

Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava
Západočeská univerzita v Plzni



Pružnost a pevnost - interaktivní studijní materiál

doc. Ing. Radim Halama Ph.D. a kol.

Obsah

1. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Na tvorbě textu se podílel kolektiv Katedry pružnosti a pevnosti VŠB-TU Ostrava: doc. Ing. Radim Halama Ph.D., prof. Ing. Jan Fuxa, CSc., Dr. Ing. Ludmila Adámková, Ing. František Fojtík Ph.D., doc. Ing. Karel Frydrýšek Ph.D., Ing. Michal Šofer, Ing. Jaroslav Rojíček Ph.D., Ing. Martin Fusek Ph.D., Ing. Luboš Pečenka

Pružnost a pevnost - interaktivní studijní materiál

© Halama et al., 2012

Obsah

2. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

ISBN



Obsah

3. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Předmluva

Vážený čtenáři,

text, který právě čtete, vznikl v rámci řešení projektu "Matematika pro inženýry 21. století - inovace výuky matematiky na technických školách v nových podmínkách rychle se vyvíjející informační a technické společnosti". Projekt je řešen na Vysoké škole báňské - Technické univerzitě v Ostravě a Západočeské univerzitě v Plzni v období 2009 - 2012.

Tento materiál je koncipován jako stručný úvod do nauky o pružnosti a pevnosti. Jeho cílem je vyplnění mezery v učebních textech, která vznikla po restrukturalizaci studia na VŠB-TU Ostrava v roce 2001. Výklad teoretických základů mechaniky poddajných těles je doplněn řadou řešených příkladů. Svou skladbou je předkládané dílo netradiční.

V úvodu je zdůrazněna návaznost na mechaniku tuhých těles a jsou zde probrány důležité geometrické charakteristiky průřezu. Následně jsou vysvětlovány koncepty napětí a deformace, jež jsou hned vzájemně propojeny v kapitole, věnované konstitučním vztahům. Další kapitoly se zabývají základními typy namáhání (tah-tlak, ohyb a kroucení), jednotlivými hypotézami pevnosti, stabilitou přímých prutů a únavou materiálu. V závěrečných kapitolách je uveden přehled experimentálních metod pružnosti a jsou vyloženy úplné základy matematické teorie pružnosti, nutné pro vysvětlení principu metody konečných prvků a dalších numerických metod mechaniky v navazujících ročnících studia.



Obsah

4. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Tato elektronická verze skript je doplněna také videem tahové zkoušky a názornými animacemi:

1. Mohrova kružnice pro tah (kapitola 3).
2. Konstrukce Mohrovy kružnice pro případ rovinné napjatosti (kapitola 3).
3. Mohrova kružnice pro rovinnou napjatost (kapitola 3).
4. Vyhodnocení tahové zkoušky (kapitola 5).

Tento text jsme se rozhodli věnovat památce prof. Ing. Pavla Macury DrSc., který dlouhodobě působil na Katedře pružnosti a pevnosti VŠB-TU Ostrava jako uznávaný odborník v oblasti experimentální pružnosti a plasticity.

Text byl vysázen pomocí sázecího systému $\text{\TeX}$ ve formátu pdf $\text{\LaTeX}$.

V Ostravě 19. 7. 2012

Radim Halama

Orientace v textu

Každá kapitola má svou pevnou strukturu, která by vám měla pomoci k rychlejší orientaci v textu. Při studiu můžete využít následující „stavební kameny“:

Průvodce studiem

Prostřednictvím průvodce studiem vás chceme seznámit s tím, co vás v dané kapitole čeká, které části by měly být pro vás opakováním, na co je třeba se obzvláště zaměřit atd.

Cíle

V části cíle se dozvíte, co všechno zvládnete a budete umět po prostudování dané kapitoly.

Příklad

Řešené příklady pomáhají k pochopení teoretických poznatků a slouží jako vzor pro řešení cvičení. Jejich konec je označen plným trojúhelníkem (▲).

Pojmy k zapamatování

Pojmy zde uvedené jsou většinou nové a zcela zásadní. To znamená tyto pojmy nejen pochopit a umět ilustrovat na příkladech, ale také umět vyslovit jejich přesné definice.



Obsah

6. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Příklady k procvičení

Tyto příklady slouží k tomu, abyste si důkladně procvičili probranou látku. Výsledky uvedených příkladů jsou zařazeny na konci každé kapitoly.

Klíč k příkladům k procvičení

Na konci každé kapitoly je uveden klíč ke cvičením, který obsahuje výsledky příkladů k procvičení.

Autotest

Pomocí autotestu si otestujete své znalosti a početní dovednosti z celého objemu učiva.

Literatura

Jedná se o literaturu použitou autory při vytváření tohoto studijního materiálu, nikoliv jen o literaturu doporučenou k dalšímu studiu. Pokud některou z uvedených publikací doporučujeme zájemcům, pak je to v textu spolu s odkazem na daný titul jasně uvedeno.

Rejstřík

Rejstřík, uvedený na konci skript, poslouží ke snadné orientaci v textu.



Obsah

7. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Definice a věty jsou uvedeny v rámečku (v tiskové verzi) resp. barevným písmem s barevným pozadím (v obrazovkové verzi). Konce důkazů jsou vyznačeny prázdným čtverečkem ($\square$), konce řešení příkladů plným trojúhelníčkem ($\blacktriangle$).



Obsah

8. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Obsah

1 Úvod	16
1.1 Vymezení základních pojmů	17
1.2 Cíle a předpoklady nauky o pružnosti a pevnosti	19
1.3 Kvadratické momenty plochy průřezu	21
1.3.1 Výpočet těžiště plochy průřezu	21
1.3.2 Definice kvadratických momentů plochy	22
1.3.3 Kvadratické momenty plochy k rovnoběžným osám (Steinerova věta)	28
1.3.4 Hlavní kvadratické momenty složených ploch s osou symetrie	31
1.3.5 Moduly průřezu	34
1.3.6 Interaktivní test	43
2 Koncept napětí	48
2.1 Princip metody řezu	49
2.2 Napětí v bodě tělesa	53
2.3 Saint-Venantův princip	55
2.4 Základní druhy namáhání	57
2.4.1 Namáhání tahem (tlakem)	57
2.4.2 Namáhání smykem	58
2.4.3 Namáhání ohybem	60
2.4.4 Namáhání krutem	61
2.4.5 Interaktivní test	66



Obsah

9. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

3	Transformace tenzoru napjatosti	71
3.1	Hlavní napětí a hlavní roviny	72
3.2	Napjatost na skloněné rovině pro případ tahu-tlaku	74
3.3	Napjatost na skloněné rovině pro případ rovinné napjatosti	80
3.4	Složky napětí v obecné rovině při prostorové napjatosti	91
3.5	Stanovení hlavních napětí při prostorové napjatosti	96
3.5.1	Interaktivní test	101
4	Koncept deformace	106
4.1	Podélná a smyková deformace	107
4.2	Deformace v bodě tělesa	110
4.3	Tenzor přetvoření	116
4.4	Mohrova kružnice pro deformace a její konstrukce	117
4.5	Analogie tenzoru napjatosti a tenzoru přetvoření	120
4.5.1	Interaktivní test	123
5	Mechanické vlastnosti materiálů	128
5.1	Vymezení základních pojmů	129
5.2	Tahová zkouška	132
5.3	Vyhodnocování zkoušek	143
5.4	Hookeův zákon pro prostý smyk	143
5.5	Vztahy mezi veličinami γ , ϵ	145
5.6	Hookeův zákon pro trojosou napjatost	146
5.7	Další experimenty	151
5.8	Únava	151
5.9	Vliv teploty	152

5.10	Obecný popis chování materiálu	155
5.11	Logika řešení úloh pružnosti	158
5.12	Deformační energie a Castigliánovy věty	159
5.12.1	Interaktivní test	166
6	Namáhání tahem a tlakem	171
6.1	Úvod	172
6.2	Normálové síly (N) a tahové nebo tlakové napětí (σ)	173
6.3	Poměrné deformace při tahu a Hookeův zákon	175
6.4	Využití Castigliánovy věty	187
6.5	Vliv teploty na napjatost a deformace v tahu a tlaku	189
6.6	Zatížení tíhovou silou v axiálním směru	192
6.7	Řešení staticky neurčitých úloh	194
6.8	Úvod do příhradových konstrukcí	198
6.9	Dovolené napětí (σ_{DOV}), návrh průřezu, zatížení a pevnostní kontrola	208
6.9.1	Interaktivní test	217
7	Kroucení prutů kruhového a mezikruhového průřezu	224
7.1	Výpočet napětí při kroucení	225
7.2	Deformace při kroucení	231
7.3	Pevnostní podmínka a dimenzování	232
7.4	Zahrnutí dalších vlivů do výpočtu	233
7.5	Úlohy staticky neurčité při kroucení	234
7.5.1	Interaktivní test	245

8	Rovinný ohyb štíhlých nosníků	250
8.1	Vymezení základních pojmů	251
8.1.1	Vnitřní silové účinky	252
8.2	Schwedlerovy věty a stanovení průběhu vnitřních účinků	254
8.2.1	Stanovení průběhu vnitřních silových účinků metodou řezu	256
8.3	Výpočet napětí	261
8.3.1	Geometrické podmínky deformace	263
8.4	Pevnostní kontrola a dimenzování	267
8.5	Zahrnutí dalších vlivů do výpočtu	273
8.6	Diferenciální rovnice průhybové čáry	274
8.7	Analytická metoda	278
8.8	Využití Castigliánovy věty	283
8.9	Staticky neurčité nosníky	294
8.9.1	Interaktivní test	305
9	Hypotézy pevnosti a jejich použití	309
9.1	Úvod	310
9.2	Haighův prostor a metody stanovení podmínek pevnosti	314
9.3	Základní hypotézy pevnosti pro křehké materiály	316
9.4	Základní hypotézy pevnosti pro tvárné materiály	321
9.5	Porovnání hypotéz a další hypotézy pevnosti	329
9.5.1	Interaktivní test	334
10	Vzpěr štíhlých prutů	339
10.1	Vzpěr štíhlých prutů, namáhaných tlakem	340
10.2	Stabilita přímého prutu – Eulerova metoda	340

10.3	Vyjádření vzpěrné pevnosti kritickým napětím	347
10.4	Nepružná oblast vzpěru	349
10.4.1	Interaktivní test	357
11	Pevnost skutečných strojních částí	362
11.1	Základní charakteristiky konstrukčních vrubů	363
11.2	Druhy cyklického zatěžování	368
11.3	Wöhlerova křivka a mez únavy hladkých těles	370
11.4	Faktory, ovlivňující mez únavy	372
11.4.1	Vliv velikosti tělesa a gradientu napětí	372
11.4.2	Vliv jakosti povrchu	374
11.4.3	Vliv nesymetrie cyklu	375
11.4.4	Stanovení bezpečnosti vůči mezi únavy	378
11.5	Mez únavy těles s vruby	379
11.5.1	Smyčkové diagramy částí s vruby	381
11.6	Mez únavy při složeném namáhání	382
11.6.1	Stanovení bezpečnosti vůči mezi únavy při kombinovaném namáhání	382
11.6.2	Interaktivní test	386
12	Experimentální pružnost	390
12.1	Úvod	391
12.2	Optické metody	394
12.3	Základy odporové tenzometrie	398
12.3.1	Elektrické tenzometry	399
12.3.1.1	Elektrické odporové tenzometry	400
12.3.1.2	Základní typy fóliových tenzometrů	401

12.3.1.3	Princip měření elektrickými odporovými tenzometry	402
12.3.1.4	Způsoby měření malých změn odporu tenzometrů	403
12.3.1.5	Nulová metoda	405
12.3.1.6	Výhylková metoda	406
12.3.1.7	Vliv provozních podmínek na tenzometrická měření	407
12.3.1.8	Základní vlastnosti elektrických odporových tenzometrů . .	408
12.3.1.9	Způsoby zapojení tenzometrů do můstku	409
12.3.1.10	Praktický postup při tenzometrických měřeních	410
12.3.1.11	Výpočet napětí ze změřených deformací	411
12.3.2	Interaktivní test	412
13	Stručný úvod do matematické teorie pružnosti	417
13.1	Předpoklady matematické teorie pružnosti	419
13.2	Základní rovnice matematické teorie pružnosti	419
13.2.1	Navierovy rovnice rovnováhy	420
13.2.2	Geometrické rovnice a rovnice kompatibility	422
13.2.3	Fyzikální rovnice	425
13.3	Okrajové podmínky	425
13.4	Základní způsoby řešení soustav rovnic	426
13.5	Zjednodušení úloh matematické teorie pružnosti	427
13.5.1	Zjednodušení na dvojrozměrný problém	427
13.5.2	Zjednodušení na jednodimenzionální úlohu	430
13.6	Numerické metody	431
13.7	Závěr	433
13.7.1	Interaktivní test	439

Literatura

443

Rejstřík

447



Obsah

15. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Kapitola 1

Úvod

Průvodce studiem

V prvním ročníku jsme se seznámili se základními poznatky statiky, tedy nauky o vzájemném působení tuhých těles. Ve skutečnosti není žádné těleso dokonale tuhé a v inženýrské praxi musíme pro návrh a kontrolu konstrukčních prvků vyjít z poznatků nauky o pružnosti a pevnosti. První část této úvodní kapitoly se věnuje vysvětlení základních pojmů a předpokladů, které v pružnosti a pevnosti používáme. V druhé části kapitoly jsou pak vyloženy geometrické charakteristiky ploch, které budeme v tomto předmětu potřebovat. Prakticky v každé kapitole se s některou z geometrických charakteristik průřezu setkáme, proto je důkladné studium této kapitoly zcela zásadní pro pochopení dalších statí.

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete:

- chápat základní pojmy pružnosti a pevnosti
- rozumět vztahu mezi vnějšími silami, vnitřními silami a napětím
- znát základní předpoklady pružnosti a pevnosti



Obsah

16. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

- umět odvodit vztahy pro výpočet vybraných geometrických charakteristik ploch
- schopni stanovit kvadratické momenty složených ploch symetrických obrazců
- chápat souvislosti mezi geometrickými charakteristikami a tuhostí prutů

1.1. Vymezení základních pojmů

Mechanika je nejstarší vědní obor a její nedílnou součástí je nauka o pružnosti a pevnosti.

Zatímco *statika* a *dynamika* patří do mechaniky tuhých těles, protože považují těleso za dokonale tuhé a zabývají se pouze účinky vnějších sil, pružnost a pevnost patří do mechaniky poddajných těles a zkoumá účinky sil vnějších i vnitřních. V zásadě můžeme vnější síly rozdělit do dvou kategorií:

- Síly, působící z vnějšku na těleso (zatížení, tlak větru, tíha sněhu, apod.).
- Síly, vázané na hmotu a působící ve všech bodech tělesa (odstředivé, gravitační a setrvačné síly).

Definice 1.1. *Pružnost* je schopnost pevných těles získat po odstranění vnějších účinků původní tvar. *Pevnost* je schopnost prvku (součásti či konstrukce) přenést zatížení bez porušení.

Každé těleso, vystavené účinku vnějších sil či dalších účinků (změna teploty a pod.), mění obecně svůj tvar a rozměry - deformuje se. Vnitřní síly pak vznikají v důsledku sil vnějších.



Obsah

17. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Skutečné vnitřní síly, které udržují těleso v pevném stavu, pružnost a pevnost nezkoumá, protože tyto nezávisí na vnějších vlivech. Zabývá se však tzv. doplňkovými vnitřními silami (dále jen vnitřní síly), které se snaží po odlehčení vnějšího zatížení vrátit těleso do původního tvaru. Mírou intenzity vnitřních sil je veličina, zvaná napětí. Vztah mezi vnějšími silami, vnitřními silami a mechanickým napětím je vyjádřen graficky na obr. 1.1.



Obr. 1.1

Z aplikovaných vnějších sil můžeme vypočítat nejprve vnitřní síly a až potom mechanické napětí. Někdy se však setkáváme i s inverzní úlohou, kdy ze známých hodnot napětí máme vypočítat velikost vnějších sil.

1.2. Cíle a předpoklady nauky o pružnosti a pevnosti

Pružnost a pevnost je tradičně rozdělena na:

- technickou nauku o pružnosti a pevnosti (angl. strength of materials), využívající zjednodušujících předpokladů pro navržení postupů k řešení elementárních praktických úloh
- matematickou teorii pružnosti (angl. elasticity), která využívá vyšší matematickou analýzu k řešení náročnějších úloh mechaniky kontinua

Všechny zákony a postupy, odvozené v nauce o pružnosti a pevnosti, jsou platné pouze za splnění následujících předpokladů:

1. Zatížení je statické, dynamické účinky lze zanedbat.
2. Těleso je spojitě (bez vad), považujeme jej za kontinuum.
3. V materiálu neexistují počáteční (zbytková) napětí.
4. Napětí jsou přímo úměrná deformacím, platí tzv. Hookeův zákon.
5. Materiál je ideálně pružný, přestane-li působit vnější zatížení, vymizí deformace i napětí.
6. Deformace jsou v porovnání s rozměry tělesa velmi malé.
7. Materiál je homogenní a isotropní, v každém bodě tělesa jsou tedy stejné fyzikální vlastnosti a ve všech směrech jsou shodné mechanické vlastnosti.



Obsah

19. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Jeden z nejdůležitějších a často využívaných principů je princip superpozice, který ovšem platí pouze za výše uvedených předpokladů. Princip superpozice umožňuje složitou úlohu rozdělit na dílčí (jednodušší) úlohy, tyto vyřešit a výsledky dílčích úloh sečíst. Princip superpozice je možné využít při řešení sil, napětí i deformací.

Mezi výpočetní úlohy pružnosti a pevnosti patří:

- podmínka pevnostní
- podmínka tuhostní
- staticky neurčitá úloha

V pružnosti jsou dva typy pevnostních výpočtů:

- přímé metody
 - výpočet napětí
 - výpočet deformací
- nepřímé metody
 - dimenzování, tj. určení rozměrů průřezu tak, aby napětí nebo deformace byly menší než dovolená hodnota
 - výpočet maximálního zatížení (např. síly či momentu silové dvojice), které vyvodí dovolené hodnoty napětí či deformace



Obsah

20. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Nejjednodušším typem modelového tělesa je *prut*. Nemůžeme mezi ně počítat obecně tělesa "dlouhá a tenká", ale musí být také splněny jisté předpoklady, o kterých bude řeč později. Únosnost řešeného prutu velmi souvisí s rozložením plochy průřezu.

1.3. Kvadratické momenty plochy průřezu

Z hlediska únosnosti prutu není podstatný pouze obsah průřezové plochy, ale také její rozložení (kromě namáhání prostým tahem). V praxi se často setkáváme například s tenkostěnnými profily, a to právě z toho důvodu, že velmi dobře využívají materiál. Konstrukce je lehčí při stejné únosnosti.

1.3.1. Výpočet těžiště plochy průřezu

Kvadratické momenty plochy se ve většině případů určují vzhledem k souřadnicovým osám, které procházejí těžištěm. Poloha těžiště plochy v kartézském souřadnicovém systému z - y o obsahu

$$S = \int_{\psi} dS \quad (1.1)$$

je dána souřadnicemi těžiště, pro něž byly v mechanice tuhých těles odvozeny následující výrazy

$$Y_T = \frac{\int_{\psi} y dS}{\int_{\psi} dS}, \quad Z_T = \frac{\int_{\psi} z dS}{\int_{\psi} dS}. \quad (1.2)$$



Obsah

21. strana ze 449



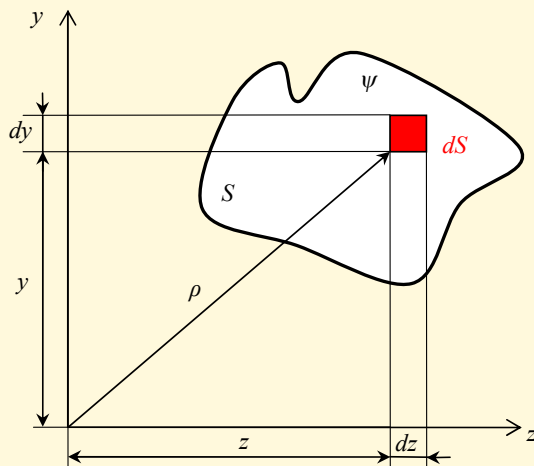
Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

1.3.2. Definice kvadratických momentů plochy

Mějme obecnou plochu v kartézském souřadnicovém systému z-y (obr. 1.2).



Obr. 1.2

Nejprve budou definovány statické momenty U plochy ψ , které vyjadřují rozložení plochy průřezu vždy k jedné ose a udávají se v $[m^3]$. Statické momenty plochy průřezu vzhledem k ose y a k ose z jsou dány výrazy

$$U_y = \int_{\psi} z dS, U_z = \int_{\psi} y dS. \quad (1.3)$$

Statické momenty ploch se objevily již ve výrazech pro souřadnice těžiště plochy. Z hlediska další probírané látky jsou důležitější kvadratické momenty plochy k jednotlivým osám, které jsou dány výrazy

$$I_y = \int_{\psi} z^2 dS, \quad I_z = \int_{\psi} y^2 dS, \quad D_{yz} = \int_{\psi} yz dS \quad (1.4)$$

a udávají se v $[m^4]$. Kvadratické momenty ploch, vztažené k jedné ose I_y , I_z se nazývají *osové momenty* a kvadratický moment, vyjadřující rozložení plochy vzhledem k oběma osám kartézského souřadnicového systému D_{yz} je označován jako *deviační*.

Z definice osových kvadratických momentů plochy (1.4) vyplývá, že jsou vždy kladné, na rozdíl od deviačního momentu, který může nabývat kladných i záporných hodnot.

U prutů namáhaných krutem se setkáváme s polárním kvadratickým momentem I_p , který je definován výrazem

$$I_p = \int_{\psi} \rho^2 dS, \quad (1.5)$$

kde vzdálenost od počátku lze vyjádřit ze souřadnic pomocí Pythagorovy věty

$$\rho^2 = y^2 + z^2. \quad (1.6)$$

Polární kvadratický moment plochy tedy vyjadřuje její rozložení vzhledem k počátku souřadnicového systému.



Obsah

23. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

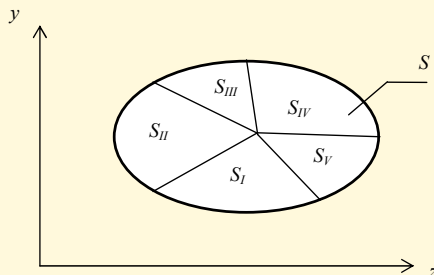
Po dosazení posledního výrazu dostáváme užitečný vztah mezi polárním kvadratickým momentem a osovými kvadratickými momenty plochy

$$I_p = \int_{\psi} (y^2 + z^2) dS = I_z + I_y. \quad (1.7)$$

Věta 1.2.

Polární kvadratický moment plochy k bodu (pólu), který je průsečíkem dvou kolmých os (v našem případě y a z), se rovná součtu kvadratických momentů plochy k těmto osám.

Mezi důležité vlastnosti kvadratických momentů ploch patří aditivnost. Kvadratický moment rovinného obrazce k dané ose se rovná algebraickému součtu kvadratických momentů dílčích částí vztažených k téže ose. Pro plochu na obr. 1.3 platí $S = S_I + S_{II} + S_{III} + S_{IV} + S_V$, avšak z definice kvadratických momentů plyne také $I_y = I_{yI} + I_{yII} + I_{yIII} + I_{yIV} + I_{yV}$ a $I_z = I_{zI} + I_{zII} + I_{zIII} + I_{zIV} + I_{zV}$.



Obr. 1.3



Obsah

24. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Počátek souřadnicového systému obvykle vkládáme do těžiště průřezu.

Definice 1.3. Kvadratické momenty plochy vztažené k osám, procházejících těžištěm, nazýváme *centrální momenty setrvačnosti*. Osy procházející těžištěm průřezu se nazývají *centrální osy*.

Budeme-li zvolený kartézský souřadnicový systém natáčet, bude se měnit také rozložení plochy vzhledem k souřadnicovým osám a tím i osově kvadratické momenty. U každé plochy pak existuje taková poloha souřadnicového systému, kdy jsou osově kvadratické momenty extrémní a zároveň je deviační moment nulový.

Definice 1.4. Nalezením dvou vzájemně kolmých os, procházejících těžištěm, k nimž je deviační moment nulový, získáme tzv. *hlavní centrální osy* 1 a 2, k nimž jsou hodnoty kvadratických momentů extrémní – *hlavní centrální kvadratické momenty* ($I_1 = I_{max}$, $I_2 = I_{min}$).



Obsah

25. strana ze 449

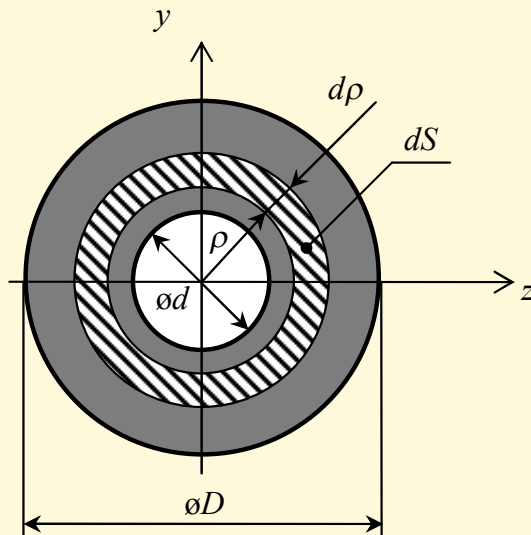


Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Příklad 1.5. Odvoďte polární kvadratický moment pro mezikruhový průřez s rozměry d a D dle obr. 1.4.



Obr. 1.4

Při odvození polárního kvadratického momentu mezikruží lze vyjít ze vztahu 1.5, přičemž je výhodné zvolit element plochy také ve tvaru mezikruží.

Potom obsah elementu plochy dS lze získat jako násobek obvodu a tloušťky elementu $dS = 2\pi\rho d\rho$ a po dosazení do vztahu (1.5) se postupně odvodí

$$I_p = \int_{\psi} \rho^2 dS = 2\pi \int_d^D \rho^3 d\rho = 2\pi \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_d^D = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4) = I_y + I_z = 2I_y. \quad (\text{P1})$$

Odtud pak lze vyjádřit

$$I_y = I_z = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4). \quad (\text{P2})$$

Vztah (P1) lze rovněž získat s využitím aditivních vlastností kvadratických momentů jako rozdíl kvadratických momentů vnějšího a vnitřního kruhu

$$I_p = I_{pD} - I_{pd} = \frac{\pi}{32} D^4 - \frac{\pi}{32} d^4 = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4). \quad (\text{P3})$$

Uvědomme si, že osové centrální kvadratické momenty u mezikruží (i kruhu) budou nabývat stejné hodnoty pro jakkoliv natočený souřadnicový systém, procházející těžištěm. Z této představy plyne, že pro hlavní centrální kvadratické momenty mezikruží platí

$$I_1 = I_2 = I_y = I_z. \quad (\text{P4})$$



Obsah

27. strana ze 449



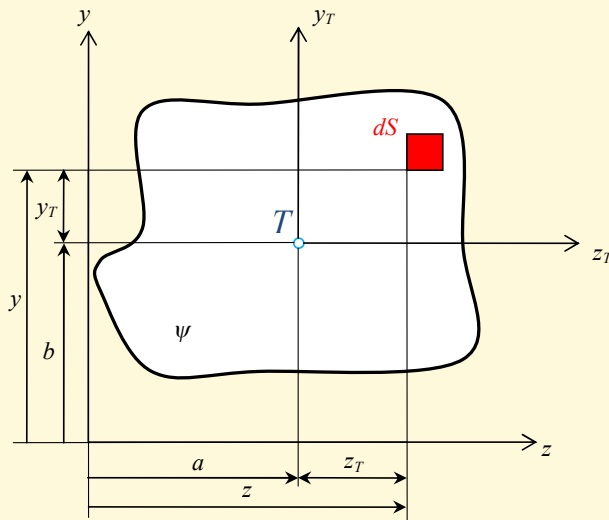
Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

1.3.3. Kvadratické momenty plochy k rovnoběžným osám (Steinerova věta)

Uvažujme rovinnou plochu obecného tvaru dle obr. 1.5 a předpokládejme, že jsou známy souřadnice těžiště a , b ve zvoleném kartézském souřadnicovém systému (budeme je nazývat referenční). V těžišti plochy nechť je zaveden souřadnicový systém s osami y_T a z_T , rovnoběžnými s osami referenčního souřadnicového systému y a z . Naším cílem bude nalezení vztahů mezi kvadratickými momenty plochy, vztaženými k osám referenčním a centrálními kvadratickými momenty plochy, tedy mezi I_y a I_{yT} , respektive I_z a I_{zT} .



Obr. 1.5

Transformaci z referenčního souřadnicového systému $z-y$ do centrálního souřadnicového systému $z_T - y_T$ lze zapsat takto

$$\begin{aligned} z &= z_T + a, \\ y &= y_T + b. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Dosazením do (1.4) získáme

$$\begin{aligned} I_y &= \int_{\psi} z^2 dS = \int_{\psi} (z_T + a)^2 dS = \int_{\psi} z_T^2 dS + 2 \int_{\psi} a \cdot z_T dS + \int_{\psi} a^2 dS = \\ &= I_{yT} + 2a \int_{\psi} z_T dS + a^2 S, \end{aligned} \quad (1.9)$$

kde $\int_{\psi} z_T dS$ je statický moment plochy k ose y_T .

Ze vztahu (1.2) vyplývá, že k centrální ose je statický moment plochy vždy nulový, proto se vztah (1.9) dále zjednoduší

$$I_y = I_{yT} + a^2 S. \quad (1.10)$$

Analogicky lze postupovat i u zbývajících kvadratických momentů a získá se

$$\begin{aligned} I_z &= I_{zT} + b^2 S, \\ D_{yz} &= D_{yTzT} + abS. \end{aligned} \quad (1.11)$$



Obsah

29. strana ze 449

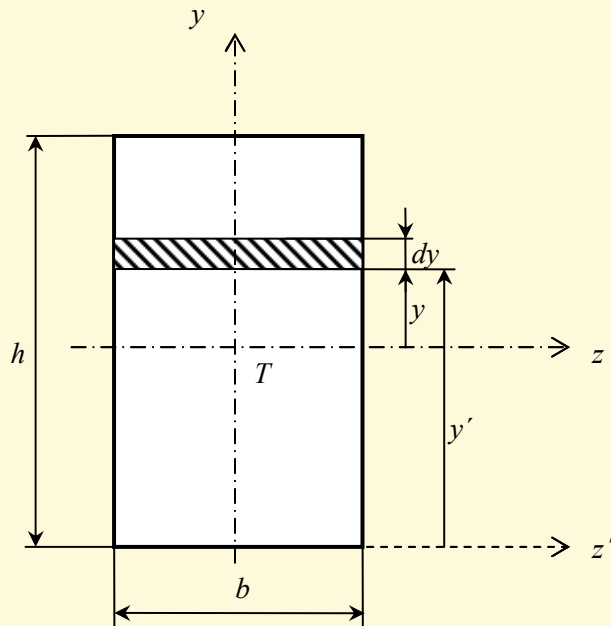


Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Příklad 1.6. Odvoďte vztahy pro kvadratické momenty obdélníku s rozměry stran b a h k osám z , z' (obr. 1.6).



Obr. 1.6

V případě mezikruhového průřezu bylo elementární plochou mezikruží, u obdélníkového průřezu pro výpočet s výhodou volíme jako elementární plochu obdélník

$$I_z = \int_{\psi} y^2 dS = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 b dy = b \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{bh^3}{12}, \quad (1.12)$$

$$I_{z'} = \int_{\psi} y'^2 dS = \int_0^h y'^2 b dy = b \left[\frac{y'^3}{3} \right]_0^h = \frac{bh^3}{3}. \quad (1.13)$$

Stejného výsledku bychom v případě $I_{z'}$ dosáhli s využitím Steinerovy věty, tedy

$$I_{z'} = I_{zT} + \left(\frac{h}{2} \right)^2 \cdot S = \frac{b \cdot h^3}{12} + \frac{h^2}{4} \cdot b \cdot h = \frac{b \cdot h^3}{3}. \quad (1.14) \quad \blacktriangle$$

1.3.4. Hlavní kvadratické momenty složených ploch s osou symetrie

V technické praxi se často používají tvarově složitější průřezy, ať již z důvodů designových, konstrukčních či pevnostních. Vhodnou volbou tvaru průřezu lze při zachování stejné plochy průřezu docílit značně vyšší nosnosti prutu. Složitější průřezy lze obvykle rozdělit na několik jednoduchých obrazců, pro které je známo analytické řešení centrálních kvadratických momentů. Kvadratické momenty takového složeného obrazce lze vypočítat z kvadratických momentů dílčích částí s využitím Steinerovy věty.



Obsah

31. strana ze 449



Zavřít dokument

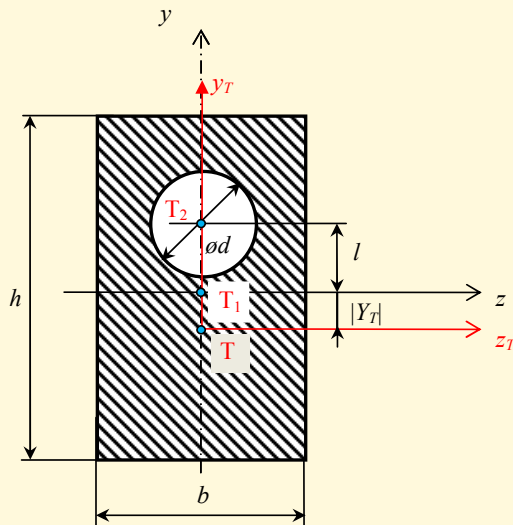
Konec

Celá obrazovka / Okno

Postup výpočtu je následující:

1. Rozdělení průřezu na dílčí plochy.
2. Stanovení polohy těžiště.
3. Aplikace Steinerovy věty.

Příklad 1.7. Stanovte hlavní centrální kvadratické momenty plochy z obr. 1.7, jestliže jsou dány její rozměry $b = 20\text{mm}$, $h = 40\text{mm}$, $l = 10\text{mm}$ a $d = 10\text{mm}$.



Obr. 1.7

Ad 1) *Rozdělení průřezu na dílčí plochy.*

Plocha 1 – obdélník (těžiště T_1), plocha 2 - kruh (těžiště T_2).

Ad 2) *Stanovení polohy těžiště.*

Těžiště musí ležet na ose symetrie

$$Z_T = 0 \text{ mm.} \quad (1.15)$$

Druhou souřadnici těžiště lze získat upravením vztahu (1.2). Pro N dílčích ploch platí

$$Y_T = \frac{\int_S y dS}{\int_S dS} = \frac{\sum_{i=1}^N Y_{Ti} S_i}{\sum_{i=1}^N S_i}. \quad (1.16)$$

Po dosazení

$$Y_T = \frac{Y_{T1} S_1 - Y_{T2} S_2}{S_1 - S_2} = \frac{0 \cdot 40 \cdot 20 - 10 \cdot \frac{\pi \cdot 10^2}{4}}{40 \cdot 20 - \frac{\pi \cdot 10^2}{4}} = -1,089 \text{ mm.} \quad (1.17)$$

Poloha těžiště je tedy dána souřadnicemi: $T [0; -1,089]$.



Obsah

33. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Ad 3) Aplikace Steinerovy věty.

Výpočet centrálních kvadratických momentů plochy

$$I_{zT} = I_{zT1} + Y_T^2 S_1 - \left[I_{zT2} + (l + |Y_T|)^2 S_2 \right] = \frac{1}{12} b h^3 + Y_T^2 b h - \left[\frac{\pi d^4}{64} + (l + |Y_T|)^2 \frac{\pi d^2}{4} \right]. \quad (1.18)$$

Po dosazení vyjde $I_{zT} = 97467 \text{ mm}^4$.

$$I_{yT} = I_{yT1} + 0^2 \cdot S_1 - \left[I_{yT2} + 0^2 \cdot S_2 \right] = \frac{1}{12} h b^3 - \frac{\pi d^4}{64}. \quad (1.19)$$

Po dosazení vyjde $I_{yT} = 26176 \text{ mm}^4$.



1.3.5. Moduly průřezu

Dosud jsme zkoumali průřezové charakteristiky teoreticky. Podívejme se na ně nyní z praktického pohledu. Příkladem prutu může být např. také tenké přímé pravítko s přibližně obdélníkovým průřezem. Pokud jej uchopíme za oba konce a zatížíme uprostřed, bude velikost průhybu záviset na tom, jestli jsme sílu aplikovali rovnoběžně s delší stranou průřezu (nepozorovatelný průhyb) či kolmo na ni (velký průhyb).



Obsah

34. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Uvedený příklad spadá do kapitoly, věnované rovinnému ohybu a v tomto případě bychom měli nazývat prut nosníkem, viz. kapitola 8. Jak bude ukázáno v odkazované kapitole, únosnost pravitka souvisí zejména s kvadratickým momentem průřezu k ose kolmé na směr působící síly, ale také s největší vzdáleností krajního vlákna od těžiště průřezu ve směru působící síly. Zavádí se proto pojem modulu průřezu v ohybu W_o [m^3], který oba vlivy zahrnuje. Z obdobných důvodů se také zavádí průřezový modul v krutu W_k [m^3], viz kapitola 7.

Definice 1.8. *Průřezový modul v ohybu se definuje pro nosníky, u nichž veškeré vnější zatížení působí v rovině, tvořené střednicí nosníku a osou symetrie průřezu (rovinu ohybu), a to jako podíl centrálního kvadratického momentu průřezu, vztaženého k ose, kolmé na rovinu ohybu, a největší vzdálenosti krajního vlákna od těžiště na ose symetrie průřezu.*

Definice 1.9. *Průřezový modul v krutu se pro kruhový i mezikruhový průřez vyjadřuje poměrem polárního kvadratického momentu plochy a vzdálenosti vnějšího povrchu od těžiště průřezu.*

Věta 1.10.

Pro výpočet průřezových modulů v ohybu resp. krutu neplatí aditivní zákon jako v případě kvadratických momentů průřezu.



Obsah

35. strana ze 449

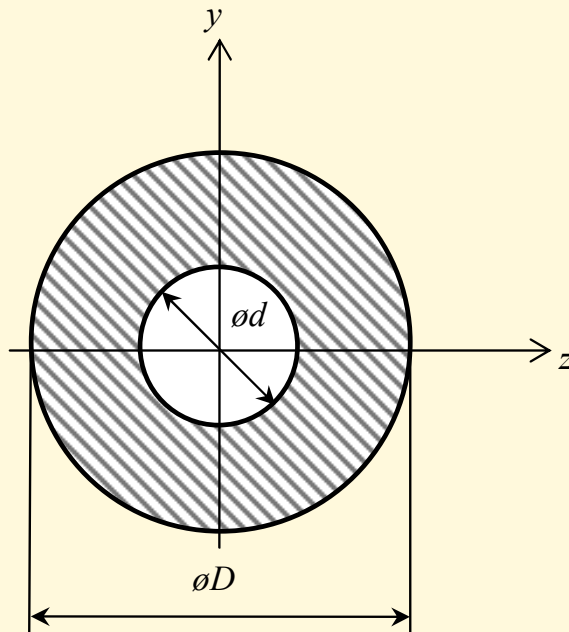


Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Příklad 1.11. Určete průřezový modul v ohybu a v krutu u mezikruhového průřezu, uvedeného na obr. 1.8.



Obr. 1.8

Průřezový modul v ohybu

Dle definice

$$W_o = \frac{I_z}{\frac{D}{2}} = \frac{\frac{\pi}{64} (D^4 - d^4)}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{(D^4 - d^4)}{D}. \quad (1.20)$$

Uvědomme si neplatnost aditivního zákona $W_o \neq W_{oD} - W_{od}$!

Průřezový modul v krutu

Platí

$$W_k = \frac{I_p}{\frac{D}{2}} = \frac{\frac{\pi}{32} (D^4 - d^4)}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{(D^4 - d^4)}{D}. \quad (1.21)$$

▲



Obsah

37. strana ze 449



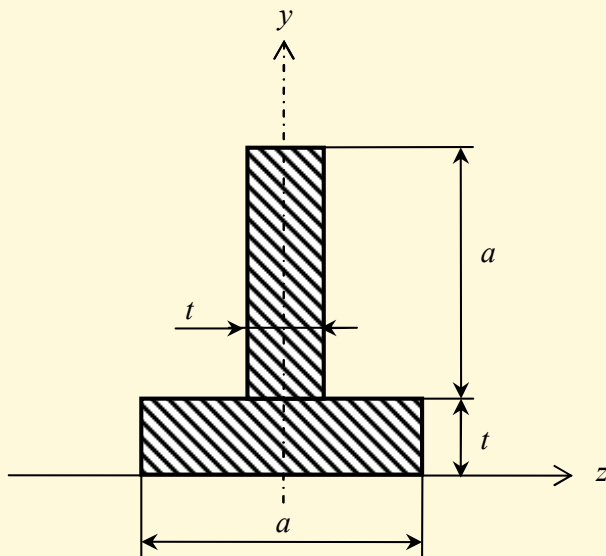
Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Příklady k procvičení

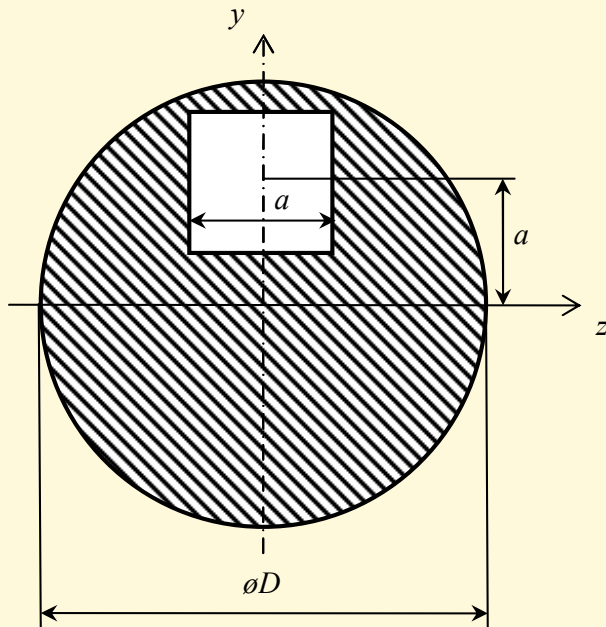
1. Určete polohu těžiště a hlavní kvadratické momenty průřezu (obr. 1.9) vzhledem k osám, procházejícím těžištěm. Dáno: $a = 60 \text{ mm}$, $t = 20 \text{ mm}$.



Obr. 1.9

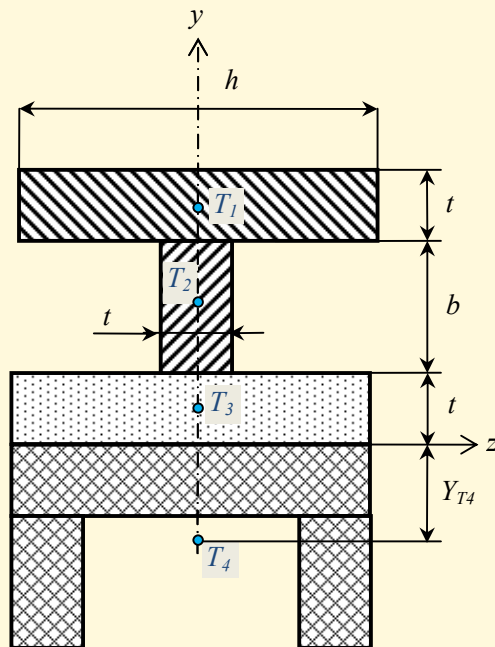
2. Určete polohu těžiště a hlavní centrální kvadratické momenty průřezu na obr. 1.10.

Dáno: $a = 30 \text{ mm}$, $D = 100 \text{ mm}$.



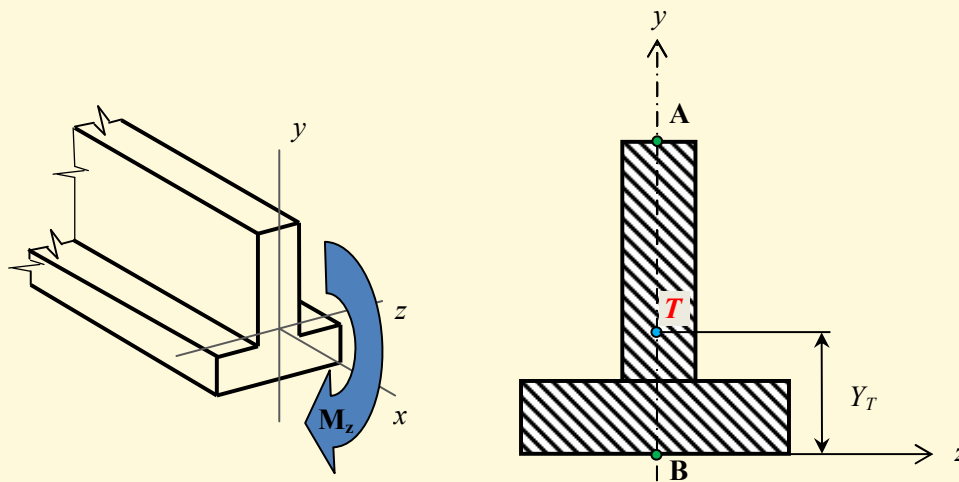
Obr. 1.10

3. Určete polohu těžiště a hlavní centrální kvadratické momenty průřezu (obr. 1.11).
 Dáno: $h = 40 \text{ mm}$, $t = 10 \text{ mm}$, $b = 30 \text{ mm}$, $Y_{T4} = 17 \text{ mm}$, $I_{zT4} = 0,144 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$,
 $I_{yT4} = 0,193 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$.



Obr. 1.11

4. Určete modul průřezu v ohybu pro místa A , B u průřezu z příkladu 1, dochází-li k ohybu v rovině x - y vlivem ohybového momentu M_z (obr. 1.12).



Obr. 1.12

Klíč k příkladům k procvičení

1. $Y_T = 30 \text{ mm}$, $I_{zT} = 1,36 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$, $I_{yT} = 400 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$
2. $Y_T = -3,88 \text{ mm}$, $I_{zT} = 3,926 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$, $I_{yT} = 4,841 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$
3. $Y_T = 5 \text{ mm}$, $I_{zT} = 1,42 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$, $I_{yT} = 0,302 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$
4. $W_{oA} = \frac{I_{zT}}{(a+t-Y_T)} = 27200 \text{ mm}^3$, $W_{oB} = \frac{I_{zT}}{Y_T} = 45333 \text{ mm}^3$

Pojmy k zapamatování

- vnitřní síly
- pružnost
- pevnost
- homogenní a izotropní materiál
- osově kvadratické momenty ploch
- deviační kvadratický moment
- polární kvadratický moment
- modul průřezu v ohybu
- modul průřezu v krutu



Obsah

42. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

1.3.6. Interaktivní test

Následující test byl vytvořen pomocí balíčku **acrotex**. Test zahájíte kliknutím na tlačítko „Zacátek testu“. U otázek, kde lze volit jen jednu odpověď (test nedovolí zaškrtnout více odpovědí), je správná odpověď bodována takovým počtem bodů, jaký je uveden v závorce u zadání a špatná odpověď je bodována 0 body. U otázek, kde lze volit více správných odpovědí, je součet bodů správných odpovědí uveden v závorce u zadání a za každou špatnou odpověď bude odečten jeden bod.

1. (2b.) Který(é) z uvedených předpokladů pružnosti a pevnosti je uveden chybně?

Zatížení je statické, dynamické účinky lze zanedbat.

V materiálu existují počáteční (zbytková) napětí.

Materiál je ideálně pružný, přestane-li působit vnější zatížení, vymizí deformace i napětí.

Materiál je nehomogenní a anisotropní.

Těleso je spojitě (bez vad), považujeme jej za kontinuum.

Napětí jsou přímo úměrná deformacím, platí tzv. Hookeův zákon.

Deformace jsou v porovnání s rozměry tělesa velmi malé.



Obsah

43. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

2. (2b.) Mezi přímé metody pružnosti a pevnosti patří

dimenzování

výpočet napětí

výpočet maximálního zatížení

3. (2b.) Rozměr kvadratického momentu průřezu je

m^3

m^4

$\text{kg } m^2$

Nm

4. (2b.) Jaké mohou být hlavní centrální kvadratické momenty?

pouze kladné

kladné i záporné

pouze záporné



Obsah

44. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

5. (2b.) Deviační moment může být

pouze záporný

kladný i záporný

pouze kladný

6. (2b.) Pro kruhový (mezikruhový) průřez jsou osový kvadratický moment a polární moment průřezu v poměru

1/1

1/2

2/1

1/1

7. (2b.) Osa symetrie příčného průřezu je

hlavní centrální osa

je rovnoběžkou s hlavní osou ve vzdálenosti a od ní

centrální osa, ale ne hlavní



Obsah

45. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

8. (2b.) Deviační moment průřezu je vždy roven nule, je-li jedna z os souřadnicového systému

osou symetrie průřezu

osou 1. a 2. oktantu

deviační moment nikdy nemůže nabýt nulové hodnoty

tečnou k obrysu příčného průřezu

9. (2b.) V jakém případě můžeme použít Steinerovy věty?

Když známe centrální kvadratický moment plochy a hledáme kvadratický moment plochy k libovolné ose.

Když známe kvadratický moment plochy k dané ose a hledáme kvadratický moment plochy k libovolné ose, která je rovnoběžná s danou osou.

Když známe centrální kvadratický moment plochy a hledáme kvadratický moment plochy k ose s centrální osou rovnoběžnou.

10. (2b.) Co je známo pro moduly průřezu?

Platí pro ně aditivní zákon.

Platí pro ně aditivní zákon za určitých podmínek.

Neplatí pro ně aditivní zákon.



Obsah

46. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:

Pro ukončení testu je třeba kliknout na tlačítko „Konec testu“. Opravení testu se provede kliknutím na tlačítko „Výsledky“, správné odpovědi budou označeny zeleně a červeně budou označeny odpovědi chybné. Při použití otázky s tvořenou odpovědí se správná odpověď zobrazí v rámečku umístěném vpravo dole v navigačním panelu po kliknutí na tlačítko „Odpověď“.



Obsah

47. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Kapitola 2

Koncept napětí

Průvodce studiem

V předchozí kapitole byly definovány pojmy vnější a vnitřní síla. Tato kapitola se zabývá stanovením vnitřních sil (respektive vnitřních statických účinků) pomocí metody řezu. Je zde vysvětlen pojem mechanické napětí. V další části kapitoly jsou názorně vysvětleny základní případy namáhání.

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete:

- znát princip metody řezu
- umět definovat normálové a smykové napětí
- umět vysvětlit pojem tenzor napjatosti
- chápat Saint-Venantův princip
- umět stanovit maximální napětí v průřezu pro základní druhy namáhání



Obsah

48. strana ze 449



Zavřít dokument

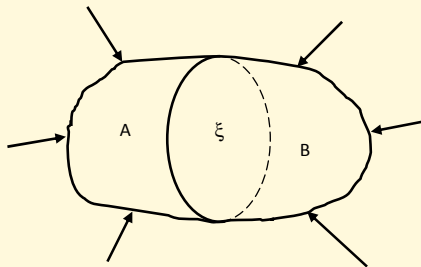
Konec

Celá obrazovka / Okno

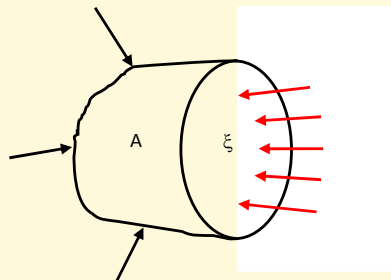
2.1. Princip metody řezu

Vnitřní síly je možno určit pomocí metody řezu. Autorem této metody je německý matematik L. Euler.

Princip metody spočívá v tom, že těleso myšleným řezem ξ rozdělíme na dvě části A a B (obr. 2.1). Odstraníme-li např. část B a požadujeme-li, aby část A zůstala v rovnováze, musíme účinek části B nahradit vnitřními silami, působícími v rovině řezu ξ (obr. 2.2).



Obr. 2.1



Obr. 2.2

Vnitřní síly tvoří soustavu nekonečně malých sil, které jsou k ploše řezu obecně šikmé. Vnitřní síly se dají obecně vyřešit ze statických podmínek rovnováhy. Pokud se účinek vnějších sil dá nahradit jedinou vnější silou, musí jí odpovídat příslušná vnitřní síla. Obdobná zákonitost platí i pro momenty vnějších zatížení; odpovídají jim momenty vnitřních sil. Souhrnně hovoříme o vnitřních statických účincích. Několik příkladů určení vnitřních statických účinků pro různé způsoby zatížení je uvedeno na obr. 2.3.

Na obr. 2.3 jsou vykresleny základní případy namáhání, kterým se blíže bude věnovat

Obsah

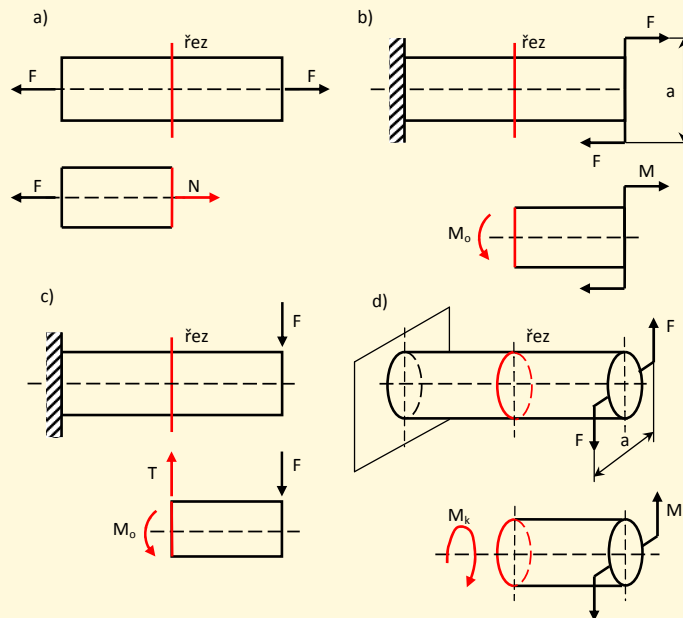
49. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno



Obr. 2.3

kapitola 2.4. Při namáhání vnější tahovou silou ve směru normály (obr. 2.3a) bude výsledná vnitřní síla působit ven z průřezu také v normálovém směru - namáhání tahem.

V případě namáhání jednostranně vetknutého prutu silovou dvojicí dle obr. 2.3b je výsledný účinek vnitřních sil, působících v rovině řezu, dán ohybovým momentem M_o -

prostý ohyb.

Je-li však tentýž nosník namáhán na volném konci například osamělou silou (obr. 2.3c), v průřezu vznikají také nenulové vnitřní síly v tečném směru, a tak výsledný silový účinek vnitřních sil je dán posouvající silou T a výsledný momentový účinek vnitřních normálových sil je dán ohybovým momentem M_o . Rozložení vnitřních normálových sil se mění po průřezu lineárně, což je znázorněno zeleně na obr. 2.11.

Poslední znázorněný případ (obr. 2.3d) odpovídá kroucení prutu kruhového průřezu a výsledný momentový účinek vnitřních sil, působících v myšleném řezu, odpovídá krouticímu momentu M_k . Rozložení vnitřních tečných sil je v průřezu také lineární, viz obr. 2.12.

Vraťme se nyní k metodě řezu, naznačené na obr. 2.1 a 2.2. Uvažujme nyní, že na elementární plošce dS působí v obecném směru vnitřní síla dF , kterou můžeme rozložit do směru normálového (dN) a směru tečného (dT), viz obr. 2.4.



Obsah

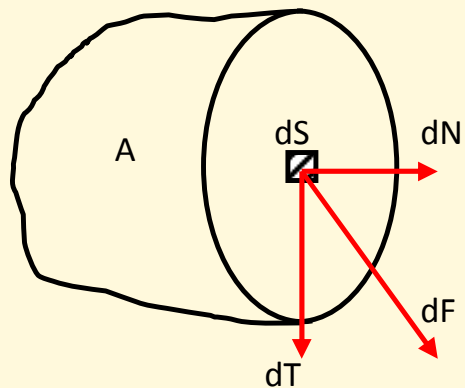
51. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno



Obr. 2.4

Z úvodu první kapitoly víme, že mechanické napětí je intenzitou vnitřních sil. Proto podíl vnitřní síly, působící v obecném směru na element plochy průřezu (obr. 2.4), můžeme nazvat obecným napětím

$$\nu = \frac{dF}{dS}. \quad (2.1)$$

Kolmá složka způsobuje normálové napětí

$$\sigma = \frac{dN}{dS} \quad (2.2)$$

a tečná složka způsobuje smykové napětí

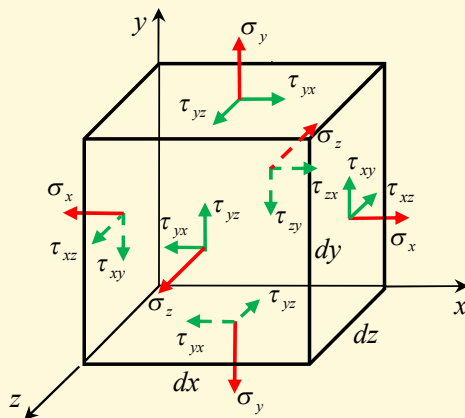
$$\tau = \frac{dT}{dS}. \quad (2.3)$$

Fyzikální jednotkou napětí je $Pa = \frac{N}{m^2}$, v technické praxi se napětí zpravidla udává v $MPa = \frac{N}{mm^2}$.

Normálová napětí představují vazbu, která brání částicím tělesa se od sebe oddálit ve směru kolmém k rovině řezu. Smyková napětí pak vyjadřují vazbu částic tělesa, jež jim brání se vůči sobě posouvat v rovině řezu.

2.2. Napětí v bodě tělesa

Vnitřnímu bodu tělesa odpovídá v pevnostních výpočtech krychle o velice malých rozměrech, tzv. elementární krychle (obr.2.5).



Obr. 2.5

Všech šest stěn, omezujících krychli, vzniklo aplikací metody řezu. Z předchozího textu kapitoly víme, že na každé straně krychle obecně působí normálové a smykové napětí. Smyková napětí, působící na příslušných rovinách mají obecný směr, takže je můžeme rozložit do dvou navzájem kolmých směrů, rovnoběžných se souřadnicovými osami.

Jak už bylo uvedeno, normálová napětí se zpravidla označují řeckým písmenem σ . Index u normálového napětí značí směr normály plochy, na které napětí působí. Smyková napětí se zpravidla označují řeckým písmenem τ a dvěma indexy, první index značí směr normály plochy, na které napětí působí, druhý index směr napětí. Je nutno podotknout, že smyková napětí, působící na příslušných rovinách, mají obecný směr, takže je můžeme rozložit do dvou navzájem kolmých směrů. Např. na rovině, která je kolmá k ose x působí normálové napětí σ_x a smyková napětí τ_{xy} , τ_{xz} . Výsledné smykové napětí τ_x je dáno geometrickým součtem $\tau_x = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}$.

Stav napjatosti v bodě tělesa je určen devíti složkami napětí. Jsou to složky

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{xz}, \tau_{zx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}.$$

Veličina, určující stav napjatosti v bodě tělesa, je *tenzor napjatosti*. Tenzor napjatosti je symetrickým tenzorem druhého řádu a jeho složky lze zapsat maticově

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$



Obsah

54. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

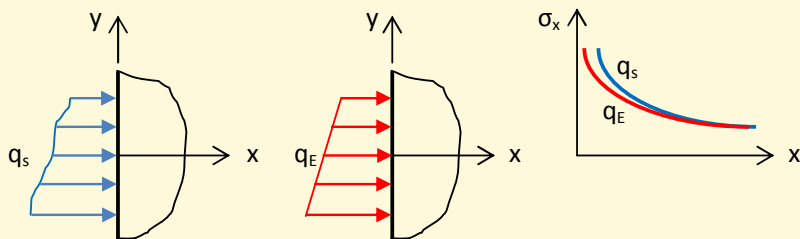
Každý sloupec odpovídá jedné rovině elementární krychle (obr. 2.5). Pro smykové složky tenzoru napjatosti platí, že absolutní hodnoty sdružených napětí jsou stejné (viz kapitola 3.2), tedy

$$|\tau_{xy}| = |\tau_{yx}|, \quad |\tau_{xz}| = |\tau_{zx}|, \quad |\tau_{yz}| = |\tau_{zy}|, \quad (2.5)$$

takže napěťový stav je obecně definován šesti složkami napětí: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$.

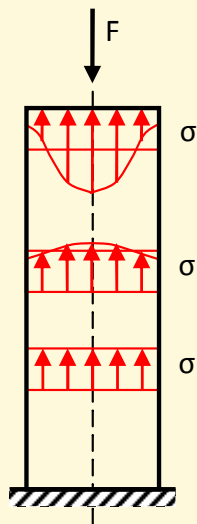
2.3. Saint-Venantův princip

Princip elastické ekvivalence staticky ekvivalentních systémů zatěžujících sil byl formulován v roce 1855 Barré de Saint-Venantem. Tento princip říká, že stav napětí a deformace tělesa v místech, které jsou dostatečně vzdálené od oblasti, ve které působí vnější síly, je stejný, pokud dané zatížení nahradíme jiným o stejné výslednici sil a stejném momentu. Tento postup je používán téměř vždy, když se idealizuje fyzikální úloha tak, aby byla přístupná pro matematické řešení. Např. skutečné spojité zatížení q_s je možno nahradit ekvivalentním zatížením q_E (obr. 2.6), průběh napětí v dostatečné vzdálenosti od osy x je totožný.



Obr. 2.6

Je vhodné si uvědomit, že v místě aplikovaného povrchového zatížení dochází v praxi většinou ke koncentraci napětí a až v dostatečné vzdálenosti od zatížení je rozložení napětí rovnoměrné (obr. 2.7). Rovněž při tahové zkoušce se předpokládá v dostatečné vzdálenosti od místa uchycení tyče rovnoměrné rozložení napětí a nezkoumá se, jakým způsobem je tyč uchycena ani jakým způsobem se přenášejí síly z čelistí zkušebního stroje na konce zkušební tyče.



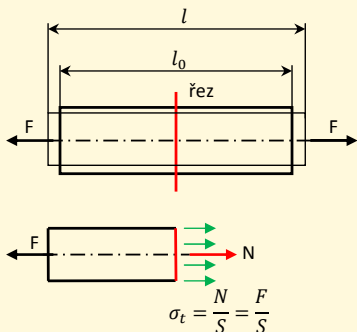
Obr. 2.7

2.4. Základní druhy namáhání

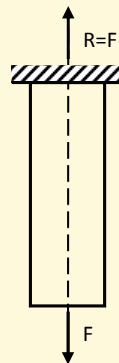
Základní druhy namáhání rozlišujeme podle napětí, které v tělese vzniká v důsledku vnějšího zatížení. V technické praxi se rozlišuje pět základních druhů namáhání: tah, tlak, smyk, ohyb a krut. Jednotlivými druhy namáhání se budeme podrobněji zabývat v následujícím textu.

2.4.1. Namáhání tahem (tlakem)

Namáhání tahem (resp. tlakem) způsobují dvě stejně velké síly opačné orientace, ležící na společné nositelce, která je totožná s těžištní osou daného průřezu (obr. 2.8). Těžištní osa průřezu se nazývá střednice. Jeden konec součásti může být upnut (v tomto případě je reakce rovna zátěžné síle) (obr. 2.9).



Obr. 2.8



Obr. 2.9

U tahového namáhání působí síly ven z průřezu, u tlakového namáhání do průřezu. Předpokládáme, že tyč, namáhaná tahem, je homogenní (každá část tyče má stejné mechanické vlastnosti).

Předpokládáme, že vnitřní síly v místech dostatečně vzdálených od obou konců jsou stejně velké, napětí je tudíž po celém průřezu rovnoměrně rozloženo a jeho velikost je

$$\sigma_t = \frac{N}{S} = \frac{F}{S}. \quad (2.6)$$

Při namáhání tlakem je napětí opačného znaménka. Tlakové napětí se zpravidla značí indexem d a je definováno vztahem

$$\sigma_d = \frac{N}{S} = -\frac{F}{S}. \quad (2.7)$$

Dlouhé štíhlé pruty je u tlakového namáhání nutno dále kontrolovat z hlediska ztráty stability (viz kapitola 10).

2.4.2. Namáhání smykem

Toto namáhání je způsobeno dvěma stejně velkými silami, ležícími na společné nositelce v rovině řezu a působícími proti sobě směrem do tělesa (obr. 2.10). Prostý smyk je pouze teoretický případ a vyskytuje se přibližně při stříhání materiálu.



Obsah

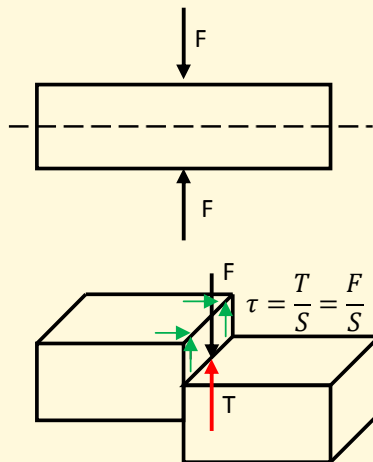
58. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno



Obr. 2.10

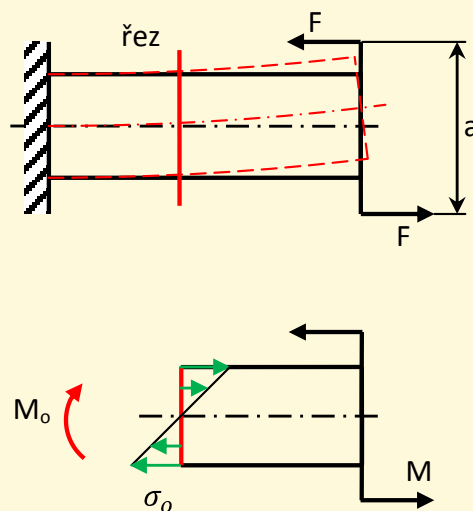
Smykové napětí je definováno následovně

$$\tau = \frac{T}{S} = \frac{F}{S}. \quad (2.8)$$

Smykové napětí je po průřezu rozloženo rovnoměrně. Dá se dokázat, že na rovině kolmé k rovině řezu je smykové napětí stejné velikosti, ale opačného znaménka (viz kapitolu 3.2).

2.4.3. Namáhání ohybem

Toto namáhání je charakterizováno silovou dvojicí (ohybovým momentem), ležící v rovině kolmé na rovinu řezu. Namáhání ohybem je charakterizováno normálovým napětím σ_o , které je po průřezu rozloženo nerovnoměrně. V případě, že střednice tělesa je přímka, se předpokládá lineární rozložení napětí (obr. 2.11).



Obr. 2.11

Při zatížení ohybovým momentem podle obr. 2.11 jsou horní vlákna průřezu tažena, spodní stlačována, těžištěm prochází neutrální osa, na které je nulové napětí.

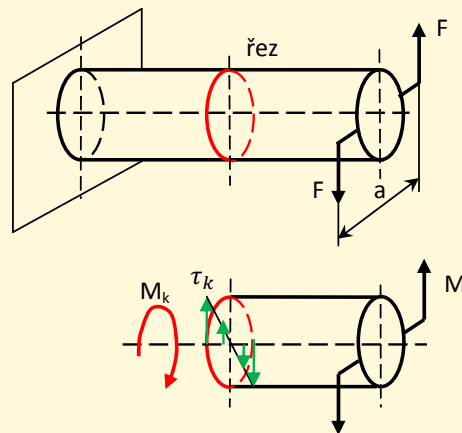
Ohybové napětí nabývá maxima v krajních vláknech průřezu a jeho velikost je

$$\sigma_o = \frac{M_o}{W_o}, \quad (2.9)$$

kde W_o je modul odporu průřezu v ohybu popsáný již v kapitole 1.

2.4.4. Namáhání krutem

Toto namáhání je charakterizováno zatížením silovou dvojicí, ležící v rovině řezu (kroučícím momentem). Namáhání krutem je charakterizováno smykovým napětím τ_k , které je po průřezu rozloženo podle přímky s nulovou hodnotou v ose prutu (obr. 2.12).



Obr. 2.12

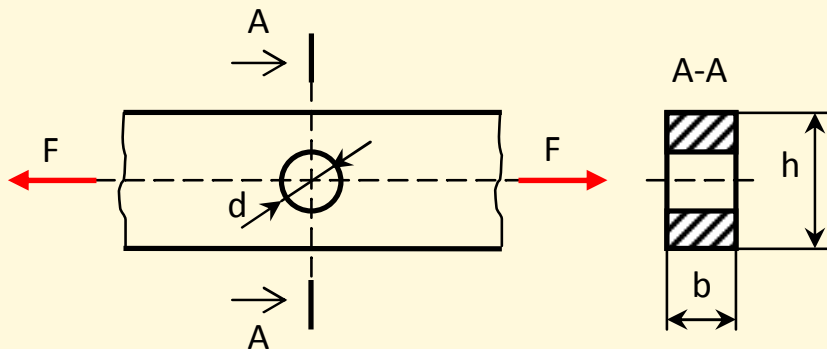
Smykové napětí nabývá maxima na vnějším obvodu průřezu, jeho velikost je dána výrazem

$$\tau_k = \frac{M_k}{W_k}, \quad (2.10)$$

kde W_k je průřezový modul v krutu. Jeho význam byl také vysvětlen v kapitole 1.

Příklady k procvičení

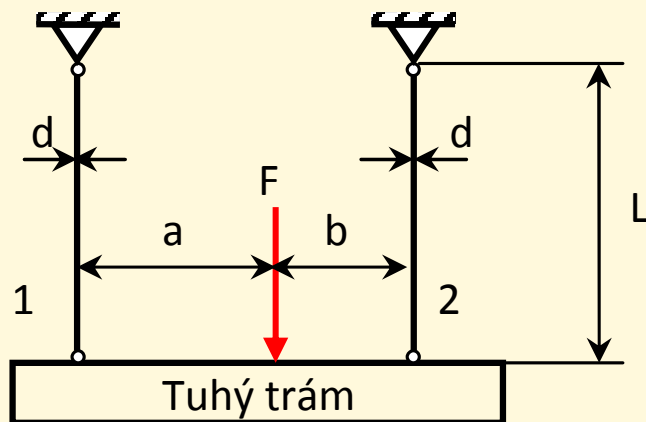
1. Plochá ocelová tyč (obr. 2.13) s rozměry průřezu $b = 20 \text{ mm}$, $h = 35 \text{ mm}$ je zatížena konstantní silou $F = 30 \text{ kN}$. Určete maximální napětí, které vznikne v nebezpečném průřezu, jestliže je v tyči kruhový otvor o průměru $d = 15 \text{ mm}$.



