indexy vypouštíme a pak znamená:

$$M = M_y \ \ [\mathrm{kNm}], \qquad V = V_z \ \ [\mathrm{kN}], \qquad q = q_z \ \ [\mathrm{kNm}^{-1}] \, . \tag{6.2}$$

Prostý nosník symetrického průřezu ve svislé rovině (obdélník) s rozpětím L dle obr. 6.1 je symetricky zatížen dvěma osamělýma silama F. Z průběhu vnitřních sil vidíme, že na úseku $\overline{ce}$ je nulová posouvající síla a jedinou vnitřní silou v této části je konstantní (kladný) ohybový moment o velikosti $M = F \cdot a$ [MPa] . Jedná se o základní, nejjednodužší případ ohybu, tzv.**prostý ohyb** a vznikají zde pouze normálová napětí. Na úsecích $\overline{ac}$ a $\overline{eb}$ pak působí ohybový moment i posouvající síla. Vedle normálových napětí působí také smyková.



Obr. 6.1 Symetricky zatížený prostý nosník

Poznámka 6.2. U prutů (zejména tenkostěnných) s výrazně nesouměrným průřezem musí rovina zatížení procházet spojnicí středu smyku průřezu, pokud nemá dojít ke kroucení. Tento případ budeme probírat v kap. 6.4, zatím předpokládáme, že se tento jev neuplatňuje.

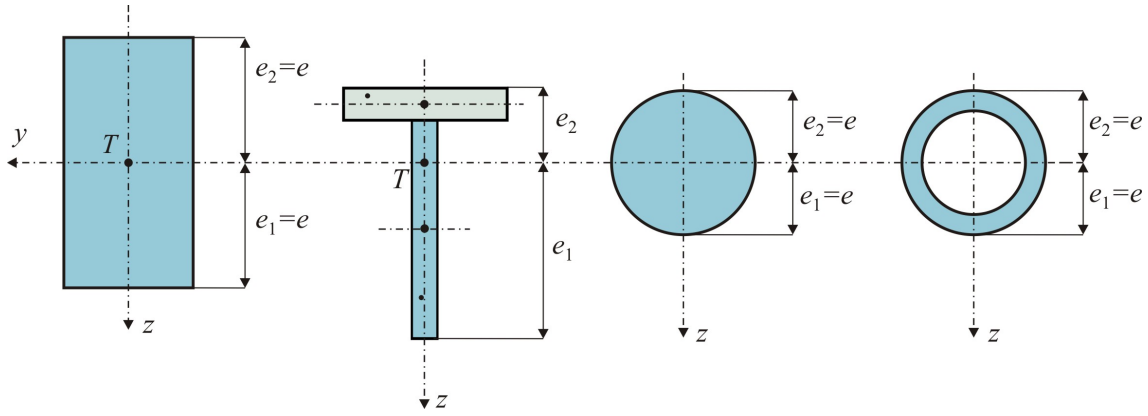
Než přistoupíme k řešení napětí, které na nosníku vznikají, je třeba seznámit se s novými průřezovými charakteristikami, které jsme zatím ve Stavební statice neprobírali. Průřezy prutů, ve kterých sledujeme působící napětí jsou v rovině yz (kolmo k rovině osy prutu xz). Hlavní osy průřezu tedy jsou y a z. Ze vztahů (6.1) vyplývá, že v případě rovinného ohybu je jediný nenulový moment M_y, ($M_x = 0$, $M_z = 0$) proto budeme všechny průřezové charakteristiky popisující napětový stav při rovinném ohybu vztahovat pouze k ose y.

1. **Průřezový modul W_y**

$$W_y = \frac{I_y}{e} \quad [\mathrm{m}^3] \tag{6.3}$$

je dán podílem momentu setrvačnosti I_y a vzdálenosti krajního vlákna e od této osy. U obecného průřezu jsou rozdílné vzdálenosti spodních vláken e_1, a horních vláken e_2 od těžištní osy průřezu. Rozlišujeme tedy dva průřezové moduly W_{y1} a W_{y2} (6.4), obr. 6.2. Pokud je však průřez k ose y symetrický, jsou průřezové moduly k oběma krajním vláknům shodné a není třeba je odlišovat indexy.

$$W_{y1} = \frac{I_y}{e_1} \ [\mathrm{m}^3] \ , \qquad W_{y2} = \frac{I_y}{e_2} \ [\mathrm{m}^3] \ . \tag{6.4}$$



Obr. 6.2 Krajní vlákna průřezů

Poznámka 6.3. V případě **složeného průřezu** získáme W_y tak,že nejprve spočítáme centrální moment setrvačnosti I_y celého průřezu a ten podělíme $e_{1,2}$, viz příklad 6.10. V žádném případě nelze počítat dílčí $W_{y,i}$ a následně sčítat!

Poznámka 6.4. Stejná pravidla jako pro W_y platí i pro průřezový modul W_z vztažený k druhé hlavní ose z.

Průřezové moduly základních jednoduchých obrazců:

Obdélníkový průřez:

$$I_y = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3, \qquad e_1 = e_2 = \frac{h}{2}, \qquad W_{y1} = W_{y2} = \boldsymbol{W_y}_{\square} = \boldsymbol{\frac{1}{6} \cdot b \cdot h^2} \ [\mathrm{m}^3] \ . \tag{6.5}$$

Kruhový průřez:

$$I_y = \frac{\pi \cdot d^4}{64}, \qquad e_1 = e_2 = \frac{d}{2}, \qquad \boldsymbol{W_y}_{\bigcirc} = \boldsymbol{\frac{\pi \cdot d^3}{32}} \ [\mathrm{m}^3] \ . \tag{6.6}$$

Mezikruží, označíme-li vnější průměr D a vnitřní průměr d, pak:

$I_y = \frac{\pi}{64} \cdot (D^4 - d^4), \qquad e_1 = e_2 = \frac{D}{2}$

$$W_{y1} = W_{y2} = \boldsymbol{W_y}_{\odot} = \boldsymbol{\frac{\pi}{32 \cdot D} \cdot (D^4 - d^4)} \ [\mathrm{m}^3] \ . \tag{6.7}$$

Vztahy pro W_y, které jsme definovali dle (6.5) až (6.7) platí **pouze pro výpočet v pružném stavu**, kde platí *Hookeův zákon*. Více v kapitole 6.2.3. Geometrické a základní průřezové charakteristiky vybraných normalizovaných válcovaných **I** a **U** profilů jsou uvedeny v příloze v tabulkách 11.1 a 11.6.

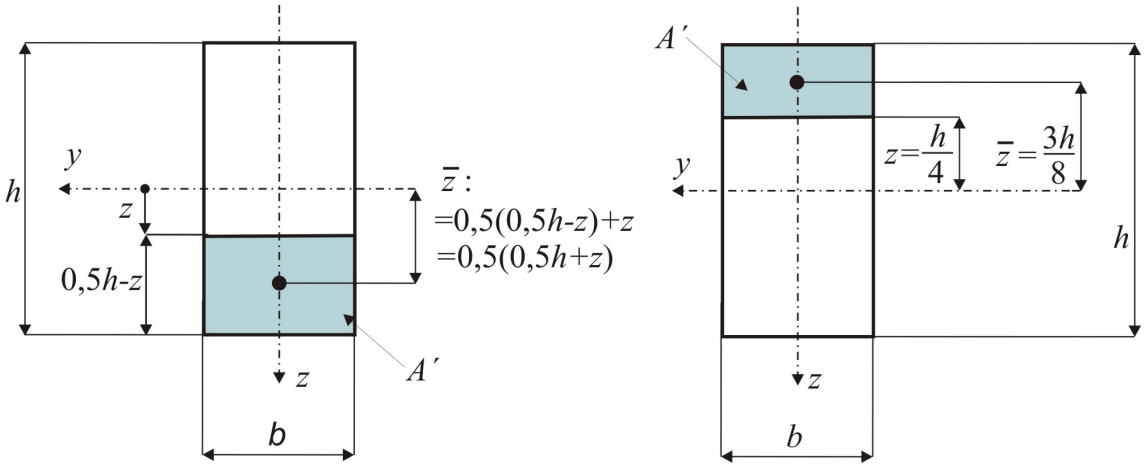
2. **Statický moment části průřezu S_y**

je statický moment přímkou rovnoběžnou s osou y pomyslně oddělené části průřezu o ploše A' vzhledem k těžištní ose celého průřezu y o ploše A (viz obr. 6.3 vlevo):

$$S_y = \int_{A'} \overline{z} \cdot \mathrm{d}A' \ \ [\mathrm{m}^3] \,, \tag{6.8}$$

Kde $\overline{z}$ je vzdálenost těžiště plochy A' od těžište celého průřezu. Jedná-li se o jednoduchou plochu, nebo složený obrazec z jednoduchých ploch, můžeme integrál (6.8) nahradit vztahem:

$$S_y = A' \cdot \overline{z} \ \ [\mathrm{m}^3] \,. \tag{6.9}$$



Obr. 6.3 Schéma oddělené části průřezu

Pro obdélníkový průřez lze odvodit obecný vztah pro výpočet S_y pro libovolnou úroveň pomyslného oddělení:

$$S_y = A' \cdot \overline{z} = [b \cdot (\frac{h}{2} - z)] \cdot [\frac{1}{2} \cdot (\frac{h}{2} + z)] = \frac{b}{8} \cdot (h^2 - 4z^2) \ \ [\mathrm{m}^3] \,. \tag{6.10}$$

Ze vztahu (6.10) je zřejmé, že velikost S_y závisí na vzdálenosti pomyslného oddělení z od těžištní osy y. Velikost se mění parabolicky, *maximální hodnoty* dosahuje, je-li průřez oddělen přímo v těžišti ($z = 0$). Naopak *minimální (nulové) hodnoty* dosahuje S_y celého průřezu ($z = h/2$). Statický moment části průřezu má shodné absolutní hodnoty při výpočtu "spodní" i "horní"oddělené části a platí

pro něj stejná **znaménková konvence** jako pro statický moment síly (kladný proti směru hodinových ručiček).

Poznámka 6.5. V problematice dimenzování prutů není potřeba rozlišovat znaménko statického momentu oddělené části S_y (kap 6.3). V tomto případě budeme uvažovat S_y v absolutní hodnotě. Znaménkovou konvenci pro S_y musíme akceptovat při odvození mezního plastického momentu S_{pl} (kap 6.2.3)

Statický moment oddělené části ve čtvrtině výšky dle (6.9) a obr 6.3 vpravo bude:

$$|S_{y(1/4)}| = A' \cdot \overline{z} = [b \cdot \frac{h}{4}] \cdot [\frac{3}{8} \cdot h] = \frac{3}{32} \cdot b \cdot h^2 \ \ [\mathrm{m}^3] \ . \tag{6.11}$$

Necháváme na čtenáři kontrolu shodnosti výsledků při výpočtu S_y horní oddělené části dle vztahu (6.9) a (6.10).
Často používaná veličina je *maximální* statický moment, tedy statický moment poloviny obdélníkového průřezu, který má po dosazení do (6.10) $z = 0$ hodnotu:

$$S_{y(1/2)} = S_{y(max)} = \frac{b \cdot h^2}{8} \ \ [\mathrm{m}^3] \ . \tag{6.12}$$

Poznámka 6.6. Stejná pravidla jako pro S_y platí i pro statický moment část průřezu S_z vztažený k druhé hlavní ose z.

6.2 Normálová napětí při ohybu

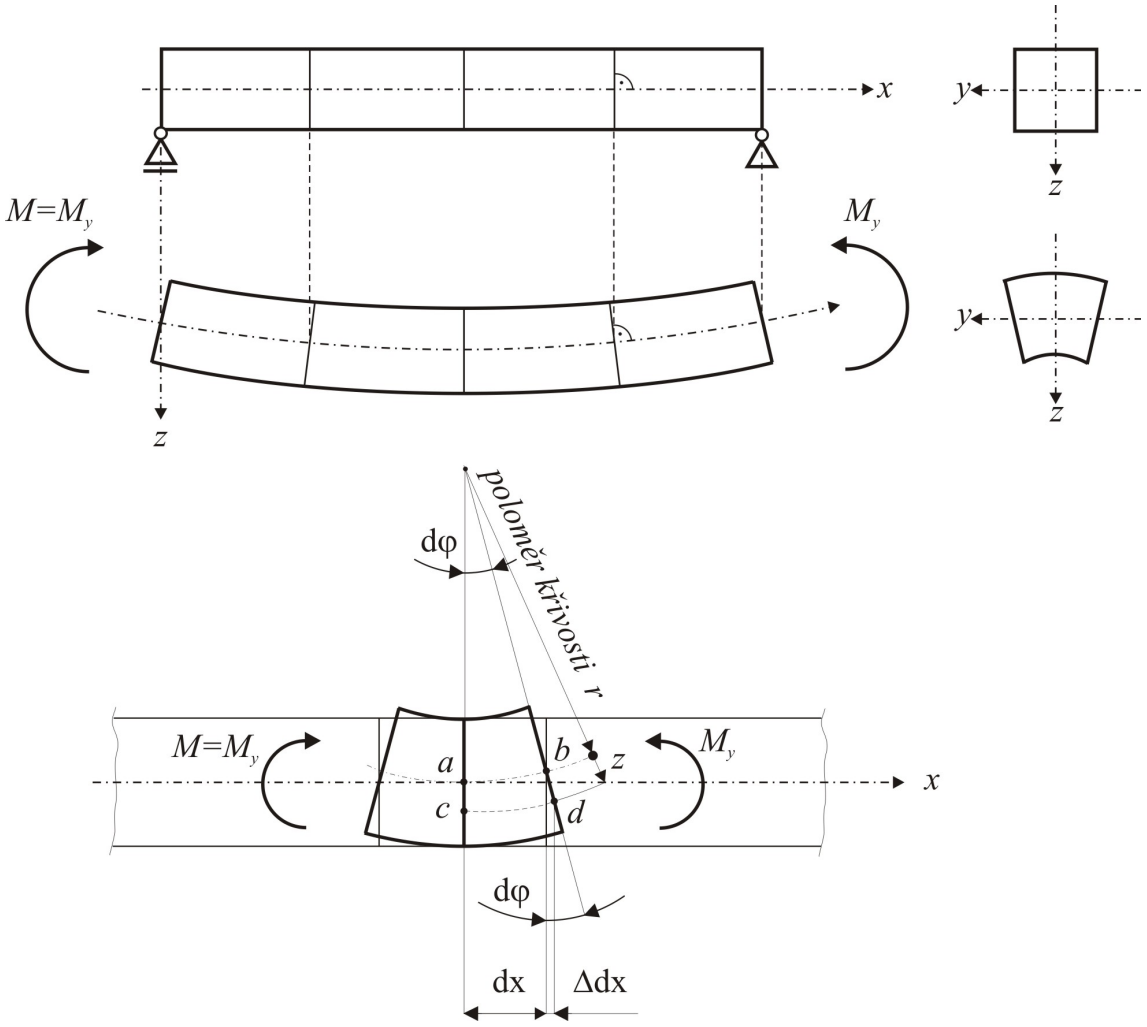
V této kapitole se budeme zabývat **prostým ohybem**, který vzniká například u prostého nosníku dle obr. 6.1 na úseku $\overline{ce}$. U prostého ohybu v rovině xz je neulový pouze M_y, působí zde pouze normálová napětí σ_x a platí:

$$N_x = 0, \qquad V_y = 0, \qquad M_x = 0, \qquad M_z = 0, \qquad V_z = 0, \qquad M_y \neq 0 \tag{6.13}$$

Vysvětlíme si jednak působení nomálových napětí v případě, kdy zatížení materiálu nepřesáhne meze kluzu a pohybuje v tzv. pružném stavu obr. 2.13, a také při pružnoplastickém chování (kap. 2.2).

6.2.1 Ohyb nosníků v pružném stavu

Jak bylo uvedeno výše, v této kapitole budeme vysvětlovat vztahy při prostém ohybu, kdy zatížení materiálu *nepřekročí mez kluzu*, pohybuje se v pružné oblasti a tudíž pro něj platí **Hookeův zákon**, který bude pro odvození využit. U prostého ohybu jsou ohybové momenty shodné ve všech průřezech (obr. 6.1, úsek $\overline{ce}$). Při odvození vztahu pro normálové napětí σ_x vycházíme (podobně jako u prostého tahu a tlaku) ze dvou základních předpokladů:



Obr. 6.4 Deformace ohýbaného nosníku

- Průřezy rovinné a kolmé k ose prutu před deformací zůstanou rovinnými a kolmými k deformované ose (obr. 6.4) (Bernoulliova hypotéza).
- Podélná vlákna na sebe vzájemně netlačí, tzn.:

$$\sigma_y = \sigma_z = 0 \tag{6.14}$$

Na základě prvního předpokladu a obr. 6.4 se dají odvodit vztahy mezi protažením (případně zkrácením) jednotlivých vláken prutu. (Vlákna prutu představují hmotné rovnoběžky s jeho osou.)

Uvažujme nyní elementární úsek prutu dx na obr. 6.4 dole. Vlivem ohybu se průřezy vzájemně pootočí o úhel dφ. Pokud je kladný moment (shodně s obrázky 6.1 a 6.4, spodní vlákna (pod osou) elementu se prodlouží, horní naopak zkrátí. Dochází

zde k elementárním změnám podélných rozměrů Δl. Délka v ose elementu zůstane při prostém ohybu zachována. Její poloměr křivosti označíme r. Jak je zřejmé z obrázku, délku osy elementu je možno vyjádřit jako délku oblouku $\overline{ab} = r \cdot \mathrm{d}\varphi$, délku vlákna $\overline{cd}$ ležícího ve vzdálenosti z od osy prutu $\overline{cd} = (r + z) \cdot \mathrm{d}\varphi$. Tím, že byly původní délky shodné, pro absolutní i relativní změnu délky vlákna $\overline{cd}$ platí:

$$\begin{aligned} \Delta \mathrm{d}x &= \overline{cd} - \overline{ab} = (rz) \cdot \mathrm{d}\varphi - r \cdot \mathrm{d}\varphi = z \cdot \mathrm{d}\varphi, \\ \varepsilon_x &= \frac{\Delta \mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = \frac{z \cdot \mathrm{d}\varphi}{r \cdot \mathrm{d}\varphi} = \frac{z}{r} \ [-] \ . \end{aligned} \tag{6.15}$$

V příčném směru se nosník rovněž deformuje v souladu s rovnicí (2.20). Je-li element ve spodní části tažen, pak v příčném směru se zkracuje úměrně Poissonovu součiniteli příčné deformace ν a naopak (2.20). Tvar obdélníkového průřezu průřezu po deformaci vidíme na obr. 6.4 vpravo. Tyto deformace nemají u nosníků velký význam a nebudeme ji dále sledovat. Využívají se v teorii desek, které se budou probírat ve Statice stavebních konstrukcí II.

Z (6.15) je zřejmé, že poměrná změna délky vlákna je opravdu přímo úměrná jeho vzdálenosti os osy prutu. Dosazením do Hookeova zákona (2.18)potom dostaneme:

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x = \frac{E}{r} \cdot z \ \ [\mathrm{MPa}] \ . \tag{6.16}$$

Z rovnice (6.16) vyplývá, že normálové napětí se při tomto namáhání mění lineárně po výšce průřezu. Také dává důkaz, že vlákna ležící v rovině xy a **procházející osou prutu** ($z = 0$) jsou nezatížená normálovým napětím $\sigma_x = 0$. Tuto rovinu nazýváme *neutrálná rovina nosníku* a její průsečnici s rovinou průřezu yz **neutrálná osa průřezu**.

Poznámka 6.7. Neutrálná osa u rovinného ohybu je totožná s osou prutu. V případě působení ohybového momentu současně s osovou silou, která také vyvozuje normálové napětí, dochází k posunu neutrálné osy. Více v kap. 8 nebo 10.6 příkl. 10.14.

Jelikož neznáme poloměr křivosti r a není nutné jej zjišťovat, byl v [20] kapitole 3.1. z podmínek ekvivalence vnitřních sil odvozen vztah pro výpočet normálových napětí od ohybového momentu:

$$\sigma_x^M = \sigma_x = \frac{M_y}{I_y} \cdot z \ \ [\mathrm{MPa}] \ . \tag{6.17}$$

Zcela analogickým způsobem získáme vztah pro ohyb v rovině xy:

$$\sigma_z = \frac{M_z}{I_z} \cdot y \ \ [\mathrm{MPa}] \ . \tag{6.18}$$

Z rovnice (6.17) získáme hodnotu normálového napětí nejen v hledaném průřezu x, ale i v libovolném bodě tohoto průřezu (v různé vzdálenosti z od osy prutu). Při dimenzování ohýbaných nosníků nás budou nejčastěji zajímat extrémní napětí, která vznikají v krajních vláknech průřezu, pro která platí: $z = e_1$ nebo $z = e_2$. e_1 je vzdálenost **dolního** krajního vlákna od těžištní osy, e_2 pak vzdálenost **horního** krajního vlákna.

Poznámka 6.8. V literatuře se také používá značení $e_{dolní}$ místo e_1 a $e_{horní}$ místo e_2. S tímto dvojím značením se setkáme také u dalších veličin, jako např. σ_x, W_y.

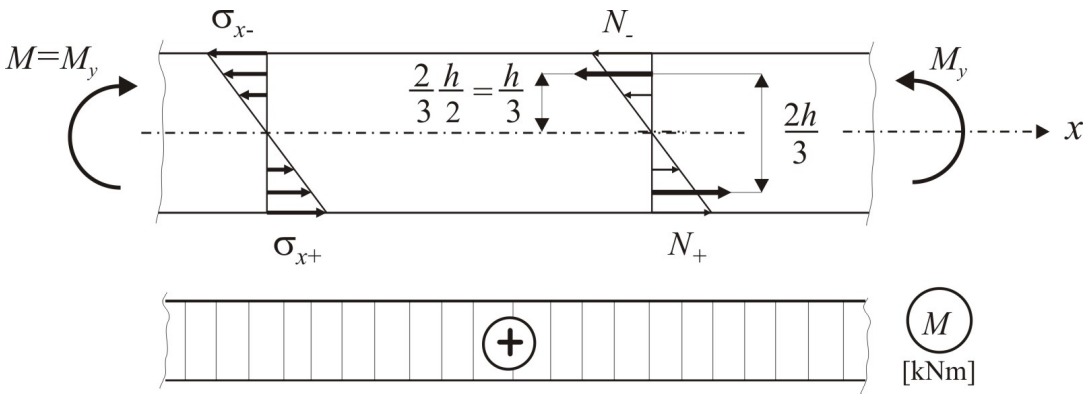
Rovnice (6.17) a (6.18) potom budou mít tvar:

$$\sigma_{x1} = \frac{M_y}{I_y} \cdot e_1 \ , \qquad \sigma_{x2} = \frac{M_y}{I_y} \cdot e_2 \ . \tag{6.19}$$

Dosazením vztahu (6.4) do rovnice (6.19) získáme vztah pro výpočet *extrémních hodnot* normálových napětí v konkrétním průřezu, s tím že index 1 je vztažen k dolním vláknům a index 2 k horním:

$$\sigma_{x1} = \frac{M_y}{W_{y1}} \ \text{[MPa]} \ , \qquad \sigma_{x2} = \frac{M_y}{W_{y2}} \ \text{[MPa]} \ , \tag{6.20}$$

V případě **nesymetrického průřezu**, kdy $e_1 \neq e_2$, je větší napětí v krajním vlákně vzdálenějším od osy prutu. Pro posuzování nosníků je potom rozhodující menší z obou průřezových modulů $W_{y1,2}$, jak je vidět v příkladu 6.10.



Obr. 6.5 Účinky napětí v průřezu

U prostého ohybu je výslednice normálové síly od účinků normálového napětí dle (1.20) **a** (6.1) **nulová** $N = \int_A \sigma_x \, \mathrm{d}A$. Podívejme se nyní na účinek tohoto napětí v dolní a horní polovině zvlášť. Velikost N sil je lineární od nulové

hodnoty v neutrálné ose po extrémní hodnotu (max. i min.) v krajních vláknech. Spodní vlákna obdélníkového průřezu dle obr. 6.5 pod neutrálnou osou jsou tažená (případ, kdy je moment kladný M_+) a jejich výslednici označíme N_+ , výslednici v horních (tlačených) vláknech pak N_- .

$$N_+ = \int_{A_{\frac{1}{2}}} \sigma_{x_+} \, \mathrm{d}A_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \sigma_{x_+} \cdot b \cdot \frac{h}{2} = \sigma_{x_+} \cdot \frac{1}{4} bh \ \ [\mathrm{kN}] \ . \tag{6.21}$$

$$N_- = \int_{A_{\frac{1}{2}}} |\sigma_{x_-}| \, \mathrm{d}A_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot |\sigma_{x_-}| \cdot b \cdot \frac{h}{2} = |\sigma_{x_-}| \cdot \frac{1}{4} bh \ \ [\mathrm{kN}] \ . \tag{6.22}$$

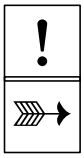
Velikost N sil u symetrického průřezu s konstantní šířkou je přímo úměrná velikosti obrazce napětí (trojúhelník). $\sigma_{x_+} = |\sigma_{x_-}|$. Síly N_+ a N_-, stejně veliké, rovnoběžné, opačně orientované tvoří silovou dvojici. Jejich působiště je v těžišti obrazce napětí $z = \pm\frac{2}{3} \cdot \frac{h}{2} = \frac{h}{3}$. Rameno silové dvojice p je:

$$p = 2 \cdot z = \frac{2}{3} \cdot h \ [\mathrm{m}] \ , \tag{6.23}$$

velikost momentu této dvojice pak bude:

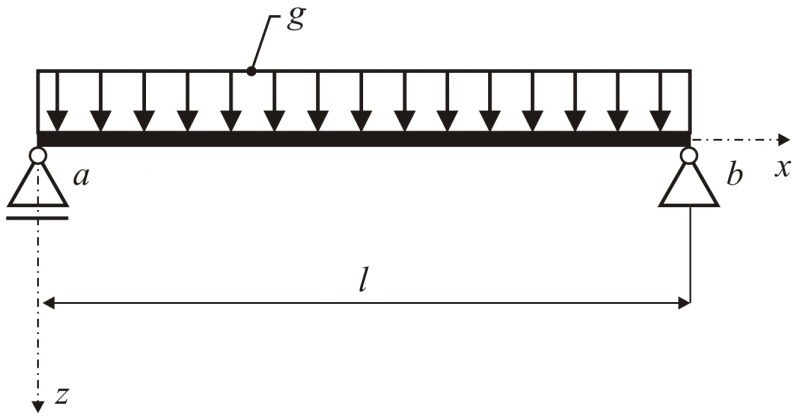
$$M_y = N \cdot p = \sigma_x \cdot \frac{1}{4} bh \cdot \frac{2}{3} h = \sigma_x \cdot \frac{1}{6} bh^2 = \sigma_x \cdot W_y \ \ [\mathrm{kNm}] \ . \tag{6.24}$$

Výsledky rovnic (6.24) a (6.20) potvrzují vztahy (6.5). K tomuto tématu se budeme vracet v kapitole 6.2.3.



Poznámka 6.9. Při určování znaménka normálových napětí ohýbaných nosníku je nutná s spolupráce se znaménkovou konvencí ohybových momentů: Je-li v hledaném průřezu kladný ohybový moment, jsou tažena spodní vlákna a jejich napětí je kladné $\sigma_{x1} \geqq 0$. Horní vlákna jsou tlačena, napětí v nich je záporné $\sigma_{x2} \leqq 0$. U záporného momentu jsou pak znaménka napětí obráceně $\sigma_{x1} \leqq 0$, $\sigma_{x2} \geqq 0$.
Při výpočtu napětí proto doporučujeme čtenáři počítat s absolutní hodnotou ohybového momentu a znaménko doplnit dodatečně, jak je uvedeno v příkladu 6.10 nebo v kap. 10.1, př. 10.5.

Příklad 6.10. Prostě podepřený ocelový nosník, jehož průřez je svařovaný T-profil, je zatížen stálým spojitým rovnoměrným zatížením g. Určete největší normálového napětí, které vznikne v průřezu, a vykreslete průběh tohoto napětí. Statické schéma nosníku je zobrazeno na obr. 6.6. Konkrétní vstupní údaje jsou uvedeny v tabulce 6.1.



Obr. 6.6 Statické schéma řešeného nosníku

Rozpětí nosníku l:	$6,0$ m
Intenzita zatížení g:	$9,8$ kNm^{-1}
Tloušťka stojiny t_w:	$0,010$ m
Výška stojiny h_w:	$0,220$ m
Šířka pásnice b_f:	$0,160$ m
Tloušťka pásnice t_f:	$0,016$ m
Moment setrvačnosti I_y:	$2,54027 \cdot 10^{-5}$ m^4

Tab. 6.1 Vstupní údaje příkladu 6.10

Řešení.
Největší normálové napětí podle obrázku 6.7 a 6.8 vznikne v krajních vláknech průřezu v místě maximálního ohybového momentu.

Maximální ohybový moment(uprostřed rozpětí):

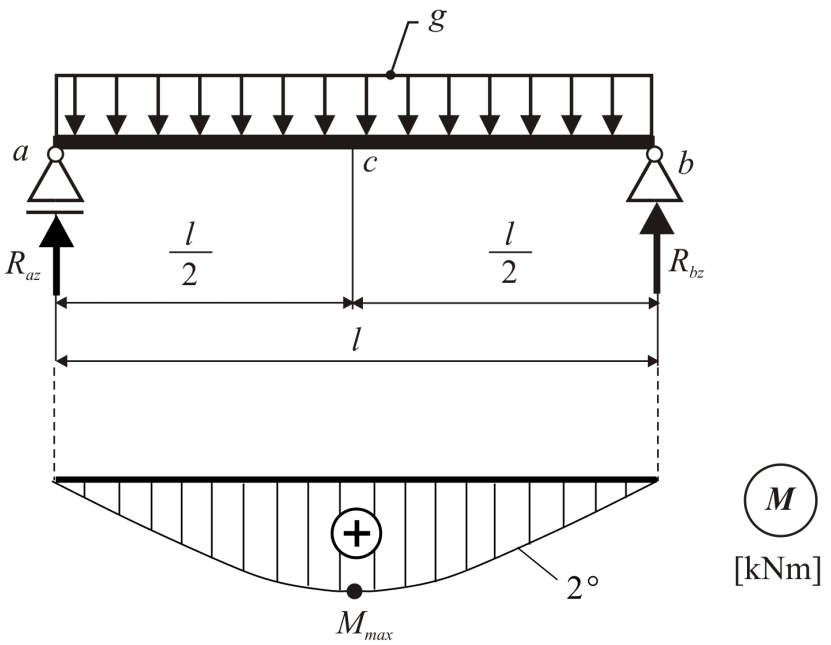
$$M_{max} = \frac{l}{8} \cdot g \cdot l^2 = 44,10[\mathtt{kNm}] \tag{6.25}$$

Výpočet potřebných průřezových charakteristik:

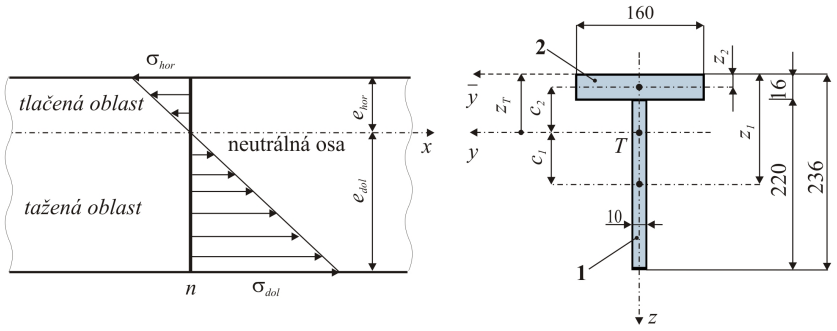
1. Nejdříve je třeba určit polohu těžiště z_T vzhledem k ose $\bar{y}$ podle obrázku 6.8:

$$z_T = \frac{A_1 \cdot z_1 + A_2 \cdot z_2}{A_1 + A_2} = \frac{10 \cdot 220 \cdot 126 + 160 \cdot 16 \cdot 8}{10 \cdot 220 + 160 \cdot 16} = \\ = 62,5\ [\mathtt{mm}] = 0,0625\ [\mathtt{m}]\ . \tag{6.26}$$

2. Je-li známa poloha těžiště složeného průřezu, je možné určit vzdálenost horních vláken od těžiště průřezu $e_{hor} = 62,54 \cdot 10^{-3}$ [m] a vzdálenost dolních vláken od těžiště průřezu $e_{dol} = 173,46 \cdot 10^{-3}$[m] podle obrázku 6.8.



Obr. 6.7 Průběh ohybových momentů řešeného nosníku



Obr. 6.8 Normálového napětí uprostřed rozpětí nosníku (vlevo), průřez nosníku (vpravo)

3. Moment setrvačnosti průřezu Iy:

$$I_y = \sum (I_{y,i} + A_i \cdot c_i^2) = \sum (\frac{1}{12} \cdot b_i \cdot h_i^3 + A_i \cdot c_i^2) \tag{6.27}$$

a po dosazení konkrétních hodnot:

$$\begin{aligned} I_y = &\frac{1}{12} \cdot 10 \cdot 220^3 + 10 \cdot 220 \cdot 63,5^2 + \frac{1}{12} \cdot 160 \cdot 16^3 + \\ &+ 160 \cdot 16 \cdot 54,5^2 = 2,54027 \cdot 10^7 \ [\mathrm{mm}^4] \ . \end{aligned} \tag{6.28}$$

4. Průřezový modul pro horní a dolní část průřezu $W_{y,hor}$, $W_{y,dol}$:

$$W_{y,hor} = \frac{I_y}{\mathrm{e}_{hor}} = \frac{2,54027 \cdot 10^{-5}}{62,54 \cdot 10^{-3}} = 4,0618 \cdot 10^{-4}\ [\mathrm{m}^3] \tag{6.29}$$

$$W_{y,dol} = \frac{I_y}{\mathrm{e}_{dol}} = \frac{2,54027 \cdot 10^{-5}}{173,46 \cdot 10^{-3}} = 1,4644 \cdot 10^{-4}\ [\mathrm{m}^3] \tag{6.30}$$

a) Výpočet normálového napětí:
Z deformace posuzovaného ohýbaného nosníku je zřejmé, že nad neutrálnou osou jsou vlákna průřezu tlačena (normálové napětí má znaménko minus) a pod neutrálnou osou jsou vlákna tažena (normálové napětí má znaménko plus).
Dosazením do vztahu pro výpočet normálového napětí výraz (6.29) nebo (6.30) lze získat napětí v krajních vláknech průřezu:

$$\sigma_{x,hor} = \frac{|M_{max}|}{W_{y,hor}} = \frac{|44,1 \cdot 10^3|}{4,0618 \cdot 10^{-4}} = 108,6 \cdot 10^6[\mathrm{Pa}] = 108,6[\mathrm{MPa}] \tag{6.31}$$

Horní vlákna jsou tlačena, napětí má znaménko minus: $\sigma_{x,hor} = -108,6[\mathrm{MPa}]$

$$\sigma_{x,dol} = \frac{|M_{max}|}{W_{y,dol}} = \frac{|44,1 \cdot 10^3|}{1,4644 \cdot 10^{-4}} = 301,1 \cdot 10^6[\mathrm{Pa}] = 301,1[\mathrm{MPa}] \tag{6.32}$$

Spodní vlákna jsou tažena, napětí má znaménko plus: $\sigma_{x,dol} = 301,1[\mathrm{MPa}]$
Alternativní postup výpočtu:

$$\sigma_{x,hor} = \frac{|M_{max}|}{I_y} \cdot \mathrm{e}_{hor} = \frac{|44,1 \cdot 10^3|}{2,54027 \cdot 10^{-5}} \cdot 62,54 \cdot 10^{-3} = 108,6 \cdot 10^6\ [\mathrm{Pa}]\ , \tag{6.33}$$

$$\sigma_{x,dol} = \frac{|M_{max}|}{I_y} \cdot \mathrm{e}_{dol} = \frac{|44,1 \cdot 10^3|}{2,54027 \cdot 10^{-5}} \cdot 173,46 \cdot 10^{-3} = 301,1 \cdot 10^6\ [\mathrm{Pa}]\ . \tag{6.34}$$

b) Průběh normálového napětí:
Z obrázku 6.8 je zřejmé, že průběh normálového napětí v průřezu je lineární, napětí na neutrální ose je rovno nule. Maximální normálové napětí vznikne ve spodních vláknech nebezpečného průřezu σ_{max}=$\sigma_{x,dol}$ =301,1[MPa] a vlákna jsou tažena. V horních vláknech vznikne napětí $\sigma_{x,hor}$ =-62,54[MPa] a vlákna jsou tlačena.

▲

6.2.2 Návrh a posudek prutu namáhaného ohybem

Tato kapitola je věnována dimenzování ohýbaných nosných prvků z hlediska ohybu. Znamená to, že budeme řešit pouze vliv ohybových momentů a normálových napětí. Vliv smyku na ohýbaný nosník probereme v kapitole 6.3.2. Budeme se zabývat pouze mezním stavem únosnosti, neboť problematika přetvoření ohýbaných nosníků je rozsáhlá a je jí věnována kapitola 7.

Podle [4] musí návrhová hodnota ohybového momentu M_{Ed} v každém průřezu splňovat podmínku:

$$\frac{M_{Ed}}{M_{Rd}} \leqq 1,0 \ , \tag{6.35}$$

která je analogická vyjádření:

$$M_{Ed} \leqq M_{Rd} \ . \tag{6.36}$$

Ve výrazech (6.35) i (6.36) představuje veličina M_{Rd} tzv. ***únosnost ohýbaného prvku***, která odpovídá maximální přípustné návrhové hodnotě ohybového momentu v nosném prvku. Při jejím výpočtu vycházíme z výchozího požadavku, že ***normálové napětí*** $\boldsymbol{\sigma_x}$ v ohýbaném prvku nesmí překročit návrhovou hodnotu pevnosti materiálu v tahu a prostém tlaku, tedy:

$$\sigma_x \leqq f_d \ . \tag{6.37}$$

Podmínku spolehlivosti (6.37) můžeme dále doplnit vztahy (6.20) pro výpočet normálového napětí σ_x, určeného z návrhové hodnoty ohybového momentu M_{Ed}, a výrazem (3.4) pro definování návrhové hodnoty pevnosti materiálu:

$$\sigma_x = \frac{M_{Ed}}{W_{y,menší}} \leqq f_d = \frac{f_k}{\gamma_M} \ \ [\text{MPa}]. \tag{6.38}$$

Poznámka 6.11. Dle kap. 6.2.1 platí: v případě *nesymetrického průřezu* je rozhodující ***menší*** z obou průřezových modulů $W_{y1,2}$, proto ve vztahu (6.38) značení průřezového modulu $W_{y,menší}$ (viz příklad 6.10).

Jednoduchou úpravou této nerovnice pak můžeme získat i vztah definující požadovanou únosnost ohýbaného nosného prvku M_{Rd} :

$$\frac{M_{Ed}}{W_{y,menší}} \leqq \frac{f_k}{\gamma_M} \implies M_{Ed} \leqq \frac{f_k}{\gamma_M} \cdot W_{y,min} = M_{Rd} \ \ [\text{kNm}]. \tag{6.39}$$

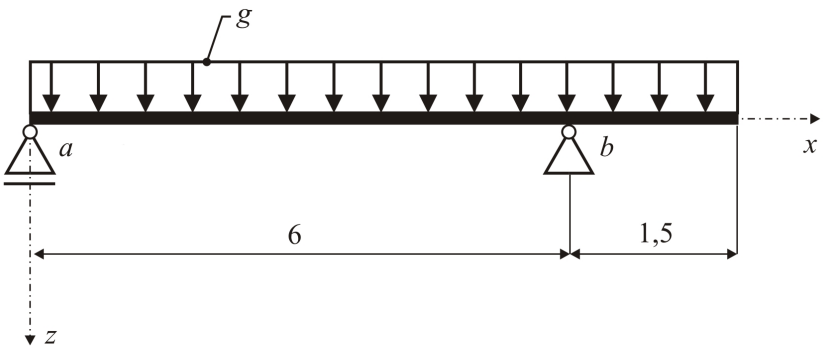
V procesu návrhu ohýbaného nosného prvku je úkolem statika specifikovat jedinou průřezovou charakteristiku, která vstupuje do výpočtu – průřezový modul W_y. Výchozím vztahem pro jeho určení je opět nerovnice (6.38), ze které vyjádříme hledaný průřezový modul W_{min}:

$$\frac{M_{Ed}}{W_y} \leqq \frac{f_k}{\gamma_M} \implies W_y \geq \frac{M_{Ed}}{\frac{f_k}{\gamma_M}} \implies W_{y,\min} = \frac{M_{Ed}}{\frac{f_k}{\gamma_M}} \ [\mathrm{m}^3], \tag{6.40}$$

kde $W_{y,\min}$ je minimální (nutná) hodnota průřezového modulu nosného prvku. Více viz příklad 6.13.

Poznámka 6.12. V literatuře se můžeme setkat se značením minimálních (nutných) veličin s indexem *nut* – například: $W_{min} \equiv W_{nut}$, $A_{min} \equiv A_{nut}$, $I_{min} \equiv I_{nut}$.

Příklad 6.13. Ocelový nosník s převislým koncem je zatížen stálým spojitým rovnoměrným zatížením g podle obr. 6.9. Proveďte návrh a posudek daného nosníku z válcovaného I-profilu podle mezního stavu únosnosti. Materiál nosníku je Fe360/S235. Konkrétní vstupní údaje jsou uvedeny v tabulce 6.2.



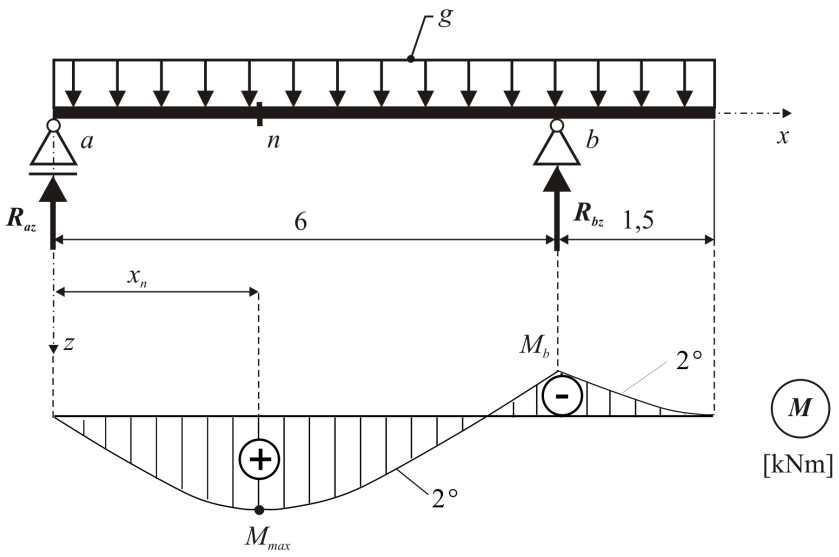
Obr. 6.9 Statické schéma řešeného nosníku

Intenzita rovnoměrného zatížení g_k:	$7,78$ kNm^{-1}
Součinitel spolehlivosti pro zatížení stálé γ_G:	$1,35$ [-]
Pevnost oceli v tahu a tlaku f_{yk}:	$235 \cdot 10^6$ Pa
Součinitel spolehlivosti materiálu γ_{M0}:	$1,00$ [-]

Tab. 6.2 Vstupní údaje příkladu 6.13

Řešení.
Návrhová hodnota intenzity zatížení g_d dle hodnot z tab. 6.2:

$$g_d = g_k \cdot \gamma_G = 7,78 \cdot 1,35 = 10,50 \ [\mathtt{kNm^{-1}}] \ . \tag{6.41}$$



Obr. 6.10 Průběh ohybových momentů řešeného nosníku

Návrhová hodnota pevnosti oceli v tahu a tlaku $f_{y,d}$ podle hodnot z tab. 6.2:

$$f_{y,d} = \frac{f_{y,k}}{\gamma_M} = \frac{235}{1,00} = 235\ [\mathtt{MPa}]\ . \tag{6.42}$$

Maximální ohybový moment v poli podle obrázku 6.10:

$$M_n = R_{az} \cdot x_n - \frac{g_d \cdot x_n^2}{2} = 29,53 \cdot 2,81 - \frac{10,5 \cdot 2,81^2}{2} = 41,59[\mathtt{kNm}] \tag{6.43}$$

Ohybový moment nad podporou b podle obrázku 6.10:

$$M_b = -\frac{g_d \cdot x^2}{2} = -\frac{10,5 \cdot 1,5^2}{2} = -11,81[\mathtt{kNm}] \tag{6.44}$$

Z výsledných hodnot ohybových momentů (6.43) a (6.44) je zřejmé, že návrhová hodnota ohybového momentu pro daný nosník je $M_{Ed} = M_n = 41{,}59$[kNm].

Návrh a posouzení průřezu daného nosníku podle mezního stavu únosnosti:
Válcovaný I-profil je symetrický podle těžištní osy y, takže průřezový modul W_y pro horní a dolní část průřezu je stejný.

a) Návrh průřezu:

$$\sigma_x = \frac{M_y}{W_y} \Rightarrow W_{y,nut} = \frac{M_{Ed}}{f_{y,d}} = \frac{41,59 \cdot 10^3}{235 \cdot 10^6} = 1,7698 \cdot 10^{-4}[\mathtt{m}^3] \tag{6.45}$$

Podle (6.45) je navržen $IPN200$, jehož průřezový modul W_y=$2,14 \cdot 10^{-4}$ [m^3] (viz tabulky normalizovaných průřezů v příloze).

b) Posouzení navrženého průřezu $IPN200$:
Únosnost v ohybu lze určit ze vztahu (6.45):

$$M_{Rd} = \boldsymbol{f}_{y,d} \cdot W_y = 235 \cdot 10^6 \cdot 2,14 \cdot 10^{-4} = 50,29 \cdot 10^3 [\mathtt{Nm}] = 50,29 [\mathtt{kNm}]$$

$$M_{Rd} = 50,29 [\mathtt{kNm}] > M_{Ed} = 41,59 [\mathtt{kNm}]$$

Navržený průřez vyhovuje z hlediska posouzení normálového napětí za ohybu.

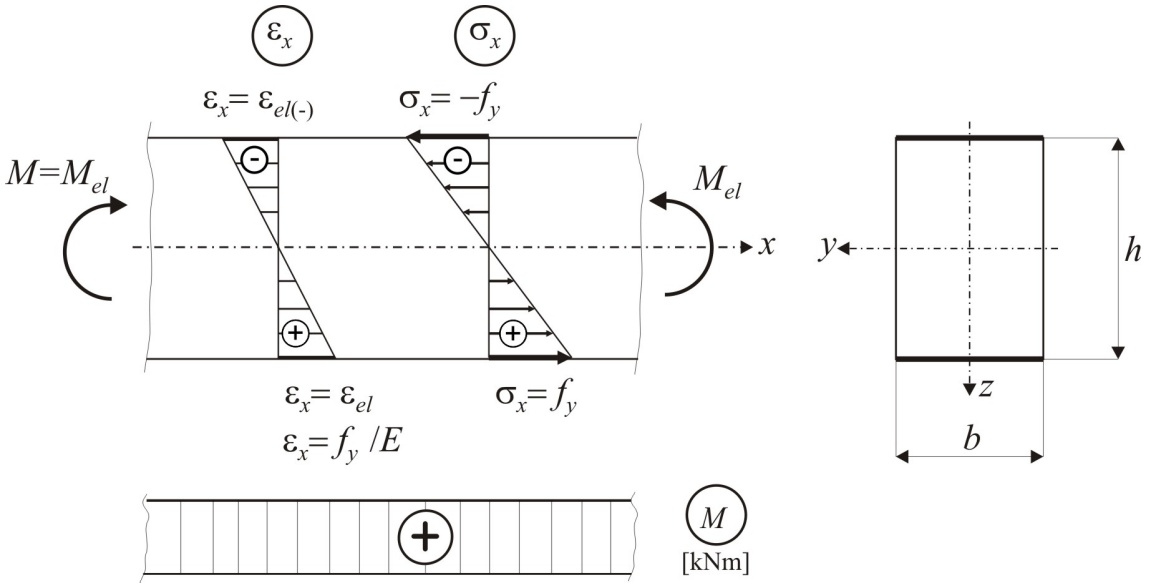
Pozn.: Z deformace nosníku v místě maximálního momentu je zřejmé, že horní vlákna průřezu jsou tlačena a spodní tažena. Nad podporou b je tomu naopak. ▲

6.2.3 Ohyb nosníků v pružno-plastickém oboru

Postupné zplastizování dvojose symetrického průřezu ohýbaného nosníku:

Ohýbaný prut, jehož materiál má schopnost se přetvářet tvárným (plastickým) způsobem (kap. 2), může být namáhán i za hranicemi platnosti Hookeova zákona. Při analýze působení v pružnoplastické oblasti budeme předpokládat tvárný ideálně pružnoplastický materiál, jehož pracovní diagram je na obr. 2.15 nebo 6.12.

Postupné zplastizování průřezu si vysvětlíme na prutu obdélníkového průřezu namáhaného prostým ohybem v rovině xz. Pro přehlednost vynecháme indexy osy ohybu, jak bylo uvedeno v úvodu 6.1.

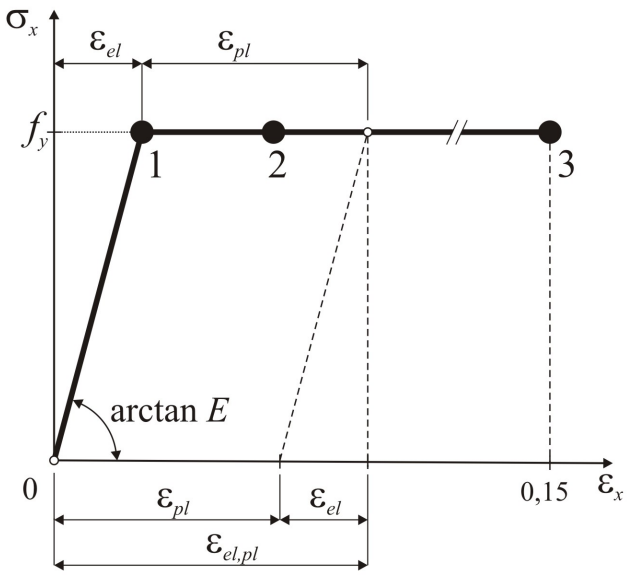


Obr. 6.11 Prut obdélníkového průřezu v pružné oblasti

Prut působí v celém průřezu pružně do okamžiku, kdy napětí v krajních vláknech dosáhne hodnoty meze kluzu f_y ($\sigma_x = \pm f_y$) dle obr. 6.11. V tomto okamžiku končí v těchto vláknech pružné chování a napětí v nich dosahuje maximálně možné hodnoty. V pracovním diagramu na obr. 6.12 tento stav vystihuje bod 1. Vzhledem k symetrii průřezu (obdélník) je velikost napětí v absolutní hodnotě v obou krajních vláknech stejná, neboť $e_l = e_2 = e$. Poměrné protažení vláken je ε_x v $\pm$ hodnotách. Ohybový moment, při kterém napětí krajních vláken dosáhne f_y, je ***ohybový moment namezi pružnosti*** (elasticity) $\boldsymbol{M_{el}}$ a dle (6.20) nebo (6.24) a (6.5) dosahuje hodnoty:

$$M_{el} = W_y \cdot \sigma_x \equiv W_{el} \cdot f_y = \frac{1}{6} b h^2 \cdot f_y \ \ [\text{kNm}] \ . \tag{6.46}$$

Modul pružnosti W_y, který jsme pro obdélník definovali vztahem (6.5), má platnost pouze pro výpočet v pružném stavu, jak bylo uvedeno již v kapitole 6.1. V pružnoplastickém oboru nabývá jiných hodnot, které si postupně odvodíme.



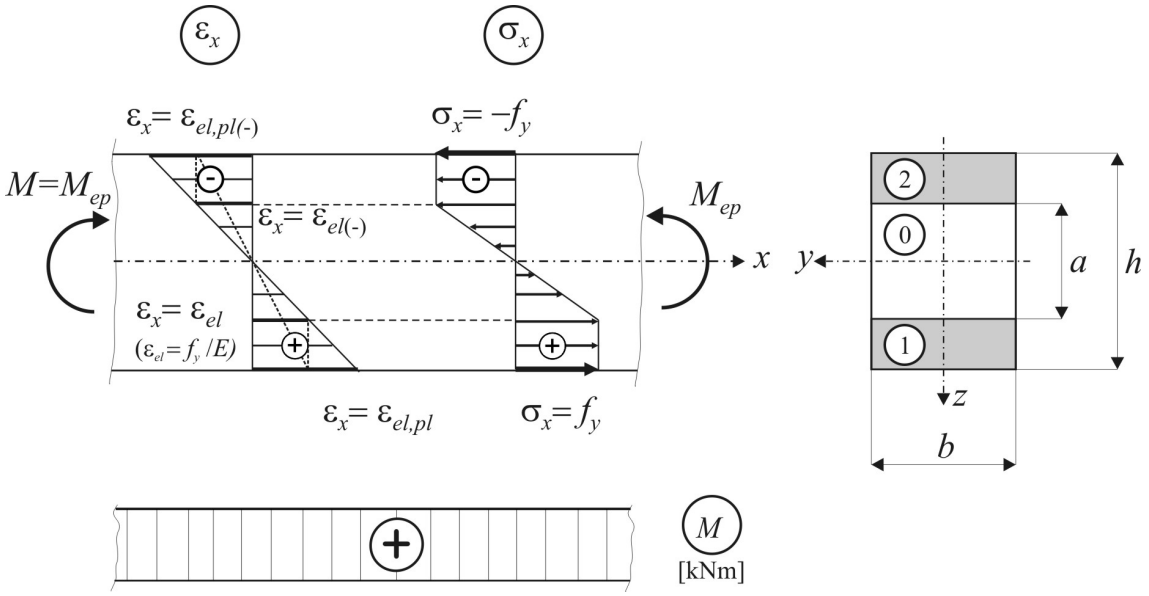
Obr. 6.12 Zatěžovací stavy v pracovním diagramu

Zvětšujeme-li dále zatížení nosníku, ohybový moment narůstá a prut přechází do pružnoplastického stavu. Z experimentálních zkoušek je dokázáno, že Bernoulliova hypotéza o zachování rovnosti průřezu platí i nadále, takže průběh velikostí podélných deformací ε_x po výšce průřezu je stále lineární (obr. 6.13). Při okrajích průřezu vzniknou *plastické oblasti*, ve kterých již neplatí Hookeův zákon. Napětí v *plastické oblasti* je konstantní velikosti $\sigma_x = f_y$. V případě kladného ohybového momentu představuje plocha 1 na obr. 6.13 plastickou oblast v tahu a plocha 2

v tlaku. Nezvýrazněná vnitřní oblast 0 zůstává pružná a Hookeův zákon zde nadále platí, takže můžeme definovat poměrné protažení *na* ***rozhraní*** *mezi oblastmi*:

$$|\varepsilon_x| = \frac{f_y}{E} \quad [-] \,.$$

Průběh velikosti normálového napětí po výšce průřezu v obecném pružnoplastickém stavu je znázorněno na stejném obrázku 6.13. V pracovním diagramu na obr. 6.12 tento stav vystihuje například bod 2. Z průběhů ε_x a σ_x vidíme, co bylo vysvětleno již v kapitole 2.2:
při nárůstu zatěžování v plastické oblasti neustále narůstají deformace, aniž by se měnila hodnota napětí.



Obr. 6.13 Prut obdélníkového průřezu v pružnoplastické oblasti

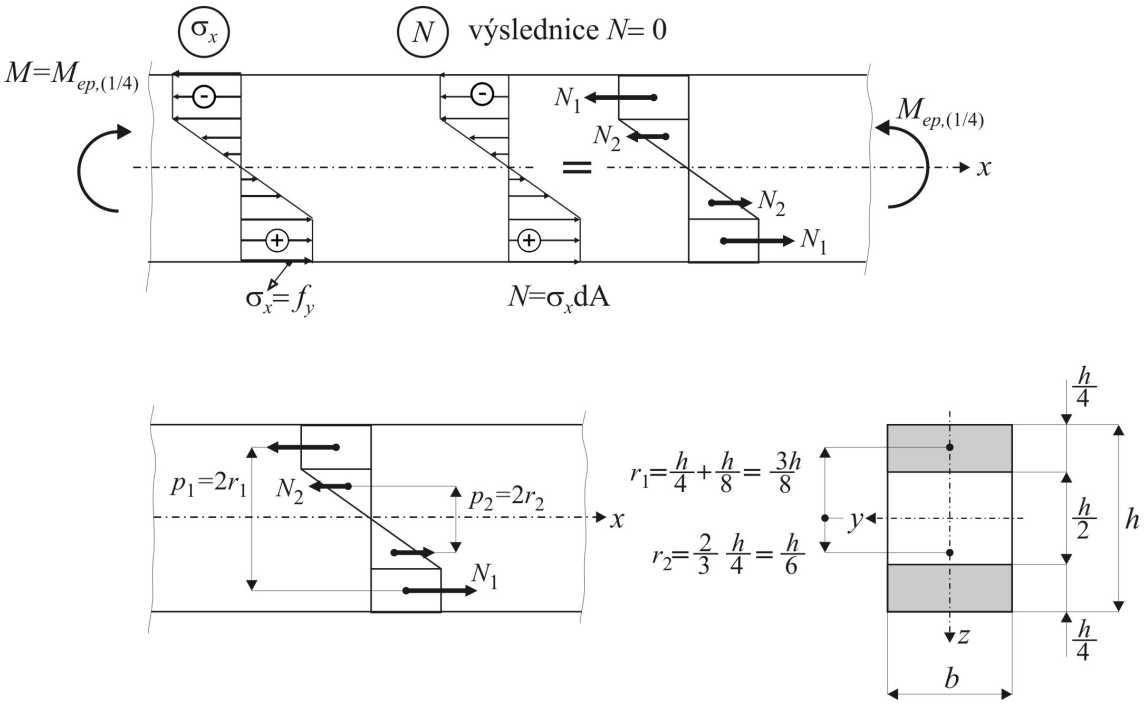
Ohybový moment v obecném pružnoplastickém stavu je tzv.***moment elasto-plastický*** $\boldsymbol{M_{ep}}$. Jeho velikost spočítáme analogicky s (6.21) až (6.24) jako moment výslednice normálové síly od účinků normálového napětí:

$$\begin{aligned} M_{ep} &= \int_A \sigma_x \cdot z \cdot \mathrm{d}A = \\ &= \int_{A_1} f_y \cdot z \cdot \mathrm{d}A + \int_{A_0} \frac{2 \cdot f_y \cdot z}{a} \cdot z \cdot \mathrm{d}A + \int_{A_2} (-f_y) \cdot z \cdot \mathrm{d}A = \\ &= \frac{1}{4} \cdot bh^2 \cdot f_y \cdot (1 - \frac{a^2}{3h^2}) \quad [\mathrm{kNm}] \,. \end{aligned} \tag{6.47}$$

Pokud potřebujeme určit, jak velký moment M_{ep} musíme vyvodit, aby došlo k zplastizování konkrétní části průřezu, můžeme výpočet u průřezů s konstantní šířkou zjednodušit dle postupu v příkladu 6.14. Využijeme znalosti z kapitoly 6.2.1: velikost N sil u symetrického průřezu s konstantní šířkou je přímo úměrná velikosti obrazce napětí.

Příklad 6.14. Prostý ocelový nosník obdélníkového průřezu je zatížen konstantním spojitým zatížením q dle obr. 6.6. Určete:

1. Hodnotu ohybového momentu M_{ep}, při kterém dojde k zplastizování krajních čtvrtin průřezu.
2. Vztah pro W_{ep} pro případ zplastizování krajních čtvrtin průřezu.
3. Hodnotu spojitého zatížení q, při kterém dojde k zplastizování krajních čtvrtin průřezu.



Obr. 6.14 Průřez zplastizovaný v horních čtvrtinách

Řešení. Výška vnitřní oblasti 0, která zůstává nadále pružná je $a = 0,5 \cdot h$ (obr. 6.14).

1. **Hodnota ohybového momentu M_{ep}, při kterém dojde k zplastizování krajních čtvrtin průřezu:** Tuto úlohu můžeme vyřešit buď ze vztahu (6.47)

dosazením $a = 0,5 \cdot h$ nebo přímo z obrazce napětí pomocí výslednice normálové síly stejným postupem jako v (6.21) až (6.24).

