Pružnost a pevnost

R. Halama, L. Adámková, F. Fojtík, K. Frydrýšek, M. Šofer, J. Rojíček, M. Fusek

Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století* (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni

evropský sociální fond v ČR EVROPSKÁ UNIE MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Kolektiv Katedry pružnosti a pevnosti VŠB-TU Ostrava: doc. Ing. Radim Halama Ph.D., Dr. Ing. Ludmila Adámková, Ing. František Fojtík Ph.D., doc. Ing. Karel Frydrýšek Ph.D., Ing. Michal Šofer, Ing. Jaroslav Rojíček Ph.D., Ing. Martin Fusek Ph.D.
Pružnost a pevnost

ISBN

Předmluva

Vážený čtenáři,

text, který právě čtete, vznikl v rámci řešení projektu "Matematika pro inženýry 21. století - inovace výuky matematiky na technických školách v nových podmínkách rychle se vyvíjející informační a technické společnosti". Projekt je řešen na Vysoké škole báňské - Technické univerzitě v Ostravě a Západočeské univerzitě v Plzni v období 2009 - 2012.

Hlavní motivací projektu je potřeba reagovat na změny významu jednotlivých partií matematiky při řešení praktických problémů, způsobenou zejména velkým pokrokem v matematickém modelování, dramatickým zlepšováním software a rychlým zvyšováním výpočetních kapacit moderních počítačů. Inženýři nyní běžně využívají stále se vyvíjející komplikované softwarové produkty, založené na matematických pojmech, se kterými se v kurzech matematiky buďto nesetkají vůbec nebo v nevhodné formě. Na druhé straně prezentace některých pojmů v základních kurzech neodráží z nejrůznějších důvodů potřeby odborných kateder. Bohužel tento stav ztěžuje studentům aktivní používání získaných vědomostí v odborných předmětech i orientaci v rychle se vyvíjejících metodách inženýrské praxe.

Cílem projektu je inovace matematických a některých odborných kurzů na technických vysokých školách s cílem získat zájem studentů, zvýšit efektivnost výuky, zpřístupnit prakticky aplikovatelné výsledky moderní matematiky a vytvořit předpoklady pro efektivní výuku inženýrských předmětů. Zkvalitnění výuky matematiky budoucích inženýrů chceme dosáhnout po stránce formální využitím nových informačních technologií přípravy elektronických studijních materiálů a po stránce věcné pečlivým výběrem vyučované látky s důsledným využíváním zavedených pojmů v celém kurzu matematiky s promyšlenou integrací moderního matematického aparátu do vybraných inženýrských předmětů. Metodiku výuky matematiky a její atraktivnost pro studenty chceme zlepšit důrazem na motivaci a důsledným používáním postupu "od problému k řešení".

V rámci projektu vytváříme 40 nových výukových materiálů z oblastí matematické analýzy, lineární algebry, numerických metod, metod optimalizace, diskrétní matematiky, teorie grafů, statistiky a několika odborných kurzů. Všechny hotové výukové materiály budou volně k dispozici na webových stránkách projektu http://mi21.vsb.cz.

Tento materiál je koncipován jako stručný úvod do nauky o pružnosti a pevnosti. Jeho cílem je vyplnění mezery v učebních textech, která vznikla po restrukturalizaci studia na VŠB-TU Ostrava v roce 2001. Výklad teoretických základů mechaniky poddajných těles je doplněn řadou řešených příkladů. Svou skladbou je předkládané dílo netradiční. V úvodu je zdůrazněna návaznost na mechaniku tuhých těles a jsou zde probrány důležité geometrické charakteristiky průřezu. Následně jsou vysvětlovány koncepty napětí a deformace, jenž jsou hned vzájemně propojeny v kapitole, věnované konstitučním vztahům. Další kapitoly se zabývají základními typy namáhání (tah-tlak, ohyb a kroucení), jednotlivými hypotézami pevnosti, stabilitou přímých prutů a únavou materiálu. V závěrečných kapitolách je uveden přehled experimentálních metod pružnosti a jsou vyloženy úplné základy matematické teorie pružnosti, nutné pro vysvětlení principu metody konečných prvků a dalších numerických metod mechaniky v navazujících ročnících studia. Elektronická verze skript na CD-ROM je doplněna také videem tahové zkoušky a názornými animacemi: 1. Mohrova kružnice pro tah (kapitola 3) 2. Konstrukce Mohrovy kružnice pro případ rovinné napjatosti (kapitola 3) 3. Vyhodnocení tahové zkoušky (kapitola 5).

Text byl vysázen pomocí sázecího systému TEX ve formátu pdfLATEX.

V Ostravě 21. 1. 2011 Radim Halama

Orientace v textu

Každá kapitola má svou pevnou strukturu, která by vám měla pomoci k rychlejší orientaci v textu. Při psaní můžete využít následující „stavební kameny“:

Průvodce studiem

Prostřednictvím průvodce studiem vás chceme seznámit s tím, co vás v dané kapitole čeká, které části by měly být pro vás opakováním, na co je třeba se obzvláště zaměřit atd.

Cíle

V části cíle se dozvíte, co všechno zvládnete a budete umět po prostudování dané kapitoly.

Příklad

Touto ikonou jsou označeny všechny řešené příklady. Konec řešených příkladů je označen plným trojúhelníčkem (▲).

Pojmy k zapamatování

Pojmy zde uvedené jsou většinou nové a zcela zásadní. To znamená tyto pojmy nejen pochopit a umět ilustrovat na příkladech, ale také umět vyslovit jejich přesné definice.

Kontrolní otázky

Odpovězením na tyto otázky si ověříte, zda jste daným pojmům porozuměli, zda si uvědomujete rozdíly mezi zdánlivě podobnými pojmy, zda dovedete uvést příklad ilustrující danou situaci atd.

Příklady k procvičení

Tyto příklady slouží k tomu, abyste si důkladně procvičili probranou látku. Výsledky uvedených příkladů jsou zařazeny na konci každé kapitoly.

Klíč k příkladům k procvičení

Na konci každé kapitoly je uveden klíč ke cvičením, který obsahuje výsledky příkladů k procvičení.

Autotest

Pomocí autotestu si otestujete své znalosti a početní dovednosti z celého objemu učiva.

Pro zájemce

Tato část, jak již bylo uvedeno výše, obsahuje rozšíření výsledků na funkce tří a zejména obecně n proměnných. Je od ostatního textu odlišena menším typem písma.

Literatura

Jedná se o literaturu, použitou autory při vytváření tohoto studijního materiálu, nikoliv jen o literaturu, doporučenou k dalšímu studiu. Pokud některou z uvedených publikací doporučujeme zájemcům, pak je to v textu spolu s odkazem na daný titul jasně uvedeno.

Rejstřík

Rejstřík, uvedený na konci skript, poslouží ke snadné orientaci v textu.

Definice a věty jsou uvedeny v rámečku (v tiskové verzi) resp. barevným písmem s barevným pozadím (v obrazovkové verzi). Konce důkazů jsou vyznačeny prázdným čtverečkem (□), konce řešení příkladů plným trojúhelníčkem (▲).

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Průvodce studiem

V prvním ročníku jsme se seznámili se základními poznatky statiky, tedy nauky o vzájemném působení tuhých těles. Ve skutečnosti není žádné těleso dokonale tuhé a v inženýrské praxi musíme pro návrh a kontrolu konstrukčních prvků vyjít z poznatků nauky o pružnosti a pevnosti. První část této úvodní kapitoly se věnuje vysvětlení základních pojmů a předpokladů, které v pružnosti a pevnosti používáme. V druhé části kapitoly jsou pak vyloženy geometrické charakteristiky ploch, které budeme v tomto předmětu potřebovat. Prakticky v každé kapitole se s některou z geometrických charakteristik průřezu setkáme, proto je důkladné studium této kapitoly zcela zásadní pro pochopení dalších statí.

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete:

- chápat základní pojmy pružnosti a pevnosti
- rozumět vztahu mezi vnějšími silami, vnitřními silami a napětím
- znát základní předpoklady pružnosti a pevnosti
- umět odvodit vztahy pro výpočet vybraných geometrických charakteristik ploch
- schopni stanovit kvadratické momenty složených ploch symetrických obrazců
- chápat souvislosti mezi geometrickými charakteristikami a tuhostí prutů

1.1 Vymezení základních pojmů

Mechanika je nejstarší vědní obor a její nedílnou součástí je nauka o pružnosti a pevnosti.

Zatímco *statika* a *dynamika* patří do mechaniky tuhých těles, protože považují těleso za dokonale tuhé a zabývají se pouze účinky vnějších sil, pružnost a pevnost patří do mechaniky poddajných těles a zkoumá účinky sil vnějších i vnitřních. V zásadě můžeme vnější síly rozdělit do dvou kategorií:

a) Síly, působící z vnějšku na těleso (zatížení, tlak větru, tíha sněhu, apod.).

b) Síly, vázané na hmotu a působící ve všech bodech tělesa (odstředivé, gravitační a setrvačné síly).

Definice 1.1. *Pružnost* je schopnost pevných těles získat po odstranění vnějších účinků původní tvar. *Pevnost* je schopnost prvku (součásti či konstrukce) přenést zatížení bez porušení.

Každé těleso, vystavené účinku vnějších sil či dalších účinků (změna teploty a pod.), mění obecně svůj tvar a rozměry - deformuje se (obr. 1.1). Vnitřní síly pak vznikají v důsledku sil vnějších.

Obr. 1.1

Skutečné vnitřní síly, které udržují těleso v pevném stavu, pružnost a pevnost nezkoumá, protože tyto nezávisí na vnějších vlivech. Zabývá se však tzv. doplňkovými vnitřními silami (dále jen vnitřní síly), které se snaží po odlehčení vnějšího zatížení vrátit těleso do původního tvaru. Mírou intenzity vnitřních sil je veličina, zvaná napětí. Vztah mezi vnějšími silami, vnitřními silami a mechanickým napětím je vyjádřen graficky na obr. 1.2.

Obr. 1.2

Z aplikovaných vnějších sil můžeme vypočítat nejprve vnitřní síly a až potom mechanické napětí. Někdy se však setkáváme i s inverzní úlohou, kdy ze známých hodnot napětí máme vypočítat velikost vnějších sil.

1.2 Cíle a předpoklady nauky o pružnosti a pevnosti

Pružnost a pevnost je tradičně rozdělena na:

- technickou nauku o pružnosti a pevnosti (angl. strength of materials), využívající zjednodušujících předpokladů pro navržení postupů k řešení elementárních praktických úloh
- matematickou teorii pružnosti (angl. elasticity), která využívá vyšší matematickou analýzu k řešení náročnějších úloh mechaniky kontinua

Všechny zákony a postupy, odvozené v nauce o pružnosti a pevnosti, jsou platné pouze za splnění následujících předpokladů:

1. Zatížení je statické, dynamické účinky lze zanedbat.
2. Těleso je spojité (bez vad), považujeme jej za kontinuum.
3. V materiálu neexistují počáteční (zbytková) napětí.
4. Napětí jsou přímo úměrná deformacím, platí tzv. Hookeův zákon.
5. Materiál je ideálně pružný, přestane-li působit vnější zatížení, vymizí deformace i napětí.
6. Deformace jsou v porovnání s rozměry tělesa velmi malé.
7. Materiál je homogenní a isotropní, v každém bodě tělesa jsou tedy stejné fyzikální vlastnosti a ve všech směrech jsou shodné mechanické vlastnosti.

Jeden z nejdůležitějších a často využívaných principů je princip superpozice, který ovšem platí pouze za výše uvedených předpokladů. Princip superpozice umožňuje složitou úlohu rozdělit na dílčí (jednodušší) úlohy, tyto vyřešit a výsledky dílčích úloh sečíst. Princip superpozice je možné využít při řešení sil, napětí i deformací.

Mezi výpočetní úlohy pružnosti a pevnosti patří:

- podmínka pevnostní
- podmínka tuhostní
- staticky neurčitá úloha

V pružnosti jsou dva typy pevnostních výpočtů:

- přímé metody
  - výpočet napětí
  - výpočet deformací
- nepřímé metody
  - dimenzování, tj. určení rozměrů průřezu tak, aby napětí nebo deformace byly menší než dovolená hodnota
  - výpočet maximálního zatížení (např. síly či momentu silové dvojice), které vyvodí dovolené hodnoty napětí či deformace

Nejjednodušším typem modelového tělesa je *prut*. Nemůžeme mezi ně počítat obecně tělesa "dlouhá a tenká", ale musí být také splněny jisté předpoklady, o kterých bude řeč později. Únosnost řešeného prutu velmi souvisí s rozložením plochy průřezu.

1.3 Kvadratické momenty plochy průřezu

Z hlediska únosnosti prutu není podstatný pouze obsah průřezové plochy, ale také její rozložení (kromě namáhání prostým tahem). V praxi se často setkáváme například s tenkostěnnými profily, a to právě z toho důvodu, že velmi dobře využívají materiál. Konstrukce je lehčí při stejné únosnosti.

V této kapitole budou shrnuty poznatky, týkající se průřezových charakteristik, kterým se říká kvadratické momenty ploch. S kvadratickými momenty ploch se nejčastěji setkáváme při výpočtu ohybového napětí u prutů, namáhaných ohybem, nebo při výpočtu smykového napětí u prutů kruhového průřezu, namáhaných kroucením. Kvadratiské momenty ploch se rovněž využívají při dimenzování součástí, namáhaných výše uvedenými způsoby.

Pojem "moment setrvačnosti" se používá v dynamice a fyzice, jedná se zde však o hmotové momenty setrvačnosti.

1.3.1 Výpočet těžiště plochy průřezu

Kvadratické momenty plochy se ve většině případů určují vzhledem k souřadnicovým osám, které procházejí těžištěm. Poloha těžiště plochy v kartézském souřadnicovém systému z-y o obsahu

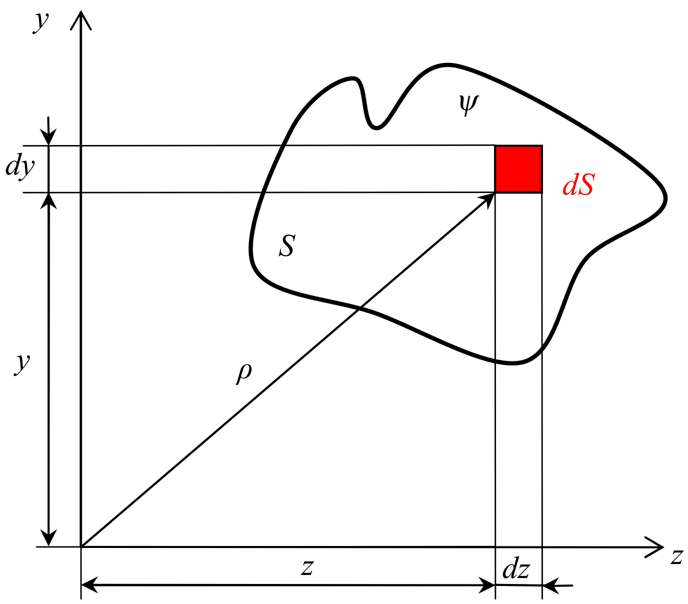
$$S = \int_{\psi} dS \tag{1.1}$$

je dána souřadnicemi těžiště, pro něž byly v mechanice tuhých těles odvozeny následující výrazy

$$Y_T = \frac{\int_{\psi} y\,dS}{\int_{\psi} dS}, \quad Z_T = \frac{\int_{\psi} z\,dS}{\int_{\psi} dS}. \tag{1.2}$$

1.3.2 Definice kvadratických momentů plochy

Mějme obecnou plochu v kartézském souřadnicovém systému z-y (obr. 1.3).



Obr. 1.3

Nejprve budou definovány statické momenty U plochy ψ, které vyjadřují rozložení plochy průřezu vždy k jedné ose a udávají se v $[m^3]$. Statický moment plochy průřezu vzhledem k ose y je dán výrazem

$$U_y = \int_{\psi} z\,dS. \tag{1.3}$$

Pro statický moment plochy k ose z platí analogicky

$$U_z = \int_{\psi} y\, dS. \tag{1.4}$$

Statické momenty ploch se objevily již ve výrazech pro souřadnice těžiště plochy. Z hlediska další probírané látky jsou důležitější kvadratické momenty plochy k jednotlivým osám, které jsou dány výrazy

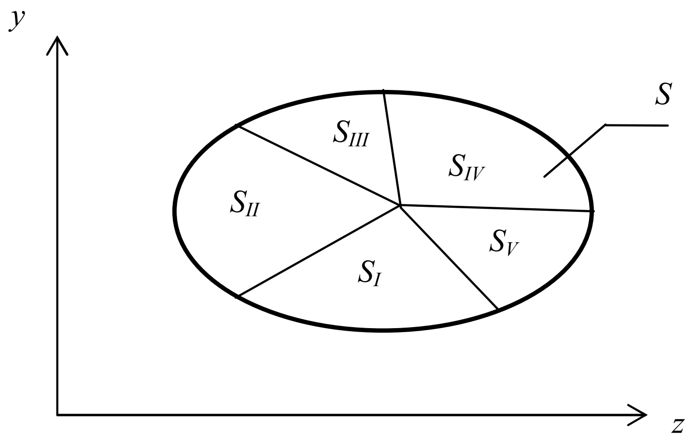
$$I_y = \int_{\psi} z^2\, dS, \quad I_z = \int_{\psi} y^2\, dS, \quad D_{yz} = \int_{\psi} yz\, dS \tag{1.5}$$

a udávají se v $[m^4]$. Kvadratické momenty ploch, vztažené k jedné ose I_y, I_z se nazývají *osové* momenty a kvadratický moment, vyjadřující rozložení plochy vzhledem k oběma osám kartézského souřadnicového systému D_{yz} je označován jako *deviační*.

Z definice osových kvadratických momentů plochy (1.5) vyplývá, že jsou vždy kladné, na rozdíl od deviačního momentu, který může nabývat kladných i záporných hodnot.

Mezi důležité vlastnosti kvadratických momentů ploch patří aditivnost.

Věta 1.1. Kvadratický moment rovinného obrazce k dané ose se rovná algebraickému součtu kvadratických momentů dílčích částí vztažených k téže ose.



Obr. 1.4

Pro plochu na obr. 1.4 platí $S = S_I + S_{II} + S_{III} + S_{IV} + S_V$, avšak z definice kvadratických momentů plyne také $I_y = I_{yI} + I_{yII} + I_{yIII} + I_{yIV} + I_{yV}$ a $I_z = I_{zI} + I_{zII} + I_{zIII} + I_{zIV} + I_{zV}$.

U prutů namáhaných krutem se setkáváme s polárním kvadratickým momentem I_p, který je definován výrazem

$$I_p = \int_{\psi} \rho^2 \, dS, \tag{1.6}$$

kde vzdálenost od počátku lze vyjádřit ze souřadnic pomocí Pythagorovy věty

$$\rho^2 = y^2 + z^2. \tag{1.7}$$

Polární kvadratický moment plochy tedy vyjadřuje její rozložení vzhledem k počátku souřadnicového systému. Po dosazení posledního výrazu dostáváme užitečný vztah mezi polárním kvadratickým momentem a osovými kvadratickými momenty plochy

$$I_p = \int_{\psi} \left(y^2 + z^2\right) \, dS = I_z + I_y. \tag{1.8}$$

Věta 1.2. Polární kvadratický moment plochy k bodu (pólu), který je průsečíkem dvou kolmých os (v našem případě y a z), se rovná součtu kvadratických momentů plochy k těmto osám.

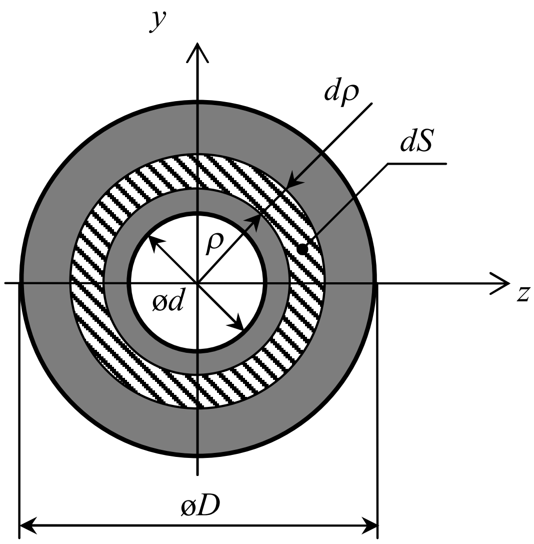
Počátek souřadnicového systému obvykle vkládáme do těžiště průřezu.

Definice 1.2. Kvadratické momenty plochy vztažené k osám, procházejících těžištěm, nazýváme *centrální momenty setrvačnosti*. Osy procházející těžištěm průřezu se nazývají *centrální osy*.

Budeme-li zvolený kartézský souřadnicový systém natáčet, bude se měnit také rozložení plochy vzhledem k souřadnicovým osám a tím i osové kvadratické momenty. U každé plochy pak existuje taková poloha souřadnicového systému, kdy jsou osové kvadratické momenty extrémní a zároveň je deviační moment nulový.

Definice 1.3. Nalezením dvou vzájemně kolmých os, procházejících těžištěm, k nimž je deviační moment nulový, získáme tzv. *hlavní centrální osy* 1 a 2, k nimž jsou hodnoty kvadratických momentů extrémní – *hlavní centrální kvadratické momenty* ($I_1 = I_{max}$, $I_2 = I_{min}$).

Příklad 1.1. Odvoďte polární kvadratický moment pro mezikruhový průřez s rozměry d a D dle obr. 1.5.



Obr. 1.5

Při odvození polárního kvadratického momentu mezikruží lze vyjít ze vztahu 1.6, přičemž je výhodné zvolit element plochy také ve tvaru mezikruží.

Potom obsah elementu plochy dS lze získat jako násobek obvodu a tloušťky elementu $\mathrm{d}S = 2\pi\rho\mathrm{d}\rho$ a po dosazení do vztahu (1.6) se postupně odvodí

$$I_p = \int\limits_{\psi} \rho^2 \, dS = 2\pi \int\limits_{d}^{D} \rho^3 d\rho = 2\pi \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_d^D = \frac{\pi}{32}\left(D^4 - d^4\right) = I_y + I_z = 2I_y. \tag{P1}$$

Odtud pak lze vyjádřit

$$I_y = I_z = \frac{\pi}{64}\left(D^4 - d^4\right). \tag{P2}$$

Vztah (P1) lze rovněž získat s využitím aditivních vlastností kvadratických momentů jako rozdíl kvadratických momentů vnějšího a vnitřního kruhu

$$I_p = I_{pD} - I_{pd} = \frac{\pi}{32}D^4 - \frac{\pi}{32}d^4 = \frac{\pi}{32}\left(D^4 - d^4\right). \tag{P3}$$

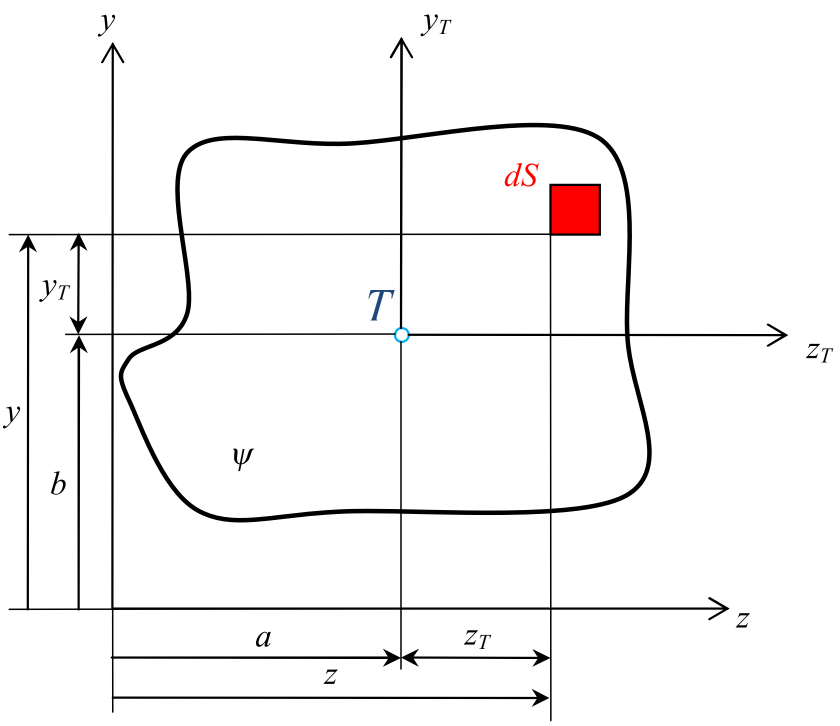
Uvědomme si, že osové centrální kvadratické momenty u mezikruží (i kruhu) budou nabývat stejné hodnoty pro jakkoliv natočený souřadnicový systém, procházející těžištěm. Z této představy plyne, že pro hlavní centrální kvadratické momenty mezikruží platí

$$I_1 = I_2 = I_y = I_z. \tag{P4}$$

▲

1.3.3 Kvadratické momenty plochy k rovnoběžným osám (Steinerova věta)

Uvažujme rovinnou plochu obecného tvaru dle obr. 1.6 a předpokládejme, že jsou známy souřadnice těžiště a, b ve zvoleném kartézském souřadnicovém systému (budeme je nazývat referenční). V těžišti plochy nechť je zaveden souřadnicový systém s osami y_T a z_T, rovnoběžnými s osami referenčního souřadnicového systému y a z. Naším cílem bude nalezení vztahů mezi kvadratickými momenty plochy, vztaženými k osám referenčním a centrálními kvadratickými momenty plochy, tedy mezi I_y a I_{yT}, respektive I_z a I_{zT}.



Obr. 1.6

Transformaci z referenčního souřadnicového systému $z - y$ do centrálního souřadnicového systému $z_T - y_T$ lze zapsat takto

$$\begin{aligned} z &= z_T + a, \\ y &= y_T + b. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Dosazením do (1.5) získáme

$$I_y = \int_\psi z^2 \mathrm{d}S = \int_\psi (z_T + a)^2 \,\mathrm{d}S = \int_\psi z_T^2 \mathrm{d}S + 2 \int_\psi a \cdot z_T \mathrm{d}S + \int_\psi a^2 \mathrm{d}S = \\ = I_{yT} + 2a \int_\psi z_T \mathrm{d}S + a^2 S, \tag{1.10}$$

kde $\int_\psi z_T \, dS$ je statický moment plochy k ose y_T.

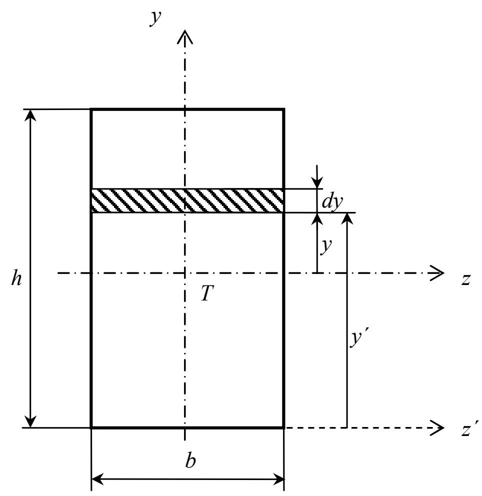
Ze vztahu (1.2) vyplývá, že k centrální ose je statický moment plochy vždy nulový, proto se vztah (1.10) dále zjednoduší

$$I_y = I_{yT} + a^2 S. \tag{1.11}$$

Analogicky lze postupovat i u zbývajících kvadratických momentů a získá se

$$\begin{aligned} I_z &= I_{zT} + b^2 S, \\ D_{yz} &= D_{yzT} + abS. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Příklad 1.2. Odvoďte vztahy pro kvadratické momenty obdélníku s rozměry stran b a h k osám z, z' (obr. 1.7).



Obr. 1.7

V případě mezikruhového průřezu bylo elementární plochou mezikruží, u obdélníkového průřezu pro výpočet s výhodou volíme jako elementární plochu obdélník

$$I_z = \int_{\psi} y^2 \mathrm{d}S = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 b \mathrm{d}y = b \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{bh^3}{12}, \tag{1.13}$$

$$I_{z'} = \int_{\psi} y'^2 \mathrm{d}S = \int_{0}^{h} y'^2 b \mathrm{d}y = b \left[\frac{y'^3}{3} \right]_{0}^{h} = \frac{bh^3}{3}. \tag{1.14}$$

Stejného výsledku bychom v případě $I_{z'}$ dosáhli s využitím Steinerovy věty, tedy

$$I_{z'} = I_{zT} + \left(\frac{h}{2} \right)^2 \cdot S = \frac{b \cdot h^3}{12} + \frac{h^2}{4} \cdot b \cdot h = \frac{b \cdot h^3}{3}. \tag{1.15}$$

▲

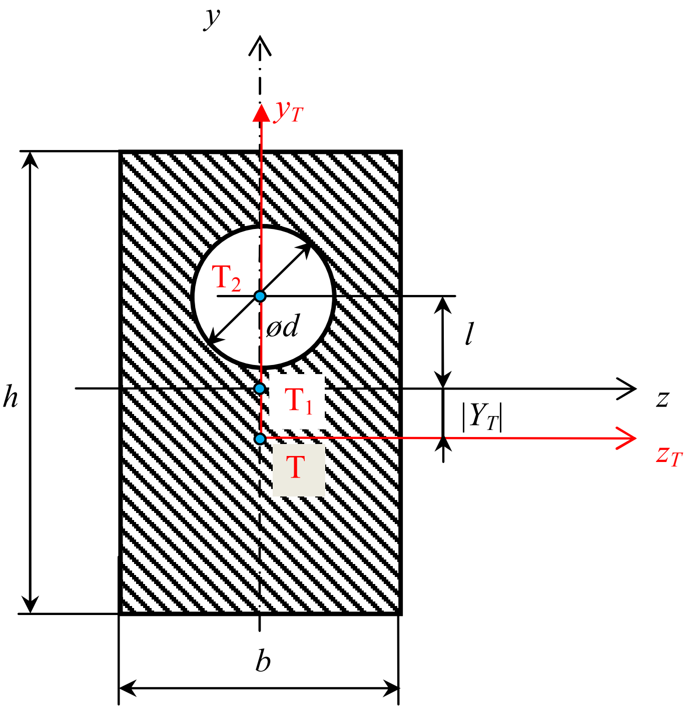
1.3.4 Hlavní kvadratické momenty složených ploch s osou symetrie

V technické praxi se často používají tvarově složitější průřezy, ať již z důvodů designových, konstrukčních či pevnostních. Vhodnou volbou tvaru průřezu lze při zachování stejné plochy průřezu docílit značně vyšší nosnosti prutu. Složitější průřezy lze obvykle rozdělit na několik jednoduchých obrazců, pro které je známo analytické řešení centrálních kvadratických momentů. Kvadratické momenty takového složeného obrazce lze vypočítat z kvadratických momentů dílčích částí s využitím Steinerovy věty.

Postup výpočtu je následující:

1. Rozdělení průřezu na dílčí plochy.
2. Stanovení polohy těžiště.
3. Aplikace Steinerovy věty.

Příklad 1.3. Stanovte hlavní centrální kvadratické momenty plochy z obr. 1.8, jestliže jsou dány její rozměry $b = 20mm$, $h = 40mm$, $l = 10mm$ a $d = 10mm$.



Obr. 1.8

Ad 1) *Rozdělení průřezu na dílčí plochy.*
plocha 1 – obdélník (těžiště T_1), plocha 2 - kruh (těžiště T_2)

Ad 2) *Stanovení polohy těžiště.*
Těžiště musí ležet na ose symetrie

$$Z_T = 0\ mm. \tag{1.16}$$

Druhou souřadnici těžiště lze získat upravením vztahu (1.2). Pro N dílčích ploch platí

$$Y_T = \frac{\int_S y\, dS}{\int_S dS} = \frac{\sum_{i=1}^{N} Y_{Ti}\, S_i}{\sum_{i=1}^{N} S_i}. \tag{1.17}$$

Po dosazení

$$Y_T = \frac{Y_{T1}\, S_1 - Y_{T2}\, S_2}{S_1 - S_2} = \frac{0 \cdot 40 \cdot 20 - 10 \cdot \frac{\pi \cdot 10^2}{4}}{40 \cdot 20 - \frac{\pi \cdot 10^2}{4}} = -1,089\ mm. \tag{1.18}$$

Poloha těžiště je tedy dána souřadnicemi: $T\ [0; -1,089]$.

Ad 3) *Aplikace Steinerovy věty.*
Výpočet centrálních kvadratických momentů plochy

$$I_{zT} = I_{zT1} + Y_T^2\, S_1 - \left[I_{zT2} + (l + |Y_T|)^2\, S_2\right] = \frac{1}{12} bh^3 + Y_T^2\, bh - \left[\frac{\pi d^4}{64} + (l + |Y_T|)^2\, \frac{\pi d^2}{4}\right]. \quad (1.19)$$

Po dosazení vyjde $I_{zT} = 97467\ mm^4$.

$$I_{yT} = I_{yT1} + 0^2 \cdot S_1 - \left[I_{yT2} + 0^2 \cdot S_2\right] = \frac{1}{12} hb^3 - \frac{\pi d^4}{64}. \quad (1.20)$$

Po dosazení vyjde $I_{yT} = 26176\ mm^4$.

▲

1.3.5 Moduly průřezu

Dosud jsme zkoumali průřezové charakteristiky teoreticky. Podívejme se na ně nyní z praktického pohledu. Příkladem prutu může být např. také tenké přímé pravítko s přibližně obdélníkovým průřezem. Pokud jej uchopíme za oba konce a zatížíme uprostřed, bude velikost průhybu záviset na tom, jestli jsme sílu aplikovali rovnoběžně s delší stranou průřezu (nepozorovatelný průhyb) či kolmo na ni (velký průhyb).

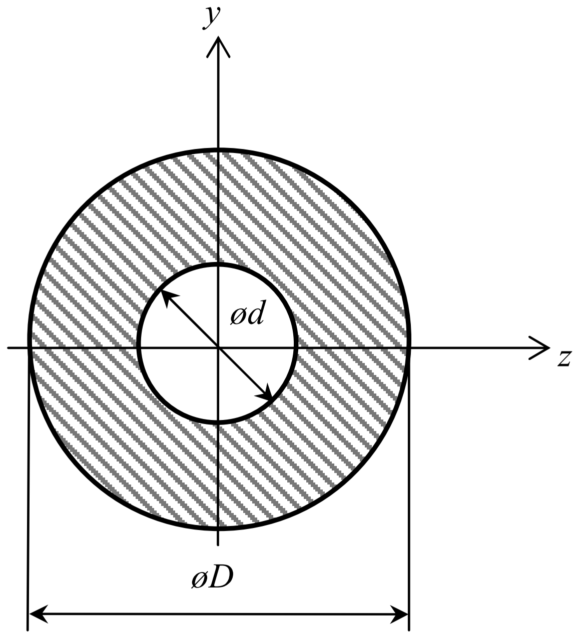
Uvedený příklad spadá do kapitoly, věnované rovinnému ohybu a v tomto případě bychom měli nazývat prut nosníkem, viz. kapitola 8. Jak bude ukázáno v odkazované kapitole, únosnost pravítka souvisí zejména s kvadratickým momentem průřezu k ose kolmé na směr působící síly, ale také s největší vzdáleností krajního vlákna od těžiště průřezu ve směru působící síly. Zavádí se proto pojem modulu průřezu v ohybu $W_o\ [m^3]$, který oba vlivy zahrnuje. Z obdobných důvodů se také zavádí průřezový modul v krutu $W_k\ [m^3]$, viz kapitola 7.

Definice 1.4. *Průřezový modul v ohybu* se definuje pro nosníky, u nichž veškeré vnější zatížení působí v rovině, tvořené střednicí nosníku a osou symetrie průřezu (rovina ohybu), a to jako podíl centrálního kvadratického momentu průřezu, vztaženého k ose, kolmé na rovinu ohybu, a největší vzdálenosti krajního vlákna od těžiště na ose symetrie průřezu.

Definice 1.5. *Průřezový modul v krutu* se pro kruhový i mezikruhový průřez vyjadřuje poměrem polárního kvadratického momentu plochy a vzdálenosti vnějšího povrchu od těžiště průřezu.

Věta 1.3. Pro výpočet průřezových modulů v ohybu resp. krutu neplatí aditivní zákon jako v případě kvadratických momentů průřezu.

Příklad 1.4. Určete průřezový modul v ohybu a v krutu u mezikruhového průřezu, uvedeného na obr. 1.9.



Obr. 1.9

Průřezový modul v ohybu

Dle definice

$$W_o = \frac{I_z}{\frac{D}{2}} = \frac{\frac{\pi}{64}\,(D^4 - d^4)}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{(D^4 - d^4)}{D}. \tag{1.21}$$

Uvědomme si neplatnost aditivního zákona $W_o \neq W_{oD} - W_{od}$!

Průřezový modul v krutu

Platí

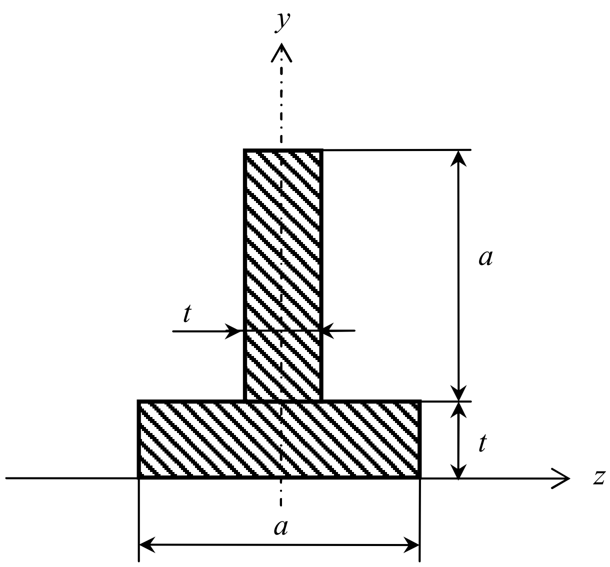
$$W_k = \frac{I_p}{\frac{D}{2}} = \frac{\frac{\pi}{32}\,(D^4 - d^4)}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{(D^4 - d^4)}{D}. \tag{1.22}$$

▲

Příklady k procvičení

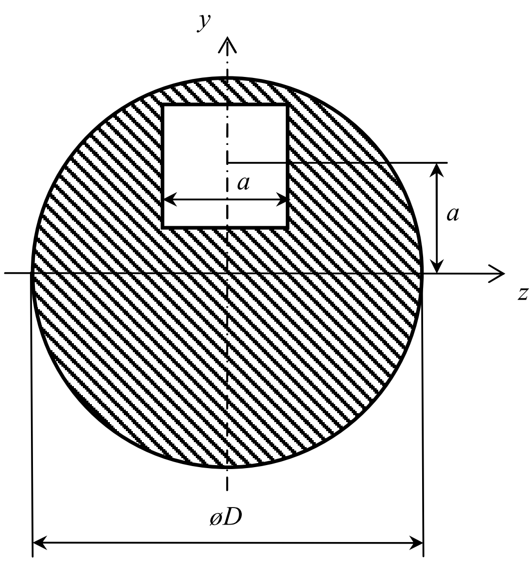
!

1. Určete polohu těžiště a hlavní kvadratické momenty průřezu (obr. 1.10) vzhledem k osám, procházejícím těžištěm. Dáno: $a = 60\ mm$, $t = 20\ mm$.



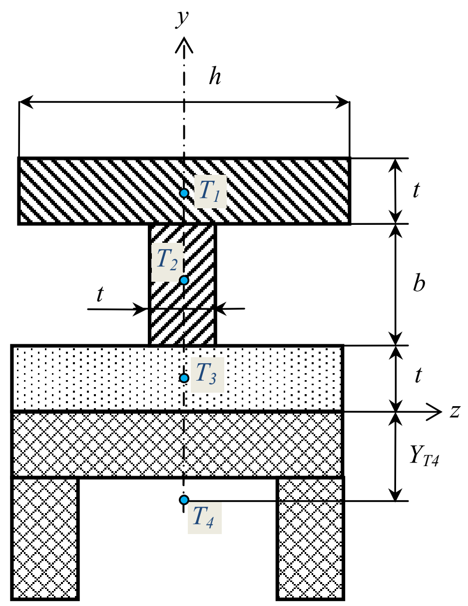
Obr. 1.10

2. Určete polohu těžiště a hlavní centrální kvadratické momenty průřezu na obr. 1.11. Dáno: $a = 30\ mm$, $D = 100\ mm$.



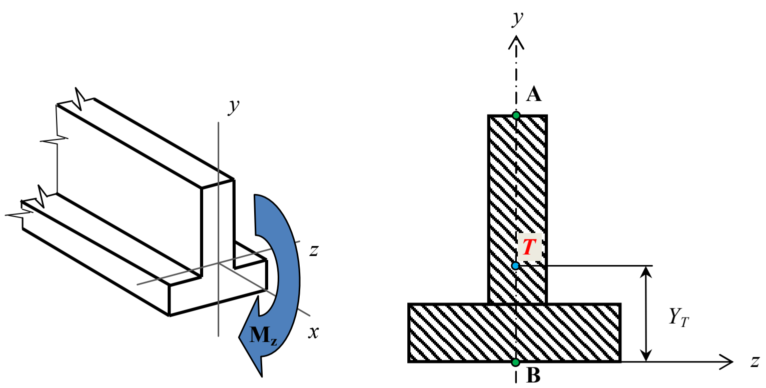
Obr. 1.11

3. Určete polohu těžiště a hlavní centrální kvadratické momenty průřezu (obr. 1.12). Dáno: $h = 40\ mm$, $t = 10\ mm$, $b = 30\ mm$, $Y_{T4} = 17\ mm$, $I_{zT4} = 0,144 \cdot 10^6\ mm^4$, $I_{yT4} = 0,193 \cdot 10^6\ mm^4$.



Obr. 1.12

4. Určete modul průřezu v ohybu pro místa A, B u průřezu z příkladu 1, dochází-li k ohybu v rovině x-y vlivem ohybového momentu M_z (obr. 1.13).



Obr. 1.13

Klíč k příkladům k procvičení

1. $Y_T = 30\ mm$, $I_{zT} = 1,36 \cdot 10^6\ mm^4$, $I_{yT} = 400 \cdot 10^3\ mm^4$
2. $Y_T = -3,88\ mm$, $I_{zT} = 3,926 \cdot 10^6\ mm^4$, $I_{yT} = 4,841 \cdot 10^6\ mm^4$
3. $Y_T = 5\ mm$, $I_{zT} = 1,42 \cdot 10^6\ mm^4$, $I_{yT} = 0,302 \cdot 10^6\ mm^4$
4. $W_{oA} = \frac{I_{zT}}{(a+t-Y_T)} = 27200\ mm^3$, $W_{oB} = \frac{I_{zT}}{Y_T} = 45333\ mm^3$

Pojmy k zapamatování

- vnitřní síly
- pružnost
- pevnost
- homogenní a izotropní materiál
- osové kvadratické momenty ploch
- deviační kvadratický moment
- polární kvadratický moment
- modul průřezu v ohybu
- modul průřezu v krutu

Kontrolní otázky

1. Jaké mohou být hlavní centrální kvadratické momenty?
   (a) Pouze kladné.
   (b) Kladné i záporné.
   (c) Pouze záporné.
2. Deviační moment může být?
   (a) Pouze záporný.
   (b) Záporný i kladný.
   (c) Pouze kladný.
3. V jakém případě můžeme použít Steinerovy věty?
   (a) Když známe centrální kvadratický moment plochy a hledáme kvadratický moment plochy k libovolné ose.

   (b) Když známe kvadratický moment plochy k dané ose a hledáme kvadratický moment plochy k libovolné ose, která je rovnoběžná s danou osou.
   (c) Když známe centrální kvadratický moment plochy a hledáme kvadratický moment plochy k ose s centrální osou rovnoběžnou.

4. Co je známo pro moduly průřezu?
   (a) Platí pro ně aditivní zákon.
   (b) Platí pro ně aditivní zákon za určitých podmínek.
   (c) Neplatí pro ně aditivní zákon.

Kapitola 2

Koncept napětí

Průvodce studiem

V předchozí kapitole byly definovány pojmy vnější a vnitřní síla. Tato kapitola se zabývá stanovením vnitřních sil (respektive vnitřních statických účinků) pomocí metody řezu. Je zde vysvětlen pojem mechanické napětí. V další části kapitoly jsou názorně vysvětleny základní případy namáhání.

Cíle

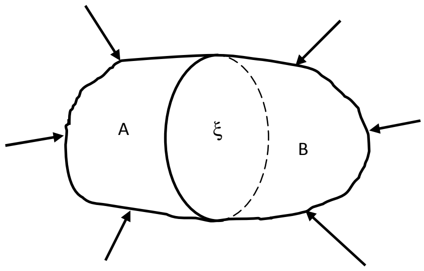
Po prostudování této kapitoly budete:

- znát princip metody řezu
- umět definovat normálové a smykové napětí
- umět vysvětlit pojem tenzor napjatosti
- chápat Saint-Venantův princip
- umět stanovit maximální napětí v průřezu pro základní druhy namáhání

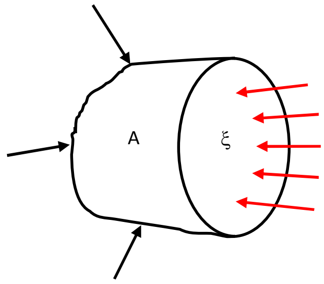
2.1 Princip metody řezu

Vnitřní síly je možno určit pomocí metody řezu. Autorem této metody je německý matematik L. Euler.

Princip metody spočívá v tom, že těleso myšleným řezem ξ rozdělíme na dvě části A a B (obr. 2.1). Odstraníme-li např. část B a požadujeme-li, aby část A zůstala v rovnováze, musíme účinek části B nahradit vnitřními silami, působícími v rovině řezu ξ (obr. 2.2).

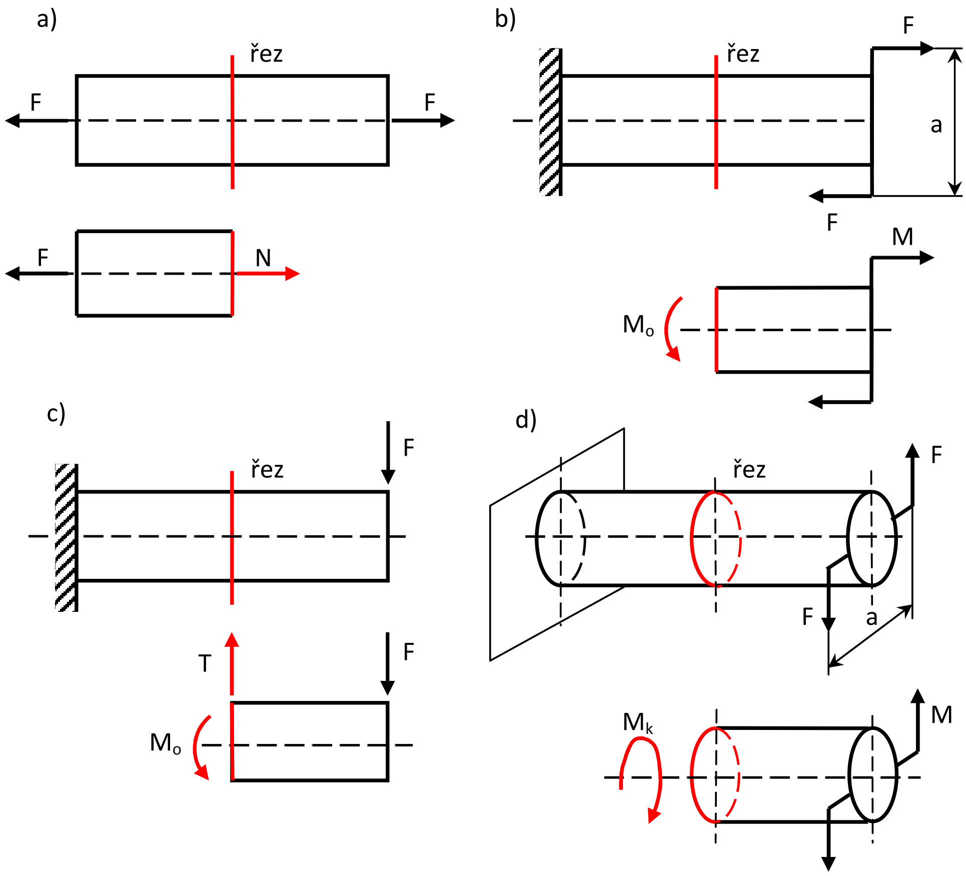


Obr. 2.1



Obr. 2.2

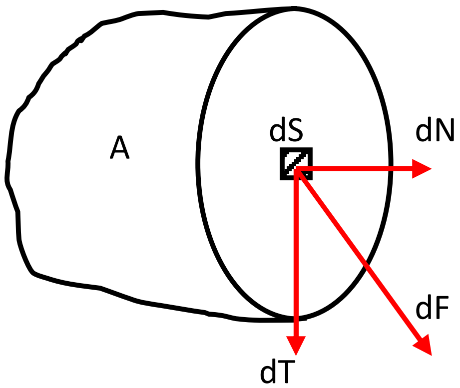
Vnitřní síly tvoří soustavu nekonečně malých sil, které jsou k ploše řezu obecně šikmé. Vnitřní síly se dají obecně vyřešit ze statických podmínek rovnováhy. Pokud se účinek vnějších sil dá nahradit jedinou vnější silou, musí jí odpovídat příslušná vnitřní síla. Obdobná zákonitost platí i pro momenty vnějších zatížení; odpovídají jim momenty vnitřních sil. Souhrně hovoříme o vnitřních statických účincích. Několik příkladů určení vnitřních statických účinků pro různé způsoby zatížení je uvedeno na obr. 2.3.



Obr. 2.3

Na obr. 2.3 jsou vykresleny základní případy namáhání, kterým se blíže bude věnovat kapitola 2.4. Při namáhání vnější tahovou silou ve směru normály (obr. 2.3a) bude výsledná vnitřní síla působit ven z průřezu také v normálovém směru - namáhání tahem. V případě namáhání jednostranně vetknutého prutu silovou dvojicí dle obr. 2.3b je výsledný účinek vnitřních sil, působících v rovině řezu, dán ohybovým momentem M_o - prostý ohyb. Je-li však tentýž nosník namáhán na volném konci například osamělou silou (obr. 2.3c), v průřezu vznikají také nenulové vnitřní síly v tečném směru, a tak výsledný silový účinek vnitřních sil je dán posouvající silou T a výsledný momentový účinek vnitřních normálových sil je dán ohybovým momentem M_o. Rozložení vnitřních normálových sil se mění po průřezu lineárně, což je znázorněno zeleně na obr. 2.11. Poslední znázorněný případ (obr. 2.3d) odpovídá kroucení prutu kruhového průřezu a výsledný momentový účinek vnitřních sil, působících v myšleném řezu, odpovídá krouticímu momentu M_k. Rozložení vnitřních tečných sil je v průřezu také lineární, viz obr. 2.12.

Vraťme se nyní k metodě řezu, naznačené na obr. 2.1 a 2.2. Uvažujme nyní, že na elementární plošce dS působí v obecném směru vnitřní síla dF, kterou můžeme rozložit do směru normálového (dN) a směru tečného (dT), viz obr. 2.4.



Obr. 2.4

Z úvodu první kapitoly víme, že mechanické napětí je intenzitou vnitřních sil. Proto podíl vnitřní síly, působící v obecném směru na element plochy průřezu (obr. 2.4), můžeme nazvat obecným napětím

$$\nu = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}S}. \tag{2.1}$$

Kolmá složka způsobuje normálové napětí

$$\sigma = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}S} \tag{2.2}$$

a tečná složka způsobuje smykové napětí

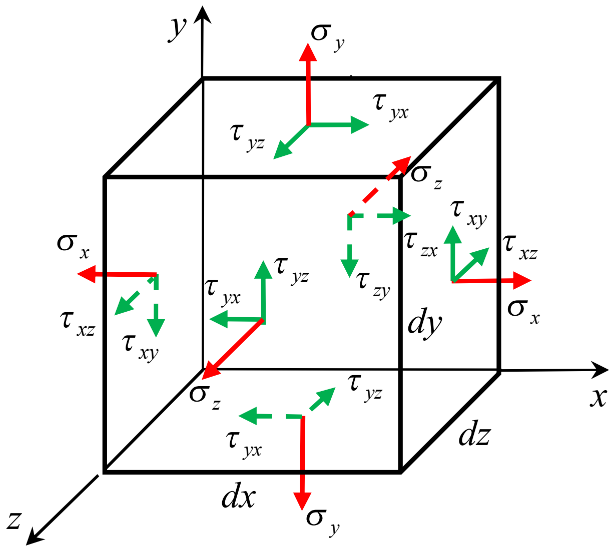
$$\tau = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}S}. \tag{2.3}$$

Fyzikální jednotkou napětí je $Pa = \frac{N}{m^2}$; v technické praxi se napětí zpravidla udává v $MPa = \frac{N}{mm^2}$.

Normálová napětí představují vazbu, která brání částicím tělesa se od sebe oddálit ve směru kolmém k rovině řezu. Smyková napětí pak vyjadřují vazbu částic tělesa, jež jim brání se vůči sobě posouvat v rovině řezu.

2.2 Napětí v bodě tělesa

Vnitřnímu bodu tělesa odpovídá v pevnostních výpočtech krychle o velice malých rozměrech, tzv. elementární krychle (obr. 2.5). Všech šest stěn, omezujících krychli, vzniklo aplikací metody řezu. Z předchozího textu kapitoly víme, že na každé straně krychle obecně působí normálové a smykové napětí. Smyková napětí, působící na příslušných rovinách mají obecný směr, takže je můžeme rozložit do dvou navzájem kolmých směrů, rovnoběžných se souřadnicovými osami.



Obr. 2.5

Jak už bylo uvedeno, normálová napětí se zpravidla označují řeckým písmenem σ. Index u normálového napětí značí směr normály plochy, na které napětí působí. Smyková napětí se zpravidla označují řeckým písmenem τ a dvěma indexy, první index značí směr normály plochy, na které napětí působí, druhý index směr napětí. Je nutno podotknout, že smyková napětí, působící na příslušných rovinách, mají obecný směr, takže je můžeme rozložit do dvou navzájem kolmých směrů. Např. na rovině, která je kolmá k ose x působí normálové napětí σ_x a smyková napětí τ_{xy}, τ_{xz}. Výsledné smykové napětí τ_x je dáno geometrickým součtem $\tau_x = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}$.

Stav napjatosti v bodě tělesa je určen devíti složkami napětí. Jsou to složky

$$\sigma_x,\ \sigma_y,\ \sigma_z,\ \tau_{xy},\ \tau_{yx},\ \tau_{xz},\ \tau_{zx},\ \tau_{yz},\ \tau_{zy}.$$

Veličina, určující stav napjatosti v bodě tělesa, je *tenzor napjatosti*. Tenzor napjatosti je symetrickým tenzorem druhého řádu a jeho složky lze zapsat maticově

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}. \tag{2.4}$$

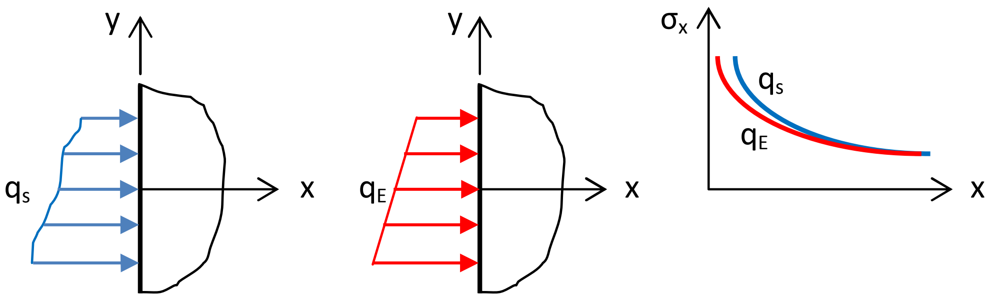
Každý sloupec odpovídá jedné rovině elementární krychle (obr. 2.5). Pro smykové složky tenzoru napjatosti platí, že absolutní hodnoty sdružených napětí jsou stejné (viz kapitola 3.2), tedy

$$|\tau_{xy}| = |\tau_{yx}|\,, \quad |\tau_{xz}| = |\tau_{zx}|\,, \quad |\tau_{yz}| = |\tau_{zy}|\,, \tag{2.5}$$

takže napěťový stav je obecně definován šesti složkami napětí: σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz}.

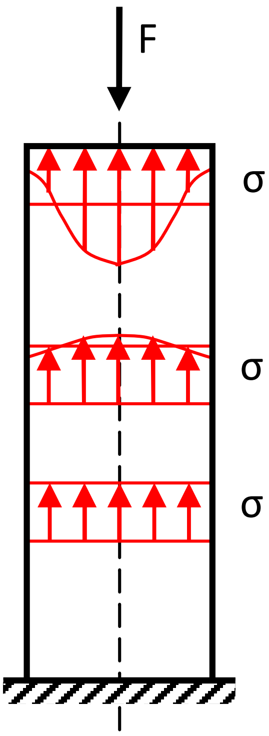
2.3 Saint-Venantův princip

Princip elastické ekvivalence staticky ekvivalentních systémů zatěžujících sil byl formulován v roce 1855 Barré de Saint-Venantem. Tento princip říká, že stav napětí a deformace tělesa v místech, které jsou dostatečně vzdálené od oblasti, ve které působí vnější síly, je stejný, pokud dané zatížení nahradíme jiným o stejné výslednici sil a stejném momentu. Tento postup je používán téměř vždy, když se idealizuje fyzikální úloha tak, aby byla přístupná pro matematické řešení. Např. skutečné spojité zatížení q_s je možno nahradit ekvivalentním zatížením q_E (obr. 2.6), průběh napětí v dostatečné vzdálenosti od osy x je totožný.



Obr. 2.6

Je vhodné si uvědomit, že v místě aplikovaného povrchového zatížení dochází v praxi většinou ke koncentraci napětí a až v dostatečné vzdálenosti od zatížení je rozložení napětí rovnoměrné (obr. 2.7). Rovněž při tahové zkoušce se předpokládá v dostatečné vzdálenosti od místa uchycení tyče rovnoměrné rozložení napětí a nezkoumá se, jakým způsobem je tyč uchycena ani jakým způsobem se přenášejí síly z čelistí zkušebního stroje na konce zkušební tyče.



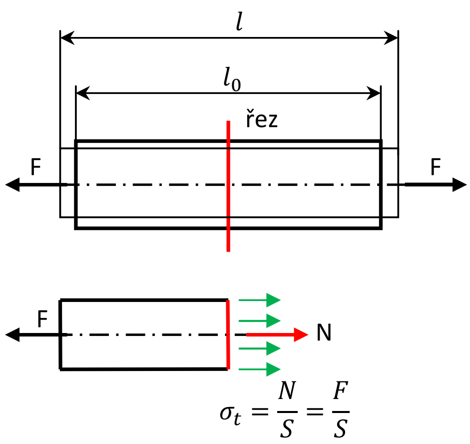
Obr. 2.7

2.4 Základní druhy namáhání

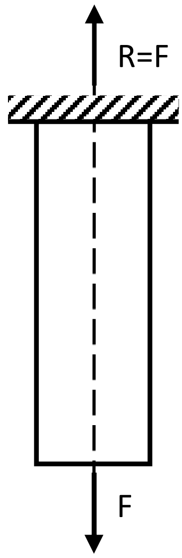
Základní druhy namáhání rozlišujeme podle napětí, které v tělese vzniká v důsledku vnějšího zatížení. V technické praxi se rozlišuje pět základních druhů namáhání: tah, tlak, smyk, ohyb a krut. Jednotlivými druhy namáhání se budeme podrobněji zabývat v následujícím textu.

2.4.1 Namáhání tahem (tlakem)

Namáhání tahem (resp. tlakem) způsobují dvě stejně velké síly opačné orientace, ležící na společné nositelce, která je totožná s těžištní osou daného průřezu (obr. 2.8). Těžištní osa průřezu se nazývá střednice. Jeden konec součásti může být upnut (v tomto případě je reakce rovna zátěžné síle) (obr. 2.9). U tahového namáhání působí síly ven z průřezu, u tlakového namáhání do průřezu. Předpokládáme, že tyč, namáhaná tahem, je homogenní (každá část tyče má stejné mechanické vlastnosti).



Obr. 2.8



Obr. 2.9

Předpokládáme, že vnitřní síly v místech dostatečně vzdálených od obou konců jsou stejně velké, napětí je tudíž po celém průřezu rovnoměrně rozloženo a jeho velikost je

$$\sigma_t = \frac{N}{S} = \frac{F}{S}. \tag{2.6}$$

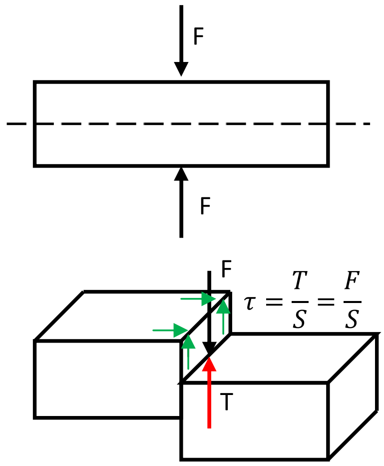
Při namáhání tlakem je napětí opačného znaménka. Tlakové napětí se zpravidla značí indexem d a je definováno vztahem

$$\sigma_d = \frac{N}{S} = -\frac{F}{S}. \tag{2.7}$$

Dlouhé štíhlé pruty je u tlakového namáhání nutno dále kontrolovat z hlediska ztráty stability (viz kapitola 10).

2.4.2 Namáhání smykem

Toto namáhání je způsobeno dvěma stejně velkými silami, ležícími na společné nositelce v rovině řezu a působícími proti sobě směrem do tělesa (obr. 2.10). Prostý smyk je pouze teoretický případ a vyskytuje se přibližně při stříhání materiálu.



Obr. 2.10

Smykové napětí je definováno následovně

$$\tau = \frac{T}{S} = \frac{F}{S}. \tag{2.8}$$

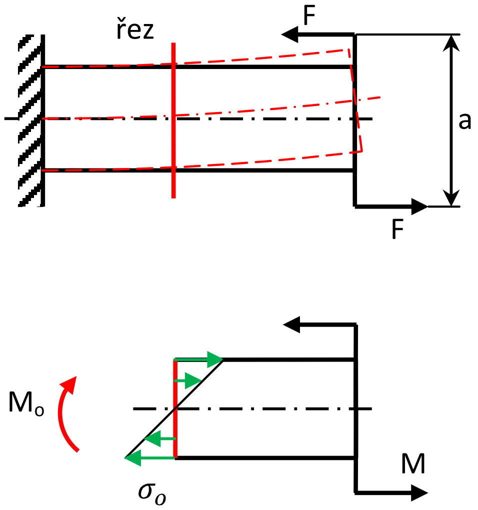
Smykové napětí je po průřezu rozloženo rovnoměrně. Dá se dokázat, že na rovině kolmé k rovině řezu je smykové napětí stejné velikosti, ale opačného znaménka (viz kapitolu 3.2).

2.4.3 Namáhání ohybem

Toto namáhání je charakterizováno silovou dvojicí (ohybovým momentem), ležící v rovině kolmé na rovinu řezu. Namáhání ohybem je charakterizováno normálovým napětím σ_o, které je po průřezu rozloženo nerovnoměrně. V případě, že střednice tělesa je přímka, se předpokládá lineární rozložení napětí (obr. 2.11). Při zatížení ohybovým momentem podle obr. 2.11 jsou horní vlákna průřezu tažena, spodní stlačována, těžištěm prochází neutrální osa, na které je nulové napětí. Ohybové napětí nabývá maxima v krajních vláknech průřezu a jeho velikost je

$$\sigma_o = \frac{M_o}{W_o}, \tag{2.9}$$

kde W_o je modul odporu průřezu v ohybu popsaný již v kapitole 1.



Obr. 2.11

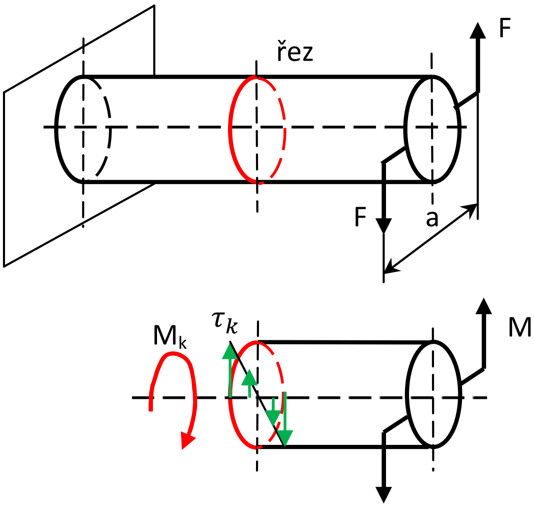
2.4.4 Namáhání krutem

Toto namáhání je charakterizováno zatížením silovou dvojicí, ležící v rovině řezu (kroutícím momentem).

Namáhání krutem je charakterizováno smykovým napětím τ_k, které je po průřezu rozloženo podle přímky s nulovou hodnotou v ose prutu (obr. 2.12). Smykové napětí nabývá maxima na vnějším obvodu průřezu, jeho velikost je dána výrazem

$$\tau_k = \frac{M_k}{W_k}, \tag{2.10}$$

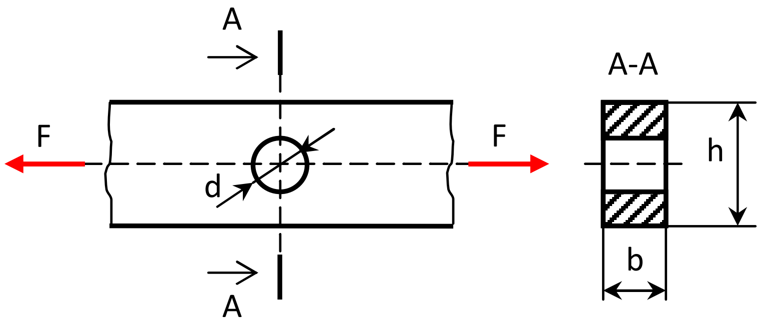
kde W_k je průřezový modul v krutu. Jeho význam byl také vysvětlen v kapitole 1.