Obr. 2.13

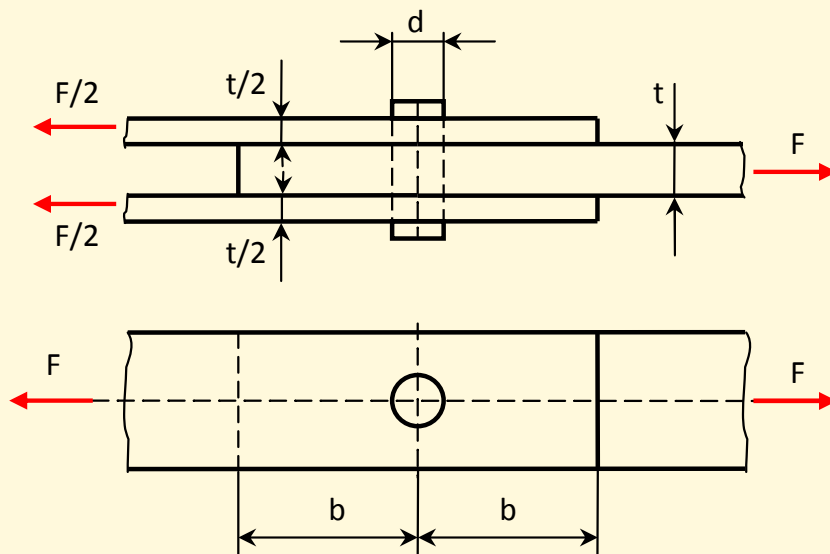
2. Tuhý trám je zavěšen na dvou lanech (obr. 2.14).

Určete napětí v lanech, jestliže je dáno: zátěžná síla $F = 50 \text{ kN}$, průměr lan $d = 20 \text{ mm}$, délkové rozměry $a = 500 \text{ mm}$, $b = 300 \text{ mm}$, $L = 1000 \text{ mm}$.



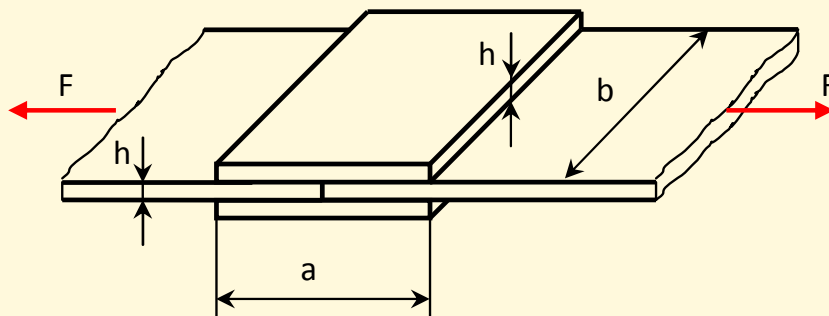
Obr. 2.14

3. Spojení podle obr. 2.15 je namáháno smykovou silou F . Určete napětí v čepu, jestliže je dáno: $F = 20 \text{ kN}$, $d = 15 \text{ mm}$, $t = 12 \text{ mm}$.



Obr. 2.15

4. Určete napětí v lepeném spoji, znázorněném na obr. 2.16, jestliže je dáno: $F = 50 \text{ kN}$, $a = 40 \text{ mm}$, $t = 60 \text{ mm}$, $h = 6 \text{ mm}$.



Obr. 2.16

Klíč k příkladům k procvičení

1. $\sigma = 75 \text{ MPa}$
2. $\sigma_1 = 59,71 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = 99,5 \text{ MPa}$
3. $\tau = 56,6 \text{ MPa}$
4. $\tau = 10,4 \text{ MPa}$

Pojmy k zapamatování

- metoda řezu
- vnitřní síly
- normálové a smykové napětí
- tenzor napjatosti
- Saint-Venantův princip
- základní druhy namáhání

2.4.5. Interaktivní test

Následující test byl vytvořen pomocí balíčku **acrotex**. Test zahájíte kliknutím na tlačítko „Zacátek testu“. U otázek, kde lze volit jen jednu odpověď (test nedovolí zaškrtnout více odpovědí), je správná odpověď bodována takovým počtem bodů, jaký je uveden v závorce u zadání a špatná odpověď je bodována 0 body. U otázek, kde lze volit více správných odpovědí, je součet bodů správných odpovědí uveden v závorce u zadání a za každou špatnou odpověď bude odečten jeden bod.

[Obsah](#)**66.** strana ze 449[Zavřít dokument](#)[Konec](#)[Celá obrazovka/Okno](#)

1. (2b.) V pružnosti a pevnosti používáme pro napětí jednotky

$$\text{Pa} = \text{N}/\text{m}^2$$

$$\text{MPa} = \text{N}/\text{mm}^2$$

$$\text{GPa} = \text{N}/\mu\text{m}^2$$

2. (2b.) Kolik je nezávislých složek tenzoru napjatosti v bodě tělesa?

9

3

6

12

3. (2b.) Normálové napětí působící tlakově (směrem do stěny elementární krychle) je

záporné

kladné

4. (2b.) V jakém směru působí normálové napětí σ_z ?

proti směru osy z

rovnoběžně s osou z

kolmo na osu z



Obsah

67. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

5. (2b.) V jakém směru a na jaké rovině působí smykové napětí τ_{xz} ?

rovnoběžně s osou x, na rovině s normálou odpovídající ose z

rovnoběžně s osou z, v rovině s normálou odpovídající ose x

rovnoběžně s osou z, v rovině s normálou odpovídající ose y

6. (2b.) Rozložení normálového napětí po ploše průřezu při rovinném ohybu nosníku je

rovnoměrné

lineární

podle zákona paraboly

podle zákona hyperboly

7. (2b.) Rozložení normálového napětí po ploše průřezu tyče namáhané tahem je

podle zákona paraboly

lineární

rovnoměrné

podle zákona hyperboly



Obsah

68. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

8. (2b.) Maximální normálové napětí v průřezu nosníku namáhaného rovinným ohybem je dáno

podílem posouvající síly a plochy průřezu v daném místě nosníku

podílem ohybového momentu a modulu odporu průřezu v ohybu v daném místě nosníku

podílem ohybového momentu a hlavního centrálního momentu průřezu v daném místě nosníku

9. (2b.) V kterém místě se nachází největší smykové napětí při prostém kroucení prutu kruhového průřezu?

na povrchu

v těžišti průřezu

v horním /dolním vlákne

10. (2b.) Kde je smykové napětí při prostém kroucení prutu kruhového průřezu nulové?

na povrchu

v těžišti průřezu

v horním /dolním vlákne



Obsah

69. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:

Pro ukončení testu je třeba kliknout na tlačítko „Konec testu“. Opravení testu se provede kliknutím na tlačítko „Výsledky“, správné odpovědi budou označeny zeleně a červeně budou označeny odpovědi chybné. Při použití otázky s tvořenou odpovědí se správná odpověď zobrazí v rámečku umístěném vpravo dole v navigačním panelu po kliknutí na tlačítko „Odpověď“.



Obsah

70. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Kapitola 3

Transformace tenzoru napjatosti

Průvodce studiem

V předchozí kapitole byla definována veličina, určující stav napjatosti v bodě tělesa - tenzor napjatosti. Vnitřnímu bodu tělesa odpovídá elementární krychle, na jejíž stěnách obecně působí normálová a smyková napětí. Lze dokázat, že existuje vždy taková poloha elementární krychle, kdy na jejích stěnách působí pouze napětí normálová. Tato normálová napětí se nazývají hlavní napětí a příslušné roviny jsou hlavní roviny. Postup stanovení hlavních napětí je předmětem této kapitoly. Správné určení velikosti hlavních napětí je zásadní z hlediska aplikace návrhových kritérií (kapitola 9).

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete:

- znát základní případy napjatosti
- rozumět pojmům hlavní rovina a hlavní napětí
- umět sestavit Mohrovu kružnici
- schopni analyticky a graficky určit hlavní napětí



Obsah

71. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

3.1. Hlavní napětí a hlavní roviny

Jak už bylo uvedeno v předešlé kapitole, veličina, určující stav napjatosti v bodě tělesa, se nazývá tenzor napjatosti. Tenzor napjatosti je definován následovně

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

V každém bodě tělesa lze vyhledat takovou polohu elementární krychličky, kdy na jejích stěnách jsou smyková napětí nulová, tzn. $\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. Na stěnách této elementární krychličky působí pouze normálová napětí.

Definice 3.1. Extrémy normálových napětí $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ se nazývají *hlavní napětí* a roviny, na kterých působí, jsou označovány jako *hlavní roviny*.

Věta 3.2. Na hlavních rovinách jsou smyková napětí nulová.

Hlavní napětí budou dále označována $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

V každém bodě tělesa lze tedy vyhledat tři hlavní roviny. Tenzor napjatosti je pak možno psát ve tvaru

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$



Obsah

72. strana ze 449

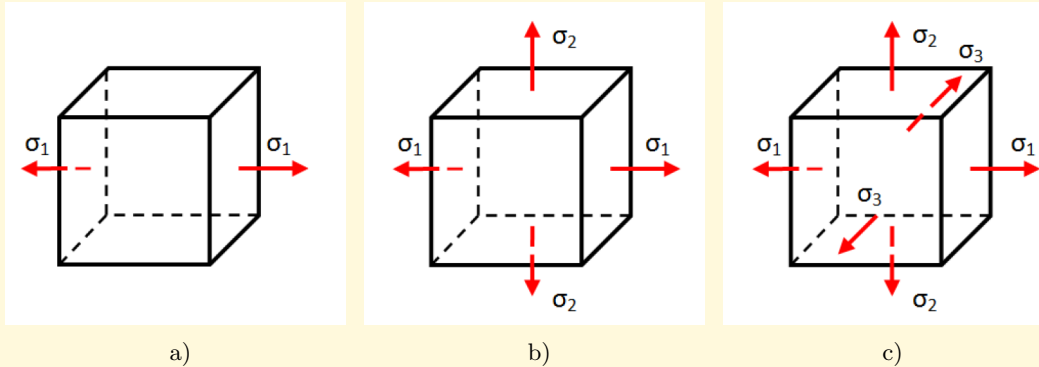


Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Obvykle se rozlišují tři základní typy napjatosti, viz obr. 3.1.



Obr. 3.1

1. Jednoosá (přímková) napjatost (obr. 3.1 a)), která je definována podmínkou, že dvě z hlavních napětí jsou nulová, tedy

$$\sigma_1 \neq 0; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = 0. \quad (3.3)$$

Příkladem jednoosé napjatosti je tyč namáhaná tahovou silou.

2. Dvojosá (rovinná) napjatost (obr. 3.1 b)), která je definována podmínkou, že jedno

Obsah

73. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

z hlavních napětí je nulové, tedy

$$\sigma_1 \neq 0; \quad \sigma_2 \neq 0; \quad \sigma_3 = 0. \quad (3.4)$$

Příkladem rovinné napjatosti je těleso rovinného tvaru, u kterého jsou dva rozměry větší než třetí. Jedná se například o tenkostěnné tlakové nádoby.

3. Trojosá (prostorová) napjatost (obr. 3.1 c)), je definována podmínkou, že žádné z hlavních napětí není rovno nule. Příkladem trojosého stavu namáhání je vnitřní bod tlustostěnné uzavřené nádoby.

Definice 3.3. Speciálním případem rovinné napjatosti je *napjatost prostého smyku*, kde platí $\sigma_1 = -\sigma_2$ a lze nalézt v daném bodě tělesa takovou polohu elementární krychle, kde jsou nenulové pouze dvě složky smykových napětí tenzoru napjatosti.

Napjatost prostého smyku zjednodušeně uvažujeme při stříhání materiálu (kapitola 2.4.2) nebo kroucení prutů kruhového průřezu (kapitola 2.4.3).

3.2. Napjatost na skloněné rovině pro případ tahu-tlaku

V kapitole 2 jsme se seznámili s výpočtem napětí při tahovém namáhání. Pro napětí v průřezu, který je kolmý k ose prutu, platí

$$\sigma = \frac{F}{S}. \quad (3.5)$$



Obsah

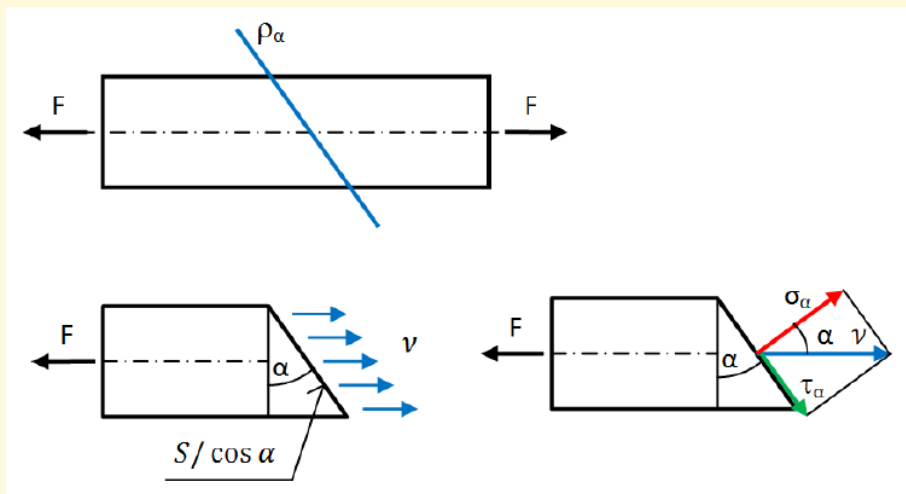
74. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno



Obr. 3.2

Nyní se budeme zabývat stanovením napětí v obecném průřezu prutu (obr. 3.2).

Uvažujme řez rovinou ρ_α , jejíž normála svírá s vodorovnou osou úhel α . Jestliže aplikujeme metodu řezu, pak z podmínky rovnováhy sil plyne

$$v \frac{S}{\cos \alpha} = F. \quad (3.6)$$

Odtud

$$v = \frac{F}{S} \cos \alpha = \sigma \cos \alpha. \quad (3.7)$$

Napětí v , určené rovnicí (3.7), má směr síly F , ale není kolmé k řezu ρ_α . Pro normálovou σ_α a smykovou τ_α složku napětí pak platí

$$\sigma_\alpha = v \cos \alpha = \frac{F}{S} \cos \alpha \cos \alpha = \sigma \cos^2 \alpha = \sigma \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} = \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2} \cos 2\alpha \quad (3.8)$$

a

$$\tau_\alpha = v \sin \alpha = \frac{F}{S} \cos \alpha \sin \alpha = \sigma \cos \alpha \sin \alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha. \quad (3.9)$$

Z rovnice 3.8 je zřejmé, že normálové napětí nabývá maxima pro $\alpha = 0$, tj. v ose prutu, tudíž

$$\sigma_{max} = \sigma. \quad (3.10)$$

Smykové napětí (3.9) nabývá maxima pro $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Jeho velikost je

$$\tau_{max} = \frac{\sigma}{2}. \quad (3.11)$$

Pozorným zkoumáním rovnic (3.8) a (3.9) lze dojít k závěru, že se jedná o parametrické rovnice kružnice v diagramu $\sigma - \tau$. O tomto závěru je možno se přesvědčit úpravou a převedením rovnic (3.8) a (3.9) na analytickou rovnici kružnice. Po převedení členu $\frac{\sigma}{2}$ z rovnice (3.8) na levou stranu se obě rovnice umocní a sečtou. Po provedení těchto úkonů bude

$$\left(\sigma_\alpha - \frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2 = \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2. \quad (3.12)$$



Obsah

76. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Kružnici danou vztahem (3.12) nazýváme *Mohrova kružnice*. Některé zákonitosti jsou patrné z níže zobrazené animace (klikněte na nápověda).

Animace Mohrovy kružnice a elementární krychle



Obsah

77. strana ze 449

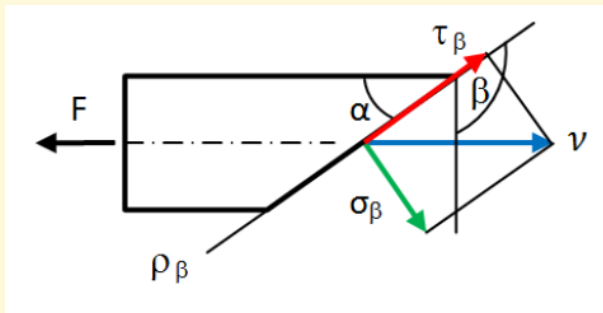


Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Nyní budeme zkoumat napjatost na rovině ρ_β , která je kolmá na rovinu ρ_α (obr. 3.3).



Obr. 3.3

Pro složky napětí dostaneme (viz rovnice (3.8) a (3.9))

$$\sigma_\beta = \sigma \frac{1 + \cos 2\beta}{2}, \quad (3.13)$$

$$\tau_\beta = \frac{\sigma}{2} \sin 2\beta. \quad (3.14)$$

Pro

$$\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$$

a

$$2\beta = 2\alpha + \pi$$

je

$$\cos 2\beta = \cos (2\alpha + \pi) = \cos 2\alpha \cos \pi - \sin 2\alpha \sin \pi = -\cos 2\alpha$$

a

$$\sin 2\beta = \sin (2\alpha + \pi) = \sin 2\alpha \cos \pi + \cos 2\alpha \sin \pi = -\sin 2\alpha.$$

Po dosazení do (3.13) a (3.14) je

$$\sigma_\beta = \sigma \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \sigma \sin^2 \alpha \quad (3.15)$$

a

$$\tau_\beta = -\frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha. \quad (3.16)$$

Porovnáním rovnic (3.9) a (3.16) je zřejmé, že na dvou navzájem kolmých rovinách jsou smyková napětí v absolutní hodnotě stejná, liší se pouze ve znaménku. Hovoříme o tzv. zákonu sdruženosti smykových napětí.

Věta 3.4. *Smykové složky tenzoru napjatosti, působící na dvou navzájem kolmých rovinách směrem k hraně nebo od ní, jsou vždy stejné velikosti – zákon sdruženosti smykových napětí.*



Obsah

79. strana ze 449



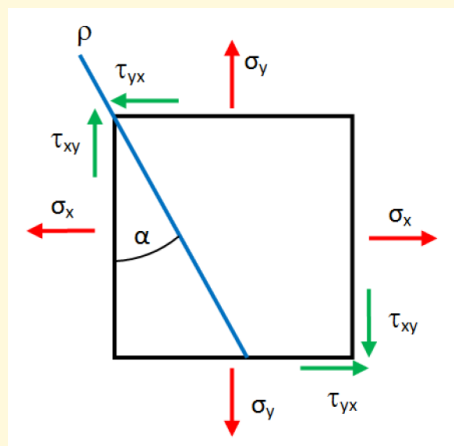
Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

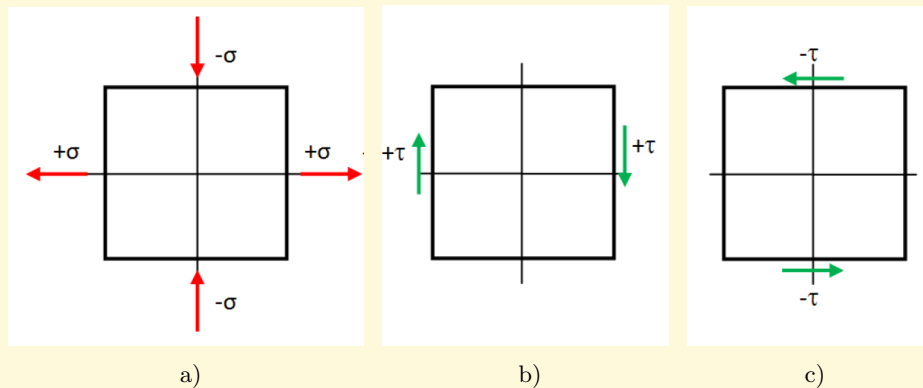
3.3. Napjatost na skloněné rovině pro případ rovinné napjatosti

V případě rovinné napjatosti působí všechny složky nenulových napětí v jedné rovině. Element tělesa lze tedy znázornit jako čtverec (obr. 3.4).



Obr. 3.4

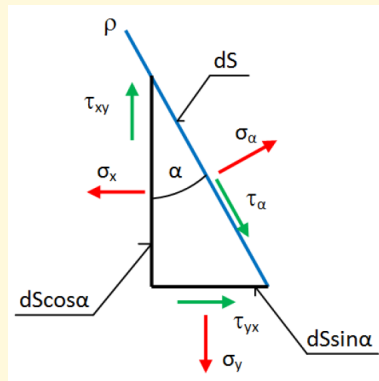
Předpokládejme, že známe složky napětí σ_x , σ_y , τ_{xy} . Pro normálová a smyková napětí je používána znaménková dohoda (obr. 3.5) v souladu se smyslem zavedení smykového napětí u jednoosé napjatosti (obr. 3.2).



Obr. 3.5

Normálová napětí jsou kladná, jestliže se jedná o tahové namáhání, a záporná, jestliže se jedná o namáhání tlakem (obr. 3.5 a)). Smyková napětí jsou kladná tehdy, jestliže tvoří dvojici ve směru pohybu hodinových ručiček (obr. 3.5 b)), záporná pro směr opačný (obr. 3.5 c)).

Naší úlohou je určit složky napětí na obecně skloněné rovině ρ . Aplikujeme tedy metodu řezu. Element (obr. 3.4) rozdělíme řezem vedeným pod úhlem α na dvě části a jeden díl odstraníme. Účinek odstraněné části pak nahradíme hledanými složkami napětí σ_α a τ_α v rovině ρ (obr. 3.6).



Obr. 3.6

Složky napětí určíme z podmínek rovnováhy sil ve směru normály a směru tečny k rovině ρ . Síly, které působí na uvažovaný element ve směru normály k rovině ρ jsou $\sigma_\alpha dS$, $-\sigma_x \cos \alpha dS \cos \alpha$, $-\sigma_y \sin \alpha dS \sin \alpha$, $\tau_{xy} \sin \alpha dS \cos \alpha$ a $\tau_{yx} \cos \alpha dS \sin \alpha$.

Platí tedy

$$\Sigma F_n = 0 \quad (3.17)$$

a po dosazení

$$\sigma_\alpha dS - (\sigma_x \cos \alpha - \tau_{xy} \sin \alpha) dS \cos \alpha - (\sigma_y \sin \alpha - \tau_{yx} \cos \alpha) dS \sin \alpha = 0.$$

Uvážením, že $\tau_{xy} = |\tau_{yx}|$ a po vydělení dS dostaneme

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha - 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha. \quad (3.18)$$

Ve směru tečny k rovině ρ působí síly $\tau_{\alpha} dS$, $-\sigma_x \sin \alpha dS \cos \alpha$, $\sigma_y \cos \alpha dS \sin \alpha$, $-\tau_{xy} \cos \alpha dS \cos \alpha$ a $\tau_{yx} \sin \alpha dS \sin \alpha$.

Podmínka rovnováhy má tvar

$$\Sigma F_t = 0 \quad (3.19)$$

a po dosazení

$$\tau_{\alpha} dS - (\sigma_x \sin \alpha + \tau_{xy} \cos \alpha) dS \cos \alpha + (\sigma_y \cos \alpha + \tau_{yx} \sin \alpha) dS \sin \alpha = 0$$

a úpravě

$$\tau_{\alpha} = (\sigma_x - \sigma_y) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha). \quad (3.20)$$

Zavedením dvojnásobného argumentu 2α vztahy

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha),$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha),$$

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha,$$



Obsah

83. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

dostaneme po úpravě¹

$$\sigma_{\alpha} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \quad (3.21)$$

a

$$\tau_{\alpha} = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha. \quad (3.22)$$

V praktických případech potřebujeme často určit úhel α , při kterém normálová napětí nabývají extrémní hodnoty. Přesněji chceme znát polohu hlavních rovin. Z podmínky pro extrém

$$\frac{d\sigma_{\alpha}}{d\alpha} = 0 \quad (3.23)$$

obdržíme

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = 0. \quad (3.24)$$

¹V jiných učebnicích (např. [1], [18]) lze nalézt vztahy pro normálové a smykové napětí na skloněné rovině pro případ rovinné napjatosti lišící se ve znaménku u jednotlivých členů rovnic (3.21) a (3.22). To je způsobeno odlišně zvolenou orientací složek τ_{xy} , τ_{yx} při odvození. V každé literatuře je tedy nutno konfrontovat odvozené vztahy se zavedeným smyslem smykových napětí a zavedenou znaménkovou konvencí.



Obsah

84. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Rovnice (3.21) a (3.22) udávají v souřadném systému σ – τ souřadnice bodu, jehož poloha je pro napjatost, zadanou složkami σ_x , σ_y a τ_{xy} , určena pouze úhlem α . Bude-li se měnit úhel α , budou body, odpovídajícím novým úhlům, ležet na kružnici. Lze se o tom přesvědčit úpravou rovnic (3.21) a (3.22). Jestliže se převede člen $\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)$ z rovnice (3.21) na levou stranu a následně se obě rovnice umocní a sečtou, získá se analytická rovnice kružnice ve tvaru

$$\left(\sigma_\alpha - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)\right)^2 + \tau_\alpha^2 = \left(\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\right)^2 + \tau_{xy}^2. \quad (3.25)$$

Z tvaru rovnic (3.21) a (3.22) také vyplývá jednoduché grafické znázornění. Zvolíme kartézský souřadnicový systém. Na osu úseček budeme vynášet normálové napětí σ a na svislou osu smykové napětí τ . V rovnici (3.21) je první člen konstantní a roven aritmetickému průměru normálových napětí σ_x a σ_y . Průměty veličin $\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2}$ a τ_{xy} na osu σ představují další dva členy rovnice (3.21). Obdobné zákonitosti platí i pro rovnici (3.22). Průměty veličin $\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2}$ a τ_{xy} na osu τ představují členy rovnice (3.22). Napětí σ_α a τ_α na rovině ρ znázorňuje v obr. 3.7 bod P .

Jestliže se mění úhel, bod P se pohybuje po kružnici. Tato kružnice se nazývá Mohrovou kružnicí pro rovinnou napjatost. Každé rovině ρ odpovídá v Mohrově kružnici jediný bod. Jelikož úhlu α v elementární krychli odpovídá úhel 2α v Mohrově kružnici, pohybuje se bod P po kružnici dvojnásobnou rychlostí a ve stejném smyslu jako v elementární krychli. Důležitými body v Mohrově kružnici jsou body 1 a 2, ve kterých normálová napětí nabývají extrémních hodnot a smyková napětí jsou rovna nule. V bodě 1 je $\sigma_{max} = \sigma_1$ a v bodě 2 je $\sigma_{min} = \sigma_2$.



Obsah

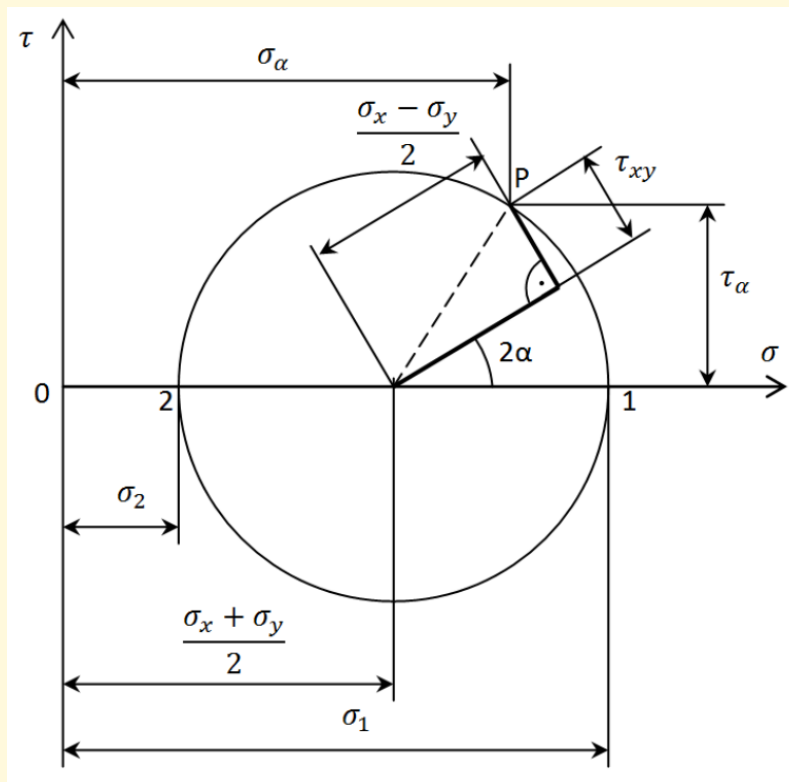
85. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno



Obr. 3.7

Platnost pravidla o dvojnásobném úhlu mezi průvodičem vertikální roviny a průvodičem roviny ρ v Mohrově kružnici je zřejmá také z animace uvedené níže (další poznatky jsou uvedeny pod tlačítkem nápověda).

Popis konstrukce Mohrovy kružnice



Obsah

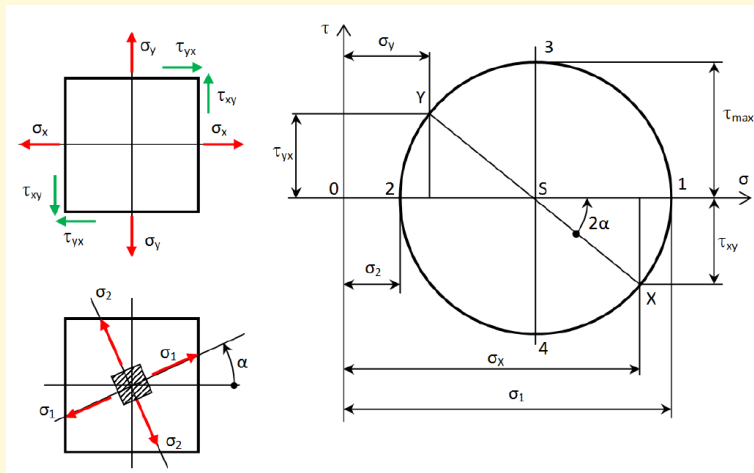
87. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno



Obr. 3.8

Z obr. 3.8 snadno odvodíme vztahy pro výpočet hlavních napětí

$$\sigma_1 = OS + S1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (3.26)$$

a

$$\sigma_2 = OS - S2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \quad (3.27)$$

Z obr. 3.8 je možno určit rovněž směry hlavních napětí. Úhel, který svírá úsečka XY s osou σ je dvojnásobkem úhlu, který svírá napětí σ_1 s osou x . Poněvadž úhel 2α je měřen od X k 1 proti směru hodinových ručiček, směr σ_1 je podle obr. 3.8.

Úhel 2α je možno určit z obr. 3.8, tedy

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \left| \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right|, \quad (3.28)$$

což je v absolutní hodnotě stejný výraz, který byl určen analytickým řešením (viz rovnici (3.24)). Z Mohrovy kružnice je rovněž možno určit největší smykové napětí

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (3.29)$$

Z Mohrovy kružnice plyne dále, že součet normálových napětí ve dvou libovolných rovinách, které jsou navzájem kolmé, je stejný (invarianta rovinné napjatosti), tedy

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2. \quad (3.30)$$

Uvedné vztahy 4.11, 3.27 a 3.28 jsou základem pro početní řešení velikosti hlavních napětí, resp. hlavních směrů. Zakreslí-li se Mohrova kružnice v měřítku, lze ji s výhodou použít pro tytéž účely.



Obsah

89. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Popis grafického řešení úlohy včetně popisu konstrukce Mohrovy kružnice je obsahem následující animace.

Popis konstrukce Mohrovy kružnice



Obsah

90. strana ze 449



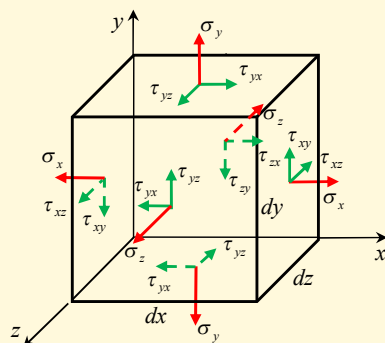
Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

3.4. Složky napětí v obecné rovině při prostorové napjatosti

Jak už bylo poznamenáno v kapitole 2.3, je v libovolném bodě tělesa napjatost určena šesti složkami napětí σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz} , (obr. 3.9).



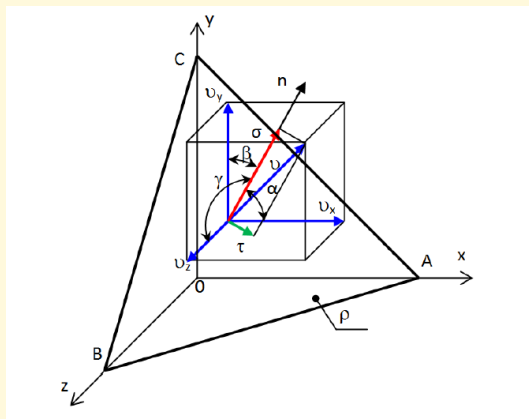
Obr. 3.9

Velikost těchto složek závisí na volbě polohy souřadnicového systému, ke kterému jsou jednotlivá napětí vztažena. Natáčí-li se prostorově soustava souřadnicových os, jejíž počátek je v uvažovaném bodě tělesa, mění se velikosti jednotlivých složek napětí. Podle analogie s rovinnou napjatostí lze předpokládat, že v určité poloze vymizí všechna smyková napětí a normálová napětí budou nabývat extrémních hodnot, bude platit

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0,$$

$$\sigma_x = \sigma_1, \quad \sigma_y = \sigma_2, \quad \sigma_z = \sigma_3.$$

Napětí $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ jsou hlavní napětí, jejichž velikost ani směry nezávisí na poloze souřadnicového systému. Je nutno dokázat, že existují tři navzájem kolmé roviny, na kterých působí pouze normálová napětí. Důkaz provedeme tak, že určíme složky napětí na libovolné rovině ρ (obr. 3.10), jejíž normála svírá se souřadnicovými osami x, y, z směrové úhly α, β, γ .



Obr. 3.10

Na rovině ρ působí obecné napětí v , mezi nímž a jeho složkami v_x, v_y a v_z platí vztah

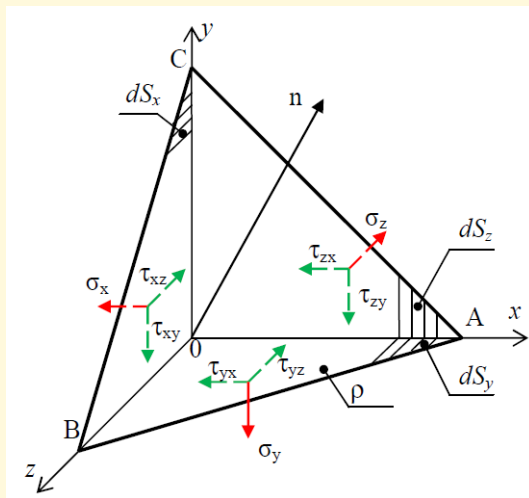
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (3.31)$$

Složky obecného napětí σ_x , σ_y a σ_z určíme ze statických podmínek rovnováhy. Jestliže šikmá stěna elementárního čtyřstěnu má plochu dS , jsou plochy zbývajících stěn (obr. 3.11) dány výrazy

$$dS_x = dS \cos \alpha,$$

$$dS_y = dS \cos \beta,$$

$$dS_z = dS \cos \gamma.$$



Obr. 3.11

Z podmínky rovnováhy elementárních sil, působících v ose x , dostaneme

$$v_x dS - \sigma_x dS_x - \tau_{yx} dS_y - \tau_{zx} dS_z = 0$$

a po vydělení dS obdržíme

$$v_x = \sigma_x \cos \alpha + \tau_{yx} \cos \beta + \tau_{zx} \cos \gamma = 0. \quad (3.32)$$

Obdobně z podmínek rovnováhy do směrů os y a z dostaneme

$$v_y = \tau_{xy} \cos \alpha + \sigma_y \cos \beta + \tau_{zy} \cos \gamma = 0, \quad (3.33)$$

$$v_z = \tau_{xz} \cos \alpha + \tau_{yz} \cos \beta + \sigma_z \cos \gamma = 0. \quad (3.34)$$

Rovnice (3.32) – (3.34) vyjadřují vztahy mezi složkami tenzoru napjatosti elementární krychle a složkami obecného napětí na libovolné rovině ρ .

Rovnice (3.32) – (3.34) je možno rovněž napsat v maticovém tvaru.

Nechť

$$\{v\} = \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix}$$



Obsah

94. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

je vektor obecného napětí,

$$\{n\} = \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{Bmatrix}$$

je vektor vnější normály k rovině ρ a

$$[A_\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

je matice tenzoru napětí. Pak platí

$$\{v\} = [A_\sigma] \{n\}. \quad (3.35)$$

Součet průmětů velikostí tří složek obecného napětí v_x, v_y, v_z do směru normály n se rovná velikosti normálového napětí σ v rovině ρ . Platí tedy

$$\sigma = v_x \cos \alpha + v_y \cos \beta + v_z \cos \gamma \quad (3.36)$$

a po dosazení z rovnic (3.32) – (3.34) obdržíme

$$\begin{aligned} \sigma = & \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \beta + \sigma_z \cos^2 \gamma + \\ & + 2(\tau_{xy} \cos \alpha \cos \beta + \tau_{xz} \cos \alpha \cos \gamma + \tau_{yz} \cos \beta \cos \gamma), \end{aligned} \quad (3.37)$$

respektive v maticovém tvaru

$$\sigma = \{v\}^T \{n\} = ([A_\sigma] \{n\})^T \{n\} = \{n\}^T [A_\sigma]^T \{n\}. \quad (3.38)$$



Obsah

95. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Vzhledem k tomu, že matice tenzoru napjatosti $[A_\sigma]$ je symetrická, je možno vztah (3.38) psát ve tvaru

$$\sigma = \{n\}^T [A_\sigma] \{n\}.$$

Velikost smykového napětí τ dostaneme z následujícího vztahu (obr. 3.10)

$$\tau = \sqrt{v^2 - \sigma^2}. \quad (3.39)$$

3.5. Stanovení hlavních napětí při prostorové napjatosti

Jestliže se rovina ρ ztotožní s hlavní rovinou, budou složky smykového napětí

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

a rovnice (3.32) – (3.34) budou ve tvaru

$$v_x = \sigma \cos \alpha, \quad (3.40)$$

$$v_y = \sigma \cos \beta, \quad (3.41)$$

$$v_z = \sigma \cos \gamma. \quad (3.42)$$

Dosazením vztahů (3.40) až (3.42) do (3.32) až (3.34) a po úpravě obdržíme

$$(\sigma_x - \sigma) \cos \alpha + \tau_{xy} \cos \beta + \tau_{zx} \cos \gamma = 0, \quad (3.43)$$



Obsah

96. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno



$$\tau_{xy} \cos \alpha + (\sigma_y - \sigma) \cos \beta + \tau_{zx} \cos \gamma = 0, \quad (3.44)$$

$$\tau_{xz} \cos \alpha + \tau_{yz} \cos \beta + (\sigma_z - \sigma) \cos \gamma = 0. \quad (3.45)$$

Směrové kosiny jsou vázány podmínkou

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (3.46)$$

V maticovém zápisu bude soustava rovnic (3.43) – (3.45) mít tvar

$$([A_\sigma] - \sigma [E]) \{n\} = 0, \quad (3.47)$$

kde

$$[E] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

je jednotková matice.

V rovnicích (3.43) až (3.45) se vyskytují čtyři neznámé veličiny σ , α , β , γ . Rovnice (3.46) slouží jako čtvrtá pro výpočet uvedených veličin. Podmínkou netriviálního řešení soustavy rovnic (3.43) až (3.45) je, aby determinant této soustavy byl roven nule, tedy

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0. \quad (3.48)$$

Obsah

97. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Tuto podmínku je možno také vyjádřit v maticovém tvaru

$$\det ([A_\sigma] - \sigma [E]) = 0. \quad (3.49)$$

Vyčíslením determinantu dostaneme rovnici třetího stupně ve tvaru

$$\sigma^3 - i_1 \sigma^2 + i_2 \sigma - i_3 = 0, \quad (3.50)$$

kde i_1, i_2, i_3 jsou invarianty tenzoru napjatosti.

Invarianty tenzoru napjatosti jsou nezávislé na volbě souřadnicové soustavy. Invarianty tenzoru napjatosti jsou definovány následovně:

- První (lineární) invariant

$$i_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3. \quad (3.51)$$

- Druhý (kvadratický) invariant

$$i_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3. \quad (3.52)$$

- Třetí (kubický) invariant tenzoru napjatostí

$$i_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3. \quad (3.53)$$



Obsah

98. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Po vyřešení kubické rovnice dostaneme hlavní napětí $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Jestliže známe hlavní napětí $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, pak napjatost na obecné rovině je dána výrazem (viz také rovnici (3.37))

$$\sigma = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \beta + \sigma_3 \cos^2 \gamma \quad (3.54)$$

a v maticovém zápisu

$$\sigma = \{n\}^T [A_\sigma] \{n\}, \quad (3.55)$$

kde

$$[A_\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}.$$



Obsah

99. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Příklady k procvičení

1. V bodě tělesa je rovinná napjatost dána těmito hodnotami: $\sigma_x = 50 \text{ MPa}$, $\sigma_y = -35 \text{ MPa}$, $\tau_{xy} = 20 \text{ MPa}$. Sestrojte Mohrovu kružnici a určete:
 - a) Velikost hlavních napětí σ_1 a σ_2 a úhel α , o který jsou pootočeny hlavní roviny vůči osám souřadnic x a y .
 - b) Velikost maximálního smykového napětí τ_{max} .

Klíč k příkladům k procvičení

1. $\sigma_1 = 54,47 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = -39,47 \text{ MPa}$, $\alpha = 12,6^\circ$, $\tau_{max} = 46,97 \text{ MPa}$

Pojmy k zapamatování

- tenzor napjatosti
- hlavní roviny
- hlavní napětí
- jednoosá napjatost
- rovinná napjatost
- prostorová napjatost
- Mohrova kružnice
- invarianty tenzoru napjatosti



Obsah

100. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

3.5.1. Interaktivní test

Následující test byl vytvořen pomocí balíčku **acrotex**. Test zahájíte kliknutím na tlačítko „Zacátek testu“. U otázek, kde lze volit jen jednu odpověď (test nedovolí zaškrtnout více odpovědí), je správná odpověď bodována takovým počtem bodů, jaký je uveden v závorce u zadání a špatná odpověď je bodována 0 body. U otázek, kde lze volit více správných odpovědí, je součet bodů správných odpovědí uveden v závorce u zadání a za každou špatnou odpověď bude odečten jeden bod.

1. (2b.) Hlavní napětí působí na rovinách, kde jsou smyková napětí

maximální

nulová

záporná

2. (2b.) Hlavní roviny jsou takové roviny, kde jsou normálová napětí

nulová

extrémní

maximální

minimální



Obsah

101. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

3. (2b.) Na volném povrchu zatíženého tělesa je vždy napjatost

jednoosá

dvojosá

trojosá

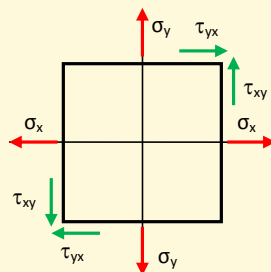
4. (2b.) Kterým hodnotám složek napětí odpovídá obrázek 3.12?

$$\sigma_x > 0, \sigma_y < 0, \tau_{xy} < 0$$

$$\sigma_x > 0, \sigma_y < 0, \tau_{xy} > 0$$

$$\sigma_x > 0, \sigma_y > 0, \tau_{xy} < 0$$

$$\sigma_x > 0, \sigma_y > 0, \tau_{xy} > 0$$



Obr. 3.12

5. (2b.) Kolik je obecně nenulových a nezávislých složek tenzoru napjatosti v případě rovinné napjatosti?

4 nenulové, 3 nezávislé

3 nenulové, 4 nezávislé

3 nenulové, 3 nezávislé

6. (4b.) Jaký je poměr hodnoty maximálního hlavního napětí a hodnoty maximálního smykového napětí pro případ prostého tahu? (představte si, jak vypadá Mohrova kružnice pro prostý tah)

1/2

1/1

2/1

7. (4b.) Jaký je poměr hodnoty maximálního hlavního napětí a hodnoty maximálního smykového napětí pro případ prostého smyku?

1/2

1/1

2/1



Obsah

103. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

8. (2b.) Pod jakým úhlem je skloněna rovina maximálního smykového napětí vzhledem k ose prutu namáhaného prostým tahem?

45 stupňů

90 stupňů

0 stupňů

9. (2b.) Co platí pro prostý smyk? (představte si, jak vypadá Mohrova kružnice pro prostý smyk)

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau_{xy}/2$$

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau_{xy}$$

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = 2 * \tau_{xy}$$

10. (2b.) Jak určíme maximální smykové napětí v bodě tělesa pomocí Mohrova zobrazení?

Jako poloměr nejmenší Mohrovy kružnice.

Jako průměr největší Mohrovy kružnice.

Jako poloměr největší Mohrovy kružnice.



Obsah

104. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

11. (2b.) Invariantou Mohrovy kružnice pro rovinnou napjatost je

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_x - \sigma_y$$

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y$$

$$\sigma_1 \cdot \sigma_2 = \sigma_x \cdot \sigma_y$$

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:

Pro ukončení testu je třeba kliknout na tlačítko „Konec testu“. Opravení testu se provede kliknutím na tlačítko „Výsledky“, správné odpovědi budou označeny zeleně a červeně budou označeny odpovědi chybné. Při použití otázky s tvořenou odpovědí se správná odpověď zobrazí v rámečku umístěném vpravo dole v navigačním panelu po kliknutí na tlačítko „Odpověď“.



Obsah

105. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Kapitola 4

Koncept deformace

Průvodce studiem

Tato kapitola se zabývá veličinami pro popis deformace těles v pružnosti a pevnosti. V první části kapitoly je vysvětlena potřeba zavedení absolutní i relativní (poměrné) deformace. Definovány jsou pak dvě základní složky poměrné deformace a to podélná deformace a zkos. V další části jsou uvedeny Cauchyho geometrické rovnice, udávající závislost mezi poměrnými deformacemi a posuvy pro malé deformace. V kapitole je rovněž definován tenzor přetvoření a zdůrazněna analogie mezi tenzorem napjatosti a tenzorem přetvoření.

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete:

- chápat pojmy poměrná deformace a zkos
- vědět, co vyjadřují Cauchyho geometrické rovnice
- umět sestavit Mohrovu kružnici pro deformace
- chápat souvislost mezi tenzorem napjatosti a tenzorem přetvoření



Obsah

106. strana ze 449



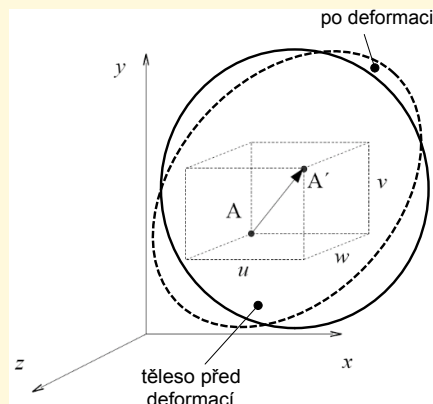
Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

4.1. Podélná a smyková deformace

Působením vnějších sil mění každé těleso svůj tvar. Zvolíme-li ortogonální souřadný systém (např. Kartézský), můžeme přemístění bodu tělesa popsat vektorem posuvů se složkami u , v , w dle obr. 4.1.



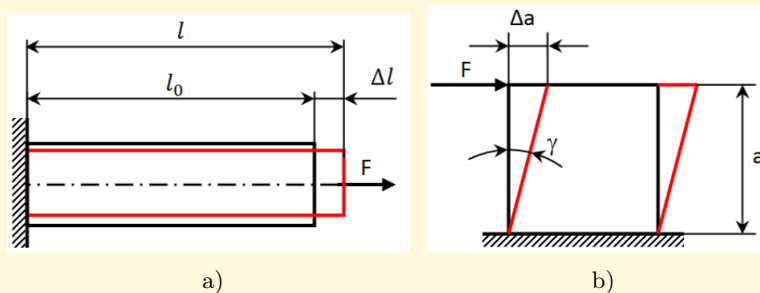
Obr. 4.1

Uvažujeme, že se jedná o tzv. deformační posuv, tzn. těleso se nepohybuje vzhledem k souřadnicovému systému. Často se používá místo pojmu posuvy označení posunutí, či přemístění. Složky vektoru posunutí jsou spojitými funkcemi souřadnic.

Definice 4.1. Deformace tělesa je dána množinou posuvů všech jeho bodů.

Deformuje-li se celé těleso, deformuje se i každá jeho část. Můžeme tedy zkoumat deformaci elementu. V zásadě dojde ke změně délek (prodloužení anebo zkrácení) a ke změně pravých úhlů elementu. Jelikož dle naší předchozí představy bodu tělesa odpovídá elementární krychle, jejíž rozměry se blíží nule, je vhodné pro popis deformace v bodě tělesa užít relativních veličin.

Uvažujme tyč, která je namáhána tahovou silou (obr. 4.2 a)). Jestliže původní délka tyče je l_0 a nová délka l , je prodloužení tyče $\Delta l = l - l_0$.



Obr. 4.2

Poměrná podélná deformace ε pak vyjadřuje relativní změnu délky tyče

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}. \quad (4.1)$$

Při namáhání elementu smykovou silou dochází ke změně pravého úhlu (obr. 4.2 b)). V případě malých deformací lze s dostatečnou přesností pro uvedený případ prostého smyku

psát

$$\operatorname{tg} \gamma \cong \gamma = \frac{\Delta a}{a}. \quad (4.2)$$

Poměrná deformace ε a zkos γ jsou bezrozměrné veličiny.

Definice 4.2. *Poměrná (délková) deformace* je chápána jako poměr změny délky ku její původní hodnotě.

Definice 4.3. *Zkos (úhlová deformace)* odpovídá změně úhlu mezi dvěma úsečkami, jenž byly před deformací tělesa vzájemně kolmé.



Obsah

109 strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

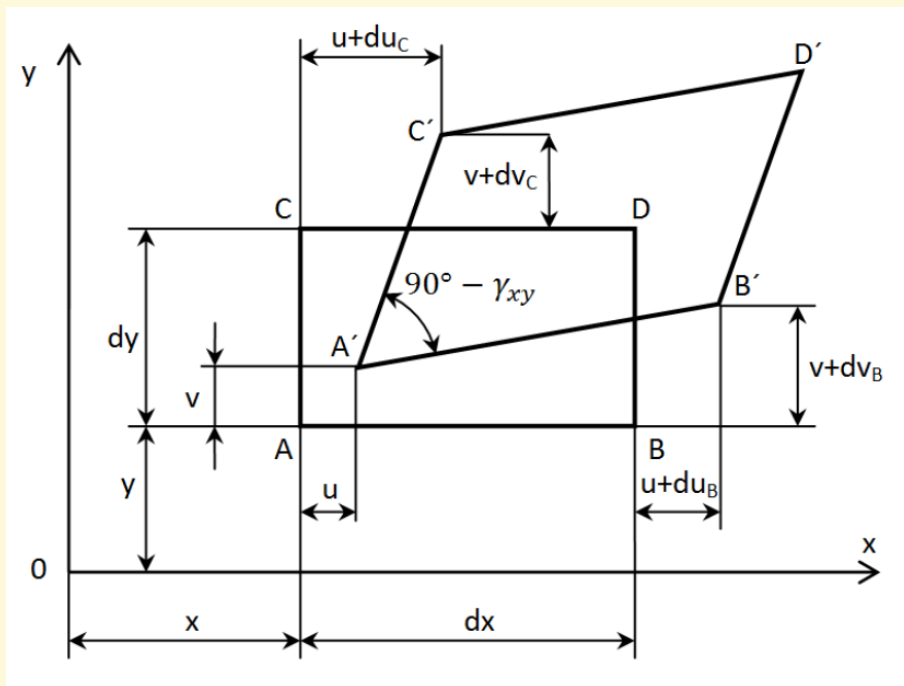
Vztah mezi posuvy a poměrnými deformacemi je vyjádřen graficky na obr. 4.3. Z absolutních deformací můžeme vypočítat poměrné deformace. V praxi se však také nepřímě měří poměrné deformace v bodě tělesa a z těch můžeme za zjednodušujících předpokladů vypočítat posuvy (např. změnu rozměru).



Obr. 4.3

4.2. Deformace v bodě tělesa

V této kapitole začneme problematikou rovinné deformace. Uvažujme malý obdélníkový element $ABCD$ o rozměrech dx a dy (obr. 4.4). Po deformaci element zaujme polohu $A'B'C'D'$. Bod $A(x, y)$ po deformaci zaujme novou polohu A' . Posune se ve směru osy x o hodnotu u a ve směru osy y o hodnotu v . Bod $B(x + dx, y)$, který má sice stejnou souřadnici y jako bod A , ale jehož souřadnice x je větší o dx , se posune jinak (obr. 4.4).



Obr. 4.4

Přírůstky složek přemístění budou určeny totálními diferenciály, tedy

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy,$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy.$$

Obdobně složky přemístění bodu C ($dx = 0$; $dy \neq 0$) jsou

$$du_c = \frac{\partial u}{\partial y} dy,$$

$$dv_c = \frac{\partial v}{\partial y} dy.$$

Poměrné prodloužení elementu ve směru souřadnicové osy x se vypočte z výrazu

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{dx + du_B - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.3)$$

a obdobně poměrné prodloužení elementu ve směru souřadnicové osy y se vypočte z výrazu

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy} = \frac{dy + dv_C - dy}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (4.4)$$



Obsah

112. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

V případě prostorové napjatosti bude poměrné prodloužení elementu ve směru souřadnicové osy z dáno výrazem

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (4.5)$$

kde w posuv bodu ve směru osy z .

Rovnice (4.3) – (4.5) jsou geometrické rovnice Cauchyovy, které vyjadřují vztah mezi poměrnými deformacemi ε_x , ε_y , ε_z a přemístěním (posuvy) u , v , w .

Pravý úhel elementárního obdélníku u vrcholu A se změnil o malý úhel γ_{xy} (tzv. zkoso). Pro zkoso γ_{xy} platí, že je součtem dvou úhlů, takže lze psát

$$\gamma_{xy} = \frac{dv_B}{dx} + \frac{du_C}{dy}.$$

Protože

$$dv_B = \frac{\partial v}{\partial x} dx$$

a

$$du_C = \frac{\partial u}{\partial y} dy,$$

bude po dosazení

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (4.6)$$



Obsah

113. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Obdobně pro prostorový element obdržíme

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad (4.7)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (4.8)$$

Rovnice (4.6) – (4.8) jsou geometrické rovnice Cauchyovy, které vyjadřují vztahy mezi zkosity γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{xz} a složkami přemístění u , v , w .

Soustava rovnic (4.3) – (4.8) představuje soustavu Cauchyových geometrických rovnic pro prostorový element. Je nutné upozornit, že Cauchyovy geometricko-deformační vztahy jsou platné pouze v oblasti malých deformací.

Grafické znázornění Cauchyových geometrických rovnic je patrné z obr. 4.2. Podélným deformacím odpovídá obr. 4.5 a), zkосу γ_{xy} obr. 4.5 b), zkосу γ_{yz} obr. 4.5 c) a zkосу γ_{xz} obr. 4.5 d).



Obsah

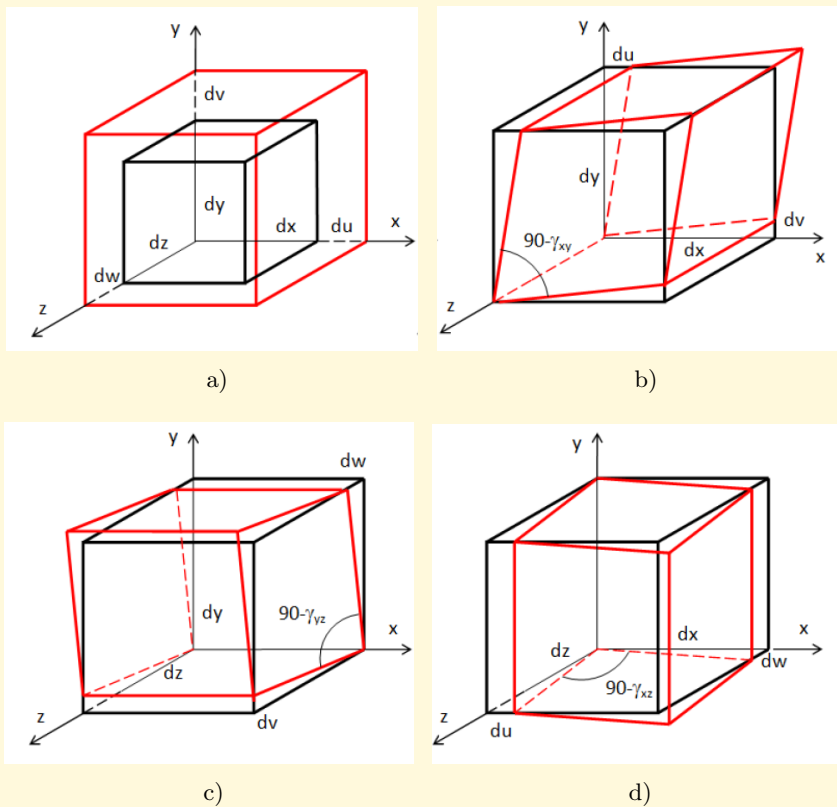
114. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno



Obr. 4.5

Obsah

115. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

4.3. Tensor přetvoření

Obdobně jako tenzor napjatosti (viz kapitola 3) lze definovat rovněž tenzor přetvoření. Normálovým napětím σ odpovídají poměrné deformace ε a smykovým napětím poloviční hodnoty zkoso γ . Tenzor přetvoření je opět symetrickým tenzorem druhého řádu a je definován následovně

$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{yx}}{2} & \frac{\gamma_{zx}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{zy}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

V pevnostních výpočtech součástí, u kterých je zabráněno deformaci v jednom směru, se setkáváme se speciálním případem prostorové napjatosti, kdy platí $\varepsilon_z = 0$, $\gamma_{yz} = 0$, $\gamma_{xz} = 0$ (všechny nenulové složky tenzoru přetvoření lze nalézt v jediné rovině) a mluvíme o *úloze rovinné deformace*.

V případě rovinné deformace bude mít tenzor přetvoření tvar

$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{yx}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

Připomeňme, že v bodě tělesa existuje taková poloha elementární krychle, kdy jsou smyková napětí nulová a zároveň normálová napětí extrémní – hlavní napětí (viz kapitola 3). Imaginárně tedy hlavní napětí působí v normálovém směru na stěny elementární krychle, což způsobuje pouze změny jejich rozměrů (poměrné deformace) a všechny smykové složky tenzoru přetvoření (zkoso) musí pak být nulové. Platí analogie s tenzorem napjatosti, proto jsou-li smykové složky tenzoru přetvoření nulové, musí být poměrné deformace extrémní.



Obsah

116. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno



Definice 4.4. Extrémy poměrných deformací nazýváme hlavní poměrné deformace.

Tenzor přetvoření můžeme vždy vyjádřit pomocí hlavních poměrných deformací

$$T_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}.$$

Vidíme, že platí analogie mezi tenzorem napjatosti a tenzorem přetvoření, využívá se tedy pro stanovení hlavních poměrných deformací také grafické i početní řešení.

4.4. Mohrova kružnice pro deformace a její konstrukce

Jestliže jsou známy složky tenzoru ε_x , ε_y , γ_{xy} , lze určit hlavní poměrné deformace ε_1 a ε_2 užitím Mohrovy kružnice. Na osu úseček jsou nanášeny hodnoty poměrných deformací ε a na svislou osu poloviční hodnoty zkoso $\frac{\gamma_{xy}}{2}$ (obr. 4.6).

Obsah

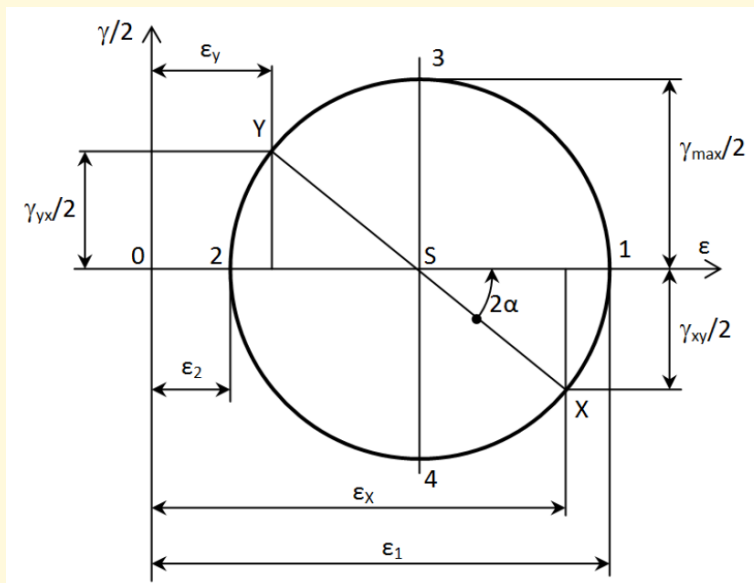
117. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno



Obr. 4.6

Pro hlavní poměrné deformace platí obdobné vztahy jako pro hlavní napětí (viz rovnice (4.11) a (3.27) kapitola 3))

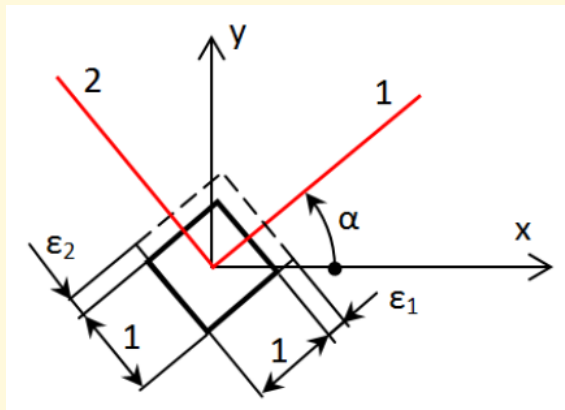
$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}. \quad (4.11)$$

Pro úhel α platí

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{\frac{\gamma_{xy}}{2}}{\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}}, \quad (4.12)$$

což je opět výraz analogický vztahu (3.28).

Směry a hodnoty hlavních deformací ε_1 a ε_2 jsou znázorněny v obr. 4.7.



Obr. 4.7

4.5. Analogie tenzoru napjatosti a tenzoru přetvoření

Podobnost mezi tenzorem napjatosti a tenzorem přetvoření umožňuje formulovat další poznatky:

1. V každém bodě tělesa existují tři navzájem kolmé směry, ve kterých poměrné deformace nabývají extrémních hodnot ε_1 , ε_2 a ε_3 .
2. Směry hlavních poměrných deformací a směry hlavních napětí jsou totožné.
3. Hlavní poměrné deformace je možno vyřešit ze soustavy tří lineárních homogenních rovnic, které jsou analogické k rovnicím (3.43) až (3.45), tedy

$$(\varepsilon_x - \varepsilon) \cos \alpha + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos \beta + \frac{\gamma_{xz}}{2} \cos \gamma = 0, \quad (4.13)$$

$$\frac{\gamma_{xy}}{2} \cos \alpha + (\varepsilon_y - \varepsilon) \cos \beta + \frac{\gamma_{yz}}{2} \cos \gamma = 0, \quad (4.14)$$

$$\frac{\gamma_{zx}}{2} \cos \alpha + \frac{\gamma_{zy}}{2} \cos \gamma + (\varepsilon_z - \varepsilon) \cos \gamma = 0. \quad (4.15)$$

Zároveň musí platit rovnice

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (4.16)$$



Obsah

120 strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

V maticovém zápise budou rovnice (4.13) až (4.15) ve tvaru

$$([A_\varepsilon] - \varepsilon [E]) \{n\} = 0, \quad (4.17)$$

kde matice tenzoru přetvoření

$$[A_\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon_z \end{bmatrix},$$

jednotková matice

$$[E] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a vektor normály

$$\{n\} = \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{Bmatrix}.$$

4. Součet poměrných deformací v libovolných třech navzájem kolmých směrech je invariantní

$$i_{1\varepsilon} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \quad (4.18)$$



Obsah

121. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno



Příklady k procvičení

1. Složky tenzoru přetvoření jsou zadány následujícími hodnotami: $\varepsilon_x = 5 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_y = -3 \cdot 10^{-4}$, $\gamma_{xy} = 4 \cdot 10^{-4}$. Určete hlavní poměrné deformace ε_1 a ε_2 a jejich směry.
2. V bodě tělesa působí rovinná napjatost. Měřením byly zjištěny poměrné deformace ve třech směrech, vzájemně svírajících úhel 45° : $\varepsilon_x = 6,87 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_y = -2,2 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_\alpha = 8,1 \cdot 10^{-4}$. Určete směr a velikost hlavních poměrných deformací a hlavních napětí. Modul pružnosti je $E = 2 \cdot 10^5 MPa$, $\mu = 0,3$.
3. V bodě tělesa byly naměřeny hodnoty poměrných deformací o velikostech $\varepsilon_a = 70 \cdot 10^{-6}$, $\varepsilon_b = 850 \cdot 10^{-6}$, $\varepsilon_c = 250 \cdot 10^{-6}$. Osu snímače a stotožníme s x , potom bude $\varphi_a = 0^\circ$. Ostatní osy snímače jsou potom od osy x odkloněny o úhly: $\varphi_b = 60^\circ$, $\varphi_c = 120^\circ$. Určete hlavní poměrné deformace, jejich směry k ose x a maximální smykovou deformaci.

Klíč k příkladům k procvičení

1. $\varepsilon_1 = 5,47 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_2 = -3,47 \cdot 10^{-4}$, $\alpha = 13,28^\circ$
2. $\varepsilon_1 = 9,67 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_2 = -5 \cdot 10^{-4}$, $\alpha = 19,5^\circ$, $\sigma_1 = 179,56 MPa$,
 $\sigma_2 = -46,13 MPa$
3. $\varepsilon_1 = 862 \cdot 10^{-6}$, $\varepsilon_2 = -82 \cdot 10^{-6}$, $\alpha_1 = 66,4^\circ$, $\alpha_2 = -23,6^\circ$, $\gamma_{max} = 944 \cdot 10^{-6}$

[Obsah](#)

122. strana ze 449

[Zavřít dokument](#)[Konec](#)[Celá obrazovka / Okno](#)

Pojmy k zapamatování

- podélná poměrná deformace
- zkos
- Cauchyho geometrické rovnice
- Mohrova kružnice
- tenzor přetvoření

4.5.1. Interaktivní test

Následující test byl vytvořen pomocí balíčku **acrotex**. Test zahájíte kliknutím na tlačítko „Zacátek testu“. U otázek, kde lze volit jen jednu odpověď (test nedovolí zaškrtnout více odpovědí), je správná odpověď bodována takovým počtem bodů, jaký je uveden v závorce u zadání a špatná odpověď je bodována 0 body. U otázek, kde lze volit více správných odpovědí, je součet bodů správných odpovědí uveden v závorce u zadání a za každou špatnou odpověď bude odečten jeden bod.



Obsah

123. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

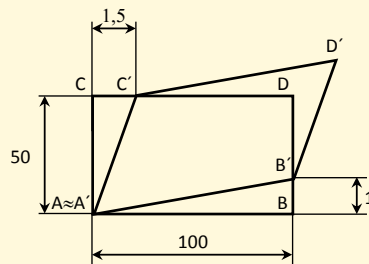
1. (2b.) Jaká je hodnota zkосу pro případ prostého smyku, je-li přesazení elementu $\Delta a = 0.01\text{mm}$ a rozměr čtvercového elementu $a=1\text{mm}$.

$$0.01/1$$

$$\arctg(0.01/1)$$

$$\text{tg}(0.01/1)$$

2. (2b.) Určete hodnotu zkосу pro případ namáhání rovinného elementu na obrázku 4.8



Obr. 4.8

$$\arctg(1,5/50) - \arctg(1/100)$$

$$\arctg(1,5/50) + \arctg(1/100)$$

$$\text{tg}(1,5/50) + \text{tg}(1/100)$$

3. (2b.) Kolik je nezávislých složek tenzoru přetvoření pro trojosou napjatost?

3

6

9

12

4. (2b.) Kolik je nenulových (nezávislých) složek tenzoru přetvoření v případě rovinné deformace?

3

4

2

5. (2b.) Kolik je nenulových (nezávislých) složek tenzoru přetvoření v případě rovinné napjatosti?

4

3

2



Obsah

125. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno



6. (2b.) Předpokládejme, že axiální posunutí v bodě tělesa je dáno kvadratickou funkcí $u_x = 100(x^2 - 2x + 6)$. Stanovte funkci pro podélnou poměrnou deformaci (vyjděte z Cauchyho geometricko-deformačních vztahů)

$$\varepsilon_x =$$

7. (2b.) Poměrná podélná deformace prizmatické tyče délky L je $\varepsilon_x = 0.001$. Stanovte funkci pro axiální posuv (vyjděte z Cauchyho geometricko-deformačních vztahů)

$$u_x =$$

8. (2b.) Jsou směry hlavních napětí kolineární se směry hlavních deformací v elastické oblasti?

ne

ano

9. (3b.) K čemu se používá Mohrova kružnice pro deformace?

ke stanovení hlavních
směrů

k určení hlavních
deformací

k výpočtu maximálního
zkosení

10. (2b.) Jaká bude poměrná podélná deformace tyče počáteční délky 100mm, je-li prodloužení 2mm?

0,2%

2%

1%

Obsah

126. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:

Pro ukončení testu je třeba kliknout na tlačítko „Konec testu“. Opravení testu se provede kliknutím na tlačítko „Výsledky“, správné odpovědi budou označeny zeleně a červeně budou označeny odpovědi chybné. Při použití otázky s tvořenou odpovědí se správná odpověď zobrazí v rámečku umístěném vpravo dole v navigačním panelu po kliknutí na tlačítko „Odpoved“.