Obecné řešení přes integrál (6.47):

$$M_{ep} = \int_A \sigma_x \cdot z \cdot \mathrm{d}A = \frac{1}{4} \cdot bh^2 \cdot f_y \cdot (1 - \frac{a^2}{3h^2}) = f_y \cdot \frac{11}{48} \cdot bh^2 \ \ [\mathrm{kNm}] \tag{6.48}$$

Řešení pomocí obrazce normálových napětí:
Obrazec normálovch napětí v okamžiku zplastizování krajních čtvrtin průřezu můžeme superponovat na dvě části. První část přísluší zplastizovaným krajním čtvrtinám, ve kterých je průběh napětí σ_x konstantní o hodnotě f_y. Jeho výslednice je silová dvojice N_1:

$$N_1 = f_y \cdot \frac{1}{4} hb \ \ [\mathrm{kNm}] \ , \tag{6.49}$$

jejíž rameno p_1 je:

$$p_1 = \frac{3}{4} h \ \ [\mathrm{m}] \ . \tag{6.50}$$

Druhá část obrazce normálových napětí popisuje vnitřní pružnou oblast 0 s lineárním průběhem velikosti σ_x, které má maximální hodnotou f_y na rozhraní. Výslednice této oblasti je silová dvojice N_2:

$$N_2 = \frac{1}{2} f_y \cdot \frac{1}{4} hb \ \ [\mathrm{kNm}] \ , \tag{6.51}$$

a její rameno p_2:

$$p_2 = \frac{1}{3} h \ \ [\mathrm{m}] \ . \tag{6.52}$$

Hodnoty ohybového momentu z těchto silových dvojic:

$$M_{ep,\frac{1}{4}} = N_1 \cdot p_1 \ + N_2 \cdot p_2 = (f_y \cdot \frac{1}{4} hb) \cdot (\frac{3}{4} h) + (\frac{1}{2} f_y \cdot \frac{1}{4} hb) \cdot (\frac{1}{3} h) = f_y \cdot \frac{11}{48} \cdot bh^2 \ \ [\mathrm{kNm}] \ . \tag{6.53}$$

2. **Vztah pro W_{ep} případě zplastizování krajních čtvrtin průřezu** odvodíme z rovnic (6.53) a (6.20):

$$M_{ep,\frac{1}{4}} = f_y \cdot \frac{11}{48} \cdot bh^2 = f_y \cdot W_{ep,\frac{1}{4}} \implies \tag{6.54}$$

$$W_{ep,\frac{1}{4}} = \frac{M_{ep,\frac{1}{4}}}{f_y} = \frac{11}{48} \cdot bh^2 \ \ [\mathrm{m}^3] \ . \tag{6.55}$$

3. **Hodnota spojitého zatížení $q = q_{ep,\frac{1}{4}}$, při kterém dojde k zplastizování krajních čtvrtin průřezu**: Prostý nosník zatížený konstantním spojitým zatížením po celé délce má exterémní moment v polovině rozpětí o velikosti $M = \frac{1}{8}ql^2$ [kNm] . Uvažujeme-li moment, při kterém dojde k zplastizování krajních čtvrtin průřezu, pak $M_{ep,\frac{1}{4}}$ a hodnota spojitého zatížení $q_{ep,\frac{1}{4}}$ bude:

$$M_{ep,\frac{1}{4}} = f_y \cdot \frac{11}{48} \cdot bh^2 = \frac{1}{8} \cdot q_{ep,\frac{1}{4}} \cdot l^2 \implies \tag{6.56}$$

$$q_{ep,\frac{1}{4}} = \frac{11}{6} \cdot f_y \cdot \frac{b \cdot h^2}{l^2} \quad [\mathrm{kNm}^{-1}] \tag{6.57}$$

▲

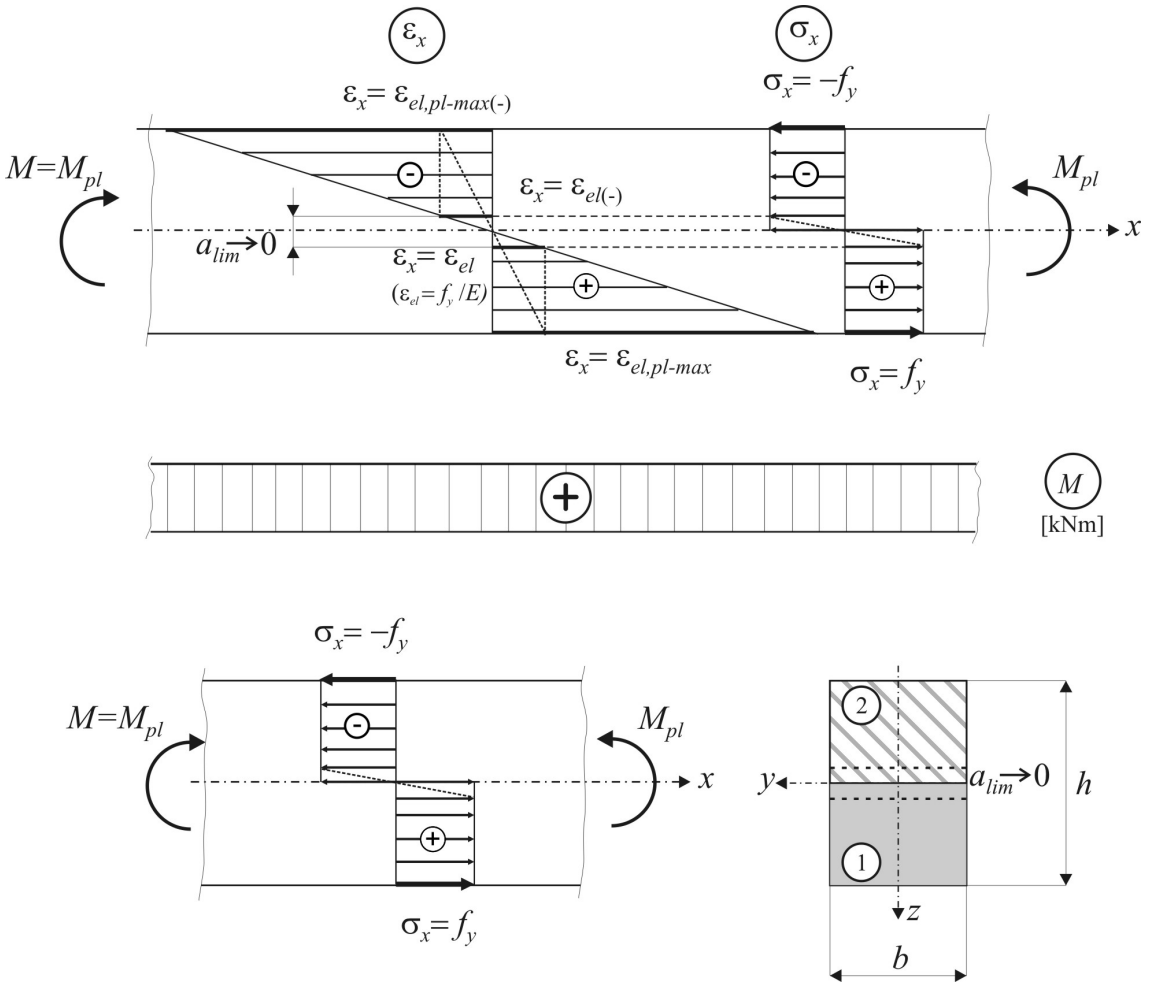
Příklad 6.15. Prostý ocelový nosník obdélníkového průřezu je zatížen konstantním spojitým zatížením q dle obr. 6.6. Určete:

1. Hodnotu ohybového momentu M_{ep}, při kterém dojde k zplastizování krajních třetin průřezu.
2. Vztah pro W_{ep} případě zplastizování krajních třetin průřezu.
3. Hodnotu spojitého zatížení q, při kterém dojde k zplastizování krajních třetin průřezu.

Řešení. Řešení příkladu necháváme na čtenáři.
Postup bude shodný s příkladem 6.14.
Mezivýsledky a výsledky jsou:
$a = \frac{1}{3} \cdot h$ [m] ,
$N_1 = f_y \cdot \frac{1}{3}h \cdot b$ [kNm] , $p_1 = \frac{2}{3}h$ [m] ,
$N_2 = f_y \cdot \frac{1}{12}h \cdot b$ [kNm] , $p_2 = \frac{2}{9}h$ [m] ,
$M_{ep,\frac{1}{3}} = f_y \cdot \frac{13}{54} \cdot bh^2$ [kNm] , $W_{ep,\frac{1}{3}} = \frac{13}{54} \cdot bh^2$ [m^3] , $q_{ep,\frac{1}{3}} = \frac{52}{27} \cdot f_y \cdot \frac{b \cdot h^2}{l^2}$ [kNm^{-1}] . ▲

Jak již bylo řečeno, na mezi pružnosti, kdy $a = h$ (f_y je dosaženo pouze v krajních vláknech), platí: $M_{ep,\frac{1}{2}} = M_{el}$. S rostoucím zatížením a tím i momentem se rozšiřují plastické oblasti a pružná oblast se zmenšuje. V limitním případě $a \to 0$ je celý průřez zplastizován (obr. 6.15). Ohybový moment je ***mezním plastickým momentem*** M_{pl} .

Průběh velikosti normálového napětí po výšce průřezu v plastickém stavu je znázorněno na stejném obrázku. Je konstantní po výšce poloviny průřezu a sice: o velikosti f_{y+} ve spodní části (kladný moment) a f_{y-} v horní čáti. V pracovním diagramu na obr. 6.12 tento stav vystihuje bod 3. Výslednice normálových sil od účinků



Obr. 6.15 Prut obdélníkového průřezu v plastické oblasti

normálového napětí (rovněž konstantní po výšce poloviny průřezu) je u obdélníkového průřezu přímo úměrná napětí. Dosazením parametrů pro konstantní průběh po výšce poloviny průřezu do (6.21) a (6.22) platí:

$$N_+ = \int_{A_{\frac{1}{2}}} \sigma_{x_+} \, \mathrm{d}A_{\frac{1}{2}} = \sigma_{x_+} \cdot b \cdot \frac{h}{2} = f_y \cdot \frac{1}{2} bh \ \ [\mathrm{kN}] \,, \tag{6.58}$$

$$N_- = \int_{A_{\frac{1}{2}}} |\sigma_{x_-}| \, \mathrm{d}A_{\frac{1}{2}} = |\sigma_{x_-}| \cdot b \cdot \frac{h}{2} = f_y \cdot \frac{1}{2} bh \ \ [\mathrm{kN}] \,. \tag{6.59}$$

Rameno silové dvojice p:

$$p = \frac{1}{2} h \ [\mathrm{m}] \,. \tag{6.60}$$

Mezní plastický moment jako moment má hodnotu:

$$M_{pl} = N \cdot p = (f_y \cdot \frac{1}{2}hb) \cdot (\frac{1}{2}h) = f_y \cdot \frac{1}{4} \cdot bh^2 \ \ [\text{kNm}] \ . \tag{6.61}$$

Z rovnic (6.61) a (6.20) spočítáme ***plastický průřezový modul*** $\boldsymbol{W_{pl}}$:

$$M_{pl} = f_y \cdot \frac{1}{4} \cdot bh^2 = f_y \cdot W_{pl} \implies \tag{6.62}$$

$$W_{pl} = \frac{M_{pl}}{f_y} = \frac{1}{4} \cdot bh^2 \ \ [\text{m}^3] \ . \tag{6.63}$$

Mezní plastický moment M_{pl} můžeme také vyjádřit obecně – analogicky s momentem elastoplastickým M_{ep} v (6.47):

$$M_{pl} = \int_A \sigma_x \cdot z \cdot \mathrm{d}A = f_y \int_{A_1} z \cdot \mathrm{d}A + (-f_y) \int_{A_2} z \cdot \mathrm{d}A = f_y \cdot (S_{1y} - S_{2y}) \ \ [\text{kNm}]. \tag{6.64}$$

S_{1y} a S_{2y} jsou statické momenty částí průřezů A_1' a A_2' oddělených neutrálnou osou dle obr. 6.15. Jedná se o statické momenty k těžištní ose, k níž je moment celé plochy roven nule (kap. 6.1 a také poznámka 6.5). Proto platí:

$$S_{1y} + S_{2y} = 0 \implies S_{2y} = -S_{1y} \ .$$

Rovnici (6.47) tím můžeme upravit na tvar:

$$M_{pl} = 2 \cdot S_{1y} \cdot f_y \ [\text{kNm}], \tag{6.65}$$

Plastický průřezový modul W_{pl} pak shodně s (6.62):

$$M_{pl} = f_y \cdot W_{pl} \implies W_{pl} = 2 \cdot S_{1y} \ \ [\text{m}^3]. \tag{6.66}$$

Tento výraz má obecnou platnost a využívá se hlavně *u nesymetických průřezů.*

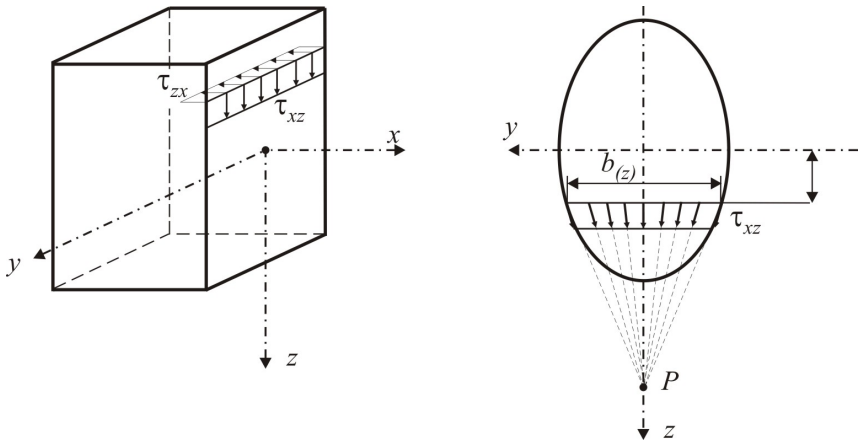
M_{pl} i W_{pl} jsou o polovinu větší, než v pružné oblasti (srovnej (6.63) s (6.46)). Dosažení tohoto momentu by ovšem předpokládalo, že protažení krajních vláken průřezu (a také křivost střednice prutu) rostou nade všechny meze, což není reálné. Ve skutečnosti vždy zůstává v blízkosti neutrálné osy malá pružná oblast (obr. 6.15 vyznačena čárkovaně). Její vliv je nepatrný a je dostatečně kompenzován zavedením idealizovaného pracovního diagramu, u něhož se pomíjejí účinky zpevnění. Proto můžeme uvažovat plně zplastizovaný průřez.

Poznámka 6.16. Zplastizování nesymetrického průřezu: V mezním plastickém stavu nesymetrického průřezu není neutrální osa obecně shodná s neutrální osou v pružném stavu, tzn. neprochází těžištem průřezu. Více viz [20] kapitola 3.7.

Poznámka 6.17. Plastický modul průřezu: $\boldsymbol{W_{pl}}$ vybraných normalizovaných válcovaných **I** a **U** profilů jsou uvedeny v příloze 11.1 a 11.6.

6.3 Výpočet smykových napětí za ohybu

Jak bylo uvedeno již v úvodu kapitoly 6.1, platí: Pokud není nosník namáhaný prostým ohybem, vznikají v příčných řezech (průřezech) posouvající síly. Ty vyvozují *smyková napětí*. Při odvození jejich velikosti vycházíme z podmínky rovnováhy elementu a věty o vzájemnosti smykových napětí (1.30) až (1.32), z které vyplývá: že složky smykového napětí ve svislém řezu τ_{xz} a ve vodorovném řezu τ_{zx} jsou shodné (obr 6.16 vlevo). Bernoulliovu hypotézu nelze v tomto případě zahrnout, neboť vylučuje smykové deformace (zkosení) a z Hookeova zákona ve smyku (2.21) by smyková napětí byla nulová.



Obr. 6.16 K odvození smykových napětí v ohýbaném nosníku

6.3.1 Smyková napětí za ohybu obdélníkového průřezu

Při odvození smykových napětí **masivního průřezu** vycházíme ze dvou přibližných předpokladů, které formuloval Grashof:

- Podél rovnoběžky s neutrálnou osou (podél přímky z =konst.) je ***svislá*** *složka smykového napětí konstatní*: τ_{xz} =konst. (obr. 6.16 vlevo).

- Vektory výsledných smykových napětí podél této přímky *směřují do společného bodu* – průsečíku tečen k obrysu průřezu (bod P na obr. 6.16 vpravo).

Na základě těchto předpokladů byl v [20] kapitola 3.3 odvozen vztah pro výpočet smykových napětí, tzv. Grashofův vzorec:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{V_z \cdot |S_y|}{I_y \cdot b_{(z)}} \ \text{[MPa]}, \tag{6.67}$$

kde V_z je posouvající síla v daném průřezu, S_y statický moment části průřezu, pomyslně "odděleného" v uvažované zvdálenosti z od osy průřezu, I_y moment setrvačnosti **celého** průřezu a $b_{(z)}$ šířka průřezu v uvažovaném místě (v uvažované vzdálenosti z od osy průřezu), ve kterém je veden pomyslný řez.

V této kapitole se budeme zabývat pouze obdélníkovými průřezy, pro které platí $b_{(z)}$ =konst= b. Znaménko smykového napětí závisí na směru působení posouvající síly a v problematice dimenzování prutů není potřeba jej rozlišovat (více v kapitole 10). Znaménko statického momentu části průřezu S_y tudíž nemá vliv na znaménkovou konvenci napětí, jak bylo uvedeno již v poznámce 6.5. Ve ztahu (6.67) je proto uveden v absolutní hodnotě, ale pro zjednodušení zápisu budeme již v dalších výpočtech absolutní hodnotu uvažovat automaticky (bez zápisu), stejně jako značení posouvající síly dle (6.2).

Grashofův vzorec budeme tedy používat ve tvaru:

$$\tau_{xz} = \frac{V \cdot S_y}{I_y \cdot b} \ \text{[MPa]}. \tag{6.68}$$

Z výše uvedeného vyplývá, že jedinná proměnná ve vztahu pro výpočet smykového napětí v **uvažovaném průřezu** je S_y. Dle (6.10) již víme, že velikost S_y má parabolický průběh po výšce průřezu, a proto i průběh velikosti smykového napětí po výšce průřezu je parabolický. Extrémní *maximální* hodnoty dosahuje v těžišti, extrémní *minimální* pak v krajních vláknech dle obr. 6.17.

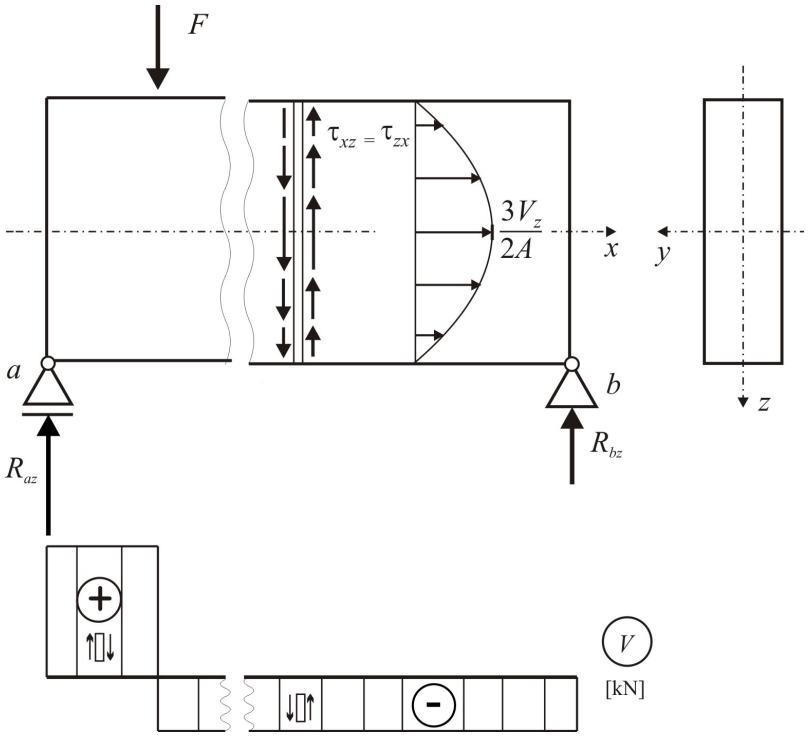
Hodnotu smykového napětí ***obdélníkového průřezu*** v jeho *libovolné* výšce odvodíme dosazením (6.10) a (6.5) do (6.68):

$$\tau_{xz} = \frac{V \cdot S_y}{I_y \cdot b} = \frac{V \cdot \frac{b}{8} \cdot (h^2 - 4z^2)}{\frac{1}{12} b h^3 \cdot b} = \frac{3}{2} \cdot \frac{V}{b \cdot h} \cdot (1 - \frac{4z^2}{h^2}) \ \text{[MPa]}. \tag{6.69}$$

Extrémní **maximální** hodnota je v ose průřezu ($z = 0$). τ_{max} potom bude:

$$\tau_{xz,max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{V}{A} \ \text{[MPa]}. \tag{6.70}$$

Ze vztahu (6.70) vidíme, že maximální smykové napětí obdélníkového průřezu převyšuje průměrnou hodnotu $1,5$ krát.



Obr. 6.17 Smyková napětí obdélníkového průřezu

Příklad 6.18. Prostě podepřený ocelový nosník obdélníkového průřezu je zatížen stálým spojitým rovnoměrným zatížením g. Statické schéma nosníku je zobrazeno na obr. 6.18. Určete největší smykové napětí na nosníku a vykreslete jeho průběh. Materiál nosníku je Fe360/S235. Konkrétní vstupní údaje jsou uvedeny v tabulce 6.3.

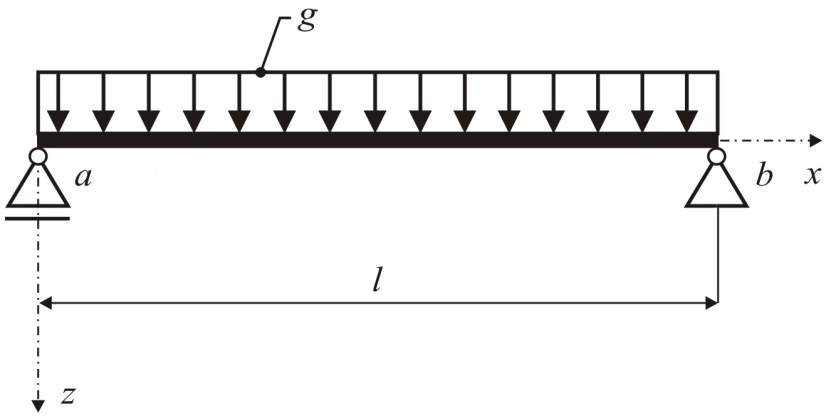
Rozpětí nosníku l:	$4,0$ m
Intenzita rovnoměrného zatížení g:	$5,4$ kNm^{-1}
Šířka průřezu b:	$0,030$ m
Výška průřezu h:	$0,100$ m
Plocha průřezu A:	$3,0 \cdot 10^{-3}$ m^2

Tab. 6.3 Vstupní údaje příkladu 6.18

Řešení.
Posouvající síla v podporách daného nosníku je $V_z = R_{az} = -R_{bz} = g \cdot \frac{l}{2} = 10,8[\mathtt{kN}]$.

Statický moment části průřezu nad osou y podle obrázku 6.19:

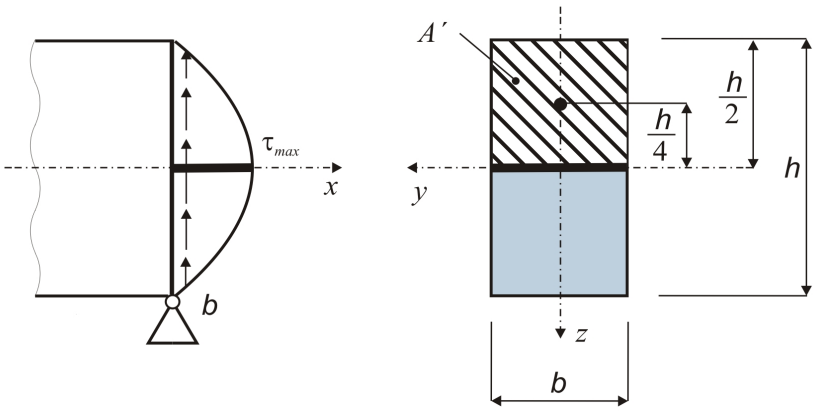
$$S_{y(h/2)} = A' \cdot \overline{z} = \frac{bh}{2} \cdot \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{8} \tag{6.71}$$



Obr. 6.18 Statické schéma řešeného nosníku

a) Největší smykové napětí polovině výšky průřezu podle obrázku 6.19:

$$\tau_{max} = \frac{V_z \cdot S_{y(h/2)}}{I_y \cdot b} \tag{6.72}$$



Obr. 6.19 Průběh smykového napětí nad podporou b (vlevo), průřez nosníku (vpravo)

Dosazením do (6.72) výraz (6.71) a za $I_y = \frac{1}{12}bh^3$ lze získat upravený vztah pro výpočet smykového napětí v polovině výšky průřezu:

$$\tau_{max} = \frac{V_z \cdot \frac{bh^2}{8}}{\frac{1}{12}bh^3 \cdot b} = \frac{3}{2} \cdot \frac{V_z}{bh} = \frac{3}{2} \cdot \frac{V_z}{A} \tag{6.73}$$

Dosazením hodnot lze určit hodnotu smykového napětí v polovině výšky průřezu, čili maximální smykové napětí v průřezu τ_{max}=5,4[MPa].

b) Průběh smykového napětí po výšce obdélníkového průřezu je parabolický, na okraji je napětí nulové a maximální τ_{max}=5,4[MPa] je na ose y, na obrázku 6.19 je vykreslen průběh smykového napětí nad podporou b.

▲

6.3.2 Dimenzování prutů namáhaných smykem za ohybu

Tato kapitola je věnována dimenzování ohýbaných nosných prvků z hlediska smyku. Znamená to, že budeme řešit pouze vliv posouvajících sil a smykových napětí. Vliv ohybového momentu na ohýbaný nosník byl probrán v kapitole 6.2.2. Budeme se zabývat pouze mezním stavem únosnosti, neboť přetvoření vlivem smyku u nosníků jejichž $l \gg h$ možno zanedbat.

Podle [4] musí návrhová hodnota posouvající síly V_{Ed} v každém průřezu splňovat podmínku:

$$\frac{V_{Ed}}{V_{Rd}} \leqq 1,0 \ , \tag{6.74}$$

která je analogická vyjádření:

$$V_{Ed} \leqq V_{Rd} \ . \tag{6.75}$$

Ve výrazech (6.74) i (6.75) představuje veličina V_{Rd} tzv. *únosnost prvku z hlediska smyku*, která odpovídá maximální přípustné návrhové hodnotě posouvající síly v nosném prvku. Při jejím výpočtu vycházíme z výchozího požadavku, že *smykové napětí* τ_{xz} v ohýbaném prvku nesmí překročit maximální dovolenou hodnotu τ_{dov}.

Obecně pro různé materiály bývá hodnota dovoleného smykového napětí zadána, pro ocel platí:

$$\tau_{dov} = \frac{f_{yd}}{\sqrt{3}} \ \text{[MPa]}. \tag{6.76}$$

Pro podmínku spolehlivosti tedy platí:

$$\tau_{xz} \leqq \tau_{dov} \ . \tag{6.77}$$

Podmínku spolehlivosti (6.77) můžeme dále doplnit vztahem (6.68) pro výpočet smykového napětí τ_{xz}, určeného z návrhové hodnoty posouvající síly V_{Ed} :

$$\tau_{xz} = \frac{V_{Ed} \cdot S_y}{I_y \cdot b} \leqq \tau_{dov} \ . \tag{6.78}$$

Pro ocel potom bude platit:

$$\tau_{xz} = \frac{V_{Ed} \cdot S_y}{I_y \cdot b} \leqq \tau_{dov} = \frac{f_{yd}}{\sqrt{3}} = \frac{f_{yk}}{\sqrt{3} \cdot \gamma_M} \ . \tag{6.79}$$

Jednoduchou úpravou nerovnice (6.78) pak můžeme získat i vztah definující požadovanou únosnost z hlediska smyku V_{Rd} :

$$V_{Ed} \leqq \frac{\tau_{dov} \cdot I_y \cdot b}{S_y} = V_{Rd} \ \ [\mathrm{kN}]. \tag{6.80}$$

Pro *obdélníkový průřez* v případě dimenzování z hlediska *maximálního smykového napětí* zjednodušíme vztah (6.78) s využitím (6.70):

$$\tau_{xz} = \frac{3}{2} \cdot \frac{V}{A} \leqq \tau_{dov} \ . \tag{6.81}$$

Jednoduchou úpravou nerovnice (6.81) můžeme získat i vztah definující požadovanou únosnost z hlediska smyku V_{Rd} pro *obdélníkový průřez* v případě dimenzování z hlediska *maximálního smykového napětí*:

$$V_{Ed} \leqq \frac{2}{3} \cdot \frac{\tau_{dov}}{A} = V_{Rd} \ \ [\mathrm{kN}]. \tag{6.82}$$

V procesu návrhu ohýbaného nosníku z hlediska smyku je úkolem statika specifikovat průřezové charakteristiky, které vstupují do výpočtu:

V případě dimenzování *obdélníkového průřezu* z hlediska *maximálního smykového napětí* se jedná o ***plochu*** průřezu. Výchozím vztahem pro její určení je nerovnice (6.82), ze které vyjádříme hledanou nutnou plochu A_{min}:

$$V_{Ed} \leqq \frac{2}{3} \cdot \frac{\tau_{dov}}{A} \implies A \geqq \frac{3}{2} \cdot \frac{V_{Ed}}{\tau_{dov}} \implies A_{min} \geqq \frac{3}{2} \cdot \frac{V_{Ed}}{\tau_{dov}} \ \ [\mathrm{m}^2]. \tag{6.83}$$

Pro ocel platí:

$$V_{Ed} \leqq \frac{2}{3} \cdot \frac{\tau_{dov}}{A} \implies A \geqq \frac{3}{2} \cdot \frac{V_{Ed}}{\frac{f_{yd}}{\sqrt{3}}} \implies A_{min} \geqq \frac{3}{2} \cdot \frac{V_{Ed}}{\frac{f_{yd}}{\sqrt{3}}} \ \ [\mathrm{m}^2]. \tag{6.84}$$

Poznámka 6.19. Výrazy (6.81) až (6.83) nemůžeme použít v případě, kdy není rozhodující maximální smykové napětí v těžištní ose, ale rozhoduje napětí v obecné výšce průřezu. Typickým příkladem je lepený nosník. který je podrobně vysvětlen v příkladu 6.21.

V takovém případě vstupují do výpočtu tři rozhodující průřezové charakteristiky: ***moment setrvačnosti*** I_y, ***šířka*** průřezu b a ***staticky moment*** pomyslně oddělené části průřezu S_y. Pro výpočet využijeme buďto vztah (6.69), nebo se ke stejnému výsledku dopracujeme postupným dosazením zadaných hodnot do (6.68), jak je uvedeno v příkladu 6.21.

Poznámka 6.20. Shodně s poznámkou 6.12 i zde platí dvojí značení minimálních (nutných) veličin: $b_{min} \equiv b_{nut}$, $A_{min} \equiv A_{nut}$, $I_{min} \equiv I_{nut}$.

6.3.3 Výpočet smykových napětí za ohybu u tenkostěnných průřezů

Tenkostěnnými nosníky nazýváme pruty, u kterých je tloušťka t jednotlivých částí (např. pásnice t_f nebo stojiny t_w) značně menší než rozměry průřezu jako celku. Dle obr. 6.20:

$$t,\ t_f,\ t_w \ \ll\ b,\ h\ . \tag{6.85}$$

Často se uvádí poměr 1:10, přijatelné výsledky však získáme i při méně výrazných poměrech. Rozeznáváme tenkostěnné profily *otevřené*, jejichž střednice (čára procházející podélnou osou dílčích částí a půlí jejich tloušťku) netvoří uzavřenou křivku (například **I**, **U**, **C**, **T**) a *uzavřené* profily (například □, ◯).

V této kapitole se budeme věnovat otevřeným profilům. Látku si vysvětlíme na dvojose symetrickém **I** průřezu. Obecně vycházíme ze dvou základních předpokladů:

- Smyková napětí jsou konstantní v řezu kolmo k dílčí stěně, dle obrázku 6.20.
- Jsou rovnoběžná s obrysem průřezu (obr. 6.20).

Základní vzorec vychází z Grashofova vztahu (6.68):

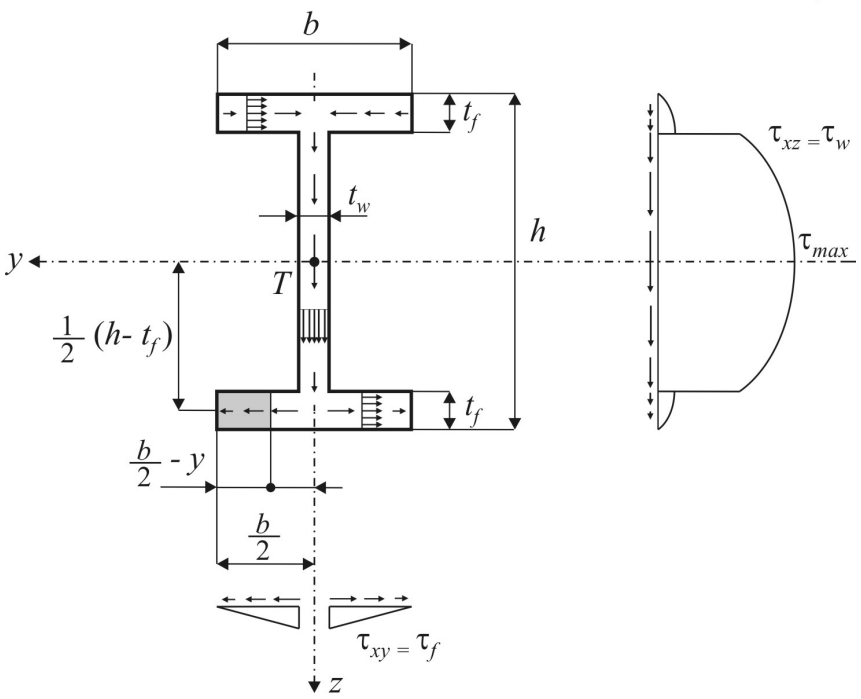
$$\tau_x = \frac{V \cdot S_y}{I_y \cdot t}\ \ [\mathrm{MPa}]. \tag{6.86}$$

t zde představuje tloušťku ve vyšetřovaném místě a S_y statický moment plochy oddělené řezem *kolmo* k obrysu průřezu. Značení τ_x znamená, že se jedná o výsledné napětí v rovině kolmé k ose x. Na svislých částech působí napětí ve směru osy z, jedná se o τ_{xz}, na vodorovných částech působí napětí ve směru osy y, proto τ_{xy}.

1. **Smykové napětí v pásnici I průřezu**

   Statický moment oddělené plochy na pásnici (vyšrafována na levé spodní části) je funkcí vzdálenosti y:

$$S_{y,(y)} = (\frac{b}{2} - y) \cdot t_f \cdot \frac{1}{2} \cdot (h - t_f) = \frac{1}{4} \cdot t_f \cdot (b - 2y) \cdot (h - t_f)\ [\mathrm{m}^3]. \tag{6.87}$$



Obr. 6.20 Smyková napětí tenkostěnného symetrického **I** průřezu

Smyková napětí na pásnici probíhají podél přímky ve směru osy y (obr 6.20) (druhý, ze dvou výše uvedených předpokladů). Jejich velikost se mění ***lineárně*** v závislosti na vzdálenosti y (y je jediná proměnná s exponentem 1 ve vztahu (6.88)). Po výšce pásnice jsou však konstantní (první ze dvou předpokladů). Hodnotu těchto napětí určíme ze vztahů (6.86) a (6.87):

$$\tau_{xy} = \frac{V \cdot S_y}{I_y \cdot t_f} = \frac{V}{4I_y} \cdot (b - 2y) \cdot (h - t_f) \quad [\text{MPa}]. \tag{6.88}$$

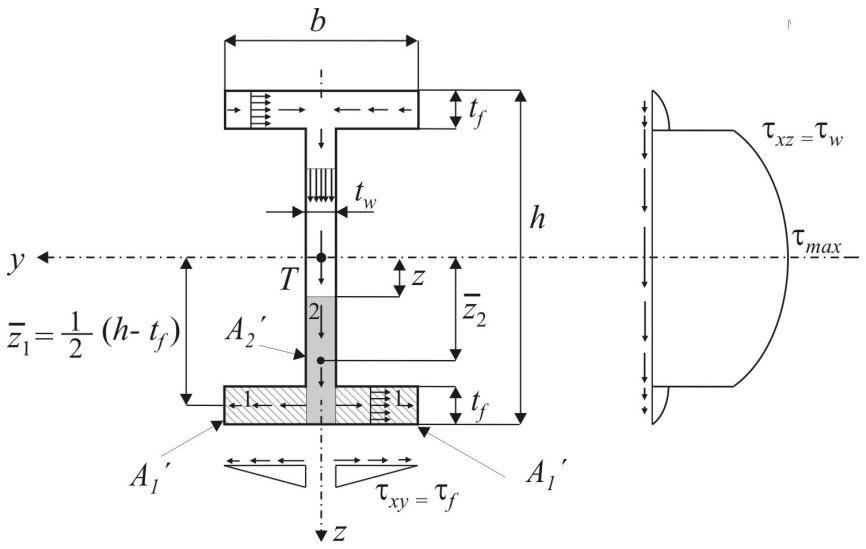
2. **Smykové napětí ve stojině I průřezu**

Statický moment plochy oddělené řezem napříč stojinou je funkcí vzdálenosti z. Spočítáme ho jako statický moment plochy složené ze dvou částí dle obr. 6.21:

1. Část pásnice (levá a pravá po odečtení tloušťky stojiny v ose průřezu) A'_1:

$$A'_1 = A'_f = t_f \cdot (b - t_w) \quad [\text{m}^2]. \tag{6.89}$$

2. Část stojiny A'_2 pomyslně oddělené ve vzdálenosti z. Jedná se o obdélník, jehož statický moment byl probrán na začátku kapitoly 6 (např. (6.10)).



Obr. 6.21 K výpočtu S_y stojiny

Zavedením těchto dvou částí A'_1, A'_2 a s využitím (6.8) respektive (6.9) platí:

$$S_{y,(z)} = A'_1 \cdot \bar{z}_1 + A'_2 \cdot \bar{z}_2 \quad [\mathrm{m}^3]. \tag{6.90}$$

Dosazením konkrétních rozměrů potom bude:

$$S_{y,(z)} = [t_f \cdot (b - t_w) \cdot \frac{1}{2} \cdot (h - t_f)] + [\frac{t_w}{8} \cdot (h^2 - 4z^2)] \quad [\mathrm{m}^3]. \tag{6.91}$$

Smyková napětí na stojině probíhají podél přímky ve směru osy z (druhý předpoklad). Jejich velikost se mění ***parabolicky*** v závislosti na vzdálenosti z (z je jediná proměnná s exponentem 2 ve vztahu (6.92)). Po šířce stojiny jsou však konstantní (první předpoklad). Hodnotu těchto napětí určíme dle (6.86) a (6.91):

$$\tau_{xz} = \frac{V \cdot S_y}{I_y \cdot t_w} = \frac{V}{I_y \cdot t_w} \cdot \frac{1}{8} \cdot \{[4t_f \cdot (b - t_w) \cdot (h - t_f)] + [t_w \cdot (h^2 - 4z^2)]\} \quad [\mathrm{MPa}]. \tag{6.92}$$

Maximální hodnota smykového napětí na stojině bude v ose průřezu ($z = 0$):

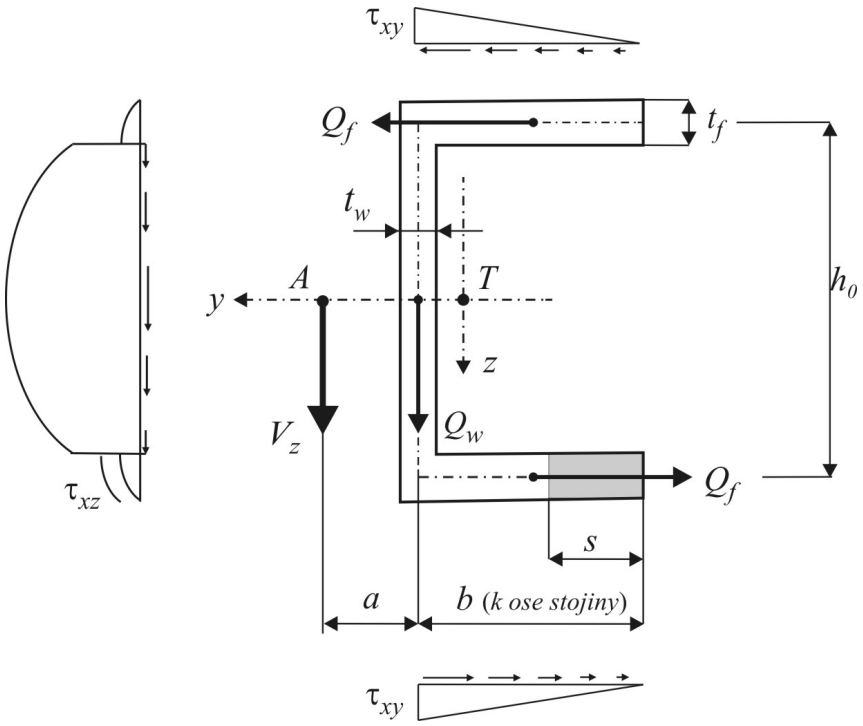
$$\tau_{xz} = \frac{V}{8 I_y \cdot t_w} \cdot [4t_f \cdot (b - t_w) \cdot (h - t_f) + t_w \cdot h^2] \quad [\mathrm{MPa}]. \tag{6.93}$$

Výpočet smykových napětí za ohybu tenkostěnných průřezů využíváme jednak u svařovaných profilů k dimenzování svarů, ale hlavně při řešení středu smyku, který si vysvětlíme v kapitole 6.4

6.4 Střed smyku

U tenkostěnných průřezu se setkáváme s nesouměrným průřezem a jak bylo uvedeno v poznámce 6.2: V takových případech musí rovina zatížení procházet spojnicí středu smyku průřezu, pokud nemá dojít ke kroucení.

Z předpokladů, které jsme použili při odvození smykového napětí tenkostěnných průřezů a z (6.86) vyplývá, že u prutů otevřeného průřezu působí smyková napětí od posouvající síly v různých místech a směrech. Výslednice těchto napětí, kterou budeme značit Q, musí být dle (1.21) a (1.22) staticky ekvivalentní posouvající síle V. Je-li průřez symetrický vzhledem k ose rovnoběžné se směrem působení posouvající síly (v rovinné úloze (v našem případě) osa z), prochází výsledná síla Q těžištěm. U nesymetrických průřezů tomu tak není.



Obr. 6.22 Smyková napětí a střed smyku **U** profilu svisle uloženého

Podívejme se na případ ***jednoose symetrického*** **U** profilu. Na obrázku 6.22 je vzhledem k ose z ***nesymetricky*** uložen. Vidíme zde směry a působiště *výslednic smykových napětí* v přírubách Q_f a ve stojině Q_w. Z poznatků v kapitole 6.3.3 a (1.21) , (1.22) umíme určit jejich velikost i velikost napětí, které v daných částech průřezu působí.

Zatížení stojiny:

Průběh symkových napětí na stojině odvodíme stejným postupem jako u **I** profilu:

$$\tau_{xz} = \frac{V_z \cdot S_y}{I_y \cdot t_w} = \frac{V_z}{8I_y \cdot t_w} \cdot [4t_f \cdot b \cdot h_0 + t_w \cdot (h_0^2 - 4z^2)] \ \ [\text{MPa}]. \tag{6.94}$$

Jeho výslednici Q_w nemusíme odvozovat integrací (1.22), neboť se jedná o jedinou svislou složku, která musí být shodná s posouvající silou:

$$Q_w = V_z = V \ \ [\text{kN}]. \tag{6.95}$$

Zatížení přírub:

Pro výpočet statického momentu oddělené části zavedeme pomocnou souřadnici s (vzdálenost od volného konce příruby), obr. 6.22:

$$S_y = A' \cdot \frac{h_o}{2} = t_f \cdot s \cdot \frac{h_o}{2} \ \ [\text{m}^3]. \tag{6.96}$$

Smykové napětí bude:

$$\tau_{xy} = \frac{V \cdot S_y}{I_y \cdot t_f} = \frac{V_z \cdot h_o \cdot s}{2I_y} \ \ [\text{MPa}]. \tag{6.97}$$

Ze vztahu (6.97) vyplývá důkaz, že *průběh velikosti napětí* po délce pásnice je lineární (proměnná s – první stupeň), jak vidíme na obr. 6.22. Výsledná smyková sila Q_f:

$$Q_f = \int_0^b \tau_{xy} \cdot t_f \, \mathrm{d}s = \frac{V_z \cdot h_o}{2I_y} \cdot t_f \int_0^b s \, \mathrm{d}s = \frac{V_z \cdot t_f \cdot b^2 \cdot h}{4I_y} \ \ [\text{kN}]. \tag{6.98}$$

Smykové síly Q_f (obr. 6.22) tvoří silovou dvojici:

$$M_f = Q_f \cdot h_0 \ \ [\text{kNm}]. \tag{6.99}$$

Určení středu smyku:

Celková výslednice smykových napětí Q_i (Q_w, Q_f) tvoří obecnou soustavu sil a musí být staticky ekvivalentní s posouvající sílou V_z.

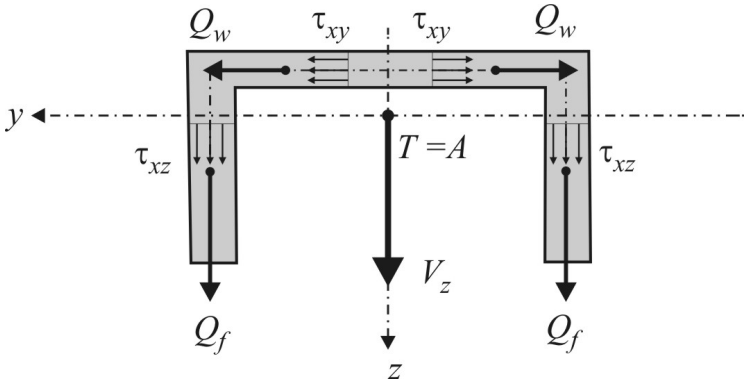
Silová podmínka ekvivalence je splněna, byla z ní stanovena velikost Q_w (6.95).

Momentovou podmínku ekvivalence lze zajistit nahrazením silové dvojice M_f (6.100) posunutím V_z (získá se působiště všech smykových sil Q_i):

$$V_z \cdot a = Q_f \cdot h_0 \implies a = \frac{Q_f \cdot h_0}{V_z} \text{ [kNm]}. \tag{6.100}$$

Vzdáleností a je definována poloha ***středu smyku A*** (obr. 6.22). V tomto případě je od působiště Q_w nalevo, neboť posunutá síla V_z musí vytvářet stejný otáčivý účinek, jako silová dvojice Q_f. Pokud nemá být prut kroucen, musí výslednice *vnějších sil* procházet tímto středem smyku.

Proberme nyní případ stejného ***jednoose symetrického*** **U** profilu, který je oproti předešlého ***otočen o*** **90°**. Na obrázku 6.23 je vzhledem k ose z uložen symetricky. Vidíme zde směry i působiště *výslednic smykových napětí* (smykových sil) v přírubách Q_f a ve stojině Q_w. Z obrázku je zřejmé, že výslednice všech *smykových sil* Q_i prochází těžištěm, tudíž i výslednice *vnějších sil* jim musí procházet. V tomto případě je těžiště průřezu zároveň středem smyku a *je tímto potvrzena podmínka uvedena v úvodu této kapitoly.*

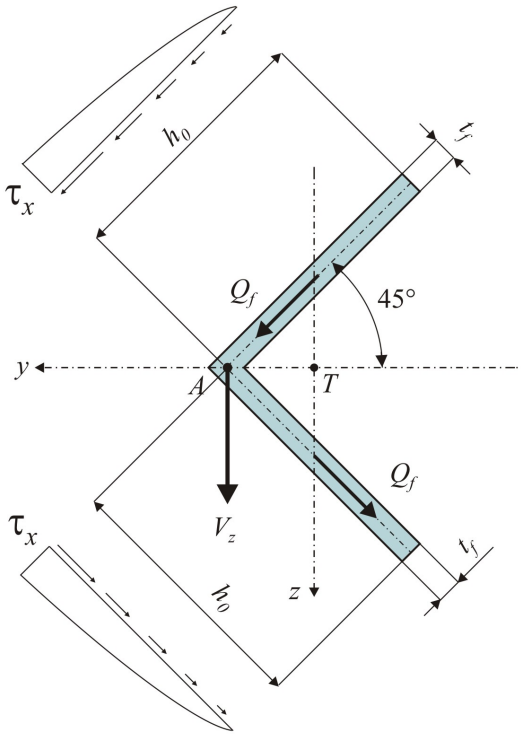


Obr. 6.23 Smyková napětí a střed smyku **U** profilu vodorovně uloženého

Uvažujme nyní ***rovnoramenný úhelník*** dle 6.24. Průřez *není symetrický k ose* z. Výslednice smykových sil na obou přírubách jsou velikostně shodné o velikosti:

$$Q_f = \frac{V_z}{\sqrt{2}} \text{ [kN]} \tag{6.101}$$

a protínají se v průsečíku os A (působiště výslednice smykových sil) Q_f. Bod A je tedy středem smyku a musí jím procházet výslednice vnějších sil, aby nebyl průřez kroucen.



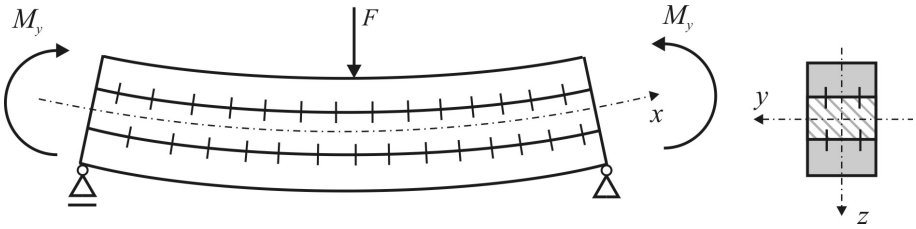
Obr. 6.24 Smyková napětí a střed smyku **L** profilu

6.5 Složené nosníky

Představme si nosník, který je složen z několika podélných částí dle obr. 6.25. Je-li zatížen ohybovým momentem i posouvající silou (nejedná se o prostý ohyb), musíme zabezpečit vzájemné spojení jednotlivých částí, aby se vzájemně ve styčných plochách (spárách) neposouvaly a nosník působil jako samostatný celek. Spojovací prostředky (svary, nýty, šrouby, lepidla...) musí být odolné ke smykovým napětím, které ve styčných plochách vznikají.

Připomínáme čtenáři platnost věty o vzájemnosti smykových napětí (1.30) až (1.32), jak bylo uvedeno již v úvodu kapitoly 6.3: Působí-li v daném místě smykové napětí (od posouvající síly) ve svislém směru τ_{xz}, působí ve stejném místě stejně veliké smykové napětí ve vodorovném směru τ_{zx} (ve styčných plochách).

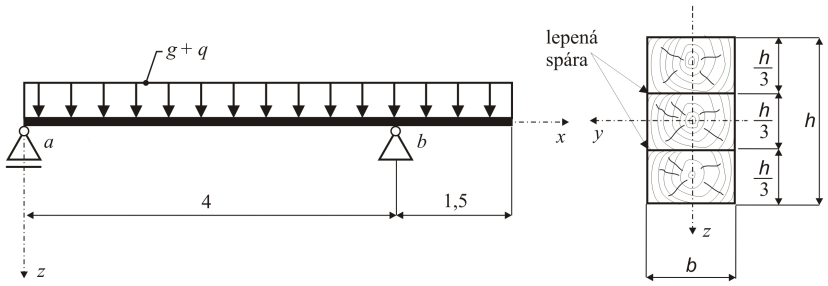
Jak bylo naznačeno již v poznámce 6.19, u lepeného nosníku v příkladu 6.21, který je tvořen ze tří podélných částí, není rozhodující maximální smykové napětí v těžištní ose průřezu, ale rozhoduje velikost napětí v lepené spáře (ve třetině výšky). V lepené spáře sice vzniká menší napětí než τ_{max} v těžišti daného průřezu, ale je zde lepidlo, jehož dovolené smykové napětí $\tau_{dov,lep}$ je třikrát menší než dovolené smykové napětí materiálu nosníku (dřeva) $\tau_{dov,dř}$. Více viz řešení v příkladu 6.21.



Obr. 6.25 Složené nosníky

Při spojení jednotlivých podélných částí šrouby, nýty nebo hmoždinkami je potřeba spočítat smykovou sílu od smykového napětí, kterou přenáší jeden spojovací článek. Podrobněji viz [20], kapitola 3.5 a [21], kapitola 3.5.

Příklad 6.21. Dřevěný lepený nosník s převislým koncem je zatížen po celé délce svislým spojitým rovnoměrným zatížením a jeho statické schéma a průřez jsou zobrazeny na obr. 6.26. Určete nutnou šířku obdélníkového průřezu při posuzování smykového napětí v lepené spáře, maximálního smykového napětí, maximálního normálového napětí, na závěr proveďte posouzení všech namáhání pro zvolenou šířku průřezu. Konkrétní vstupní údaje jsou uvedeny v tabulce 6.4.



Obr. 6.26 Statické schéma a průřez řešeného nosníku

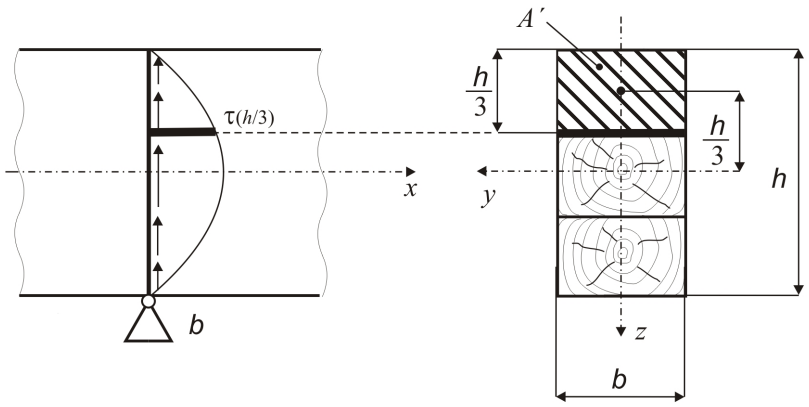
Řešení.
Návrhová hodnota intenzity zatížení pro hodnoty podle tab. 6.4:

$$f_d = g_k \cdot \gamma_G + q_k \cdot \gamma_Q = 10,5 \ [\mathrm{kNm^{-1}}] \ . \tag{6.102}$$

Z průběhů vnitřních sil je zřejmé, že návrhová hodnota posouvající síly je $V_{Ed} = 33,47$ [kN] v místě podpory b a návrhová hodnota ohybového momentu je $M_{Ed} = 41,53$ [kNm] v nebezpečném průřezu.

Zatížení stálé g_k:	$3,20$ kNm^{-1}
Zatížení proměnné q_k:	$4,12$ kNm^{-1}
Součinitel spolehl. pro zatížení stálé γ_G:	$1,35$ [-]
Součinitel spolehl. pro zatížení proměnné γ_Q:	$1,50$ [-]
Výška průřezu h:	$0,30$ m
Návrhová pevnost lepidla ve smyku $\tau_{dov,lep}$:	$0,5 \cdot 10^6$ Pa
Návrhová pevnost dřeva ve smyku $\tau_{dov,dř} = f_{v,d}$:	$1,5 \cdot 10^6$ Pa
Návrhová pevnost dřeva v ohybu $\sigma_{dov,dř} = f_{m,d}$:	$13,7 \cdot 10^6$ Pa

Tab. 6.4 Vstupní údaje příkladu 6.21



Obr. 6.27 Smykové napětí v lepené spáře nad podporou b (vlevo), průřez nosníku (vpravo)

a) Výpočet smykového napětí v lepené spáře podle obrázku 6.27 v místě největší posouvající síly:
Statický moment v horní třetině výšky průřezu:

$$S_{y(h/3)} = \frac{bh}{3} \cdot \frac{h}{3} = \frac{bh^2}{9} \tag{6.103}$$

Smykové napětí v lepené spáře:

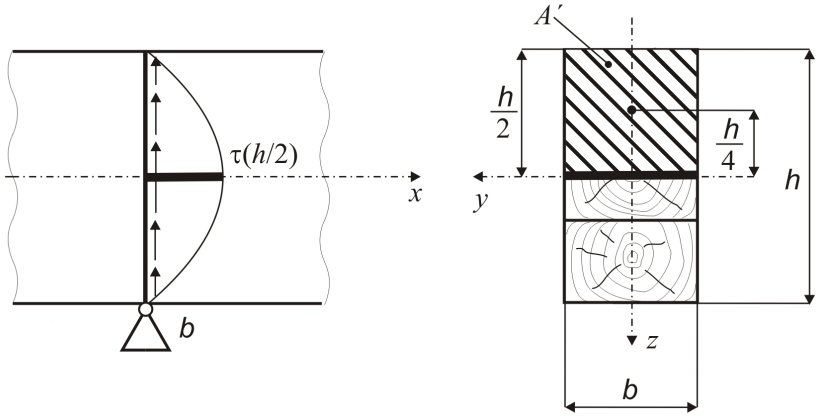
$$\tau_{(h/3)} = \frac{V_{Ed} \cdot S_{y(h/3)}}{I_y \cdot b} \tag{6.104}$$

Dosazením do (6.104) výraz (6.103) a za $I_y = \frac{1}{12}bh^3$ lze získat upravený vztah pro výpočet smykového napětí v lepené spáře:

$$\tau_{(h/3)} = \frac{V_{Ed} \cdot \frac{bh^2}{9}}{\frac{1}{12}bh^3 \cdot b} = \frac{4}{3} \cdot \frac{V_{Ed}}{bh} \tag{6.105}$$

Z rovnice (6.105) vyjádříme minimální šířku průřezu b_{nut}:

$$b_{nut} = \frac{4}{3} \cdot \frac{V_{Ed}}{\tau_{dov,lep} \cdot h} = \frac{4}{3} \cdot \frac{33,5 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 10^6 \cdot 0,3} = 0,298[\mathrm{m}] \tag{6.106}$$



Obr. 6.28 Smykové napětí v ose y nad podporou b (vlevo, průřez nosníku (vpravo)

b) Výpočet maximálního smykového napětí na ose y podle obrázku 6.28 v místě největší posouvající síly:
Statický moment horní (dolní) poloviny průřezu:

$$S_{y(h/2)} = \frac{bh}{2} \cdot \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{8} \tag{6.107}$$

Smykové napětí na ose y:

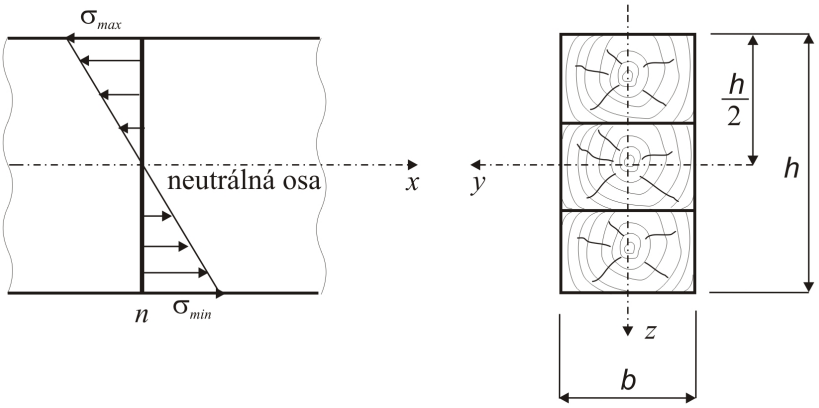
$$\tau_{(h/2)} = \frac{V_{Ed} \cdot S_{y(h/2)}}{I_y \cdot b} \tag{6.108}$$

Dosazením do (6.108) výraz (6.107) a za $I_y = \frac{1}{12}bh^3$ lze získat upravený vztah pro výpočet smykového napětí v ose nosníku:

$$\tau_{(h/2)} = \frac{V_{Ed} \cdot \frac{bh^2}{8}}{\frac{1}{12}bh^3 \cdot b} = \frac{3}{2} \cdot \frac{V_{Ed}}{bh} \tag{6.109}$$

Z rovnice (6.109) vyjádříme minimální šířku průřezu b_{nut}:

$$b_{nut} = \frac{3}{2} \cdot \frac{V_{Ed}}{\tau_{dov,dř} \cdot h} = \frac{3}{2} \cdot \frac{33,5 \cdot 10^3}{1,5 \cdot 10^6 \cdot 0,3} = 0,112[\mathrm{m}] \tag{6.110}$$



Obr. 6.29 Normálové napětí v nebezpečném průřezu

c) Výpočet normálového napětí v krajních vláknech průřezu podle obrázku 6.29 v místě největšího ohybového momentu:
Dosazením vztahu pro výpočet průřezového modulu obdélníkového průřezu $W_y = \frac{1}{6} \cdot bh^2[\mathrm{m}^3]$ lze získat normálové napětí v krajních vláknech:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{Ed}}{W_y} = \frac{M_{Ed}}{\frac{1}{6} \cdot bh^2} \tag{6.111}$$

Z rovnice (6.111) vyjádříme minimální šířku průřezu b_{nut}:

$$b_{nut} = \frac{6 \cdot M_{Ed}}{\sigma_{dov,dř} \cdot h^2} = \frac{6 \cdot 41,5 \cdot 10^3}{13,7 \cdot 10^6 \cdot 0,3^2} = 0,202[\mathrm{m}] \tag{6.112}$$

Podle (6.106), (6.110) a (6.112) vychází minimální šířka průřezu $b_{nut} = 0,298[\mathrm{m}]$.
Návrh šířky průřezu b = 0,300[m].

d) Posouzení navrženého průřezu daného nosníku:

1. Smyková únosnost v lepené spáře je dána vztahem (6.105):

$$V_{Rd} = \frac{3}{4} \cdot b \cdot h \cdot \tau_{dov,lep} = \frac{3}{4} \cdot 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,5 \cdot 10^6 = 33,75 \cdot 10^3[\mathrm{N}] = 33,75[\mathrm{kN}]$$

$$V_{Rd} = 33,75[\mathrm{kN}] > V_{Ed} = 33,5[\mathrm{kN}]$$

2. Smyková únosnost v ose nosníku je určena ze vztahu (6.109):

$$V_{Rd} = \frac{2}{3} \cdot b \cdot h \cdot \tau_{dov,dř} = \frac{2}{3} \cdot 0,3 \cdot 0,3 \cdot 1,5 \cdot 10^6 = 90,00 \cdot 10^3[\mathrm{N}] = 90,00[\mathrm{kN}]$$

$$V_{Rd} = 90,00[\mathrm{kN}] > V_{Ed} = 33,5[\mathrm{kN}]$$

3. Ohybová únosnost v krajních vláknech je vyjádřena ze vztahu (6.111):

$$M_{Rd} = \frac{1}{6} \cdot b \cdot h^2 \cdot \sigma_{dov,dř} = \frac{1}{6} \cdot 0,3 \cdot 0,3^2 \cdot 13,7 \cdot 10^6 = 61,65 \cdot 10^3 [\mathtt{Nm}] = 61,65 [\mathtt{kNm}]$$

$$M_{Rd} = 61,65 [\mathtt{kNm}] > M_{Ed} = 41,5 [\mathtt{kNm}]$$

Navržený průřez vyhovuje z hlediska smykového i normálového napětí.