Obr. 2.12

Příklady k procvičení

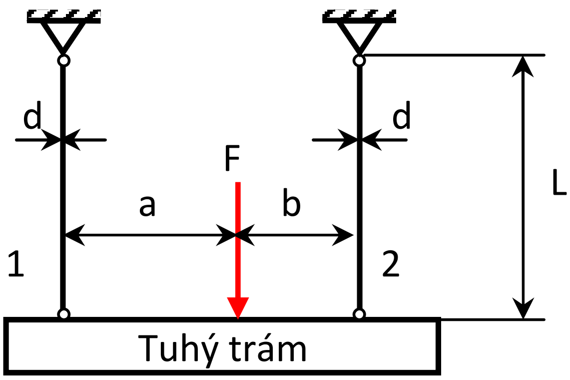
1. Plochá ocelová tyč (obr. 2.13) s rozměry průřezu $b = 20\ mm$, $h = 35\ mm$ je zatížena konstantní silou $F = 30\ kN$. Určete maximální napětí, které vznikne v nebezpečném průřezu, jestliže je v tyči kruhový otvor o průměru $d = 15\ mm$.



Obr. 2.13

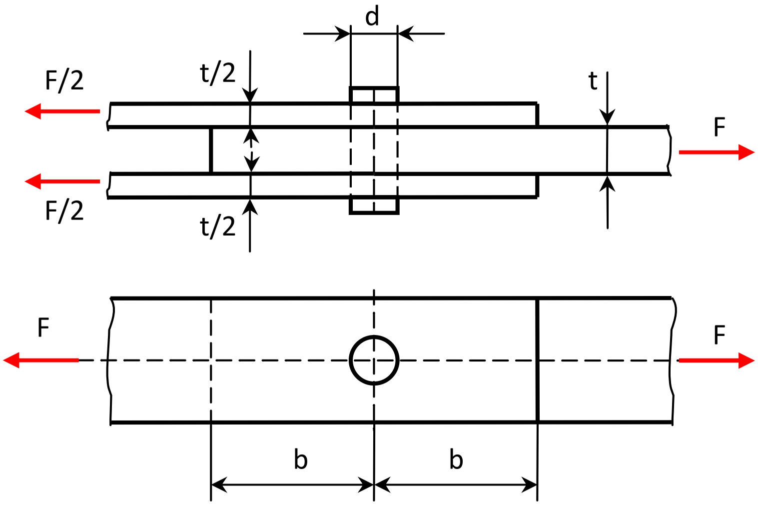
2. Tuhý trám je zavěšen na dvou lanech (obr. 2.14).

   Určete napětí v lanech, jestliže je dáno: zátěžná síla $F = 50\ kN$, průměr lan $d = 20\ mm$, délkové rozměry $a = 500\ mm$, $b = 300\ mm$, $L = 1000\ mm$.



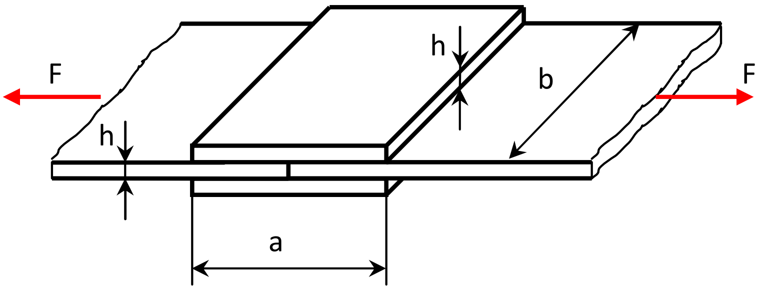
Obr. 2.14

3. Spojení podle obr. 2.15 je namáháno smykovou silou F. Určete napětí v čepu, jestliže je dáno: $F = 20\ kN$, $d = 15\ mm$, $t = 12\ mm$.



Obr. 2.15

4. Určete napětí v lepeném spoji, znázorněném na obr. 2.16, jestliže je dáno: $F = 50\ kN$, $a = 40\ mm$, $t = 60\ mm$, $h = 6\ mm$.



Obr. 2.16

Klíč k příkladům k procvičení

1. $\sigma = 75\ MPa$

2. $\sigma_1 = 59,71\ MPa$, $\sigma_2 = 99,5\ MPa$

3. $\tau = 56,6\ MPa$

4. $\tau = 10,4\ MPa$

$\sum$

Pojmy k zapamatování

- metoda řezu
- vnitřní síly
- normálové a smykové napětí
- tenzor napjatosti
- Saint-Venantův princip
- základní druhy namáhání

?

Kontrolní otázky

1. Jaké jsou základní druhy namáhání?
2. Jakým způsobem lze určit velikost vnitřních sil?
3. K čemu je používán Saint-Vénantův princip?
4. V jakém směru a na jaké rovině působí normálové napětí σ_z? Nakreslete v elementární krychli.
5. V jakém směru a na jaké rovině působí smykové napětí τ_{xz}? Nakreslete v elementární krychli.
6. Kolik je nezávislých složek tenzoru napjatosti v bodě tělesa?

Kapitola 3

Transformace tenzoru napjatosti

Průvodce studiem

V předchozí kapitole byla definována veličina, určující stav napjatosti v bodě tělesa - tenzor napjatosti. Vnitřnímu bodu tělesa odpovídá elementární krychle, na jejíž stěnách obecně působí normálová a smyková napětí. Lze dokázat, že existuje vždy taková poloha elementární krychle, kdy na jejích stěnách působí pouze napětí normálová. Tato normálová napětí se nazývají hlavní napětí a příslušné roviny jsou hlavní roviny. Postup stanovení hlavních napětí je předmětem této kapitoly. Správné určení velikosti hlavních napětí je zásadní z hlediska aplikace návrhových kritérií (kapitola 9).

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete:

- znát základní případy napjatosti
- rozumět pojmům hlavní rovina a hlavní napětí
- mít povědomí o zákonu sdruženosti smykových napětí
- umět sestrojit Mohrovu kružnici
- schopni analyticky a graficky určit hlavní napětí

3.1 Hlavní napětí a hlavní roviny

Jak už bylo uvedeno v předešlé kapitole, veličina, určující stav napjatosti v bodě tělesa, se nazývá tenzor napjatosti. Tenzor napjatosti je definován následovně

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}. \tag{3.1}$$

V každém bodě tělesa lze vyhledat takovou polohu elementární krychličky, kdy na jejich stěnách jsou smyková napětí nulová, tzn. $\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. Na stěnách této elementární krychličky působí pouze normálová napětí.

Definice 3.1. Extrémy normálových napětí ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) se nazývají *hlavní napětí* a roviny, na kterých působí, jsou označovány jako *hlavní roviny*.

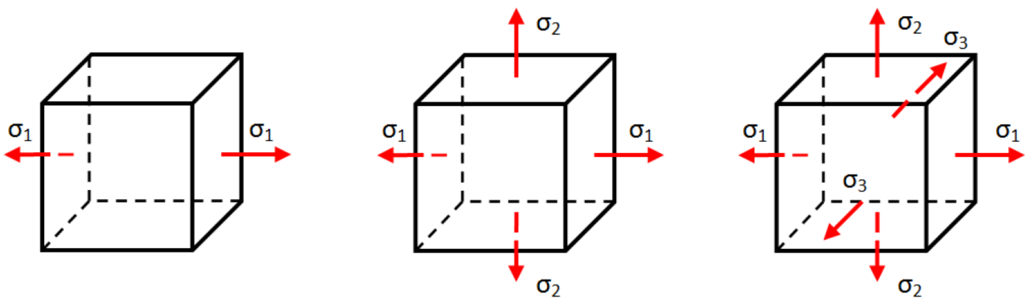
Věta 3.1. Na *hlavních rovinách* jsou smyková napětí nulová.

Hlavní napětí budou dále označována σ_1, σ_2, σ_3.

V každém bodě tělesa lze tedy vyhledat tři hlavní roviny. Tenzor napjatosti je pak možno psát ve tvaru

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

Obvykle se rozlišují tři základní typy napjatosti, viz obr. 3.1.



a) b) c)

Obr. 3.1

1. Jednoosá (přímková) napjatost (obr. 3.1 a)), která je definována podmínkou, že dvě z hlavních napětí jsou nulová, tedy

$$\sigma_1 \neq 0; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = 0. \tag{3.3}$$

   Příkladem jednoosé napjatosti je tyč namáhaná tahovou silou.

2. Dvojosá (rovinná) napjatost (obr. 3.1 b)), která je definována podmínkou, že jedno z hlavních napětí je nulové, tedy

$$\sigma_1 \neq 0; \quad \sigma_2 \neq 0; \quad \sigma_3 = 0. \tag{3.4}$$

   Příkladem rovinné napjatosti je těleso rovinného tvaru, u kterého jsou dva rozměry větší než třetí. Jedná se například o tenkostěnné tlakové nádoby.

3. Trojosá (prostorová) napjatost (obr. 3.1 c)), je definována podmínkou, že žádné z hlavních napětí není rovno nule. Příkladem trojosého stavu namáhání je vnitřní bod tlustostěnné uzavřené nádoby.

Definice 3.2. Speciálním případem rovinné napjatosti je *napjatost prostého smyku*, kde platí $\sigma_1 = -\sigma_2$ a lze nalézt v daném bodě tělesa takovou polohu elementární krychle, kde jsou nenulové pouze dvě složky smykových napětí tenzoru napjatosti.

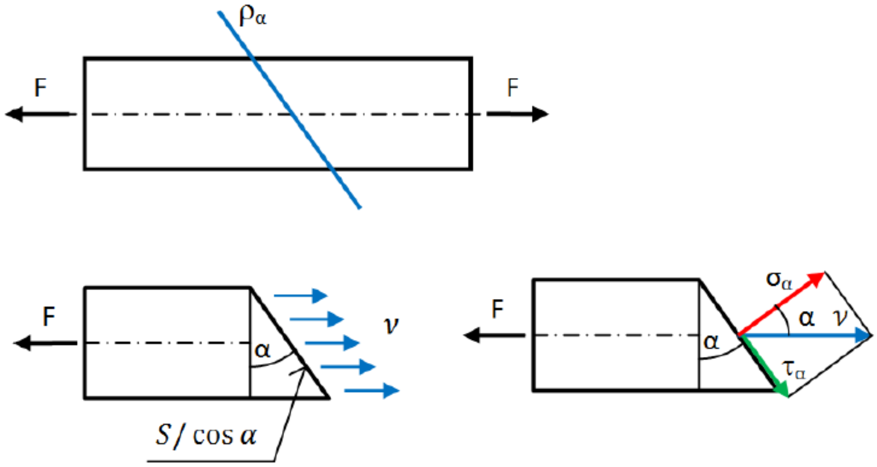
Napjatost prostého smyku zjednodušeně uvažujeme při stříhání materiálu (kapitola 2.4.2) nebo kroucení prutů kruhového průřezu (kapitola 2.4.3).

3.2 Napjatost na skloněné rovině pro případ tahu-tlaku

V kapitole 2 jsme se seznámili s výpočtem napětí při tahovém namáhání. Pro napětí v průřezu, který je kolmý k ose prutu, platí

$$\sigma = \frac{F}{S}. \tag{3.5}$$

Nyní se budeme zabývat stanovením napětí v obecném průřezu prutu (obr. 3.2).



Obr. 3.2

Uvažujme řez rovinou ρ_α, jejíž normála svírá s vodorovnou osou úhel α. Jestliže aplikujeme metodu řezu, pak z podmínky rovnováhy sil plyne

$$\upsilon \frac{S}{\cos\alpha} = F. \tag{3.6}$$

Odtud

$$\upsilon = \frac{F}{S}\cos\alpha = \sigma\cos\alpha. \tag{3.7}$$

Napětí υ, určené rovnicí (3.7), má směr síly F, ale není kolmé k řezu ρ_α. Pro normálovou σ_α a smykovou τ_α složku napětí pak platí

$$\sigma_\alpha = \upsilon\cos\alpha = \frac{F}{S}\cos\alpha\cos\alpha = \sigma\cos^2\alpha = \sigma\frac{1+\cos 2\alpha}{2} = \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2}\cos 2\alpha \tag{3.8}$$

a

$$\tau_\alpha = \upsilon\sin\alpha = \frac{F}{S}\cos\alpha\sin\alpha = \sigma\cos\alpha\sin\alpha = \frac{\sigma}{2}\sin 2\alpha. \tag{3.9}$$

Z rovnice 3.8 je zřejmé, že normálové napětí nabývá maxima pro $\alpha = 0$, tj. v ose prutu, tudíž

$$\sigma_{max} = \sigma. \tag{3.10}$$

Smykové napětí (3.9) nabývá maxima pro $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Jeho velikost je

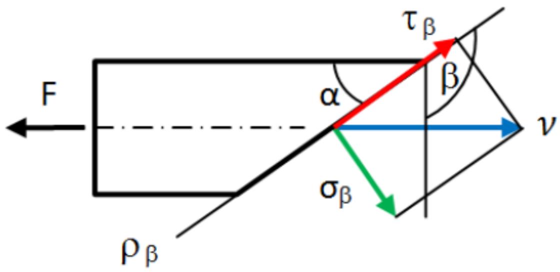
$$\tau_{max} = \frac{\sigma}{2}. \tag{3.11}$$

Pozorným zkoumáním rovnic (3.8) a (3.9) lze dojít k závěru, že se jedná o parametrické rovnice kružnice v diagramu $\sigma - \tau$. O tomto závěru je možno se přesvědčit úpravou a převedením rovnic (3.8) a (3.9) na analytickou rovnici kružnice. Po převedení členu $\frac{\sigma}{2}$ z rovnice (3.8) na levou stranu se obě rovnice umocní a sečtou. Po provedení těchto úkonů bude

$$\left(\sigma_\alpha - \frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2 = \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2. \tag{3.12}$$

Kružnici danou vztahem (3.12) nazýváme *Mohrova kružnice*. V obrazovkové verzi skript je připravena animace, na které jsou vysvětleny její zákonitosti.

Nyní budeme zkoumat napjatost na rovině ρ_β, která je kolmá na rovinu ρ_α (obr. 3.3).



Obr. 3.3

Pro složky napětí dostaneme (viz rovnice (3.8) a (3.9))

$$\sigma_\beta = \sigma \frac{1 + \cos 2\beta}{2}, \tag{3.13}$$

$$\tau_\beta = \frac{\sigma}{2} \sin 2\beta. \tag{3.14}$$

Pro

$$\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$$

a

$$2\beta = 2\alpha + \pi$$

je

$$\cos 2\beta = \cos(2\alpha + \pi) = \cos 2\alpha \cos\pi - sin 2\alpha \sin\pi = -\cos 2\alpha$$

a

$$\sin 2\beta = \sin(2\alpha + \pi) = \sin 2\alpha \cos\pi + \cos 2\alpha \sin\pi = -\sin 2\alpha.$$

Po dosazení do (3.13) a (3.14) je

$$\sigma_\beta = \sigma \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \sigma \sin^2\alpha \tag{3.15}$$

a

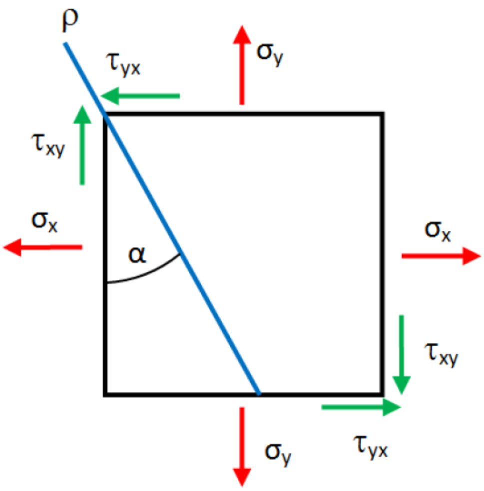
$$\tau_\beta = -\frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha. \tag{3.16}$$

Porovnáním rovnic (3.9) a (3.16) je zřejmé, že na dvou navzájem kolmých rovinách jsou smyková napětí v absolutní hodnotě stejná, liší se pouze ve znaménku. Hovoříme o tzv. zákonu sdruženosti smykových napětí.

Věta 3.2. Smykové složky tenzoru napjatosti, působící na dvou navzájem kolmých rovinách směrem k hraně nebo od ní, jsou vždy stejné velikosti – *zákon sdruženosti smykových napětí.*

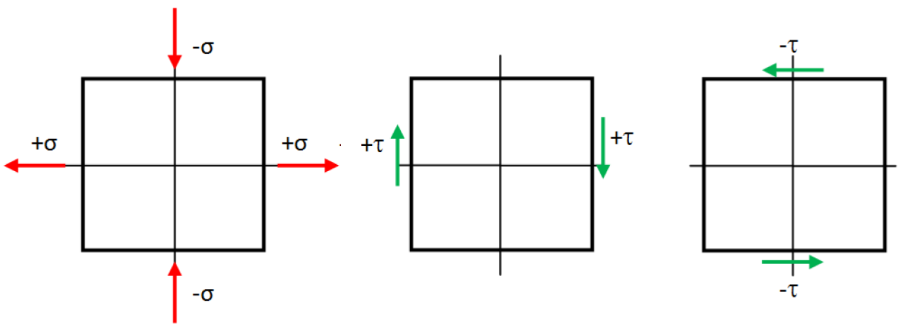
3.3 Napjatost na skloněné rovině pro případ rovinné napjatosti

V případě rovinné napjatosti působí všechny složky nenulových napětí v jedné rovině. Element tělesa lze tedy znázornit jako čtverec (obr. 3.4).



Obr. 3.4

Předpokládejme, že známe složky napětí σ_x, σ_y, τ_{xy}. Pro normálová a smyková napětí je používána znaménková dohoda (obr. 3.5) v souladu se smyslem zavedení smykového napětí u jednoosé napjatosti (obr. 3.2).

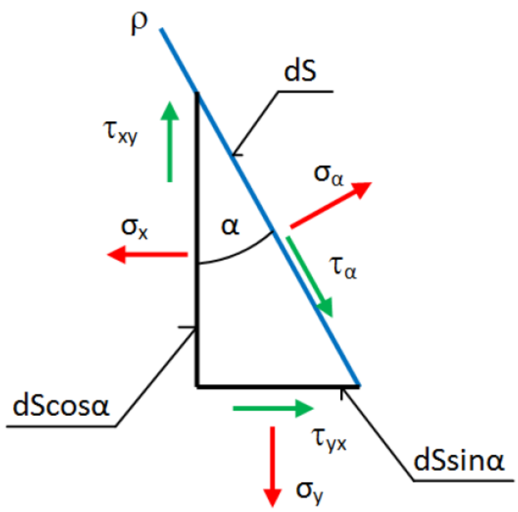


a) b) c)

Obr. 3.5

Normálová napětí jsou kladná, jestliže se jedná o tahové namáhání, a záporná, jestliže se jedná o namáhání tlakem (obr. 3.5 a)). Smyková napětí jsou kladná tehdy, jestliže tvoří dvojici ve směru pohybu hodinových ručiček (obr. 3.5 b)), záporná pro směr opačný (obr. 3.5 c)).

Naší úlohou je určit složky napětí na obecně skloněné rovině ρ. Aplikujeme tedy metodu řezu. Element (obr. 3.4) rozdělíme řezem vedeným pod úhlem α na dvě části a jeden díl odstraníme. Účinek odstraněné části pak nahradíme hledanými složkami napětí σ_α a τ_α v rovině ρ (obr. 3.6).



Obr. 3.6

Složky napětí určíme z podmínek rovnováhy sil ve směru normály a směru tečny k rovině ρ. Síly, které působí na uvažovaný element ve směru normály k rovině ρ jsou $\sigma_\alpha \mathrm{d}S$, $-\sigma_x \cos\alpha \mathrm{d}S \cos\alpha$, $-\sigma_y \sin\alpha \mathrm{d}S \sin\alpha$, $\tau_{xy} \sin\alpha \mathrm{d}S \cos\alpha$ a $\tau_{yx} \cos\alpha \mathrm{d}S \sin\alpha$.

Platí tedy

$$\Sigma F_n = 0 \tag{3.17}$$

a po dosazení

$$\sigma_\alpha \mathrm{d}S - (\sigma_x \cos\alpha - \tau_{xy} \sin\alpha)\, \mathrm{d}S \cos\alpha - (\sigma_y \sin\alpha - \tau_{yx} \cos\alpha)\, \mathrm{d}S \sin\alpha = 0.$$

Uvážením, že $\tau_{xy} = |\tau_{yx}|$ a po vydělení $\mathrm{d}S$ dostaneme

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha - 2\tau_{xy} \sin\alpha \cos\alpha. \tag{3.18}$$

Ve směru tečny k rovině ρ působí síly $\tau_\alpha \mathrm{d}S$, $-\sigma_x \sin\alpha \mathrm{d}S \cos\alpha$, $\sigma_y \cos\alpha \mathrm{d}S \sin\alpha$, $-\tau_{xy} \cos\alpha \mathrm{d}S \cos\alpha$ a $\tau_{yx} \sin\alpha \mathrm{d}S \sin\alpha$.

Podmínka rovnováhy má tvar

$$\Sigma F_t = 0 \tag{3.19}$$

a po dosazení

$$\tau_\alpha \mathrm{d}S - (\sigma_x \sin\alpha + \tau_{xy}\cos\alpha)\,\mathrm{d}S\cos\alpha + (\sigma_y\cos\alpha + \tau_{yx}\sin\alpha)\,\mathrm{d}S\sin\alpha = 0$$

a úpravě

$$\tau_\alpha = (\sigma_x - \sigma_y)\sin\alpha\cos\alpha + \tau_{xy}\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right). \tag{3.20}$$

Zavedením dvojnásobného argumentu 2α vztahy

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)\,,$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)\,,$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha,$$

dostaneme po úpravě[1]

$$\sigma_\alpha = \frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y)\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha \tag{3.21}$$

a

$$\tau_\alpha = \frac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y)\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha. \tag{3.22}$$

V praktických případech potřebujeme často určit úhel α, při kterém normálová napětí nabývají extrémní hodnoty. Přesněji chceme znát polohu hlavních rovin. Z podmínky pro extrém

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_\alpha}{\mathrm{d}\alpha} = 0 \tag{3.23}$$

obdržíme

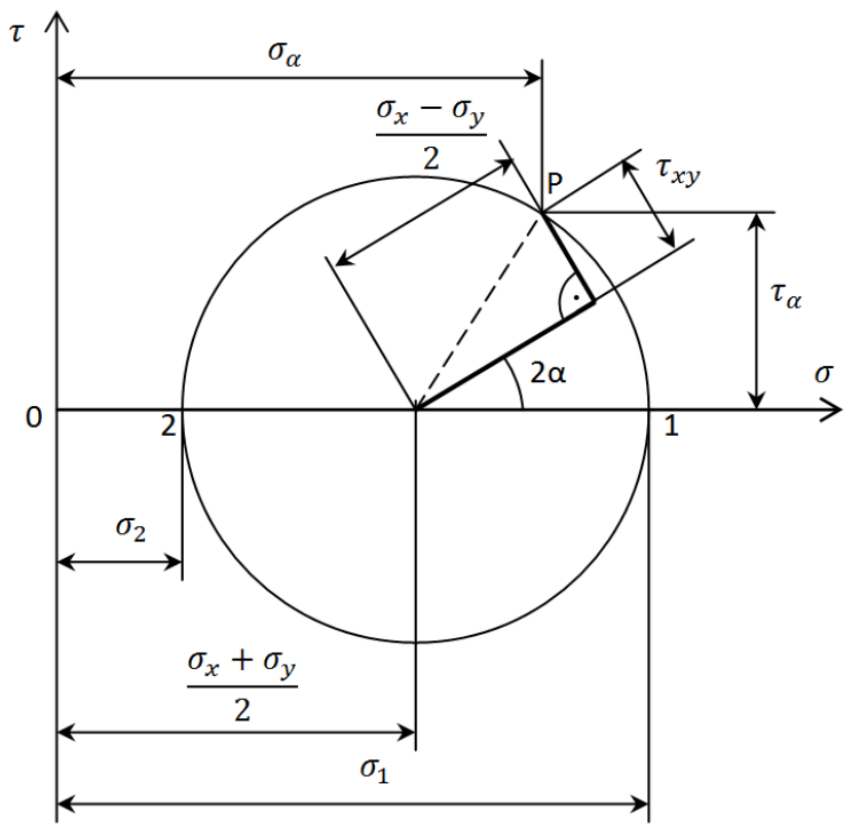
$$tg 2\alpha = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = 0. \tag{3.24}$$

[1] V jiných učebnicích (např. [1], [18]) lze nalézt vztahy pro normálové a smykové napětí na skloněné rovině pro případ rovinné napjatosti lišící se ve znaménku u jednotlivých členů rovnic (3.21) a (3.22). To je způsobeno odlišně zvolenou orientací složek τ_{xy}, τ_{yx} při odvození. V každé literatuře je tedy nutno konfrontovat odvozené vztahy se zavedeným smyslem smykových napětí a zavedenou znaménkovou konvencí.

Rovnice (3.21) a (3.22) udávají v souřadném systému $\sigma - \tau$ souřadnice bodu, jehož poloha je pro napjatost, zadanou složkami σ_x, σ_y a τ_{xy}, určena pouze úhlem α. Bude-li se měnit úhel α, budou body, odpovídajícím novým úhlům, ležet na kružnici. Lze se o tom přesvědčit úpravou rovnic (3.21) a (3.22). Jestliže se převede člen $\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)$ z rovnice (3.21) na levou stranu a následně se obě rovnice umocní a sečtou, získá se analytická rovnice kružnice ve tvaru

$$\left(\sigma_\alpha - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)\right)^2 + \tau_\alpha^2 = \left(\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\right)^2 + \tau_{xy}^2. \tag{3.25}$$

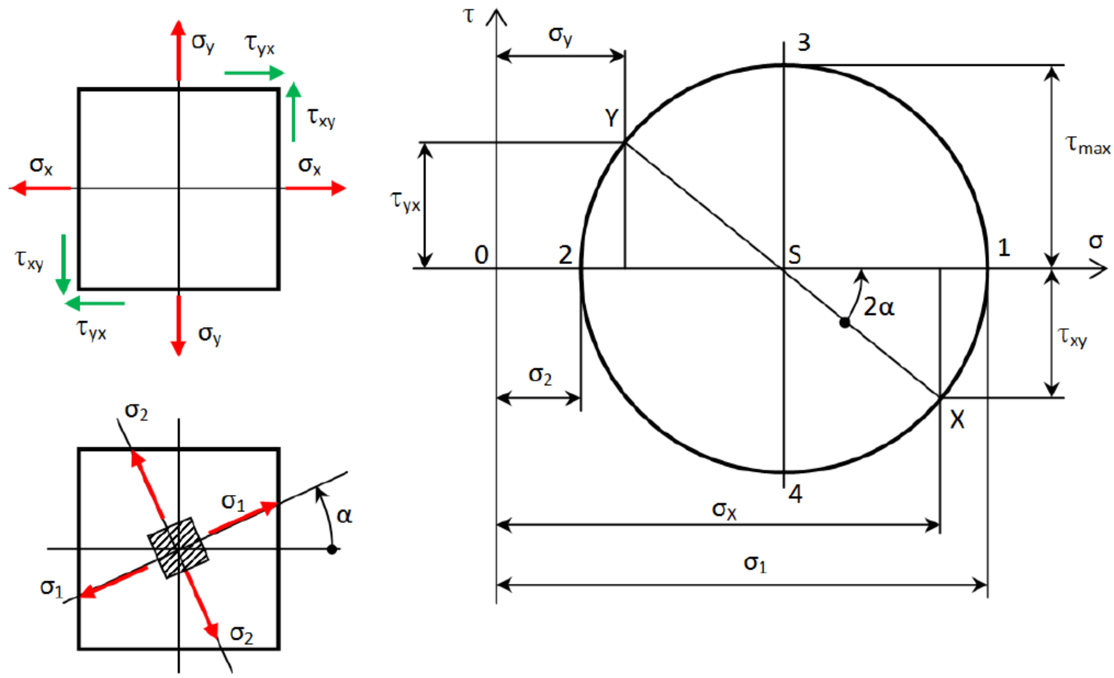
Z tvaru rovnic (3.21) a (3.22) také vyplývá jednoduché grafické znázornění. Zvolíme kartézský souřadnicový systém. Na osu úseček budeme vynášet normálové napětí σ a na svislou osu smykové napětí τ. V rovnici (3.21) je první člen konstantní a roven aritmetickému průměru normálových napětí σ_x a σ_y. Průměty veličin $\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2}$ a τ_{xy} na osu σ představují další dva členy rovnice (3.21). Obdobné zákonitosti platí i pro rovnici (3.22). Průměty veličin $\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2}$ a τ_{xy} na osu τ představují členy rovnice (3.22). Napětí σ_α a τ_α na rovině ρ znázorňuje v obr. 3.7 bod P.



Obr. 3.7

Jestliže se mění úhel, bod P se pohybuje po kružnici. Tato kružnice se nazývá Mohrovou kružnicí pro rovinnou napjatost. Každé rovině ρ odpovídá v Mohrově kružnici jediný bod. Jelikož úhlu α v elementární krychli odpovídá úhel 2α v Mohrově kružnici, pohybuje se bod P po kružnici dvojnásobnou rychlostí a ve stejném smyslu jako v elementární krychli. Důležitými body v Mohrově kružnici jsou body 1 a 2, ve kterých normálová napětí nabývají extrémních hodnot a smyková napětí jsou rovna nule. V bodě 1 je $\sigma_{max} = \sigma_1$ a v bodě 2 je $\sigma_{min} = \sigma_2$.

Sestrojení Mohrovy kružnice je velice jednoduché. Předpokládejme, že je dána rovinná napjatost podle obr. 3.8.



Obr. 3.8

Rovině, na které působí složky napětí σ_x a τ_{xy} odpovídá v kružnici bod X, rovině, na které působí složky napětí σ_y a τ_{yx} odpovídá v kružnici bod Y. Jelikož zmíněné roviny jsou k sobě kolmé, určují body XY průměr Mohrovy kružnice (v Mohrově kružnici musí být mezi průvodiči rovin dvojnásobný úhel, tj.180°). Protože $|\tau_{xy}| = |\tau_{yx}|$, je střed kružnice vždy na vodorovné ose.

Z obr. 3.8 snadno odvodíme vztahy pro výpočet hlavních napětí

$$\sigma_1 = OS + S1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{3.26}$$

a

$$\sigma_2 = OS - S2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \tag{3.27}$$

Z obr. 3.8 je možno určit rovněž směry hlavních napětí. Úhel, který svírá úsečka XY s osou σ je dvojnásobkem úhlu, který svírá napětí σ_1 s osou x. Poněvadž úhel 2α je měřen od X k 1 proti směru hodinových ručiček, směr σ_1 je podle obr. 3.8.

Úhel 2α je možno určit z obr. 3.8, tedy

$$tg2\alpha = \left|\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right|, \tag{3.28}$$

což je v absolutní hodnotě stejný výraz, který byl určen analytickým řešením (viz rovnici (3.24)). Z Mohrovy kružnice je rovněž možno určit největší smykové napětí

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \tag{3.29}$$

Z Mohrovy kružnice plyne dále, že součet normálových napětí ve dvou libovolných rovinách, které jsou navzájem kolmé, je stejný (invarianta rovinné napjatosti), tedy

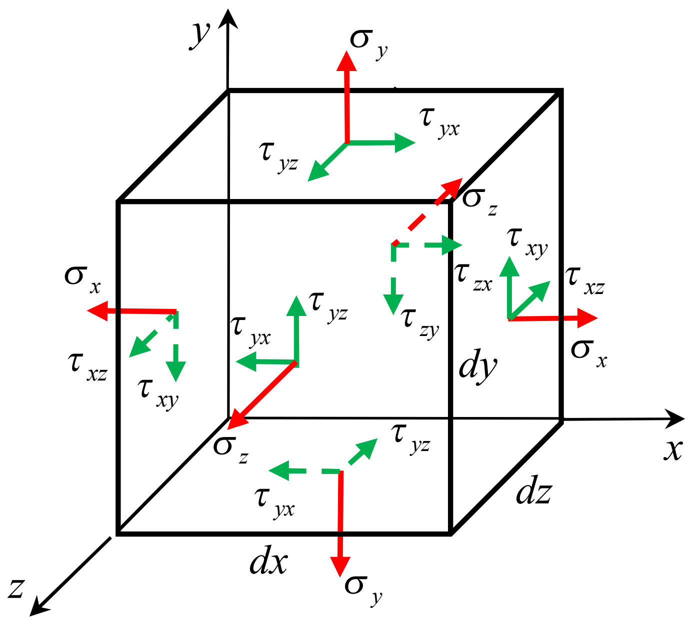
$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2. \tag{3.30}$$

3.4 Složky napětí v obecné rovině při prostorové napjatosti

Jak už bylo poznamenáno v kapitole 2.3, je v libovolném bodě tělesa napjatost určena šesti složkami napětí σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz}, (obr. 3.9). Velikost těchto složek závisí na volbě polohy souřadnicového systému, ke kterému jsou jednotlivá napětí vztažena. Natáčí-li se prostorově soustava souřadnicových os, jejíž počátek je v uvažovaném bodě tělesa, mění se velikosti jednotlivých složek napětí. Podle analogie s rovinnou napjatostí lze předpokládat, že v určité poloze vymizí všechna smyková napětí a normálová napětí budou nabývat extrémních hodnot, bude platit

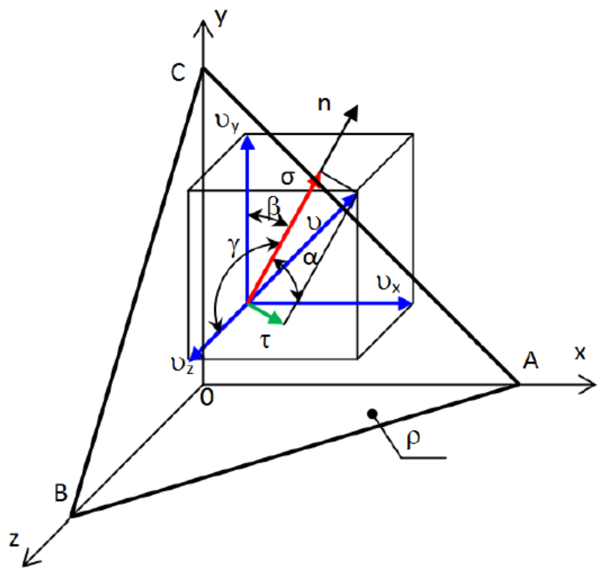
$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0,$$

$$\sigma_x = \sigma_1, \quad \sigma_y = \sigma_2, \quad \sigma_z = \sigma_3.$$



Obr. 3.9

Napětí σ_1, σ_2, σ_3 jsou hlavní napětí, jejichž velikost ani směry nezávisí na poloze souřadnicového systému. Je nutno dokázat, že existují tři navzájem kolmé roviny, na kterých působí pouze normálová napětí. Důkaz provedeme tak, že určíme složky napětí na libovolné rovině ρ (obr. 3.10), jejíž normála svírá se souřadnicovými osami x, y, z směrové úhly α, β, γ.



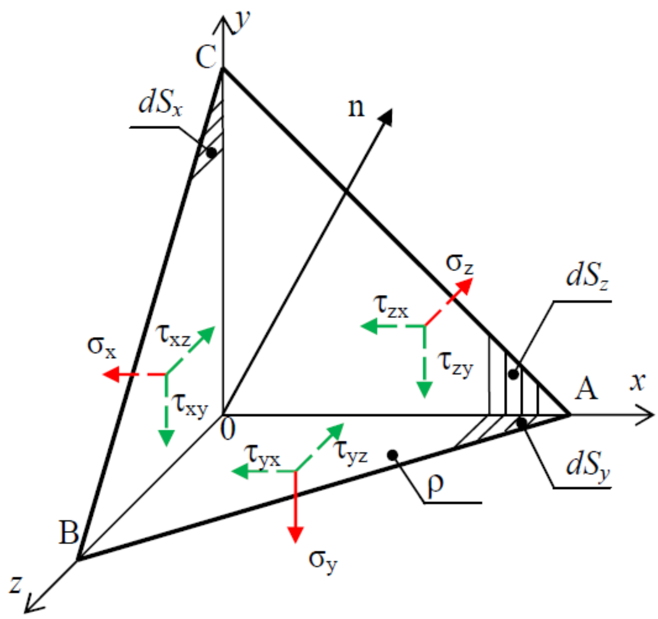
Obr. 3.10

Na rovině ρ působí obecné napětí υ, mezi nímž a jeho složkami υ_x, υ_y a υ_z platí vztah

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}. \tag{3.31}$$

Složky obecného napětí υ_x, υ_y a υ_z určíme ze statických podmínek rovnováhy. Jestliže šikmá stěna elementárního čtyřstěnu má plochu dS, jsou plochy zbývajících stěn (obr. 3.11) dány výrazy

$$\begin{aligned} \mathrm{d}S_x &= \mathrm{d}S\cos\alpha, \\ \mathrm{d}S_y &= \mathrm{d}S\cos\beta, \\ \mathrm{d}S_z &= \mathrm{d}S\cos\gamma. \end{aligned}$$



Obr. 3.11

Z podmínky rovnováhy elementárních sil, působících v ose x, dostaneme

$$\upsilon_x \mathrm{d}S - \sigma_x \mathrm{d}S_x - \tau_{yx}\mathrm{d}S_y - \tau_{zx}\mathrm{d}S_z = 0$$

a po vydělení dS obdržíme

$$\upsilon_x = \sigma_x \cos\alpha + \tau_{yx}\cos\beta + \tau_{zx}\cos\gamma = 0. \tag{3.32}$$

Obdobně z podmínek rovnováhy do směrů os y a z dostaneme

$$\upsilon_y = \tau_{xy}\cos\alpha + \sigma_y\cos\beta + \tau_{zx}\cos\gamma = 0, \tag{3.33}$$

$$\upsilon_z = \tau_{xz}\cos\alpha + \tau_{yz}\cos\beta + \sigma_z\cos\gamma = 0. \tag{3.34}$$

Rovnice (3.32) – (3.34) vyjadřují vztahy mezi složkami tenzoru napjatosti elementární krychle a složkami obecného napětí na libovolné rovině ρ.

Rovnice (3.32) – (3.34) je možno rovněž napsat v maticovém tvaru.

Nechť

$$\{\upsilon\} = \begin{Bmatrix} \upsilon_x \\ \upsilon_y \\ \upsilon_z \end{Bmatrix}$$

je vektor obecného napětí,

$$\{n\} = \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{Bmatrix}$$

je vektor vnější normály k rovině ρ a

$$[A_\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

je matice tenzoru napětí. Pak platí

$$\{\upsilon\} = [A_\sigma]\,\{n\}. \tag{3.35}$$

Součet průmětů velikostí tří složek obecného napětí υ_x, υ_y, υ_z do směru normály n se rovná velikosti normálového napětí σ v rovině ρ. Platí tedy

$$\sigma = \upsilon_x\cos\alpha + \upsilon_y\cos\beta + \upsilon_z\cos\gamma \tag{3.36}$$

a po dosazení z rovnic (3.32) – (3.34) obdržíme

$$\begin{aligned}\sigma = \sigma_x\cos^2\alpha + \sigma_y\cos^2\beta + \sigma_z\cos^2\gamma + \\ + 2\left(\tau_{xy}\cos\alpha\cos\beta + \tau_{xz}\cos\alpha\cos\gamma + \tau_{yz}\cos\beta\cos\gamma\right),\end{aligned} \tag{3.37}$$

respektive v maticovém tvaru

$$\sigma = \{\upsilon\}^T\{n\} = \left([A_\sigma]\,\{n\}\right)^T\{n\} = \{n\}^T\,[A_\sigma]^T\,\{n\}. \tag{3.38}$$

Vzhledem k tomu, že matice tenzoru napjatosti $[A_\sigma]$ je symetrická, je možno vztah (3.38) psát ve tvaru

$$\sigma = \{n\}^T\,[A_\sigma]\,\{n\}.$$

Velikost smykového napětí τ dostaneme z následujícího vztahu (obr. 3.10)

$$\tau = \sqrt{\upsilon^2 - \sigma^2}. \tag{3.39}$$

3.5 Stanovení hlavních napětí při prostorové napjatosti

Jestliže se rovina ρ ztotožní s hlavní rovinou, budou složky smykového napětí

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

a rovnice (3.32) – (3.34) budou ve tvaru

$$\upsilon_x = \sigma \cos \alpha, \tag{3.40}$$

$$\upsilon_y = \sigma \cos \beta, \tag{3.41}$$

$$\upsilon_z = \sigma \cos \gamma. \tag{3.42}$$

Dosazením vztahů (3.40) až (3.42) do (3.32) až (3.34) a po úpravě obdržíme

$$(\sigma_x - \sigma) \cos \alpha + \tau_{xy} \cos \beta + \tau_{zx} \cos \gamma = 0, \tag{3.43}$$

$$\tau_{xy} \cos \alpha + (\sigma_y - \sigma) \cos \beta + \tau_{zx} \cos \gamma = 0, \tag{3.44}$$

$$\tau_{xz} \cos \alpha + \tau_{yz} \cos \beta + (\sigma_z - \sigma) \cos \gamma = 0. \tag{3.45}$$

Směrové kosiny jsou vázány podmínkou

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \tag{3.46}$$

V maticovém zápisu bude soustava rovnic (3.43) – (3.45) mít tvar

$$([A_\sigma] - \sigma\,[E])\,\{n\} = 0, \tag{3.47}$$

kde

$$[E] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

je jednotková matice.

V rovnicích (3.43) až (3.45) se vyskytují čtyři neznámé veličiny σ, α, β, γ. Rovnice (3.46) slouží jako čtvrtá pro výpočet uvedených veličin. Podmínkou netriviálního řešení soustavy rovnic (3.43) až (3.45) je, aby determinant této soustavy byl roven nule, tedy

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0. \tag{3.48}$$

Tuto podmínku je možno také vyjádřit v maticovém tvaru

$$\det\left([A_\sigma] - \sigma\,[E]\right) = 0. \tag{3.49}$$

Vyčíslením determinantu dostaneme rovnici třetího stupně ve tvaru

$$\sigma^3 - i_1\sigma^2 + i_2\sigma - i_3 = 0, \tag{3.50}$$

kde i_1, i_2, i_3 jsou invarianty tenzoru napjatosti.

Invarianty tenzoru napjatosti jsou nezávislé na volbě souřadnicové soustavy. Invarianty tenzoru napjatosti jsou definovány následovně:

- První (lineární) invariant

$$i_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3. \tag{3.51}$$

- Druhý (kvadratický) invariant

$$i_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3. \tag{3.52}$$

- Třetí (kubický) invariant tenzoru napjatostí

$$i_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \tag{3.53}$$

Po vyřešení kubické rovnice dostaneme hlavní napětí σ_1,σ_2, σ_3.

Jestliže známe hlavní napětí σ_1,σ_2, σ_3, pak napjatost na obecné rovině je dána výrazem (viz také rovnici (3.37))

$$\sigma = \sigma_1\cos^2\alpha + \sigma_2\cos^2\beta + \sigma_3\cos^2\gamma \tag{3.54}$$

a v maticovém zápisu

$$\sigma = \{n\}^T\,[A_\sigma]\,\{n\}\,, \tag{3.55}$$

kde

$$[A_\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}.$$

Příklady k procvičení

!

1. V bodě tělesa je rovinná napjatost dána těmito hodnotami: $\sigma_x = 50\ MPa$, $\sigma_y = -35\ MPa$, $\tau_{xy} = 20\ MPa$. Sestrojte Mohrovu kružnici a určete:
   a) Velikost hlavních napětí σ_1 a σ_2 a úhel α, o který jsou pootočeny hlavní roviny vůči osám souřadnic x a y.
   b) Velikost maximálního smykového napětí τ_{max}.

Klíč k příkladům k procvičení

1. $\sigma_1 = 54,47\ MPa$, $\sigma_2 = -39,47\ MPa$, $\alpha = 12,6°$, $\tau_{max} = 46,97\ MPa$

Pojmy k zapamatování

$\sum$

- tenzor napjatosti
- hlavní roviny
- hlavní napětí
- jednoosá napjatost
- rovinná napjatost
- prostorová napjatost
- Mohrova kružnice
- invarianty tenzoru napjatosti

Kontrolní otázky

?

1. Jak je definován tenzor napjatosti?
2. Co jsou to hlavní napětí?
3. Jaké rozeznáváme základní případy napjatosti?
4. O čem pojednává zákon sdruženosti smykových napětí?
5. K čemu se používá a co představuje Mohrova kružnice?
6. Dokážete sestrojit Mohrovu kružnici?
7. Co představují invarianty tenzoru napjatosti?

Kapitola 4

Koncept deformace

Průvodce studiem

Tato kapitola se zabývá veličinami pro popis deformace těles v pružnosti a pevnosti. V první části kapitoly je vysvětlena potřeba zavedení absolutní i relativní (poměrné) deformace. Definovány jsou pak dvě základní složky poměrné deformace a to podélná deformace a zkos. V další části jsou uvedeny Cauchyho geometrické rovnice, udávající závislost mezi poměrnými deformacemi a posuvy pro malé deformace. V kapitole je rovněž definován tenzor přetvoření a zdůrazněna analogie mezi tenzorem napjatosti a tenzorem přetvoření.

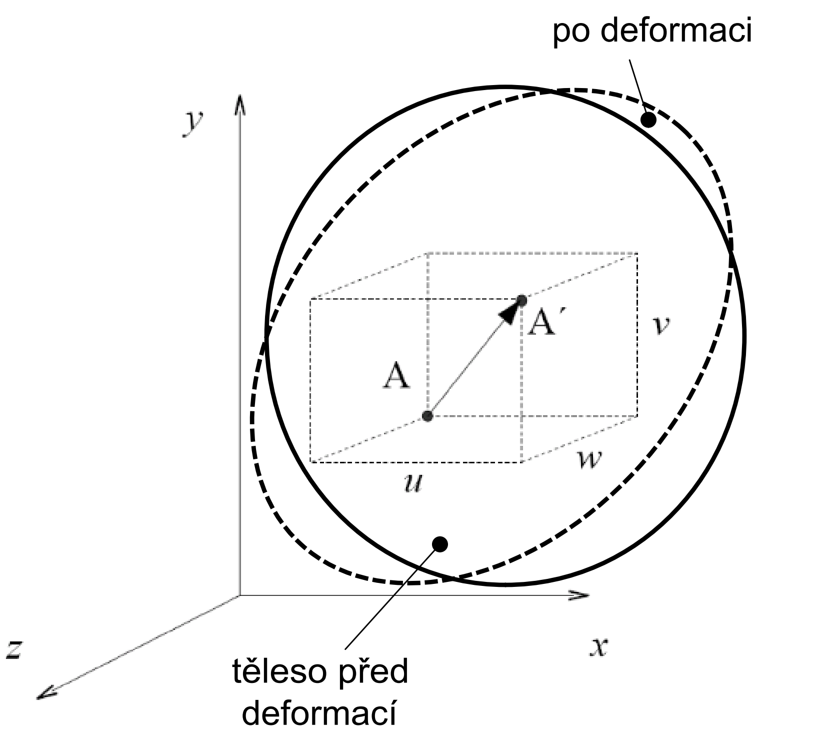
Cíle

Po prostudování této kapitoly budete:

- chápat pojmy poměrná deformace a zkos
- vědět, co vyjadřují Cauchyho geometrické rovnice
- umět sestrojit Mohrovu kružnici pro deformace
- chápat souvislost mezi tenzorem napjatosti a tenzorem přetvoření

4.1 Podélná a smyková deformace

Působením vnějších sil mění každé těleso svůj tvar. Zvolíme-li ortogonální souřadný systém (např. Kartézský), můžeme přemístění bodu tělesa popsat vektorem posuvů se složkami u, v, w dle obr. 4.1. Uvažujeme, že se jedná o tzv. deformační posuv, tzn. těleso se nepohybuje vzhledem k souřadnicovému systému. Často se používá místo pojmu posuvy označení posunutí, či přemístění. Složky vektoru posunutí jsou spojitými funkcemi souřadnic.

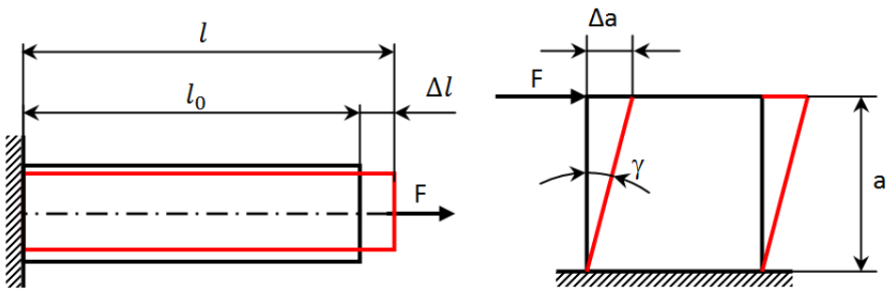


Obr. 4.1

Definice 4.1. *Deformace tělesa* je dána množinou posuvů všech jeho bodů.

Deformuje-li se celé těleso, deformuje se i každá jeho část. Můžeme tedy zkoumat deformaci elementu. V zásadě dojde ke změně délek (prodloužení anebo zkrácení) a ke změně pravých úhlů elementu. Jelikož dle naší předchozí představy bodu tělesa odpovídá elementární krychle, jejíž rozměry se blíží nule, je vhodné pro popis deformace v bodě tělesa užít relativních veličin.

Uvažujme tyč, která je namáhaná tahovou silou (obr. 4.2 a)). Jestliže původní délka tyče je l_0 a nová délka l, je prodloužení tyče $\Delta l = l - l_0$.



a) b)

Obr. 4.2

Poměrná podélná deformace ε pak vyjadřuje relativní změnu délky tyče

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}. \tag{4.1}$$

Při namáhání elementu smykovou silou dochází ke změně pravého úhlu (obr. 4.2 b)). V případě malých deformací lze s dostatečnou přesností pro uvedený případ prostého smyku psát

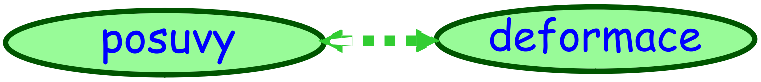
$$\operatorname{tg}\gamma \cong \gamma = \frac{\Delta a}{a}. \tag{4.2}$$

Poměrná deformace ε a zkos γ jsou bezrozměrné veličiny.

Definice 4.2. *Poměrná (délková) deformace* je chápána jako poměr změny délky ku její původní hodnotě.

Definice 4.3. *Zkos (úhlová deformace)* odpovídá změně úhlu mezi dvěma úsečkami, jenž byly před deformací tělesa vzájemně kolmé.

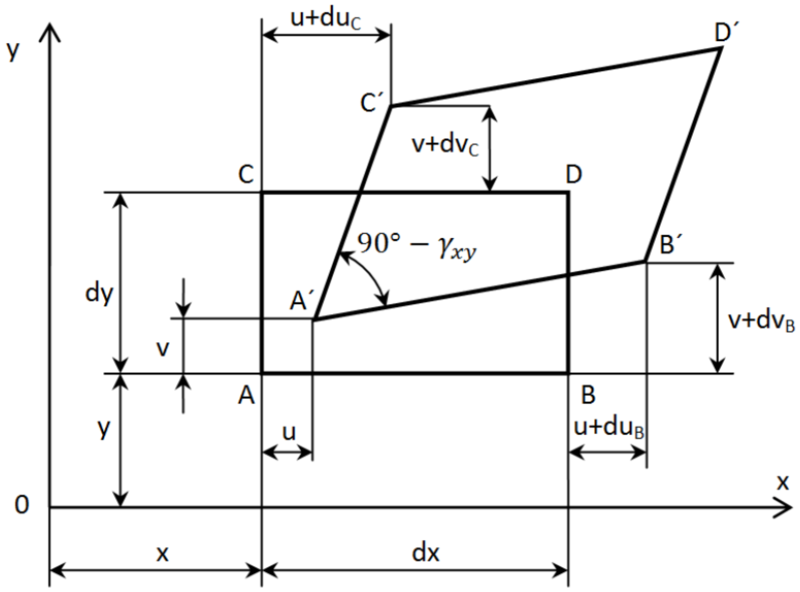
Vztah mezi posuvy a poměrnými deformacemi je vyjádřen graficky na obr. 4.3. Z absolutních deformací můžeme vypočítat poměrné deformace. V praxi se však také nepřímo měří poměrné deformace v bodě tělesa a z těch můžeme za zjednodušujících předpokladů vypočítat posuvy (např. změnu rozměru).



Obr. 4.3

4.2 Deformace v bodě tělesa

V této kapitole začneme problematikou rovinné deformace. Uvažujme malý obdélníkový element $ABCD$ o rozměrech $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}y$ (obr. 4.4). Po deformaci element zaujme polohu $A'B'C'D'$. Bod A (x, y) po deformaci zaujme novou polohu A'. Posune se ve směru osy x o hodnotu u a ve směru osy y o hodnotu v. Bod B $(x+\mathrm{d}x, y)$, který má sice stejnou souřadnici y jako bod A, ale jehož souřadnice x je větší o $\mathrm{d}x$, se posune jinak (obr. 4.4).



Obr. 4.4

Přírůstky složek přemístění budou určeny totálními diferenciály, tedy

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y,$$

$$\mathrm{d}v = \frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

Obdobně složky přemístění bodu C ($\mathrm{d}x = 0;\ \mathrm{d}y \neq 0$) jsou

$$\mathrm{d}u_c = \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y,$$

$$\mathrm{d}v_c = \frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

Poměrné prodloužení elementu ve směru souřadnicové osy x se vypočte z výrazu

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta \mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}x + \mathrm{d}u_B - \mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{4.3}$$

a obdobně poměrné prodloužení elementu ve směru souřadnicové osy y se vypočte z výrazu

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta \mathrm{d}y}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}y + \mathrm{d}v_C - \mathrm{d}y}{\mathrm{d}y} = \frac{\partial v}{\partial y}. \tag{4.4}$$

V případě prostorové napjatosti bude poměrné prodloužení elementu ve směru souřadnicové osy z dáno výrazem

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \tag{4.5}$$

kde w posuv bodu ve směru osy z.

Rovnice (4.3) – (4.5) jsou geometrické rovnice Cauchyovy, které vyjadřují vztah mezi poměrnými deformacemi ε_x, ε_y, ε_z a přemístěním (posuvy) u, v, w.

Pravý úhel elementárního obdélníku u vrcholu A se změnil o malý úhel γ_{xy} (tzv. zkos). Pro zkos γ_{xy} platí, že je součtem dvou úhlů, takže lze psát

$$\gamma_{xy} = \frac{\mathrm{d}v_B}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}y}.$$

Protože

$$\mathrm{d}v_B = \frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x$$

a

$$\mathrm{d}u_C = \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y,$$

bude po dosazení

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{4.6}$$

Obdobně pro prostorový element obdržíme

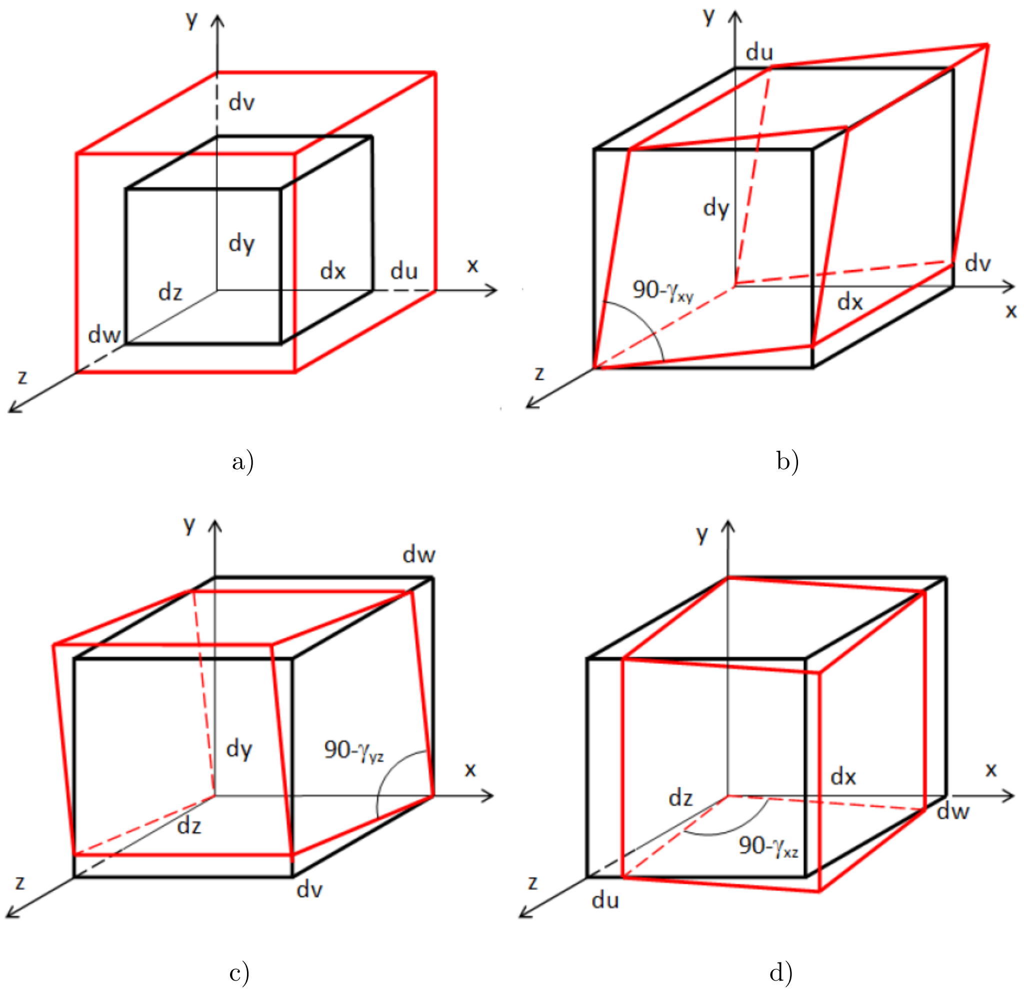
$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \tag{4.7}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \tag{4.8}$$

Rovnice (4.6) – (4.8) jsou geometrické rovnice Cauchyovy, které vyjadřují vztahy mezi zkosy γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{xz} a složkami přemístění u, v, w.

Soustava rovnic (4.3) – (4.8) představuje soustavu Cauchyových geometrických rovnic pro prostorový element. Je nutné upozornit, že Cauchyovy geometricko–deformační vztahy jsou platné pouze v oblasti malých deformací.

Grafické znázornění Cauchyových geometrických rovnic je patrno z obr. 4.2. Podélným deformacím odpovídá obr. 4.5 a), zkosu γ_{xy} obr. 4.5 b), zkosu γ_{yz} obr. 4.5 c) a zkosu γ_{xz} obr. 4.5 d).



Obr. 4.5

4.3 Tenzor přetvoření

Obdobně jako tenzor napjatosti (viz kapitola 3) lze definovat rovněž tenzor přetvoření. Normálovým napětím σ odpovídají poměrné deformace ε a smykovým napětím poloviční hodnoty zkosu γ. Tenzor přetvoření je opět symetrickým tenzorem druhého řádu a je definován následovně

$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{yx}}{2} & \frac{\gamma_{zx}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{zy}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z \end{bmatrix}. \tag{4.9}$$

V pevnostních výpočtech součástí, u kterých je zabráněno deformaci v jednom směru, se setkáváme se speciálním případem prostorové napjatosti, kdy platí $\varepsilon_z = 0$, $\gamma_{yz} = 0$, $\gamma_{xz} = 0$ (všechny nenulové složky tenzoru přetvoření lze nalézt v jediné rovině) a mluvíme o *úloze rovinné deformace*.

V případě rovinné deformace bude mít tenzor přetvoření tvar

$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{yx}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y \end{bmatrix}. \tag{4.10}$$

Připomeňme, že v bodě tělesa existuje taková poloha elementární krychle, kdy jsou smyková napětí nulová a zároveň normálová napětí extrémní –hlavní napětí (viz kapitola 3). Imaginárně tedy hlavní napětí působí v normálovém směru na stěny elementární krychle, což způsobuje pouze změny jejich rozměrů (poměrné deformace) a všechny smykové složky tenzoru přetvoření (zkosy) musí pak být nulové. Platí analogie s tenzorem napjatosti, proto jsou-li smykové složky tenzoru přetvoření nulové, musí být poměrné deformace extrémní.

Definice 4.4. Extrémy poměrných deformací nazýváme hlavní poměrné deformace.

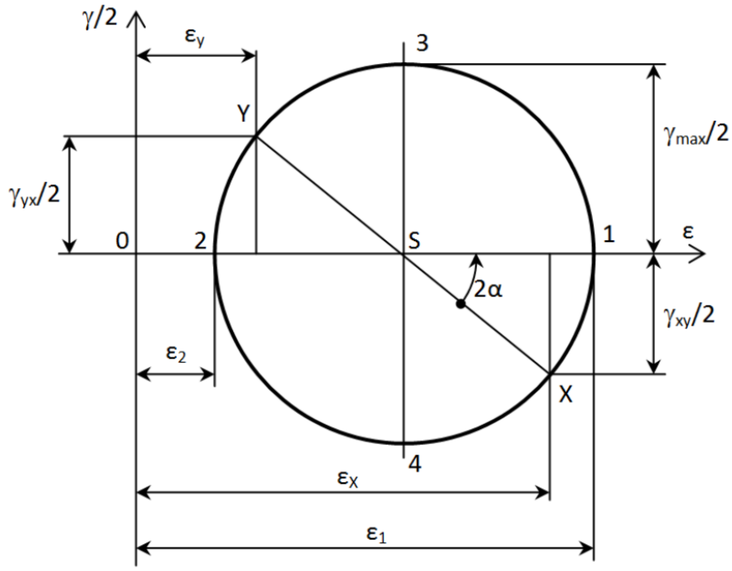
Tenzor přetvoření můžeme vždy vyjádřit pomocí hlavních poměrných deformací

$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}.$$

Vidíme, že platí analogie mezi tenzorem napjatosti a tenzorem přetvoření, využívá se tedy pro stanovení hlavních poměrných deformací také grafické i početní řešení.

4.4 Mohrova kružnice pro deformace a její konstrukce

Jestliže jsou známy složky tenzoru ε_x, ε_y, γ_{xy}, lze určit hlavní poměrné deformace ε_1 a ε_2 užitím Mohrovy kružnice. Na osu úseček jsou nanášeny hodnoty poměrných deformací ε a na svislou osu poloviční hodnoty zkosů $\frac{\gamma_{xy}}{2}$ (obr. 4.6).



Obr. 4.6

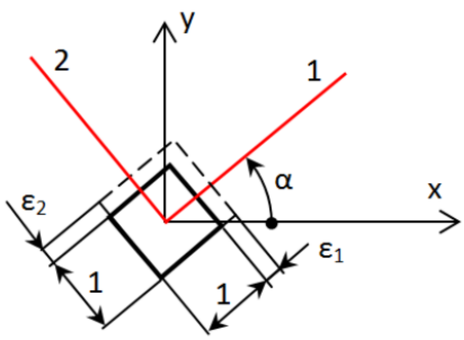
Pro hlavní poměrné deformace platí obdobné vztahy jako pro hlavní napětí (viz rovnice (4.11) a (3.27) kapitola 3))

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}. \tag{4.11}$$

Pro úhel α platí

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{\frac{\gamma_{xy}}{2}}{\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}}, \tag{4.12}$$

což je opět výraz analogický vztahu (3.28). Směry a hodnoty hlavních deformací ε_1 a ε_2 jsou znázorněny v obr. 4.7.



Obr. 4.7

4.5 Analogie tenzoru napjatosti a tenzoru přetvoření

Podobnost mezi tenzorem napjatosti a tenzorem přetvoření umožňuje formulovat další poznatky:

1. V každém bodě tělesa existují tři navzájem kolmé směry, ve kterých poměrné deformace nabývají extrémních hodnot ε_1, ε_2 a ε_3.
2. Směry hlavních poměrných deformací a směry hlavních napětí jsou totožné.
3. Hlavní poměrné deformace je možno vyřešit ze soustavy tří lineárních homogenních rovnic, které jsou analogické k rovnicím (3.43) až (3.45), tedy

$$(\varepsilon_x - \varepsilon)\cos\alpha + \frac{\gamma_{xy}}{2}\cos\beta + \frac{\gamma_{xz}}{2}\cos\gamma = 0, \tag{4.13}$$

$$\frac{\gamma_{xy}}{2}\cos\alpha + (\varepsilon_y - \varepsilon)\cos\beta + \frac{\gamma_{yz}}{2}\cos\gamma = 0, \tag{4.14}$$

$$\frac{\gamma_{zx}}{2}\cos\alpha + \frac{\gamma_{zy}}{2}\cos\gamma + (\varepsilon_z - \varepsilon)\cos\gamma = 0. \tag{4.15}$$

Zároveň musí platit rovnice

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{4.16}$$

V maticovém zápise budou rovnice (4.13) až (4.15) ve tvaru

$$([A_\varepsilon] - \varepsilon\,[E])\,\{n\} = 0, \tag{4.17}$$

kde matice tenzoru přetvoření

$$[A_\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon_z \end{bmatrix},$$

jednotková matice

$$[E] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a vektor normály

$$\{n\} = \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{Bmatrix}.$$

4. Součet poměrných deformací v libovolných třech navzájem kolmých směrech je invariantní

$$i_{1\varepsilon} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \tag{4.18}$$

Příklady k procvičení

1. Složky tenzoru přetvoření jsou zadány následujícími hodnotami: $\varepsilon_x = 5 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_y = -3 \cdot 10^{-4}$, $\gamma_{xy} = 4 \cdot 10^{-4}$. Určete hlavní poměrné deformace ε_1 a ε_2 a jejich směry.

2. V bodě tělesa působí rovinná napjatost. Měřením byly zjištěny poměrné deformace ve třech směrech, vzájemně svírajících úhel 45° : $\varepsilon_x = 6{,}87 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_y = -2{,}2 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_\alpha = 8{,}1 \cdot 10^{-4}$. Určete směr a velikost hlavních poměrných deformací a hlavních napětí. Modul pružnosti je $E = 2 \cdot 10^5 MPa$, $\mu = 0{,}3$.

3. V bodě tělesa byly naměřeny hodnoty poměrných deformací o velikostech $\varepsilon_a = 70 \cdot 10^{-6}$, $\varepsilon_b = 850 \cdot 10^{-6}$, $\varepsilon_c = 250 \cdot 10^{-6}$. Osu snímače a stotožníme s x, potom bude $\varphi_a = 0°$. Ostatní osy snímače jsou potom od osy x odkloněny o úhly: $\varphi_b = 60°$, $\varphi_c = 120°$. Určete hlavní poměrné deformace, jejich směry k ose x a maximální smykovou deformaci.