Obsah

127. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Kapitola 5

Mechanické vlastnosti materiálů

Průvodce studiem

V předcházejících kapitolách byly zopakovány základní způsoby zatěžování tělesa (tah, ohyb, krut) a byl podán stručný popis chování v bodě tělesa (elementární krychle, tenzor napjatosti, tenzor deformace a Mohrova kružnice). Toto chování bylo dáno zatížením tělesa. Skutečné konstrukce jsou ovlivněny nejen zatížením, které na ně působí, ale také materiálem, z kterého jsou vyrobeny. Tato kapitola popisuje tahovou zkoušku, vysvětluje její vztah k Hookeovu zákonu a rozšiřuje jeho použití na víceosou napjatost.

Cíle

Po prostudování této kapitoly:

- získáte náhled na vztah mezi experimentem a teorií
- budete rozumět základnímu vztahu mezi napětím a deformací
- budete znát základní rovnice, popisující chování materiálu v mechanice kontinua
- budete umět navrhnout a vyhodnotit jednoduchý experiment pro zjištění základních materiálových charakteristik



Obsah

128. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

5.1. Vymezení základních pojmů

Podrobný popis struktury a chování materiálů byl obsahem předmětu Nauka o materiálu či Vlastnosti a zkoušení materiálů. Z hlediska předmětu pružnost a pevnost nás zajímají zejména „vnější projevy“ materiálu. Po zatížení válce se tento protáhne, zkrutí, prohne apod. a samotné složení materiálu pro nás tedy není podstatné. V praxi můžeme využít širokou paletu materiálů (které jsou reprezentovány různými materiálovými modely), v předmětu pružnost a pevnost se budeme věnovat pouze těm nejjednodušším.

Stejně jako v Nauce o materiálu budeme považovat za materiál pouze pevné látky (kapaliny a plyny jsou popsány v jiných předmětech). Většinu konstrukčních materiálů můžeme považovat za homogenní a isotropní.

Definice 5.1. *Isotropní materiály* mají ve všech směrech stejné vlastnosti.

Definice 5.2. *Homogenní materiály* mají ve všech bodech tělesa stejné vlastnosti.

Při našich úvahách a výpočtech se budeme pohybovat v oblastech zatížení, kde se materiály chovají lineárně (bude vysvětleno v další kapitole). Budeme také předpokládat, že materiály se chovají stejně bez ohledu na rychlost zatěžování (např. rázy), případně teplotu (např. creep, teplotní namáhání) atp.

I přes výše popsaná zjednodušení je možné klasickou pružnost použít ve většině případů praxe, případně jako první přiblížení či odhad chování u složitějších případů. V předmětu



Obsah

129 strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

pružnost a pevnost budeme obvykle „používat“ kovové materiály nebo přímo ocel. Samozřejmě nesmíme zapomenout na další podmínky, které se ale netýkají přímo materiálů:

- a) V předmětu pružnost a pevnost se zabýváme „pomalými“ ději, kde lze dynamické vlivy zanedbat. Jedná se tedy o statické výpočty.
- b) Posuvy musí být vůči rozměrům počítaného tělesa zanedbatelně malé. Pro těleso o rozměrech řádově v metrech mohou být posuvy v jednotkách *mm*.
- c) Platí Saint Vénantův princip lokálnosti, viz kapitola 2.

Výše popsaná zjednodušení nám velmi zjednoduší postup výpočtů. Jeden z nejdůležitějších a často využívaných principů je princip superpozice, který ovšem platí pouze za výše uvedených předpokladů. V případě, že výše uvedené předpoklady neplatí, musíme pečlivě zvážit, zda je možné superpozice využít.

Definice 5.3. Princip superpozice umožňuje složitou úlohu rozdělit na jednodušší části, tyto vyřešit a znovu sečíst do výsledku. Výsledek, získaný součtem rozdělených úloh, je shodný s výsledkem řešení celé úlohy. Princip superpozice je možné využít při řešení sil, napětí i deformací.

Uvažujme prizmatický prut, na nějž působí dvě osamělé síly F_1 a F_2 dle obr. 5.1. Prodloužení prutu je pak rovno součtu prodloužení od jednotlivých sil ($\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2$).

V dalších kapitolách bude uvedeno několik případů využití principu superpozice a také případů, kdy tento princip nelze použít.



Obsah

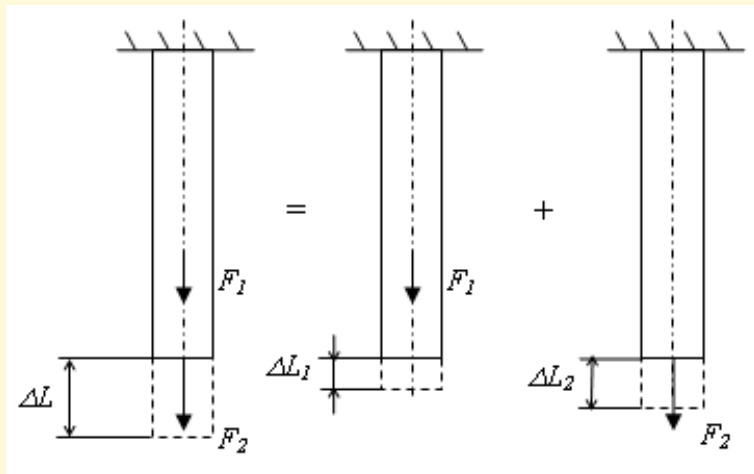
130. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno



Obr. 5.1

Vlastnosti materiálů se „získávají“ pomocí experimentů – zkoušek. Mezi nejznámější patří např. tahová zkouška, torzní – krutová zkouška, přechovací zkouška, zkoušky ohybem atd. Výše uvedené zkoušky patří mezi tzv. destruktivní metody zkoušení (existují také tzv. nedestruktivní metody zkoušení).

Definice 5.4. Při použití *destruktivní metody zkoušení* se zkušební vzorek poruší.

Definice 5.5. Při použití *nedestruktivní metody zkoušení* se zkušební vzorek neporuší.

Základní popis, složení a vlastnosti běžně používaných materiálů (oceli, litiny, vybrané plasty atd.) můžeme najít v materiálových listech nebo strojnických tabulkách (jsou běžně dostupné). Mezi základní materiálové parametry můžeme počítat např. modul pružnosti v tahu, mez pružnosti, mez pevnosti. Další materiálové charakteristiky a jejich materiálové parametry (únava, teplotní závislosti, creep atd.) lze najít v odborné literatuře nebo na internetu.

Výsledkem experimentů může být graf, popisující chování vzorku (zkoušeného materiálu). Graf může mít podobu závislosti zatížení – deformace, čas – deformace atd. dle charakteristik materiálu, které chceme získat. Vyhodnocením grafu pak získáme hodnoty materiálových parametrů, např. hodnotu modulu pružnosti v tahu. Způsob vyhodnocení zkoušky nebo lépe způsob získání materiálových parametrů je často předepsán normou.

5.2. Tahová zkouška

Jednou ze základních a nejznámějších zkoušek je tahová zkouška. Zkušební vzorek válcového tvaru (základní tvar je předepsán normou) je uchycen do zkušebního stroje. Vzorek je zatěžován rostoucí osovou silou, která způsobí prodloužení vzorku až do jeho přetržení. Na obr. 5.2 je ukázán zkušební stroj, zkušební vzorky před a po přetržení.



Obsah

132 strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno



Obr. 5.2

Zkušební stroj zahrnuje snímače, které měří zatěžující osovou sílu, a průtahoměr, který slouží pro měření prodloužení zkušební části vzorku. Moderní trhačí stroje jsou vybaveny automatickým průtahoměrem, viz ukázkové video na další straně.

[Obsah](#)

133. strana ze 449

[Zavřít dokument](#)[Konec](#)[Celá obrazovka / Okno](#)

Pokud se video nezobrazí, použijte odkaz:

http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/tahova_zkouska.avi.

Video tahové zkoušky - materiál 11523

Základním výsledkem zkoušky je závislost mezi osovou silou a prodloužením vzorku ($F - \Delta l$). Tento graf se ovšem běžně nepoužívá. Z hlediska pružnosti je důležitá závislost napětí – poměrné podélné prodloužení ($\sigma - \varepsilon$). Zjednodušeně můžeme říci, že hlavní výhodnou zobrazení ($\sigma - \varepsilon$) je nezávislost na průměru a délce zkušební části vzorku. K přepočtu grafu ($F - \Delta l$) použijeme vzorce $\sigma = \frac{F}{S_0}$, $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$ (viz předchozí kapitoly), kde F je zatěžující síla,



Obsah

134. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

S_0 je počáteční plocha průřezu, Δl je prodloužení zkušební části vzorku a l_0 je počáteční délka zkušební části vzorku. Klasický průtahoměr není schopen postihnout například místní zúžení vzorku (krček), což je patrné z animace.

Animace smluvního diagramu - materiál 11523



Obsah

135. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Diagram $(\sigma - \varepsilon)$ popisuje chování materiálu „v bodě“, je nezávislý na tvaru vzorku a závisí pouze na použitém materiálu (technologii výroby apod.). Naopak diagram $(F - \Delta l)$ popisuje chování „celého vzorku“ a závisí nejen na tvaru, ale i na materiálu. Diagram $(\sigma - \varepsilon)$ se nazývá smluvní nebo také pracovní či technický diagram zkoušky tahem a napětí, vypočtené tímto postupem, je *smluvní napětí* (nominální napětí).

Definice 5.6. *Smluvní* nebo také *pracovní* či *technický diagram zkoušky tahem* popisuje závislost mezi napětím ($\sigma = \frac{F}{S_0}$) a poměrným podélným prodloužením ($\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$), kde napětí je počítáno z počáteční plochy průřezu zkušební části vzorku.

Během zatěžování zkušebního vzorku se zvětšuje délka, ale také zmenšuje průřez vzorku. *Skutečné napětí* ve vzorku tedy musíme počítat ne na základě počáteční plochy průřezu, ale na základě okamžité (skutečné) hodnoty plochy průřezu S . Skutečná plocha průřezu S bude při tahové zkoušce vždy menší než plocha počáteční S_0 . A tedy napětí skutečné σ_S bude vždy větší, než napětí smluvní σ . Podobně lze zpřesnit popis deformace formou okamžitého (skutečného, přirozeného) nebo lépe logaritmického poměrného prodloužení ε_S .

Definice 5.7. *Definice Logaritmické poměrné prodloužení* ε_S popisuje okamžitou hodnotu deformace a pro přepočet z poměrného prodloužení ε použijeme rovnici

$$\varepsilon_S = \ln(1 + \varepsilon). \quad (5.1)$$

Definice 5.8. *Skutečný diagram zkoušky tahem* popisuje závislost mezi okamžitým (skutečným) napětím ($\sigma_S = \frac{F}{S}$ a logaritmickým (skutečným) poměrným prodloužením ($\varepsilon_S = \ln(1 + \varepsilon)$).



Obsah

136. strana ze 449

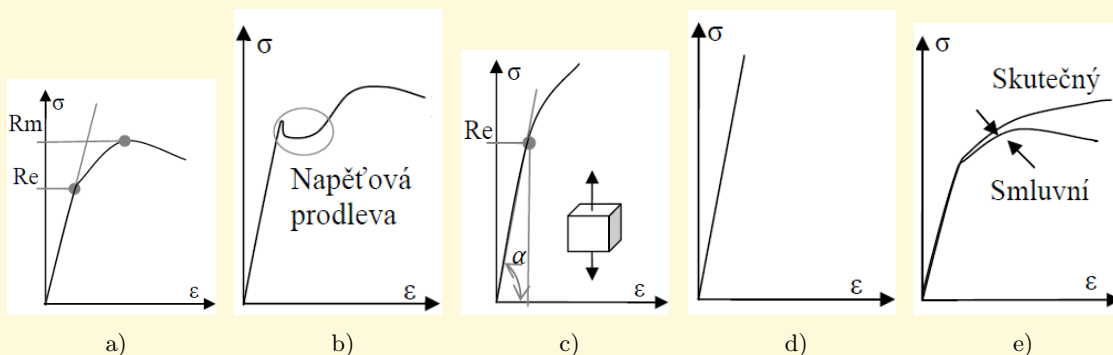


Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

V obr. 5.3 jsou ukázány příklady diagramů smluvních pro tvárné a křehké materiály. Výrazný rozdíl mezi smluvním a skutečným diagramem je u tvárných materiálů (obr. 5.3 e)).



Obr. 5.3

Na obr. 5.3 je uveden typický smluvní diagram pro tvárný materiál. U některých kovových materiálů můžeme zaznamenat výraznou mez kluzu (obr. 5.3 b)) či nízkou tažnost (obr. 5.3 c)). U křehkých materiálů je graf lineární až téměř do porušení (obr. 5.3 d)).

Pracovní (smluvní) diagram tahové zkoušky (křehký materiál obr. 5.3 d), tvárný materiál obr. 5.3 a), 5.3 b)) můžeme rozdělit do několika částí:

- V první části roste napětí lineárně v závislosti na poměrném prodloužení. Při odlehčení v této části se vzorek vrací do původního tvaru – nevznikají trvalé deformace. Konec první – lineární části grafu nazýváme mez úměrnosti σ_u (mez pružnosti, někdy ztotožňujeme s mezí kluzu R_e).

Definice 5.9. *Smluvní mez kluzu* je definována „zanedbatelně“ malou trvalou deformací – např. 0,005% délky zkušební tyče (dle typu materiálu nebo použití jsou výše uvedené meze definovány normou).

Některé oceli vykazují tzv. *výraznou mez kluzu*, která odpovídá napětové prodlevě na křivce ($\sigma = \varepsilon$) viz (obr. 5.3 b)). Mez kluzu R_e patří mezi základní materiálové parametry a lze ji pro velkou část materiálů nalézt ve strojnických tabulkách, případně v materiálových listech.

Definice 5.10. Chování lineární části křivky popisujeme pomocí *Hookeova zákona* pro jednoosou napjatost – pro prostý tah. Což je rovnice, popisující úvodní-přímkovou část tahového diagramu

$$\sigma = E \cdot \varepsilon. \quad (5.2)$$

Definice 5.11. *Modulem pružnosti v tahu* E nazýváme směrnici tečny úvodní – přímkové části tahového diagramu

$$E = \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\sigma}{\varepsilon}. \quad (5.3)$$



Obsah

138. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno



Modul pružnosti v tahu je takové smluvní napětí, které způsobí prodloužení zkušební části vzorku na dvojnásobek.

Hookeův zákon pro jednoosou napjatost popisuje závislost ($\sigma = \varepsilon$) do meze pružnosti. Modul pružnosti materiálu v tahu E (pro ocel $E \cong 200000 \text{ MPa}$) se nazývá také Youngův modul. Modul pružnosti v tahu patří mezi základní materiálové parametry a lze jej nalézt v materiálových listech, strojnických tabulkách, příp. učebnicích pružnosti. Při tahové zkoušce dochází k jednoduché jednoosé napjatosti. V úvodní, lineární části křivky je v tělese, zatíženém pouze tahem, tento předpoklad splněn velmi dobře.

Současně s prodlužováním zkušební části dochází i k zužování průřezu. Podobně jako poměrné prodloužení $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$ můžeme definovat poměrné příčné zúžení $\delta = \frac{\Delta d}{d_0}$, kde Δd je rozdíl průměru zkušební části vzorku před a po deformaci $d - d_0$. Poměr obou veličin pak nazýváme Poissonovo číslo $\mu = \frac{\delta}{\varepsilon} [-]$ (pro ocel v elastické oblasti $\mu \cong 0,3$).

Definice 5.12. *Poissonův zákon* popisuje závislost mezi podélným poměrným prodloužením a příčným poměrným „zkrácením”. Například

$$\varepsilon_y = -\mu \cdot \varepsilon_x. \quad (5.4)$$

Tedy, při zatížení válcového vzorku tahovou silou v ose x můžeme deformaci ve vzorku popsat poměrným prodloužením ε_x ve směru osy a poměrným prodloužením ε_y kolmo na osu vzorku (platí $\varepsilon_y = -\delta$). Pro vybrané materiály jsou základní elastické konstanty uvedeny v tab. 5.1.

Obsah

139. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Materiál	Youngův Modul E [MPa]	Poissonovo číslo μ [1]
Hliníkové slitiny	$\approx 7,5 \cdot 10^4$	$= 0,31$
Mosaz	$\approx 1,04 \cdot 10^5$	$\approx 0,33$
Bronz	$\approx 1,17 \cdot 10^5$	$= 0,31$
Litina	$\approx 9,65 \cdot 10^4$	$\approx 0,18$
Ocel	$2 \cdot 10^5 \div 2,16 \cdot 10^5$	$0,28 \div 0,3$

Tab. 5.1

- Ve druhé části tahového diagramu (za mezí kluzu) dochází k nárůstu deformace při podstatně pomalejším nárůstu síly. Při odlehčení vzorku v této části zatěžování se vzorek nevrátí do původního tvaru – vzniká trvalá deformace, viz obr. 5.4 a). Celkovou deformaci ε můžeme rozložit do dvou částí $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$, elastické ε_e (vratné, lineární části) a plastické ε_p (trvalé, nelineární části).

V plastické oblasti je Poissonovo číslo $\mu = 0,5$, protože nedochází ke změně objemu [1]. Při zatěžování nad mezí kluzu již neplatí princip superpozice (viz obr. 5.4 b)) a výpočty v této oblasti jsou složitější než výpočty v lineární oblasti. Těmito typy výpočtů se zabývá *plasticita*. V praxi se nad mezí kluzu pohybujeme při tváření, kování, válcování atd.

- Druhá část smluvního diagramu končí na *mezi pevnosti v tahu* R_m .



Obsah

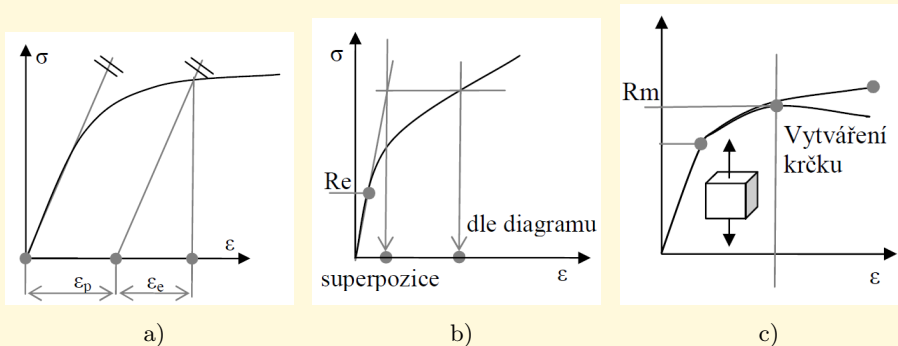
140. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno



Obr. 5.4

Definice 5.13. *Mez pevnosti v tahu* je poměr mezi maximální zatěžující silou F_{MAX} dosaženou při tahové zkoušce a počáteční plochou průřezu S_0

$$Rm = \frac{F_{MAX}}{S_0}. \quad (5.5)$$

V této části tahového diagramu je již rozdíl mezi smluvní (naměřenou) a skutečnou křivkou (korekce změny průřezu a poměrného prodloužení) značný (obr. 5.4 c)). Mez pevnosti Rm v tahu patří mezi základní materiálové parametry a lze ji nalézt v materiálových listech, strojnických tabulkách, příp. učebnicích pružnosti.

Křehké materiály (vzniká velmi malá trvalá deformace, např. litina) se poruší na mez pevnosti. Při tahové zkoušce dochází k jednoduché jednoosé napjatosti. V druhé,

„plastické” části křivky je v tělese, zatíženém pouze tahem, tento předpoklad také splněn velmi dobře.

- U tvárných materiálů se za mezí pevnosti začne vytvářet krček – výrazné zúžení průřezu ve zkušební části vzorku (obr. 5.2, obr. 5.4 c)), proto mluvíme o oblasti nehomogenní plastické deformace. Ve smluvním tahovém diagramu (obr. 5.4 c)) pak napětí klesá, naopak ve skutečném tahovém diagramu (vytváření krčku) napětí roste až do přetržení (skutečné napětí při přetržení se značí σ_f). V oblasti nehomogenní plastické deformace nemusí být v tělese, zatíženém pouze tahem, předpoklad jednoosé napjatosti splněn. V zúžené části (okolí krčku) již vzniká víceosá napjatost.
- Rozdíl mezi smluvním a skutečným diagramem roste s rostoucím zatížením – v lineární oblasti je vliv zanedbatelný, při zatěžování nad mezí kluzu bychom měli používat vždy skutečný diagram.

K popisu skutečného tahového diagramu – nebo lépe k základnímu popisu chování materiálu – se používají konstituční rovnice. Mezi nejznámější patří např. Ramberg-Osgoodova křivka: $\varepsilon = \frac{\sigma}{B} + \frac{\sigma}{C} \frac{1}{m}$, Hollomonova rovnice: $\sigma = C \cdot \varepsilon^m$, Ludwikova rovnice: $\sigma = B + C \cdot \varepsilon^m$, Swiftova rovnice: $\sigma = C (\varepsilon_0 + \varepsilon)^m$, kde B , C , m , ε_0 jsou materiálové parametry. Tyto materiálové parametry se určují z experimentů a nejsou běžně dostupné.

K základním charakteristikám materiálů patří ještě tažnost A a kontrakce Z . Tyto charakteristiky také bývají běžně uváděny v materiálových listech. Tažnost A je definována jako poměr prodloužení měřené délky tyče po přetržení k počáteční délce tyče, vyjádřený v procentech. Kontrakce Z je definována podobně, jako poměr rozdílu počátečního a nejmen-



Obsah

142. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

šího průřezu zkušební tyče po přetržení k počátečnímu průřezu. I kontrakce je vyjádřována v procentech.

5.3. Vyhodnocování zkoušek

Všechny stroje, součásti, díly atd. jsme schopni vyrobit pouze v určité přesnosti – toleranci. Podobně i materiály garantují chemické složení pouze v určitém rozmezí. Navíc zde vstupuje do hry i kvalita výroby – opracování, tepelné úpravy či svařování atp. Každý výrobek (i zkušební vzorek) je tedy z hlediska rozměrů i složení a chování unikátní. Výsledek měření ovlivní také zvolená měřicí metoda (chyba měření). Při stanovování materiálových charakteristik pak vycházíme ze sady vzorků, vyrobených ze stejného materiálu, stejným postupem a které mají stejný tvar. Výsledky vyhodnotíme statisticky. Z desítek nebo stovek stejných experimentů určíme „reprezentativní“ modul pružnosti v tahu, mez pružnosti, mez pevnosti atd. V tabulkách materiálu najdeme „nejnižší“ (dle charakteru parametru mohou být také „nejvyšší“ nebo průměrné) hodnoty naměřené v sadě experimentů. Např. u meze kluzu najdeme v tabulkách hodnotu, pro kterou platí, že 90% (95%, 99% atd.) vzorků vykazovalo vyšší hodnotu meze kluzu. Pohybujeme se tedy v „bezpečné“ oblasti a dle charakteru materiálového parametru volíme nejméně příznivou hodnotu.

5.4. Hookeův zákon pro prostý smyk

Hookův zákon pro prostý smyk si můžeme odvodit z pracovního diagramu zkoušky (např. z krutové zkoušky), při které vzniká napjatost prostého smyku, viz obr. 5.5). Úhly vždy uvádíme v úhlové míře (radiánech). Tentokrát se budeme věnovat pouze první - lineární



Obsah

143. strana ze 449



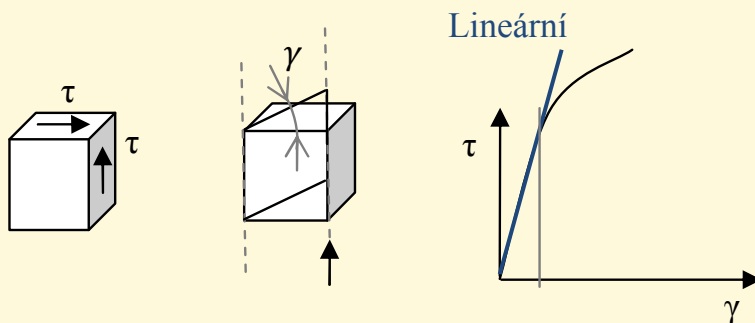
Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

části křivky. Znovu si zavedeme několik omezujících předpokladů, které nám zjednoduší řešení:

- při zatížení vznikají pouze malé deformace
- jednotlivé řezy v bodě zůstávají rovinné (viz obr. 5.5)



Obr. 5.5

Stejným způsobem jako u tahu pak můžeme z grafu ($\tau - \gamma$) na obr. 5.5 odvodit Hookův zákon pro smyk (pohybujeme se v úvodní – lineární části grafu).



Definice 5.14. *Hookeův zákon pro smyk* popisuje závislost mezi smykovým napětím a zkosem ($\tau - \gamma$) v elementární krychli do meze pružnosti

$$G = tg(\alpha) = \frac{\tau}{\gamma}. \quad (5.6)$$

Definice 5.15. *Modulem pružnosti ve smyku* G nazýváme směrnici tečny úvodní – přímkové části diagramu, získaného při namáhání prostým smykem (např. při krutové zkoušce).

5.5. Vztahy mezi veličinami γ , ε

Obě veličiny (zkos γ i poměrné prodloužení ε) popisují deformace v elementární krychli a lze mezi nimi najít jednoznačný vztah. Pro malé deformace ($\gamma \approx 0 \rightarrow tg(\gamma) \approx \gamma$) platí

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{2}. \quad (5.7)$$

Poměrnou normálovou deformaci odpovídající zkosu obvykle značíme rozdílnými indexy

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2}, \quad \varepsilon_{xz} = \frac{\gamma_{xz}}{2}, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{\gamma_{yz}}{2}. \quad (5.8)$$

Podobně jako u smykových napětí platí rovnice

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}, \quad \gamma_{xz} = \gamma_{zx}, \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy}. \quad (5.9)$$

Obsah

145. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

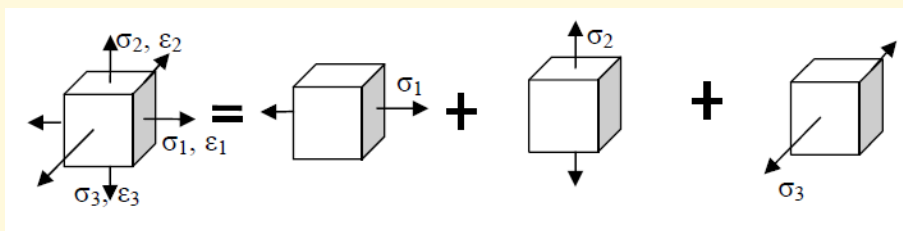
Celá obrazovka / Okno

5.6. Hookeův zákon pro trojosou napjatost

Základní rovnice, popisující napětově – deformační chování materiálu při jednoosém namáhání, jsou Hookeův zákon a Poissonův zákon. V praxi často potřebujeme popsat chování materiálu i při víceosé napjatosti.

Definice 5.16. *Hookeův zákon pro trojosou napjatost se nazývá rozšíření Hookeova zákona pro jednoosou napjatost pro zatížení ve více osách nebo také zkráceně obecný Hookeův zákon.*

Připomeňme, že v lineární oblasti jsou směry hlavních napětí a hlavních deformací shodné (kapitola 4). Sestavení rovnic, popisujících chování materiálu v lineární oblasti (obecný Hookeův zákon), provedeme pomocí principu superpozice (obr. 5.6).



Obr. 5.6

Budeme uvažovat elementární krychli se 3 hlavními napětími v osách x , y , z a zároveň platnost principu superpozice (podmínky platnosti zákona superpozice deformace se shodují s předpoklady pružnosti a pevnosti, uvedenými v kapitole 1).

Trojosé zatížení v elementární krychli rozložíme na tři samostatné části – elementární krychle s pouze tahovým zatížením (jednou v ose x , jednou v ose y a jednou v ose z). U rozdělených elementárních krychlí pak vypočteme poměrné prodloužení ve všech směrech. Příslušné složky poměrného prodloužení nakonec znovu sečteme.

Elementární krychle, zatížená v jednom směru (jednoosá napjatost), např. v ose x – směr 1, se v tomto směru prodlouží. Poměrné prodloužení zjistíme z Hookeova zákona pro tah v upraveném tvaru

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}. \quad (5.10)$$

Kolmo k ose x (osy y, z – směry 2, 3) dojde k zúžení. Hodnotu zúžení vyjádříme z Poissonova zákona

$$\varepsilon_y = -\mu \cdot \varepsilon_x = -\mu \cdot \frac{\sigma_x}{E}. \quad (5.11)$$

Celé odvození pro homogenní elastický izotropní materiál je uveden v následující tabulce.

[Obsah](#)

147. strana ze 449

[Zavřít dokument](#)[Konec](#)[Celá obrazovka/Okno](#)



	Elementární krychle odpovídá zatížení tahem v ose x – směr 1. Vypočteme poměrné prodloužení při zatížení pouze od σ_1 $\varepsilon_1^a = \frac{\sigma_1}{E}, \varepsilon_2^a = -\mu \cdot \varepsilon_1^a, \varepsilon_3^a = -\mu \cdot \varepsilon_1^a.$
	Elementární krychle odpovídá zatížení tahem v ose y – směr 2. Vypočteme poměrné prodloužení při zatížení pouze od σ_2 $\varepsilon_2^b = \frac{\sigma_2}{E}, \varepsilon_1^b = -\mu \cdot \varepsilon_2^b, \varepsilon_3^b = -\mu \cdot \varepsilon_2^b.$
	Elementární krychle odpovídá zatížení tahem v ose z – směr 3. Vypočteme poměrné prodloužení při zatížení pouze od σ_3 $\varepsilon_3^c = \frac{\sigma_3}{E}, \varepsilon_2^c = -\mu \cdot \varepsilon_3^c, \varepsilon_1^c = -\mu \cdot \varepsilon_3^c.$
	Sečteme znovu složky deformace v příslušných směrech. Pro osu x – směr 1: $\varepsilon_1 = \varepsilon_1^a + \varepsilon_1^b + \varepsilon_1^c = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \cdot \frac{\sigma_2}{E} - \mu \cdot \frac{\sigma_3}{E} = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \cdot \frac{\sigma_2}{E} - \mu \cdot \frac{\sigma_3}{E}$, tedy $\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu (\sigma_2 + \sigma_3)].$ Obdobně v ostatních směrech $\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu (\sigma_1 + \sigma_3)], \varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu (\sigma_1 + \sigma_2)].$

Obsah

148. strana ze 449

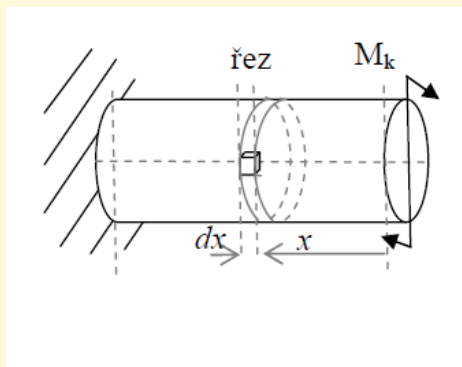


Zavřít dokument

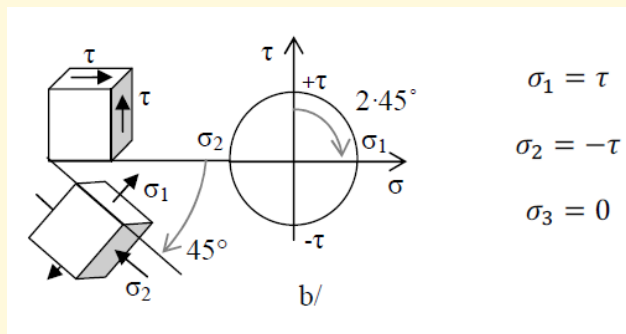
Konec

Celá obrazovka / Okno

Elastické konstanty E , G , μ jsou vzájemně závislé. Vztah mezi nimi můžeme snadno určit uvažováním napjatosti prostého smyku (např. krut), pomocí Mohrovy kružnice a Hookeova zákona pro trojosou napjatost, viz obr. 5.7.



a)



b/

Obr. 5.7

Po dosazení hlavních napětí do Hookeova zákona pro trojosou napjatost získáme

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \mu \cdot \sigma_2) &= \frac{1}{E} (\tau + \mu \cdot \tau) = \frac{\tau}{E} (1 + \mu), \\ \frac{E \cdot \varepsilon_1}{(1 + \mu)} = \tau &= G \cdot \gamma = 2 \cdot G \cdot \varepsilon_1, \\ \frac{E}{2(1 + \mu)} &= G.\end{aligned}\tag{5.12}$$

V předchozí části byly uvedeny rovnice (tab. 5.2), které obsahují pouze hlavní napětí, tzn. smykové složky jsou nulové a tedy i zkos je nulový. V případě, že je dána napjatost v jiném souřadnicovém systému, máme obecně šest složek napětí. Z charakteru normálových složek tenzoru napjatosti a tenzoru přetvoření můžeme psát (pouhou záměnou indexů)

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu (\sigma_y + \sigma_z)], \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu (\sigma_x + \sigma_z)], \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu (\sigma_y + \sigma_x)].\end{aligned}\tag{5.13}$$

Tyto rovnice doplňují další tři rovnice, vyjadřující vztah mezi smykovými složkami tenzoru napjatosti a odpovídajícími zkosy, které získáme z Hookeova zákona pro smyk

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy}, \quad \tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz}, \quad \tau_{yz} = G \cdot \gamma_{yz}.\tag{5.14}$$



Obsah

150. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

5.7. Další experimenty

Podobně jako tah můžeme vyhodnotit i tlak. Většina materiálů se chová v oblasti tahu a tlaku jinak. Některé součásti mohou být zatěžovány pouze tahem (lana apod.) některé pouze tlakem (stěna, poskládaná z cihel). U tlaku při použití tvárných materiálů nemusí dojít k porušení (deformace se stále zvětšuje), proto se zkouška tlakem obvykle provádí do dosažení určité deformace.

V praxi se často využívají i jiné typy zkoušek. Vždy se experimentátoři snaží o maximální přiblížení ke skutečnému zatěžovacímu stavu. Zkoušky tedy můžeme rozdělit dle zatěžovacího stavu (tah–tlak, krut, ohyb, střih, únava atd.). Mezi nejsložitější „zkušební vzorky“ pak můžeme zařadit prototypy. Zatížení prototypů se volí dle skutečných provozních charakteristik stroje a často je zkouška předepsána příslušnou normou.

5.8. Únava

Na začátku kapitoly o materiálových vlastnostech jsme z úvah vyloučili vliv času. Čas má samozřejmě velký vliv na chování materiálu, můžeme rozlišit dva základní případy. V čase se mění zatížení – touto částí se zabývá únava materiálu. Pokud má vliv na napětově – deformační chování rychlost deformace, mluvíme o *viskoplasticitě*. Příkladem je tečení kovů (creep), kdy při dlouhodobém konstantním zatížení za vysoké teploty roste deformace s časem. Tento jev byl probrán již v Nauce o materiálu.

Mezi únavové zatížení můžeme zařadit jakékoliv opakující se zatížení (zatížení se může měnit také náhodně). Podle počtu cyklů můžeme hrubě rozdělit zatížení:

[Obsah](#)

151. strana ze 449

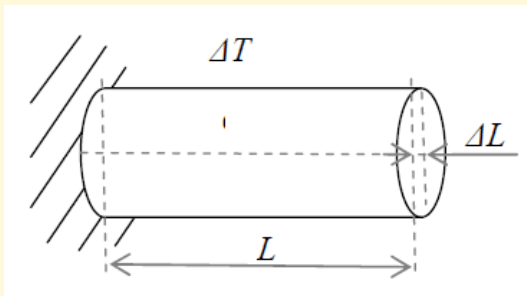
[Zavřít dokument](#)[Konec](#)[Celá obrazovka / Okno](#)

- statické, kvazistatické (do 1000 cyklů)
- nízkocyklovou únavu (od 1000 do 10^5 cyklů)
- vysokocyklovou únavu (nad 10^5 cyklů)

Únavu ovlivňuje velké množství vlivů – vruby, velikost tělesa, tvar zátěžných cyklů atd. Vzhledem k důležitosti problematiky je únavě věnována celá kapitola **11**, kde je základní popis nejdůležitějších charakteristik. Podrobněji se únavě věnují samostatné předměty např. únava materiálu, lomová mechanika.

5.9. Vliv teploty

Deformaci tělesa může kromě zatížení způsobit také změna teploty. Nejjednodušším případem je změna délky tyče při změně teploty, viz obr. 5.8.



Obr. 5.8



Definice 5.17. *Teplotní roztažnost* – změnu délky tyče při změně teploty počítáme dle rovnice

$$\Delta L = \alpha \cdot \Delta T \cdot L, \quad (5.15)$$

kde α je koeficient teplotní roztažnosti materiálu, ΔT je změna teploty, L je délka tyče a ΔL je prodloužení tyče.

Výše uvedená rovnice se dá převést na vhodnější tvar $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \alpha \cdot \Delta T$. Hookeův zákon pak můžeme přepsat ve tvaru, respektujícím teplotní změny

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu (\sigma_2 + \sigma_3)] + \alpha \cdot \Delta T, \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu (\sigma_1 + \sigma_3)] + \alpha \cdot \Delta T, \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu (\sigma_1 + \sigma_2)] + \alpha \cdot \Delta T. \end{aligned} \quad (5.16)$$

S rostoucí (i klesající) teplotou se mění také vlastnosti materiálu, reprezentované modulem pružnosti v tahu, mezí kluzu atd. U ocelí nemá ohřev o desítky až stovky stupňů velký vliv a často se zanedbává. Naopak při ochlazení mohou materiály „křehnout“ (křehké lomy). Vliv teploty se samozřejmě liší dle materiálu – plasty, dřevo, ocel, měď atd. Konstrukce, které řešíme v úvodním kurzu pružnosti, mívají obvykle pokojovou teplotu $\sim 20^\circ$ a vliv teploty se neuvažuje.

Při řešení úlohy s teplotou se často využívá principu superpozice. Celá úloha je rozložena na část řešení teploty a zbylou část úlohy. Řešení obou částí úlohy se provádí samostatně a výsledky se na závěr superponují.

Obsah

153. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno



Příklad 5.18. Určete koeficient teplotní roztažnosti na základě sady měření teploty a prodloužení válcového ocelového vzorku (viz obr. 5.8). Naměřené hodnoty teplot a prodloužení jsou v tab. 5.3. Předpokládejte, že koeficient teplotní roztažnosti nezávisí na teplotě. Délka vzorku $L = 100 \text{ mm}$, referenční teplota $T_{\text{ref}} = 20^\circ\text{C}$. Přesnost měřidel je dostatečná k odhadu koeficientu teplotní roztažnosti.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T [^\circ\text{C}]$	50,2	79,8	110,3	139,8	169,5	199,9	230,0	260,1	289,8
$\Delta L [\text{mm}]$	0,047	0,063	0,123	0,125	0,157	0,238	0,239	0,307	0,315

Tab. 5.3

K řešení využijeme rovnici, popisující závislost prodloužení na teplotě $\Delta L = \alpha \cdot \Delta T \cdot L$ (kapitola 5.9). Převedeme známé hodnoty na jednu stranu a neznámou teplotní roztažnost na druhou stranu rovnice $\left(\frac{\Delta L}{\Delta T \cdot L} = \alpha\right)$ a dosadíme vstupní hodnoty. Výsledky jsou uvedeny v tab. 5.4.

	1	2	3	4	5	6	7
$\alpha [1/^\circ]$	1,56e-5	1,05e-5	1,36e-5	1,04e-5	1,05e-5	1,32e-5	1,14e-5
	8	9					
$\alpha [1/^\circ]$	1,28e-5	1,17e-5					

Tab. 5.4

V posledním kroku vypočteme hodnotu koeficientu teplotní roztažnosti jako aritmetický

Obsah

154. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

průměr

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}.$$

Koeficient teplotní roztažnosti je $\alpha = 1,22 \cdot 10^{-5} [1/^\circ]$.



5.10. Obecný popis chování materiálu

V předchozích kapitolách bylo ukázáno, že chování homogenního isotropního materiálu v oblasti pružných deformací lze popsat šesti rovnicemi (5.13) a (5.14), které vyjadřují vztah mezi složkami tenzoru napjatosti a složkami tenzoru přetvoření, mluvíme o *obecném Hookeovu zákonu* pro prostorovou napjatost. Z těchto výrazů lze vyjít při formulování rovnic pro anizotropní materiály, tedy takové, které nemají ve všech směrech stejné vlastnosti (anizotropní jsou např. monokrystaly).

Definice 5.19. *Obecný Hookeův zákon* popisuje *lineární* vztah mezi složkami tenzoru napjatosti a tenzoru přetvoření.

S respektováním zákona sdruženosti smykových napětí můžeme obecný Hookeův zákon



Obsah

155. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

napsat v maticové formě

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}. \quad (5.17)$$

Matice materiálových parametrů se nazývá matice tuhosti. Tato rovnice se používá i pro anisotropní materiály. V tomto nejobecnějším případě je počet nezávislých prvků matice tuhosti 21. Jestliže existují tři roviny symetrie materiálových vlastností, pak mluvíme o ortotropním materiálu a nezávislých prvků matice tuhosti je 9. Příkladem ortotropního materiálu je dřevo (vzpomeňme na letokruhy). Další skupinou anizotropních materiálů jsou materiály příčně isotropní, které mají také tři roviny symetrie mechanických vlastností, ale navíc se v jedné z těchto rovin materiál chová isotropně. Příkladem jsou jednosměrné vláknové kompozity (např. lamino).

V našem případě homogenního a isotropního materiálu se matice zjednoduší a Hookeův zákon pro trojosou napjatost bude vypadat takto

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\mu}{E} & \frac{-\mu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\mu}{E} & \frac{1}{E} & \frac{-\mu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\mu}{E} & \frac{-\mu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}, \quad (5.18)$$



Obsah

156. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

případně po dosazení závislosti mezi modulem pružnosti v tahu E a ve smyku G

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\mu & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 1 & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & -\mu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}. \quad (5.19)$$



Obsah

157. strana ze 449



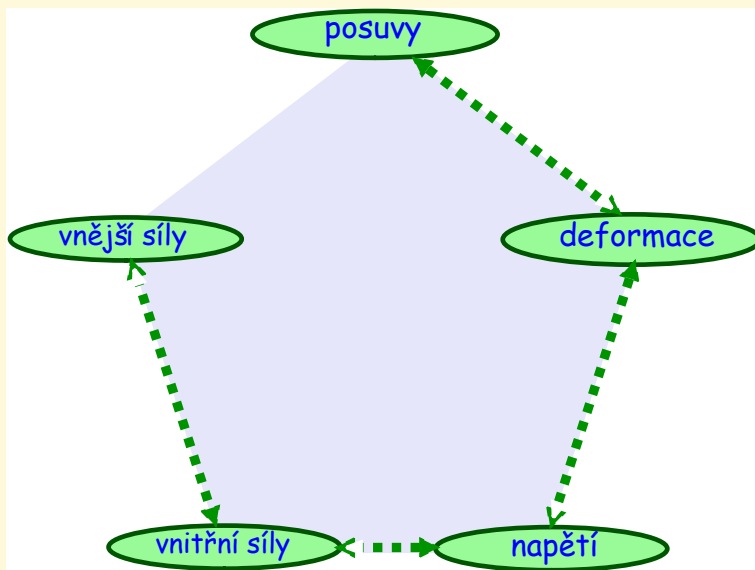
Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

5.11. Logika řešení úloh pružnosti

Nyní již můžeme shrnout poznatky všech předchozích kapitol a popsat možnosti řešení úloh pružnosti a pevnosti, o kterých jsme mluvili již v první kapitole (např. pevnostní kontrola, dimenzování apod.). Obr. 5.9 ukazuje, jak jsou vázány posuvy a vnější zatížení skrze ostatní veličiny.



Obr. 5.9

Při výpočtu začínáme vždy u známé veličiny a pokračujeme pouze ve zvoleném směru -

proti či ve směru otáčení hodinových ruček (prázdné šipky či plné). Důležité je, že nemůžeme počítat přímo posuvy z vnějšího zatížení či naopak, neboť musíme ve výpočtu zahrnout vliv geometrie tělesa a materiálových vlastností. V následujících kapitolách bude ukázán na příkladech způsob použití nastíněné logiky řešení úloh pružnosti na základních případech namáhání.

Uvedené strategie nejsou jedinou možností řešení úloh pružnosti. Velmi elegantní a často efektivní jsou energetické přístupy, z nichž jeden z nejpoužívanějších si nyní popíšeme.

5.12. Deformační energie a Castigliánovy věty

Pokud je těleso zatěžováno kvazistaticky, pak lze zanedbat kinetickou složku energie. Je-li těleso z materiálu ideálně elastického, pak je možno zanedbat ztráty vlivem vnitřního tření a lze prohlásit, že veškerá *práce vnějších zatížení* W [J] se přemění v *deformační energii* (tj. v potenciální energii deformace) U [J], akumulovanou v tělese. Pro výslednou práci na diferenciálu objemu $dx dy dz = dV$ platí

$$dW = dU = \int_0^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon dx dy dz = \int_0^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon dV. \quad (5.20)$$

Pro další potřebu lze také stanovit deformační energii, vztaženou na jednotkový objem - hustotu deformační energie U_0 [Jm^{-3}] nebo [Pa]

$$U_0 = \frac{dU}{dV} = \int_0^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon. \quad (5.21)$$



Obsah

159 strana ze 449



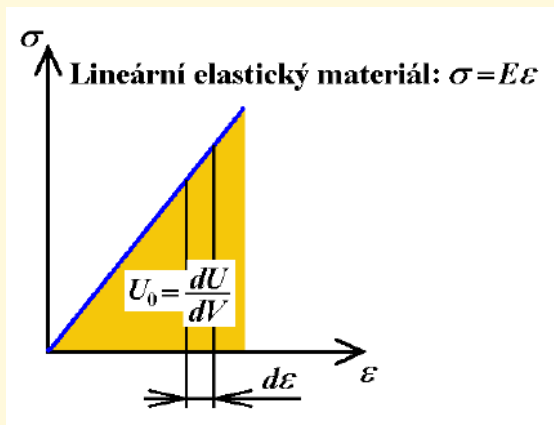
Zavřít dokument

Konec

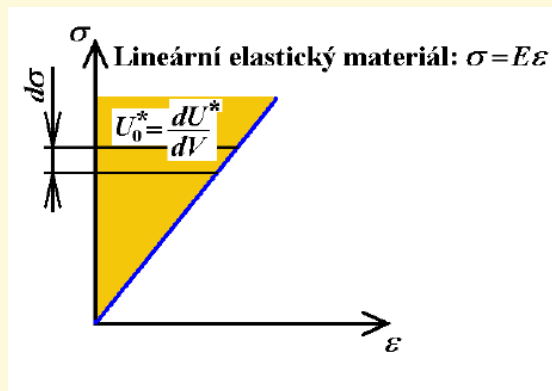
Celá obrazovka / Okno

Hustotu deformační energie U_0 reprezentuje plocha oblasti na obr. 5.10 a). Pro lineárně elastický materiál lze po aplikaci Hookeova zákona psát

$$U_0 = \int_0^{\varepsilon} E \varepsilon \, d\varepsilon = \frac{E \varepsilon^2}{2} = \frac{\sigma \varepsilon}{2} = \frac{\sigma^2}{2E}. \quad (5.22)$$



a)



b)

Obr. 5.10

Plocha nad napětově – deformační křivkou se nazývá *komplementární hustota deformační energie* U_0^* [Jm^{-3}] nebo [Pa] (viz obr.5.10 b)), pro kterou platí

$$U_0^* = \frac{dU^*}{dV} = \int_0^\sigma \varepsilon d\sigma. \quad (5.23)$$

Pouze pro lineárně elastický materiál platí $U_0 = U_0^*$.

Je vhodné připomenout také zákonitosti kolem práce vnějšího zatížení. Uvažujme, že na lineárně pružné těleso působí jediná osamělá síla F v jistém bodě A . V důsledku jejího působení se těleso deformuje a velikost síly lineárně závisí na změně polohy $F = k \cdot s_F$ v celém intervalu hodnot posuvu, realizovaného ve směru působící síly $s_F \in < 0, s_M >$. Síla tedy roste z hodnoty 0 na maximální hodnotu $F_M = k \cdot s_M$. Během tohoto děje pak tato proměnná síla vykoná práci

$$W_F = \int_0^{s_M} F ds_F = \int_0^{s_M} k s_F ds_F = \frac{k s_M^2}{2} = \frac{F_M^2}{2k} = \frac{1}{2} F_M s_M. \quad (5.24)$$

Jestliže na uvažované těleso působí i další síly, je poloha působíště síly F ovlivněna i jejich velikostí. Jestliže se síla F nemění a dojde k deformaci tělesa v důsledku změn jiných sil, síla F vykoná práci na vyvolaném posuvu s_M (uvažovaném ve směru působení síly F) o velikosti

$$W_F = \int_0^{s_M} F ds_F = \int_0^{s_M} ds_F = F_M s_M. \quad (5.25)$$



Obsah

161 strana ze 449

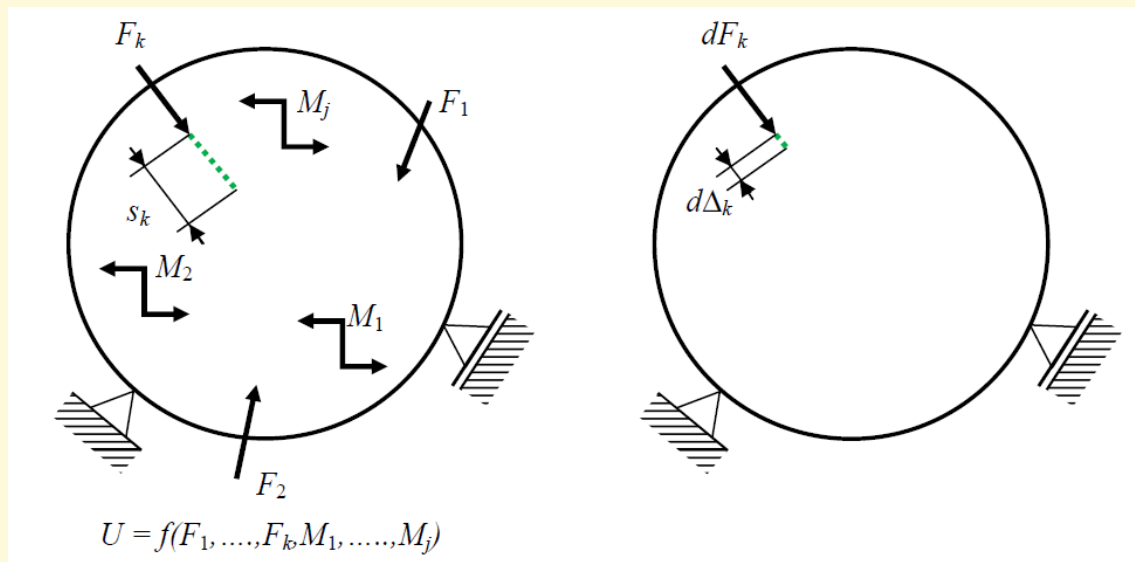


Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Nyní se již dostáváme k obecnému odvození první Castigliánovy věty. Uvažujme těleso, pro které platí princip superpozice. Těleso je tedy ideálně pružné a platí pro něj Hookeův zákon. Těleso je zatíženo soustavou sil F_k a silových dvojic M_j (obr. 5.11).



Obr. 5.11

Deformační energie akumulovaná v tělese je U . Práce vnějších sil a silových dvojic je A . Platí $U = A$, tzn. vnější a vnitřní síly jsou v rovnováze.

Položme si otázku, jak se změnění deformační energie U , změníme-li sílu F_k o dF_k . Pro diferenciál U platí

$$dU = \frac{\partial U}{\partial F_l} dF_l + \dots + \frac{\partial U}{\partial F_k} dF_k + \dots + \frac{\partial U}{\partial M_j} dM_j. \quad (5.26)$$

Nenulové je pouze dF_k , proto

$$dU = \frac{\partial U}{\partial F_k} \cdot dF_k. \quad (5.27)$$

Rovněž si můžeme klást otázku, jaký bude přírůstek práce vnějších sil, změní-li se F_k o dF_k . Působí-li napřed jenom dF_k , vykoná práci $\frac{1}{2}dF_k \cdot ds_k$, kde ds_k je posun působíště síly dF_k . Přiložíme-li poté síly a silové dvojice $F_1, \dots, F_k, M_1, \dots, M_k$, vykonají práci A . Současně však dF_k vykoná práci $dF_k \cdot ds_k$, kde s_k je posuv působíště síly F_k . Vykonaná práce bude poté dána výrazem

$$A + dA = A + \frac{1}{2}dF_k \cdot ds_k + dF_k \cdot ds_k. \quad (5.28)$$

Platí-li rovnost deformační energie a práce vnitřních sil, můžeme tuto rovnost rozšířit také na jejich diferenciály

$$dU = dA. \quad (5.29)$$

Po dosazení výrazů dU a dA do (5.29), pak

$$\frac{\partial U}{\partial F_k} dF_k = \frac{1}{2}dF_k ds_k + dF_k \cdot ds_k. \quad (5.30)$$

Odtud

$$s_k = \frac{\partial U}{\partial F_k}. \quad (5.31)$$



Obsah

163. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Zobecněný posuv v určitém místě pružného, dokonale uloženého tělesa je dán parciální derivací deformační energie celého tělesa podle zobecnělé síly, působící v místě a ve směru hledaného posuvu.

Obdobným postupem bychom odvodili vztah pro natočení v určitém místě pružného, dokonale uchyceného tělesa

$$\varphi_j = \frac{\partial U}{\partial M_j}. \quad (5.32)$$

Definice 5.20. Posuv v určitém místě pružného, dokonale uloženého tělesa je dán parciální derivací celkové deformační energie tělesa podle síly, působící v místě a ve směru hledaného posuvu.

Definice 5.21. Úhel natočení v místě působení momentu silové dvojice M_j v rovině jeho působení je dán parciální derivací celkové deformační energie tělesa podle momentu silové dvojice M_j .

Castigliánova věta je velmi silným nástrojem pro stanovení posuvu a úhlu natočení v určitém místě pružného tělesa, což bude prezentováno v jednotlivých kapitolách základních případů namáhání.



Obsah

164. strana ze 449



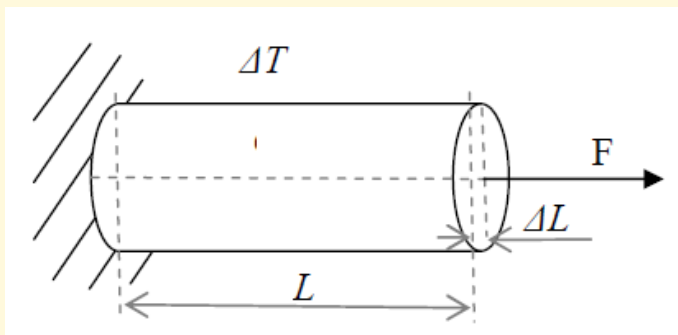
Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Příklady k procvičení

1. Navrhněte jednoduchý experiment a způsob vyhodnocení pro odhad hodnoty modulu pružnosti v tahu E u drátu nebo tyče (pomůcka: tah, ohyb).
2. Určete prodloužení ocelové tyče ($E = 210000 \text{ MPa}$, $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ 1/}^\circ$) válcového průřezu ($d = 20 \text{ mm}$) délky ($L = 200 \text{ mm}$), která je zatížena osovou silou ($F = 20000 \text{ N}$) a došlo ke změně teploty o $\Delta T = 100^\circ\text{C}$.



Obr. 5.12

Klíč k příkladům k procvičení

2) $\Delta L = 0,3 \text{ mm}$

Pojmy k zapamatování

- homogenní materiál
- elastický isotropní materiál
- Hookeův zákon pro prostý tah
- Hookeův zákon pro prostý smyk
- Poissonův zákon
- Hookeův zákon pro trojosou napjatost
- statické, kvazistatické zatěžování
- nízkocyklová únava
- vysokocyklová únava
- teplotní roztažnost

5.12.1. Interaktivní test

Následující test byl vytvořen pomocí balíčku **acrotex**. Test zahájíte kliknutím na tlačítko „Zacátek testu“. U otázek, kde lze volit jen jednu odpověď (test nedovolí zaškrtnout více odpovědí), je správná odpověď bodována takovým počtem bodů, jaký je uveden v závorce u zadání a špatná odpověď je bodována 0 body. U otázek, kde lze volit více správných odpovědí, je součet bodů správných odpovědí uveden v závorce u zadání a za každou špatnou odpověď bude odečten jeden bod.

[Obsah](#)

166. strana ze 449

[Zavřít dokument](#)[Konec](#)[Celá obrazovka/Okno](#)

1. (2b.) Homogenní materiály mají ve všech
 - směrech stejné mechanické vlastnosti
 - bodech stejné mechanické vlastnosti
 - bodech jiné mechanické vlastnosti
2. (2b.) Izotropní materiál je takový idealizovaný materiál, který má ve všech
 - směrech stejné mechanické vlastnosti
 - bodech stejné mechanické vlastnosti
 - bodech jiné mechanické vlastnosti
3. (2b.) Princip superpozice deformace platí
 - i v elasticko-plastické oblasti
 - v elastické oblasti za předpokladu platnosti Hookeova zákona a malých posuvů
 - v elastické oblasti i pro velké deformace, posuvy i natočení



Obsah

167. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

4. (4b.) Co je modul pružnosti v tahu?

takové smluvní napětí, které odpovídá elastickému prodloužení zkušební části tyče na dvojnásobek

maximální napětí ve smluvním diagramu

poměr napětí a jím vyvolané deformace v lineární elastické oblasti tahového diagramu

5. (2b.) Mezi napětím a deformací je lineární závislost v případě, že

napětí je menší než mez úměrnosti

napětí je menší než mez kluzu

napětí je menší než mez pevnosti

6. (2b.) Jaký bude rozdíl hodnoty meze kluzu ve smluvním a skutečném tahovém diagramu kovu?

zanedbatelný

velký, musíme přepočíst

žádný

7. (2b.) Poissonův zákon vyjadřuje

závislost mezi napětím a podélným poměrným prodloužením

závislost mezi podélným poměrným prodloužením a příčným poměrným zkrácením

závislost mezi smykovým napětím a zkosem



Obsah

168. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

8. (2b.) Jaké největší hodnoty může nabýt Poissonovo číslo?

0,33

0,5

1

9. (2b.) Při odvození obecného Hookeova zákona pro elastický izotropní materiál použijeme

Castiglianovu větu

princip superpozice

Saint-Venantův princip

10. (2b.) Liší se hlavní směry napětí a deformace v lineární oblasti?

ano

ne

11. (4b.) Jaký je sled stanovení veličin u přímých metod pružnosti a pevnosti?

posuvy-deformace-napětí-vnitřní síly-vnější síly

deformace-posuvy-napětí-vnější síly-vnitřní síly

vnější síly-vnitřní síly-napětí-deformace-posuvy



Obsah

169 strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

12. (4b.) V jakých jednotkách se vyjadřuje hustota deformační energie?

$$J \cdot \text{cm}^{-2}$$

MPa

$$J/\text{mm}^2$$

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:

Pro ukončení testu je třeba kliknout na tlačítko „Konec testu“. Opravení testu se provede kliknutím na tlačítko „Výsledky“, správné odpovědi budou označeny zeleně a červeně budou označeny odpovědi chybné. Při použití otázky s tvořenou odpovědí se správná odpověď zobrazí v rámečku umístěném vpravo dole v navigačním panelu po kliknutí na tlačítko „Odpověď“.



Obsah

170. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Kapitola 6

Namáhání tahem a tlakem

Průvodce studiem

Mezi základní způsoby namáhání patří namáhání tahem nebo tlakem. Jeho znalost a aplikovatelnost je důležitou součástí znalostí inženýrů. V této kapitole budou na úvod shrnuty některé důležité poznatky předchozích kapitol, aby čtenář nemusel příliš listovat.

Cíle

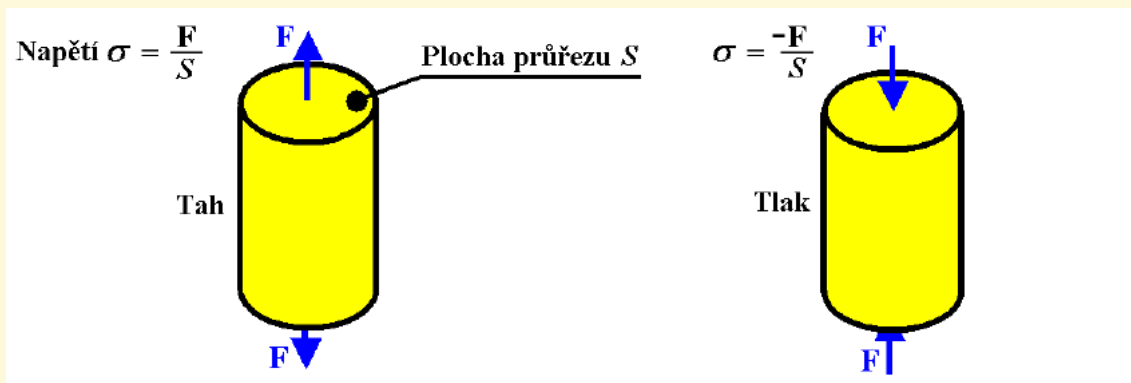
Po prostudování této kapitoly budete:

- schopni stanovit průběh vnitřních normálových sil
- umět navrhovat průřezy a maximální zatížení strojních součástí při namáhání tahem/tlakem
- umět stanovit napětí a prodloužení v součástech, namáhaných tahem/tlakem
- řešit základní úlohy součástí, vystavené teplotním změnám při namáhání tahem/tlakem
- řešit základní úlohy příhradových konstrukcí

[Obsah](#)[171. strana ze 449](#)[Zavřít dokument](#)[Konec](#)[Celá obrazovka/Okno](#)

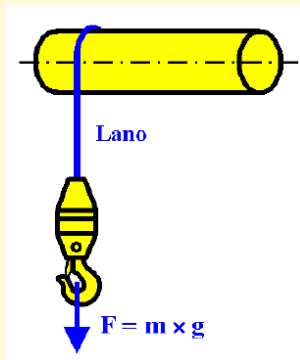
6.1. Úvod

Na obr. 6.1 je znázorněn element, vystavený přímému tahu respektive tlaku v podélném směru (jednoosá napjatost).

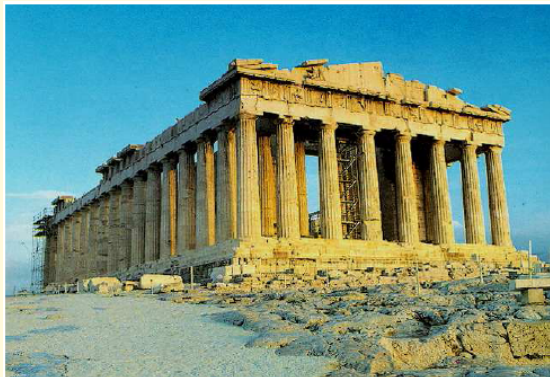


Obr. 6.1 Způsoby namáhání tahem a tlakem.

Typické ukázky zatížení tahem nebo tlakem jsou znázorněny také na obr. 6.2 (tahové namáhání lana od břemene) a 6.3 (tlakové namáhání nosných sloupů stavby – Athény v Řecku).



Obr. 6.2



Obr. 6.3

6.2. Normálové síly (N) a tahové nebo tlakové napětí (σ)

Definice 6.1. Pokud je tyč (součást) vystavena působení vnějších axiálních sil (F [N]), pak se v součásti indukují vnitřní (normálové síly) N [N], viz obr. 6.4. Tato skutečnost je v souladu s Newtonovými zákony mechaniky.

Řez A-A dělí tyč na dvě části. Zatížení, působící v každé části, je v rovnováze s příslušnými normálovými silami. Normálovou sílu lze definovat jako vnitřní výslednou složkovou sílu, působící kolmo na zkoumaný řez. Připomeňme metodu řezu na obr. 6.4, platí $N = F$.

Obsah

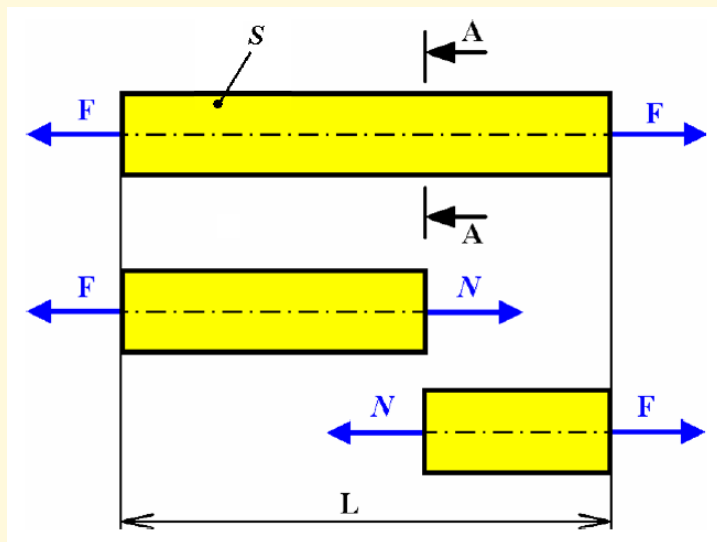
173. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno



Obr. 6.4

Definice 6.2. Tahové normálové síly jsou kladné a tlakové normálové síly jsou záporné (viz také znaménková konvence v kapitole 2), tahové normálové síly a napětí způsobují *prodloužení* délky příslušného úseku tyče, naopak tlakové normálové síly a napětí vyvolávají *zkrácení* délky úseku tyče.

Definice normálových napětí σ [Pa] již byly uvedeny v kapitole 2. Normálové (axiální)

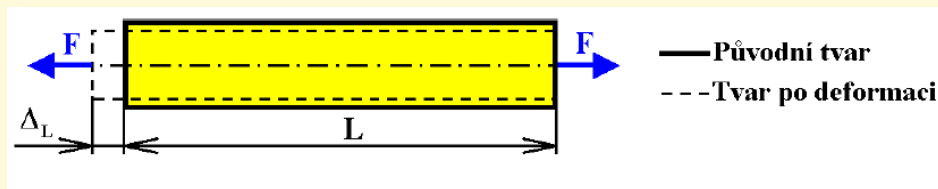
napětí, které působí v axiálním směru, lze obecně definovat poměrem

$$\sigma = \frac{\text{Normálová síla}}{\text{plocha}} = \frac{N}{S}, \quad (6.1)$$

kde $S [m^2]$ značí plochu příčného řezu. Vztah (6.1), dle obr. 6.4, platí pro konstantní normálovou sílu a konstantní plochu příčného průřezu (prizmatický prut).

6.3. Poměrné deformace při tahu a Hookeův zákon

Jestliže je tyč podrobena normálovým silám (vyvolávajícím normálové napětí), pak se musí změnit její délka, viz obr. 6.5.



Obr. 6.5



Definice 6.3. Má-li tyč, konstantního průřezu, původní délku L [m] a změnu délky (prodloužení nebo zkrácení) ΔL [m], pak lze definovat také poměrnou podélnou deformaci ε [1] jako poměr prodloužení tyče a původní délky

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}. \quad (6.2)$$

Jedná se tedy o bezrozměrnou veličinu, ale zejména v experimentální pružnosti se používá jednotka microstrain $\mu\varepsilon = \varepsilon \cdot 10^{-6}$.

V případech, kdy jsou napětí a poměrné deformace proměnlivé po průřezu, pak platí zobecněný vztah

$$\varepsilon = \frac{d\Delta L}{dL} = \frac{du}{dx}. \quad (6.3)$$

Za předpokladu, že homogenní a isotropní materiál se chová pružně a lineárně, viz kapitola 5, platí Hookeův zákon pro jednoosou napjatost

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \quad (6.4)$$

kde konstanta E [Pa] je nazývaná *modul pružnosti v tahu* či *tlaku* nebo *Youngův modul*.

Pro přímou tyč konstantního průřezu, zatíženou konstantní axiální silou F , viz obr. 6.5, lze odvodit z rovnice (6.2) vztah $\Delta L = \varepsilon L$, kde po dosazení (6.4) a (6.1) vyplyne

$$\Delta L = \frac{\sigma L}{E} = \frac{NL}{ES}, \quad (6.5)$$

Obsah

176. strana ze 449



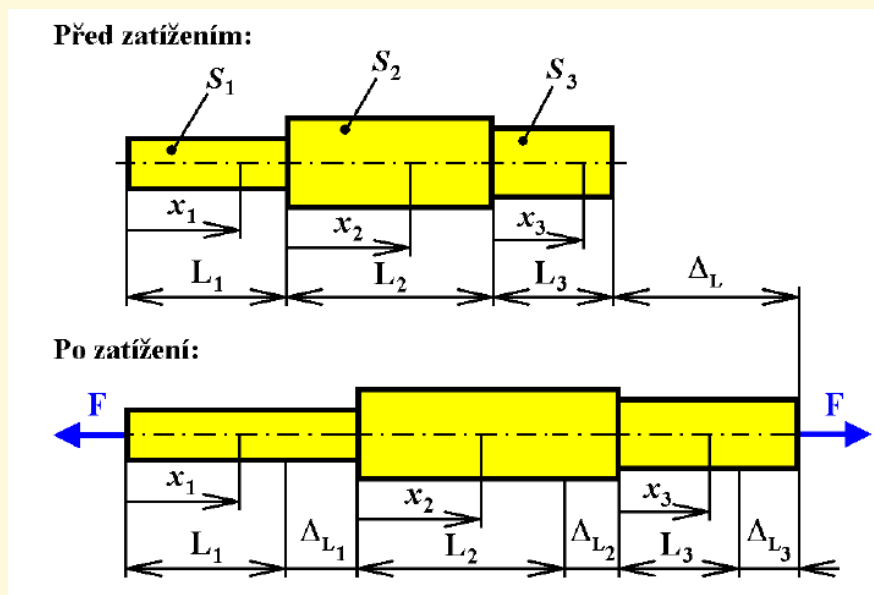
Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

což v našem případě vede ke vztahu $\Delta L = \frac{FL}{ES}$.

Na obr. 6.6 je znázorněná tyč se skokovou (nespojitou) změnou průřezu, která je na obou koncích zatížena konstantní silou F .