▲

Kapitola 7

Přetvoření ohýbaných nosníků

Stejně jako u ostatních druhů namáhání (prostý tah, tlak nebo kroucení), i u ohýbaných nosníků potřebujeme znát přetvoření ze dvou důvodů:

- Dimenzování – návrh a posudek podle ***mezního stavu použitelnosti***, jak bylo uvedeno již v úvodu kapitoly 6.2.2.
- Řešení staticky neurčitých úloh – sestavení ***deformačních podmínek***.

Při odvození přetvoření ohýbaných prutů se omezíme těmito předpoklady:

- Výpočty jsou řešeny podle *teorie malých deformací*, dle kap.1.2.
- Prut je dostatečně štíhlý, tím pádem je jeho deformační stav určen tvarem ***ohybové čáry***, tj. křivky, v níž přejde původně přímá osa nosníku vlivem zatížení.
- Jedná se o rovinný případ, kdy zatížení i podepření je symetrické ve svislé rovině xz, přičemž osa z je hlavní osou setrvačnosti průřezu.
- Zanedbáváme vliv smyku (deformační účinky přisoudíme pouze ohybovým momentům), jak bylo uvedeno již v úvodu kapitoly 6.3.2.

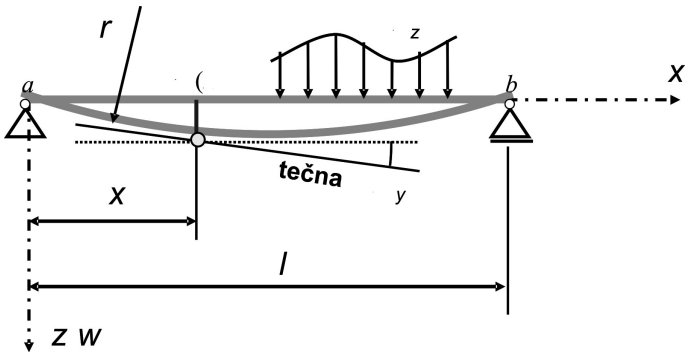
U tvaru ohybové čáry sledujeme dvě veličiny:

- Průhyb w [m] .
- Pootočení φ [rad] .

Ve výpočtech převoření ohýbaných nosníků se budeme setkávat s ***ohybovou tuhostí*** prutu, která závisí na materiálu (modulu pružnosti E) a velikosti i *tvaru* průřezu (momentu setrvačnosti I_y). Je dána jejich součinem $E \cdot I_y$, pro přehlednost zápisu značíme ohybovou tuhost EI. *Pokud nebude uvedeno jinak*, předpokládáme ji ***konstantní*** $EI = konst$.

7.1 Diferenciální rovnice ohybové čáry

Na obrázku 7.1 je vyznačena ohybová čára $w_{(x)}$ pro vodorovně i svisle uložený nosník. Její jednotlivé pořadnice označujeme ***průhyb*** nosníku v daném místě (x).



Obr. 7.1 Ohybová čára nosníku

Pootočení $\varphi = \varphi_y$ je úhel *v radiánech*, který ***svírá tečna ohybové čáry s osou x***. V teorii malých deformací je $\varphi \ll 1$, takže platí:

$$\varphi \cong \operatorname{tg}\varphi = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = w' \ \ [\mathrm{rad}] \ . \tag{7.1}$$

Čárkou označená derivace je derivace podle x.

Na základě matematických znalostí byl v [20] odvozen vztah pro druhou derivaci průhybu:

$$w'' = -\frac{M_y(x)}{E \cdot I_y} = -\frac{M_{(x)}}{EI} = -\frac{M}{EI}, \tag{7.2}$$

který představuje **diferenciální rovnici ohybové čáry** 2.*řádu*. Je to *výchozí rovnice pro* ***staticky určité úlohy*** při řešení přetvoření ohýbaných nosníků.

Poznámka 7.1. Značení $M_y(x)$ znamená, že se jedná o moment v rovině xz (otáčivý účinek kolem osy xz) a jeho velikost se mění v závislosti na proměnné délce nosníku x. Analogicky platí i pro veličiny $q_z(x)$, $V_z(x)$.

Poznámka 7.2. Shodně s uvedením v poznámce 6.1 i zde pro přehlednost zápisu vypouštíme indexy a omezíme se na značení:

$$M = M_y \ \ [\mathrm{kNm}], \quad V = V_z \ \ [\mathrm{kN}], \quad q = q_z \ \ [\mathrm{kNm^{-1}}], \quad I = I_y \ \ [\mathrm{m^4}] \ . \tag{7.3}$$

Druhá derivace ohybové čáry je tedy přímo úměrná ohybovému momentu $M_y(x)$ v daném místě (x) a nepřímo úměrná ohybové tuhosti. V případě konstantní tuhosti využijeme ***Schwedlerových vztahů*** (1.6) a (1.7) (probírali jsme je podrobně již ve Stavební statice) a dvojím derivováním (7.2) získáme *diferenciální rovnici* 4.*řádu*, ze které vidíme, že čtvrtá derivace průhybu je přímo úměrná příčnému spojitému zatížení q:

$$w'''' = \frac{q_z(x)}{E \cdot I_y} = \frac{q}{EI}. \tag{7.4}$$

Vztah (7.4) je výchozím při řešení ***staticky neurčitých úloh***. Vice v kapitole 7.3.4.

Pro úplnost uvádíme vztah pro třetí derivaci průhybu, který rovněž vychází ze ***Schwedlerova vztahu*** (1.6):

$$w''' = -\frac{V_z(x)}{E \cdot I_y} = -\frac{V}{EI}. \tag{7.5}$$

Znaménková konvence:

Průhyb je *kladný*, směřuje-li *dolů* – do kladného směru svislé osy z.

Pootočení: v globálním souřadnén systému je *kladné ve směru chodu* hodinových ručiček.
V úlohách budeme někdy nuceni zavádět lokální souřadné systémy. Například trojúhelníkové zatížení se "špičkou"(nulová hodnota lineárního q) vpravo řešíme zprava a je výhodné zavést lokální souřadný systém pro kladné x směrem doprava.
Znaménková konvence pro pootočení φ obecně platí: *kladné* pootočení φ je, směřuje-li od *kladné* osy x *směrem ke kladné* ose z.

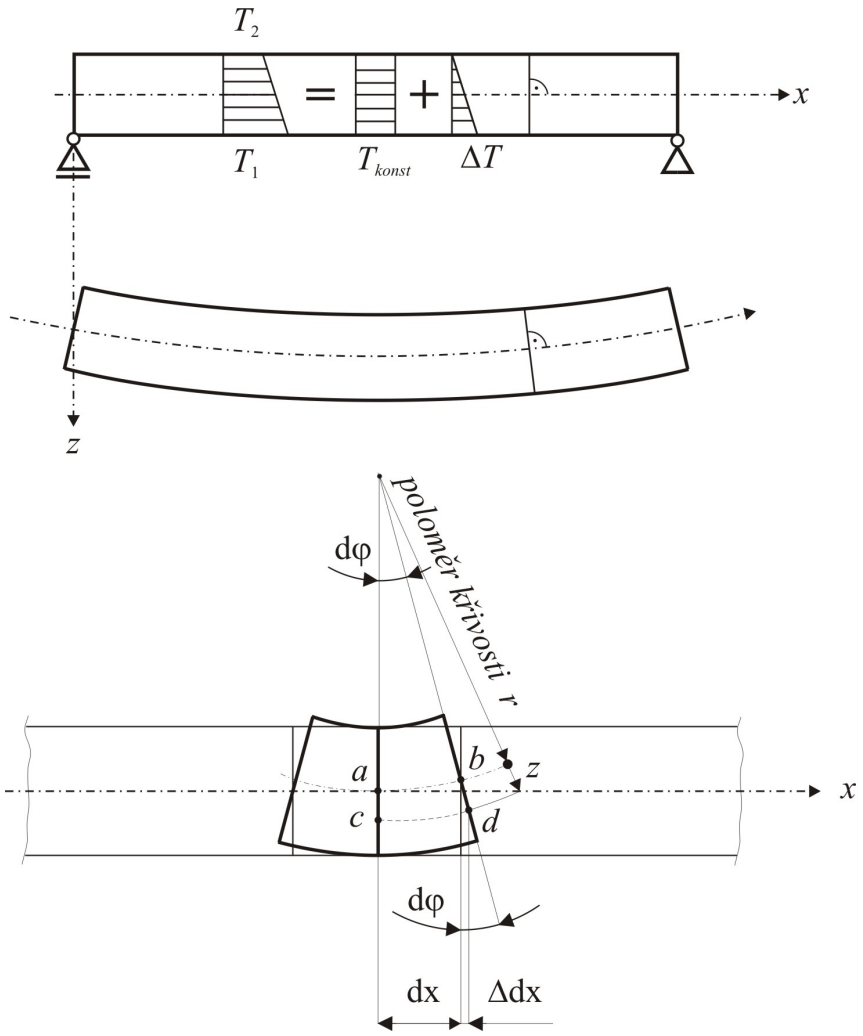
Diferenciální vztahy (7.1) až (7.5) po úpravě ve tvaru, jak s nimi budeme dále pracovat, jsou:

$$\begin{aligned} EI \cdot w'''' &= q \quad [\mathrm{kNm}^{-1}], && (7.6)\\ EI \cdot w''' &= -V \quad [\mathrm{kN}], && (7.7)\\ EI \cdot w'' &= -M \quad [\mathrm{kNm}];, && (7.8)\\ w' &= \varphi \quad [\mathrm{rad}], && (7.9)\\ w &= w \quad [\mathrm{m}]. && (7.10) \end{aligned}$$

Poznámka 7.3. Znaménka ve vztazích (7.1) až (7.5) nebo (7.6) až (7.10) vycházejí z odvozených ***Schwedlerových vztahů*** v souladu se ***znaménkovou konvencí*** a ***nelze je zaměňovat***.

7.2 Nerovnoměrné oteplení nosníků

Křivost střednice prutu ovlivňuje kromě příčného zatížení také nerovnoměrné rozdělení teploty po výšce nosníku. Úlohu si vysvětíme pro nejjednodušší případ, kdy průřez je symetrický k ose y a průběh teploty je lineární dle obrázku 7.2. Na spodním okraji je T_1, na horním T_2. K deformaci prutu přispívá pouze rozdíl teplot $\Delta T = T_1 - T_2$. Rozložení teploty po výšce průřezu můžeme superponovat dle obrázku. Teplota, která působí ve všech vláknech T_{konst} prodlouží celý prut dle (2.42). Horní vlákna se dále neprotahují, spodní vlákna se vlivem ΔT ještě protáhnou. Velikost protažení po výšce průřezu je lineární, přímo uměrná ΔT a tím dojde k ohybu nosníku.



Obr. 7.2 Přetvoření nosníku při nerovnoměrném oteplení

Na základě geometrie přetvoření byl v [20] odvozena *diferenciální rovnice ohybové čáry 2.řádu* pro zatížení nerovnoměrnou teplotou:

$$w'' = -\frac{-\alpha_T \Delta T}{h}, \tag{7.11}$$

kde α_T je součinitel tepelné roztažnosti (tab. 2.4). Pokud je nosník namáhán příčným zatížením i nerovnoměrným oteplením, je třeba touto rovnicí rozšířit o člen v rovnici (7.2).

Poznámka 7.4. Pokud je nosník zatížen ***pouze teplotou***, platí u prutů rovnoměrně oteplených (*osově namáhaných*) stejně jako u nerovnoměrně oteplených (*ohýbaný prut*): Není-li bráněno deformaci – jedná se o staticky určité úlohy, prut se deformuje dle vztahů (2.42), respektive (7.11) a v průřezu nevzniká žádné napětí. Je – li deformaci bráněno (staticky neurčité úlohy), v důsledku toho vznikají v prutech normálové síly N (příklad 4.18), případně ohybové momenty M (od nerovnoměrného oteplení). V důsledku působení vnitřních sil N, M vznikají v průřezu normálová napětí.

7.3 Metoda integrace diferenciální rovnice ohybové čáry

Z diferenciálních vztahů (7.1) až (7.5) nebo (7.6) až (7.10) vyplývá, že ***z rovnice ohybové čáry*** $w = w(x)$ získáme postupným derivováním všechny ostatní veličiny, tedy že je zcela ***definován stav prutu*** a to deformačně i silově. V teorii pružnosti ovšem obvykle řešíme opačnou úlohu: *Z průběhu ohybových momentů* $M_{(x)}$ (staticky určité úlohy) *nebo zatížení* $q_{(x)}$ (staticky neurčité úlohy) ***integrací odvozujeme rovnici ohybové čáry*** $w_{(x)}$. Postup a formulace okrajových podmínek, z nichž se stanoví integrační konstanty jsou objasněny v následujících kapitolách.

7.3.1 Jednoduché zatížení staticky určitých nosníků – přímá integrace diferenciální rovnice ohybové čáry

U staticky určitých úloh umíme vyjádřit a matematicky popsat průběh (velikost) ohybových momentů $M_{(x)}$ po celé délce nosníku. Pro výpočet přetvoření tudíž použijeme jako výchozí vztah (7.2). Při $EI = konst$ vynásobíme diferenciální rovnici ohybovou tuhostí EI a postupným integrováním momentové funkce získáme:

$$EI \cdot w'' = -M, \tag{7.12}$$

$$EI \cdot w' = -\int M \mathrm{d}x + C_1, \tag{7.13}$$

$$EI \cdot w = -\int \int [M \mathrm{d}x] \, \mathrm{d}x + C_1 \cdot x + C_2. \tag{7.14}$$

Poznámka 7.5. Přímou integrací diferenciální rovnice ohybové čáry můžeme použít jen v případě, kdy zatížení i uložení nosníku umožní popsat momentovou funkci jedinou rovnicí po celé jeho délce (momentová funkce je spojitá). Z pohledu geometrie se jedná pouze o prostý nosník bez převislých konců nebo o konzolu. Z pohledu zatížení může být spojité zatížení (konstantní i lineární) působící na celé délce nosníku nebo osamělé zatížení (síla, moment), které působí v krajních bodech nosníku (moment jako vnější zatížení nad podporou nebo síla na volném konci konzoly).

Integrační konstanty určíme z okrajových podmínek, v tomto případě *deformačních*. Ze statických podmínek byly totiž určeny reakce a následně funkce ohybového momentu $M_{(x)}$. U jednoduchých případů se uplatní pouze tyto okrajové podmínky:

Prostě podepřený okraj (kloubová podpora):
V místě kloubové podpory je zabráněno svislému posunutí (průhybu), ovšem prut se zde může natáčet kolem osy y. Proto v tomto bodě platí: $\boldsymbol{w = 0}$, $\boldsymbol{w' = \varphi \neq 0}$. O pootočení víme, že *není nulové*, ovšem jeho hodnotu neznáme, tudíž nelze použít jako okrajovou podmínku.

Pro prostě podepřený okraj platí jediná okrajová podmínka *nulového průhybu* $w = 0$.

Je-li podpora na začátku nosníku, pro který platí $x = 0$, potom $w_{x=0} = w_0 = 0$, $w'_{x=0} = w'_0 = \varphi_0 \neq 0$. Je-li podpora na konci nosníku, pro který platí $x = l$, potom $w_{x=l} = w_l = 0$, $w'_{x=l} = w'_l = \varphi_l \neq 0$.

U prostého nosníku tedy využijeme *dvě okrajové (deformační) podmínky* ***ve dvou bodech***: **průhyby v obou podporách jsou nulové** – $w_0 = 0$, $w_l = 0$.

Vetnutý okraj (konzola):
Ve vetknutí je zabráněno svislému posunutí (průhybu) i pootočení nosníku, proto v místě vetknutí platí: $\boldsymbol{w = 0}$, $\boldsymbol{w' = \varphi = 0}$.

U vetknutého nosníku tedy využijeme *dvě okrajové (deformační) podmínky* ***v jednom bodě***: **průhyb i pootočení v místě vetknutí jsou nulové**: $w = 0$, $w' = 0$.

Je-li vetknutí na začátku nosníku, pro který platí $x = 0$, potom $w_{x=0} = w_0 = 0$, $w'_{x=0} = w'_0 = \varphi_0 = 0$. Je-li podpora na konci nosníku, pro který platí $x = l$, potom

$w_{x=l} = w_l = 0$, $w'_{x=l} = w'_l = \varphi_l = 0$. Jediné známé hodnoty v tomto případě jsou průhyb a pootočení v jediném místě – vetknutí. O volné konci víme, že má nenulové deformace, ale jejich hodnotu neznáme.

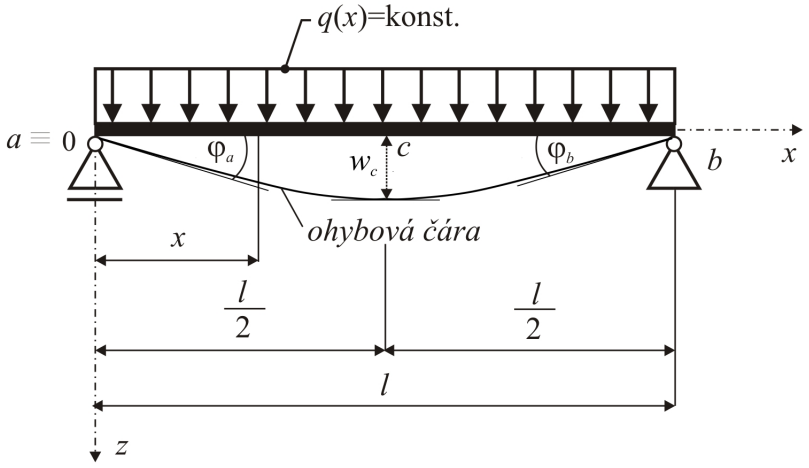
Ostatní deformace (průhyb, pootočení) v kterémkoliv jiném místě mají zatím neznámou hodnotu, proto je jako okrajovou podmínku nemůžeme využít.

U **symetricky zatížených i uložených nosníků** můžeme využít podmínku nulového pootočení v ose symetrie (extrémní průhyb → nulová derivace): $\boldsymbol{w'_{l/2} = 0}$.

Poznámka 7.6. Po dosazení hodnot integračních konstant do diferenciálních rovnic (7.12) až (7.14) doporučujeme zkontrolovat exponenty jednotlivých členů, zda se jednotky shodují (např. (7.21) nebo (7.22)). Při ručním výpočtu dochází často k překlepům a tímto odhalíme chybu včas.

7.3.2 Příklady k doplnění řešené problematiky

Příklad 7.7. U prostě podepřeného nosníku, který je zatížen po celé délce svislým spojitým rovnoměrným zatížením q a jehož statické schéma je zobrazeno na obr. 7.3, určete místo maximálního průhybu, hodnotu maximálního průhybu a úhel pootočení v podpoře a. Konkrétní vstupní údaje jsou uvedeny v tabulce 7.1.



Obr. 7.3 Statické schéma řešeného nosníku

Spojité silové zatížení q:	$4\ \mathrm{kNm}^{-1}$
Rozpětí nosníku l:	$6\ \mathrm{m}$
Šířka obdélníkového průřezu b:	$0,04\ \mathrm{m}$
Výška obdélníkového průřezu h:	$0,18\ \mathrm{m}$
Moment setrvačnosti I_y:	$\frac{1}{12} \cdot 0,04 \cdot 0,18^3 = 19,44 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^4$
Modul pružnosti v tahu a tlaku E:	$2,1 \cdot 10^{11}\ \mathrm{Pa}$

Tab. 7.1 Vstupní údaje příkladu 7.7

Řešení.
Svislé reakce v podporách daného nosníku: $R_{az} = R_{bz} = q\frac{l}{2}[\mathtt{kN}]$.
Funkce ohybových momentů:

$$M_y(x) = R_{az} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot q \cdot x^2 = q \cdot \frac{l}{2} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot q \cdot x^2 \tag{7.15}$$

Dosazením (7.15) do základní diferenciální rovnice 2.řádu $EIw'' = -M_y(x)$ a následnou integrací získáme rovnici pootočení (7.17) a rovnici ohybové čáry (7.18):

$$EIw'' = \frac{1}{2} \cdot q \cdot x^2 - q \cdot \frac{l}{2} \cdot x \tag{7.16}$$

$$EIw' = \frac{1}{6} \cdot q \cdot x^3 - q \cdot \frac{l}{4} \cdot x^2 + C_1 \tag{7.17}$$

$$EIw = \frac{1}{24} \cdot q \cdot x^4 - q \cdot \frac{l}{12} \cdot x^3 + C_1 \cdot x + C_2 \tag{7.18}$$

Okrajové podmínky:

1. $w(x = 0) = 0$

   Touto rovnicí je vyjádřeno, že průhyb v bodě a (kdy x=0) je roven nule dle obr. 7.3. Po dosazení do obecné rovnice ohybové čáry (7.18) za x nulu lze získat rovnici:

   $$\frac{1}{24} \cdot q \cdot 0^4 - q \cdot \frac{l}{12} \cdot 0^3 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0\ , \tag{7.19}$$

2. $w(x = l) = 0$

   Touto rovnicí je vyjádřeno, že průhyb v bodě b (kdy x=l) je roven nule podle obr. 7.3. Dosazením opět do obecné rovnice ohybové čáry (7.18) za x hodnotu l lze tedy získat rovnici:

   $$\frac{1}{24} \cdot q \cdot l^4 - q \cdot \frac{l}{12} \cdot l^3 + C_1 \cdot l + C_2 = 0\ . \tag{7.20}$$

Řešením soustavy rovnic (7.19) a (7.20) lze získat hodnoty neznámých integračních konstant $C_1 = \frac{1}{24} \cdot ql^3$ a $C_2 = 0$.

Dosazením výsledných hodnot integračních konstant C_1 a C_2 do vztahů (7.17) a (7.18) lze získat výsledné obecné rovnice pootočení (7.21) a ohybové čáry (7.22):

$$w' = \frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot q \cdot x^3 - q \cdot \frac{l}{4} \cdot x^2 + \frac{1}{24} \cdot q \cdot l^3 \right) , \tag{7.21}$$

$$w = \frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{1}{24} \cdot q \cdot x^4 - q \cdot \frac{l}{12} \cdot x^3 + \frac{1}{24} \cdot q \cdot l^3 \cdot x \right) . \tag{7.22}$$

a) Výpočet místa maximálního průhybu:
Ze vztahů vyplývá, že místo maximálního průhybu je v místě, kde úhel pootočení je roven 0, čili reálný kořen kubické rovnice (7.23):

$$w' = \frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot q \cdot x^3 - q \cdot \frac{l}{4} \cdot x^2 + \frac{1}{24} \cdot q \cdot l^3 \right) = 0 , \tag{7.23}$$

kterou lze upravit do tvaru:

$$\frac{x^3}{3} - \frac{l \cdot x^2}{2} + \frac{l^3}{12} = 0 . \tag{7.24}$$

Řešením rovnice (7.24) jsou kořeny $x_1 = \frac{l}{2}$ (reálný kořen), $x_{2,3} = l \cdot \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ (mimo nosník).

b) Maximální průhyb v místě $x_1 = \frac{l}{2}$ (uprostřed nosníku) lze určit dosazením do (7.22):

$$EIw_c = EIw(x = l/2) = \frac{1}{24} \cdot q \cdot \left(\frac{l}{2} \right)^4 - q \cdot \frac{l}{12} \cdot \left(\frac{l}{2} \right)^3 + \frac{1}{24} \cdot q \cdot l^3 \cdot \frac{l}{2} . \tag{7.25}$$

Úpravou rovnice (7.25) lze získat výraz:

$$w_c = \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{EI} . \tag{7.26}$$

c) Pootočení v levé podpoře pak lze určit dosazením $x = 0$ do vztahu 7.21:

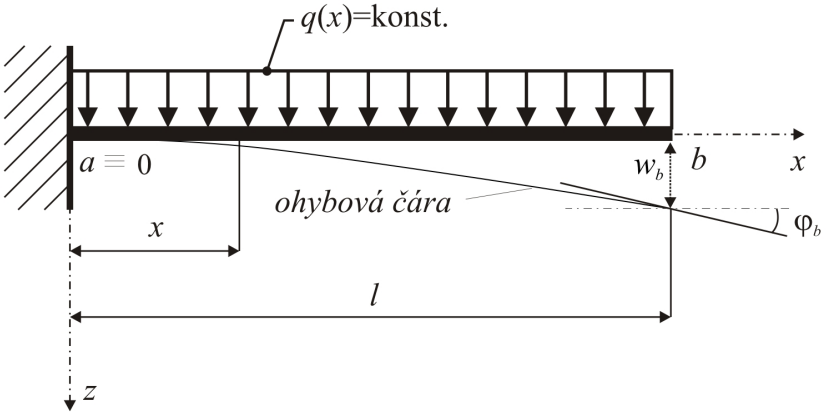
$$EIw'_a = EIw'(x = 0) = \frac{1}{6} \cdot q \cdot 0^3 - q \cdot \frac{l}{4} \cdot 0^2 + \frac{1}{24} \cdot ql^3 . \tag{7.27}$$

Úpravou (7.27) je možno získat výraz:

$$w'_a = \varphi_a = \frac{1}{24} \cdot \frac{ql^3}{EI} . \tag{7.28}$$

Po dosazení vstupních veličin do (7.26) a (7.28) lze získat hodnotu maximálního průhybu v polovině rozpětí $w_c = 16{,}53$ [mm] a hodnotu úhlu pootočení v levé podpoře $\varphi_a = 8,818 \cdot 10^{-3}$ [rad]$= 0,5$ [deg]. ▲

Příklad 7.8. Určete obecně průhyb a úhel pootočení volného konce konzolového nosníku, který je zatížen po celé délce svislým spojitým rovnoměrným zatížením q_z a jehož statické schéma je zobrazeno na obr. 7.5.



Obr. 7.4 Statické schéma řešeného nosníku

Řešení.
Reakce v místě vetknutí dané konzoly: $R_{az} = ql$[kN]a $M_a = q\frac{l^2}{2}$[kNm].
Funkce ohybových momentů:

$$M_y(x) = R_{az} \cdot x - M_a - \frac{1}{2} \cdot q \cdot x^2 = q \cdot l \cdot x - q \cdot \frac{l^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot q \cdot x^2 \tag{7.29}$$

Dosazením (7.29) do základní diferenciální rovnice 2.řádu $EIw'' = -M_y(x)$ a následnou integrací získáme rovnici pootočení (7.31) a rovnici ohybové čáry (7.32):

$$EIw'' = \frac{1}{2} \cdot q \cdot x^2 - q \cdot l \cdot x + q \cdot \frac{l^2}{2} \tag{7.30}$$

$$EIw' = \frac{1}{6} \cdot q \cdot x^3 - q \cdot \frac{l}{2} \cdot x^2 + q \cdot \frac{l^2}{2} \cdot x + C_1 \tag{7.31}$$

$$EIw = \frac{1}{24} \cdot q \cdot x^4 - q \cdot \frac{l}{6} \cdot x^3 + q \cdot \frac{l^2}{4} \cdot x^2 + C_1 \cdot x + C_2 \tag{7.32}$$

Okrajové podmínky:

1. $w'(x = 0) = 0$

Tato rovnice vyjadřuje, že úhel pootočení φ v místě vetknutí je podle obr. 7.5 roven nule. Dosazením do obecné rovnice pootočení (7.31) za x nulu, rovnici položíme rovno nule a získáme :

$$\frac{1}{6}\cdot q\cdot 0^3 - q\cdot\frac{l}{2}\cdot 0^2 + q\cdot\frac{l^2}{2}\cdot 0 + C_1 = 0\ , \tag{7.33}$$

2. $w(x=0)=0$

   Tato rovnice znamená, že průhyb v místě vetknutí je podle obr. 7.5 roven nule. Po dosazení do obecné rovnice ohybové čáry (7.32) za x nulu a rovnici opět položíme rovnu nule lze získat:

$$\frac{1}{24}\cdot q\cdot 0^4 - q\cdot\frac{l}{6}\cdot 0^3 + q\cdot\frac{l^2}{4}\cdot 0^2 + C_1\cdot 0 + C_2 = 0\ . \tag{7.34}$$

Z rovnic (7.33) a (7.34) jsou určeny hodnoty neznámých integračních konstant $C_1 = 0$ a $C_2 = 0$.

Dosazením C_1 a C_2 do vztahů (7.31) a (7.32) lze získat výsledné obecné rovnice pootočení (7.35) a ohybové čáry (7.36):

$$EIw' = \frac{1}{6}\cdot q\cdot x^3 - q\cdot\frac{l}{2}\cdot x^2 + q\cdot\frac{l^2}{2}\cdot x \tag{7.35}$$

$$EIw = \frac{1}{24}\cdot q\cdot x^4 - q\cdot\frac{l}{6}\cdot x^3 + q\cdot\frac{l^2}{4}\cdot x^2 \tag{7.36}$$

a) Pootočení volného konce lze určit dosazením do (7.35) za $x = l$:

$$EIw_b' = \frac{1}{6}\cdot q\cdot l^3 - q\cdot\frac{l}{2}\cdot l^2 + q\cdot\frac{l^2}{2}\cdot l;$$

úpravou je získán výraz:

$$w_b' = \varphi_b = \frac{1}{6}\cdot\frac{ql^3}{EI} \tag{7.37}$$

b) Průhyb volného konce nosníku lze zjistit dosazením do (7.36) za $x = l$:

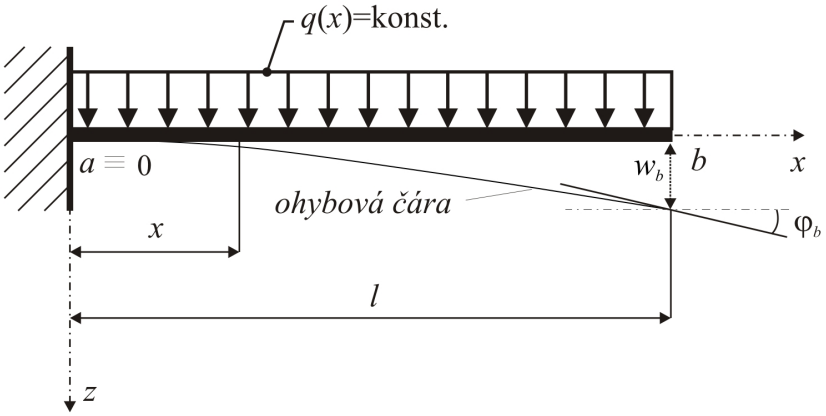
$$EIw_b = \frac{1}{24}\cdot q\cdot l^4 - q\cdot\frac{l}{6}\cdot l^3 + q\cdot\frac{l^2}{4}\cdot l^2;$$

úpravou je získán výraz:

$$w_b = \frac{1}{8}\cdot\frac{ql^4}{EI} \tag{7.38}$$

▲

Příklad 7.9. U nosníku z příkladu 7.8, jehož statické schéma je zobrazeno na obr. 7.5, proveďte návrh průřezu z válcovaného I profilu podle mezního stavu použitelnosti a také posudek navrženého průřezu. Je dána hodnota mezního průhybu volného konce nosníku $\delta_{mez} = 20[\text{mm}]$. Konkrétní vstupní údaje jsou uvedeny v tabulce 7.2.



Obr. 7.5 Statické schéma řešeného nosníku

Spojité silové zatížení q_z:	$4\ \text{kNm}^{-1}$
Délka nosníku l:	$3\ \text{m}$
Modul pružnosti v tahu a tlaku E:	$2,1 \cdot 10^{11}\ \text{Pa}$
Mezní průhyb volného konce δ_{mez}:	$0,02\ \text{m}$

Tab. 7.2 Vstupní údaje příkladu 7.9

Řešení.
Průhyb volného konce nosníku lze převzít z příkladu 7.8 vzorec (7.38):

$$w_b = \frac{1}{8} \cdot \frac{ql^4}{EI} \tag{7.39}$$

a) Návrh průřezu:

$$w_b = \frac{1}{8} \cdot \frac{ql^4}{EI} \leqq \delta_{mez} \tag{7.40}$$

Z rovnice (7.40) po dosazení vstupních hodnot z tabulky 7.2 je možno určit minimální hodnotu momentu setrvačnosti I_{min}:

$$I_{min} = \frac{1}{8} \cdot \frac{ql^4}{E \cdot \delta_{mez}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 3^4}{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 0,02} = 9,6428 \cdot 10^{-6}[\mathrm{m}^4]$$

Podle tabulek válcovaných profilů (v příloze) je navržen profil $IPN180$, jehož moment setrvačnosti I=$14,5 \cdot 10^{-6}$ m^4.

b) Posouzení průřezu:
Do rovnice (7.38) je dosazena hodnota momentu setrvačnosti navrženého průřezu a určen výsledný průhyb volného konce nosníku, který je porovnán s mezní hodnotou δ_{mez}:

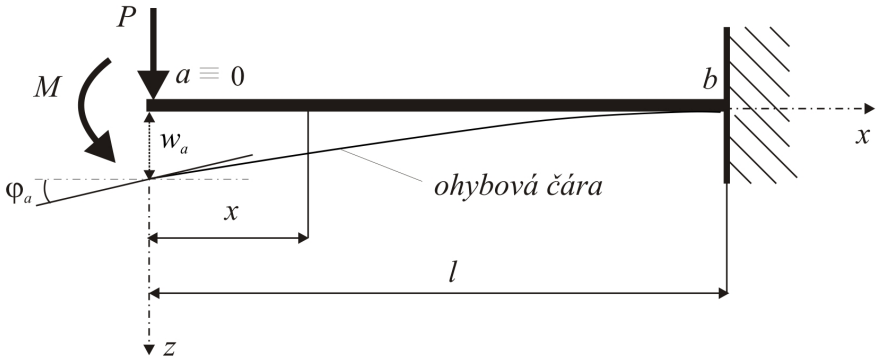
$$w_b = \frac{1}{8} \cdot \frac{ql^4}{EI} = \frac{1}{8} \cdot \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 3^4}{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 14,5 \cdot 10^{-6}} = 0,013[\mathrm{m}]$$

$$w_b = 0,013[\mathrm{m}] < \delta_{mez} = 0,020[\mathrm{m}]$$

Navržený průřez vyhovuje z hlediska posouzení podle mezního stavu použitelnosti.

▲

Příklad 7.10. Konzolový nosník je na volném konci zatížen osamělým momentem M a svislou silou P a jeho statické schéma je zobrazeno na obr. 7.6. Vyjádřete obecně úhel pootočení φ_a a průhyb w_a volného konce.



Obr. 7.6 Statické schéma řešeného nosníku

Řešení.
Funkce ohybových momentů:

$$M_y(x) = -\ P \cdot x - M \tag{7.41}$$

Dosazením (7.41) do základní diferenciální rovnice 2.řádu $EIw'' = -M_y(x)$ a následnou integrací získáme rovnici pootočení (7.43) a rovnici ohybové čáry 7.44:

$$EIw'' = P \cdot x + M \tag{7.42}$$

$$EIw' = \frac{1}{2} \cdot P \cdot x^2 + M \cdot x + C_1 \tag{7.43}$$

$$EIw = \frac{1}{6} \cdot P \cdot x^3 + \frac{1}{2} \cdot M \cdot x^2 + C_1 \cdot x + C_2 \tag{7.44}$$

Okrajové podmínky:

1. $w'(x = l) = 0$

   Touto rovnicí je vyjádřeno, že úhel pootočení ve vetnutí (kdy x=l) je roven nule. Dosazením do obecné rovnice pootočení (7.43) lze získat rovnici:

$$\frac{1}{2} \cdot P \cdot l^2 + M \cdot l + C_1 = 0 \,, \tag{7.45}$$

2. $w(x = l) = 0$

   Touto rovnicí je vyjádřeno, že průhyb ve vetnutí (kdy x=l) je roven nule. Dosazením do obecné rovnice ohybové čáry (7.44)lze získat rovnici:

$$\frac{1}{6} \cdot P \cdot l^3 + \frac{1}{2} \cdot M \cdot l^2 + C_1 \cdot l + C_2 = 0 \,. \tag{7.46}$$

Výsledkem řešení soustavy rovnic (7.45) a (7.46) jsou hodnoty neznámých integračních konstant $C_1 = -\frac{1}{2} \cdot P \cdot l^2 - M \cdot l$ a $C_2 = \frac{1}{3} \cdot P \cdot l^3 + \frac{1}{2} \cdot M \cdot l^2$.

Výsledné obecné rovnice pootočení (7.47) a ohybové čáry (7.48):

$$EIw' = \frac{1}{2} \cdot P \cdot x^2 + M \cdot x - \frac{1}{2} \cdot P \cdot l^2 - M \cdot l \tag{7.47}$$

$$EIw = \frac{1}{6} \cdot P \cdot x^3 + \frac{1}{2} \cdot M \cdot x^2 + (-\frac{1}{2} \cdot P \cdot l^2 - M \cdot l) \cdot x + \frac{1}{3} \cdot P \cdot l^3 + \frac{1}{2} \cdot M \cdot l^2 \tag{7.48}$$

Výsledné hodnoty pootočení a průhybu na volném konci konzoly:

a) Pootočení volného konce lze určit dosazením do (7.47) za $x = 0$:

$$w'_a = \varphi_a = -\frac{1}{EI} \cdot (\frac{1}{2} \cdot P \cdot l^2 + M \cdot l) \tag{7.49}$$

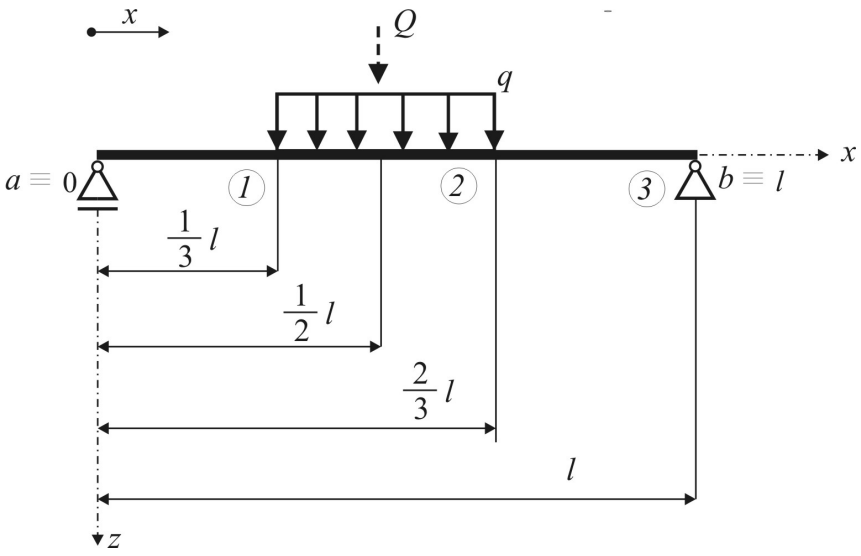
b) Průhyb volného konce nosníku lze zjistit dosazením do (7.48) za $x = 0$:

$$w_a = \frac{1}{EI} \cdot (\frac{1}{3} \cdot P \cdot l^3 + \frac{1}{2} \cdot M \cdot l^2) \tag{7.50}$$

▲

7.3.3 Clebschova metoda

Ve většině případech nelze momentovou funkci vyjádřit jedinou rovnicí. Důvodem je nespojitá momentová funkce (nespojité zatížení – osamělé v libovolném místě mimo krajní body nosníku, spojité působící pouze na části délky prutu nebo zatížený převislý konec). V takovém případě musíme rozdělit prut na jednotlivé intervaly (obr. 7.7) a pro každý z nich integrovat diferenciální rovnici zvlášť. Je-li n intervalů, vznikne celkem $2n$ konstant. Pro jejich určení máme k dispozici 2 *deformační podmínky* dle kap. 7.3.1. Jako další podmínky k určení konstant použijeme $2n-2$ ***podmínky spojitosti*** vyjadřující shodu průhybu i pootočení (společná tečna) na každém rozhraní dvou intervalů.



Obr. 7.7 Nespojité zatížení nosníku

U prutu na obrázku 7.7 máme tři intervaly, ve kterých vyjádříme ***momentové funkce:***

$$x \in <0\ ;\ \frac{1}{3}l> \ :\ M = R_{az}\cdot x\ , \tag{7.51}$$

$$x \in <\frac{1}{3}l\ ;\ \frac{2}{3}l> \ :\ M = R_{az}\cdot x - q\frac{(x-\frac{1}{3}l)^2}{2}\ , \tag{7.52}$$

$$x \in <\frac{2}{3}l\ ;\ l> \ :\ M = R_{az}\cdot x - q\cdot\frac{1}{3}l\cdot(x-\frac{1}{2}l)\ . \tag{7.53}$$

Okrajové podmínky:

Deformační: $w_0 = 0\ ,\ \ w_l = 0$ (viz kap. 7.3.1) .

Spojitosti:

$w_{\frac{l}{3}-1.interval} = w_{\frac{l}{3}-2.interval}\ ,\qquad w_{\frac{l}{3}-1.interval} = w_{\frac{l}{3}-2.interval}\ ,$

$w_{\frac{2l}{3}-2.interval} = w_{\frac{2l}{3}-3.interval}$, $\quad w_{\frac{2l}{3}-2.interval} = w_{\frac{2l}{3}-3.interval}$.

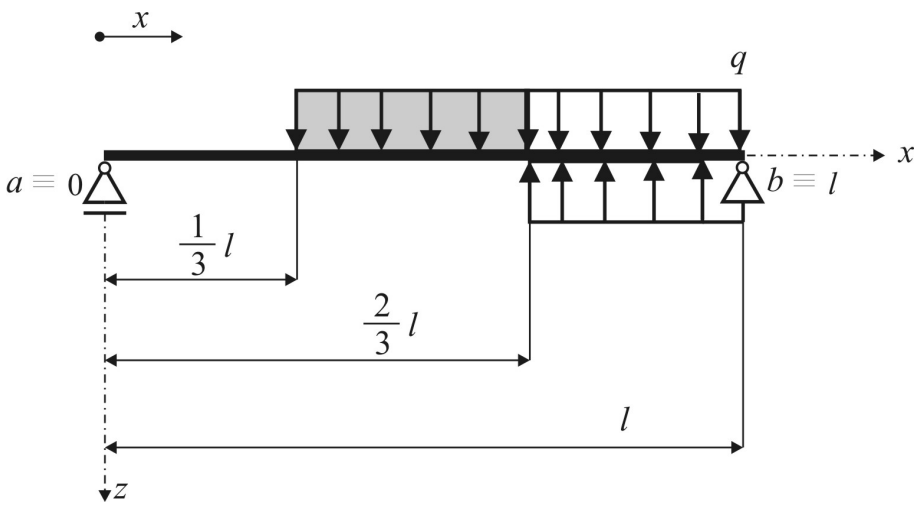
Naznačený postup je použitelný za pomoci výpočetní techniky. Pro ruční výpočet lze u nosníku stálého průřezu použít např. ***Clebschovu metodu***, která *upravuje integrační postup* tak, že zde *vystupují vždy jen dvě integrační konstanty*, které vyřešíme stejným způsobem jako u jednoduchých případů.

Clebschovou metodou je možné zapsat momentové funkce všech úseků do jedné rovnice s tím, že jednotlivé úseky zřetelně označíme. K tomu je potřeba, aby momentové funkce jednotlivých intervalů byly shodné, pouze každá navazující je doplněna o nový člen. Toto splňují (7.51) a (7.52). Rovnici (7.53) bude třeba upravit. Tento případ nastane ***pouze*** a ***vždy*** v případě, kdy působení spojitého zatížení ***končí*** dříve, než na konci prutu. V tomto případě pomyslně upravíme zatížení nosníku dle obr. 7.8 tak, aby jeho účinky zůstaly beze změn a přitom momentová funkce bude splňovat požadovanou podmínku. Rovnice (7.51) až (7.53) potom budou mít tvar:

$$x \in < 0\ ;\ \frac{1}{3}l > \ :\ M = R_{az} \cdot x\ , \tag{7.54}$$

$$x \in < \frac{1}{3}l\ ;\ \frac{2}{3}l > \ :\ M = R_{az} \cdot x - q\frac{(x - \frac{1}{3}l)^2}{2}\ , \tag{7.55}$$

$$x \in < \frac{2}{3}l\ ;\ l > \ :\ M = R_{az} \cdot x - q\frac{(x - \frac{1}{3}l)^2}{2} + q\frac{(x - \frac{2}{3}l)^2}{2}\ . \tag{7.56}$$



Obr. 7.8 Úprava zatížení nosníku

Momentovou funkci pro celý nosník můžeme zapsat ve tvaru:

$$M = R_{az} \cdot x - \lfloor_{(x>\frac{l}{3})} \; q\frac{(x-\frac{1}{3}l)^2}{2}\rfloor \; + \; \lfloor_{(x>\frac{2l}{3})} \; q\frac{(x-\frac{2}{3}l)^2}{2} \; \rfloor \; . \tag{7.57}$$

Při integrování *neodstraňujeme závorky* u dvojčlenů $(x - l_i)$ a nakládáme s nimi jako s *nezávislou proměnnou*. Postupným integrováním momentové funkce získáme:

$$EI \cdot w'' = -R_{az} \cdot x + \; \lfloor_{(x>\frac{l}{3})} \; q\frac{(x-\frac{1}{3}l)^2}{2}\rfloor - \; \lfloor_{(x>\frac{2l}{3})} \; q\frac{(x-\frac{2}{3}l)^2}{2}\rfloor \tag{7.58}$$

$$EI \cdot w' = -R_{az} \cdot \frac{x^2}{2} + \; \lfloor_{(x>\frac{l}{3})} \; q\frac{(x-\frac{1}{3}l)^3}{6}\rfloor - \; \lfloor_{(x>\frac{2l}{3})} \; q\frac{(x-\frac{2}{3}l)^3}{6}\rfloor + C_1 \tag{7.59}$$

$$EI \cdot w = -R_{az} \cdot \frac{x^3}{6} + \; \lfloor_{(x>\frac{l}{3})} \; q\frac{(x-\frac{1}{3}l)^4}{24}\rfloor - \; \lfloor_{(x>\frac{2l}{3})} \; q\frac{(x-\frac{2}{3}l)^4}{24}\rfloor + C_1 \cdot x + C_2, \tag{7.60}$$

Integrační konstanty získáme z deformačních podmínek platných pro prostý nosník: *průhyb v podporách je nulový.*

Pro bod a platí $x = 0$, $x_b < \frac{l}{3} < \frac{2l}{3}$ tudíž členy za dělením pro $x > \frac{l}{3}$ a $x > \frac{2l}{3}$ do deformační podmínky $w_0 = 0$ z rovnice (7.60) nezahrneme. Deformační podmínku pro bod b, $w_l = 0$ spočítáme se všemi členy rovnice (7.60), neboť $x_b > \frac{l}{3} > \frac{2l}{3}$.

Hodnoty potřebných přetvoření získáme stejným postupem jako u jednoduchých zatížení z kapitoly 7.3.1 s tím rozdílem, že při dosazování konkrétních hodnot vynecháme ty členy v rovnicích, které do daného intervalu nepatří.

Konkrétně pro nosník na obr. 7.8 bude po vyřešení integračních konstant C_1, C_2 například:

- *Průhyb ve čtvrtině délky*: spočítáme z rovnice (7.60) dosazením $x = \frac{1}{4}l$ a vyřešených C_1, C_2. Jelikož $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$, nebudou druhý ani třetí člen ve výpočtu zahrnuty:
$$w = \frac{1}{EI} \cdot [-R_{az} \cdot \frac{x^3}{6} + C_1 \cdot x + C_2] \;\; [\mathrm{m}] \; . \tag{7.61}$$
- *Průhyb v polovině nosníku*: spočítáme z rovnice (7.60) dosazením $x = \frac{1}{2}l$ a vyřešených C_1, C_2. Jelikož $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ a $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$, nebude ve výpočtu zahrnut pouze poslení člen:
$$w = \frac{1}{EI} \cdot [-R_{az} \cdot \frac{x^3}{6} + q\frac{(x-\frac{1}{3}l)^4}{24} + C_1 \cdot x + C_2] \;\; [\mathrm{m}] \; . \tag{7.62}$$

- *Pootočení ve třetí čtvrtině délky*: spočítáme z rovnice (7.59) dosazením $x = \frac{3}{4}l$ a vyřešené C_1. Jelikož $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$, budou ve výpočtu zahrnuty všechny členy:

$$w' = \frac{1}{EI} \cdot [-R_{az} \cdot \frac{x^2}{2} + q\frac{(x - \frac{1}{3}l)^3}{6} - q\frac{(x - \frac{2}{3}l)^3}{6} + C_1] \ \ [\text{rad}] \ . \tag{7.63}$$

7.3.4 Jednoduché zatížení staticky neurčitých nosníků – přímá integrace diferenciální rovnice ohybové čáry

U staticky neurčitých úloh nelze ze statických podmínek rovnováhy určit reakce, tím ani hodnoty vnitřních sil. Jednou z metod řešení staticky neurčitých nosníků je *přímá integrace diferenciální rovnice ohybové čáry*. Jedinou *známou*, matematicky popsatelnou veličinou je zatížení nosníku. Proto pro řešení použijeme jako výchozí vztah (7.4). Při $EI = konst$ vynásobíme diferenciální rovnici ohybovou tuhostí EI a postupným integrováním momentové funkce získáme:

$$EI \cdot w'''' = q_z(x) = q, \tag{7.64}$$

$$EI \cdot w''' = \int q \ \mathrm{d}x + C_1, \tag{7.65}$$

$$EI \cdot w'' = \int\int q \ \mathrm{d}x^2 + C_1 \cdot x + C_2, \tag{7.66}$$

$$EI \cdot w' = \int\int\int q \ \mathrm{d}x^3 + \frac{1}{2}C_1 \cdot x^2 + C_2 \cdot x + C_3, \tag{7.67}$$

$$EI \cdot w = \int\int\int\int q \ \mathrm{d}x^4 + \frac{1}{6}C_1 \cdot x^3 + \frac{1}{2}C_2 \cdot x^2 + C_3 \cdot x + C_4. \tag{7.68}$$

Z těchto rovnic získáme nejen hledané reakce, ale také hodnoty vnitřních sil i přetvoření prutu. V této kapitole se omezíme na jednoduché případy staticky neurčitých nosníků, kdy spojité zatížení působí po celé jeho délce (konstantně i lineárně) a matematicky jej můžeme popsat jedinou rovnicí. S tím souvisí také uložení nosníku. V úvahu připadá pouze nosník o jednom poli (oboustranně vetknutý nebo podepřený kloubovou podporou a vetknutím na krajích). Pro případ *rovnoměrného* spojitého zatížení $q_z(x) = q$ =konst platí:

$$EI \cdot w'''' = q \,, \tag{7.69}$$
$$EI \cdot w''' = -V = q \cdot x + C_1 \,, \tag{7.70}$$
$$EI \cdot w'' = -M = q \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 \cdot x + C_2 \,, \tag{7.71}$$
$$EI \cdot w' = EI \cdot \varphi = q \cdot \frac{x^3}{6} + C_1 \cdot \frac{x^2}{2} + C_2 \cdot x + C_3 \,, \tag{7.72}$$
$$EI \cdot w = q \cdot \frac{x^4}{24} + C_1 \cdot \frac{x^3}{6} + C_2 \cdot \frac{x^2}{2} + C_3 \cdot x + C_4 \,. \tag{7.73}$$

Integrační konstanty $C_1, \ldots, C_4$ se určí z *okrajových podmínek*. U staticky neurčitých úloh nevystačíme s deformačními podmínkami, jako u úloh staticky určitých (musíme vyřešit neznámé konstanty v diferenciálních rovnicích až do třetího řádu, které popisují statické veličiny V a M). Použijeme tedy *deformační* i *statické* okrajové podmínky. U jednoduchých případů se uplatní tyto okrajové podmínky:

Prostě podepřený okraj (kloubová podpora):
V místě kloubové podpory je zabráněno svislému posunutí (průhybu) a je zde nulový moment. Proto v tomto bodě platí: $\boldsymbol{w = 0}$, $\boldsymbol{M = 0}$. Je-li podpora na začátku nosníku, pro který platí $x = 0$, potom $w_{x=0} = w_0 = 0$, $M_{x=0} = M_0 = 0$. Je-li podpora na konci nosníku, pro který platí $x = l$, potom $w_{x=l} = w_l = 0$, $M_{x=l} = M_l = 0$. Pokud bude nosník v kloubové podpoře zatížen *vnějším* momentovým zatížením M_a, bude mít okrajová podmínka tvar: $M = M_a$.

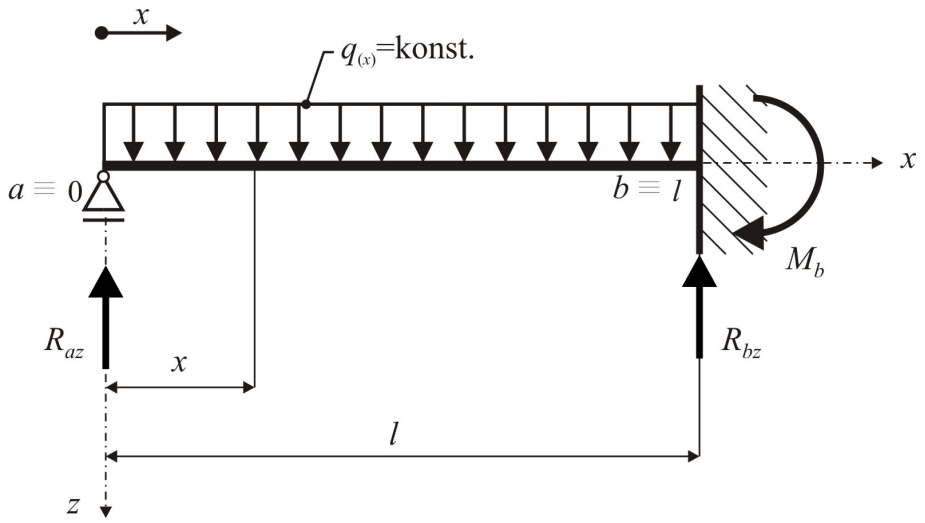
Vetnutý okraj (konzola):
Ve vetknutí je zabráněno svislému posunutí (průhybu) i pootočení nosníku, proto v místě vetknutí platí: $\boldsymbol{w = 0}$, $\boldsymbol{w' = \varphi = 0}$ (stejně jako u staticky určitých případů). Je-li vetknutí na začátku nosníku, pro který platí $x = 0$, potom $w_{x=0} = w_0 = 0$, $w'_{x=0} = w'_0 = \varphi_0 = 0$. Je-li podpora na konci nosníku, pro který platí $x = l$, potom $w_{x=l} = w_l = 0$, $w'_{x=l} = w'_l = \varphi_l = 0$.

Poznámka 7.11. Postup výpočtu si zjednušíme, použijeme-li nejprve okrajové podmínky pro $x = 0$ a až následně pro $x = l$. Tím získáme větší počet neznámých přímo ze samostatných rovnic a tím snížíme náročnost ručního řešení soustavy n rovnic o n neznámých(viz příklad 7.12).

Popis výpočtu reakcí, vnitřních sil i přetvoření viz následující příklad 7.12.

7.3.5 Příklady k doplnění řešené problematiky

Příklad 7.12. Vyřešte reakce a určete průhyb v polovině rozpětí staticky neurčitého nosníku, jehož statické schéma je zobrazeno na obr. 7.9. Pro stanovení rovnic ohybové čáry a pootočení využijte metodu přímé integrace diferenciální rovnice 4. řádu. Konkrétní vstupní údaje jsou uvedeny v tabulce 7.3.