Klíč k příkladům k procvičení

1. $\varepsilon_1 = 5{,}47 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_2 = -3{,}47 \cdot 10^{-4}$, $\alpha = 13{,}28°$

2. $\varepsilon_1 = 9{,}67 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_2 = -5 \cdot 10^{-4}$, $\alpha = 19{,}5°$, $\sigma_1 = 179{,}56 MPa$, $\sigma_2 = -46{,}13 MPa$

3. $\varepsilon_1 = 862 \cdot 10^{-6}$, $\varepsilon_2 = -82 \cdot 10^{-6}$, $\alpha_1 = 66{,}4°$, $\alpha_2 = -23{,}6°$, $\gamma_{max} = 944 \cdot 10^{-6}$

Pojmy k zapamatování

- podélná poměrná deformace
- zkos
- Cauchyho geometrické rovnice
- Mohrova kružnice
- tenzor přetvoření

Kontrolní otázky

?

1. Kolik je nezávislých složek tenzoru přetvoření?
2. Co vyjadřují Cauchyho geometrické rovnice?
3. Jak je definován tenzor přetvoření?
4. Jsou směry hlavních napětí kolineární se směry hlavních deformací u elastické úlohy?
5. K čemu se používá a co představuje Mohrova kružnice pro deformace?
6. Dokážete sestrojit Mohrovu kružnici pro deformace?

Kapitola 5

Mechanické vlastnosti materiálů

Průvodce studiem

V předcházejících kapitolách byly zopakovány základní způsoby zatěžování tělesa (tah, ohyb, krut) a byl podán stručný popis chování v bodu tělesa (elementární krychle, tenzor napjatosti, tenzor přetvoření a Mohrova kružnice). Toto chování bylo dáno zatížením tělesa. Skutečné konstrukce jsou ale ovlivněny nejen zatížením, které na ně působí, ale také materiálem, z kterého jsou vyrobeny. Tato kapitola popisuje tahovou zkoušku a vysvětluje její vztah k Hookeovu zákonu a rozšiřuje jeho použití na víceosou napjatost. Stručně také ukazuje možnosti řešení nad mezí pružnosti, teplotního chování apod.

Cíle

Po prostudování této kapitoly:

- získáte náhled na vztah mezi experimentem a teorií
- budete rozumět základnímu vztahu mezi napětím a deformací
- budete znát základní rovnice, popisující chování materiálu z hlediska mechaniky kontinua
- budete umět navrhnout a vyhodnotit jednoduchý experiment pro zjištění základních materiálových charakteristik

5.1 Vymezení základních pojmů

Podrobný popis struktury a chování materiálů byl obsahem předmětu Nauka o materiálu či Vlastnosti a zkoušení materiálů. Z hlediska předmětu pružnost a pevnost nás zajímají zejména „vnější projevy” materiálu. Po zatížení válce se tento protáhne, zkroutí, prohne apod. a samotné složení materiálu pro nás tedy není podstatné. V praxi můžeme využít širokou paletu materiálů (které jsou reprezentovány různými materiálovými modely), v předmětu pružnost a pevnost se budeme věnovat pouze těm nejjednodušším.

Stejně jako v Nauce o materiálu budeme považovat za materiál pouze pevné látky (kapaliny a plyny jsou popsány v jiných předmětech). Většinu konstrukčních materiálů můžeme považovat za homogenní a isotropní.

Definice 5.1. *Isotropní materiály* mají ve všech směrech stejné vlastnosti.

Definice 5.2. *Homogenní materiály* mají ve všech bodech tělesa stejné vlastnosti.

Při našich úvahách a výpočtech se budeme pohybovat v oblastech zatížení, kde se materiály chovají lineárně (bude vysvětleno v další kapitole). Budeme také předpokládat, že materiály se chovají stejně bez ohledu na rychlost zatěžování (např. rázy), případně teplotu (např. creep, teplotní namáhání) atp.

I přes výše popsaná zjednodušení je možné klasickou pružnost použít ve většině případů praxe, případně jako první přiblížení či odhad chování u složitějších případů. V předmětu pružnost a pevnost budeme obvykle „používat” kovové materiály nebo přímo ocel. Samozřejmě nesmíme zapomenout na další podmínky, které se ale netýkají přímo materiálů:

a) V předmětu pružnost a pevnost se zabýváme „pomalými” ději, kde lze dynamické vlivy zanedbat. Jedná se tedy o statické výpočty.

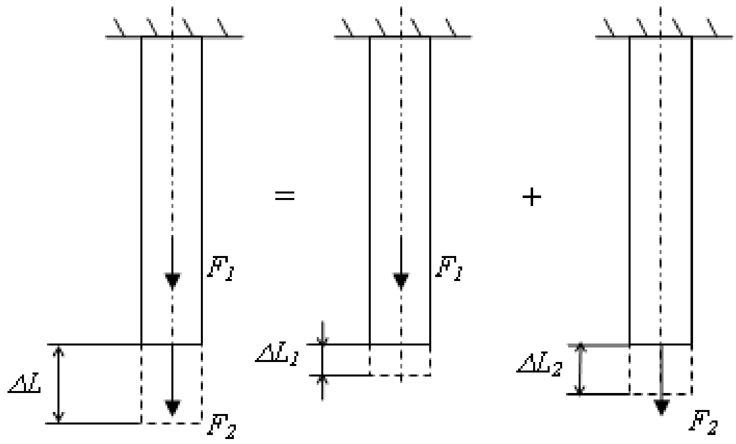
b) Posuvy musí být vůči rozměrům počítaného tělesa zanedbatelně malé. Pro těleso o rozměrech řádově v metrech mohou být posuvy v jednotkách mm.

c) Platí Saint Vénantův princip lokálnosti, viz kapitola 2.

Výše popsaná zjednodušení nám velmi zjednoduší postup výpočtů. Jeden z nejdůležitějších a často využívaných principů je princip superpozice, který ovšem platí pouze za výše uvedených předpokladů. V případě, že výše uvedené předpoklady neplatí, musíme pečlivě zvážit, zda je možné superpozice využít.

Definice 5.3. Princip superpozice umožňuje složitou úlohu rozdělit na jednodušší části, tyto vyřešit a znovu sečíst do výsledku. Výsledek, získaný součtem rozdělených úloh, je shodný s výsledkem řešení celé úlohy. Princip superpozice je možné využít při řešení sil, napětí i deformací.

Uvažujme prizmatický prut, na nějž působí dvě osamělé síly F_1 a F_2 dle obr. 5.1. Prodloužení prutu je pak rovno součtu prodloužení od jednotlivých sil ($\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2$).



Obr. 5.1

V dalších kapitolách bude uvedeno několik případů využití principu superpozice a také případů, kdy tento princip nelze použít.

Vlastnosti materiálů se „získávají" pomocí experimentů – zkoušek. Mezi nejznámější patří např. tahová zkouška, torzní – krutová zkouška, pěchovací zkouška, zkoušky ohybem atd. Výše uvedené zkoušky patří mezi tzv. destruktivní metody zkoušení (existují také tzv. nedestruktivní metody zkoušení).

Definice 5.4. Při použití *destruktivní metody zkoušení* se zkušební vzorek poruší.

Definice 5.5. Při použití *nedestruktivní metody zkoušení* se zkušební vzorek neporuší.

Základní popis, složení a vlastnosti běžně používaných materiálů (oceli, litiny, vybrané plasty atd.) můžeme najít v materiálových listech nebo strojnických tabulkách (jsou běžně dostupné). Mezi základní materiálové parametry můžeme počítat např. modul pružnosti v tahu, mez pružnosti, mez pevnosti. Další materiálové charakteristiky a jejich materiálové parametry (únava, teplotní závislosti, creep atd.) lze najít v odborné literatuře nebo na internetu.

Výsledkem experimentů může být graf, popisující chování vzorku (zkoušeného materiálu). Graf může mít podobu závislosti zatížení – deformace, čas – deformace atd. dle charakteristik materiálu, které chceme získat. Vyhodnocením grafu pak získáme hodnoty materiálových parametrů, např. hodnotu modulu pružnosti v tahu. Způsob vyhodnocení zkoušky nebo lépe způsob získání materiálových parametrů je často předepsán normou.

5.2 Tahová zkouška

Jednou ze základních a nejznámějších zkoušek je tahová zkouška. Zkušební vzorek válcového tvaru (základní tvar je předepsán normou) je uchycen do zkušebního stroje. Vzorek je zatěžován rostoucí osovou silou, která způsobí prodloužení vzorku až do jeho přetržení. Na obr. 5.2 je ukázán zkušební stroj, zkušební vzorky před a po přetržení.

Obr. 5.2

Zkušební stroj zahrnuje snímače, které měří zatěžující osovou sílu, a průtahoměr, který slouží pro měření prodloužení zkušební části vzorku. Základním výsledkem zkoušky je tedy závislost mezi osovou silou a prodloužením vzorku ($F - \Delta l$). Tento graf se ovšem běžně nepoužívá, častěji se používá graf závislosti napětí – poměrné podélné prodloužení ($\sigma - \varepsilon$). Zjednodušeně můžeme říci, že hlavní výhodou zobrazení ($\sigma - \varepsilon$) je nezávislost na průměru a délce zkušební části vzorku. K přepočtu grafu ($F - \Delta l$) použijeme vzorce $\sigma = \frac{F}{S_0}$, $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$ (viz předchozí kapitoly), kde F je zatěžující síla, S_0 je počáteční plocha průřezu, Δl je prodloužení zkušební části vzorku a l_0 je počáteční délka zkušební části vzorku. Diagram ($\sigma - \varepsilon$) popisuje chování materiálu „v bodě", je nezávislý na tvaru vzorku a závisí pouze na použitém materiálu (technologii výroby apod.). Naopak diagram $(F - \Delta l)$ popisuje chování „celého vzorku” a závisí nejen na tvaru, ale i na materiálu. Diagram $(\sigma - \varepsilon)$ se nazývá smluvní nebo také pracovní či technický diagram zkoušky tahem a napětí, vypočtené tímto postupem, je *smluvní napětí* (nominální napětí).

Definice 5.6. *Smluvní* nebo také *pracovní* či *technický diagram zkoušky tahem* popisuje závislost mezi napětím $(\sigma = \frac{F}{S_0})$ a poměrným podélným prodloužením $(\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0})$, kde napětí je počítáno z počáteční plochy průřezu zkušební části vzorku.

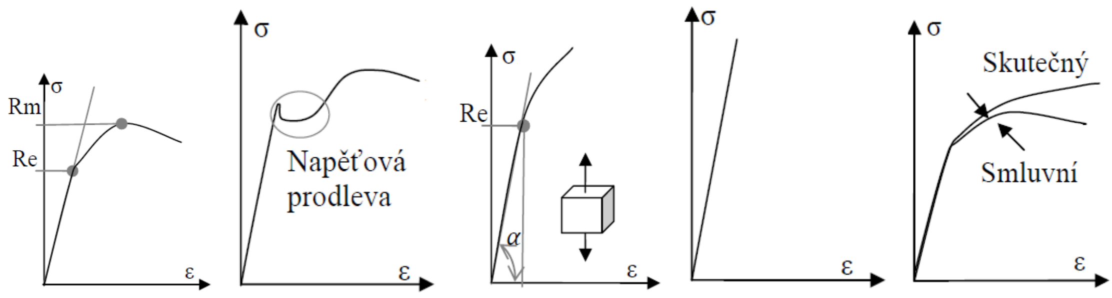
Během zatěžování zkušebního vzorku se zvětšuje délka, ale také zmenšuje průřez vzorku. *Skutečné napětí* ve vzorku tedy musíme počítat ne na základě počáteční plochy průřezu, ale na základě okamžité (skutečné) hodnoty plochy průřezu S. Skutečná plocha průřezu S bude při tahové zkoušce vždy menší než plocha počáteční S_0. A tedy napětí skutečné σ_S bude vždy větší, než napětí smluví σ. Podobně lze zpřesnit popis deformace formou okamžitého (skutečného, přirozeného) nebo lépe logaritmického poměrného prodloužení ε_S.

Definice 5.7. *Definice Logaritmické poměrné prodloužení* ε_S popisuje okamžitou hodnotu deformace a pro přepočet z poměrného prodloužení ε použijeme rovnici

$$\varepsilon_S = \ln(1 + \varepsilon)\,. \tag{5.1}$$

Definice 5.8. *Skutečný diagram zkoušky tahem* popisuje závislost mezi okamžitým (skutečným) napětím $(\sigma_S = \frac{F}{S}$ a logaritmickým (skutečným) poměrným prodloužením $(\varepsilon_S = \ln(1 + \varepsilon))$.

V obr. 5.3 jsou ukázány příklady diagramů smluvních pro tvárné a křehké materiály. Výrazný rozdíl mezi smluvním a skutečným diagramem je u tvárných materiálů (obr. 5.3 e)).



a) b) c) d) e)

Obr. 5.3

Na obr. 5.3 je uveden typický smluvní diagram pro tvárný materiál. U některých kovových materiálů můžeme zaznamenat výraznou mez kluzu (obr. 5.3 b)) či nízkou tažnost (obr. 5.3 c)). U křehkých materiálů je graf lineární až téměř do porušení (obr. 5.3 d)).

Pracovní (smluvní) diagram tahové zkoušky (křehký materiál obr. 5.3 d), tvárný materiál obr. 5.3 a), 5.3 b)) můžeme rozdělit do několika částí:

- V první části roste napětí lineárně v závislosti na poměrném prodloužení. Při odlehčení v této části se vzorek vrací do původního tvaru – nevznikají trvalé deformace. Konec první – lineární části grafu nazýváme mez kluzu Re (mez pružnosti, mez úměrnosti).

  Definice 5.9. *Smluvní mez kluzu* je definována „zanedbatelně” malou trvalou deformací – např. $0,005\%$ délky zkušební tyče (dle typu materiálu nebo použití jsou výše uvedené meze definovány normou).

  Některé oceli vykazují tzv. *výraznou mez kluzu*, která odpovídá napěťové prodlevě na křivce ($\sigma = \varepsilon$) viz (obr. 5.3 b)). Mez kluzu Re patří mezi základní materiálové parametry a lze ji pro velkou část materiálů nalézt ve strojnických tabulkách, případně v materiálových listech.

  Definice 5.10. Chování lineární části křivky popisujeme pomocí *Hookeova zákona* pro jednoosou napjatost – pro prostý tah. Což je rovnice, popisující úvodní-přímkovou část tahového diagramu

$$\sigma = E \cdot \varepsilon. \tag{5.2}$$

  Definice 5.11. *Modulem pružnosti v tahu E* nazýváme směrnici tečny úvodní – přímkové části tahového diagramu

$$E = tg(\alpha) = \frac{\sigma}{\varepsilon}. \tag{5.3}$$

  Je to takové smluvní napětí, které způsobí prodloužení zkušební části vzorku na dvojnásobek.

  Hookeův zákon pro jednoosou napjatost popisuje závislost ($\sigma = \varepsilon$) do meze pružnosti. Modul pružnosti materiálu v tahu E (pro ocel $E \cong 200000\ MPa$) se nazývá také Youngův modul. Modul pružnosti v tahu patří mezi základní materiálové parametry a lze jej nalézt v materiálových listech, strojnických tabulkách, příp. učebnicích pružnosti. Při tahové zkoušce dochází k jednoduché jednoosé napjatosti. V úvodní, lineární části křivky je v tělese, zatíženém pouze tahem, tento předpoklad splněn velmi dobře.

Současně s prodlužováním zkušební části dochází i k zužování průřezu. Podobně jako poměrné prodloužení $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$ můžeme definovat poměrné příčné zúžení $\delta = \frac{\Delta d}{d_0}$, kde Δd je rozdíl průměru zkušební části vzorku před a po deformaci $d - d_0$. Poměr obou veličin pak nazýváme Poissonovo číslo $\mu = \frac{\delta}{\varepsilon}$ $[-]$ (pro ocel v elastické oblasti $\mu \cong 0,3$).

Definice 5.12. *Poissonův zákon* popisuje závislost mezi podélným poměrným prodloužením a příčným poměrným „zkrácením". Například

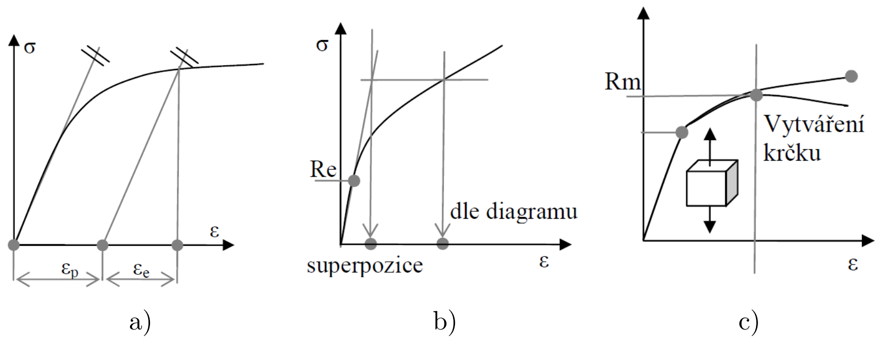
$$\varepsilon_y = -\mu \cdot \varepsilon_x. \tag{5.4}$$

Tedy, při zatížení válcového vzorku tahovou silou v ose x můžeme deformaci ve vzorku popsat poměrným prodloužením ε_x ve směru osy a poměrným prodloužením ε_y kolmo na osu vzorku (platí $\varepsilon_y = -\delta$). Pro vybrané materiály jsou základní elastické konstanty uvedeny v tab. 5.1.

Materiál	**Youngův Modul** E $[MPa]$	**Poissonovo číslo** μ [1]
Hliníkové slitiny	$\approx 7,5 \cdot 10^4$	$= 0,31$
Mosaz	$\approx 1,04 \cdot 10^5$	$\approx 0,33$
Bronz	$\approx 1,17 \cdot 10^5$	$= 0,31$
Litina	$\approx 9,65 \cdot 10^4$	$\approx 0,18$
Ocel	$2 \cdot 10^5 \div 2,16 \cdot 10^5$	$0,28 \div 0,3$

Tab. 5.1

- Ve druhé části tahového diagramu (za mezí kluzu) dochází k nárůstu deformace při podstatně pomalejším nárůstu síly. Při odlehčení vzorku v této části zatěžování se vzorek nevrátí do původního tvaru – vzniká trvalá deformace, viz obr. 5.4 a). Celkovou deformaci ε můžeme rozložit do dvou částí $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$, elastické ε_e (vratné, lineární části) a plastické ε_p (trvalé, nelineární části). V plastické oblasti je Poissonovo číslo $\mu = 0,5$, protože nedochází ke změně objemu [1]. Při zatěžování nad mezí kluzu již neplatí princip superpozice (viz obr. 5.4 b)) a výpočty v této oblasti jsou složitější než výpočty v lineární oblasti. Těmito typy výpočtů se zabývá *plasticita*. V praxi se nad mezí kluzu pohybujeme při tváření, kování, válcování atd.



Obr. 5.4

- Druhá část smluvního diagramu končí na *mezi pevnosti v tahu Rm*.

Definice 5.13. *Mez pevnosti v tahu* je poměr mezi maximální zatěžující silou F_{MAX} dosaženou při tahové zkoušce a počáteční plochou průřezu S_0

$$Rm = \frac{F_{MAX}}{S_0}. \tag{5.5}$$

V této části tahového diagramu je již rozdíl mezi smluvní (naměřenou) a skutečnou křivkou (korekce změny průřezu a poměrného prodloužení) značný (obr. 5.4 c)). Mez pevnosti Rm v tahu patří mezi základní materiálové parametry a lze ji nalézt v materiálových listech, strojnických tabulkách, příp. učebnicích pružnosti.

Křehké materiály (vzniká velmi malá trvalá deformace, např. litina) se poruší na mezi pevnosti. Při tahové zkoušce dochází k jednoduché jednoosé napjatosti. V druhé, „plastické" části křivky je v tělese, zatíženém pouze tahem, tento předpoklad také splněn velmi dobře.

U tvárných materiálů se za mezí pevnosti začne vytvářet krček – výrazné zúžení průřezu ve zkušební části vzorku (obr. 5.2, obr. 5.4 c)), proto mluvíme o oblasti nehomogenní plastické deformace. Ve smluvním tahovém diagramu (obr. 5.4 c)) pak napětí klesá, naopak ve skutečném tahovém diagramu (vytváření krčku) napětí roste až do přetržení (skutečné napětí při přetržení se značí σ_f). V oblasti nehomogenní plastické deformace nemusí být v tělese, zatíženém pouze tahem, předpoklad jednoosé napjatosti splněn. V zúžené části (okolí krčku) již vzniká víceosá napjatost.

Rozdíl mezi smluvním a skutečným diagramem roste s rostoucím zatížením – v lineární oblasti je vliv zanedbatelný, při zatěžování nad mezí kluzu bychom měli používat vždy skutečný diagram.

K popisu skutečného tahového diagramu – nebo lépe k základnímu popisu chování materiálu – se používají konstituční rovnice. Mezi nejznámější patří např. Ramberg-Osgoodova křivka: $\varepsilon = \frac{\sigma}{B} + \frac{\sigma}{C}^{\frac{1}{m}}$, Hollomonova rovnice: $\sigma = C \cdot \varepsilon^m$, Ludwikova rovnice: $\sigma = B + C \cdot \varepsilon^m$, Swiftova rovnice: $\sigma = C\left(\varepsilon_0 + \varepsilon\right)^m$, kde B, C, m, ε_0 jsou materiálové parametry. Tyto materiálové parametry se určují z experimentů a nejsou běžně dostupné.

K základním charakteristikám materiálů patří ještě tažnost A a kontrakce Z. Tyto charakteristiky také bývají běžně uváděny v materiálových listech. Tažnost A je definována jako poměr prodloužení měřené délky tyče po přetržení k počáteční délce tyče, vyjádřený v procentech. Kontrakce Z je definována podobně, jako poměr rozdílu počátečního a nejmenšího průřezu zkušební tyče po přetržení k počátečnímu průřezu. I kontrakce je vyjádřována v procentech.

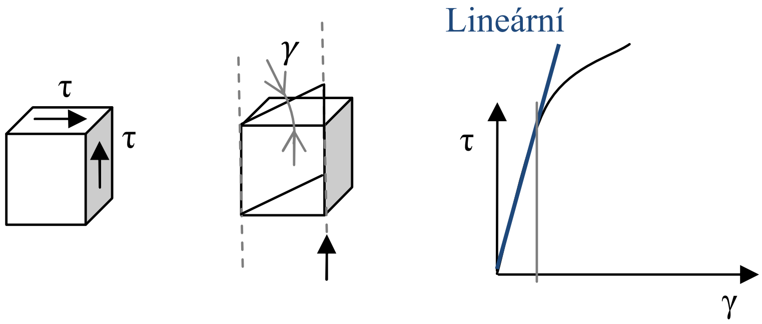
5.3 Vyhodnocování zkoušek

Všechny stroje, součásti, díly atd. jsme schopni vyrobit pouze v určité přesnosti – toleranci. Podobně i materiály garantují chemické složení pouze v určitém rozmezí. Navíc zde vstupuje do hry i kvalita výroby – opracování, tepelné úpravy či svařování atp. Každý výrobek (i zkušební vzorek) je tedy z hlediska rozměrů i složení a chování unikátní. Výsledek měření ovlivní také zvolená měřicí metoda (chyba měření). Při stanovování materiálových charakteristik pak vycházíme ze sady vzorků, vyrobených ze stejného materiálu, stejným postupem a které mají stejný tvar. Výsledky vyhodnotíme statisticky. Z desítek nebo stovek stejných experimentů určíme „reprezentativní" modul pružnosti v tahu, mez pružnosti, mez pevnosti atd. V tabulkách materiálu najdeme „nejnižší" (dle charakteru parametru mohou být také „nejvyšší" nebo průměrné) hodnoty naměřené v sadě experimentů. Např. u meze kluzu najdeme v tabulkách hodnotu, pro kterou platí, že 90% (95%, 99% atd.) vzorků vykazovalo vyšší hodnotu meze kluzu. Pohybujeme se tedy v „bezpečné" oblasti a dle charakteru materiálového parametru volíme nejméně příznivou hodnotu.

5.4 Hookeův zákon pro prostý smyk

Hookův zákon pro prostý smyk si můžeme odvodit z pracovního diagramu zkoušky (např. z krutové zkoušky), při které vzniká napjatost prostého smyku, viz obr. 5.5). Úhly vždy uvádíme v úhlové míře (radiánech). Tentokrát se budeme věnovat pouze první - lineární části křivky. Znovu si zavedeme několik omezujících předpokladů, které nám zjednoduší řešení:

- při zatížení vznikají pouze malé deformace
- jednotlivé řezy v bodě zůstávají rovinné (viz obr. 5.5)



Obr. 5.5

Stejným způsobem jako u tahu pak můžeme z grafu ($\tau - \gamma$) na obr. 5.5 odvodit Hookův zákon pro smyk (pohybujeme se v úvodní – lineární části grafu).

Definice 5.14. *Hookeův zákon pro smyk* popisuje závislost mezi smykovým napětím a zkosem ($\tau - \gamma$) v elementární krychli do meze pružnosti

$$G = tg(\alpha) = \frac{\tau}{\gamma}. \tag{5.6}$$

Definice 5.15. *Modulem pružnosti ve smyku G* nazýváme směrnici tečny úvodní – přímkové části diagramu, získaného při namáhání prostým smykem (např. při krutové zkoušce).

5.5 Vztahy mezi veličinami γ, ε

Obě veličiny (zkos γ i poměrné prodloužení ε) popisují deformace v elementární krychli a lze mezi nimi najít jednoznačný vztah. Pro malé deformace ($\gamma \approx 0 \rightarrow tg(\gamma) \approx \gamma$) platí

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{2}. \tag{5.7}$$

Poměrnou normálovou deformaci odpovídající zkosu obvykle značíme rozdílnými indexy

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2},\ \varepsilon_{xz} = \frac{\gamma_{xz}}{2},\ \varepsilon_{yz} = \frac{\gamma_{yz}}{2}. \tag{5.8}$$

Podobně jako u smykových napětí platí rovnice

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx},\ \gamma_{xz} = \gamma_{zx},\ \gamma_{yz} = \gamma_{zy}. \tag{5.9}$$

5.6 Hookeův zákon pro trojosou napjatost

Základní rovnice, popisující napěťově – deformační chování materiálu při jednoosém namáhání, jsou Hookeův zákon a Poissonův zákon. V praxi často potřebujeme popsat chování materiálu i při víceosé napjatosti.

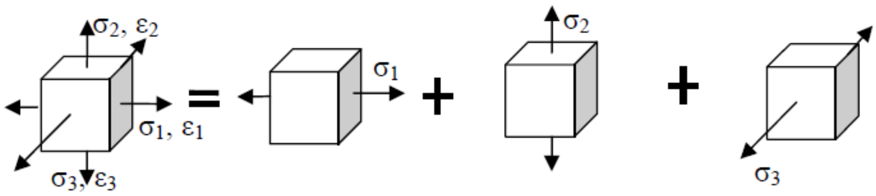
Definice 5.16. *Hookeův zákon pro trojosou napjatost* se nazývá rozšíření Hookeova zákona pro jednoosou napjatost pro zatížení ve více osách nebo také zkráceně *obecný Hookeův zákon*.

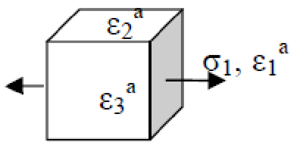
Připomeňme, že v lineární oblasti jsou směry hlavních napětí a hlavních deformací shodné (kapitola 4). Sestavení rovnic, popisujících chování materiálu v lineární oblasti (obecný Hookeův zákon), provedeme pomocí principu superpozice, viz tab. 5.2.

Budeme uvažovat elementární krychli se 3 hlavními napětími v osách x, y, z a zároveň platnost principu superpozice (podmínky platnosti zákona superpozice deformace se shodují s předpoklady pružnosti a pevnosti, uvedenými v kapitole 1).

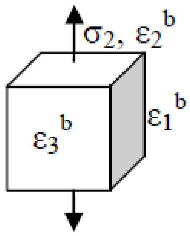
Trojosé zatížení v elementární krychli rozložíme na tři samostatné části – elementární krychle s pouze tahovým zatížením (jednou v ose x, jednou v ose y a jednou v ose z). U rozdělených elementárních krychlí pak vypočteme poměrné prodloužení ve všech směrech. Příslušné složky poměrného prodloužení nakonec znovu sečteme.

Elementární krychle, zatížená v jednom směru (jednoosá napjatost), např. v ose x – směr 1, se v tomto směru prodlouží. Poměrné prodloužení zjistíme z Hookeova zákona pro tah. Kolmo k ose x (osy y, z – směry 2, 3) dojde k zúžení. Hodnotu zúžení vyjádříme z Poissonova zákona (viz tab. 5.2).

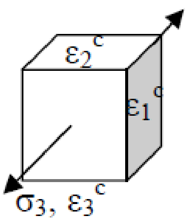
<table>
<tr><td colspan="2">


V prvním kroku rozdělíme trojosou napjatost do tří částí, které obsahují pouze jednoduchou jednoosou napjatost – prostý tah ve třech na sebe kolmých osách.
</td></tr>
<tr><td>


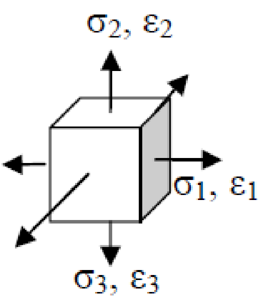
</td><td>
Elementární krychle odpovídá zatížení tahu v ose x – směr 1. Vypočteme poměrné prodloužení při zatížení pouze od σ_1 (index a)

$$\varepsilon_1^a = \frac{\sigma_1}{E},\ \varepsilon_2^a = -\mu \cdot \varepsilon_1^a,\ \varepsilon_3^a = -\mu \cdot \varepsilon_1^a.$$
</td></tr>
<tr><td>


</td><td>
Elementární krychle odpovídá zatížení tahu v ose y – směr 2. Vypočteme poměrné prodloužení při zatížení pouze od σ_2 (index b)

$$\varepsilon_2^b = \frac{\sigma_2}{E},\ \varepsilon_1^b = -\mu \cdot \varepsilon_2^b,\ \varepsilon_3^b = -\mu \cdot \varepsilon_2^b.$$
</td></tr>
<tr><td>


</td><td>
Elementární krychle odpovídá zatížení tahu v ose z – směr 3. Vypočteme poměrné prodloužení při zatížení pouze od σ_3 (index c)

$$\varepsilon_3^c = \frac{\sigma_3}{E},\ \varepsilon_2^c = -\mu \cdot \varepsilon_3^c,\ \varepsilon_1^c = -\mu \cdot \varepsilon_3^c.$$
</td></tr>
<tr><td>


</td><td>
Sečteme znovu složky deformace v příslušných směrech. Pro osu x – směr 1: $\varepsilon_1 = \varepsilon_1^a + \varepsilon_1^b + \varepsilon_1^c = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \cdot \varepsilon_2^b - - \mu \cdot \varepsilon_3^c = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \cdot \frac{\sigma_2}{E} - \mu \cdot \frac{\sigma_3}{E}$, tedy

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \mu\left(\sigma_2 + \sigma_3\right)\right].$$

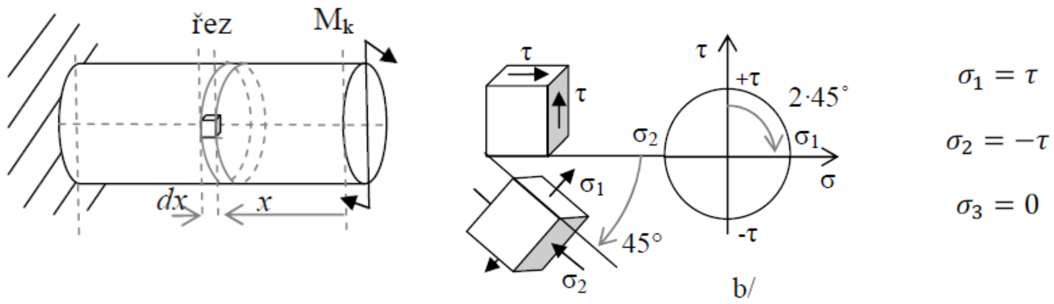
Obdobně v ostatních směrech

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \mu\left(\sigma_1 + \sigma_3\right)\right],$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \mu\left(\sigma_1 + \sigma_2\right)\right].$$
</td></tr>
</table>

Tab. 5.2

Elastické konstanty E, G, μ jsou vzájemně závislé. Vztah mezi nimi můžeme snadno určit uvažováním napjatosti prostého smyku (např. krut), pomocí Mohrovy kružnice a Hookeova zákona pro trojosou napjatost, viz obr. 5.6.



a) b)

Obr. 5.6

Po dosazení hlavních napětí při zatížení krouticím momentem do Hookeova zákona pro trojosou napjatost získáme

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu\cdot\sigma_2) &= \frac{1}{E}(\tau + \mu\cdot\tau) = \frac{\tau}{E}(1+\mu)\,, \\ \frac{E\cdot\varepsilon_1}{(1+\mu)} = \tau &= G\cdot\gamma = 2\cdot G\cdot\varepsilon_1, \\ \frac{E}{2\,(1+\mu)} &= G. \end{aligned} \tag{5.10}$$

V předchozí části byly uvedeny rovnice (tab. 5.2), které obsahují pouze hlavní napětí, tzn. smykové složky jsou nulové a tedy i zkos je nulový. V případě, že je dána napjatost v jiném souřadnicovém systému, máme obecně šest složek napětí. Z charakteru normálových složek tenzoru napjatosti a tenzoru přetvoření můžeme psát (pouhou záměnou indexů)

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu\,(\sigma_y + \sigma_z)\right], \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu\,(\sigma_x + \sigma_z)\right], \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu\,(\sigma_y + \sigma_x)\right]. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Tyto rovnice doplňují další tři rovnice, vyjadřující vztah mezi smykovými složkami tenzoru napjatosti a odpovídajícími zkosy, které získáme z Hookeova zákona pro smyk

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy},\ \ \tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz},\ \ \tau_{yz} = G \cdot \gamma_{yz}. \tag{5.12}$$

5.7 Další experimenty

Podobně jako tah můžeme vyhodnotit i tlak. Většina materiálů se chová v oblasti tahu a tlaku jinak. Některé součásti mohou být zatěžovány pouze tahem (lana apod.) některé pouze tlakem (stěna, poskládaná z cihel). U tlaku při použití tvárných materiálů nemusí dojít k porušení (deformace se stále zvětšuje), proto se zkouška tlakem obvykle provádí do dosažení určité deformace.

V praxi se často využívají i jiné typy zkoušek. Vždy se experimentátoři snaží o maximální přiblížení ke skutečnému zatěžovacímu stavu. Zkoušky tedy můžeme rozdělit dle zatěžovacího stavu (tah–tlak, krut, ohyb, střih, únava atd.). Mezi nejsložitější „zkušební vzorky” pak můžeme zařadit prototypy. Zatížení prototypů se volí dle skutečných provozních charakteristik stroje a často je zkouška předepsána příslušnou normou.

5.8 Únava

Na začátku kapitoly o materiálových vlastnostech jsme z úvah vyloučili vliv času. Čas má samozřejmě velký vliv na chování materiálu, můžeme rozlišit dva základní případy. V čase se mění zatížení – touto částí se zabývá únava materiálu. Pokud má vliv na napěťově – deformační chování rychlost deformace, mluvíme o *viskoplasticitě*. Příkladem je tečení kovů (creep), kdy při dlouhodobém konstantním zatížení za vysoké teploty roste deformace s časem. Tento jev byl probrán již v Nauce o materiálu.

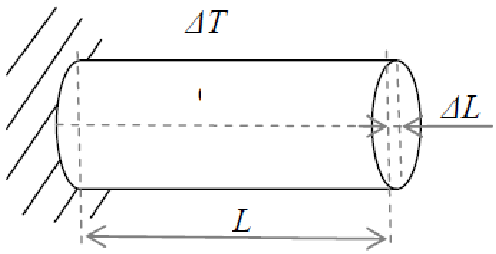
Mezi únavové zatížení můžeme zařadit jakékoliv opakující se zatížení (zatížení se může měnit také náhodně). Podle počtu cyklů můžeme hrubě rozdělit zatížení:

- statické, kvazistatické (do 1000 cyklů)
- nízkocyklovou únavu (od 1000 do 10^5 cyklů)
- vysokocyklovou únavu (nad 10^5 cyklů)

Únavu ovlivňuje velké množství vlivů – vruby, velikost tělesa, tvar zátěžných cyklů atd. Vzhledem k důležitosti problematiky je únavě věnována celá kapitola 11, kde je základní popis nejdůležitějších charakteristik. Podrobněji se únavě věnují samostatné předměty např. únava materiálu, lomová mechanika.

5.9 Vliv teploty

Deformaci tělesa může kromě zatížení způsobit také změna teploty. Nejjednodušším případem je změna délky tyče při změně teploty, viz obr. 5.7.



Obr. 5.7

Definice 5.17. *Teplotní roztažnost* – změnu délky tyče při změně teploty počítáme dle rovnice

$$\Delta L = \alpha \cdot \Delta T \cdot L, \tag{5.13}$$

kde α je koeficient teplotní roztažnosti materiálu, ΔT je změna teploty, L je délka tyče a ΔL je prodloužení tyče.

Výše uvedená rovnice se dá převést na vhodnější tvar $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \alpha \cdot \Delta T$. Hookeův zákon pak můžeme přepsat ve tvaru, respektujícím teplotní změny

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \mu\left(\sigma_2 + \sigma_3\right)\right] + \alpha \cdot \Delta T, \\
\varepsilon_2 &= \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \mu\left(\sigma_1 + \sigma_3\right)\right] + \alpha \cdot \Delta T, \\
\varepsilon_3 &= \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \mu\left(\sigma_1 + \sigma_2\right)\right] + \alpha \cdot \Delta T.
\end{aligned} \tag{5.14}$$

S rostoucí (i klesající) teplotou se mění také vlastnosti materiálu, reprezentované modulem pružnosti v tahu, mezí kluzu atd. U ocelí nemá ohřev o desítky až stovky stupňů velký vliv a často se zanedbává. Naopak při ochlazení mohou materiály „křehnout” (křehké lomy). Vliv teploty se samozřejmě liší dle materiálu – plasty, dřevo, ocel, měď atd. Konstrukce, které řešíme v úvodním kurzu pružnosti, mívají obvykle pokojovou teplotu $\sim 20°$ a vliv teploty se neuvažuje.

Při řešení úlohy s teplotou se často využívá principu superpozice. Celá úloha je rozložena na část řešení teploty a zbylou část úlohy. Řešení obou částí úlohy se provádí samostatně a výsledky se na závěr superponují.

Příklad 5.1. Určete koeficient teplotní roztažnosti na základě sady měření teploty a prodloužení válcového ocelového vzorku (viz obr. 5.7). Naměřené hodnoty teplot a prodloužení jsou v tab. 5.3. Předpokládejte, že koeficient teplotní roztažnosti nezávisí na teplotě. Délka vzorku $L = 100\ mm$, referenční teplota $T_{ref} = 20°\mathrm{C}$. Přesnost měřidel je dostatečná k odhadu koeficientu teplotní roztažnosti.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
T [°C]	$50,2$	$79,8$	$110,3$	$139,8$	$169,5$	$199,9$	$230,0$	$260,1$	$289,8$
ΔL $[mm]$	$0,047$	$0,063$	$0,123$	$0,125$	$0,157$	$0,238$	$0,239$	$0,307$	$0,315$

Tab. 5.3

K řešení využijeme rovnici, popisující závislost prodloužení na teplotě $\Delta L = \alpha \cdot \Delta T \cdot L$ (kapitola 5.9). Převedeme známé hodnoty na jednu stranu a neznámou teplotní roztažnost na druhou stranu rovnice $\left(\frac{\Delta L}{\Delta T \cdot L} = \alpha\right)$ a dosadíme vstupní hodnoty. Výsledky jsou uvedeny v tab. 5.4.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
α $[1/°]$	$1,56$e-5	$1,05$e-5	$1,36$e-5	$1,04$e-5	$1,05$e-5	$1,32$e-5	$1,14$e-5	$1,28$e-5	$1,17$e-5

Tab. 5.4

V posledním kroku vypočteme hodnotu koeficientu teplotní roztažnosti jako aritmetický průměr

$$\alpha = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{n}.$$

Koeficient teplotní roztažnosti je $\alpha = 1,22$e-5 $[1/°]$.

▲

5.10 Obecný popis chování materiálu

V předchozích kapitolách bylo ukázáno, že chování homogenního isotropního materiálu v oblasti pružných deformací lze popsat šesti rovnicemi (5.11) a (5.12), které vyjadřují vztah mezi složkami tenzoru napjatosti a složkami tenzoru přetvoření, mluvíme o *obecném Hookeovu zákonu* pro prostorovou napjatost. Z těchto výrazů lze vyjít při formulování rovnic pro anizotropní materiály, tedy takové, které nemají ve všech směrech stejné vlastnosti (anizotropní jsou např. monokrystaly).

Definice 5.18. *Obecný Hookeův zákon* popisuje *lineární* vztah mezi složkami tenzoru napjatosti a tenzoru přetvoření.

S respektováním zákona sdruženosti smykových napětí můžeme obecný Hookeův zákon napsat v maticové formě

$$\left\{\begin{array}{c}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\\ \tau_{xy}\\ \tau_{yz}\\ \tau_{xz}\end{array}\right\} = \begin{bmatrix} C_{11}C_{12}C_{13}C_{14}C_{15}C_{16}\\ C_{21}C_{22}C_{23}C_{24}C_{25}C_{26}\\ C_{31}C_{32}C_{33}C_{34}C_{35}C_{36}\\ C_{41}C_{42}C_{43}C_{44}C_{45}C_{46}\\ C_{51}C_{52}C_{53}C_{54}C_{55}C_{56}\\ C_{61}C_{62}C_{63}C_{64}C_{65}C_{66}\end{bmatrix} \left\{\begin{array}{c}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{xz}\end{array}\right\}. \tag{5.15}$$

Matice materiálových parametrů se nazývá matice tuhosti. Tato rovnice se používá i pro anisotropní materiály. V tomto nejobecnějším případě je počet nezávislých prvků matice tuhosti 21. Jestliže existují tři roviny symetrie materiálových vlastností, pak mluvíme o ortotropním materiálu a nezávislých prvků matice tuhosti je 9. Příkladem ortotropního materiálu je dřevo (vzpomeňme na letokruhy). Další skupinou anizotropních materiálů jsou materiály příčně isotropní, které mají také tři roviny symetrie mechanických vlastností, ale navíc se v jedné z těchto rovin materiál chová isotropně. Příkladem jsou jednosměrné vláknové kompozity (např. lamino).

V našem případě homogenního a isotropního materiálu se matice zjednoduší a Hookeův zákon pro trojosou napjatost bude vypadat takto

$$\left\{\begin{array}{c}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{xz}\end{array}\right\} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\mu}{E} & \frac{-\mu}{E} & 0 & 0 & 0\\ \frac{-\mu}{E} & \frac{1}{E} & \frac{-\mu}{E} & 0 & 0 & 0\\ \frac{-\mu}{E} & \frac{-\mu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G}\end{bmatrix} \left\{\begin{array}{c}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\\ \tau_{xy}\\ \tau_{yz}\\ \tau_{xz}\end{array}\right\}, \tag{5.16}$$

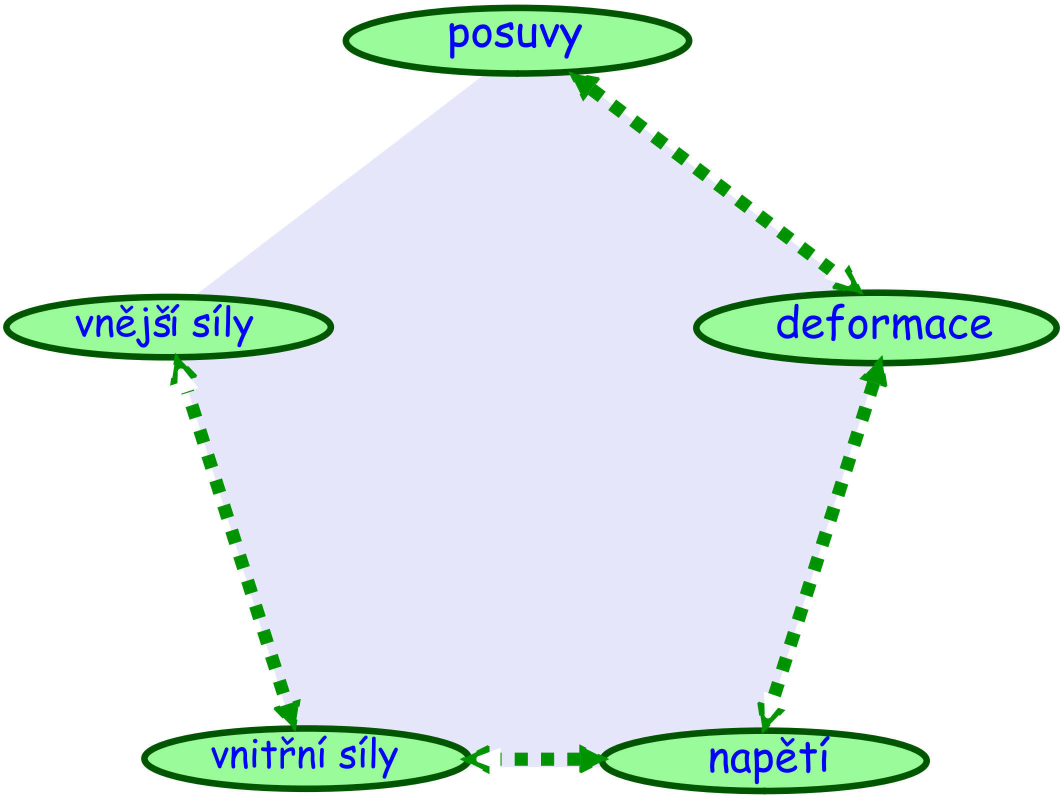
případně po dosazení závislosti mezi modulem pružnosti v tahu E a ve smyku G

$$\left\{\begin{array}{c}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{xz}\end{array}\right\} = \frac{1}{E}\begin{bmatrix} 1 & -\mu & -\mu & 0 & 0 & 0\\ -\mu & 1 & -\mu & 0 & 0 & 0\\ -\mu & -\mu & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu)\end{bmatrix} \left\{\begin{array}{c}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\\ \tau_{xy}\\ \tau_{yz}\\ \tau_{xz}\end{array}\right\}. \tag{5.17}$$

5.11 Logika řešení úloh pružnosti

Nyní již můžeme shrnout poznatky všech předchozích kapitol a popsat možnosti řešení úloh pružnosti a pevnosti, o kterých jsme mluvili již v první kapitole (např. pevnostní kontrola, dimenzování apod.).

Obr. 5.8 ukazuje, jak jsou vázány posuvy a vnější zatížení skrze ostatní veličiny. Při výpočtu začínáme vždy u známé veličiny a pokračujeme pouze ve zvoleném směru - proti či ve směru otáčení hodinových ruček (prázdné šipky či plné). Důležité je, že nemůžeme počítat přímo posuvy z vnějšího zatížení či naopak, neboť musíme ve výpočtu zahrnout vliv geometrie tělesa a materiálových vlastností. V následujících kapitolách bude ukázán na příkladech způsob použití nastíněné logiky řešení úloh pružnosti na základních případech namáhání.



Obr. 5.8

Uvedené strategie nejsou jedinou možností řešení úloh pružnosti. Velmi elegantní a často efektivní jsou energetické přístupy, z nichž jeden z nejpoužívanějších si nyní popíšeme.

5.12 Deformační energie a Castigliánovy věty

Pokud je těleso zatěžováno kvazistaticky, pak lze zanedbat kinetickou složku energie. Je-li těleso z materiálu ideálně elastického, pak je možno zanedbat ztráty vlivem vnitřního tření a lze prohlásit, že veškerá *práce vnějších zatížení* W $[J]$ se přemění v *deformační energii* (tj. v potenciální energii deformace) U $[J]$, akumulovanou v tělese. Pro výslednou práci na diferenciálu objemu $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \mathrm{d}V$ platí

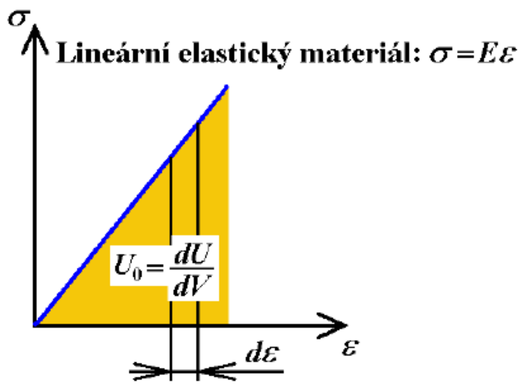
$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}U = \int_0^{\varepsilon} \sigma \mathrm{d}\varepsilon \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \int_0^{\varepsilon} \sigma \mathrm{d}\varepsilon \, \mathrm{d}V. \tag{5.18}$$

Pro další potřebu lze také stanovit deformační energii, vztaženou na jednotkový objem - hustotu deformační energie U_0 $[Jm^{-3}]$ nebo $[Pa]$

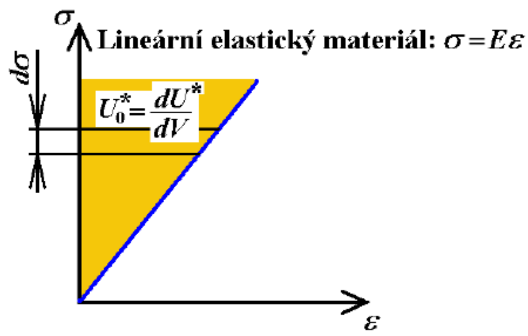
$$U_0 = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}V} = \int_0^{\varepsilon} \sigma \mathrm{d}\varepsilon. \tag{5.19}$$

Hustotu deformační energie U_0 reprezentuje plocha oblasti na obr. 5.9 a). Pro lineárně elastický materiál lze po aplikaci Hookeova zákona psát

$$U_0 = \int_0^{\varepsilon} E\varepsilon \, \mathrm{d}\varepsilon = \frac{E\varepsilon^2}{2} = \frac{\sigma\varepsilon}{2} = \frac{\sigma^2}{2E}. \tag{5.20}$$



a)



b)

Obr. 5.9

Plocha nad napěťově – deformační křivkou se nazývá *komplementární hustota deformační energie* U_0^* $[Jm^{-3}]$ nebo $[Pa]$ (viz obr.5.9 b)), pro kterou platí

$$U_0^* = \frac{\mathrm{d}U^*}{\mathrm{d}V} = \int_0^{\sigma} \varepsilon \, \mathrm{d}\sigma. \tag{5.21}$$

Pouze pro lineárně elastický materiál platí $U_0 = U_0^*$.

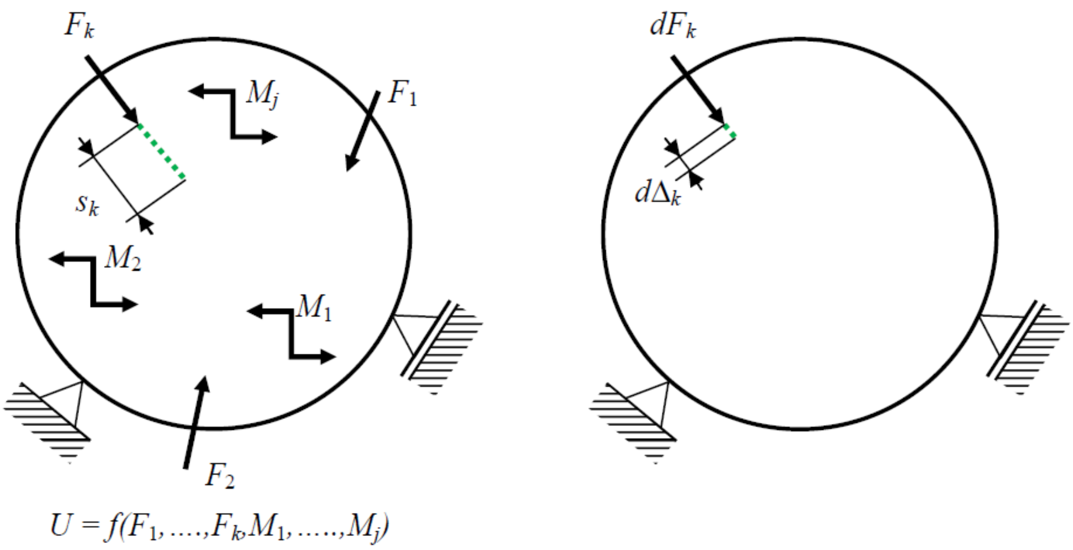
Je vhodné připomenout také zákonitosti kolem práce vnějšího zatížení. Uvažujme, že na lineárně pružné těleso působí jediná osamělá síla F v jistém bodě bodě A. V důsledku jejího působení se těleso deformuje a velikost síly lineárně závisí na změně polohy $F = k \cdot s_F$ v celém intervalu hodnot posuvu, realizovaného ve směru působící síly $s_F \in < 0, s_M >$. Síla tedy roste z hodnoty 0 na maximální hodnotu $F_M = k \cdot s_M$. Během tohoto děje pak tato proměnná síla vykoná práci

$$W_F = \int_0^{s_M} F \mathrm{d}s_F = \int_0^{s_M} k s_F \mathrm{d}s_F = \frac{k s_M^2}{2} = \frac{F_M^2}{2k} = \frac{1}{2} F_M s_M. \tag{5.22}$$

Jestliže na uvažované těleso působí i další síly, je poloha působiště síly F ovlivněna i jejich velikostí. Jestliže se síla F nemění a dojde k deformaci tělesa v důsledku změn jiných sil, síla F vykoná práci na vyvolaném posuvu s_M (uvažovaném ve směru působení síly F) o velikosti

$$W_F = \int_0^{s_M} F \mathrm{d}s_F = \int_0^{s_M} \mathrm{d}s_F = F_M s_M. \tag{5.23}$$

Nyní se již dostáváme k obecnému odvození první Castigliánovy věty. Uvažujme těleso, pro které platí princip superpozice. Těleso je tedy ideálně pružné a platí pro něj Hookeův zákon. Těleso je zatíženo soustavou sil F_k a silových dvojic M_j (obr. 5.10).



Obr. 5.10

Deformační energie akumulovaná v tělese je U. Práce vnějších sil a silových dvojic je A. Platí $U = A$, tzn. vnější a vnitřní síly jsou v rovnováze.

Položme si otázku, jak se změní deformační energie U, změníme-li sílu F_k o $\mathrm{d}F_k$. Pro diferenciál U platí

$$\mathrm{d}U = \frac{\partial U}{\partial F_l}\mathrm{d}F_l + ... + \frac{\partial U}{\partial F_k}\mathrm{d}F_k + ... + \frac{\partial U}{\partial M_j}\mathrm{d}M_j. \tag{5.24}$$

Nenulové je pouze $\mathrm{d}F_k$, proto

$$\mathrm{d}U = \frac{\partial U}{\partial F_k} \cdot \mathrm{d}F_k. \tag{5.25}$$

Rovněž si můžeme klást otázku, jaký bude přírůstek práce vnějších sil, změní-li se F_k o $\mathrm{d}F_k$. Působí-li napřed jenom $\mathrm{d}F_k$, vykoná práci $\frac{1}{2}\mathrm{d}F_k \cdot \mathrm{d}s_k$, kde $\mathrm{d}s_k$ je posun působiště síly $\mathrm{d}F_k$. Přiložíme-li poté síly a silové dvojice F_1,..., F_k, M_1,..., M_k, vykonají práci A. Současně však $\mathrm{d}F_k$ vykoná práci $\mathrm{d}F_k \cdot \mathrm{d}s_k$, kde s_k je posuv působiště síly F_k. Vykonaná práce bude poté dána výrazem

$$A + \mathrm{d}A = A + \frac{1}{2}\mathrm{d}F_k \cdot \mathrm{d}s_k + \mathrm{d}F_k \cdot \mathrm{d}s_k. \tag{5.26}$$

Platí-li rovnost deformační energie a práce vnitřních sil, můžeme tuto rovnost rozšířit také na jejich diferenciály

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}A. \tag{5.27}$$

Po dosazení výrazů $\mathrm{d}U$ a $\mathrm{d}A$ do (5.27), pak

$$\frac{\partial U}{\partial F_k}\mathrm{d}F_k = \frac{1}{2}\mathrm{d}F_k\mathrm{d}s_k + \mathrm{d}F_k \cdot \mathrm{d}s_k. \tag{5.28}$$

Odtud

$$s_k = \frac{\partial U}{\partial F_k}. \tag{5.29}$$

Zobecněný posuv v určitém místě pružného, dokonale uloženého tělesa je dán parciální derivací deformační energie celého tělesa podle zobecnělé síly, působící v místě a ve směru hledaného posuvu.

Obdobným postupem bychom odvodili vztah pro natočení v určitém místě pružného, dokonale uchyceného tělesa

$$\varphi_j = \frac{\partial U}{\partial M_j}. \tag{5.30}$$

Definice 5.19. Posuv v určitém místě pružného, dokonale uloženého tělesa je dán parciální derivací celkové deformační energie tělesa podle síly, působící v místě a ve směru hledaného posuvu.

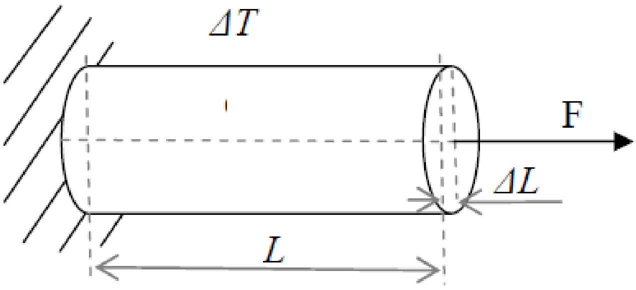
Definice 5.20. Úhel natočení v místě působení momentu silové dvojice M_j v rovině jeho působení je dán parciální derivací celkové deformační energie tělesa podle momentu silové dvojice M_j.

Castigliánova věta je velmi silným nástrojem pro stanovení posuvu a úhlu natočení v určitém místě pružného tělesa, což bude prezentováno v jednotlivých kapitolách základních případů namáhání.

Příklady k procvičení

1. Navrhněte jednoduchý experiment a způsob vyhodnocení pro odhad hodnoty modulu pružnosti v tahu E u drátu nebo tyče (pomůcka: tah, ohyb).

2. Určete prodloužení ocelové tyče ($E = 210000\ MPa$, $\alpha = 1,2\text{e-}5\ 1/°$) válcového průřezu ($d = 20\ mm$) délky ($L = 200\ mm$), která je zatížená osovou silou ($F = 20000\ N$) a došlo ke změně teploty o $\Delta T = 100°\text{C}$.



Obr. 5.11

Klíč k příkladům k procvičení

2) $\Delta L = 0,3\ mm$

Pojmy k zapamatování

- homogenní materiál
- elastický isotropní materiál
- Hookeův zákon pro prostý tah
- Hookeův zákon pro prostý smyk
- Poissonův zákon

- Hookeův zákon pro trojosou napjatost
- statické, kvazistatické zatěžování
- nízkocyklová únava
- vysokocyklová únava
- teplotní roztažnost

Kontrolní otázky

?

1. Co je isotropní materiál?
   (a) Materiál, mající stejné vlastnosti ve všech směrech.
   (b) Materiál, mající různé vlastnosti ve směru osy x a osy y.
   (c) Materiál, mající různé vlastnosti ve směru osy x, osy y i osy z.
2. Je splněna podmínka homogennosti materiálu u svaru?
   (a) Ano. Materiál svařovaného materiálu i svaru a jeho okolí má naprosto stejné vlastnosti i kvalitu.
   (b) Ne, materiál v místě svaru a jeho okolí se liší od svařovaného materiálu.
3. Je lano homogenní a isotropní?
   (a) Ano.
   (b) Ne.
4. Jaké hodnoty kromě skutečného tahového diagramu potřebujete k nalezení skutečného napětí při přetržení vzorku?
   (a) Žádné.
   (b) Modul pružnosti v tahu E.
   (c) Mez pevnosti R_m.
5. V čem se liší smluvní a skutečný tahový diagram?
   (a) V ničem, jsou stejné.
   (b) Smluvní tahový diagram respektuje změnu průřezu při prodlužování.
   (c) Skutečný tahový diagram respektuje změnu průřezu při prodloužení a koriguje velikost poměrného prodloužení na logaritmické prodloužení.

6. Jak velká bude trvalá deformace při přetržení u křehkého materiálu, např. litiny?
   (a) Zanedbatelná.
   (b) Velká a musíme ji respektovat.
7. Jak velký bude zkos u elementární krychle, zatížené třemi, stejně velkými hlavními napětími (tlaky)?
   (a) Nulový.
   (b) Zanedbatelný.
   (c) Odpovídající velikosti hlavních napětí – dopočteme dle Hookeova zákona pro 3 osou napjatost.
8. Odhadněte úhel zkroucení 1 m dlouhé hřídele průměru 100 mm, kdy bychom mluvili o malých deformacích (ve stupních)?
   (a) $\sim 100°$.
   (b) $> 1°$.
   (c) $< 1°$.
9. Dojde u křehkého materiálu (např. litina) k lomu u zkoušky tlakem?
   (a) Ano.
   (b) Ne.
10. Liší se hlavní směry napětí a deformace v lineární oblasti?
    (a) Ano.
    (b) Ne.
11. Jaký bude rozdíl hodnoty meze kluzu ve smluvním a skutečném tahovém diagramu?
    (a) Zanedbatelný.
    (b) Velký, musíme přepočíst.

Kapitola 6

Namáhání tahem a tlakem

Průvodce studiem

Mezi základní způsoby namáhání patří namáhání tahem nebo tlakem. Jeho znalost a aplikovatelnost je důležitou součástí znalostí inženýrů. V této kapitole budou na úvod shrnuty některé důležité poznatky předchozích kapitol, aby čtenář nemusel příliš listovat.

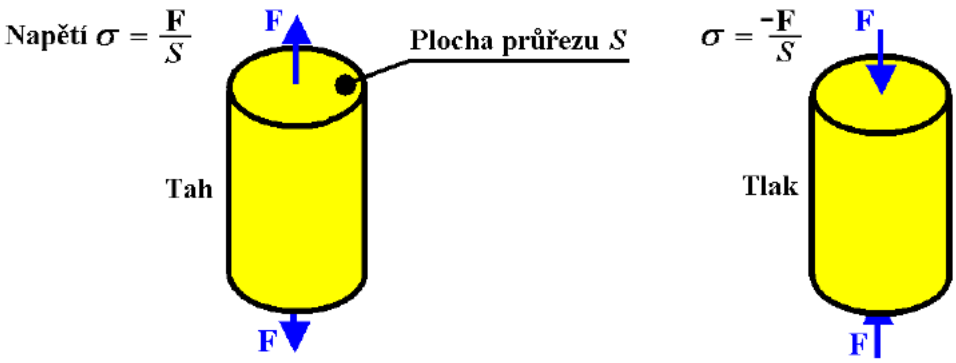
Cíle

Po prostudování této kapitoly budete:

- schopni stanovit průběh vnitřních normálových sil
- umět navrhovat průřezy a maximální zatížení strojních součástí při namáhání tahem/tlakem
- umět stanovit napětí a prodloužení v součástech, namáhaných tahem/tlakem
- řešit základní úlohy součásti, vystavené teplotním změnám při namáhání tahem/tlakem
- řešit základní úlohy příhradových konstrukcí

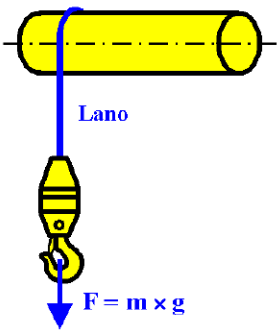
6.1 Úvod

Na obr. 6.1 je znázorněn element, vystavený přímému tahu respektive tlaku v podélném směru (jednoosá napjatost).

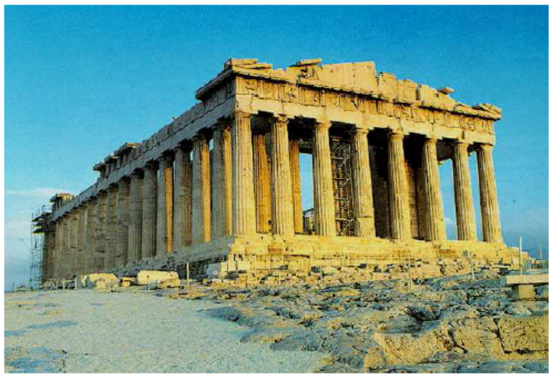


Obr. 6.1 Způsoby namáhání tahem a tlakem.

Typické ukázky zatížení tahem nebo tlakem jsou znázorněny také na obr. 6.2 (tahové namáhání lana od břemene) a 6.3 (tlakové namáhání nosných sloupů stavby – Athény v Řecku).



Obr. 6.2

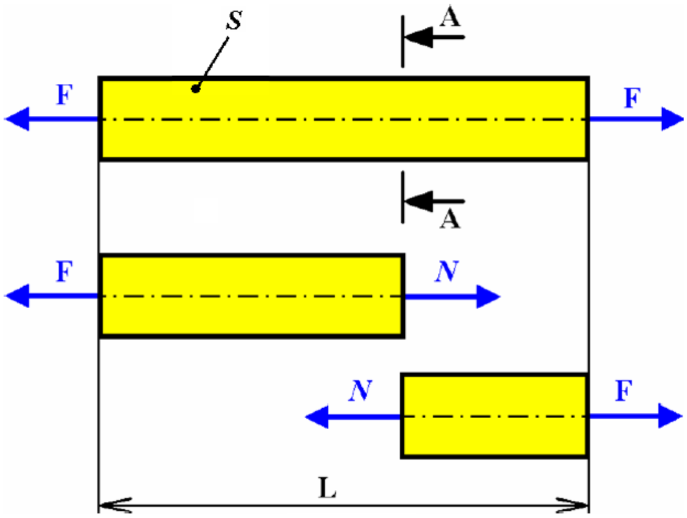


Obr. 6.3

6.2 Normálové síly (N) a tahové nebo tlakové napětí (σ)

Definice 6.1. Pokud je tyč (součást) vystavena působení vnějších axiálních sil (F [N]), pak se v součásti indukují vnitřní (normálové síly) N [N] , viz obr. 6.4. Tato skutečnost je v souladu s Newtonovými zákony mechaniky.