Obr. 6.6

Pro normálové síly, napětí a poměrné deformace pak na třech příslušných úsecích x_1 , x_2 , x_3 [m] platí

$$N(x_1) = N(x_2) = N(x_3) = F ,$$

$$\sigma(x_1) = \frac{N(x_1)}{S_1} = \frac{F}{S_1} , \quad \sigma(x_2) = \frac{N(x_2)}{S_2} = \frac{F}{S_2} , \quad \sigma(x_3) = \frac{N(x_3)}{S_3} = \frac{F}{S_3} ,$$

$$\varepsilon(x_1) = \frac{\sigma(x_1)}{E} = \frac{F}{ES_1} , \quad \varepsilon(x_2) = \frac{\sigma(x_2)}{E} = \frac{F}{ES_2} , \quad \varepsilon(x_3) = \frac{\sigma(x_3)}{E} = \frac{F}{ES_3} ,$$

kde lokální souřadnice platí na intervalech $x_1 \in (0; L_1)$, $x_2 \in (0; L_2)$ a $x_3 \in (0; L_3)$.

Změny délek ΔL_1 , ΔL_2 a ΔL_3 [m] každého úseku (obr. 6.6) jsou dané modifikací vztahu (6.5), tedy

$$\Delta L_1 = \frac{N(x_1)L_1}{ES_1} = \frac{FL_1}{ES_1} , \quad \Delta L_2 = \frac{N(x_2)L_2}{ES_2} = \frac{FL_2}{ES_2} , \quad \Delta L_3 = \frac{N(x_3)L_3}{ES_3} = \frac{FL_3}{ES_3} .$$

Výsledná změna délky tyče je dána algebraickým součtem příslušných dílčích prodloužení

$$\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2 + \Delta L_3 = \frac{F}{E} \left(\frac{L_1}{S_1} + \frac{L_2}{S_2} + \frac{L_3}{S_3} \right) . \quad (6.6)$$

Rovnice (6.6) platí dostatečně přesně pro *teorii malých deformací* (tj. není vhodná pro velké deformace např. elasto-plastické úlohy).



Obsah

178. strana ze 449

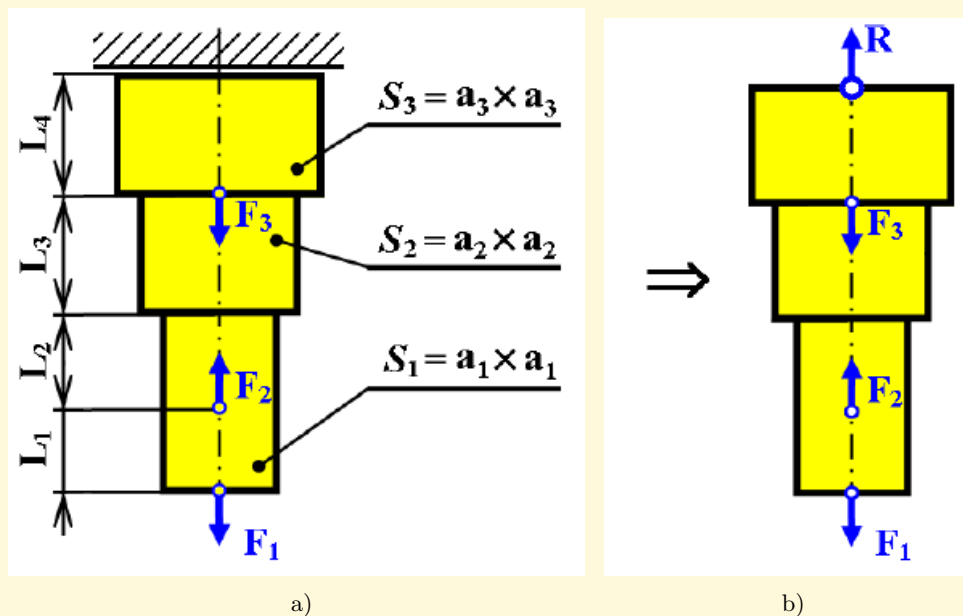


Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Příklad 6.4. Určete reakční sílu R v uchycení, průběh normálových sil, napětí a celkové prodloužení osazené tyče čtvercového průřezu z obr. 6.7 a). Vliv vlastní tíhy a vliv vrubových účinků na napjatost v osazení tyče neuvažujte. Dáno: $a_1 = 28 \text{ mm}$, $a_2 = 32 \text{ mm}$, $a_3 = 39 \text{ mm}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $F_1 = 40 \text{ kN}$, $F_2 = 70 \text{ kN}$, $F_3 = 90 \text{ kN}$, $L_1 = 80 \text{ mm}$, $L_2 = 100 \text{ mm}$, $L_3 = 150 \text{ mm}$, $L_4 = 140 \text{ mm}$.

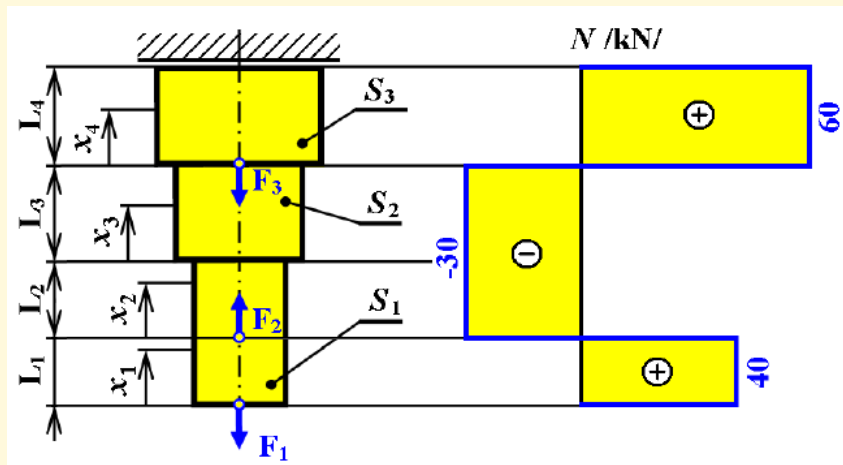


Obr. 6.7

Ze zadání vyplývá pro plochy průřezu: $S_1 = a_1^2 = 28^2 = 784 \text{ mm}^2$, $S_2 = a_2^2 = 32^2 = 1024 \text{ mm}^2$, $S_3 = a_3^2 = 39^2 = 1521 \text{ mm}^2$.

Pro reakční sílu v uchycení vyplývá z podmínky rovnováhy dle obr. 6.7 b) $R + \sum_{i=1}^3 F_i = 0$,
tj. $R = F_1 - F_2 + F_3 = 4 \cdot 10^4 - 7 \cdot 10^4 + 9 \cdot 10^4 = 6 \cdot 10^4 \text{ N}$.

Dle obr. 6.8 lze definovat intervaly lokálních souřadných systémů $x_1 \in (0; L_1)$, $x_2 \in (0; L_2)$, $x_3 \in (0; L_3)$ a $x_4 \in (0; L_4)$.



Obr. 6.8

A následně také stanovit příslušné normálové síly

$$N(x_1) = F_1 = 4 \cdot 10^4 \text{ N},$$

$$N(x_2) = N(x_3) = F_1 - F_2 = 4 \cdot 10^4 - 7 \cdot 10^4 = -3 \cdot 10^4 \text{ N},$$

$$N(x_4) = F_1 - F_2 + F_3 = 4 \cdot 10^4 - 7 \cdot 10^4 + 9 \cdot 10^4 = 6 \cdot 10^4 \text{ N}$$

a napětí

$$\sigma(x_1) = \frac{N(x_1)}{S_1} = \frac{4 \cdot 10^4}{784} = 51,02 \text{ MPa},$$

$$\sigma(x_2) = \frac{N(x_2)}{S_1} = \frac{-3 \cdot 10^4}{784} = -38,27 \text{ MPa},$$

$$\sigma(x_3) = \frac{N(x_3)}{S_2} = \frac{-3 \cdot 10^4}{1024} = -29,30 \text{ MPa},$$

$$\sigma(x_4) = \frac{N(x_4)}{S_3} = \frac{6 \cdot 10^4}{1521} = 39,45 \text{ MPa}.$$

Získaný průběh normálových sil je znázorněn na obr. 6.8. Celkové prodloužení ΔL tyče je dáno superpozicí dílčích účinků (modifikací rovnice 6.6)

$$\begin{aligned} \Delta L &= \Delta L_1 + \Delta L_2 + \Delta L_3 + \Delta L_4 = \frac{N(x_1) \cdot L_1}{EA_1} + \frac{N(x_2) \cdot L_2}{EA_1} + \frac{N(x_3) \cdot L_3}{EA_2} + \\ &+ \frac{N(x_4) \cdot L_4}{EA_3} = \frac{\sigma(x_1) \cdot L_1 + \sigma(x_2) \cdot L_2 + \sigma(x_3) \cdot L_3 + \sigma(x_4) \cdot L_4}{E} = \\ &= \frac{51,02 \cdot 80 + (-38,27) \cdot 100 + (-29,3) \cdot 150 + 39,45 \cdot 140}{2 \cdot 10^5} = 6,92 \cdot 10^{-3} \text{ mm. } \blacktriangle \end{aligned}$$



Obsah

181. strana ze 449



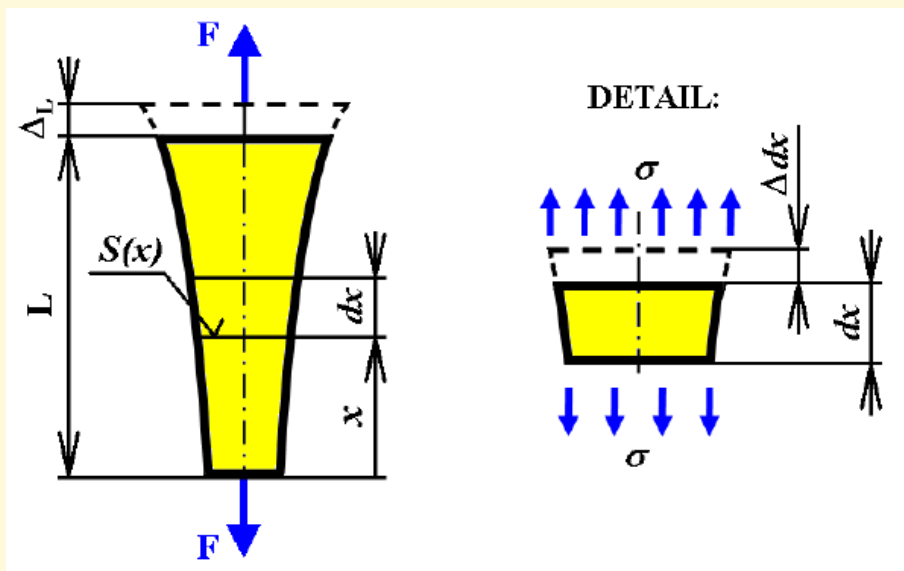
Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Pro tyč proměnlivého průřezu, zatíženou na konci silami F (obr. 6.9), kde $S = S(x)$ je známá funkce souřadnice x , platí

$$N(x) = F, \quad \sigma(x) = \frac{N(x)}{S(x)} = \frac{F}{S(x)}. \quad (6.7)$$



Obr. 6.9

Pro odvození poměrné deformace je vhodné vyjmout z tyče element délky dx (obr. 6.9). Pro poměrné deformace pak platí: $\varepsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{E}$.

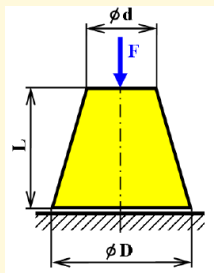
Pro elementární změnu tyče pak platí diferenční vztah

$$\Delta dx = \frac{\sigma(x)}{E} dx. \quad (6.8)$$

Výsledné prodloužení tyče ΔL lze získat součtem všech elementárních účinků

$$\Delta L = \int_0^L \frac{\sigma(x)}{E} dx = \frac{1}{E} \int_0^L \frac{N(x)}{S(x)} dx = \frac{F}{E} \int_0^L \frac{dx}{S(x)}. \quad (6.9)$$

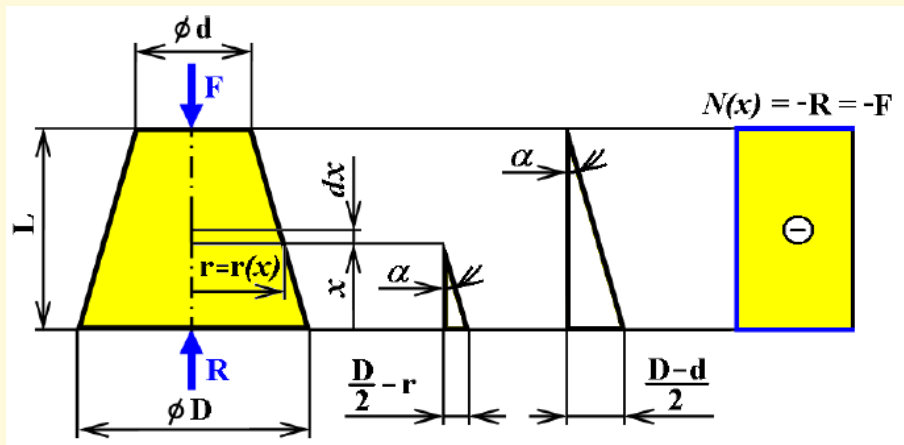
Příklad 6.5. Odvoďte vztahy pro normálovou sílu, napětí a celkové prodloužení proměnlivého kruhového průřezu (komolý kužel), viz obr. 6.10.



Obr. 6.10

Dáno: F [N], E [MPa], D [mm], d [mm], L [mm].

Z obr. 6.11 lze odvodit pro reakci a normálovou sílu vztahy $R = F$, $N(x) = -R = -F$.



Obr. 6.11

Příčná plocha průřezu $S = S(x)$ je proměnlivá. Nejprve je vhodné odvodit lineární závislost poloměru $r = r(x)$ z podobnosti trojúhelníků znázorněných na obr. 6.11

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{D}{2} - r}{x} = \frac{\frac{D-d}{2}}{L} \Rightarrow r = \frac{1}{2} \left(D - \frac{D-d}{L} x \right).$$

Pro plochu průřezu potom platí kvadratická závislost

$$S(x) = \pi r^2 = \frac{\pi}{4} \left(D - \frac{D-d}{L} x \right)^2$$

a tlakové napětí v tyči $\sigma(x)$ je dáno závislostí dle hyperboly 2. řádu

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{S(x)} = \frac{-4F}{\pi \left(D - \frac{D-d}{L} x \right)^2}.$$

Hodnoty napětí v bodech $x = 0$, $x = \frac{L}{2}$ a $x = L$ jsou pak dány vztahy

$$\sigma(x=0) = \frac{N(x=0)}{A(x=0)} = \frac{-4F}{\pi D^2}, \quad \sigma\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{N\left(x = \frac{L}{2}\right)}{A\left(x = \frac{L}{2}\right)} = \frac{-4F}{\pi \left(\frac{D+d}{2}\right)^2},$$

$$\sigma(x=L) = \frac{N(x=L)}{A(x=L)} = \frac{-4F}{\pi d^2}.$$

Průběh funkce $\sigma(x)$ je znázorněna na obr. 6.12.



Obsah

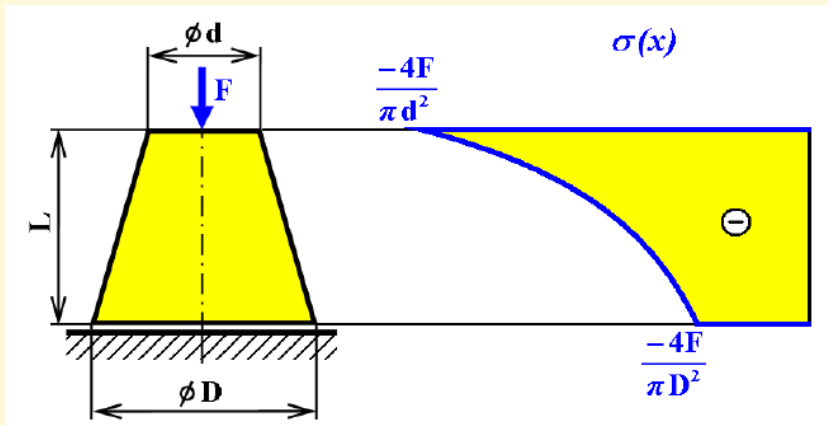
185. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno



Obr. 6.12

Celkové zkrácení tyče ΔL lze stanovit např. ze vztahu 6.9

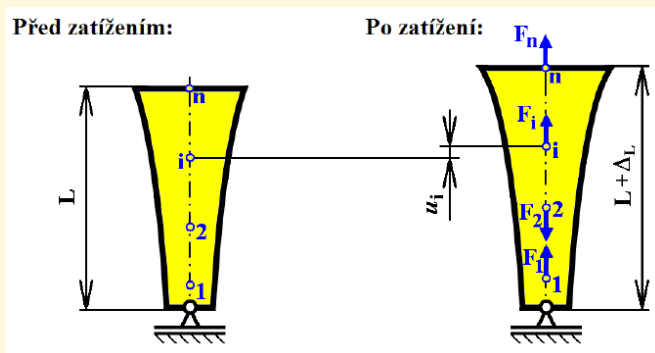
$$\begin{aligned}\Delta L &= \int_0^L \frac{\sigma(x) dx}{E} = \frac{-4F}{E\pi} \int_0^L \frac{dx}{\left(D - \frac{D-d}{L}x\right)^2} = \\ &= \frac{-4F}{E\pi} \left[\frac{L^2}{(D-d)[LD + (d-D)x]} \right]_0^L = \frac{-4F}{E\pi} \left[\frac{L^2}{(D-d)Ld} - \frac{L^2}{(D-d)LD} \right] = \\ &= \frac{-4FL}{E\pi(D-d)} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{D} \right) = \frac{-4FL}{E\pi Dd}. \blacktriangle\end{aligned}$$

6.4. Využití Castigliánovy věty

V kapitole 5.5 byly odvozeny vztahy pro deformační energii u jednoosého namáhání a Castigliánovy věty. Nyní si ukážeme praktickou aplikaci této energetické metody u prutů namáhaných tahem.

Definice 6.6. Castigliánova věta, která patří mezi základní energetické principy mechaniky, může být (pro axiálně zatížené členy) vysvětlena takto: Pokud lze deformační energii U vyjádřit v závislosti na vnějším zatížení, pak její parciální derivace dle vnější síly F_i , dává hodnotu posunutí u_i v bodě i (tj. v místě působivosti síly F_i). Kladná hodnota posunutí u_i je ve směru síly F_i , viz obr. 6.13. Platí tedy

$$u_i = \frac{\partial U}{\partial F_i}. \quad (6.10)$$



Obr. 6.13

Deformační energii v případě jednoosého namáhání lze vyjádřit takto

$$U = \int_V U_0 dV = \frac{1}{2E} \int_V \sigma^2 dV = \frac{1}{2E} \int_V \frac{N^2}{S^2} dV, \quad (6.11)$$

kde elementární objem $dV = S dx$ a plocha $S = S(x)$ může být funkce souřadnice x

$$U = \frac{1}{2E} \int_L \frac{N^2}{S^2} S dx = \frac{1}{2E} \int_L \frac{N^2}{S} dx. \quad (6.12)$$

Dosazením vztahu (6.12) do (6.10) vyplyne

$$u_i = \frac{\partial}{\partial F_i} \left(\frac{1}{2E} \int_L \frac{N^2}{S} dx \right) = \frac{1}{2E} \int_L \frac{2N}{S} \frac{\partial N}{\partial F_i} dx = \frac{1}{E} \int_L \frac{N}{S} \frac{\partial N}{\partial F_i} dx. \quad (6.13)$$

Při aplikaci *Castigliánových vět* musí být deformační energie vyjádřena jako funkce vnějšího zatížení. Další informace o Castigliánových větách lze nalézt v kapitole 8.

Příklad 6.7. Alternativní způsob výpočtu zkrácení ΔL komolého kužele (viz obr. 6.10, příklad 6.5) zatíženého tlakovou silou je aplikace Castiglianovy věty. Z modifikace rovnice (6.13) se získá

$$\Delta L = \frac{1}{E} \int_0^L \frac{N(x)}{A(x)} \frac{\partial N(x)}{\partial F} dx,$$



Obsah

188. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

kde $N(x) = -F$ a $\frac{\partial N(x)}{\partial F} = -1$. Pak je zřejmé, že platí

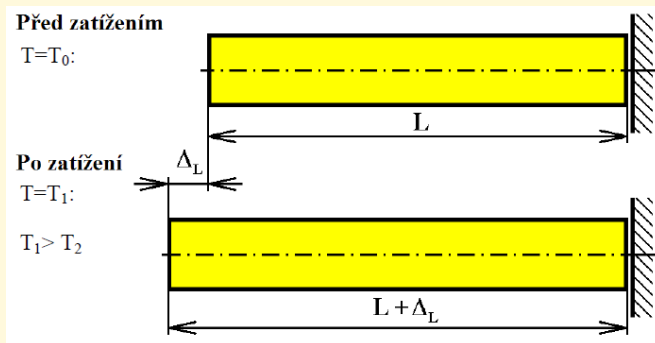
$$\Delta L = \frac{1}{E} \int_0^L \frac{-F}{\left(D - \frac{D-d}{L}x\right)^2} \cdot (-1) dx = \frac{4F}{E\pi} \int_0^L \frac{dx}{\left(D - \frac{D-d}{L}x\right)^2} = \frac{4FL}{E\pi Dd},$$

přičemž kladná hodnota zkrácení součásti je v tomto případě ve směru síly F .



6.5. Vliv teploty na napjatost a deformace v tahu a tlaku

Jestliže se tyč, které není bráněno v podélné deformaci, rovnoměrně ohřeje (nebo ochladí) z počáteční teploty T_0 [°C] nebo [K] na konečnou teplotu T_1 (tj. došlo ke změně teploty $\Delta T = T_1 - T_0$), viz obr. 6.14.



Obr. 6.14



Obsah

189. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Pak pro prodloužení (nebo zkrácení) ΔL a osově napětí σ platí vztahy

$$\Delta L = \alpha_t L \Delta T, \quad (6.14)$$

$$\sigma = 0, \quad (6.15)$$

kde α_t [$^{\circ}\text{C}^{-1}$] nebo [K] je lineární koeficient teplotní roztažnosti (součinitel teplotní roztažnosti), jehož charakteristické hodnoty pro vybrané materiály lze nalézt v tab. 6.1.

Materiál	Součinitel teplotní roztažnosti α_t [$^{\circ}\text{C}^{-1}$]
Hliníkové slitiny	$\approx 23 \cdot 10^{-6}$
Mosaz	$19,1 \div 21,2 \cdot 10^{-6}$
Bronz	$18 \div 21 \cdot 10^{-6}$
Litina	$9,9 \div 12 \cdot 10^{-6}$
Beton	$7 \div 14 \cdot 10^{-6}$
Měď a měděné slitiny	$16,6 \div 17,6 \cdot 10^{-6}$
Sklo	$5 \div 14 \cdot 11^{-6}$
Nylon	$70 \div 14 \cdot 140^{-6}$
Polyethylen	$140 \div 290 \cdot 10^{-6}$
Horniny	$5 \div 14 \cdot 9^{-6}$
Elastomery (guma)	$130 \div 200 \cdot 10^{-6}$
Ocel	$10 \div 18 \cdot 10^{-6}$
Titanové slitiny	$8,1 \div 11 \cdot 10^{-6}$
Wolfram	$\approx 4,3 \cdot 10^{-6}$

Tab. 6.1



Obsah

190. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

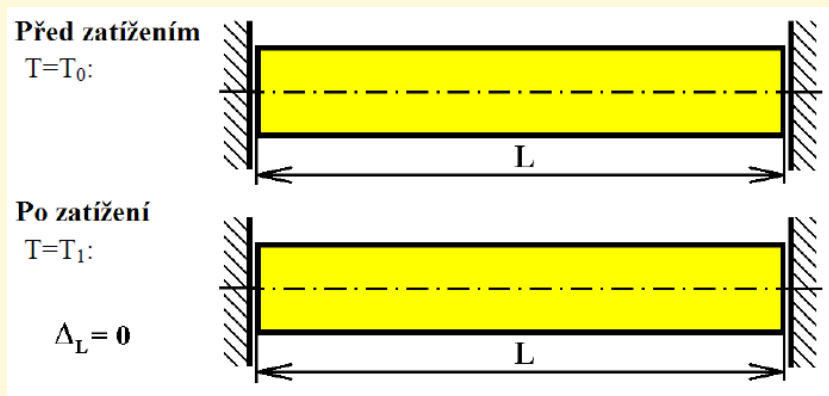
Celá obrazovka / Okno

Pro novou délku tyče pak platí

$$L^* = L + \Delta L = L + \alpha_t L \Delta T = L \cdot (1 + \alpha_t \Delta T). \quad (6.16)$$

Pokud je tyči bráněno podélné deformaci absolutně tuhými (ideálními) podporami (viz např. obr. 6.15) a nedojde k podélnému vybočení tyče, pak je zřejmé, že prodloužení tyče je nulové

$$\Delta L = 0. \quad (6.17)$$



Obr. 6.15

Prodloužení (nebo zkrácení) tyče je tedy zabráněno, což v tyči indukuje tlakové (nebo tahové) napětí, které je úměrné prodloužení volné tyče (bez podpor), viz vztah (6.2).

Pro poměrnou deformaci a napětí pak vyplýne

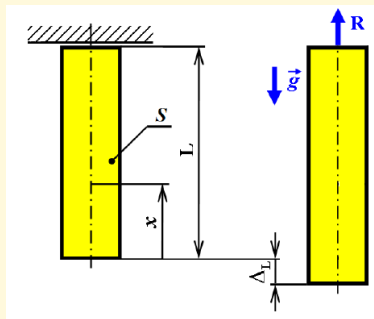
$$\varepsilon = \frac{-\Delta L}{L} = -\alpha_t \Delta T, \quad (6.18)$$

$$\sigma = E\varepsilon = -E\alpha_t \Delta T. \quad (6.19)$$

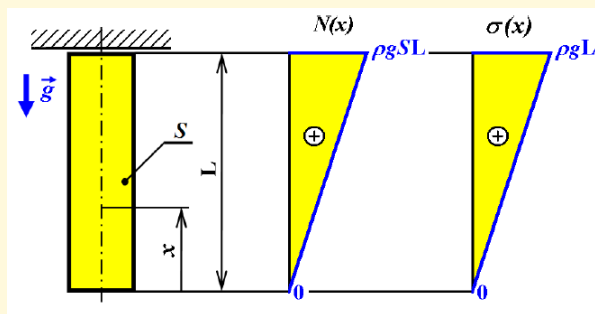
Další informace a množství řešených příkladů lze nalézt v učebnici [14].

6.6. Zatížení tíhovou silou v axiálním směru

Na obr. 6.16 je jednostranně uchycená tyč délky L s konstantní plochou příčného průřezu S .



Obr. 6.16



Obr. 6.17

Tyč, která je z materiálu o hustotě $\rho [kg\ m^{-3}]$, je vystavena působení gravitace (symbol „ $\vec{g}$ “). Gravitační síla je úměrná gravitačnímu zrychlení $g [ms^{-2}]$.

Tyč je vystavena pouze působení vlastní tíhy. Pro reakční sílu $R [N]$ v podpoře pak (dle Newtonova zákona a obr. 6.16) platí

$$R = mg = \rho V g = \rho g S L,$$

kde $m [kg]$ je hmotnost tyče a $V = S L$ je objem tyče.

Pro normálovou sílu $N(x)$ a napětí $\sigma(x)$ ve vzdálenosti $x \in (0; L)$, viz obr. 6.16, platí

$$N(x) = \rho g S x, \quad \sigma(x) = \frac{N(x)}{S} = \frac{\rho g S x}{S} = \rho g x, \quad (6.20)$$

kde $\rho S x$ je hmotnost úseku délky x .

Průběh normálových sil a napětí je znázorněn na obr. 6.17. Je zřejmé, že platí

$$N(x=0) = 0, \quad N(x=L) = \rho g S L, \quad \sigma(x=0) = 0, \quad \sigma(x=L) = \rho g L.$$

Celkové prodloužení ΔL je dané modifikací vztahu (6.9)

$$\Delta L = \int_0^L \frac{\sigma(x)}{E} dx = \frac{\rho g}{E} \int_0^L x dx = \frac{\rho g}{E} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^L = \frac{\rho g L^2}{2E}. \quad (6.21)$$



Obsah

193. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Vlastní tíha (gravitace) může být v některých úlohách tahu a tlaku zanedbána, protože obvykle má menší vliv na výslednou napjatost než další zatížení. U rozměrných součástí nebo tam, kde je vlastní tíha významným zatížením (např. budovy aj.) však zanedbání vlivu vlastní tíhy může mít katastrofální důsledky.

6.7. Řešení staticky neurčitých úloh

Definice 6.8. Úlohy staticky neurčité jsou takové, u kterých počet vazebných účinků převyšuje počet rovnic rovnováhy.

Stručný postup řešení (omezení na základní úlohy analytickým způsobem řešení):

1. Sestavení statických rovnic rovnováhy (statická stránka úlohy).
2. Sestavení deformačních podmínek (geometrická stránka úlohy).
3. Vyjádření deformací v deformační podmínce.
4. Řešení soustavy statických a deformačních podmínek (syntéza úlohy).

ad 2) Počet potřebných deformačních podmínek odpovídá stupni statické neurčitosti, který stanovíme z rovnice

$$\begin{aligned} \text{počet deformačních podmínek} &= \\ &= \text{počet neznámých reakcí} - \text{počet rovnic rovnováhy.} \quad (6.22) \end{aligned}$$



Obsah

194. strana ze 449

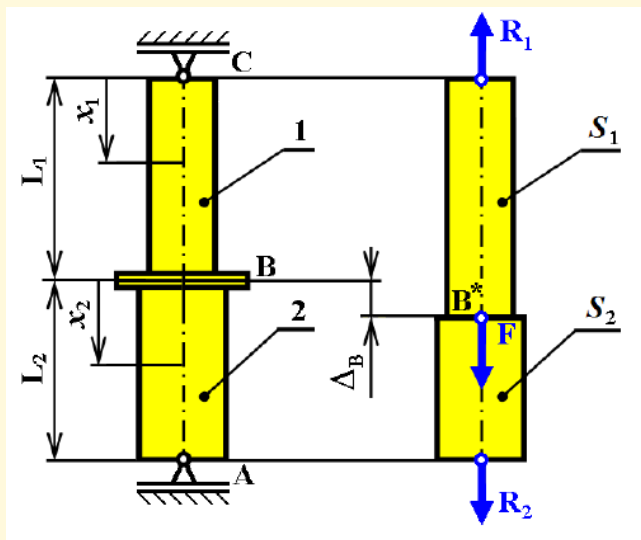


Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Příklad 6.9. Ocelová trubka „1” je připojena k trubce „2” přes přírubu „B”, na kterou působí síla F , viz obr. 6.18. Soustava je na koncích uchycena v bodech „A” a „C” pomocí absolutně tuhých podpor.



Obr. 6.18

Určete reakce v uchycení, průběhy normálových sil a napětí. Určete také posunutí bodu „B”. Vliv vlastní tíhy, způsob spojení trubek a možné vybočení trubek neuvažujte.

Dáno: $L_1 = 1500 \text{ mm}$, $L_2 = 1000 \text{ mm}$, $S_1 = 800 \text{ mm}^2$, $S_2 = 1500 \text{ mm}^2$, $F = 100 \text{ kN}$,
 $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $\sigma_{DOV}^{TAH} = \sigma_{DOV}^{TLAK} = 175 \text{ MPa}$.

Postup řešení je stručně naznačen v následujícím textu.

Z rovnic rovnováhy sil vyplyne po uvolnění: $R_1 - R_2 = F$.

Dle vztahu (6.22) je zřejmé, že úloha je tedy $1 \times$ staticky neurčitá a je nutno sestavit deformační podmínku, která souvisí s celkovým prodloužením soustavy ΔL , které musí být nulové. Platí tedy deformační podmínka: $\Delta L = \Delta_1 + \Delta_2 = \frac{N(x_1)L_1}{ES_1} + \frac{N(x_2)L_2}{ES_2} = 0$. Pro normálové síly, na úsecích $x_i \in (0; L_i)$, platí vztahy: $N(x_1) = R_1$, $N(x_2) = R_1 - F$. Pak je zřejmé, že: $\frac{1}{E} \left[\frac{R_1 L_1}{S_1} + \frac{(R_1 - F)L_2}{S_2} \right] = 0$, kde $\frac{1}{E} \neq 0$. Z upravené deformační podmínky $\frac{R_1 L_1}{S_1} + \frac{(R_1 - F)L_2}{S_2} = 0 \Rightarrow R_1 = \frac{F S_1 L_2}{S_1 L_2 + S_2 L_1} = \frac{10^5 \cdot 800 \cdot 10^3}{800 \cdot 10^3 + 1500 \cdot 1500} = 26229,5 \text{ N}$.

Dopočtením z rovnic silové rovnováhy vyplyne: $R_2 = R_1 - F = 26229,5 - 10^5 = -73770,5 \text{ N}$.

Průběh normálových sil a napětí $\sigma(x_i = \frac{N(x_i)}{A_i})$ je zakreslen na obr. 6.19, kde

$$\sigma(x_1) = 32,79 \text{ MPa}, \quad \sigma(x_2) = -49,18 \text{ MPa}. \quad (6.23)$$



Obsah

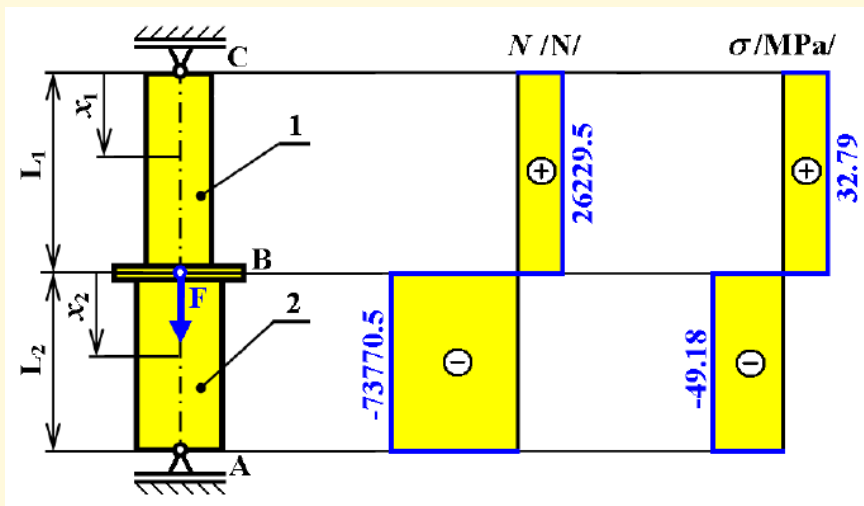
196. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno



Obr. 6.19

Pro posunutí bodu „B” platí

$$\Delta B = \Delta 1 = \frac{N(x_1)L_1}{ES_1} = \frac{26229,5 \cdot 1500}{2 \cdot 10^5 \cdot 800} = 0,25 \text{ mm}.$$



6.8. Úvod do příhradových konstrukcí

Definice 6.10. Soustava, složená z prutů, spojených v kloubech (styčnicích), se nazývá příhradová konstrukce, viz např. obr. 6.20.



Obr. 6.20 Typické aplikace příhradových konstrukcí.

Spoje prutů jsou obvykle prováděny čepy, šrouby, svary, nýty, hřebíky, lepením či jinými způsoby, viz např. obr. 6.21.



Obr. 6.21 Příklady spojení dřevěných konstrukcí.

Definice 6.11. *Ideální styčník* je bod, kde se spojují, začínají nebo končí pruty.

Definice 6.12. *Prut* je těleso:

- jehož příčné rozměry jsou mnohokrát menší než jeho délka (podobně jako nosník)
- jež je k ostatním tělesům vázáno kloubovými vazbami
- jež není zatíženo jinak, než vazbovými silami, přenášenými kloubovými vazbami (ve styčníku)



Definice 6.13. *Ideální prutová konstrukce se skládá z ideálních styčníků (jednoduché klouby bez tření) a ideálních prutů, které přenášejí pouze tahové nebo tlakové axiální síly, přičemž vnější zatížení působí pouze ve styčnících. Prutové konstrukce mohou být rovinné nebo prostorové, dále staticky určité nebo staticky neurčité.*

Z učebnic statiky je známo, že příhradová konstrukce je **staticky určitá**, pokud je $(\text{počet prutů}) = 2 \times (\text{počet styčníků}) - (\text{počet reakcí})$.

Příhradová (prutová) konstrukce je **staticky neurčitá**, pokud platí, že: $(\text{počet prutů}) > 2 \times (\text{počet styčníků}) - (\text{počet reakcí})$.

Příhradová (prutová) konstrukce je **nestabilní**, pokud platí podmínka, že: $(\text{počet prutů}) < 2 \times (\text{počet styčníků}) - (\text{počet reakcí})$. Tj. příhradová konstrukce má statické řešení jen tehdy, není-li konstrukce mechanismem.

Normálové síly v prutech staticky určité prutové konstrukce lze stanovit analyticky z rovnic rovnováhy ve styčnících a rovnic rovnováhy celé soustavy. Existuje mnoho metod řešení prutových konstrukcí, avšak v této učebnici je předvedena pouze styčnicková metoda.

Příklad 6.14. Úlohou je stanovit reakce, normálové síly a napětí v ideální rovinné příhradové konstrukci (obr. 6.22 – vlevo) s rozměry $a = 0,75 \text{ m}$, $b = 1 \text{ m}$. Konstrukce je ve styčniku „D” zatížena vnější silou $F = 30 \text{ kN}$. Konstrukce je staticky určitá a je složena z pěti prutů s příslušnými příčnými plochami průřezu $S_1 = S_2 = 400 \text{ mm}^2$, $S_3 = 600 \text{ mm}^2$, $S_4 = S_5 = 400 \text{ mm}^2$.

Obsah

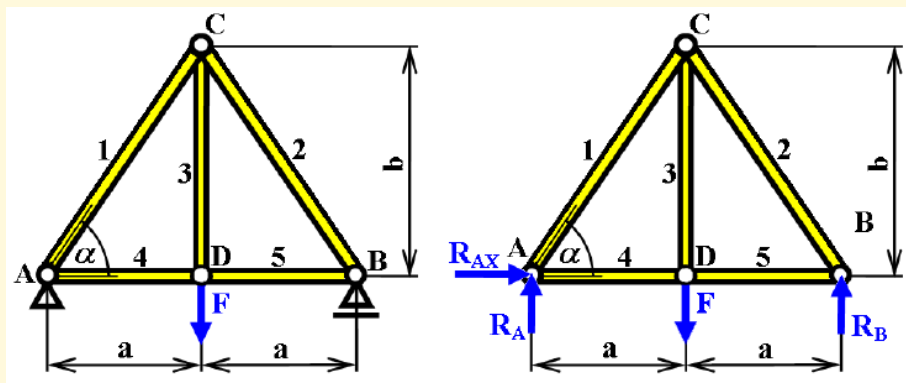
200. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno



Obr. 6.22

Po uvolnění (obr. 6.22 – vpravo) lze stanovit reakční síly v podporách, přičemž na prutovou soustavu lze pohlížet jako na jedno těleso. Z axiomů rovnováhy sil a momentů celé soustavy vyplývá

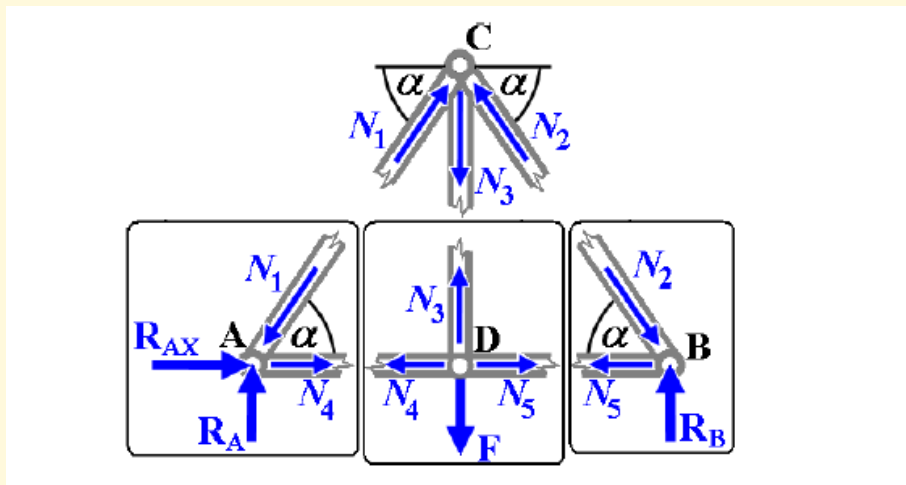
$$\left. \begin{aligned} \sum F_{Xi} &= 0 \Rightarrow R_{AX} = 0, \\ \sum M_{Ai} &= 0 \Rightarrow R_B \cdot 2a - F \cdot a = 0 \Rightarrow R_B = \frac{F}{2}, \\ \sum F_{Yi} &= 0 \Rightarrow R_A + R_B - F = 0 \Rightarrow R_A = F - R_B \\ &\Rightarrow R_A = F - \frac{F}{2} = \frac{F}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (6.24)$$

Ze zadání (obr. 6.22 – vlevo) vyplývá pro úhel α

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a} = \frac{1}{0,75} \frac{4}{3} \Rightarrow \alpha = 53,1301^\circ. \quad (6.25)$$

Vztahy pro reakce (6.26) a úhel (6.25) platí za předpokladu teorie malých deformací a teorie 1. řádu (tj. změny úhlu α způsobené silou F lze zanedbat – lze říci, že úhel α se nemění), blíže viz učebnice statiky.

Normálové síly N_i v prutech ($i = 1, 2, \dots, 5$) lze stanovit např. styčníkovou metodou (obr. 6.23).



Obr. 6.23 Styčníková metoda (stanovení normálových sil)



Síly N_1 a N_4 lze stanovit ze silové rovnováhy ve styčnicku „A” (obr. 6.23)

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{X i_v} \text{ bodě „A”} &= 0 \Rightarrow R_{AX} + N_4 - N_1 \cos \alpha = 0 \\ \Rightarrow N_4 &= N_1 \cos \alpha - R_{AX} \Rightarrow N_4 = \frac{F \cos \alpha}{2 \sin \alpha} - 0 = \frac{F}{2 \operatorname{tg} \alpha} \\ \Rightarrow N_4 &= \frac{30}{2 \cdot \frac{4}{3}} = 11,25 \text{ kN}, \\ \sum F_{Y i_v} \text{ bodě „A”} &= 0 \Rightarrow R_A - N_1 \sin \alpha = 0 \Rightarrow N_1 = \frac{R_A}{\sin \alpha} = \frac{F}{2 \sin \alpha} \\ \Rightarrow N_1 &= \frac{30}{2 \cdot \sin 53,1301^\circ} = 18,75 \text{ kN}. \end{aligned} \right\} \quad (6.26)$$

Obdobně lze stanovit síly N_3 a N_5 (ze silové rovnováhy ve styčnicku „D”) a N_2 (ze silové rovnováhy ve styčnicku „B”), viz obr. 6.23

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{X i_v} \text{ bodě „D”} &= 0 \Rightarrow -N_4 + N_5 = 0 \\ \Rightarrow N_4 &= N_5 = \frac{F}{2 \operatorname{tg} \alpha} = 11,25 \text{ kN}, \\ \sum F_{Y i_v} \text{ bodě „D”} &= 0 \Rightarrow N_3 - F = 0 \\ \Rightarrow N_3 &= F = 30 \text{ kN}, \end{aligned} \right\} \quad (6.27)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{X i_v} \text{ bodě „B”} &= 0 \Rightarrow -N_5 + N_2 \cos \alpha = 0 \\ \Rightarrow N_2 &= \frac{N_5}{\cos \alpha} = 18,75 \text{ kN}, \\ \Rightarrow \sum F_{Y i_v} \text{ bodě „B”} &= 0 \Rightarrow R_B - N_2 \sin \alpha = 0 \\ N_2 &= \frac{R_B}{\sin \alpha} = \frac{F}{2 \sin \alpha} = 18,75 \text{ kN}. \end{aligned} \right\} \quad (6.28)$$

Obsah

203. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Rovnice rovnováhy ve styčnicku „C”, která se stanoví obdobným způsobem, může sloužit pro kontrolu správnosti odvozených vztahů. Normálové síly $N_2 = N_1$ a $N_4 = N_5$, protože konstrukce je symetrická.

Na obr. 6.23 byly zvoleny kladné směry normálových sil, působících ve styčnicích. Pruty příhradové konstrukce budou, dle zákona akce a reakce, namáhány silami opačně orientovanými. Normálová napětí σ_i v prutech, s respektováním znaménkové dohody pro vnitřní normálové síly, jsou

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 = \sigma_2 &= \frac{-N_1}{S_1} = \frac{-18,75 \cdot 10^3}{400} = -46,88 \text{ MPa}, \\ \sigma_3 &= \frac{N_3}{S_3} = \frac{30 \cdot 10^3}{600} = 50 \text{ MPa}, \\ \sigma_4 = \sigma_5 &= \frac{N_4}{S_4} = \frac{11,25 \cdot 10^3}{400} = 28,13 \text{ MPa}. \end{aligned} \right\} \quad (6.29)$$



Příklad 6.15. Absolutně tuhý člen „AD” (viz obr. 6.24) je uchycen v kloubu „A” a podpírán tyčemi (pruty) „1”, „2” v místech „B” a „C”. Vertikální síla F působí v bodu „D” (obr. 6.24 b)). Určete reakce, normálové síly a napětí v tyčích. Použijte teorii malých deformací. Vliv vlastní tíhy neuvažujte. Dáno $F = 40 \text{ kN}$, $E_1 = E_2 = E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $a = 1,2 \text{ m}$, $b = 1,6 \text{ m}$, $c = 2 \text{ m}$, $L_1 = 1 \text{ m}$, $L_2 = 1,5 \text{ m}$, $S_1 = 400 \text{ mm}^2$, $S_2 = 300 \text{ mm}^2$.



Obsah

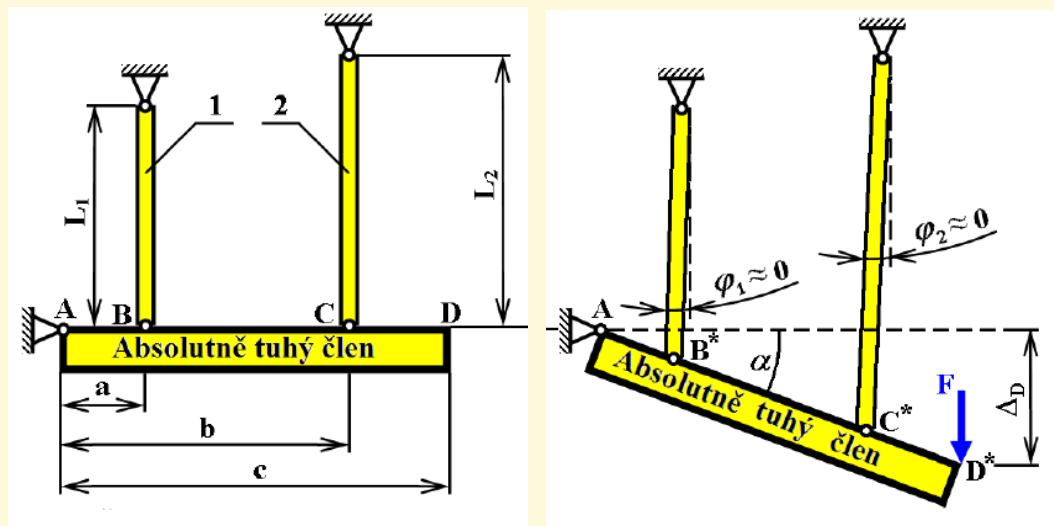
204. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

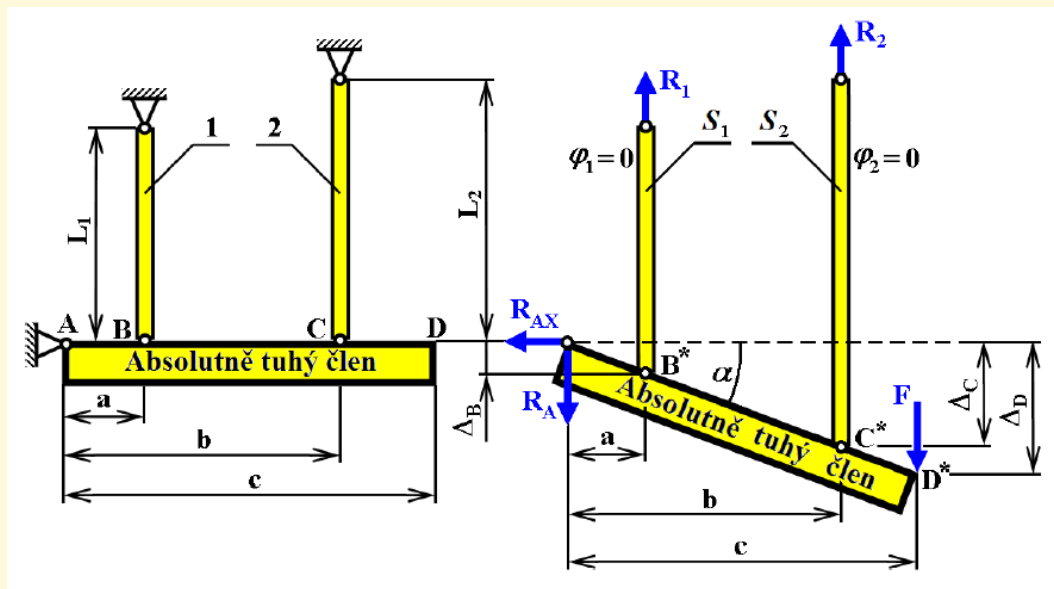


a) nezatížený stav

b) stav po zatížení (ve zvětšeném měřítku)

Obr. 6.24 Řešená soustava

Za předpokladu malých deformací (tj. úhel α je malý) lze úhly natočení tyčí φ_1 a φ_2 považovat za nulové. Nabízí se pak přijatelné zjednodušení znázorněné na obr. 6.25.



Obr. 6.25

Z obr. 6.25 pak lze stanovit statické rovnice rovnováhy

$$\left. \begin{aligned} \sum F_X = 0 &\Rightarrow R_{AX} = 0, \\ \sum F_Y = 0 &\Rightarrow R_1 + R_2 - R_A = F, \\ \sum M_A = 0 &\Rightarrow R_1 a + R_2 b = Fc. \end{aligned} \right\} \quad (6.30)$$

Úloha je $1 \times$ staticky neurčitá (tři rovnice (6.30), avšak čtyři reakce: R_{AX} , R_A , R_1 a R_2).

Proto je nutné soustavu (6.30) doplnit o další rovnici z deformační podmínky, pro kterou (za předpokladu absolutně tuhého členu „AD“) platí: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta B}{a} = \frac{\Delta C}{b}$, kde pro přemístění bodu B a C vyplývá

$$\Delta B = \frac{N_1 L_1}{E_1 S_1} = \frac{R_1 L_1}{E S_1}, \quad \Delta C = \frac{N_2 L_2}{E_2 S_2} = \frac{R_2 L_2}{E S_2}.$$

Pak je zřejmé, že lze odvodit vztah: $\Delta B = \frac{a \Delta C}{b}$, odkud vyplyne rovnice

$$R_1 = \frac{S_1 a L_2}{S_2 b L_1} R_2. \quad (6.31)$$

Řešením soustavy rovnic 6.30 a 6.31, vyplyne

$$R_1 = \frac{F S_1 a c L_2}{S_1 a^2 L_2 + S_2 b^2 L_1} = 35294,1 \text{ N}, \quad R_2 = \frac{F S_2 b c L_1}{S_1 a^2 L_2 + S_2 b^2 L_1} = 23529,4 \text{ N},$$

$$R_A = R_1 + R_2 - F = 18823,5 \text{ N}.$$

Pro normálové síly (v tomto případě tahové) a napětí v prutech „1“ a „2“ pak platí

$$N_1 = R_1, \quad N_2 = R_2,$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{S_1} = 88,2 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{S_2} = 78,4 \text{ MPa}.$$



Obsah

207. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

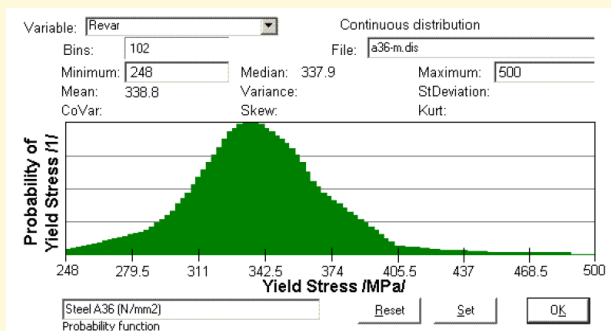
6.9. Dovolené napětí (σ_{DOV}), návrh průřezu, zatížení a pevnostní kontrola

Ve většině případů návrhu strojních součástí nelze připustit napětí větší než dovolené. Pro návrh průřezů pak lze použít tzv. návrhové (designové) nerovnice či *podmínky pevnosti*

$$\sigma_{MAXTAH} \leq \sigma_{DOVTAH}, \quad |\sigma_{MAXTLAK}| \leq \sigma_{DOVTLAK}, \quad (6.32)$$

kde σ_{MAXTAH} a $\sigma_{MAXTLAK}$ [MPa] jsou maximální napětí vypočtená v řešených úsecích tyčí a σ_{DOVTAH} a $\sigma_{DOVTLAK}$ [MPa] jsou maximální dovolená napětí v tahu respektive tlaku.

Napětí σ_{DOVTAH} , $\sigma_{DOVTLAK} > 0$ jsou obvykle (z důvodů bezpečnosti) menší nebo rovna mezi kluzu R_e . Nicméně při optimálním návrhu konstrukce je třeba mít na zřeteli, že mez kluzu může vykazovat značný rozptyl, viz např. obr. 6.26 (histogram meze kluzu).

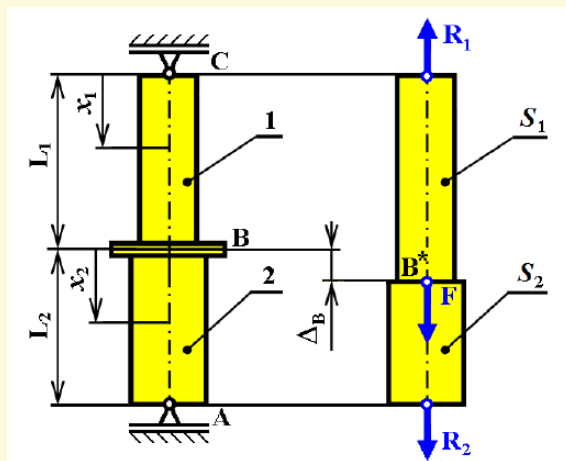


Obr. 6.26 Histogram meze kluzu oceli A36 (rozpětí od 248 MPa do 500 MPa)

Jedním z moderních přístupů současnosti je také pravděpodobnostní přístup k řešení těchto úloh (pravděpodobnostní posudek stanovení spolehlivosti konstrukce, viz např. [15]).

Nerovnice (6.32) lze použít pro pevnostní kontrolu, návrh průřezů nebo zatížení.

Příklad 6.16. Ocelová trubka „1” je připojena k trubce „2” přes přírubu „B” na kterou působí síla F , viz obr. 6.27. Soustava je na koncích uchycena v bodech „A” a „C” pomocí absolutně tuhých podpor. Posudte zda součást pevnostně vyhovuje. Vliv vlastní tíhy, způsob spojení trubek a možné vybočení trubek neuvažujte.



Obr. 6.27

Dáno: $L_1 = 1500 \text{ mm}$, $L_2 = 1000 \text{ mm}$, $S_1 = 800 \text{ mm}^2$, $S_2 = 1500 \text{ mm}^2$, $F = 100 \text{ kN}$,
 $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $\sigma_{DOV_{TAH}} = \sigma_{DOV_{TLAK}} = 175 \text{ MPa}$.

Vztahy pro napětí jsou odvozeny v příkladu 6.9, viz rovnice (6.23) a obr. 6.19, kde
 $\sigma(x_1) = 32,79 \text{ MPa}$ a $\sigma(x_2) = -49,18 \text{ MPa}$.

Posouzení napjatosti lze provést dosazením do nerovnic (6.32). Platí tedy

$$\sigma_{MAX_{TAH}} \leq \sigma_{DOV_{TAH}}, \quad |\sigma_{MAX_{TLAK}}| \leq \sigma_{DOV_{TLAK}}$$

(tj.: $32,79 \text{ MPa} \leq 175 \text{ MPa}$ a zároveň $49,18 \text{ MPa} \leq 175 \text{ MPa}$). Řešená soustava tedy
splňuje podmínky pevnosti. ▲



Obsah

210 strana ze 449



Zavřít dokument

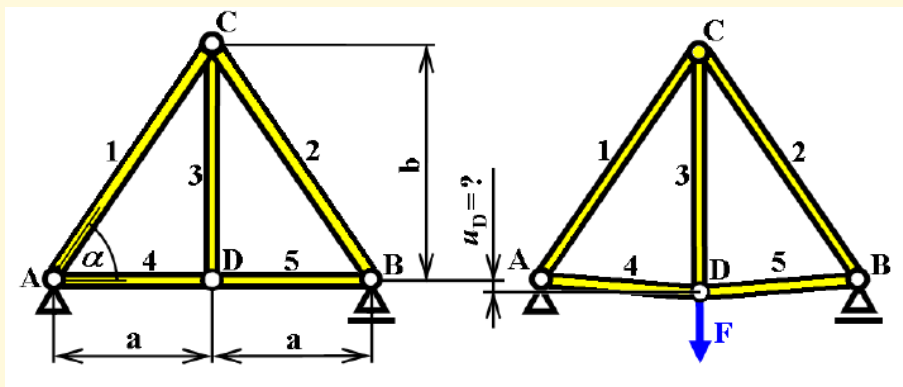
Konec

Celá obrazovka / Okno

Příklady k procvičení

1. Určete přemístění bodu „D“ (tj. $u_D = ?$), příhradové konstrukce znázorněné na obr. 6.28. Při řešení lze využít výsledků řešeného příkladu 6.9 z kapitoly 6.8.

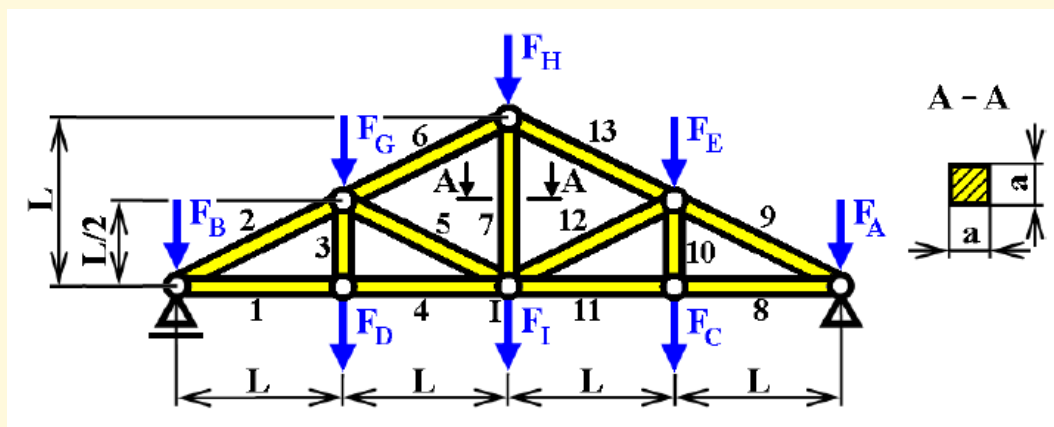
Dáno: $S_1 = S_2 = 400 \text{ mm}^2$, $S_3 = 600 \text{ mm}^2$, $S_4 = S_5 = 400 \text{ mm}^2$, $F = 30 \text{ kN}$,
 $a = 0,75 \text{ m}$, $b = 1 \text{ m}$, $E = E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = E_5 = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.



Obr. 6.28 Prutová konstrukce.

2. Určete velikosti normálových sil pro příhradovou konstrukci, znázorněnou na obr. 6.29. Určete tažené a tlačené pruty. Navrhněte také rozměr čtvercového průřezu prutu 7.

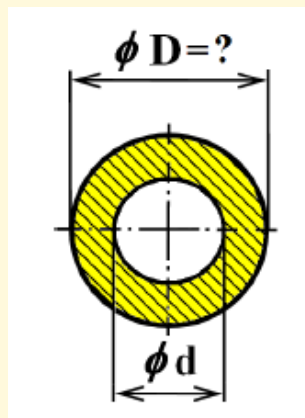
Dáno: $F_A = 500 \text{ N}$, $F_B = 500 \text{ N}$, $F_C = 1000 \text{ N}$, $F_D = 1000 \text{ N}$, $F_E = 1500 \text{ N}$, $F_H = 1500 \text{ N}$, $F_I = 2000 \text{ N}$, $L = 220 \text{ mm}$, $\sigma_{DOV} = 50 \text{ MPa}$.



Obr. 6.29

3. Součást je namáhána tahem. Z podmínky pevnosti odvoďte vztah pro návrh průměru D , znázorněného na obr. 6.30.

Dáno: N , d , σ_{DOV} .



Obr. 6.30

Klíč k příkladům k procvičení

1. Řešení posunutí u_D lze odvodit, ze známých výsledků řešené úlohy z kapitoly 6.8, nejrychleji z Castiglianovy věty

$$u_D = \sum_{i=1}^5 \left(\frac{1}{E_i A_i} \int_0^{L_i} N_i \frac{\partial N_i}{\partial F} dx \right),$$

přičemž normálové síly musí být vyjádřeny v závislosti na síle F . Pak platí

$$\frac{\partial N_1}{\partial F} = \frac{\partial N_2}{\partial F} = \frac{1}{2 \sin \alpha}, \quad \frac{\partial N_3}{\partial F}, \quad \frac{\partial N_4}{\partial F} = \frac{\partial N_5}{\partial F} = \frac{1}{2 \operatorname{tg} \alpha}.$$

Je také zřejmé, že pro dílčí integrály platí

$$\int_0^{L_i} N_i \frac{\partial N_i}{\partial F} dx = N_i \frac{\partial N_i}{\partial F} \int_0^{L_i} dx = N_i L_i \frac{\partial N_i}{\partial F},$$

$$u_D = \frac{F}{E} \left(\frac{b}{2A_1 \sin^3 \alpha} + \frac{b}{A_3} + \frac{a}{2A_4 \operatorname{tg}^2 \alpha} \right) = 6,62 \cdot 10^{-1} \text{ mm}.$$



Obsah

214. strana ze 449

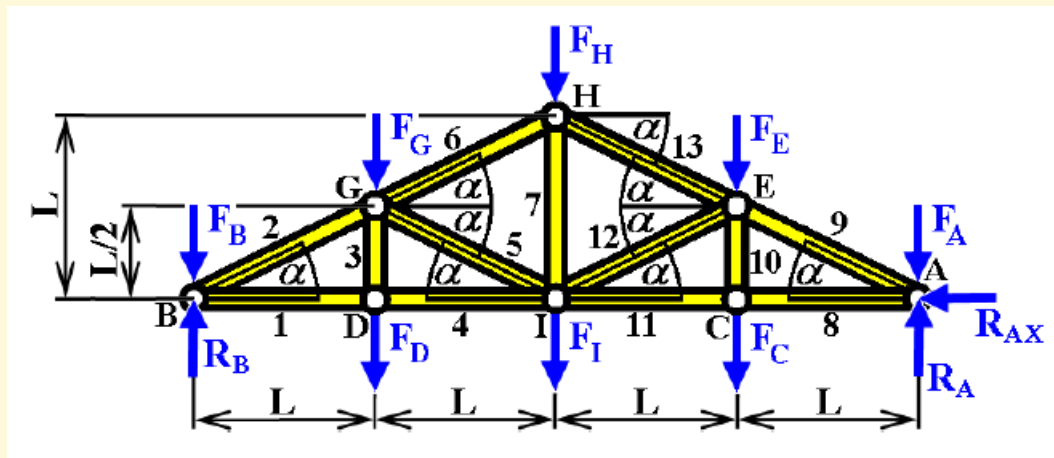


Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

2. Uvolnění je znázorněno na obr. 6.31.



Obr. 6.31

$$\alpha = 26,5651^\circ, \quad R_{AX} = 0 \text{ N}, \quad R_A = 5125 \text{ N}, \quad R_B = 4875 \text{ N}.$$

$N_1 = N_4 = -609,8 \text{ N}$	Tahová síla
$N_2 = 4417,3 \text{ N}$	Tlaková síla
$N_3 = -1000 \text{ N}$	Tahová síla
$N_5 = 1262,1 \text{ N}$	Tlaková síla
$N_6 = N_{13} = 3155,2 \text{ N}$	Tlaková síla
$N_1 = N_4 = -609,8 \text{ N}$	Tahová síla
$N_2 = 4417,3 \text{ N}$	Tlaková síla
$N_3 = -1000 \text{ N}$	Tahová síla
$N_5 = 1262,1 \text{ N}$	Tlaková síla
$N_6 = N_{13} = 3155,2 \text{ N}$	Tlaková síla

Tab. 6.2 Výsledky příkladu 2

$$\sigma_7 = \frac{N_7}{a^2} \leq \sigma_{DOV}, \text{ tj.: } a \geq \sqrt{\frac{N_7}{\sigma_{DOV}}} = 9,75 \text{ mm. Lze tedy zvolit např. rozměr } a = 10 \text{ mm.}$$

$$3. D \geq \sqrt{\frac{4N}{\pi \sigma_{DOV}}} + d^2.$$



Obsah

216. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Pojmy k zapamatování

- Hookeův zákon pro jednoosou napjatost
- modul pružnosti v tahu a tlaku
- poměrné deformace součásti, namáhané tahem/tlakem
- prodloužení/zkrácení součásti, namáhané tahem/tlakem
- vliv teploty na napjatost součásti, namáhané tahem/tlakem
- staticky neurčité úlohy tahu a tlaku
- příhradové konstrukce
- návrh rozměrů a zatížení součásti, namáhané tahem/tlakem

6.9.1. Interaktivní test

Následující test byl vytvořen pomocí balíčku **acrotex**. Test zahájíte kliknutím na tlačítko „Začátek testu“. U otázek, kde lze volit jen jednu odpověď (test nedovolí zaškrtnout více odpovědí), je správná odpověď bodována takovým počtem bodů, jaký je uveden v závorce u zadání a špatná odpověď je bodována 0 body. U otázek, kde lze volit více správných odpovědí, je součet bodů správných odpovědí uveden v závorce u zadání a za každou špatnou odpověď bude odečten jeden bod.



Obsah

217. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

1. (2b.) Jak je definován Hookeův zákon pro jednoosou napjatost?

$$\sigma = \frac{E}{\varepsilon}$$

$$\sigma = E\varepsilon$$

$$\sigma = \frac{\varepsilon}{E}$$

$$\sigma = \frac{l}{E\varepsilon}$$

2. (2b.) Součást má počáteční délku L . Jak je definovaná poměrná deformace při jednoosé napjatosti?

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

$$\varepsilon = \frac{L}{\Delta L}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\Delta L \cdot L}$$



Obsah

218. strana ze 449

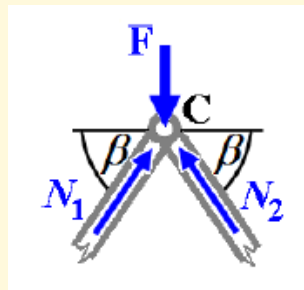


Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

3. (2b.) Jaké vztahy platí pro síly v prutech části konstrukce (styčník C), znázorněné na obr. 6.32?



Obr. 6.32

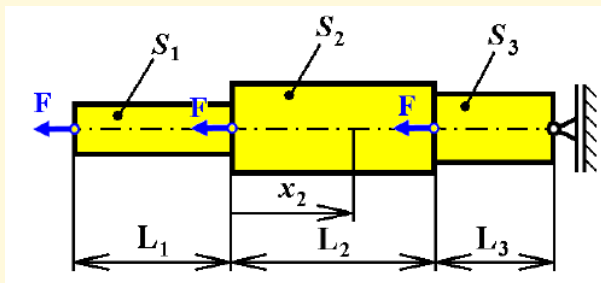
$$N_1 = N_2 = \frac{F}{2 \cos \beta}$$

$$N_1 = N_2 = \frac{F}{2 \sin \beta}$$

$$N_1 = N_2 = \frac{F \cos \beta}{2}$$

$$N_1 = N_2 = \frac{F \sin \beta}{2}$$

4. (2b.) Jaký vztah určuje napětí ve vzdálenosti x_2 v součásti, znázorněné na obr. 6.33?



Obr. 6.33

$$\sigma_2 = \frac{F}{S_2}$$

$$\sigma_2 = \frac{2F}{S_2}$$

$$\sigma_2 = \frac{3F}{S_2}$$

$$\sigma_2 = \frac{4F}{S_2}$$

5. (2b.) Jaká je běžná hodnota modulu pružnosti v tahu oceli?

$1,9 \cdot 10^5$ až $2,2 \cdot 10^5$ *psi*

$1,9 \cdot 10^5$ až $2,2 \cdot 10^5$ *MPa*

248 až 500 *MPa*

$1,9 \cdot 10^5$ až $2,2 \cdot 10^5$ *MN*

6. (2b.) Kdy je prutová soustava staticky neurčitá?

je-li počet neznámých reakčních složek stejný jako počet nezávislých podmínek rovnováhy

je-li počet neznámých reakčních složek větší než počet nezávislých podmínek rovnováhy

je-li počet neznámých reakčních složek menší než počet nezávislých podmínek rovnováhy

7. (2b.) U tyče namáhané prostým tahem je deformace přímo úměrná

působící síle a modulu pružnosti v tahu

působící síle a délce

působící síle, velikosti průřezu a modulu pružnosti v tahu



Obsah

221 strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno



8. (2b.) Hodnota modulu pružnosti ve smyku G pro ocel je
- větší než hodnota modulu pružnosti v tahu
 - menší než hodnota modulu pružnosti v tahu
 - stejná jako hodnota modulu pružnosti v tahu
9. (2b.) Jaké hodnoty přibližně nabývá Poissonovo číslo pro oceli?
- 0,3
 - 0,5
 - 0,2
10. (2b.) Jaké hodnoty přibližně nabývá Poissonovo číslo pro pryž?
- 0,3
 - 0,5
 - 0,2

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:

Obsah

222. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Pro ukončení testu je třeba kliknout na tlačítko „Konec testu“. Opravení testu se provede kliknutím na tlačítko „Výsledky“, správné odpovědi budou označeny zeleně a červeně budou označeny odpovědi chybné. Při použití otázky s tvořenou odpovědí se správná odpověď zobrazí v rámečku umístěném vpravo dole v navigačním panelu po kliknutí na tlačítko „Odpověď“.