Obr. 7.9 Statické schéma nosníku

Spojité silové zatížení q_z :	4 kN/m
Rozpětí nosníku l :	6 m
Šířka obdélníkového průřezu b :	0, 02 m
Výška obdélníkového průřezu h :	0, 15 m
Moment setrvačnosti I_y :	$\frac{1}{12} \cdot 0,02 \cdot 0,15^3 = 5,625 \cdot 10^{-6}$ m^4
Modul pružnosti v tahu a tlaku E :	$2,1 \cdot 10^5$ MPa

Tab. 7.3 Vstupní údaje příkladu 7.12

Řešení. Pro výpočet využijeme vztahy (7.69) až (7.73). Uplatnění okrajových podmínek vypadá následovně:

a) Pro $x = 0$ je $M_{(x=0)} = 0$ a platí tedy:

$$M_{(x=0)} = -q \cdot \frac{0^2}{2} - C_1 \cdot 0 - C_2 = 0 \,, \tag{7.74}$$

z čehož vyplývá, že $\underline{C_2 = 0}$.

b) Pro $x = 0$ je $w_{(x=0)} = 0$ a platí tedy:

$$w_{(x=0)} = \frac{1}{EI_y} \cdot \left(q \cdot \frac{0^4}{24} + C_1 \cdot \frac{0^3}{6} + 0 \cdot \frac{0^2}{2} + C_3 \cdot 0 + C_4 \right) = 0 \,, \tag{7.75}$$

z čehož plyne, že $\underline{C_4 = 0}$.

c) Pro $x = l$ je $w'_{(x=l)} = 0$ a platí:

$$w'_{(x=l)} = \frac{1}{EI_y} \cdot \left(q \cdot \frac{l^3}{6} + C_1 \cdot \frac{l^2}{2} + 0 \cdot l + C_3 \right) = 0 \,, \tag{7.76}$$

d) Pro $x = l$ je $w_{(x=l)} = 0$ a platí:

$$w_{(x=l)} = \frac{1}{EI_y} \cdot \left(q \cdot \frac{l^4}{24} + C_1 \cdot \frac{l^3}{6} + 0 \cdot \frac{l^2}{2} + C_3 \cdot l + 0 \right) = 0 \,. \tag{7.77}$$

Poslední dvě rovnice představují soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých integračních konstantách C_1 a C_3. Řešením soustavy získáme:

$$\underline{C_1 = -\frac{3}{8} q_z l} \,, \tag{7.78}$$

$$\underline{C_3 = \frac{1}{48} q_z l^3} \,. \tag{7.79}$$

Dosazením výsledných hodnot integračních konstant $C_1, \ldots, C_4$ do vztahů 7.70 až 7.73 je možno získat výsledné rovnice pro dvojici statických veličin (posouvající sílu V a ohybový moment M) i pro obě deformační veličiny - průhyb w a pootočení $w' = \varphi$:

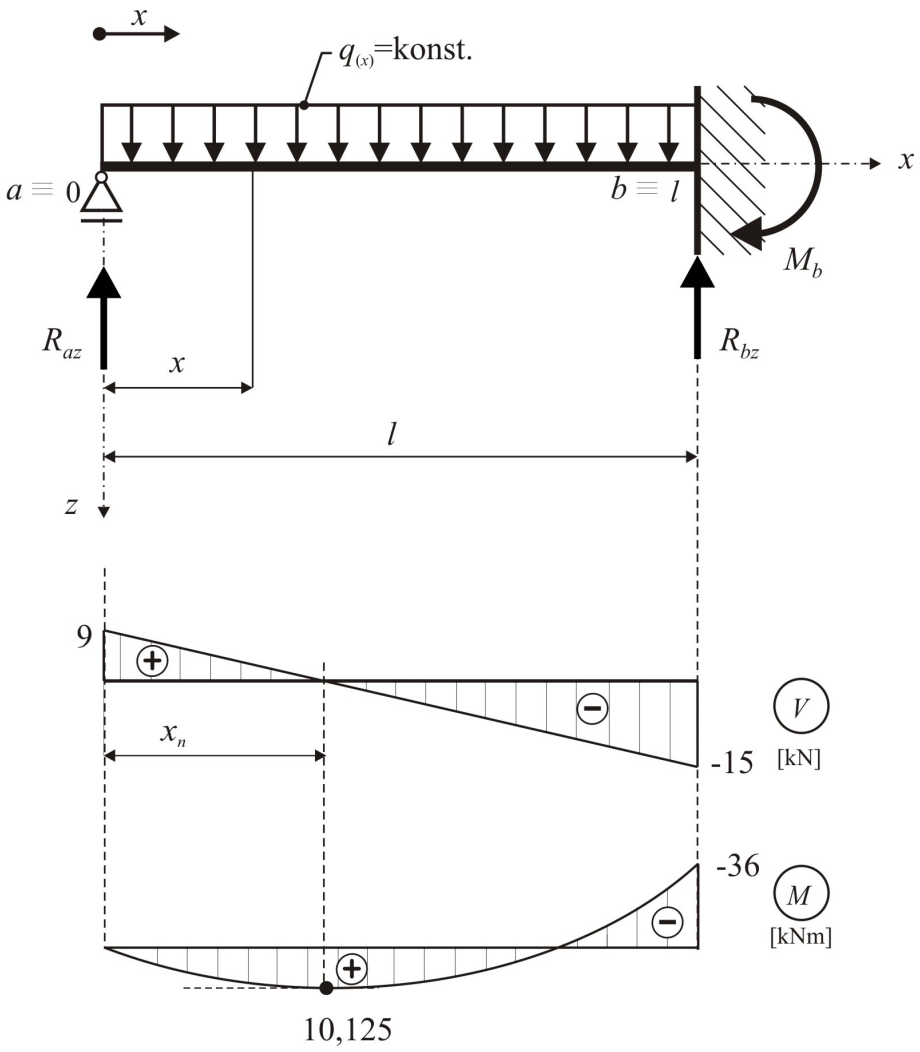
$$V = -\left(q \cdot x - \frac{3}{8} q \cdot l \right) = \frac{3}{8} q \cdot l - q \cdot x \ \ [\mathrm{kN}] \,, \tag{7.80}$$

$$M = -\left(q \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{3}{8} q \cdot l \cdot x + 0 \right) = \frac{3}{8} q \cdot l \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2} \ \ [\mathrm{kNm}] \,, \tag{7.81}$$

$$\begin{aligned} w' = \varphi &= \frac{1}{EI_y} \cdot \left(q \cdot \frac{x^3}{6} - \frac{3}{8} q \cdot l \cdot \frac{x^2}{2} + 0 \cdot x + \frac{1}{48} q \cdot l^3 \right) = \\ &= \frac{1}{EI_y} \cdot \left(q \cdot \frac{x^3}{6} - \frac{3}{16} q.l \cdot x^2 + \frac{1}{48} q \cdot l^3 \right) \ \ [\mathrm{rad}] \,, \end{aligned} \tag{7.82}$$

$$w = \frac{1}{EI_y} \cdot \left(q \cdot \frac{x^4}{24} - \frac{3}{8} q \cdot l \cdot \frac{x^3}{6} + 0 \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{1}{48} q \cdot l^3 \cdot x + 0 \right) =$$
$$= \frac{1}{2EI_y} \cdot \left(q \cdot \frac{x^4}{12} - \frac{3}{24} q \cdot l \cdot x^3 + \frac{1}{24} q \cdot l^3 \cdot x \right) \quad [\mathrm{m}] \,. \tag{7.83}$$

Poznámka 7.13. Jak bylo uvedeno již v poznámce 7.6, opět doporučujeme po dosazení hodnot integračních konstant do diferenciálních rovnic (7.80) až (7.83) zkontrolovat exponenty jednotlivých členů, zda se jednotky shodují. Při ručním výpočtu dochází často k překlepům a tímto odhalíme chybu včas.



Obr. 7.10 Vnitřní síly nosníku

1. ***Výpočet statických veličin***

Reakce R_{az} :

Reakce R_{az} je totožná s posouvající silou v bodě a, pro který platí $x = 0$. Dosazením do rovnice (7.80), získáme V_a i R_{az}:

$$R_{az} = V_a = \frac{3}{8}\, q \cdot l - q \cdot x = \frac{3}{8}\, q \cdot l = \underline{9 \ \ [\mathrm{kN}]}\ (\uparrow)\ . \tag{7.84}$$

Reakce R_{bz} :

Reakce R_{bz} je na základě znaménkové konvence totožná se zápornou hodnotou posouvající síly v bodě b, pro který platí $x = l$. Dosazením do rovnice (7.80), získáme V_b i R_{bz}:

$$R_{bz} = -V_b = q \cdot x - \frac{3}{8}\, q \cdot l = q \cdot l - \frac{3}{8}\, q \cdot l = \ \frac{5}{8}\, q \cdot l = \underline{15 \ \ [\mathrm{kN}]}\ (\uparrow)\ . \tag{7.85}$$

Moment ve vetknutí M_b :

Moment M_b je na základě znaménkové konvence totožný se zápornou hodnotou vnitřního ohybového momentu (natahuje horní vlákna) v bodě b, pro který platí $x = l$. Dosazením do rovnice (7.81), získáme M_b:

$$M_b = q \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{3}{8}\, q \cdot l \cdot x = q \cdot \frac{l^2}{2} - \frac{3}{8}\, q \cdot l \cdot l = \ \frac{1}{8}\, q \cdot l^2 = \underline{18 \ \ [\mathrm{kNm}]}\ (\circlearrowleft)\ . \tag{7.86}$$

Další statické veličiny, které nebyly předmětem zadání (dodáváme pro úplnost vysvětlení problematiky):

Po vyřešení reakcí je možné přistoupit k vnitřním silám shodným postupem jako ve Stavební statice. Není to ovšem nic jiného, než *dosazení do vyřešených diferenciálních rovnic* (7.80) a (7.81).

Nebezpečný průřez je v místě nulové posouvající síly a získáme ho dosazením $V = 0$ do (7.80):

$$V = 0 \quad : \quad \frac{3}{8}\, q \cdot l - q \cdot x_n = 0 \Rightarrow \tag{7.87}$$

$$x_n \quad = \quad \frac{3}{8}\, l = \underline{2,25\ [\mathrm{m}]}\ . \tag{7.88}$$

Extrémní moment je v místě nebezpečného průřezu a získáme ho dosazením x_n do (7.81):

$$M_{max} = \ \frac{3}{8}\, q \cdot l \cdot x_n - q \cdot \frac{x_n^2}{2} = 20,25 - 10,125 = \underline{10,125 \ \ [\mathrm{kNm}]}\ . \tag{7.89}$$

Grafické schéma vnitřních sil je na obrázku 7.10.

2. ***Výpočet přetvoření***

Po dosazení vstupních veličin a $x = 0,5 \cdot l$ do vztahu (7.83) získáme výsledný průhyb v polovině rozpětí, který vychází 22,86 mm. **Pozor** na správné dosazení jednotek, ať se nespletete v řádu – *častá chyba*.

▲

Příklad 7.14. Výše vysvětleným postupem určete reakce a průhyb v polovině rozpětí staticky neurčitého nosníku, který je schématicky zobrazen na obr. 7.11.

Řešení. Nosník je zatížen konstatním spojitým zatížením po celé délce stejně jako v příkladu 7.12. Liší se pouze v uložení. Výchozí obecná difernciální rovnice (7.4) je tedy shodná s (7.69) a následné integrace mají stejný tvar jako (7.70) až (7.73). Výsledné řešení se liší pouze v okrajových podmínkách, které jsou:

Levá podpora (vetknutí) – nulový průhyb i pootočení $w_{(x=0)} = 0$, $w'_{(x=0)} = 0$.

Pravá podpora (vetknutí) – nulový průhyb i pootočení $w_{(x=l)} = 0$, $w'_{(x=l)} = 0$.

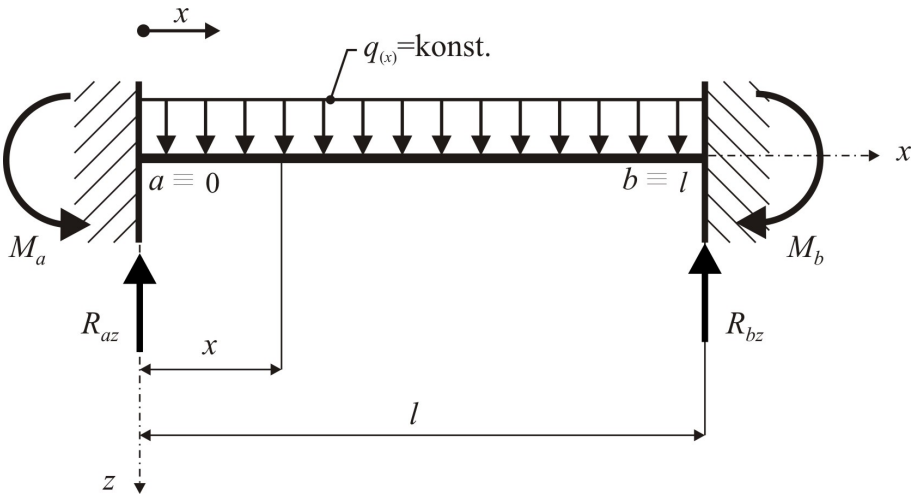
Výpočet necháváme na čtenáři. Výsledné hodnoty jsou:

$C_1 = -\frac{1}{2} \cdot q \cdot l$, $C_2 = \frac{1}{12} \cdot q \cdot l^2$, $C_3 = 0$, $C_4 = 0$.

$R_{az} = R_{bz} = \frac{1}{2} \cdot q \cdot l$ [kN],

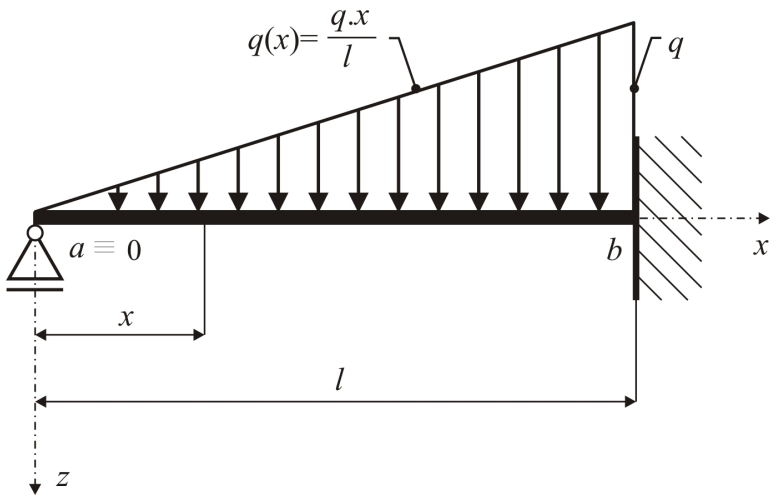
$M_a = M_b = \frac{1}{12} \cdot q \cdot l^2$ [kNm],

$w_{max} = w_{(x=\frac{l}{2})} = \frac{1}{384 \cdot EI} \cdot q \cdot l^2$ [m].



Obr. 7.11 Statické schéma nosníku

▲



Obr. 7.12 Statické schéma nosníku

Příklad 7.15. Výše vysvětleným postupem určete reakce a průhyb v polovině rozpětí staticky neurčitého nosníku, který je schématicky zobrazen na obr. 7.12.

Řešení. Zadaný nosník je zatížen spojitým zatížením lineárního průběhu:

$$q_z(x) = q_{(x)} = q \cdot \frac{x}{l} \ \ [\mathrm{kNm}^{-1}] \ . \tag{7.90}$$

Výchozí vztah (7.4) bude mít tvar:

$$EI \cdot w'''' = q \cdot \frac{x}{l}. \tag{7.91}$$

Další postup (včetně zadávání okrajových podmínek) je shodný jako v příkladu 7.12 a získáme tyto výsledky:

$C_1 = -\frac{1}{10} \cdot q \cdot l \ , \ C_2 = 0 \ \ , \ C_3 = \ \frac{1}{120} \cdot q \cdot l \ , \ C_4 = 0 \ .$

$R_{az} = \ \frac{1}{10} \cdot q \cdot l \ \ [\mathrm{kN}] \ , R_{bz} = \ \frac{2}{5} \cdot q \cdot l \ \ [\mathrm{kN}],$

$M_b = \ \frac{1}{15} \cdot q \cdot l^2 \ \ [\mathrm{kNm}].$ ▲

7.4 Mohrova metoda

Mohrova metoda výpočtu přetvoření *staticky určitých* ohýbaných nosníků je výhodná použít v případě *osamělého zatížení*, kdy stačí zjistit přetvoření ***pouze*** *v konkrétním místě*. Mohrova metoda nevede na rovnici ohybové čáry, ale umožňuje jednoduše stanovit průhyb nebo pootočení v konkrétních průřezech.

Vychází z diferenciálních vztahů (7.9) až (7.10), konkrétně ***druhých derivací veličin***:

$$EI \cdot w'''' = \boldsymbol{q} = (EI \cdot w'')'' = -\boldsymbol{M''} \,, \tag{7.92}$$
$$EI \cdot w''' = -\boldsymbol{V} = EI \cdot (w')'' = EI \cdot \boldsymbol{\varphi''} \,, \tag{7.93}$$
$$EI \cdot w'' = -M \,, \tag{7.94}$$
$$w' = \varphi \,, \tag{7.95}$$
$$w = w \,. \tag{7.96}$$

Mohrova metoda je založena na analogii vztahů (7.92) a (7.94):

$$\frac{\mathrm{d}^2 M}{\mathrm{d}x^2} = M'' = -q \quad , \qquad \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} = w'' = -\frac{M}{EI} \tag{7.97}$$

Určení průhybu $w_{(x)}$ ze známého průběhu ohybových momentů $M_{(x)}$ je tedy analogické úloze určení ohybových momentů $M_{(x)}$, je-li dáno příčné zatížení $q_{(x)}$. Z uvedeného vyplývá:

$$EI \cdot w'''' = \boldsymbol{q} \quad , \tag{7.98}$$
$$EI \cdot w''' = -\boldsymbol{V} \quad , \tag{7.99}$$
$$EI \cdot w'' = -M = \int\int q \quad , \tag{7.100}$$
$$w' = \varphi = -\frac{1}{EI} \int\int V \quad , \tag{7.101}$$
$$w = w = -\frac{1}{EI} \int\int M \quad . \tag{7.102}$$

Zavedeme-li fiktivní veličiny

$$\widetilde{q} = \int\int q \quad [\mathrm{kNm}], \tag{7.103}$$
$$\widetilde{V} = -\int\int V \quad [\mathrm{kNm}^2], \tag{7.104}$$
$$\widetilde{M} = -\int\int M \quad [\mathrm{kNm}^3], \tag{7.105}$$

Můžeme vztahy (7.100) až (7.102) zapsat ve tvaru:

$$EI \cdot w'' = -M = -\widetilde{q} \quad [\text{kNm}], \tag{7.106}$$

$$w' = \varphi = \frac{1}{EI} \cdot \widetilde{V} \quad [\text{rad}], \tag{7.107}$$

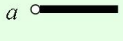
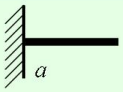
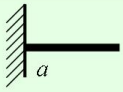
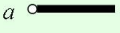
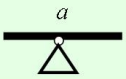
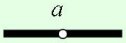
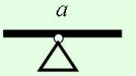
$$w = w = \frac{1}{EI} \cdot \widetilde{M} \quad [\text{m}]. \tag{7.108}$$

To umožňuje zavést ***fiktivní nosník***, který pomyslně představuje *"druhou derivaci"* řešeného nosníku. Jinými slovy – fiktivní nosník zatížíme příčným spojitým zatížením shodným s momentovou plochou nosníku skutečného, neboť z (7.92) vyplývá:

$$q \equiv -M''. \tag{7.109}$$

Znaménko mínus ve vztahu (7.109) zajistíme tím, že momentový obrazec skutečného nosníku "převrátíme" tak, že kladný moment M (*obrazec pod osou prutu*) nahradíme kladným fiktivním zatížením $\widetilde{q}$ (*obrazec nad osou prutu*).

Okrajové podmínky fiktivního nosníku musí splňovat *druhé derivace* okrajových podmínek nosníku skutečného. Toto zajistí nové uložení fiktivního nosníku, které pro různé případy včetně okrajových podmínek vidíme na obrázku 7.13.

Skutečný nosník		Fiktivní nosník	
$w = 0$ $\varphi \neq 0$		$\widetilde{M} = 0$ $\widetilde{V} \neq 0$	
$w \neq 0$ $\varphi \neq 0$		$\widetilde{M} \neq 0$ $\widetilde{V} \neq 0$	
$w = 0$ $\varphi = 0$		$\widetilde{M} = 0$ $\widetilde{V} = 0$	
$w = 0$ $\varphi \neq 0$		$\widetilde{M} = 0$ $\widetilde{V} \neq 0$	
$w \neq 0$ $\varphi \neq 0$		$\widetilde{M} \neq 0$ $\widetilde{V} \neq 0$	

Obr. 7.13 Uložení fiktivního nosníku

Postup při řešení přetvoření Mohrovou metodou můžeme shrnout to těchto bodů:

1. Staticky vyřešíme daný nosník a určíme obrazec ohybových momentů M.

2. Sestrojíme fiktivní nosník přidružený k danému nosníku a zatížíme jej momentovou plochou podle konvence znaménkové uvedené výše (kladný moment M (*obrazec pod osou prutu*) nahradíme kladným fiktivním zatížením $\widetilde{q}$)(*obrazec nad osou prutu*).
3. V hledaném místě přetvoření na skutečném nosníku vypočteme hodnoty vnitřních sil na fiktivním nosníku $\widetilde{V}$ a $\widetilde{M}$.
4. Dle vztahů (7.107) a (7.108) určíme požadované přetvoření.

Poznámka 7.16. Jednotky fiktivních veličin jsou uvedeny v (7.103) až (7.105)

Poznámka 7.17. Jak bylo uvedeno v úvodu kapitoly, metoda je výhodná pouze pro osamělé zatížení nosníku, neboť při spojitém zatížení by momentová plocha skutečného a tím zatížení fiktivního byl polynom vyššího stupně a hodnotu fiktivních vnitřních sil $\widetilde{V}$ a $\widetilde{M}$ bychom získali pouze integrací, což je přinejmenším stejně složité jako integrace diferenciální rovnice ohybové čáry.

7.4.1 Příklady k doplnění řešené problematiky

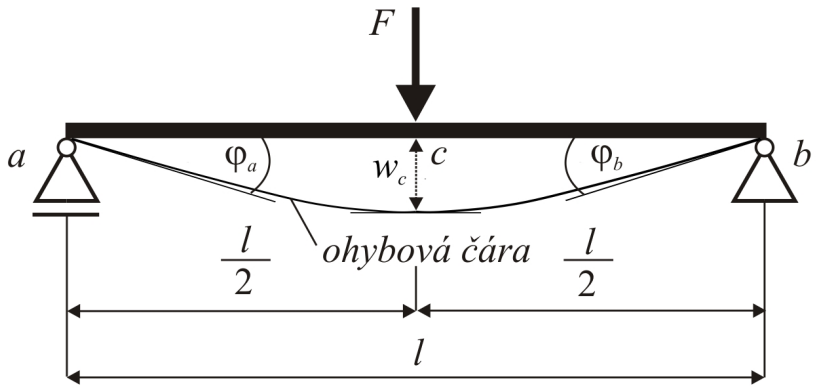
Příklad 7.18. Určete Mohrovou metodou úhel pootočení φ_a v levé podpoře a průhyb w_c v polovině rozpětí prostě podepřeného nosníku, jehož schéma je zobrazeno na obr. 7.14. E je modul pružnosti v tahu a tlaku [MPa], $I = I_y$ příslušný moment setrvačnosti [m^4] a F je síla působící uprostřed nosníku (bod c) ve svislém směru [kN].

Řešení. Postup výpočtu lze řadit do následujících částí:

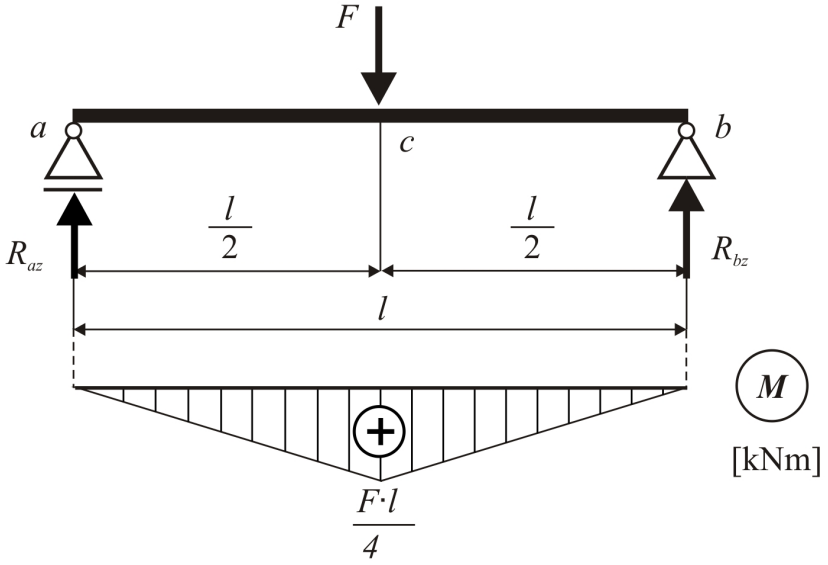
1. Výpočet reakcí R_{az}, R_{bz} a ohybového momentu M_c na daném nosníku podle obr.7.15:

$$R_{az} = R_{bz} = \frac{F}{2}[\mathtt{kN}]$$

$$M_c = R_{az} \cdot \frac{l}{2} = \frac{F \cdot l}{4}[\mathtt{kNm}]$$



Obr. 7.14 Statické schéma a ohybová čára řešeného nosníku

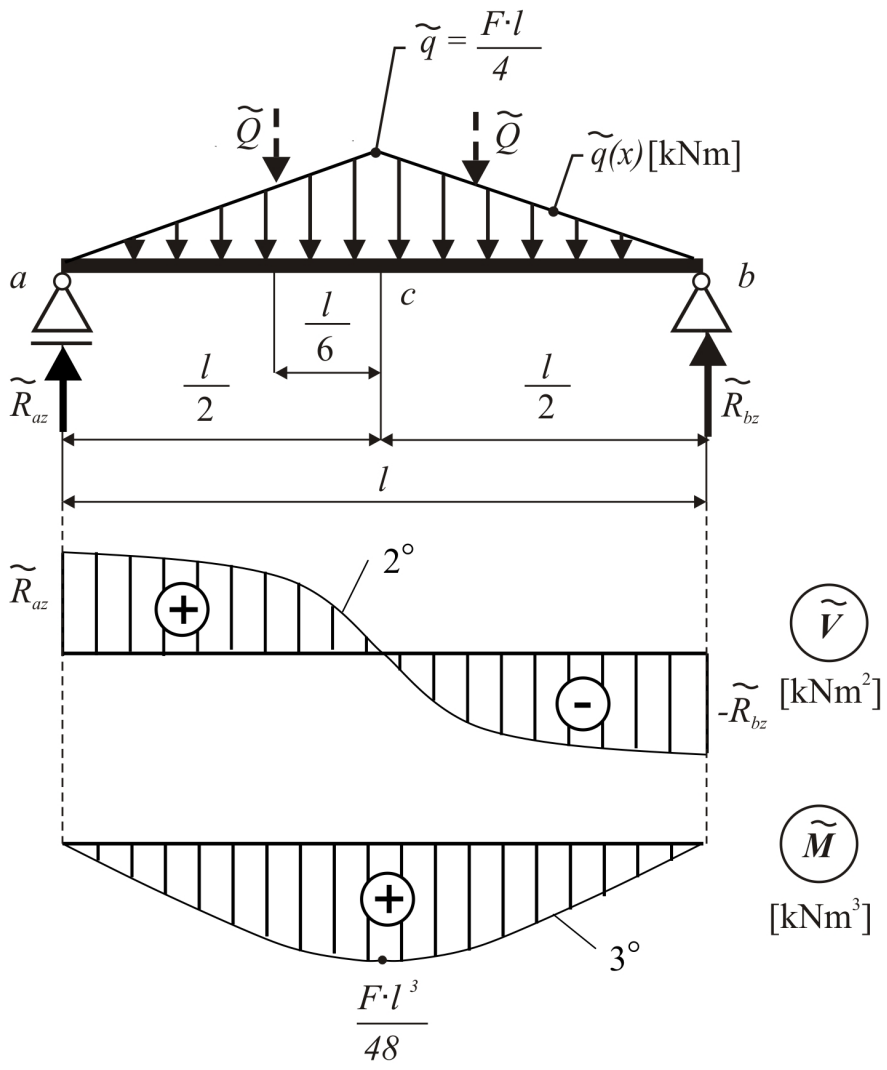


Obr. 7.15 Průběh ohybových momentů řešeného nosníku

2. Výpočet reakce $\tilde{R_{az}}$, posouvající síly $\tilde{V_a}$ a ohybového momentu $\tilde{M_c}$ na fiktivním nosníku podle obr.7.16:

$$\tilde{R_{az}} = \tilde{V_a} = \tilde{Q} = \frac{1}{2} \cdot M_c \cdot \frac{l}{2} = \frac{Fl^2}{16} [\mathtt{kNm}^2] \tag{7.110}$$

$$\tilde{M_c} = \tilde{R_{az}} \cdot \frac{l}{2} - \tilde{Q} \cdot \frac{l}{6} = \frac{Fl^3}{48} [\mathtt{kNm}^3] \tag{7.111}$$



Obr. 7.16 Průběh ohybových momentů na fiktivním nosníku

a) Výsledný úhel pootočení φ_a v podpoře a:
Dosazením (7.110) získáme úhel pootočení:

$$\varphi_a = \frac{\tilde{V}_a}{EI} = \frac{1}{16}\frac{Fl^2}{EI} \tag{7.112}$$

b) Výsledný průhyb uprostřed nosníku w_c:
Dosazením (7.111) získáme průhyb uprostřed nosníku:

$$w_c = \frac{\tilde{M}_c}{EI} = \frac{1}{48}\frac{Fl^3}{EI} \tag{7.113}$$

▲

Příklad 7.19. Určete Mohrovou metodou úhel pootočení φ_b a průhyb w_b volného konce vetknutého nosníku, jehož schéma je zobrazeno na obr. 7.17. E je modul pružnosti v tahu a tlaku [MPa], $I = I_y$ příslušný moment setrvačnosti [m^4] a F je síla působící na volném konci ve svislém směru [kN].

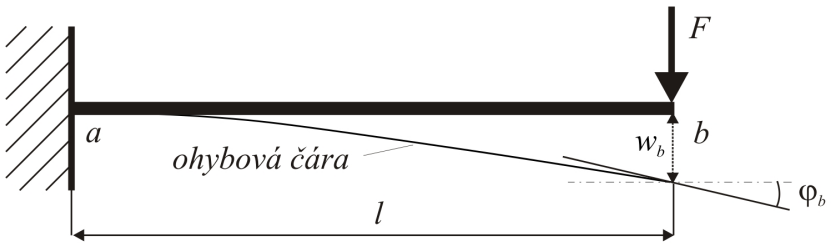
Řešení. Ohybový moment M_b na dané konzole:

$$M_b = -F \cdot l[\mathtt{kNm}]$$

Výpočet reakce $\tilde{R}_{bz}$, posouvající síly $\tilde{V}_b$ a ohybového momentu $\tilde{M}_b$ na fiktivním nosníku viz obr. 7.18:

$$\tilde{R}_{bz} = \tilde{V}_b = \tilde{Q} = \frac{1}{2} \cdot M_b \cdot l = \frac{Fl^2}{2}[\mathtt{kNm^2}] \tag{7.114}$$

$$\tilde{M}_b = \tilde{Q} \cdot \frac{2}{3} \cdot l = \frac{1}{2} \cdot Fl^2 \frac{2}{3} \cdot l = \frac{1}{3} \cdot Fl^3[\mathtt{kNm^3}] \tag{7.115}$$



Obr. 7.17 Statické schéma a ohybová čára řešeného nosníku

a) Výsledný úhel pootočení φ_b:

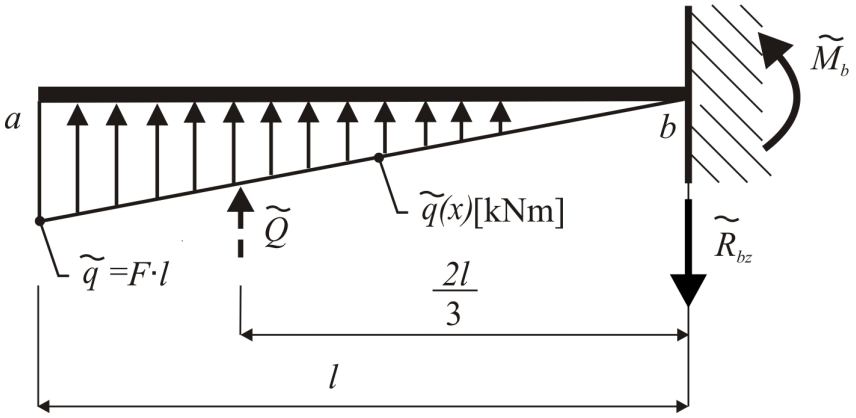
$$\varphi_b = \frac{\tilde{V}_b}{EI} = \frac{1}{2}\frac{Fl^2}{EI} \tag{7.116}$$

b) Výsledný průhyb volného konce konzoly w_b :

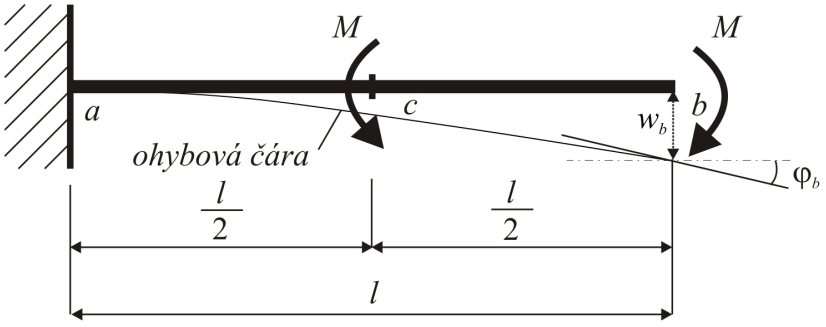
$$w_b = \frac{\tilde{M}_b}{EI} = \frac{1}{3}\frac{Fl^3}{EI} \tag{7.117}$$

▲

Příklad 7.20. Určete Mohrovou metodou úhel pootočení φ_b a průhyb w_b volného konce vetknutého nosníku, jehož schéma je zobrazeno na obr. 7.19. E je modul pružnosti v tahu a tlaku [MPa], $I = I_y$ příslušný moment setrvačnosti [m^4] a M je moment působící uprostřed konzoly a na volném konci [kNm].



Obr. 7.18 Schéma a zatížení na fiktivním nosníku



Obr. 7.19 Statické schéma a ohybová čára řešeného nosníku

Řešení. Ohybový moment M_b na dané konzole podle obr. 7.20:

$$M_{b-c} = -M[\mathtt{kNm}]$$

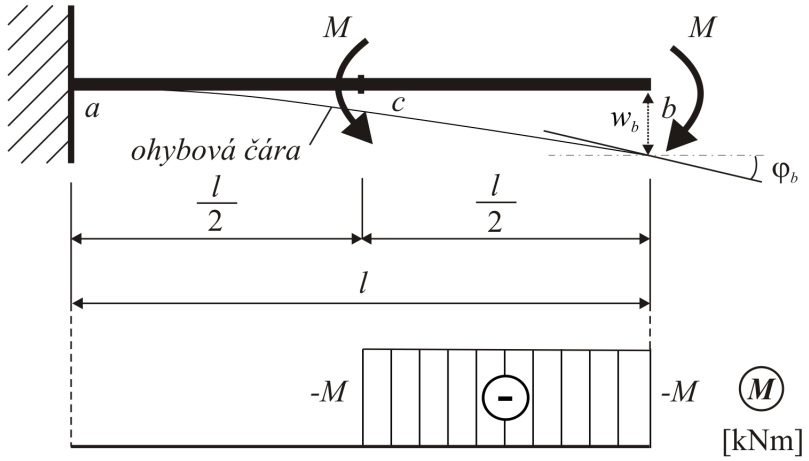
Výpočet reakce $\tilde{R}_{bz}$, posouvající síly $\tilde{V}_b$ a ohybového momentu $\tilde{M}_b$ na fiktivním nosníku podle obr. 7.21:

$$\tilde{R}_{bz} = \tilde{V}_b = \tilde{Q} = M \cdot \frac{l}{2}[\mathtt{kNm}^2] \tag{7.118}$$

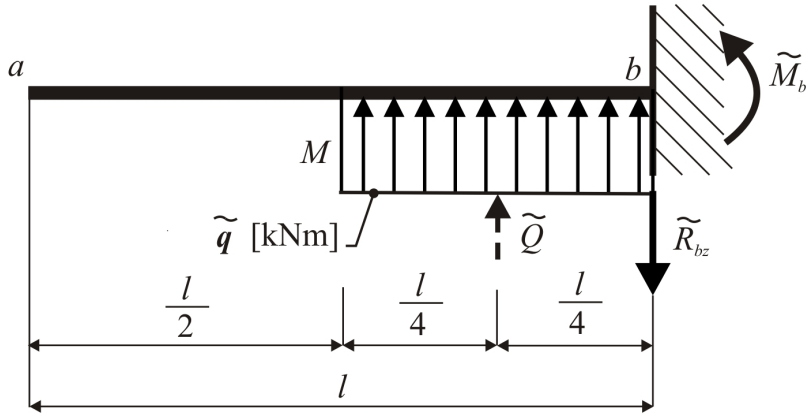
$$\tilde{M}_b = \tilde{Q} \cdot \frac{l}{4} = M \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{Ml^2}{8}[\mathtt{kNm}^3] \tag{7.119}$$

a) Hledaný úhel pootočení φ_b:

$$\varphi_b = \frac{\tilde{V}_b}{EI} = \frac{1}{2}\frac{Ml}{EI} \tag{7.120}$$



Obr. 7.20 Průběh ohybových momentů řešeného nosníku



Obr. 7.21 Schéma a zatížení na fiktivním nosníku

b) Hledaný průhyb volného konce konzoly w_b :

$$w_b = \frac{\tilde{M}_b}{EI} = \frac{1}{8}\frac{Ml^2}{EI} \tag{7.121}$$

▲

Kapitola 8

Složené případy namáhání prutu

Pokud v jednotlivých průřezech prutového nosného prvku vzniká více složek vnitřních sil a dochází tak k současnému působení několika základních (prostých) namáhání obecně zatíženého prutu, které byly zmiňovány např. v kapitole 1.3.3, jedná se o tzv. složené případy namáhání prutu.

V případě výpočtu podle teorie I. řádu a ideálně pružného chování materiálu nosného prvku (platnosti Hookeova zákona) lze účinky jednotlivých základních (prostých) namáhání vzájemně superponovat.

K nejčastějším případům složených případů namáhání patří:

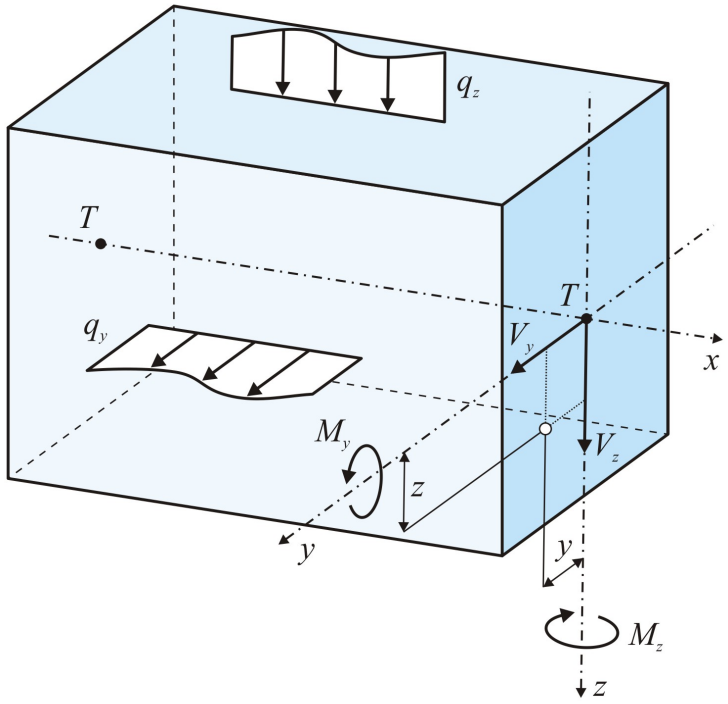
- **prostorový ohyb** (rovinné ohyby ve dvou hlavních zatěžovacích rovinách nebo rovinný ohyb v rovině, která není totožná s žádnou s hlavních rovin – tzv. šikmý ohyb),
- **mimostředný tah nebo tlak** (prostorový ohyb s osovým namáháním).

8.1 Prostorový ohyb

V přímém prutu vznikají při namáhání prostorovým ohybem ohybové momenty M_y a M_z, příp. posouvající síly V_y a V_z, které však musí působit ve spojnici středů smyku jednotlivých průřezů, aby v prutovém prvku nevznikalo také kroucení.

Veškeré účinky zatížení – např. napětí nebo průhyby, lze při předpokladu pružného chování materiálu a výpočtu podle teorie I. řádu superponovat. Např. pro normálová napětí σ_x pak platí:

$$\sigma_x(y,z) = \frac{M_y}{I_y} \cdot z - \frac{M_z}{I_z} \cdot y \ . \tag{8.1}$$



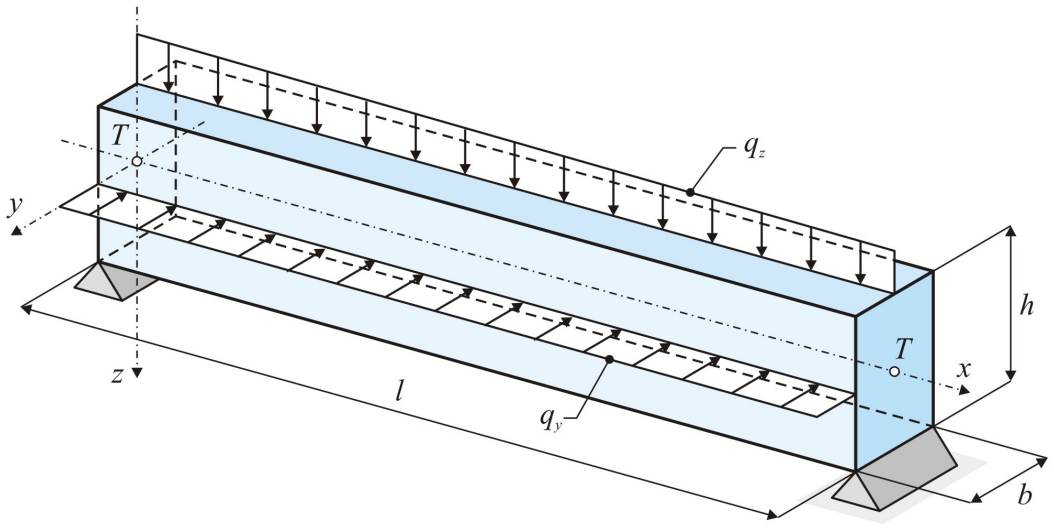
Obr. 8.1 Souřadnicový systém a znaménková konvence pro prut namáhaný prostorovým ohybem

Vztah (8.1) je odvozen pro prut, který je popsán v souřadnicovém systému z obrázku 8.1.

Příklad 8.1. Určete průběh normálového napětí σ_x v polovině rozpětí prostého nosníku obdélníkového průřezu, který je po celé délce namáhán rovnoměrným spojitým zatížením ve svislé (q_z) i vodorovné hlavní zatěžovací rovině (q_y) (viz schéma na obrázku 8.2). Konkrétní hodnoty vstupních veličin jsou uvedeny v tabulce 8.1.

Rozpětí nosníku l :	6 m
Intenzita svislého rovnoměrného spojitého zatížení q_z :	3,2 kN/m
Intenzita vodorovného rovnoměrného spojitého zatížení q_y :	-1,0 kN/m
Šířka obdélníkového průřezu b :	120 mm
Výška obdélníkového průřezu h :	180 mm

Tab. 8.1 Vstupní údaje příkladu 8.1



Obr. 8.2 Statické schéma řešeného nosníku z příkladu 8.1

Řešení.

1. **Průřezové charakteristiky:**
   Při výpočtu normálových napětí je potřeba určit nejprve průřezovou plochu A řešeného průřezu:

$$A = b \cdot h = 120 \cdot 180 = 21600 \ [\mathrm{mm}^2] = 2,16 \cdot 10^{-2} \ [\mathrm{m}^2] \tag{8.2}$$

   a momenty setrvačnosti I_y a I_z v obou hlavních rovinách setrvačnosti:

$$I_y = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3 = \frac{1}{12} \cdot 120 \cdot 180^3 = 5,832 \cdot 10^7 \ [\mathrm{mm}^4] = 5,832 \cdot 10^{-5} \ [\mathrm{m}^4] \tag{8.3}$$

   a

$$I_z = \frac{1}{12} \cdot b^3 \cdot h = \frac{1}{12} \cdot 120^3 \cdot 180 = 2,592 \cdot 10^7 \ [\mathrm{mm}^4] = 2,592 \cdot 10^{-5} \ [\mathrm{m}^4] \ . \tag{8.4}$$

2. **Ohybové momenty:**
   Oba ohybové momenty v hlavních zatěžovacích rovinách se určí s přihlédnutím ke znaménkové konvenci, definované např. na obrázku 8.1. Ohybové momenty M_y a M_z pak v polovině rozpětí řešeného nosníku vycházejí:

$$M_y = \frac{1}{8} \cdot q_z \cdot l^2 = \frac{1}{8} \cdot 3,2 \cdot 6^2 = 14,40 \ [\mathrm{kNm}] \tag{8.5}$$

   a

$$M_z = -\frac{1}{8} \cdot q_y \cdot l^2 = -\frac{1}{8} \cdot (-1,0) \cdot 6^2 = 4,50 \ [\mathrm{kNm}] \ . \tag{8.6}$$

3. **Normálová napětí:**

Normálová napětí se určí pomocí vztahu (8.1) pro čtveřici bodů v rozích obdélníkového průřezu (viz obrázek 8.3):

- Bod a má souřadnice $y = 0,06$ m a $z = -0,09$:

$$\begin{aligned}\sigma_x(0,06;-0,09) &= \frac{M_y}{I_y}\cdot z - \frac{M_z}{I_z}\cdot y = \\ &= \frac{14,40\cdot 10^3}{5,832\cdot 10^{-5}}\cdot(-0,09) - \frac{4,50\cdot 10^3}{2,592\cdot 10^{-5}}\cdot 0,06 = \\ &= (-2,2222 - 1,0417)\cdot 10^7\ [\text{Pa}] \cong \\ &\cong -22,22 - 10,42\ [\text{MPa}] \cong -32,64\ [\text{MPa}]\ (\text{tlak})\ ,\end{aligned} \tag{8.7}$$

- Bod b má souřadnice $y = -0,06$ m a $z = -0,09$:

$$\begin{aligned}\sigma_x(-0,06;-0,09) &= \frac{M_y}{I_y}\cdot z - \frac{M_z}{I_z}\cdot y = \\ &= \frac{14,40\cdot 10^3}{5,832\cdot 10^{-5}}\cdot(-0,09) - \frac{4,50\cdot 10^3}{2,592\cdot 10^{-5}}\cdot(-0,06) = \\ &= (-2,2222 + 1,0417)\cdot 10^7\ [\text{Pa}] \cong \\ &\cong -22,22 + 10,42\ [\text{MPa}] \cong -11,81\ [\text{MPa}]\ (\text{tlak})\ ,\end{aligned} \tag{8.8}$$

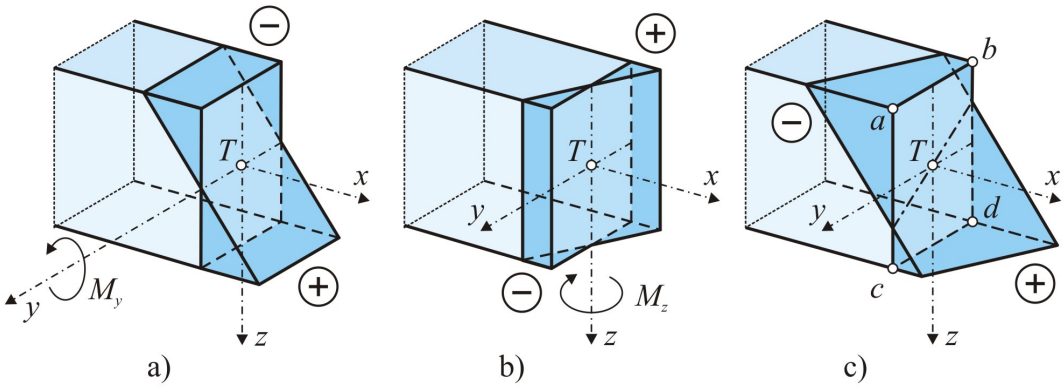
- Bod c má souřadnice $y = 0,06$ m a $z = 0,09$:

$$\begin{aligned}\sigma_x(0,06;0,09) &= \frac{M_y}{I_y}\cdot z - \frac{M_z}{I_z}\cdot y = \\ &= \frac{14,40\cdot 10^3}{5,832\cdot 10^{-5}}\cdot 0,09 - \frac{4,50\cdot 10^3}{2,592\cdot 10^{-5}}\cdot 0,06 = \\ &= (2,2222 - 1,0417)\cdot 10^7\ [\text{Pa}] \cong \\ &\cong 22,22 - 10,42\ [\text{MPa}] \cong 11,81\ [\text{MPa}]\ (\text{tah})\ ,\end{aligned} \tag{8.9}$$

- Bod d má souřadnice $y = -0,06$ m a $z = 0,09$:

$$\begin{aligned}\sigma_x(-0,06;0,09) &= \frac{M_y}{I_y}\cdot z - \frac{M_z}{I_z}\cdot y = \\ &= \frac{14,40\cdot 10^3}{5,832\cdot 10^{-5}}\cdot 0,09 - \frac{4,50\cdot 10^3}{2,592\cdot 10^{-5}}\cdot(-0,06) = \\ &= (2,2222 + 1,0417)\cdot 10^7\ [\text{Pa}] \cong \\ &\cong 22,22 + 10,42\ [\text{MPa}] \cong 32,64\ [\text{MPa}]\ (\text{tah})\ .\end{aligned} \tag{8.10}$$

Největší tlakové normálové napětí $\sigma_x = -32,64$ MPa vzniká v bodě a. Největší tahové normálové napětí σ_x pak v bodě d s hodnotou 32,64 MPa.



Obr. 8.3 Průběh normálového napětí σ_x v průřezu v polovině rozpětí řešeného nosníku: a) od ohybového momentu M_y (svislý ohyb), b) od ohybového momentu M_z (vodorovný ohyb), c) výsledný, získaný superpozicí obou předchozích případů (prostorový ohyb)

Výsledný průběh normálového napětí σ_x v polovině rozpětí řešeného nosníku je schématicky znázorněn na obrázku 8.3.

▲

8.2 Mimostředný tah a tlak

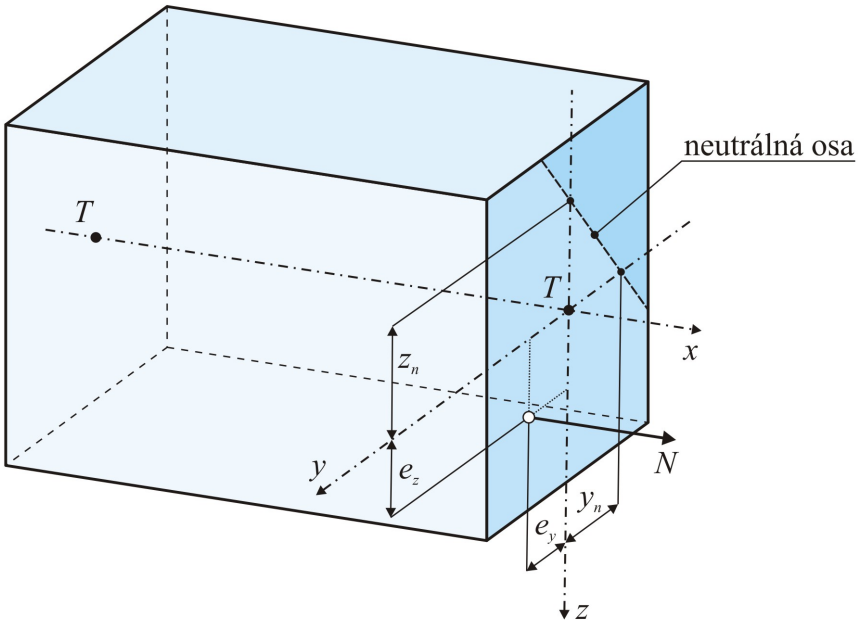
Pokud zatížení u přímého prutu vyvolá kromě prostorového ohybu také osové namáhání, na velikosti normálového napětí σ_x se pak projeví i účinek normálové síly:

$$\sigma_x(y,z) = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y}\cdot z - \frac{M_z}{I_z}\cdot y\ . \tag{8.11}$$

Účinek ohybových momentů M_y a M_z lze nahradit posunutím normálové síly N mimo těžiště průřezu T (viz obrázek 8.4). Normálová síla pak v průřezu působí **mimostředně** neboli **excentricky**. Pokud se zvolí kladný smysl obou excentricit e_y a e_z shodný s hlavními centrálními osami průřezu y a z, platí podmínky rovnováhy:

$$M_y = N\cdot \mathrm{e}_z \ \rightleftarrows\ \mathrm{e}_z = \frac{M_y}{N}\ ,\quad M_z = -N\cdot \mathrm{e}_y \ \rightleftarrows\ \mathrm{e}_y = -\frac{M_z}{N}\ . \tag{8.12}$$

Úpravou výrazů (8.11) a (8.12) lze získat vztah pro výpočet normálového na-



Obr. 8.4 Schéma prutu namáhaného mimostředným tahem

pětí σ_x, vyjádřený s pomocí excentricit e_y a e_z:

$$\sigma_x(y,z) = \frac{N}{A} \cdot \left(1 + \frac{\mathrm{e}_z}{i_y^2} \cdot z + \frac{\mathrm{e}_y}{i_z^2} \cdot y\right) , \tag{8.13}$$

kde i_y a i_z jsou poloměry setrvačnosti k příslušným osám, jenž jsou definovány známými vztahy:

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} , \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} . \tag{8.14}$$

Při výpočtu rovnice neutrálné osy lze vyjít z podmínky:

$$\sigma_x(y,z) = 0 \;\rightarrow\; 1 + \frac{\mathrm{e}_z}{i_y^2} \cdot z + \frac{\mathrm{e}_y}{i_z^2} \cdot y = 0 . \tag{8.15}$$

Z rovnice (8.15) je pak možno odvodit úseky y_n a z_n, které neutrálná osa vytíná na hlavních centrálních osách průřezu (viz obrázek 8.4):

$$z = 0 \;\rightarrow\; 1 + \frac{\mathrm{e}_y}{i_z^2} \cdot y_n = 0 \;\rightarrow\; y_n = -\frac{i_z^2}{\mathrm{e}_y} , \tag{8.16}$$

resp.

$$y = 0 \;\rightarrow\; 1 + \frac{\mathrm{e}_z}{i_y^2} \cdot z_n = 0 \;\rightarrow\; z_n = -\frac{i_y^2}{\mathrm{e}_z} . \tag{8.17}$$

Poznámka 8.2. Podle [4] lze pro posouzení spolehlivosti průřezu, namáhaného prostorovým ohybem a osovým namáháním, použít konzervativní lineární sumaci složek využití průřezu pro všechny složky výslednice napětí:

$$\frac{N_{Ed}}{N_{Rd}} + \frac{M_{y,Ed}}{M_{y,Rd}} + \frac{M_{z,Ed}}{M_{z,Rd}} \leqq 1,0 \; . \tag{8.18}$$

Příklad 8.3. U prostého nosníku obdélníkového průřezu z příkladu 8.1 určete průběh normálového napětí σ_x v polovině rozpětí, pokud bude kromě rovnoměrného spojitého zatížení ve svislé (q_z) i vodorovné hlavní zatěžovací rovině (q_y) namáhán po celé své délce také tlakovou normálovou silou $N = -250$ kN. Specifikujte rovněž parametry neutrálné osy.

Řešení.

1. **Normálová napětí:**

   Normálové napětí σ_x se bude v příkladu 8.3 lišit oproti vypočteným hodnotám z příkladu 8.1 o hodnotu účinku tlakové normálové síly N (první člen výrazu (8.11)), který se bude podle vztahu (4.6) rovnat:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} = \frac{-250 \cdot 10^3}{2,16 \cdot 10^{-2}} = -1,1574 \cdot 10^7 \text{ [Pa]} \cong -11,57 \text{ [MPa] (tlak)} \; . \tag{8.19}$$

   Výsledná normálová napětí se pak mohou určit pomocí vztahu (8.11) pro čtveřici bodů v rozích obdélníkového průřezu (viz obrázek 8.5):

   - Bod a má souřadnice $y = 0,06$ m a $z = -0,09$:

$$\begin{aligned} \sigma_x(0,06; -0,09) &= \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot z - \frac{M_z}{I_z} \cdot y \cong \\ &\cong -11,57 - 22,22 - 10,42 \text{ [MPa]} \cong \\ &\cong -44,21 \text{ [MPa] (tlak)} \; , \end{aligned} \tag{8.20}$$

   - Bod b má souřadnice $y = -0,06$ m a $z = -0,09$:

$$\begin{aligned} \sigma_x(-0,06; -0,09) &= \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot z - \frac{M_z}{I_z} \cdot y \cong \\ &\cong -11,57 - 22,22 + 10,42 \text{ [MPa]} \cong \\ &\cong -23,38 \text{ [MPa] (tlak)} \; , \end{aligned} \tag{8.21}$$

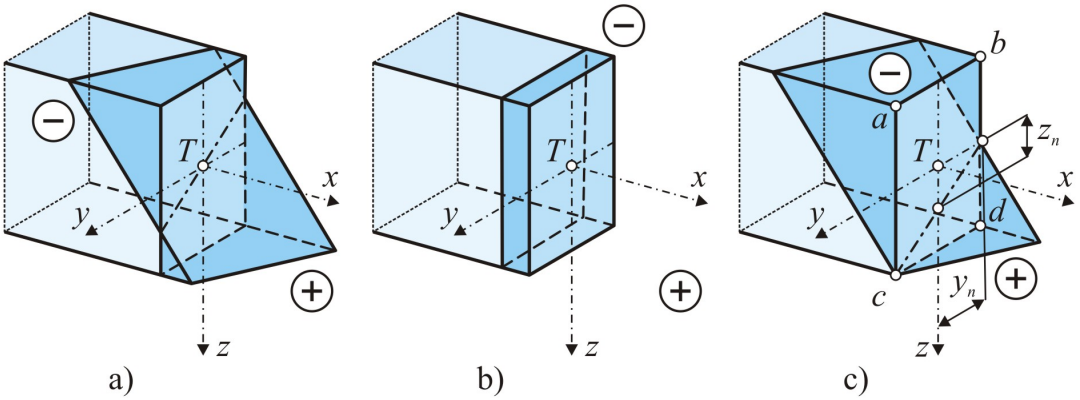
   - Bod c má souřadnice $y = 0,06$ m a $z = 0,09$:

$$\begin{aligned} \sigma_x(0,06; 0,09) &= \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot z - \frac{M_z}{I_z} \cdot y \cong \\ &\cong -11,57 + 22,22 - 10,42 \text{ [MPa]} \cong \\ &\cong 0,23 \text{ [MPa] (tah)} \; , \end{aligned} \tag{8.22}$$

- Bod d má souřadnice $y = -0,06$ m a $z = 0,09$:

$$\begin{aligned}\sigma_x(-0,06;0,09) &= \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y}\cdot z - \frac{M_z}{I_z}\cdot y \cong \\ &\cong -11,57 + 22,22 + 10,42\ [\text{MPa}] \cong \\ &\cong 21,06\ [\text{MPa}]\ (\text{tah})\ .\end{aligned} \tag{8.23}$$

Největší tlakové normálové napětí $\sigma_x = -44,21$ MPa vzniká v bodě a. Největší tahové normálové napětí σ_x pak v bodě d s hodnotou 21,06 MPa.
Výsledný průběh normálového napětí σ_x v polovině rozpětí řešeného nosníku je schématicky znázorněn na obrázku 8.5.