Řez A-A dělí tyč na dvě části. Zatížení, působící v každé části, je v rovnováze s příslušnými normálovými silami. Normálovou sílu lze definovat jako vnitřní výslednou složkovou sílu, působící kolmo na zkoumaný řez. Připomeňme metodu řezu na obr. 6.4, platí $N = F$.



Obr. 6.4

Definice 6.2. Tahové normálové síly jsou kladné a tlakové normálové síly jsou záporné (viz také znaménková konvence v kapitole 2), tahové normálové síly a napětí způsobují *prodloužení* délky příslušného úseku tyče, naopak tlakové normálové síly a napětí vyvolávají *zkrácení* délky úseku tyče.

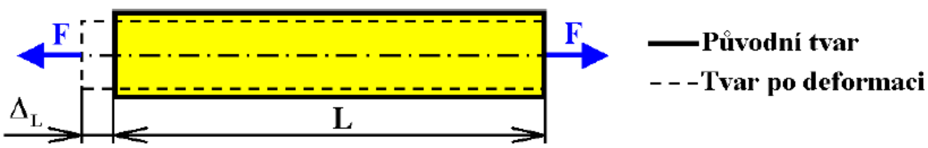
Definice normálových napětí σ $[Pa]$ již byly uvedeny v kapitole 2. Normálové (axiální) napětí, které působí v axiálním směru, lze obecně definovat poměrem

$$\sigma = \frac{\text{Normálová síla}}{\text{plocha}} = \frac{N}{S}, \tag{6.1}$$

kde S $[m^2]$ značí plochu příčného řezu. Vztah (6.1), dle obr. 6.4, platí pro konstantní normálovou sílu a konstantní plochu příčného průřezu (prizmatický prut).

6.3 Poměrné deformace při tahu a Hookeův zákon

Jestliže je tyč podrobena normálovým silám (vyvozujícím normálové napětí), pak se musí změnit její délka, viz obr. 6.5.



Obr. 6.5

Definice 6.3. Má-li tyč, konstantního průřezu, původní délku L $[m]$ a změnu délky (prodloužení nebo zkrácení) ΔL $[m]$, pak lze definovat také poměrnou podélnou deformaci ε [1] jako poměr prodloužení tyče a původní délky

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}. \tag{6.2}$$

Jedná se tedy o bezrozměrnou veličinu, ale zejména v experimentální pružnosti se používá jednotka microstrain $\mu\varepsilon = \varepsilon \cdot 10^{-6}$.

V případech, kdy jsou napětí a poměrné deformace proměnlivé po průřezu, pak platí zobecněný vztah

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\Delta L}{\mathrm{d}L} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}. \tag{6.3}$$

Za předpokladu, že homogenní a isotropní materiál se chová pružně a lineárně, viz kapitola 5, platí Hookeův zákon pro jednoosou napjatost

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \tag{6.4}$$

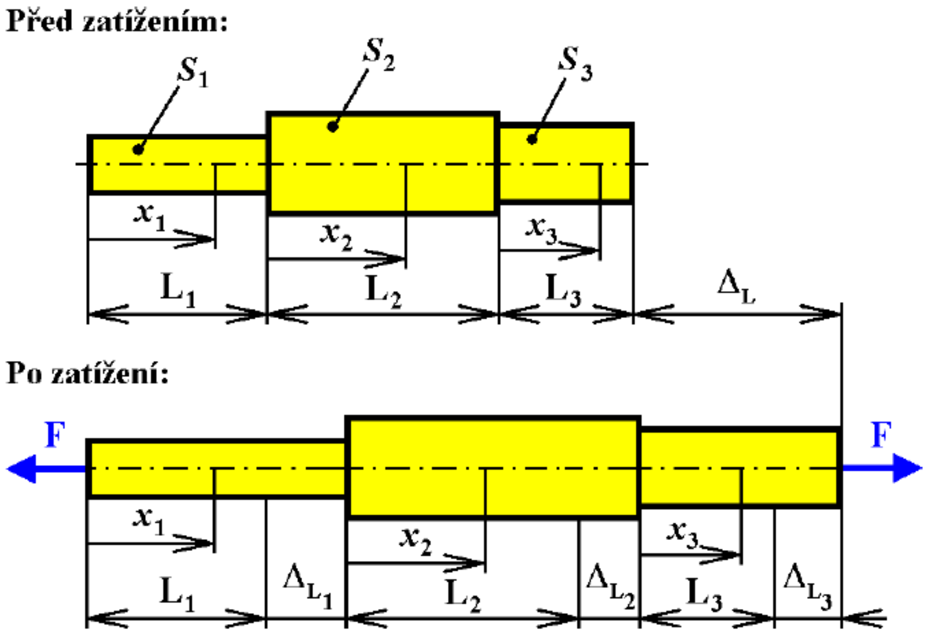
kde konstanta E $[Pa]$ je nazývaná *modul pružnosti v tahu či tlaku* nebo *Youngův modul*.

Pro přímou tyč konstantního průřezu, zatíženou konstantní axiální silou F, viz obr. 6.5, lze odvodit z rovnice (6.2) vztah $\Delta L = \varepsilon L$, kde po dosazení (6.4) a (6.1) vyplyne

$$\Delta L = \frac{\sigma L}{E} = \frac{NL}{ES}, \tag{6.5}$$

což v našem případě vede ke vztahu $\Delta L = \frac{FL}{ES}$.

Na obr. 6.6 je znázorněná tyč se skokovou (nespojitou) změnou průřezu, která je na obou koncích zatížená konstantní silou F.



Obr. 6.6

Pro normálové síly, napětí a poměrné deformace pak na třech příslušných úsecích x_1, x_2, x_3 $[m]$ platí

$$N(x_1) = N(x_2) = N(x_3) = F \ ,$$

$$\sigma(x_1) = \frac{N(x_1)}{S_1} = \frac{F}{S_1} \ , \quad \sigma(x_2) = \frac{N(x_2)}{S_2} = \frac{F}{S_2} \ , \quad \sigma(x_3) = \frac{N(x_3)}{S_3} = \frac{F}{S_3} \ ,$$

$$\varepsilon(x_1) = \frac{\sigma(x_1)}{E} = \frac{F}{ES_1} \ , \quad \varepsilon(x_2) = \frac{\sigma(x_2)}{E} = \frac{F}{ES_2} \ , \quad \varepsilon(x_3) = \frac{\sigma(x_3)}{E} = \frac{F}{ES_3} \ ,$$

kde lokální souřadnice platí na intervalech $x_1 \in (0; L_1)$, $x_2 \in (0; L_2)$ a $x_3 \in (0; L_3)$.

Změny délek ΔL_1, ΔL_2 a ΔL_3 $[m]$ každého úseku (obr. 6.6) jsou dané modifikací vztahu (6.5), tedy

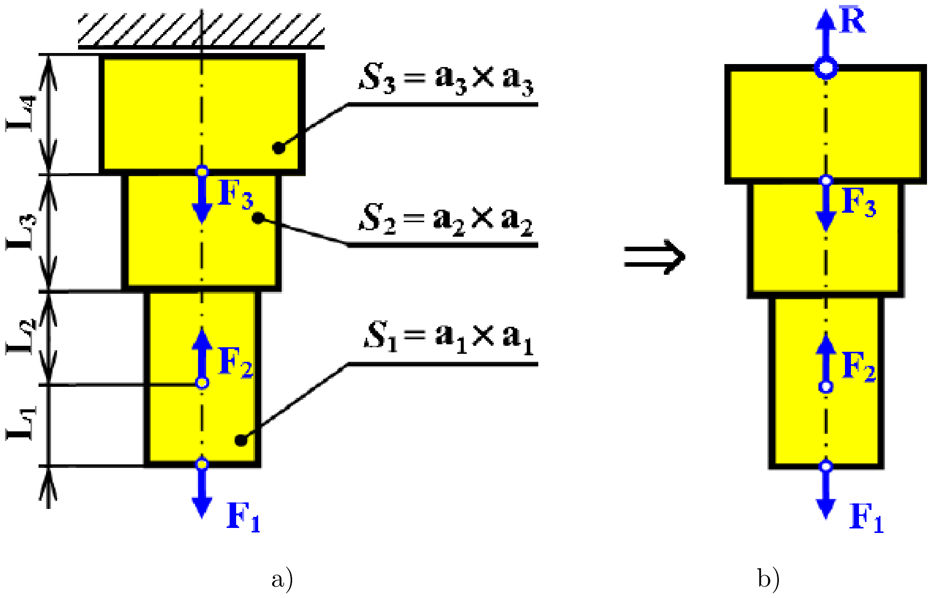
$$\Delta L_1 = \frac{N(x_1)L_1}{ES_1} = \frac{FL_1}{ES_1} \ , \quad \Delta L_2 = \frac{N(x_2)L_2}{ES_2} = \frac{FL_2}{ES_2} \ , \quad \Delta L_3 = \frac{N(x_3)L_3}{ES_3} = \frac{FL_3}{ES_3} .$$

Výsledná změna délky tyče je dána algebraickým součtem příslušných dílčích prodloužení

$$\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2 + \Delta L_3 = \frac{F}{E}\left(\frac{L_1}{S_1} + \frac{L_2}{S_2} + \frac{L_3}{S_3}\right). \tag{6.6}$$

Rovnice (6.6) platí dostatečně přesně pro *teorii malých deformací* (tj. není vhodná pro velké deformace např. elasto-plastické úlohy).

Příklad 6.1. Určete reakční sílu R v uchycení, průběh normálových sil, napětí a celkové prodloužení osazené tyče čtvercového průřezu z obr. 6.7 a). Vliv vlastní tíhy a vliv vrubových účinků na napjatost v osazení tyče neuvažujte. Dáno: $a_1 = 28\ mm$, $a_2 = 32\ mm$, $a_3 = 39\ mm$, $E = 2\cdot 10^5\ MPa$, $F_1 = 40\ kN$, $F_2 = 70\ kN$, $F_3 = 90\ kN$, $L_1 = 80\ mm$, $L_2 = 100\ mm$, $L_3 = 150\ mm$, $L_4 = 140\ mm$.



Obr. 6.7

Ze zadání vyplývá pro plochy průřezu: $S_1 = a_1^2 = 28^2 = 784\ mm^2$, $S_2 = a_2^2 = 32^2 = 1024\ mm^2$, $S_3 = a_3^2 = 39^2 = 1521\ mm^2$.

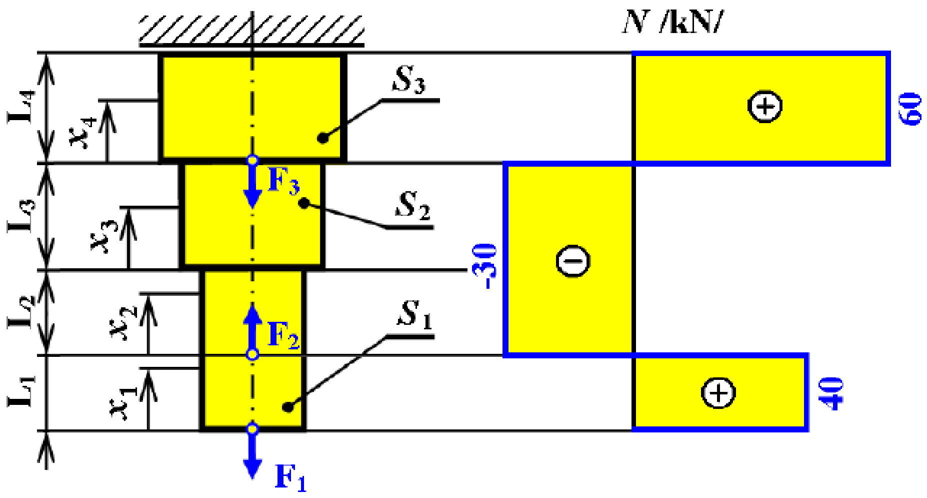
Pro reakční sílu v uchycení vyplývá z podmínky rovnováhy dle obr. 6.7 b) $R + \sum_{i=1}^{3} F_i = 0$, tj. $R = F_1 - F_2 + F_3 = 4\cdot 10^4 - 7\cdot 10^4 + 9\cdot 10^4 = 6\cdot 10^4\ N$.

Dle obr. 6.8 lze definovat intervaly lokálních souřadných systémů $x_1 \in (0; L_1)$, $x_2 \in (0; L_2)$, $x_3 \in (0; L_3)$ a $x_4 \in (0; L_4)$ a následně také stanovit příslušné normálové síly

$$
\begin{aligned}
N(x_1) &= F_1 = 4 \cdot 10^4 \ N, \\
N(x_2) &= N(x_3) = F_1 - F_2 = 4 \cdot 10^4 - 7 \cdot 10^4 = -3 \cdot 10^4 \ N, \\
N(x_4) &= F_1 - F_2 + F_3 = 4 \cdot 10^4 - 7 \cdot 10^4 + 9 \cdot 10^4 = 6 \cdot 10^4 \ N
\end{aligned}
$$

a napětí

$$
\begin{aligned}
\sigma(x_1) &= \frac{N(x_1)}{S_1} = \frac{4 \cdot 10^4}{784} = 51,02 \ MPa, \\
\sigma(x_2) &= \frac{N(x_2)}{S_1} = \frac{-3 \cdot 10^4}{784} = -38,27 \ MPa, \\
\sigma(x_3) &= \frac{N(x_3)}{S_2} = \frac{-3 \cdot 10^4}{1024} = -29,30 \ MPa, \\
\sigma(x_4) &= \frac{N(x_4)}{S_3} = \frac{6 \cdot 10^4}{1521} = 39,45 \ MPa.
\end{aligned}
$$



Obr. 6.8

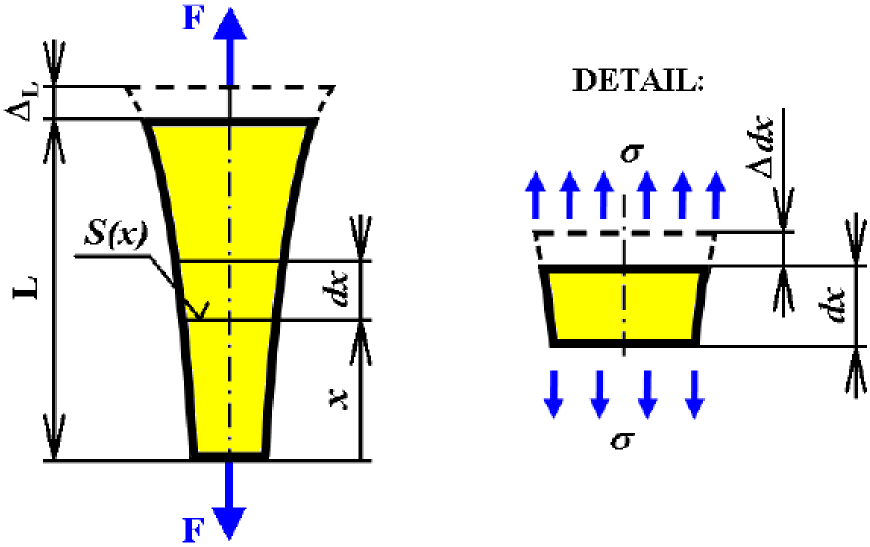
Získaný průběh normálových sil je znázorněn na obr. 6.8. Celkové prodloužení ΔL tyče je dáno superpozicí dílčích účinků (modifikací rovnice 6.6)

$$\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2 + \Delta L_3 + \Delta L_4 = \frac{N(x_1) \cdot L_1}{EA_1} + \frac{N(x_2) \cdot L_2}{EA_1} + \frac{N(x_3) \cdot L_3}{EA_2} +$$
$$+ \frac{N(x_4) \cdot L_4}{EA_3} = \frac{\sigma(x_1) \cdot L_1 + \sigma(x_2) \cdot L_2 + \sigma(x_3) \cdot L_3 + \sigma(x_4) \cdot L_4}{E} =$$
$$= \frac{51,02 \cdot 80 + (-38,27) \cdot 100 + (-29,3) \cdot 150 + 39,45 \cdot 140}{2 \cdot 10^5} = 6,92 \cdot 10^{-3}\ mm.$$

▲

Pro tyč proměnlivého průřezu, zatíženou na konci silami F (obr. 6.9), kde $S = S(x)$ je známá funkce souřadnice x, platí

$$N(x) = F, \quad \sigma(x) = \frac{N(x)}{S(x)} = \frac{F}{S(x)}. \tag{6.7}$$



Obr. 6.9

Pro odvození poměrné deformace je vhodné vyjmout z tyče element délky dx (obr. 6.9). Pro poměrné deformace pak platí: $\varepsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{E}$.

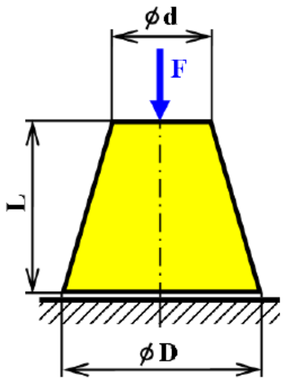
Pro elementární změnu tyče pak platí diferenční vztah

$$\Delta \mathrm{d}x = \frac{\sigma(x)}{E}\mathrm{d}x. \tag{6.8}$$

Výsledné prodloužení tyče ΔL lze získat součtem všech elementárních účinků

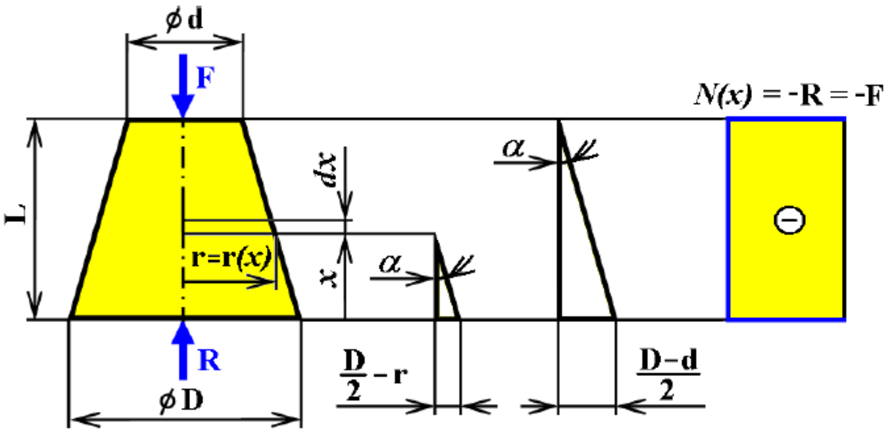
$$\Delta L = \int_0^L \frac{\sigma(x)}{E}\mathrm{d}x = \frac{1}{E}\int_0^L \frac{N(x)}{S(x)}\mathrm{d}x = \frac{F}{E}\int_0^L \frac{\mathrm{d}x}{S(x)}\mathrm{d}x. \tag{6.9}$$

Příklad 6.2. Odvoďte vztahy pro normálovou sílu, napětí a celkové prodloužení proměnlivého kruhového průřezu (komolý kužel), viz obr. 6.10. Dáno: F $[N]$, E $[MPa]$, D $[mm]$, d $[mm]$, L $[mm]$.



Obr. 6.10

Z obr. 6.11 lze odvodit pro reakci a normálovou sílu vztahy $R = F$, $N(x) = -R = -F$.



Obr. 6.11

Příčná plocha průřezu $S = S(x)$ je proměnlivá. Nejprve je vhodné odvodit lineární závislost poloměru $r = r(x)$ z podobnosti trojúhelníků znázorněných na obr. 6.11

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{D}{2} - r}{x} = \frac{\frac{D-d}{2}}{L} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1}{2}\left(D - \frac{D-d}{L}x\right).$$

Pro plochu průřezu potom platí kvadratická závislost

$$S(x) = \pi r^2 = \frac{\pi}{4}\left(D - \frac{D-d}{L}x\right)^2$$

a tlakové napětí v tyči $\sigma(x)$ je dáno závislostí dle hyperboly 2. řádu

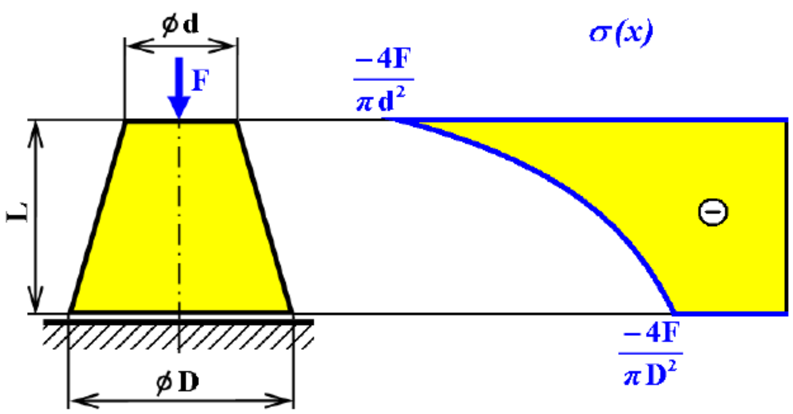
$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{S(x)} = \frac{-4F}{\pi\left(D - \frac{D-d}{L}x\right)^2}.$$

Hodnoty napětí v bodech $x = 0$, $x = \frac{L}{2}$ a $x = L$ jsou pak dány vztahy

$$\sigma(x=0) = \frac{N(x=0)}{A(x=0)} = \frac{-4F}{\pi D^2}, \quad \sigma(x=\frac{L}{2}) = \frac{N(x=\frac{L}{2})}{A(x=\frac{L}{2})} = \frac{-4F}{\pi\left(\frac{D+d}{2}\right)^2},$$

$$\sigma(x=L) = \frac{N(x=L)}{A(x=L)} = \frac{-4F}{\pi d^2}.$$

Průběh funkce $\sigma(x)$ je znázorněna na obr. 6.12.



Obr. 6.12

Celkové zkrácení tyče ΔL lze stanovit např. ze vztahu 6.9

$$\Delta L = \int_0^L \frac{\sigma(x)\mathrm{d}x}{E} = \frac{-4F}{E\pi}\int_0^L \frac{\mathrm{d}x}{\left(D - \frac{D-d}{L}x\right)^2} =$$
$$= \frac{-4F}{E\pi}\left[\frac{L^2}{(D-d)[LD+(d-D)x]}\right]_0^L = \frac{-4F}{E\pi}\left[\frac{L^2}{(D-d)Ld} - \frac{L^2}{(D-d)LD}\right] =$$
$$= \frac{-4FL}{E\pi(D-d)}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{D}\right) = \frac{-4FL}{E\pi Dd}.$$

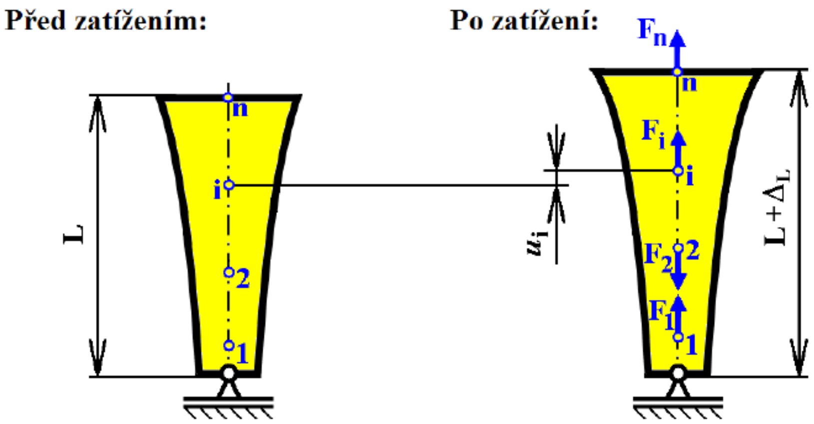
▲

6.4 Využití Castigliánovy věty

V kapitole 5.5 byly odvozeny vztahy pro deformační energii u jednoosého namáhání a Castigliánovy věty. Nyní si ukážeme praktickou aplikaci této energetické metody u prutů namáhaných tahem.

Definice 6.4. *Castigliánova věta*, která patří mezi základní energetické principy mechaniky, může být (pro axiálně zatížené členy) vysvětlena takto: *Pokud lze deformační energii U vyjádřit v závislosti na vnějším zatížení, pak její parciální derivace dle vnější síly F_i, dává hodnotu posunutí u_i v bodě i (tj. v místě působiště síly F_i). Kladná hodnota posunutí u_i je ve směru síly F_i, viz obr. 6.13*. Platí tedy

$$u_i = \frac{\partial U}{\partial F_i}. \tag{6.10}$$



Obr. 6.13

Deformační energii v případě jednoosého namáhání lze vyjádřit takto

$$U = \int_V U_0 \mathrm{d}V = \frac{1}{2E} \int_V \sigma^2 \mathrm{d}V = \frac{1}{2E} \int_V \frac{N^2}{S^2} \mathrm{d}V, \tag{6.11}$$

kde elementární objem $\mathrm{d}V = S\,\mathrm{d}x$ a plocha $S = S(x)$ může být funkce souřadnice x

$$U = \frac{1}{2E} \int_L \frac{N^2}{S^2} S\mathrm{d}x = \frac{1}{2E} \int_L \frac{N^2}{S} \mathrm{d}x. \tag{6.12}$$

Dosazením vztahu (6.12) do (6.10) vyplyne

$$u_i = \frac{\partial}{\partial F_i} \left(\frac{1}{2E} \int_L \frac{N^2}{S} \mathrm{d}x \right) = \frac{1}{2E} \int_L \frac{2N}{S} \frac{\partial N}{\partial F_i} \mathrm{d}x = \frac{1}{E} \int_L \frac{N}{S} \frac{\partial N}{\partial F_i} \mathrm{d}x. \tag{6.13}$$

Při aplikaci *Castigliánových vět* musí být deformační energie vyjádřena jako funkce vnějšího zatížení. Další informace o Castigliánových větách lze nalézt v kapitole 8.

Příklad 6.3. Alternativní způsob výpočtu zkrácení ΔL komolého kužele (viz obr. 6.10, příklad 6.2) zatíženého tlakovou silou je aplikace Castiglianovy věty. Z modifikace rovnice (6.13) se získá

$$\Delta L = \frac{1}{E} \int_0^L \frac{N(x)}{A(x)} \frac{\partial N(x)}{\partial F} \mathrm{d}x,$$

kde $N(x) = -F$ a $\frac{\partial N(x)}{\partial F} = -1$. Pak je zřejmé, že platí

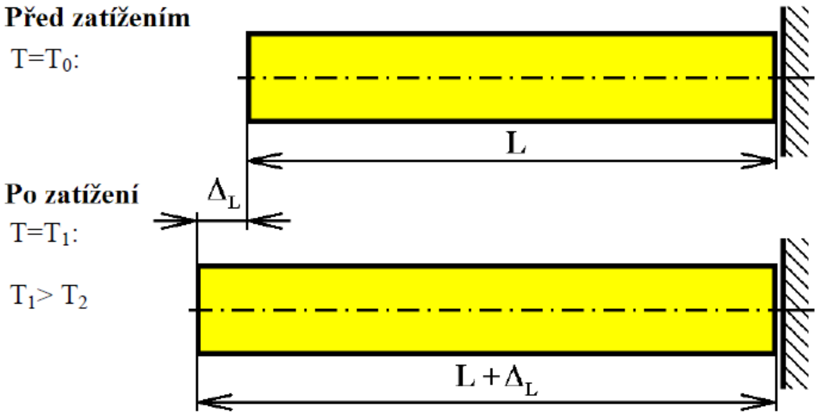
$$\Delta L = \frac{1}{E} \int_0^L \frac{-F}{\frac{\pi}{4}\left(D - \frac{D-d}{L}x\right)^2} \cdot (-1)\,\mathrm{d}x = \frac{4F}{E\pi} \int_0^L \frac{\mathrm{d}x}{\left(D - \frac{D-d}{L}x\right)^2} = \frac{4FL}{E\pi Dd},$$

přičemž kladná hodnota zkrácení součásti je v tomto případě ve směru síly F.

▲

6.5 Vliv teploty na napjatost a deformace v tahu a tlaku

Jestliže se tyč, které není bráněno v podélné deformaci, rovnoměrně ohřeje (nebo ochladí) z počáteční teploty T_0 [°C] nebo $[K]$ na konečnou teplotu T_1 (tj. došlo ke změně teploty $\Delta T = T_1 - T_0$), viz obr. 6.14.



Obr. 6.14

Pak pro prodloužení (nebo zkrácení) ΔL a osové napětí σ platí vztahy

$$\Delta L = \alpha_t L \Delta T, \tag{6.14}$$

$$\sigma = 0, \tag{6.15}$$

kde α_t [$^\circ$C^{-1}] nebo [K] je lineární koeficient teplotní roztažnosti (součinitel teplotní roztažnosti), jehož charakteristické hodnoty pro vybrané materiály lze nalézt v tab. 6.1.

Materiál	**Součinitel teplotní roztažnosti** α_t [$^\circ$**C**$^{-1}$]
Hliníkové slitiny	$\approx 23 \cdot 10^{-6}$
Mosaz	$19,1 \div 21,2 \cdot 10^{-6}$
Bronz	$18 \div 21 \cdot 10^{-6}$
Litina	$9,9 \div 12 \cdot 10^{-6}$
Beton	$7 \div 14 \cdot 10^{-6}$
Měď a měděné slitiny	$16,6 \div 17,6 \cdot 10^{-6}$
Sklo	$5 \div 14 \cdot 11^{-6}$
Nylon	$70 \div 14 \cdot 140^{-6}$
Polyethylen	$140 \div 290 \cdot 10^{-6}$
Horniny	$5 \div 14 \cdot 9^{-6}$
Elastomery (guma)	$130 \div 200 \cdot 10^{-6}$
Ocel	$10 \div 18 \cdot 10^{-6}$
Titanové slitiny	$8,1 \div 11 \cdot 10^{-6}$
Wolfram	$\approx 4,3 \cdot 10^{-6}$

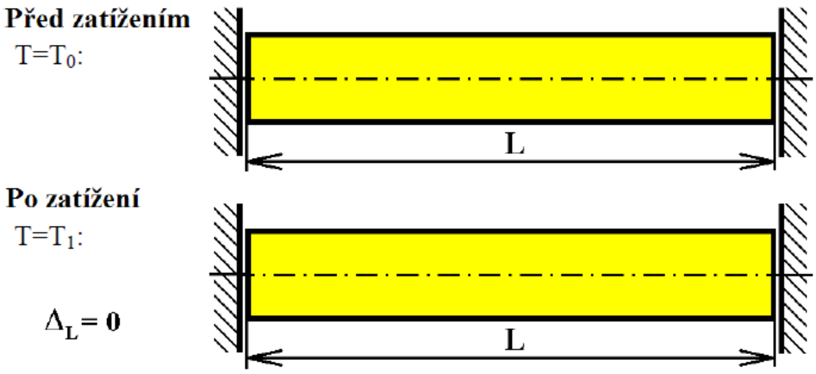
Tab. 6.1

Pro novou délku tyče pak platí

$$L^* = L + \Delta L = L + \alpha_t L \Delta T = L \cdot (1 + \alpha_t \Delta T). \tag{6.16}$$

Pokud je tyči bráněno podélné deformaci absolutně tuhými (ideálními) podporami (viz např. obr. 6.15) a nedojde k podélnému vybočení tyče, pak je zřejmé, že prodloužení tyče je nulové

$$\Delta L = 0. \tag{6.17}$$



Obr. 6.15

Prodloužení (nebo zkrácení) tyče je tedy zabráněno, což v tyči indukuje tlakové (nebo tahové) napětí, které je úměrné prodloužení volné tyče (bez podpor), viz vztah (6.2). Pro poměrnou deformaci a napětí pak vyplyne

$$\varepsilon = \frac{-\Delta L}{L} = -\alpha_t \Delta T, \tag{6.18}$$

$$\sigma = E\varepsilon = -E\alpha_t \Delta T. \tag{6.19}$$

Další informace a množství řešených příkladů lze nalézt v učebnici [14].

6.6 Zatížení tíhovou silou v axiálním směru

Na obr. 6.16 je jednostranně uchycená tyč délky L s konstantní plochou příčného průřezu S . Tyč, která je z materiálu o hustotě ρ $[kg\, m^{-3}]$, je vystavena působení gravitace (symbol „ $\vec{g}$ ”). Gravitační síla je úměrná gravitačnímu zrychlení g $[ms^{-2}]$.

Tyč je vystavena pouze působení vlastní tíhy. Pro reakční sílu R $[N]$ v podpoře pak (dle Newtonova zákona a obr. 6.16) platí

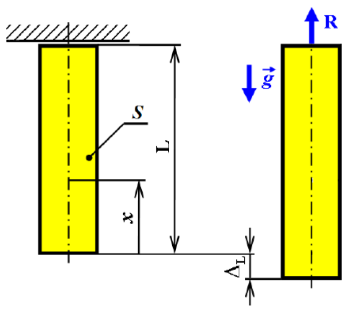
$$R = mg = \rho V g = \rho g S L,$$

kde m $[kg]$ je hmotnost tyče a $V = SL$ je objem tyče.

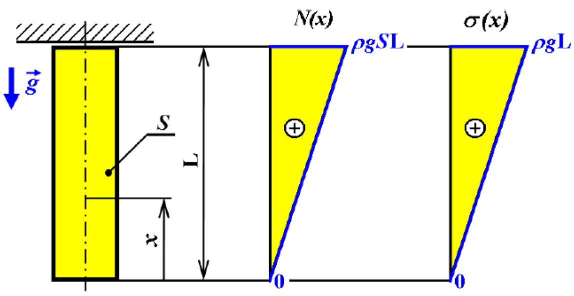
Pro normálovou sílu $N(x)$ a napětí $\sigma(x)$ ve vzdálenosti $x \in (0; L)$, viz obr. 6.16, platí

$$N(x) = \rho g S x, \quad \sigma(x) = \frac{N(x)}{S} = \frac{\rho g S x}{S} = \rho g x, \tag{6.20}$$

kde $\rho S x$ je hmotnost úseku délky x.



Obr. 6.16



Obr. 6.17

Průběh normálových sil a napětí je znázorněn na obr. 6.17. Je zřejmé, že platí

$$N(x = 0) = 0, \quad N(x = L) = \rho g S L, \quad \sigma(x = 0) = 0, \quad \sigma(x = L) = \rho g L.$$

Celkové prodloužení ΔL je dané modifikací vztahu (6.9)

$$\Delta L = \int_0^L \frac{\sigma(x)}{E} \mathrm{d}x = \frac{\rho g}{E} \int_0^L x \mathrm{d}x = \frac{\rho g}{E} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^L = \frac{\rho g L^2}{2E}. \tag{6.21}$$

Vlastní tíha (gravitace) může být v některých úlohách tahu a tlaku zanedbána, protože obvykle má menší vliv na výslednou napjatost než další zatížení. U rozměrných součástí nebo tam, kde je vlastní tíha významným zatížením (např. budovy aj.) však zanedbání vlivu vlastní tíhy může mít katastrofální důsledky.

6.7 Řešení staticky neurčitých úloh

Definice 6.5. Úlohy staticky neurčité jsou takové, u kterých počet vazebných účinků převyšuje počet rovnic rovnováhy.

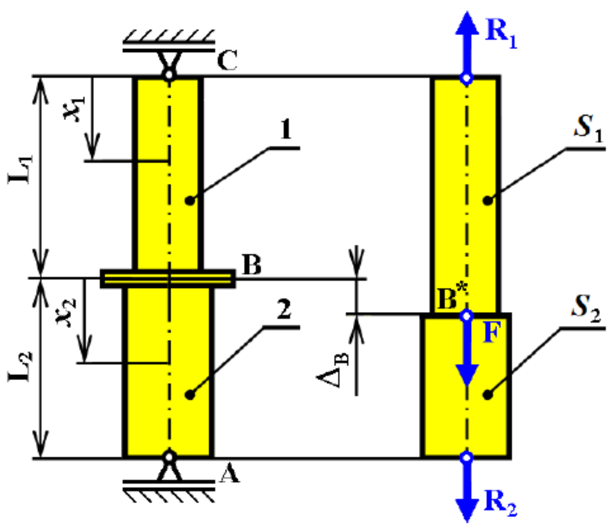
Stručný postup řešení (omezení na základní úlohy analytickým způsobem řešení):

1. Sestavení statických rovnic rovnováhy (statická stránka úlohy).
2. Sestavení deformačních podmínek (geometrická stránka úlohy).
3. Vyjádření deformací v deformační podmínce.
4. Řešení soustavy statických a deformačních podmínek (syntéza úlohy).

ad 2) Počet potřebných deformačních podmínek odpovídá stupni statické neurčitosti, který stanovíme z rovnice

$$\begin{aligned}&\textbf{počet deformačních podmínek} =\\ &\qquad = \textbf{počet neznámých reakcí} - \textbf{počet rovnic rovnováhy}.\end{aligned} \tag{6.22}$$

Příklad 6.4. Ocelová trubka „1” je připojena k trubce „2” přes přírubu „B”, na kterou působí síla F, viz obr. 6.18. Soustava je na koncích uchycena v bodech „A” a „C” pomocí absolutně tuhých podpor.



Obr. 6.18

Určete reakce v uchycení, průběhy normálových sil a napětí. Určete také posunutí bodu „B". Vliv vlastní tíhy, způsob spojení trubek a možné vybočení trubek neuvažujte. Dáno: $L_1 = 1500\ mm$, $L_2 = 1000\ mm$, $S_1 = 800\ mm^2$, $S_2 = 1500\ mm^2$, $F = 100\ kN$, $E = 2 \cdot 10^5\ MPa$, $\sigma_{DOV}^{TAH} = \sigma_{DOV}^{TLAK} = 175\ MPa$.

Postup řešení je stručně naznačen v následujícím textu.

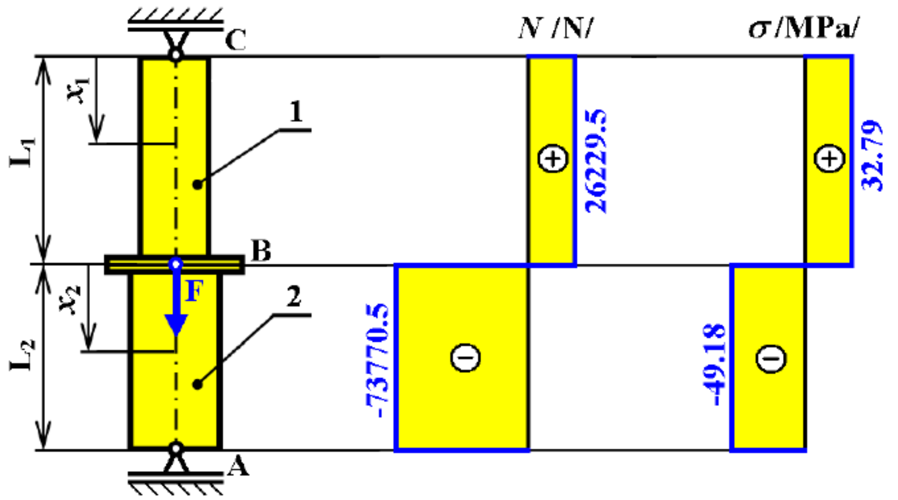
Z rovnic rovnováhy sil vyplyne po uvolnění: $R_1 - R_2 = F$.

Dle vztahu (6.22) je zřejmé, že úloha je tedy 1× staticky neurčitá a je nutno sestavit deformační podmínku, která souvisí s celkovým prodloužením soustavy ΔL, které musí být nulové. Platí tedy deformační podmínka: $\Delta L = \Delta_1 + \Delta_2 = \frac{N(x_1)L_1}{ES_1} + \frac{N(x_2)L_2}{ES_2} = 0$. Pro normálové síly, na úsecích $x_i \in (0; L_i)$, platí vztahy: $N(x_1) = R_1$, $N(x_2) = R_1 - F$. Pak je zřejmé, že: $\frac{1}{E}\left[\frac{R_1L_1}{S_1} + \frac{(R_1-F)L_2}{S_2}\right] = 0$, kde $\frac{1}{E} \neq 0$. Z upravené deformační podmínky $\frac{R_1L_1}{S_1} + \frac{(R_1-F)L_2}{S_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_1 = \frac{FS_1L_2}{S_1L_2+S_2L_1} = \frac{10^5 \cdot 800 \cdot 10^3}{800 \cdot 10^3 + 1500 \cdot 1500} = 26229,5\ N$.

Dopočtením z rovnic silové rovnováhy vyplyne: $R_2 = R_1 - F = 26229,5 - 10^5 = -73770,5\ N$.

Průběh normálových sil a napětí $\sigma(x_i = \frac{N(x_i)}{A_i})$ je zakreslen na obr. 6.19, kde

$$\sigma(x_1) = 32,79\ MPa, \quad \sigma(x_2) = -49,18\ MPa. \tag{6.23}$$



Obr. 6.19

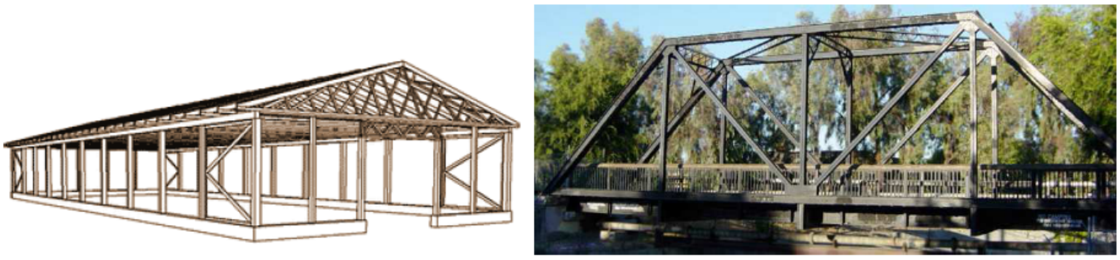
Pro posunutí bodu „B" platí

$$\Delta B = \Delta 1 = \frac{N(x_1)L_1}{ES_1} = \frac{26229,5 \cdot 1500}{2 \cdot 10^5 \cdot 800} = 0,25\ mm.$$

▲

6.8 Úvod do příhradových konstrukcí

Definice 6.6. Soustava, složená z prutů, spojených v kloubech (styčnících), se nazývá příhradová konstrukce, viz např. obr. 6.20.



Obr. 6.20 Typické aplikace příhradových konstrukcí.

Spoje prutů jsou obvykle prováděny čepy, šrouby, svary, nýty, hřebíky, lepením či jinými způsoby, viz např. obr. 6.21.

Obr. 6.21 Příklady spojení dřevěných konstrukcí.

Definice 6.7. *Ideální styčník* je bod, kde se spojují, začínají nebo končí pruty.

Definice 6.8. *Prut* je těleso:

- jehož příčné rozměry jsou mnohokrát menší než jeho délka (podobně jako nosník)
- jež je k ostatním tělesům vázáno kloubovými vazbami
- jež není zatíženo jinak, než vazbovými silami, přenášenými kloubovými vazbami (ve styčníku)

Definice 6.9. *Ideální prutová konstrukce* se skládá z ideálních styčníků (jednoduché klouby bez tření) a ideálních prutů, které přenášejí pouze tahové nebo tlakové axiální síly, přičemž vnější zatížení působí pouze ve styčnících. Prutové konstrukce *mohou být rovinné nebo prostorové*, dále *staticky určité* nebo *staticky neurčité*.

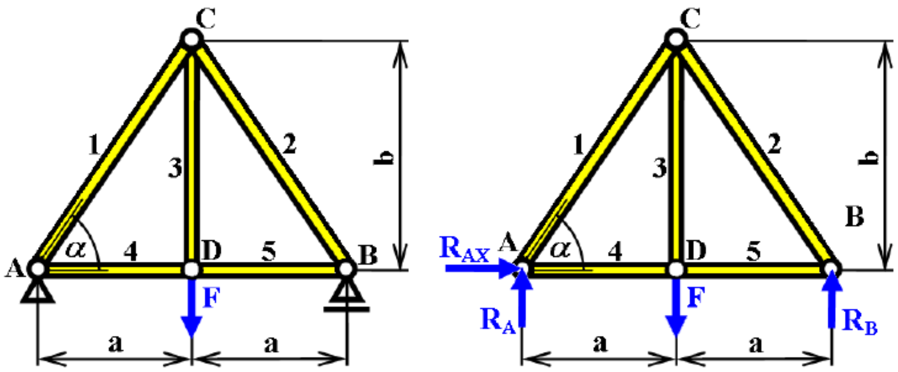
Z učebnic statiky je známo, že příhradová konstrukce je **staticky určitá**, pokud je (**počet prutů**) = 2×(**počet styčníků**) – (**počet reakcí**).

Příhradová (prutová) konstrukce je **staticky neurčitá**, pokud platí, že: (**počet prutů**) > 2×(**počet styčníků**) – (**počet reakcí**).

Příhradová (prutová) konstrukce je **nestabilní**, pokud platí podmínka, že: (**počet prutů**) < 2×(**počet styčníků**) – (**počet reakcí**). Tj. příhradová konstrukce má statické řešení jen tehdy, není-li konstrukce mechanismem.

Normálové síly v prutech staticky určité prutové konstrukce lze stanovit analyticky z rovnic rovnováhy ve styčnících a rovnic rovnováhy celé soustavy. Existuje mnoho metod řešení prutových konstrukcí, avšak v této učebnici je předvedena pouze styčníková metoda.

Příklad 6.5. Úlohou je stanovit reakce, normálové síly a napětí v ideální rovinné příhradové konstrukci (obr. 6.22 – vlevo) s rozměry $a = 0,75\ m$, $b = 1\ m$. Konstrukce je ve styčníku „D” zatížena vnější silou $F = 30\ kN$. Konstrukce je staticky určitá a je složena z pěti prutů s příslušnými příčnými plochami průřezu $S_1 = S_2 = 400\ mm^2$, $S_3 = 600\ mm^2$, $S_4 = S_5 = 400\ mm^2$.



Obr. 6.22

Po uvolnění (obr. 6.22 – vpravo) lze stanovit reakční síly v podporách, přičemž na prutovou soustavu lze pohlížet jako na jedno těleso. Z axiomů rovnováhy sil a momentů celé soustavy vyplývá

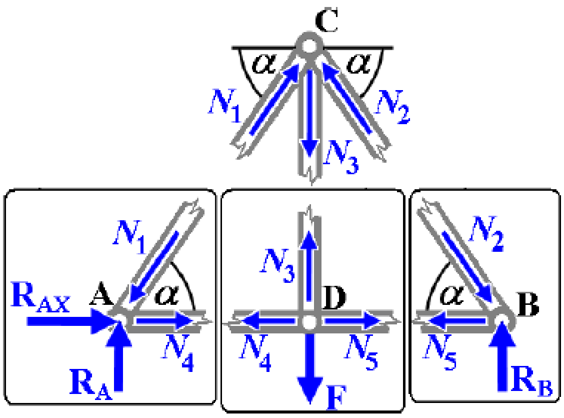
$$\left.\begin{array}{lll} \sum F_{Xi} = 0 & \Rightarrow & R_{AX} = 0, \\ \sum M_{Ai} = 0 & \Rightarrow & R_B \cdot 2a - F \cdot a = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B = \frac{F}{2}, \\ \sum F_{Yi} = 0 & \Rightarrow & R_A + R_B - F = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A = F - R_B \\ & \Rightarrow & R_A = F - \frac{F}{2} = \frac{F}{2}. \end{array}\right\} \qquad (6.24)$$

Ze zadání (obr. 6.22 – vlevo) vyplývá pro úhel α

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{b}{a} = \frac{1}{0,75}\frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 53,1301^\circ. \qquad (6.25)$$

Vztahy pro reakce (6.26) a úhel (6.25) platí za předpokladu teorie malých deformací a teorie 1. řádu (tj. změny úhlu α způsobené silou F lze zanedbat – lze říci, že úhel α se nemění), blíže viz učebnice statiky.

Normálové síly N_i v prutech ($i = 1, 2, ..., 5$) lze stanovit např. styčníkovou metodou (obr. 6.23).



Obr. 6.23 Styčníková metoda (stanovení normálových sil)

Síly N_1 a N_4 lze stanovit ze silové rovnováhy ve styčníku „A" (obr. 6.23)

$$\left.\begin{array}{l} \sum F_{Xi_{\text{v bodě „A"}}} = 0 \;\Rightarrow\; R_{AX} + N_4 - N_1 \cos\alpha = 0 \\ \Rightarrow\; N_4 = N_1 \cos\alpha - R_{AX} \;\Rightarrow\; N_4 = \frac{F \cos\alpha}{2 \sin\alpha} - 0 = \frac{F}{2 \operatorname{tg}\alpha} \\ \Rightarrow\; N_4 = \frac{30}{2 \cdot \frac{4}{3}} = 11,25\; kN, \\ \\ \sum F_{Yi_{\text{v bodě „A"}}} = 0 \;\Rightarrow\; R_A - N_1 \sin\alpha = 0 \;\Rightarrow\; N_1 = \frac{R_A}{\sin\alpha} = \frac{F}{2 \sin\alpha} \\ \Rightarrow\; N_1 = \frac{30}{2 \cdot \sin 53{,}1301^\circ} = 18,75\; kN. \end{array}\right\} \tag{6.26}$$

Obdobně lze stanovit síly N_3 a N_5 (ze silové rovnováhy ve styčníku „D") a N_2(ze silové rovnováhy ve styčníku „B"), viz obr. 6.23

$$\left.\begin{array}{l} \sum F_{Xi_{\text{v bodě „D"}}} = 0 \;\Rightarrow\; -N_4 + N_5 = 0 \\ \Rightarrow\; N_4 = N_5 = \frac{F}{2 \operatorname{tg}\alpha} = 11,25\; kN, \\ \\ \sum F_{Yi_{\text{v bodě „D"}}} = 0 \;\Rightarrow\; N_3 - F = 0 \\ \Rightarrow\; N_3 = F = 30\; kN, \end{array}\right\} \tag{6.27}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum F_{Xi_{\text{v bodě „B"}}} = 0 \;\Rightarrow\; -N_5 + N_2 \cos\alpha = 0 \\ \Rightarrow\; N_2 = \frac{N_5}{\cos\alpha} = 18,75\; kN, \\ \\ \Rightarrow\; \sum F_{Yi_{\text{v bodě „B"}}} = 0 \;\Rightarrow\; R_B - N_2 \sin\alpha = 0 \\ N_2 = \frac{R_B}{\sin\alpha} = \frac{F}{2 \sin\alpha} = 18,75\; kN. \end{array}\right\} \tag{6.28}$$

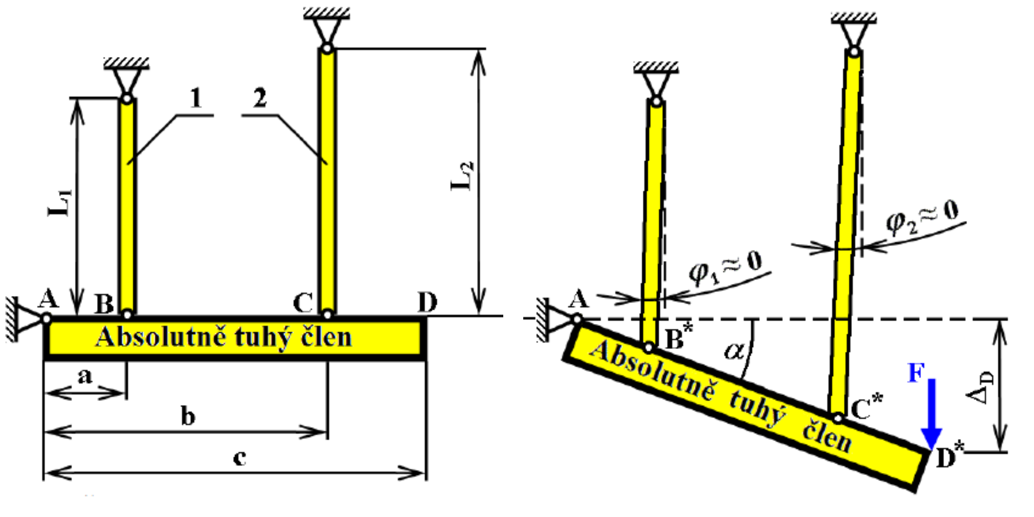
Rovnice rovnováhy ve styčníku „C”, která se stanoví obdobným způsobem, může sloužit pro kontrolu správnosti odvozených vztahů. Normálové síly $N_2 = N_1$ a $N_4 = N_5$, protože konstrukce je symetrická.

Na obr. 6.23 byly zvoleny kladné směry normálových sil, působících ve styčnících. Pruty příhradové konstrukce budou, dle zákona akce a reakce, namáhány silami opačně orientovanými. Normálová napětí σ_i v prutech, s respektováním znaménkové dohody pro vnitřní normálové síly, jsou

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 = \sigma_2 &= \tfrac{-N_1}{S_1} = \tfrac{-18{,}75\cdot 10^3}{400} = -46,88\ MPa, \\ \sigma_3 &= \tfrac{N_3}{S_3} = \tfrac{30\cdot 10^3}{600} = 50\ MPa, \\ \sigma_4 = \sigma_5 &= \tfrac{N_4}{S_4} = \tfrac{11{,}25\cdot 10^3}{400} = 28,13\ MPa. \end{aligned}\right\} \qquad (6.29)$$

▲

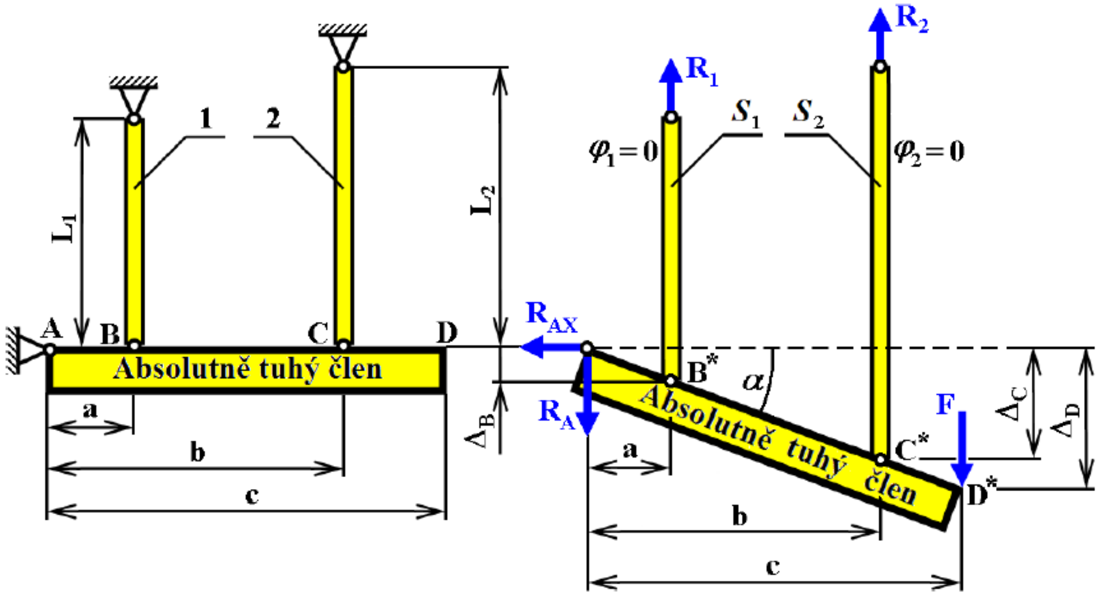
Příklad 6.6. Absolutně tuhý člen „AD” (viz obr. 6.24) je uchycen v kloubu „A” a podpírán tyčemi (pruty) „1”, „2” v místech „B” a „C”. Vertikální síla F působí v bodu „D” (obr. 6.24 b)). Určete reakce, normálové síly a napětí v tyčích. Použijte teorii malých deformací. Vliv vlastní tíhy neuvažujte. Dáno $F = 40\ kN$, $E_1 = E_2 = E = 2\cdot 10^5\ MPa$, $a = 1,2\ m$, $b = 1,6\ m$, $c = 2\ m$, $L_1 = 1\ m$, $L_2 = 1,5\ m$, $S_1 = 400\ mm^2$, $S_2 = 300\ mm^2$.



a) nezatížený stav b) stav po zatížení (ve zvětšeném měřítku)

Obr. 6.24 Řešená soustava

Za předpokladu malých deformací (tj. úhel α je malý) lze úhly natočení tyčí φ_1 a φ_2 považovat za nulové. Nabízí se pak přijatelné zjednodušení znázorněné na obr. 6.25.



Obr. 6.25

Z obr. 6.25 pak lze stanovit statické rovnice rovnováhy

$$\left.\begin{array}{lcl} \sum F_X = 0 & \Rightarrow & R_{AX} = 0, \\ \sum F_Y = 0 & \Rightarrow & R_1 + R_2 - R_A = F, \\ \sum M_A = 0 & \Rightarrow & R_1 a + R_2 b = Fc. \end{array}\right\} \tag{6.30}$$

Úloha je 1× staticky neurčitá (tři rovnice (6.30), avšak čtyři reakce: R_{AX}, R_A, R_1 a R_2). Proto je nutné soustavu (6.30) doplnit o další rovnici z deformační podmínky, pro kterou (za předpokladu absolutně tuhého členu „AD") platí: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta B}{a} = \frac{\Delta C}{b}$, kde pro přemístění bodu B a C vyplývá

$$\Delta B = \frac{N_1 L_1}{E_1 S_1} = \frac{R_1 L_1}{E S_1}, \quad \Delta C = \frac{N_2 L_2}{E_2 S_2} = \frac{R_2 L_2}{E S_2}.$$

Pak je zřejmé, že lze odvodit vztah: $\Delta B = \frac{a \Delta C}{b}$, odkud vyplyne rovnice

$$R_1 = \frac{S_1 a L_2}{S_2 b L_1} R_2. \tag{6.31}$$

Řešením soustavy rovnic 6.30 a 6.31, vyplyne

$$R_1 = \frac{F S_1 a c L_2}{S_1 a^2 L_2 + S_2 b^2 L_1} = 35294,1\ N, \quad R_2 = \frac{F S_2 b c L_1}{S_1 a^2 L_2 + S_2 b^2 L_1} = 23529,4\ N,$$

$$R_A = R_1 + R_2 - F = 18823,5\ N.$$

Pro normálové síly (v tomto případu tahové) a napětí v prutech „1” a „2” pak platí

$$N_1 = R_1, \quad N_2 = R_2,$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{S_1} = 88,2\ MPa, \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{S_2} = 78,4\ MPa.$$

▲

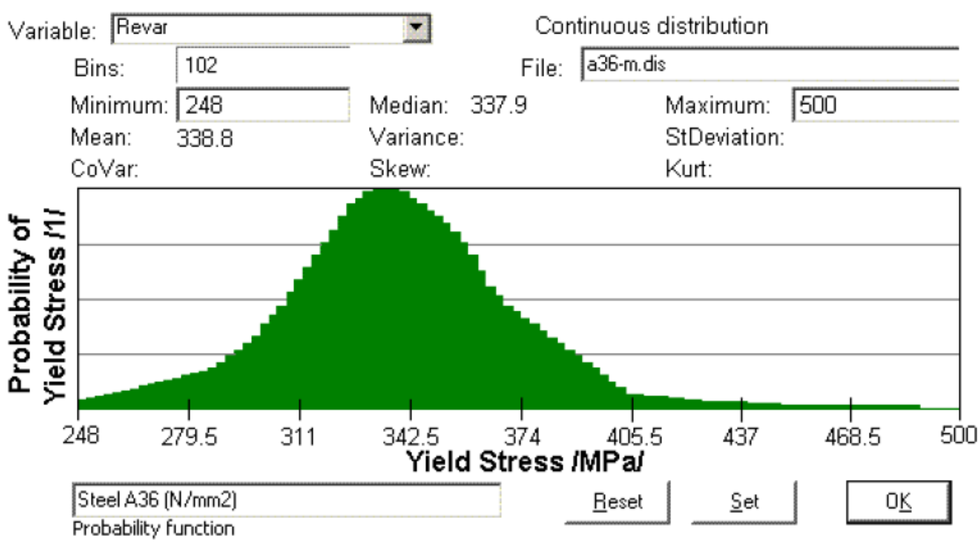
6.9 Dovolené napětí (σ_{DOV}), návrh průřezu, zatížení a pevnostní kontrola

Ve většině případů návrhu strojních součástí nelze připustit napětí větší než dovolené. Pro návrh průřezů pak lze použít tzv. návrhové (designové) nerovnice či *podmínky pevnosti*

$$\sigma_{MAX_{TAH}} \leqq \sigma_{DOV_{TAH}}, \quad |\sigma_{MAX_{TLAK}}| \leqq \sigma_{DOV_{TLAK}}, \tag{6.32}$$

kde $\sigma_{MAX_{TAH}}$ a $\sigma_{MAX_{TLAK}}$ $[MPa]$ jsou maximální napětí vypočtená v řešených úsecích tyčí a $\sigma_{DOV_{TAH}}$ a $\sigma_{DOV_{TLAK}}$ $[MPa]$ jsou maximální dovolená napětí v tahu respektive tlaku.

Napětí $\sigma_{DOV_{TAH}}, \sigma_{DOV_{TLAK}} > 0$ jsou obvykle (z důvodů bezpečnosti) menší nebo rovna mezi kluzu R_p. Nicméně při optimálním návrhu konstrukce je třeba mít na zřeteli, že mez kluzu může vykazovat značný rozptyl, viz např. obr. 6.26 (histogram meze kluzu, která má rozpětí od 248 MPa do 500 MPa).

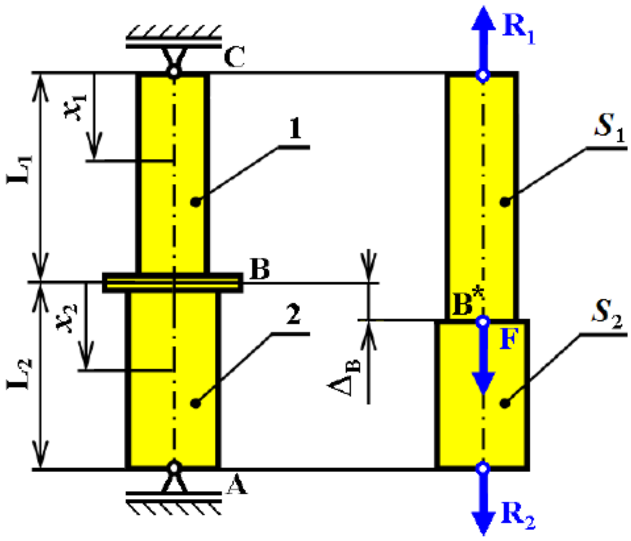


Obr. 6.26 Histogram meze kluzu oceli A36 (vyhodnocení měření, Anthill software)

Jedním z moderních přístupů současnosti je také pravděpodobnostní přístup k řešení těchto úloh (pravděpodobnostní posudek stanovení spolehlivosti konstrukce, viz např. [15]).

Nerovnice (6.32) lze použít pro pevnostní kontrolu, návrh průřezů nebo zatížení.

Příklad 6.7. Ocelová trubka „1" je připojena k trubce „2" přes přírubu „B" na kterou působí síla F, viz obr. 6.27. Soustava je na koncích uchycena v bodech „A" a „C" pomocí absolutně tuhých podpor. Posuďte zda součást pevnostně vyhovuje. Vliv vlastní tíhy, způsob spojení trubek a možné vybočení trubek neuvažujte. Dáno: $L_1 = 1500\ mm$, $L_2 = 1000\ mm$, $S_1 = 800\ mm^2$, $S_2 = 1500\ mm^2$, $F = 100\ kN$, $E = 2 \cdot 10^5\ MPa$, $\sigma_{DOV_{TAH}} = \sigma_{DOV_{TLAK}} = 175\ MPa$.



Obr. 6.27

Vztahy pro napětí jsou odvozeny v příkladu 6.4, viz rovnice (6.23) a obr. 6.19, kde $\sigma(x_1) = 32,79\ MPa$ a $\sigma(x_2) = -49,18\ MPa$.

Posouzení napjatosti lze provést dosazením do nerovnic (6.32). Platí tedy

$$\sigma_{MAX_{TAH}} \leqq \sigma_{DOV_{TAH}}, \quad |\sigma_{MAX_{TLAK}}| \leqq \sigma_{DOV_{TLAK}}$$

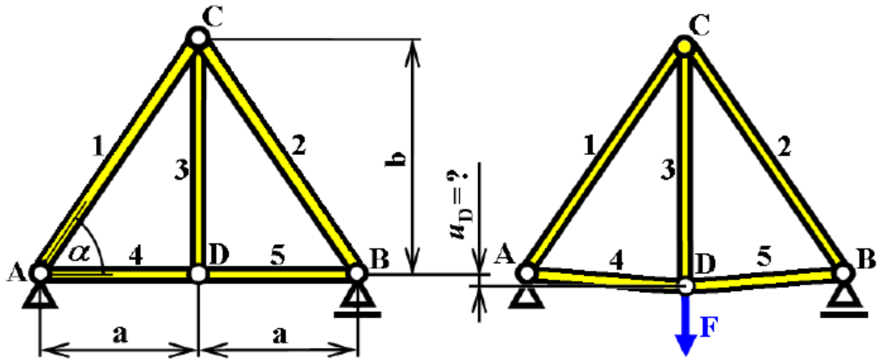
(tj.: $32,79\ MPa \leqq 175\ MPa$ a zároveň $49,18\ MPa \leqq 175\ MPa$). Řešená soustava tedy splňuje podmínky pevnosti.

▲

Příklady k procvičení

1. Určete přemístění bodu „D" (tj. $u_D = ?$), příhradové konstrukce znázorněné na obr. 6.28. Při řešení lze využít výsledků řešeného příkladu 6.4 z kapitoly 6.8.

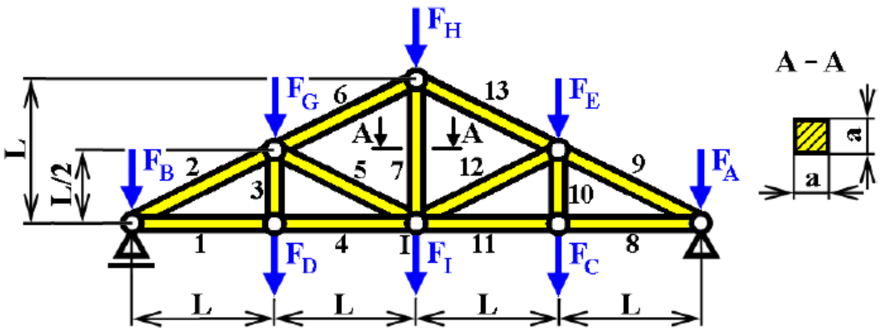
   Dáno: $S_1 = S_2 = 400\ mm^2$, $S_3 = 600\ mm^2$, $S_4 = S_5 = 400\ mm^2$, $F = 30\ kN$, $a = 0,75\ m$, $b = 1\ m$, $E = E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = E_5 = 2,1 \cdot 10^5\ MPa$.