[Obsah](#)[223](#) strana ze 449[Zavřít dokument](#)[Konec](#)[Celá obrazovka / Okno](#)

Kapitola 7

Kroucení prutů kruhového a mezikruhového průřezu

Průvodce studiem

V předcházející kapitole jsme se naučili pevnostně kontrolovat a dimenzovat součásti namáhané tahem či tlakem. Řešení úloh kroucení prutů (tyčí) kruhového a mezikruhového průřezu je analogické. Opět budeme potřebovat pevnostní podmínku. V této kapitole si také ukážeme, že řešení staticky neurčitých úloh u prutů namáhaných krutem je dokonce v některých ohledech jednodušší. Před studiem kapitoly doporučujeme projít kapitolu 1.

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete:

- umět vypočítat smykové napětí při kroucení kruhového a mezikruhového průřezu
- rozumět deformačním vztahům při kroucení
- seznámení s Hookeovým zákonem pro prostý smyk



Obsah

224. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

- schopni stanovit kvadratické momenty a moduly průřezu v krutu pro kruhový a mezikruhový průřez
- umět vypočítat staticky neurčitou úlohu při kroucení

7.1. Výpočet napětí při kroucení

Definice 7.1. Příčný průřez kruhového prutu je namáhám prostým krutem, jestliže vnější síly po jedné straně se dají nahradit dvojicí sil, ležících v rovině tohoto průřezu. Moment této dvojice se nazývá krouticím momentem

Předpoklady řešení:

- průřezy zůstávají i po deformaci rovinné
- radiální paprsky zůstávají přímé – průřezy se pouze otáčejí kolem osy prutu
- myšlený čtverec na povrchu přejde vlivem zatížení krouticím momentem v kosočtverec



Obsah

225. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

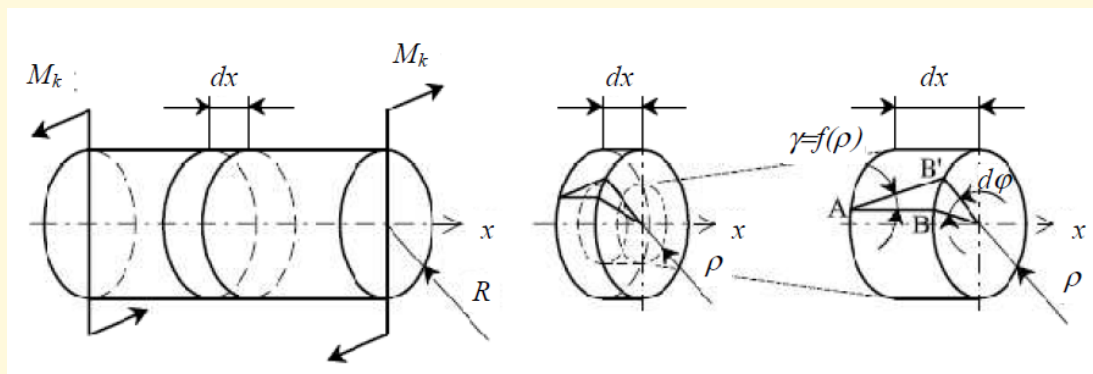
Ze společné délky oblouku BB' obou trojúhelníků (obr. 7.1) lze sestavit následující rovnice

$$\gamma_{(\rho)} \cdot dx = \rho \cdot d\varphi, \text{ odkud } \gamma_{(\rho)} = \rho \frac{d\varphi}{dx}, \quad (7.1)$$

kde

$$\frac{d\varphi}{dx} = \vartheta \text{ [rad} \cdot \text{m}^{-1}] \quad (7.2)$$

je poměrný úhel zkroucení (zkrut), $d\varphi$ je relativní pootočení dvou průřezů, vzdálených o dx a úhel BAB' je zkos γ .



Obr. 7.1

Nyní využijeme Hookeův zákon pro prostý smyk, který má následující tvar

$$\gamma_{(\rho)} = \frac{\tau_{(\rho)}}{G}, \quad (7.3)$$

kde $\tau_{(\rho)}$ je smykové napětí na poloměru ρ a G je modul pružnosti ve smyku

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (7.4)$$

Dosazením rovnice (7.1) do (7.3) lze získat pro výpočet smykového napětí $\tau_{(\rho)}$ následující vztah

$$\tau_{(\rho)} = G \cdot \rho \vartheta. \quad (7.5)$$

Z rovnice (7.5) je zřejmé, že $\tau_{(\rho)}$ závisí na ρ lineárně. Elementární síla dF působící na ploše dS může být vyjádřena takto

$$dF = \tau_{(\rho)} \cdot dS. \quad (7.6)$$

Moment elementární síly dF k ose x je pak

$$\rho \cdot dF = \rho \cdot \tau_{(\rho)} \cdot dS. \quad (7.7)$$

Tudíž krouticí moment M_k musí být dán integrálem přes celou plochu průřezu

$$M_k = \int_{(S)} \tau_{(\rho)} \cdot \rho \cdot dS. \quad (7.8)$$



Obsah

227. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

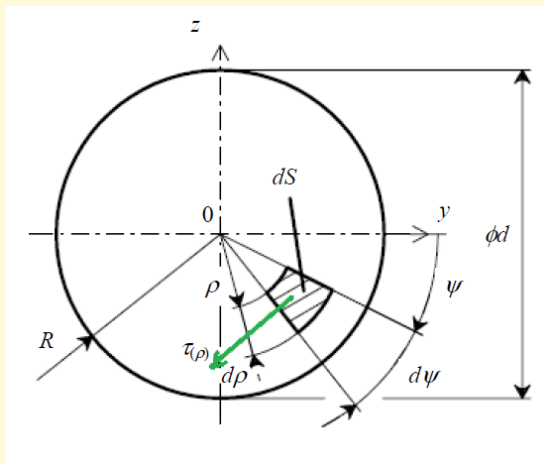
Celá obrazovka / Okno

Dosazením rovnice (7.5) do (7.8) lze získat vztah pro výpočet krouticího momentu

$$M_k = G \cdot \vartheta \cdot \int_{(S)} \rho^2 \cdot dS = G \cdot \vartheta \cdot I_p, \quad (7.9)$$

kde I_p je polární kvadratický moment průřezu a pro plný kruhový průřez byl odvozen již v první kapitole.

Zde naznačíme druhý způsob řešení. Elementární plocha dle obr. 7.2 má obsah $dS = \rho \cdot d\psi \cdot d\rho$.



Obr. 7.2

Pak lze psát

$$I_p = \int_{(S)} \rho^2 dS = \int_0^R \rho^3 d\rho \cdot \int_0^{2\pi} d\psi = \frac{R^4}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}. \quad (7.10)$$

Z rovnice (7.9) lze vyjádřit zkřut

$$\vartheta = \frac{M_k}{G \cdot I_p}, \quad (7.11)$$

dosazením rovnice (7.11) do (7.5) lze získat rovnici pro výpočet smykového napětí

$$\tau_{(\rho)} = \frac{M_k}{I_p} \cdot \rho. \quad (7.12)$$

Označíme-li

$$\tau_{max} = \tau_k \quad a \quad W_k = \frac{I_p}{\rho_{max}},$$

pak platí

$$\tau_k = \frac{M_k}{W_k}, \quad (7.13)$$

kde W_k je modul průřezu v krutu. Pro plný průřez i mezikruhový průřez byl odvozen již v první kapitole.

Připomeňme však, že dle (obr. 7.3) a definice 1.4 je

$$W_k = \frac{I_p}{\frac{d}{2}} = \frac{\frac{\pi d^4}{32}}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi d^3}{16} [m^3]. \quad (7.14)$$



Obsah

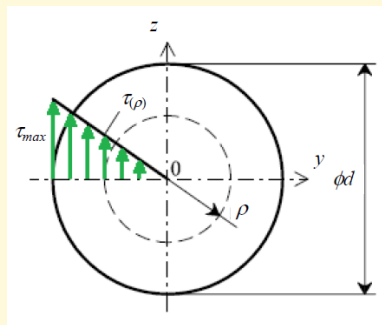
229 strana ze 449



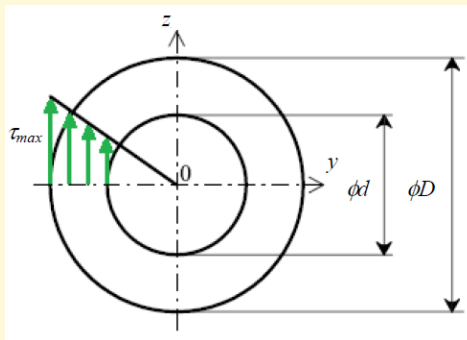
Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno



Obr. 7.3



Obr. 7.4

Polární kvadratický moment I_p pro mezikruhový průřez (obr. 7.4) má následující tvar

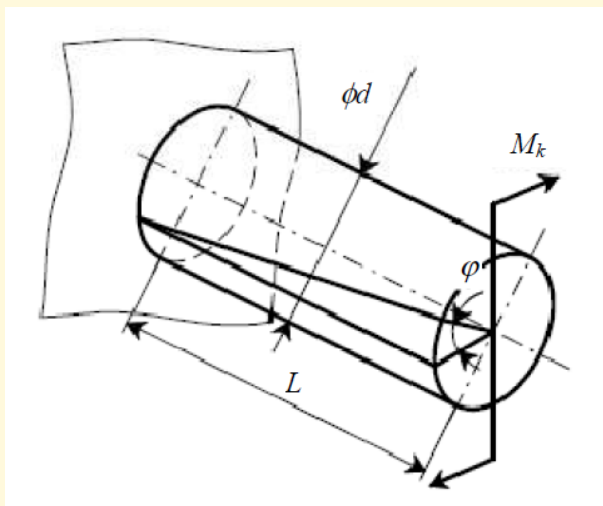
$$I_p = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{32}. \quad (7.15)$$

Modul průřezu v krutu W_k pro mezikruhový průřez je roven

$$W_k = \frac{I_p}{\frac{D}{2}} = \frac{\frac{\pi (D^4 - d^4)}{32}}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{16D} \text{ [m}^3\text{]}. \quad (7.16)$$

7.2. Deformace při kroucení

Deformaci při kroucení lze vyjádřit formou úhlu pootočení průřezů φ , kterému říkáme *úhel zkroucení*. Graficky je úhel pootočení znázorněný na obr. 7.5.



Obr. 7.5

Z rovnice (7.11) lze odvodit zkrut ϑ (či poměrný úhel zkroucení) ve tvaru

$$\vartheta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_k}{G \cdot I_p}, \quad (7.17)$$

odtud pak

$$d\varphi = \frac{M_k}{G \cdot I_p} \cdot dx. \quad (7.18)$$

Po integraci výrazu (7.18) pro celou délku tyče L bude úhel zkroucení

$$\varphi = \int_{(L)} \frac{M_k}{G \cdot I_p} dx \quad (7.19)$$

a po dosazení mezí dostaneme

$$\varphi = \frac{M_k \cdot L}{G \cdot I_p} [\text{rad}], \quad (7.20)$$

kde $G \cdot I_p$ je torzní tuhost.

7.3. Pevnostní podmínka a dimenzování

Při návrhu a kontrole prutů, namáhaných krutem, se používá pevnostní podmínka

$$\tau_{max} = \tau_k = \frac{M_k}{W_k} \leq \tau_D, \quad (7.21)$$

kde τ_D je dovolené napětí ve smyku. Pokud hodnotu τ_D potřebujeme stanovit z dovoleného napětí pro tah σ_D , lze vyjít z Mohrovy kružnice pro prostý tah, či využít vztahu (3.11), pak

$$\tau_D = \frac{\sigma_D}{2}. \quad (7.22)$$



Obsah

232. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Strojní součást musí také vyhovovat podmínce tuhosti

$$\varphi \leq \varphi_D, \quad (7.23)$$

kde φ_D je velikost deformace přípustné pro danou konstrukci.

7.4. Zahrnutí dalších vlivů do výpočtu

Výše popsaná teorie odpovídá prostému (volnému) kroucení podle Saint Venantovy teorie (vznikají jen smyková napětí), která odpovídá předpokladům z úvodu kapitoly. Kromě tohoto kroucení však existuje i kroucení vázané podle Vlasovovy teorie (vznikají smyková i normálová napětí).

U volného kroucení není bráněno deplanaci (posuvům ve směru osy prutu).

U vázaného kroucení je tomu naopak a dochází zde k tomu, že část krouticího momentu se přenáší prostým kroucením a část krouticího momentu se přenáší ohybovým kroucením. V souvislosti s kroucením mluvíme o *deplanaci* průřezu. Deplanace se projevuje nenulovými posuvy ve směru osy prutu (zkřivení roviny průřezu) a dochází k ní u prutů nekruhového průřezu.

Často jsou součásti, namáhané krutem, zároveň zatěžovány přídatnou osovou tahovou/tlakovou silou, ohybovým momentem apod. V těchto případech mluvíme o *kombinovaném namáhání prutů*, kde výsledné napětí pro kontrolu součásti získáme použitím vhodné hypotézy pevnosti, viz kapitola 9 (tzv. redukované napětí).



Obsah

233. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

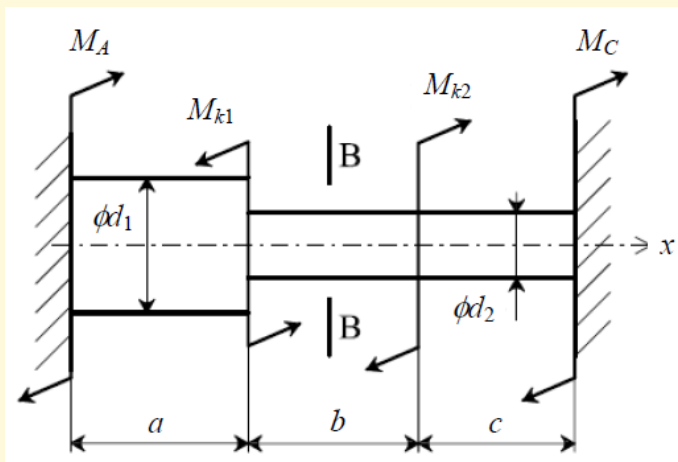


7.5. Úlohy staticky neurčitě při kroucení

Při řešení staticky neurčitých úloh v kroucení se postupuje analogicky jako u staticky neurčitých prutů, namáhaných tahem/tlakem (kapitola 6.7). Způsob řešení bude prezentován na příkladě.

Příklad 7.2. Uvažujme osazenou tyč, vetknutou na obou koncích (obr. 7.6). Určete napětí v řezu tyče B-B a reakce ve vetknutí na obou stranách $M_A = ?$, $M_C = ?$

Dáno: M_{k1} , M_{k2} , a , b , c , d_1 , d_2 .



Obr. 7.6

Obsah

234. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Nejprve tyč uvolníme, resp. zavede reakční momenty ve vetknutí M_A , M_C . Smykové napětí v řezu tyče B-B se stanoví

$$\tau_{kB} = \frac{M_B}{W_{kB}}, \quad W_{kB} = \frac{\pi \cdot d_2^3}{16}.$$

(P1)

Musíme však nejprve stanovit velikost reakcí, abychom dokázali určit vnitřní krouticí moment v místě B (M_B). Rovnici rovnováhy lze psát ve tvaru

$$M_A - M_{k1} + M_{k2} + M_c = 0.$$

(P2)

Z rovnice rovnováhy vyplývají dvě neznámé M_A a M_C . Stupeň statické neurčitosti je dle vztahu (6.26) roven 1 a soustava je jedenkrát staticky neurčitá. Je tedy nutno sestavit jednu deformační podmínku.



Obsah

235. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Deformační podmínka vychází z vetknutí obou konců tyče a lze tedy říci, že celkový úhel zkroucení bude roven nule

$$\varphi_c = 0.$$

(P3)

Ukážeme si dva způsoby vyjádření celkového úhlu zkroucení. V prvním řešení jej můžeme vyjádřit jako součet dílčích úhlů zkroucení, odpovídajících třem úsekům tyče

$$\varphi_c = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0.$$

(P4)

Analogicky jako u prutů, namáhaných tahem – tlakem, můžeme s využitím metody řezu vyjádřit vnitřní krouticí moment v jednotlivých úsecích, tj. $M_k(x) = M_A$ pro $x \in (0, a)$, $M_k(x) = M_A - M_{k1}$ pro $x \in (a, a + b)$; $M_k(x) = M_A - M_{k1} + M_{k2}$ pro $x \in (a + b, a + b + c)$. Po aplikaci upraveného Hookeova zákona pro prostý smyk deformační podmínka přejde do tvaru

$$\varphi_c = \frac{M_A \cdot a}{G \cdot I_{p1}} + \frac{(M_A - M_{k1}) \cdot b}{G \cdot I_{p2}} + \frac{(M_A - M_{k1} + M_{k2}) \cdot c}{G \cdot I_{p2}} = 0.$$

(P5)



Obsah

236. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Z nějž po úpravě lze získat hledanou reakci

$$M_A \left(\frac{a}{I_{p1}} + \frac{b+c}{I_{p2}} \right) = M_{k1} \left(\frac{b+c}{I_{p2}} \right) - M_{k2} \cdot \frac{c}{I_{p2}},$$

$$M_A = \frac{M_{k1} \left(\frac{b+c}{I_{p2}} \right) - M_{k2} \cdot \frac{c}{I_{p2}}}{\left(\frac{a}{I_{p1}} + \frac{b+c}{I_{p2}} \right)}.$$

(P6)

Po dosazení reakce M_A do rovnice rovnováhy (P2) získáme druhou neznámou reakci M_B . Z vypočtených reakčních momentů lze pak vyjádřit hodnotu krouticího momentu v řezu B-B, např. $M_B = M_A - M_{k1}$ (nacházíme se v druhém úseku tyče) a následně vypočítat napětí v řezu tyče $B - B$ dle vztahu P1.

U druhého způsobu využijeme metodu superpozice. Odmyslíme si vetknutí na pravé straně tyče (obr. 7.6) a tento případ si pomyslně rozdělíme na tři dílčí případy, viz obr. 7.7.

Pro každý zátěžný případ na obr. 7.7 vyjádříme celkový úhel zkroucení tyče.



Obsah

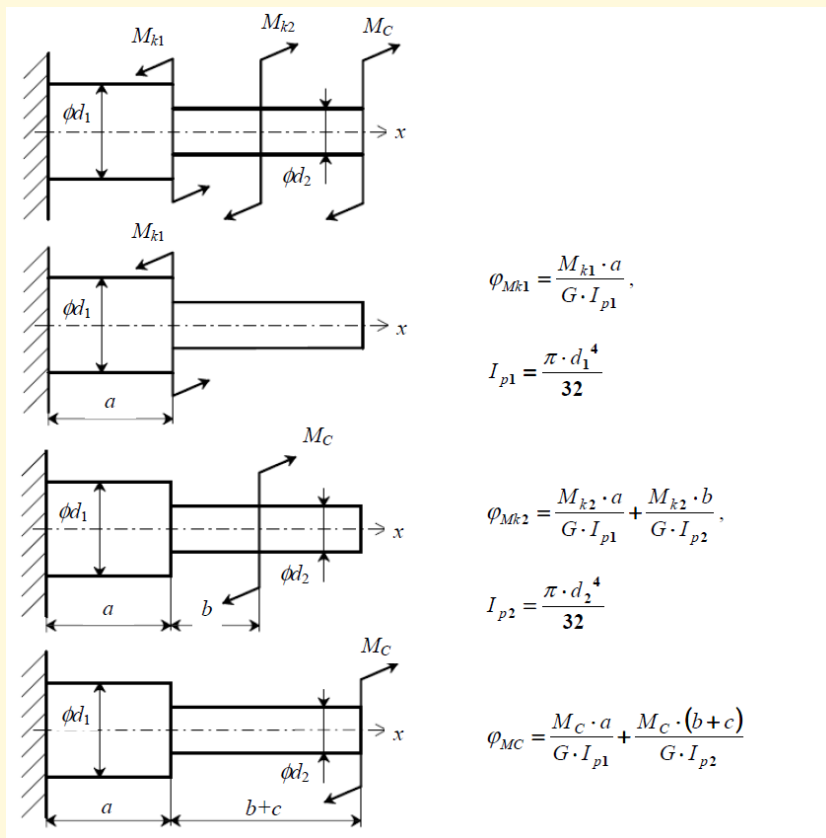
237. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno



Obr. 7.7

Obsah

238 strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Dosazením těchto rovnic do rovnice (P3) lze získat druhou rovnici, nutnou pro řešení soustavy dvou rovnic pro dvě neznámé M_A a M_C

$$\begin{aligned}\varphi_C &= -\varphi_{Mk1} + \varphi_{Mk2} + \varphi_{MC} = 0, \\ -\frac{M_{k1} \cdot a}{G \cdot I_{p1}} + \frac{M_{k2} \cdot a}{G \cdot I_{p1}} + \frac{M_{k2} \cdot b}{G \cdot I_{p2}} + \frac{M_C \cdot a}{G \cdot I_{p1}} + \frac{M_C(b+c)}{G \cdot I_{p2}} &= 0/G, \\ \frac{a(M_{k2} - M_{k1})}{I_{p1}} + \frac{b \cdot M_{k2}}{I_{p2}} + \left[\frac{a}{I_{p1}} + \frac{(b+c)}{I_{p2}} \right] \cdot M_C &= 0.\end{aligned}$$

(P7)

Úpravou poslední rovnice lze získat reakci M_C . Po dosazení této reakce do rovnice rovnováhy (P2) získáme druhou neznámou reakci M_A . Z vypočtených reakčních momentů lze pak vyjádřit hodnotu krouticího momentu $M_B = M_A - M_{k1}$ (druhý úsek tyče) a následně vypočítat napětí v řezu tyče B–B dle vztahu P1.

▲



Obsah

239 strana ze 449



Zavřít dokument

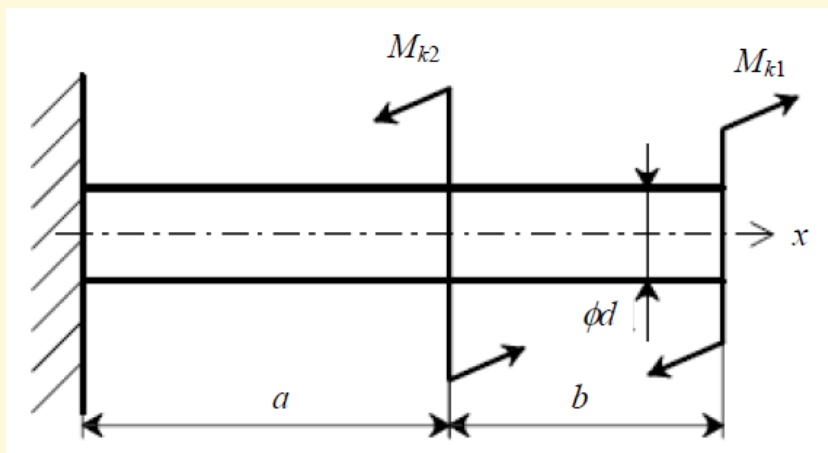
Konec

Celá obrazovka/Okno

Příklady k procvičení

1. Určete výsledné smykové napětí v jednotlivých úsecích tyče (obr. 7.8) o průměru d zatížené krouticími momenty M_{k1} a M_{k2} .

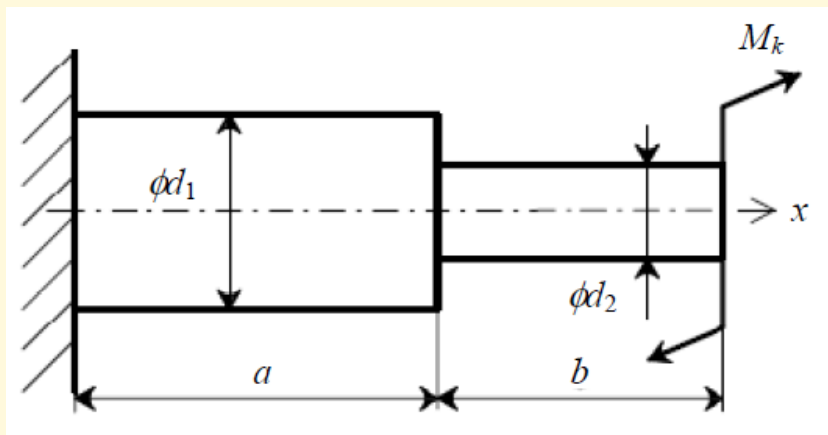
Dáno: $M_{k1} = 50 \text{ Nm}$, $M_{k2} = 20 \text{ Nm}$, $d = 20 \text{ mm}$, $a = 60 \text{ mm}$, $b = 80 \text{ mm}$, $G = 8,5 \cdot 10^4 \text{ MPa}$.



Obr. 7.8

2. Určete výsledné smykové napětí a úhel zkroucení na konci prutu (obr. 7.9), zatíženého krouticím momentem M_k .

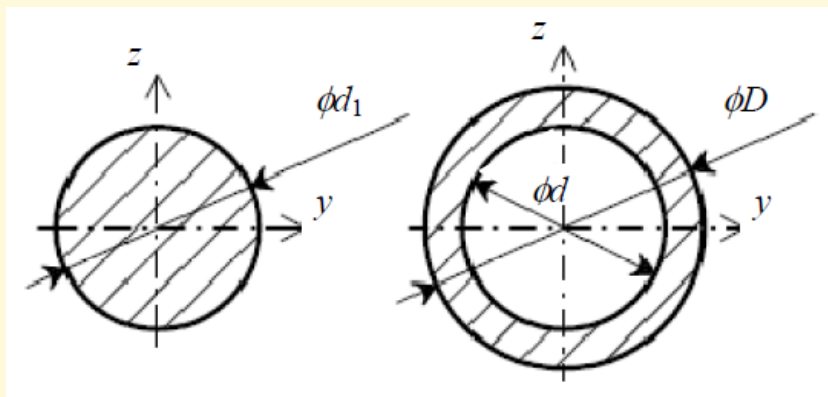
Dáno: $M_k = 80 \text{ Nm}$, $d_1 = 30 \text{ mm}$, $d_2 = 20 \text{ mm}$, $a = 600 \text{ mm}$, $b = 500 \text{ mm}$,
 $G = 8,5 \cdot 10^4 \text{ MPa}$.



Obr. 7.9

3. Porovnejte hmotnostní úsporu materiálu plného hřídele (m_1) o průměru d_1 a dutého hřídele (m_2) dle obr. 7.10 stejné délky a ze stejného materiálu. Obě hřídele přenáší stejný krouticí moment M_k . U dutého hřídele je vztah mezi vnějším a vnitřním průměrem $d = 0,6 \cdot D$.

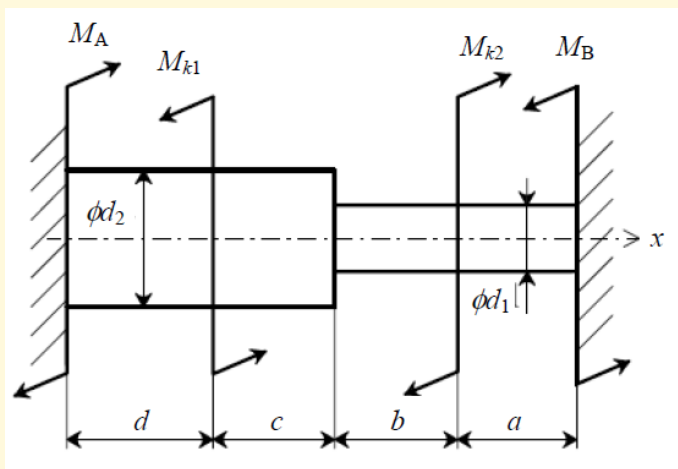
Dáno: $M_k = 40 \text{ Nm}$, $\tau_{DK} = 80 \text{ MPa}$.



Obr. 7.10

4. Stanovte maximální smykové napětí τ_{max} u oboustranně vetknutého čepu dle obr. 7.11

Dáno: $M_{k1} = 1000 \text{ Nm}$, $M_{k2} = 500 \text{ Nm}$, $d_1 = 35 \text{ mm}$, $d_2 = 50 \text{ mm}$, $a = b = 30 \text{ mm}$, $c = d = 25 \text{ mm}$.



Obr. 7.11

Klíč k příkladům k procvičení

1. $\tau_K(a) = 19,1 \text{ MPa}$, $\tau_K(b) = 31,83 \text{ MPa}$
2. $\tau_K = 15,1 \text{ MPa}$, $\varphi = 0,013 \text{ rad}$
3. $m_1 = 1,35 \cdot m_2$
4. $\tau_{max} = 34,7 \text{ MPa}$

Pojmy k zapamatování

- smykové napětí τ_k pro kruhový (mezikruhový) průřez
- úhel zkroucení φ dvou rovnoběžných průřezů
- úhel zkosení (zkos) γ
- poměrný úhel zkroucení
- řešení staticky neurčité úlohy
- polární kvadratický moment průřezu
- modul průřezu v krutu



Obsah

244. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

7.5.1. Interaktivní test

Následující test byl vytvořen pomocí balíčku **acrotex**. Test zahájíte kliknutím na tlačítko „Zacátek testu“. U otázek, kde lze volit jen jednu odpověď (test nedovolí zaškrtnout více odpovědí), je správná odpověď bodována takovým počtem bodů, jaký je uveden v závorce u zadání a špatná odpověď je bodována 0 body. U otázek, kde lze volit více správných odpovědí, je součet bodů správných odpovědí uveden v závorce u zadání a za každou špatnou odpověď bude odečten jeden bod.

1. (2b.) Jak je definován Hookeův zákon pro smyk?

$$\tau = \frac{G}{\gamma}$$

$$\tau = G\gamma$$

$$\tau = \frac{\gamma}{G}$$

$$\tau = \frac{l}{G\gamma}$$



Obsah

245. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

2. (2b.) Jak je definován vztah pro výpočet maximálního smykového napětí pro tyč, namáhanou krutem?

$$\tau_k = \frac{M_k}{W_k}$$

$$\tau_k = \frac{M_k}{I_p}$$

$$\tau_k = \frac{M_k \cdot L}{G \cdot I_p}$$

3. (2b.) Jak je definován vztah pro výpočet modulu průřezu v krutu plného kruhového průřezu?

$$W_k = \frac{\pi d^3}{32}$$

$$W_k = \frac{\pi d^3}{16}$$

$$W_k = \frac{\pi d^4}{16}$$

4. (2b.) Jak je definován vztah pro výpočet úhlu zkroucení φ ?

$$\varphi = \frac{M_k \cdot L}{E \cdot W_k}$$

$$\varphi = \frac{M_k \cdot d}{G \cdot I_p}$$

$$\varphi = \frac{M_k \cdot L}{G \cdot I_p}$$



Obsah

246. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

5. (2b.) U hřídele kruhového (mezikruhového) průřezu je namáhaného kroucením minimální hodnota smykového napětí

ávisí na velikosti průměru hřídele

je v ose hřídele

je na vnějším průměru hřídele

6. (2b.) Poměrný úhel zkrutu se měří v

radiánech

rad/m, stupeň/m

stupních

7. (2b.) Smykové napětí při namáhání krutem je přímo úměrné

modulu pružnosti v tahu a úhlu zkrutu

modulu pružnosti ve smyku a úhlu zkrutu

modulu pružnosti ve smyku a úhlu zkosu



Obsah

247. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

8. (2b.) Rozměr polárního momentu průřezu je

$$m^4$$

$$m^3$$

$$kg \cdot m^2$$

9. (2b.) Kterou veličinu používáme pro vyjádření deformační podmínky u kroucení?

poměrný úhel zkroucení

úhel zkroucení

zkos

10. (2b.) Který z předpokladů řešení úlohy kroucení prutů kruhového (mezikruhového) průřezu je uveden chybně?

průřezy zůstávají po deformaci rovinné

radiální paprsky zůstávají přímé

myšlený čtverec na povrchu přejde vlivem zatížení krouticím momentem na kosodélník

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:



Obsah

248. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Pro ukončení testu je třeba kliknout na tlačítko „Konec testu“. Opravení testu se provede kliknutím na tlačítko „Výsledky“, správné odpovědi budou označeny zeleně a červeně budou označeny odpovědi chybné. Při použití otázky s tvořenou odpovědí se správná odpověď zobrazí v rámečku umístěném vpravo dole v navigačním panelu po kliknutí na tlačítko „Odpověď“.

[Obsah](#)[249](#) strana ze 449[Zavřít dokument](#)[Konec](#)[Celá obrazovka/Okno](#)

Kapitola 8

Rovinný ohyb štíhlých nosníků

Průvodce studiem

Ohyb patří spolu s tahem–tlakem a krutem k základním typům namáhání. V následující kapitole se budeme zabývat rovinným ohybem, objasníme si vzájemné vztahy mezi ohybovým momentem a ohybovým napětím. Představíme si dva rozdílné přístupy pro určování průhybu nosníku v konkrétním místě a zmíníme se o dimenzování a pevnostní kontrole nosníků. Při studiu této kapitoly využijeme poznatků o kvadratických momentech průřezu a tahu–tlaku, se kterými jsme se setkali v kapitolách 1 a 6.

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete:

- umět stanovit vnitřní silové účinky dle Schwedlerovy věty
- schopni stanovit ohybové napětí v libovolném místě příčného průřezu nosníku
- umět provádět pevnostní kontroly a dimenzování nosníků, namáhaných ohybem
- schopni stanovit velikost průhybu a natočení v kterémkoliv místě ohýbaného nosníku
- umět řešit staticky neurčité nosníky



Obsah

250 strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

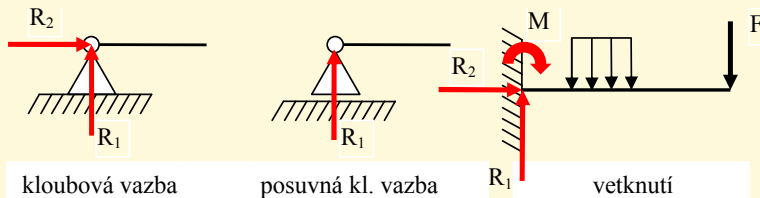
Celá obrazovka / Okno

8.1. Vymezení základních pojmů

Prut, namáhaný ohybem, se nazývá nosník. Ohybem je nosník namáhán tehdy, jestliže rovina všech působících sil a silových dvojic obsahuje podélnou osu nosníku.

Definice 8.1. Roviny, v nichž působí síly a momenty při ohybu nosníku, tvoří tedy svazek rovin, jejichž průsečnicí je podélná osa nosníku. Jestliže se z tohoto svazku rovin vyberou dvě roviny, obsahující vždy jednu z hlavních centrálních os průřezu přímého nosníku, pak se jedná o *rovinný ohyb*.

Na následujícím obrázku jsou znázorněny základní druhy podpor v rovině, které byly probírány již v mechanice tuhých těles a jsou zde připomenuty reakce, které se u těchto uložení zavádějí při uvolňování.



Obr. 8.1

Mluvíme o staticky určitých nosnících, pokud počet neznámých statických účinků odpovídá počtu rovnic rovnováhy a naopak o staticky neurčitých nosnících, pokud je počet neznámých statických účinků větší než počet rovnic rovnováhy.

V praxi se nejčastěji vyskytují prizmatické nosníky s jednou osou symetrie průřezu. Pokud všechny zátěžné účinky leží v rovině, tvořené osou symetrie průřezu a střednicí, pak střednice deformovaného nosníku leží v téže rovině, tzv. *rovině ohybu* a mluvíme o *rovinném ohybu*.

8.1.1. Vnitřní silové účinky

Při řešení vnitřních silových účinků využíváme metodu navrženou Leonardem Eulerem, konkrétně metodu řezu. Prutem vedeme kolmo k ose myšlený řez, který nám objekt rozdělí na levou a pravou část. Nyní si pravou část od řezu odmyslíme, a aby zůstala levá část v rovnováze, připojíme v těžišti řezu výslednici sil rovnoběžných s normálou řezu N , normálovou vnitřní sílu N , výslednici sil v rovině řezu respektive posouvající sílu T a výsledný ohybový moment M_o , tímto se vnitřní silové účinky stávají účinky vnějšími, přístupnými pro statické výpočty (viz obr. 8.2).

Zvládnutí metody řezu je zcela zásadní pro stanovení průhybu nosníků, jejich dimenzování i kontrolu. U zmíněných úloh často potřebujeme stanovit průběh ohybového momentu v jednotlivých intervalech ve formě analytických výrazů. Při výpočtech je nutné dodržovat znaménkovou dohodu (viz obr. 8.2).



Obsah

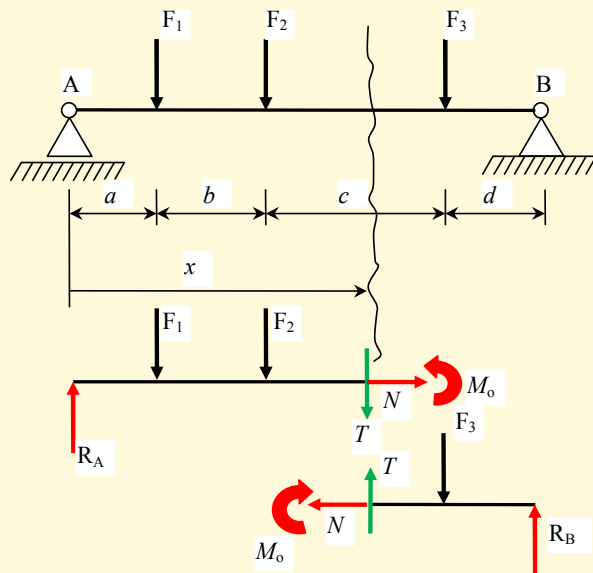
252. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno



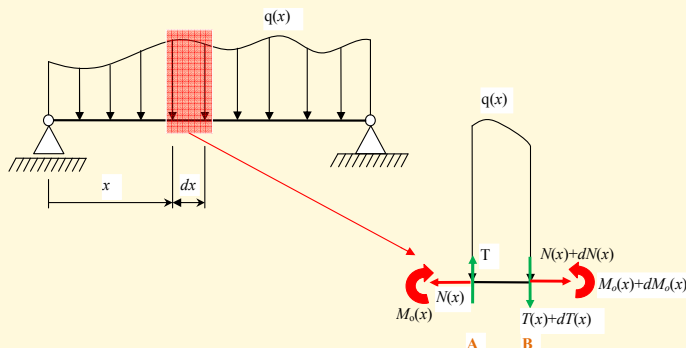
Obr. 8.2

Nyní můžeme vyjádřit vnitřní silové účinky s využitím podmínek rovnováhy (dvou silových a jedné momentové)

$$\begin{aligned}
 T(x) &= R_A - F_1 - F_2, \\
 M_o(x) &= R_A \cdot x - F_1(x - a) - F_2(x - a - b), \\
 N(x) &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{8.1}$$

8.2. Schwedlerovy věty a stanovení průběhu vnitřních účinků

Základní vztah mezi zatížením a vnitřními silami je odvozen z podmínek rovnováhy na elementu nosníku (obr. 8.3).



Obr. 8.3

Sestavení podmínek rovnováhy na elementu nosníku:

V prvním kroku sestavíme podmínku rovnováhy sil ve směru osy y , tedy

$$\sum_i F_{iy} = 0 = T(x) - q(x) \cdot dx - (T(x) + dT(x)). \quad (8.2)$$

Úpravou získáme výraz vyjadřující vztah mezi hodnotou intenzity spojitého zatížení

a první derivací posouvající síly $T(x)$, která je obecně funkcí souřadnice x , nebo-li I. Schwedlerovu větu

$$q(x) = -\frac{dT(x)}{dx}. \quad (8.3)$$

Věta 8.2. I. Schwedlerova věta: *Intenzita spojitého zatížení se rovná záporně vzaté derivaci posouvající síly podle diferenciálu střednice.*

Ve druhém kroku sestavíme rovněž rovnici rovnováhy, nyní však momentovou

$$\sum_i M_{iB} = 0 = T(x) \cdot dx + M_o(x) - q(x) \cdot dx \cdot \frac{dx}{2} - (M_o(x) + dM_o(x)). \quad (8.4)$$

Sečtením příslušných výrazů a úpravou (hodnotu výrazu $dx \cdot \frac{dx}{2}$ můžeme zanedbat) obdržíme II. Schwedlerovu větu

$$T(x) = \frac{dM_o(x)}{dx}. \quad (8.5)$$

Věta 8.3. II. Schwedlerova věta: *Posouvající síla se rovná derivaci ohybového momentu podle diferenciálu střednice.*

II. Schwedlerova věta nám mimo jiné určuje místo s maximálním ohybovým momentem. Jinými slovy, v místě, kde je posouvající síla nulová, nebo dochází ke změně jejího znaménka, se nachází extrém ohybového momentu. Poloha extrému u funkce jedné proměnné $f(x)$ je dána podmínkou

$$\frac{df(x)}{dx} = 0. \quad (8.6)$$



Obsah

255. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Z rovnic (8.3) a (8.6) plyne zajímavý důsledek: existence místa u nosníku, v němž působí jen ohybový moment a nikoli posouvající síla; v takovém případě je $M_o = \text{konst.}$, $T = 0$ (čistý nebo prostý ohyb). Neexistuje však nosník, v němž by působila jen posouvající síla a nikoli ohybový moment. Je-li totiž $M_o = 0$, je podle (8.6) též $T = 0$.

8.2.1. Stanovení průběhu vnitřních silových účinků metodou řezu

Při určování vnitřních silových účinků v jednotlivých průřezech nosníku postupujeme následujícím způsobem:

1. Posouzení statické určitosti nosníku.
2. Výpočet reakcí z podmínky rovnováhy.
3. Rozdělení střednice nosníku na jednotlivé intervaly (okraje intervalů tvoří osamělé síly, momenty silové dvojice, podpory či hranice spojitého zatížení).
4. Vyjádření vnitřních silových účinků v intervalech jako funkce souřadnice x .
5. Nalezení bodů, ve kterých je posouvající síla nulová nebo mění znaménko.
6. Výpočet extrému ohybového momentu v těchto bodech.
7. Vykreslení průběhu jednotlivých vnitřních silových účinků



Obsah

256. strana ze 449

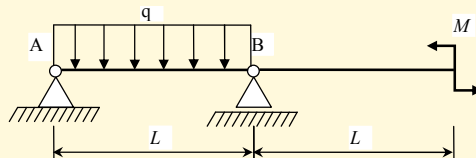


Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

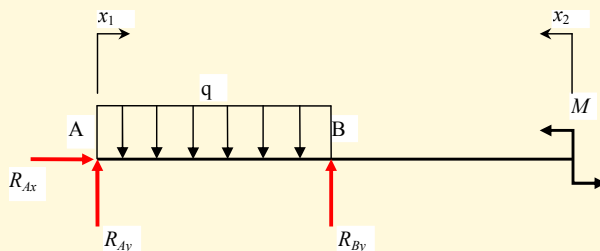
Příklad 8.4. Určete průběh vnitřních silových účinků ($T(x)$ a $M_o(x)$) na následujícím nosníku (obr. 8.4). Dáno: $M = 50 \text{ Nm}$, $q = 200 \text{ kN/m}$, $L = 1 \text{ m}$.



Obr. 8.4

Ad 1: Posouzení statické určitosti nosníku.

Námi vyšetřovaný nosník má celkem 3 neznámé reakce (obr. 8.5), jejichž počet se shoduje s počtem nezávislých rovnic rovnováhy v rovině. Nosník je tedy staticky určitý.



Obr. 8.5



Ad 2: Výpočet reakcí z podmínek rovnováhy.

$$\begin{aligned}\sum F_{ix} = 0 &= R_{Ax}, \\ \sum F_{iy} = 0 &= R_{Ay} - q \cdot L + R_{By}, \\ \sum M_{iB} = 0 &= R_{Ay} \cdot L - \frac{1}{2} \cdot q \cdot L^2 - M.\end{aligned}$$

(P1)

Po úpravě a dosazení dostáváme: $R_{Ay} = 150 \text{ N}$, $R_{By} = 50 \text{ N}$, $R_{Ax} = 0 \text{ N}$.

Ad 3: Rozdělení střednice nosníku na jednotlivé intervaly.

Interval x_1	Interval x_2
$0 \leq x_1 \leq L$	$0 \leq x_2 \leq L$
$T(x_1) = R_{Ay} - q \cdot x_1$	$T(x_2 = 0)$
$M_o(x_1) = R_{Ay} \cdot x_1 - q \cdot \frac{x_1^2}{2}$	$M_o(x_2) = M$

(P2)

Ad5: Nalezení bodů, ve kterých je posouvající síla nulová nebo mění znaménko.

Vydeme ze vztahu pro $T(x_1)$ a položíme jej nule. Odtud vyjde $x_1 = 0,75 \text{ m}$.

Obsah

258 strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Ad6: Výpočet extrému ohybového momentu v těchto bodech

$$M_{MAX} = M_o(x_1 = 0,75) = 66,25 \text{ Nm}.$$

(P3)

Ad7: Vykreslení průběhu jednotlivých vnitřních silových účinků.

Nejprve je vhodné vypočítat hodnoty $T(x)$ a $M_o(x)$ na okrajích intervalů, tedy

$$\begin{aligned} T(x_1 = 0) &= R_{Ay} = 150 \text{ N}, \\ T(x_1 = L) &= R_{Ay} - q \cdot L = -50 \text{ N}, \\ M_o(x_2 = 0) &= 0 \text{ N}, \\ M_o(x_2 = L) &= R_{Ay} \cdot L - \frac{q}{2}L^2 = 50 \text{ Nm}. \end{aligned}$$

(P4)

Jelikož dle (P2) je $T(x_1)$ lineární funkcí, průběh posouvající síly odpovídá přímce. Podobně v prvním intervalu bude průběh ohybového momentu znázorněn parabolou, neboť $M_o(x_1)$ je funkcí kvadratickou, viz obr. 8.6. V druhém intervalu je situace jednodušší.



Obsah

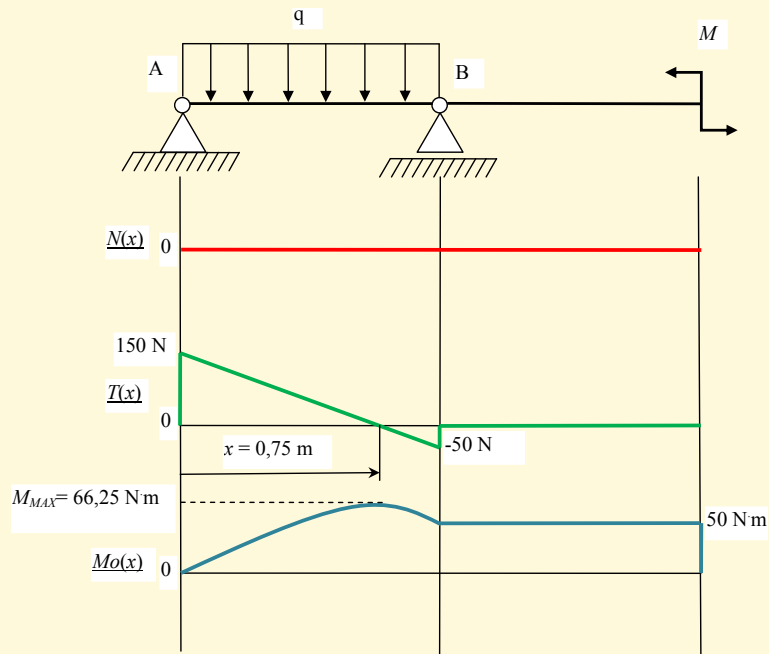
259 strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno



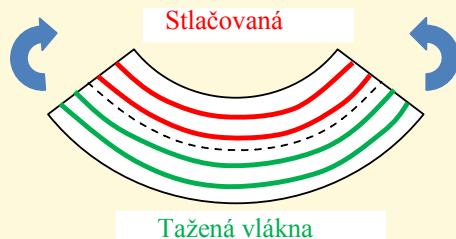
Obr. 8.6

8.3. Výpočet napětí

Předpoklady řešení:

1. Příčné průřezy zůstávají i po deformaci rovinné, nebortí se, dojde pouze k jejich natočení o určitý úhel. (Bernoulliho hypotéza).
2. Je-li nosník namáhán kladným ohybovým momentem, pak horní vlákna jsou stlačována a spodní jsou natahována, tyto deformace probíhají spojitě po ploše průřezu, takže existuje vrstva vláken, kde přechází tahová deformace v tlakovou. V této tzv. *neutrální vrstvě* jsou vlákna s nulovým prodloužením. Stopa neutrální vrstvy v rovině průřezu se nazývá *neutrální osa*.
3. Deformace vláken nezávisí na jejich šířce a průřezu.

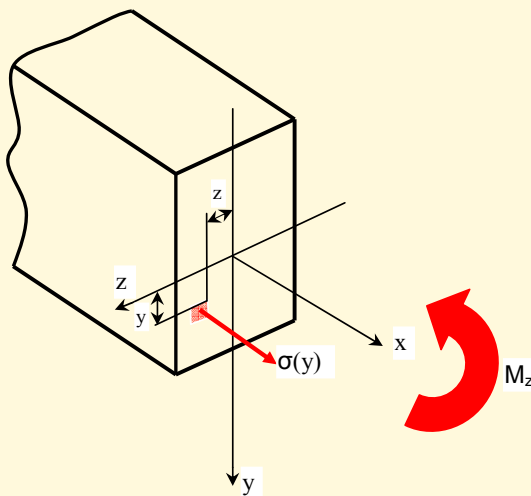
Mějme nosník, namáhaný kladným ohybovým momentem (viz obr. 8.7). Analyzujeme nyní jeho příčný průřez.



Obr. 8.7

Sestavíme-li silovou podmínku rovnováhy v ose x (viz obr. 8.8), platí

$$\sum_i F_{ix} = 0 = \int_{(S)} \sigma(y) dS. \quad (8.7)$$



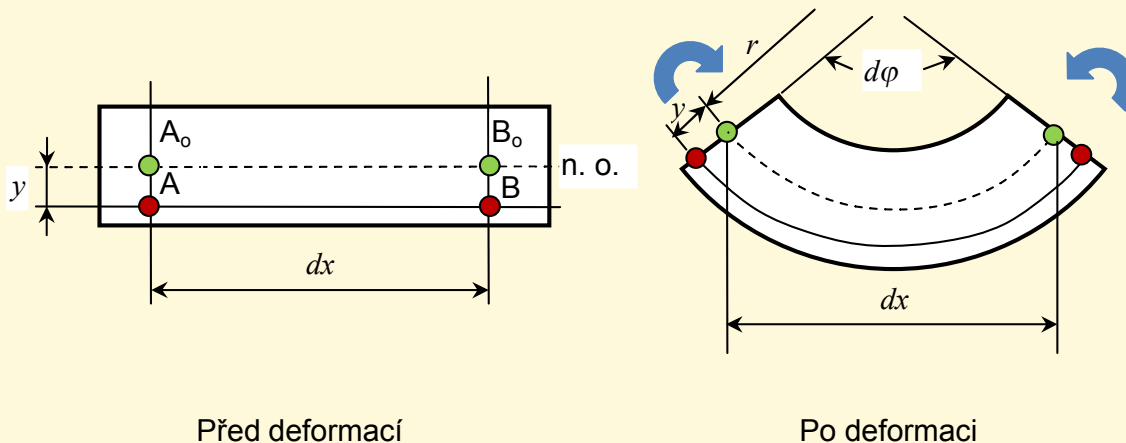
Obr. 8.8

Pro moment M_z lze psát podmínku ekvivalence (viz obr. 8.8) ve tvaru

$$M_z = \int_{(S)} y \cdot \sigma(y) dS. \quad (8.8)$$

8.3.1. Geometrické podmínky deformace

Uvažujme element nosníku, namáhaného prostým ohybem dle obr. 8.9 s poloměrem křivosti neutrální vrstvy r .



Obr. 8.9

Budeme nyní analyzovat stav deformace zatíženého nosníku. Původní délka vlákna AB je dx . Po zatížení bude platit

$$AB = (r + y) \cdot d\varphi, \quad (8.9)$$

$$A_0B_0 = r \cdot d\varphi. \quad (8.10)$$

Poměrné prodloužení vlákna ve vzdálenosti y od neutrální osy určíme dle následujícího vztahu

$$\varepsilon(y) = \frac{AB - A_0B_0}{A_0B_0} = \frac{(r + y) \cdot d\varphi - r \cdot d\varphi}{r \cdot d\varphi} = \frac{y}{r}. \quad (8.11)$$

Pro napětí $\sigma(y)$ uvažujme platnost Hookeova zákona (je zde jednoosá napjatost)

$$\sigma(y) = \varepsilon(y) \cdot E. \quad (8.12)$$

Po dosazení za $\varepsilon(y)$ z (8.11) dostáváme

$$\sigma(y) = \frac{y}{r} \cdot E. \quad (8.13)$$

Je evidentní, že normálové napětí $\sigma(y)$ závisí na souřadnici y lineárně. Dosadíme-li nyní (8.13) do rovnice momentové rovnováhy (8.8) získáme

$$\frac{E}{r} \cdot \int_S y^2 dS = M_z, \quad (8.14)$$



Obsah

264. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

kde

$$\int_S y^2 dS = I_z. \quad (8.15)$$

Výraz (8.15) nám představuje kvadratický moment průřezu I_z vzhledem k neutrální ose průřezu nosníku. Ze vztahu (8.14) můžeme rovněž vyjádřit křivost

$$\frac{1}{r} = \frac{M_z}{E \cdot I_z}, \quad (8.16)$$

kteřou využijeme pro finální vyjádření napětí z rovnice (8.13)

$$\sigma(y) = \frac{M_z}{I_z} \cdot y, \quad (8.17)$$

kde M_z je ohybový moment vzhledem k vyšetřovanému průřezu, I_z je centrální kvadratický moment průřezu k ose z a y je vzdálenost vyšetřovaného místa od neutrální osy.



Obsah

265. strana ze 449

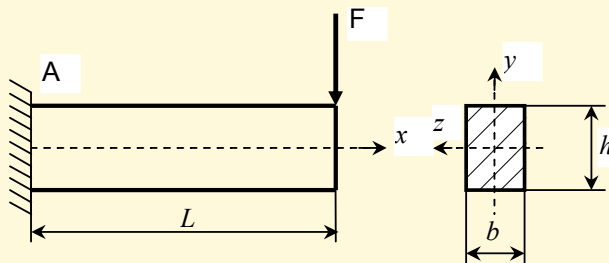


Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Příklad 8.5. Určete napětí v místě vetknutí nosníku A. Dáno: $b = 10 \text{ mm}$, $h = 20 \text{ mm}$, $L = 300 \text{ mm}$, $F = 200 \text{ N}$, $E = 210000 \text{ MPa}$.



Obr. 8.10

Řešení:

1. Výpočet kvadratického momentu průřezu

$$I_z = \frac{1}{12} b \cdot h^3 = 6666,6 \text{ mm}^4.$$

(P1)

2. Určení ohybového momentu v místě A

$$M_z = F \cdot L = 60000 \text{ Nmm}.$$

(P2)



Obsah

266. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

3. Výpočet ohybového napětí v místě A

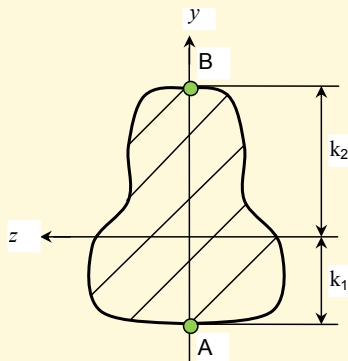
$$\sigma(y = 10 \text{ mm}) = \frac{M_z}{I_z} \cdot y = 90 \text{ MPa},$$

(P3)

kde y určuje vzdálenost od neutrální osy, v našem případě $y = h/2 = 10 \text{ mm}$. V místě A jsou vlákna namáhána tahovým napětím o velikosti 90 MPa . ▲

8.4. Pevnostní kontrola a dimenzování

Mějme nosník o průřezu se svislou osou symetrie dle obr. 8.11.



Obr. 8.11



Obsah

267. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Hodnoty k_1 , k_2 nám udávají vzdálenosti krajních vláken od těžiště, resp. neutrální osy, která jím prochází. Pro body průřezu, odpovídající krajním vláknům, poté s využitím 8.17 platí

$$\begin{aligned}\sigma(y) &= \frac{M_z}{I_z} \cdot k_1 = \frac{M_z}{W_{o1}}, \\ \sigma(y) &= \frac{M_z}{I_z} \cdot k_2 = \frac{M_z}{W_{o2}},\end{aligned}\tag{8.18}$$

kde W_{o1} , W_{o2} vyjadřují tzv. moduly průřezu v ohybu. Při pevnostní kontrole postupujeme následovně:

1. Výpočet reakcí.
2. Nalezení bodů, ve kterých je posouvající síla nulová, nebo mění znaménko (viz kapitola 8.2.1).
3. Výpočet extrému ohybového momentu v těchto bodech a vyhodnocení globálního extrému v průběhu ohybového momentu.
4. Určení maximální vzdálenosti krajních vláken průřezu od neutrální osy.
5. Výpočet ohybového napětí pro tato vlákna v místě maximálního ohybového momentu.
6. Porovnání vypočteného napětí s napětím dovoleným, musí platit

$$\sigma_{\text{vypočtené}} \leq \sigma_{\text{dovolené}}.$$



Obsah

268. strana ze 449



Zavřít dokument

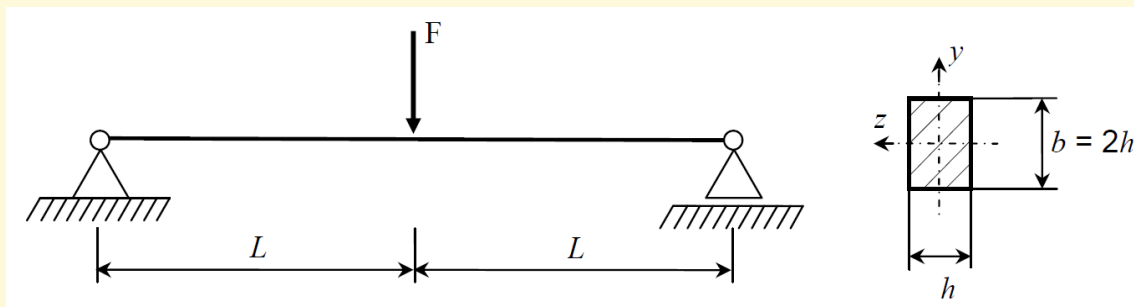
Konec

Celá obrazovka / Okno

U dimenzování nosníku postupujeme prakticky stejným způsobem jako v případě pevnostní kontroly; v posledním kroku však z podmínky $\sigma_{\text{vypočtené}} \leq \sigma_{\text{dovolené}}$ určíme charakteristický rozměr daného průřezu. Předvedme si nyní nastíněný postup na jednoduchém příkladu.

Příklad 8.6. Mějme nosník obdélníkového průřezu, uchycený kloubovou vazbou na jedné straně a posuvnou kloubovou vazbou na straně druhé (obr. 8.12). Nosník je v polovině své délky namáhán silou F . Úkolem je určit rozměr h tak, aby maximální ohybové napětí v nejvíce namáhaných vláknech nepřesáhlo dovolenou hodnotu napětí.

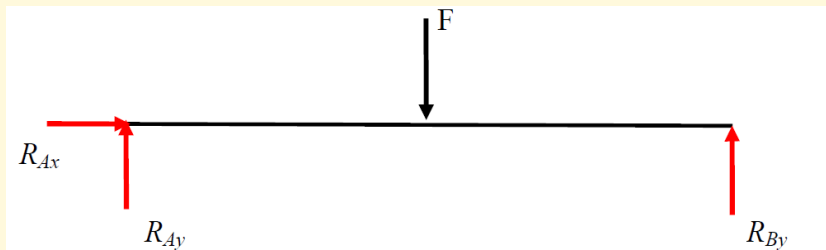
Dáno: F , L , $\sigma_{\text{dovolené}}$.



Obr. 8.12

Řešení:

1. Určení reakcí



Obr. 8.13

$$\begin{aligned}\sum_i F_{ix} &= 0 = R_{Ax}, \\ \sum_i F_{iy} &= 0 = R_{Ay} + R_{By} - F, \\ \sum_i M_{iA} &= 0 = F \cdot \frac{L}{2} - R_{By} \cdot L.\end{aligned}$$

(P1)



Obsah

270. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

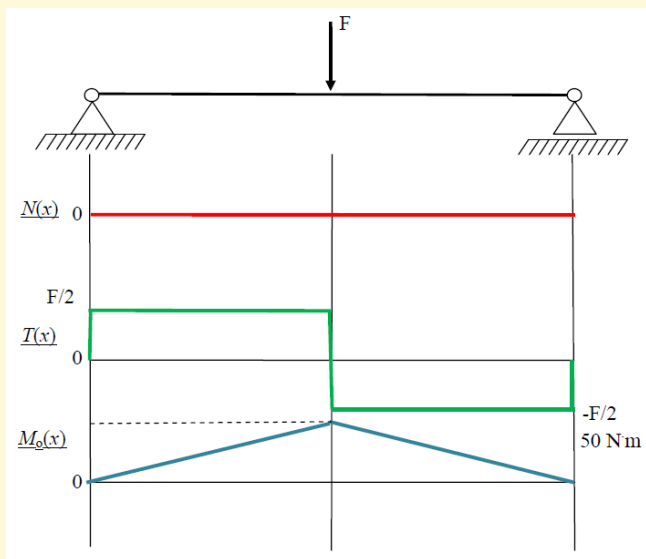
Celá obrazovka/Okno

Řešením rovnic (P1) získáme velikost reakcí

$$R_{Ay} = R_{By} = \frac{F}{2}.$$

(P2)

2. Průběh vnitřních silových účinků.



Obr. 8.14

3. Výpočet maximálního napětí v krajních vláknech nejvíce namáhaného místa

$$\sigma_{max} = \frac{M_z}{I_z} \cdot y,$$

(P3)

kde

$$\begin{aligned} M_z &= \frac{F}{2} \cdot L, \\ I_z &= \frac{1}{12} \cdot h \cdot b^3 = \frac{1}{12} \cdot h \cdot (2 \cdot h)^3 = \frac{2}{3} \cdot h^4, \\ y &= h. \end{aligned}$$

(P4)

Po dosazení do první rovnice v (P3) a úpravě

$$\sigma_{max} = \frac{3 \cdot F \cdot L}{4 \cdot h^3}.$$

(P5)

Z podmínky $\sigma_{\text{vypočtené}} \leq \sigma_{\text{dovolené}}$ můžeme vyjádřit

$$h \geq \sqrt[3]{\frac{3 \cdot F \cdot L}{4 \cdot \sigma_{dov}}}.$$

(P6)



Obsah

272. strana ze 449



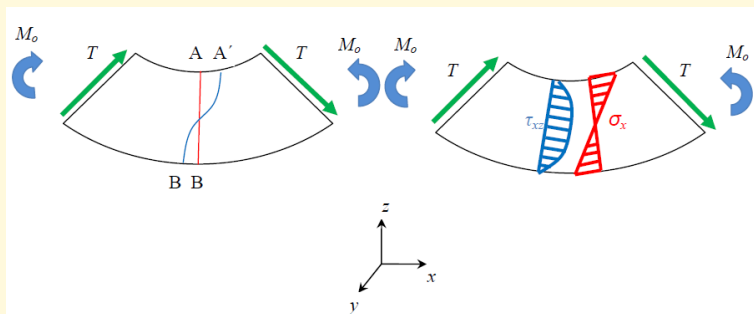
Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

8.5. Zahrnutí dalších vlivů do výpočtu

V kapitole 8.3 jsme mimo jiné předpokládali, že v nosníku působí jen konstantní ohybový moment. Ve skutečnosti jsou mnohem častější případy, kdy v nosníku působí kromě samotného ohybového momentu též posouvající síla. Ta vyvoluje v průřezu smyková napětí τ_{xz} , která mají v případě obdélníkového průřezu parabolický průběh na rozdíl od ohybového napětí (obr. 8.15).



Obr. 8.15

Místo rovinných průřezů AB podle Bernoulliho hypotézy dostaneme zakřivené plochy A'B'. Bernoulliho hypotéza proto neplatí, ani podélná vlákna se nedeformují nezávisle; jejich vzájemné působení představuje právě tečné napětí τ_{xz} .

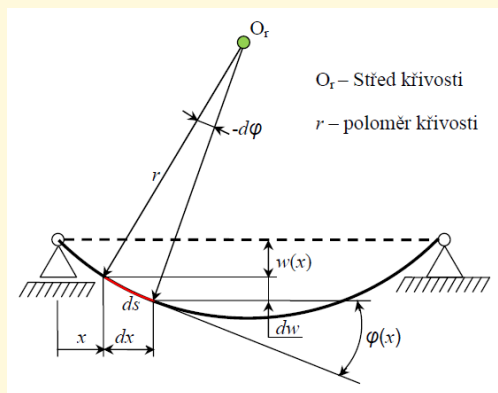
Za určitých předpokladů se dají pro různé průřezy prutů jednoznačně vyčíslit smyková napětí v libovolném místě od posouvající síly, včetně výsledné smykové síly, jež je staticky ekvivalentní posouvající síle. Má-li průřez dvě osy symetrie, prochází výsledná síla těžištěm.

Jinak tomu je však u nesymetrických průřezů. Pokud rovina zatížení není rovinou symetrie prutu, výslednice smykových sil se protínají v tzv. *středu smyku*. Prochází-li rovina zatížení střediskem smyku, nebude docházet ke kroucení.

Odvození polohy středu smyku u obecného průřezu je součástí teorie kroucení tenkostěnných prutů otevřeného průřezu. V případě, že vnější síly nepůsobí v rovině symetrie průřezu, jedná se o ohyb prostorový, který se řeší superpozicí dvou případů rovinného ohybu. Tyto úlohy spadají do navazujících kurzů pružnosti a pevnosti.

8.6. Diferenciální rovnice průhybové čáry

Pro odvození diferenciální rovnice průhybové čáry vyjdeme z obr. 8.16.



Obr. 8.16

Platí

$$ds = r \cdot (-d\varphi), \quad (8.19)$$

$$\frac{1}{r} = -\frac{d\varphi}{ds}. \quad (8.20)$$

Dále

$$\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{dw}{dx} = w', \text{ odtud } \varphi = \operatorname{arctg}(w'). \quad (8.21)$$

Připravme si následující výraz

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{dx} \cdot \frac{dx}{ds}. \quad (8.22)$$

S využitím 8.21 je $\frac{d\varphi}{dx}$ rovno $\frac{d}{dx} \cdot [\operatorname{arctg}(w')]$.

Pozn.: pro derivaci $\operatorname{arctg}(x)$ platí: $[\operatorname{arctg}(x)]' = 1/(1+x^2)$.

Výraz pro $\frac{d\varphi}{dx}$ poté bude

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{1+(w')^2} \cdot w''. \quad (8.23)$$



Obsah

275. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Dále lze z obr. 8.16 psát

$$ds = \sqrt{dx^2 + dw^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2} = dx \sqrt{1 + (w')^2}, \quad (8.24)$$

odkud

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + (w')^2}}. \quad (8.25)$$

Dosazením vztahů (8.23) a (8.25) do vztahu (8.22) dostáváme

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{w''}{1 + (w')^2} \cdot \frac{1}{[1 + (w')^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (8.26)$$

nebo-li

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{w''}{[1 + (w')^2]^{\frac{3}{2}}}. \quad (8.27)$$

Prostřednictvím vztahu (8.27) můžeme rovněž vyjádřit křivost z výrazu (8.20), tedy

$$\frac{1}{r} = -\frac{w''}{[1 + (w')^2]^{\frac{3}{2}}}. \quad (8.28)$$

V kapitole 8.3.1 jsme si odvodili vztah pro křivost v následujícím tvaru

$$\frac{1}{r} = \frac{M_z}{E \cdot I_z}. \quad (8.29)$$



Obsah

276. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Srovnáním s (8.28) pak

$$\frac{w''}{[1 + (w')^2]^{\frac{3}{2}}} = -\frac{M_z}{E \cdot I_z}. \quad (8.30)$$

Pro malé úhly natočení můžeme uvažovat:

1. Teorie malých deformací vede k malým průhybům. Při nízkých hodnotách průhybu (podle norem 1/100 až 1/1000) se ukazuje, že úhel pootočení je menší než 1° . Tangenta tak malého úhlu je poté rovna samotnému úhlu φ_x , tedy

$$\frac{dw}{dx} = w' = \operatorname{tg}(\varphi) \approx \varphi. \quad (8.31)$$

2. Pro malý úhel natočení lze pak ve jmenovateli zanedbat člen $(w')^2$ oproti jedničce.

Získali jsme přibližnou diferenciální rovnici průhybové čáry ve tvaru

$$w'' = -\frac{M_z}{E \cdot I_z}, \quad (8.32)$$

je však nutné, abychom se věnovali znaménkové konvenci. Rovnice (8.32) je platná, jestliže je dodržena znaménková dohoda pro určování průběhu ohybového momentu.