Obr. 8.5 Průběh normálového napětí σ_x v průřezu v polovině rozpětí řešeného nosníku: a) od ohybových momentů M_y a M_z (prostorový ohyb) z příkladu 8.1, b) od tlakové normálové síly N (prostý tlak), c) výsledný, získaný superpozicí obou předchozích případů (mimostředný tlak)

Účinek ohybových momentů M_y a M_z lze rovněž nahradit posunutím normálové síly N mimo těžiště průřezu T o excentricity e_y a e_z, které lze získat ze vztahů (8.12):

$$\mathrm{e}_z = \frac{M_y}{N} = \frac{14,40}{-250} = -5,76\cdot 10^{-2}\ [\text{m}] = -57,6\ [\text{mm}] \tag{8.24}$$

a

$$\mathrm{e}_y = -\frac{M_z}{N} = -\frac{4,50}{-250} = 1,80\cdot 10^{-2}\ [\text{m}] = 18,0\ [\text{mm}]\ . \tag{8.25}$$

Při znalosti poloměrů setrvačnosti i_y a i_z:

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{5,8320\cdot 10^{-5}}{2,16\cdot 10^{-2}}} = 5,1962\cdot 10^{-2}\ [\text{m}] \cong 51,96\ [\text{mm}] \tag{8.26}$$

a

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{2,5920 \cdot 10^{-5}}{2,16 \cdot 10^{-2}}} = 3,4641 \cdot 10^{-2}\ [\mathrm{m}] \cong 34,64\ [\mathrm{mm}]\ , \tag{8.27}$$

pak lze normálová napětí σ_x určit pro čtveřici rohových bodů obdélníkového průřezu i na základě výrazu (8.13):

- Bod a má souřadnice $y = 0,06$ m a $z = -0,09$ m:

$$\begin{aligned}\sigma_x(y,z) &= \frac{N}{A} \cdot \left(1 + \frac{\mathrm{e}_z}{i_y^2} \cdot z + \frac{\mathrm{e}_y}{i_z^2} \cdot y\right) = \\ &= \frac{-250 \cdot 10^3}{2,16 \cdot 10^{-2}} \cdot \left(1 + \frac{-57,6}{(51,96)^2} \cdot (-90) + \frac{18,0}{(34,64)^2} \cdot 60\right) = \\ &= -4,4213 \cdot 10^7\ [\mathrm{Pa}] \cong -44,21\ [\mathrm{MPa}]\ (\mathrm{tlak})\ ,\end{aligned} \tag{8.28}$$

- Bod b má souřadnice $y = -0,06$ m a $z = -0,09$ m:

$$\begin{aligned}\sigma_x(y,z) &= \frac{N}{A} \cdot \left(1 + \frac{\mathrm{e}_z}{i_y^2} \cdot z + \frac{\mathrm{e}_y}{i_z^2} \cdot y\right) = \\ &= \frac{-250 \cdot 10^3}{2,16 \cdot 10^{-2}} \cdot \left(1 + \frac{-57,6}{(51,96)^2} \cdot (-90) + \frac{18,0}{(34,64)^2} \cdot (-60)\right) = \\ &= -2,3380 \cdot 10^7\ [\mathrm{Pa}] \cong -23,38\ [\mathrm{MPa}]\ (\mathrm{tlak})\ ,\end{aligned} \tag{8.29}$$

- Bod c má souřadnice $y = 0,06$ m a $z = 0,09$ m:

$$\begin{aligned}\sigma_x(y,z) &= \frac{N}{A} \cdot \left(1 + \frac{\mathrm{e}_z}{i_y^2} \cdot z + \frac{\mathrm{e}_y}{i_z^2} \cdot y\right) = \\ &= \frac{-250 \cdot 10^3}{2,16 \cdot 10^{-2}} \cdot \left(1 + \frac{-57,6}{(51,96)^2} \cdot 90 + \frac{18,0}{(34,64)^2} \cdot 60\right) = \\ &= 2,3148 \cdot 10^5\ [\mathrm{Pa}] \cong 0,23\ [\mathrm{MPa}]\ (\mathrm{tah})\ ,\end{aligned} \tag{8.30}$$

- Bod d má souřadnice $y = -0,06$ m a $z = 0,09$ m:

$$\begin{aligned}\sigma_x(y,z) &= \frac{N}{A} \cdot \left(1 + \frac{\mathrm{e}_z}{i_y^2} \cdot z + \frac{\mathrm{e}_y}{i_z^2} \cdot y\right) = \\ &= \frac{-250 \cdot 10^3}{2,16 \cdot 10^{-2}} \cdot \left(1 + \frac{-57,6}{(51,96)^2} \cdot 90 + \frac{18,0}{(34,64)^2} \cdot (-60)\right) = \\ &= 2,1065 \cdot 10^7\ [\mathrm{Pa}] \cong 21,06\ [\mathrm{MPa}]\ (\mathrm{tah})\ .\end{aligned} \tag{8.31}$$

2. **Neutrálná osa:**

Neutrálnou osu lze specifikovat pomocí úseků y_n a z_n, které neutrálná osa vytíná na hlavních centrálních osách průřezu (viz schéma na obrázku 8.5). Lze je vypočítat podle výrazů (8.16) a (8.17):

$$y_n = -\frac{i_z^2}{\mathrm{e}_y} = -\frac{(34,64)^2}{18,00} \cong -66,67 \text{ [mm]} \tag{8.32}$$

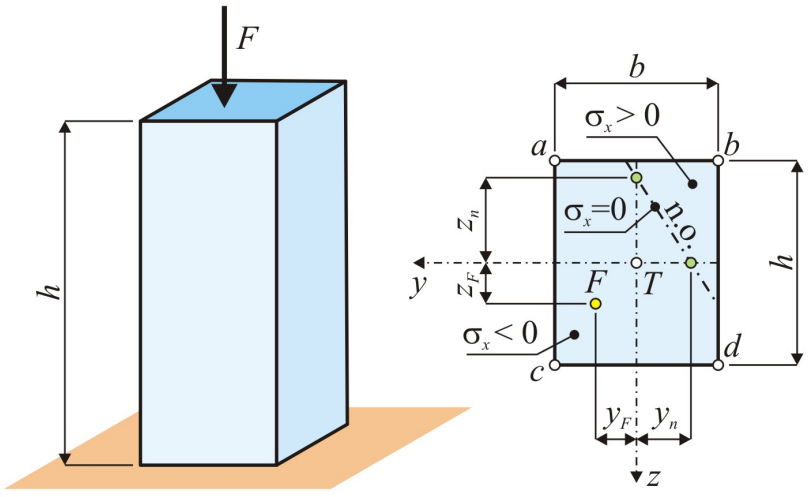
resp.

$$z_n = -\frac{i_y^2}{\mathrm{e}_z} = -\frac{(51,96)^2}{46,88} \cong 46,88 \text{ [mm]} \,. \tag{8.33}$$

▲

Poznámka 8.4. Podobným způsobem, jak bylo naznačeno v příkladu 8.3, se vnáší tlakové napětí do průřezů předpjatých železobetonových konstrukcí (pomocí předepnuté ocelové výztuže). Vzhledem k podstatně menší pevnosti betonu v tahu nežli v tlaku lze tímto postupem v průřezech nosné konstrukce zcela vyeliminovat tahová normálová napětí.

Příklad 8.5. Určete průběh normálového napětí σ_x v obdélníkovém průřezu sloupu, který je namáhán mimostřednou tlakovou silou v zadaném působišti podle schématu uvedeného na obrázku 8.6. Konkrétní hodnoty vstupních veličin obsahuje tabulka 8.2.



Obr. 8.6 Statické schéma sloupu s obdélníkovým průřezem z příkladu 8.5 s vyznačenou neutrálnou osou

Velikost bodové tlakové zatěžovací síly F :	400 kN
Šířka obdélníkového průřezu b :	240 mm
Výška obdélníkového průřezu h :	300 mm
Souřadnice působiště zatěžovací síly y_F :	60 mm
Souřadnice působiště zatěžovací síly z_F :	60 mm

Tab. 8.2 Vstupní údaje příkladu 8.5

Řešení. Postup výpočtu je obdobný jako u předchozího příkladu 8.3.

1. **Průřezové charakteristiky:**

   Pro výpočet normálových napětí je potřeba určit průřezovou plochu A řešeného průřezu:

   $$A = b \cdot h = 240 \cdot 300 = 72000 \ [\mathrm{mm}^2] = 7,2 \cdot 10^{-2} \ [\mathrm{m}^2] \ , \tag{8.34}$$

   momenty setrvačnosti I_y a I_z v obou hlavních rovinách setrvačnosti:

   $$I_y = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3 = \frac{1}{12} \cdot 240 \cdot 300^3 = 5,4 \cdot 10^8 \ [\mathrm{mm}^4] = 5,4 \cdot 10^{-4} \ [\mathrm{m}^4] \tag{8.35}$$

   a

   $$I_z = \frac{1}{12} \cdot b^3 \cdot h = \frac{1}{12} \cdot 240^3 \cdot 300 = 3,456 \cdot 10^8 \ [\mathrm{mm}^4] = 3,456 \cdot 10^{-4} \ [\mathrm{m}^4] \ , \tag{8.36}$$

   a také poloměry setrvačnosti i_y a i_z:

   $$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3}{b \cdot h}} = \sqrt{\frac{h^2}{12}} = \frac{h}{\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{5,4 \cdot 10^{-4}}{7,2 \cdot 10^{-2}}} = \frac{0,300}{\sqrt{12}} = \tag{8.37}$$
   $$= 8,6603 \cdot 10^{-2} \ [\mathrm{m}] \cong 86,60 \ [\mathrm{mm}]$$

   a

   $$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{12} \cdot b^3 \cdot h}{b \cdot h}} = \sqrt{\frac{b^2}{12}} = \frac{b}{\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{3,4560 \cdot 10^{-4}}{7,2 \cdot 10^{-2}}} = \frac{0,240}{\sqrt{12}} = \tag{8.38}$$
   $$= 6,9282 \cdot 10^{-2} \ [\mathrm{m}] \cong 69,28 \ [\mathrm{mm}] \ .$$

2. **Normálová napětí:**

   Normálová napětí σ_x se pro čtveřici rohových bodů obdélníkového průřezu (viz schéma na obrázku 8.6) určí opět s využitím výrazu (8.13), do něhož se dosadí $\mathrm{e}_y = y_F$ a $\mathrm{e}_z = z_F$:

- Bod a má souřadnice $y = 0,12$ m a $z = -0,15$ m:

$$\begin{aligned}\sigma_x(y,z) = \frac{N}{A}\cdot\left(1+\frac{\mathrm{e}_z}{i_y^2}\cdot z+\frac{\mathrm{e}_y}{i_z^2}\cdot y\right) = \frac{-400\cdot 10^3}{7,2\cdot 10^{-2}}\cdot \\ \cdot\left(1+\frac{60,0}{(86,60)^2}\cdot(-150)+\frac{60,0}{(69,28)^2}\cdot 120\right) = \\ = -7,2222\cdot 10^6\ [\mathrm{Pa}] \cong -7,22\ [\mathrm{MPa}]\ (\mathrm{tlak})\ ,\end{aligned} \tag{8.39}$$

- Bod b má souřadnice $y = -0,12$ m a $z = -0,15$ m:

$$\begin{aligned}\sigma_x(y,z) = \frac{N}{A}\cdot\left(1+\frac{\mathrm{e}_z}{i_y^2}\cdot z+\frac{\mathrm{e}_y}{i_z^2}\cdot y\right) = \frac{-400\cdot 10^3}{7,2\cdot 10^{-2}}\cdot \\ \cdot\left(1+\frac{60,0}{(86,60)^2}\cdot(-150)+\frac{60,0}{(69,28)^2}\cdot(-120)\right) = \\ = 9,4444\cdot 10^6\ [\mathrm{Pa}] \cong 9,44\ [\mathrm{MPa}]\ (\mathrm{tah})\ ,\end{aligned} \tag{8.40}$$

- Bod c má souřadnice $y = 0,12$ m a $z = 0,15$ m:

$$\begin{aligned}\sigma_x(y,z) = \frac{N}{A}\cdot\left(1+\frac{\mathrm{e}_z}{i_y^2}\cdot z+\frac{\mathrm{e}_y}{i_z^2}\cdot y\right) = \\ = \frac{-400\cdot 10^3}{7,2\cdot 10^{-2}}\cdot\left(1+\frac{60,0}{(86,60)^2}\cdot 150+\frac{60,0}{(69,28)^2}\cdot 120\right) = \\ = -2,0555\cdot 10^7\ [\mathrm{Pa}] \cong -20,56\ [\mathrm{MPa}]\ (\mathrm{tlak})\ ,\end{aligned} \tag{8.41}$$

- Bod d má souřadnice $y = -0,12$ m a $z = 0,15$ m:

$$\begin{aligned}\sigma_x(y,z) = \frac{N}{A}\cdot\left(1+\frac{\mathrm{e}_z}{i_y^2}\cdot z+\frac{\mathrm{e}_y}{i_z^2}\cdot y\right) = \frac{-400\cdot 10^3}{7,2\cdot 10^{-2}}\cdot \\ \cdot\left(1+\frac{60,0}{(86,60)^2}\cdot 150+\frac{60,0}{(69,28)^2}\cdot(-120)\right) = \\ = -3,8889\cdot 10^6\ [\mathrm{Pa}] \cong -3,89\ [\mathrm{MPa}]\ (\mathrm{tlak})\ .\end{aligned} \tag{8.42}$$

Největší tlakové normálové napětí $\sigma_x = -20,56$ MPa vzniká v bodě c. Největší tahové normálové napětí σ_x pak v bodě b s hodnotou 9,44 MPa.

3. **Neutrálná osa:**
Úseky y_n a z_n, specifikující meutrálnou osu, se určí podle výrazů (8.16) a (8.17):

$$y_n = -\frac{i_z^2}{\mathrm{e}_y} = -\frac{(69,28)^2}{60,00} = -80,00\ [\mathrm{mm}] \tag{8.43}$$

resp.

$$z_n = -\frac{i_y^2}{\mathrm{e}_z} = -\frac{(86,60)^2}{60,00} = -125,00\ [\mathrm{mm}]\ . \tag{8.44}$$

Oba úseky, které vytíná neutrálná osa na hlavních centrálních osách průřezu, jsou vyznačeny na obrázku 8.6.

▲

8.3 Jádro průřezu

Některé stavební materiály, jako je například beton nebo zdivo, mají pevnost v tahu podstatně nižší nežli pevnost v tlaku. Při návrhu nosných prvků z těchto materiálů je tedy žádoucí, aby v žádném z průřezů nevznikaly vlivem působení mimostředné tlakové síly žádná tahová napětí.

V případě lineárně pružného chování použitého materiálu to znamená, že neutrálná osa nesmí protínat průřez, může probíhat mimo něj a v krajní situaci se jej může pouze dotýkat.

Pro vymezení oblasti možného působení mimostředné tlakové síly se pro daný tvar průřezu určuje tzv. **jádro průřezu**.

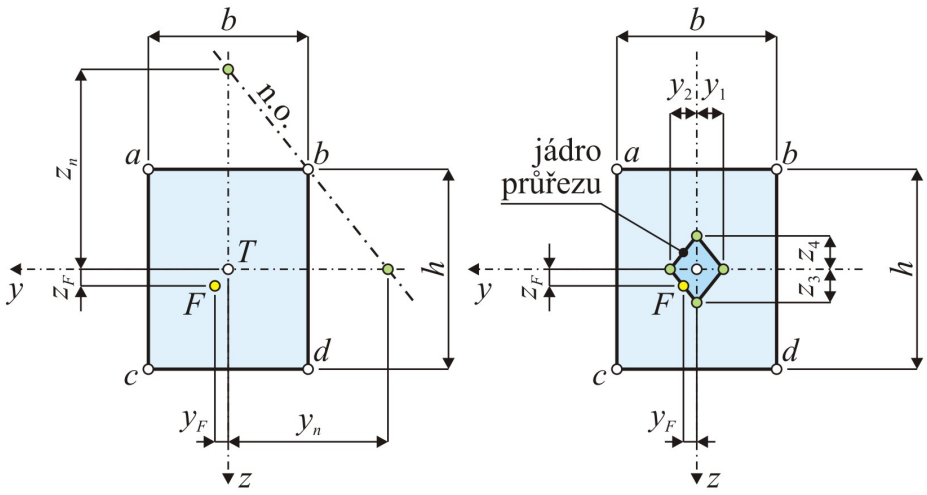
Definice 8.6. Jádro průřezu je blíže specifikovaná oblast v okolí těžiště průřezu, v níž musí působit výslednice vnitřních sil, aby v celém průřezu vznikla normálová napětí stejného znaménka.

Jádro průřezu je určeno svým obrysem – tzv. **jádrovou čarou**, což je geometrické místo působišť mimostředné síly v situacích, kdy se neutrální osa dotýká průřezu.

Při určování jednotlivých jádrových čar se neutrálná osa postupně umísťuje do všech tečných poloh k obrysu průřezu. Pro jednotlivé polohy neutrálné osy na obrysu průřezu označené $j = 1, 2, \ldots, m$ pak lze určit odpovídající souřadnice jádrové čáry y_j a z_j, přičemž se využijí vztahy (8.16) a (8.17), do kterých se dosadí vypočtené úseky neutrálné osy $y_{n,j}$ a $z_{n,j}$. Souřadnice jádrové čáry přitom odpovídají excentricitám $\mathrm{e}_{y,j}$ a $\mathrm{e}_{z,j}$ uvažované mimostředné tlakové síly, pohybující se po jádrové čáře:

$$y_j = \mathrm{e}_{y,j} = -\frac{i_z^2}{y_{n,j}}\,, \qquad z_j = \mathrm{e}_{z,j} = -\frac{i_y^2}{z_{n,j}}\,. \tag{8.45}$$

Příklad 8.7. Určete průběh normálového napětí σ_x v obdélníkovém průřezu sloupu z příkladu 8.5 pokud se změní souřadnice působiště zatěžovací síly na hodnoty $y_F = 20$ mm a $z_F = 25$ mm (viz obrázek 8.7). Sestrojte jádro obdélníkového průřezu.



Obr. 8.7 Obdélníkový průřezem z příkladu 8.7 s vyznačeným působištěm zatěžovací síly F, neutrálnou osou a výsledným jádrem průřezu

Řešení.

1. **Výpočet normálových napětí:**

   Normálová napětí σ_x v rohových bodech obdélníkového průřezu se opět určí s použitím výrazu (8.13) ($\mathrm{e}_y = y_F$ a $\mathrm{e}_z = z_F$):

   - Bod a má souřadnice $y = 0,12$ m a $z = -0,15$ m:

$$\begin{aligned}\sigma_x(y,z) = \frac{N}{A}\cdot\left(1+\frac{\mathrm{e}_z}{i_y^2}\cdot z+\frac{\mathrm{e}_y}{i_z^2}\cdot y\right) &= \frac{-400\cdot 10^3}{7,2\cdot 10^{-2}}\cdot\\ \cdot\left(1+\frac{25,0}{(86,60)^2}\cdot(-150)+\frac{20,0}{(69,28)^2}\cdot 120\right) &=\\ = -5,5556\cdot 10^6\ [\mathrm{Pa}] \cong -5,56\ [\mathrm{MPa}]\ (\mathrm{tlak})\ ,&\end{aligned} \tag{8.46}$$

   - Bod b má souřadnice $y = -0,12$ m a $z = -0,15$ m:

$$\begin{aligned}\sigma_x(y,z) = \frac{N}{A}\cdot\left(1+\frac{\mathrm{e}_z}{i_y^2}\cdot z+\frac{\mathrm{e}_y}{i_z^2}\cdot y\right) &= \frac{-400\cdot 10^3}{7,2\cdot 10^{-2}}\cdot\\ \cdot\left(1+\frac{25,0}{(86,60)^2}\cdot(-150)+\frac{20,0}{(69,28)^2}\cdot(-120)\right) &=\\ = 0,00\ [\mathrm{MPa}]\ ,&\end{aligned} \tag{8.47}$$

- Bod c má souřadnice $y = 0,12$ m a $z = 0,15$ m:

$$\begin{aligned}\sigma_x(y,z) &= \frac{N}{A}\cdot\left(1+\frac{\mathrm{e}_z}{i_y^2}\cdot z+\frac{\mathrm{e}_y}{i_z^2}\cdot y\right)= \\ &= \frac{-400\cdot 10^3}{7,2\cdot 10^{-2}}\cdot\left(1+\frac{25,0}{(86,60)^2}\cdot 150+\frac{20,0}{(69,28)^2}\cdot 120\right)= \\ &= -1,1111\cdot 10^7\ [\mathrm{Pa}]\cong -11,11\ [\mathrm{MPa}]\ (\mathrm{tlak})\ ,\end{aligned} \tag{8.48}$$

- Bod d má souřadnice $y = -0,12$ m a $z = 0,15$ m:

$$\begin{aligned}\sigma_x(y,z) = \frac{N}{A}\cdot\left(1+\frac{\mathrm{e}_z}{i_y^2}\cdot z+\frac{\mathrm{e}_y}{i_z^2}\cdot y\right) &= \frac{-400\cdot 10^3}{7,2\cdot 10^{-2}}\cdot \\ \cdot\left(1+\frac{25,0}{(86,60)^2}\cdot 150+\frac{20,0}{(69,28)^2}\cdot(-120)\right) &= \\ = -5,5556\cdot 10^6\ [\mathrm{Pa}]\cong -5,56\ [\mathrm{MPa}]\ (\mathrm{tlak})\ .&\end{aligned} \tag{8.49}$$

Největší tlakové normálové napětí $\sigma_x = -11,11$ MPa vzniká v bodě c. Tahové normálové napětí σ_x v obdélníkovém průřezu nevzniká.

2. **Neutrálná osa:**

Úseky y_n a z_n, specifikující neutrálnou osu (viz obrázek 8.7), se určí podle výrazů (8.16) a (8.17):

$$y_n = -\frac{i_z^2}{\mathrm{e}_y} = -\frac{(69,28)^2}{20,00} = -240,00\ [\mathrm{mm}] \tag{8.50}$$

resp.

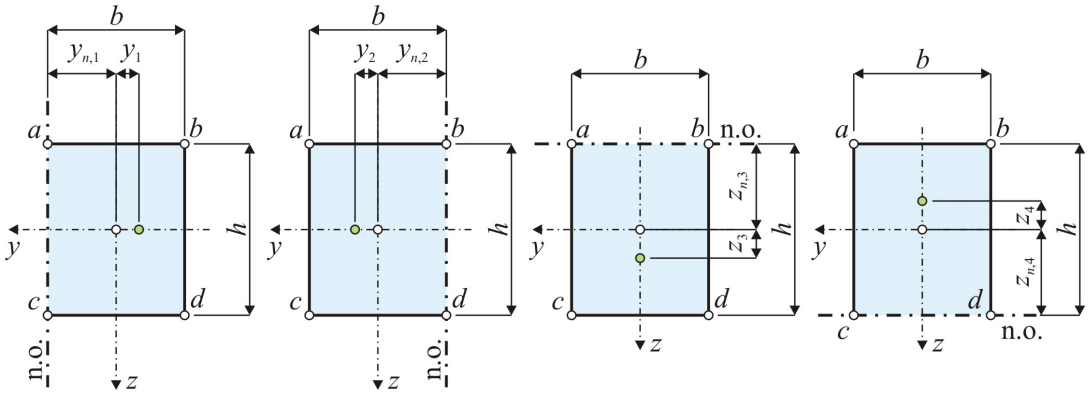
$$z_n = -\frac{i_y^2}{\mathrm{e}_z} = -\frac{(86,60)^2}{25,00} = -300,00\ [\mathrm{mm}]\ . \tag{8.51}$$

3. **Jádro průřezu:**

Obrys jádra průřezu (tzv. jádrové čáry) se získá postupným kladením neutrálné osy do všech tečných poloh k obdélníkovému průřezu. Výpočet s pomocí obrázku 8.8 vypadá následovně:

- Neutrálná osa probíhá levým okrajem, tzn. $y_{n,1} = \frac{b}{2}$:

$$y_1 = \mathrm{e}_{y,1} = -\frac{i_z^2}{y_{n,1}} = -\frac{\left(\frac{b}{\sqrt{12}}\right)^2}{\frac{b}{2}} = -\frac{b^2}{12}\cdot\frac{2}{b} = -\frac{b}{6} = -40\ [\mathrm{mm}]\ , \tag{8.52}$$



Obr. 8.8 Schéma výpočetního postupu určení bodů jádrových čar obdélníkového průřezu

- Neutrálná osa probíhá pravým okrajem, tzn. $y_{n,2} = -\dfrac{b}{2}$:

$$y_2 = \mathrm{e}_{y,2} = -\frac{i_z^2}{y_{n,2}} = -\frac{\left(\dfrac{b}{\sqrt{12}}\right)^2}{-\dfrac{b}{2}} = \frac{b^2}{12} \cdot \frac{2}{b} = \frac{b}{6} = 40 \text{ [mm]} , \tag{8.53}$$

- Neutrálná osa probíhá horním okrajem, tzn. $z_{n,3} = -\dfrac{h}{2}$:

$$z_3 = \mathrm{e}_{z,3} = -\frac{i_y^2}{z_{n,3}} = -\frac{\left(\dfrac{h}{\sqrt{12}}\right)^2}{-\dfrac{h}{2}} = \frac{h^2}{12} \cdot \frac{2}{h} = \frac{h}{6} = 50 \text{ [mm]} , \tag{8.54}$$

- Neutrálná osa probíhá spodním okrajem, tzn. $z_{n,4} = \dfrac{h}{2}$:

$$z_4 = \mathrm{e}_{z,4} = -\frac{i_y^2}{z_{n,4}} = -\frac{\left(\dfrac{h}{\sqrt{12}}\right)^2}{\dfrac{h}{2}} = -\frac{h^2}{12} \cdot \frac{2}{h} = -\frac{h}{6} = -50 \text{ [mm]} . \tag{8.55}$$

Tímto způsobem je možno získat souřadnice čtyř vrcholů jádra průřezu, které má tvar kosočtverce (viz obrázek 8.7). V obdélníkovém průřezu řešeno sloupu vzniká pouze tlakové normálové napětí, neboť působiště mimostředné bodové zatěžovací síly F leží na okraji jádra průřezu (viz obrázek 8.7).

▲

Kapitola 9

Stabilita a vzpěrná únosnost tlačených prutů

U štíhlých prutů, které jsou namáhány tlakem, může dojít k vybočení z jejich původně přímého tvaru (viz např. demonstrační obrázek 9.1). Dochází ke ztrátě stability, což se v případě tlačených prutových prvků nazývá **vzpěrem**. Konstrukce je pak namáhána tzv. vzpěrným tlakem a její odolnost bývá označována jako vzpěrná únosnost.

Vzpěrný tlak je složitý jev, který je u reálné nosné konstrukce ovlivněn řadou faktorů. Patří k nim zejména zatížení, způsob podepření nosného prvku, variabilita materiálových a geometrických charakteristik, vnitřní pnutí materiálu nebo výrobní a montážní nepřesnosti (imperfekce).

Zavedením výchozího předpokladu ideálně pružného přímého prutu, který je zatížen centricky, lze problém vzpěru řešit různými způsoby. K nejstarším patří Eulerovo analytické řešení.

Obr. 9.1 Demonstrační obrázek k problematice štíhlých tlačených prutů

9.1 Eulerovo řešení stability přímého tlačeného prutu v pružném oboru

Výpočetní postup, který v roce 1757 odvodil švýcarský matematik a fyzik Leonhard Euler (1707-1783), spočívá v analytickém vzorci, kterým je možné stanovit maximální osové zatížení štíhlého přímého tlačeného prutu, aniž by došlo ke ztrátě stability a vzniku vzpěru. Euler toto zatížení označil jako kritické, které se v případě zatížení osamělým břemenem nazývá **kritickou silou**.

Obr. 9.2 Leonhard Euler

Odvození vztahu pro kritickou sílu, označovanou jako F_{cr}, vychází při předpokládaném vzniku malých deformací z diferenciální rovnice ohybové čáry (7.2) pro prut konstantní ohybové tuhosti $E \cdot I = \text{konst}$:

$$w''(x) = -\frac{M(x)}{E \cdot I} \,. \tag{9.1}$$

Statické účinky se přitom vyšetřují na zdeformovaném prutu, takže je při výpočtu uplatněna teorie II. řádu (viz poznámka 1.2) vedoucí ke geometrické nelinearitě s omezeným využitím principu superpozice.

Poznámka 9.1. Ve zmiňovaném idealizovaném případě se ztráta stability neprojeví tím, že tlačený prut samovolně vybočí ze své přímé polohy ihned po překročení kritické hodnoty zatížení. K tomu je zapotřebí vedlejších účinků jako například působení bočního silového zatížení nebo nerovnoměrné oteplení prutu.

9.1.1 Prut oboustranně kloubově uložený

Prvním prutovým prvkem, řešeným z hlediska vzpěrné únosnosti, je oboustranně kloubově uložený prut zatížený tlakovou silou F podle statického schématu na obrázku 9.3.

Z momentových podmínek rovnováhy sestavených k bodům a a b plyne, že silové reakce R_{az} a R_{bz} jsou nulové. Ohybový moment $M(x)$ je pak v obecném průřezu x při výpočtu podle teorie II. řádu roven:

$$M(x) = F \cdot w(x) \,. \tag{9.2}$$

Dosazením do rovnice (9.1) pak vychází:

$$w''(x) = -\frac{M(x)}{E \cdot I} = -\frac{F}{E \cdot I} \cdot w(x) \,. \tag{9.3}$$

Výraz (9.3) je možno dále upravit s využitím substituce:

$$\alpha^2 = \frac{F}{E \cdot I} \tag{9.4}$$

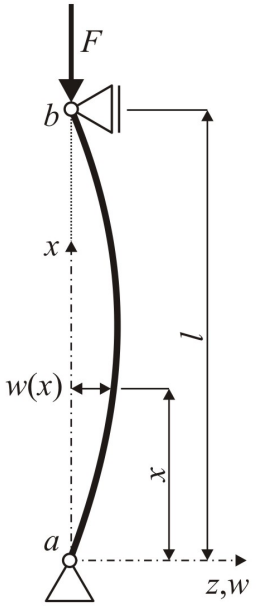
následujícím způsobem:

$$w''(x) = -\alpha^2 \cdot w(x) \;\rightarrow\; w''(x) + \alpha^2 \cdot w(x) = 0 \,. \tag{9.5}$$

Obecné řešení homogenní diferenciální rovnice druhého řádu (9.5) se rovná:

$$w(x) = C_1 \cdot \sin(\alpha \cdot x) + C_2 \cdot \cos(\alpha \cdot x) \,, \tag{9.6}$$

kde C_1 a C_2 jsou integrační konstanty.



Obr. 9.3 Schéma tlačeného oboustranně kloubově uloženého prutu při vybočení

Důkaz. Postupným derivováním rovnice (9.6):

$$w'(x) = \alpha \cdot C_1 \cdot \cos(\alpha \cdot x) - \alpha \cdot C_2 \cdot \sin(\alpha \cdot x) \,, \tag{9.7}$$

$$w''(x) = -\alpha^2 \cdot C_1 \cdot \sin(\alpha \cdot x) - \alpha^2 \cdot C_2 \cdot \cos(\alpha \cdot x) \tag{9.8}$$

a následným dosazením do původní diferenciální rovnice (9.5) vychází:

$$\begin{aligned} w''(x) + \alpha^2 \cdot w(x) = -\alpha^2 \cdot C_1 \cdot \sin(\alpha \cdot x) - \alpha^2 \cdot C_2 \cdot \cos(\alpha \cdot x) + \\ + \alpha^2 \cdot [C_1 \cdot \sin(\alpha \cdot x) + C_2 \cdot \cos(\alpha \cdot x)] = 0 \,. \end{aligned} \tag{9.9}$$

Vztah (9.6) odpovídá obecnému řešení diferenciální rovnice druhého řádu (9.5). □

Z okrajových podmínek řešeného prutu:

$$w(x = 0) = 0 \,, \quad w(x = l) = 0 \tag{9.10}$$

vyplývají dvě homogenní rovnice:

$$w(x = 0) = 0 \;\rightarrow\; C_1 \cdot \sin(\alpha \cdot 0) + C_2 \cdot \cos(\alpha \cdot 0) = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 = 0 \tag{9.11}$$

a

$$w(x = l) = 0 \;\rightarrow\; C_1 \cdot \sin(\alpha \cdot l) + C_2 \cdot \cos(\alpha \cdot l) = 0 \,. \tag{9.12}$$

Obě rovnice (9.11) a (9.12) mohou být splněny tzv. triviálním řešením, kdy $C_1 = C_2 = 0$, což však představuje situaci, kdy vybočení přímého prutu je nulové a tlačený prut se nachází ve stabilním stavu.

Pro odvození kritického břemene F_{cr} je nutné najít netriviální řešení, které odpovídá stavu, kdy tlačený prut vybočí ze svého původně přímého tvaru a normálová síla má dostatečné velkou hodnotu, aby řešený prutový prvek zůstal v zdeformované poloze s malým přetvořením v příčném směru.

Aby byla splněna okrajová podmínka (9.11), musí být integrační konstanta $C_2 = 0$. Po dosazení do okrajové podmínky (9.12) pak vychází:

$$C_1 \cdot \sin(\alpha \cdot l) + C_2 \cdot \cos(\alpha \cdot l) = C_1 \cdot \sin(\alpha \cdot l) + 0 \cdot \cos(\alpha \cdot l) = 0 \,. \tag{9.13}$$

Za předpokladu, že hodnota integrační konstanty C_1 musí být nenulová, je rovnice (9.13) splněna pouze při nulové hodnotě členu:

$$\sin(\alpha \cdot l) = 0 \,. \tag{9.14}$$

Rovnice (9.14) se nazývá **podmínkou stability** řešené úlohy, kterou splňuje nekonečně mnoho argumentů funkce sinus s výjimkou nepřijatelného $\alpha \cdot l = 0$, což lze definovat:

$$\alpha \cdot l = k \cdot \pi \;\rightarrow\; \alpha = \frac{k \cdot \pi}{l} \,, \tag{9.15}$$

kde $k = 1, 2, \ldots, \infty$. Dosazením výrazu (9.15) do vztahu (9.4) pak lze lze získat:

$$\alpha^2 = \frac{F}{E \cdot I} = \left(\frac{k \cdot \pi}{l}\right)^2 \rightarrow F = (k \cdot \pi)^2 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2} \ . \tag{9.16}$$

Praktický význam má rovnice (9.16) pouze pro hodnotu $k = 1$, která odpovídá nejmenší možné velikosti tlakové síly F. Výsledkem stabilitní úlohy je tedy hledané kritické (Eulerovo) břemeno F_{cr}:

$$F_{cr} = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2} \ , \tag{9.17}$$

jehož působením v tlačeném oboustranně kloubově uloženém prutu nastane ztráta stability a prutový nosný prvek vybočí ze svého původně přímého stavu do tvaru jedné půlvlny funkce sinus (viz obrázek 9.3).

Poznámka 9.2. Při odvozování kritického břemene F_{cr} tlačeného oboustranně kloubově uloženého prutu zůstala neurčena integrační konstanta $C_1 \neq 0$. Tato skutečnost svědčí o jisté mnohoznačnosti řešení, která je typická pro veškeré stabilitní úlohy.

Poznámka 9.3. Tlačený oboustranně kloubově uložený prut vybočí ve směru své nejmenší tuhosti, které musí ve vztahu (9.17) pro výpočet kritického břemene F_{cr} odpovídat zadaný moment setrvačnosti I.

9.1.2 Konzolový prut

Druhým případem tlačeného prutu, u něhož bude určeno kritické břemeno F_{cr}, je jednostranně vetknutý konzolový prut zobrazený na schématu 9.4.

Při předpokládaném vybočení volného konce δ bude rovnice ohybového momentu při výpočtu shora podle teorie II. řádu nabývat tvaru:

$$M(x) = -F \cdot [\delta - w(x)] \ . \tag{9.18}$$

Při dosazení do rovnice (9.1) pak vychází:

$$w''(x) = -\frac{M(x)}{E \cdot I} = \frac{F}{E \cdot I} \cdot [\delta - w(x)] \ . \tag{9.19}$$

Výraz (9.19) lze upravit opět s využitím substituce (9.4):

$$\alpha^2 = \frac{F}{E \cdot I} \,, \tag{9.20}$$

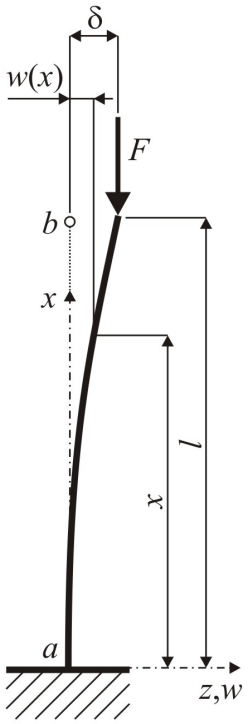
takže výsledná diferenciální rovnice ohybové čáry má tvar:

$$\begin{aligned} w''(x) &= \alpha^2 \cdot [\delta - w(x)] \;\rightarrow \\ &\rightarrow\; w''(x) + \alpha^2 \cdot w(x) = \alpha^2 \cdot \delta \,. \end{aligned} \tag{9.21}$$

Obecné řešení diferenciální rovnice druhého řádu (9.21) se pak rovná:

$$w(x) = C_1 \cdot \sin(\alpha \cdot x) + C_2 \cdot \cos(\alpha \cdot x) + \delta \,, \tag{9.22}$$

kde C_1 a C_2 jsou integrační konstanty.



Obr. 9.4 Schéma konzolového prutu

Důkaz. Postupným derivováním rovnice (9.22):

$$w'(x) = \alpha \cdot C_1 \cdot \cos(\alpha \cdot x) - \alpha \cdot C_2 \cdot \sin(\alpha \cdot x) \,, \tag{9.23}$$

$$w''(x) = -\alpha^2 \cdot C_1 \cdot \sin(\alpha \cdot x) - \alpha^2 \cdot C_2 \cdot \cos(\alpha \cdot x) \tag{9.24}$$

a následným dosazením do původní diferenciální rovnice (9.21) vychází:

$$\begin{aligned} w''(x) + \alpha^2 \cdot w(x) = &-\alpha^2 \cdot C_1 \cdot \sin(\alpha \cdot x) - \alpha^2 \cdot C_2 \cdot \cos(\alpha \cdot x) + \\ &+ \alpha^2 \cdot [C_1 \cdot \sin(\alpha \cdot x) + C_2 \cdot \cos(\alpha \cdot x) + \delta] = \alpha^2 \cdot \delta \,. \end{aligned} \tag{9.25}$$

Vztah (9.22) odpovídá obecnému řešení diferenciální rovnice druhého řádu (9.21). □

Z okrajových podmínek řešeného prutu:

$$w(x = 0) = 0 \,, \quad w'(x = 0) = 0 \,, \quad w(x = l) = \delta \tag{9.26}$$

vyplývají tři rovnice:

$$w(x = 0) = 0 \;\rightarrow\; C_1 \cdot \sin(\alpha \cdot 0) + C_2 \cdot \cos(\alpha \cdot 0) + \delta = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 + \delta = 0 \,, \tag{9.27}$$

$$w'(x = 0) = 0 \;\rightarrow\; \alpha \cdot C_1 \cdot \cos(\alpha \cdot 0) - \alpha \cdot C_2 \cdot \sin(\alpha \cdot 0) = \alpha \cdot C_1 \cdot 1 - \alpha \cdot C_2 \cdot 0 = 0 \tag{9.28}$$

a

$$w(x = l) = \delta \;\rightarrow\; C_1 \cdot \sin(\alpha \cdot l) + C_2 \cdot \cos(\alpha \cdot l) + \delta = \delta \,. \tag{9.29}$$

Netriviální řešení úlohy spočívá nejprve v určení integrační konstanty C_2 z rovnice (9.27):

$$C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 + \delta = 0 \;\rightarrow\; C_2 = -\delta \,. \tag{9.30}$$

Po dosazení do okrajové podmínky (9.28) pak vychází:

$$\alpha \cdot C_1 \cdot 1 - \alpha \cdot C_2 \cdot 0 = \alpha \cdot C_1 \cdot 1 + \alpha \cdot \delta \cdot 0 = 0 \;\rightarrow\; C_1 = 0\,. \tag{9.31}$$

Rovnice (9.29):

$$C_1 \cdot \sin(\alpha \cdot l) + C_2 \cdot \cos(\alpha \cdot l) + \delta = 0 \cdot \sin(\alpha \cdot l) - \delta \cdot \cos(\alpha \cdot l) + \delta = \delta \tag{9.32}$$

je za předpokladu $\delta \neq 0$ splněna pouze při nulové hodnotě členu:

$$\cos(\alpha \cdot l) = 0\,, \tag{9.33}$$

což v případě řešení tlačeného konzolového prutu představuje **podmínku stability**, které vyhovuje nekonečně mnoho argumentů funkce cosinus:

$$\alpha \cdot l = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \;\rightarrow\; \alpha = \frac{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi}{l}\,, \tag{9.34}$$

kde $k = 0, 1, 2, \ldots, \infty$.

Praktický význam má řešení pouze pro hodnotu $k = 0$, tedy:

$$\alpha = \frac{\pi}{2 \cdot l}\,. \tag{9.35}$$

Dosazením výrazu (9.35) do vztahu (9.20) pak lze lze získat hledané kritické (Eulerovo) břemeno F_{cr}:

$$\alpha^2 = \frac{F}{E \cdot I} = \left(\frac{\pi}{2 \cdot l}\right)^2 \;\rightarrow\; F = F_{cr} = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{4 \cdot l^2}\,. \tag{9.36}$$

Výsledná kritická síla F_{cr}, při níž nastane u konzolového prutu ztráta stability, je vzhledem k oboustranně kloubově podepřenému prutu čtvrtinová.

Poznámka 9.4. Při odvozování vztahu pro výpočet kritického břemene F_{cr} tlačeného konzolového prutu zůstala neurčena integrační konstanta $C_2 \neq 0$ (ve výrazu (9.30)), což opět svědčí o mnohoznačnosti řešení stabilitní úlohy.

Poznámka 9.5. Tlačený konzolový prut vybočí ve směru své nejmenší tuhosti, které musí ve vztahu (9.36) pro výpočet kritického břemene F_{cr} odpovídat zadaný moment setrvačnosti I.

9.1.3 Prut jednostranně vetknutý

Dalším typem tlačeného štíhlého prutu, u něhož bude odvozen vztah pro kritické břemeno F_{cr}, je jednostranně vetknutý prut z obrázku 9.5, který má rovnici ohybového momentu při výpočtu shora podle teorie II. řádu rovnu:

$$M(x) = F \cdot w(x) + R_{bz} \cdot (l - x) \ . \tag{9.37}$$

Při dosazení do rovnice (9.1) pak vychází:

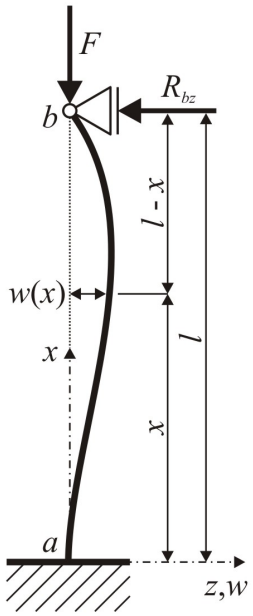
$$w''(x) = -\frac{M(x)}{E \cdot I} = -\frac{F}{E \cdot I} \cdot w(x) - \frac{R_{bz}}{E \cdot I} \cdot (l - x) \ . \tag{9.38}$$

Výraz (9.38) je rovněž možné upravit s využitím substituce (9.4):

$$\alpha^2 = \frac{F}{E \cdot I} \ , \tag{9.39}$$

takže výsledná diferenciální rovnice ohybové čáry má tvar:

$$\begin{aligned} w''(x) &= -\alpha^2 \cdot w(x) - \alpha^2 \cdot \frac{R_{bz}}{F} \cdot (l - x) \ \rightarrow \\ \rightarrow \ w''(x) &+ \alpha^2 \cdot w(x) = -\alpha^2 \cdot \frac{R_{bz}}{F} \cdot (l - x) \ . \end{aligned} \tag{9.40}$$



Obr. 9.5 Schéma tlačeného jednostranně vetknutého prutu

Obecné řešení diferenciální rovnice druhého řádu (9.40) se pak rovná:

$$w(x) = C_1 \cdot \sin(\alpha \cdot x) + C_2 \cdot \cos(\alpha \cdot x) - \frac{R_{bz}}{F} \cdot (l - x) \ , \tag{9.41}$$

kde C_1 a C_2 jsou integrační konstanty.

Důkaz. Postupným derivováním rovnice (9.41):

$$w'(x) = \alpha \cdot C_1 \cdot \cos(\alpha \cdot x) - \alpha \cdot C_2 \cdot \sin(\alpha \cdot x) + \frac{R_{bz}}{F} \ , \tag{9.42}$$

$$w''(x) = -\alpha^2 \cdot C_1 \cdot \sin(\alpha \cdot x) - \alpha^2 \cdot C_2 \cdot \cos(\alpha \cdot x) \tag{9.43}$$

a následným dosazením do původní diferenciální rovnice (9.40) vychází:

$$\begin{aligned} w''(x) + \alpha^2 \cdot w(x) &= -\alpha^2 \cdot C_1 \cdot \sin(\alpha \cdot x) - \alpha^2 \cdot C_2 \cdot \cos(\alpha \cdot x) + \\ &+ \alpha^2 \cdot \left[C_1 \cdot \sin(\alpha \cdot x) + C_2 \cdot \cos(\alpha \cdot x) - \frac{R_{bz}}{F} \cdot (l - x) \right] = \\ &= -\alpha^2 \cdot \frac{R_{bz}}{F} \cdot (l - x) \ . \end{aligned} \tag{9.44}$$

Vztah (9.41) odpovídá obecnému řešení diferenciální rovnice druhého řádu (9.40). □

Uplatněním okrajových podmínek řešené úlohy:

$$w(x=0)=0\ , \quad w^{'}(x=0)=0\ , \quad w(x=l)=0 \tag{9.45}$$

lze získat tři homogenní rovnice:

$$\begin{aligned} w(x=0)=0\ \rightarrow & C_1\cdot\sin(\alpha\cdot 0)+C_2\cdot\cos(\alpha\cdot 0)-\frac{R_{bz}}{F}\cdot(l-0)= \\ & =C_1\cdot 0+C_2\cdot 1-\frac{R_{bz}}{F}\cdot l=0\ , \end{aligned} \tag{9.46}$$

$$\begin{aligned} w^{'}(x=0)=0\ \rightarrow & \alpha\cdot C_1\cdot\cos(\alpha\cdot 0)-\alpha\cdot C_2\cdot\sin(\alpha\cdot 0)+\frac{R_{bz}}{F}= \\ & =\alpha\cdot C_1\cdot 1-\alpha\cdot C_2\cdot 0+\frac{R_{bz}}{F}=0 \end{aligned} \tag{9.47}$$

a

$$w(x=l)=0\ \rightarrow\ C_1\cdot\sin(\alpha\cdot l)+C_2\cdot\cos(\alpha\cdot l)-\frac{R_{bz}}{F}\cdot(l-l)=0\ . \tag{9.48}$$

Při netriviálním řešení úlohy je možno nejprve určit integrační konstantu C_2 z rovnice (9.46):

$$C_1\cdot 0+C_2\cdot 1-\frac{R_{bz}}{F}\cdot l=0\ \rightarrow\ C_2=\frac{R_{bz}}{F}\cdot l\ . \tag{9.49}$$

Integrační konstanta C_1 se vypočítá z okrajové podmínky (9.47):

$$\alpha\cdot C_1\cdot 1-\alpha\cdot C_2\cdot 0+\frac{R_{bz}}{F}=0\ \rightarrow\ C_1=-\frac{R_{bz}}{F}\cdot\frac{1}{\alpha}\ . \tag{9.50}$$

Rovnici (9.48) lze s využitím vypočtených hodnot integračních konstant C_1 a C_2 rozepsat:

$$\begin{aligned} & C_1\cdot\sin(\alpha\cdot l)+C_2\cdot\cos(\alpha\cdot l)-\frac{R_{bz}}{F}\cdot 0= \\ & =-\frac{R_{bz}}{F}\cdot\frac{1}{\alpha}\cdot\sin(\alpha\cdot l)+\frac{R_{bz}}{F}\cdot l\cdot\cos(\alpha\cdot l)= \\ & =\frac{R_{bz}}{F}\cdot[\alpha\cdot l\cdot\cos(\alpha\cdot l)-\sin(\alpha\cdot l)]=0 \end{aligned} \tag{9.51}$$

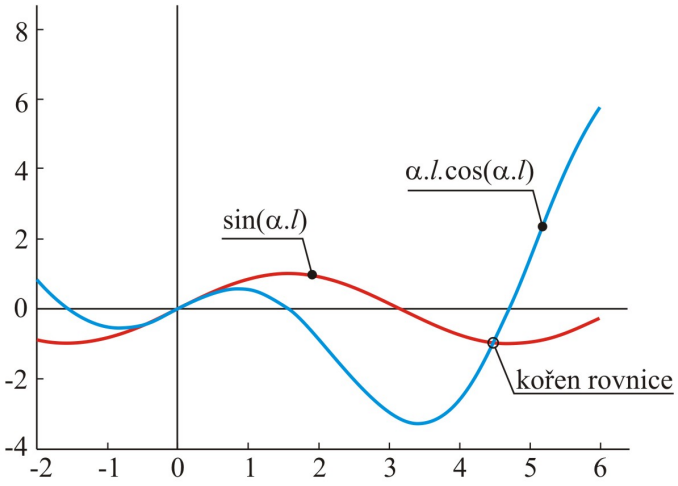
Rovnice (9.51) je splněna při nulové hodnotě výrazu:

$$\alpha\cdot l\cdot\cos(\alpha\cdot l)-\sin(\alpha\cdot l)=0\ \rightarrow\ \frac{\sin(\alpha\cdot l)}{\cos(\alpha\cdot l)}=\tan(\alpha\cdot l)=\alpha\cdot l\ . \tag{9.52}$$

Vztah (9.52) představuje **podmínku stability** jednostranně vetknutého tlačeného prutu, kterou lze řešit numericky. Z neupravené podmínky stability v levé části

výrazu (9.52) vyplývá, že podmínka stability je splněna pokud hodnoty obou členů budou stejné. Na obrázku (9.6) jsou uvedeny grafy obou členů neupravené podmínky stability, tedy $\sin(\alpha \cdot l)$ a $\alpha \cdot l \cdot \cos(\alpha \cdot l)$. Pomine-li se nepřípustný kořen podmínky stability v počátku, další nejbližší řešení úlohy leží v rozmezí hodnot 4 a 5. Některou z numerických metod pro řešení nelineárních rovnic pak lze postupným zpřesňováním získat dostatečně přesnou hodnotu kořene podmínky stability:

$$\alpha \cdot l \approx 4,493409457 \;\rightarrow\; \alpha \approx \frac{4,493409457}{l} \,. \tag{9.53}$$



Obr. 9.6 Grafy funkcí $\sin(\alpha \cdot l)$ a $\alpha \cdot l \cdot \cos(\alpha \cdot l)$ s vyznačeným kořenem podmínky stability jednostranně vetknutého prutu

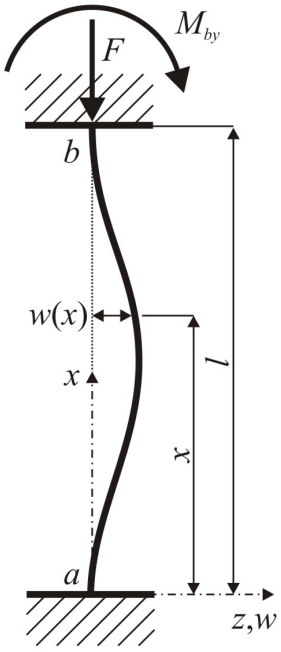
Dosazením vypočteného kořene $\alpha \cdot l$ z výrazu (9.53) do vztahu (9.39), lze pro jednostranně vetknutý prut získat hodnotu požadované kritické (Eulerovy) síly F_{cr}:

$$\alpha^2 = \frac{F}{E \cdot I} \approx \left(\frac{4,493409457}{l}\right)^2 \;\rightarrow\; F = F_{cr} \approx (4,493409457)^2 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2} \,. \tag{9.54}$$

Poznámka 9.6. Při odvozování vztahu pro výpočet kritického břemene F_{cr} tlačeného jednostranně vetknutého prutu zůstala neurčena vodorovná silová reakce v kloubové podpoře $R_{bz} \neq 0$ (ve výrazech (9.49), (9.50) i (9.51)), což lze opět přičíst na vrub mnohoznačnosti řešení této stabilitní úlohy.

Poznámka 9.7. Tlačený jednostranně vetknutý prut vybočí ve směru své nejmenší tuhosti, které musí ve vztahu (9.54) pro výpočet kritického břemene F_{cr} odpovídat zadaný moment setrvačnosti I.

9.1.4 Oboustranně vetknutý prut



Obr. 9.7 Schéma tlačeného oboustranně vetknutého prutu

Posledním vyřešeným případem tlačeného prutu, u něhož je odvozen analytický vztah pro výpočet kritického břemene F_{cr}, je oboustranně vetknutý prut, jehož statické schéma je uvedeno na obrázku 9.7.

Rovnici ohybového momentu oboustranně vetknutého prutu lze podle teorie II. řádu získat výpočtem shora:

$$M(x) = F \cdot w(x) - M_{by} \ . \tag{9.55}$$

Rovnici (9.55) je pak možno dosadit do diferenciální rovnice ohybové čáry druhého řádu (9.1):

$$w''(x) = -\frac{M(x)}{E \cdot I} = -\frac{F}{E \cdot I} \cdot w(x) + \frac{M_{by}}{E \cdot I} \ . \tag{9.56}$$

Výraz (9.56) se upraví již známým způsobem s použitím substituce (9.4):

$$\alpha^2 = \frac{F}{E \cdot I} \ , \tag{9.57}$$

takže diferenciální rovnice ohybové čáry (9.56) se změní na tvar:

$$\begin{aligned} w''(x) = -\alpha^2 \cdot w(x) + \alpha^2 \cdot \frac{M_{by}}{F} \ \rightarrow \\ \rightarrow \ w''(x) + \alpha^2 \cdot w(x) = \alpha^2 \cdot \frac{M_{by}}{F} \ . \end{aligned} \tag{9.58}$$

Odvozená diferenciální rovnice druhého řádu (9.58) má obecné řešení v podobě výrazu:

$$w(x) = C_1 \cdot \sin(\alpha \cdot x) + C_2 \cdot \cos(\alpha \cdot x) + \frac{M_{by}}{F} \ , \tag{9.59}$$

kde C_1 a C_2 jsou integrační konstanty.

Důkaz. Postupným derivováním rovnice (9.59):

$$w'(x) = \alpha \cdot C_1 \cdot \cos(\alpha \cdot x) - \alpha \cdot C_2 \cdot \sin(\alpha \cdot x) \ , \tag{9.60}$$

$$w''(x) = -\alpha^2 \cdot C_1 \cdot \sin(\alpha \cdot x) - \alpha^2 \cdot C_2 \cdot \cos(\alpha \cdot x) \tag{9.61}$$

a následným dosazením do původní diferenciální rovnice (9.58) vychází:

$$\begin{aligned} w''(x) + \alpha^2 \cdot w(x) = -\alpha^2 \cdot C_1 \cdot \sin(\alpha \cdot x) - \alpha^2 \cdot C_2 \cdot \cos(\alpha \cdot x) + \\ + \alpha^2 \cdot \left[C_1 \cdot \sin(\alpha \cdot x) + C_2 \cdot \cos(\alpha \cdot x) + \frac{M_{by}}{F} \right] = \alpha^2 \cdot \frac{M_{by}}{F} \ . \end{aligned} \tag{9.62}$$

Vztah (9.59) odpovídá obecnému řešení diferenciální rovnice druhého řádu (9.58). □

Uplatněním okrajových podmínek řešené úlohy:

$$w(x=0)=0\ ,\quad w^{'}(x=0)=0\ ,\quad w(x=l)=0\ ,\quad w^{'}(x=l)=0\ , \tag{9.63}$$

lze získat čtyři homogenní rovnice:

$$\begin{aligned} w(x=0)=0\ &\rightarrow C_1\cdot\sin(\alpha\cdot 0)+C_2\cdot\cos(\alpha\cdot 0)+\frac{M_{by}}{F}= \\ &= C_1\cdot 0+C_2\cdot 1+\frac{M_{by}}{F}=0\ , \end{aligned} \tag{9.64}$$

$$\begin{aligned} w^{'}(x=0)=0\ &\rightarrow \alpha\cdot C_1\cdot\cos(\alpha\cdot 0)-\alpha\cdot C_2\cdot\sin(\alpha\cdot 0)= \\ &= \alpha\cdot C_1\cdot 1-\alpha\cdot C_2\cdot 0=0\ , \end{aligned} \tag{9.65}$$

$$w(x=l)=0\ \rightarrow\ C_1\cdot\sin(\alpha\cdot l)+C_2\cdot\cos(\alpha\cdot l)+\frac{M_{by}}{F}=0 \tag{9.66}$$

a

$$w^{'}(x=l)=0\ \rightarrow\ \alpha\cdot C_1\cdot\cos(\alpha\cdot l)-\alpha\cdot C_2\cdot\sin(\alpha\cdot l)=0\ . \tag{9.67}$$

Při netriviálním řešení úlohy je možno nejprve určit integrační konstantu C_2 z rovnice (9.64):

$$C_1\cdot 0+C_2\cdot 1+\frac{M_{by}}{F}=0\ \rightarrow\ C_2=-\frac{M_{by}}{F}\ . \tag{9.68}$$

Hodnota integrační konstanty C_1 se získá z okrajové podmínky (9.65):

$$\alpha\cdot C_1\cdot 1-\alpha\cdot C_2\cdot 0=0\ \rightarrow\ C_1=0\ . \tag{9.69}$$

Podmínka stability vzejde ze třetí rovnice (9.66), do které se dosadí již vypočtené hodnoty integračních konstant C_1 a C_2:

$$\begin{aligned} &C_1\cdot\sin(\alpha\cdot l)+C_2\cdot\cos(\alpha\cdot l)+\frac{M_{by}}{F}= \\ &=0\cdot\sin(\alpha\cdot l)-\frac{M_{by}}{F}\cdot\cos(\alpha\cdot l)+\frac{M_{by}}{F}= \\ &=\frac{M_{by}}{F}\cdot[1-\cos(\alpha\cdot l)]=0\ . \end{aligned} \tag{9.70}$$

Vztah (9.70) bude splněn, pokud bude výraz v závorce nulový, tedy:

$$1-\cos(\alpha\cdot l)=0\ \rightarrow\ \cos(\alpha\cdot l)=0\ , \tag{9.71}$$

což je zároveň podmínka stability tlačeného oboustranně vetknutého prutu, kterou splňuje při netriviálním řešení nekonečně mnoho argumentů funkce cosinus:

$$\alpha\cdot l=k\cdot 2\cdot\pi\ \rightarrow\ \alpha=\frac{k\cdot 2\cdot\pi}{l}\ , \tag{9.72}$$

kde $k = 1, 2, \ldots, \infty$. Praktický význam má řešení rovnice (9.72) pouze pro hodnotu $k = 1$. Dosazením výrazu (9.72) s hodnotou $k = 1$ do vztahu (9.57) se stanoví i výsledné kritické (Eulerovo) břemeno F_{cr} tlačeného oboustranně vetknutého prutu:

$$\alpha^2 = \frac{F}{E \cdot I} = \left(\frac{2 \cdot \pi}{l}\right)^2 \rightarrow F = F_{cr} = 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2} \,. \tag{9.73}$$

Výsledná kritická síla F_{cr}, při níž nastane u tlačeného oboustranně vetknutého prutu ztráta stability, je vzhledem k oboustranně kloubově podepřenému prutu čtyřnásobná.

Poznámka 9.8. Při odvozování vztahu pro výpočet kritického břemene F_{cr} tlačeného oboustranně vetknutého prutu zůstala ve výrazech (9.68) a (9.70) neurčena momentová reakce ve vetknutí $M_{by} \neq 0$, což lze opět přičíst na vrub mnohoznačnosti řešení této stabilitní úlohy.

Poznámka 9.9. I v případě tlačeného oboustranně vetknutého prutu vzniká vybočení ve směru jeho nejmenší tuhosti, což je třeba zohlednit zadáním příslušného momentu setrvačnosti I do vztahu (9.73) pro výpočet kritické síly F_{cr}.

9.1.5 Eulerova kritická síla - shrnutí

Odvozené vztahy pro stanovení kritického (Eulerova) břemene F_{cr} pro čtyři základní typy přímých štíhlých tlačených prutů lze sjednotit do tvaru:

$$F = F_{cr} = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{L_{cr}^2} \,, \tag{9.74}$$

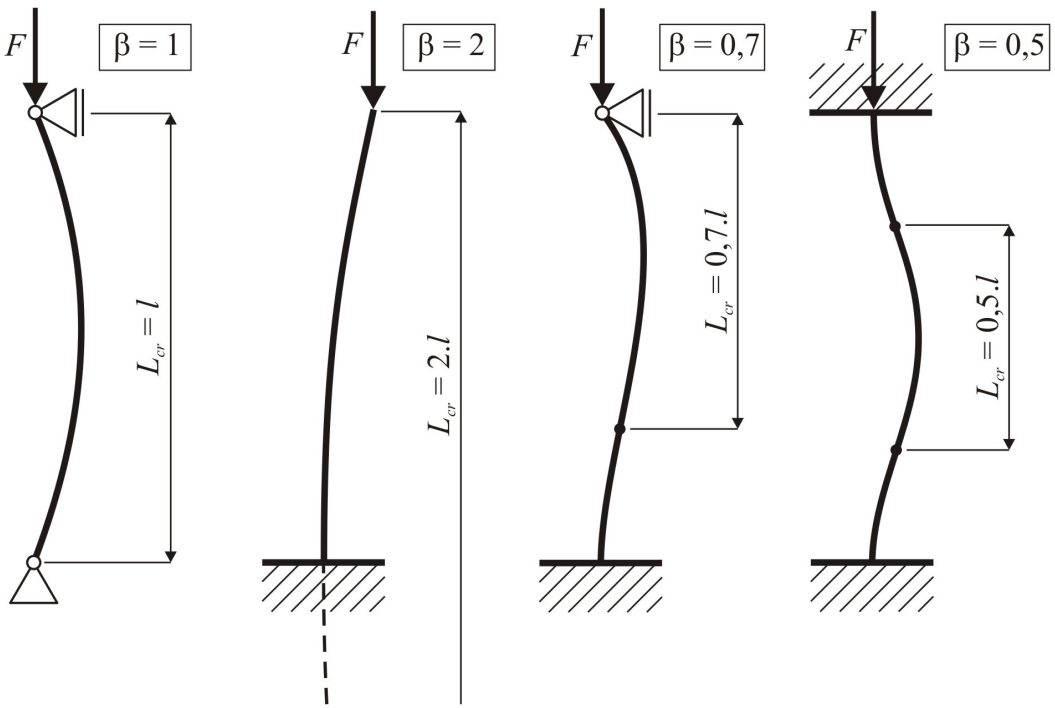
kde veličina, označená jako L_{cr}, se nazývá **vzpěrná délka** tlačeného prutu. Stanoví se na základě jednoduchého vzorce:

$$L_{cr} = \beta \cdot l \,, \tag{9.75}$$

kde β představuje tzv. **součinitel vzpěrné délky**, kterým lze při výpočtu kritického břemene podle vztahu (9.74) zohlednit příslušný typ podepření následujícím způsobem:

- **Oboustranně kloubový tlačený prut**:
  Velikost kritického břemene byla odvozena vztahem (9.17), takže platí:

$$F_{cr} = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2} = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{(\beta \cdot l)^2} \rightarrow \beta = 1 \,. \tag{9.76}$$



Obr. 9.8 Přehled základních typů Eulerova tlačeného prutu

- **Konzolový tlačený prut**:
  Velikost kritického břemene byla odvozena vztahem (9.36), platí tedy:

$$F_{cr} = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{4 \cdot l^2} = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{(\beta \cdot l)^2} \;\rightarrow\; \beta = 2\,. \tag{9.77}$$

- **Jednostranně vetknutý prut**:
  Velikost kritického břemene byla odvozena vztahem (9.54), takže platí:

$$\begin{aligned} F_{cr} &\approx (4,49341)^2 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2} = (1,43030 \cdot \pi)^2 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2} = \\ &= \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{\left(\dfrac{1}{1,43030} \cdot l\right)^2} = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{(0,69916 \cdot l)^2} = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{(\beta \cdot l)^2} \;\rightarrow \\ &\rightarrow\; \beta = 0,69916 \cong 0,7\,. \end{aligned} \tag{9.78}$$

- **Oboustranně vetknutý prut**:
  Velikost kritického břemene byla odvozena vztahem (9.73), platí tedy:

$$F_{cr} = 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2} = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{\frac{1}{4} \cdot l^2} = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{(\beta \cdot l)^2} \;\rightarrow\; \beta = \frac{1}{2} = 0,5\,. \tag{9.79}$$

Vzpěrné délky L_{cr} i součinitelé vzpěrných délek β jsou pro čtveřici základních typů tlačených prutů schématicky naznačeny i na obrázku 9.8, ze kterého je zřejmé, že jednotlivé vzpěrné délky se rovnají příslušné délce sinusové půlvlny ohybové čáry po vybočení, tedy vzdálenosti příslušných inflexních bodů.