Obr. 6.28 Prutová konstrukce.

2. Určete velikosti normálových sil pro příhradovou konstrukci, znázorněnou na obr. 6.29. Určete tažené a tlačené pruty. Navrhněte také rozměr čtvercového průřezu prutu 7.

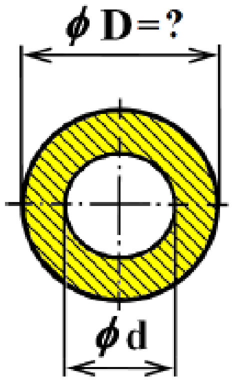
   Dáno: $F_A = 500\ N$, $F_B = 500\ N$, $F_C = 1000\ N$, $F_D = 1000\ N$, $F_G = 1500\ N$, $F_H = 1500\ N$, $F_E = 2000\ N$, $F_I = 2000\ N$, $L = 220\ mm$, $\sigma_{DOV} = 50\ MPa$.



Obr. 6.29

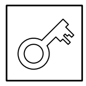
3. Součást je namáhaná tahem. Z podmínky pevnosti odvoďte vztah pro návrh průměru D, znázorněného na obr. 6.30.

   Dáno: N, d, σ_{DOV}.



Obr. 6.30

Klíč k příkladům k procvičení



1. Řešení posunutí u_D lze odvodit, ze známých výsledků řešené úlohy z kapitoly 6.8, nejrychleji z Castiglianovy věty

$$u_D = \sum_{i=1}^{5} \left(\frac{1}{E_i A_i} \int_0^{L_i} N_i \frac{\partial N_i}{\partial F} \mathrm{d}x \right),$$

přičemž normálové síly musí být vyjádřeny v závislosti na síle F. Pak platí

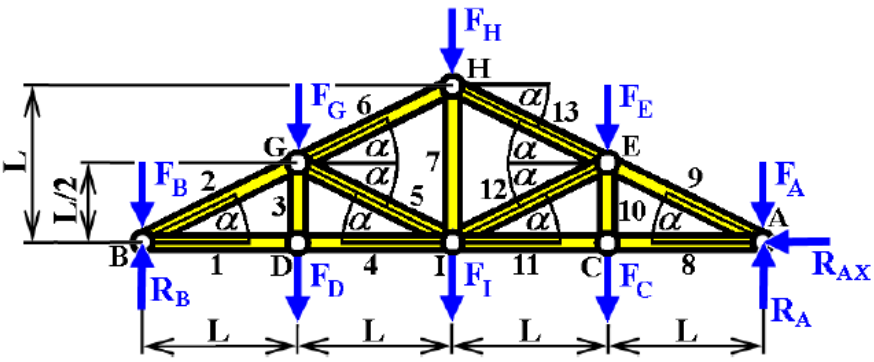
$$\frac{\partial N_1}{\partial F} = \frac{\partial N_2}{\partial F} = \frac{1}{2\sin\alpha}, \quad \frac{\partial N_3}{\partial F}, \quad \frac{\partial N_4}{\partial F} = \frac{\partial N_5}{\partial F} = \frac{1}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}.$$

Je také zřejmé, že pro dílčí integrály platí

$$\int_0^{L_i} N_i \frac{\partial N_i}{\partial F} \mathrm{d}x = N_i \frac{\partial N_i}{\partial F} \int_0^{L_i} \mathrm{d}x = N_i L_i \frac{\partial N_i}{\partial F},$$

$$u_D = \frac{F}{E} \left(\frac{b}{2A_1 \sin^3\alpha} + \frac{b}{A_3} + \frac{a}{2A_4\,\mathrm{tg}^2\,\alpha} \right) = 6,62 \cdot 10^{-1}\ mm.$$

2. Uvolnění je znázorněno na obr. 6.31.



Obr. 6.31

$$\alpha = 26,5651^\circ, \quad R_{AX} = 0\ N, \quad R_A = 5125\ N, \quad R_B = 4875\ N.$$

$N_1 = N_4 = -609,8\ N$	Tahová síla
$N_2 = 4417,3\ N$	Tlaková síla
$N_3 = -1000\ N$	Tahová síla
$N_5 = 1262,1\ N$	Tlaková síla
$N_6 = N_{13} = 3155,2\ N$	Tlaková síla

$N_1 = N_4 = -609,8\ N$	Tahová síla
$N_2 = 4417,3\ N$	Tlaková síla
$N_3 = -1000\ N$	Tahová síla
$N_5 = 1262,1\ N$	Tlaková síla
$N_6 = N_{13} = 3155,2\ N$	Tlaková síla

Tab. 6.2 Výsledky příkladu 2

$\sigma_7 = \frac{N_7}{a^2} \leqq \sigma_{DOV}$, tj.: $a \geqq \sqrt{\frac{N_7}{\sigma_{DOV}}} = 9,75\ mm$. Lze tedy zvolit např. rozměr $a = 10\ mm$.

3. $D \geqq \sqrt{\frac{4N}{\pi\sigma_{DOV}} + d^2}$.

Σ Pojmy k zapamatování

- Hookeův zákon pro jednoosou napjatost
- modul pružnosti v tahu a tlaku

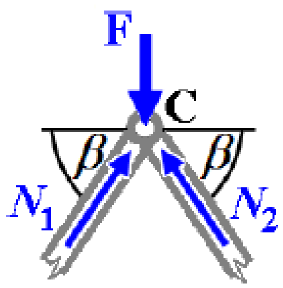
- poměrné deformace součásti, namáhané tahem/tlakem
- prodloužení/zkrácení součásti, namáhané tahem/tlakem
- vliv teploty na napjatost součásti, namáhané tahem/tlakem
- staticky neurčité úlohy tahu a tlaku
- příhradové konstrukce
- návrh rozměrů a zatížení součásti, namáhané tahem/tlakem

Kontrolní otázky

1. Jak je definován Hookeův zákon pro jednoosou napjatost?
   (a) $\sigma = E\varepsilon$.
   (b) $\sigma = \frac{\varepsilon}{E}$.
   (c) $\sigma = \frac{E}{\varepsilon}$.
   (d) $\sigma = \frac{l}{E\varepsilon}$.

2. Součást má počáteční délku L. Jak je definovaná poměrná deformace při jednoosé napjatosti?
   (a) $\varepsilon = \frac{L}{\Delta L}$.
   (b) $\varepsilon = \frac{1}{\Delta L \cdot L}$.
   (c) $\varepsilon = \Delta L \cdot L$.
   (d) $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$.

3. Jaké vztahy platí pro síly v prutech části konstrukce (styčník C), znázorněné na obr. 6.32?



Obr. 6.32

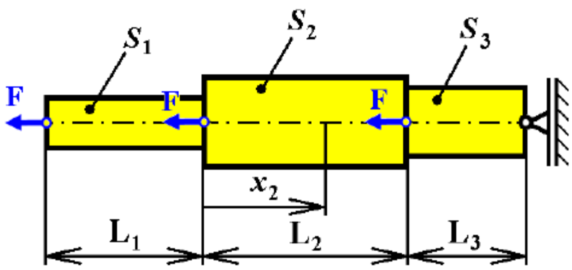
(a) $N_1 = N_2 = \frac{F}{2\cos\beta}$.

(b) $N_1 = N_2 = \frac{F}{2\sin\beta}$.

(c) $N_1 = N_2 = \frac{F\cos\beta}{2}$.

(d) $N_1 = N_2 = \frac{F\sin\beta}{2}$.

4. Jaký vztah určuje napětí ve vzdálenosti x_2 v součásti, znázorněné na obr. 6.33?



Obr. 6.33

(a) $\sigma_2 = \frac{F}{S_2}$.

(b) $\sigma_2 = \frac{2F}{S_2}$.

(c) $\sigma_2 = \frac{3F}{S_2}$.

(d) $\sigma_2 = \frac{4F}{S_2}$.

5. Jaká je běžná hodnota modulu pružnosti v tahu oceli?

(a) 248 až 500 MPa.

(b) $1,9 \cdot 10^5$ až $2,2 \cdot 10^5$ MPa.

(c) $1,9 \cdot 10^5$ až $2,2 \cdot 10^5$ mm.

(d) $1,9 \cdot 10^{11}$ až $2,2 \cdot 10^{11}$ m.

6. Kdy je příhradová konstrukce staticky určitá / staticky neurčitá?

Kapitola 7

Kroucení prutů kruhového a mezikruhového průřezu

Průvodce studiem

V předcházející kapitole jsme se naučili pevnostně kontrolovat a dimenzovat součásti namáhané tahem či tlakem. Řešení úloh kroucení prutů (tyčí) kruhového a mezikruhového průřezu je analogické. Opět budeme potřebovat pevnostní podmínku. V této kapitole si také ukážeme, že řešení staticky neurčitých úloh u prutů namáhaných krutem je dokonce v některých ohledech jednodušší. Před studiem kapitoly doporučujeme projít kapitolu 1.

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete:

- umět vypočítat smykové napětí při kroucení kruhového a mezikruhového průřezu
- rozumět deformačním vztahům při kroucení
- seznámeni s Hookeovým zákonem pro prostý smyk
- schopni stanovit kvadratické momenty a moduly průřezu v krutu pro kruhový a mezikruhový průřezů
- umět vypočítat staticky neurčitou úlohu při kroucení

7.1 Výpočet napětí při kroucení

Definice 7.1. Příčný průřez kruhového prutu je namáhám prostým krutem, jestliže vnější síly po jedné straně se dají nahradit dvojicí sil, ležících v rovině tohoto průřezu. Moment této dvojice se nazývá krouticím momentem

Předpoklady řešení:

- průřezy zůstávají i po deformaci rovinné
- radiální paprsky zůstávají přímé – průřezy se pouze otáčejí kolem osy prutu
- myšlený čtverec na povrchu přejde vlivem zatížení krouticím momentem v kosočtverec

Ze společné délky oblouku BB' obou trojúhelníků (obr. 7.1) lze sestavit následující rovnice

$$\gamma_{(\rho)} \cdot \mathrm{d}x = \rho \cdot \mathrm{d}\varphi, \text{ odkud } \gamma_{(\rho)} = \rho \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}, \tag{7.1}$$

kde

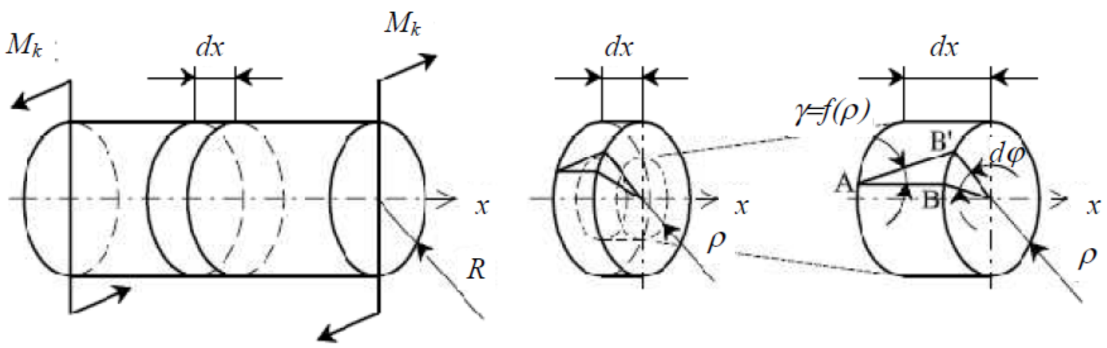
$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = \vartheta \; [rad \cdot m^{-1}] \tag{7.2}$$

je poměrný úhel zkroucení (zkrut), $\mathrm{d}\varphi$ je relativní pootočení dvou průřezů, vzdálených o $\mathrm{d}x$ a úhel BAB' je zkos γ. Nyní využijeme Hookeův zákon pro prostý smyk, který má následující tvar

$$\gamma_{(\rho)} = \frac{\tau_{(\rho)}}{G}, \tag{7.3}$$

kde $\tau_{(\rho)}$ je smykové napětí na poloměru ρ a G je modul pružnosti ve smyku

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \tag{7.4}$$



Obr. 7.1

Dosazením rovnice (7.1) do (7.3) lze získat pro výpočet smykového napětí $\tau_{(\rho)}$ následující vztah

$$\tau_{(\rho)} = G \cdot \rho\vartheta. \tag{7.5}$$

Z rovnice (7.5) je zřejmé, že $\tau_{(\rho)}$ závisí na ρ lineárně. Elementární síla $\mathrm{d}F$ působící na ploše $\mathrm{d}S$ může být vyjádřena takto

$$\mathrm{d}F = \tau_{(\rho)} \cdot \mathrm{d}S. \tag{7.6}$$

Moment elementární síly $\mathrm{d}F$ k ose x je pak

$$\rho \cdot \mathrm{d}F = \rho \cdot \tau_{(\rho)} \cdot \mathrm{d}S. \tag{7.7}$$

Tudíž krouticí moment M_k musí být dán integrálem přes celou plochu průřezu

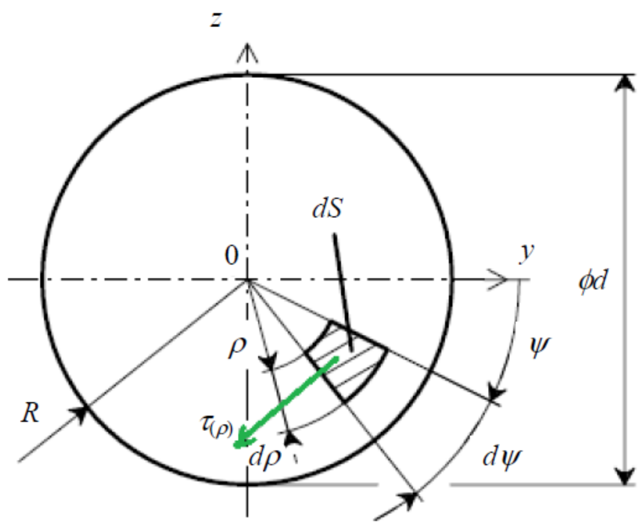
$$M_k = \int_{(S)} \tau_{(\rho)} \cdot \rho \cdot \mathrm{d}S. \tag{7.8}$$

Dosazením rovnice (7.5) do (7.8) lze získat vztah pro výpočet krouticího momentu

$$M_k = G \cdot \vartheta \cdot \int_{(S)} \rho^2 \cdot \mathrm{d}S = G \cdot \vartheta \cdot I_p, \tag{7.9}$$

kde I_p je polární kvadratický moment průřezu a pro plný kruhový průřez byl odvozen již v první kapitole.

Zde naznačíme druhý způsob řešení. Elementární plocha dle obr. 7.2 má obsah $\mathrm{d}S = \rho \cdot \mathrm{d}\psi \cdot \mathrm{d}\rho$.



Obr. 7.2

Pak lze psát

$$I_p = \int\limits_{(S)} \rho^2 \mathrm{d}S = \int\limits_0^R \rho^3 \mathrm{d}\rho \cdot \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\psi = \frac{R^4}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}. \tag{7.10}$$

Z rovnice (7.9) lze vyjádřit zkrut

$$\vartheta = \frac{M_k}{G \cdot I_p}, \tag{7.11}$$

dosazením rovnice (7.11) do (7.5) lze získat rovnici pro výpočet smykového napětí

$$\tau_{(\rho)} = \frac{M_k}{I_p} \cdot \rho. \tag{7.12}$$

Označíme-li

$$\tau_{max} = \tau_k \quad a \quad W_k = \frac{I_p}{\rho_{max}},$$

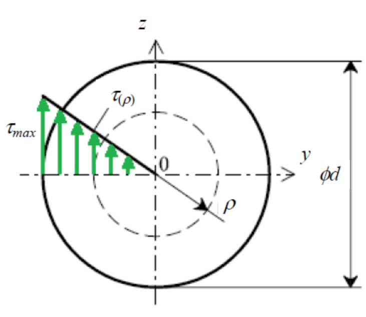
pak platí

$$\tau_k = \frac{M_k}{W_k}, \tag{7.13}$$

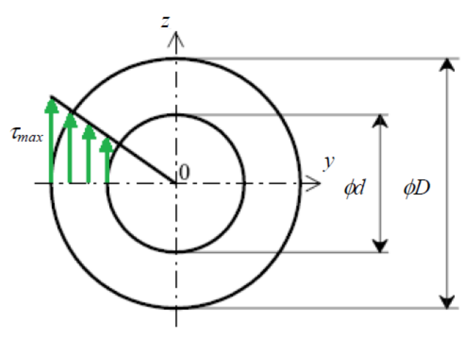
kde W_k je modul průřezu v krutu. Pro plný průřez i mezikruhový průřez byl odvozen již v první kapitole.

Připomeňme však, že dle (obr. 7.3) a definice 1.5 je

$$W_k = \frac{I_p}{\frac{d}{2}} = \frac{\frac{\pi d^4}{32}}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi d^3}{16} \; [m^3]. \tag{7.14}$$



Obr. 7.3



Obr. 7.4

Polární kvadratický moment I_p pro mezikruhový průřez (obr. 7.4) má následující tvar

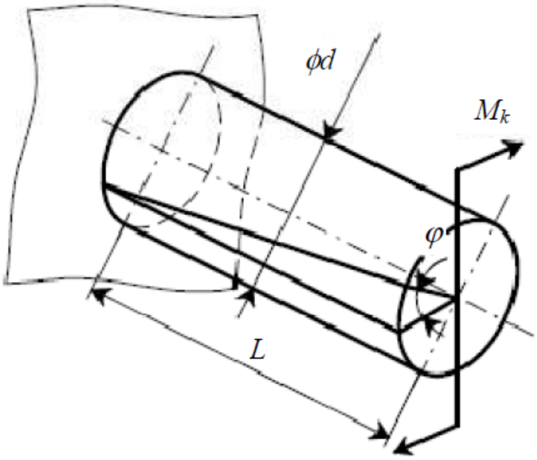
$$I_p = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi \left(D^4 - d^4\right)}{32}. \tag{7.15}$$

Modul průřezu v krutu W_k pro mezikruhový průřez je roven

$$W_k = \frac{I_p}{\frac{D}{2}} = \frac{\frac{\pi\left(D^4-d^4\right)}{32}}{\frac{D}{2}} \frac{\pi\left(D^4-d^4\right)}{16D}\ [m^3]. \tag{7.16}$$

7.2 Deformace při kroucení

Deformaci při kroucení lze vyjádřit formou úhlu pootočení průřezů φ, kterému říkáme *úhel zkroucení*. Graficky je úhel pootočení znázorněný na obr. 7.5.



Obr. 7.5

Z rovnice (7.11) lze odvodit zkrut ϑ (či poměrný úhel zkroucení) ve tvaru

$$\vartheta = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = \frac{M_k}{G \cdot I_p}, \tag{7.17}$$

odtud pak

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{M_k}{G \cdot I_p} \cdot \mathrm{d}x. \tag{7.18}$$

Po integraci výrazu (7.18) pro celou délku tyče L bude úhel zkroucení

$$\varphi = \int_{(L)} \frac{M_k}{G \cdot I_p} \mathrm{d}x \tag{7.19}$$

a po dosazení mezí dostaneme

$$\varphi = \frac{M_k \cdot L}{G \cdot I_p}\ [rad], \tag{7.20}$$

kde $G \cdot I_p$ je torzní tuhost.

7.3 Pevnostní podmínka a dimenzování

Při návrhu a kontrole prutů, namáhaných krutem, se používá pevnostní podmínka

$$\tau_{max} = \tau_k = \frac{M_k}{W_k} \leqq \tau_D, \tag{7.21}$$

kde τ_D je dovolené napětí ve smyku. Pokud hodnotu τ_D potřebujeme stanovit z dovoleného napětí pro tah σ_D, lze vyjít z Mohrovy kružnice pro prostý tah, či využít vztahu (3.11), pak

$$\tau_D = \frac{\sigma_D}{2}. \tag{7.22}$$

Strojní součást musí také vyhovovat podmínce tuhosti

$$\varphi \leqq \varphi_D, \tag{7.23}$$

kde φ_D je velikost deformace přípustné pro danou konstrukci.

7.4 Zahrnutí dalších vlivů do výpočtu

Výše popsaná teorie odpovídá prostému (volnému) kroucení podle Saint Venantovy teorie (vznikají jen smyková napětí), která odpovídá předpokladům z úvodu kapitoly. Kromě tohoto kroucení však existuje i kroucení vázané podle Vlasovovy teorie (vznikají smyková i normálová napětí).

U volného kroucení není bráněno deplanaci (posuvům ve směru osy prutu).

U vázaného kroucení je tomu naopak a dochází zde k tomu, že část krouticího momentu se přenáší prostým kroucením a část krouticího momentu se přenáší ohybovým kroucením. V souvislosti s kroucením mluvíme o *deplanaci* průřezu. Deplanace se projevuje nenulovými posuvy ve směru osy prutu (zkřivení roviny průřezu) a dochází k ní u prutů nekruhového průřezu.

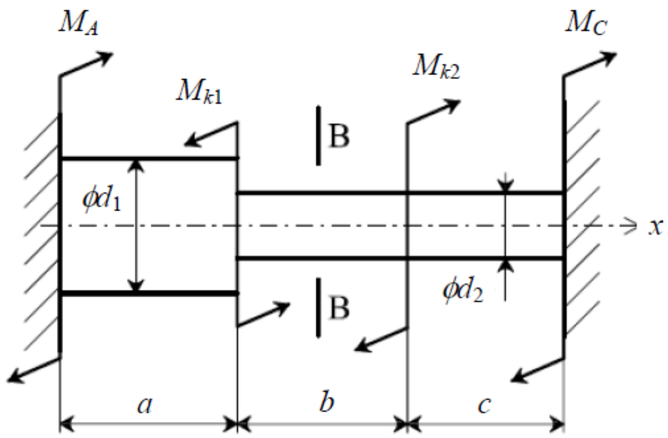
Často jsou součásti, namáhané krutem, zároveň zatěžovány přídavnou osovou tahovou/tlakovou silou, ohybovým momentem apod. V těchto případech mluvíme o *kombinovaném namáhání prutů*, kde výsledné napětí pro kontrolu součásti získáme použitím vhodné hypotézy pevnosti, viz kapitola 9 (tzv. redukované napětí).

7.5 Úlohy staticky neurčité při kroucení

Při řešení staticky neurčitých úloh v kroucení se postupuje analogicky jako u staticky neurčitých prutů, namáhaných tahem/tlakem (kapitola 6.7). Způsob řešení bude prezentován na příkladě.

Příklad 7.1. Uvažujme osazenou tyč, vetknutou na obou koncích (obr. 7.6). Určete napětí v řezu tyče B-B a reakce ve vetknutí na obou stranách $M_A = ?$, $M_C = ?$

Dáno: M_{k1}, M_{k2}, a, b, c, d_1, d_2.



Obr. 7.6

Nejprve tyč uvolníme, resp. zavede reakční momenty ve vetknutí M_A, M_C. Smykové napětí v řezu tyče B-B se stanoví

$$\tau_{kB} = \frac{M_B}{W_{kB}}, \quad W_{kB} = \frac{\pi \cdot d_2^3}{16}. \tag{P1}$$

Musíme však nejprve stanovit velikost reakcí, abychom dokázali určit vnitřní kroutící moment v místě B (M_B). Rovnici rovnováhy lze psát ve tvaru

$$M_A - M_{k1} + M_{k2} + M_c = 0. \tag{P2}$$

Z rovnice rovnováhy vyplývají dvě neznámé M_A a M_C. Stupeň statické neurčitosti je dle vztahu (6.26) roven 1 a soustava je jedenkrát staticky neurčitá. Je tedy nutno sestavit jednu deformační podmínku.

Deformační podmínka vychází z vetknutí obou konců tyče a lze tedy říci, že celkový úhel zkroucení bude roven nule

$$\varphi_c = 0. \tag{P3}$$

Ukážeme si dva způsoby vyjádření celkového úhlu zkroucení. V prvním řešení jej můžeme vyjádřit jako součet dílčích úhlů zkroucení, odpovídajících třem úsekům tyče

$$\varphi_c = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0. \tag{P4}$$

Analogicky jako u prutů, namáhaných tahem – tlakem, můžeme s využitím metody řezu vyjádřit vnitřní krouticí moment v jednotlivých úsecích, tj. $M_k(x) = M_A$ pro $x \in (0, a)$, $M_k(x) = M_A - M_{k1}$ pro $x \in (a, a+b)$; $M_k(x) = M_A - M_{k1} + M_{k2}$ pro $x \in (a+b, a+b+c)$. Po aplikaci upraveného Hookeova zákona pro prostý smyk deformační podmínka přejde do tvaru

$$\varphi_c = \frac{M_A \cdot a}{G \cdot I_{p1}} + \frac{(M_A - M_{k1}) \cdot b}{G \cdot I_{p2}} + \frac{(M_A - M_{k1} + M_{k2}) \cdot c}{G \cdot I_{p2}} = 0, \tag{P5}$$

z nějž po úpravě lze získat hledanou reakci

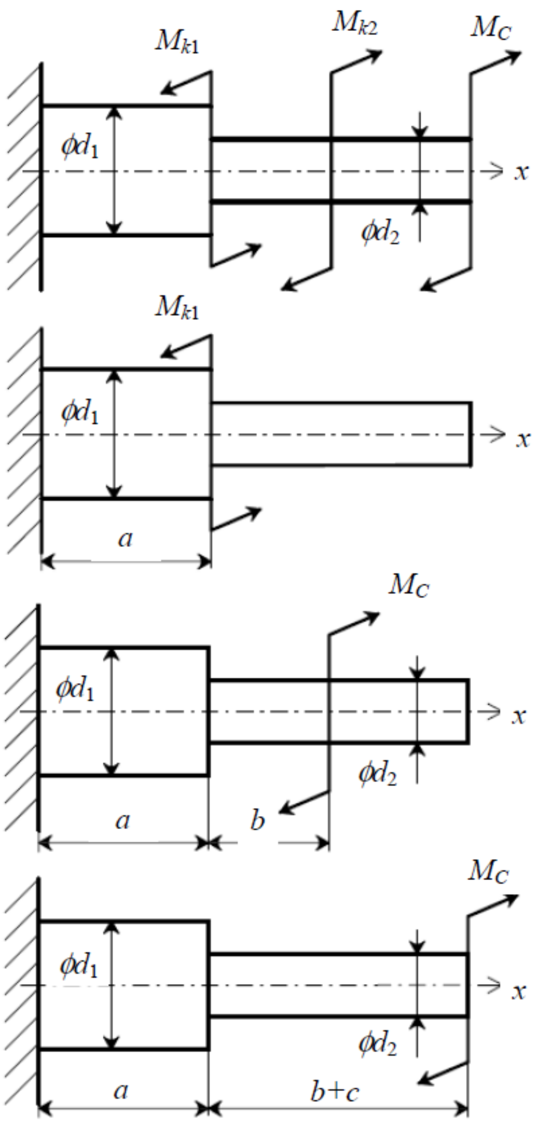
$$M_A \left(\frac{a}{I_{p1}} + \frac{b+c}{I_{p2}} \right) = M_{k1} \left(\frac{b+c}{I_{p2}} \right) - M_{k2} \cdot \frac{c}{I_{p2}},$$

$$M_A = \frac{M_{k1} \left(\frac{b+c}{I_{p2}} \right) - M_{k2} \cdot \frac{c}{I_{p2}}}{\left(\frac{a}{I_{p1}} + \frac{b+c}{I_{p2}} \right)}. \tag{P6}$$

Po dosazení reakce M_A do rovnice rovnováhy (P2) získáme druhou neznámou reakci M_B. Z vypočtených reakčních momentů lze pak vyjádřit hodnotu krouticího momentu v řezu B-B, např. $M_B = M_A - M_{k1}$ (nacházíme se v druhém úseku tyče) a následně vypočítat napětí v řezu tyče $B - B$ dle vztahu P1.

U druhého způsobu využijeme metodu superpozice. Odmyslíme si vetknutí na pravé straně tyče (obr. 7.6) a tento případ si pomyslně rozdělíme na tři dílčí případy, viz obr. 7.7.

Pro každý zátěžný případ na obr. 7.7 vyjádříme celkový úhel zkroucení tyče.



$$\varphi_{Mk1} = \frac{M_{k1} \cdot a}{G \cdot I_{p1}},$$

$$I_{p1} = \frac{\pi \cdot d_1^4}{32}$$

$$\varphi_{Mk2} = \frac{M_{k2} \cdot a}{G \cdot I_{p1}} + \frac{M_{k2} \cdot b}{G \cdot I_{p2}},$$

$$I_{p2} = \frac{\pi \cdot d_2^4}{32}$$

$$\varphi_{MC} = \frac{M_C \cdot a}{G \cdot I_{p1}} + \frac{M_C \cdot (b+c)}{G \cdot I_{p2}}$$

Obr. 7.7

Dosazením těchto rovnic do rovnice (P3) lze získat druhou rovnici, nutnou pro řešení soustavy dvou rovnic pro dvě neznámé M_A a M_C

$$\begin{aligned}
\varphi_C = -\varphi_{Mk1} + \varphi_{Mk2} + \varphi_{MC} &= 0, \\
-\frac{M_{k1} \cdot a}{G \cdot I_{p1}} + \frac{M_{k2} \cdot a}{G \cdot I_{p1}} + \frac{M_{k2} \cdot b}{G \cdot I_{p2}} + \frac{M_C \cdot a}{G \cdot I_{p1}} + \frac{M_C(b+c)}{G \cdot I_{p2}} &= 0/G, \\
\frac{a(M_{k2} - M_{k1})}{I_{p1}} + \frac{b \cdot M_{k2}}{I_{p2}} + \left[\frac{a}{I_{p1}} + \frac{(b+c)}{I_{p2}}\right] \cdot M_C &= 0.
\end{aligned} \tag{P7}$$

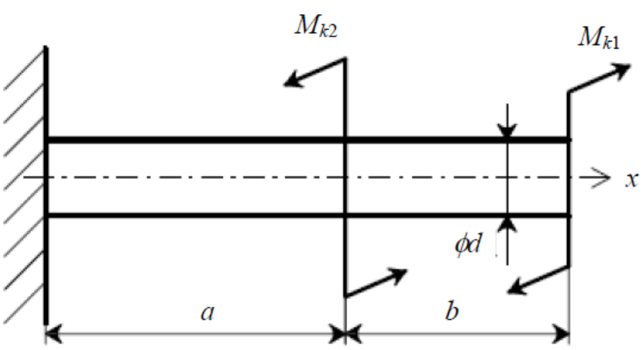
Úpravou poslední rovnice lze získat reakci M_C. Po dosazení této reakce do rovnice rovnováhy (P2) získáme druhou neznámou reakci M_A. Z vypočtených reakčních momentů lze pak vyjádřit hodnotu krouticího momentu $M_B = M_A - M_{k1}$ (druhý úsek tyče) a následně vypočítat napětí v řezu tyče B–B dle vztahu P1.

▲

Příklady k procvičení

1. Určete výsledné smykové napětí v jednotlivých úsecích tyče (obr. 7.8) o průměru d zatížené krouticími momenty M_{k1} a M_{k2}.

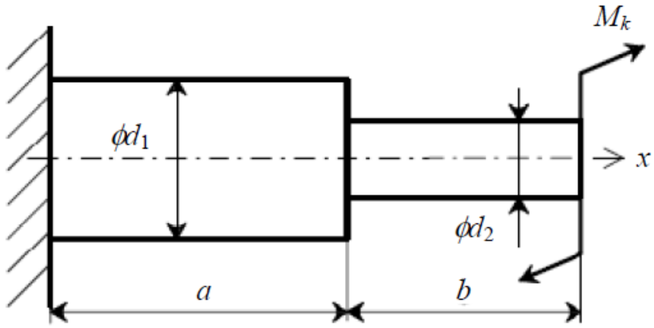
   Dáno: $M_{k1} = 50\ Nm$, $M_{k2} = 20\ Nm$, $d = 20\ mm$, $a = 60\ mm$, $b = 80\ mm$, $G = 8,5 \cdot 10^4\ MPa$.



Obr. 7.8

2. Určete výsledné smykové napětí a úhel zkroucení na konci prutu (obr. 7.9), zatíženého krouticím momentem M_k.

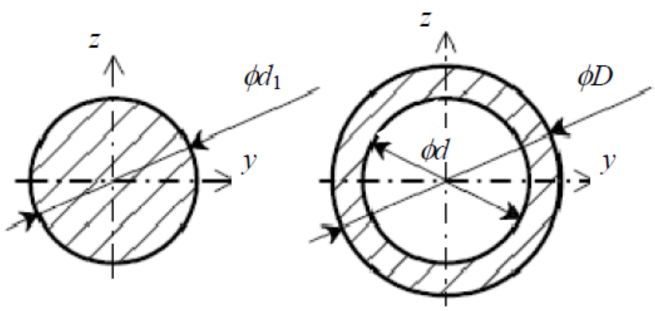
   Dáno: $M_k = 80\ Nm$, $d_1 = 30\ mm$, $d_2 = 20\ mm$, $a = 600\ mm$, $b = 500\ mm$, $G = 8,5 \cdot 10^4\ MPa$.



Obr. 7.9

3. Porovnejte hmotnostní úsporu materiálu plného hřídele (m_1) o průměru d_1 a dutého hřídele (m_2) dle obr. 7.10 stejné délky a ze stejného materiálu. Obě hřídele přenáší stejný kroutící moment Mk. U dutého hřídele je vztah mezi vnějším a vnitřním průměrem $d = 0,6 \cdot D$.

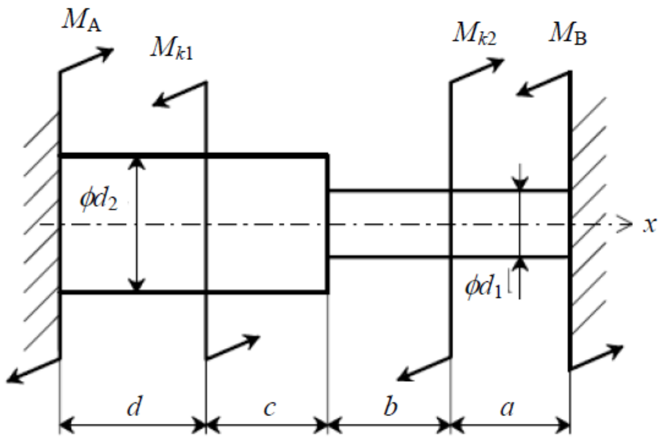
   Dáno: $M_k = 40\ Nm$, $\tau_{DK} = 80\ MPa$.



Obr. 7.10

4. Stanovte maximální smykové napětí τ_{max} u oboustranně vetknutého čepu dle obr. 7.11

   Dáno: $M_{k1} = 1000\ Nm$, $M_{k2} = 500\ Nm$, $d_1 = 35\ mm$, $d_2 = 50\ mm$, $a = b = 30\ mm$, $c = d = 25\ mm$.



Obr. 7.11

Klíč k příkladům k procvičení

1. $\tau_K(a) = 19,1\ MPa$, $\tau_K(b) = 31,83\ MPa$
2. $\tau_K = 15,1\ MPa$, $\varphi = 0,013\ rad$
3. $m_1 = 1,35 \cdot m_2$
4. $\tau_{max} = 34,7\ MPa$

Pojmy k zapamatování

- smykové napětí τ_k pro kruhový (mezikruhový) průřez
- úhel zkroucení φ dvou rovnoběžných průřezů
- úhel zkosení (zkos) γ
- poměrný úhel zkroucení
- řešení staticky neurčité úlohy
- polární kvadratický moment průřezu
- modul průřezu v krutu

Kontrolní otázky

?

1. Jak je definován Hookeův zákon pro prostý smyk?
   (a) $\gamma_\rho = \frac{\tau_\rho}{G}$.
   (b) $\gamma_\rho = \frac{\tau_\rho}{E}$.
   (c) $\gamma_\rho = \frac{\tau_\rho}{E(1+\mu)}$.
2. Jak je definován vztah pro výpočet maximálního smykového napětí pro tyč, namáhanou krutem?
   (a) $\tau_k = \frac{M_k}{W_k}$.
   (b) $\tau_k = \frac{M_k}{I_p}$.
   (c) $\tau_k = \frac{M_k \cdot L}{G \cdot I_p}$.
3. Jak je definován vztah pro výpočet modulu průřezu v krutu plného kruhového průřezu?
   (a) $W_k = \frac{\pi d^3}{32}$.
   (b) $W_k = \frac{\pi d^3}{16}$.
   (c) $W_k = \frac{\pi d^4}{16}$.
4. Jak je definován vztah pro výpočet úhlu zkroucení φ?
   (a) $\varphi = \frac{M_k \cdot L}{E \cdot W_k}$.
   (b) $\varphi = \frac{M_k \cdot d}{G \cdot I_p}$.
   (c) $\varphi = \frac{M_k \cdot L}{G \cdot I_p}$.
5. Navrhněte jiný způsob vyjádření deformační podmínky u příkladu 7.1. Je možná analogie s příkladem 6.4?

Kapitola 8

Rovinný ohyb štíhlých nosníků

Průvodce studiem

Ohyb patří spolu s tahem–tlakem a krutem k základním typům namáhání. V následující kapitole se budeme zabývat rovinným ohybem, objasníme si vzájemné vztahy mezi ohybovým momentem a ohybovým napětím. Představíme si dva rozdílné přístupy pro určování průhybu nosníku v konkrétním místě a zmíníme se o dimenzování a pevnostní kontrole nosníků. Při studiu této kapitoly využijeme poznatků o kvadratických momentech průřezu a tahu–tlaku, se kterými jsme se setkali v kapitolách 1 a 6.

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete:

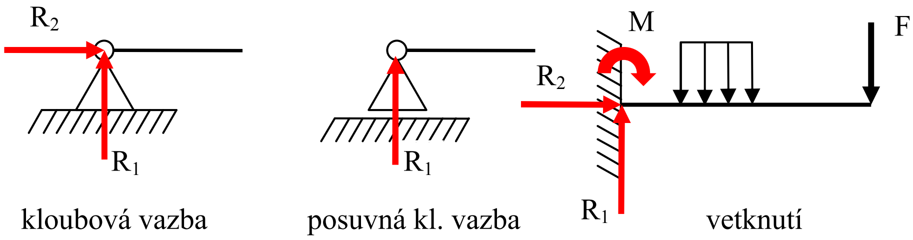
- umět stanovit vnitřní silové účinky dle Schwedlerovy věty
- schopni stanovit ohybové napětí v libovolném místě příčného průřezu nosníku
- umět provádět pevnostní kontroly a dimenzování nosníků, namáhaných ohybem
- schopni stanovit velikost průhybu a natočení v kterémkoliv místě ohýbaného nosníku na základě dvou odlišných přístupů
- umět řešit staticky neurčité nosníky

8.1 Vymezení základních pojmů

Prut, namáhaný ohybem, se nazývá nosník. Ohybem je nosník namáhán tehdy, jestliže rovina všech působících sil a silových dvojic obsahuje podélnou osu nosníku.

Definice 8.1. Roviny, v nichž působí síly a momenty při ohybu nosníku, tvoří tedy svazek rovin, jejichž průsečnicí je podélná osa nosníku. Jestliže se z tohoto svazku rovin vyberou dvě roviny, obsahující vždy jednu z hlavních centrálních os průřezu přímého nosníku, pak se jedná o *rovinný ohyb*.

Na následujícím obrázku jsou znázorněny základní druhy podpor v rovině, které byly probírány již v mechanice tuhých těles a jsou zde připomenuty reakce, které se u těchto uložení zavádějí při uvolňování.



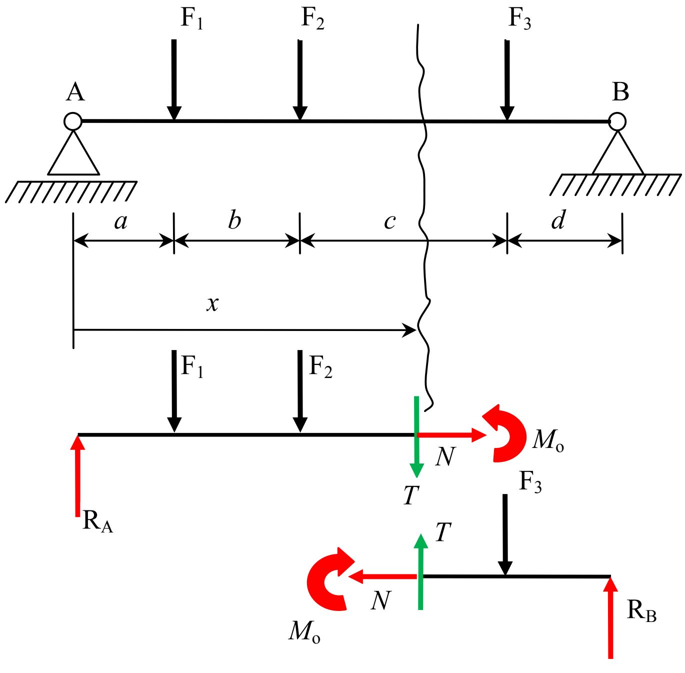
Obr. 8.1

Mluvíme o staticky určitých nosnících, pokud počet neznámých statických účinků odpovídá počtu rovnic rovnováhy a naopak o staticky neurčitých nosnících, pokud je počet neznámých statických účinků větší než počet rovnic rovnováhy.

V praxi se nejčastěji vyskytují prizmatické nosníky s jednou osou symetrie průřezu. Pokud všechny zátěžné účinky leží v rovině, tvořené osou symetrie průřezu a střednicí, pak střednice deformovaného nosníku leží v téže rovině, tzv. *rovině ohybu* a mluvíme o *rovinném ohybu*.

8.1.1 Vnitřní silové účinky

Při řešení vnitřních silových účinků využíváme metodu navrženou Leonardem Eulerem, konkrétně metodu řezu. Prutem vedeme kolmo k ose myšlený řez, který nám objekt rozdělí na levou a pravou část. Nyní si pravou část od řezu odmyslíme, a aby zůstala levá část v rovnováze, připojíme v těžišti řezu výslednici sil rovnoběžných s normálou řezu N, normálovou vnitřní sílu N, výslednici sil v rovině řezu respektive posouvající sílu T a výsledný ohybový moment M_o, tímto se vnitřní silové účinky stávají účinky vnějšími, přístupnými pro statické výpočty (viz obr. 8.2).



Obr. 8.2

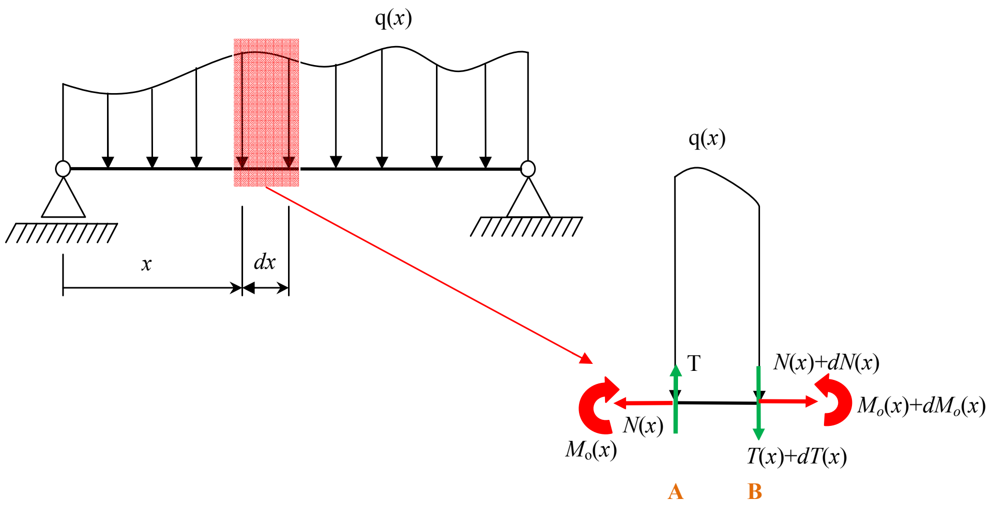
Nyní můžeme vyjádřit vnitřní silové účinky s využitím podmínek rovnováhy (dvou silových a jedné momentové)

$$\begin{aligned} T(x) &= R_A - F_1 - F_2, \\ M_o(x) &= R_A \cdot x - F_1(x-a) - F_2(x-a-b), \\ N(x) &= 0. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Zvládnutí metody řezu je zcela zásadní pro stanovení průhybu nosníků, jejich dimenzování i kontrolu. U zmíněných úloh často potřebujeme stanovit průběh ohybového momentu v jednotlivých intervalech ve formě analytických výrazů. Při výpočtech je nutné dodržovat znaménkovou dohodu (viz obr. 8.3).

8.2 Schwedlerovy věty a stanovení průběhu vnitřních účinků

Základní vztah mezi zatížením a vnitřními silami je odvozen z podmínek rovnováhy na elementu nosníku (obr. 8.3).



Obr. 8.3

Sestavení podmínek rovnováhy na elementu nosníku:

V prvním kroku sestavíme podmínku rovnováhy sil ve směru osy y, tedy

$$\sum_i F_{iy} = 0 = T(x) - q(x) \cdot dx - (T(x) + \mathrm{d}T(x)). \tag{8.2}$$

Úpravou získáme výraz vyjadřující vztah mezi hodnotou intenzity spojitého zatížení a první derivací posouvající síly $T(x)$, která je obecně funkcí souřadnice x, nebo-li *I. Schwedlerovu větu*

$$q(x) = -\frac{\mathrm{d}T(x)}{\mathrm{d}x}. \tag{8.3}$$

Věta 8.1. *I. Schwedlerova věta*: Intenzita spojitého zatížení se rovná záporně vzaté derivaci posouvající síly podle diferenciálu střednice.

Ve druhém kroku sestavíme rovněž rovnici rovnováhy, nyní však momentovou

$$\sum_i M_{iB} = 0 = T(x) \cdot \mathrm{d}x + M_o(x) - q(x) \cdot dx \cdot \frac{\mathrm{d}x}{2} - (M_o(x) + \mathrm{d}M_o(x)). \tag{8.4}$$

Sečtením příslušných výrazů a úpravou (hodnotu výrazu $\mathrm{d}x \cdot \frac{\mathrm{d}x}{2}$ můžeme zanedbat) obdržíme II. Schwedlerovu větu

$$T(x) = \frac{\mathrm{d}M_o(x)}{\mathrm{d}x}. \tag{8.5}$$

Věta 8.2. *II. Schwedlerova věta*: Posouvající síla se rovná derivaci ohybového momentu podle diferenciálu střednice.

II. Schwedlerova věta nám mimo jiné určuje místo s maximálním ohybovým momentem. Jinými slovy, v místě, kde je posouvající síla nulová, nebo dochází ke změně jejího znaménka, se nachází extrém ohybového momentu. Poloha extrému u funkce jedné proměnné $f(x)$ je dána podmínkou

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = 0. \tag{8.6}$$

Z rovnic (8.3) a (8.6) plyne zajímavý důsledek: existence místa u nosníku, v němž působí jen ohybový moment a nikoli posouvající síla; v takovém případě je $M_o =$ $=$konst., $T = 0$ (čistý nebo prostý ohyb). Neexistuje však nosník, v němž by působila jen posouvající síla a nikoli ohybový moment. Je-li totiž $M_o = 0$, je podle (8.6) též $T = 0$.

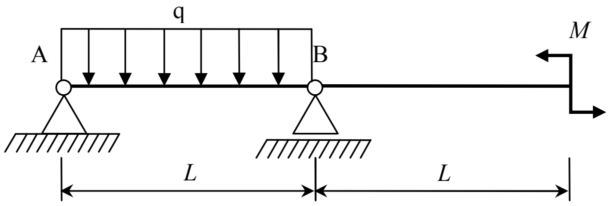
8.2.1 Stanovení průběhu vnitřních silových účinků metodou řezu

Při určování vnitřních silových účinků v jednotlivých průřezech nosníku postupujeme následujícím způsobem:

1. Posouzení statické určitosti nosníku.
2. Výpočet reakcí z podmínky rovnováhy.
3. Rozdělení střednice nosníku na jednotlivé intervaly (okraje intervalů tvoří osamělé síly, momenty silové dvojice, podpory či hranice spojitého zatížení).
4. Vyjádření vnitřních silových účinků v intervalech jako funkce souřadnice x.
5. Nalezení bodů, ve kterých je posouvající síla nulová nebo mění znaménko.
6. Výpočet extrému ohybového momentu v těchto bodech.
7. Vykreslení průběhu jednotlivých vnitřních silových účinků

Příklad 8.1. Určete průběh vnitřních silových účinků ($T(x)$ a $M_o(x)$) na následujícím nosníku (obr. 8.4).

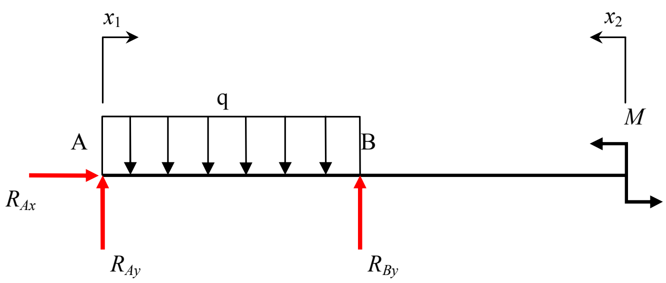
Dáno: $M = 50\ Nm$, $q = 200\ kN/m$, $L = 1\ m$.



Obr. 8.4

Ad 1: Posouzení statické určitosti nosníku.

Námi vyšetřovaný nosník má celkem 3 neznámé reakce (obr. 8.5), jejichž počet se shoduje s počtem nezávislých rovnic rovnováhy v rovině. Nosník je tedy staticky určitý.



Obr. 8.5

Ad 2: Výpočet reakcí z podmínek rovnováhy.

$$
\begin{aligned}
\sum F_{ix} &= 0 = R_{Ax}, \\
\sum F_{iy} &= 0 = R_{Ay} - q \cdot L + R_{By}, \\
\sum M_{iB} &= 0 = R_{Ay} \cdot L - \frac{1}{2} \cdot q \cdot L^2 - M.
\end{aligned}
\tag{P1}
$$

Po úpravě a dosazení dostáváme: $R_{Ay} = 150\ N$, $R_{By} = 50\ N$, $R_{Ax} = 0\ N$.

Ad 3: Rozdělení střednice nosníku na jednotlivé intervaly.

Interval x_1	Interval x_2
$0 \leqq x_1 \leqq L$	$0 \leqq x_2 \leqq L$
$T(x_1) = R_{Ay} - q \cdot x_1$	$T(x_2 = 0)$
$M_o(x_1) = R_{Ay} \cdot x_1 - q \cdot \frac{x_1^2}{2}$	$M_o(x_2) = M$

(P2)

Ad5: Nalezení bodů, ve kterých je posouvající síla nulová nebo mění znaménko.

Vyjdeme ze vztahu pro $T(x1)$ a položíme jej nule. Odtud vyjde $x_1 = 0,75\ m$.

Ad6: Výpočet extrému ohybového momentu v těchto bodech

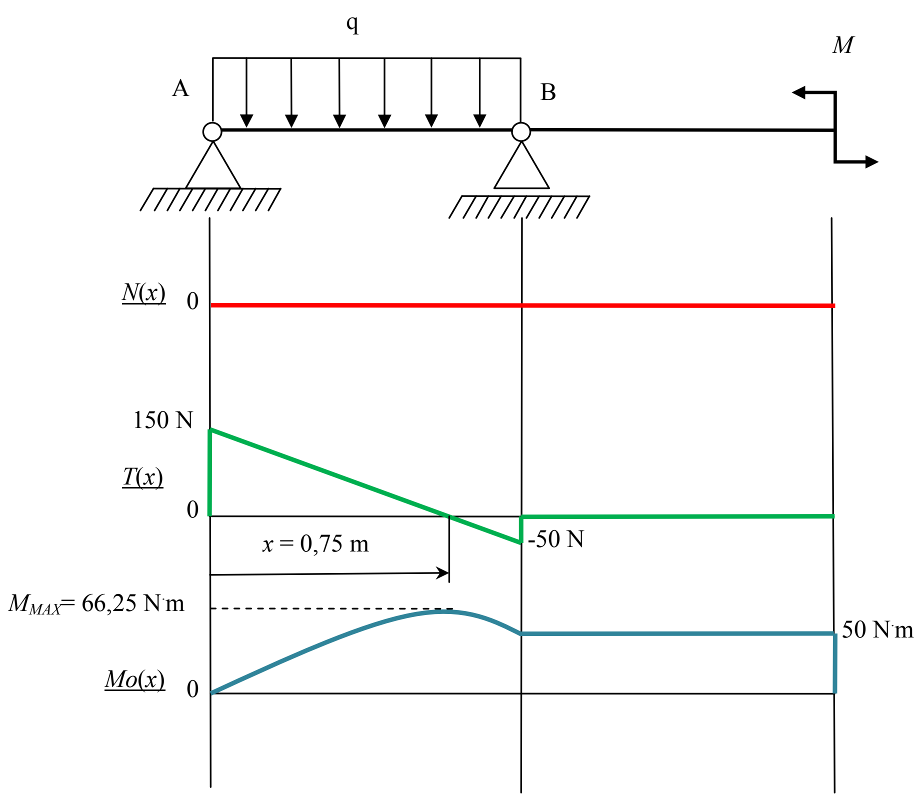
$$M_{MAX} = M_o(x_1 = 0,75) = 66,25\ Nm. \tag{P3}$$

Ad7: Vykreslení průběhu jednotlivých vnitřních silových účinků.

Nejprve je vhodné vypočítat hodnoty $T(x)$ a $M_o(x)$ na okrajích intervalů, tedy

$$\begin{aligned} T(x_1 = 0) &= R_{Ay} = 150\ N, \\ T(x_1 = L) &= R_{Ay} - q \cdot L = -50\ N, \\ M_o(x_2 = 0) &= 0\ N, \\ M_o(x_2 = L) &= R_{Ay} \cdot L - \frac{q}{2}L^2 = 50\ Nm. \end{aligned} \tag{P4}$$

Jelikož dle (P2) je $T(x1)$ lineární funkcí, průběh posouvající síly odpovídá přímce. Podobně v prvním intervalu bude průběh ohybového momentu znázorněn parabolou, neboť $M_o(x1)$ je funkcí kvadratickou, viz obr. 8.6. V druhém intervalu je situace jednodušší.



Obr. 8.6

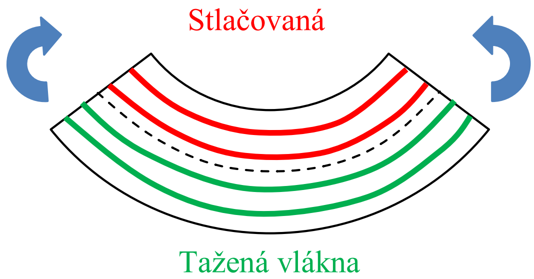
▲

8.3 Výpočet napětí

Předpoklady řešení:

1. Příčné průřezy zůstávají i po deformaci rovinné, nebortí se, dojde pouze k jejich natočení o určitý úhel. (Bernoulliho hypotéza).
2. Je-li nosník namáhán kladným ohybovým momentem, pak horní vlákna jsou stlačována a spodní jsou natahována, tyto deformace probíhají spojitě po ploše průřezu, takže existuje vrstva vláken, kde přechází tahová deformace v tlakovou. V této tzv. *neutrální vrstvě* jsou vlákna s nulovým prodloužením. Stopa neutrální vrstvy v rovině průřezu se nazývá *neutrální osa*.
3. Deformace vláken nezávisí na jejich šířce a průřezu.

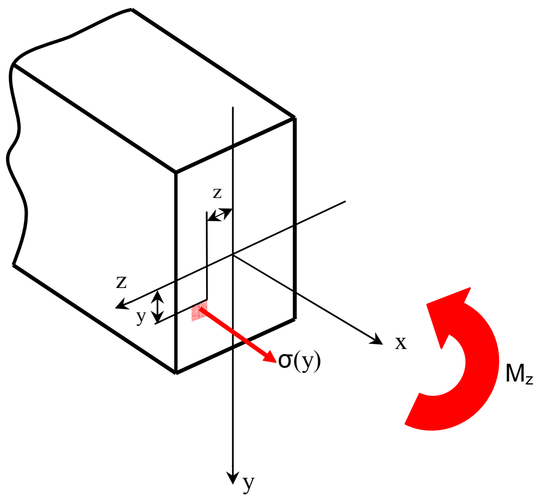
Mějme nosník, namáhaný kladným ohybovým momentem (viz obr. 8.7). Analyzujme nyní jeho příčný průřez.



Obr. 8.7

Sestavíme-li silovou podmínku rovnováhy v ose x (viz obr. 8.8), platí

$$\sum_i F_{ix} = 0 = \int_{(S)} \sigma(y)\mathrm{d}S. \tag{8.7}$$



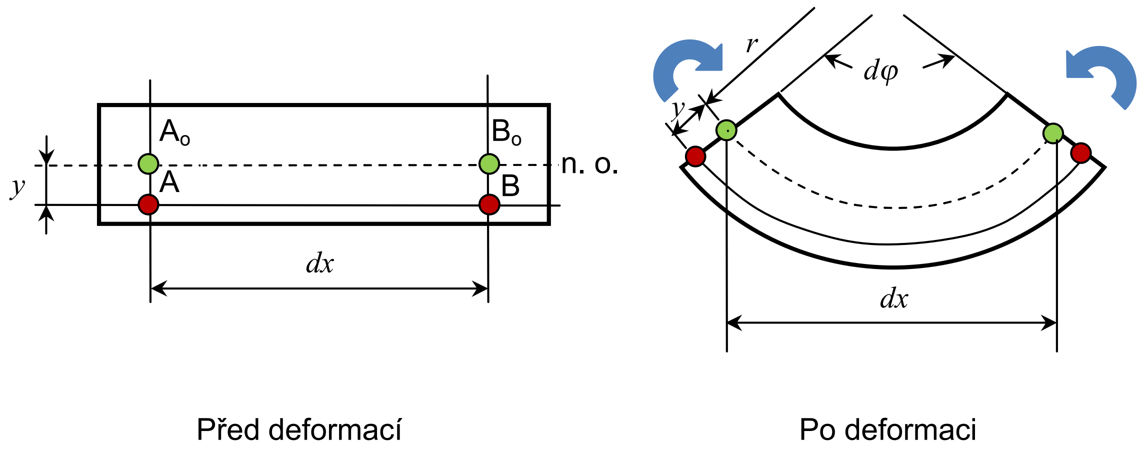
Obr. 8.8

Pro moment M_z lze psát podmínku ekvivalence (viz obr. 8.8) ve tvaru

$$M_z = \int_{(S)} y \cdot \sigma(y)\mathrm{d}S. \tag{8.8}$$

8.3.1 Geometrické podmínky deformace

Uvažujme element nosníku, namáhaného prostým ohybem dle obr. 8.9 s poloměrem křivosti neutrální vrstvy r.



Obr. 8.9

Budeme nyní analyzovat stav deformace zatíženého nosníku. Původní délka vlákna AB je $\mathrm{d}x$. Po zatížení bude platit

$$AB = (r + y) \cdot \mathrm{d}\varphi, \tag{8.9}$$

$$A_0B_0 = r \cdot \mathrm{d}\varphi. \tag{8.10}$$

Poměrné prodloužení vlákna ve vzdálenosti y od neutrální osy určíme dle následujícího vztahu

$$\varepsilon(y) = \frac{AB - A_0B_0}{A_0B_0} = \frac{(r + y) \cdot \mathrm{d}\varphi - r \cdot \mathrm{d}\varphi}{r \cdot \mathrm{d}\varphi} = \frac{y}{r}. \tag{8.11}$$

Pro napětí $\sigma(y)$ uvažujme platnost Hookeova zákona (je zde jednoosá napjatost)

$$\sigma(y) = \varepsilon(y) \cdot E. \tag{8.12}$$

Po dosazení za $\varepsilon(y)$ z (8.11) dostáváme

$$\sigma(y) = \frac{y}{r} \cdot E. \tag{8.13}$$

Je evidentní, že normálové napětí $\sigma(y)$ závisí na souřadnici y lineárně. Dosadíme-li nyní (8.13) do rovnice momentové rovnováhy (8.8) získáme

$$\frac{E}{r} \cdot \int\limits_S y^2 \mathrm{d}S = M_z, \tag{8.14}$$

kde

$$\int\limits_S y^2 \mathrm{d}S = I_z. \tag{8.15}$$

Výraz (8.15) nám představuje kvadratický moment průřezu I_z vzhledem k neutrální ose průřezu nosníku. Ze vztahu (8.14) můžeme rovněž vyjádřit křivost

$$\frac{1}{r} = \frac{M_z}{E \cdot I_z}, \tag{8.16}$$

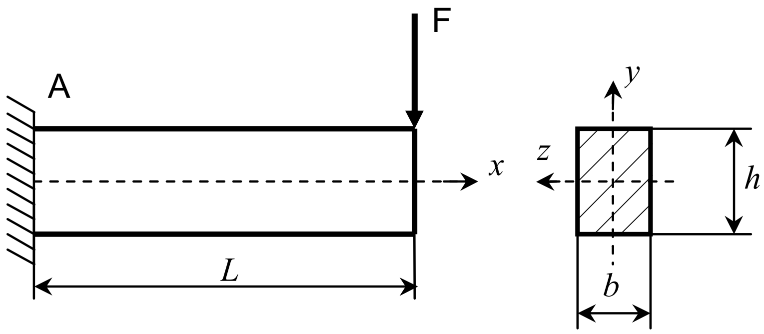
kterou využijeme pro finální vyjádření napětí z rovnice (8.13)

$$\sigma(y) = \frac{M_z}{I_z} \cdot y, \tag{8.17}$$

kde M_z je ohybový moment vzhledem k vyšetřovanému průřezu, I_z je centrální kvadratický moment průřezu k ose z a y je vzdálenost vyšetřovaného místa od neutrální osy.

Příklad 8.2. Určete napětí v místě vetknutí nosníku A.

Dáno: $b = 10\ mm$, $h = 20\ mm$, $L = 300\ mm$, $F = 200\ N$, $E = 210000\ MPa$.



Obr. 8.10

Řešení:

1. Výpočet kvadratického momentu průřezu

$$I_z = \frac{1}{12} b \cdot h^3 = 6666,6\ mm^4. \tag{P1}$$

2. Určení ohybového momentu v místě A

$$M_z = F \cdot L = 60000\ Nmm. \tag{P2}$$

3. Výpočet ohybového napětí v místě A

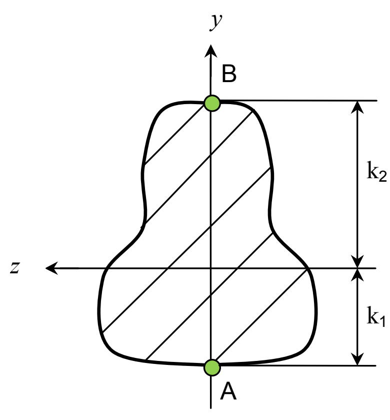
$$\sigma(y = 10\ mm) = \frac{M_z}{I_z} \cdot y = 90\ MPa, \tag{P3}$$

kde y určuje vzdálenost od neutrální osy, v našem případě $y = h/2 = 10\ mm$. V místě A jsou vlákna namáhána tahovým napětím o velikosti $90\ MPa$.

▲

8.4 Pevnostní kontrola a dimenzování

Mějme nosník o průřezu se svislou osou symetrie dle obr. 8.11.



Obr. 8.11

Hodnoty k_1, k_2 nám udávají vzdálenosti krajních vláken od těžiště, resp. neutrální osy, která jím prochází. Pro body průřezu, odpovídající krajním vláknům, poté s využitím 8.17 platí

$$\begin{aligned} \sigma(y) &= \frac{M_z}{I_z} \cdot k_1 = \frac{M_z}{W_{o1}}, \\ \sigma(y) &= \frac{M_z}{I_z} \cdot k_2 = \frac{M_z}{W_{o2}}, \end{aligned} \tag{8.18}$$

kde W_{o1}, W_{o2} vyjadřují tzv. moduly průřezu v ohybu. Při pevnostní kontrole postupujeme následovně:

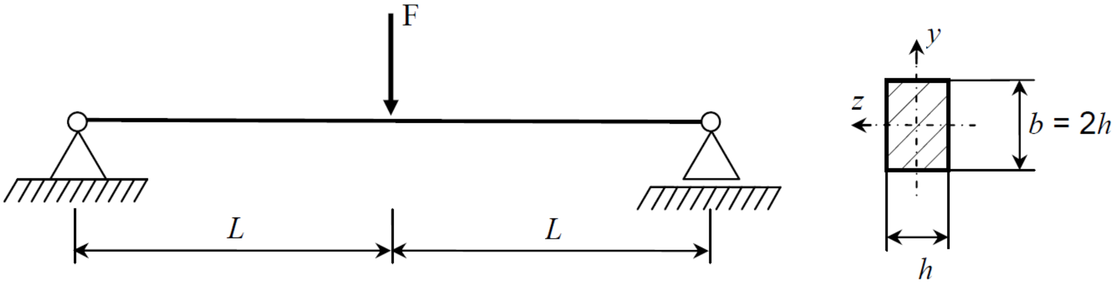
1. Výpočet reakcí.
2. Nalezení bodů, ve kterých je posouvající síla nulová, nebo mění znaménko (viz kapitola 8.2.1).
3. Výpočet extrému ohybového momentu v těchto bodech a vyhodnocení globálního extrému v průběhu ohybového momentu.
4. Určení maximální vzdálenosti krajních vláken průřezu od neutrální osy.
5. Výpočet ohybového napětí pro tato vlákna v místě maximálního ohybového momentu.
6. Porovnání vypočteného napětí s napětím dovoleným, musí platit

$$\sigma_{\text{vypočtené}} \leqq \sigma_{\text{dovolené}}.$$

U dimenzování nosníku postupujeme prakticky stejným způsobem jako v případě pevnostní kontroly; v posledním kroku však z podmínky $\sigma_{\text{vypočtené}} \leqq \sigma_{\text{dovolené}}$ určíme charakteristický rozměr daného průřezu. Předveďme si nyní nastíněný postup na jednoduchém příkladu.

Příklad 8.3. Mějme nosník obdélnikového průřezu, uchycený kloubovou vazbou na jedné straně a posuvnou kloubovou vazbou na straně druhé (obr. 8.12). Nosník je v polovině své délky namáhán silou F. Úkolem je určit rozměr h tak, aby maximální ohybové napětí v nejvíce namáhaných vláknech nepřesáhlo dovolenou hodnotu napětí.