Obsah

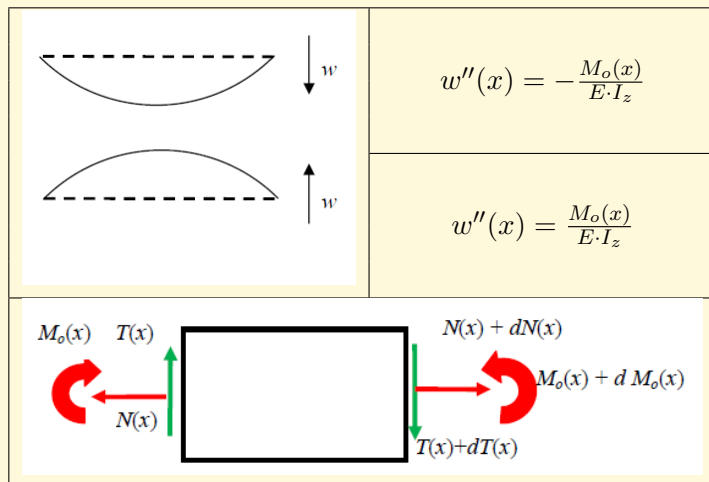
277. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno



8.7. Analytická metoda

Princip analytické metody spočívá v integraci přibližné diferenciální rovnice průhybové čáry (8.32). První integrací rovnice (8.32) získáme vztah pro úhel natočení

$$\varphi(x) = w'(x) = - \int_L \frac{M_o(x)}{E \cdot I_z} dx + C_1. \quad (8.33)$$

Opětovnou integrací získáme rovnici průhybové čáry

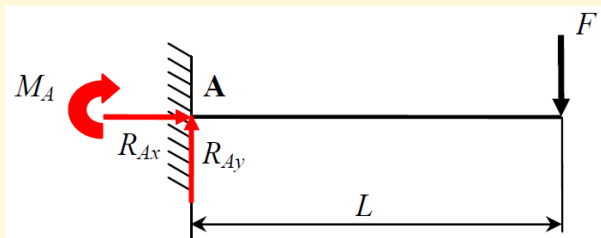
$$w(x) = \int_L \left[- \int_L \frac{M_o(x)}{E \cdot I_z} dx \right] dx + C_1 \cdot x + C_2. \quad (8.34)$$

Integrační konstanty C_1 , C_2 určíme z okrajových podmínek konkrétní úlohy.

Aplikaci analytické metody si předvedeme na následujícím jednoduchém příkladu.

Příklad 8.7. Mějme nosník na jedné straně vetknutý, zatížený osamělou silou F na straně druhé (obr. 8.17). Určete rovnici průhybové čáry.

Dáno: F , L , E , I_y .



Obr. 8.17

Řešení:

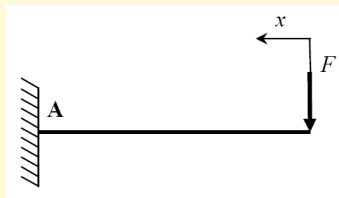
1. Výpočet reakcí

$$\begin{aligned}\sum_i F_{ix} &= 0 = R_{Ax}, \\ \sum_i F_{iy} &= 0 = R_{Ay} - F, \text{ odtud } R_{Ay} = F, \\ \sum_i M_{iA} &= 0 = M_A + F \cdot L, \text{ odtud } M_A = -F \cdot L.\end{aligned}$$

(P1)

Jestliže zavedeme souřadnici, potřebnou pro stanovení průběhu ohybového momentu zprava, není potřeba určovat reakce, což platí obecně pro staticky určitý vetknutý nosník.

2. Určení rovnice průhybové čáry.



Obr. 8.18



Obsah

280. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Pro průběh ohybového momentu platí

$$M(x) = -F \cdot x.$$

(P2)

Po dosazení do (8.32) a integraci

$$w'(x) = -\frac{1}{E \cdot I_z} \cdot \int_L -F \cdot x \cdot dx$$

(P3)

nebo-li

$$w'(x) = \frac{1}{E \cdot I_z} \cdot \left(\frac{F \cdot x^2}{2} + C_1 \right) = \varphi(x).$$

(P4)

Opětovnou integrací získáme

$$w(x) = \frac{1}{E \cdot I_z} \cdot \left(\frac{F \cdot x^3}{6} + C_1 \cdot x + C_2 \right).$$

(P5)



Obsah

281. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Integrační konstanty určíme z následujících okrajových podmínek

$$\begin{aligned}w(x = L) &= 0, \\w'(x = L) &= \varphi(x = L) = 0.\end{aligned}$$

(P6)

Po dosazení do (P4) a (P5) je

$$C_1 = -\frac{F \cdot L^2}{2}, \quad C_2 = \frac{F \cdot L^3}{3}.$$

(P7)

Rovnice průhybové čáry má poté konečný tvar

$$w(x) = \frac{1}{E \cdot I_z} \cdot \left(\frac{F \cdot x^3}{6} - \frac{F \cdot L^2}{2} \cdot x + \frac{F \cdot L^3}{3} \right).$$

(P8)



Obsah

282. strana ze 449



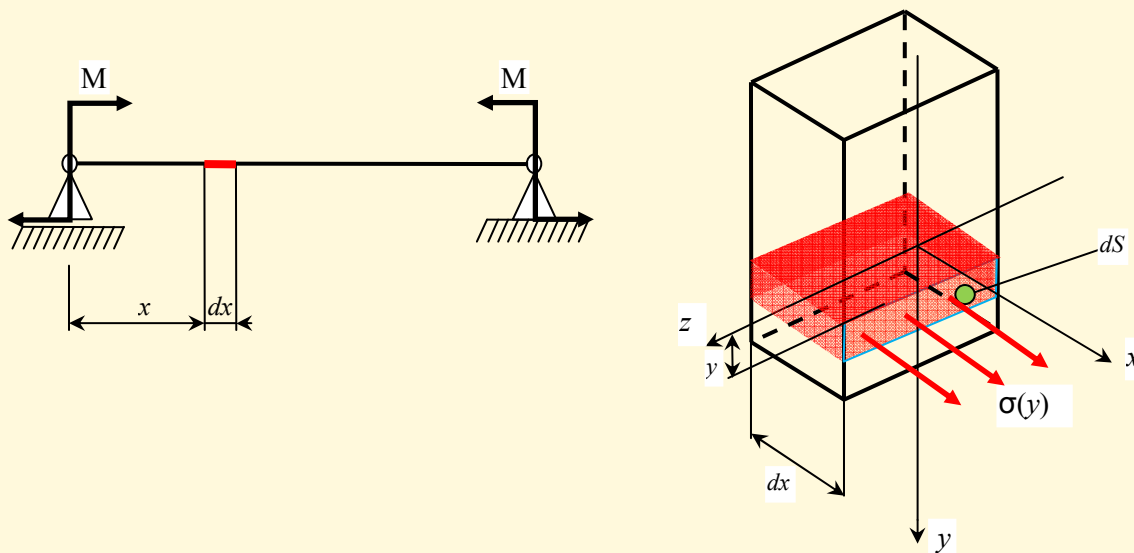
Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

8.8. Využití Castigliánovy věty

Podobně jako u tahu–tlaku (kapitola 6.4) budeme pro aplikaci Castigliánovy věty potřebovat vztah pro deformační energii. Mějme nosník, namáhaný prostým ohybem (obr. 8.19).



Obr. 8.19

Pro deformační energii platí

$$dU = \int_V U_0 \cdot dV, \quad (8.35)$$

kde U_0 vyjadřuje hustotu deformační energie. Pro jednoosý napěťový stav platí (viz kapitola 6)

$$U_0 = \frac{\sigma^2}{2 \cdot E}.$$

Po dosazení do rovnice (8.37) dostáváme

$$dU = \int_S \int_L \frac{\sigma^2(z)}{2 \cdot E} \cdot dS \cdot dx, \quad (8.36)$$

$$dU = \int_L \frac{M^2(x)}{2 \cdot E \cdot I_z} \cdot dx. \quad (8.37)$$

Nyní použijeme vztah pro průběh normálového napětí $\sigma^2(z)$ po průřezu (8.17) a po následné integraci obdržíme

$$U = \frac{M^2(x) \cdot L}{2 \cdot E \cdot I_z}. \quad (8.38)$$

Nyní již můžeme dosadit do Castigliánovy věty (5.31), přičemž posuv ve směru působící síly v tomto případě odpovídá průhybu

$$w_k = \frac{\partial U}{\partial F_k}. \quad (8.39)$$



Obsah

284. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno



Definice 8.8. Pokud lze celkou deformační energii U nosníku vyjádřit v závislosti na vnějším zatížení, pak její parciální derivace dle vnější síly F_i , dává hodnotu průhybu w_i v bodě i (tj. v místě působivosti síly F_i). Kladná hodnota posunutí u_i je ve směru síly F_i .

Obdobně lze vyjádřit úhel natočení z druhé Castigliánovy věty.

Definice 8.9. Pokud lze celkou deformační energii U nosníku vyjádřit v závislosti na vnějším zatížení, pak její parciální derivace dle momentu silové dvojice M_{oi} , dává hodnotu úhlu natočení φ_i v bodě i (tj. v místě působivosti momentu M_{oi} , tedy

$$\varphi_j = \frac{\partial U}{\partial M_j}. \quad (8.40)$$

Kladná hodnota úhlu natočení φ_i odpovídá smyslu otáčení momentu M_{oi} .

Do vztahů 8.39 a 8.40 můžeme dosadit výraz pro deformační energii (8.37), poté

$$w_k = \frac{1}{E \cdot I_z} \int_L M(x) \cdot \frac{\partial M(x)}{\partial F_k} \cdot dx, \quad (8.41)$$

$$\varphi_j = \frac{1}{E \cdot I_z} \int_L M(x) \cdot \frac{\partial M(x)}{\partial M_k} \cdot dx. \quad (8.42)$$

Obsah

285. strana ze 449



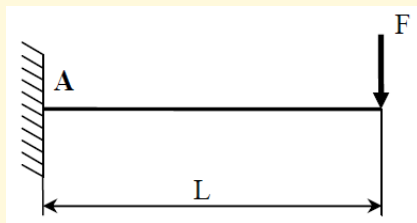
Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Příklad 8.10. Určete průhyb pod silou F .

Dáno: F , L , E , I_z .



Obr. 8.20

Řešení:

Na obr. 8.21 je znázorněn směr, jakým budeme postupovat při určení vztahu pro moment, který bude funkcí souřadnice x .



Obr. 8.21



Obsah

286. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Pro $x \in \langle 0; L \rangle$ platí

$$\begin{aligned}M(x) &= -F \cdot x, \\ \frac{\partial M}{\partial F} &= -x.\end{aligned}$$

(P1)

S využitím vztahu pro zobecněný posuv (8.41) pak

$$w_F = \frac{1}{E \cdot I_z} \cdot \int_L M(x) \cdot \frac{\partial M(x)}{\partial F} \cdot dx = \frac{1}{E \cdot I_z} \cdot \int_L -(F \cdot x) \cdot (-x) \cdot dx = \frac{F \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I_z}.$$

(P2)

Srovnajte s řešením příkladu 8.7.



Obsah

287. strana ze 449



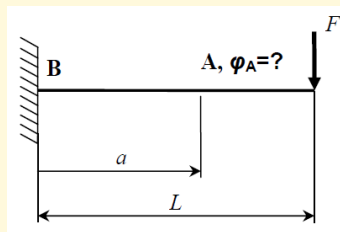
Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Příklad 8.11. Určete natočení ve vzdálenosti a od vetknutí u zadaného nosníku o délce L , zatíženého osamělou silou F (obr. 8.22).

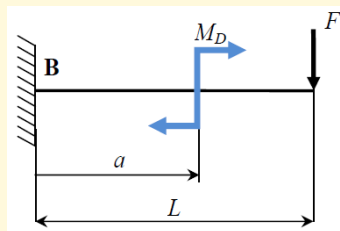
Dáno: F , L , a , E , I_z .



Obr. 8.22

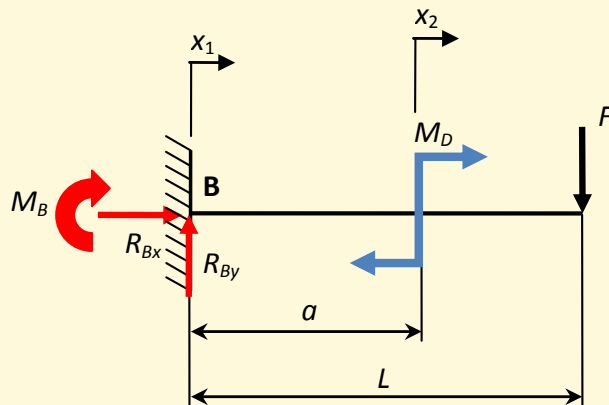
Řešení 1 - zavedení souřadnic ve směru od vetknutého konce nosníku (zleva):

- Zavedení fiktivního momentu $M_D = 0$ ve vzdálenosti a .



Obr. 8.23

- Sestavení rovnic rovnováhy, určení průběhu vnitřního ohybového momentu a výpočet jeho parciálních derivací v jednotlivých úsecích (intervalech) nosníku.



Obr. 8.24

Rovnice rovnováhy

$$\begin{aligned}\sum F_{xi} &= 0 = R_{Bx}, \\ \sum F_{yi} &= 0 = R_{By} - F, \\ \sum M_{Bi} &= 0 = F \cdot L + M_D + M_B.\end{aligned}$$

(P1)

Pro stanovení průběhu ohybového momentu využijeme metodu řezu. Rozdělíme nosník na intervaly a v nich vedeme myšlený řez v obecném místě, daném souřadnicí x_1 , respektive x_2 . Získáme průběhy ohybového momentu a jeho parciální derivace dle doplňkového momentu.

$$0 \leq x_1 \leq a$$

$$0 \leq x_2 \leq L - a$$

$$\begin{aligned} M(x_1) &= R_{By} \cdot x_1 + M_B = \\ &= R_{By} \cdot x_1 - F \cdot L - M_D \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(x_2) &= R_{By} \cdot (a + x_2) + M_B + M_D \\ &= R_{By} \cdot (a + x_2) + M_B + M_D - F \cdot L - \\ &\quad - M_D + M_D \end{aligned}$$

$$\frac{\partial M(x_1)}{\partial M_D} = -1$$

$$\frac{\partial M(x_2)}{\partial M_D} = 0$$

Pro natočení v místě A platí

$$\varphi_A = \frac{1}{E \cdot I_z} \cdot \left[\int_0^a M(x_1) \frac{\partial M(x_1)}{\partial M_D} dx_1 + \int_0^{L-a} M(x_2) \frac{\partial M(x_2)}{\partial M_D} dx_2 \right]. \quad (\text{P2})$$

Dosazením vztahů pro momenty a derivace, následným položením momentu M_D nule a integrací výrazu obdržíme

$$\varphi_A = \frac{F}{E \cdot I_z} \cdot a \cdot \left(L - \frac{a}{2} \right). \quad (\text{P3})$$



Obsah

290. strana ze 449



Zavřít dokument

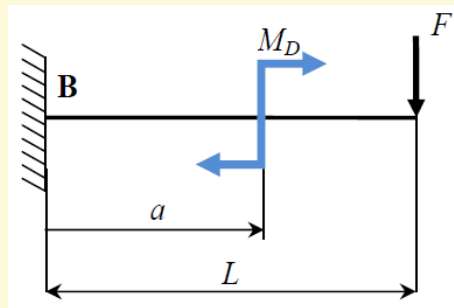
Konec

Celá obrazovka / Okno

Stupeň pracnosti řešení libovolného nosníku závisí také na vhodnosti volby souřadnic v jednotlivých úsecích. Například zavede-li se souřadnice v obou úsecích u řešeného příkladu 8.11 zprava, bude řešení výrazně snadnější. Dokonce se obejdeme i bez rovnic rovnováhy. U vetknutých nosníků je tedy výhodné zavést souřadnice v jednotlivých úsecích ve směru od volného konce!

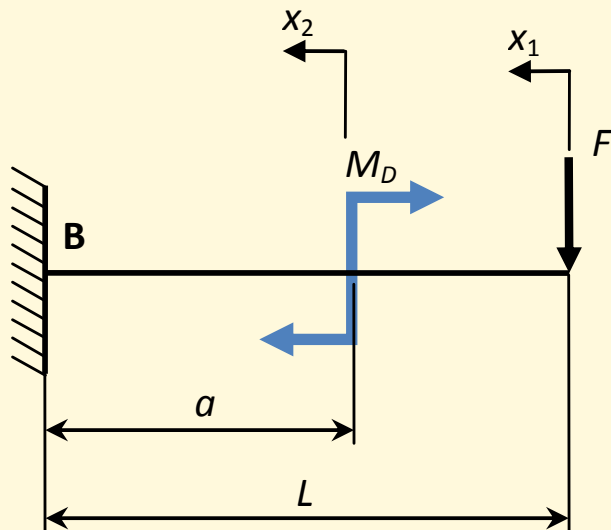
Řešení 2 - zavedení souřadnic ve směru od volného konce nosníku (zprava):

- Zavedení fiktivního momentu $M_D = 0$ ve vzdálenosti a .



Obr. 8.25

Pro stanovení průběhu ohybového momentu využijeme metodu řezu. Rozdělíme nosník na intervaly a v nich vedeme myšlený řez v obecném místě, daném souřadnicí x_1 , respektive x_2 .



Obr. 8.26

Získáme průběhy ohybového momentu a jeho parciální derivace dle doplňkového momentu.

$$0 \leq x_1 \leq L - a$$

$$0 \leq x_2 \leq a$$

$$M(x_1) = -F \cdot x_1$$

$$M(x_2) = -F \cdot (L - a + x_2) - M_D$$

$$\frac{\partial M(x_1)}{\partial M_D} = 0$$

$$\frac{\partial M(x_2)}{\partial M_D} = -1$$

Pro natočení v místě A platí

$$\varphi_A = \frac{1}{E \cdot I_z} \cdot \left[\int_0^{L-a} M(x_1) \frac{\partial M(x_1)}{\partial M_D} dx_1 + \int_0^a M(x_2) \frac{\partial M(x_2)}{\partial M_D} dx_2 \right]. \quad (\text{P4})$$

Dosazením vztahů pro momenty a derivace, následným položením momentu M_D nule a integrací výrazu obdržíme

$$\varphi_A = \frac{F}{E \cdot I_z} \cdot a \cdot \left(L - \frac{a}{2} \right). \quad (\text{P5})$$



Obsah

293. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Srovnání Castigliánovy metody s metodou analytickou

	Castigliánova metoda	Analytická metoda
Výhody	Poměrně rychlý výpočet průhybu v daném místě bez nutnosti určování integračních konstant $\Rightarrow$ lze řešit i složité případy nosníků.	Získání rovnice průhybové čáry $\Rightarrow$ možnost výpočtu průhybu pouze dosazením do rovnice průhybové čáry.
Nevýhody	Výpočtem získáme průhyb i natočení pouze v jednom bodě nosníku. V případě, že bychom chtěli nalézt hodnotu průhybu v kterémkoliv jiném bodě, je nutné výpočet opakovat.	Nutnost výpočtu integračních konstant. U složitých nosníků se jedná o zdoluhavější proces.

8.9. Staticky neurčité nosníky

V této kapitole se budeme zabývat staticky neurčitými nosníky v rovině, tj. nosníky, kterým vazby odebírají více než tři stupně volnosti. Pro určení reakcí nám nepostačuje pouze sestavení tří lineárně nezávislých rovnic rovnováhy, nýbrž je nutné k těmto rovnicím připojit rovnici (rovnice), vycházející z deformační podmínky (deformačních podmínek).



Obsah

294. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

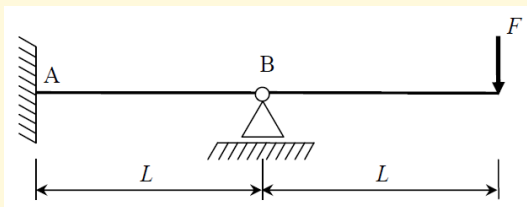
Celá obrazovka / Okno

Postup řešení:

1. Uvolníme potřebný počet vazeb, převedeme uložení na staticky určité.
2. Účinek odstraněných vazeb nahradíme vnějšími silami, případně momenty (mluvíme o zbytných reakcích).
3. Napíšeme požadovaný počet deformačních podmínek (ty se vyjadřují nulovou hodnotou průhybu či úhlu natočení v místě odebraných vazeb).
4. Aplikujeme Castiglianovu větu či jinou metodu pro obecné vyjádření průhybu či úhlu natočení v deformační podmínce.
5. Řešením soustavy (rovnice rovnováhy + rovnice vycházející z deformačních podmínek) získáme neznámé reakce ve vazbách.

Příklad 8.12. Určete reakce ve vazbách nosníku na obr. 8.27.

Dáno: F , L , E , I_z .



Obr. 8.27



Obsah

295. strana ze 449



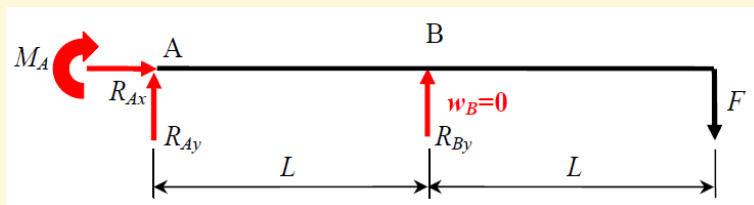
Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Řešení:

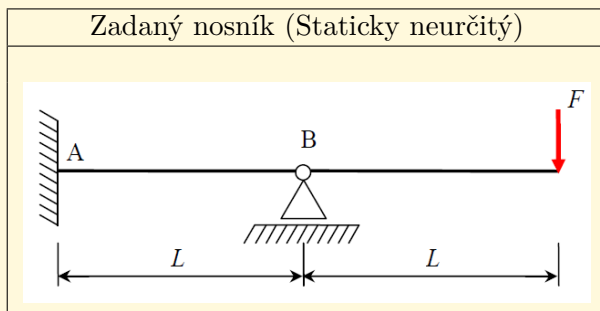
1. Uvolnění soustavy.

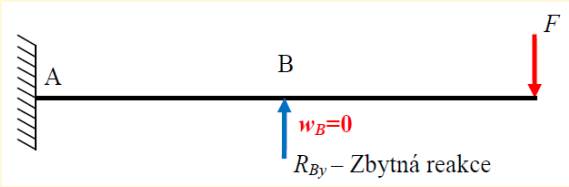
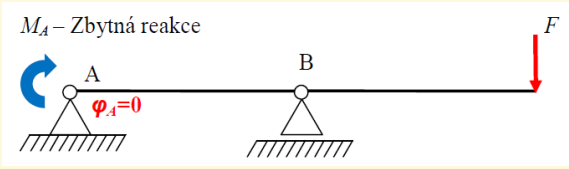


Obr. 8.28

Z obr. 8.28 je evidentní, že se jedná o $1 \times$ staticky neurčitou úlohu. Jinými slovy, je nutné určit celkem čtyři reakce, k dispozici máme pouze tři lineárně nezávislé rovnice rovnováhy.

Čtvrtá doplňková rovnice bude vycházet z deformační podmínky v bodě B , kde je průhyb v ose y nulový. Deformační podmínka však nemusí být nutně stanovena v bodě B , viz následující tabulka.



Náhradní nosník (staticky určitý)	Deformační podmínka
Varianta 1 	$w_B = 0$
Varianta 2 	$\varphi_A = 0$

Další varianta doplňkové rovnice by mohla také vycházet z deformační podmínky v bodě A, kde je průhyb v ose y rovněž nulový ($w_A = 0$).

[Obsah](#)

297. strana ze 449


[Zavřít dokument](#)
[Konec](#)
[Celá obrazovka/Okno](#)

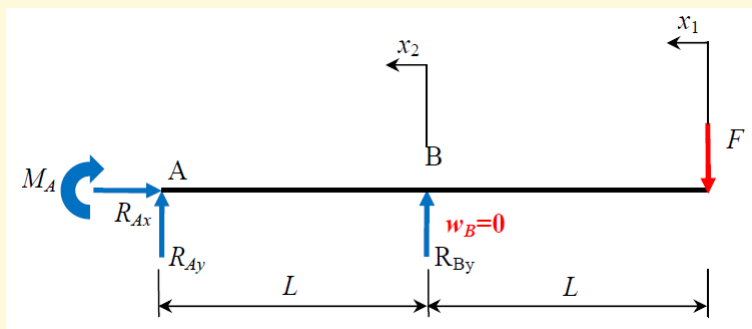
2. Výpočet reakcí.

Rovnice rovnováhy

$$\begin{aligned}\sum F_{ix} &= 0 = R_{Ax}, \\ \sum F_{iy} &= 0 = R_{Ay} + R_{By} - F, \\ \sum M_{iA} &= 0 = M_A - R_{By} \cdot L + F \cdot 2 \cdot L.\end{aligned}$$

(P1)

Získáme průběhy ohybového momentu a jeho parciální derivace dle reakční síly v bodě B .



Obr. 8.29

$$x_1 \in \langle 0; L \rangle$$

$$x_2 \in \langle 0; L \rangle$$

$$M(x_1) = -F \cdot x_1$$

$$M(x_2) = -F \cdot (L + x_2) + R_{By} \cdot x_2$$

$$\frac{\partial M(x_1)}{\partial R_{By}} = 0$$

$$\frac{\partial M(x_2)}{\partial R_{By}} = x_2$$

Pro průhyb w_B poté platí

$$w_B = 0 = \frac{1}{E \cdot I_z} \cdot \left[\int_0^L M(x_1) \frac{\partial M(x_1)}{\partial R_{By}} dx_1 + \int_0^L M(x_2) \frac{\partial M(x_2)}{\partial R_{By}} dx_2 \right].$$

(P2)

Po dosazení a úpravě určíme ze vztahu (P2) velikost reakce R_{By}

$$R_{By} = \frac{5}{2} \cdot F.$$

(P3)

Dosazením (P3) do druhé a třetí rovnice v (P1) určíme zbývající reakce

$$R_{Ay} = \frac{-3}{2} \cdot F,$$

$$M_A = \frac{F \cdot L}{2}.$$

(P4)



Obsah

299. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

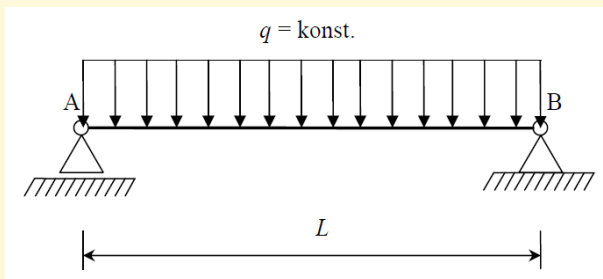
Celá obrazovka/Okno

V případě, že budeme postupovat opačným směrem, tj. zleva doprava, bude složitost řešení obtížnější ve smyslu nezbytnosti vyjádření reakcí R_{Ay} a M_A jako funkce síly, pod kterou se uskutečňuje průhyb, tj. reakce R_{By} a to s ohledem na potřebu stanovení parciální derivace ohybového momentu M podle reakce R_{By} v rovnici (P2). ▲

Příklady k procvičení

1. Určete rovnici průhybové čáry v řešeném příkladu 8.7 za předpokladu volby souřadnice x zleva. Do obou rovnic průhybové čáry poté za x dosadíte hodnotu $L/2$ a vypočítejte průhyb.
2. Určete rovnici průhybové čáry nosníku, znázorněného na obr. 8.30.

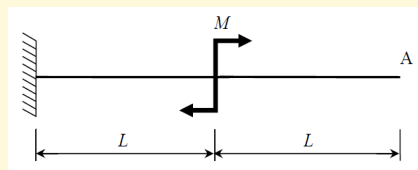
Dáno: q , L , E , I_z .



Obr. 8.30

3. Určete reakce na nosníku z příkladu 8.12 se zavedením souřadnice x_2 v 2. úseku nosníku zprava.
4. Vypočtete průhyb v místě A nosníku znázorněného na obr. 8.31.

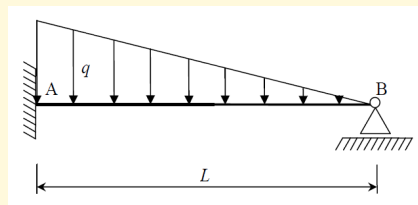
Dáno: L , E , I_z , M .



Obr. 8.31

5. Určete reakce staticky neurčitého nosníku, znázorněného na obr. 8.32.

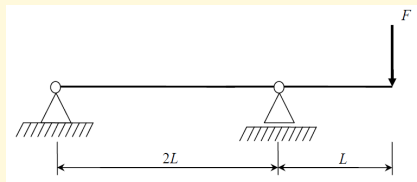
Dáno: q , L , E , I_z .



Obr. 8.32

6. Vypočtete průhyb v místě působící síly u nosníku znázorněného na obr. 8.33.

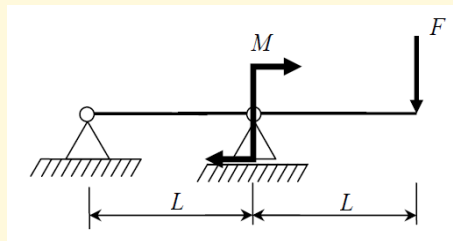
Dáno: F , L , E , I_z .



Obr. 8.33

7. Určete maximální přípustnou velikost ohybového momentu M , je-li maximální dovolený průhyb pod silou F roven hodnotě 65 mm .

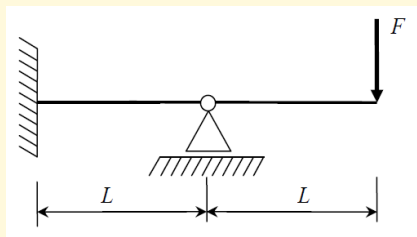
Dáno: $F = 5 \text{ N}$, $w_F = 65 \text{ mm}$, $E = 210000 \text{ MPa}$, $I_z = 490 \text{ mm}^4$, $L = 1000 \text{ mm}$.



Obr. 8.34

8. Určete průhyb v místě působení síly F u nosníku, zobrazeného na obr. 8.35.

Dáno: $F = 5 \text{ N}$, $E = 210000 \text{ MPa}$, $I_z = 490 \text{ mm}^4$, $L = 1000 \text{ mm}$.



Obr. 8.35

Klíč k příkladům k procvičení

1. hodnoty průhybu musí být s využitím obou přístupů stejné

$$2. \quad w(x) = -\frac{1}{E \cdot I_z} \cdot \left[\frac{q}{12} \cdot \left(l \cdot x^3 - \frac{x^4}{2} \right) - \frac{q \cdot l^3}{24} \cdot x \right]$$

3. reakce musí vyjít shodně

$$4. \quad w_A = \frac{3 \cdot M \cdot L^2}{2 \cdot E \cdot I_z}$$

$$5. \quad |R_{Ay}| = \frac{3}{8} q \cdot L, \quad |R_{By}| = \frac{1}{8} q \cdot L, \quad |M_A| = \frac{1}{24} q \cdot L^2$$

$$6. \quad w_F = \frac{11 \cdot F \cdot L^3}{12 \cdot E \cdot I_z}$$



Obsah

303. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

$$7. \quad M = \frac{3 \cdot (w_F \cdot E \cdot I_z - \frac{2}{3} \cdot F \cdot L^3)}{L^2} \doteq 10 \text{ Nm}$$

$$8. \quad w_F = \frac{7 \cdot F \cdot L^3}{12 \cdot E \cdot I_z}$$

Pojmy k zapamatování

- prostý ohyb
- Schwedlerovy věty
- výpočet ohybového napětí
- pevnostní kontrola a dimenzování
- Bernoulliho hypotéza
- vztah průhybu a natočení
- analytická metoda
- Castigliánova metoda
- staticky neurčité nosníky



Obsah

304. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

8.9.1. Interaktivní test

Následující test byl vytvořen pomocí balíčku **acrotex**. Test zahájíte kliknutím na tlačítko „Zacátek testu“. U otázek, kde lze volit jen jednu odpověď (test nedovolí zaškrtnout více odpovědí), je správná odpověď bodována takovým počtem bodů, jaký je uveden v závorce u zadání a špatná odpověď je bodována 0 body. U otázek, kde lze volit více správných odpovědí, je součet bodů správných odpovědí uveden v závorce u zadání a za každou špatnou odpověď bude odečten jeden bod.

1. (2b.) Rovinný ohyb je definován touto podmínkou

- rovina působících sil a ohybových momentů musí obsahovat podélnou osu nosníku
- rovina působících sil a ohybových momentů musí obsahovat podélnou osu nosníku a obě hlavní centrální osy setrvačnosti
- rovina působících sil a ohybových momentů musí obsahovat podélnou osu nosníku a jednu z hlavních centrálních os setrvačnosti průřezu

2. (2b.) Schwedlerovy věty pro výpočet posouvajících sil T a ohybových momentů M_o lze použít

- pouze u nosníků zatížených libovolným spojitým zatížením
- pouze u nosníků zatížených konstantním spojitým zatížením
- u libovolně zatíženého nosníku



Obsah

305. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

3. (2b.) Rozložení normálového napětí po ploše průřezu při rovinném ohybu nosníku je
- rovnoměrné
 - podle zákona paraboly
 - lineární
 - podle zákona hyperboly
4. (2b.) V kterém místě se nachází největší normálové napětí při rovinném ohybu?
- v nejvzdálenějším místě průřezu od neutrální osy
 - v ose nosníku
 - v horním vlákně průřezu
5. (2b.) Rozložení smykového napětí po ploše průřezu při rovinném ohybu nosníku je
- rovnoměrné
 - podle zákona paraboly
 - lineární
 - podle zákona hyperboly

[Obsah](#)

306. strana ze 449

[Zavřít dokument](#)[Konec](#)[Celá obrazovka/Okno](#)

6. (2b.) Vlákna nacházející se v neutrální ose jsou

Namáhána na tah i tlak

Namáhána pouze na tah

Nejsou namáhána

7. (2b.) Analytická metoda pro výpočet průhybu nosníků vychází z diferenciální rovnice průhybové křivky. Jedná se o DR druhého řádu, její řešení musí obsahovat 2 integrační konstanty (pro jeden úsek nosníku). Tyto konstanty určíme

z počátečních podmínek pro průhyb nebo úhel natočení

z okrajových podmínek pro průhyb nebo úhel natočení

z počátečních podmínek pro průhyb, který je nulový v místech podepření nebo vetknutí

z okrajových podmínek pro průhyb, který je nulový v místech podepření nebo vetknutí

8. (2b.) Castigliánova metoda je založena na:

analytickém přístupu

Energetickém přístupu

Kombinaci analytického a energetického přístupu



Obsah

307. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

9. (2b.) Při řešení staticky neurčitých úloh:

se využívá deformační podmínka

není potřeba deformační podmínky, postup řešení je shodný jako u staticky určitých úloh

se využívá silová podmínka

10. (2b.) Kterou veličinu používáme pro vyjádření deformační podmínky u ohybu?

úhel natočení

průhyb

průhyb a/nebo úhel natočení

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:

Pro ukončení testu je třeba kliknout na tlačítko „Konec testu“. Opravení testu se provede kliknutím na tlačítko „Výsledky“, správné odpovědi budou označeny zeleně a červeně budou označeny odpovědi chybné. Při použití otázky s tvořenou odpovědí se správná odpověď zobrazí v rámečku umístěném vpravo dole v navigačním panelu po kliknutí na tlačítko „Odpověď“.



Obsah

308. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Kapitola 9

Hypotézy pevnosti a jejich použití

Průvodce studiem

V praxi se při konstrukčním návrhu strojních součástí podrobených víceosému namáhání (tj. jejich geometrie, zatížení a materiálů) využívá hypotéz pevnosti. V textu je věnována pozornost jen izotropním a homogenním materiálům pro statické způsoby zatěžování bez uvažování vlivu teploty. Prezentovány budou jen nejpoužívanější hypotézy. Čtenář by měl být obeznámen mimo jiné s pojmem hlavních napětí (kapitola 3).

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete:

- znát základní pevnostní hypotézy běžné strojařské praxe
- umět používat hypotézy pevnosti při návrhu geometrie a zatížení a pevnostní kontrole strojních částí a celků



Obsah

309. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

9.1. Úvod

V součástech strojů či konstrukcí vzniká, v důsledku zatížení, obecně víceosá napjatost, která může způsobit havarijní stavy, viz např. obr. 9.1.



Obr. 9.1 Náhlý kolaps osmiproudového dálničního mostu $I - 35W$ Mississippi River bridge dne 1. srpna 2007, ve státu Minnessota, USA (zdroj: http://cs.wikipedia.org/wiki/I-35W_Mississippi_River_bridge).

Aby nedocházelo k havarijním (či nepřipustným) stavům namáhání, je nutné již při návrhu zkoumat mezní stavy mechanických struktur.

Pro stanovení mezních stavů, jejich zhodnocení a dimenzování strojů či konstrukcí je pak nutné využít *hypotéz pevnosti (kritérií pevnosti)*. Hypotézy pevnosti jsou platné pro daný typ materiálu (houževnatý, křehký, krystalický, polykrystalický, izotropní, anizotropní, ...), daný způsob zatěžování (staticky, dynamicky, teplotně, ...), velikost konstrukce (větší



Obsah

310 strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

těleso má více vnitřních i vnějších vad) atp., přičemž se obvykle vztahují k limitnímu stavu dosažení meze kluzu či dosažení meze pevnosti.

Hypotézy pevnosti, kterých v současnosti existují stovky, tedy vzešly z potřeb inženýrské praxe, avšak nutno přiznat, že žádná z těchto hypotéz není univerzální. Svědčí o tom stále nové pokusy domácích i zahraničních vědců.

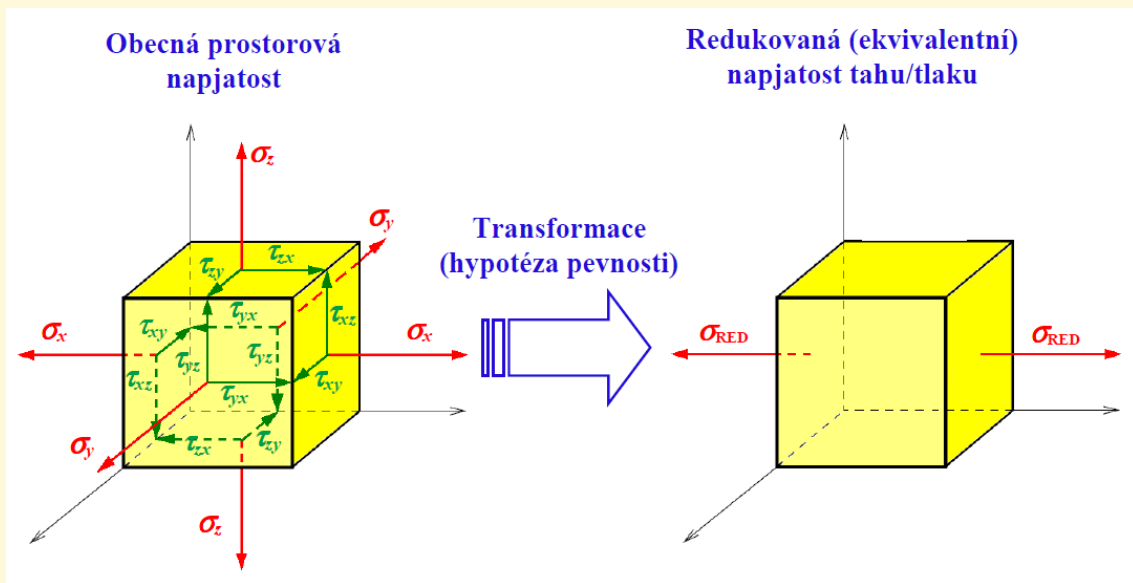
Je nutné také zmínit, že při návrhu součásti nelze vždy vystačit jen s kritérii, založenými na hypotézách pevnosti. U některých součástí záleží také na tuhosti (např. dovolený průhyb stropní konstrukce), dynamickém chování (např. požadovaný provoz stroje mimo rezonanční oblast), odolnosti vůči creepu, korozi, stárnutí (např. běžné pryže či umělé hmoty mění své mechanické vlastnosti s časem a působením UV záření) aj. vlivech. Mezi moderní trendy designu také patří možná a levná recyklovatelnost a minimalizace ekologické závadnosti atp. Nicméně, tato kniha se zabývá pouze navrhovacími kritérii, založenými na hypotézách pevnosti (tj. základní vzhled do konstrukční praxe).

[Obsah](#)

311. strana ze 449

[Zavřít dokument](#)[Konec](#)[Celá obrazovka / Okno](#)

U běžně používaných hypotéz se setkáváme s pojmem *redukované (ekvivalentní) napětí* σ_{red} [Pa]. Redukované napětí lze tedy porovnat s *dovoleným napětím* σ_{dov} [Pa] v tahu nebo tlaku (tj. redukované napětí, dle příslušné hypotézy, které vyvolá stejný účinek jako prostý tah nebo tlak, viz schéma na obr. 9.2) a následně je použit pro vyhodnocení napětového stavu či návrhu rozměrů součásti nebo zatížení součásti. Dovolené napětí bývá obvykle menší nebo rovno mezi kluzu nebo menší než mez pevnost materiálu.



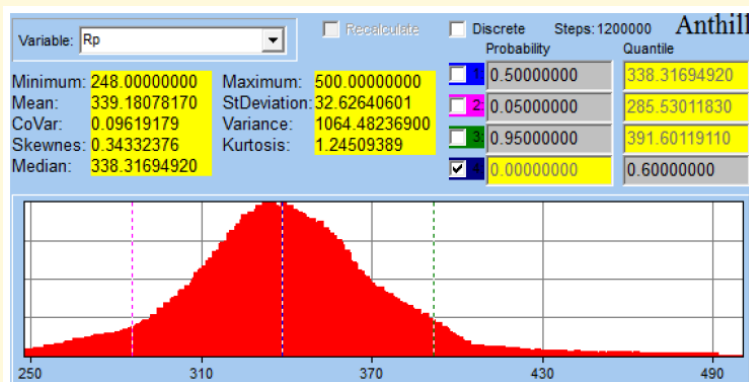
Obr. 9.2



Definice 9.1. Pevnostní podmínka (testovací kritérium, designová nerovnice) dle libovolné hypotézy pak má tvar

$$\sigma_{RED} \leq \sigma_{DOV}. \quad (9.1)$$

Mezi moderní trendy postupů navrhování patří také respektování reálných rozptylů materiálových vlastností, které vede k aplikacím *pravděpodobnostních metod* (metoda Monte Carlo, SBRA aj.). Z praxe je známo, že např. mez kluzu materiálů není konstantní hodnota, ale náhodná veličina, viz např. obr. 9.3.



Obr. 9.3 Histogram meze kluzu materiálu R_p /MPa/ (statistické vyhodnocení materiálových vlastností oceli A36)

Obsah

313. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Výhodou pravděpodobnostních přístupů je také to, že lze stanovit pravděpodobnost poruchy či nepříznivého stavu (např. překonání meze kluzu), viz kapitola 8. Pravděpodobnostním přístupům se však tato učebnice nevěnuje.

V následujícím textu jsou použita značení: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, resp. $\sigma_{i,j,k}$ (hlavní napětí /Pa/), ε_i (hlavní poměrné deformace /1/), μ (Poissonovo číslo /1/), E (modul pružnosti /Pa/).

V dalším textu je zaměřena pozornost jen na izotropní a homogenní materiály pro statické způsoby zatěžování bez uvažování vlivu teploty. U hypotéz jsou také uvedeny další často používané názvy a to z důvodu nejednotnosti názvosloví v domácí i zahraniční literatuře.

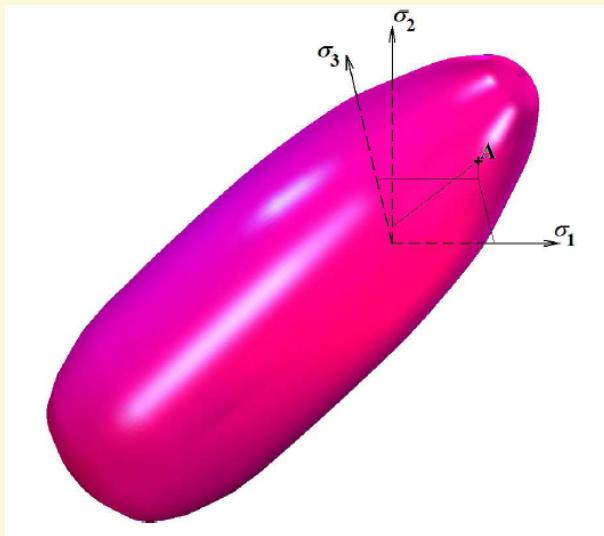
9.2. Haighův prostor a metody stanovení podmínek pevnosti

Z předchozích kapitol je zřejmé, že prostorová napjatost v tělese z izotropního a homogenního materiálu je dána buď šesti složkami napětí ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}$ a τ_{xz}) ve zvoleném kartézském souřadnicovém systému, a nebo třemi hlavními napětími (σ_1, σ_2 a σ_3) v systému hlavních napětí (souřadné osy jsou normálami hlavních rovin, tzv. hlavní souřadnicový systém). Prostor, určený hlavním souřadnicovým systémem (σ_1, σ_2 a σ_3) se nazývá *Haighův prostor*, pak je zřejmé, že každý bod tohoto prostoru jednoznačně definuje stav napjatosti, viz obr. 9.4.

[Obsah](#)

314. strana ze 449

[Zavřít dokument](#)[Konec](#)[Celá obrazovka/Okno](#)



Obr. 9.4

Za předpokladu, že jsou při daném zatěžování známy hodnoty trojice hlavních napětí, při nichž došlo k meznímu stavu (např. k dosažení meze kluzu u tvárných materiálů nebo mezního stavu pevnosti u křehkých materiálů), pak tato hlavní napětí určují bod *A mezní Haighovy plochy*, viz obr. 9.4. Pokud se celý proces vícenásobně opakuje pro jiné trojice hlavních napětí, pak lze stanovit kompletní tvar Haighovy plochy, viz obr. 9.4.

Haighovy mezní plochy lze stanovovat fyzikálním přístupem (např. meziatomové vazby, dislokační teorie aj.), experimentálním přístupem (zkoušky při různých typech napjatostí aj.), hypotetickým přístupem (např. určité faktory napjatosti rozhodují o vzniku trvalých deformací atp.) a nebo jejich kombinacemi.

9.3. Základní hypotézy pevnosti pro křehké materiály

Definice 9.2. *Hypotéza maximálních normálových napětí (Rankine, hypotéza σ_{MAX} , hypotéza maximálního hlavního napětí) – k meznímu stavu dochází při největším tahovém respektive tlakovém napětí. Tato hypotéza platí pro napjatosti, vyvolávající křehký stav materiálu. Pro napjatosti blízké hydrostatickému tlaku však odporuje naměřeným výsledkům. Pro podmínku pevnosti pak platí*

$$\left. \begin{aligned} -\sigma_{DOV_{TLAK}} &\leq \sigma_1 \leq \sigma_{DOV_{TAH}}, \\ -\sigma_{DOV_{TLAK}} &\leq \sigma_2 \leq \sigma_{DOV_{TAH}}, \\ -\sigma_{DOV_{TLAK}} &\leq \sigma_3 \leq \sigma_{DOV_{TAH}}. \end{aligned} \right\} \quad (9.2)$$

Stručně zapsáno

$$\sigma_{RED} = \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq \sigma_{DOV_{TAH}}, \quad (9.3)$$

pokud je největší napětí kladné (tahové). Nebo

$$\sigma_{RED} = |\min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)| \leq \sigma_{DOV_{TLAK}}, \quad (9.4)$$

pokud je největší napětí záporné (tlakové).



Obsah

316. strana ze 449

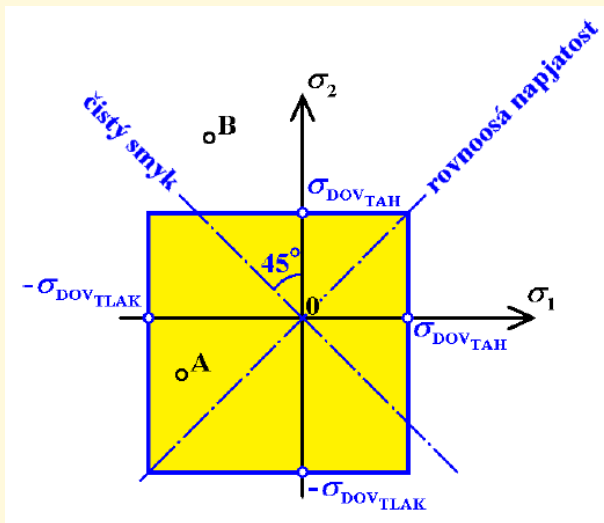


Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Grafická interpretace této hypotézy je pro dvojosou napjatost znázorněna na obr. 9.5, kde je zřejmé, že bod *A* splňuje podmínku pevnosti a bod *B* nesplňuje podmínku pevnosti.



Obr. 9.5 Hypotéza maximálních normálových napětí (dvojosý stav napjatosti)



Definice 9.3. Mohrova hypotéza (v tomto případě její lineární varianta, známá také jako Mohr-Coulomb) se používá pro materiály, jejichž pevnost v tahu je obvykle menší než pevnost v tlaku. Není vhodná pro napjatosti blízké rovnoměrnému tahu. Tato hypotéza respektuje také vliv normálových i smykových napětí. Při sestavení podmínky pevnosti se vychází z Mohrovy kružnice pro dovolené tahové a dovolené tlakové namáhání

$$\left. \begin{aligned} -\sigma_{DOV_{TLAK}} &\leq \sigma_1 - \frac{\sigma_{DOV_{TAH}}}{\sigma_{DOV_{TLAK}}} \sigma_2 \leq \sigma_{DOV_{TAH}}, \\ -\sigma_{DOV_{TLAK}} &\leq \sigma_2 - \frac{\sigma_{DOV_{TAH}}}{\sigma_{DOV_{TLAK}}} \sigma_3 \leq \sigma_{DOV_{TAH}}, \\ -\sigma_{DOV_{TLAK}} &\leq \sigma_3 - \frac{\sigma_{DOV_{TAH}}}{\sigma_{DOV_{TLAK}}} \sigma_1 \leq \sigma_{DOV_{TAH}}. \end{aligned} \right\} \quad (9.5)$$

Rovnice 9.5 lze zapsat stručně takto

$$\sigma_{RED} = \max \left(\sigma_i - \frac{\sigma_{DOV_{TAH}}}{\sigma_{DOV_{TLAK}}} \sigma_j \right) \leq \sigma_{DOV_{TAH}}, \quad (9.6)$$

pokud je hodnota σ_{RED} kladná. Nebo

$$|\sigma_{RED}| = \left| \min \left(\sigma_i - \frac{\sigma_{DOV_{TAH}}}{\sigma_{DOV_{TLAK}}} \sigma_j \right) \right| \leq \sigma_{DOV_{TLAK}}, \quad (9.7)$$

pokud je hodnota σ_{RED} záporná.

Obsah

318. strana ze 449

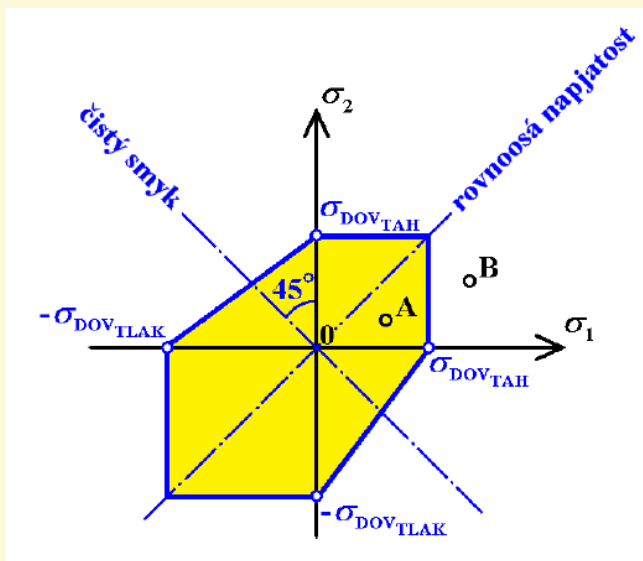


Zavřít dokument

Konec

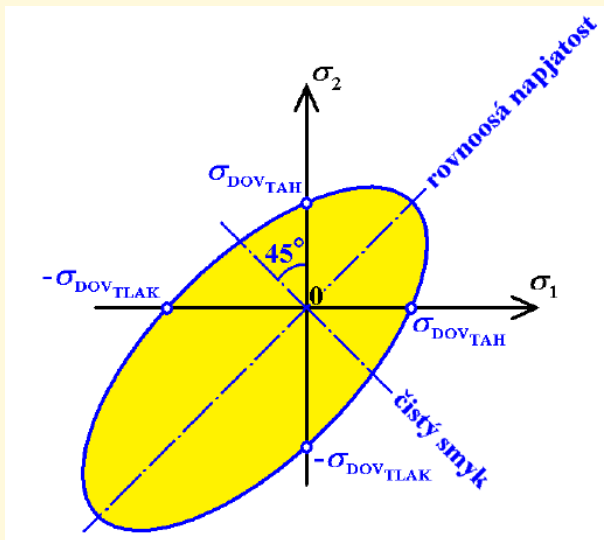
Celá obrazovka / Okno

Grafická interpretace této hypotézy je pro dvojosou napjatost znázorněna na obr. 9.6, kde je zřejmé, že bod *A* splňuje podmínku pevnosti a bod *B* nesplňuje podmínku pevnosti. V případech kdy $\sigma_{RED_TAH} = \sigma_{RED_TLAK}$, přechází Mohrova hypotéza v hypotézu Guestovu, viz následující kapitola.



Obr. 9.6 Mohrova hypotéza – lineární aproximace (dvojsoý stav napjatosti)

Nutno podotknout, že existuje také parabolická či další aproximace Mohrovy hypotézy, viz např. obr. 9.7, která je za určitých podmínek vhodná pro houževnaté i křehké materiály, avšak na tuto hypotézu se učebnice nezaměřuje.



Obr. 9.7

9.4. Základní hypotézy pevnosti pro tvárné materiály

Definice 9.4. *Hypotéza maximálních smykových napětí (Guest, Tresca, Guest-Tresca-Coulomb, hypotéza τ_{MAX}) – k meznímu stavu dochází, když největší smykové napětí $\tau_{MAX} = \frac{\sigma_{MAX} - \sigma_{MIN}}{2}$ dosáhne dovoleného napětí ve smyku $\tau_{DOV} = \frac{\sigma_{DOV}}{2}$. Hypotéza je vhodná pro materiály houževnaté, kde $\sigma_{DOV_{TAH}} = \sigma_{DOV_{TLAK}}$. Pro podmínku pevnosti pak platí*

$$\left. \begin{aligned} -\sigma_{DOV} &\leq \sigma_1 - \sigma_2 \leq \sigma_{DOV}, \\ -\sigma_{DOV} &\leq \sigma_2 - \sigma_3 \leq \sigma_{DOV}, \\ -\sigma_{DOV} &\leq \sigma_3 - \sigma_1 \leq \sigma_{DOV}. \end{aligned} \right\} \quad (9.8)$$

Nebo stručně

$$\sigma_{RED} = \max(|\sigma_i - \sigma_j|) \leq \sigma_{DOV}. \quad (9.9)$$

Grafická interpretace této hypotézy je pro dvojosou napjatost znázorněna na obr. 9.8, kde je zřejmé, že bod *A* splňuje podmínku pevnosti a bod *B* nesplňuje podmínku pevnosti. Často jsou Mohrova a Guestova hypotéza nazývány společným názvem jako Mohr-Guestova hypotéza.



Obsah

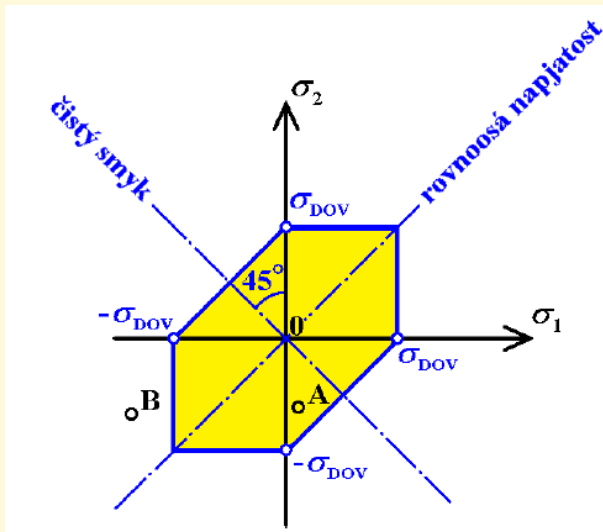
321. strana ze 449



Zavřít dokument

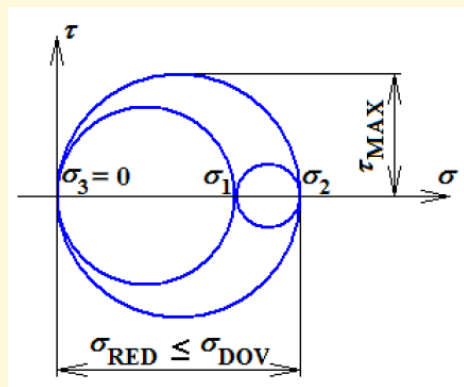
Konec

Celá obrazovka / Okno

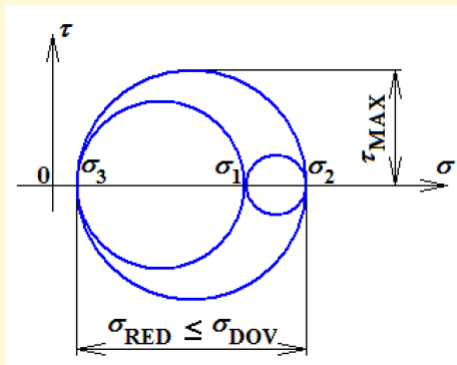


Obr. 9.8

Redukované napětí dle Guesta lze také definovat jako největší průměr Mohrových kružnic, viz obr. 9.9.



a) Rovinná napjatost



b) Prostorová napjatost

Obr. 9.9

Tato hypotéza patří mezi nejrozšířenější hypotézy.

Definice 9.5. *Hypotéza maximálních poměrných deformací (Saint-Venant, φ_{MAX})* – k meznímu stavu dochází, když největší poměrná deformace $\varphi_{MAX} = \varphi_i = \frac{\sigma_i - \mu(\sigma_j + \sigma_k)}{E}$ dosáhne dovolené poměrné deformace v tahu nebo tlaku $\varphi_{DOV_{TAH,TLAK}} = \frac{\sigma_{DOV_{TAH,TLAK}}}{E}$. Tato hypotéza se již v současnosti zřejmě nepoužívá, avšak je stále uváděna v učebnicích. Pro podmínku pevnosti pak platí

$$\left. \begin{aligned} -\sigma_{DOV_{TLAK}} &\leq \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq \sigma_{DOV_{TAH}}, \\ -\sigma_{DOV_{TLAK}} &\leq \sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1) \leq \sigma_{DOV_{TAH}}, \\ -\sigma_{DOV_{TLAK}} &\leq \sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2) \leq \sigma_{DOV_{TAH}}. \end{aligned} \right\} \quad (9.10)$$

Zkrácený zápis je

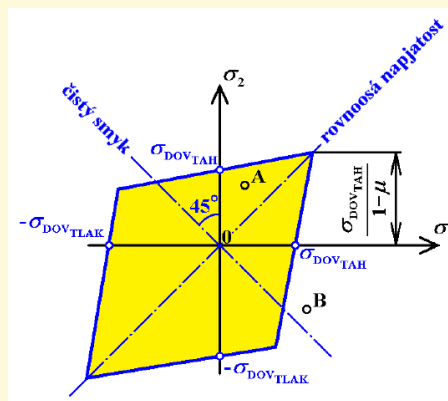
$$\sigma_{RED} = \max(\sigma_i - \mu(\sigma_j + \sigma_k)) \leq \sigma_{DOV_{TAH}}, \quad (9.11)$$

pokud je hodnota σ_{RED} kladná. Nebo

$$|\sigma_{RED}| = |\min(\sigma_i - \mu(\sigma_j + \sigma_k))| \leq \sigma_{DOV_{TLAK}}, \quad (9.12)$$

pokud je hodnota σ_{RED} záporná.

Grafická interpretace této hypotézy je pro dvojmosou napjatost znázorněna na obr. 9.10, kde je zřejmé, že bod A splňuje podmínku pevnosti a bod B nesplňuje podmínku pevnosti.



Obr. 9.10



Definice 9.6. *Hypotéza maximální hustoty celkové deformační energie (Beltrami, Beltrami-Haigh, Beltrami-Mises-Hencky, BMH) – k meznímu stavu dochází, když hustota celkové deformační energie U_0 bude větší než hustota celkové deformační energie při jednoosé napjatosti pro dovolené napětí U_{0DOV} . Tato hypotéza je vhodná pro materiály, kde $\sigma_{DOV_{TAH}} = \sigma_{DOV_{TLAK}}$.*

Hustotu celkové deformační energie pro trojosou napjatost můžeme vyjádřit s využitím principu superpozice. Vyjádříme-li napjatost v uvažovaném bodě tělesa pomocí hlavních napětí, můžeme vyjádřit hustotu celkové deformační energie jako součet hustot deformační energie pro tři jednoosé případy namáhání, tzn.

$$U_0 = \frac{1}{2}\sigma_1\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\sigma_2\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\sigma_3\varepsilon_3. \quad (9.13)$$

Připomeňme, že hustota deformační energie při tahovém namáhání odpovídá obsahu plochy pod křivkou v diagramu $\sigma - \varepsilon$. Aplikujeme-li nyní obecný Hookeův zákon získáme

$$U_0 = \frac{1}{2}\sigma_1 \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] + \frac{1}{2}\sigma_2 \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)] + \frac{1}{2}\sigma_3 \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_2 + \sigma_1)], \quad (9.14)$$

respektive po úpravě

$$\frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)). \quad (9.15)$$

Pro případ tahu na úrovni dovoleného napětí $\sigma_1 = \sigma_{DOV}$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 0$ pak plyne

$$U_{DOV} = \frac{\sigma_{DOV}^2}{2E}. \quad (9.16)$$

Obsah

325. strana ze 449



Zavřít dokument

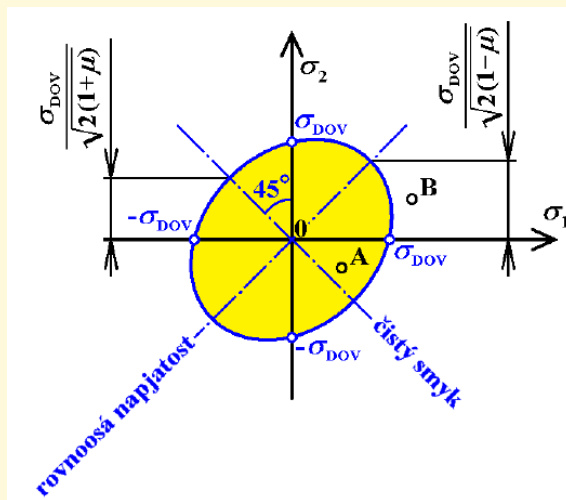
Konec

Celá obrazovka / Okno

Dle definice 9.6 lze srovnáním výrazů (9.14) a (9.16) a po jednoduché úpravě získat podmínku pevnosti

$$\sigma_{RED} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} \leq \sigma_{DOV}. \quad (9.17)$$

Grafická interpretace této hypotézy je pro dvojistou napjatost znázorněna na obr. 9.11, kde je zřejmé, že bod A splňuje podmínku pevnosti a bod B nesplňuje podmínku pevnosti.



Obr. 9.11

Tato hypotéza se dnes v praxi používá jen výjimečně.

Definice 9.7. Hypotéza maximální hustoty deformační energie na změnu tvaru (známá také jako hypotéza Huber-Mises-Hencky, Maxwell, HMM, von Mises, oktaedrických smykových napětí nebo Maxwell-Huber-Hencky-von Mises) – k meznímu stavu dochází, když hustota deformační energie pro změnu tvaru

$U_{0t} = \frac{1+\mu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1)$ bude větší než hustota deformační energie na změnu tvaru při jednoosé napjatosti pro dovolené napětí $U_{0tDOV} = \frac{1+\mu}{3E} \sigma_{DOV}^2$.

Tato hypotéza je vhodná pro materiály kde $\sigma_{DOVTAH} = \sigma_{DOVTLAK}$.

Odvození výrazu pro hustotu deformační energie na změnu tvaru lze nalézt např. v [1]. V tomto textu použijeme k získání vztahu pro redukované napětí jednoduchou úvahu.

Vztah pro hustotu celkové deformační energie (9.17) musí platit pro libovolný homogenní lineární elastický isotropní materiál, tedy i nestlačitelné materiály jako jsou např. pryž. Jestliže se jedná o nestlačitelný materiál, změna objemu je nulová, a celková deformační energie odpovídá deformační energii na změnu tvaru. Z kapitoly 5 víme, že pro nestlačitelný materiál je $\mu = 0,5$.

Po dosazení této hodnoty do (9.17) získáme

$$\sigma_{RED} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} \leq \sigma_{DOV}, \quad (9.18)$$

přičemž je zřejmé, že tento vztah musí platit pro lineární elastický materiál obecně.



Obsah

327. strana ze 449

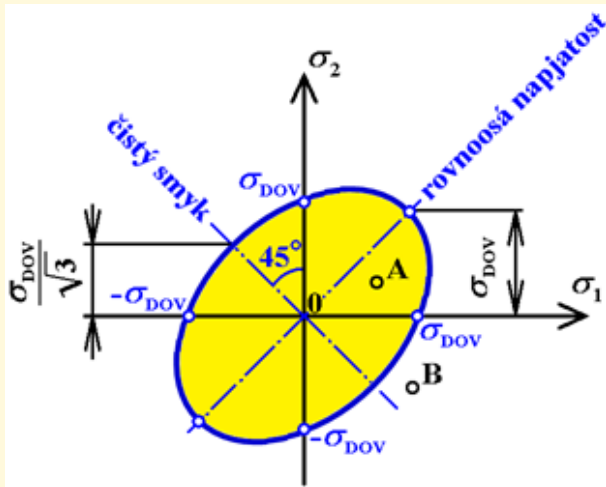


Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Grafická interpretace této hypotézy je pro dvojousou napjatost znázorněna na obr. 9.12, kde je zřejmé, že bod *A* splňuje podmínku pevnosti a bod *B* nesplňuje podmínku pevnosti.

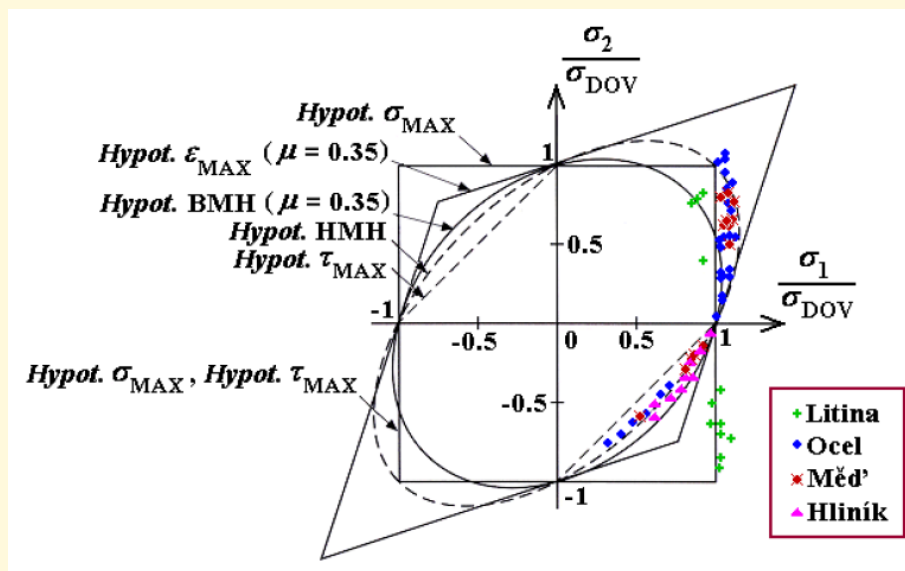


Obr. 9.12

Tato hypotéza patří mezi nejrozšířenější hypotézy.

9.5. Porovnání hypotéz a další hypotézy pevnosti

Pro porovnávání hypotéz pevnosti s experimenty, lze využít bezrozměrných veličin typu $\frac{\sigma_1}{\sigma_{DOV}}$ a $\frac{\sigma_2}{\sigma_{DOV}}$, viz obr. 9.13.



Obr. 9.13 Porovnání některých hypotéz s experimenty, prováděnými na některých materiálech (rovinná napjatost pro případ kdy $\sigma_1 > 0$ a $\sigma_2 \leq \sigma_1$ dle dat z internetu)

Další hypotézy (např. Drucker-Prager, Hill, Chen, Filoněnko-Borodič, Fuxa, Hu, Tarasenko, Smirnov-Aljajev, Tsai-Wu, Christensen aj.), vhodné i pro anizotropní materiály a tepelná namáhání, jsou uvedeny v odkazech [19] až [22]. Mezi moderní kritérium pevnosti patří také Fuxovo kritérium referenčních smykových a normálových napětí, které bylo navrženo na našem pracovišti (Katedra pružnosti a pevnosti, FS VŠB – TU Ostrava).

Příklad 9.8. Posudte, zda napjatost, která je dána složkami napětí

$\sigma_x = 80 \text{ MPa}$, $\sigma_y = 20 \text{ MPa}$, $\sigma_z = -15 \text{ MPa}$, $\tau_{xy} = 40 \text{ MPa}$, $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \text{ MPa}$, vyhovuje podmínce pevnosti dle hypotézy HMH a Guesta. Dovolené napětí je $\sigma_{DOV} = 112 \text{ MPa}$.

Nejprve je vhodné stanovit hlavní napětí z determinantu (3.48), tedy

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_i & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_i & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_i & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_i & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z - \sigma_i \end{vmatrix} = 0.$$

Odtud se získá

$$(\sigma_z - \sigma_i) \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_i & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_i \end{vmatrix} = 0. \quad (9.19)$$

Rovnice (9.19) je splněna (tj. je nalezeno řešení), pokud

$$\sigma_z - \sigma_i = 0 \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_i = \sigma_z = -15 \text{ MPa} \quad (9.20)$$



Obsah

330. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

a zároveň

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_i & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_i \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \sigma_{2,3} &= \sigma_i = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2} = \\ &= (50 \pm 50) \text{ MPa}, \\ \text{tj. : } \sigma_2 &= 100 \text{ MPa a } \sigma_3 = 0 \text{ MPa}. \end{aligned} \quad (9.21)$$

Dle hypotézy HMM, viz rovnice (9.13), lze stanovit redukované napětí

$$\begin{aligned} \sigma_{RED_{HMM}} &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} = \\ &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} = 108,28 \text{ MPa}. \end{aligned}$$

Podobně dle Guestovy hypotézy, viz rovnice (9.9), je možno určit redukované napětí

$$\sigma_{RED_{GUEST}} = \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|) = \sigma_2 - \sigma_1 = 115 \text{ MPa}.$$

Posudek napjatosti podle příslušných hypotéz se provede dle nerovnice (9.1). Pak je zřejmé, že $\sigma_{RED_{HMM}} \leq \sigma_{DOV}$ (tj. $108,28 \leq 112$) a napjatost splňuje kritérium pevnosti dle teorie HMM, a naopak $\sigma_{RED_{GUEST}} \geq \sigma_{DOV}$ (tj. $115 \geq 112$).