9.1.6 Eulerovo kritické napětí

Z velikosti kritické (Eulerovy) síly F_{cr}, vyjádřené obecně vztahem (9.74), je možné s pomocí elementárního vztahu (4.6) pro výpočet normálového napětí σ_x při osovém namáhání a za předpokladu pružného chování materiálu určit tzv. (Eulerovo) **kritické napětí** σ_{cr}:

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{A \cdot L_{cr}^2} = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot i^2}{L_{cr}^2}\,, \tag{9.80}$$

kde i je poloměr setrvačnosti k příslušné hlavní centrální ose setrvačnosti průřezu.

Vztah (9.80) lze zjednodušit zavedením bezrozměrné veličiny, označované jako **štíhlost** (štíhlostní poměr) λ:

$$\lambda = \frac{L_{cr}}{i}\,. \tag{9.81}$$

Výraz pro výpočet kritického napětí pak nabude tvar:

$$\sigma_{cr} = \pi^2 \cdot \frac{E}{\lambda^2}\,. \tag{9.82}$$

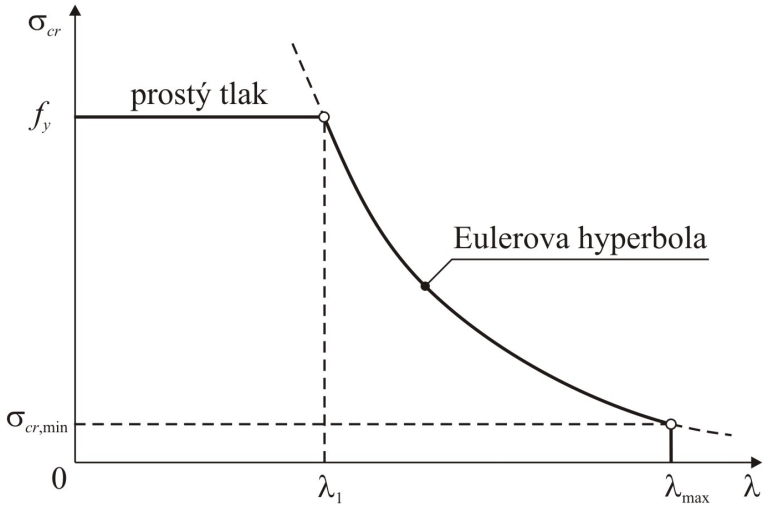
Rovnice (9.82) pro výpočet (Eulerova) kritického napětí vyjadřuje rovnici hyperboly, která bývá označována jako tzv. **Eulerova hyperbola**. Její graf je uveden na obrázku 9.9.

Kritické napětí dané rovnicí (9.82) při hodnotě štíhlosti $\lambda \rightarrow 0$ se blíží $\sigma_{cr} \rightarrow \infty$. Z tohoto důvodu je nutné platnost Eulerovy hyperboly omezit pro reálné chování nosného prvku.

Při uvažování ideálně pružnoplastického chování materiálu by pružné řešení tlačeného prutu namáhaného vzpěrným tlakem platilo až do hodnoty kritického napětí

$\sigma_{cr} = f_y$, jak je také naznačeno na grafu Eulerovy hyperboly na obrázku 9.9. U situací, kdy je kritické napětí $\sigma_{cr} > f_y$, by pak o odolnosti tlačeného prvku rozhodovala únosnost v prostém tlaku.

Při hodnotě štíhlosti $\lambda \to \infty$ se naopak hodnota kritického napětí σ_{cr}, které je dané rovnicí (9.82), blíží $\sigma_{cr} \to 0$. V praxi to znamená, že tlačený prvek je natolik štíhlý, že jeho únosnost ve vzpěrném tlaku je nulová a prutový prvek pozbývá svou nosnou funkci. Z toho důvodu je Eulerova hyperbola omezena zprava limitní štíhlostí $\lambda_{\max} \approx 290$.



Obr. 9.9 Eulerova hyperbola vyjadřující chování tlačeného prutu v pružném oboru

Poznámka 9.10. Vztahy (9.80) a (9.82) pro výpočet (Eulerova) kritického napětí σ_{cr} odpovídají velikosti tlakového napětí v okamžiku dosažení kritické síly F_{cr} před vybočením tlačeného prutu. Při výpočtu se tedy stále předpokládá působení dostředným tlakem.

9.2 Dimenzování tlačených prutů

Smyslem procesu návrhu a posudku spolehlivosti (souhrnně dimenzování) tlačeného prutu je navrhnout jeho tvar průřezu tak, aby byla splněna požadovaná kritéria spolehlivosti daná zejména mezními stavy únosnosti z hlediska **namáhání prostým a vzpěrným tlakem**.

9.2.1 Návrh a posouzení spolehlivosti prutu namáhaného prostým tlakem

Návrhová hodnota normálové síly N_{Ed} musí v každém průřezu tlačeného prutu splňovat z hlediska **namáhání prostým tlakem** podmínku:

$$\frac{N_{Ed}}{N_{Rd}} \leqq 1,0 \ , \tag{9.83}$$

která je analogická vyjádření:

$$N_{Ed} \leqq N_{Rd} \ , \tag{9.84}$$

kde N_{Rd} je **únosnost v prostém tlaku**, jež odpovídá maximální přípustné návrhové hodnotě normálové síly v nosném prvku. Její velikost vzejde z výchozího požadavku, že normálová napětí σ_x v tlačeném prutovém prvku nesmí překročit návrhovou hodnotu pevnosti materiálu v prostém tlaku, tedy podle vztahu (4.43):

$$\sigma_x \leqq f_d \ . \tag{9.85}$$

Podle výrazu (4.45) se únosnost prutového prvku v prostém tlaku N_{Rd} rovná:

$$N_{Rd} = f_d \cdot A \ . \tag{9.86}$$

Na únosnost prvku v prostém tlaku má tedy vliv kromě pevnosti v prostém tlaku také plocha průřezu A, jejíž nejmenší možná hodnota $A_{\min}$ se při návrhu může určit pomocí vztahu (4.46):

$$A_{\min} = \frac{|N_{Ed}|}{f_d} \ . \tag{9.87}$$

9.2.2 Návrh a posouzení spolehlivosti prutu namáhaného vzpěrným tlakem

V případě posudku spolehlivosti z hlediska vzpěrného tlaku musí nosný prvek splňovat podmínku:

$$\frac{|N_{Ed}|}{F_{cr}} \leqq 1,0 \ , \tag{9.88}$$

která je analogická vyjádření:

$$|N_{Ed}| \leqq F_{cr} \ , \tag{9.89}$$

kde F_{cr} je kritické břemeno určené na základě obecného vztahu (9.74), které představuje únosnost prutového prvku ve vzpěrném tlaku (v Eurokódu [4] označovanou $N_{b,Rd}$).

Vztahy (9.88) i (9.89) principiálně vycházejí z podmínky:

$$\sigma_x \leqq \sigma_{cr} \ , \tag{9.90}$$

kde σ_{cr} je (Eulerovo) kritického napětí definované vztahy (9.80) a (9.82).

Na únosnost prvku ve vzpěrném tlaku má vliv kromě způsobu uložení tlačeného prvku, vyjádřeného vzpěrnou délkou L_{cr}, také modul pružnosti v tahu a tlaku E a moment setrvačnosti I ve směru možného vybočení (pokud není bráněno vybočení v žádném směru, prut pak vybočí ve směru nejmenší tuhosti průřezu).

Při návrhu se pak nejmenší možná hodnota momentu setrvačnosti $I_{\min}$ může určit pomocí vztahů (9.89) a (9.74):

$$|N_{Ed}| \leqq F_{cr} = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{L_{cr}^2} \;\rightarrow\; I_{\min} = \frac{|N_{Ed}| \cdot L_{cr}^2}{\pi^2 \cdot E} \,. \tag{9.91}$$

Poznámka 9.11. Aby nosný prvek vyhověl z hlediska obou typů namáhání - prostého i vzpěrného tlaku, a splňoval tedy obě kritéria spolehlivosti, je třeba provést výsledný návrh, který vzejde z většího navrženého průřezu.

Posouzení spolehlivosti se pak pro namáhání prostým i vzpěrným tlakem provádí pouze pro průřez výsledného návrhu, tedy pro průřez reálného nosného prvku, který bude skutečně součástí nosného systému.

Celý proces dimenzování lze nejlépe provést podle následujícího schématu:

1. **Návrh průřezu nosného prvku:**
   a) *Namáhání prostým tlakem:*
   Navržen průřez tlačeného nosného prvku s minimální průřezovou plochou $A_{\min}$ s využitím vztahu (9.87).
   b) *Namáhání vzpěrným tlakem:*
   Navržen průřez tlačeného nosného prvku s minimálním momentem setrvačnosti $I_{\min}$ s použitím výrazu (9.91).
   c) *Výsledný návrh:*
   Navržen výsledný průřez tlačeného nosného prvku (větší z obou předchozích navržených průřezů).
2. **Posouzení spolehlivosti navrženého průřezu nosného prvku:**
   a) *Namáhání prostým tlakem:*
   Posudek spolehlivosti navrženého průřezu nosného prvku namáhaného prostým tlakem s využitím vztahu (9.83) nebo (9.84).
   b) *Namáhání vzpěrným tlakem:*
   Posudek spolehlivosti navrženého průřezu nosného prvku namáhaného vzpěrným tlakem s využitím vztahu (9.88) nebo (9.89).

Poznámka 9.12. Podobným způsobem, jak byl v poznámce 9.11 popsán postup při dimenzování tlačeného prutového prvku, lze postupovat i v případě určování maximální možné zatěžovací síly (tzv. **zatížitelnosti**). Výsledná hodnota možného

zatížení tlakovou silou pak vzejde při jejím stanovení pro prostý i vzpěrný tlak z menší z dvojice výsledných hodnot.

Poznámka 9.13. Spolehlivost navrhované konstrukce lze zvýšit s pomocí tzv. **koeficientu bezpečnosti** k. V příkladech, kdy jsou prutové prvky namáhané prostým tlakem, lze k-násobné zvýšení spolehlivosti docílit jednoduchou matematickou operací, kdy se ve výpočtu pevnost materiálu v prostém tlaku podělí koeficientem bezpečnosti k. Obdobně se postupuje i při výpočtech nosných prvků namáhaných vzpěrným tlakem, kdy se koeficientem bezpečnosti k naopak dělí velikost kritické síly F_{cr} (blíže viz příklad 9.17).

9.3 Příklady k procvičení

Příklad 9.14. Určete u centricky tlačeného sloupu z válcovaného profilu IPN200 štíhlosti pro vybočení kolmo k osám y i z, hodnotu kritické síly F_{cr} a velikost kritického napětí σ_{cr}. Statické schéma sloupu je uvedeno na obrázku 9.10. Konkrétní hodnoty vstupních veličin jsou uvedeny v tabulce 9.1 (průřezové charakteristiky jsou převzaty z tabulek 11.2 a 11.3 přílohy 11).

Výška sloupu l:	4 m
Průřezová plocha A:	$3,340 \cdot 10^{-3}$ m^2
Moment setrvačnosti I_y:	$21,4 \cdot 10^{-6}$ m^4
Moment setrvačnosti I_z:	$1,17 \cdot 10^{-6}$ m^4
Poloměr setrvačnosti i_y:	80,0 mm
Poloměr setrvačnosti i_z:	18,7 mm
Modul pružnosti v tahu a tlaku E:	210000 MPa

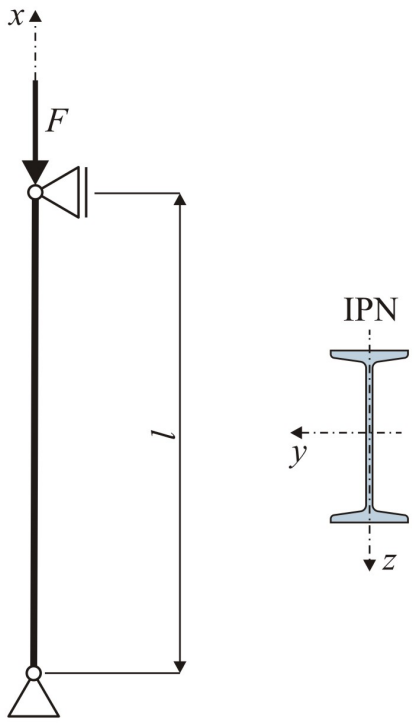
Tab. 9.1 Vstupní údaje příkladu 9.14

Řešení.

1. **Výpočet štíhlosti sloupu:**

   Výpočet lze začít určením vzpěrné délky řešeného prutového nosného prvku podle vzorce (9.75). V případě oboustranně kloubově uloženého tlačeného prutu je podle výrazu (9.76), případně podle obrázku 9.8 součinitel vzpěrné délky $\beta = 1$, takže:

$$L_{cr} = \beta \cdot l = 1 \cdot 4 = 4 \text{ [m]} . \tag{9.92}$$



Obr. 9.10 Statické schéma řešeného sloupu a jeho průřez

Výpočet štíhlosti sloupu pro vybočení kolmo k ose y (ve směru větší tuhosti) se pak stanoví na základě vztahu (9.81):

$$\lambda_y = \frac{L_{cr}}{i_y} = \frac{4}{0,08} = 50\ [-]\ . \tag{9.93}$$

Obdobně se štíhlost sloupu určí i pro vybočení kolmo k ose z (ve směru menší tuhosti):

$$\lambda_z = \frac{L_{cr}}{i_z} = \frac{4}{0,0187} \cong 213,90\ [-]\ . \tag{9.94}$$

2. **Výpočet kritického břemene:**

Výpočet (Eulerovy) kritické síly F_{cr} je založen na vztahu (9.74). Pro vybočení prutu kolmo k ose y (ve směru větší tuhosti) se pak kritické břemeno rovná:

$$\begin{aligned} F_{cr,y} &= \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I_y}{L_{cr}^2} = \pi^2 \cdot \frac{210000 \cdot 10^6 \cdot 21,4 \cdot 10^{-6}}{4^2} = \\ &= 2,772125 \cdot 10^6\ [\mathrm{N}] \cong 2772,13\ [\mathrm{kN}]\ . \end{aligned} \tag{9.95}$$

Obdobně se stanoví i (Eulerovo) kritické břemeno F_{cr} pro vybočení prutu kolmo k ose z (ve směru menší tuhosti):

$$F_{cr,z} = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I_z}{L_{cr}^2} = \pi^2 \cdot \frac{210000 \cdot 10^6 \cdot 1,17 \cdot 10^{-6}}{4^2} = \\ = 1,515601 \cdot 10^5 \text{ [N]} \cong 151,56 \text{ [kN]} . \tag{9.96}$$

Z vypočtených hodnot štíhlostí λ_y a λ_z, ale také ze získaných velikostí kritické síly $F_{cr,y}$ a $F_{cr,z}$, je patrné, že při namáhání vzpěrným tlakem rozhoduje u oboustranně kloubově uloženého tlačeného sloupu vybočení kolmo k ose z, tedy ve směru menší tuhosti průřezu IPN200.
Výsledná hodnota rozhodující bezrozměrné štíhlosti je $\lambda_z = 213,9$. Vypočtená velikost kritické síly ve směru menší tuhosti kolmo k ose z se pak rovná $F_{cr,z} = \\ = 151,56$ kN.

3. **Výpočet kritického napětí:**
Výpočet kritického napětí σ_{cr} vychází ze vztahů (9.80) nebo (9.82). Pro vybočení ve směru kolmo k ose z (směr menší tuhosti válcovaného průřezu IPN200, kde lze očekávat ztrátu stability vybočením) pak platí:

$$\sigma_{cr,z} = \frac{F_{cr,z}}{A} = \frac{1,515601 \cdot 10^5}{3,340 \cdot 10^{-3}} = \pi^2 \cdot \frac{E}{\lambda_z^2} = \pi^2 \cdot \frac{210000 \cdot 10^6}{213,90^2} = \\ = 4,529834 \cdot 10^7 \text{ [MPa]} \cong 45,30 \text{ [MPa]} . \tag{9.97}$$

▲

Poznámka 9.15. Při výpočtu kritického napětí $\sigma_{cr,z}$ podle vztahu (9.97) v příkladu 9.14 může dojít k nepatrným rozdílům ve výsledných hodnotách, což je dáno malou nepřesností hodnot průřezových charakteristik v tabulkách 11.2 a 11.3 přílohy 11, neboť např.:

$$i_z \approx \sqrt{\frac{I_z}{A}} . \tag{9.98}$$

Příklad 9.16. Určete maximální možnou hodnotu tlakové zatěžovací síly F, která může centricky namáhat ocelový sloup obdélníkového průřezu, jehož statické schéma je uvedeno na obrázku 9.11. Uvažujte možnost vzniku namáhání prostým i vzpěrným tlakem. Konkrétní hodnoty potřebných vstupních veličin jsou obsaženy v tabulce 9.2.

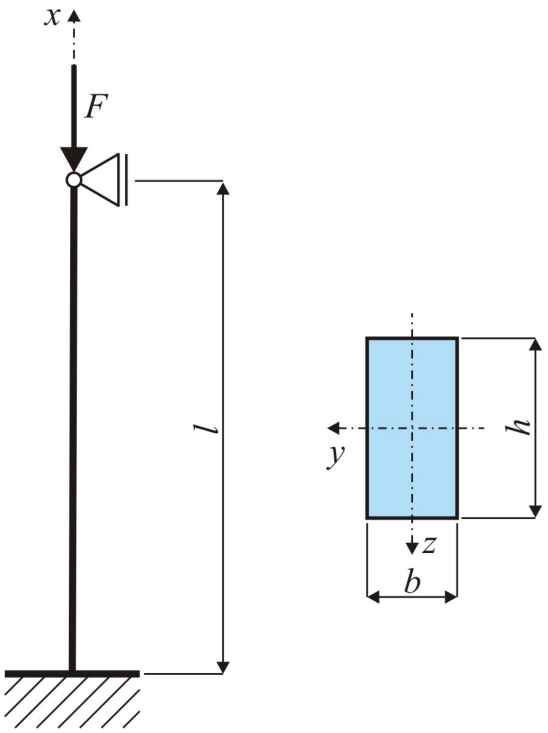
Řešení.

1. **Namáhání prostým tlakem:**
Normálová síla v tlačeném sloupu se rovná:

$$N = -F . \tag{9.99}$$

Výška sloupu l :	2 m
Šířka obdélníkového průřezu b :	25 mm
Výška obdélníkového průřezu h :	50 mm
Průřezová plocha A :	$0,025 \cdot 0,05 = 1,25 \cdot 10^{-3}$ m^2
Moment setrvačnosti I_y :	$\frac{1}{12} \cdot 0,025 \cdot 0,05^3 = 2,604 \cdot 10^{-7}$ m^4
Moment setrvačnosti I_z :	$\frac{1}{12} \cdot 0,025^3 \cdot 0,05 = 6,510 \cdot 10^{-8}$ m^4
Modul pružnosti v tahu a tlaku E :	210000 MPa
Pevnost oceli v prostém tahu a tlaku f_y :	235 MPa

Tab. 9.2 Vstupní údaje příkladu 9.16



Obr. 9.11 Statické schéma řešeného sloupu a tvar jeho průřezu

Její největší možná hodnota je dána únosností v prostém tlaku N_{Rd}, kterou lze stanovit s pomocí výrazu (9.86), takže největší možná hodnota zatěžovací síly F je z hlediska namáhání prostým tlakem rovna:

$$F_{\max,1} = -N_{Rd} = f_y \cdot A = 293750 \text{ [N]} = 293,75 \text{ [kN]} . \tag{9.100}$$

2. **Namáhání vzpěrným tlakem:**

   Při určování maximálního možného zatížení prutu namáhaného vzpěrným tlakem se vychází z podmínky (9.89), tedy:

$$F = |N_{Ed}| \leqq F_{cr} \ . \tag{9.101}$$

   Vzpěrná délka jednostranně kloubově uloženého sloupu je podle vztahů (9.75) a (9.78), případně podle obrázku 9.8 rovna:

$$L_{cr} = \beta \cdot l = 0,7 \cdot 2 = 1,4 \text{ [m]} \ . \tag{9.102}$$

   Kritické břemeno F_{cr} při vybočení tlačeného prutu kolmo k ose y (směr větší tuhosti) se podle vzorce (9.74) rovná:

$$\begin{aligned} F_{\max,2} = F_{cr} = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I_y}{L_{cr}^2} = \pi^2 \cdot \frac{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 2,604 \cdot 10^{-7}}{1,4^2} = \\ = 2,753796 \cdot 10^5 \text{ [N]} \cong 275,38 \text{ [kN]} \ . \end{aligned} \tag{9.103}$$

   Výpočet kritické síly F_{cr} při vybočení tlačeného prutu kolmo k ose z (směr menší tuhosti) se s pomocí vzorce (9.74) provede obdobně:

$$\begin{aligned} F_{\max,3} = F_{cr} = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I_z}{L_{cr}^2} = \pi^2 \cdot \frac{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 6,510 \cdot 10^{-8}}{1,4^2} = \\ = 6,884490 \cdot 10^4 \text{ [N]} \cong 68,84 \text{ [kN]} \ . \end{aligned} \tag{9.104}$$

3. **Výsledná hodnota zatížitelnosti tlačeného sloupu:**

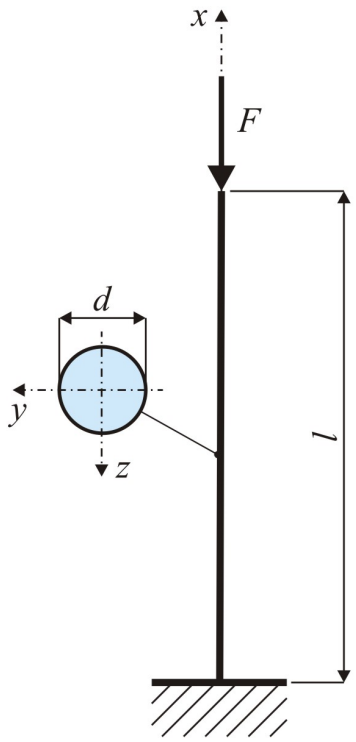
   Porovnáním výsledných hodnot maximální možné velikosti tlakové síly $F_{\max,1}$, $F_{\max,2}$ a $F_{\max,3}$ je s využitím poznámky 9.12 stanovena zatížitelnost řešeného sloupu na $F_{\max} = 68,84$ kN. Rozhodujícím faktorem se přitom ukázala možnost ztráty stability ve směru menší tuhosti průřezu, tedy kolmo k ose z

▲

Příklad 9.17. Navrhněte a posuďte tlačený ocelový sloup kruhového průřezu z hlediska prostého i vzpěrného tlaku. Výsledný návrh průřezu d zaokrouhlete na sudé milimetry. Ke zvýšení spolehlivosti navržené nosné konstrukce využijte koeficientu bezpečnosti k (viz poznámka 9.13). Statické schéma řešené konstrukce je uvedeno na obrázku 9.12. Konkrétní hodnoty potřebných vstupních veličin jsou obsaženy v tabulce 9.3.

Výška sloupu l:	3,6 m
Zatěžovací bodová síla $F = -N_{Ed}$:	160 kN
Modul pružnosti v tahu a tlaku E:	210000 MPa
Pevnost oceli v prostém tahu a tlaku f_{yd}:	235 MPa
Koeficient bezpečnosti k:	3

Tab. 9.3 Vstupní údaje příkladu 9.17



Obr. 9.12 Statické schéma řešeného sloupu a jeho průřez

Řešení.

1. **Návrh průřezu nosného prvku:**

   a) *Namáhání prostým tlakem:*

   Návrh kruhového průřezu řešené tlačené konstrukce na namáhání prostým tlakem vychází ze vztahu (9.87), pro průřez kruhového tvaru tedy:

$$A_{\min} = \frac{|N_{Ed}|}{f_{yd}} = \frac{F}{\frac{f_{yd}}{k}} = \frac{\pi \cdot d_{\min}^2}{4} \;\rightarrow\; d_{\min} = \sqrt{\frac{4 \cdot F \cdot k}{\pi \cdot f_{yd}}}\,. \tag{9.105}$$

Pro konkrétně zadané hodnoty vstupních veličin pak vychází:

$$d_{\min,1} = \sqrt{\frac{4 \cdot F \cdot k}{\pi \cdot f_{yd}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 160 \cdot 10^3 \cdot 3}{\pi \cdot 235 \cdot 10^6}} = \\ = 5,099666 \cdot 10^{-2} \text{ [m]} \cong 52 \text{ [mm]} . \tag{9.106}$$

Při návrhu prutového prvku namáhaného prostým tlakem je navržen kruhový průřez s průměrem $d = 52$ mm.

b) *Namáhání vzpěrným tlakem:*

Vzpěrná délka konzolového tlačeného prutu je podle vztahů (9.75) a (9.77), případně podle obrázku 9.8 rovna:

$$L_{cr} = \beta \cdot l = 2 \cdot 3,6 = 7,2 \text{ [m]} . \tag{9.107}$$

Návrh kruhového průřezu řešené tlačené konstrukce na namáhání vzpěrným tlakem spočívá nejprve v určení minimální možné hodnoty momentu setrvačnosti $I_{\min}$, která se určí s pomocí vztahu (9.91):

$$F \leqq \frac{F_{cr}}{k} = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{L_{cr}^2} \cdot \frac{1}{k} \;\rightarrow\; I_{\min} = \frac{k \cdot F \cdot L_{cr}^2}{\pi^2 \cdot E} . \tag{9.108}$$

Vzhledem ke skutečnosti, že moment setrvačnosti kruhového průřezu I je roven:

$$I = \frac{\pi \cdot d^4}{64} , \tag{9.109}$$

je možno vztah (9.108) dále upravit na vzorec pro určení minimálního možného průměru tlačeného prutového prvku $d_{\min,2}$:

$$I_{\min} = \frac{\pi \cdot d_{\min,2}^4}{64} = \frac{k \cdot F \cdot L_{cr}^2}{\pi^2 \cdot E} \;\rightarrow\; d_{\min,2} = \sqrt[4]{\frac{64 \cdot k \cdot F \cdot L_{cr}^2}{\pi^3 \cdot E}} . \tag{9.110}$$

Pro konkrétně zadané hodnoty vstupních veličin pak vychází:

$$d_{\min,2} = \sqrt[4]{\frac{64 \cdot k \cdot F \cdot L_{cr}^2}{\pi^3 \cdot E}} = \sqrt[4]{\frac{64 \cdot 3 \cdot 160 \cdot 10^3 \cdot 7,2^2}{\pi^3 \cdot 210000 \cdot 10^6}} = \\ = 1,250559 \cdot 10^{-1} \text{ [m]} \cong 126 \text{ [mm]} . \tag{9.111}$$

Při návrhu prutového prvku namáhaného vzpěrným tlakem je navržen kruhový průřez s průměrem $d = 126$ mm.

c) *Výsledný návrh:*

Výsledný návrh kruhového průřezu spočívá ve zvolení většího průřezu, tedy s průměrem $d = 126$ mm. Jedině tak lze docílit splnění obou kritérií spolehlivosti, která jsou definována pro namáhání prostým i vzpěrným tlakem.

Rozhodujícím faktorem pro návrh je namáhání vzpěrným tlakem (vyžaduje podstatně větší průřez).
U navrženého průřezu je průřezová plocha A rovna:

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 126^2}{4} \cong 12468,98\ [\mathrm{mm}^2] = 1,246898 \cdot 10^{-2}\ [\mathrm{m}^2]\ , \tag{9.112}$$

a moment setrvačnosti I:

$$I = \frac{\pi \cdot d^4}{64} = \frac{\pi \cdot 126^4}{64} \cong 12372346,64\ [\mathrm{mm}^4] = 1,237235 \cdot 10^{-5}\ [\mathrm{m}^4]\ . \tag{9.113}$$

2. **Posouzení průřezu nosného prvku:**

a) *Namáhání prostým tlakem:*

V rámci posudku spolehlivosti navrženého průřezu nosného prvku se určí nejprve únosnost v prostém tlaku N_{Rd}, vycházející ze vztahů (4.45) nebo (9.86):

$$\begin{aligned} |N_{Rd}| = \frac{f_{yd}}{k} \cdot A = \frac{235 \cdot 10^6}{3} \cdot 1,246898 \cdot 10^{-2} = \\ = 9,767369 \cdot 10^5\ [\mathrm{N}] \cong 976,74\ [\mathrm{kN}]\ . \end{aligned} \tag{9.114}$$

Posudek spolehlivosti pak lze pro prvek namáhaný prostým tlakem provést s využitím vztahů (9.83):

$$\frac{|N_{Ed}|}{|N_{Rd}|} = \frac{160\ [\mathrm{kN}]}{976,74\ [\mathrm{kN}]} \cong 0,1638 \leqq 1,0 \tag{9.115}$$

nebo (9.84):

$$|N_{Ed}| = 160\ [\mathrm{kN}] \leqq |N_{Rd}| = 976,74\ [\mathrm{kN}]\ . \tag{9.116}$$

Nerovnice v obou podmínkách spolehlivosti (9.115) i (9.116) jsou splněny (s k-násobně zvýšenou spolehlivostí).

b) *Namáhání vzpěrným tlakem:*

Při posudku spolehlivosti navrženého průřezu nosného prvku se určí s pomocí vztahu (9.74) a koeficientu bezpečnosti k únosnost ve vzpěrném tlaku, která vychází z velikosti (Eulerova) kritického břemene F_{cr}:

$$\begin{aligned} \frac{F_{cr}}{k} = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{L_{cr}^2} \cdot \frac{1}{k} = \pi^2 \cdot \frac{210000 \cdot 10^6 \cdot 1,237235 \cdot 10^{-5}}{7,2^2} \cdot \frac{1}{3} = \\ = 1,648864 \cdot 10^5\ [\mathrm{N}] \cong 164,89\ [\mathrm{kN}]\ . \end{aligned} \tag{9.117}$$

Posudek spolehlivosti pak lze pro prvek namáhaný vzpěrným tlakem provést s využitím vztahů (9.88):

$$\frac{|N_{Ed}|}{\frac{F_{cr}}{k}} = \frac{160\ [\mathrm{kN}]}{164,89\ [\mathrm{kN}]} \cong 0,9704 \leqq 1,0 \tag{9.118}$$

nebo (9.89):

$$|N_{Ed}| = 160 \text{ [kN]} \leqq \frac{F_{cr}}{k} = 164,89 \text{ [kN]} . \tag{9.119}$$

Nerovnice v obou podmínkách spolehlivosti (9.118) i (9.119) jsou splněny (s k-násobně zvýšenou spolehlivostí).

Kruhový průřez průměru $d = 126$ mm navržený s třikrát zvýšenou spolehlivostí vyhovuje z hlediska namáhání prostým i vzpěrným tlakem.

▲

9.4 Kritické napětí v pružnoplastickém oboru

Odvozené vztahy pro výpočet kritického břemene F_{cr} (např. vzorec (9.74)) a kritického napětí σ_{cr} (vzorce (9.80) a (9.82)) nabývají platnosti pouze v případě pružného chování materiálu, tzn. že platí Hookeův zákon, tedy přímá úměrnost mezi tlakovým napětím a poměrnou délkovou deformací.

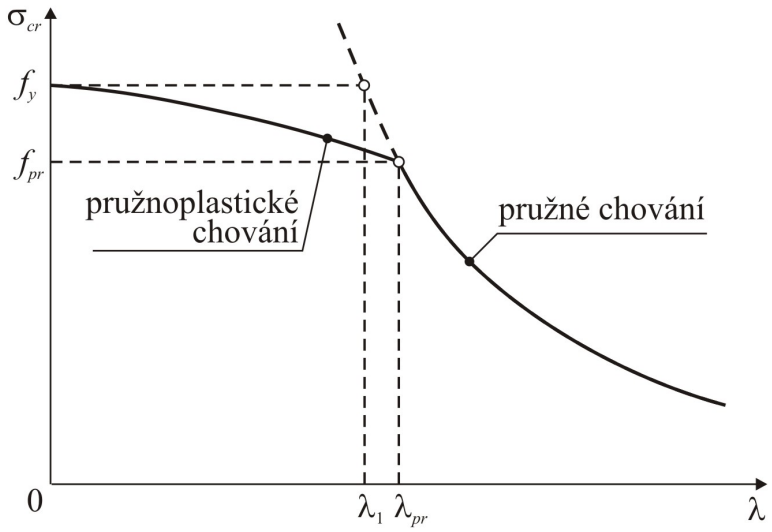
V případě, že kritické napětí σ_{cr} je mimo obor platnosti Hookeova zákona, řešení je nutno hledat v pružnoplastické oblasti působení tlačeného prutu (například u ocelových tlačených prutů v případech, kdy je normálové napětí v dostředném tlaku větší než napětí na mezi úměrnosti f_{pr} – viz pracovní diagram na obrázku 2.13).

Na základě tlakových zkoušek u štíhlých prutů byla odvozena řada empirických vztahů, které se snaží vyjádřit chování prutového prvku namáhaného vzpěrným tlakem v pružnoplastické oblasti (blíže viz např. vztah pro Engesser-Shanleyovo kritické napětí v [20]), což je schématicky naznačeno i na grafu obrázku 9.13.

Příklad 9.18. Určete štíhlost λ_{pr}, která při ztrátě stability tlačeného prutu tvoří rozhraní mezi vybočením v pružné a pružnoplastické oblasti chování materiálu (viz graf na obrázku 9.13). Konkrétní hodnoty potřebných vstupních veličin jsou obsaženy v tabulce 9.4.

Modul pružnosti v tahu a tlaku E :	210000 MPa
Napětí na mezi úměrnosti f_{pr} :	190 MPa

Tab. 9.4 Vstupní údaje příkladu 9.18



Obr. 9.13 Eulerova hyperbola a chování tlačeného prutu v pružnoplastickém oboru

Řešení. Pro výpočet požadované štíhlosti λ_{pr} se využije vztah (9.82) pro výpočet kritického napětí σ_{cr}, které se bude rovnat napětí na mezi úměrnosti f_{pr} (viz graf na obrázku 9.13):

$$\sigma_{cr} = \pi^2 \cdot \frac{E}{\lambda_{pr}^2} = f_{pr} \;\rightarrow\; \lambda_{pr} = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{f_{pr}}}\,. \tag{9.120}$$

Po dosazení konkrétních hodnot vychází:

$$\lambda_{pr} = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{f_{pr}}} = \pi \cdot \sqrt{\frac{210000}{190}} = 1,044438 \cdot 10^2 \cong 104,44\ [-]\,. \tag{9.121}$$

Pro ocelový tlačený prut platí pro štíhlost $\lambda_{pr} \geqq 104,44$ řešení s pružným chováním materiálu, pro štíhlost $\lambda_{pr} < 104,44$ je nutno uvažovat výpočet s pružnoplastickým chováním materiálu.

▲

Příklad 9.19. Určete štíhlost tlačeného prutu λ_1, při níž je kritické napětí σ_{cr} rovno napětí na mezi kluzu f_y (viz graf na obrázku 9.13). Konkrétní hodnoty potřebných vstupních veličin jsou obsaženy v tabulce 9.5.

Modul pružnosti v tahu a tlaku E :	210000 MPa
Napětí na mezi kluzu f_y :	235 MPa

Tab. 9.5 Vstupní údaje příkladu 9.19

Řešení. Postup určení požadované štíhlosti λ_1 je analogický výpočetnímu postupu z příkladu 9.18. Vychází rovněž ze vztahu (9.82) pro výpočet kritického napětí σ_{cr}, které se bude rovnat napětí na mezi kluzu f_y (viz graf na obrázku 9.13):

$$\sigma_{cr} = \pi^2 \cdot \frac{E}{\lambda_1^2} = f_y \;\rightarrow\; \lambda_1 = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{f_y}} \,. \tag{9.122}$$

Pro konkrétní hodnoty vstupních veličin vychází:

$$\lambda_1 = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{f_y}} = \pi \cdot \sqrt{\frac{210000}{235}} = 9,391297 \cdot 10^1 \cong 93,91 \;[-] \,. \tag{9.123}$$

Kritické napětí σ_{cr} je u ocelového tlačeného prutu rovno napětí na mezi kluzu f_y při štíhlosti $\lambda_1 \approx 93,91$. Tato hodnota je významná v procesu posuzování spolehlivosti ocelových prutů namáhaných vzpěrným tlakem podle současně platných normových přerdpisů – Eurokódů. ▲

9.5 Posouzení ocelových prvků na vznik vzpěru podle Eurokódů

Podle [4] se tlačený prut má posuzovat na vznik vzpěru podle podmínky:

$$\frac{N_{Ed}}{N_{b,Rd}} \leqq 1,0 \,, \tag{9.124}$$

kde N_{Ed} je návrhová hodnota tlakové síly a $N_{b,Rd}$ návrhová vzpěrná únosnost tlačeného prutu, která se určí ze vztahu:

$$N_{b,Rd} = \frac{\chi \cdot A \cdot f_y}{\gamma_{M1}} \,, \tag{9.125}$$

kde χ je **součinitel vzpěrnosti** pro příslušný způsob vybočení, jenž se stanoví na základě vztahu:

$$\chi = \frac{1}{\phi + \sqrt{\phi^2 - \overline{\lambda}^2}} \leqq 1,0 \,. \tag{9.126}$$

Bezrozměrný součinitel vzpěrnosti ($0 \leqq \chi \leqq 1$) vyjadřuje snížení únosnosti prutového nosného prvku v prostém tlaku vlivem účinku vzpěru. Hodnota součinitele vzpěrnosti $\chi = 1$ odpovídá namáhání prostým tlakem. Se vzrůstající štíhlostí tlačeného prutu se pak tato hodnota patřičným způsobem snižuje.

Součinitel ϕ ve vztahu (9.126) se vypočte:

$$\phi = 0,5 \cdot [1 + \alpha \cdot (\overline{\lambda} - 0,2) + \overline{\lambda}^2] \,. \tag{9.127}$$

Ve vztahu (9.127) figuruje tzv. součinitel imperfekce α, jehož hodnota je podle použité křivky vzpěrné pevnosti obsažena v tabulce 9.6.

Křivka vzpěrné pevnosti	a	b	c	d
Součinitel imperfekce α	0,21	0,34	0,49	0,76

Tab. 9.6 Součinitele imperfekce pro křivky vzpěrné pevnosti

Křivky vzpěrné pevnosti a, b, c a d závisí na typu průřezu, k nimž jsou přiřazeny v [4] v tabulce 6.2. Například pro válcované profily s tloušťkou pásnice $t_f \leqq 40$ mm a s poměrem své výšky k šířce větším než je hodnota 1,2 je pro vybočení kolmo k vodorovné ose y (směr větší tuhosti) přiřazena křivka vzpěrné pevnosti a, zatímco pro vybočení kolmo k svislé ose z (směr menší tuhosti) je přiřazena křivka vzpěrné pevnosti b.

Vztahy (9.126) a (9.126) obsahují rovněž tzv. poměrnou štíhlost $\overline{\lambda}$, která se pro případ rovinného vzpěru určí na základě vztahu:

$$\overline{\lambda} = \sqrt{\frac{A \cdot f_y}{N_{cr}}} = \frac{L_{cr}}{i} \cdot \frac{1}{\lambda_1} \,, \tag{9.128}$$

kde N_{cr} je pružná kritická síla pro příslušný způsob vybočení, L_{cr} je vzpěrná délka v uvažované rovině vybočení, i je poloměr setrvačnosti k příslušné ose a součinitel λ_1 je štíhlost, získaná:

$$\lambda_1 = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{f_y}} \,. \tag{9.129}$$

Příklad 9.20. Posuďte, zda oboustranně kloubově uložený ocelový sloup z příkladu 9.14 (průřez je tvořen válcovaným ocelovým profilem IPN200 z oceli pevnostní třídy S235, dílčí součinitel materiálu pro vzpěr $\gamma_{M1} = 1,0$), zatížený tlakovou silou $F = 120$ kN, vyhoví podle Eurokódu na namáhání vzpěrným tlakem. Po celé výšce sloupu není bráněno bočnímu vybočení.

Řešení. Bezrozměrná štíhlost s označením λ_1 již byla pro tlačený ocelový prvek z pevnostní třídy oceli S235 ($f_{yd} = 235$ MPa) určena v příkladu 9.19 výrazem (9.123). Její hodnota je tedy rovna $\lambda_1 = 93,91$ [−].

Poměrná štíhlost $\overline{\lambda}$ se vypočte podle vzorce (9.128):

$$\overline{\lambda} = \sqrt{\frac{A \cdot f_y}{N_{cr}}} = \frac{L_{cr}}{i} \cdot \frac{1}{\lambda_1} = \frac{4}{0,0187} \cdot \frac{1}{93,91} \cong 2,28\ [-]\ . \tag{9.130}$$

Součinitel ϕ ze vztahu (9.127) se pro rozhodující vybočení ve směru menší tuhosti válcovaného profilu IPN200 kolmo k ose z stanoví s hodnotou součinitele imperfekce $\alpha = 0,34$ (křivka vzpěrné pevnosti b):

$$\begin{aligned} \phi &= 0,5 \cdot [1 + \alpha \cdot (\overline{\lambda} - 0,2) + \overline{\lambda}^2] = \\ &= 0,5 \cdot [1 + 0,34 \cdot (2,28 - 0,2) + 2,28^2] \cong 3,45\ [-]\ . \end{aligned} \tag{9.131}$$

Součinitel vzpěrnosti χ se pak pro vybočení ve směru menší tuhosti válcovaného profilu IPN200 kolmo k ose z stanoví na základě vztahu (9.126):

$$\chi = \frac{1}{\phi + \sqrt{\phi^2 - \overline{\lambda}^2}} = \frac{1}{3,45 + \sqrt{3,45^2 - 2,28^2}} \cong 0,17\ . \tag{9.132}$$

Návrhová vzpěrná únosnost tlačeného prutu $N_{b,Rd}$ se určí ze vztahu (9.125):

$$\begin{aligned} N_{b,Rd} &= \frac{\chi \cdot A \cdot f_y}{\gamma_{M1}} = \frac{0,17 \cdot 3,340 \cdot 10^{-3} \cdot 235 \cdot 10^6}{1,0} = \\ &= 1,300676 \cdot 10^5\ [\mathrm{N}] \cong 130,07\ [\mathrm{kN}]\ . \end{aligned} \tag{9.133}$$

Kritérium spolehlivosti, kterým se posuzuje tlačený prutový prvek na vznik vzpěru, je dáno nerovnicí výrazu (9.124):

$$\frac{N_{Ed}}{N_{b,Rd}} = \frac{120\ [\mathrm{kN}]}{130,07\ [\mathrm{kN}]} \cong 0,92 \leqq 1,0\ . \tag{9.134}$$

Nerovnice podmínky spolehlivosti (9.134) je splněna. Posuzovaný nosný prvek vyhoví na vzpěr podle Eurokódu [4].

▲

Poznámka 9.21. Porovnáním návrhové vzpěrné únosnosti tlačeného prutu $N_{b,Rd}$, která byla získána při výpočtu příkladu 9.20 ($N_{b,Rd} = 130,07$ kN), s velikostí (Eulerova) kritického břemene $F_{cr,z}$ z příkladu 9.14 ($F_{cr,z} = 151,56$ kN) lze vypozorovat rozdíl v obou hodnotách vzpěrné pevnosti. Výpočetní postup obsažený v normových předpisech je konzervativnější (přísnější kritérium spolehlivosti, menší odolnost konstrukce) a nevychází ze stabilitního pojetí vzpěru ideálního přímého tlačeného prutu (Eulerovy hyperboly), nýbrž z pojetí pevnostního (z křivek vzpěrné pevnosti), zohledňující imperfekce (nepřesnosti např. vlivem zakřivení a vychýlení prutu, příp. mimostředného působení tlakových sil) skutečného prutu.

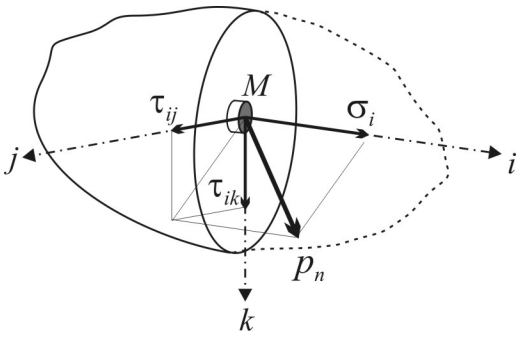
Kapitola 10

Úvod do rovinné napjatosti

10.1 Rovinná napjatost bodu tělesa

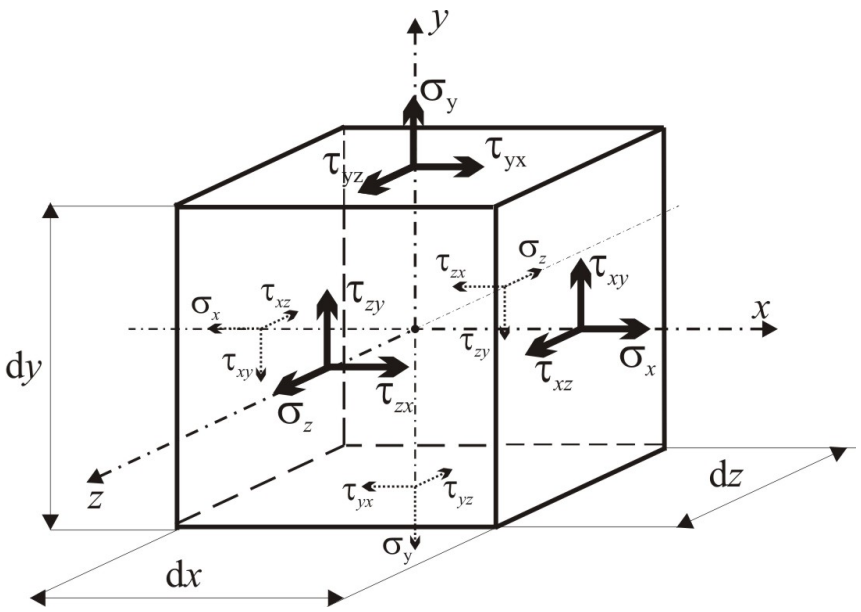
Doposud jsme se zabývali napěťovými stavy **v průřezu prutu** (normála je rovnoběžná s osou prutu), které vznikly v důsledku působení vnitřních sil. Řešili jsme účinek každé síly samostatně. Již víme, jaké napětí vyvodí každá síla a umíme určit, jak je rozložena velikost tohoto napětí po výšce průřezu.

Vektor napětí v libovolném bodě tělesa p_n je vždy vázaný na orientovanou plošku, která je určená normálou, kterou na obr. 10.1 představuje osa i. V libovolném lokálním souřadném systému i, j, k má vektor napětí p_n složky normálové (tady σ_i) a tangenciální (tečné, smykové) τ_{ij} a τ_{ik}. Abychom mohli určit napětí v daném bodě (např. M) na plošce, jejíž normála není rovnoběžná s osou prutu, musíme znát složky napětí na třech vzájemně kolmých ploškách procházejících tím samým bodem. (V rovinné úloze stačí znát napětí na dvou vzájemně kolmých ploškách.)

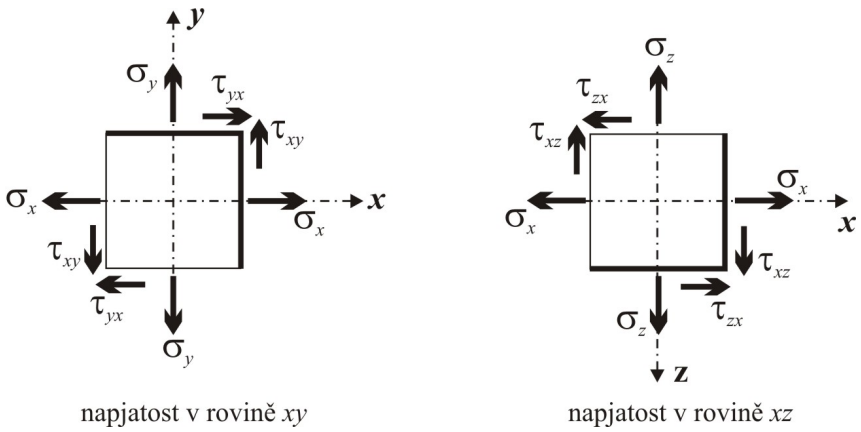


Obr. 10.1 Vektor napětí

Tři složky napětí na třech vzájemně kolmých ploškách určují **stav napjatosti bodu (elementu)** tělesa (kap. 1.3.4). Napjatost bodu tělesa může být **přímková, rovinná nebo prostorová**.



Obr. 10.2 Prostorová napjatost elementární krychle



Obr. 10.3 Kladná znaménková konvence pro napětí v rovinách *xy* a *xz*

Poznámka 10.1. Znaménková konvence pro napětí: Označme *kladnou* plochu elementu tu, jejíž normála působí v *kladném* směru příslušné osy. Na obr. 10.2 v prostorové úloze to jsou tři plošky v popředí nebo na obr. 10.3 v rovinné úloze dvě vzájemně kolmé tučně zvýrazněné v obou rovinách *xy* (vlevo) a *xz* (vpravo). *Kladné směry všech napětí* jsou na *kladné plošce* orientovány v *kladném směru osy*, s kterou jsou tato napětí rovnoběžná. Dle třetího Newtonova zákona akce a reakce působí na záporných ploškách stejně veliká, ale opačně orientovaná napětí. *Záporná napětí* působí obráceně, než vidíme na obou obrázcích.

Z doposud probrané látky již víme, že *kladné normálové* napětí vzniká v tažených vláknech, tudíž způsobí v daném bodě tah a směřuje vždy *ven* z elementu.

Smyková napětí vznikají v důsledku působení posouvajících sil nebo vnitřních kroutících (torzních) momentů. Pro smyková napětí musí platit stejná znaménková konvence jako pro V síly nebo *vnitřní kroutící momenty*. U kroutícího momentu je výhodné využít pro znaménkovou konvenci pravidlo pravé ruky (viz kapitola 5 nebo 10.6, příklad 10.15).

Poznámka 10.2. Indexy smykového napětí souvisí s orientací plošky a směrem působení tohoto napětí. **První index** určuje normálu plošky, na které napětí působí, **druhý index** určuje směr napětí.

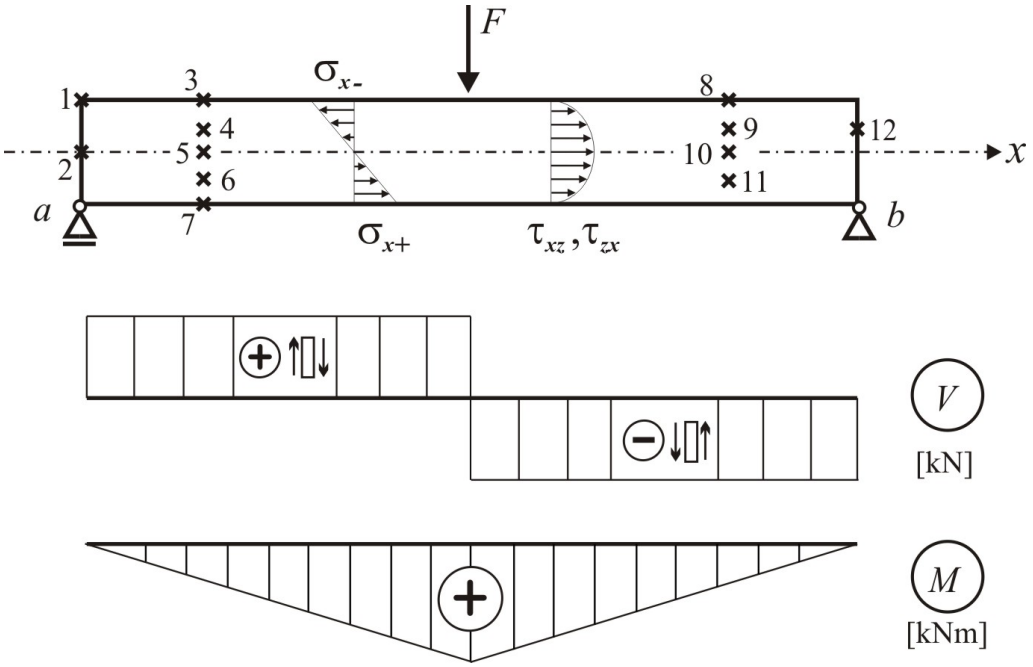
Nejprve se budeme zabývat **rovinnou napjatostí**, kdy v bodě tělesa existuje právě jedna orientovaná ploška procházející uvažovaným bodem, na kterou nepůsobí žádné napětí a na všech ostatních rovinách leží výsledná napětí v jedné rovině. Budeme tedy řešit stav napjatosti bodu, který je zatížen pouze napětími, která jsou rovnoběžná buďto s rovinou xy (σ_x, σ_y a $\tau_{xy} = \tau_{yx}$) $\Rightarrow$ rovinná napjatost v rovině xy nebo pouze napětími rovnoběžnými s rovinou xz (σ_x, σ_z a $\tau_{xz} = \tau_{zx}$) $\Rightarrow$ rovinná napjatost v rovině xz. Rozdíl vidíme na obr. 10.3.

Příklad 10.3. Nosník obdélníkového průřezu je zatížen svislou silou v polovině rozpětí. Jsou na něm označeny body (elementy) 1 až 12 (obr. 10.4). Pro každý bod určete, která napětí na něj působí, jaké mají znaménko a orientaci.

Řešení. Z předchozí látky víme, že napětí vznikají v důsledku působení vnitřních sil, proto provedeme statický rozbor daného nosníku (obr. 10.4).
Normálové napětí vzniká obecně v důsledku působení normálových sil a ohybových momentů. *Pokud působí obě napětí současně, jejich účinky se sčítají.* Na nosníku v tomto příkladu normálové síly nevznikají, normálové napětí je pouze od ohybového momentu a působí ve směru osy x (σ_x). Tažená vlákna ve kterých je $\sigma_x = +$, jsou v dolní polovině průřezu (kladný M). Dle kap. 6.2.1 je σ_z v běžně zatíženém ohýbaném nosníku nulové $\sigma_z = 0$.
Smykové napětí τ_{xz} zde vzniká od účinků posouvající síly. Na svislých ploškách je jeho směr shodný se směrem V sil. Na vodorovných ploškách pak dle věty o vzájemnosti smykových napětí $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ (1.32).

Napětí, která vznikají v jednotlivých bodech:

1. bod nad levou podporou na horní hraně nosníku. Nad podporou je kladná posouvající síla a nulový ohybový moment. V tomto celém průřezu vzniká tedy kladné smykové napětí. Normálové je nulové. Jelikož průběh smykového napětí po výšce průřezu je parabolický a v horních vláknech má nulovou hodnotu, zůstává bod 1 nezatížený žádným napětím. □



Obr. 10.4 Schéma nosníku

2. bod leží nad levou podporou v ose nosníku. V ose nosníku obdélníkového průřezu ma smykové napětí maximální hodnotu, bod 2 je zatížen kladným smykovým napětím τ_{xz}. Normálové napětí $\sigma_x = 0$ v důsledku nulového ohybového momentu. $\uparrow \square \downarrow$
3. bod v levé polovině nosníku stejně jako body 4 až 7. V tomto průřezu jsou kladné V síly i M ($V+$, $M+$). Tažená vlákna jsou spodní vlákna (v dolní polovině průřezu - pod osou prutu). Bod 3 leží na horní hraně daného průřezu, tudíž má nulové smykové napětí (stejně jako bod 1). Normálové napětí σ_x je na horní hraně tohoto průřezu extrémní - záporné. $\rightarrow \square \leftarrow$
4. bod průřezu v levé polovině nosníku stejně jako body 3 až 7 ($V+$, $M+$). Je umístěn v horní polovině daného průřezu. Normálové napětí je σ_x je záporné. Smykové napětí $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ má kladný směr stejně jako V síla. $\rightarrow\uparrow \square \downarrow\leftarrow$
5. bod průřezu v levé polovině nosníku stejně jako body 3 až 7 ($V+$, $M+$). Je umístěn v ose daného průřezu. Normálové napětí $\sigma_x = 0$. Smykové napětí $\tau_{xz} = = \tau_{zx}$ má kladnou hodnotu (v tomto případě extrémní) i směr (stejně jako V síla). $\uparrow \square \downarrow$
6. bod průřezu leží v levé polovině nosníku stejně jako body 3 až 7 ($V+$, $M+$). Je umístěn v dolní polovině daného průřezu. Normálové napětí je σ_x je kladné. Smykové napětí $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ má kladný směr stejně jako V síla. $\leftarrow\uparrow \square \downarrow\rightarrow$
7. bod průřezu v levé polovině nosníku stejně jako body 3 až 6 ($V+$, $M+$). Je umístěn na dolní hraně daného průřezu. Smykové napětí τ_{xz} je nulové (stejně

jako bod 3). Normálové napětí σ_x je kladné (z pohledu tohoto průřezu extrémní). $\leftarrow \square \rightarrow$

8. bod průřezu v pravé polovině nosníku stejně jako body 9 až 11. V tomto průřezu jsou záporné V síly a kladné M (V-, M+). Smyková napětí v tomto průřezu jsou záporná. Tažená vlákna jsou spodní vlákna. Bod 8 leží na horní hraně, tudíž má nulové smykové napětí (stejně jako bod 3). Normálové napětí σ_x je záporné (z pohledu tohoto průřezu extrémně). $\rightarrow \square \leftarrow$
9. bod průřezu v pravé polovině nosníku stejně jako body 8 až 11 (V-, M+). Je umístěn v horní polovině průřezu - normálové napětí je σ_x je záporné. Smykové napětí $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ má záporný směr stejně jako V síla. $\rightarrow\downarrow \square \uparrow\leftarrow$
10. bod v pravé polovině nosníku stejně jako body 8 až 11 (V-, M+). Je umístěn v ose daného průřezu - normálové napětí $\sigma_x = 0$. Smykové napětí $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ má zápornou hodnotu (z pohledu tohoto průřezu extrémní) i směr stejně jako V síla. $\downarrow \square \uparrow$
11. bod průřezu v pravé polovině nosníku stejně jako body 8 až 11 (V-, M+). Je umístěn v dolní polovině daného průřezu - normálové napětí je σ_x je kladné. Smykové napětí má záporný směr stejně jako V síla. $\leftarrow\downarrow \square \uparrow\rightarrow$
12. bod leží nad pravou podporou v horní polovině průřezu. Nad podporou je záporná posouvající síla a nulový ohybový moment. V tomto průřezu vzniká pouze záporné smykové napětí, $\sigma_x = 0$. $\downarrow \square \uparrow$

Poznámka 10.4. Ve všech bodech nosníku působí smyková napětí také na vodorovných ploškách elementu. Tato nejsou v symbolickém značení na konci každého bodu zakreslena. Jejich velikost i znaménko jsou shodné jako v zakreslených svislých směrech ("špička směřuje ke špičce").

▲

Příklad 10.5. Nosník obdélníkového průřezu 50×100 mm je zatížen dle obr. 10.5. Určete rovinnou napjatost bodu v horní čtvrtině průřezu v místě vetknutí.