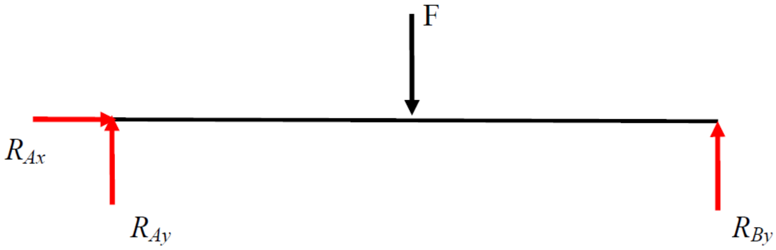
Dáno: F, L, $\sigma_{\text{dovolené}}$.



Obr. 8.12

Řešení:

1. Určení reakcí



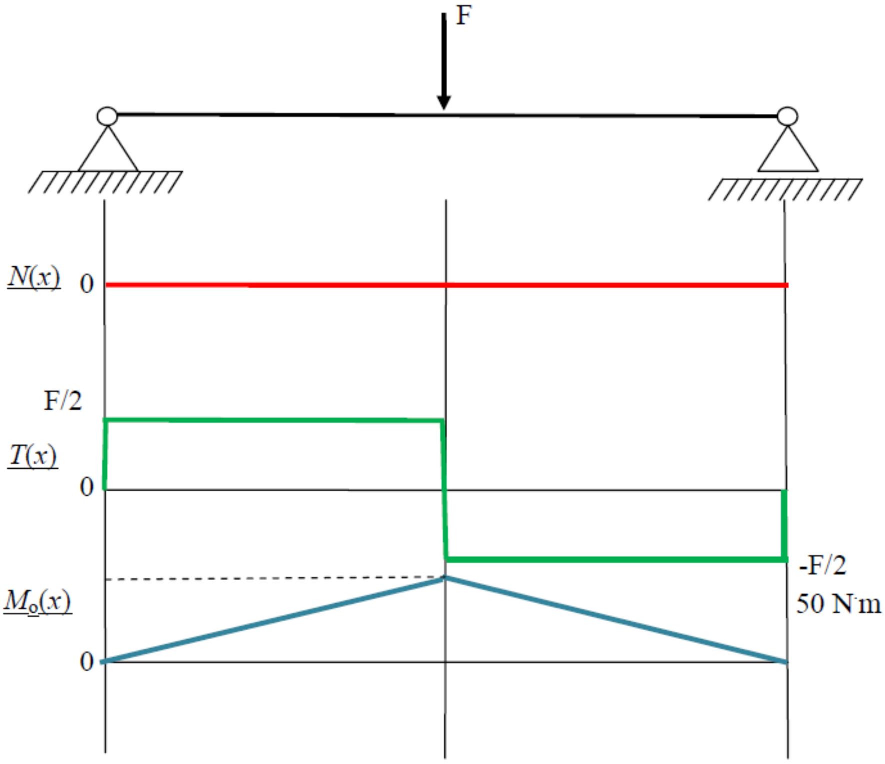
Obr. 8.13

$$
\begin{aligned}
\sum_i F_{ix} &= 0 = R_{Ax}, \\
\sum_i F_{iy} &= 0 = R_{Ay} + R_{By} - F, \\
\sum_i M_{iA} &= 0 = F \cdot \frac{L}{2} - R_{By} \cdot L.
\end{aligned}
\tag{P1}
$$

Řešením rovnic (P1) získáme velikost reakcí

$$
R_{Ay} = R_{By} = \frac{F}{2}.
\tag{P2}
$$

2. Průběh vnitřních silových účinků.



Obr. 8.14

3. Výpočet maximálního napětí v krajních vláknech nejvíce namáhaného místa

$$\sigma_{max} = \frac{M_z}{I_z} \cdot y, \tag{P3}$$

kde

$$M_z = \frac{F}{2} \cdot L,$$
$$I_z = \frac{1}{12} \cdot h \cdot b^3 = \frac{1}{12} \cdot h \cdot (2 \cdot h)^3 = \frac{2}{3} \cdot h^4,$$
$$y = h. \tag{P4}$$

Po dosazení do první rovnice v (P3) a úpravě

$$\sigma_{max} = \frac{3 \cdot F \cdot L}{4 \cdot h^3}.$$

(P5)

Z podmínky $\sigma_{\text{vypočtené}} \leqq \sigma_{\text{dovolené}}$ můžeme vyjádřit

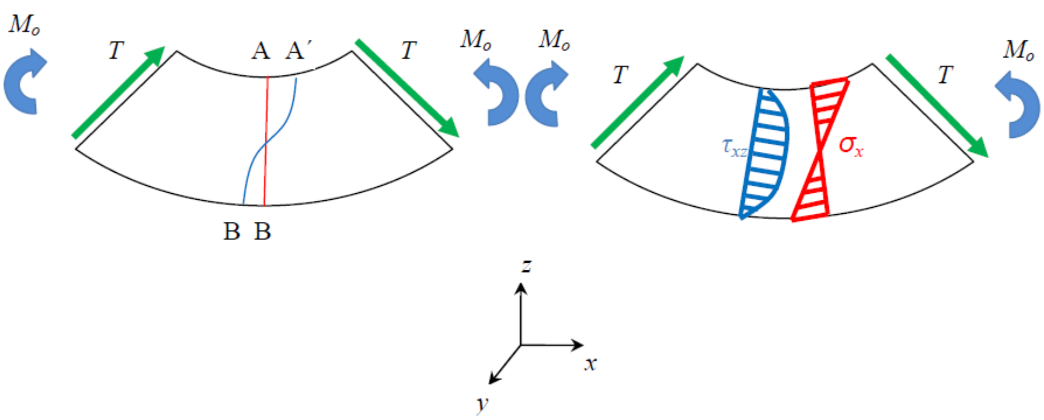
$$h \geqq \sqrt[3]{\frac{3 \cdot F \cdot L}{4 \cdot \sigma_{dov}}}.$$

(P6)

▲

8.5 Zahrnutí dalších vlivů do výpočtu

V kapitole 8.3 jsme mimo jiné předpokládali, že v nosníku působí jen konstantní ohybový moment. Ve skutečnosti jsou mnohem častější případy, kdy v nosníku působí kromě samotného ohybového momentu též posouvající síla. Ta vyvozuje v průřezu smyková napětí τ_{xz}, která mají v případě obdélníkového průřezu parabolický průběh na rozdíl od ohybového napětí (obr. 8.15).



Obr. 8.15

Místo rovinných průřezů AB podle Bernoulliho hypotézy dostaneme zakřivené plochy A'B'. Bernoulliho hypotéza proto neplatí, ani podélná vlákna se nedeformují nezávisle; jejich vzájemné působení představuje právě tečné napětí τ_{xz}.

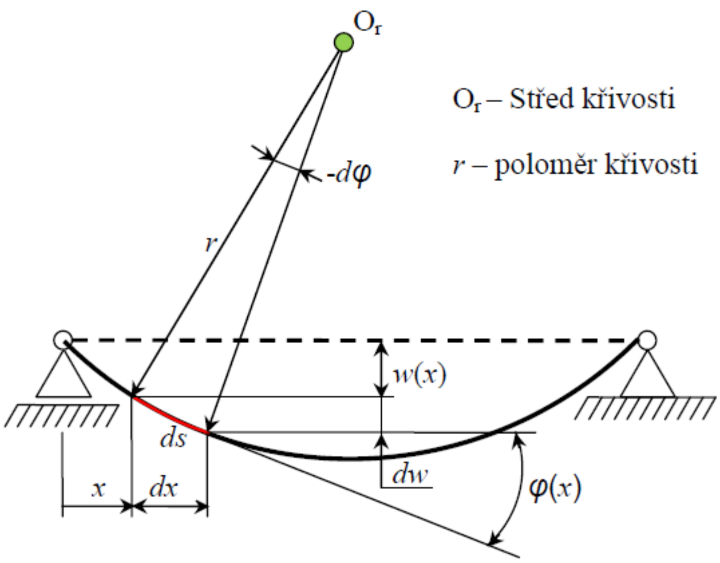
Za určitých předpokladů se dají pro různé průřezy prutů jednoznačně vyčíslit smyková napětí v libovolném místě od posouvající síly, včetně výsledné smykové síly, jež je staticky ekvivalentní posouvající síle. Má-li průřez dvě osy symetrie, prochází výsledná síla těžištěm. Jinak tomu je však u nesymetrických průřezů. Pokud rovina zatížení není rovinou symetrie prutu, výslednice smykových sil se protínají v tzv.

středu smyku. Prochází-li rovina zatížení střediskem smyku, nebude docházet ke kroucení.

Odvození polohy středu smyku u obecného průřezu je součástí teorie kroucení tenkostěnných prutů otevřeného průřezu. V případě, že vnější síly nepůsobí v rovině symetrie průřezu, jedná se o ohyb prostorový, který se řeší superpozicí dvou případů rovinného ohybu. Tyto úlohy spadají do navazujících kurzů pružnosti a pevnosti.

8.6 Diferenciální rovnice průhybové čáry

Pro odvození diferenciální rovnice průhybové čáry vyjdeme z obr. 8.16.



Obr. 8.16

Platí

$$\mathrm{d}s = r \cdot (-\mathrm{d}\varphi), \tag{8.19}$$

$$\frac{1}{r} = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}. \tag{8.20}$$

Dále

$$\mathrm{tg}(\varphi) = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = w', \text{ odtud } \varphi = \mathrm{arctg}(w'). \tag{8.21}$$

Připravme si následující výraz

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}. \tag{8.22}$$

S využitím 8.21 je $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}$ rovno $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cdot [\mathrm{arctg}(w')]$.

Pozn.: pro derivaci $\mathrm{arctg}(x)$ *platí:* $[\mathrm{arctg}(x)]' = 1/(1+x^2)$.

Výraz pro $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}$ poté bude

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1+(w')^2} \cdot w''. \tag{8.23}$$

Dále lze z obr. 8.16 psát

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}w^2} = \mathrm{d}x\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)^2} = \mathrm{d}x\sqrt{1+(w')^2}, \tag{8.24}$$

odkud

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\sqrt{1+(w')^2}}. \tag{8.25}$$

Dosazením vztahů (8.23) a (8.25) do vztahu (8.22) dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = \frac{w''}{1+(w')^2} \cdot \frac{1}{[1+(w')^2]^{\frac{1}{2}}} \tag{8.26}$$

nebo-li

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = \frac{w''}{[1+(w')^2]^{\frac{3}{2}}}. \tag{8.27}$$

Prostřednictvím vztahu (8.27) můžeme rovněž vyjádřit křivost z výrazu (8.20), tedy

$$\frac{1}{r} = -\frac{w''}{[1+(w')^2]^{\frac{3}{2}}}. \tag{8.28}$$

V kapitole 8.3.1 jsme si odvodili vztah pro křivost v následujícím tvaru

$$\frac{1}{r} = \frac{M_z}{E \cdot I_z}. \tag{8.29}$$

Srovnáním s (8.28) pak

$$\frac{w''}{[1+(w')^2]^{\frac{3}{2}}} = -\frac{M_z}{E \cdot I_z}. \tag{8.30}$$

Pro malé úhly natočení můžeme uvažovat:

1. Teorie malých deformací vede k malým průhybům. Při nízkých hodnotách průhybu (podle norem 1/100 až 1/1000) se ukazuje, že úhel pootočení je menší než 1°. Tangenta tak malého úhlu je poté rovna samotnému úhlu φ_x, tedy

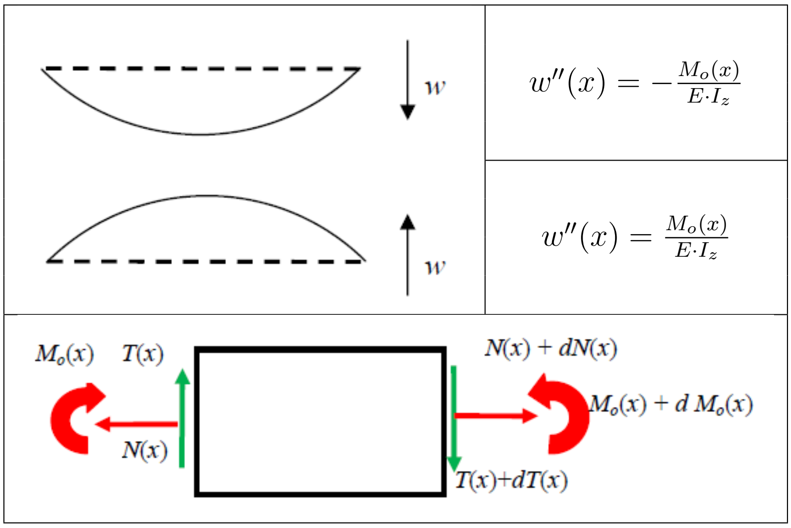
$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = w' = \mathrm{tg}(\varphi) \approx \varphi. \tag{8.31}$$

2. Pro malý úhel natočení lze pak ve jmenovateli zanedbat člen $(w')^2$ oproti jedničce.

Získali jsme přibližnou diferenciální rovnici průhybové čáry ve tvaru

$$w'' = -\frac{M_z}{E \cdot I_z}, \tag{8.32}$$

je však nutné, abychom se věnovali znaménkové konvenci. Rovnice (8.32) je platná, jestliže je dodržena znaménková dohoda pro určování průběhu ohybového momentu.



8.7 Analytická metoda

Princip analytické metody spočívá v integraci přibližné diferenciální rovnice průhybové čáry (8.32). První integrací rovnice (8.32) získáme vztah pro úhel natočení

$$\varphi(x) = w'(x) = -\int\limits_L \frac{M_o(x)}{E \cdot I_z} \mathrm{d}x + C_1. \tag{8.33}$$

Opětovnou integrací získáme rovnici průhybové čáry

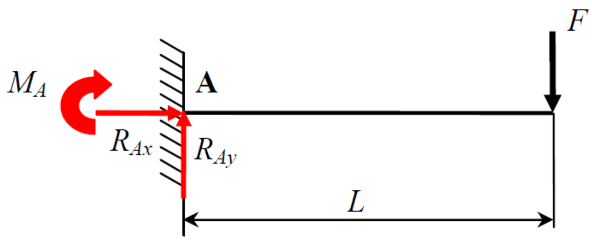
$$w(x) = \int\limits_L \left[-\int\limits_L \frac{M_o(x)}{E \cdot I_z} \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}x + C_1 \cdot x + C_2. \tag{8.34}$$

Integrační konstanty C_1, C_2 určíme z okrajových podmínek konkrétní úlohy.

Aplikaci analytické metody si předvedeme na následujícím jednoduchém příkladu.

Příklad 8.4. Mějme nosník na jedné straně vetknutý, zatížený osamělou silou F na straně druhé (obr. 8.17). Určete rovnici průhybové čáry.

Dáno: F, L, E, I_y.



Obr. 8.17

Řešení:

1. Výpočet reakcí

$$\sum_i F_{ix} = 0 = R_{Ax},$$

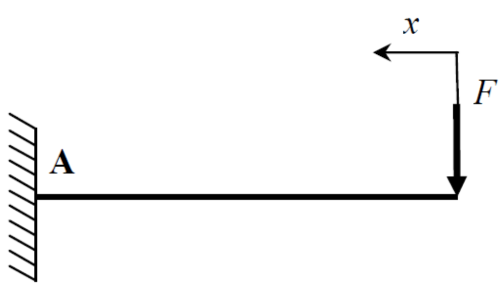
$$\sum_i F_{iy} = 0 = R_{Ay} - F, \quad \text{odtud} \quad R_{Ay} = F,$$

$$\sum_i M_{iA} = 0 = M_A + F \cdot L, \quad \text{odtud} \quad M_A = -F \cdot L.$$

(P1)

Jestliže zavedeme souřadnici, potřebnou pro stanovení průběhu ohybového momentu zprava, není potřeba určovat reakce, což platí obecně pro staticky určitý vetknutý nosník.

2. Určení rovnice průhybové čáry.



Obr. 8.18

Pro průběh ohybového momentu platí

$$M(x) = -F \cdot x.$$

(P2)

Po dosazení do (8.32) a integraci

$$w'(x) = -\frac{1}{E \cdot I_z} \cdot \int_L -F \cdot x \cdot \mathrm{d}x$$

(P3)

nebo-li

$$w'(x) = \frac{1}{E \cdot I_z} \cdot \left(\frac{F \cdot x^2}{2} + C_1 \right) = \varphi(x).$$

(P4)

Opětovnou integrací získáme

$$w(x) = \frac{1}{E \cdot I_z} \cdot \left(\frac{F \cdot x^3}{6} + C_1 \cdot x + C_2 \right). \tag{P5}$$

Integrační konstanty určíme z následujících okrajových podmínek

$$\begin{aligned} w(x = L) &= 0, \\ w'(x = L) &= \varphi(x = L) = 0. \end{aligned} \tag{P6}$$

Po dosazení do (P4) a (P5) je

$$C_1 = -\frac{F \cdot L^2}{2}, \quad C_2 = \frac{F \cdot L^3}{3}. \tag{P7}$$

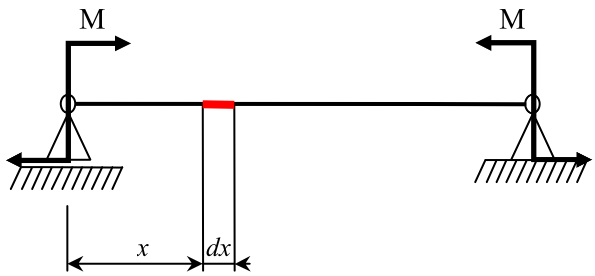
Rovnice průhybové čáry má poté konečný tvar

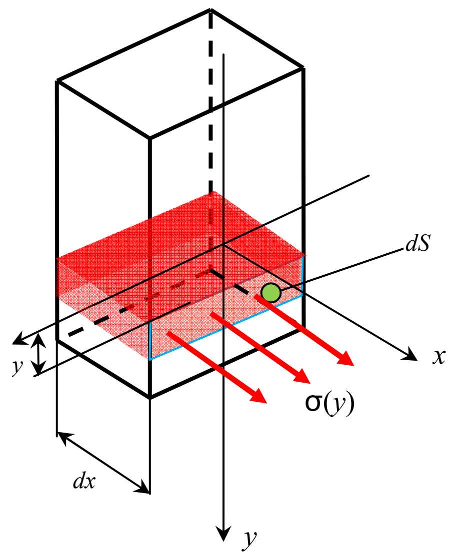
$$w(x) = \frac{1}{E \cdot I_z} \cdot \left(\frac{F \cdot x^3}{6} - \frac{F \cdot L^2}{2} \cdot x + \frac{F \cdot L^3}{3} \right). \tag{P8}$$

▲

8.8 Využití Castigliánovy věty

Podobně jako u tahu–tlaku (kapitola 6.4) budeme pro aplikaci Castigliánovy věty potřebovat vztah pro deformační energii. Mějme nosník, namáhaný prostým ohybem (obr. 8.19).





Obr. 8.19

Pro deformační energii platí

$$dU = \int_V U_0 \cdot dV, \tag{8.35}$$

kde U_0 vyjadřuje hustotu deformační energie. Pro jednoosý napěťový stav platí (viz kapitola 6)

$$U_0 = \frac{\sigma^2}{2 \cdot E}.$$

Po dosazení do rovnice (8.37) dostáváme

$$dU = \int_S \int_L \frac{\sigma^2(z)}{2 \cdot E} \cdot dS \cdot dx, \tag{8.36}$$

$$dU = \int_L \frac{M^2(x)}{2 \cdot E \cdot I_z} \cdot dx. \tag{8.37}$$

Nyní použijeme vztah pro průběh normálového napětí $\sigma^2(z)$ po průřezu (8.17) a po následné integraci obdržíme

$$U = \frac{M^2(x) \cdot L}{2 \cdot E \cdot I_z}. \tag{8.38}$$

Nyní již můžeme dosadit do Castigliánovy věty (5.29), přičemž posuv ve směru působící síly v tomto případě odpovídá průhybu

$$w_k = \frac{\partial U}{\partial F_k}. \tag{8.39}$$

Definice 8.2. *Pokud lze celkou deformační energii U nosníku vyjádřit v závislosti na vnějším zatížení, pak její parciální derivace dle vnější síly F_i, dává hodnotu průhybu w_i v bodě i (tj. v místě působiště síly F_i). Kladná hodnota posunutí u_i je ve směru síly F_i.*

Obdobně lze vyjádřit úhel natočení z druhé Castigliánovy věty.

Definice 8.3. *Pokud lze celkou deformační energii U nosníku vyjádřit v závislosti na vnějším zatížení, pak její parciální derivace dle momentu silové dvojice M_{oi} , dává hodnotu úhlu natočení φ_i v bodě i (tj. v místě působiště momentu M_{oi}, tedy*

$$\varphi_j = \frac{\partial U}{\partial M_j}. \tag{8.40}$$

Kladná hodnota úhlu natočení φ_i odpovídá smyslu otáčení momentu M_{oi}.

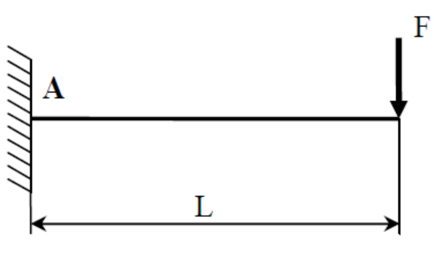
Do vztahů 8.39 a 8.40 můžeme dosadit výraz pro deformační energii (8.37), poté

$$w_k = \frac{1}{E \cdot I_z} \int_L M(x) \cdot \frac{\partial M(x)}{\partial F_k} \cdot \mathrm{d}x, \tag{8.41}$$

$$\varphi_j = \frac{1}{E \cdot I_z} \int_L M(x) \cdot \frac{\partial M(x)}{\partial M_k} \cdot \mathrm{d}x. \tag{8.42}$$

Příklad 8.5. Určete průhyb pod silou F.

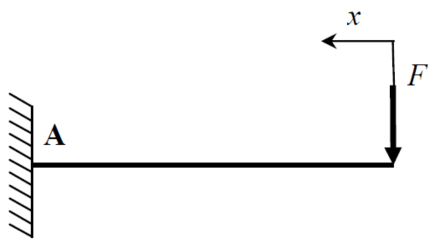
Dáno: F, L, E, I_z.



Obr. 8.20

Řešení:

Na obr. 8.21 je znázorněn směr, jakým budeme postupovat při určení vztahu pro moment, který bude funkcí souřadnice x.



Obr. 8.21

Pro $x \in < 0; L >$ platí

$$\begin{aligned} M(x) &= -F \cdot x, \\ \frac{\partial M}{\partial F} &= -x. \end{aligned} \tag{P1}$$

S využitím vztahu pro zobecnělý posuv (8.41) pak

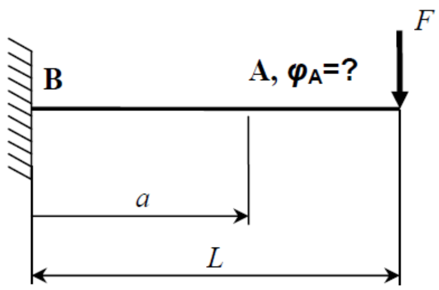
$$w_F = \frac{1}{E \cdot I_z} \cdot \int\limits_L M(x) \cdot \frac{\partial M(x)}{\partial F} \cdot \mathrm{d}x = \frac{1}{E \cdot I_z} \cdot \int\limits_L -(F \cdot x) \cdot (-x) \cdot \mathrm{d}x = \frac{F \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I_z}. \tag{P2}$$

Srovnejte s řešením příkladu 8.4.

▲

Příklad 8.6. Určete natočení ve vzdálenosti a od vetknutí u zadaného nosníku o délce L, zatíženého osamělou silou F (obr. 8.22).

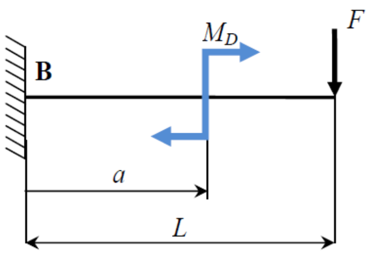
Dáno: F, L, a, E, I_z.



Obr. 8.22

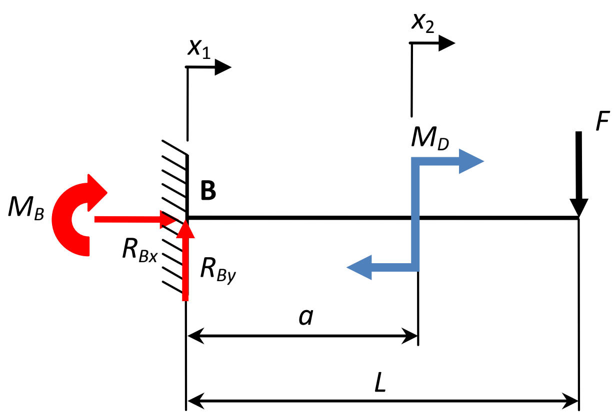
Řešení 1 - zavedení souřadnic ve směru od vetknutého konce nosníku (zleva):

- Zavedení fiktivního momentu $M_D = 0$ ve vzdálenosti a.



Obr. 8.23

- Sestavení rovnic rovnováhy, určení průběhu vnitřního ohybového momentu a výpočet jeho parciálních derivací v jednotlivých úsecích (intervalech) nosníku.



Obr. 8.24

Rovnice rovnováhy

$$\begin{aligned}\sum F_{xi} &= 0 = R_{Bx},\\ \sum F_{yi} &= 0 = R_{By} - F,\\ \sum M_{Bi} &= 0 = F \cdot L + M_D + M_B.\end{aligned} \tag{P1}$$

Pro stanovení průběhu ohybového momentu využijeme metodu řezu. Rozdělíme nosník na intervaly a v nich vedeme myšlený řez v obecném místě, daném souřadnicí x_1, respektive x_2. Získáme průběhy ohybového momentu a jeho parciální derivace dle doplňkového momentu.

$0 \leqq x_1 \leqq a$

$M(x_1) = R_{By} \cdot x_1 + M_B =$
$= R_{By} \cdot x_1 - F \cdot L - M_D$

$\frac{\partial M(x_1)}{\partial M_D} = -1$

$0 \leqq x_2 \leqq L - a$

$M(x_2) = R_{By} \cdot (a + x_2) + M_B + M_D$
$= R_{By} \cdot (a + x_2) + M_B + M_D - F \cdot L-$
$-M_D + M_D$

$\frac{\partial M(x_2)}{\partial M_D} = 0$

Pro natočení v místě A platí

$$\varphi_A = \frac{1}{E \cdot I_z} \cdot \left[\int\limits_0^a M(x_1)\frac{\partial M(x_1)}{\partial M_D}\mathrm{d}x_1 + \int\limits_0^{L-a} M(x_2)\frac{\partial M(x_2)}{\partial M_D}\mathrm{d}x_2 \right]. \tag{P2}$$

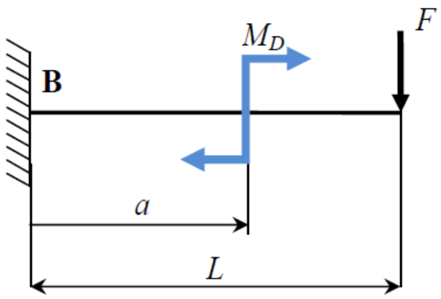
Dosazením vztahů pro momenty a derivace, následným položením momentu M_D nule a integrací výrazu obdržíme

$$\varphi_A = \frac{F}{E \cdot I_z} \cdot a \cdot \left(L - \frac{a}{2}\right). \tag{P3}$$

Stupeň pracnosti řešení libovolného nosníku závisí také na vhodnosti volby souřadnic v jednotlivých úsecích. Například zavede-li se souřadnice v obou úsecích u řešeného příkladu 8.6 zprava, bude řešení výrazně snadnější. Dokonce se obejdeme i bez rovnic rovnováhy. U vetknutých nosníků je tedy výhodné zavést souřadnice v jednotlivých úsecích ve směru od volného konce!

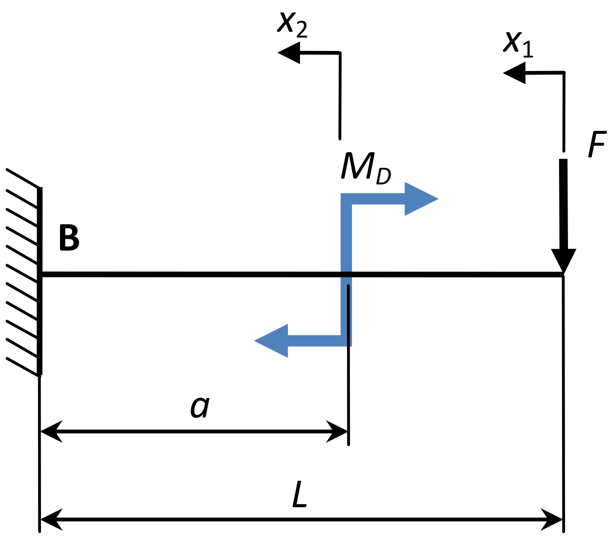
Řešení 2 - zavedení souřadnic ve směru od volného konce nosníku (zprava):

- Zavedení fiktivního momentu $M_D = 0$ ve vzdálenosti a.



Obr. 8.25

Pro stanovení průběhu ohybového momentu využijeme metodu řezu. Rozdělíme nosník na intervaly a v nich vedeme myšlený řez v obecném místě, daném souřadnicí x_1, respektive x_2.



Obr. 8.26

Získáme průběhy ohybového momentu a jeho parciální derivace dle doplňkového momentu.

$0 \leqq x_1 \leqq L - a$	$0 \leqq x_2 \leqq a$
$M(x_1) = -F \cdot x_1$	$M(x_2) = -F \cdot (L - a + x_2) - M_D$
$\frac{\partial M(x_1)}{\partial M_D} = 0$	$\frac{\partial M(x_2)}{\partial M_D} = -1$

Pro natočení v místě A platí

$$\varphi_A = \frac{1}{E \cdot I_z} \cdot \left[\int\limits_0^{L-a} M(x_1) \frac{\partial M(x_1)}{\partial M_D} \mathrm{d}x_1 + \int\limits_0^{a} M(x_2) \frac{\partial M(x_2)}{\partial M_D} \mathrm{d}x_2 \right] . \tag{P4}$$

Dosazením vztahů pro momenty a derivace, následným položením momentu M_D nule a integrací výrazu obdržíme

$$\varphi_A = \frac{F}{E \cdot I_z} \cdot a \cdot \left(L - \frac{a}{2} \right) . \tag{P5}$$

▲

Srovnání Castigliánovy metody s metodou analytickou

	Castigliánova metoda	Analytická metoda
Výhody	Poměrně rychlý výpočet průhybu v daném místě bez nutnosti určování integračních konstant ⇒ lze řešit i složité případy nosníků.	Získání rovnice průhybové čáry ⇒ možnost výpočtu průhybu pouze dosazením do rovnice průhybové čáry.
Nevýhody	Výpočtem získáme průhyb i natočení pouze v jednom bodě nosníku. V případě, že bychom chtěli nalézt hodnotu průhybu v kterémkoliv jiném bodě, je nutné výpočet opakovat.	Nutnost výpočtu integračních konstant. U složitých nosníků se jedná o zdlouhavější proces.

8.9 Staticky neurčité nosníky

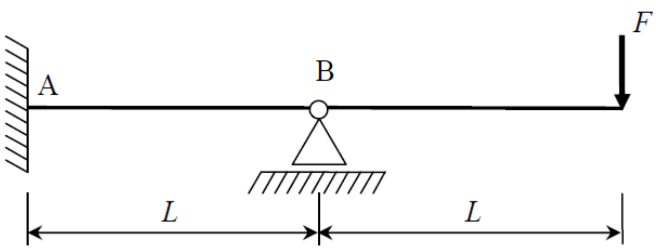
V této kapitole se budeme zabývat staticky neurčitými nosníky v rovině, tj. nosníky, kterým vazby odebírají více než tři stupně volnosti. Pro určení reakcí nám nepostačuje pouze sestavení tří lineárně nezávislých rovnic rovnováhy, nýbrž je nutné k těmto rovnicím připojit rovnici (rovnice), vycházející z deformační podmínky (deformačních podmínek).

Postup řešení:

1. Uvolníme potřebný počet vazeb, převedeme uložení na staticky určité.
2. Účinek odstraněných vazeb nahradíme vnějšími silami, případně momenty (mluvíme o zbytných reakcích).
3. Napíšeme požadovaný počet deformačních podmínek (ty se vyjadřují nulovou hodnotou průhybu či úhlu natočení v místě odebraných vazeb).
4. Aplikujeme Castiglianovu větu či jinou metodu pro obecné vyjádření průhybu či úhlu natočení v deformační podmínce.
5. Řešením soustavy (rovnice rovnováhy + rovnice vycházející z deformačních podmínek) získáme neznámé reakce ve vazbách.

Příklad 8.7. Určete reakce ve vazbách nosníku na obr. 8.27.

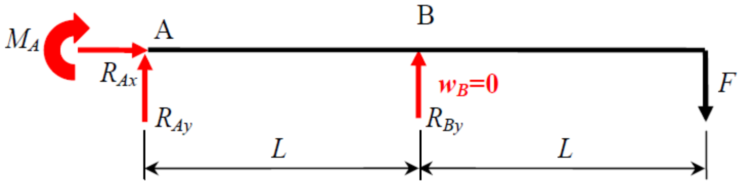
Dáno: F, L, E, I_z.



Obr. 8.27

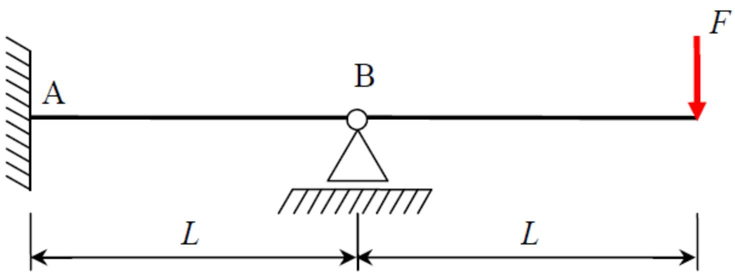
Řešení:

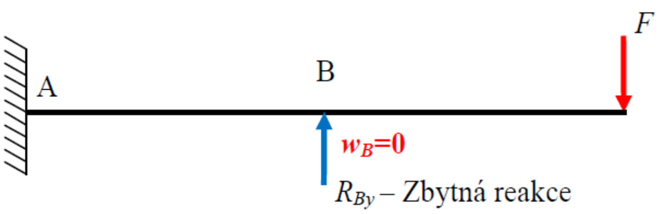
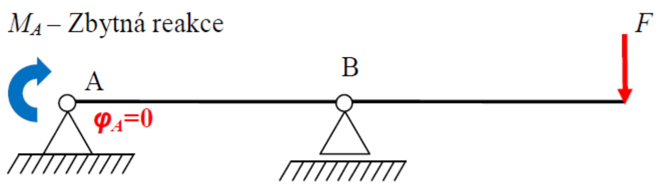
1. Uvolnění soustavy.



Obr. 8.28

Z obr. 8.28 je evidentní, že se jedná o 1× staticky neurčitou úlohu. Jinými slovy, je nutné určit celkem čtyři reakce, k dispozici máme pouze tři lineárně nezávislé rovnice rovnováhy. Čtvrtá doplňková rovnice bude vycházet z deformační podmínky v bodě B, kde je průhyb v ose y nulový. Deformační podmínka však nemusí být nutně stanovena v bodě B, viz následující tabulka.

Zadaný nosník (Staticky neurčitý)


Náhradní nosník (staticky určitý)	Deformační podmínka
Varianta 1 	$w_B = 0$
Varianta 2 	$\varphi_A = 0$

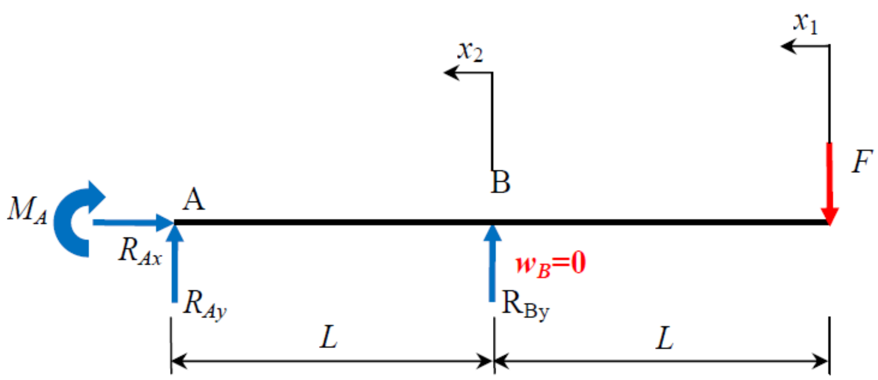
Další varianta doplňkové rovnice by mohla také vycházet z deformační podmínky v bodě A, kde je průhyb v ose y rovněž nulový ($w_A = 0$).

2. Výpočet reakcí.

Rovnice rovnováhy

$$\begin{aligned}\sum F_{ix} &= 0 = R_{Ax},\\ \sum F_{iy} &= 0 = R_{Ay} + R_{By} - F,\\ \sum M_{iA} &= 0 = M_A - R_{By} \cdot L + F \cdot 2 \cdot L.\end{aligned} \tag{P1}$$

Získáme průběhy ohybového momentu a jeho parciální derivace dle reakční síly v bodě B.



Obr. 8.29

$x_1 \in< 0; L >$

$M(x_1) = -F \cdot x_1$

$\frac{\partial M(x_1)}{\partial R_{By}} = 0$

$x_2 \in< 0; L >$

$M(x_2) = -F \cdot (L + x_2) + R_{By} \cdot x_2$

$\frac{\partial M(x_2)}{\partial R_{By}} = x_2$

Pro průhyb w_B poté platí

$$w_B = 0 = \frac{1}{E \cdot I_z} \cdot \left[\int_0^L M(x_1) \frac{\partial M(x_1)}{\partial R_{By}} \mathrm{d}x_1 + \int_0^L M(x_2) \frac{\partial M(x_2)}{\partial R_{By}} \mathrm{d}x_2 \right]. \tag{P2}$$

Po dosazení a úpravě určíme ze vztahu (P2) velikost reakce R_{By}

$$R_{By} = \frac{5}{2} \cdot F. \tag{P3}$$

Dosazením (P3) do druhé a třetí rovnice v (P1) určíme zbývající reakce

$$\begin{aligned} R_{Ay} &= \frac{-3}{2} \cdot F, \\ M_A &= \frac{F \cdot L}{2}. \end{aligned} \tag{P4}$$

V případě, že budeme postupovat opačným směrem, tj. zleva doprava, bude složitost řešení obtížnější ve smyslu nezbytnosti vyjádření reakcí R_{Ay} a M_A jako funkce síly, pod kterou se uskutečňuje průhyb, tj. reakce R_{By} a to s ohledem na potřebu stanovení parciální derivace ohybového momentu M podle reakce R_{By} v rovnici (P2).

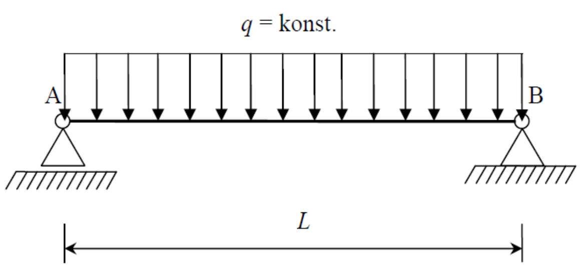
▲

! Příklady k procvičení

1. Určete rovnici průhybové čáry v řešeném příkladu 8.4 za předpokladu volby souřadnice x zleva. Do obou rovnic průhybové čáry poté za x dosaďte hodnotu $L/2$ a vypočítejte průhyb.

2. Určete rovnici průhybové čáry nosníku, znázorněného na obr. 8.30.

   Dáno: q, L, E, I_z.

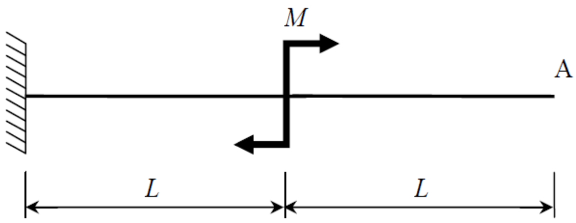


Obr. 8.30

3. Určete reakce na nosníku z příkladu 8.7 se zavedením souřadnice x_2 v 2. úseku nosníku zprava.

4. Vypočtěte průhyb v místě A nosníku znázorněného na obr. 8.31.

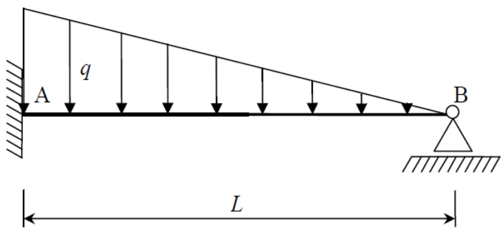
   Dáno: L, E, I_z, M.



Obr. 8.31

5. Určete reakce staticky neurčitého nosníku, znázorněného na obr. 8.32.

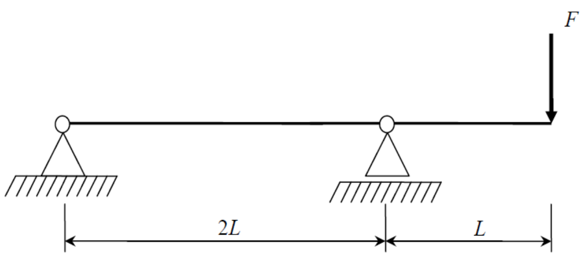
   Dáno: q, L, E, I_z.



Obr. 8.32

6. Vypočtěte průhyb v místě působící síly u nosníku znázorněného na obr. 8.33.

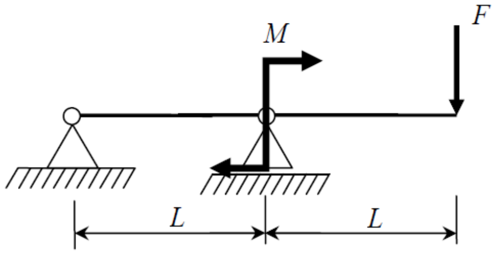
   Dáno: F, L, E, I_z.



Obr. 8.33

7. Určete maximální přípustnou velikost ohybového momentu M, je-li maximální dovolený průhyb pod silou F roven hodnotě 65 mm.

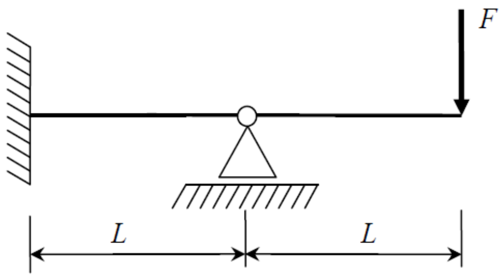
   Dáno: $F = 5\ N$, $w_F = 65\ mm$, $E = 210000\ MPa$, $I_z = 490\ mm^4$, $L = $ $= 1000\ mm$.



Obr. 8.34

8. Určete průhyb v místě působení síly F u nosníku, zobrazeného na obr. 8.35.

   Dáno: $F = 5\ N$, $E = 210000\ MPa$, $I_z = 490\ mm^4$, $L = 1000\ mm$.



Obr. 8.35

Klíč k příkladům k procvičení

1. hodnoty průhybu musí být s využitím obou přístupů stejné
2. $w(x) = -\frac{1}{E \cdot I_z} \cdot \left[\frac{q}{12} \cdot \left(l \cdot x^3 - \frac{x^4}{2}\right) - \frac{q \cdot l^3}{24} \cdot x\right]$
3. reakce musí vyjít shodně
4. $w_A = \frac{3 \cdot M \cdot L^2}{2 \cdot E \cdot I_z}$
5. $|R_{Ay}| = \frac{3}{8} q \cdot L$, $|R_{By}| = \frac{1}{8} q \cdot L$, $|M_A| = \frac{1}{24} q \cdot L^2$
6. $w_F = \frac{11 \cdot F \cdot L^3}{12 \cdot E \cdot I_z}$

7. $M = \frac{3\cdot\left(w_F\cdot E\cdot I_z - \frac{2}{3}\cdot F\cdot L^3\right)}{L^2} \doteq 10\ Nm$

8. $w_F = \frac{7\cdot F\cdot L^3}{12\cdot E\cdot I_z}$

Pojmy k zapamatování

- prostý ohyb
- Schwedlerovy věty
- výpočet ohybového napětí
- pevnostní kontrola a dimenzování
- Bernoulliho hypotéza
- vztah průhybu a natočení
- analytická metoda
- Castigliánova metoda
- staticky neurčité nosníky

Kontrolní otázky

1. Dokážete definovat rovinný ohyb?
2. Jak jsou namáhána vlákna, nacházející se v neutrální ose?
   (a) Namáhána na tah i tlak.
   (b) Namáhána pouze na tah.
   (c) Nejsou namáhána.
3. Na jakém přístupu je založena Castigliánova metoda?
   (a) Analytickém přístupu.
   (b) Energetickém přístupu.
   (c) Kombinaci analytického a energetického přístupu.
4. Jaké jsou výhody a nevýhody analytické metody?

5. Jakých podmínek se využívá při řešení staticky neurčitých úloh?
   (a) Deformačních podmínek.
   (b) Není potřeba žádných dalších podmínek, postup řešení je shodný jako u staticky určitých úloh.
   (c) Silových podmínek.
6. Jaký je vztah mezi I. a II. Schwedlerovou větu?
7. Jak lze využít Castiglianovu větu v případě výpočtu průhybu/úhlu natočení v místě, kde nepůsobí vnější síla/moment na nosník?
8. Lze využít při výpočtu staticky neurčitých nosníků princip superpozice jako u tahu–tlaku a kroucení?

Kapitola 9

Hypotézy pevnosti a jejich použití

Průvodce studiem

V praxi se při konstrukčním návrhu součástí nebo strojních celků (tj. jejich geometrie, zatížení a materiálů) využívá hypotéz pevnosti. Jejich znalost a aplikovatelnost je důležitou součástí základních znalostí inženýrů

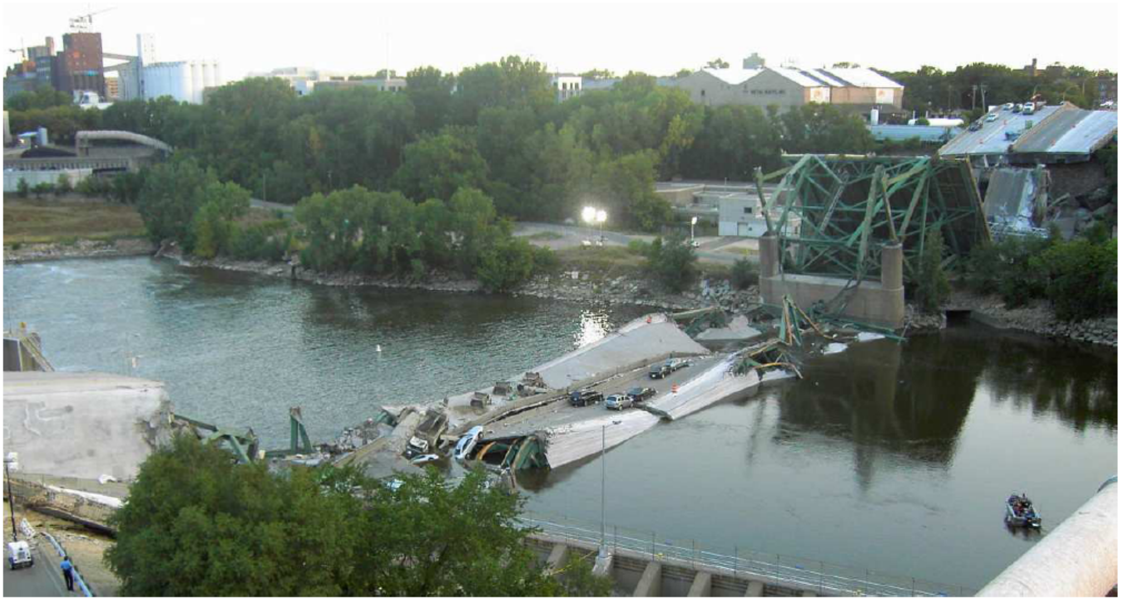
Cíle

Po prostudování této kapitoly budete:

- znát základní pevnostní hypotézy běžné strojařské praxe
- umět používat hypotézy pevnosti při návrhu geometrie a zatížení a pevnostní kontrole strojních částí a celků

9.1 Úvod

V součástech strojů či konstrukcí vzniká, v důsledku zatížení, obecně víceosá napjatost, která může způsobit havarijní stavy, viz např. obr. 9.1. Aby nedocházelo k havarijním (či nepřípustným) stavům namáhání, je nutné již při návrhu zkoumat mezní stavy mechanických struktur.



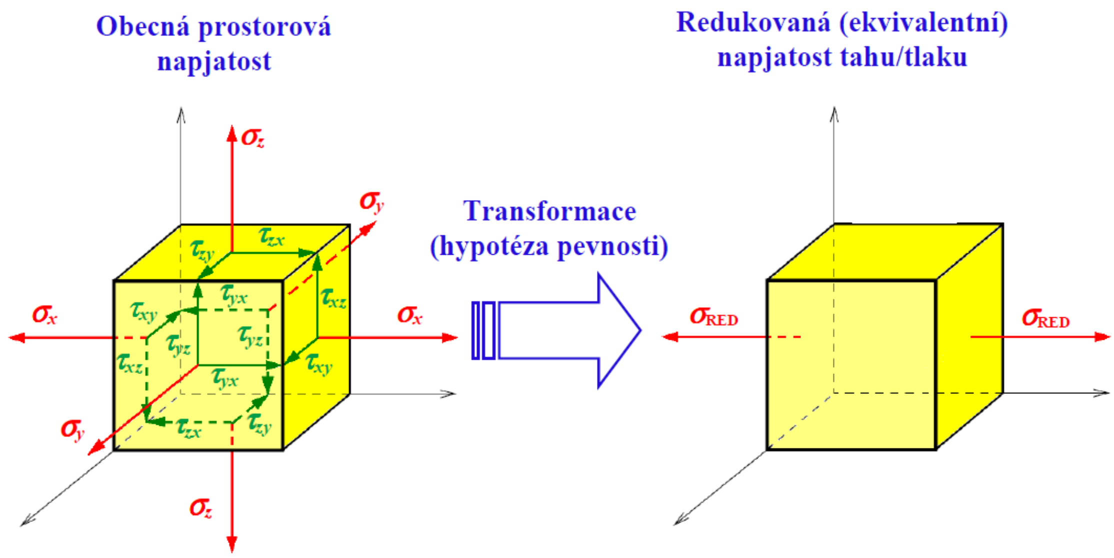
Obr. 9.1 Náhlý kolaps osmiproudového dálničního mostu $I - 35W$ Mississippi River bridge dne 1. srpna 2007, ve státu Minessota, USA (zdroj: http://cs.wikipedia.org/wiki/I-35W_Mississippi_River_bridge).

Pro stanovení mezních stavů, jejich zhodnocení a dimenzování strojů či konstrukcí je pak nutné využít *hypotéz pevnosti (kritérií pevnosti)*. Hypotézy pevnosti jsou platné pro daný typ materiálu (houževnatý, křehký, krystalický, polykrystalický, izotropní, anizotropní, ...), daný způsob zatěžování (staticky, dynamicky, teplotně, ...), velikost konstrukce (větší těleso má více vnitřních i vnějších vad) atp., přičemž se obvykle vztahují k limitnímu stavu dosažení meze kluzu či dosažení meze pevnosti.

Hypotézy pevnosti, kterých v současnosti existují stovky, tedy vzešly z potřeb inženýrské praxe, avšak nutno přiznat, že žádná z těchto hypotéz není univerzální. Svědčí o tom stále nové pokusy domácích i zahraničních vědců.

Je nutné také zmínit, že při návrhu součásti nelze vždy vystačit jen s kritérii, založenými na hypotézách pevnosti. U některých součástí záleží také na tuhosti (např. dovolený průhyb stropní konstrukce), dynamickém chování (např. požadovaný provoz stroje mimo rezonanční oblast), odolnosti vůči creepu, korozi, stárnutí (např. běžné pryže či umělé hmoty mění své mechanické vlastnosti s časem a působením UV záření) aj. vlivech. Mezi moderní trendy designu také patří možná a levná recyklovatelnost a minimalizace ekologické závadnosti atp. Nicméně, tato kniha se zabývá pouze navrhovacími kritérii, založenými na hypotézách pevnosti (tj. základní vhled do konstrukční praxe).

U běžně používaných hypotéz se setkáváme s pojmem *redukované (ekvivalentní) napětí* σ_{red} $[Pa]$. Redukované napětí lze tedy porovnat s *dovoleným napětím* σ_{dov} $[Pa]$ v tahu nebo tlaku (tj. redukované napětí, dle příslušné hypotézy, které vyvolá stejný účinek jako prostý tah nebo tlak, viz schéma na obr. 9.2) a následně je použít pro vyhodnocení napěťového stavu či návrhu rozměrů součásti nebo zatížení součásti. Dovolené napětí bývá obvykle menší nebo rovno mezi kluzu nebo menší než mez pevnost materiálu.

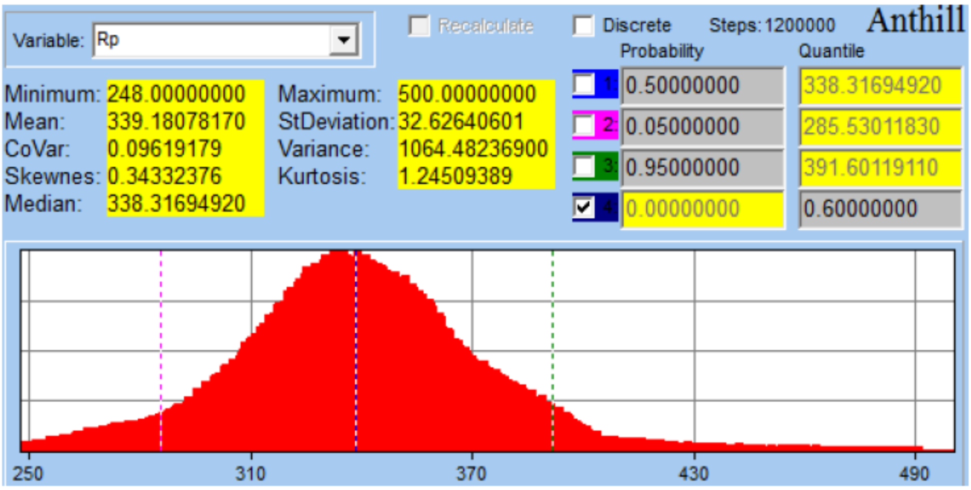


Obr. 9.2

Definice 9.1. Pevnostní podmínka (testovací kritérium, designová nerovnice) dle libovolné hypotézy pak má tvar

$$\sigma_{RED} \leqq \sigma_{DOV}. \tag{9.1}$$

Mezi moderní trendy postupů navrhování patří také respektování reálných rozptylů materiálových vlastností, které vede k aplikacím *pravděpodobnostních metod* (metoda Monte Carlo, SBRA aj.). Z praxe je známo, že např. mez kluzu materiálů není konstantní hodnota, ale náhodná veličina, viz např. obr. 9.3. Výhodou pravděpodobnostních přístupů je také to, že lze stanovit pravděpodobnost poruchy či nepříznivého stavu (např. překonání meze kluzu), viz kapitola 8. Pravděpodobnostním přístupům se však tato učebnice nevěnuje.



Obr. 9.3 Histogram meze kluzu materiálu R_p $/MPa/$ (statistické vyhodnocení materiálových vlastností oceli $A36$)

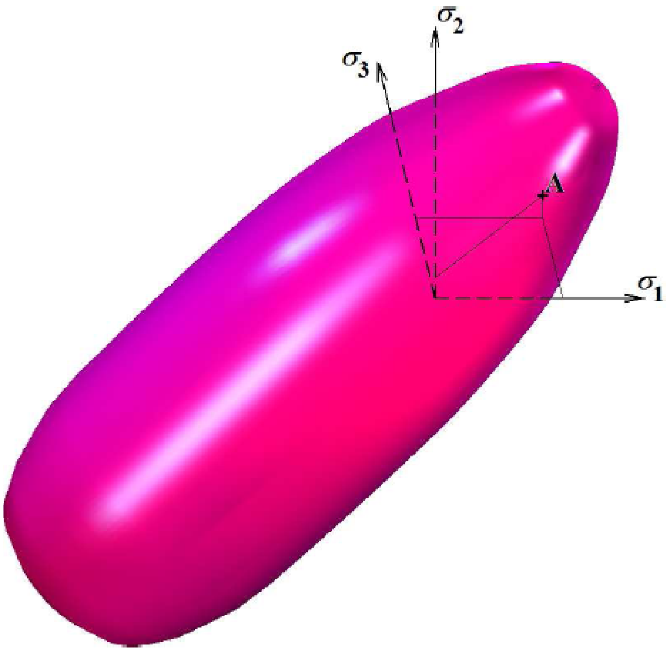
V následujícím textu jsou použita značení: σ_1, σ_2, σ_3, resp. $\sigma_{i,j,k}$ (hlavní napětí $/Pa/$), ε_i (hlavní poměrné deformace $/1/$), μ (Poissonovo číslo $/1/$), E (modul pružnosti $/Pa/$).

V dalším textu je zaměřena pozornost jen na izotropní a homogenní materiály pro statické způsoby zatěžování bez uvažování vlivu teploty. U hypotéz jsou také uvedeny další často používané názvy a to z důvodu nejednotnosti názvosloví v domácí i zahraniční literatuře.

9.2 Haighův prostor a metody stanovení podmínek pevnosti

Z předchozích kapitol je zřejmé, že prostorová napjatost v tělese z izotropního a homogenního materiálu je dána buď šesti složkami napětí (σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz} a τ_{xz}) ve zvoleném kartézském souřadnicovém systému, a nebo třemi hlavními napětími (σ_1, σ_2 a σ_3) v systému hlavních napětí (souřadné osy jsou normálami hlavních rovin, tzv. hlavní souřadnicový systém). Prostor, určený hlavním souřadnicovým systémem (σ_1, σ_2 a σ_3) se nazývá *Haighův prostor*, pak je zřejmé, že každý bod tohoto prostoru jednoznačně definuje stav napjatosti, viz obr. 9.4.

Za předpokladu, že jsou při daném zatěžování známé hodnoty trojice hlavních napětí, při nichž došlo k meznímu stavu (např. k dosažení meze kluzu u tvárných materiálů nebo mezního stavu pevnosti u křehkých materiálů), pak tato hlavní napětí určují bod A *mezní Haighovy plochy*, viz obr. 9.4. Pokud se celý proces vícenásobně opakuje pro jiné trojice hlavních napětí, pak lze stanovit kompletní tvar Haighovy plochy, viz obr. 9.4.



Obr. 9.4

Haighovy mezní plochy lze stanovovat fyzikálním přístupem (např. meziatomové vazby, dislokační teorie aj.), experimentálním přístupem (zkoušky při různých typech napjatostí aj.), hypotetickým přístupem (např. určité faktory napjatosti rozhodují o vzniku trvalých deformací atp.) a nebo jejich kombinacemi.

9.3 Základní hypotézy pevnosti pro křehké materiály

Definice 9.2. *Hypotéza maximálních normálových napětí (Rankine, hypotéza σ_{MAX}, hypotéza maximálního hlavního napětí)* – k meznímu stavu dochází při největším tahovém respektive tlakovém napětí. Tato hypotéza platí pro napjatosti, vyvolávající křehký stav materiálu. Pro napjatosti blízké hydrostatickému tlaku však odporuje naměřeným výsledkům. Pro podmínku pevnosti pak platí

$$\left.\begin{array}{rcccl} -\sigma_{DOV_{TLAK}} & \leqq & \sigma_1 & \leqq & \sigma_{DOV_{TAH}}, \\ -\sigma_{DOV_{TLAK}} & \leqq & \sigma_2 & \leqq & \sigma_{DOV_{TAH}}, \\ -\sigma_{DOV_{TLAK}} & \leqq & \sigma_3 & \leqq & \sigma_{DOV_{TAH}}. \end{array}\right\} \tag{9.2}$$

Stručně zapsáno

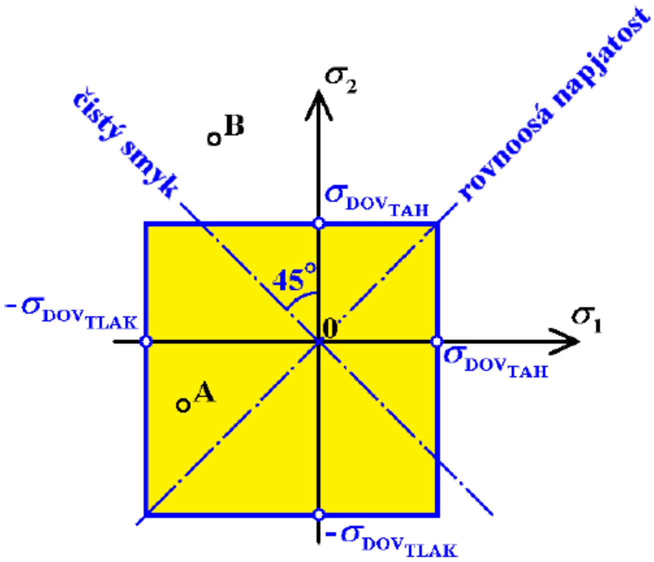
$$\sigma_{RED} = max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leqq \sigma_{DOV_{TAH}}, \tag{9.3}$$

pokud je největší napětí kladné (tahové). Nebo

$$\sigma_{RED} = |min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)| \leqq \sigma_{DOV_{TLAK}}, \tag{9.4}$$

pokud je největší napětí záporné (tlakové).

Grafická interpretace této hypotézy je pro dvojosou napjatost znázorněna na obr. 9.5, kde je zřejmé, že bod A splňuje podmínku pevnosti a bod B nesplňuje podmínku pevnosti.



Obr. 9.5 Hypotéza maximálních normálových napětí (dvojosý stav napjatosti)

Definice 9.3. *Mohrova hypotéza (v tomto případě její lineární varianta, známá také jako Mohr-Coulomb)* se používá pro materiály, jejichž pevnost v tahu je obvykle menší než pevnost v tlaku. Není vhodná pro napjatosti blízké rovnoměrnému tahu. Tato hypotéza respektuje také vliv normálových i smykových napětí. Při sestavení podmínky pevnosti se vychází z Mohrovy kružnice pro dovolené tahové a dovolené tlakové namáhání

$$\left.\begin{array}{rcccl} -\sigma_{DOV_{TLAK}} & \leqq & \sigma_1 - \frac{\sigma_{DOV_{TAH}}}{\sigma_{DOV_{TLAK}}}\sigma_2 & \leqq & \sigma_{DOV_{TAH}}, \\ -\sigma_{DOV_{TLAK}} & \leqq & \sigma_2 - \frac{\sigma_{DOV_{TAH}}}{\sigma_{DOV_{TLAK}}}\sigma_3 & \leqq & \sigma_{DOV_{TAH}}, \\ -\sigma_{DOV_{TLAK}} & \leqq & \sigma_3 - \frac{\sigma_{DOV_{TAH}}}{\sigma_{DOV_{TLAK}}}\sigma_1 & \leqq & \sigma_{DOV_{TAH}}. \end{array}\right\} \tag{9.5}$$

Rovnice 9.5 lze zapsat stručně takto

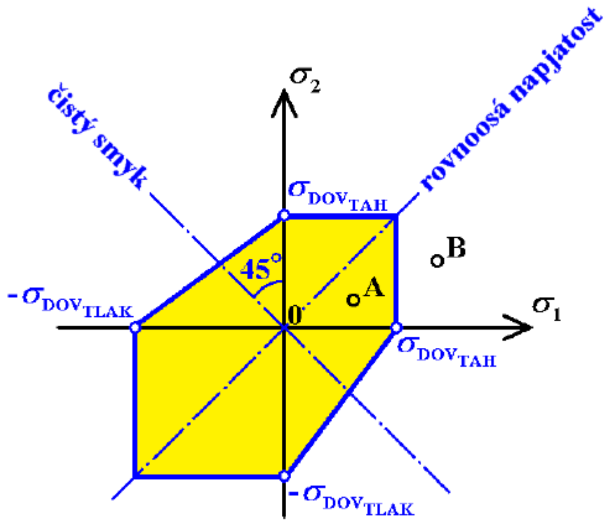
$$\sigma_{RED} = max\left(\sigma_i - \frac{\sigma_{DOV_{TAH}}}{\sigma_{DOV_{TLAK}}}\sigma_j\right) \leqq \sigma_{DOV_{TAH}}, \tag{9.6}$$

pokud je hodnota σ_{RED} kladná. Nebo

$$|\sigma_{RED}| = \left|min\left(\sigma_i - \frac{\sigma_{DOV_{TAH}}}{\sigma_{DOV_{TLAK}}}\sigma_j\right)\right| \leqq \sigma_{DOV_{TLAK}}, \tag{9.7}$$

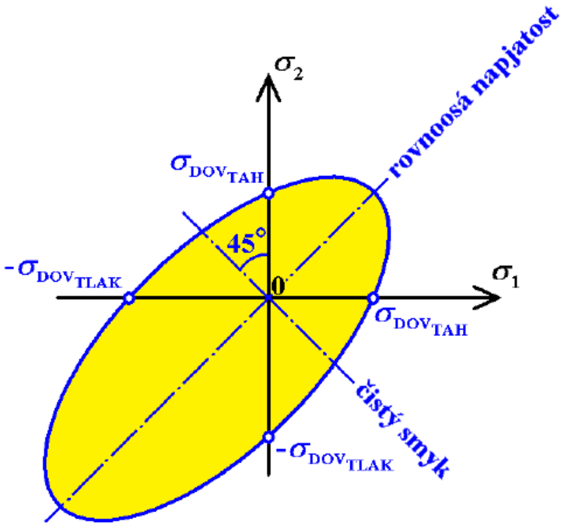
pokud je hodnota σ_{RED} záporná.

Grafická interpretace této hypotézy je pro dvojosou napjatost znázorněna na obr. 9.6, kde je zřejmé, že bod A splňuje podmínku pevnosti a bod B nesplňuje podmínku pevnosti. V případech kdy $\sigma_{RED_{TAH}} = \sigma_{RED_{TLAK}}$, přechází Mohrova hypotéza v hypotézu Guestovu, viz následující kapitola.