Obsah

331. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Příklad 9.9. Posuďte, zda napjatost z příkladu 9.8, která je dána složkami napětí $\sigma_x = 80 \text{ MPa}$, $\sigma_y = 20 \text{ MPa}$, $\sigma_z = -15 \text{ MPa}$, $\tau_{xy} = 40 \text{ MPa}$, $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \text{ MPa}$, vyhovuje podmínce pevnosti dle hypotézy Rankine. Dovolené napětí v tahu je $\sigma_{DOV_{TAH}} = 150 \text{ MPa}$ a dovolené napětí v tlaku je $\sigma_{DOV_{TLAK}} = 200 \text{ MPa}$, Poissonovo číslo je 0,35.

Hlavní napětí jsou (dle řešení příkladu 9.8) dané vztahy (9.20) a (9.21).

Hypotéza Rankine je dána vztahy (9.3) a (9.4). Pak je zřejmé, že platí

$$\sigma_{RED_{TAH}} = \max(\sigma_2, \sigma_3) = \sigma_2 = 100 \text{ MPa} \leq \sigma_{DOV_{TAH}},$$

a také

$$\sigma_{RED_{TLAK}} = |\min(\sigma_1, \sigma_3)| = |\sigma_1| = 15 \text{ MPa} \leq \sigma_{DOV_{TLAK}}.$$

Z uvedeného je zřejmé, že napjatost vyhovuje dle hypotézy maximálních normálových napětí. ▲

Příklady k procvičení

1. Určete míru bezpečnosti $k = \frac{R_e}{\sigma_{RED}}$ vůči mezi kluzu R_e pro houževnatý materiál. Při řešení použijte hypotézu HMH.

Dáno: $\sigma_1 = -450 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = -300 \text{ MPa}$, $\sigma_3 = -350 \text{ MPa}$, $R_e = 250 \text{ MPa}$.



Obsah

332 strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno



2. Určete míru bezpečnosti $k = \frac{R_e}{\sigma_{RED}}$ vůči mezi kluzu R_e pro houževnatý materiál. Při řešení použijte hypotézu Guestovu

Dáno: $\sigma_1 = -450 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = -300 \text{ MPa}$, $\sigma_3 = -350 \text{ MPa}$, $R_e = 250 \text{ MPa}$.

3. Určete míru bezpečnosti k vůči mezi kluzu materiálu. Materiál je křehký a má rozdílnou pevnost v tahu a tlaku. Při řešení použijte hypotézu Rankine.

Dáno: $\sigma_1 = 80 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = -20 \text{ MPa}$, $\sigma_3 = -120 \text{ MPa}$, $R_e = 100 \text{ MPa}$, $R_{eTLAK} = 400 \text{ MPa}$.

4. Odvoďte vztah pro redukované napětí dle hypotézy BMH.

Dáno: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$, μ .

Klíč k příkladům k procvičení

1. $k = \frac{250}{132,29} = 1,89$
2. $k = \frac{250}{150} = 1,67$
3. $k = \min(k_{TAH}, k_{TLAK}) = \min\left(\frac{100}{80}, \frac{400}{|-120|}\right) = 1,25$
4. $\sigma_{RED} = \sigma\sqrt{3 - 6\mu}$

Obsah

333. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno



Pojmy k zapamatování

- mezní Haighovy plochy
- základní hypotézy pevnosti pro materiály v křehkém stavu
- základní hypotézy pevnosti pro materiály v tvárném stavu

9.5.1. Interaktivní test

Následující test byl vytvořen pomocí balíčku **acrotex**. Test zahájíte kliknutím na tlačítko „Zacátek testu“. U otázek, kde lze volit jen jednu odpověď (test nedovolí zaškrtnout více odpovědí), je správná odpověď bodována takovým počtem bodů, jaký je uveden v závorce u zadání a špatná odpověď je bodována 0 body. U otázek, kde lze volit více správných odpovědí, je součet bodů správných odpovědí uveden v závorce u zadání a za každou špatnou odpověď bude odečten jeden bod.

1. (2b.) Jak je definována pevnostní podmínka (designová nerovnice) pro materiál ve stavu tvárném?

$$\sigma_{RED} \geq \sigma_{DOV}$$

$$\sigma_{RED} \geq 0$$

$$\sigma_{RED} \leq \sigma_{DOV}$$

$$\sigma_{RED} \leq 0$$

[Obsah](#)

334. strana ze 449

[Zavřít dokument](#)[Konec](#)[Celá obrazovka / Okno](#)

2. (2b.) Jaká jsou redukovaná napětí dle Guestovy a Rankineovy hypotézy pro případ, kdy $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$ a $\sigma_3 = 0$?

Nulová

Stejná

Různá

Nelze stanovit

3. (2b.) Jak se nazývá hypotéza maximální hustoty deformační energie na změnu tvaru?

Rankineova hypotéza

Guestova hypotéza

HMH hypotéza

Mohrova hypotéza

4. (2b.) Jaká jsou redukovaná napětí dle Guesta a HMH, jestliže pro napjatost platí $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$?

Různá a kladná.

Stejná.

Různá a záporná.

Nelze stanovit.



Obsah

335. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

5. (2b.) Jak se nazývá hypotéza maximální hustoty celkové deformační energie?

Rankineova hypotéza.

Beltramiho hypotéza.

Guestova hypotéza.

Mohrova hypotéza.

6. (2b.) Saint-Venantova hypotéza vychází z předpokladu, že na porušení součásti má největší vliv

maximální normálové napětí

maximální poměrná deformace

maximální smykové napětí

7. (2b.) Pro hodnoty hlavních napětí $\sigma_1=100\text{MPa}$, $\sigma_2=20\text{MPa}$ bude redukované napětí dle Guestovy hypotézy

80MPa

120MPa

40MPa



Obsah

336. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno



8. (2b.) Rozhodněte zda dojde k meznímu stavu, je-li $\sigma_1=60\text{MPa}$, $\sigma_2=-10\text{MPa}$, $\sigma_3=-80\text{MPa}$ a dovolené napětí $\sigma_{DOV}=60\text{MPa}$ na základě Rankinovy hypotézy

ne

ano

nelze rozhodnout

9. (2b.) Stanovte redukované napětí dle Guestovy hypotézy je-li $\sigma_1=100\text{MPa}$, $\sigma_2=-20\text{MPa}$, $\sigma_3=40\text{MPa}$

$\sigma_{red} =$

10. (2b.) Stanovte redukované napětí dle Rankinovy hypotézy je-li $\sigma_1=200\text{MPa}$, $\sigma_2=-50\text{MPa}$, $\sigma_3=-140\text{MPa}$

$\sigma_{red} =$

11. (2b.) V jaké rovině dojde k lomu při namáhání křídly prostým tahem (vzpomeňte na Rankinovu hypotézu)

v podélném řezu

v příčném řezu

v šikmém řezu (pod úhlem 45 stupňů vzhledem k podélné ose)

12. (4b.) V jaké rovině dojde k lomu u křídly s kruhovým průřezem při namáhání krutem (vzpomeňte na Rankinovu hypotézu a Mohrovu kružnici pro prostý smyk)?

v šikmém řezu (pod úhlem 45 stupňů vzhledem k podélné ose)

Obsah

337. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

v rovině podélného řezu

v rovině příčného řezu

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:

Pro ukončení testu je třeba kliknout na tlačítko „Konec testu“. Opravení testu se provede kliknutím na tlačítko „Výsledky“, správné odpovědi budou označeny zeleně a červeně budou označeny odpovědi chybné. Při použití otázky s tvořenou odpovědí se správná odpověď zobrazí v rámečku umístěném vpravo dole v navigačním panelu po kliknutí na tlačítko „Odpověď“.



Obsah

338 strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Kapitola 10

Vzpěr štíhlých prutů

Průvodce studiem

Již v druhé kapitole, věnované konceptu napětí, jsme při setkání s tlakovým namáháním upozorňovali, že u štíhlých prutů je nutná kontrola, zda nedojde k vybočení střednice, nebo-li ztrátě stability tvaru prutu. Tento jev nazýváme také vzpěrem a v této kapitole si ukážeme, jak určit kritickou osovou sílu, při které k němu dojde. Při řešení příkladů využijeme zejména poznatky o hlavních centrálních kvadratických momentech průřezu z kapitoly 1.

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete:

- rozumět podmínkám ztráty stability prutu
- seznámení s jednotlivými způsoby výpočtu
- schopni vypočítat kritické napětí
- umět rozhodnout o nutnosti počítat prut na ztrátu stability
- umět vypočítat kritickou sílu

[Obsah](#)

339 strana ze 449

[Zavřít dokument](#)[Konec](#)[Celá obrazovka / Okno](#)



10.1. Vzpěr štíhlých prutů, namáhaných tlakem

Zatížení prutu prostým tlakem bylo popsáno v předchozích kapitolách. Maximální tlaková síla je v tomto případě omezená materiálovými parametry, jako je mez kluzu nebo mez pevnosti.

Jiná situace nastává v případě štíhlých prutů, které jsou zatíženy osovým tlakem. V těchto případech dojde ke ztrátě stability tvaru (k vybočení osy prutu).

Stabilitou prutu rozumíme jeho původní rovnovážný stav.

10.2. Stabilita přímého prutu – Eulerova metoda

Elastická stabilita patří do oblasti nelineární teorie pružnosti. Neplatí zde ani Kirchhoffův zákon jednoznačnosti ani princip superpozice. Základy stability uvedl ve známost Euler v první polovině 18. století.

Z nauky o pružnosti a pevnosti víme, že ideální přímý osově tlačенý prut se nachází ve stabilní rovnováze, pokud vnější síla nedosáhne své kritické hodnoty F_{KRIT} , viz obr. 10.1.

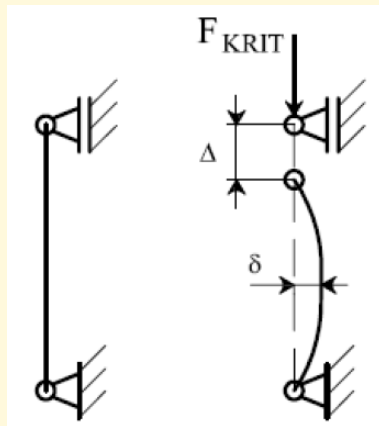
V popisu zatížení prutu existují následující možnosti:

- Přímý tvar je při $0 \leq F \leq F_{KRIT}$ a je tvarem stabilním.
- Pro $F = F_{KRIT}$ nastává tzv. kritický stav, charakterizovaný bifurkací tj. větvením rovnováhy.

[Obsah](#)

340. strana ze 449

[Zavřít dokument](#)[Konec](#)[Celá obrazovka/Okno](#)

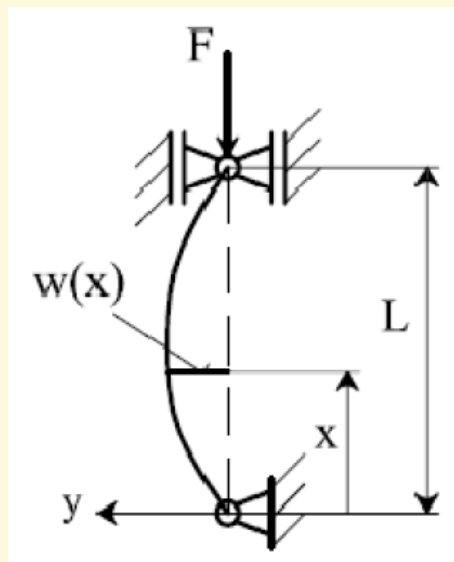


Obr. 10.1

- c) V případě, že tlaková síla je větší než kritická $F > F_{KRIT}$, přechází stabilní tvar v tvar labilní a dochází ke ztrátě stability tvaru.

Ideální prut je matematickou idealizací skutečného prutu, který se vyznačuje geometrickými nedokonalostmi.

Mějme dokonale přímý prut stálého průřezu, zatížený osovými tlakovými silami, působícími v těžišti průřezu. Prut je uložen na jednom konci v kloubu a na druhém konci posuvně, viz obr. 10.2.



Obr. 10.2

Přibližnou diferenciální rovnici průhybové čáry volíme ve tvaru

$$w''(x) = -\frac{M(x)}{E \cdot I_z}. \quad (10.1)$$

Ohybový moment v obecné vzdálenosti x lze dle obr. 10.2 vyjádřit ve tvaru

$$M(x) = F \cdot w(x). \quad (10.2)$$

Tyto dvě rovnice vyjadřují Eulerovo statické kritérium stability.

Řešením této soustavy (10.1 a 10.2) získáme obecné řešení ve tvaru

$$w(x) = A \cdot \sin(\alpha \cdot x) + B \cdot \cos(\alpha \cdot x), \quad (10.3)$$

kde α je konstanta stanovená dle

$$\alpha^2 = \frac{F}{E \cdot I_z}, \quad (10.4)$$

kde E je modul pružnosti v tahu a I_z je hlavní centrální kvadratický moment průřezu. Pro stanovení konstant A a B aplikujeme následující okrajové podmínky

$$1) \ w(x = 0) = 0, \quad (10.5)$$

$$2) \ w(x = L) = 0. \quad (10.6)$$

Po dosazení okrajových podmínek získáme následující vztahy

$$Z(1) : B = 0 \Rightarrow w(x) = A \cdot \sin(\alpha \cdot x), \quad (10.7)$$

$$Z(2) : w(x) = A \cdot \sin(\alpha \cdot L), \quad (10.8)$$

což vede ke dvěma řešením:



Obsah

343. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

- Je-li $A = 0$, pak $\sin(\alpha \cdot L)$ může nabývat hodnoty od 0 do 1, tj. součin $\alpha \cdot L$ síla F mohou být libovolné. K prohnutí nedojde, protože v každém místě je $w(L) = 0$.
- Je-li $A \neq 0$, pak došlo k vybočení prutu, pak ale musí být $\sin(\alpha \cdot L) = 0$, což je trigonometrická funkce, jejíž kořeny jsou 0, π , 2π , ..., $k\pi$.

Pro kořen $\alpha \cdot L = 0$ a po dosazení do (10.4) toto vede k triviálnímu řešení $F = 0$, tj. nezatížený prut. Pro další kořeny $\alpha \cdot L = k \cdot \pi$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) a dosazením do vztahu (10.4) získáme

$$\sqrt{\frac{F}{E \cdot I_z}} \cdot L = k \cdot \pi. \quad (10.9)$$

Upravením této rovnice získáme obecný vztah pro výpočet kritické síly, ve tvaru

$$F_{KRIT} = \frac{k^2 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I_z}{L^2}. \quad (10.10)$$

Nejmenší kritická síla bude pak pro $k = 1$, tedy

$$F_{KRIT} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_z}{L^2}. \quad (10.11)$$

Tento výraz (10.12) platí pouze pro průřezy se stejnými hlavními centrálními kvadratickými momenty k oběma osám (čtverec, kruh, mezikružší). Pro ostatní průřezy prizmatického prutu platí

$$F_{KRIT} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{L^2}. \quad (10.12)$$



Obsah

344. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Při této kritické síle nastane první vybočení prutu a rovnice průhybové křivky bude

$$w(x) = A \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{L}\right). \quad (10.13)$$

Věta 10.1. Výpočet kritické síly je nutné vždy vztahovat k minimálnímu hlavnímu centrálnímu kvadratickému momentu průřezu prutu.

Analogicky se řeší i další případy ztráty stability pro různá uložení konců prutů. Rozlišujeme čtyři základní případy, viz obr. 10.3.



Obsah

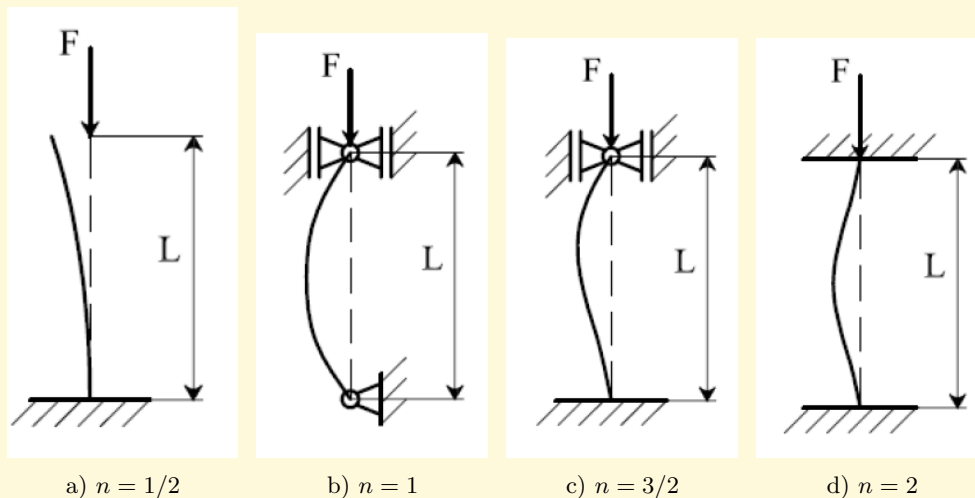
345. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno



Obr. 10.3

Obecně pak pro jednotlivé případy uložení prutů lze vztah (10.12) upravit do tvaru

$$F_{KRIT} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{L_{red}^2}, \quad (10.14)$$

kde L_{red} je redukovaná délka prutu a lze ji stanovit ze vztahu

$$L_{red} = \frac{L}{n}, \quad (10.15)$$

kde n je koeficient uložení prutu, viz obr. 10.3.

Obsah

346. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

10.3. Vyjádření vzpěrné pevnosti kritickým napětím

Kritické napětí σ_{KR} lze vyjádřit pomocí tohoto vztahu

$$\sigma_{KR} = \frac{F_{KRIT}}{S} \leq \sigma_u, \quad (10.16)$$

kde S je plocha průřezu prutu a σ_u je mez úměrnosti (mez kluzu).

Dosazením vztahu (10.14) do této rovnice dostaneme vztah

$$\sigma_{KR} = \frac{n^2 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{L^2 \cdot S}. \quad (10.17)$$

Tento výraz lze upravit do této podoby

$$\sigma_{KR} = \frac{n^2 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot i^2}{L^2}, \quad (10.18)$$

kde i je *poloměr setrvačnosti* vyjádřený vztahem

$$i = \sqrt{\frac{I_{min}}{S}}. \quad (10.19)$$

Poměr délky prutu a poloměru setrvačnosti jeho průřezu vyjadřuje tzv. štíhlost prutu λ

$$\lambda = \frac{L}{i}. \quad (10.20)$$



Obsah

347. strana ze 449



Zavřít dokument

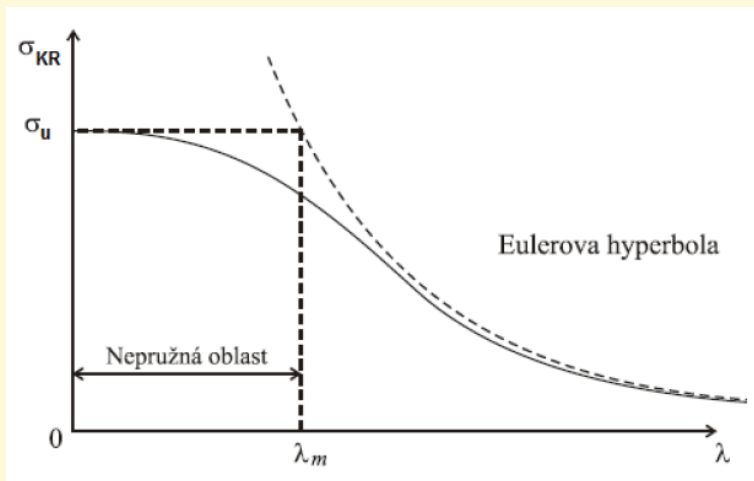
Konec

Celá obrazovka / Okno

Výraz pro kritické napětí lze následně upravit do tvaru

$$\sigma_{KR} = \frac{n^2 \cdot \pi^2 \cdot E}{\lambda^2}. \quad (10.21)$$

Závislost kritického napětí σ_{KR} na štíhlosti prutu λ je možné graficky znázornit pomocí tzv. *Eulerovy hyperboly*, viz obr. 10.4.



Obr. 10.4

Z obr. 10.4 je patrný nelineární vztah mezi uvedenými veličinami. Pro vysoké hodnoty štíhlosti prutu nabývá kritické zatížení (potažmo napětí) velmi malých hodnot. Při hodnotě štíhlostního poměru menší než tzv. *mezní štíhlost* λ_m již nelze použít Eulerovu teorii. V této oblasti se k řešení stability používá například *Tetmajerova aproximace*, která bude blíže popsána v následující kapitole.

Za předpokladu platnosti Hookeova zákona je mezní hodnota napětí dána mezí úměrnosti materiálu. Z této hodnoty pak lze stanovit *mezní štíhlost* ve tvaru

$$\lambda_m = n\pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_u}}. \quad (10.22)$$

10.4. Nepružná oblast vzpěru

V případě, kdy $\lambda < \lambda_m$, používáme tzv. Tetmajerův vztah ve tvaru

$$\sigma_{KR} = a - b \cdot \lambda, \quad (10.23)$$

kde a , b jsou materiálové konstanty uvedené v tab. 10.1. Pro litinu a křehké materiály vyhovuje lépe *Jasinského vzorec*

$$\sigma_{KR} = a - b \cdot \lambda + c \cdot \lambda^2. \quad (10.24)$$



Obsah

349 strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Materiál	a [MPa]	b [MPa]	c [MPa]	λ_m
Ocel	320	1, 2	0	90
Litina	776	12	0,053	80
Dřevo	29,3	0,194	0	110

Tab. 10.1

Kritická síla je pak dána vztahem

$$F_{KR} = \sigma_{KR} \cdot S. \quad (10.25)$$

Na závěr připomeňme, že o tom, jakou metodu řešení lze použít pro daný případ, rozhoduje poměr mezi štíhlostí prutu λ a mezní štíhlostí λ_m . V případě, že $\lambda > \lambda_m$, použijeme Eulerovo řešení. V opačném případě volíme Tetmajerovo řešení (10.23) nebo Jasinského vztah (10.24). S problematikou ztráty stability tvaru se například ještě setkáváme u tenkostěnných konstrukčních dílů (tzv. skořepin), jejich řešení však přesahuje rozsah těchto skript. Hlouběji se této problematice věnují například publikace [24] a [25].



Obsah

350 strana ze 449



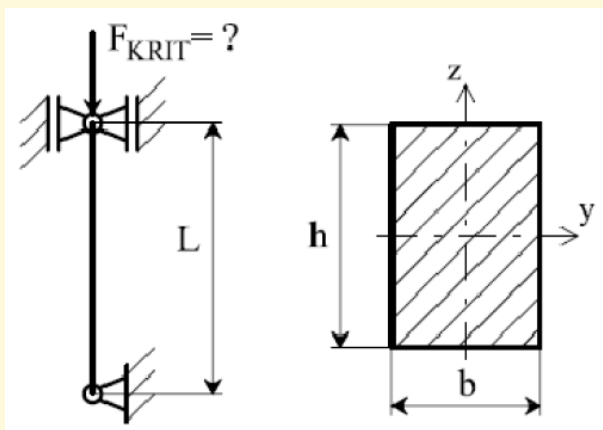
Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Příklad 10.2. Stanovte kritickou sílu F_{KRIT} pro prut, namáhaný na vzpěr (obr. 10.5).

Dáno: $L = 1200 \text{ mm}$, $b = 20 \text{ mm}$, $b = 60 \text{ mm}$, $h = 60 \text{ mm}$, $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $\sigma_u = 210 \text{ MPa}$.



Obr. 10.5

Pro výpočet kritické síly je nutné nejprve začít s výpočtem kvadratických momentů k těžištním osám (podrobně popsáno v kapitole 1). Kvadratický moment k ose z vypočítáme dle vztahu

$$I_z = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{20 \cdot 60^3}{12} = 360000 \text{ mm}^4.$$

(P1)

Kvadratický moment k ose y vypočítáme dle vztahu

$$I_y = \frac{h \cdot b^3}{12} = \frac{60 \cdot 20^3}{12} = 40000 \text{ mm}^4.$$

(P2)

K výpočtu kritické síly se volí minimální kvadratický moment. V tomto případě je $I_{min} = I_y$.

Následuje výpočet poloměru setrvačnosti i dle vztahu (10.19)

$$i = \sqrt{\frac{I_{min}}{S}} = \sqrt{\frac{40000}{20 \cdot 60}} = 5,774 \text{ mm}.$$

(P3)

Následuje výpočet štíhlosti prutu λ dle vztahu (10.20)

$$\lambda = \frac{L}{i} = \frac{1200}{5,774} = 207,828.$$

(P4)



Obsah

352 strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Z materiálových parametrů a koeficientu uložení prutu vypočítáme mezní štíhlost dle vztahu (10.22)

$$\lambda_m = n\pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_u}} = 1 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{2,1 \cdot 10^5}{210}} = 99,3.$$

(P5)

Porovnáním obou štíhlostí rozhodneme o způsobu výpočtu kritické síly. V tomto případě je $\lambda > \lambda_m$, což znamená, že k výpočtu kritické síly použijeme Eulerův vztah (10.14).

Dle vztahu (10.15) nejprve vypočítáme redukovanou délku prutu

$$L_{red} = \frac{L}{n} = \frac{1200}{1} = 1200 \text{ mm}.$$

(P6)

Z Eulerova vztahu (10.14) pak stanovíme kritickou sílu

$$F_{KRIT} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{L_{red}^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 40000}{1200^2} = 57572,7 \text{ N}.$$

(P7)



Obsah

353. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Uvažujme dále, že tyč bude mít délku pouze $L = 300 \text{ mm}$, pak štíhlost prutu bude rovna

$$\lambda = \frac{L}{i} = \frac{300}{5,774} = 51,957.$$

(P8)

Porovnáním s mezní štíhlostí dostaneme $\lambda < \lambda_m$, což znamená, že k výpočtu kritické síly použijeme Tetmajerův (10.23) nebo Jasinského (10.24) vzorec. Pro ocel jsou oba vzorce stejné. Kritické napětí pak bude rovno

$$\sigma_{KR} = a - b \cdot \lambda = 320 - 1,2 \cdot 51,957 = 257,652 \text{ MPa}.$$

(P9)

Kritická síla je pak dána vztahem

$$F_{KRIT} = \sigma_{KR} \cdot S = 257,652 \cdot 20 \cdot 60 = 309182,4 \text{ N}.$$

(P10)



Obsah

354. strana ze 449



Zavřít dokument

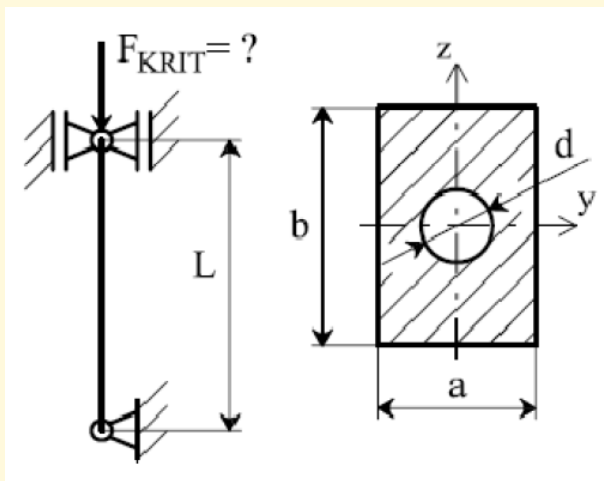
Konec

Celá obrazovka/Okno

Příklady k procvičení

1. Stanovte kritickou sílu F_{KRIT} pro prut, namáhaný na vzpěr (obr. 10.6).

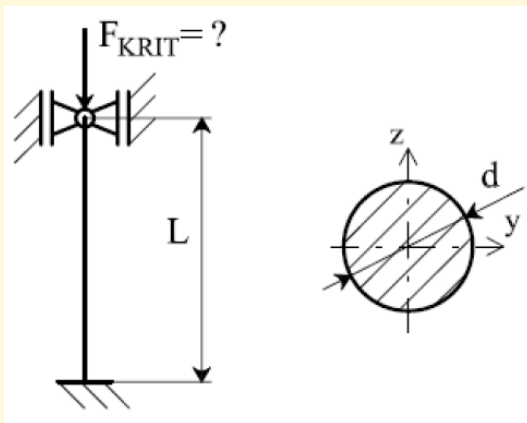
Dáno: $L = 2200 \text{ mm}$, $d = 20 \text{ mm}$, $a = 40 \text{ MPa}$, $b = 60 \text{ mm}$, $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $\sigma_u = 210 \text{ MPa}$.



Obr. 10.6

2. Stanovte kritickou sílu F_{KRIT} pro prut, namáhaný na vzpěr dle obr. 10.7.

Dáno: $L = 1500 \text{ mm}$, $d = 20 \text{ mm}$, $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $\sigma_u = 210 \text{ MPa}$.



Obr. 10.7

Klíč k příkladům k procvičení

1. $F_{KRIT} = 133\,669 \text{ N}$
2. $F_{KRIT} = 16\,270 \text{ N}$

Pojmy k zapamatování

- kritická síla
- Eulerovo statické kritérium stability
- základní případy vzpěru
- redukovaná délka prutu
- koeficient uložení prutu
- mezní štíhlost
- Tetmajerův vztah
- Jasinského vztah

10.4.1. Interaktivní test

Následující test byl vytvořen pomocí balíčku **acrotex**. Test zahájíte kliknutím na tlačítko „Zacátek testu“. U otázek, kde lze volit jen jednu odpověď (test nedovolí zaškrtnout více odpovědí), je správná odpověď bodována takovým počtem bodů, jaký je uveden v závorce u zadání a špatná odpověď je bodována 0 body. U otázek, kde lze volit více správných odpovědí, je součet bodů správných odpovědí uveden v závorce u zadání a za každou špatnou odpověď bude odečten jeden bod.

[Obsah](#)

357. strana ze 449

[Zavřít dokument](#)[Konec](#)[Celá obrazovka / Okno](#)

1. (2b.) které těleso je ve stabilní poloze:

Kulička na nakloněné rovině

Padající kulička při dopadu na podlahu

Hrací kostka ležící na vodorovném stole

2. (2b.) Které z následujících těles musíme kontrolovat z hlediska stability (obdobné již je)

Ponorka (kulová nádoba kde tlak je větší vně nádoby než uvnitř).

Balónek (kulová nádoba kde tlak je větší uvnitř nádoby než vně).

Kabel elektrického vedení natažený mezi dvěma sloupy el. vedení.

3. (2b.) Který z následujících bodů nemá vliv na velikost kritické síly

rozměrové výrobní tolerance prutu

rozptyl materiálových vlastností

zatěžující síla



Obsah

358 strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno



4. (2b.) Za jakých podmínek musíme počítat prut na ztrátu stability?

Prut je nezatížený.

Prut je namáhán tahovou silou.

Prut je namáhán tlakovou silou.

5. (2b.) Co se stane při překročení kritické síly

Únosnost prutu při překročení kritické síly roste mnohem pomaleji než do kritické síly

Únosnost prutu se stává při překročení kritické síly konstantní - tedy poměr síla/deformace je konstantní.

Únosnost prutu prudce klesá při překročení kritické síly - prut tedy není schopen přenést ani síly menší než je síla kritická.

6. (2b.) Vztah $F_{KRIT} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{L_{red}^2}$ je výsledkem řešení dle?

Tetmajera.

Eulera.

Jasinského.

Obsah

359 strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

7. (2b.) Pro jaký kvadratický moment průřezu se stanovuje kritická síla?

Maximální.

Základní.

Minimální.

8. (2b.) Kdy lze použít Eulerovu metodu řešení?

$$\lambda < \lambda_m.$$

$$\lambda << \lambda_m.$$

$$\lambda > \lambda_m.$$

9. (2b.) U prutové konstrukce jeden prut nevyhověl z hlediska stability. Jedná se o druhý případ vzpěru. Štíhlost prutu je několikanásobná vůči mezní štíhlosti. Jak situaci napravíme?

Použijeme "kvalitnější" ocel např. místo oceli $\sigma_u = 350$ MPa ocel $\sigma_u = 750$ MPa.

Zvětšíme délku nevyhovujícího prutu.

Zvětšíme průřez nevyhovujícího prutu.



Obsah

360. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

10. (2b.) Jaká je hodnota redukované délky prutu vůči délce prutu v případě jednostranného vetknutí (1.případ vzpěru)?

poloviční

dvojnásobná

stejná

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:

Pro ukončení testu je třeba kliknout na tlačítko „Konec testu“. Opravení testu se provede kliknutím na tlačítko „Výsledky“, správné odpovědi budou označeny zeleně a červeně budou označeny odpovědi chybné. Při použití otázky s tvořenou odpovědí se správná odpověď zobrazí v rámečku umístěném vpravo dole v navigačním panelu po kliknutí na tlačítko „Odpověď“.



Obsah

361. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Kapitola 11

Pevnost skutečných strojních částí

Průvodce studiem

V předchozím studiu jsme se seznámili se základními druhy namáhání. Předpokládali jsme, že vnější zátěžné síly a momenty, působící na danou součást, se nemění s časem, jedná se tedy o statické zatěžování. Dále bylo předpokládáno, že průřez součásti se nemění (prizmatický tvar). Při namáhání tahem (tlakem) bylo předpokládáno rovnoměrné rozložení napětí v průřezu; při namáhání ohybem bylo předpokládáno rozložení normálových napětí v průřezu podle přímky; při namáhání krutem rozložení smykových napětí podle přímky. Ve skutečnosti nejsou součásti zpravidla v celém rozsahu prismatické, jejich průřez se zpravidla mění (zápichy, osazení, drážky pro pero, závity, otvory apod). Citované změny průřezu jsou v literatuře označovány pojmem konstrukční vruby. Účinkem vrubů dochází v průřezu k nerovnoměrnému rozložení napětí; toto napětí dosahuje maxima v kořeni vrubu (hovoříme o koncentraci napětí). Nerovnoměrné rozložení napětí má zvláště velký význam v případech, kdy vnější zatížení se mění periodicky s časem. V kořenech vrubů dochází ke vzniku (iniciaci) únavových trhlin, jejichž růst je závislý na čase. Výsledné porušení součásti je nazýváno únavou materiálu.



Obsah

362. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete:

- umět vysvětlit pojem konstrukční vrub
- znát základní charakteristiky konstrukčních vrubů
- znát základní druhy cyklického zatěžování
- chápat problematiku, týkající se únavy materiálu
- schopni stanovit životnost součástí

11.1. Základní charakteristiky konstrukčních vrubů

Účinkem vrubu dochází k místnímu zvýšení napětí [26]. Velikost maximálního napětí se v praxi vyjadřuje pomocí *teoretického součinitele koncentrace napětí* α_t , který je definován následovně

$$\alpha_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_n}, \quad (11.1)$$

kde σ_n je *nominální napětí*, vypočítané za předpokladu rovnoměrného rozložení napětí v nebezpečném průřezu. Hodnoty teoretických součinitelů koncentrace napětí pro jednoduché případy je možno určit výpočtem na základě *matematické teorie pružnosti* (obr. 11.1).



Obsah

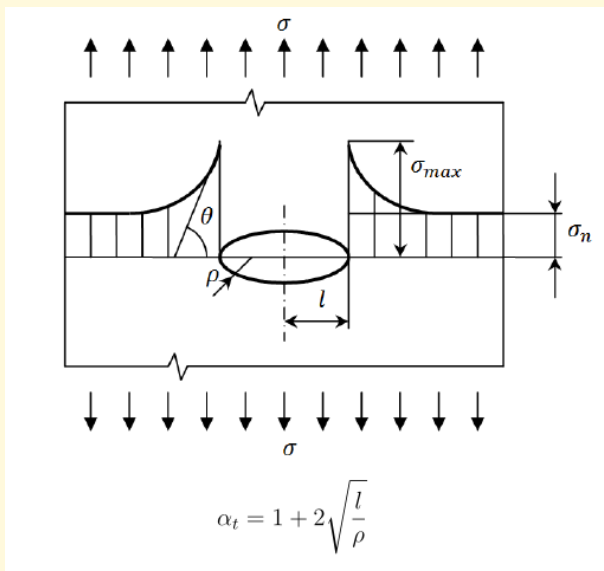
363. strana ze 449



Zavřít dokument

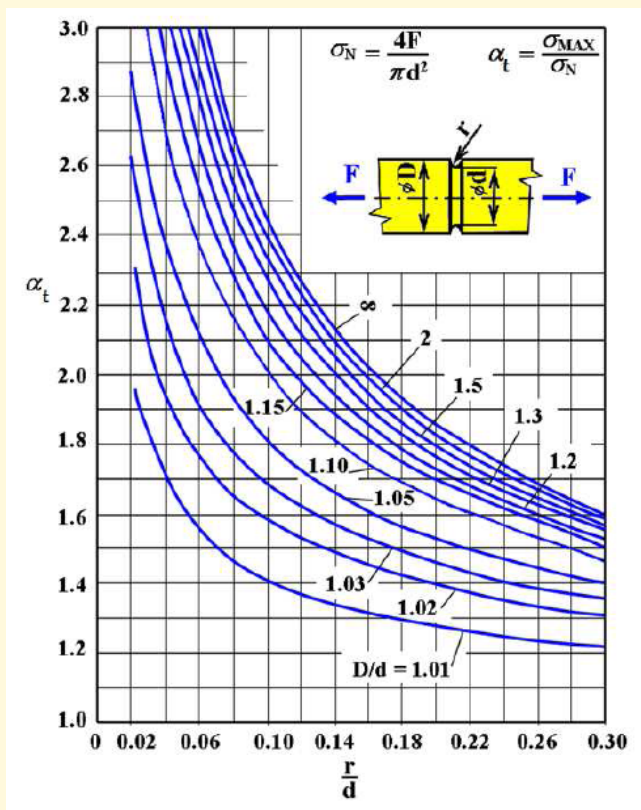
Konec

Celá obrazovka / Okno

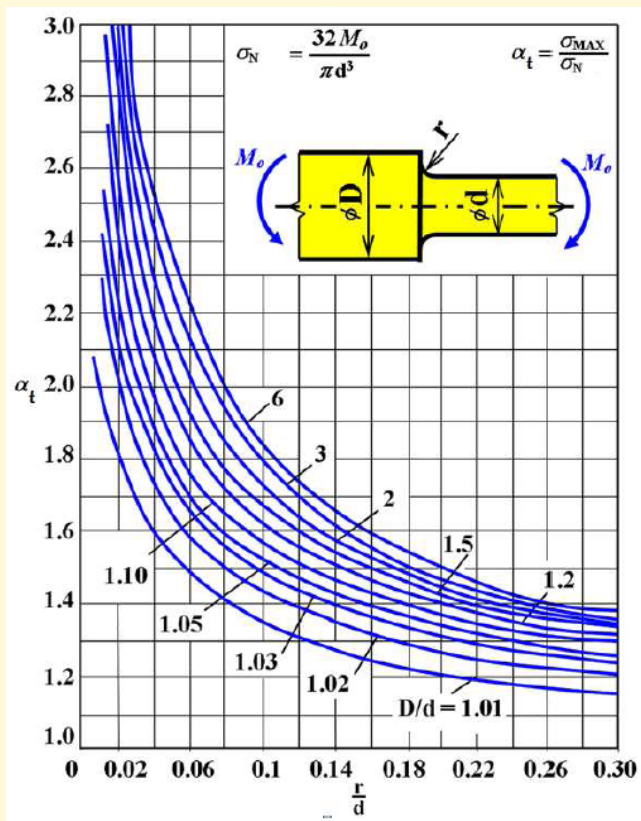


Obr. 11.1

Ve složitějších případech je možno určit součinitele koncentrace napětí pomocí *metody konečných prvků*, resp. experimentálně, např. pomocí fotoelasticimetrie (kapitola 12). Součinitele koncentrace napětí, získané touto cestou, je pak zvykem uvádět v tabulkách spolu s obrázkem vrubu a vyznačením způsobu namáhání (obr. 11.2, 11.3).



Obr. 11.2



Obr. 11.3

Účinek vrubu na napjatost odeznívá tím rychleji, čím je vrub ostřejší. Spád napětí je charakterizován *gradientem napětí*.

Poměrný gradient napětí je definován vztahem

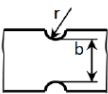
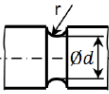
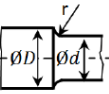
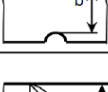
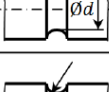
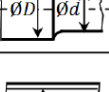
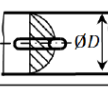
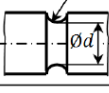
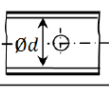
$$\chi_{\sigma} = \frac{1}{\sigma_{max}} \left| \frac{d\sigma}{d\chi} \right|_{x=0} = \frac{1}{\sigma_{max}} \operatorname{tg} \chi \quad (11.2)$$

a *bezrozměrný gradient napětí* vztahem

$$C_{\sigma} = \chi_{\sigma} r, \quad (11.3)$$

kde r je poloměr křivosti vrubu.

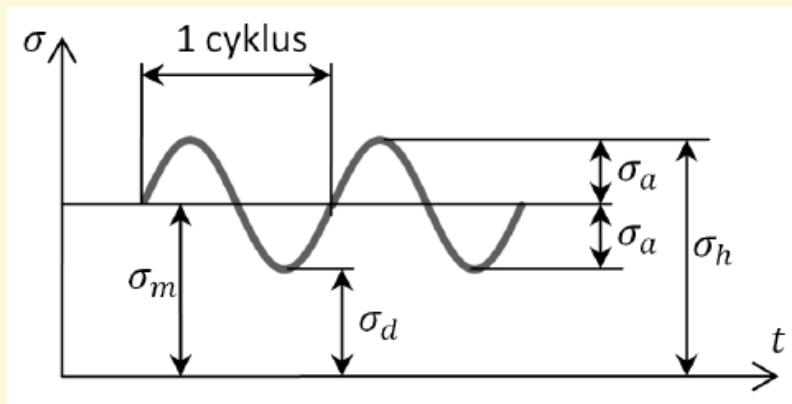
Bezrozměrné gradienty napětí pro některé případy konstrukčních vrubů jsou uvedeny v obr. 11.4.

Namáhání	Tvar vrubu	C_{σ}	Tvar vrubu	C_{σ}	Tvar vrubu	C_{σ}
Tah-tlak		2		2		2
Ohyb		$2 + 2 \frac{r}{b}$		$2 + 2 \frac{r}{b}$		$2 + 4 \frac{r}{D + d}$
Krut		$1 + 2 \frac{r}{b}$		$1 + 2 \frac{r}{b}$		3

Obr. 11.4

11.2. Druhy cyklického zatěžování

Dle charakteru dělíme cyklické zatěžování na stochastické (náhodné) a deterministické. V druhém případě je známa hodnota zatížení v kterémkoliv okamžiku. Deterministické zatěžování může být periodické nebo neperiodické. Často se v praxi setkáváme s harmonickým zatěžováním, kdy se napětí v čase mění sinusově od jisté minimální hodnoty (dolní napětí) po maximální hodnotu (horní) napětí, viz obr. 11.5.



Obr. 11.5

Pro střední napětí cyklu σ_m a amplitudu napětí σ_a platí následující vztahy

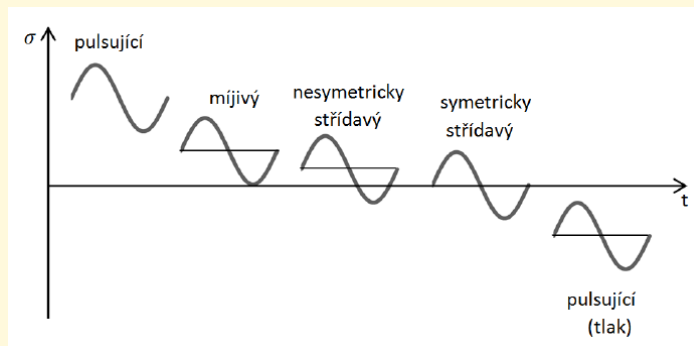
$$\sigma_m = \frac{\sigma_h + \sigma_d}{2}, \quad (11.4)$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_h - \sigma_d}{2}, \quad (11.5)$$

kde σ_h je horní napětí cyklu a σ_d je dolní napětí cyklu. Pomocí těchto hodnot, případně amplitudy napětí σ_a a středního napětí σ_m , se definuje součinitel nesymetrie cyklu

$$R = \frac{\sigma_d}{\sigma_h} = \frac{\sigma_m - \sigma_a}{\sigma_m + \sigma_a}. \quad (11.6)$$

Dle charakteru definujeme jednotlivé případy cyklu, viz obr. 11.6.

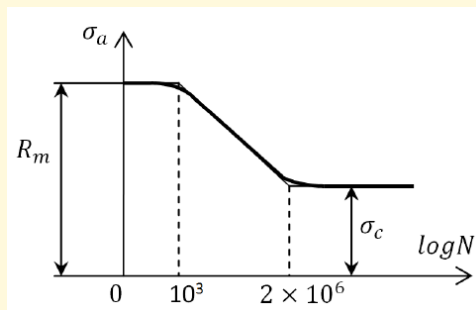


Obr. 11.6

11.3. Wöhlerova křivka a mez únavy hladkých těles

Vliv cyklického zatěžování byl poprvé zkoumán v druhé polovině 19. století *Augustem Wöhlerem* při studiu kolejnic. Bylo třeba vysvětlit, proč se u cyklického zatěžování materiál porušuje při napětích menších než mez kluzu, aniž by docházelo k plastickým deformacím. Při zkouškách byly zkušební vzorky zatěžovány symetrickým střídavým cyklem o dané amplitudě napětí a zjišťoval se počet cyklů do porušení N . Zkušební vzorky musí být ze stejného materiálu, mít stejný tvar a být stejně opracovány. Zpravidla se jedná o zkušební tyčinky o průměru $7 \div 10 \text{ mm}$ s leštěným povrchem.

Závislost mezi amplitudou napětí a životností součástí je znázorněna *Wöhlerovou křivkou*. V technické praxi se zpravidla Wöhlerova křivka znázorňuje v semilogaritmických souřadnicích, přičemž na osu pořadnic se vynáší amplituda napětí a na osu úseček cykly v logaritmických souřadnicích (obr. 11.7). Celý Wöhlerův diagram lze rozdělit na tři úseky [27].



Obr. 11.7



Obsah

370 strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

V prvním úseku ($N \cong 10^3$ cyklů), kdy počet cyklů je malý, se jedná o oblast statických lomů.

Ve druhém úseku amplituda napětí klesá. Jedná se o tzv. úsek časové pevnosti s omezenou životností. Dochází k porušení nízkocyklovou únavou.

Ve třetím úseku, asi při $N \geq 2 \cdot 10^6$ cyklů, je zřejmé, že amplituda napětí se nemění. To znamená, že při této amplitudě vydrží materiál neomezeně dlouho. Hovoříme o *mezi únavy materiálu*.

Definice 11.1. *Mez únavy lze definovat jako největší napětí, které nevede k lomu ani po překonání smluvní hranice 10^7 cyklů. Tato definice platí u ocelí; slitiny hliníku nemají konstantní mez únavy.*

Mez únavy se dá určit jednak experimentálně, rovněž ale bylo prokázáno, že mez únavy hladkých těles je funkcí konvenční pevnosti R_m .

Pro konstrukční oceli s mezí pevnosti $R_m = (500 \div 1500 \text{ MPa})$ platí následující empirické vztahy.

[Obsah](#)

371. strana ze 449

[Zavřít dokument](#)[Konec](#)[Celá obrazovka/Okno](#)

Tah–tlak	$\sigma_c = 0,36 R_m + 13$
Míživý tah	$\sigma_{hc} = 0,59 R_m + 38$
Plochý ohyb	$\sigma_{o,c} = 0,29 R_m + 111$
Míživý ohyb	$\sigma_{o,hc} = 0,4 R_m + 317$
Krut	$\tau_c = 0,21 R_m + 49$
Míživý krut	$\tau_{hc} = 0,1 R_m + 485$
Ohyb za rotace	$\sigma_{oR,C} = 0,36 R_m + 44$

11.4. Faktory, ovlivňující mez únavy

Mez únavy hladkého tělesa (bez koncentrátorů napětí) je závislá na celé řadě faktorů, k nimž zejména patří velikost tělesa, jakost povrchu, nesymetrie zatěžovacího cyklu, vliv víceosé napjatosti.

11.4.1. Vliv velikosti tělesa a gradientu napětí

Mez únavy s rostoucím rozměrem vzorku poněkud klesá, což je dáno odlišnostmi povrchových vrstev a jádra průřezu, která je zpravidla u větších vzorků horší.

Podle Němce a Puchnera je možno vliv velikosti vyjádřit následovně

$$\nu = 1 - \sqrt{0,02 \ln \frac{D}{d}}, \quad (11.7)$$

kde d je rozměr menšího vzorku a D rozměr skutečné součásti.



Obsah

372. strana ze 449



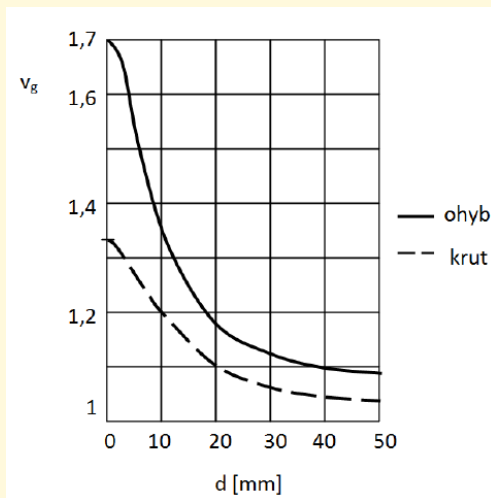
Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Při ohybu a krutu se rovněž uplatňuje vliv gradientu napětí (napětí roste se vzdáleností od osy). Proto je např. mez únavy v ohybu větší než mez únavy v tahu, a to tím více, čím je menší průměr zkušební vzorku.

Vliv gradientu napětí se projevuje zejména u součástí menších rozměrů (obr. 11.8), u rozměrů větších než cca 50 mm je jeho vliv zanedbatelný. Důvodem je skutečnost, že u součástí větších rozměrů se méně projeví odlišné vlastnosti povrchové vrstvy, která má vlivem technologického zpracování poněkud jiné mechanické vlastnosti než jádro součásti. Vliv gradientu napětí pro kruhový průřez je znázorněn na obr. 11.8.



Obr. 11.8



Obsah

373. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

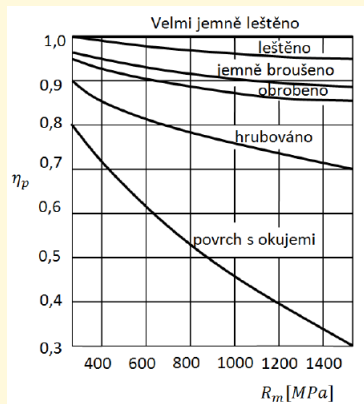
Celkový součinitel velikosti součástí, namáhané střídavým ohybem ν_σ (krutem ν_τ), je závislý na součiniteli gradientu napětí ν_g a součiniteli velikosti, tedy

$$\nu_\sigma = f(\nu_g, \nu), \quad (11.8)$$

$$\nu_\tau = f(\nu_g, \nu). \quad (11.9)$$

11.4.2. Vliv jakosti povrchu

Protože k nukleaci trhlin dochází zpravidla v povrchové vrstvě, je mez únavy ovlivňována jakostí povrchu. Tento vliv je ve výpočtech zohledněn součinitelem jakosti povrchu η_p , který je definován jako podíl meze únavy součástí s daným povrchem k mezi únavy součástí s povrchem leštěným (obr. 11.9).



Obr. 11.9



Obsah

374. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Při namáhání krutem je součinitel jakosti povrchu roven

$$\eta_{pk} = \frac{1 + \nu_p}{2}. \quad (11.10)$$

Mez únavy hladké části (bez vrubu) v tahu–tlaku nebo ohybu je pak

$$\sigma_c^\times = \sigma_c \nu_\sigma \eta_p \quad (11.11)$$

a v krutu

$$\tau_c^\times = \tau_c \nu_\tau \eta_{pk}, \quad (11.12)$$

kde σ_c, τ_c jsou meze únavy leštěných vzorků.

11.4.3. Vliv nesymetrie cyklu

Skutečné zatěžování součástí je zpravidla nesymetrické, se statickou složkou napětí σ_m různou od nuly. Experimenty bylo prokázáno, že tahové střední napětí snižuje amplitudu napětí na mezi únavy, tlakové ji naopak zvyšuje.

Závislost $\sigma_a = f(\sigma_m)$ je znázorněna v Haighově diagramu (obr. 11.10).



Obsah

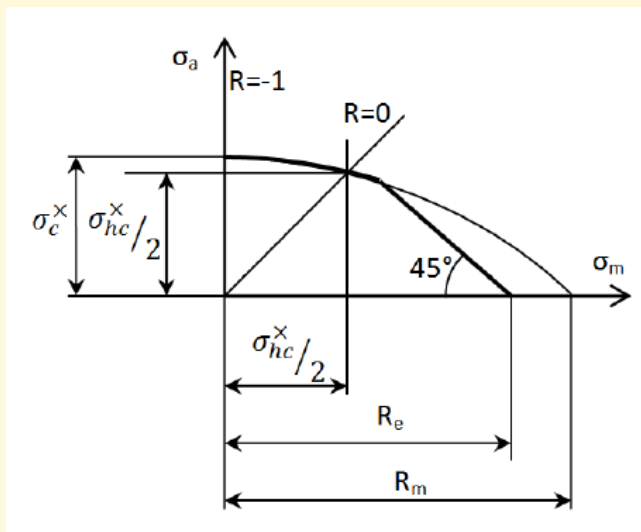
375. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno



Obr. 11.10

Skutečný tvar tohoto diagramu se zpravidla idealizuje. V praxi se nejčastěji používá náhrada Goodmanovou přímkou

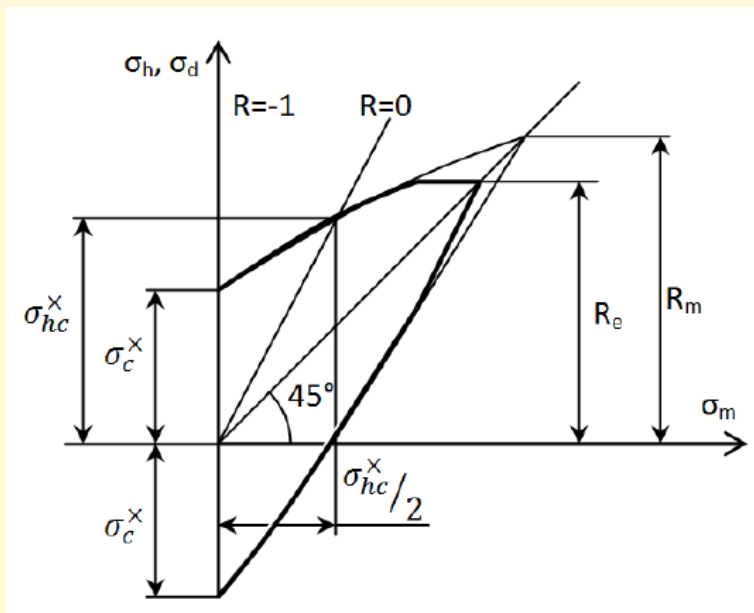
$$\frac{\sigma_a}{\sigma_c^x} = 1 - \frac{\sigma_m}{R_m} \quad (11.13)$$

nebo Gerberovou parabolou

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_c^x} = 1 - \left(\frac{\sigma_m}{R_m} \right)^2. \quad (11.14)$$

Celý diagram ovšem není použitelný, protože střední složka i amplituda napětí nesmí překročit mez kluzu. Proto je diagram omezen přímkou svírající s vodorovnou osou úhel 45° .

V praxi se rovněž používá diagram Smithův, udávající závislost $\sigma_h = f(\sigma_m)$ (obr. 11.11).

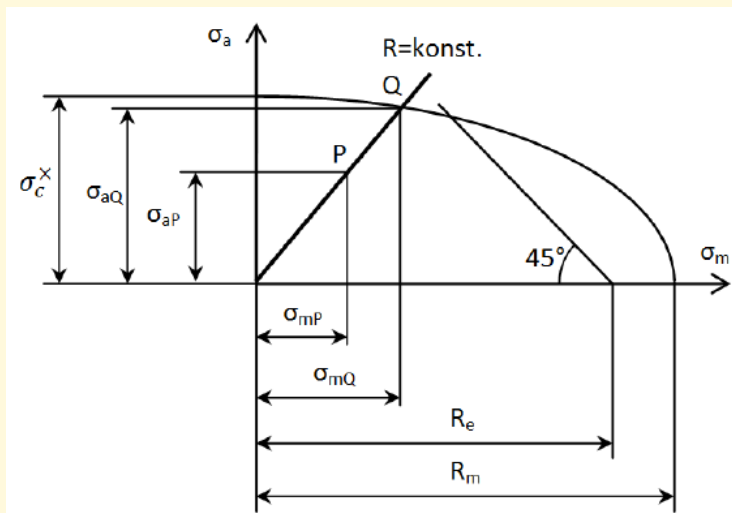


Obr. 11.11

11.4.4. Stanovení bezpečnosti vůči mezi únavy

Jestliže je amplituda napětí σ_{aP} a střední napětí σ_{mP} a meznímu stavu odpovídá v Haighově diagramu bod Q (obr. 11.12), pak *součinitel bezpečnosti* je definován následovně

$$k = \frac{\sigma_{aQ}}{\sigma_{aP}} = \frac{\sigma_{mQ}}{\sigma_{mP}}. \quad (11.15)$$



Obr. 11.12

11.5. Mez únavy těles s vruby

V reálných součástech existují vždy koncentrátory napětí, ve kterých se přednostně iniciují trhliny. Účinek vrubu je vyjádřen součinitelem vrubu β , který je definován jako podíl meze únavy části bez vrubu $\sigma_c^\times$ k mezi mezi únavy částí s vrubem σ_c^*

$$\beta = \frac{\sigma_c^\times}{\sigma_c^*}. \quad (11.16)$$

Obecně je součinitel vrubu menší než teoretický součinitel koncentrace napětí $\beta < \alpha_t$.

Pro výpočet součinitele vrubu existuje celá řada metod. Jednoduchý způsob výpočtu součinitele vrubu navrhli na základě experimentů Siebel a Stieler, podle nichž je

$$\frac{\alpha_t}{\beta} = 1 + \sqrt{c\chi_\sigma}, \quad (11.17)$$

kde χ_σ je *poměrný gradient napětí* a c je materiálová konstanta. Graficky jsou průběhy rovnice (11.17) znázorněny na obr. 11.13.



Obsah

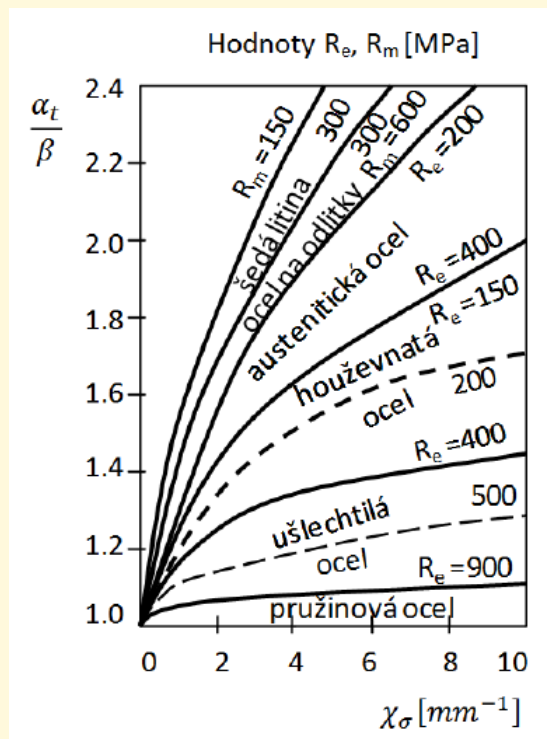
379 strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno



Obr. 11.13

Mez únavy částí s vruby je pak definována následovně

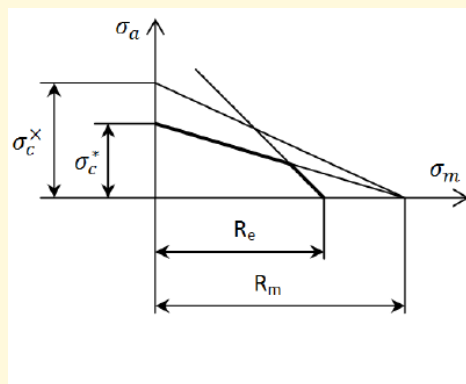
$$\sigma_c^* = \frac{\sigma_c^x}{\beta} = \frac{\sigma_c \nu_\sigma}{\beta} \eta_p \quad (11.18)$$

a

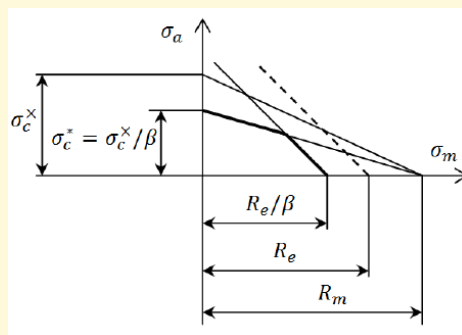
$$\tau_c^* = \frac{\tau_c^x}{\beta} = \frac{\tau_c \nu_\tau}{\beta} \eta_{pk}. \quad (11.19)$$

11.5.1. Smyčkové diagramy částí s vruby

U houževnatých materiálů se účinek vrubu projevuje pouze na střídavé složce cyklu, kde ovlivňuje velikost amplitudy napětí (obr. 11.14), střední napětí zůstává nezměněno. U křehkých materiálů vruby ovlivňují i statické mechanické vlastnosti (obr. 11.15).



Obr. 11.14



Obr. 11.15



11.6. Mez únavy při složeném namáhání

Zpravidla se jedná o kombinaci ohybu a krutu, resp. tahu–tlaku a krutu a jen výjimečně o jiné případy. Působí–li maximální napětí od jednotlivých druhů namáhání ve stejném místě a vždy současně, platí pro redukované napětí vztah

$$\sigma_{red}^2 = \sigma_a^2 + k\tau_a^2, \quad (11.20)$$

kde $k = 3$ pro hypotézu HMH a $k = 4$ pro hypotézu Guestovu. Dělíme-li tuto rovnici kvadrátem meze únavy $\sigma_c^{*2} = k\tau_c^{*2}$, dostaneme pro mezní čáru, pro kterou je $\sigma_{red} = \sigma_c$, vztah

$$\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_c^*}\right)^2 + \left(\frac{\tau_a}{\tau_c^*}\right)^2 = 1. \quad (11.21)$$

11.6.1. Stanovení bezpečnosti vůči mezi únavy při kombinovaném namáhání

Součinitel bezpečnosti k_c vůči mezi únavy je definován následovně

$$k_c = \frac{\sigma_c}{\sigma_{red}}. \quad (11.22)$$

Při kombinaci ohybu a krutu z rovnice (11.20) dostaneme

$$\frac{1}{k_c^2} = \left(\frac{\sigma_a}{\sigma_c^*}\right)^2 + \left(\frac{\tau_a}{\tau_c^*}\right)^2. \quad (11.23)$$

Obsah

382. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Dosadíme-li jednotlivé součinitele bezpečnosti

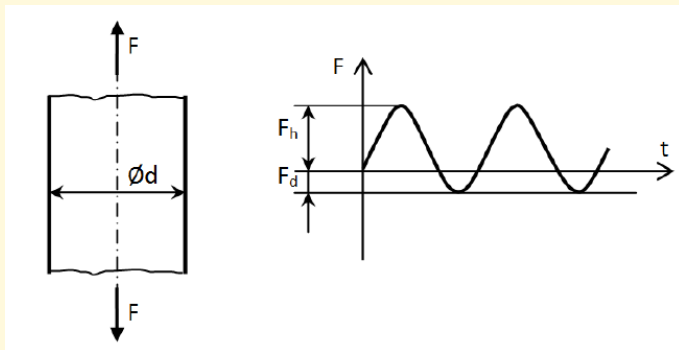
$$k_{\sigma} = \frac{\sigma_c^*}{\sigma_a}, \quad k_{\tau} = \frac{\tau_c^*}{\tau_a}, \quad (11.24)$$

obdržíme

$$k_c = \frac{k_{\sigma} k_{\tau}}{\sqrt{k_{\sigma}^2 + k_{\tau}^2}}. \quad (11.25)$$

Příklady k procvičení

1. Táhlo kruhového průřezu je namáháno pulsující silou (obr. 11.16).

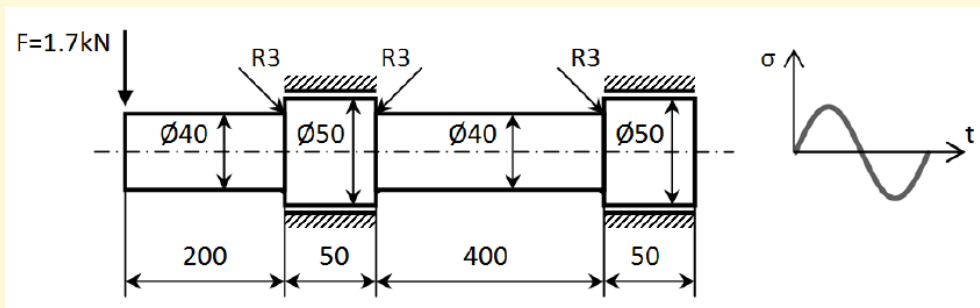


Obr. 11.16



Určete přípustné hodnoty zatížení F_h a F_d , jestliže průměr táhla $\phi d = 40 \text{ mm}$, mez únavy v ohybu $\sigma_{co(10)} = 270 \text{ MPa}$, mez kluzu $R_e = 295 \text{ MPa}$, mez pevnosti $R_m = 510 \text{ MPa}$. Povrch táhla je obroben. Součinitel nesymetrie cyklu $R = -0,2$. K výpočtu použijte:

- Goodmanovu přímku.
 - Gerberovu parabolu.
2. Hřídel, zatížený a uložený podle obr. 11.17, je namáhán ohybem za rotace. Je povrchově kalen a jemně broušen. Stanovte bezpečnost vůči mezi únavy. Z materiálových podkladů je: $\sigma_{co(10)} = 270 \text{ MPa}$, $R_e = 295 \text{ MPa}$, $R_m = 510 \text{ MPa}$. K výpočtu použijte Goodmanovu přímku.



Obr. 11.17

Obsah

384. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Klíč k příkladům k procvičení

- $F_h = 262,4 \text{ kN}$, $F_d = -52,47 \text{ kN}$ – Goodmanova přímka
 $F_h = 302,7 \text{ kN}$, $F_d = -60,5 \text{ kN}$ – Gerberova přímka
- $F_c = 1,63$

Pojmy k zapamatování

- konstrukční vruby
- teoretický součinitel koncentrace napětí
- gradient napětí
- cyklické zatěžování
- střední složka napětí
- amplituda napětí
- Wöhlerova křivka
- mez únavy
- počet cyklů do lomu
- součinitel vrubu



Obsah

385. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

11.6.2. Interaktivní test

Následující test byl vytvořen pomocí balíčku **acrotex**. Test zahájíte kliknutím na tlačítko „Zacátek testu“. U otázek, kde lze volit jen jednu odpověď (test nedovolí zaškrtnout více odpovědí), je správná odpověď bodována takovým počtem bodů, jaký je uveden v závorce u zadání a špatná odpověď je bodována 0 body. U otázek, kde lze volit více správných odpovědí, je součet bodů správných odpovědí uveden v závorce u zadání a za každou špatnou odpověď bude odečten jeden bod.

1. (2b.) Jak je definován teoretický součinitel koncentrace napětí?

$$\alpha_t = \frac{\sigma_n}{\sigma_{max}}$$
$$\alpha_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_n}$$
$$\alpha_t = \frac{\sigma_{max}^2}{\sigma_n}$$

2. (2b.) Jaká je hodnota *teoretického součinitele koncentrace napětí* α_t pro případ desky s kruhovým otvorem

2

4

3



Obsah

386. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

3. (2b.) Při cyklickém namáhání se u kovových materiálů trhliny nejčastěji iniciují
- uvnitř materiálu
 - na hranách součástí
 - na povrchu

4. (2b.) Jak je definován součinitel nesymetrie cyklu?

$$R = \frac{\sigma_h}{\sigma_d}$$

$$R = \frac{\sigma_d}{\sigma_h}$$

$$R = \frac{\sigma_m}{\sigma_d}$$

5. (2b.) Jaká je hodnota součinitele nesymetrie cyklu pro symetrické střídavé zatěžování?

$$R = -1$$

$$R = 0$$

$$R = 1$$

6. (2b.) Jaká je hodnota součinitele nesymetrie cyklu pro míjivý tah?

$$R = -1$$

$$R = 0$$

$$R = 1$$



Obsah

387. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno



7. (2b.) Co znázorňuje Wöhlerova křivka?

závislost amplitudy deformace na počtu cyklů do lomu

závislost středního napětí napětí na počtu cyklů do lomu

závislost amplitudy napětí na počtu cyklů do lomu

8. (2b.) Jak je definována mez únavy?

jako počet cyklů nutných k iniciaci trhliny

jako největší amplituda napětí, která nevede k lomu ani po překonání smluvní hranice 10^7 cyklů (neplatí pro slitiny hliníku)

jako největší amplituda napětí, která nevede k lomu při cyklickém namáhání

9. (2b.) Závislost amplitudy napětí na středním napětí je

mithův diagram

Haighův diagram

cyklická deformační křivka

10. (2b.) Mezi faktory, které ovlivňují mez únavy, nepatří

velikost zatížení

vliv víceosé napjatosti

jakost povrchu

nesymetrie zatěžovacího cyklu

Obsah

388. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:

Pro ukončení testu je třeba kliknout na tlačítko „Konec testu“. Opravení testu se provede kliknutím na tlačítko „Výsledky“, správné odpovědi budou označeny zeleně a červeně budou označeny odpovědi chybné. Při použití otázky s tvořenou odpovědí se správná odpověď zobrazí v rámečku umístěném vpravo dole v navigačním panelu po kliknutí na tlačítko „Odpoved“.



Obsah

389. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Kapitola 12

Experimentální pružnost

Průvodce studiem

Až dosud jsme se učili aplikovat analytický přístup k řešení základních úloh technické praxe, ten je však použitelný jen pro jednoduchou geometrii těles a při splnění předepsaných podmínek. Mnohem širší možnosti skýtá v dnešní době přístup numerický (výpočtové modelování) a experimentální. Při řešení složitějších problémů se dnes považuje v praxi za optimální použití výpočtového modelování spolu s experimentálním přístupem, což však je finančně nákladnější. V této kapitole se seznámíme se základními metodami experimentální pružnosti.