Řešení. Na základě statického rozboru, který necháváme na čtenáři, vychází v místě vetknutí tyto hodnoty: $N = -10$ kN , $V = -12,5$ kN a $M = -5$ kN.
Další výpočetní části jsou následující:

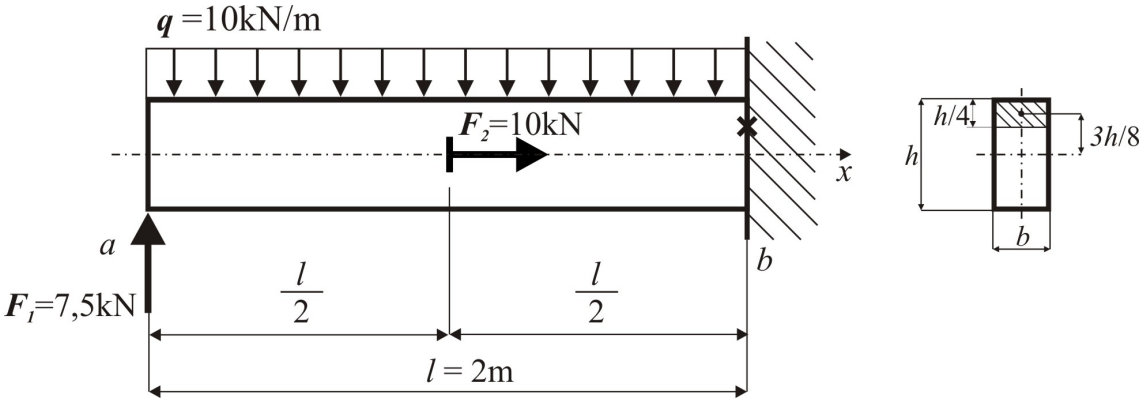
1. **Výpočet průřezových charakteristik:**

   Plocha průřezu:

   $A = b \cdot h = 50 \cdot 100 = 5 \cdot 10^3 \ [\text{mm}^2] \ = 5 \cdot 10^{-3} \ [\text{m}^2]$.

   Moment setrvačnosti:

   $I_y = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3 = \frac{1}{12} \cdot 50 \cdot 100^3 = 4,167 \cdot 10^6 \ \ [\text{mm}^4] \ = 4,167 \cdot 10^{-6} \ [\text{m}^4]$.



Obr. 10.5 Schéma nosníku

Statický moment horní čtvrtiny průřezu dle (6.11):
$S_{y(h/4)} = \frac{1}{4} \cdot b \cdot h \cdot \frac{3}{8} \cdot h = \frac{3}{32} \cdot b \cdot h^2 = 46,88 \cdot 10^3 \text{ [mm}^3\text{]} = 46,88 \cdot 10^{-6} \text{ [m}^3\text{]}$.

2. **Výpočet napětí:**

- Normálové napětí.

  a) *Normálové napětí od normálové síly* (po celé výšce průřezu konstantní):

  $\sigma_x^N = \frac{N}{A} = \frac{-10 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-3}} = -2 \text{ [MPa]}$.

  b) *Normálové napětí od ohybového momentu* (dle kap. 6.2 lineární průběh po výšce průřezu): Ve vetknutí je záporný ohybový moment, tažená jsou horní vlákna. V horní čtvrtině je kladné napětí a dle (6.17) bude mít hodnotu:

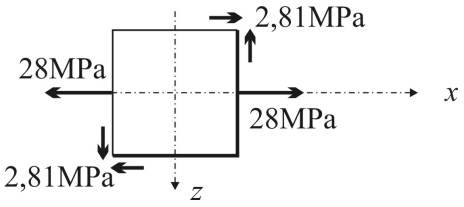
  $\sigma_x^M = \frac{|M|}{I_y} \cdot \frac{h}{4} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{4{,}167 \cdot 10^{-6}} \cdot 0,025 = 30 \text{ [MPa]}$.

  c) *Výsledné napětí* σ_x v uvažovaném bodě:Přestože obě normálová napětí vznikají od různých vnitřních sil, jsou to shodné veličiny v jednotném směru osy x, tudíž:
  $\sigma_x = \sigma_x^N + \sigma_x^M = -2 + 30 = 28 \text{ [MPa]}$.

- Smykové napětí
  Smykové napětí od posouvající síly (parabolický průběh): Ve vetknutí je záporná posouvající síla - v celém průřezu je záporné smykové napětí. V horní čtvrtině průřezu bude mít hodnotu:

$$\tau_{xz} = \frac{V \cdot S_{y(h/4)}}{I_y \cdot b} = \frac{(-12{,}5 \cdot 10^{-3}) \cdot 46{,}88 \cdot 10^{-6}}{4{,}167 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}05} = -2{,}81 \text{ [MPa]} .$$

3. **Stav napjatosti bodu** v horní čtvrtině průřezu v místě vetknutí je zakreslen na obrázku 10.6.



Obr. 10.6 Stav napjatosti bodu ve vetknutí v horní čtvrtině průřezu

▲

10.2 Napětí v šikmém řezu při rovinné napjatosti

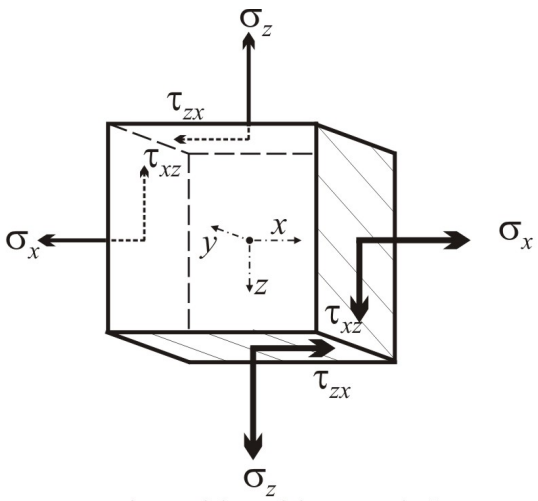
Pomocí složek napětí působících na bod ve vzájemně ortogonálních směrech je možné určit vektor napětí působící na libovolně orientované plošce, jejíž **normála** svírá **s osou x** úhel α. Úhel α je orientovaný úhel a platí pro něj **znaménková konvence:** Kladný směr úhlu α směřuje od kladné osy x směrem ke kladné ose, která je k x kolmá. V rovině xz je tedy kladný úhel α orientovaný od osy x **ve směru hodinových ručiček**, v rovině xy potom proti směru hodinových ručiček.

Navážeme na předchozí kapitoly a provedeme odvození vztahů pro rovinnou napjatost v rovině xz. Z devíti složek napětí znázorněných na obr. 10.2 odpadnou všechny složky kolmé k rovině xz. Vzhledem k platnosti vzájemnosti smykových napětí (kap. 1.3.4) charakterizují rovinnou napjatost tři nezávislé složky σ_x, σ_z a $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ (viz obr. 10.3 vpravo). Pro případnou aplikaci v jiné rovině s opačnou orientací os (např. v rovině xy) získáme potřebné vztahy jednoduchou úpravou značení a znamének a odkazujeme tímto čtenáře na [20], kapitola 9.

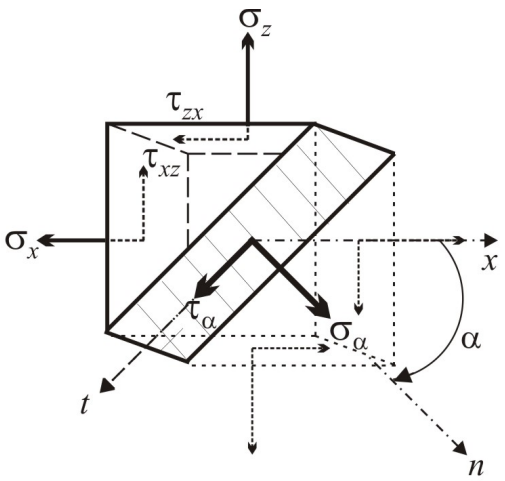
Ze Stavební statiky víme: pokud je těleso v rovnováze, musí být v rovnováze každý jeho bod (element). Na obr. 10.7 vlevo nahoře vidíme stav rovinné napjatosti krychle, jejíž stěny jsou vzájemně kolmé. Kladné plošky jsou vyšrafované. Všechna napětí působící na element musí být v rovnováze a musí být splněny podmínky rovnováhy nejen pro krychli, ale také pro element s libovolně orientovanými plochami.

Uvažujme nyní řez rovinou, jejíž **normála** svírá s osou x úhel α (tato rovina je kolmá k rovině napjatosti xz). Normálovou a smykovou složku napětí v tomto řezu označíme σ_α a τ_α (obr. 10.7 vpravo nahoře). Jejich velikost odvodíme z podmínek rovnováhy elementárního trojbokého hranolu. Využijeme pouze silové podmínky

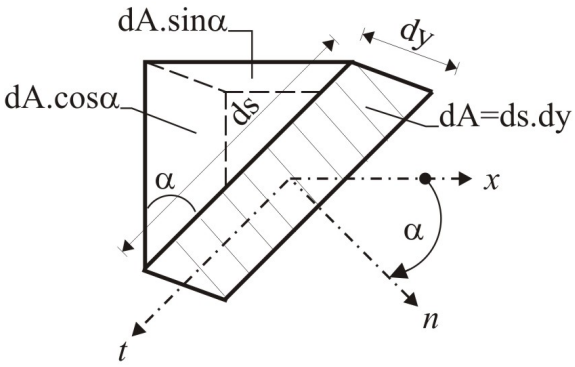
rovnováhy ve směrech normály a tečny k šikmému řezu. Momentová podmínka není potřeba - jen by potvrdila platnost věty o vzájemnosti smykových napětí $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, neboť k jejímu odvození byla použita. Na obr. 10.7 vlevo dole vidíme elementární řez se šikmou plochou dA, vpravo dole jsou pak znázorněny výsledné elementární síly působící na plochy elementu, které získáme jako součin příslušné složky napětí a plochy.



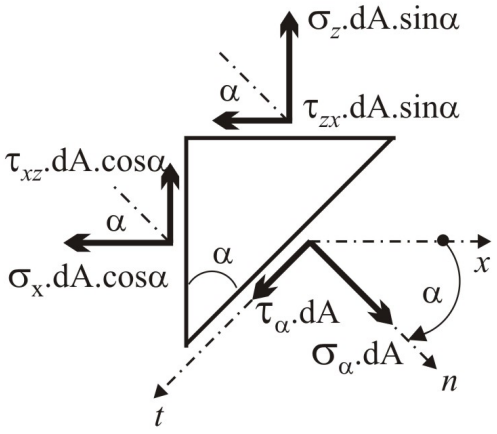
stav napjatosti krychle v rovině *xz*



složky napětí v šikmém řezu



elementární plocha v šikmém řezu



elementární síly působící na plochy elementu

Obr. 10.7 Napětí v šikmém řezu

Silové podmínky rovnováhy elementu se šikmým řezem:

Podmínka rovnováhy ve směru normály šikmého řezu:
$\sum F_{i,n} = 0$:
$\sigma_\alpha \cdot \mathrm{d}A - \sigma_x \cdot \mathrm{d}A \cdot \cos^2\alpha - \sigma_z \cdot \mathrm{d}A \cdot \sin^2\alpha - 2\tau_{xz} \cdot dA \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = 0.$

Podmínka rovnováhy ve směru tečny šikmého řezu:
$\sum F_{i,t} = 0$:
$\tau_\alpha \cdot \mathrm{d}A + \sigma_x \cdot \mathrm{d}A \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha - \sigma_z \cdot \mathrm{d}A \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha - \tau_{xz} \cdot \mathrm{d}A \cdot \cos^2\alpha + \tau_{zx} \cdot \mathrm{d}A \cdot \sin^2\alpha = 0.$

Po úpravě nabudou rovnice tvar:

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cdot \cos^2\alpha + \sigma_z \cdot \sin^2\alpha + \tau_{xz} \cdot \sin 2\alpha \ [\mathrm{MPa}] \ , \tag{10.1}$$

$$\tau_\alpha = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z) \cdot \sin 2\alpha + \tau_{xz} \cdot \cos 2\alpha \ [\mathrm{MPa}] \ . \tag{10.2}$$

Těmito vztahy jsou jednoznačně určeny **složky napětí v šikmém řezu** při rovinné napjatosti. V základních rovinách (v našem případě v rovině xz), tj. při $\alpha = 0°$ a $\alpha = 90°$ se ztotožní s výchozími hodnotami σ_x, σ_z a τ_{xz}. Rovnice (10.1) a (10.2) potvrzují, že danými třemi nezávislými složkami napětí σ_x, σ_z a τ_{xz} je stav rovinné napjatosti jednoznačně definován. Odvození napětí v šikmém řezu je v plné míře využíván při řešení rovinné napjatosti pootočeného elementu, které si vysvětlíme v následujících dvou příkladech.

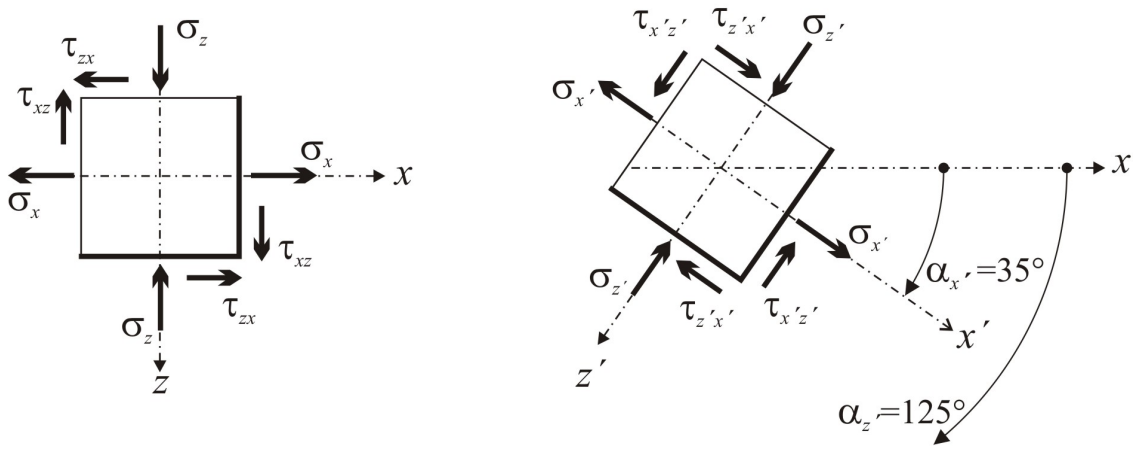
Poznámka 10.6. Úhel α je úhel, který svírá ***normála*** plochy **s osou** $\boldsymbol{x}$.

Příklad 10.7. Na elementární krychli působí složky napětí:
$\sigma_x = 100$ MPa, $\sigma_z = -50$ MPa, $\tau_{xz} = 25$ MPa.
Určete stav napjatosti krychle, bude-li oproti původní souřadné soustavy xz pootočena o úhel $\alpha = 35°$.

Řešení. **Schéma stavu rovinné napjatosti** zadaného elementu je na obr.10.8 vlevo. Normálové napětí σ_z je záporné, proto působí směrem *do elementu*.

1. **Početní řešení:**
   Budeme řešit napětí na 2 vzájemně kolmých ploškách. Jedna má normálu ve směru osy x', která svírá s osou x kladný úhel $\alpha_{x'} = 35°$. Normála druhé je ve směru osy z', která svírá s osou x úhel $\alpha_{z'} = (35 \pm 90)°$. $\alpha_{z'} = 125°$ nebo také $\alpha_{z'} = -55°$.

   a) *Normálová napětí* získáme dosazením daných hodnot do vztahů (10.1):
   $\sigma_{x'} = \sigma_x \cdot \cos^2\alpha_{x'} + \sigma_z \cdot \sin^2\alpha_{x'} + \tau_{xz} \cdot \sin 2\alpha_{x'}$



Obr. 10.8 Napjatost elementární krychle v pootočené lokální souřadné soustavě

$$\sigma_{x'} = 100 \cdot \cos^2 35° + (-50) \cdot \sin^2 35° + 25 \cdot \sin(2 \cdot 35°) = 74,14 \text{ [MPa]} ,$$
$$\sigma_{z'} = \sigma_x \cdot \cos^2 \alpha_{z'} + \sigma_z \cdot \sin^2 \alpha_{z'} + \tau_{xz} \cdot \sin 2\alpha_{z'}$$
$$\sigma_{z'} = 100 \cdot \cos^2 125° + (-50) \cdot \sin^2 125° + 25 \cdot \sin(2 \cdot 125°) = -24,14 \text{ [MPa]} .$$

Necháváme na čtenáři kontrolu, že stejný výsledek pro $\sigma_{z'}$ získáme dosazením $\alpha_{z'} = -55°$

b) *Smyková napětí* získáme dosazením daných hodnot do vztahů (10.2):
$\tau_{x'z'} = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z) \cdot \sin 2\alpha_{x'} + \tau_{xz} \cdot \cos 2\alpha_{x'}$
$\tau_{x'z'} = -\frac{1}{2}(100 - (-50)) \cdot \sin 2 \cdot 35° + \tau_{xz} \cdot \cos 2 \cdot 35° = -61,91$ [MPa] .
Necháváme na čtenáři kontrolu, platnosti věty o vzájemnosti smykových napětí $\tau_{x'z'} = \tau_{z'x'}$ s tím,že získá stejný výsledek dosazením do předešlého vztahu úhel $\alpha_{z'} = -55°$

c) *Výsledné hodnoty* tedy jsou:
$\sigma_{x'} = 74,14$ MPa, $\sigma_{z'} = -24,14$ MPa, $\tau_{x'z'} = \tau_{z'x'} = -61,91$ MPa.

2. **Schéma rovinné napjatosti** pootočeného elementu:
Stav napjatosti pootočené krychle je znázorněn na obr. 10.8 vpravo. Krychle je pootočena o kladných 35° v rovině xz, tudíž ve směru hodinových ručiček. Normálové napětí $\sigma_{z'}$ je záporné, proto působí směrem *do elementu*. Smykové napětí $\tau_{x'z'}$ je záporné, tudíž na kladných ploškách působí v záporném směru.

▲

Z výsledků příkladu 10.7 můžeme potvrdit vztah:

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_z &= \sigma_{x'} + \sigma_{z'} \\ 100 + (-50) &= 74,14 + (-24,14) = 50 \text{ [MPa]} . \end{aligned} \tag{10.3}$$

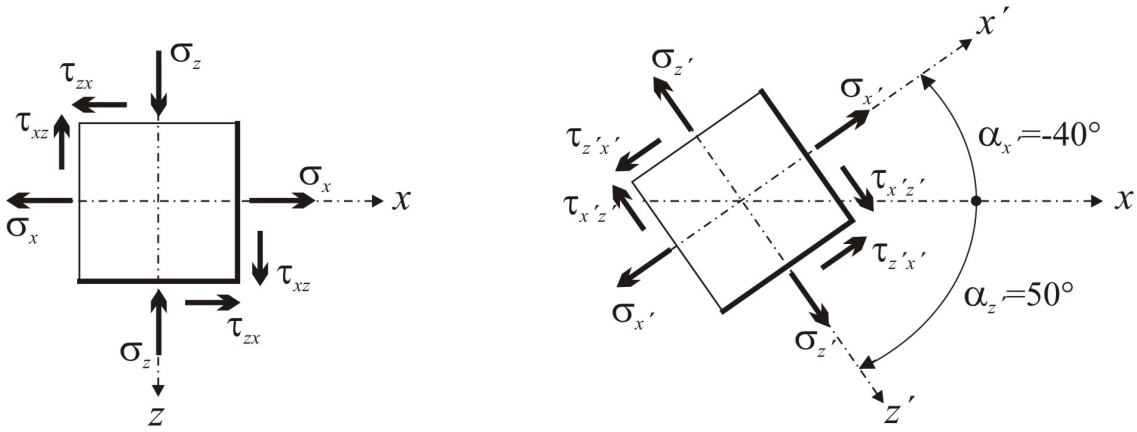
Definice 10.8. Věta o invariantnosti součtu normálových napětí:
Součet normálovch napětí na dvou libovolných vzájemně kolmých ploškách elementu tělesa je konstantní.

Matematicky lze tuto větu dokázat rovnicí (10.1), kdy spočítáme σ_α jak pro libovolný úhel α tak také pro úhel od něj větší o 90°. Oba výsledky sečteme a součet bude shodný se součtem $\sigma_x + \sigma_z$.

Dovolujeme si tímto čtenáři připomenout analogické řešení momentů setrvačnosti k pootočenm osám, které jsme probírali v předmětu Stavební statika.

Příklad 10.9. Určete stav napjatosti elementární krychle, která je zatížena stejným napětím jako v příkladu 10.7 ($\sigma_x = 100$ MPa, $\sigma_z = -50$ MPa, $\tau_{xz} = 25$ MPa), bude-li oproti původní souřadné soustavy xz pootočena o úhel $\alpha = -40°$. Na základě výsledků dokažte platnost věty o invariantnosti součtu normálových napětí.

Řešení. Schéma rovinné napjatosti zadaného elementu je shodné s příkladem 10.7 viz 10.9 vlevo.



Obr. 10.9 Napjatost elementární krychle v pootočené lokální souřadné soustavě

1. Početní řešení:
   Postup řešení je shodný s řešením příkladu 10.7 s tím rozdílem, že:
   $\alpha_{x'} = -40°$ a $\alpha_{z'} = (-40 \pm 90)°$.
   ($\alpha_{z'} = 50°$ nebo také $\alpha_{z'} = -130°$.)

2. Výsledné hodnoty:
   $\sigma_{x'} = 13,404$ MPa, $\sigma_{z'} = 36,596$ MPa, $\tau_{x'z'} = \tau_{z'x'} = 78,2$ MPa.

3. Schéma stavu rovinné napjatosti pootočeného elementu:
   Stav napjatosti pootočené krychle je znázorněn na obr. 10.9 vpravo. Krychle je pootočena o záporných 40° v rovině xz, tudíž proti směru hodinových ručiček. Všechna napětí jsou kladná, proto působí ve směru shodném s kladnou znaménkovou konvencí.

4. Důkaz platnosti věty o invariantnosti součtu normálových napětí:
   $\sigma_x + \sigma_z = \sigma_{x'} + \sigma_{z'}$
   $150 + (-50) = 13,404 + 36,596 = 50$ [MPa] .

▲

10.3 Výpočet hlavních napětí při rovinnné napjatosti, jejich směry

Je-li známa rovinná napjatost elementu tělesa v ortogonálním souřadném systému s dvojici os x,z, je možno určit rovinnou napjatost pro jinou dvojici ortogonálních os x', z', pootočenou od původních o úhel α. Změnou úhlu α, se mění hodnoty napětí působících na ploškách elementu. Existuje úhel pootočení os, při kterém nabývá **normálové napětí** extrémních hodnot. Na jedné plošce dosahuje extrémního maxima, na druhé (ortogonální) extrémního minima. Extrémní **normálová** napětí působí současně na navzájem kolmých ploškách, nazýváme je **hlavní napětí** a plošky, na kterých působí **plochy hlavních napětí**. Na těchto plochách jsou smyková napětí nulová, což lze dokázat při grafickém řešení (viz příklad 10.12) nebo dosazením konkrétních hodnot při početním řešení (dosazením úhlů $\alpha_{1,2}$ z rovnice (10.6) do (10.2)).

Opět si tímto dovolujeme čtenáři připomenout analogické řešení **hlavních** momentů setrvačnosti, které jsme probírali v předmětu Stavební statika.

Podmínkou extrému je derivace funkce normálového napětí σ_α z (10.1) dle α:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\sigma_x}{\mathrm{d}\alpha} = 0 : \sigma_x \cdot 2\cos\alpha(-\sin\alpha) + \sigma_z \cdot 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha + \tau_{xz} \cdot 2\cos 2\alpha &= 0 \ \textit{neboli} : \\ -(\sigma_x - \sigma_z) \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \tau_{xz} \cdot 2\cos 2\alpha &= 0 \qquad (10.4)\end{aligned}$$

Z rovnice 10.4 získáme

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xz}}{\sigma_x - \sigma_z} , \qquad (10.5)$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\tau_{xz}}{\sigma_x - \sigma_z} \ [°\text{deg}] . \qquad (10.6)$$

Řešením rovnice (10.6) získáme dva vzájemně kolmé směry α_1 a $\alpha_2 = \alpha_1 \pm 90°$. Jedná se o úhly, které udávají odchylku směrů hlavních napětí σ_1 a σ_2 od osy x. Z uve-

deného vztahu však nelze zjistit, zda úhel určuje směr maximálního nebo minimálního normálového napětí. Jeho jednoznačnost určí až druhá derivace funkce (10.1) nebo (10.8), resp. (10.9),ale až po výpočtu hodnot hlavních napětí. Úpravou rovnice (10.1) zavedením goniometrických funkcí dvojnásobného úhlu a dosazením do vztahu (10.6) získáme vztah pro velikost **hlavních napětí:**

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2} \quad [\text{MPa}] \,. \tag{10.7}$$

Hlavním napětím přiřazujeme index dle nerovnice: $\sigma_1 > \sigma_2$. Je tedy zřejmé, že index 1 (u napětí i úhlu) přísluší *maximálnímu* extrému, tudíž v rovnici (10.7) před odmocninou znaménku *plus*, naopak index 2 přísluší *minimálnímu* extrému, tudíž znaménku *minus*.

Známe-li hodnoty hlavních napětí σ_1, resp. σ_2, můžeme odchylky jejich směrů od osy x (α_1, resp. α_2) jednoznačně určit z rovnice (10.2), odkud dostaneme:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\tau_{xz}}{\sigma_1 - \sigma_z} \,, \tag{10.8}$$

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{\tau_{xz}}{\sigma_2 - \sigma_z} \,. \tag{10.9}$$

Poznámka 10.10. U velikosti hlavních napětí hovoříme o extrémech *algebraických*, nikoliv *absolutních*. Indexy hlavních napětí nelze zaměňovat!
(1 MPa > -100 MPa $\Rightarrow \sigma_1 = 1$ MPa, $\sigma_2 = 100$ MPa).

10.4 Výpočet extrémních smykových napětí při rovinné napjatosti, jejich směry

Stejně jako u hlavních napětí (normálových) existuje úhel pootočení os, při kterém také smyková napětí dosahují extrému (maxima nebo minima). Extrémní smykové napětí vzniká na ploškách, jejichž normály jsou od normál hlavních rovin odkloněny o úhel $\delta = \pm\frac{\pi}{4}$. Tyto plošky se nazývají **plochy hlavních smyků**. Úhel, který svírají jejich normály s osou x spočítáme:

$$\alpha_{\tau_{min}^{max}} = \alpha_2 \pm \frac{\pi}{4} \quad [^\circ\text{deg}] \,. \tag{10.10}$$

Hodnotu extrémního smykového napětí spočítáme ze vztahu:

$$\tau_{min}^{max} = \pm\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \quad [\text{MPa}] \,. \tag{10.11}$$

Při výpočtu stačí stanovit hodnoty pouze pro τ_{max}, jak bude názorně vysvětleno v příkladu 10.11. Na obou ortogonálních ploškách extrémních smykových napětí působí současně normálové napětí σ_s:

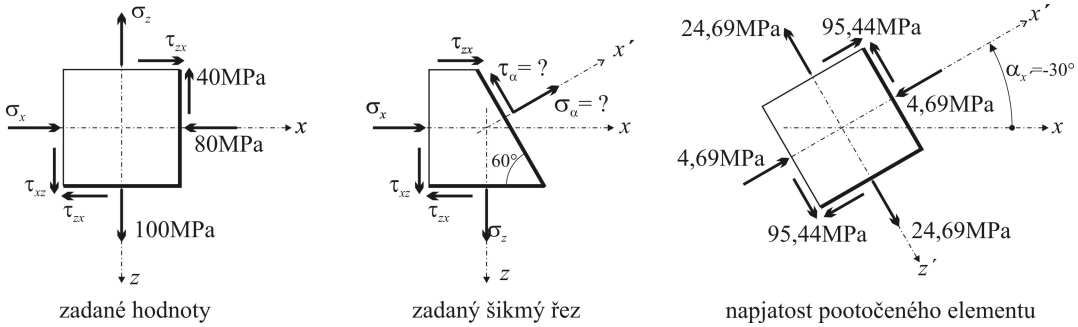
$$\sigma_s = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \ \ [\text{MPa}] \ . \tag{10.12}$$

Z věty o invariantnosti součtu normálových napětí vyplývá:

$$\sigma_s = \pm\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) = \pm\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z). \tag{10.13}$$

Příklad 10.11. Na element působí složky napětí:
$\sigma_x = -80$ MPa, $\sigma_z = 100$ MPa, $\tau_{xz} = -35$ MPa.

1. Zakreslete schéma daného elementu.
2. Spočítejte napětí v šikmém řezu, jehož geometrie je na obr. 10.10.
3. Spočítejte hodnotu a směr hlavních napětí. Dokažte platnost věty o invariantu součtu normálových napětí a zatížený element zakreslete.
4. Spočítejte hodnotu a směr extrémních smykových napětí. Určete hodnotu normálových napětí při tomto stavu a zakreslete.



Obr. 10.10 Schéma zadání a napjatost v pootočeném elementu

Řešení. 1. **Schéma zadání** viz obr. 10.10 vlevo.

2. **Výpočet napětí v šikmém řezu:**

a) *Šikmý řez dle zadání* na obr. 10.10 uprostřed je pod úhlem 60°. Musíme určit úhel $\alpha_{x'}$ který svírá **normála** šikmé plochy x' s osou x. Z geometrie je patrné, že $\alpha_{x'} = -30°$.

b) *Normálové napětí* dle vztahu (10.1) ($\sigma_\alpha = \sigma_x \cdot \cos^2\alpha + \sigma_z \cdot \sin^2\alpha + \tau_{xz} \cdot \sin 2\alpha$):

$$\sigma_{\alpha=-30°} = (-80)\cdot\cos^2(-30) + 100\cdot\sin^2(-30) + (-35)\cdot\sin(-60) = -4,69 \ \ [\text{MPa}] \ .$$

Pro úplnost můžeme spočítat také napětí na ostatních ploškách elementární krychle pootočené o úhel $\alpha_{x'}$ (obr. 10.10)vpravo.
Normálové napětí na ortogonální plošce, která je od od osy x pootočena o úhel $\alpha = -30 \pm 90 = 60°$:

$$\sigma_{\alpha=60°} = (-80) \cdot \cos^2 60 + 100 \cdot \sin^2 60 + (-35) \cdot \sin 120 = 24,69 \ \ [\text{MPa}] \ .$$

I v tomto případě můžeme dokázat platnost věty o invariantnosti součtu normálových napětí:
$\sigma_{\alpha=-30} + \sigma_{\alpha=60} = \sigma_x + \sigma_z = -4,69 + 24,69 = (-80) + 100 = 20 \ \ [\text{MPa}] \ .$

c) *Smykové napětí* viz vztah (10.2) ($\tau_\alpha = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z) \cdot \sin 2\alpha + \tau_{xz} \cdot \cos 2\alpha$):

$$\tau_{\alpha=-30} = -\tfrac{1}{2}((-80) - 100) \cdot \sin(-60) + (-35) \cdot \cos(-60) = 95,44 \ \ [\text{MPa}] \ .$$

Na základě věty o vzájemnosti smykových napětí platí, že smyková napětí na ortogonální plošce jsou stejně veliká.

d) *Schéma rovinné napjatosti* na pootočeném elementu viz. obr. 10.10

3. **Hodnota a směr hlavních napětí.**

a) *Hlavní napětí* viz vztah (10.7) ($\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2}$):

$$\sigma_1 = \tfrac{1}{2}((-80) + 100) + \tfrac{1}{2}\sqrt{((-80) - 100)^2 + 4 \cdot (-35)^2} = 106,566 \ \ [\text{MPa}] \ ,$$

$$\sigma_2 = \tfrac{1}{2}((-80) + 100) - \tfrac{1}{2}\sqrt{((-80) - 100)^2 + 4 \cdot (-35)^2} = -86,566 \ \ [\text{MPa}] \ .$$

b) Důkaz platnosti věty o *invariantnosti součtu normálových napětí*:
$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_z = 106.566 + (-86,566) = (-80) + 100 = 20 \ \ [\text{MPa}] \ .$

c) *Úhel pootočení normál*, na kterých působí hlavních napětí od osy x dle vztahů 10.8 a 10.9 ($\alpha_{1,2} = \text{arctg}\ \frac{\tau_{xz}}{\sigma_{1,2} - \sigma_z}$):

$$\alpha_1 = \text{arctg}\ \tfrac{(-35)}{106,566-100} = -79,375°,$$

$$\alpha_2 = \text{arctg}\ \tfrac{(-35)}{(-86,566)-100} = 10,625°.$$

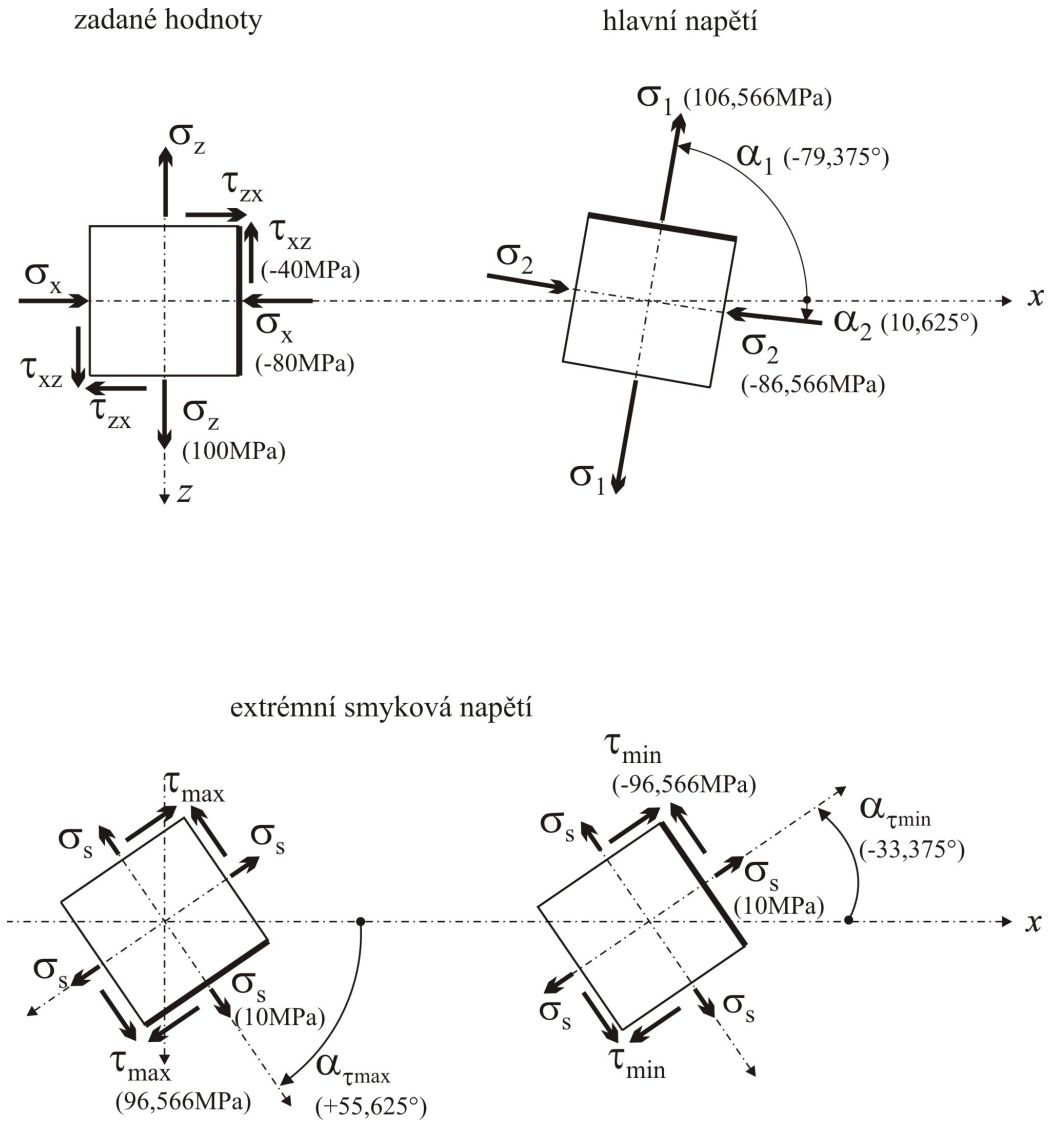
d) *Schéma rovinné napjatosti* při působení hlavních napětí viz. obr. 10.11

4. **Hodnota a směr extrémních smykových napětí.**

a) *Extrémní smyková napětí* dle vztahu (10.11): ($\tau_{max,min} = \pm\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$):

$$\tau_{max} = \tfrac{1}{2}(106,566 - (-86,566) = 96,566 \ \ [\text{MPa}] \ ,$$

$$\tau_{min} = -\tfrac{1}{2}(106,566 - (-86,566)) = -96,566 \ \ [\text{MPa}] \ .$$



Obr. 10.11 Extrémní napětí

b) *Úhel pootočení normál*, na kterých působí extrémní smyková napětí od osy x dle vztahu (10.10) ($\alpha_{\tau_{min}^{max}} = \alpha_2 \pm \frac{\pi}{4}$):

$$\alpha_{\tau_{max}} = \alpha_2 + \tfrac{\pi}{4} = 10,625 + 45 = 55,625°,$$

$$\alpha_{\tau_{min}} = \alpha_2 - \tfrac{\pi}{4} = 10,625 - 45 = -34,375°.$$

Sledujme kladnou plochu zadaného elementu, která je rovnoběžná s osou x. Na obr. 10.11 je vyznačena tučně.
Smykové napětí τ_{xz} je záporné, proto na snímku se zadanými hodnotami směřuje nahoru. Pootočíme-li tuto plošku o úhel $\alpha_{\tau_{max}} = 55,625°$ (ve směru hodinových ručiček), získáme směr extrémního *maximálního* smykového napětí. Toto napětí je kladné, tudíž musí mít orientaci směrem dolů. Naopak poo-

točením plošky o úhel $\alpha_{\tau_{min}} = -34,375°$ získáme směr extrémního *minimálního* smykového napětí. Je záporné, tudíž musí mít orientaci směrem nahoru. Porovnáme-li oba případy na obr. 10.11 a podíváme se na elementární krychli jako celek (bez rozlišení kladných a zápornch plošek), vidíme, že napjatost v obou případech je shodná. Při výpočtu tedy stačí spočítat pouze τ_{max} a $\alpha_{\tau_{max}}$, jak bylo uvedeno již dříve.

c) *Normálová napětí* na ploškách, na kterých působí extrémní smyková napětí dle vztahu (10.12) ($\sigma_s = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$):
$\sigma_s = \frac{1}{2}(106,566 + (-86,566)) = 10$ MPa.

d) *Schéma rovinné napjatosti* při působení extrémních smykových napětí viz. obr. 10.11

5. **Doplnění k příkladu** (grafické řešení):
Tuto úlohu lze řešit také graficky. Postup je vysvětlen v následující kapitole. Necháváme úkol na čtenáři. Kontrola: výsledné hodnoty musí být shodné s početním řešením.

▲

10.5 Grafické řešení hlavních napětí pomocí Mohrových kružnic napětí

Velikost a směr hlavních napětí včetně dalších veličin můžeme určit také graficky pomocí tzv. *Mohrovy kružnice napětí*. V některých případech je to velmi výhodné, neboť v praxi často postačuje určit pouze směry hlavních napětí a jejich znaménka. Grafické řešení je k tomuto rychlé, ideální a v praxi se často využívá. Níže popsaný postup sestrojení platí obecně pro obě roviny xz i xy a grafická znázornění pro různě zatížené elementy jsou v konkrétních příkladech této kapitoly.

Obecný postup setrojení: V prvé řadě je třeba si uvědomit, že na vodorovnou osu vynášíme všechna normálová napětí σ: σ_x, σ_y nebo σ_z. Na svislou osu pak smyková napětí τ. Kladná napětí do kladného směru příslušné osy, záporná napětí do záporného směru. Tedy: pokud pracujeme v rovině xz, kladný směr $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ je dolů, naopak v rovině xy je kladný směr $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ nahoru. Další postup bude vysvětlen pro rovinu xz. Pro aplikaci rovině xy s opačnou orientací os je potřeba jednoduchá úprava značení a znamének a odkazuji tímto čtenáře na [20], kapitola 9.

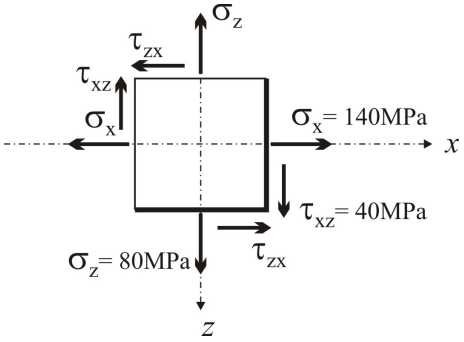
Na osu σ rovnoběžnou s osou x vyneseme normálová napětí $\sigma_x = \overline{OA}$ a $\sigma_z = \overline{OB}$. Kolmo k nim pak vyneseme smyková napětí τ_{xz} a to: z bodu A (**vždy** od hodnoty σ_x) směrem shodným s jeho **skutečným** znaménkem (tedy směrem dolů,

je-li τ_{xz} kladné dle obr. 10.13 a naopak). Z bodu B pak vynášíme τ_{xz} opačným směrem. Tím získáme body X a Y, které tvoří průměr kružnice napětí, jejíž střed leží na vodorovné ose napětí σ. Úsečka $\overline{AX}$ představuje velikost i skutečný směr τ, které působí na kladné ploše elementu. Úsečka $\overline{BY}$ potom velikost τ s opačným znaménkem (působí na záporné ploše elementu). Opíšeme-li kružnici nad body XY, určují její průsečíky s osou σ velikost hlavních napětí: $\sigma_1 = \overline{O1}$, $\sigma_2 = \overline{O2}$. σ_1 je **vždy *algebraicky* větší** (vpravo), σ_2 je **vždy *algebraicky* menší** (vlevo). Směry hlavních napětí jsou dány spojnicí **vždy** levého průsečíku (bodu 2) s body X (směr hlavního napětí σ_1 s odklonem od osy x orientovaný úhel α_1) a Y(směr hlavního napětí σ_2 s odklonem od osy x orientovaný úhel α_2) dle obr. 10.13. **Směry σ_1 vždy směr $\overline{2X}$, σ_2 vždy $\overline{2Y}$. Důležité nezaměnit směry σ_1 (úhel α_1) a σ_2 (úhel α_2)!!!**.

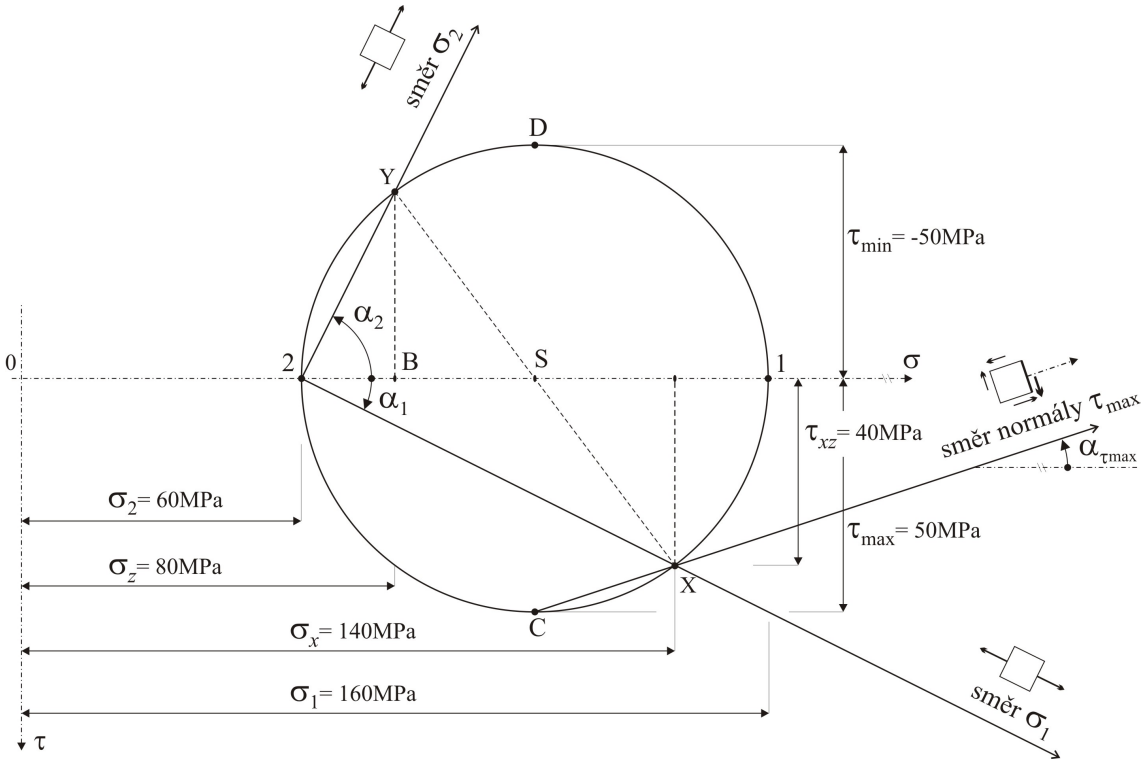
Poloměr Mohrovy kružnice je roven extrémnímu smykovému napětí τ_{extr} (*minimum* nebo *maximum*). Z Mohrovy kružnice můžeme vyčíst také směry extémních smykových napětí (jejich odchylku od osy x). Vrcholy kružnice označíme body C a D tak, že bod C představuje vrchol kružnice na kladné straně osy τ (dolní vrchol kružnice). Bod D pak představuje vrchol kružnice na záporné straně osy τ (horní vrchol kružnice). Plocha hlavních smyků, na které působí *maximální* smykové napětí, má normálu ve směru spojnice bodů $\overline{CX}$. Orientace normály závisí na znaménku zadaného τ_{xz}. Je-li kladné, je orientace normály plochy, na níž působí extrémní smykové napětí τ_{max} je $\overline{CX}$ (viz příklad 10.12). Je-li τ_{xz} záporné, je orientace normály $\overline{XC}$ (viz příklad 10.13).

Příklad 10.12. Na element namáhaný rovinnou napjatostí působí složky napětí:
$\sigma_x = 140$ MPa, $\sigma_z = 80$ MPa, $\tau_{xz} = 40MPa$.
Určete početně i graficky velikost a směr hlavních i extrémních smykových napětí.

Řešení. Schéma stavu rovinné napjatosti zadaného elementu viz obr. 10.12:
Napětí působí v rovině xz a jsou všechna kladná.



Obr. 10.12 Zadaná rovinná napjatost

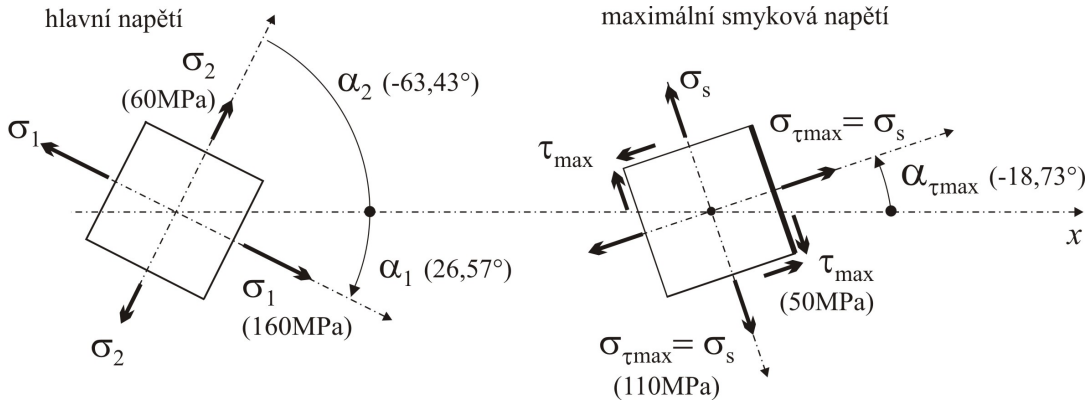


Obr. 10.13 Setrojená Mohrova kružnice

1. **Počtní řešení:**
   Dosazením zadaných hodnot do vztahů (10.7) až (10.12) získáme požadované hodnoty:

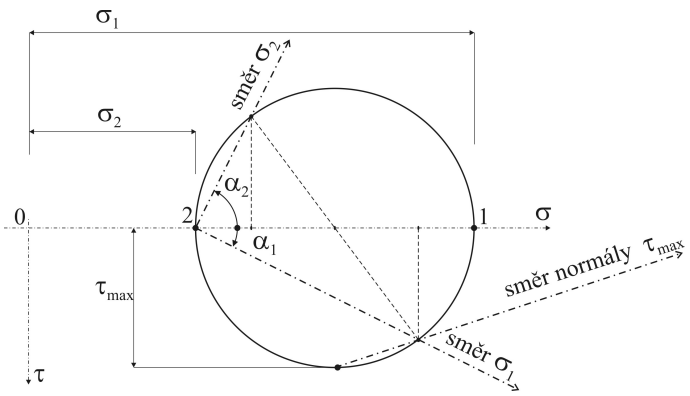
   $\sigma_1 = 160$ MPa, $\sigma_2 = 60$ MPa, $\alpha_1 = 26,57°$, $\alpha_2 = -63,43°$

   $\tau_{max} = 50$ MPa, $\alpha_{\tau_{max}=} -18,73°$, $\sigma_s = 110$ MPa.



Obr. 10.14 Rovinná napjatost elementu

2. **Schéma elementu** zatíženého hlavními napětími a extrémním smykovým napětím viz obr. 10.14:



Obr. 10.15 Potřebné údaje při grafickém řešení

3. **Grafické řešení** – Mohrova kružnice:
   Kružnice na obrázku 10.13 je sestrojena dle pravidel obecného postupu sestrojení (viz výše). Jsou zde označeny *všechny* body i kóty z důvodu pochopení látky. Při řešení praktických příkladů postačí značit pouze nutné údaje, které jsou naznačeny na obrázku 10.15.
   Smykové napětí $\tau_{xz} = 40$ MPa je kladné, proto orientace normály plochy hlavních smyků je dána směrem $\overline{CX}$ pod úhlem $\alpha_{\tau_{max}} = -18,73°$.

▲

10.6 Vybrané případy rovinné napjatosti

Přímková (osová) napjatost:

Přímková napjatost je nejjednodušším případem napjatosti, při níž je jen jedno **normálové** napětí různé od nuly a smykové napětí je nulové ($\sigma_x \neq 0$, $\sigma_z = 0$, $\tau_{xz} = 0$.) Např. kladná přímková napjatost ve směru osy x vzniká při osovém tahu prutu stálého průřezu nebo také v bodech ohýbaného nosníku, ve kterých vznikají pouze kladná normálová napětí. Třeba v příkladu 10.13 v bodech $b1$, $c4$ a $c5$. Záporná přímková napjatost ve směru osy x pak vzniká při osovém tlaku nebo v bodech ohýbaného nosníku, ve kterých působí pouze záporná normálová napětí. U nosníku z příkladu 10.13 v $b5$, $c1$ a $c2$. Viz také příklad 10.3 (kladná přímková napjatost bod 7,záporná body 3 a 8).

V šikmých řezech ve stejných bodech jsou pak složky napětí podle vztahů (10.1) a (10.2):

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cdot \cos^2 \alpha \quad [\text{MPa}] \,, \tag{10.14}$$

$$\tau_\alpha = -\frac{1}{2}\sigma_x \cdot \sin 2\alpha = \sigma_x \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \ \ [\mathrm{MPa}]\ . \tag{10.15}$$

Při přímkové napjatosti (ve směru osy x) je nenulové pouze jedno z hlavních napětí. Při kladné napjatosti $\sigma_1 = \mathit{kladné}$, $\sigma_2 = 0$. V případě záporné přímkové napjatosti platí $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = \mathit{záporné}$, čímž je splněna podmínka z poznámky 10.10.

Maximální smyková napětí působí v řezech odkloněných o 45° od osy prutu a jsou v absolutní hodnotě rovna $\sigma_x/2$. Mohrova kružnice se dotýká osy τ.

Prostý (čistý) smyk:

Prostý smyk v bodě tělesa vzniká tehdy, působí-li působí-li na ploškách elementární krychle jen smyková napětí ($\tau_{xz} \neq 0$, $\sigma_x = \sigma_z = 0$). Například body $a2$, $a3$ a $a4$ v příkladu 10.13, nebo body 2,5,12 v příkladu 10.3. Hlavní napětí pak ze vztahu (10.10) vyjdou o hodnotě $\pm\tau_{xz}$ a jsou od osy x odkloněny o úhly $\alpha_{1,2} \pm 45°$. Mohrova kružnice má střed v počátku souřadnic σ, τ, viz obr. 10.23 nebo obr. 10.19 vpravo.

Z uvedeného vyplývá, že stav prostého smyku můžeme při rovinné napjatosti vyvodit také pomocí dvou velikostně shodných normálových napětí opačného znaménka $\sigma_z = -\sigma_x$, $\tau_{xz} = 0$ pootočením o 45°. Toto platí i obráceně: je-li konstrukce zatížena čistým smykem, nemůžeme opomenout vliv normálového napětí ve směru pootočených os (zatížení elementu tahem nebo tlakem), jehož extrémní hodnoty působí právě při pootočení o 45°. Typickým příkladem je prut namáhaný prostým kroucením (viz příkl. 10.15).

Všesměrný (izotropický) tah nebo tlak:

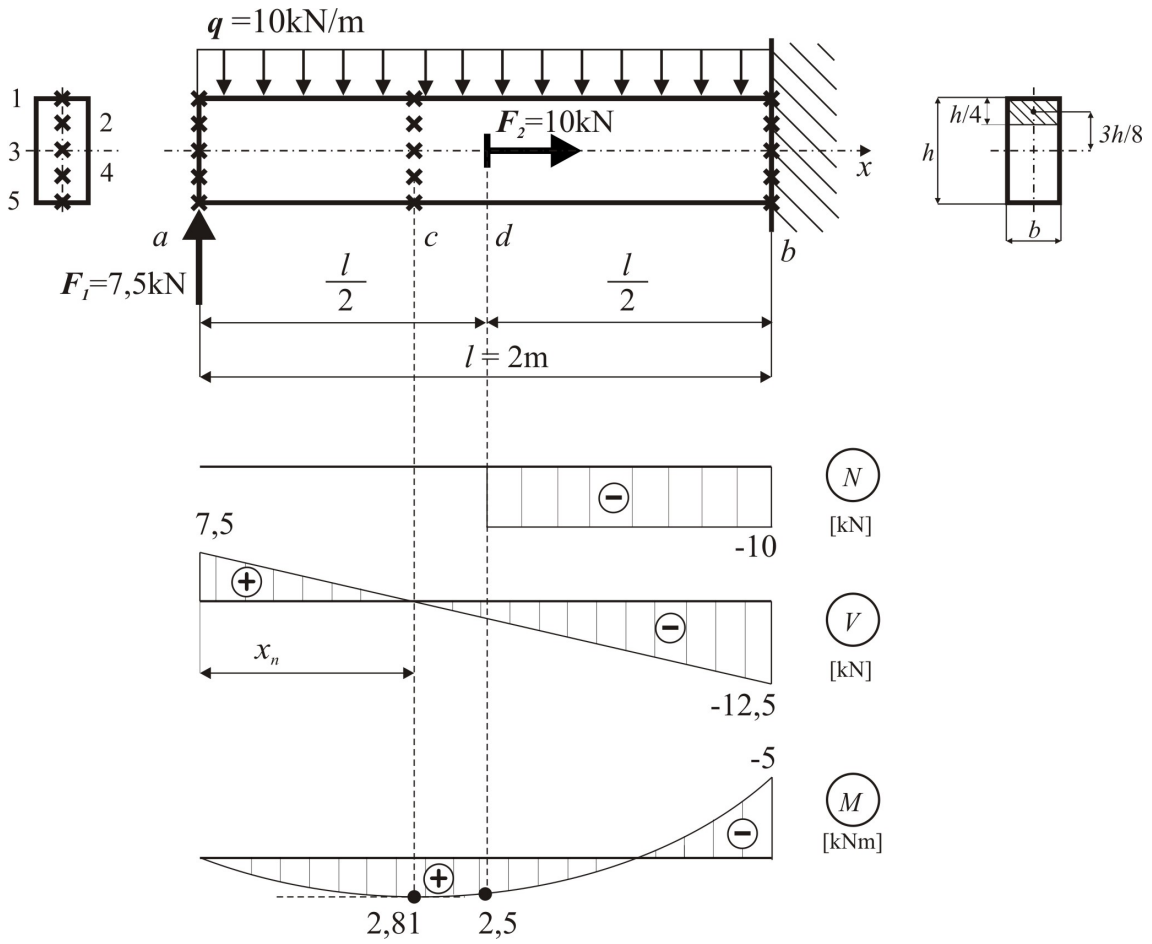
Jsou-li normálová napětí ve dvou ortogonálních směrech shodná co do velikosti i znaménkově ($\sigma_x = \sigma_z = \sigma$) a zároveň $\tau_{xz} = 0$, pak se jedná o všesměrný tah při $\sigma > 0$ nebo tlak při $\sigma < 0$. Ze vztahů (10.1) a (10.2) vychází:

$$\sigma_\alpha = \sigma \cdot \cos^2\alpha + \sigma \cdot \sin^2\alpha = \sigma \ \ [\mathrm{MPa}]\ , \tag{10.16}$$

$$\tau_\alpha = -\frac{1}{2}(\sigma - \sigma) \cdot \sin 2\alpha = 0 \ \ [\mathrm{MPa}]\ . \tag{10.17}$$

Normálové napětí je ve všech směrech shodné a smyková napětí vůbec nevznikají. Mohrova kružnice degeneruje v bod.

Příklad 10.13. Nosník obdélníkového průřezu 50 × 100 mm z příkladu 10.5 je zatížen dle obr. 10.16 nahoře. Ve všech označených bodech určete stav napjatosti, velikosti a směry extrémních napětí početně i graficky. Průřezy, ve kterých leží označené body, jsou na volném konci nosníku (a), ve vetknutí (b) a v místě extrémního ohybového momentu (c). V daných průřezech a,b,c nás zajímají body na obou hranách nosníku (body 1,5), v obou čtvrtinách výšky (body 2,4) a v ose nosníku (3).

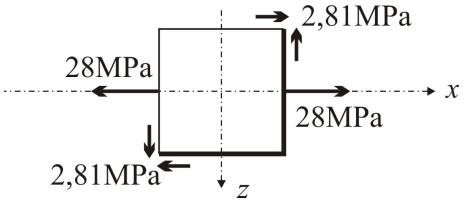


Obr. 10.16 Schéma nosníku

Řešení. Vyřešené průběhy vnitřních sil viz obr. 10.16.

Hodnoty průřezových charakteristik využijeme z příkladu 10.5:
$A = 5 \cdot 10^{-3}$ [m^2] , $I_y = 4,167 \cdot 10^{-6}$ [m^4] , $S_{y(h/4)} = 46,88 \cdot 10^{-6}$ [m^3] .

1. **bod *b*2** - vetknutí, horní čtvrtina průřezu:



Obr. 10.17 Napjatost bodu *b*2

a) Stav napjatosti tohoto bodu jsme spočítali v příkladu 10.5:
$\sigma_x = \sigma_x^N + \sigma_x^M = 28$ [MPa] , $\tau_{xz} = -2,81$ [MPa] .

b) Schéma zatíženého elementu viz obr. 10.17.

c) Výpočet hlavních napětí dle (10.7):
$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2}$:

$\sigma_1 = \frac{1}{2}(28 + 0) + \frac{1}{2}\sqrt{(28 - 0)^2 + 4 \cdot (-2,81)^2} = 28,28$ [MPa] ,

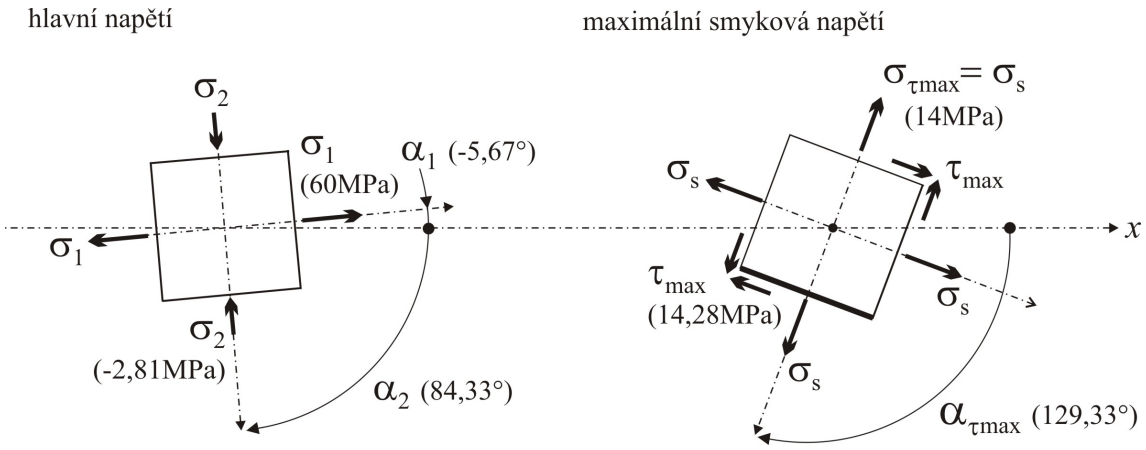
$\sigma_2 = \frac{1}{2}(28 + 0) - \frac{1}{2}\sqrt{(28 - 0)^2 + 4 \cdot (-2,81)^2} = -0,28$ [MPa] .

d) Pootočení hlavních napětí od osy x dle (10.8) a (10.9):
$\operatorname{tg} \alpha_{1,2} = \tau_{xz}/(\sigma_{1,2} - \sigma_z)$:

$\alpha_1 = \operatorname{arctg} \frac{-2,81}{28,28-0} = -5,67°$,

$\alpha_2 = \operatorname{arctg} \frac{-2,81}{(-0,28)-0} = 84,33°$.