Obr. 9.6 Mohrova hypotéza – lineární aproximace (dvojosý stav napjatosti)

Nutno podotknout, že existuje také parabolická či další aproximace Mohrovy hypotézy, viz např. obr. 9.7, která je za určitých podmínek vhodná pro houževnaté i křehké materiály, avšak na tuto hypotézu se učebnice nezaměřuje.



Obr. 9.7

9.4 Základní hypotézy pevnosti pro tvárné materiály

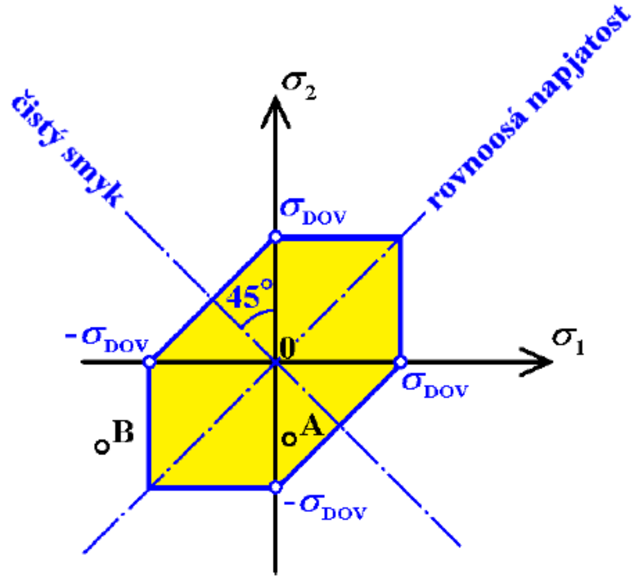
Definice 9.4. *Hypotéza maximálních smykových napětí (Guest, Tresca, Guest-Tresca-Coulomb, hypotéza τ_{MAX})* – k meznímu stavu dochází, když největší smykové napětí $\tau_{MAX} = \frac{\sigma_{MAX}-\sigma_{MIN}}{2}$ dosáhne dovoleného napětí ve smyku $\tau_{DOV} = \frac{\sigma_{DOV}}{2}$. Hypotéza je vhodná pro materiály houževnaté, kde $\sigma_{DOV_{TAH}} = \sigma_{DOV_{TLAK}}$. Pro podmínku pevnosti pak platí

$$\left.\begin{array}{rcccl} -\sigma_{DOV} & \leqq & \sigma_1 - \sigma_2 & \leqq & \sigma_{DOV}\,, \\ -\sigma_{DOV} & \leqq & \sigma_2 - \sigma_3 & \leqq & \sigma_{DOV}\,, \\ -\sigma_{DOV} & \leqq & \sigma_3 - \sigma_1 & \leqq & \sigma_{DOV}\,. \end{array}\right\} \tag{9.8}$$

Nebo stručně

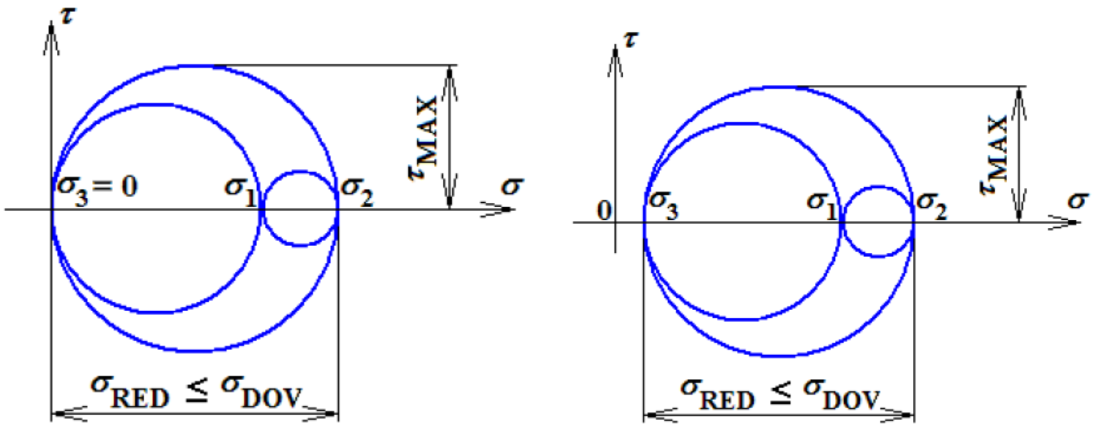
$$\sigma_{RED} = max\left(|\sigma_i - \sigma_j|\right) \leqq \sigma_{DOV}\,. \tag{9.9}$$

Grafická interpretace této hypotézy je pro dvojosou napjatost znázorněna na obr. 9.8, kde je zřejmé, že bod A splňuje podmínku pevnosti a bod B nesplňuje podmínku pevnosti. Často jsou Mohrova a Guestova hypotéza nazývány společným názvem jako Mohr-Guestova hypotéza.



Obr. 9.8

Redukované napětí dle Guesta lze také definovat jako největší průměr Mohrových kružnic, viz obr. 9.9.



a) Rovinná napjatost b) Prostorová napjatost

Obr. 9.9

Tato hypotéza patří mezi nejrozšířenější hypotézy.

Definice 9.5. *Hypotéza maximálních poměrných deformací (Saint-Venant, φ_{MAX})* – k meznímu stavu dochází, když největší poměrná deformace $\varphi_{MAX} = \varphi_i = \frac{\sigma_i - \mu(\sigma_j + \sigma_k)}{E}$ dosáhne dovolené poměrné deformace v tahu nebo tlaku $\varphi_{DOV_{TAH,TLAK}} = \frac{\sigma_{DOV_{TAH,TLAK}}}{E}$. Tato hypotéza se již v současnosti zřejmě nepoužívá, avšak je stále uváděna v učebnicích. Pro podmínku pevnosti pak platí

$$\left.\begin{array}{rcccl} -\sigma_{DOV_{TLAK}} & \leqq & \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) & \leqq & \sigma_{DOV_{TAH}}, \\ -\sigma_{DOV_{TLAK}} & \leqq & \sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1) & \leqq & \sigma_{DOV_{TAH}}, \\ -\sigma_{DOV_{TLAK}} & \leqq & \sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2) & \leqq & \sigma_{DOV_{TAH}}. \end{array}\right\} \tag{9.10}$$

Zkrácený zápis je

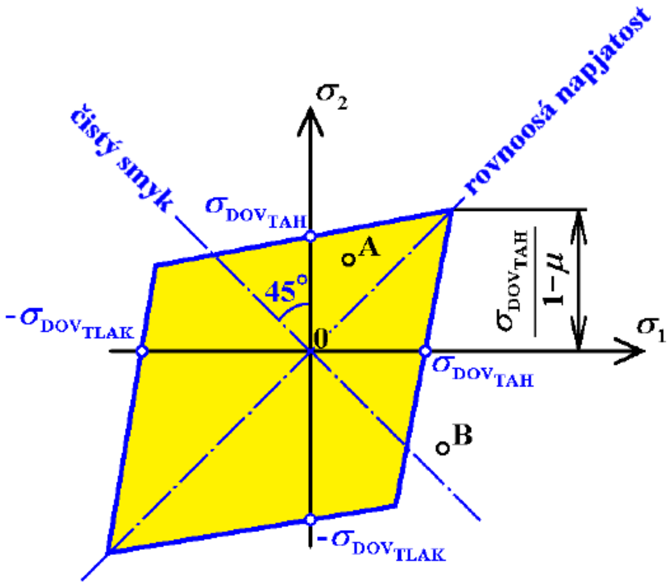
$$\sigma_{RED} = max\,(\sigma_i - \mu(\sigma_j + \sigma_k)) \leqq \sigma_{DOV_{TAH}}, \tag{9.11}$$

pokud je hodnota σ_{RED} kladná. Nebo

$$|\sigma_{RED}| = |min\,(\sigma_i - \mu(\sigma_j + \sigma_k))| \leqq \sigma_{DOV_{TLAK}}, \tag{9.12}$$

pokud je hodnota σ_{RED} záporná.

Grafická interpretace této hypotézy je pro dvojosou napjatost znázorněna na obr. 9.10, kde je zřejmé, že bod A splňuje podmínku pevnosti a bod B nesplňuje podmínku pevnosti.



Obr. 9.10

Definice 9.6. *Hypotéza maximální hustoty celkové deformační energie (Beltrami, Beltrami-Haigh, Beltrami-Mises-Hencky, BMH)* – k meznímu stavu dochází, když hustota celkové deformační energie U_0 bude větší než hustota celkové deformační energie při jednoosé napjatosti pro dovolené napětí $U_{0\,DOV}$. Tato hypotéza je vhodná pro materiály, kde $\sigma_{DOV_{TAH}} = \sigma_{DOV_{TLAK}}$.

Hustotu celkové deformační energie pro trojosou napjatost můžeme vyjádřit s využitím principu superpozice. Vyjádříme-li napjatost v uvažovaném bodě tělesa pomocí hlavních napětí, můžeme vyjádřit hustotu celkové deformační energie jako součet hustot deformační energie pro tři jednoosé případy namáhání, tzn.

$$U_0 = \frac{1}{2}\sigma_1\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\sigma_2\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\sigma_3\varepsilon_3. \tag{9.13}$$

Připomeňme, že hustota deformační energie při tahovém namáhání odpovídá obsahu plochy pod křivkou v diagramu $\sigma - \varepsilon$. Aplikujeme-li nyní obecný Hookeův zákon získáme

$$U_0 = \frac{1}{2}\sigma_1\frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)\right] + \frac{1}{2}\sigma_2\frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)\right] + \frac{1}{2}\sigma_3\frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \mu(\sigma_2 + \sigma_1)\right], \tag{9.14}$$

respektive po úpravě

$$\frac{1}{2E}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)\right). \tag{9.15}$$

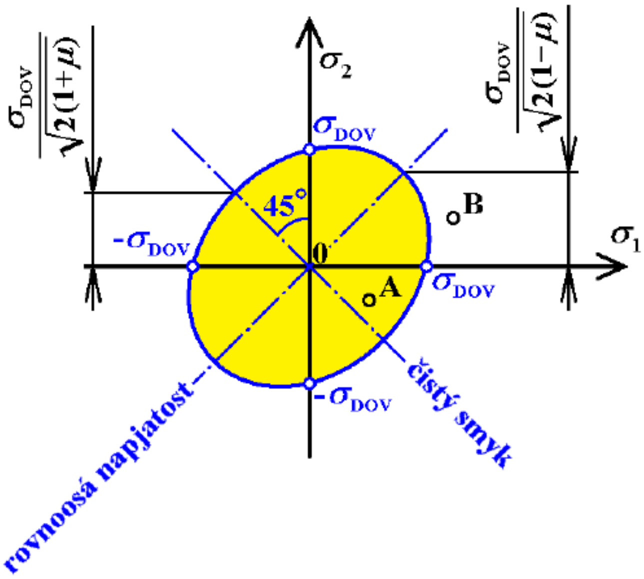
Pro případ tahu na úrovni dovoleného napětí $\sigma_1 = \sigma_{DOV}$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 0$ pak plyne

$$U_{DOV} = \frac{\sigma_{DOV}^2}{2E}. \tag{9.16}$$

Dle definice 9.6 lze srovnáním výrazů (9.14) a (9.16) a po jednoduché úpravě získat podmínku pevnosti

$$\sigma_{RED} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1)} \leqq \sigma_{DOV}. \tag{9.17}$$

Grafická interpretace této hypotézy je pro dvojosou napjatost znázorněna na obr. 9.11, kde je zřejmé, že bod A splňuje podmínku pevnosti a bod B nesplňuje podmínku pevnosti.



Obr. 9.11

Tato hypotéza se dnes v praxi používá jen výjimečně.

Definice 9.7. Hypotéza maximální hustoty deformační energie na změnu tvaru (známá také jako hypotéza Huber-Mises-Hencky, Maxwell, HMH, von Mises, oktaedrických smykových napětí nebo Maxwell-Huber-Hencky-von Mises) – k meznímu stavu dochází, když hustota deformační energie pro změnu tvaru $U_{0t} = \frac{1+\mu}{3E}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1\right)$ bude větší než hustota deformační energie na změnu tvaru při jednoosé napjatosti pro dovolené napětí $U_{0tDOV} = \frac{1+\mu}{3E}\sigma_{DOV}^2$.

Tato hypotéza je vhodná pro materiály kde $\sigma_{DOV_{TAH}} = \sigma_{DOV_{TLAK}}$.

Odvození výrazu pro hustotu deformační energie na změnu tvaru lze nalézt např. v [1]. V tomto textu použijeme k získání vztahu pro redukované napětí jednoduchou úvahu.

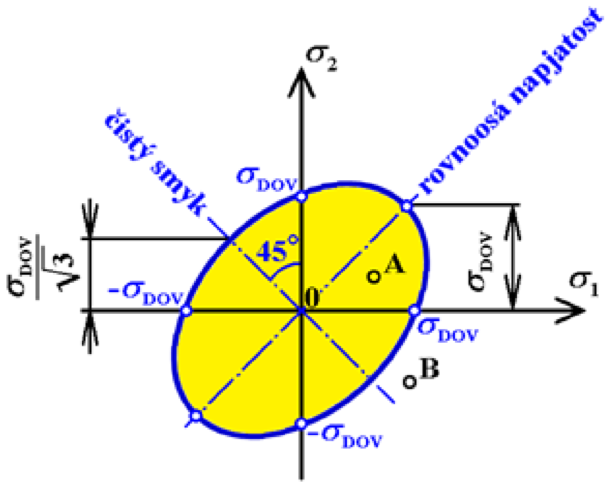
Vztah pro hustotu celkové deformační energie (9.17) musí platit pro libovolný homogenní lineární elastický isotropní materiál, tedy i nestlačitelné materiály jako jsou např. pryže. Jestliže se jedná o nestlačitelný materiál, změna objemu je nulová, a celková deformační energie odpovídá deformační energii na změnu tvaru. Z kapitoly 5 víme, že pro nestlačitelný materiál je $\mu = 0,5$.

Po dosazení této hodnoty do (9.17) získáme

$$\sigma_{RED} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} \leqq \sigma_{DOV}, \qquad (9.18)$$

přičemž je zřejmé, že tento vztah musí platit pro lineární elastický materiál obecně.

Grafická interpretace této hypotézy je pro dvojosou napjatost znázorněna na obr. 9.12, kde je zřejmé, že bod A splňuje podmínku pevnosti a bod B nesplňuje podmínku pevnosti.

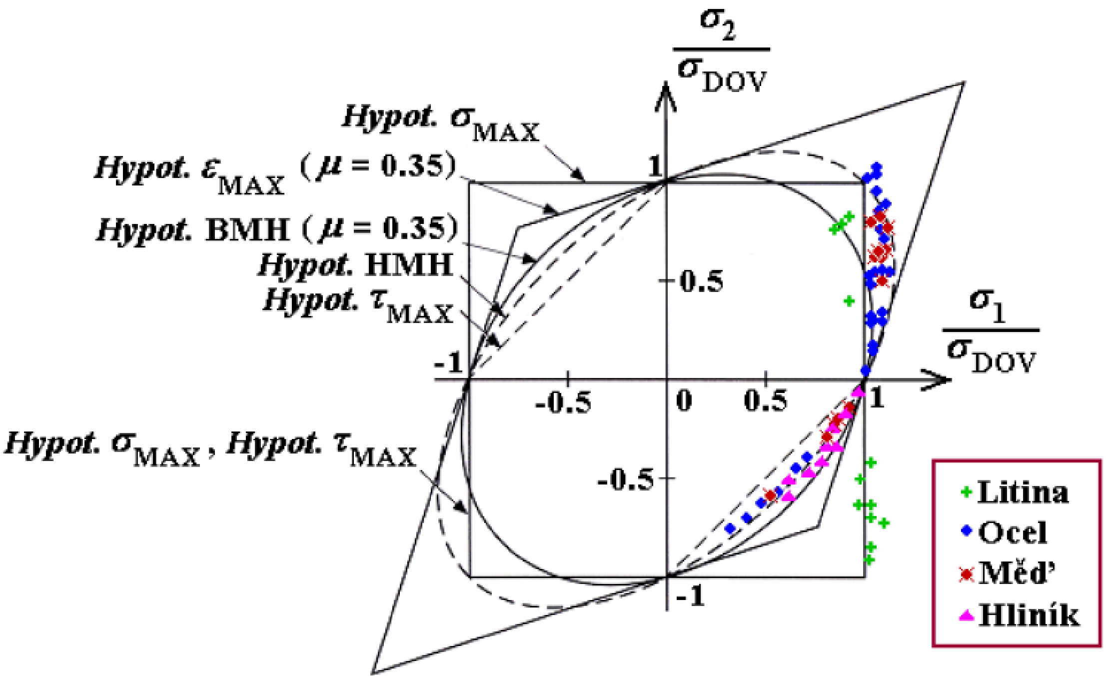


Obr. 9.12

Tato hypotéza patří mezi nejrozšířenější hypotézy.

9.5 Porovnání hypotéz a další hypotézy pevnosti

Pro porovnávání hypotéz pevnosti s experimenty, lze využít bezrozměrných veličin typu $\frac{\sigma_1}{\sigma_{DOV}}$ a $\frac{\sigma_2}{\sigma_{DOV}}$, viz obr. 9.13.



Obr. 9.13 Porovnání některých hypotéz s experimenty, prováděnými na některých materiálech (rovinná napjatost pro případ kdy $\sigma_1 > 0$ a $\sigma_2 \leqq \sigma_1$ dle dat z internetu)

Další hypotézy (např. Drucker-Prager, Hill, Chen, Filoněnko-Borodič, Fuxa, Hu, Tarasenko, Smirnov-Aljajev, Tsai-Wu, Christensen aj.), vhodné i pro anizotropní materiály a tepelná namáhání, jsou uvedeny v odkazech [19] až [22]. Mezi moderní kritérium pevnosti patří také Fuxovo kritérium referenčních smykových a normálových napětí, které bylo navrženo na našem pracovišti (Katedra pružnosti a pevnosti, FS VŠB – TU Ostrava).

Příklad 9.1. Posuďte, zda napjatost, která je dána složkami napětí $\sigma_x = 80\ MPa$, $\sigma_y = 20\ MPa$, $\sigma_z = -15\ MPa$, $\tau_{xy} = 40\ MPa$, $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0\ MPa$, vyhovuje podmínce pevnosti dle hypotézy HMH a Guesta. Dovolené napětí je $\sigma_{DOV} = 112\ MPa$.

Nejprve je vhodné stanovit hlavní napětí z determinantu (3.48), tedy

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_i & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_i & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_i & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_i & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z - \sigma_i \end{vmatrix} = 0.$$

Odtud se získá

$$(\sigma_z - \sigma_i) \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_i & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_i \end{vmatrix} = 0. \tag{9.19}$$

Rovnice (9.19) je splněna (tj. je nalezeno řešení), pokud

$$\sigma_z - \sigma_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_1 = \sigma_i = \sigma_z = -15\ MPa \tag{9.20}$$

a zároveň

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_i & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_i \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{2,3} &= \sigma_i = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2} = \\ &= (50 \pm 50)\ MPa, \qquad (9.21) \\ tj.:\ \sigma_2 &= 100\ MPa\ a\ \sigma_3 = 0\ MPa. \end{aligned}$$

Dle hypotézy HMH, viz rovnice (9.13), lze stanovit redukované napětí

$$\sigma_{RED_{HMH}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} =$$

$$= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} = 108,28\ MPa.$$

Podobně dle Guestovy hypotézy, viz rovnice (9.9), je možno určit redukované napětí

$$\sigma_{RED_{GUEST}} = max\left(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|\right) = \sigma_2 - \sigma_1 = 115\ MPa.$$

Posudek napjatosti podle příslušných hypotéz se provede dle nerovnice (9.1). Pak je zřejmé, že $\sigma_{RED_{HMH}} \leqq \sigma_{DOV}$ (tj. $108,28 \leqq 112$) a napjatost splňuje kritérium pevnosti dle teorie HMH, a naopak $\sigma_{RED_{GUEST}} \geqq \sigma_{DOV}$ (tj. $115 \geqq 112$).

▲

Příklad 9.2. Posuďte, zda napjatost z příkladu 9.1, která je dána složkami napětí $\sigma_x = 80\ MPa$, $\sigma_y = 20\ MPa$, $\sigma_z = -15\ MPa$, $\tau_{xy} = 40\ MPa$, $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0\ MPa$, vyhovuje podmínce pevnosti dle hypotézy Rankine. Dovolené napětí v tahu je $\sigma_{DOV_{TAH}} = 150\ MPa$ a dovolené napětí v tlaku je $\sigma_{DOV_{TLAK}} = 200\ MPa$, Poissonovo číslo je 0,35.

Hlavní napětí jsou (dle řešení příkladu 9.1) dané vztahy (9.20) a (9.21).

Hypotéza Rankine je dána vztahy (9.3) a (9.4). Pak je zřejmé, že platí

$$\sigma_{RED_{TAH}} = max(\sigma_2, \sigma_3) = \sigma_2 = 100\ MPa \leqq \sigma_{DOV_{TAH}},$$

a také

$$\sigma_{RED_{TLAK}} = |min(\sigma_1, \sigma_3)| = |\sigma_1| = 15\ MPa \leqq \sigma_{DOV_{TLAK}}.$$

Z uvedeného je zřejmé, že napjatost vyhovuje dle hypotézy maximálních normálových napětí.

▲

! Příklady k procvičení

1. Určete míru bezpečnosti $k = \frac{R_e}{\sigma_{RED}}$ vůči mezi kluzu R_e pro houževnatý materiál. Při řešení použijte hypotézu HMH.

   Dáno: $\sigma_1 = -450\ MPa$, $\sigma_2 = -300\ MPa$, $\sigma_3 = -350\ MPa$, $R_e = 250\ MPa$.

2. Určete míru bezpečnosti $k = \frac{R_e}{\sigma_{RED}}$ vůči mezi kluzu R_e pro houževnatý materiál. Při řešení použijte hypotézu Guestovu

   Dáno: $\sigma_1 = -450\ MPa$, $\sigma_2 = -300\ MPa$, $\sigma_3 = -350\ MPa$, $R_e = 250\ MPa$.

3. Určete míru bezpečnosti k vůči mezi kluzu materiálu. Materiál je křehký a má rozdílnou pevnost v tahu a tlaku. Při řešení použijte hypotézu Rankine.

   Dáno: $\sigma_1 = 80\ MPa$, $\sigma_2 = -20\ MPa$, $\sigma_3 = -120\ MPa$, $R_e = 100\ MPa$, $R_{e_{TLAK}} = 400\ MPa$.

4. Odvoďte vztah pro redukované napětí dle hypotézy BMH.

   Dáno: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$, μ.

Klíč k příkladům k procvičení

1. $k = \frac{250}{132{,}29} = 1,89$

2. $k = \frac{250}{150} = 1,67$

3. $k = min(k_{TAH}, k_{TLAK}) = min\left(\frac{100}{80}, \frac{400}{|-120|}\right) = 1,25$

4. $\sigma_{RED} = \sigma\sqrt{3 - 6\mu}$

Pojmy k zapamatování

Σ

- mezní Haighovy plochy
- základní hypotézy pevnosti pro materiály v křehkém stavu
- základní hypotézy pevnosti pro materiály v tvárném stavu

Kontrolní otázky

?

1. Jak je definovaná pevnostní podmínka (designová nerovnice)?
   (a) $\sigma_{RED} \leqq \sigma_{DOV}$.
   (b) $\sigma_{RED} \geqq \sigma_{DOV}$.
   (c) $\sigma_{RED} \geqq 0$.
   (d) $\sigma_{RED} \leqq 0$.
2. Jaká jsou redukovaná napětí dle Guestovy a Rankineovy hypotézy pro případ, kdy $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$ a $\sigma_3 = 0$?
   (a) Nulová.
   (b) Stejná.
   (c) Různá.
   (d) Nelze stanovit.
3. Jak se nazývá hypotéza maximální hustoty deformační energie na změnu tvaru?
   (a) Rankineova hypotéza.
   (b) HMH hypotéza.
   (c) Guestova hypotéza.
   (d) Mohrova hypotéza.
4. Jaká jsou redukovaná napětí dle Guesta a HMH, jestliže pro napjatost platí $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$?
   (a) Různá a kladná.
   (b) Stejná nulová.
   (c) Různá a záporná.
   (d) Nelze stanovit.

5. Jak se nazývá hypotéza maximální hustoty celkové deformační energie?
   (a) Rankineova hypotéza.
   (b) BMH hypotéza.
   (c) Guestova hypotéza.
   (d) Mohrova hypotéza.

Kapitola 10

Vzpěr štíhlých prutů

Průvodce studiem

Již v druhé kapitole, věnované konceptu napětí, jsme při setkání s tlakovým namáháním upozorňovali, že u štíhlých prutů je nutná kontrola, zda nedojde k vybočení střednice, nebo-li ztrátě stability tvaru prutu. Tento jev nazýváme také vzpěrem a v této kapitole si ukážeme, jak určit kritickou osovou sílu, při které k němu dojde. Při řešení příkladů využijeme zejména poznatky o hlavních centrálních kvadratických momentech průřezu z kapitoly 1.

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete:

- vědět, co je to ztráta stability
- rozumět podmínkám ztráty stability prutu
- seznámeni s jednotlivými způsoby výpočtu
- schopni vypočítat kritické napětí
- umět rozhodnout o nutnosti počítat prut na ztrátu stability
- umět vypočítat kritickou sílu

10.1 Vzpěr štíhlých prutů, namáhaných tlakem

Zatížení prutu prostým tlakem bylo popsáno v předchozích kapitolách. Maximální tlaková síla je v tomto případě omezená materiálovými parametry, jako je mez kluzu nebo mez pevnosti.

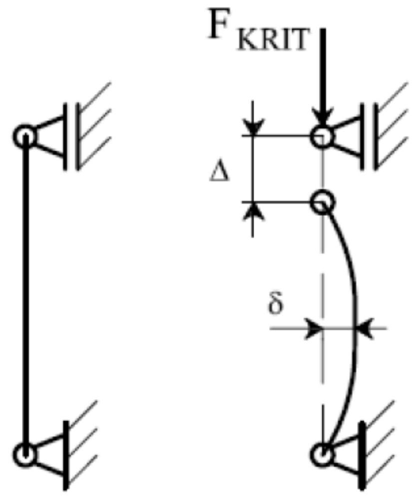
Jiná situace nastává v případě štíhlých prutů, které jsou zatížené osovým tlakem. V těchto případech dojde ke ztrátě stability tvaru (k vybočení osy prutu).

Stabilitou prutu rozumíme jeho původní rovnovážný stav.

10.2 Stabilita přímého prutu – Eulerova metoda

Elastická stabilita patří do oblasti nelineární teorie pružnosti. Neplatí zde ani Kirhoffův zákon jednoznačnosti ani princip superpozice. Základy stability uvedl ve známost Euler v první polovině 18. století.

Z nauky o pružnosti a pevnosti víme, že ideální přímý osově tlačený prut se nachází ve stabilní rovnováze, pokud vnější síla nedosáhne své kritické hodnoty F_{KRIT}, viz obr. 10.1.



Obr. 10.1

V popisu zatížení prutu existují následující možnosti:

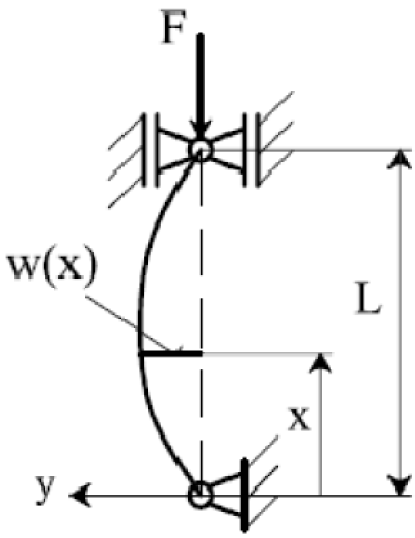
a) Přímý tvar je při $0 \leqq F \leqq F_{KRIT}$ a je tvarem stabilním.

b) Pro $F = F_{KRIT}$ nastává tzv. kritický stav, charakterizovaný bifurkací tj. větvením rovnováhy.

c) V případě, že tlaková síla je větší než kritická $F > F_{KRIT}$, přechází stabilní tvar v tvar labilní a dochází ke ztrátě stability tvaru.

Ideální prut je matematickou idealizací skutečného prutu, který se vyznačuje geometrickými nedokonalostmi.

Mějme dokonale přímý prut stálého průřezu, zatížený osovými tlakovými silami, působícími v těžišti průřezu. Prut je uložen na jednom konci v kloubu a na druhém konci posuvně, viz obr. 10.2.



Obr. 10.2

Přibližnou diferenciální rovnici průhybové čáry volíme ve tvaru

$$w''(x) = -\frac{M(x)}{E \cdot I_z}. \tag{10.1}$$

Ohybový moment v obecné vzdálenosti x lze dle obr. 10.2 vyjádřit ve tvaru

$$M(x) = F \cdot w(x). \tag{10.2}$$

Tyto dvě rovnice vyjadřují Eulerovo statické kritérium stability.

Řešením této soustavy (10.1 a 10.2) získáme obecné řešení ve tvaru

$$w(x) = A \cdot sin(\alpha \cdot x) + B \cdot \cos(\alpha \cdot x), \tag{10.3}$$

kde α je konstanta stanovená dle

$$\alpha^2 = \frac{F}{E \cdot I_z}, \tag{10.4}$$

kde E je modul pružnosti v tahu a Iz je hlavní centrální kvadratický moment průřezu. Pro stanovení konstant A a B aplikujeme následující okrajové podmínky

$$1)\ w(x = 0) = 0, \tag{10.5}$$

$$2)\ w(x = L) = 0. \tag{10.6}$$

Po dosazení okrajových podmínek získáme následující vztahy

$$Z(1):\ \ B = 0 \Rightarrow w(x) = A \cdot \sin(\alpha \cdot x), \tag{10.7}$$

$$Z(2):\ \ w(x) = A \cdot \sin(\alpha \cdot L), \tag{10.8}$$

což vede ke dvěma řešením:

- Je-li $A = 0$, pak $\sin(\alpha \cdot L)$ může nabývat hodnoty od 0 do 1, tj. součin $\alpha \cdot L$ síla F mohou být libovolné. K prohnutí nedojde, protože v každém místě je $w(L) = 0$.
- Je-li $A \neq 0$, pak došlo k vybočení prutu, pak ale musí být $\sin(\alpha \cdot L) = 0$, což je trigonometrická funkce, jejíž kořeny jsou 0, π, 2π, ..., $k\pi$.

Pro kořen $\alpha \cdot L = 0$ a po dosazení do (10.4) toto vede k triviálnímu řešení $F = 0$, tj. nezatížený prut. Pro další kořeny $\alpha \cdot L = k \cdot \pi$ $(k = 1, 2, 3, ...)$ a dosazením do vztahu (10.4) získáme

$$\sqrt{\frac{F}{E \cdot I_z}} \cdot L = k \cdot \pi. \tag{10.9}$$

Upravením této rovnice získáme obecný vztah pro výpočet kritické síly, ve tvaru

$$F_{KRIT} = \frac{k^2 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I_z}{L^2}. \tag{10.10}$$

Nejmenší kritická síla bude pak pro $k = 1$, tedy

$$F_{KRIT} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_z}{L^2}. \tag{10.11}$$

Tento výraz (10.12) platí pouze pro průřezy se stejnými hlavními centrálními kvadratickými momenty k oběma osám (čtverec, kruh, mezikruží). Pro ostatní průřezy prizmatického prutu platí

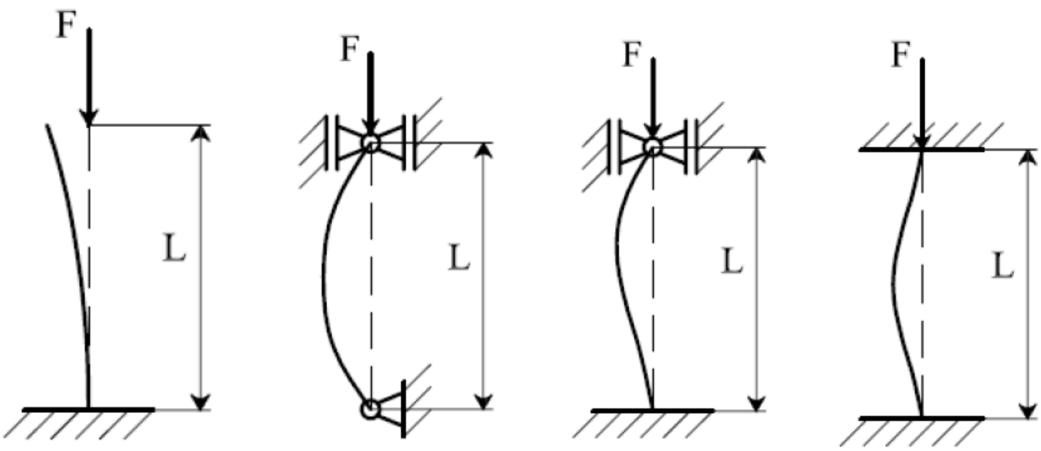
$$F_{KRIT} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{L^2}. \tag{10.12}$$

Při této kritické síle nastane první vybočení prutu a rovnice průhybové křivky bude

$$w(x) = A \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{L}\right). \tag{10.13}$$

Věta 10.1. Výpočet kritické síly je nutné vždy vztahovat k minimálnímu hlavnímu centrálnímu kvadratickému momentu průřezu prutu.

Analogicky se řeší i další případy ztráty stability pro různá uložení konců prutů. Rozlišujeme čtyři základní případy, viz obr. 10.3.



a) $n = 1/2$ b) $n = 1$ c) $n = 3/2$ d) $n = 2$

Obr. 10.3

Obecně pak pro jednotlivé případy uložení prutů lze vztah (10.12) upravit do tvaru

$$F_{KRIT} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{L_{red}^2}, \tag{10.14}$$

kde L_{red} je redukovaná délka prutu a lze ji stanovit ze vztahu

$$L_{red} = \frac{L}{n}, \tag{10.15}$$

kde n je *koeficient uložení prutu*, viz obr. 10.3.

10.3 Vyjádření vzpěrné pevnosti kritickým napětím

Kritické napětí σ_{KR} lze vyjádřit pomocí tohoto vztahu

$$\sigma_{KR} = \frac{F_{KRIT}}{S} \leqq \sigma_u, \tag{10.16}$$

kde S je plocha průřezu prutu a σ_u je mez úměrnosti (mez kluzu).

Dosazením vztahu (10.14) do této rovnice dostaneme vztah

$$\sigma_{KR} = \frac{n^2 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{L^2 \cdot S}. \tag{10.17}$$

Tento výraz lze upravit do této podoby

$$\sigma_{KR} = \frac{n^2 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot i^2}{L^2}, \tag{10.18}$$

kde i je *poloměr setrvačnosti* vyjádřený vztahem

$$i = \sqrt{\frac{I_{min}}{S}}. \tag{10.19}$$

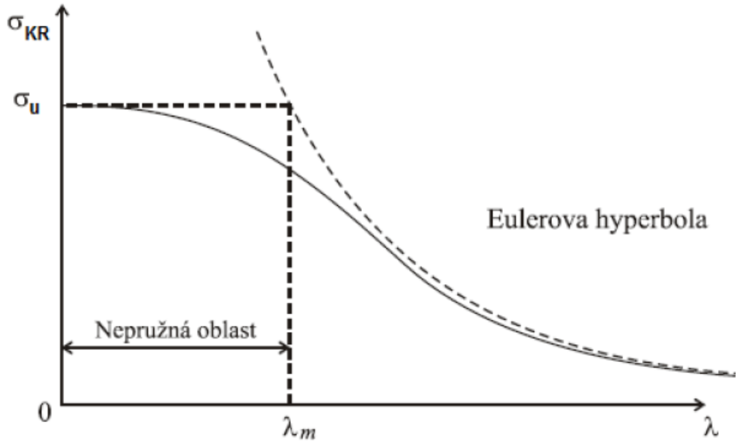
Poměr délky prutu a poloměru setrvačnosti jeho průřezu vyjadřuje tzv. štíhlost prutu λ

$$\lambda = \frac{L}{i}. \tag{10.20}$$

Výraz pro kritické napětí lze následně upravit do tvaru

$$\sigma_{KR} = \frac{n^2 \cdot \pi^2 \cdot E}{\lambda^2}. \tag{10.21}$$

Závislost kritického napětí σ_{KR} na štíhlosti prutu λ je možné graficky znázornit pomocí tzv. *Eulerovy hyperboly*, viz obr. 10.4.



Obr. 10.4

Z obr. 10.4 je patrný nelineární vztah mezi uvedenými veličinami. Pro vysoké hodnoty štíhlosti prutu nabývá kritické zatížení (potažmo napětí) velmi malých hodnot. Při hodnotě štíhlostního poměru menší než tzv. *mezní štíhlost* λ_m již nelze použít Eulerovu teorii. V této oblasti se k řešení stability používá například *Tetmajerova aproximace*, která bude blíže popsaná v následující kapitole.

Za předpokladu platnosti Hookeova zákona je mezní hodnota napětí dána mezí úměrnosti materiálu. Z této hodnoty pak lze stanovit *mezní štíhlost* ve tvaru

$$\lambda_m = n\pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_u}}. \tag{10.22}$$

10.4 Nepružná oblast vzpěru

V případě, kdy $\lambda < \lambda_m$, používáme tzv. Tetmajerův vztah ve tvaru

$$\sigma_{KR} = a - b \cdot \lambda, \tag{10.23}$$

kde a, b jsou materiálové konstanty uvedené v tab. 10.1. Pro litinu a křehké materiály vyhovuje lépe *Jasinského vzorec*

$$\sigma_{KR} = a - b \cdot \lambda + c \cdot \lambda^2. \tag{10.24}$$

Materiál	a $[MPa]$	b $[MPa]$	c $[MPa]$	λ_m
Ocel	320	$1,2$	0	90
Litina	776	12	$0,053$	80
Dřevo	$29,3$	$0,194$	0	110

Tab. 10.1

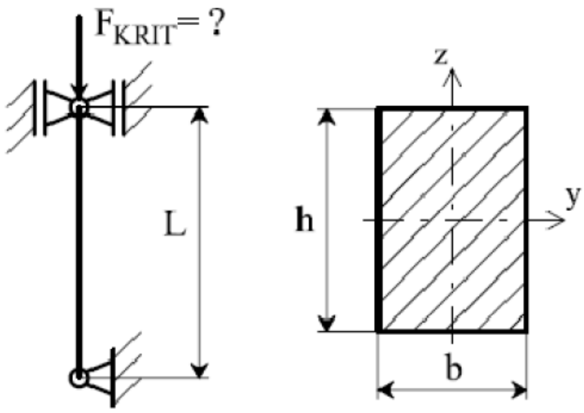
Kritická síla je pak dána vztahem

$$F_{KR} = \sigma_{KR} \cdot S. \tag{10.25}$$

Na závěr připomeňme, že o tom, jakou metodu řešení lze použít pro daný případ, rozhoduje poměr mezi štíhlostí prutu λ a mezní štíhlostí λ_m. V případě, že $\lambda > \lambda_m$, použijeme Eulerovo řešení. V opačném případě volíme Tetmajerovo řešení (10.23) nebo Jasinského vztah (10.24). S problematikou ztráty stability tvaru se například ještě setkáváme u tenkostěnných konstrukčních dílů (tzv. skořepin), jejich řešení však přesahuje rozsah těchto skript. Hlouběji se této problematice věnují například publikace [24] a [25].

Příklad 10.1. Stanovte kritickou sílu F_{KRIT} pro prut, namáhaný na vzpěr (obr. 10.5).

Dáno: $L = 1200\ mm$, $b = 20\ mm$, $b = 60\ mm$, $h = 60\ mm$, $E = 2,1 \cdot 10^5\ MPa$, $\sigma_u = 210\ MPa$.



Obr. 10.5

Pro výpočet kritické síly je nutné nejprve začít s výpočtem kvadratických momentů k těžištním osám (podrobně popsáno v kapitole 1). Kvadratický moment k ose z vypočítáme dle vztahu

$$I_z = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{20 \cdot 60^3}{12} = 360000\ mm^4. \tag{P1}$$

Kvadratický moment k ose y vypočítáme dle vztahu

$$I_y = \frac{h \cdot b^3}{12} = \frac{60 \cdot 20^3}{12} = 40000\ mm^4. \tag{P2}$$

K výpočtu kritické síly se volí minimální kvadratický moment. V tomto případě $I_{min} = I_y$.

Následuje výpočet poloměru setrvačnosti i dle vztahu (10.19)

$$i = \sqrt{\frac{I_{min}}{S}} = \sqrt{\frac{40000}{20 \cdot 60}} = 5,774\ mm. \tag{P3}$$

Následuje výpočet štíhlosti prutu λ dle vztahu (10.20)

$$\lambda = \frac{L}{i} = \frac{1200}{5,774} = 207,828. \tag{P4}$$

Z materiálových parametrů a koeficientu uložení prutu vypočítáme mezní štíhlost dle vztahu (10.22)

$$\lambda_m = n\pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_u}} = 1 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{2,1 \cdot 10^5}{210}} = 99,3. \tag{P5}$$

Porovnáním obou štíhlostí rozhodneme o způsobu výpočtu kritické síly. V tomto případě je $\lambda > \lambda_m$, což znamená, že k výpočtu kritické síly použijeme Eulerův vztah (10.14).

Dle vztahu (10.15) nejprve vypočítáme redukovanou délku prutu

$$L_{red} = \frac{L}{n} = \frac{1200}{1} = 1200 \; mm. \tag{P6}$$

Z Eulerova vztahu (10.14) pak stanovíme kritickou sílu

$$F_{KRIT} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{L_{red}} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 40000}{1200^2} = 57572,7 \; N. \tag{P7}$$

Uvažujme dále, že tyč bude mít délku pouze $L = 300 \; mm$, pak štíhlost prutu bude rovna

$$\lambda = \frac{L}{i} = \frac{300}{5,774} = 51,957. \tag{P8}$$

Porovnáním s mezní štíhlosti dostaneme $\lambda < \lambda_m$, což znamená, že k výpočtu kritické síly použijeme Tetmajerův (10.23) nebo Jasinského (10.24) vzorec. Pro ocel jsou oba vzorce stejné. Kritické napětí pak bude rovno

$$\sigma_{KR} = a - b \cdot \lambda = 320 - 1,2 \cdot 51,957 = 257,652 \; MPa. \tag{P9}$$

Kritická síla je pak dána vztahem

$$F_{KRIT} = \sigma_{KR} \cdot S = 257,5652 \cdot 20 \cdot 60 = 309182,4 \; N. \tag{P10}$$

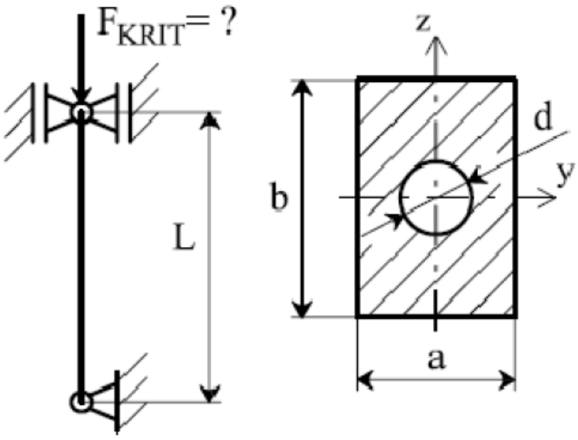
▲

Příklady k procvičení

!

1. Stanovte kritickou sílu F_{KRIT} pro prut, namáhaný na vzpěr (obr. 10.6).

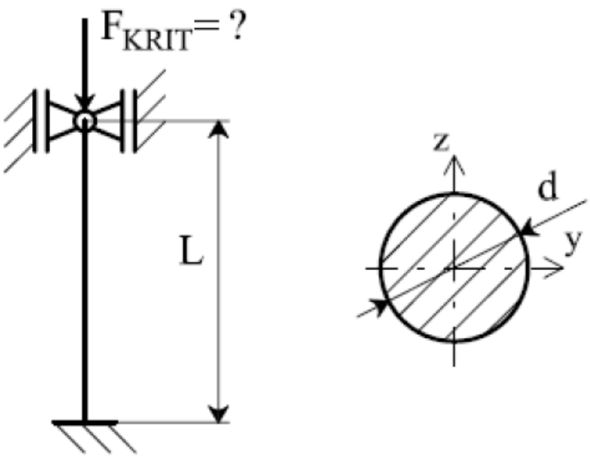
   Dáno: $L = 2200\ mm$, $d = 20\ mm$, $a = 40\ MPa$, $b = 60\ mm$, $E = 2,1 \cdot 10^5\ MPa$, $\sigma_u = 210\ MPa$.



Obr. 10.6

2. Stanovte kritickou sílu F_{KRIT} pro prut, namáhaný na vzpěr dle obr. 10.7.

   Dáno: $L = 1500\ mm$, $d = 20\ mm$, $E = 2,1 \cdot 10^5\ MPa$, $\sigma_u = 210\ MPa$.



Obr. 10.7

Klíč k příkladům k procvičení

1. $F_{KRIT} = 133\,669\ N$
2. $F_{KRIT} = 16\,270\ N$

Pojmy k zapamatování

- kritická síla
- Eulerovo statické kritérium stability
- základní případy vzpěru
- redukovaná délka prutu
- koeficient uložení prutu
- mezní štíhlost
- Tetmajerův vztah
- Jasinského vztah

Kontrolní otázky

1. Za jakých podmínek musíme počítat prut na ztrátu stability?
   (a) Prut je namáhán tlakovou silou.
   (b) Prut je namáhán tahovou silou.
   (c) Prut je nezatížený.
2. Vztah $F_{KRIT} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{L_{red}^2}$ je výsledkem řešení dle?
   (a) Eulera.
   (b) Tetmajera.
   (c) Jasinského.
3. Pro jaký kvadratický moment průřezu se stanovuje kritická síla?
   (a) Maximální.
   (b) Minimální.
   (c) Základní.

4. Kdy lze použít Eulerovu metodu řešení?

   (a) $\lambda < \lambda_m$.

   (b) $\lambda << \lambda_m$.

   (c) $\lambda > \lambda_m$.

Kapitola 11

Pevnost skutečných strojních částí

Průvodce studiem

V předchozím studiu jsme se seznámili se základními druhy namáhání. Předpokládali jsme, že vnější zátěžné síly a momenty, působící na danou součást, se nemění s časem, jedná se tedy o statické zatěžování. Dále bylo předpokládáno, že průřez součásti se nemění (prizmatický tvar). Při namáhání tahem (tlakem) bylo předpokládáno rovnoměrné rozložení napětí v průřezu; při namáhání ohybem bylo předpokládáno rozložení normálových napětí v průřezu podle přímky; při namáhání krutem rozložení smykových napětí podle přímky. Ve skutečnosti nejsou součásti zpravidla v celém rozsahu prismatické, jejich průřez se zpravidla mění (zápichy, osazení, drážky pro pero, závity, otvory apod). Citované změny průřezu jsou v literatuře označovány pojmem konstrukční vruby. Účinkem vrubů dochází v průřezu k nerovnoměrnému rozložení napětí; toto napětí dosahuje maxima v kořeni vrubu (hovoříme o koncentraci napětí). Nerovnoměrné rozložení napětí má zvláště velký význam v případech, kdy vnější zatížení se mění periodicky s časem. V kořenech vrubů dochází ke vzniku (iniciaci) únavových trhlin, jejichž růst je závislý na čase. Výsledné porušení součásti je nazýváno únavou materiálu.

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete:

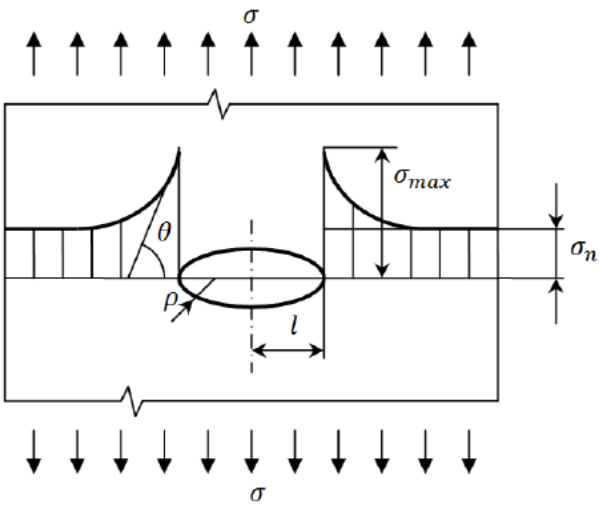
- umět vysvětlit pojem konstrukční vrub
- znát základní charakteristiky konstrukčních vrubů
- znát základní druhy cyklického zatěžování
- chápat problematiku, týkající se únavy materiálu
- schopni stanovit životnost součásti

11.1 Základní charakteristiky konstrukčních vrubů

Účinkem vrubu dochází k místnímu zvýšení napětí [26]. Velikost maximálního napětí se v praxi vyjadřuje pomocí *teoretického součinitele koncentrace napětí* α_t, který je definován následovně

$$\alpha_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_n}, \tag{11.1}$$

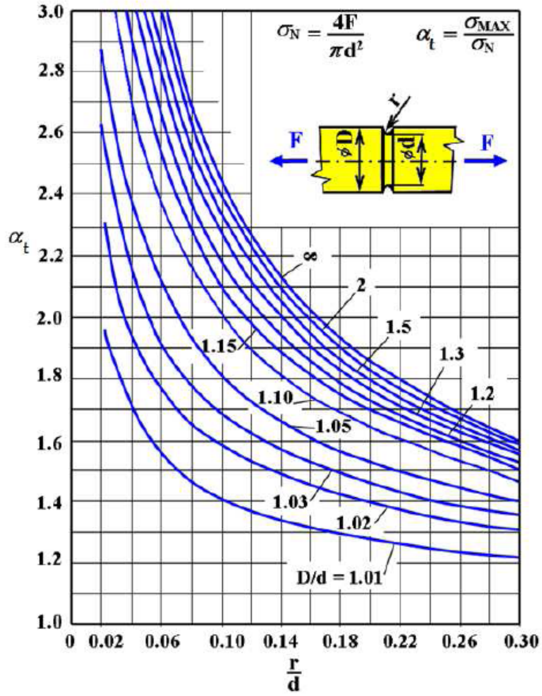
kde σ_n je *nominální napětí*, vypočítané za předpokladu rovnoměrného rozložení napětí v nebezpečném průřezu. Hodnoty teoretických součinitelů koncentrace napětí pro jednoduché případy je možno určit výpočtem na základě *matematické teorie pružnosti* (obr. 11.1).



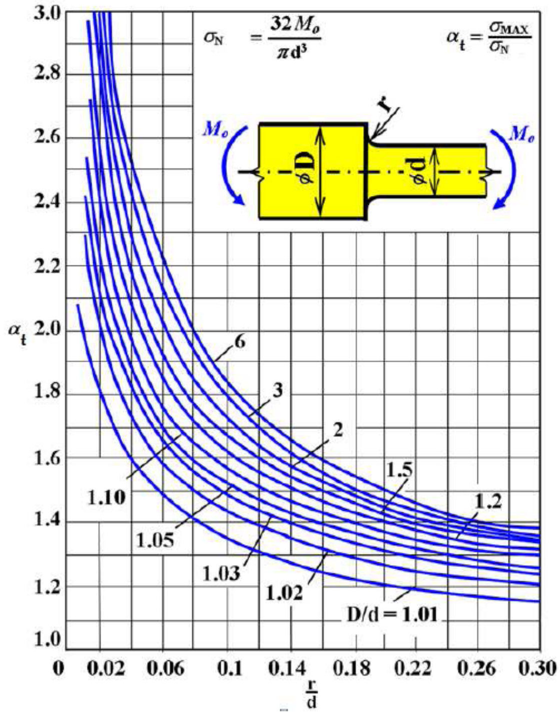
$$\alpha_t = 1 + 2\sqrt{\frac{l}{\rho}}$$

Obr. 11.1

Ve složitějších případech je možno určit součinitele koncentrace napětí pomocí *metody konečných prvků*, resp. experimentálně, např. pomocí fotoelasticimetrie (kapitola 12). Součinitele koncentrace napětí, získané touto cestou, je pak zvykem uvádět v tabulkách spolu s obrázkem vrubu a vyznačením způsobu namáhání (obr. 11.2, 11.3).



Obr. 11.2



Obr. 11.3

Účinek vrubu na napjatost odeznívá tím rychleji, čím je vrub ostřejší. Spád napětí je charakterizován *gradientem napětí.*

Poměrný gradient napětí je definován vztahem

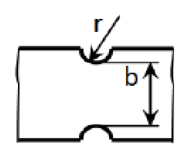
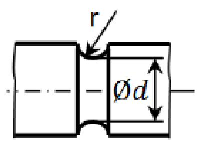
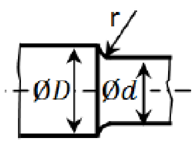
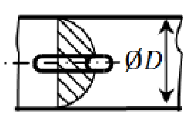
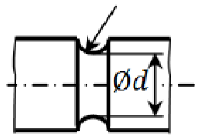
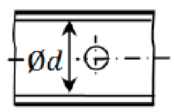
$$\chi_\sigma = \frac{1}{\sigma_{max}} \left| \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\chi} \right|_{x=0} = \frac{1}{\sigma_{max}} \operatorname{tg} \chi \tag{11.2}$$

a *bezrozměrný gradient napětí* vztahem

$$C_\sigma = \chi_\sigma r, \tag{11.3}$$

kde r je poloměr křivosti vrubu.

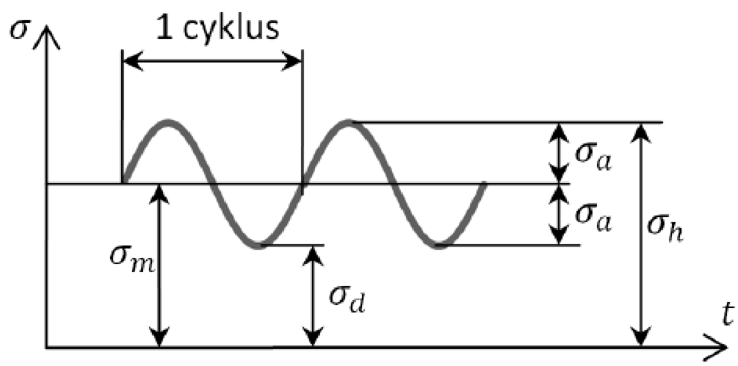
Bezrozměrné gradienty napětí pro některé případy konstrukčních vrubů jsou uvedeny v obr. 11.4.

Namáhání	Tvar vrubu	C_σ	Tvar vrubu	C_σ	Tvar vrubu	C_σ
Tah-tlak		2		2		2
Ohyb		$2 + 2\frac{r}{b}$		$2 + 2\frac{r}{b}$		$2 + 4\frac{r}{D+d}$
Krut		$1 + 2\frac{r}{b}$		$1 + 2\frac{r}{b}$		3

Obr. 11.4

11.2 Druhy cyklického zatěžování

Dle charakteru dělíme cyklické zatěžování na stochastické (náhodné) a deterministické. V druhém případě je známa hodnota zatížení v kterémkoliv okamžiku. Deterministické zatěžování může být periodické nebo neperiodické. Často se v praxi setkáváme s harmonickým zatěžováním, kdy se napětí v čase mění sinusově od jisté minimální hodnoty (dolní napětí) po maximální hodnotu (horní) napětí, viz obr. 11.5.



Obr. 11.5

Pro střední napětí cyklu σ_m a amplitudu napětí σ_α platí následující vztahy

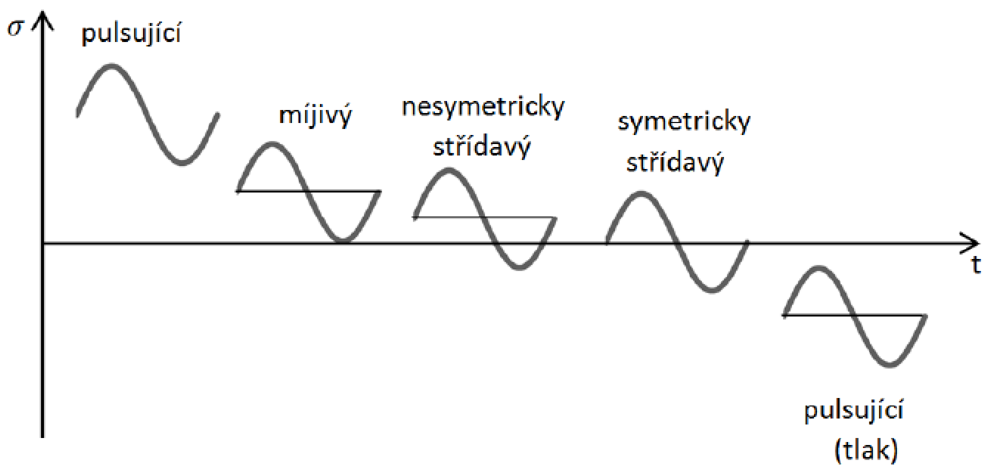
$$\sigma_m = \frac{\sigma_h + \sigma_d}{2}, \tag{11.4}$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_h - \sigma_d}{2}, \tag{11.5}$$

kde σ_h je horní napětí cyklu a σ_d je dolní napětí cyklu. Pomocí těchto hodnot, případně amplitudy napětí σ_a a středního napětí σ_m, se definuje součinitel nesymetrie cyklu

$$R = \frac{\sigma_d}{\sigma_h} = \frac{\sigma_m - \sigma_a}{\sigma_h + \sigma_a}. \tag{11.6}$$

Dle charakteru definujeme jednotlivé případy cyklu, viz obr. 11.6.

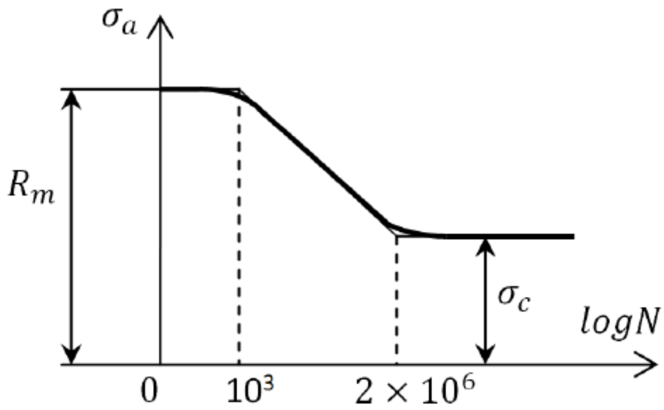


Obr. 11.6

11.3 Wőhlerova křivka a mez únavy hladkých těles

Vliv cyklického zatěžování byl poprvé zkoumán v druhé polovině 19. století *Augustem Wőhlerem* při studiu kolejnic. Bylo třeba vysvětlit, proč se u cyklického zatěžování materiál porušuje při napětích menších než mez kluzu, aniž by docházelo k plastickým deformacím. Při zkouškách byly zkušební vzorky zatěžovány symetrickým střídavým cyklem o dané amplitudě napětí a zjišťoval se počet cyklů do porušení N. Zkušební vzorky musí být ze stejného materiálu, mít stejný tvar a být stejně opracovány. Zpravidla se jedná o zkušební tyčinky o průměru $7 \div 10$ mm s leštěným povrchem.

Závislost mezi amplitudou napětí a životností součástí je znázorněna *Wőhlerovou křivkou.* V technické praxi se zpravidla Wőhlerova křivka znázorňuje v semilogaritmických souřadnicích, přičemž na osu pořadnic se vynáší amplituda napětí a na osu úseček cykly v logaritmických souřadnicích (obr. 11.7). Celý Wőhlerův diagram je možno rozdělit na tři úseky [27].



Obr. 11.7

V prvním úseku ($N \cong 10^3$ cyklů), kdy počet cyklů je malý, se jedná o oblast statických lomů.

Ve druhém úseku amplituda napětí klesá. Jedná se o tzv. úsek časové pevnosti s omezenou životností. Dochází k porušení nízkocyklovou únavou.

Ve třetím úseku, asi při $N \geqq 2 \cdot 10^6$ cyklů, je zřejmé, že amplituda napětí se nemění. To znamená, že při této amplitudě vydrží materiál neomezeně dlouho. Hovoříme o *mezi únavy materiálu.*

Definice 11.1. *Mez únavy* lze definovat jako největší napětí, které nevede k lomu ani po překonání smluvní hranice 10^7 cyklů. Tato definice platí u ocelí; slitiny hliníku nemají konstantní mez únavy.

Mez únavy se dá určit jednak experimentálně, rovněž ale bylo prokázáno, že mez únavy hladkých těles je funkcí konvenční pevnosti R_m.

Pro konstrukční oceli s mezí pevnosti $R_m = (500 \div 1500\ MPa)$ platí následující empirické vztahy.

Tah–tlak	$\sigma_c = 0,36\, R_m + 13$
Míjivý tah	$\sigma_{hc} = 0,59\, R_m + 38$
Plochý ohyb	$\sigma_{o,c} = 0,29\, R_m + 111$
Míjivý ohyb	$\sigma_{o,hc} = 0,4\, R_m + 317$
Krut	$\tau_c = 0,21\, R_m + 49$
Míjivý krut	$\tau_{hc} = 0,1\, R_m + 485$
Ohyb za rotace	$\sigma_{oR,C} = 0,36\, R_m + 44$

11.4 Faktory, ovlivňující mez únavy

Mez únavy hladkého tělesa (bez koncentrátorů napětí) je závislá na celé řadě faktorů, k nimž zejména patří velikost tělesa, jakost povrchu, nesymetrie zatěžovacího cyklu, vliv víceosé napjatosti.

11.4.1 Vliv velikosti tělesa a gradientu napětí

Mez únavy s rostoucím rozměrem vzorku poněkud klesá, což je dáno odlišnostmi povrchových vrstev a jádra průřezu, která je zpravidla u větších vzorků horší.

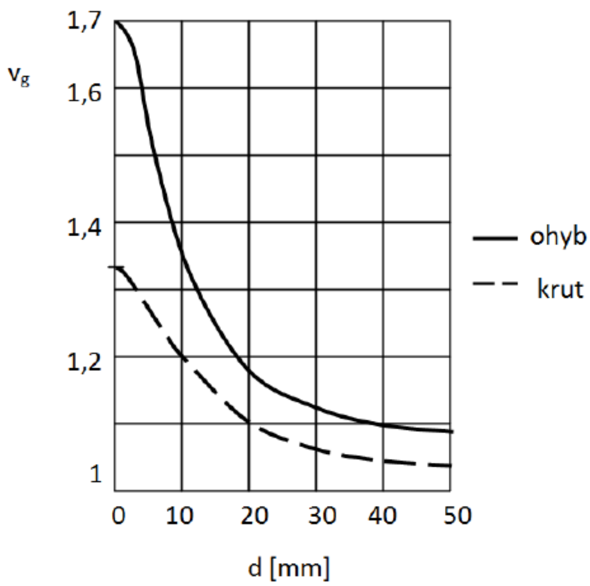
Podle Němce a Puchnera je možno vliv velikosti vyjádřit následovně

$$\nu = 1 - \sqrt{0,02 \ln \frac{D}{d}}, \tag{11.7}$$

kde d je rozměr menšího vzorku a D rozměr skutečné součásti.

Při ohybu a krutu se rovněž uplatňuje vliv gradientu napětí (napětí roste se vzdáleností od osy). Proto je např. mez únavy v ohybu větší než mez únavy v tahu, a to tím více, čím je menší průměr zkušebního vzorku.

Vliv gradientu napětí se projevuje zejména u součástí menších rozměrů (obr. 11.8), u rozměrů větších než cca 50 mm je jeho vliv zanedbatelný. Důvodem je skutečnost, že u součástí větších rozměrů se méně projeví odlišné vlastnosti povrchové vrstvy, která má vlivem technologického zpracování poněkud jiné mechanické vlastnosti než jádro součásti. Vliv gradientu napětí pro kruhový průřez je znázorněn na obr. 11.8.



Obr. 11.8

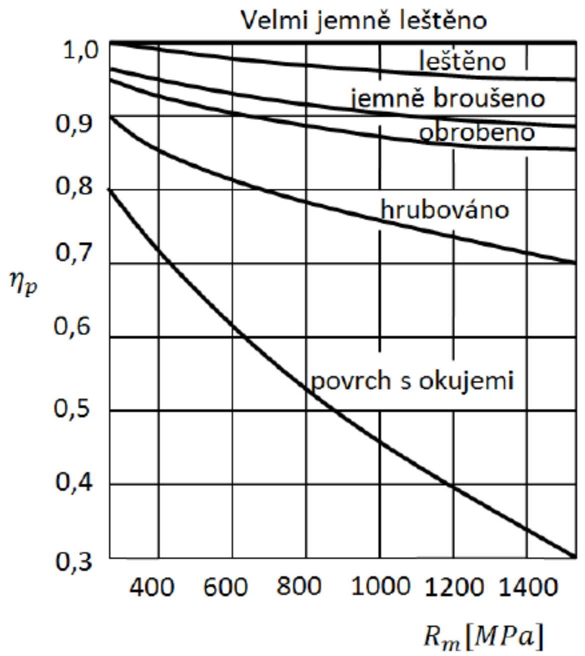
Celkový součinitel velikosti součástí, namáhané střídavým ohybem ν_σ (krutem ν_τ), je závislý na součiniteli gradientu napětí ν_g a součiniteli velikosti, tedy

$$\nu_\sigma = f(\nu_g, \nu), \tag{11.8}$$

$$\nu_\tau = f(\nu_g, \nu). \tag{11.9}$$

11.4.2 Vliv jakosti povrchu

Protože k nukleaci trhlin dochází zpravidla v povrchové vrstvě, je mez únavy ovlivňována jakostí povrchu. Tento vliv je ve výpočtech zohledněn součinitelem jakosti povrchu η_p, který je definován jako podíl meze únavy součástí s daným povrchem k mezi únavy součástí s povrchem leštěným (obr. 11.9).