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete seznámeni s:

- úkoly experimentální mechaniky a členěním experimentálních metod
- principy vybraných experimentálních metod
- progresivními optickými metodami
- úplnými základy odporové tenzometrie



Obsah

390. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

12.1. Úvod

Experimentální metody mají v mechanice stále nezastupitelnou úlohu. Ačkoliv v posledních desetiletích došlo k výraznému pokroku v oblasti výpočtového modelování a ke konci minulého století mnozí prognostici předpovídali postupné ubývání poptávky po experimentálním řešení z průmyslu, zažívá experimentální mechanika renesanci, zejména v oblasti rozvoje a aplikace optických metod. Samozřejmostí je dnes počítačová podpora experimentu, vedoucí až k jeho automatizaci. O to větší důraz by měl být kladen na důkladné plánování, statistické zpracování a celkové vyhodnocení experimentu. Experimentátor musí mít v dnešní době jak velmi dobré teoretické znalosti, tak solidní povědomí o mechanických vlastnostech a chování konstrukčních materiálů za různých provozních podmínek.

Jmenujme alespoň několik úkolů experimentální mechaniky [29] pro dnešní dobu:

- získávání nových poznatků
- podpora materiálového výzkumu
- získání vstupních dat pro výpočtové modelování
- ověřování výsledků výpočtového modelování
- náhrada výpočtového modelování
- monitorování a diagnostika
- ...



Obsah

391. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Pomocí experimentálních metod pružnosti se vyšetřují velikosti poměrných deformací, napětí, posuvů a s těmito veličinami související zatížení, tedy síly, tlaky, kroutící momenty, atd.

Věta 12.1. *Napětí nelze měřit přímo! Vždy vyšetřujeme posuvy nebo deformace a z deformací s užitím konstitučních vztahů napětí vyhodnotíme.*

Alespoň stručně budeme charakterizovat každou skupinu metod experimentální pružnosti. Dle fyzikálního principu máme:

1. Elektrické metody.

Mezi jejich hlavní přednosti lze počítat vysokou přesnost, citlivost a rychlost měření, a to i při vysokém počtu vyšetřovaných míst. Výstupní signál může být v analogové nebo digitální formě. Za nevýhody počítáme vyšší kvalifikační požadavky na obsluhu a vyšší investiční náklady na měřicí aparaturu. Nejrozšířenější elektrickou metodou je odporová tenzometrie, které bude věnována jedna z následujících sekcí.

2. Optické metody.

Jejich aplikace je podmíněna viditelností vyšetřované plochy povrchu. Za největší jejich výhodu lze považovat bezkontaktnost, která však u klasických metod bývá vykoupena náročností vyhodnocení. Moderní optické metody jsou variabilní, použitelné při měření v provozu a umožňují poměrně rychlé vyhodnocení průběhu deformace či napětí na povrchu zkoumaných těles. Vzhledem k velkému uplatnění je i těchto metodám věnována vlastní sekce.



Obsah

392 strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

3. Křehké laky.

Některé pryskyřice mají nízkou tažnost, proto při aplikaci na povrch po zatížení praskají. Vznikají tak trhliny, kolmé na směr největšího hlavního tahového napětí (viz také Rankinova hypotéza v kapitole 9). Tato metoda je vhodná pro nalezení kritických míst a směrů hlavních napětí na povrchu těles.

4. Ultrazvukové metody.

Kromě defektoskopie se tyto metody používají ke stanovení velikosti aplikovaných i zbytkových napětí, ale také pro určení elastických konstant materiálu či měření tloušťky.

5. Rentgenografie.

Tato metoda je založena na difrakci RTG paprsků v polykrystalických materiálech. Můžeme jí určit změnu vzdálenosti atomových rovin v důsledku pružných deformací. Používá se zejména ke stanovení zbytkových napětí.

6. Termální emise.

Využívá se přeměny deformační energie v tepelnou při cyklickém namáhání. Teplotní změny v důsledku napjatosti jsou v tisících až setinách stupně Kelvina. Citlivost metody je pro oceli až 1 MPa.

7. Hybridní metody.



Obsah

393. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Jedná se o velmi slibný přístup, kdy se kombinují experimentální a numerické metody. Podnětnou publikací je v tomto případě kniha [31].

Dvě nejvýznamnější skupiny metod experimentální pružnosti budou podrobněji rozebrány v samostatných kapitolách.

12.2. Optické metody

V úvodní sekci byl zmíněn pojem klasických optických metod. Jsou jím myšleny metody, jejichž počátek většinou sahá do období před objevením laseru [29] a řadí se mezi ně zejména:

1. *Optické interferometry.*

Využívají interference světla, tedy jevů, jež jsou projevem skládání světelných vln.

2. *Metoda moiré.*

Je založena na mechanické interferenci světla na optických mřížkách, rozdíl mezi deformovanou měřicí a referenční mřížkou dává vzniknout moiré pruhům, které odpovídají posuvu o rozteč mřížky.

3. *Fotoelasticimetrie.*

Využívá se fotoelasticimetrického jevu, kdy se některé průhledné amorfní materiály při zatížení mění na opticky anizotropní. Jedná se o fyzikální jev, který nazýváme dočasným dvojlomem. Příkladem je obr. 12.1, kde je patrný model maticového klíče.



Obsah

394. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno



Obr. 12.1

Při průchodu usměrněného (polarizovaného) světla modelem se zobrazí čáry, spojující body s konstantním rozdílem hlavních napětí (izochromaty) a čáry, jejichž body mají stejný sklon hlavních napětí (izokliny). Vzhledem k tomu, že se používá polarizované světlo, nazývá se fotoelasticimetrický přístroj polariskop. Jeho podrobný popis a návod na vyhodnocení fotoelasticimetrického experimentu lze najít ve skriptech [2].

Ve fotoelasticimetrii se využívá buď modelové podobnosti (transmisní fotoelasticimetrie) nebo se nanáší opticky citlivá vrstva na povrch vyšetřované součásti (reflexní fotoelasticimetrie).

4. Stereometrické a stereofotogrametrické metody.

Tyto metody našly své první uplatnění v geodézii. Později se začaly využívat pro stanovení posuvů, deformací, potažmo napětí.

5. Holografické metody.

Jsou založeny na interferenci laserového světla mezi hologramem nedeformovaného tělesa a vyšetřovaným deformovaným tělesem, při které vznikají interferenční pruhy úměrné velikosti posuvů.

Mezi moderní, tedy nejprogresivnější optické metody potom patří koherenční interferometrické metody. Koherenční zrnitost je optický jev, který lze například pozorovat, když těleso s drsným odrazným povrchem osvítime koherentním optickým svazkem. Získáme viditelné temné a světlé skvrny na stínítku, umístěném kdekoli před předmětem, v tzv. poli koherenční zrnitosti. Při vyhodnocení se využívá statistických vlastností optických polí koherenční zrnitosti (tzv. speklu).

Metody, využívající koherenční zrnitosti, umožňují měřit statické i dynamické deformace těles. Nejrozšířenější jsou metody:

a) Spekl interferometrie (ESPI – Electronic Spekle Pattern Interferometry).

Výstupem je zpravidla systém jednoduchých interferenčních proužků se zřejmou speklou strukturou. Využívá se přirozené koherentní zrnitosti povrchu materiálu. Metoda je vysoce citlivá téměř nezávisle na šířce zorného pole, proto se přístroji ESPI také říká optický tenzometr.

b) Metoda korelace digitálního obrazu (DICM – Digital Image Correlation Method).



Obsah

396. strana ze 449

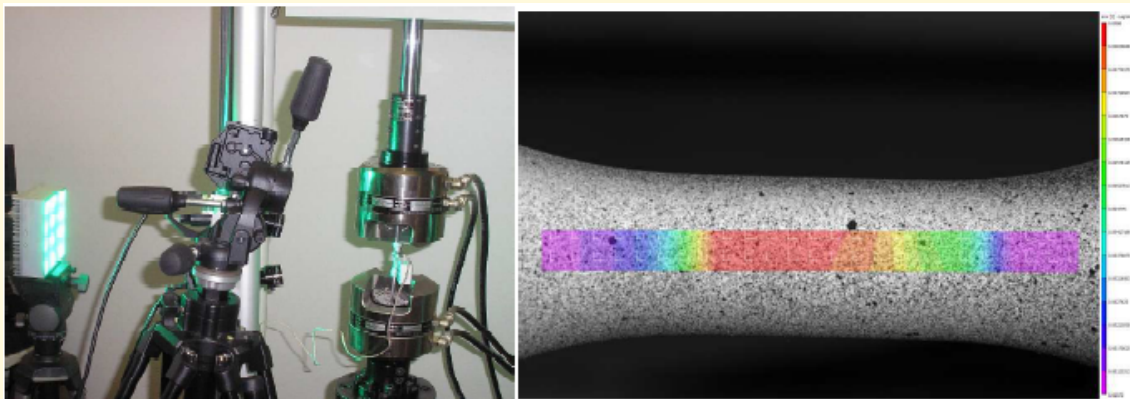


Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Výstupem metody už není charakteristický interferenční obraz. Srovnáním intenzity barev jednotlivých pixelů na po sobě jdoucích digitálních fotografiích povrchu deformovaného tělesa, který je u mnoha materiálů nutno nejprve opatřit kontrastní vrstvou, lze získat průběh posuvů na povrchu zkoumaného tělesa. Při požadavku měření 3D deformací a posuvů je nutno použít dvě CCD kamery, které se zaměří na zkoumaný objekt z různých úhlů. Ukázka z měření deformací přístrojem Dantec Dynamics Q400 u únavové zkoušky je na obr. 12.2. Přesnost měření souvisí zejména s rozměry zabírané plochy a s rozlišením CCD kamer. Metoda je velmi vhodná i pro měření velkých deformací, na rozdíl od ESPI.



Obr. 12.2

Každá z prezentovaných optických metod má svá specifika a je použitelná pro jinou oblast problémů. I klasické optické metody jsou nadále rozvíjeny a nacházejí své uplatnění

při řešení problémů technické praxe [32].

12.3. Základy odporové tenzometrie

Tenzometrické metody jsou založeny na měření změny vzdálenosti dvou bodů tělesa v důsledku změny jeho zatížení [30]. Čidla, která umožňují tato měření, se nazývají tenzometry.

Podle fyzikálního principu měření a dalšího zpracování naměřené veličiny lze základní typy tenzometrů rozčlenit na tenzometry:

- mechanické
- mechanicko – optické
- strunové
- pneumatické
- fotoelasticimetrické
- elektrické aj.



Obsah

398. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Největší uplatnění mají v dnešní době elektrické tenzometry, které lze dále rozdělit na:

- indukční
- kapacitní
- odporové

Z nich se nejvíce používají elektrické odporové tenzometry, kterým bude věnována hlavní pozornost, stručně však budou předem popsány i jiné používané typy tenzometrů.

12.3.1. Elektrické tenzometry

Velké rozšíření elektrických tenzometrů nastalo v důsledku jejich velkých výhod oproti předchozím typům. Výhody jsou hlavně v možnosti dálkového přenosu a odečítání měřených údajů, měření lze realizovat na místech velmi těžce přístupných a těmito tenzometry lze měřit i dynamické děje.

Princip měření je následující. Tenzometry transformují mechanickou veličinu – poměrné prodloužení – na veličinu elektrickou. Podle charakteru výstupní elektrické veličiny mohou být elektrické tenzometry:

- indukční, které transformují změnu délky na změnu impedance cívky, kterou protéká elektrický proud
- kapacitní, které změnu délky transformují na změnu kapacity kondenzátoru
- odporové, zde je změna délky transformována na změnu odporu



Obsah

399 strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Nejvíce používané jsou elektrické odporové tenzometry, kterým bude věnována následující kapitola.

12.3.1.1. Elektrické odporové tenzometry

Princip měření pomocí elektrických odporových tenzometrů je založen na závislosti změny elektrického odporu vodiče na jeho mechanické deformaci.

Podle druhu odporového materiálu lze tyto tenzometry rozdělit na:

- uhlíkové
- polovodičové
- kovové
 - drátkové
 - fóliové

Nejvíce používané jsou fóliové tenzometry. Tyto tenzometry jsou zhotoveny fotochemickým způsobem podobně jako plošné spoje z konstantanové anebo chromniklové fólie tloušťky 5 – 15 μm . Jejich výhodou oproti drátkovým tenzometrům je snadnější výroba tvarově složitějších snímačů, lepší odvod tepla, což umožňuje zvýšené proudové zatížení tenzometrů a tím i zvýšení jejich citlivosti a menší příčná citlivost. Příklad fóliového tenzometru je uveden na obr. 12.3.



Obsah

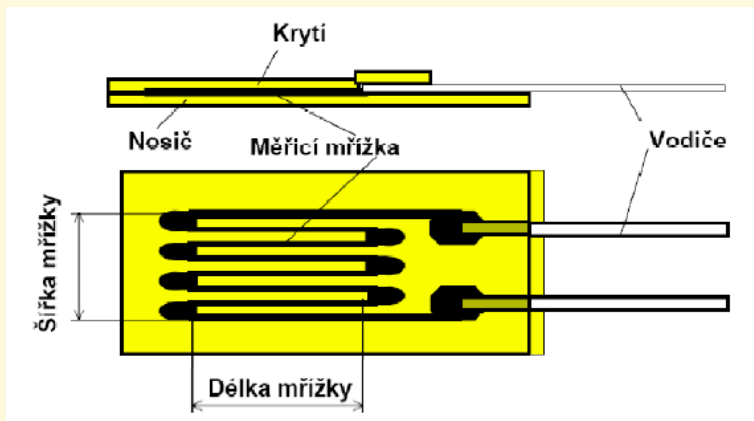
400. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno



Obr. 12.3

12.3.1.2. Základní typy fóliových tenzometrů

Podle tvaru mřížky a účelu měření se vyrábějí různé typy tenzometrů, z nichž nejčastěji používané jsou následující:

- jednoduché tenzometry pro měření deformace v jednom směru jeho podélné osy (obr. 12.3)
- tenzometrické kříže pro měření deformací ve dvou na sobě kolmých směrech
- tenzometrické šípky pro měření smykových napětí a kroutících momentů

- tenzometrické růžice pro zjištění velikosti a směru hlavních napětí na povrchu součásti (pravoúhlé resp. delta růžice)
- membránové tenzometry pro měření napětí na membránách
- tenzometrické řetězce pro měření gradientu napětí
- růžice pro měření zbytkových napětí a další

12.3.1.3. Princip měření elektrickými odporovými tenzometry

Ohmický odpor vodiče R v závislosti na jeho délce l , ploše průřezu S a měrném odporu materiálu vodiče ρ je dán obecně vztahem

$$R = \rho \frac{l}{S}. \quad (12.1)$$

Uvažujeme-li všechny tyto veličiny během deformace jako proměnné, pak pro totální diferenciál funkce (12.1) platí

$$dR = \frac{l}{S} \cdot d\rho + \frac{\rho}{S} \cdot dl - \frac{\rho \cdot l}{S^2} dS. \quad (12.2)$$

Z rovnice (12.1) a (12.2) plyne vztah

$$\frac{dR}{R} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dl}{l} - \frac{dS}{S}. \quad (12.3)$$



Obsah

402. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Pro určitou konečnou změnu odporu R a dílčích úpravách můžeme rovnici (12.3) přepsat na tvar

$$\frac{\Delta R}{R} = k \cdot \varepsilon, \quad (12.4)$$

kde ε je poměrné prodloužení, veličina k se nazývá deformační součinitel (příp. k – faktor) a je jí nutno určit experimentálně cejchovním měřením. Pro většinu běžně dostupných tenzometrů bývá $k \cong 2$ a pro jejich výrobu se používají materiály, pro které je tento k – faktor konstantní ve velkém rozsahu deformací.

12.3.1.4. Způsoby měření malých změn odporu tenzometrů

Změny odporu tenzometrů ΔR v důsledku jejich deformace při tenzometrických měřeních jsou poměrně velmi malé, pro pružné deformace v rozsahu 10^{-6} až 10^{-3} a tenzometr s nominálním odporem $120 \, \Omega$ je dle rovnice (12.4)

$$\Delta R = R k \varepsilon = 120 \cdot (10^{-6} \div 10^{-3}) = 2,4 (10^{-4} \div 10^{-1}) \, \Omega.$$

Měření takovýchto malých odporových změn se prakticky provádí pomocí Wheatstonova můstku, viz obr. 12.4. Při napájení můstku stejnosměrným proudem s konstantním napájecím napětím U_B jsou závislosti mezi proudy, napětími a odpory dány Kirchhoffovými zákony.



Obsah

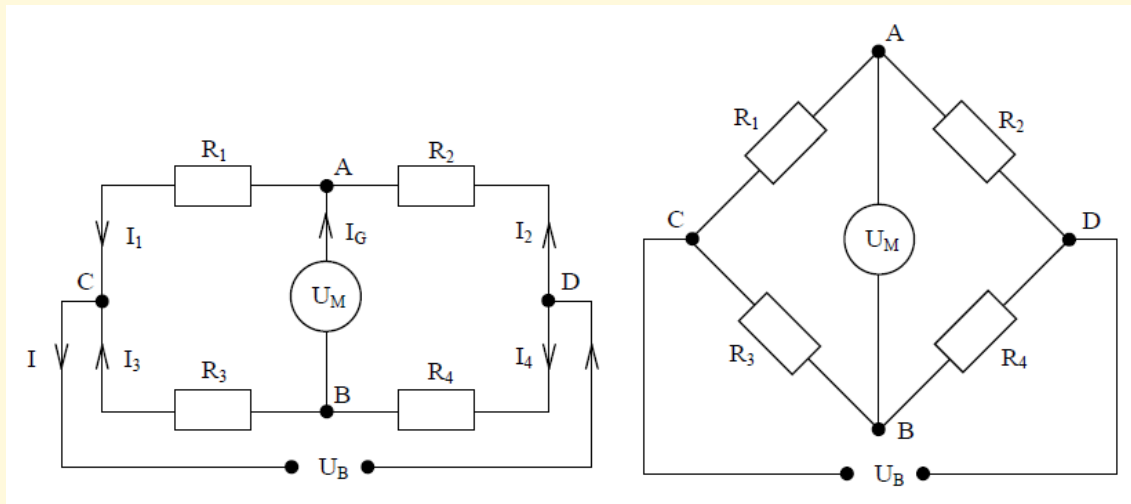
403. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno



Obr. 12.4

Tyto rovnice představují soustavu pěti rovnic pro pět neznámých proudů ve větvích můstku I_1 až I_4 a pro proud I_g , protékající měřicím galvanometrem s odporem R_g . Velikost proudu I_g zjistíme řešením výše uvedené soustavy rovnic kupříkladu pomocí determinantů, takže platí

$$I_g = \frac{U_B}{D_S} (R_1 R_4 - R_2 R_3), \quad (12.5)$$

kde D_s je determinant soustavy pěti rovnic.

Pro vyvážený můstek, tj. pro nulovou hodnotu I_g musí platit

$$R_1 R_4 = R_2 R_3. \quad (12.6)$$

Pro praktická měření je vhodné, aby $R_1 = R_2$ a $R_3 = R_4$, případně aby všechny odpory ve větvích můstku byly stejné.

Tenzometry v můstkovém zapojení dle obr. 12.4 mohou, anebo nemusí být deformovány v průběhu zatěžování tělesa a měření. Deformovaným tenzometrům se říká tenzometry aktivní, nedeformované se označují jako tenzometry kompenzační.

Pro měření odporových změn tenzometrů se používají dvě metody:

- nulová metoda
- výchylková metoda

12.3.1.5. Nulová metoda

Tuto metodu tenzometrického měření lze použít pouze při statickém zatěžování měřených součástí, protože tenzometrický můstek je třeba před i po zatížení vyvážit, což vyžaduje určitý čas.



Obsah

405. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Po statickém zatížení součásti dojde ke změně odporu u aktivních tenzometrů, kupříkladu pouze u tenzometru s odporem R_1 a můstek bude rozvážen. Abychom ho znovu vyvážili, musíme změnit odpor v některé zbývající větvi můstku, kupř. ve větvi s odporem R_2 . Změnil-li se odpor aktivního tenzometru o hodnotu ΔR_1 , musí pro vyvážený můstek při zatížení součásti platit vztah

$$(R_1 + \Delta R_1)R_4 = (R_2 + \Delta R_2)R_3. \quad (12.7)$$

Z této rovnice lze změnu odporu aktivního tenzometru ΔR_1 vypočíst, změříme-li změnu odporu R_2 , potřebnou k vyvážení můstku při zatížené součásti

$$\Delta R_1 = \Delta R_2 \frac{R_1}{R_2}. \quad (12.8)$$

Výhodou této metody je, že přesnost měření nezávisí na případném kolísání napájecího napětí U_B . Nevýhodou je nemožnost použití při měření dynamicky zatěžovaných součástí.

12.3.1.6. Výhylková metoda

Tato metoda se používá při dynamických měřeních. Změna odporu aktivního tenzometru se odvozuje od změny proudu I_g , který protéká galvanometrem v měřící úhlopříčce můstku dle obr. 12.4 při jeho rozvážení od dynamického zatěžování měřené součásti.

Je vidět, že změna odporu aktivního tenzometru je přímo úměrná změně měřeného proudu galvanometrem v měřící úhlopříčce můstku. Při měření je nutno zajistit, aby nedocházelo ke kolísání napájecího napětí můstku U_B .



Obsah

406. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Výstupní signál z můstku je velmi slabý a měří se buď proud I_g – pak hovoříme o měření s proudovým výstupem, anebo se měří napětí mezi body AB můstku dle obr. 12.4, v tomto případě máme tzv. napěťový můstek s napěťovým výstupem. Výstupní signál je nutno pro další záznam anebo pro další zpracování zesílit pomoci zesilovačů.

12.3.1.7. Vliv provozních podmínek na tenzometrická měření

Výsledky tenzometrických měření mohou být ovlivněny vnějšími podmínkami, za kterých jsou měření prováděna. Mezi nejdůležitější tyto faktory patří:

Teplota a její změny v místech nalepení aktivních tenzometrů součástí během měření. Poměrná změna odporu tenzometru v závislosti na změně teploty je dána vztahem

$$\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_T = [\alpha_R + k(\alpha_S - \alpha_V)]\Delta T = \alpha_c \Delta T, \quad (12.9)$$

kde α_R je teplotní součinitel elektrického odporu materiálu mřížky tenzometru a α_S a α_V jsou teplotní součinitelé délkové roztlačnosti materiálu součástí a materiálu vinutí mřížky. Vliv teploty je nutno eliminovat, což lze provést několika způsoby:

- a) Použitím samokompenzačních tenzometrů. Tyto tenzometry jsou vyrobeny z materiálů, které mají v rozsahu teplot při tenzometrických měřeních hodnotu poměrné změny odporu $(\Delta R/R)_T$ velmi malou.
- b) Zařazením kompenzačních tenzometrů do měřicího můstku dle obr. 12.4, u kterých dochází ke změně odporu jen v důsledku změny teploty. Zapojením aktivního a kompenzačního tenzometru do sousedních větví můstku bude výsledný signál, způsobený změnou teploty, nulový.



Obsah

407. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Vlhkost může rovněž velmi nepříznivě ovlivnit výsledky tenzometrických měření v důsledku snížení izolačního odporu tenzometrů vůči měřené součásti. Při statických měřeních by neměl izolační odpor poklesnout pod $50\text{ M}\Omega$.

Další vlivy, které mohou ovlivnit výsledky tenzometrických měření, jsou:

- hydrostatický tlak
- poloměry zaoblení křivých ploch, na které se lepí tenzometry
- radioaktivní záření prudce snižuje izolační odpor snímačů a způsobuje změnu jejich odporu
- cyklické zatěžování může vést k porušení tenzometrů únavou

12.3.1.8. Základní vlastnosti elektrických odporových tenzometrů

Vlastnosti elektrických odporových tenzometrů jsou charakterizovány hlavně následujícími faktory:

- a) Deformačním součinitelem, tzv. k – faktorem. U fóliových tenzometrů je tento k – faktor přibližně roven hodnotě $k = 2$, wolfram–platinové tenzometry mají tento faktor $k = 4$ a více, u polovodičových tenzometrů je $k = 45 \div 200$. Přesné určení k – faktoru se provádí cejchovním měřením.
- b) Hystereze, která je definována jako největší odchylka výstupního signálu při stejné zatěžovací síle během zatěžovacího a odlehčovacího cyklu mezi nulovou a nominální hodnotou zatěžující síly, je udávána v procentech výstupního signálu při nominální zatěžující síle.



Obsah

408. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

- c) Linearita, která udává maximální odchylku výstupního signálu při zatěžování od přímky, spojující počátek s výstupním signálem při jmenovité hodnotě zatěžující síly.
- d) Relaxace, která je charakterizována změnou poměrné deformace tenzometru ε_T , vůči poměrné deformaci součásti ε_S při dlouhodobém statickém zatížení. Relaxace po určitém čase vymizí.
- e) Příčná citlivost, která charakterizuje citlivost tenzometru na deformaci ve směru kolmém na podélnou osu snímače v důsledku příčného propojení podélných vodičů tenzometru.

12.3.1.9. Způsoby zapojení tenzometrů do můstku

Aktivní a kompenzační tenzometry jakož i konstantní odpory můžeme v můstku dle obr. 12.4 zapojit různými způsoby a tím dosáhnout zesílení výstupního signálu a kompenzací nežádoucích vlivů. Podle počtu aktivních tenzometrů v můstku rozlišujeme tři základní způsoby zapojení:

1. Čtvrtmůstek s jedním aktivním tenzometrem. Další tři odpory mohou být tvořeny buď kompenzačními tenzometry nebo pevnými odpory.
2. Půlmůstek je tvořen dvěma aktivními tenzometry a zbývající dva odpory mohou být buď kompenzační tenzometry anebo konstantní odpory.
3. Plný (celý) můstek tvoří čtyři aktivní tenzometry. Vliv teploty a jiných nežádoucích vlivů je u plného můstku kompenzován.

[Obsah](#)

409. strana ze 449

[Zavřít dokument](#)[Konec](#)[Celá obrazovka / Okno](#)

12.3.1.10. Praktický postup při tenzometrických měřeních

Při realizaci tenzometrických měření postupujeme v následujících krocích:

1. Výběr míst měření a volba vhodných typů tenzometrů.
2. Příprava povrchu součásti v místech lepení tenzometrů. Povrch je nutno očistit, důkladně odmastit a vysušit.
3. Nalepení tenzometrů na připravená místa. Pro nalepení tenzometrů jsou výrobci dodávána speciální lepidla, která musí dokonale spojit tenzometr s povrchem.
4. Ochrana tenzometrů proti vlhkosti a mechanickému poškození. Výrobci tenzometrů jsou dodávány speciální krycí vrstvy a laky.
5. Připojení měřicích přístrojů. Každé měřicí místo musí mít v aparatuře vlastní kanál se zesilovačem. Před měřením je nutno výstupní signál ocejchovat kalibračním signálem.
6. Vlastní měření. Před každým měřením zkontrolujeme zapojení všech tenzometrů a můstky vyvážíme. Provedeme nejdříve několik zatěžovacích a odlehčovacích cyklů pro snížení vlivu hystereze a dosažení lepší linearity výsledků měření.



Obsah

410 strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

12.3.1.11. Výpočet napětí ze změřených deformací

Na povrchu součásti v místě nalepení tenzometrů může vzniknout jednoosá nebo dvojosá napjatost. Pro způsob měření a vyhodnocení mohou nastat tři případy:

1. V měřeném místě je jednoosá napjatost a směr hlavního nenulového napětí je znám. V tomto případě k měření stačí jednoduchý tenzometr, nalepený ve směru tohoto hlavního napětí a velikost hlavního napětí vypočteme z Hookeova zákona pro jednoosou napjatost

$$\sigma_1 = E \varepsilon_1. \quad (12.10)$$

2. V měřeném místě vzniká dvojosý stav napjatosti a směry hlavních napětí jsou známy. V tomto případě je pro měření vhodné použít tenzometrický kříž, nalepený ve směrech hlavních napětí a velikost hlavních napětí vypočteme z obecného Hookeova zákona pro rovinnou napjatost

$$\sigma_1 = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_1 + \mu \varepsilon_2), \quad \sigma_2 = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_2 + \mu \varepsilon_1). \quad (12.11)$$

3. V měřeném místě na povrchu součásti je dvojosý stav napjatosti a směry hlavních napětí nejsou známy. V tomto případě pro určení složek tenzoru deformace a napjatosti je nutno změřit poměrné deformace alespoň ve třech směrech. Pro tato měření se používají tenzometrické růžice (pravoúhlé nebo rovnostranné). Velikosti hlavních poměrných deformací a jejich směrů můžeme určit početně anebo graficky z Mohrovy kružnice.



Obsah

411. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Pojmy k zapamatování

- experimentální metody pružnosti dle fyzikálního principu
- klasické optické metody
- metody koherenční zrnitosti
- odporová tenzometrie
- Wheatstonův můstek

12.3.2. Interaktivní test

Následující test byl vytvořen pomocí balíčku **acrotex**. Test zahájíte kliknutím na tlačítko „Zacátek testu“. U otázek, kde lze volit jen jednu odpověď (test nedovolí zaškrtnout více odpovědí), je správná odpověď bodována takovým počtem bodů, jaký je uveden v závorce u zadání a špatná odpověď je bodována 0 body. U otázek, kde lze volit více správných odpovědí, je součet bodů správných odpovědí uveden v závorce u zadání a za každou špatnou odpověď bude odečten jeden bod.

1. (2b.) Která z moderních optických metod je vhodná pro měření velkých deformací?

metoda digitální korelace obrazu

metoda ESPI

digitální fotoelasticimetrie



Obsah

412. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

2. (2b.) Můžeme měřit napětí přímo?

ano

zajistých podmínek

ne

3. (2b.) Na jakém principu je založen tzv. optický tenzometr?

metoda digitální korelace obrazu

matoda Moiré

metoda ESPI

4. (2b.) Na čem je založena fotoelasticimetrie?

na interferenci světla na optických mřížkách, rozdíl mezi deformovanou měřicí a referenční mřížkou dává vzniknout pruhům, které odpovídají posuvu o rozteč mřížky.

využití dočasného dvojlomu

na interferenci laserového světla mezi hologramem nedeformovaného tělesa a vyšetřovaným deformovaným tělesem



Obsah

413. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

5. (2b.) Co je to tenzometr.

Čidlo, umožňující měření změny vzdálenosti dvou bodů tělesa v důsledku změny jeho zatížení

čidlo, sloužící k přímému měření síly

čidlo, sloužící k přímému měření napětí

6. (2b.) Jaký materiál se nejčastěji používá k výrobě odporových tenzometrů?

wolfram

konstantan

měď

7. (3b.) Které metody by jste doporučil pro stanovení směrů hlavních napětí z důvodu správného nalepení tenzometrů?

metodu křehkých laků

reflexní fotoelasticimetrii

metodu ESPI



Obsah

414. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

8. (2b.) Jaká metoda je vhodná pro měření odporových změn tenzometrů při dynamickém měření.

nulová metoda

výchylková metoda

9. (1b.) Nejčastěji používané elektrické tenzometry jsou

apacitní

odporové

indukční

10. (2b.) V případě potřeby měření hlavních napětí, jestliže nejsou známy jejich směry působení, se používají

tenzometrické růžice

tenzometrické kříže

tenzometrické šípky

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:



Obsah

415. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Pro ukončení testu je třeba kliknout na tlačítko „Konec testu“. Opravení testu se provede kliknutím na tlačítko „Výsledky“, správné odpovědi budou označeny zeleně a červeně budou označeny odpovědi chybné. Při použití otázky s tvořenou odpovědí se správná odpověď zobrazí v rámečku umístěném vpravo dole v navigačním panelu po kliknutí na tlačítko „Odpověď“.

[Obsah](#)**416.** strana ze 449[Zavřít dokument](#)[Konec](#)[Celá obrazovka/Okno](#)

Kapitola 13

Stručný úvod do matematické teorie pružnosti

Průvodce studiem

Předmětem matematické teorie pružnosti je vyšetřování stavů napjatosti a deformace obecného pružného tělesa.

Úlohy technické pružnosti a pevnosti (tak, jak byla prezentována v předchozích kapitolách) obvykle pracují s jednoduchými tělesy, jako jsou například pruty, desky, skořepiny aj. Tato náhradní výpočetní tělesa vznikla zjednodušením obecně zatíženého prostorového tělesa na základě nějaké teorie. Díky tomuto vystačíme s relativně jednoduchým matematickým aparátem. Na druhou stranu však díky zjednodušením a předpokladům přicházíme o část informace o napětově – deformačním chování tělesa.

Naproti tomu matematická teorie pružnosti předpokládá obecná řešení napjatosti a přetvoření v libovolném místě tělesa. Zavedeme-li však stejná zjednodušení jako v případě technického přístupu k problematice pevnosti a pružnosti, dostaneme obvykle stejné výsledky, jako nám poskytlo technické řešení problémů.

Soustava základních rovnic matematické teorie pružnosti je však obtížně řešitelná analyticky postupy. Můžeme říci, že v uzavřeném tvaru je řešitelná jen malá skupina problémů.



Obsah

417. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

V případě, kdy není známo exaktní matematické řešení, je možno využít řešení pomocí matematické analogie nebo využití přibližných numerických metod. V této kapitole, která je jen rychlým nástinem matematické teorie pružnosti, se předpokládá znalost těchto základních pojmů:

- napětí, napjatost v bodě tělesa, složky napětí, viz kapitola č. 2 a č. 3
- deformace, deformace v bodě tělesa, složky deformace, viz kapitola č. 4
- izotropie, homogenita ve vztahu k materiálovým vlastnostem tělesa, Hookeův zákon, viz kapitola č. 5

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete:

- chápat základní pojmy pružnosti a pevnosti v širších souvislostech
- umět zjednodušit obecný problém na jedno- nebo dvoudimenzionální
- seznámeni s analytickými postupy řešení rovnic teorie pružnosti
- seznámeni s možností numerického řešení rovnic teorie pružnosti



Obsah

418. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno



13.1. Předpoklady matematické teorie pružnosti

Předmětem matematické teorie pružnosti, jak bylo řečeno výše, je vyšetřování stavů napjatosti a deformace obecného pružného tělesa. Soustava rovnic matematické teorie pružnosti je odvozena za předpokladu izotropního a homogenního materiálu s dokonale pružnými vlastnostmi. Dále se předpokládají pouze velmi malé deformace. Rovnice rovnováhy jsou sestavovány na nedeformovaném tělese. Teorie prvního řádu.

13.2. Základní rovnice matematické teorie pružnosti

Úlohou teorie pružnosti je určit v tělese, vyplňujícím objem V a ohraničené povrchem S , tři pole.

Vektorové pole posunutí: $u = \{u, v, w\}^T$.

Tenzorové pole přetvoření: $\varepsilon = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}^T$.

Tenzorové pole napjatosti: $\sigma = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^T$.

K určení patnácti neznámých funkcí máme soustavu základních rovnic matematické teorie pružnosti. Můžeme jí rozdělit na tři hlavní skupiny:

1. Rovnice rovnováhy.
2. Geometrické rovnice.
3. Fyzikální rovnice.

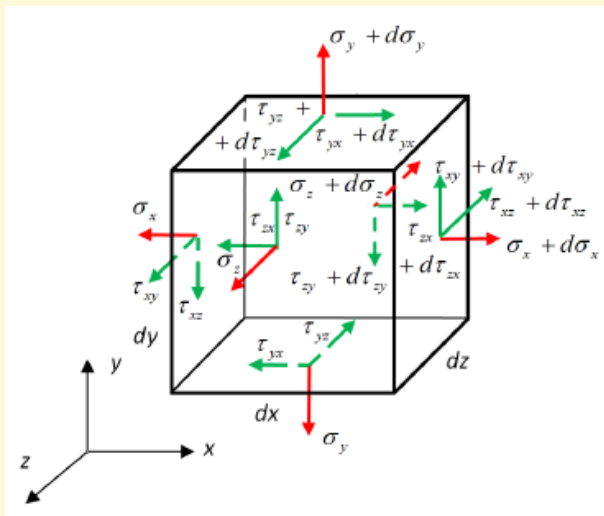
[Obsah](#)

419 strana ze 449

[Zavřít dokument](#)[Konec](#)[Celá obrazovka/Okno](#)

13.2.1. Navierovy rovnice rovnováhy

První soustavu rovnic poskytují podmínky rovnováhy. Soustava rovnic vyjadřuje podmínky pro dosažení statické rovnováhy v libovolné elementární částici tělesa – v bodě tělesa. Mohou rovněž vyjadřovat podmínku rovnováhy podle d'Alembertova principu v případě řešení dynamického děje. Poněvadž chceme určit napjatost, nestačí napsat obvyklé podmínky rovnováhy pro vnější síly a reakce, ale je třeba uvážit rovnováhu každého libovolného bodu tělesa.



Obr. 13.1

Při řešení tělesa v pravoúhlých souřadnicích rozeznáváme dva tvary elementárního tělesa (bodu). Pro bod tělesa, který leží uvnitř, lze uvažovat jeho tvar jako elementární krychli – viz obr. 13.1. Na povrchu tělesa nemůže (obecně) vzniknout hranolek, bod zde si můžeme představit ve tvaru elementárního čtyřštěnu. Povrchový element může být uchycen (vazba) nebo zde může působit vnější zatížení. Blíže k okrajovým podmínkám viz kapitola 13.3.

Kromě povrchového zatížení může na těleso působit objemová síla (hmotová síla). Její složky ve směru os x , y , z budeme značit X , Y , Z a jejich rozměr je jednotka síly na jednotku objemu (např. $[N/m^3]$).

Podmínku rovnováhy sil ve směru osy x můžeme vyjádřit následující rovnicí

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dydz - \sigma_x dydz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right) dx dz - \tau_{yx} dx dz + \\ + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz\right) dx dy - \tau_{zx} dx dy + X dx dy dz = 0.$$



Obsah

421. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Po úpravě, zkrácením elementárním objemem $dx dy dz$, získáme rovnici rovnováhy ve směru osy x . Obdobně můžeme sestavit rovnice rovnováhy pro následující dva směry, tedy osu y a z . Výsledný systém rovnic má pak následující tvar

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z &= 0.\end{aligned}\tag{13.1}$$

Dále lze napsat statické podmínky rovnováhy momentové. Tyto rovnice však pro nás nepřinesou nic nového, protože vyjadřují jen zákon o sdruženosti smykových napětí, který byl již vysvětlen v kapitole 3.

Rovnice (13.1) musí být splněny u libovolného tělesa, jež je v rovnováze.

13.2.2. Geometrické rovnice a rovnice kompatibility

Chceme-li popsat deformaci celého tělesa, musíme pro každý bod tělesa $A(x, y, z)$ popsat polohu též po deformaci $A(x + u, y + v, z + w)$. Posuvy u, v, w jsou spojitými funkcemi souřadnic. Požadavek na spojitost funkcí vychází z předpokladu, že spojitost tělesa nebude během deformace porušena.



Obsah

422. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

V kapitole 4 byly uvedeny rovnice pro deformace pružného tělesa – Cauchyho rovnice. Těchto šest rovnic tvoří další část systému rovnic obecné matematické teorie pružnosti. Připomeňme, že platí pouze pro malé deformace (velice orientačně cca do 1%). Pro zopakování mají následující tvar

$$\begin{aligned}
 \varepsilon x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \\
 \varepsilon y &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\
 \varepsilon z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\
 \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\
 \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}.
 \end{aligned} \tag{13.2}$$

Šest složek deformace je vyjádřeno pomocí tří složek posuvů (u, v, w). Složky tenzoru přetvoření tedy nejsou zcela nezávislými funkcemi souřadnic. Mají-li popisovat deformace spojitého tělesa, musí pro ně platit deformační podmínky, které získáme tak, že vyloučíme posuvy z Cauchyho rovnic. Získáme tzv. rovnice kompatibility.



Obsah

423. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Rovnice kompatibility mají následující tvar

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}, \\
 \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2}, \\
 \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2}, \\
 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right], \\
 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[-\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yx}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right], \\
 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right].
 \end{aligned} \tag{13.3}$$

Rovnice vyjadřují geometrickou spojitost deformovatelného tělesa a musí být splněny nezávisle na tom, zda je těleso pružné či nikoliv. Nezapomeňme však, že platí jen pro malé deformace. Lze dokázat, že těchto šest rovnic dostatečně vyjadřuje podmínku zachování spojitosti tělesa a není možno nalézt další nezávislé rovnice kompatibility jinou úpravou Cauchyho rovnic.



Obsah

424. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

13.2.3. Fyzikální rovnice

Složky napětí, vstupující do rovnic rovnováhy (Naviérových r. r.) a složky přetvoření v Cauchyho rovnicích (popř. v rovnicích kompatibility) jsou navzájem vázány Hookeovým zákonem – viz kapitola číslo 5. Připomeňme však, že tento vztah platí pouze, je-li těleso pružné, izotropní a homogenní

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu \cdot (\sigma_y + \sigma_z)], \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu \cdot (\sigma_x + \sigma_z)], \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)], \\ \tau_{xy} &= G \cdot \gamma_{xy}, \\ \tau_{xz} &= G \cdot \gamma_{xz}, \\ \tau_{yz} &= G \cdot \gamma_{yz}.\end{aligned}\tag{13.4}$$

13.3. Okrajové podmínky

Rovnice (13.1), (13.2) a (13.4) jsou soustavou 15 rovnic (9 parciálních diferenciálních rovnic a 6 algebraických rovnic), kterým musí vyhovovat napjatost a deformace pružného tělesa. Soustava poskytuje obecně nekonečně mnoho řešení. Je nutno najít to, které vyhovuje okrajovým podmínkám. Rozeznáváme dva druhy okrajových podmínek.



Obsah

425. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Na hranici tělesa mohou být předepsány hodnoty složek posuvů u , v , w . Takovéto okrajové podmínky předepisují geometrickou vazbu tělesa s jeho okolím. Proto se tyto okrajové podmínky nazývají *geometrické okrajové podmínky*. Někdy se též nazývají *kinematické okrajové podmínky*.

Druhou skupinou okrajových podmínek jsou *statické* nebo taky *silové okrajové podmínky*. Okrajové podmínky vyjadřují statickou vazbu tělesa s jeho vnějším okolím. V tomto případě jsou předepsány hodnoty složek vektoru vnějšího zatížení.

Může se však stát, že na části povrchu jsou předepsány zároveň statické a geometrické okrajové podmínky. Takové okrajové podmínky se pak nazývají *smíšené okrajové podmínky*.

13.4. Základní způsoby řešení soustav rovnic

Řešení problémů pružného tělesa lze rozdělit na tři základní skupiny:

1. **Přímá metoda.** Pružné těleso je popsáno svým tvarem (geometrií), jsou zadány fyzikální vlastnosti materiálu a je zatíženo objemovými a vnějšími povrchovými silami. Úkolem je stanovit tenzorové pole napjatosti a přetvoření a vektorové pole posunutí v celém tělese (uvnitř i na povrchu).
Soustavu rovnic můžeme řešit třemi způsoby – deformační, silovou a smíšenou metodou. Deformační metodou se úloha řeší ve složkách posuvů u , v , w při zadaných geometrických podmínkách. Silovou metodou se úloha řeší ve složkách tenzoru napjatosti σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz} při zadaných silových okrajových podmínkách. U smíšené metody jsou okrajové podmínky obojího druhu. Tato skutečnost vyžaduje řešení ve složkách napětí i ve složkách posuvů.



Obsah

426. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

2. **Inverzní metoda řešení.** Pružné těleso je popsáno geometrií a fyzikálními vlastnostmi materiálu. Předepsáno je pole napětí a posuvů. Úlohou je stanovit vnější zatížení, která daná pole vyvolaly, popřípadě zjistit okrajové podmínky, kterým dané funkce pole napětí vyhovují.
3. **Poloinverzní metoda.** Pro výše zadané těleso jsou částečně zadány silové veličiny a částečně zadány posuvy. Uvnitř tělesa jsou známy pouze některé složky tenzoru napjatosti.

Soustava rovnic pro určení napjatosti a přetvoření pružného tělesa je natolik složitá, že řešení lze získat jen pro jednoduché tvary těles a pro určité typy okrajových podmínek. Lze dokázat, že pokud nalezneme řešení, které vyhovuje všem rovnicím matematické teorie pružnosti, je řešení jednoznačné.

13.5. Zjednodušení úloh matematické teorie pružnosti

Řešení obecných prostorových úloh je velice obtížné. V mnoha případech můžeme úlohu zjednodušit na dvojrozměrnou (rovinnou), popřípadě na jednorozměrnou. Tímto dosáhneme značného zjednodušení popisu a řešení úlohy.

13.5.1. Zjednodušení na dvojrozměrný problém

Rovnice matematické teorie pružnosti se pro rovinný stav namáhání značně zjednoduší, protože všechna napětí, deformace a posuvy jsou pouze funkcemi dvou proměnných x a y . Rozeznáváme dva základní případy – rovinná deformace, rovinná napjatost.



Obsah

427. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

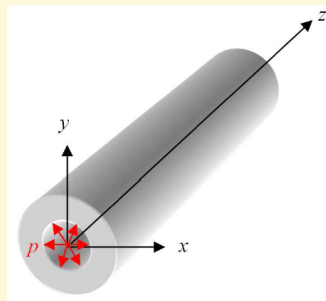
Případ *rovinné deformace* je dán podmínkou, aby složka posuvu v jednom směru byla nulová. Bude-li nulový posuv ve směru osy z , musí platit $w = 0$. V tomto případě budou pole posuvů, přetvoření a napjatosti následující.

Vektorové pole posunutí: $u = \{u, v, 0\}^T$.

Tenzorové pole přetvoření: $\varepsilon = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, 0, \gamma_{xy}, 0, 0\}^T$.

Tenzorové pole napjatosti: $\sigma = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, 0, 0\}^T$.

Takový stav deformace je přibližně dosažen u těles, jejichž rozměr ve směru osy z je převládající, tj. výrazně větší než v dalších dvou směrech a vyšetřovaný průřez je dostatečně vzdálen od konců tělesa. Další podmínkou je, aby zatížení působilo ve směru kolmém na osu z a současně nebylo funkcí této souřadnice. Jako příklad můžeme uvést dlouhou tlustostěnnou trubku zatíženou vnitřním přetlakem – viz obr. 13.2.



Obr. 13.2

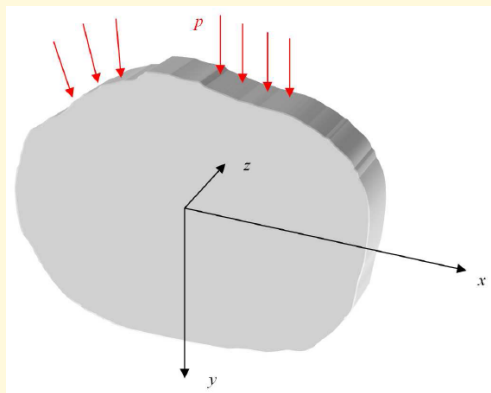
Pro případ *rovinné napjatosti* je hlavní podmínkou, aby všechny složky napětí, působící na element tělesa, byly rovnoběžné s jednou rovinou. Složky tenzoru napjatosti ve směru osy z jsou rovny nule a zkoso jsou nenulové pouze v rovině xy . V tomto případě budou pole posuvů, deformací a napětí následující.

Vektorové pole posunutí: $u = \{u, v, w\}^T$.

Tenzorové pole přetvoření: $\varepsilon = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, 0, 0\}^T$.

Tenzorové pole napjatosti: $\sigma = \{\sigma_x, \sigma_y, 0, \tau_{xy}, 0, 0\}^T$.

Popsaný stav napjatosti se například vyskytuje v tenké desce – viz obr. 13.3.



Obr. 13.3

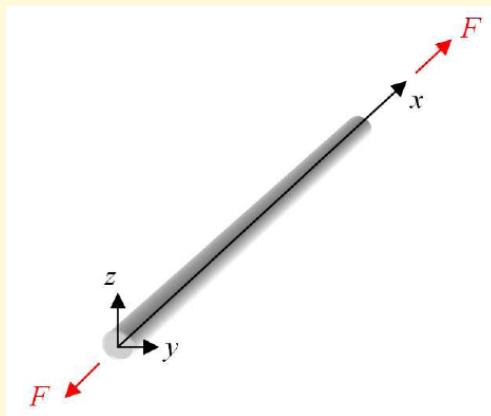
13.5.2. Zjednodušení na jednodimenzionální úlohu

Jednorozměrné těleso (tyčové těleso) je takové, jehož jeden rozměr (např. ve směru osy x) je o mnoho větší než ostatní dva. Současně silové zatížení je aplikováno pouze ve směru převládajícího rozměru. Tento případ odpovídá namáhání prutu tahem a tlakem –viz obr. 13.4. V tomto případě budou pole posuvů, přetvoření a napjatosti následující.

Vektorové pole posunutí: $u = \{u, 0, 0\}^T$.

Tenzorové pole přetvoření: $\varepsilon = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, 0, 0, 0\}^T$.

Tenzorové pole napjatosti: $\sigma = \{\sigma_x, 0, 0, 0, 0, 0\}^T$.



Obr. 13.4



Obsah

430. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Nosníkové těleso je podobné tyčovému jednorozměrnému tělesu. Rozdíl je zde ve způsobu zatížení. Zatížení zde leží ve směru kolmém k ose tělesa. Takže bude li osa tělesa (převládající rozměr tělesa) ve směru osy x , pak průhyb bude ve směru osy y (popř. z). Zavedeme-li stejná zjednodušení jako v kapitole 8, dojdeme aplikací MTP k rovnicím, popisující Euler-Benoulliho nosník (tenké štíhlé nosníky). Jedná se o nejjednodušší model nosníkového tělesa.

Obdobně můžeme získat rovnice pro výpočet napětově-deformační odezvy pro desková a skořepinová tělesa. Takováto tělesa mají převládající dva rozměry (např. ve směrech x a y) a zatížena jsou ve směru třetím. Toto však překračuje probíranou látku základního kurzu pružnosti a pevnosti.

13.6. Numerické metody

Vztahy obecné matematické teorie pružnosti představují systém patnácti rovnic. Spolu s okrajovými podmínkami nám popisují napětově – deformační chování pružného tělesa. Je dokázáno, že pokud takovéto řešení nalezneme, jedná se o jediné řešení. Zásadním problémem ovšem je takovéto řešení nalézt. Řešení v uzavřeném tvaru lze nalézt pouze pro „jednoduchá“ tělesa s „jednoduchými“ okrajovými podmínkami. Pro řešení složitějších případů je nutno využít některou z přibližných numerických metod.



Obsah

431. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Výhodou exaktního řešení v uzavřeném tvaru je, že pokud nalezneme řešení, získáme obecnou funkční závislost mezi vstupními a výstupními parametry řešeného problému. Úloha se řeší jednou a při změně jednotlivých parametrů se pouze dosadí do získaného „předpisu“. Naproti tomu při numerickém řešení musíme provádět celý výpočet pokaždé, když dojde ke změně jednotlivých parametrů.

Bezespору nejpoužívanější metodou je metoda konečných prvků (MKP). Pro tuto metodu existuje velké množství jednak komerčního, ale také volně šiřitelného software. V současné době mezi nejrozšířenější konečno–prvkové řešiče bezespору patří NASTRAN, ABAQUS, ANSYS, aj. Konstrukér, popř. výpočtář dnes již většinou neprogramuje vlastní řešič, ale právě využívá již existující software. Jeho hlavními úkoly jsou správné zadání vstupních dat a správné vyhodnocení získaných výsledků. Tato práce je velmi zodpovědná a výpočtář musí mít znalosti v daném oboru, v našem případě informace o problematice pružného tělesa, aby odhalil případné nesrovnalosti a dokázal správně vyhodnotit získané výsledky. Současně musí mít alespoň základní znalosti o použité numerické metodě a dobře ovládat použitý výpočetní software. Je mylné se domnívat, že vše za nás provede počítač. S nadsázkou lze říci, že počítač je pouze „lepší“ kalkulačka. Pro práci se zadáváním a vyhodnocováním dat jsou dostupné pokročilé programy tzv. pre– a post– procesory, jmenujme například program PATRAN.

Před příchodem MKP se v hojně míře používala tzv. metoda sítí. Další oblíbenou metodou je metoda hraničních prvků (MHP). Budoucností by mohly být například tzv. bezsítové metody (Mesh Free Method). Numerické metody se rychle rozvíjejí a jen čas ukáže, které postupy jsou nejvýhodnější.

[Obsah](#)

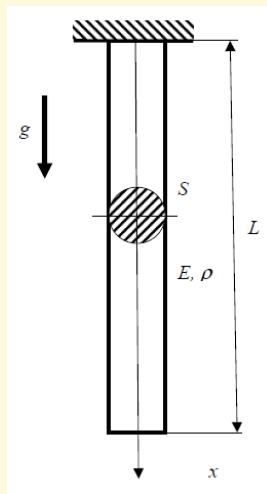
432. strana ze 449

[Zavřít dokument](#)[Konec](#)[Celá obrazovka / Okno](#)

13.7. Závěr

V této kapitole byly prezentovány základní poznatky matematické teorie pružnosti, formulované pro pružné homogenní a izotropní těleso. Kapitola slouží pouze k získání základních informací o obecné teorii pružnosti, která bude dále rozvíjena v dalších předmětech oborového studia. Současně zde byla nastíněna problematika numerických výpočtů.

Příklad 13.1. Příklad použití matematické teorie pružnosti při řešení jednorozměrného případu – blíže viz kapitola 1. Představme si tenký prut, jež je nahoře pevně vetknut a je zatížen pouze vlastní tíhou – viz obr. 13.5.



Obr. 13.5



Obsah

433. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Daná je geometrie prutu – jeho délka L , průřez S . Materiálové vlastnosti jsou popsány modulem pružnosti E a hustotou ρ . Tíhové zrychlení je g . Úkolem je určit prodloužení prutu, jeho deformaci a napjatost v libovolném bodě tělesa.

Jedná se o přímou metodu. Řešení provedeme pomocí deformační metody – primární neznámé jsou posuvy. V našem případě bude primární veličinou posuv u . Jednotlivé rovnice MTP se redukuje na následující tvary.

Rovnice rovnováhy

$$\frac{d\sigma_x}{dx} + X = 0. \quad (\text{P1})$$

Geometrické rovnice

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx}. \quad (\text{P2})$$

Fyzikální rovnice (Hookův zákon)

$$\sigma_x = E\varepsilon_x. \quad (\text{P3})$$



Obsah

434. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Dosazení rovnice (P2) do rovnice (P3) vede ke vztahu

$$\sigma_x = E \frac{du}{dx}.$$

(P4)

Derivací poslední rovnice dle x a dosazením do rovnice (P1) získáme

$$E \frac{d^2 u}{dx^2} + X = 0.$$

(P5)

Připomeňme, že X je objemová síla na jednotku objemu $[N/m^3]$. U našeho případu je objemová síla

$$X = \rho g.$$

Dosadíme-li do relace (P5), získáme rovnici

$$E \frac{d^2 u}{dx^2} + \rho g = 0.$$

(P6)



Obsah

435. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Pro konzistenci s jednorozměrnou úlohou můžeme získanou rovnici vynásobit plochou průřezu S , tedy

$$E S \frac{d^2 u}{dx^2} + \rho g S = 0. \quad (\text{P7})$$

Druhý člen v této rovnici představuje sílu na jednotku délky $[N/m]$. Tato rovnice společně s okrajovými podmínkami popisuje chování našeho problému. Napišme okrajové podmínky.

Tyč je v horní části vetknuta. V místě $x = 0$ je tedy předepsána kinematická okrajová podmínka. V matematickém tvaru ji můžeme zapsat následovně

$$u(x = 0) = 0. \quad (\text{P8})$$

Na druhém konci není předepsána žádná kinematická vazba. Proto zde musí být předepsána silová okrajová podmínka. Na volném konci nepůsobí žádná síla, a proto zde okrajová podmínka získává s použitím výrazu (13.4) tvar (P5)

$$E \frac{du(x = L)}{dx} = 0. \quad (\text{P9})$$



Obsah

436. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Nyní řešme diferenciální rovnici (P7). Úpravou a dvojitou integrací získáme výraz (P10) a (P11)

$$\frac{du}{dx} = -\frac{\rho g}{E}x + C_1, \quad (P10)$$

$$u = -\frac{\rho g}{E} \frac{x^2}{2} + C_1x + C_2. \quad (P11)$$

Aplikací okrajových podmínek (P8) a (P9) na rovnice (P10) a (P11) určíme integrační konstanty

$$C_1 = \frac{\rho g L}{E},$$

$$C_2 = 0.$$

Výsledný výraz pro posuv u je

$$u = \frac{\rho g}{E} \left(Lx - \frac{x^2}{2} \right). \quad (P12)$$

[Obsah](#)

437. strana ze 449

[Zavřít dokument](#)[Konec](#)[Celá obrazovka / Okno](#)

Výraz pro deformaci získáme derivací rovnice (P11) dle proměnné x tak, jak to předepisuje geometrická rovnice (P2). Získáme výraz

$$\varepsilon_x = \frac{\rho g}{E}(L - x).$$

(P13)

Poslední neznámou je napětí v tyči. Získáme ho dle přepisu (P3)

$$\sigma_x = \rho g(L - x).$$

(P14)

Tímto jsme vyřešili zadaný problém. Tyto výsledky může čtenář srovnat s výsledky v kapitole č. 6. ▲

Příklady k procvičení

Vzhledem k tomu, že tato kapitola slouží pouze k stručnému nastínění matematické teorie pružnosti, nejsou v této kapitole uvedeny příklady k procvičení. Specializované obory se seznámí detailněji ve vyšších ročnících s užitím matematické teorie pružnosti a prohloubí si znalosti z tohoto oboru. Pro ostatní studenty bude mít tato kapitola přínos v předmětech, zabývajících se numerickým řešením napěťově–deformačního chování součástí a strojních uzlů.



Obsah

438. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Pojmy k zapamatování

- rovnice rovnováhy
- geometrické rovnice
- fyzikální rovnice
- rovnice kompatibility
- silové okrajové podmínky
- kinematické okrajové podmínky
- numerické metody

13.7.1. Interaktivní test

Následující test byl vytvořen pomocí balíčku **acrotex**. Test zahájíte kliknutím na tlačítko „Zacátek testu“. U otázek, kde lze volit jen jednu odpověď (test nedovolí zaškrtnout více odpovědí), je správná odpověď bodována takovým počtem bodů, jaký je uveden v závorce u zadání a špatná odpověď je bodována 0 body. U otázek, kde lze volit více správných odpovědí, je součet bodů správných odpovědí uveden v závorce u zadání a za každou špatnou odpověď bude odečten jeden bod.

[Obsah](#)

439 strana ze 449

[Zavřít dokument](#)[Konec](#)[Celá obrazovka/Okno](#)



1. (2b.) Co je předmětem matematické teorie pružnosti?

Řešení rovnic popisující chování tuhého tělesa při zatížení vnějšími silami.

Popisuje vztah mezi vnějším zatížením a vnitřními silami.

Vyšetřování stavů napjatosti a deformace obecného pružného tělesa.

2. (2b.) Pole napětí je pole:

vektorové

skalární

tenzorové

3. (2b.) Kolik je rovnic matematické teorie pružnosti?

12

15

9

4. (2b.) Rovnice kompatibility vyjadřují:

geometrickou nespojitost deformovatelného tělesa

rovnováhu libovolného bodu tělesa

geometrickou spojitost deformovatelného tělesa

Obsah

440. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

5. (2b.) Rovnice rovnováhy se nazývají

Cauchyho

Navierovy

Youngovy

6. (2b.) Jsou-li předepsány složky posuvů, jedná se o okrajovou podmínku

silovou

kinematickou

smíšenou

7. (2b.) Jsou-li předepsány složky napětí, jedná se o okrajovou podmínku

smíšenou

silovou

kinematickou

8. (2b.) U inverzní metody řešení soustavy rovnic matematické teorie pružnosti je cílem stanovit

pole napětí

pole deformace

vnější zatížení



Obsah

441. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

9. (2b.) Nejpoužívanější numerickou metodou mechaniky je

metoda hraničních prvků

metoda konečných prvků

metoda konečných diferencí

10. (2b.) Pro oblast malých deformací se používají geometrickodeformační vztahy nazývané

Cauchyho

Lagrangeovy

Naviérovovy

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:

Pro ukončení testu je třeba kliknout na tlačítko „Konec testu“. Opravení testu se provede kliknutím na tlačítko „Výsledky“, správné odpovědi budou označeny zeleně a červeně budou označeny odpovědi chybné. Při použití otázky s tvořenou odpovědí se správná odpověď zobrazí v rámečku umístěném vpravo dole v navigačním panelu po kliknutí na tlačítko „Odpověď“.



Obsah

442. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Literatura

- [1] Lenert, J.: *Pružnost a pevnost 1.* 3. vydání, Skriptum FS VŠB–TU Ostrava, 2009, 142s. ISBN 978-80-248-2111-5
- [2] Kuba, F.: *Pružnost a pevnost (základní část).* Skriptum FS VŠB–TU Ostrava, 1976. 385s.
- [3] Trebuňa, F.; Šimčák, F.; Jurica, V.: *Pružnost a pevnost I..* VIENALA Košice, 2000.
- [4] Krčál, O.; Frydryšek, K.; Adámková, L.: *Příklady z pružnosti a pevnosti I (část 2.).* Fakulta strojní VŠB–TU Ostrava, 2008. 124s. Skriptum. ISBN 978-80-248-1826-9
- [5] Vable, M.: *Mechanics of Materials, Second Edition* [online]. Michigan Technological University. 2010. [cit. 2011-1-19]. Dostupný z: <http://www.me.mtu.edu/mavable/MoM2nd.htm>.
- [6] Hóschl, C.: *Pružnost a pevnost ve strojnictví..* SNTL Praha, 1971. 376s.
- [7] Timošenko, Š.: *Pružnost a pevnost I..* SNTL Praha, 1951. 324s.
- [8] Lenert, J.: *Pružnost a pevnost II.* 1.vydání. Skriptum FS VŠB–TU Ostrava, 1998. 173s. ISBN 80-7078-572-3
- [9] Kuba, F.: *Teorie pružnosti a vybrané aplikace.* SNTL Praha, 1977. 288s.
- [10] Timošenko, Š.: *Pružnost a pevnost II..* SNTL Praha, 1951. 424s.



Obsah

443. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

- [11] Miroljubov, I. N. a kol.: *Řešení úloh z pružnosti a pevnosti*. SNTL, 1976.
- [12] Strnadel, B.: *Řešené příklady a technické úlohy z materiálového inženýrství*. VŠB–TU Ostrava, 1998, 334 s.
- [13] Frydrýšek, K.; Adámková, L.: *Mechanics of Materials 1 – Extended Edition (Introduction, Simple Stress and Strain, Basic of Bending)*. skriptum, Faculty of Mechanical Engineering, VŠB–Technical University of Ostrava, Ostrava, ISBN 978-80-248-1914-3, Ostrava, 2008, Czech Republic, pp.203.
- [14] Frydrýšek, K.: *Pravděpodobnostní výpočty v mechanice*. Katedra pružnosti a pevnosti, FS VŠB–TU Ostrava, ISBN 978-80-248-2314-0, Ostrava, 2010, pp.149.
- [15] Frydrýšek, K., Marvalová, B., Jágrová, J.: *Vybrané kapitoly z pružnosti a plasticity 1*. Faculty of Mechanical Engineering, VŠB–Technical University of Ostrava, Ostrava, ISBN 978-80-248-1855-9, Ostrava, 2008, Czech Republic, pp.127.
- [16] Trebuňa, F.; Šimčák, F.: *Odolnosť prvkov mechanických sústav*. Košice: Emilena, 2004. 980 s. ISBN 80-8073-148-9.
- [17] Kuba, F.: *Pružnost a pevnost*. VŠB–Technická univerzita Ostrava, Ostrava, 1982. 385 s. Skriptum.
- [18] Hájek, E.; Reif, P.; Vanlenta, F.: *Pružnost a pevnost I.* 1.vydání. Praha: SNTL, 1988. 432 s.
- [19] Fuxa, J.: *Kritéria pevnosti, experimentální zařízení a metodika zkoušení*. Teze inaugurační přednášky v oboru „Technická mechanika“, Katedra pružnosti a pevnosti, FS VŠB–TU Ostrava, Ostrava, 2001, pp.22.



Obsah

444. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

- [20] Rojíček, J.: *Statické hypotézy pevnosti*. Disertační práce v oboru „Aplikovaná mechanika“, Katedra pružnosti a pevnosti, FS VŠB–TU Ostrava, Ostrava, 2007, pp.141.
- [21] <http://www.failurecriteria.com/>
- [22] <http://classes.mst.edu/ide120/lessons/failure/theories/index.html>
- [23] Frydrýšek, K.; Lenert, J.: *Mechanics of Materials, (compendium)*. HFG VŠB–TU Ostrava, Ostrava, 2005, pp.63.
- [24] Puchmajer, P.: *Stabilita pružných soustav*. České vysoké učení technické v Praze, 1987. 104 s.
- [25] Šejnoha, J. – Bittnarová, J.: *Stabilita skořepin*. České vysoké učení technické v Praze, 1999. 45 s. ISBN 80-01-020168-9.
- [26] Kučera, J.: *Úvod do mechaniky lomu. Nestabilní lom ocelových těles při statickém a dynamickém zatížení*. VŠB–TU Ostrava, 2006. 297s. Skriptum. ISBN 80-248-1268-1.
- [27] Kučera, J.: *Stručný úvod do mechaniky lomu. II.část. Únava materiálu*. VŠB–TU Ostrava, 1994. 297s. Skriptum. ISBN 80-7078-244-7
- [28] Dowling, N.E.: *Mechanical behavior of materials. Engineering Methods for Deformation, Fracture and fatigue*. Third edition. Pearson Prentice Hall, 2007. ISBN 0-13-186312-6.
- [29] Vlk a kol.: *Experimentální mechanika* [online]. VUT Brno, s.119-123. [cit. 2011-1-19] http://www.umt-old.fme.vutbr.cz/_studium_/opory/Experimentalni_mechanika.pdf



Obsah

445. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

- [30] Macura P.: *Experimentální metody v pružnosti a plasticitě*. Skripta FS VŠB–TU Ostrava, Ostrava, 2001.
- [31] Doyle J. F.: *Modern Experimental Stress Analysis*. Wiley InterScience, 2005.
- [32] Trebuňa, F. – Šimčák, F.: *Príručka experimentálnej mechaniky*. TypoPress, Košice. Strojnícka fakulta TU v Košiciach. 1526s. ISBN 970-80-8073-816-7
- [33] Lenert, J.: *Základy matematické teorie pružnosti*. Ostrava 1997: VŠB–TU Ostrava, 1997, ISBN 80-7078-437-7
- [34] Němec, J.; Dvořák, J.; Höschl, C.: *Pružnost a pevnost ve strojírenství, Technický průvodce 69..* SNTL, Brno, 1989.
- [35] Bittnar, Z.; Šejnoha, J.: *Numerické metody mechaniky 1*. Vydavatelství ČVUT, Praha, 1992.
- [36] Lenert, J.: *Úvod do metody konečných prvků*. VŠB–TU Ostrava, 1999, ISBN 80-7078-686-8

[Obsah](#)

446. strana ze 449

[Zavřít dokument](#)[Konec](#)[Celá obrazovka/Okno](#)

analytická metoda, 278

Castigliánova věta, 162

elementární krychle, 53

Eulerova hyperbola, 348

Eulerova metoda řezu, 49

Eulerovo kritérium stability, 343

Gerberova parabola, 376

Goodmanova přímka, 376

gradient napětí

bezrozměrný, 367

poměrný, 367

Haighův diagram, 375

Haighův prostor, 314

Hookeův zákon

obecný, 146

prostý smyk, 143

prostý tah, 138

hypotézy pevnosti

Beltrami, 325

Guest, 321

HMH, 327

Mohr, 318

Rankine, 316

Saint-Venant, 323

Jasinského vzorec, 349

kvadratické momenty plochy, 21

deviační, 23

osové, 23

polární, 23

statické, 22

logaritmické poměrné prodloužení, 136

materiál

homogenní, 129

isotropní, 129

metoda konečných prvků, 432

metody experimentální pružnosti

elektrické, 392

odporová tenzometrie, 398

hybridní, 393

křehké laky, 393

optické, 392

fotoelasticimetrie, 394



Obsah

447. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

- holografické, 396
- moiré, 394
- optické interferometry, 394
- stereofotogrametrické, 395
- stereometrické, 395
- rentgenografie, 393
- termální emise, 393
- ultrazvukové, 393
- mez kluzu
 - smluvní, 138
 - výrazná, 138
- mez pevnosti, 141
- mezní štíhlost, 349
- modul pružnosti
 - v tahu, 138
 - ve smyku, 145
- Mohrova kružnice, 77
- neutrální osa, 261
- okrajové podmínky, 425
- pevnost, 17
- Poissonův zákon, 139
- poměrná deformace, 109
- princip superpozice, 20
- prut, 21
- pružnost, 17
- průřezový modul
 - v krutu, 35
 - v ohybu, 35
- redukováná délka prutu, 346
- redukové napětí, 312
- rovinná deformace, 428
- rovinná napjatost, 429
- rovinný ohyb, 251
- rovnice
 - fyzikální, 425
 - geometrické (Cauchyovy), 113
 - kompatibility, 423
 - rovnováhy (Navierovy), 420
- rovnice průhybové čáry, 274
- Saint-Venantův princip, 55
- Schwedlerova věta
 - druhá, 255
 - první, 255
- sdruženost smykových napětí, 79
- Smithův diagram, 377
- Steinerova věta, 28
- tenzometry, 398
 - elektrické, 399



Obsah

448. strana ze 449



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

indukční, 399
kapacitní, 399
odporové, 399
tenzor napjatosti, 72
tenzor přetvoření, 116
teplotní roztažnost, 153
Tetmajerův vztah, 349
těžiště plochy, 21

vnitřní silové účinky, 252

Wöhlerova křivka, 370
Wheatstoneův můstek, 403

zkos, 109
zkrut, 229

[Obsah](#)

449. strana ze 449

[Zavřít dokument](#)[Konec](#)[Celá obrazovka/Okno](#)