Schéma elementu zatíženého hlavními napětími viz obr. 10.18.



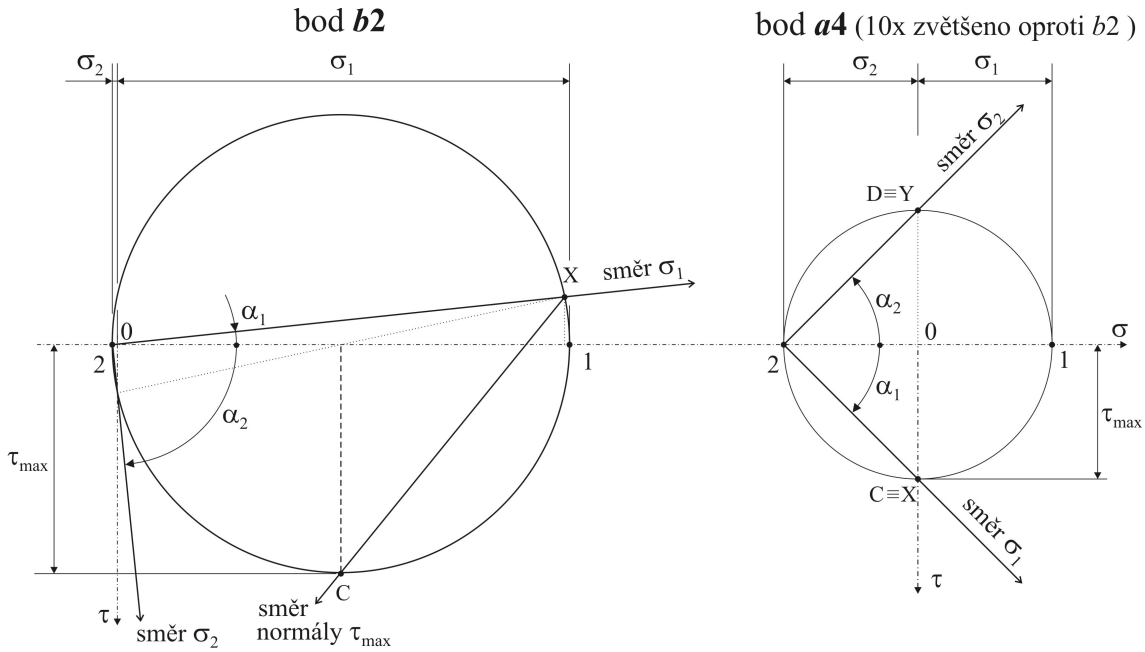
Obr. 10.18 Napjatost bodu $b2$

e) Výpočet extrémních smykových napětí dle (10.11):
$\tau_{max,min} = \pm 0,5 \cdot (\sigma_1 - \sigma_2)$:

$\tau_{max} = 0,5 \cdot (28,28 - (-0,28)) = 14,28$ [MPa] ,

$\tau_{min} = -0,5 \cdot (28,28 - (-0,28)) = -14,28$ [MPa] .

f) Pootočení maximálních smykových napětí od směru xz dle (10.10):
$\alpha_{\tau_{max}} = \alpha_2 + \pi/4$,



Obr. 10.19 Grafické řešení

$\alpha_{\tau_{max}} = 84,33° + \frac{\pi}{4} = 129,33°$.

Schéma elementu zatíženého extrémním smykovým napětím viz obr. 10.17.

g) Grafické řešení viz obr. 10.19 vlevo.
Smykové napětí $\tau_{xz} = -2,81$ MPa je záporné, proto orientace normály plochy hlavních smyků je dána směrem $\overline{XC}$ pod úhlem $\alpha_{\tau_{max}} = 129,33°$.

2. **bod *a4*** - volný konec, dolní čtvrtina průřezu:

a) Stav rovinné napjatosti:
Na volném konci nosníku (v průřezu a) je nulová normálová síla i ohybový moment. Normálové napětí je tedy nulové $\sigma_x = 0$ MPa.
Posouvající síla je kladná, tudíž v celém průřezu a (vyjma hraničních bodů) je kladné smykové napětí. V dolní čtvrtině průřezu bude mít hodnotu:

$$\tau_{xz} = \frac{V \cdot S_{y(h/4)}}{I_y \cdot b} = \frac{(7{,}5 \cdot 10^{-3}) \cdot 46{,}88 \cdot 10^{-6}}{4{,}167 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}05} = 1,69 \ \ [\text{MPa}] \ .$$

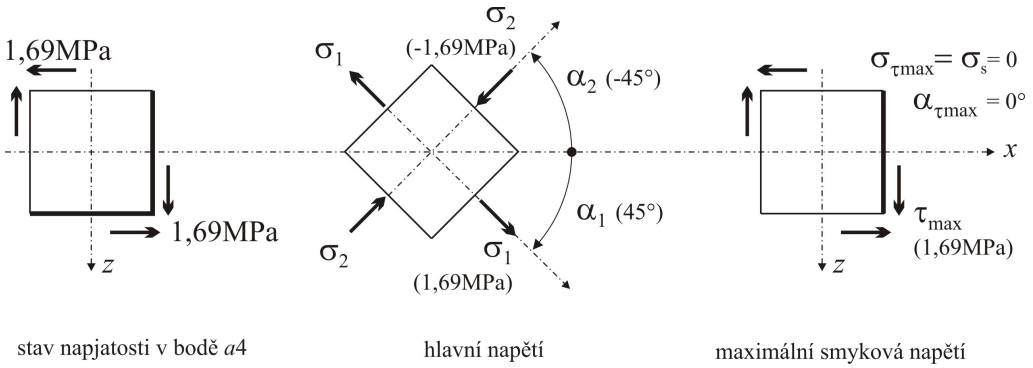
Bod $a4$ je namáhaný *prostým smykem* ($\tau_{xz} = +$, $\sigma_x = 0$).

b) Schéma zatíženého elementu viz obr. 10.20 vlevo.

c) Výpočet hlavních napětí:
$\sigma_1 = \frac{1}{2}(0+0) + \frac{1}{2}\sqrt{(0-0)^2 + 4 \cdot 1,69^2} = 1,69 \ [\text{m}^2]$,

$$\sigma_2 = \tfrac{1}{2}(0+0) - \tfrac{1}{2}\sqrt{(0-0)^2 + 4\cdot(1,69)^2} = -1,69 \ \ [\text{MPa}] \ .$$

d) Pootočení hlavních napětí od osy x:
$\alpha_1 = \operatorname{arctg} \frac{1,69}{1,69-0} = 45°$,
$\alpha_2 = \operatorname{arctg} \frac{-2,81}{(-1,69)-0} = -45°$.
Schéma elementu zatíženého hlavními napětími viz obr. 10.20 uprostřed.



Obr. 10.20 Napjatost bodu $a4$

e) Výpočet extrémních smykových napětí:
$\tau_{max} = 0,5\cdot(1,69-(-1,69)) = 1,69 \ \ [\text{MPa}]$,
$\tau_{min} = -0,5\cdot(1,69-(-1,69)) = -1,69 \ \ [\text{MPa}]$ .MPa
Smyková napětí τ_{xz} jsou v tomto případě maximální $\tau_{xz} = \tau_{max}$. Plošky elementární krychle s normálami ve směru os x a z jsou zároveň plochy hlavních smyků.

f) Pootočení maximálních smykových napětí od směru xz:
$\alpha_{\tau_{max}} = 45° + \frac{\pi}{4} = 90°$.
Schéma elementu extrémním smykovým napětím viz obr. 10.20 vpravo.

g) Grafické řešení viz obr. 10.19 vpravo.

3. **bod *c3*** - průřez v místě extrémního ohybového momentu (nebezpečný průřez), osa průřezu:
V nebezpečném průřezu je nulová posouvající síla → nulové smykové napětí. Normálová síla je také nulová → $\sigma_x^N = 0$. Ohybový moment je sice extrémní, ovšem v ose průřezu je hodnota napětí $\sigma_x^M = 0$. Bod $c3$ tedy není zatížen žádným napětím. Rovněž hlavní napětí i τ_{extr} jsou nulová. Mohrova kružnice degeneruje v bod v počátku souřadného systému σ, τ.

4. **kontrolní výsledky pro ostatní body**:

a) bod $a1$ je nezatížený

b) bod $a3$ (prostý smyk, τ_{xz} je kladné):
$\sigma_1 = 2,25$ MPa , $\alpha_1 = 45°$,
$\sigma_2 = -2,25$ MPa , $\alpha_2 = -45°$,
$\tau_{max} = 2,25$ MPa , $\alpha_{\tau_{max}} = 0°$.

c) bod $a4$ (prostý smyk, τ_{xz} je kladné):
$\sigma_1 = 1,69$ MPa , $\alpha_1 = 45°$,
$\sigma_2 = -1,69$ MPa , $\alpha_2 = -45°$,
$\tau_{max} = 1,69$ MPa , $\alpha_{\tau_{max}} = 0°$.

d) bod $a5$ je nezatížený

e) bod $b1$ (přímková napjatost - prostý tah):
$\sigma_1 = 58$ MPa , $\alpha_1 = 0°$ ($\operatorname{tg}\alpha_1 = 0/58 = 0$),
$\sigma_2 = 0$ MPa , $\alpha_2 = 90°$ ($\operatorname{tg}\alpha_2 = 0/0 \to\infty$),
$\tau_{max} = 29$ MPa , $\alpha_{\tau_{max}} = 135°$ ($\alpha_{\tau_{max}} = \alpha_2 + 45°$).

f) bod $b3$:
$\sigma_1 = 2,88$ MPa , $\alpha_1 = -52,5°$,
$\sigma_2 = -4,88$ MPa , $\alpha_2 = 37,5°$,
$\tau_{max} = 3,88$ MPa , $\alpha_{\tau_{max}} = 135°$.

g) bod $b4$:
$\sigma_1 = 0,25$ MPa , $\alpha_1 = -85°$,
$\sigma_2 = -32,25$ MPa , $\alpha_2 = 5°$,
$\tau_{max} = 16,2$ MPa , $\alpha_{\tau_{max}} = 50°$.

h) bod $b5$ (přímková napjatost - prostý tlak):
$\sigma_1 = 0$ MPa , $\alpha_1 = 90°$ ($\operatorname{tg}\alpha_1 = 0/0 \to\infty$),
$\sigma_2 = -62,0$ MPa , $\alpha_2 = 0°$ ($\operatorname{tg}\alpha_2 = 0/(-62) = 0$),
$\tau_{max} = 31,0$ MPa , $\alpha_{\tau_{max}} = 45°$ ($\alpha_{\tau_{max}} = \alpha_2 + 45°$).

i) bod $c1$ (přímková napjatost - prostý tlak):
$\sigma_1 = 0$ MPa , $\alpha_1 = 90°$,

$\sigma_2 = -33,76$ MPa , $\alpha_2 = 0°$,
$\tau_{max} = 16,88$ MPa , $\alpha_{\tau_{max}} = 45°$.

j) bod $c2$ (přímková napjatost - prostý tlak):
$\sigma_1 = 0$ MPa , $\alpha_1 = 90°$,
$\sigma_2 = -16,88$ MPa , $\alpha_2 = 0°$,
$\tau_{max} = 8,44$ MPa , $\alpha_{\tau_{max}} = 45°$.

k) bod $c4$ (přímková napjatost - prostý tah):
$\sigma_1 = 16,88$ MPa , $\alpha_1 = 0°$,
$\sigma_2 = 0$ MPa , $\alpha_2 = 90°$,
$\tau_{max} = 8,44$ MPa , $\alpha_{\tau_{max}} = 135°$.

l) bod $c5$ (přímková napjatost - prostý tah):
$\sigma_1 = 0$ MPa , $\alpha_1 = 90°$,
$\sigma_2 = -62,0$ MPa , $\alpha_2 = 0°$,
$\tau_{max} = 31,0$ MPa , $\alpha_{\tau_{max}} = 45°$.

▲

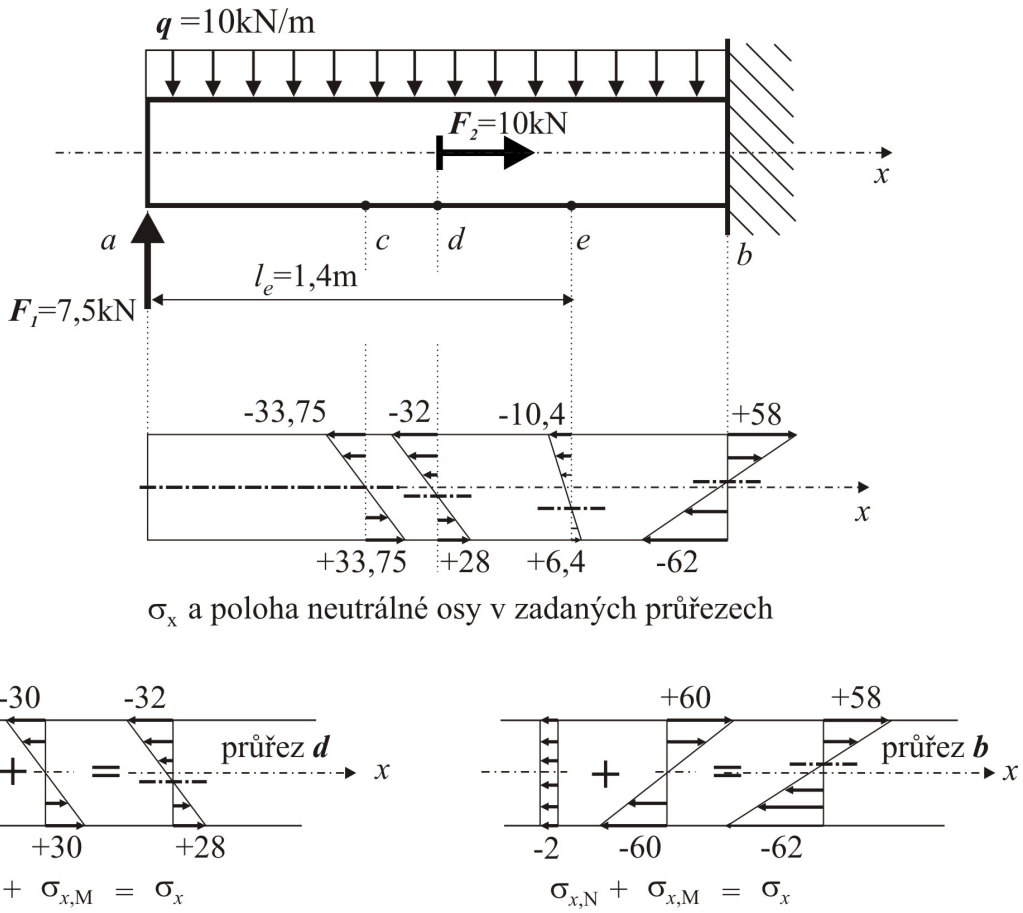
Příklad 10.14. Určete, v kterých bodech nosníku obdélníkového průřezu 50 × × 100 mm z příkladu 10.13 vzniká prostý smyk. Naznačte polohu neutrálné osy v průřezech b, c, d, e, dle obr. 10.21.

Řešení. je rozděleno do dvou částí:

a) **Body, ve kterých vzniká prostý smyk,** musí splňovat dvě kritéria:
   1. Musí mít ***nenulové*** *smykové napětí.* Tuto podmínku nesplňují pouze body na horní a dolní hraně nosníku a v místě nebezpečného průřezu (průřez c) po celé výšce (nulová V síla). Ve všech ostatních bodech smykové napětí působí.
   2. Musí mít ***nulové*** *normálové napětí* σ_x. Tuto podmínku splňují body na volném konci (průřez a) po celé výšce a body ležící na neutrálné ose.

   Prostý smyk tedy vzniká v celém průřezu a vyjma bodů $a1$ a $a2$, ve kterých je $\tau_{xz} = 0$ a v bodech ležících na neutrálné ose vyjma bodu $c3$, kde je smykové napětí rovněž nulové. Více viz příklad 10.13, obr. 10.16.

b) **Pro neutrálnou osu** musí být splněna podmínka $\sigma_x = 0$. U prostého ohybu je totožná s těžištní osou prutu. V našem příkladu toto platí pouze na úseku $\overline{ad}$, (obr. 10.21). Na úseku $\overline{db}$ působí také normálová síla, která dle kapitoly 4.1 vyvozuje normálové napětí o konstantní hodnotě po celé výšce průřezu $\sigma_x^N = -2$ MPa.

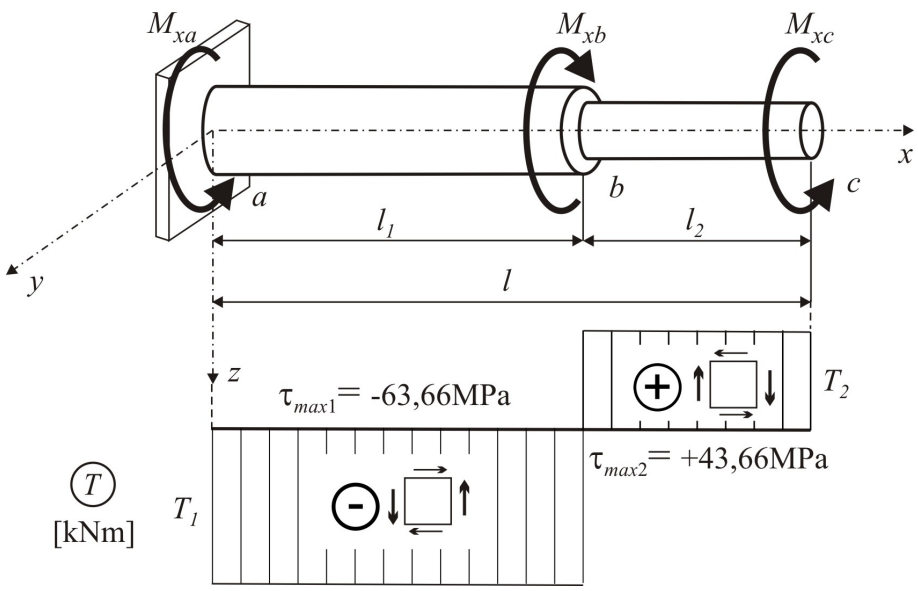


Obr. 10.21 Schéma nosníku a poloha neutrálné osy

V kombinaci s normálovým napětím od ohybového momentu σ_x^M zde dochází k mimostřednému tahu, případně tlaku a tím k posunutí neutrálné osy mimo těžiště průřezu (8.2). Výpočet velikostí napětí v různých bodech byl vysvětlen v příkladech 10.5 a 10.13. Necháváme proto na čtenáři chybějící výpočet normálových napětí v krajních vláknech průřezů d a e, jejichž výsledné hodnoty jsou uvedeny v obr. 10.16 uprostřed. Dole potom vidíme rozklad normálových napětí v průřezech d a b na složky σ_x^N a σ_x^M.

▲

Příklad 10.15. Dvě tyče kruhového průřezu pevně spojené a vetknuté z příkladu 5.1 jsou zatíženy kroutícími momenty dle obrázku obr. 10.22 nahoře. Určete velikosti a směry hlavních napětí v místě působení extrémních smykových napětí (vnější plochy průřezů) v obou úsecích.



Obr. 10.22 Schéma nosníku

Řešení. V příkladu 5.1 jsme v obou úsecích spočítali hodnoty maximálních smykových napětí. Znaménka jsme neřešili, neboť z hlediska zadání nebyla potřebná.

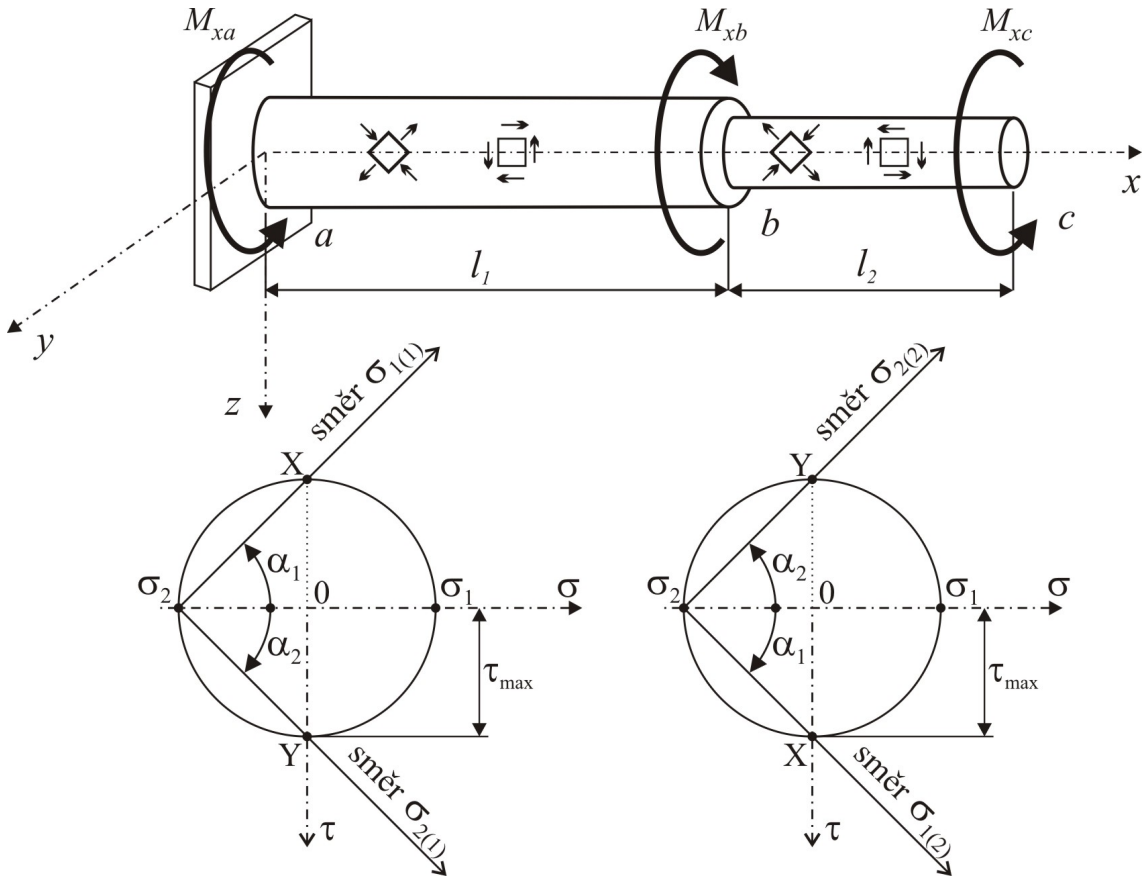
Pro jejich určení nám pomůže tzv:

Definice 10.16. Pravidlo pravé ruky:
Uchopíme-li pomyslně prut pravou rukou tak, že prsty budou ve směru vnitřního kroutícího momentu, pak palec ukazuje směr vektoru tohoto napětí. Směřuje-li vektor (palec) *ven z prutu*, je kroutící moment kladný a naopak (analogie se znaménkovou konvencí N sil). Skutečný směr působení tohoto napětí je pak shodný jako u smykového napětí od účinků V sil.
$\tau_+ = \uparrow \square \downarrow$, $\tau_- = \downarrow \square \uparrow$

Schéma průběhu T momentů včetně maximálních hodnot i skutečných směrů smykových napětí τ v obou úsecích viz obr. 10.22 dole. Z probrané látky v kapitole 5 je zřejmé, že τ_{max} od kroutícího momentu je na vnějších plochách průřezu.

Hodnoty hlavních napětí dle vztahu (10.7):

$\sigma_{1(1)} = + \mid \tau_{max1} \mid = 63,66$ MPa (σ_1 na úseku (l_1),
$\sigma_{2(1)} = - \mid \tau_{max1} \mid = -63,66$ MPa,
$\sigma_{1(2)} = + \mid \tau_{max2} \mid = 43,66$ MPa (σ_1 na úseku (l_2),
$\sigma_{2(2)} = - \mid \tau_{max2} \mid = -43,66$ MPa.



Obr. 10.23 Grafické řešení

Pootočení hlavních napětí od osy x dle (10.8) a (10.9):

$$\alpha_{1(1)} = \operatorname{arctg} \frac{-63{,}66}{63{,}66-0} = -45°,$$

$$\alpha_{2(1)} = \operatorname{arctg} \frac{-63{,}66}{(-63{,}66)-0} = 45°,$$

$$\alpha_{1(2)} = \operatorname{arctg} \frac{43{,}66}{43{,}66-0} = 45°,$$

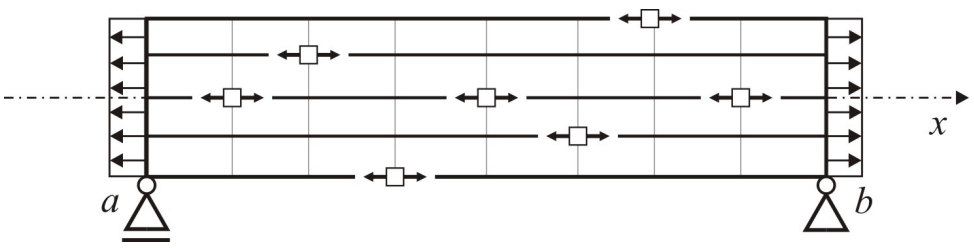
$$\alpha_{2(2)} = \operatorname{arctg} \frac{43{,}66}{(43{,}66)-0} = -45°.$$

Grafické řešení hlavních napětí viz obr. 10.23. Vidíme zde, že na nosníku namáhaného prostým kroucením (čistým smykem) vznikají k pootočeným osám také normálová napětí, jejichž extrémní hodnoty jsou při pootočení o 45°, jak bylo popsáno v úvodu této podkapitoly. Znaménková orientace závisí na směru smykového napětí a tím vlastně na směru vnitřního kroutícího momentu. ▲

10.7 Trajektorie hlavních napětí

Trajektorie hlavních napětí jsou křivky, které v každém bodě tělesa sledují směry hlavních napětí. Vytvářejí tím dvě vzájemně kolmé (ortogonální) soustavy křivek a dávají názornou představu o tzv. *toku sil*. Na obrázcích 10.24 až 10.26 jsou tahové trajektorie značeny tučně, tlakové tence. K sestrojení trajektorií hlavních napětí základních zatížení využijeme poznatků z probrané látky.

Osově namáhaný prut (obr. 10.24). U osově namáhaného nosníku vznikají hlavní napětí pouze ve směru osy prutu a kolmo k ní, neboť platí (4.2) a (4.4). V každém bodě vzniká **přímková napjatost**. U taženého prutu platí $\sigma_1 \equiv \sigma_x$, $\sigma_2 = 0$, u tlačeného prutu potom $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 \equiv \sigma_x$. Trajektorie hlavních napětí jsou tedy přímky rovnoběžné s osou prutu a kolmé k ní. Toto neplatí v lokálních místech koncentrace napětí (více v kapitole 1.4 nebo [20], kapitola 2).

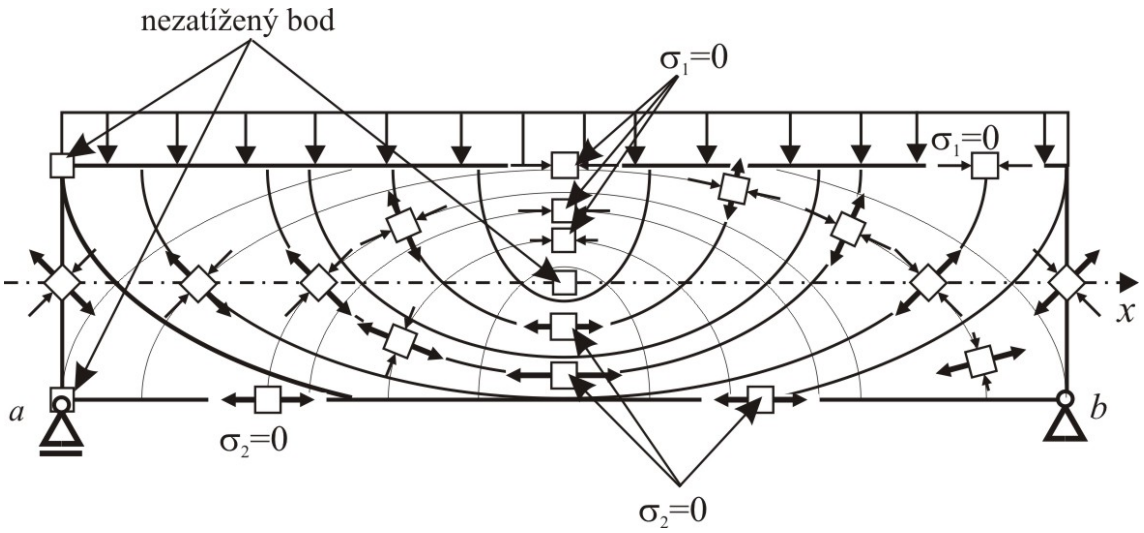


Obr. 10.24 Trajektorie hlavních napětí taženého prutu

Ohýbaný nosník (obr. 10.25). V ohýbaném nosníku působí normálová napětí vlivem působení ohybových momentů a smyková napětí od účinků V sil. V příkladu 10.13 jsme probrali stav napjatosti v různých bodech nosníku a již víme, že:

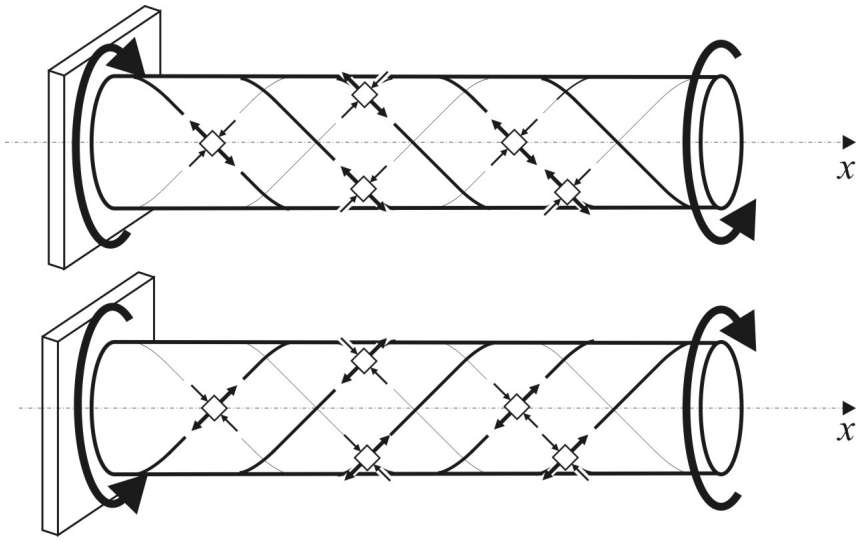
Smyková napětí jsou na horních a dolních hranách nulová. V těchto bodech vzniká přímková napjatost, takže směry hlavních napětí a tím i trajektorie jsou zde rovnoběžné s osou prutu a kolmo k ní. Smyková napětí jsou nulová také v místě nulové posouvající síly. V nosníku zatíženého dle obr. 10.25 tedy vzniká přímková napjatost i uprostřed rozpětí ve všech bodech po celé výšce průřezu (vyjma osy nosníku).

V příkladu 10.13 a v kapitole 6.2.1 jsme si vysvětlili, že svislá normálová napětí jsou nulová ($\sigma_x = \sigma_z = 0$). Proto v těchto výše uvedených bodech jsou nenulová hlavní napětí pouze ve směru osy prutu. Hlavní napětí kolmá k ose prutu jsou rovna nule a dle poznámky 10.10 platí:
Na straně tažených vláken (dolní polovina průřezu) jsou $\sigma_1 = \sigma_+$, $\sigma_2 = 0$. Na straně tlačených vláken daného nosníku (horní polovina průřezu) jsou $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = \sigma_-$. Obráceně nemůže být, neboť musí být splněna podmínka $\sigma_1 > \sigma_2$, dle poznámky 10.10. Bod uprostřed rozpětí na neutrální ose je nazatížen, neboť na něj nepůsobí žádné napětí (stejně jako bod $c3$ v příkladu 10.13).



Obr. 10.25 Trajektorie hlavních napětí ohýbaného nosníku

Poznámka 10.17. Tahové trajektorie napovídají směr, v němž by měl být vyztužen nosník z materiálu málo odolného v tahu.



Obr. 10.26 Trajektorie hlavních napětí krouceného prutu pro oba směry M_x

Normálová napětí jsou nulová v neutrálné ose (u čistého ohybu je totožná s osou prutu) a nad podporami po celé výšce průřezu, ve kterých je nulový moment. Body na ose a nad podporami jsou tedy zatížené čistým smykem, takže hlavní napětí

a jejich trajektorie jsou zde skloněny pod úhlem 45°. Krajní body (horní a dolní) v místě podpor jsou nezatížené (shodně jako body $a1$ a $a5$ v příkladu 10.13).

Nosník zatížený prostým krouceníím (obr. 10.26) jsme si vysvětlili v příkladu 10.15. V nosníku namáhaného prostým krouceníím vzniká čistý smyk. Zatíženy jsou všechny body vyjma osy prutu, kde jsou smyková napětí nulová (viz kap. 5). Hlavní napětí jsou vzhledem k ose prutu pod úhlem 45° a vždy platí:

$$\sigma_2 = \textit{záporné} = -\sigma_1 \ \ [\mathrm{MPa}] \ . \tag{10.18}$$

Na obr. 10.26 vidíme trajektorie hlavních napětí včetně jejich skutečných směrů hlavních napětí při dvou protichůdných směrech působení kroutícího momentu.

Kapitola 11

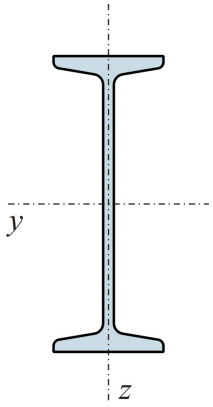
Geometrické a základní průřezové charakteristiky vybraných ocelových profilů

V příkladech tohoto učebního textu je v značné množství prutových konstrukcí tvořeno válcovanými ocelovými tyčemi profilu IPN nebo UPN. Z tohoto důvodu jsou zde uvedeny tabulky 11.1 až 11.6 s geometrickými a základními průřezovými charakteristikami těchto profilů s následným značením:

Název veličiny	Značení
Výška průřezu	h
Šířka průřezu	b
Tloušťka pásnice	t_f
Tloušťka stojiny	t_w
Souřadnice y těžiště	y_s
Vzdálenost středu smyku od těžiště	y_m
Hmotnost	G
Průřezová plocha	A
Průřezový modul ve směru kolmém k vodorovné ose y	W_y
Plastický průřezový modul ve směru kolmém k vodorovné ose y	$W_{pl,y}$
Moment setrvačnosti ve směru kolmém k vodorovné ose y	I_y
Poloměr setrvačnosti ve směru kolmém k vodorovné ose y	i_y
Průřezový modul ve směru kolmém ke svislé ose z	W_z
Plastický průřezový modul ve směru kolmém ke svislé ose z	$W_{pl,z}$
Moment setrvačnosti ve směru kolmém ke svislé ose z	I_z
Poloměr setrvačnosti ve směru kolmém k vodorovné ose z	i_z
Moment tuhosti v prostém kroucení	I_t

11.1 Tyče průřezu IPN

(průřez I podle ON 73 1580)



Název profilu	h [mm]	b [mm]	t_f [mm]	t_w [mm]	G [kg/m]
IPN 80	80	42	5,9	3,9	5,9
IPN 100	100	50	6,8	4,5	8,3
IPN 120	120	58	7,7	5,1	11,1
IPN 140	140	66	8,6	5,7	14,3
IPN 160	160	74	9,5	6,3	17,9
IPN 180	180	82	10,4	6,9	21,9
IPN 200	200	90	11,3	7,5	26,2
IPN 220	220	98	12,2	8,1	31,1
IPN 240	240	106	13,1	8,7	36,2
IPN 260	260	113	14,1	9,4	41,9
IPN 280	280	119	15,2	10,1	47,9
IPN 300	300	125	16,2	10,8	54,2
IPN 320	320	131	17,3	11,5	61,0
IPN 340	340	137	18,3	12,2	68,0
IPN 360	360	143	19,5	13,0	76,1
IPN 380	380	149	20,5	13,7	84,0
IPN 400	400	155	21,6	14,4	92,4
IPN 450	450	170	24,3	16,2	115,0
IPN 500	500	185	27,0	18,0	141,0
IPN 550	550	200	30,0	19,0	166,0

Tab. 11.1 Přehled geometrických charakteristik ocelových tyčí průřezu IPN

Název profilu	A [mm^2]	W_y [mm^3]	$W_{pl,y}$ [mm^3]	I_y [mm^4]	i_y [mm]
IPN 80	757	$1,950 \cdot 10^4$	$2,280 \cdot 10^4$	$7,780 \cdot 10^5$	32,0
IPN 100	1060	$3,420 \cdot 10^4$	$3,980 \cdot 10^4$	$1,710 \cdot 10^6$	40,1
IPN 120	1420	$5,470 \cdot 10^4$	$6,360 \cdot 10^4$	$3,280 \cdot 10^6$	48,1
IPN 140	1830	$8,190 \cdot 10^4$	$9,540 \cdot 10^4$	$5,730 \cdot 10^6$	56,1
IPN 160	2280	$1,170 \cdot 10^5$	$1,360 \cdot 10^5$	$9,350 \cdot 10^6$	64,0
IPN 180	2790	$1,610 \cdot 10^5$	$1,870 \cdot 10^5$	$1,450 \cdot 10^7$	72,0
IPN 200	3340	$2,140 \cdot 10^5$	$2,500 \cdot 10^5$	$2,140 \cdot 10^7$	80,0
IPN 220	3950	$2,780 \cdot 10^5$	$3,240 \cdot 10^5$	$3,060 \cdot 10^7$	88,0
IPN 240	4610	$3,540 \cdot 10^5$	$4,120 \cdot 10^5$	$4,250 \cdot 10^7$	95,9
IPN 260	5330	$4,420 \cdot 10^5$	$5,140 \cdot 10^5$	$5,740 \cdot 10^7$	104,0
IPN 280	6100	$5,420 \cdot 10^5$	$6,320 \cdot 10^5$	$7,590 \cdot 10^7$	111,0
IPN 300	6900	$6,530 \cdot 10^5$	$7,620 \cdot 10^5$	$9,800 \cdot 10^7$	119,0
IPN 320	7770	$7,820 \cdot 10^5$	$9,140 \cdot 10^5$	$1,251 \cdot 10^8$	127,0
IPN 340	8670	$9,230 \cdot 10^5$	$1,080 \cdot 10^6$	$1,570 \cdot 10^8$	135,0
IPN 360	9700	$1,090 \cdot 10^6$	$1,276 \cdot 10^6$	$1,961 \cdot 10^8$	142,0
IPN 380	10700	$1,260 \cdot 10^6$	$1,482 \cdot 10^6$	$2,401 \cdot 10^8$	150,0
IPN 400	11800	$1,460 \cdot 10^6$	$1,714 \cdot 10^6$	$2,921 \cdot 10^8$	157,0
IPN 450	14700	$2,040 \cdot 10^6$	$2,400 \cdot 10^6$	$4,585 \cdot 10^8$	177,0
IPN 500	17900	$2,750 \cdot 10^6$	$3,240 \cdot 10^6$	$6,874 \cdot 10^8$	196,0
IPN 550	21200	$3,610 \cdot 10^6$	$4,240 \cdot 10^6$	$9,918 \cdot 10^8$	216,0

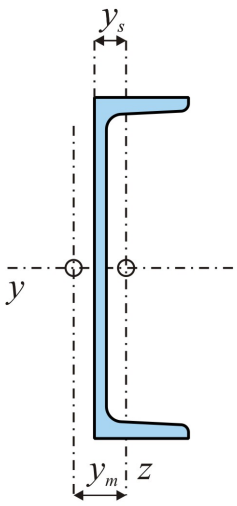
Tab. 11.2 Přehled základních průřezových charakteristik ocelových tyčí průřezu IPN

Název profilu	W_z [mm^3]	$W_{pl,z}$ [mm^3]	I_z [mm^4]	i_z [mm]	I_t [mm^4]
IPN 80	$3,000 \cdot 10^3$	$5,000 \cdot 10^3$	$6,290 \cdot 10^4$	9,1	$8,700 \cdot 10^3$
IPN 100	$4,880 \cdot 10^3$	$8,100 \cdot 10^3$	$1,220 \cdot 10^5$	10,7	$1,600 \cdot 10^4$
IPN 120	$7,410 \cdot 10^3$	$1,240 \cdot 10^4$	$2,150 \cdot 10^5$	12,3	$2,710 \cdot 10^4$
IPN 140	$1,070 \cdot 10^4$	$1,790 \cdot 10^4$	$3,520 \cdot 10^5$	14,0	$4,320 \cdot 10^4$
IPN 160	$1,480 \cdot 10^4$	$2,490 \cdot 10^4$	$5,470 \cdot 10^5$	15,5	$6,570 \cdot 10^4$
IPN 180	$1,980 \cdot 10^4$	$3,320 \cdot 10^4$	$8,130 \cdot 10^5$	17,1	$9,580 \cdot 10^4$
IPN 200	$2,600 \cdot 10^4$	$4,350 \cdot 10^4$	$1,170 \cdot 10^6$	18,7	$1,350 \cdot 10^5$
IPN 220	$3,310 \cdot 10^4$	$5,570 \cdot 10^4$	$1,620 \cdot 10^6$	20,2	$1,860 \cdot 10^5$
IPN 240	$4,170 \cdot 10^4$	$7,000 \cdot 10^4$	$2,210 \cdot 10^6$	22,0	$2,500 \cdot 10^5$
IPN 260	$5,100 \cdot 10^4$	$8,590 \cdot 10^4$	$2,880 \cdot 10^6$	23,2	$3,350 \cdot 10^5$
IPN 280	$6,120 \cdot 10^4$	$1,030 \cdot 10^5$	$3,640 \cdot 10^6$	24,5	$4,420 \cdot 10^5$
IPN 300	$7,220 \cdot 10^4$	$1,210 \cdot 10^5$	$4,510 \cdot 10^6$	25,6	$5,680 \cdot 10^5$
IPN 320	$8,470 \cdot 10^4$	$1,430 \cdot 10^5$	$5,550 \cdot 10^6$	26,7	$7,250 \cdot 10^5$
IPN 340	$9,840 \cdot 10^4$	$1,660 \cdot 10^5$	$6,740 \cdot 10^6$	28,0	$9,040 \cdot 10^5$
IPN 360	$1,140 \cdot 10^5$	$1,940 \cdot 10^5$	$8,180 \cdot 10^6$	29,0	$1,150 \cdot 10^6$
IPN 380	$1,310 \cdot 10^5$	$2,210 \cdot 10^5$	$9,750 \cdot 10^6$	30,2	$1,410 \cdot 10^6$
IPN 400	$1,490 \cdot 10^5$	$2,530 \cdot 10^5$	$1,160 \cdot 10^7$	31,3	$1,700 \cdot 10^6$
IPN 450	$2,030 \cdot 10^5$	$3,450 \cdot 10^5$	$1,730 \cdot 10^7$	34,3	$2,670 \cdot 10^6$
IPN 500	$2,680 \cdot 10^5$	$4,560 \cdot 10^5$	$2,480 \cdot 10^7$	37,2	$4,020 \cdot 10^6$
IPN 550	$3,490 \cdot 10^5$	$5,920 \cdot 10^5$	$3,490 \cdot 10^7$	40,2	$5,440 \cdot 10^6$

Tab. 11.3 Přehled základních průřezových charakteristik ocelových tyčí průřezu IPN

11.2 Tyče průřezu UPN

(průřez U podle ON 73 1580)



Název profilu	h [mm]	b [mm]	t_f [mm]	t_w [mm]	y_s [mm]	y_m [mm]	G [kg/m]
UPN 80	80	45	8,0	6,0	14,5	26,7	8,6
UPN 100	100	50	8,5	6,0	15,5	29,3	10,6
UPN 120	120	55	9,0	7,0	16,0	30,3	13,4
UPN 140	140	60	10,0	7,0	17,5	33,7	16,0
UPN 160	160	65	10,5	7,5	18,4	35,6	18,8
UPN 180	180	70	11,0	8,0	19,2	37,5	22,0
UPN 200	200	75	11,5	8,5	20,1	39,4	25,3
UPN 220	220	80	12,5	9,0	21,4	42,0	29,4
UPN 240	240	85	13,0	9,5	22,3	43,9	33,2
UPN 260	260	90	14,0	10,0	23,6	46,6	37,9
UPN 280	280	95	15,0	10,0	25,3	50,2	41,8
UPN 300	300	100	16,0	10,0	27,0	54,1	46,2
UPN 320	320	100	17,5	14,0	26,0	48,2	59,5
UPN 350	350	100	16,0	14,0	24,0	44,5	60,6
UPN 380	380	102	16,0	13,5	23,8	45,8	63,1
UPN 400	400	110	18,0	14,0	26,5	51,1	71,8

Tab. 11.4 Přehled geometrických charakteristik ocelových tyčí průřezu UPN

Název profilu	A [mm^2]	W_y [mm^3]	$W_{pl,y}$ [mm^3]	I_y [mm^4]	i_y [mm]
UPN 80	1100	$2,65 \cdot 10^4$	$3,180 \cdot 10^4$	$1,060 \cdot 10^6$	31,0
UPN 100	1350	$4,12 \cdot 10^4$	$4,900 \cdot 10^4$	$2,060 \cdot 10^6$	39,1
UPN 120	1700	$6,07 \cdot 10^4$	$7,260 \cdot 10^4$	$3,640 \cdot 10^6$	46,2
UPN 140	2040	$8,64 \cdot 10^4$	$1,030 \cdot 10^5$	$6,050 \cdot 10^6$	54,5
UPN 160	2400	$1,16 \cdot 10^5$	$1,380 \cdot 10^5$	$9,250 \cdot 10^6$	62,1
UPN 180	2800	$1,50 \cdot 10^5$	$1,790 \cdot 10^5$	$1,350 \cdot 10^7$	69,5
UPN 200	3220	$1,91 \cdot 10^5$	$2,280 \cdot 10^5$	$1,910 \cdot 10^7$	77,0
UPN 220	3740	$2,45 \cdot 10^5$	$2,920 \cdot 10^5$	$2,690 \cdot 10^7$	84,8
UPN 240	4230	$3,00 \cdot 10^5$	$3,580 \cdot 10^5$	$3,600 \cdot 10^7$	92,2
UPN 260	4830	$3,71 \cdot 10^5$	$4,420 \cdot 10^5$	$4,820 \cdot 10^7$	99,9
UPN 280	5330	$4,48 \cdot 10^5$	$5,320 \cdot 10^5$	$6,280 \cdot 10^7$	109,0
UPN 300	5880	$5,35 \cdot 10^5$	$6,320 \cdot 10^5$	$8,030 \cdot 10^7$	117,0
UPN 320	7580	$6,79 \cdot 10^5$	$8,260 \cdot 10^5$	$1,087 \cdot 10^8$	121,0
UPN 350	7730	$7,34 \cdot 10^5$	$9,180 \cdot 10^5$	$1,284 \cdot 10^8$	129,0
UPN 380	8040	$8,29 \cdot 10^5$	$1,014 \cdot 10^6$	$1,576 \cdot 10^8$	140,0
UPN 400	9150	$1,02 \cdot 10^6$	$1,240 \cdot 10^6$	$2,035 \cdot 10^8$	149,0

Tab. 11.5 Přehled základních průřezových charakteristik ocelových tyčí průřezu UPN

Název profilu	W_z [mm^3]	$W_{pl,z}$ [mm^3]	I_z [mm^4]	i_z [mm]	I_t [mm^4]
UPN 80	$6,36 \cdot 10^3$	$1,210 \cdot 10^4$	$1,94 \cdot 10^5$	13,3	$2,160 \cdot 10^4$
UPN 100	$8,49 \cdot 10^3$	$1,620 \cdot 10^4$	$2,93 \cdot 10^5$	14,7	$2,810 \cdot 10^4$
UPN 120	$1,11 \cdot 10^4$	$2,120 \cdot 10^4$	$4,32 \cdot 10^5$	15,9	$4,150 \cdot 10^4$
UPN 140	$1,48 \cdot 10^4$	$2,830 \cdot 10^4$	$6,27 \cdot 10^5$	17,5	$5,680 \cdot 10^4$
UPN 160	$1,83 \cdot 10^4$	$3,520 \cdot 10^4$	$8,53 \cdot 10^5$	18,9	$7,390 \cdot 10^4$
UPN 180	$2,24 \cdot 10^4$	$4,290 \cdot 10^4$	$1,14 \cdot 10^6$	20,2	$9,550 \cdot 10^4$
UPN 200	$2,70 \cdot 10^4$	$5,180 \cdot 10^4$	$1,48 \cdot 10^6$	21,4	$1,190 \cdot 10^5$
UPN 220	$3,36 \cdot 10^4$	$6,410 \cdot 10^4$	$1,97 \cdot 10^6$	23,0	$1,600 \cdot 10^5$
UPN 240	$3,96 \cdot 10^4$	$7,570 \cdot 10^4$	$2,48 \cdot 10^6$	24,2	$1,970 \cdot 10^5$
UPN 260	$4,77 \cdot 10^4$	$9,160 \cdot 10^4$	$3,17 \cdot 10^6$	25,6	$2,550 \cdot 10^5$
UPN 280	$5,72 \cdot 10^4$	$1,090 \cdot 10^5$	$3,99 \cdot 10^6$	27,4	$3,100 \cdot 10^5$
UPN 300	$6,78 \cdot 10^4$	$1,300 \cdot 10^5$	$4,95 \cdot 10^6$	29,0	$3,740 \cdot 10^5$
UPN 320	$8,06 \cdot 10^4$	$1,520 \cdot 10^5$	$5,97 \cdot 10^6$	28,1	$6,670 \cdot 10^5$
UPN 350	$7,50 \cdot 10^4$	$1,430 \cdot 10^5$	$5,70 \cdot 10^6$	27,2	$6,120 \cdot 10^5$
UPN 380	$7,87 \cdot 10^4$	$1,480 \cdot 10^5$	$6,15 \cdot 10^6$	27,7	$5,910 \cdot 10^5$
UPN 400	$1,02 \cdot 10^5$	$1,900 \cdot 10^5$	$8,46 \cdot 10^6$	30,4	$8,160 \cdot 10^5$

Tab. 11.6 Přehled základních průřezových charakteristik ocelových tyčí průřezu UPN

Literatura

[1] ČSN EN 1990 *Eurokód: Zásady navrhování konstrukcí.* Česká technická norma. Český normalizační institut, březen 2004.

[2] ČSN EN 1991 *Eurokód 1: Zatížení konstrukcí.* Česká technická norma. Český normalizační institut, březen 2008.

[3] ČSN EN 1992 *Eurokód 2: Navrhování betonových konstrukcí.* Česká technická norma. Český normalizační institut, listopad 2006.

[4] ČSN EN 1993 *Eurokód 3: Navrhování ocelových konstrukcí.* Česká technická norma. Český normalizační institut, prosinec 2006.

[5] ČSN EN 1995 *Eurokód 5: Navrhování dřevěných konstrukcí.* Česká technická norma. Český normalizační institut, prosinec 2006.

[6] ČSN EN ISO 6892 *Kovové materiály - Zkoušení tahem.* Česká technická norma. Úřad pro technickou normalizaci, metrologii a státní zkušebnictví, únor 2010.

[7] Beer, F.P. – Johnston, E.T.Jr. – DeWolf, J.T. – Mazurek, D.F. *Mechanics of Materials.* 5. vydání. The McGraw-Hill Companies, Inc., 2009. (790 s). ISBN 978-0-07-352938-7.

[8] Benda, J. *Stavební statika I.* Učební text. Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava, Fakulta stavební, 2005. (197 s). ISBN 80-248-0771-8.

[9] Gere, J. *Mechanics of Materials.* 5. vydání. Brooks/Cole, Thomson Learning, 2001. (926 s). ISBN 0 534-37133-7.

[10] Hibbeler, R.C. *Statics and Mechanics of Materials.* 2. vydání. Pearson Education, Inc., 2004. (785 s). ISBN 0-13-028127-1.

[11] Hořejší, J. – Šafka, J. *Statické tabulky.* Technický průvodce, svazek 51, 1. vydání. SNTL - nakladatelství technické literatury, Praha, 1987. (688 s).

[12] Kadlčák, J. – Kytýr, J. *Statika stavebních konstrukcí I.* Základy stavební mechaniky - staticky určité prutové konstrukce. Vysokoškolská učebnice. Vysoké učení technické v Brně, nakladatelství VUTIUM, Brno, 1998. (349 s). ISBN 80-214-1204-6.

[13] Krejsa, M. – Konečný, P. *Spolehlivost a bezpečnost staveb* Elektronický učební text. [on-line]. <http://mi21.vsb.cz/modul/spolehlivost-bezpecnost-staveb>. Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava, 2011. (138 s).

[14] Kubečka, K. *Zkoumání příčin havárie zděného domu.* Stavebnictví č.4, ročník II, 2008. s 64-67 (4 s). Časopis stavebních inženýrů, techniků a podnikatelů. ISSN 1802-2030.

[15] *MI21 - Matematika pro inženýry 21. století.* Webové stránky projektu. [on-line]. <http://mi21.vsb.cz>. Vysoká škola báňská-Technická univerzita Ostrava spolu s partnerem Západočeskou univerzitou v Plzni, 2009-2012.

[16] Onouye, B. – Kane, K. *Statics and Strength of Materials for Architecture and Building Construction.* 3. vydání. Pearson Education, Inc., 2007. (630 s). ISBN 0-13-118583-7.

[17] Servít, R. – Crha, M. – Doležalová, E. *Teorie pružnosti a plasticity, 1. díl.* České vysoké učení v Praze, Praha, 1977. (384 s).

[18] Servít, R. – Drahoňovský, Z. – Šejnoha, J. *Teorie pružnosti a plasticity, 2. díl.* České vysoké učení v Praze, Praha, 1982. (314 s).

[19] Studnička, J. – Wald, F. *Ocelové konstrukce I.* Ocelářské tabulky. České vysoké učení v Praze, Praha, 1996. (219 s).

[20] Šmířák, S. *Pružnost a plasticita I.* Učební text pro distanční studium. Vysoké učení technické v Brně, akademické nakladatelství CERM, Brno, 2006. (210 s). ISBN 80-7204-468-0.

[21] Šmířák, S. – Hlavinková, B. *Pružnost a plasticita I, příklady.* Učební text. Vysoké učení technické v Brně, akademické nakladatelství CERM, Brno, 2000. (217 s). ISBN 80-214-1623-8.

[22] Teplý, B. – Šmířák, S. *Pružnost a plasticita II.* Vysoké učení technické v Brně, akademické nakladatelství CERM, Brno, 1993. (199 s). ISBN 80-214-0498-1.

Rejstřík

D
dimenzování, 47, 61, 63, 64, 68, 112, 126, 129, 134, 146, 149, 150, 153, 163, 227, 229

E
Euler Leonhard, 213, 214
Eurokódy, 40, 42, 45, 240–242

H
homogenita, 2, 39, 82, 83, 100, 214
Hooke Robert, 22
hyperbola
  Eulerova, 226, 227, 239

I
integrace, iii, 8, 54, 57, 60, 104, 155, 167, 168, 170, 172, 176, 181, 183, 187, 191
izotropie, 2

J
jádro průřezu, 209–212

K
kontrakce, 24, 31
kružnice
  Mohrova, 259–263, 267

M
metoda
  Clebschova, 178, 179
  dovolených namáhání, 39, 40
  konečných prvků, 109
  mezních stavů, 39–41
  Mohrova, 189, 191, 194
  navrhování a posuzování konstrukcí, 39
  polopravděpodobnostní, 42
  pravděpodobnostní, 42
  přímé integrace diferenciální rovnice ohybové čáry, 167, 181, 183
  sítí, 109
  stupně bezpečnosti, 39, 40
mez
  destrukce, 31
  kluzu, 31, 32, 34, 44, 47, 91, 92, 94–96, 113, 126, 138, 239, 240
  pevnosti, 31, 44
  pružnosti, 29
  úměrnosti, 29, 238, 239
mimostředný tah a tlak, 197, 201, 202, 204, 206, 209, 212, 242, 270

N
napjatost
  prostorová, 26, 108, 243, 244
  přímková, 243
  rovinná, iv, 14, 26, 243, 245, 247, 249, 251–255, 257, 259–263, 266
Národní
  předmluva, 42
  příloha, 42, 45, 62
nosná stěna, 13, 14, 26

O
ohyb
  prostorový, 10, 197, 198, 201, 203, 204
  rovinný, 10, 122, 123, 128, 197

ortotropie, 2
osa
  neutrálná, 128, 130, 133, 144, 145, 202, 203, 206, 208–212, 269, 270, 273, 274

P
podmínka
  kompatibility, 22
  okrajová, 55, 57, 58, 60, 78, 79, 167–170, 172, 177, 178, 182, 183, 187, 188, 190, 215, 217, 218, 220, 223
  spojitosti, 22, 178
  stability, 215, 218, 220, 221, 223
Poisson Siméon Denis, 24
pracovní diagram, 23, 27, 32, 34, 92, 94, 96, 138, 139, 142, 144, 238
  betonu, 28, 33
    bilineární, 28
    parabolicko-rektangulární, 28
  dřeva, 29
  ideálně pružnoplastického materiálu, 31, 32, 34, 47, 91, 92, 94, 96, 137
  oceli, 29–31
princip
  Saint - Venantův lokálního účinku, 14–16
  superpozice, 2, 3, 26, 214
průřez
  složený, 124, 131, 157, 158
  tenkostěnný, 108, 110–112, 123, 151–154

R
rovina
  neutrálná, 128
rovnice
  diferenciální, 7, 54, 104, 109, 164, 165, 167–170, 172, 176, 178, 181, 182, 185–187, 191, 214, 215, 217, 219, 222
  fyzikální, 22, 26, 72, 91
  geometrická, 20–22

S
Saint-Venant Adhémar Jean Claude Barré de, 14
Schwedlerův vztah, 165
smykový
  tok, 109, 111
součinitel
  Poissonův příčné deformace, 24, 25, 34, 53, 106, 119, 128
  teplotní délkové roztažnosti, 35–37, 80, 167
stabilita, iv, 1, 41, 44, 48, 50, 52, 213–216, 218, 221, 224, 232, 234, 238, 242
střed
  smyku, 9, 108, 123, 153–157, 197

Š
štíhlost, 226, 227, 230–232, 238–242

T
tažnost, 26, 27, 32, 35, 47
tenzor
  deformace, 19
  napětí, 11, 13, 14, 49
teorie
  desek, 128
  I. řádu, 3, 47, 197
  II. řádu, 3, 4, 47, 214, 216, 219, 222
  konečných (velkých) deformací, 4
  malých deformací, 2, 163, 164
  pružnosti a plasticity, 1, 4, 5, 24, 47, 167
  spolehlivosti, 42
trajektorie hlavních napětí, 273–275
tuhost
  Bredtova v kroucení, 111
  ohybová, 163, 165, 167, 181, 214
  v tahu a tlaku, 53, 74

V
vektor, 6, 271

deformace, 19
napětí, 11, 13, 14, 146, 243, 249, 271
posunutí, 20
vzorec
Bredtův, 111
vzpěr
rovinný, 241

Y
Young Thomas, 23

Z
zákon
akce a reakce, 244
Hookeův, 2, 22–27, 29, 32–34, 48, 53, 54, 74, 81, 89, 91, 92, 97, 99, 101, 103, 104, 125, 126, 128, 137–139, 145, 197, 238
rovinný, 26
zatížitelnost, 91, 97, 229, 234