Obr. 11.9

Při namáhání krutem je součinitel jakosti povrchu roven

$$\eta_{pk} = \frac{1+\nu_p}{2}. \tag{11.10}$$

Mez únavy hladké části (bez vrubu) v tahu–tlaku nebo ohybu je pak

$$\sigma_c^\times = \sigma_c \nu_\sigma \eta_p \tag{11.11}$$

a v krutu

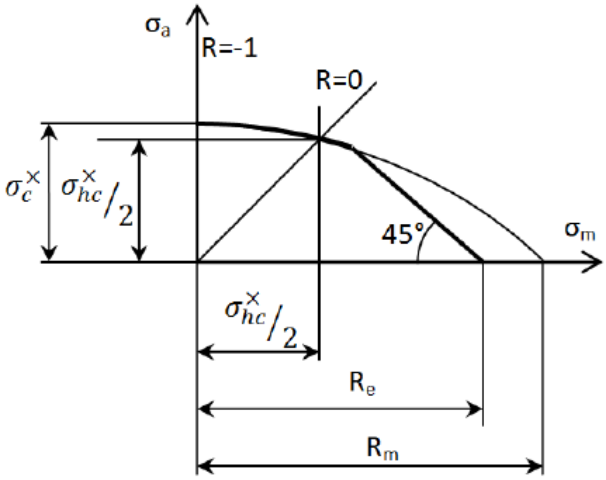
$$\tau_c^\times = \tau_c \nu_\tau \eta_{pk}, \tag{11.12}$$

kde σ_c,τ_c jsou meze únavy leštěných vzorků.

11.4.3 Vliv nesymetrie cyklu

Skutečné zatěžování součástí je zpravidla nesymetrické, se statickou složkou napětí σ_m různou od nuly. Experimenty bylo prokázáno, že tahové střední napětí snižuje amplitudu napětí na mezi únavy, tlakové ji naopak zvyšuje.

Závislost $\sigma_a = f(\sigma_m)$ je znázorněna v Haighově diagramu (obr. 11.10).



Obr. 11.10

Skutečný tvar tohoto diagramu se zpravidla idealizuje. V praxi se nejčastěji používá náhrada Goodmanovou přímkou

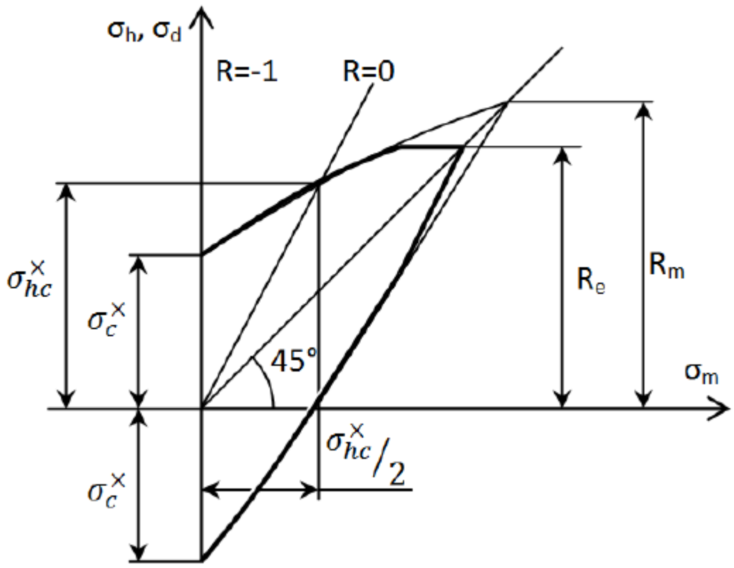
$$\frac{\sigma_a}{\sigma_c^\times} = 1 - \frac{\sigma_m}{R_m} \tag{11.13}$$

nebo Gerberovou parabolou

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_c^\times} = 1 - \left(\frac{\sigma_m}{R_m}\right)^2 . \tag{11.14}$$

Celý diagram ovšem není použitelný, protože střední složka i amplituda napětí nesmí překročit mez kluzu. Proto je diagram omezen přímkou svírající s vodorovnou osou úhel 45°.

V praxi se rovněž používá diagram Smithův, udávající závislost $\sigma_h = f(\sigma_m)$ (obr. 11.11).

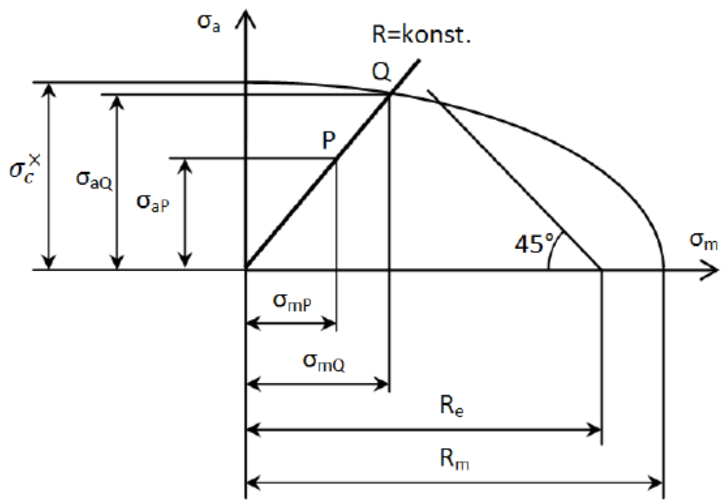


Obr. 11.11

11.4.4 Stanovení bezpečnosti vůči mezi únavy

Jestliže je amplituda napětí σ_{aP} a střední napětí σ_{mP} a meznímu stavu odpovídá v Haighově diagramu bod Q (obr. 11.12), pak *součinitel bezpečnosti* je definován následovně

$$k = \frac{\sigma_{aQ}}{\sigma_{aP}} = \frac{\sigma_{mQ}}{\sigma_{mP}}. \tag{11.15}$$



Obr. 11.12

11.5 Mez únavy těles s vruby

V reálných součástech existují vždy koncentrátory napětí, ve kterých se přednostně iniciují trhliny. Účinek vrubu je vyjádřen součinitelem vrubu β, který je definován jako podíl meze únavy části bez vrubu $\sigma_c^\times$ k mezi mezi únavy částí s vrubem σ_c^*

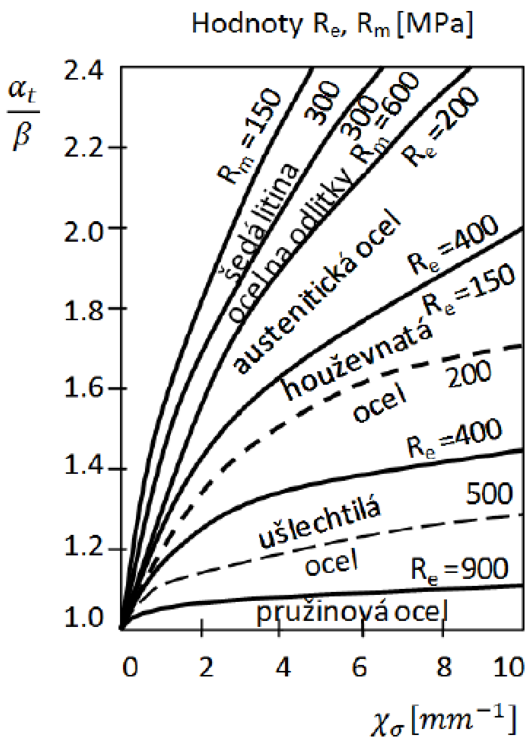
$$\beta = \frac{\sigma_c^\times}{\sigma_c^*}. \tag{11.16}$$

Obecně je součinitel vrubu menší než teoretický součinitel koncentrace napětí $\beta < \alpha_t$.

Pro výpočet součinitele vrubu existuje celá řada metod. Jednoduchý způsob výpočtu součinitele vrubu navrhli na základě experimentů Siebel a Stieler, podle nichž je

$$\frac{\alpha_t}{\beta} = 1 + \sqrt{c\chi_\sigma}, \tag{11.17}$$

kde χ_σ je *poměrný gradient napětí* a c je materiálová konstanta. Graficky jsou průběhy rovnice (11.17) znázorněny na obr. 11.13.



Obr. 11.13

Mez únavy částí s vruby je pak definována následovně

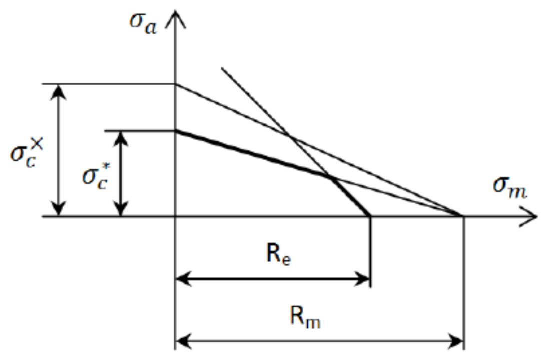
$$\sigma_c^* = \frac{\sigma_c^\times}{\beta} = \frac{\sigma_c \nu_\sigma}{\beta}\eta_p \tag{11.18}$$

a

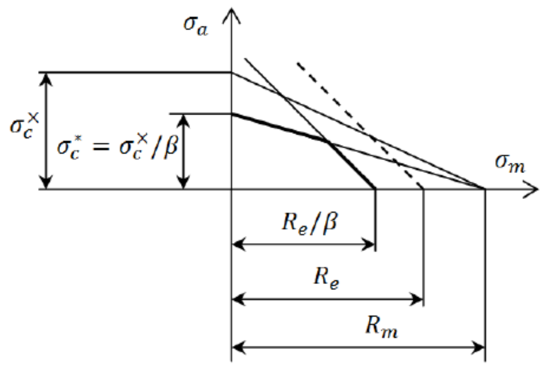
$$\tau_c^* = \frac{\tau_c^\times}{\beta} = \frac{\tau_c \nu_\tau}{\beta}\eta_{pk}. \tag{11.19}$$

11.5.1 Smyčkové diagramy částí s vruby

U houževnatých materiálů se účinek vrubu projevuje pouze na střídavé složce cyklu, kde ovlivňuje velikost amplitudy napětí (obr. 11.14), střední napětí zůstává nezměněno. U křehkých materiálů vruby ovlivňují i statické mechanické vlastnosti (obr. 11.15).



Obr. 11.14



Obr. 11.15

11.6 Mez únavy při složeném namáhání

Zpravidla se jedná o kombinaci ohybu a krutu, resp. tahu–tlaku a krutu a jen výjimečně o jiné případy. Působí–li maximální napětí od jednotlivých druhů namáhání ve stejném místě a vždy současně, platí pro redukované napětí vztah

$$\sigma_{red}^2 = \sigma_a^2 + k\tau_a^2, \tag{11.20}$$

kde $k = 3$ pro hypotézu HMH a $k = 4$ pro hypotézu Guestovu. Dělíme-li tuto rovnici kvadrátem meze únavy $\sigma_c^{*2} = k\tau_a^2$, dostaneme pro mezní čáru, pro kterou je $\sigma_{red} = \sigma_c$, vztah

$$\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_c^*}\right)^2 + \left(\frac{\tau_a}{\tau_c^*}\right)^2 = 1. \tag{11.21}$$

11.6.1 Stanovení bezpečnosti vůči mezi únavy při kombinovaném namáhání

Součinitel bezpečnosti k_c vůči mezi únavy je definován následovně

$$k_c = \frac{\sigma_c}{\sigma_{red}}. \tag{11.22}$$

Při kombinaci ohybu a krutu z rovnice (11.20) dostaneme

$$\frac{1}{k_c^2} = \left(\frac{\sigma_a}{\sigma_c^*}\right)^2 + \left(\frac{\tau_a}{\tau_c^*}\right)^2. \tag{11.23}$$

Dosadíme-li jednotlivé součinitele bezpečnosti

$$k_\sigma = \frac{\sigma_c^*}{\sigma_a}, \quad k_\tau = \frac{\tau_c^*}{\tau_a}, \tag{11.24}$$

obdržíme

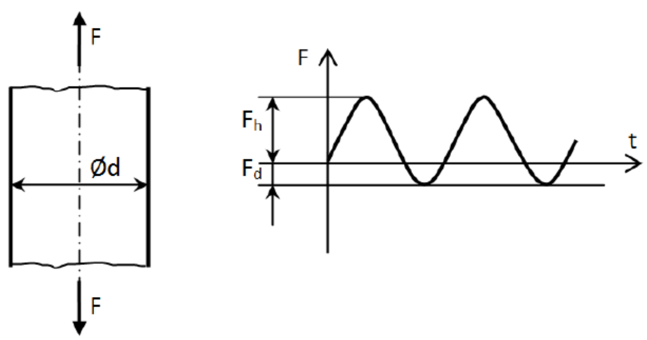
$$k_c = \frac{k\sigma k_\tau}{\sqrt{k_\sigma^2 + k_\tau^2}}. \tag{11.25}$$

Příklady k procvičení

1. Táhlo kruhového průřezu je namáháno pulsující silou. Určete přípustné hodnoty zatížení F_h a F_d, jestliže průměr táhla $\phi d = 40\ mm$, mez únavy v ohybu $\sigma_{co(10)} = 270\ MPa$, mez kluzu $R_e = 295\ MPa$, mez pevnosti $R_m = 510\ MPa$. Povrch táhla je obroben. Součinitel nesymetrie cyklu $R = -0,2$. K výpočtu použijte:

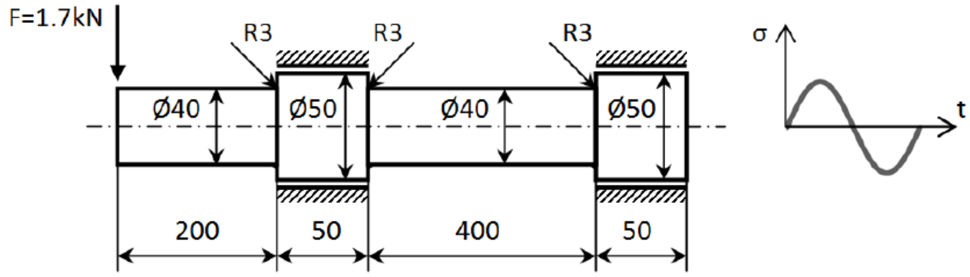
   (a) Goodmanovu přímku.

   (b) Gerberovu parabolu.



Obr. 11.16

2. Hřídel, zatížený a uložený podle obr. 11.17, je namáhán ohybem za rotace. Je povrchově kalen a jemně broušen. Stanovte bezpečnost vůči mezi únavy. Z materiálových podkladů je: $\sigma_{co(10)} = 270\ MPa$, $R_e = 295\ MPa$, $R_m = 510\ MPa$. K výpočtu použijte Goodmanovu přímku.



Obr. 11.17

Klíč k příkladům k procvičení

1. $F_h = 262,4\ kN$, $F_d = -52,47\ kN$ – Goodmanova přímka
   $F_h = 302,7\ kN$, $F_d = -60,5\ kN$ – Gerberova přímka

2. $F_c = 1,63$

Pojmy k zapamatování

- konstrukční vruby
- teoretický součinitel koncentrace napětí
- gradient napětí
- cyklické zatěžování
- střední složka napětí
- amplituda napětí
- Wőhlerova křivka
- mez únavy
- počet cyklů do lomu
- součinitel vrubu

?

Kontrolní otázky

1. Jaké jsou základní charakteristiky konstrukčního vrubu?
2. Jak je definován teoretický součinitel koncentrace napětí?
3. Co znázorňuje Wőhlerova křivka?
4. Jak je definována mez únavy?
5. Jaké jsou základní faktory, které ovlivňují mez únavy materiálu?
6. K čemu slouží smyčkové diagramy? Uveďte příklady.
7. Dokážete definovat součinitel bezpečnosti vůči mezi únavy v případě jednoosé napjatosti a v případě víceré napjatosti?

Kapitola 12

Experimentální pružnost

Průvodce studiem

Až dosud jsme se učili aplikovat analytický přístup k řešení základních úloh technické praxe, ten je však použitelný jen pro jednoduchou geometrii těles a při splnění předepsaných podmínek. Mnohem širší možnosti skýtá v dnešní době přístup numerický (výpočtové modelování) a experimentální. Při řešení složitějších problémů se dnes považuje v praxi za optimální použití výpočtového modelování spolu s experimentálním přístupem, což však je finančně nákladnější. V této kapitole se seznámíme se základními metodami experimentální pružnosti.

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete seznámeni s:

- úkoly experimentální mechaniky
- členěním experimentálních metod
- principy vybraných experimentálních metod
- progresivními optickými metodami
- úplnými základy odporové tenzometrie

12.1 Úvod

Experimentální metody mají v mechanice stále nezastupitelnou úlohu. Ačkoliv v posledních desetiletích došlo k výraznému pokroku v oblasti výpočtového modelování a ke konci minulého století mnozí prognostici předpovídali postupné ubývání poptávky po experimentálním řešení z průmyslu, zažívá experimentální mechanika renesanci, zejména v oblasti rozvoje a aplikace optických metod. Samozřejmostí je dnes počítačová podpora experimentu, vedoucí až k jeho automatizaci. O to větší důraz by měl být kladen na důkladné plánování, statistické zpracování a celkové vyhodnocení experimentu. Experimentátor musí mít v dnešní době jak velmi dobré teoretické znalosti, tak solidní povědomí o mechanických vlastnostech a chování konstrukčních materiálů za různých provozních podmínek.

Jmenujme alespoň několik úkolů experimentální mechaniky [29] pro dnešní dobu:

- získávání nových poznatků
- podpora materiálového výzkumu
- získání vstupních dat pro výpočtové modelování
- ověřování výsledků výpočtového modelování
- náhrada výpočtového modelování
- monitorování a diagnostika
- ...

Pomocí experimentálních metod pružnosti se vyšetřují velikosti poměrných deformací, napětí, posuvů a s těmito veličinami související zatížení, tedy síly, tlaky, kroutící momenty, atd.

Věta 12.1. Napětí nelze měřit přímo! Vždy vyšetřujeme posuvy nebo deformace a z deformací s užitím konstitučních vztahů napětí vyhodnotíme.

Alespoň stručně budeme charakterizovat každou skupinu metod experimentální pružnosti. Dle fyzikálního principu máme:

1. Elektrické metody.

   Mezi jejich hlavní přednosti lze počítat vysokou přesnost, citlivost a rychlost měření, a to i při vysokém počtu vyšetřovaných míst. Výstupní signál může být v analogové nebo digitální formě. Za nevýhody počítáme vyšší kvalifikační požadavky na obsluhu a vyšší investiční náklady na měřicí aparaturu. Nejrozšířenější elektrickou metodou je odporová tenzometrie, které bude věnována jedna z následujících sekcí.

2. Optické metody.

   Jejich aplikace je podmíněna viditelností vyšetřované plochy povrchu. Za největší jejich výhodu lze považovat bezkontaktnost, která však u klasických metod bývá vykoupena náročností vyhodnocení. Moderní optické metody jsou variabilní, použitelné při měření v provozu a umožňují poměrně rychlé vyhodnocení průběhu deformace či napětí na povrchu zkoumaných těles. Vzhledem k velkému uplatnění je i těmto metodám věnována vlastní sekce.

3. Křehké laky.

   Některé pryskyřice mají nízkou tažnost, proto při aplikaci na povrch po zatížení praskají. Vznikají tak trhliny, kolmé na směr největšího hlavního tahového napětí (viz také Rankinova hypotéza v kapitole 9). Tato metoda je vhodná pro nalezení kritických míst a směrů hlavních napětí na povrchu těles.

4. Ultrazvukové metody.

   Kromě defektoskopie se tyto metody používají ke stanovení velikosti aplikovaných i zbytkových napětí, ale také pro určení elastických konstant materiálu či měření tloušťky.

5. Rentgenografie.

   Tato metoda je založena na difrakci RTG paprsků v polykrystalických materiálech. Můžeme jí určit změnu vzdálenosti atomových rovin v důsledku pružných deformací. Používá se zejména ke stanovení zbytkových napětí.

6. Termální emise.

   Využívá se přeměny deformační energie v tepelnou při cyklickém namáhání. Teplotní změny v důsledku napjatosti jsou v tisícinách až setinách stupně Kelvina. Citlivost metody je pro oceli až 1 MPa.

7. Hybridní metody.

   Jedná se o velmi slibný přístup, kdy se kombinují experimentální a numerické metody. Podnětnou publikací je v tomto případě kniha [31].

Dvě nejvýznamnější skupiny metod experimentální pružnosti budou podrobněji rozebrány v samostatných kapitolách.

12.2 Optické metody

V úvodní sekci byl zmíněn pojem klasických optických metod. Jsou jím myšleny metody, jejichž počátek většinou sahá do období před objevením laseru [29] a řadí se mezi ně zejména:

1. *Optické interferometry.*

   Využívají interference světla, tedy jevů, jež jsou projevem skládání světelných vln.

2. *Metoda moiré.*

   Je založena na mechanické interferenci světla na optických mřížkách, rozdíl mezi deformovanou měřicí a referenční mřížkou dává vzniknout moiré pruhům, které odpovídají posuvu o rozteč mřížky.

3. *Fotoelasticimetrie.*

   Využívá se fotoelasticimetrického jevu, kdy se některé průhledné amorfní materiály při zatížení mění na opticky anizotropní. Jedná se o fyzikální jev, který nazýváme dočasným dvojlomem. Příkladem je obr. 12.1, kde je patrný model maticového klíče.

Obr. 12.1

Při průchodu usměrněného (polarizovaného) světla modelem se zobrazí čáry, spojující body s konstantním rozdílem hlavních napětí (izochromaty) a čáry, jejichž body mají stejný sklon hlavních napětí (izokliny). Vzhledem k tomu, že se používá polarizované světlo, nazývá se fotoelasticimetrický přístroj polariskop. Jeho podrobný popis a návod na vyhodnocení fotoelasticimetrického experimentu lze najít ve skriptech [2].

Ve fotoelasticimetrii se využívá buď modelové podobnosti (transmisní fotoelasticimetrie) nebo se nanáší opticky citlivá vrstva na povrch vyšetřované součásti (reflexní fotoelasticimetrie).

4. *Stereometrické a stereofotogrametrické metody.*

   Tyto metody našly své první uplatnění v geodézii. Později se začaly využívat pro stanovení posuvů, deformací, potažmo napětí.

5. *Holografické metody.*

   Jsou založeny na interferenci laserového světla mezi hologramem nedeformovaného tělesa a vyšetřovaným deformovaným tělesem, při které vznikají interferenční pruhy úměrné velikosti posuvů.

Mezi moderní, tedy nejprogresivnější optické metody potom patří koherenční interferometrické metody. Koherenční zrnitost je optický jev, který lze například pozorovat, když těleso s drsným odrazným povrchem osvítíme koherentním optickým svazkem. Získáme viditelné temné a světlé skvrny na stínítku, umístěném kdekoliv před předmětem, v tzv. poli koherenční zrnitosti. Při vyhodnocení se využívá statistických vlastností optických polí koherenční zrnitosti (tzv. speklu).

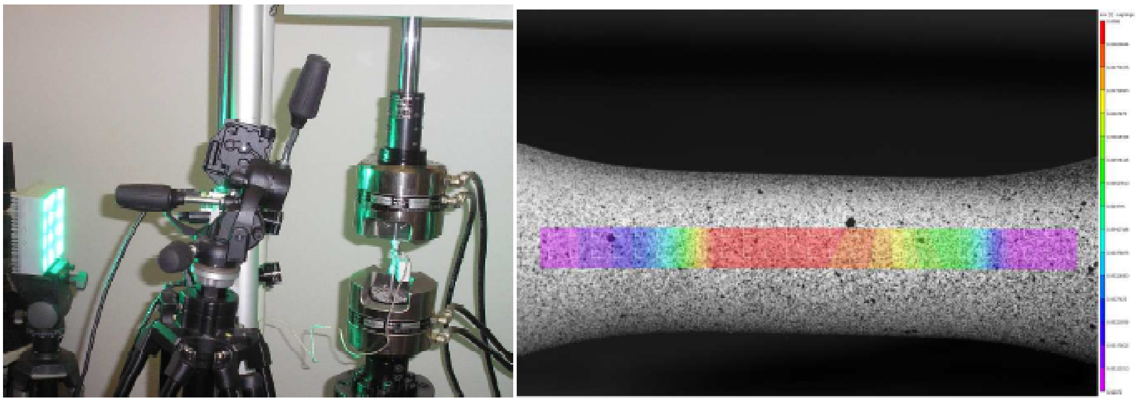
Metody, využívající koherenční zrnitosti, umožňují měřit statické i dynamické deformace těles. Nejrozšířenější jsou metody:

a) Spekl interferometrie (ESPI – Electronic Spekle Pattern Interferometry).

   Výstupem je zpravidla systém jednoduchých interferenčních proužků se zřejmou speklovou strukturou. Využívá se přirozené koherentní zrnitosti povrchu materiálu. Metoda je vysoce citlivá téměř nezávisle na šířce zorného pole, proto se přístroji ESPI také říká optický tenzometr.

b) Metoda korelace digitálního obrazu (DICM – Digital Image Correlation Method).

   Výstupem metody už není charakteristický interferenční obraz. Srovnáním intenzity barev jednotlivých pixelů na po sobě jdoucích digitálních fotografiích povrchu deformovaného tělesa, který je u mnoha materiálů nutno nejprve opatřit kontrastní vrstvou, lze získat průběh posuvů na povrchu zkoumaného tělesa. Při požadavku měření 3D deformací a posuvů je nutno použít dvě CCD kamery, které se zaměří na zkoumaný objekt z různých úhlů. Ukázka z měření deformací přístrojem Dantec Dynamics Q400 u únavové zkoušky je na obr. 12.2. Přesnost měření souvisí zejména s rozměry zabírané plochy a s rozlišením CCD kamer. Metoda je velmi vhodná i pro měření velkých deformací, na rozdíl od ESPI.



Obr. 12.2

Každá z prezentovaných optických metod má svá specifika a je použitelná pro jinou oblast problémů. I klasické optické metody jsou nadále rozvíjeny a nacházejí své uplatnění při řešení problémů technické praxe [32].

12.3 Základy odporové tenzometrie

Tenzometrické metody jsou založeny na měření změny vzdálenosti dvou bodů tělesa v důsledku změny jeho zatížení [30]. Čidla, která umožňují tato měření, se nazývají tenzometry.

Podle fyzikálního principu měření a dalšího zpracování naměřené veličiny lze základní typy tenzometrů rozčlenit na tenzometry:

- mechanické
- mechanicko – optické
- strunové
- pneumatické
- fotoelasticimetrické
- elektrické aj.

Největší uplatnění mají v dnešní době elektrické tenzometry, které lze dále rozdělit na:

- indukční
- kapacitní
- odporové

Z nich se nejvíce používají elektrické odporové tenzometry, kterým bude věnována hlavní pozornost, stručně však budou předem popsány i jiné používané typy tenzometrů.

12.3.1 Elektrické tenzometry

Velké rozšíření elektrických tenzometrů nastalo v důsledku jejich velkých výhod oproti předchozím typům. Výhody jsou hlavně v možnosti dálkového přenosu a odečítání měřených údajů, měření lze realizovat na místech velmi těžce přístupných a těmito tenzometry lze měřit i dynamické děje.

Princip měření je následující. Tenzometry transformují mechanickou veličinu – poměrné prodloužení – na veličinu elektrickou. Podle charakteru výstupní elektrické veličiny mohou být elektrické tenzometry:

- indukční, které transformují změnu délky na změnu impedance cívky, kterou protéká elektrický proud
- kapacitní, které změnu délky transformují na změnu kapacity kondenzátoru
- odporové, zde je změna délky transformována na změnu odporu

Nejvíce používané jsou elektrické odporové tenzometry, kterým bude věnována následující kapitola.

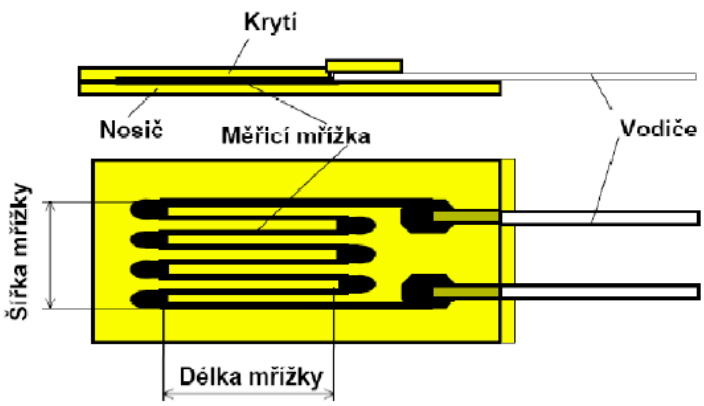
Elektrické odporové tenzometry

Princip měření pomocí elektrických odporových tenzometrů je založen na závislosti změny elektrického odporu vodiče na jeho mechanické deformaci.

Podle druhu odporového materiálu lze tyto tenzometry rozdělit na:

- uhlíkové
- polovodičové
- kovové
  - drátkové
  - fóliové

Nejvíce používané jsou fóliové tenzometry. Tyto tenzometry jsou zhotoveny fotochemickým způsobem podobně jako plošné spoje z konstantanové anebo chromniklové fólie tloušťky 5 – 15 μm. Jejich výhodou oproti drátkovým tenzometrům je snadnější výroba tvarově složitějších snímačů, lepší odvod tepla, což umožňuje zvýšené proudové zatížení tenzometrů a tím i zvýšení jejich citlivosti a menší příčná citlivost. Příklad fóliového tenzometru je uveden na obr. 12.3.



Obr. 12.3

Základní typy fóliových tenzometrů

Podle tvaru mřížky a účelu měření se vyrábějí různé typy tenzometrů, z nichž nejčastěji používané jsou následující:

- jednoduché tenzometry pro měření deformace v jednom směru jeho podélné osy (obr. 12.3)
- tenzometrické kříže pro měření deformací ve dvou na sobě kolmých směrech
- tenzometrické šípy pro měření smykových napětí a kroutících momentů

- tenzometrické růžice pro zjištění velikosti a směru hlavních napětí na povrchu součásti (pravoúhlé resp. delta růžice)
- membránové tenzometry pro měření napětí na membránách
- tenzometrické řetězce pro měření gradientu napětí
- růžice pro měření zbytkových napětí a další

Princip měření elektrickými odporovými tenzometry

Ohmický odpor vodiče R v závislosti na jeho délce l, ploše průřezu S a měrném odporu materiálu vodiče ρ je dán obecně vztahem

$$R = \rho \frac{l}{S}. \tag{12.1}$$

Uvažujeme-li všechny tyto veličiny během deformace jako proměnné, pak pro totální diferenciál funkce (12.1) platí

$$\mathrm{d}R = \frac{l}{S} \cdot \mathrm{d}\rho + \frac{\rho}{S} \cdot \mathrm{d}l - \frac{\rho \cdot l}{S^2} \cdot \mathrm{d}S. \tag{12.2}$$

Z rovnice (12.1) a (12.2) plyne vztah

$$\frac{\mathrm{d}R}{R} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} + \frac{\mathrm{d}l}{l} - \frac{\mathrm{d}S}{S}. \tag{12.3}$$

Pro určitou konečnou změnu odporu R a dílčích úpravách můžeme rovnici (12.3) přepsat na tvar

$$\frac{\Delta R}{R} = k \cdot \varepsilon, \tag{12.4}$$

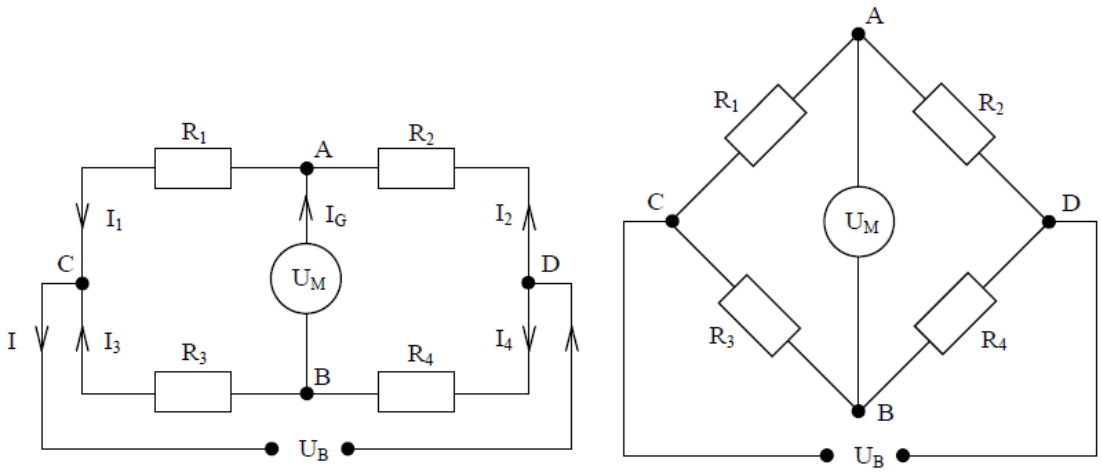
kde ε je poměrné prodloužení, veličina k se nazývá deformační součinitel (příp. k – faktor) a je jí nutno určit experimentálně cejchovním měřením. Pro většinu běžně dostupných tenzometrů bývá $k \cong 2$ a pro jejich výrobu se používají materiály, pro které je tento k – faktor konstantní ve velkém rozsahu deformací.

Způsoby měření malých změn odporu tenzometrů

Změny odporu tenzometrů ΔR v důsledku jejich deformace při tenzometrických měřeních jsou poměrně velmi malé, pro pružné deformace v rozsahu 10^{-6} až 10^{-3} a tenzometr s nominálním odporem 120 Ω je dle rovnice (12.4)

$$\Delta R = R\,k\,\varepsilon = 120 \cdot \left(10^{-6} \div 10^{-3}\right) = 2,4\left(10^{-4} \div 10^{-1}\right)\ \Omega.$$

Měření takovýchto malých odporových změn se prakticky provádí pomocí Wheatstonova můstku, viz obr. 12.4. Při napájení můstku stejnosměrným proudem s konstantním napájecím napětím U_B jsou závislosti mezi proudy, napětími a odpory dány Kirchhoffovými zákony.



Obr. 12.4

Tyto rovnice představují soustavu pěti rovnic pro pět neznámých proudů ve větvích můstku I_1 až I_4 a pro proud I_g, protékající měřicím galvanometrem s odporem R_g. Velikost proudu I_g zjistíme řešením výše uvedené soustavy rovnic kupříkladu pomocí determinantů, takže platí

$$I_g = \frac{U_B}{D_S}\left(R_1R_4 - R_2R_3\right), \tag{12.5}$$

kde D_s je determinant soustavy pěti rovnic.

Pro vyvážený můstek, tj. pro nulovou hodnotu I_g musí platit

$$R_1R_4 = R_2R_3. \tag{12.6}$$

Pro praktická měření je vhodné, aby $R_1 = R_2$ a $R_3 = R_4$, případně aby všechny odpory ve větvích můstku byly stejné.

Tenzometry v můstkovém zapojení dle obr. 12.4 mohou, anebo nemusí být deformovány v průběhu zatěžování tělesa a měření. Deformovaným tenzometrům se říká tenzometry aktivní, nedeformované se označují jako tenzometry kompenzační.

Pro měření odporových změn tenzometrů se používají dvě metody:

- nulová metoda
- výchylková metoda

Nulová metoda

Tuto metodu tenzometrického měření lze použít pouze při statickém zatěžování měřených součástí, protože tenzometrický můstek je třeba před i po zatížení vyvážit, což vyžaduje určitý čas.

Po statickém zatížení součásti dojde ke změně odporu u aktivních tenzometrů, kupříkladu pouze u tenzometru s odporem R_1 a můstek bude rozvážen. Abychom ho znovu vyvážili, musíme změnit odpor v některé zbývající větvi můstku, kupř. ve větvi s odporem R_2. Změnil-li se odpor aktivního tenzometru o hodnotu ΔR_1, musí pro vyvážený můstek při zatížení součásti platit vztah

$$(R_1 + \Delta R_1)R_4 = (R_2 + \Delta R_2)R_3. \tag{12.7}$$

Z této rovnice lze změnu odporu aktivního tenzometru ΔR_1 vypočíst, změříme-li změnu odporu R_2, potřebnou k vyvážení můstku při zatížené součásti

$$\Delta R_1 = \Delta R_2 \frac{R_1}{R_2}. \tag{12.8}$$

Výhodou této metody je, že přesnost měření nezávisí na případném kolísání napájecího napětí U_B. Nevýhodou je nemožnost použití při měření dynamicky zatěžovaných součástí.

Výchylková metoda

Tato metoda se používá při dynamických měřeních. Změna odporu aktivního tenzometru se odvozuje od změny proudu I_g, který protéká galvanometrem v měřící úhlopříčce můstku dle obr. 12.4 při jeho rozvážení od dynamického zatěžování měřené součásti.

Je vidět, že změna odporu aktivního tenzometru je přímo úměrná změně měřeného proudu galvanometrem v měřící úhlopříčce můstku. Při měření je nutno zajistit, aby nedocházelo ke kolísání napájecího napětí můstku U_B.

Výstupní signál z můstku je velmi slabý a měří se buď proud I_g – pak hovoříme o měření s proudovým výstupem, anebo se měří napětí mezi body AB můstku dle obr. 12.4, v tomto případě máme tzv. napěťový můstek s napěťovým výstupem. Výstupní signál je nutno pro další záznam anebo pro další zpracování zesílit pomocí zesilovačů.

Vliv provozních podmínek na tenzometrická měření

Výsledky tenzometrických měření mohou být ovlivněny vnějšími podmínkami, za kterých jsou měření prováděna. Mezi nejdůležitější tyto faktory patří:

Teplota a její změny v místech nalepení aktivních tenzometrů součástí během měření. Poměrná změna odporu tenzometru v závislosti na změně teploty je dána vztahem

$$\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_T = [\alpha_R + k(\alpha_S - \alpha_V)]\Delta T = \alpha_c \Delta T, \tag{12.9}$$

kde α_R je teplotní součinitel elektrického odporu materiálu mřížky tenzometru a α_S a α_V jsou teplotní součinitelé délkové roztažnosti materiálu součásti a materiálu vinutí mřížky. Vliv teploty je nutno eliminovat, což lze provést několika způsoby:

a) Použitím samokompenzačních tenzometrů. Tyto tenzometry jsou vyrobeny z materiálů, které mají v rozsahu teplot při tenzometrických měřeních hodnotu poměrné změny odporu $(\Delta R/R)_T$ velmi malou.

b) Zařazením kompenzačních tenzometrů do měřícího můstku dle obr. 12.4, u kterých dochází ke změně odporu jen v důsledku změny teploty. Zapojením aktivního a kompenzačního tenzometru do sousedních větví můstku bude výsledný signál, způsobený změnou teploty, nulový.

Vlhkost může rovněž velmi nepříznivě ovlivnit výsledky tenzometrických měření v důsledku snížení izolačního odporu tenzometrů vůči měřené součásti. Při statických měřeních by neměl izolační odpor poklesnout pod 50 $M\Omega$.

Další vlivy, které mohou ovlivnit výsledky tenzometrických měření, jsou:

- hydrostatický tlak
- poloměry zaoblení křivých ploch, na které se lepí tenzometry
- radioaktivní záření prudce snižuje izolační odpor snímačů a způsobuje změnu jejich odporu
- cyklické zatěžování může vést k porušení tenzometrů únavou

Základní vlastnosti elektrických odporových tenzometrů

Vlastnosti elektrických odporových tenzometrů jsou charakterizovány hlavně následujícími faktory:

a) Deformačním součinitelem, tzv. k – faktorem. U fóliových tenzometrů je tento k – faktor přibližně roven hodnotě $k = 2$, wolfram–platinové tenzometry mají tento faktor $k = 4$ a více, u polovodičových tenzometrů je $k = 45 \div 200$. Přesné určení k – faktoru se provádí cejchovním měřením.

b) Hystereze, která je definována jako největší odchylka výstupního signálu při stejné zatěžovací síle během zatěžovacího a odlehčovacího cyklu mezi nulovou a nominální hodnotou zatěžující síly, je udávána v procentech výstupního signálu při nominální zatěžující síle.

c) Linearita, která udává maximální odchylku výstupního signálu při zatěžování od přímky, spojující počátek s výstupním signálem při jmenovité hodnotě zatěžující síly.

d) Relaxace, která je charakterizována změnou poměrné deformace tenzometru ε_T, vůči poměrné deformaci součásti ε_S při dlouhodobém statickém zatížení. Relaxace po určitém čase vymizí.

e) Příčná citlivost, která charakterizuje citlivost tenzometru na deformaci ve směru kolmém na podélnou osu snímače v důsledku příčného propojení podélných vodičů tenzometru.

Způsoby zapojení tenzometrů do můstku

Aktivní a kompenzační tenzometry jakož i konstantní odpory můžeme v můstku dle obr. 12.4 zapojit různými způsoby a tím dosáhnout zesílení výstupního signálu a kompenzaci nežádoucích vlivů. Podle počtu aktivních tenzometrů v můstku rozlišujeme tři základní způsoby zapojení:

1. Čtvrtmůstek s jedním aktivním tenzometrem. Další tři odpory mohou být tvořeny buď kompenzačními tenzometry nebo pevnými odpory.

2. Půlmůstek je tvořen dvěma aktivními tenzometry a zbývající dva odpory mohou být buď kompenzační tenzometry anebo konstantní odpory.

3. Plný (celý) můstek tvoří čtyři aktivní tenzometry. Vliv teploty a jiných nežádoucích vlivů je u plného můstku kompenzován.

Praktický postup při tenzometrických měřeních

Při realizaci tenzometrických měření postupujeme v následujících krocích:

1. Výběr míst měření a volba vhodných typů tenzometrů.

2. Příprava povrchu součásti v místech lepení tenzometrů. Povrch je nutno očistit, důkladně odmastit a vysušit.

3. Nalepení tenzometrů na připravená místa. Pro nalepení tenzometrů jsou výrobci dodávána speciální lepidla, která musí dokonale spojit tenzometr s povrchem.

4. Ochrana tenzometrů proti vlhkosti a mechanickému poškození. Výrobci tenzometrů jsou dodávány speciální krycí vrstvy a laky.

5. Připojení měřicích přístrojů. Každé měřicí místo musí mít v aparatuře vlastní kanál se zesilovačem. Před měřením je nutno výstupní signál ocejchovat kalibračním signálem.

6. Vlastní měření. Před každým měřením zkontrolujeme zapojení všech tenzometrů a můstky vyvážíme. Provedeme nejdříve několik zatěžovacích a odlehčovacích cyklů pro snížení vlivu hystereze a dosažení lepší linearity výsledků měření.

Výpočet napětí ze změřených deformací

Na povrchu součásti v místě nalepení tenzometrů může vzniknout jednoosá nebo dvojosá napjatost. Pro způsob měření a vyhodnocení mohou nastat tři případy:

1. V měřeném místě je jednoosá napjatost a směr hlavního nenulového napětí je znám. V tomto případě k měření stačí jednoduchý tenzometr, nalepený ve směru tohoto hlavního napětí a velikost hlavního napětí vypočteme z Hookeova zákona pro jednoosou napjatost

$$\sigma_1 = E\,\varepsilon_1. \tag{12.10}$$

2. V měřeném místě vzniká dvojosý stav napjatosti a směry hlavních napětí jsou známy. V tomto případě je pro měření vhodné použít tenzometrický kříž, nalepený ve směrech hlavních napětí a velikost hlavních napětí vypočteme z obecného Hookeova zákona pro rovinnou napjatost

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_1 + \mu\,\varepsilon_2\right), \quad \sigma_2 = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_2 + \mu\,\varepsilon_1\right). \tag{12.11}$$

3. V měřeném místě na povrchu součásti je dvojosý stav napjatosti a směry hlavních napětí nejsou známy. V tomto případě pro určení složek tenzoru deformace a napjatosti je nutno změřit poměrné deformace alespoň ve třech směrech. Pro tato měření se používají tenzometrické růžice (pravoúhlé nebo rovnostranné). Velikosti hlavních poměrných deformací a jejich směrů můžeme určit početně anebo graficky z Mohrovy kružnice.

Σ Pojmy k zapamatování

- experimentální metody pružnosti dle fyzikálního principu
- klasické optické metody
- metody koherenční zrnitosti
- odporová tenzometrie
- Wheatstonův můstek

? Kontrolní otázky

1. Která z moderních optických metod je vhodná pro měření velkých deformací?
2. Můžeme měřit napětí přímo?
3. Co je to interference světla a u jakých metod se využívá?
4. Na jakém principu je založen tzv. optický tenzometr?
5. Na čem je založena fotoelasticimetrie?
6. Co je to tenzometr?
7. Jaký materiál se používá k výrobě odporových tenzometrů?
8. Které metody by jste doporučil pro stanovení směrů hlavních napětí z důvodu správného nalepení tenzometrů?
9. Jaká metoda je vhodná pro měření odporových změn tenzometrů při dynamickém měření?

Kapitola 13

Stručný úvod do matematické teorie pružnosti

Průvodce studiem

Předmětem matematické teorie pružnosti je vyšetřování stavů napjatosti a deformace obecného pružného tělesa.
Úlohy technické pružnosti a pevnosti (tak, jak byla prezentována v předchozích kapitolách) obvykle pracují s jednoduchými tělesy, jako jsou například pruty, desky, skořepiny aj. Tato náhradní výpočetní tělesa vznikla zjednodušením obecně zatíženého prostorového tělesa na základě nějaké teorie. Díky tomuto vystačíme s relativně jednoduchým matematickým aparátem. Na druhou stranu však díky zjednodušením a předpokladům přicházíme o část informace o napěťově – deformačním chování tělesa.

Naproti tomu matematická teorie pružnosti předpokládá obecná řešení napjatosti a přetvoření v libovolném místě tělesa. Zavedeme-li však stejná zjednodušení jako v případě technického přístupu k problematice pevnosti a pružnosti, dostaneme obvykle stejné výsledky, jako nám poskytlo technické řešení problémů.
Soustava základních rovnic matematické teorie pružnosti je však obtížně řešitelná analytickými postupy. Můžeme říci, že v uzavřeném tvaru je řešitelná jen malá skupina problémů. V případě, kdy není známo exaktní matematické řešení, je možno využít řešení pomocí matematické analogie nebo využití přibližných numerických metod. V této kapitole, která je jen rychlým nástinem matematické teorie pružnosti, se předpokládá znalost těchto základních pojmů:

- *napětí, napjatost v bodě tělesa, složky napětí, viz kapitola č. 2 a č. 3*
- *deformace, deformace v bodě tělesa, složky deformace, viz kapitola č. 4*
- *izotropie, homogenita ve vztahu k materiálovým vlastnostem tělesa, Hookeův zákon, viz kapitola č. 5*

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete:

- chápat základní pojmy pružnosti a pevnosti v širších souvislostech
- umět zjednodušit obecný problém na jedno- nebo dvoudimenziónální
- seznámeni s analytickými postupy řešení rovnic teorie pružnosti
- seznámeni s možností numerického řešení rovnic teorie pružnosti

13.1 Předpoklady matematické teorie pružnosti

Předmětem matematické teorie pružnosti, jak bylo řečeno výše, je vyšetřování stavů napjatosti a deformace obecného pružného tělesa. Soustava rovnic matematické teorie pružnosti je odvozena za předpokladu izotropního a homogenního materiálu s dokonale pružnými vlastnostmi. Dále se předpokládají pouze velmi malé deformace. Rovnice rovnováhy jsou sestavovány na nedeformovaném tělesu. Teorie prvního řádu.

13.2 Základní rovnice matematické teorie pružnosti

Úlohou teorie pružnosti je určit v tělese, vyplňujícím objem V a ohraničené povrchem S, tři pole.

Vektorové pole posunutí: $u = \{u, v, w\}^T$.

Tenzorové pole přetvoření: $\varepsilon = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}^T$.

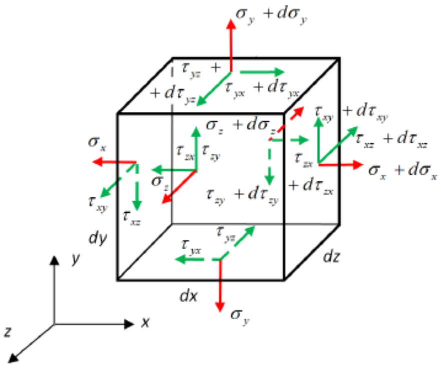
Tenzorové pole napjatosti: $\sigma = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^T$.

K určení patnácti neznámých funkcí máme soustavu základních rovnic matematické teorie pružnosti. Můžeme jí rozdělit na tři hlavní skupiny:

1. Rovnice rovnováhy.
2. Geometrické rovnice.
3. Fyzikální rovnice.

13.2.1 Navierovy rovnice rovnováhy

První soustavu rovnic poskytují podmínky rovnováhy. Soustava rovnic vyjadřuje podmínky pro dosažení statické rovnováhy v libovolné elementární částici tělesa – v bodě tělesa. Mohou rovněž vyjadřovat podmínku rovnováhy podle d'Alembertova principu v případě řešení dynamického děje. Poněvadž chceme určit napjatost, nestačí napsat obvyklé podmínky rovnováhy pro vnější síly a reakce, ale je třeba uvážit rovnováhu každého libovolného bodu tělesa.



Obr. 13.1

Při řešení tělesa v pravoúhlých souřadnicích rozeznáváme dva tvary elementárního tělesa (bodu). Pro bod tělesa, který leží uvnitř, lze uvažovat jeho tvar jako elementární krychli – viz obr. 13.1. Na povrchu tělesa nemůže (obecně) vzniknout hranolek, bod zde si můžeme představit ve tvaru elementárního čtyřstěnu. Povrchový element může být uchycen (vazba) nebo zde může působit vnější zatížení. Blíže k okrajovým podmínkám viz kapitola 13.3.

Kromě povrchového zatížení může na těleso působit objemová síla (hmotová síla). Její složky ve směru os x, y, z budeme značit X, Y, Z a jejich rozměr je jednotka síly na jednotku objemu (např. $[N/m^3]$).

Podmínku rovnováhy sil ve směru osy x můžeme vyjádřit následující rovnicí

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \sigma_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}z - \tau_{yx}\mathrm{d}x\mathrm{d}z +$$
$$+ \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \tau_{zx}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + X\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0.$$

Po úpravě, zkrácením elementárním objemem dxdydz, získáme rovnici rovnováhy ve směru osy x. Obdobně můžeme sestavit rovnice rovnováhy pro následující dva směry, tedy osu y a z. Výsledný systém rovnic má pak následující tvar

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0,\\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y = 0,\\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z = 0.\end{aligned} \tag{13.1}$$

Dále lze napsat statické podmínky rovnováhy momentové. Tyto rovnice však pro nás nepřinesou nic nového, protože vyjadřují jen zákon o sdruženosti smykových napětí, který byl již vysvětlen v kapitole 3.

Rovnice (13.1) musí být splněny u libovolného tělesa, jež je v rovnováze.

13.2.2 Geometrické rovnice a rovnice kompatibility

Chceme-li popsat deformaci celého tělesa, musíme pro každý bod tělesa A (x, y, z) popsat polohu též po deformaci A ($x + u$, $y + v$, $z + w$). Posuvy u, v, w jsou spojitými funkcemi souřadnic. Požadavek na spojitost funkcí vychází z předpokladu, že spojitost tělesa nebude během deformace porušena. V kapitole 4 byly uvedeny rovnice pro deformace pružného tělesa – Cauchyho rovnice. Těchto šest rovnic tvoří další část systému rovnic obecné matematické teorie pružnosti. Připomeňme, že platí pouze pro malé deformace (velice orientačně cca do 1%). Pro zopakování mají následující tvar

$$\begin{aligned}\varepsilon x &= \frac{\partial u}{\partial x},\\ \varepsilon y &= \frac{\partial v}{\partial y},\\ \varepsilon z &= \frac{\partial w}{\partial z},\\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},\\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y},\\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}.\end{aligned} \tag{13.2}$$

Šest složek deformace je vyjádřeno pomocí tří složek posuvů (u, v, w). Složky tenzoru přetvoření tedy nejsou zcela nezávislými funkcemi souřadnic. Mají-li popisovat deformace spojitého tělesa, musí pro ně platit deformační podmínky, které získáme tak, že vyloučíme posuvy z Cauchyho rovnic. Získáme tzv. rovnice kompatibility. Rovnice kompatibility mají následující tvar

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2},\\
\frac{\partial^2\gamma_{yz}}{\partial y\partial z} &= \frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial y^2},\\
\frac{\partial^2\gamma_{zx}}{\partial z\partial x} &= \frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial z^2},\\
2\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial\gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right],\\
2\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial\gamma_{yx}}{\partial z} + \frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}\right],\\
2\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial}{\partial z}\left[-\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial\gamma_{zy}}{\partial x} + \frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}\right].
\end{aligned} \tag{13.3}$$

Rovnice vyjadřují geometrickou spojitost deformovatelného tělesa a musí být splněny nezávisle na tom, zda je těleso pružné či nikoliv. Nezapomeňme však, že platí jen pro malé deformace. Lze dokázat, že těchto šest rovnic dostatečně vyjadřuje podmínku zachování spojitosti tělesa a není možno nalézt další nezávislé rovnice kompatibility jinou úpravou Cauchyho rovnic.

13.2.3 Fyzikální rovnice

Složky napětí, vstupující do rovnic rovnováhy (Naviérových r. r.) a složky přetvoření v Cauchyho rovnicích (popř. v rovnicích kompatibility) jsou navzájem vázány Hookeovým zákonem – viz kapitola číslo 5. Připomeňme však, že tento vztah platí pouze, je-li těleso pružné, izotropní a homogenní

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu\cdot(\sigma_y+\sigma_z)\right],\\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu\cdot(\sigma_x+\sigma_z)\right],\\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu\cdot(\sigma_x+\sigma_y)\right],\\
\tau_{xy} &= G\cdot\gamma_{xy},\\
\tau_{xz} &= G\cdot\gamma_{xz},\\
\tau_{yz} &= G\cdot\gamma_{yz}.
\end{aligned} \tag{13.4}$$

13.3 Okrajové podmínky

Rovnice (13.1), (13.2) a (13.4) jsou soustavou 15 rovnic (9 parciálních diferenciálních rovnic a 6 algebraických rovnic), kterým musí vyhovovat napjatost a deformace pružného tělesa. Soustava poskytuje obecně nekonečně mnoho řešení. Je nutno najít to, které vyhovuje okrajovým podmínkám. Rozeznáváme dva druhy okrajových podmínek.

Na hranici tělesa mohou být předepsány hodnoty složek posuvů u, v, w. Takovéto okrajové podmínky předepisují geometrickou vazbu tělesa s jeho okolím. Proto se tyto okrajové podmínky nazývají *geometrické okrajové podmínky*. Někdy se též nazývají *kinematické okrajové podmínky*.

Druhou skupinou okrajových podmínek jsou *statické* nebo taky *silové okrajové podmínky*. Okrajové podmínky vyjadřují statickou vazbu tělesa s jeho vnějším okolím. V tomto případě jsou předepsány hodnoty složek vektoru vnějšího zatížení.

Může se však stát, že na části povrchu jsou předepsány zároveň statické a geometrické okrajové podmínky. Takové okrajové podmínky se pak nazývají *smíšené okrajové podmínky*.

13.4 Základní způsoby řešení soustav rovnic

Řešení problémů pružného tělesa lze rozdělit na tři základní skupiny:

1. ***Přímá metoda.*** Pružné těleso je popsáno svým tvarem (geometrií), jsou zadány fyzikální vlastnosti materiálu a je zatíženo objemovými a vnějšími povrchovými silami. Úkolem je stanovit tenzorové pole napjatosti a přetvoření a vektorové pole posunutí v celém tělese (uvnitř i na povrchu).
   Soustavu rovnic můžeme řešit třemi způsoby – deformační, silovou a smíšenou metodou. Deformační metodou se úloha řeší ve složkách posuvů u, v, w při zadaných geometrických podmínkách. Silovou metodou se úloha řeší ve složkách tenzoru napjatosti σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz} při zadaných silových okrajových podmínkách. U smíšené metody jsou okrajové podmínky obojího druhu. Tato skutečnost vyžaduje řešení ve složkách napětí i ve složkách posuvů.

2. ***Inverzní metoda řešení.*** Pružné těleso je popsáno geometrií a fyzikálními vlastnostmi materiálu. Předepsáno je pole napětí a posuvů. Úlohou je stanovit vnější zatížení, která daná pole vyvolaly, popřípadě zjistit okrajové podmínky, kterým dané funkce pole napětí vyhovují.

3. ***Poloinverzní metoda.*** Pro výše zadané těleso jsou částečně zadány silové veličiny a částečně zadány posuvy. Uvnitř tělesa jsou známé pouze některé složky tenzoru napjatosti.

Soustava rovnic pro určení napjatosti a přetvoření pružného tělesa je natolik složitá, že řešení lze získat jen pro jednoduché tvary těles a pro určité typy okrajových podmínek. Lze dokázat, že pokud nalezneme řešení, které vyhovuje všem rovnicím matematické teorie pružnosti, je řešení jednoznačné.

13.5 Zjednodušení úloh matematické teorie pružnosti

Řešení obecných prostorových úloh je velice obtížné. V mnoha případech můžeme úlohu zjednodušit na dvojrozměrnou (rovinnou), popřípadě na jednorozměrnou. Tímto dosáhneme značného zjednodušení popisu a řešení úlohy.

13.5.1 Zjednodušení na dvojrozměrný problém

Rovnice matematické teorie pružnosti se pro rovinný stav namáhání značně zjednoduší, protože všechna napětí, deformace a posuvy jsou pouze funkcemi dvou proměnných x a y. Rozeznáváme dva základní případy – rovinná deformace, rovinná napjatost.

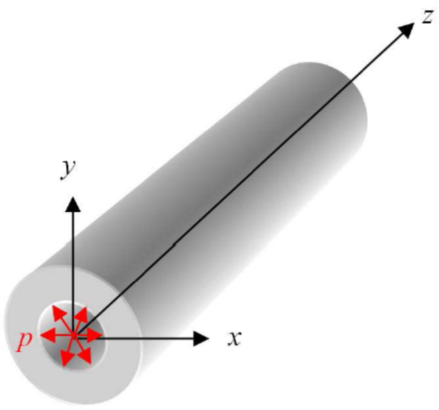
Případ *rovinné deformace* je dán podmínkou, aby složka posuvu v jednom směru byla nulová. Bude-li nulový posuv ve směru osy z, musí platit $w = 0$. V tomto případě budou pole posuvů, přetvoření a napjatosti následující.

Vektorové pole posunutí: $u = \{u, v, 0\}^T$.

Tenzorové pole přetvoření: $\varepsilon = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, 0, \gamma_{xy}, 0, 0\}^T$.

Tenzorové pole napjatosti: $\sigma = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, 0, 0\}^T$.

Takový stav deformace je přibližně dosažen u těles, jejichž rozměr ve směru osy z je převládající, tj. výrazně větší než v dalších dvou směrech a vyšetřovaný průřez je dostatečně vzdálen od konců tělesa. Další podmínkou je, aby zatížení působilo ve směru kolmém na osu z a současně nebylo funkcí této souřadnice. Jako příklad můžeme uvést dlouhou tlustostěnnou trubku zatíženou vnitřním přetlakem – viz obr. 13.2.



Obr. 13.2

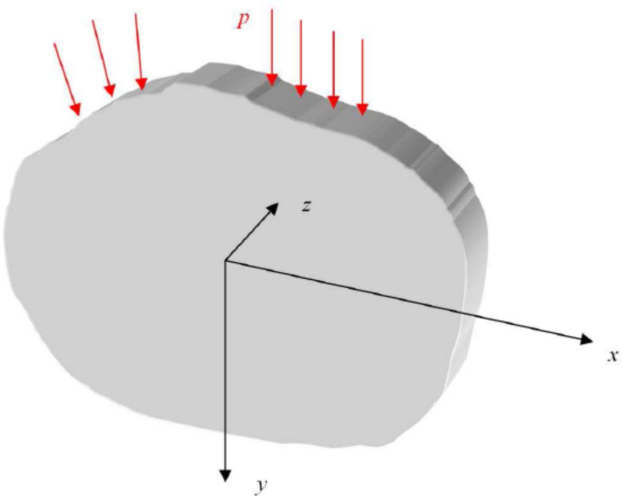
Pro případ *rovinné napjatosti* je hlavní podmínkou, aby všechny složky napětí, působící na element tělesa, byly rovnoběžné s jednou rovinou. Složky tenzoru napjatosti ve směru osy z jsou rovny nule a zkosy jsou nenulové pouze v rovině xy. V tomto případě budou pole posuvů, deformací a napětí následující.

Vektorové pole posunutí: $u = \{u, v, w\}^T$.

Tenzorové pole přetvoření: $\varepsilon = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, 0, 0\}^T$.

Tenzorové pole napjatosti: $\sigma = \{\sigma_x, \sigma_y, 0, \tau_{xy}, 0, 0\}^T$.

Popsaný stav napjatosti se například vyskytuje v tenké desce – viz obr. 13.3.



Obr. 13.3

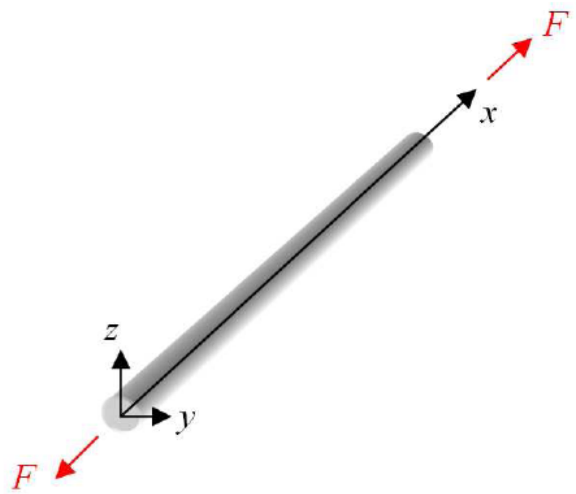
13.5.2 Zjednodušení na jednodimenzionální úlohu

Jednorozměrné těleso (tyčové těleso) je takové, jehož jeden rozměr (např. ve směru osy x) je o mnoho větší než ostatní dva. Současně silové zatížení je aplikováno pouze ve směru převládajícího rozměru. Tento případ odpovídá namáhání prutu tahem a tlakem –viz obr. 13.4. V tomto případě budou pole posuvů, přetvoření a napjatosti následující.

Vektorové pole posunutí: $u = \{u, 0, 0\}^T$.

Tenzorové pole přetvoření: $\varepsilon = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, 0, 0, 0\}^T$.

Tenzorové pole napjatosti: $\sigma = \{\sigma_x, 0, 0, 0, 0, 0\}^T$.



Obr. 13.4

Nosníkové těleso je podobné tyčovému jednorozměrnému tělesu. Rozdíl je zde ve způsobu zatížení. Zatížení zde leží ve směru kolmém k ose tělesa. Takže bude li osa tělesa (převládající rozměr tělesa) ve směru osy x, pak průhyb bude ve směru osy y (popř. z). Zavedeme-li stejná zjednodušení jako v kapitole 8, dojdeme aplikací MTP k rovnicím, popisující Euler-Benoulliho nosník (tenké štíhlé nosníky). Jedná se o nejjednodušší model nosníkového tělesa.

Obdobně můžeme získat rovnice pro výpočet napěťově-deformační odezvy pro desková a skořepinová tělesa. Takováto tělesa mají převládající dva rozměry (např. ve směrech x a y) a zatížená jsou ve směru třetím. Toto však překračuje probíranou látku základního kurzu pružnosti a pevnosti.

13.6 Numerické metody

Vztahy obecné matematické teorie pružnosti představují systém patnácti rovnic. Spolu s okrajovými podmínkami nám popisují napěťově – deformační chování pružného tělesa. Je dokázáno, že pokud takovéto řešení nalezneme, jedná se o jediné řešení. Zásadním problémem ovšem je takovéto řešení nalézt. Řešení v uzavřeném tvaru lze nalézt pouze pro „jednoduchá" tělesa s „jednoduchými" okrajovými podmínkami. Pro řešení složitějších případů je nutno využít některou z přibližných numerických metod.

Výhodou exaktního řešení v uzavřeném tvaru je, že pokud nalezneme řešení, získáme obecnou funkční závislost mezi vstupními a výstupními parametry řešeného problému. Úloha se řeší jednou a při změně jednotlivých parametrů se pouze dosadí do získaného „předpisu". Naproti tomu při numerickém řešení musíme provádět celý výpočet pokaždé, když dojde ke změně jednotlivých parametrů.

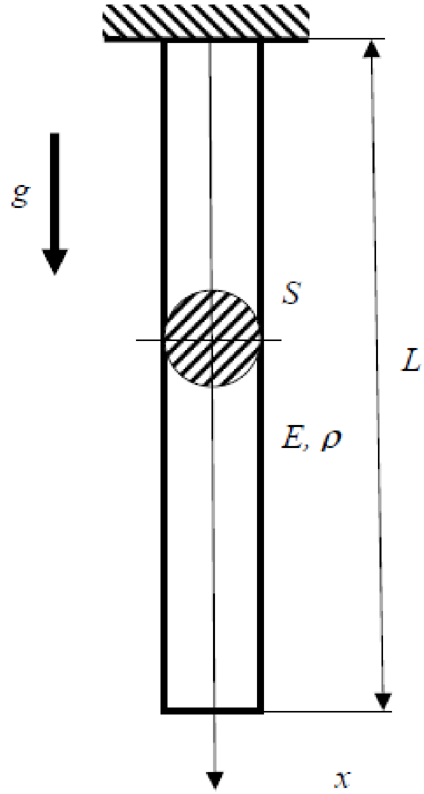
Bezesporu nejpoužívanější metodou je metoda konečných prvků (MKP). Pro tuto metodu existuje velké množství jednak komerčního, ale také volně šiřitelného software. V současné době mezi nejrozšířenější konečno–prvkové řešiče bezesporu patří NASTRAN, ABAQUS, ANSYS, aj. Konstruktér, popř. výpočtář dnes již většinou neprogramuje vlastní řešič, ale právě využívá již existující software. Jeho hlavními úkoly jsou správné zadání vstupních dat a správné vyhodnocení získaných výsledků. Tato práce je velmi zodpovědná a výpočtář musí mít znalosti v daném oboru, v našem případě informace o problematice pružného tělesa, aby odhalil případné nesrovnalosti a dokázal správně vyhodnotit získané výsledky. Současně musí mít alespoň základní znalosti o použité numerické metodě a dobře ovládat použitý výpočetní software. Je mylné se domnívat, že vše za nás provede počítač. S nadsázkou lze říci, že počítač je pouze „lepší" kalkulačka. Pro práci se zadáváním a vyhodnocováním dat jsou dostupné pokročilé programy tzv. pre– a post– procesory, jmenujme například program PATRAN.

Před příchodem MKP se v hojné míře používala tzv. metoda sítí. Další oblíbenou metodou je metoda hraničních prvků (MHP). Budoucností by mohly být například tzv. bezsíťové metody (Mesh Free Method). Numerické metody se rychle rozvíjejí a jen čas ukáže, které postupy jsou nejvýhodnější.

13.7 Závěr

V této kapitole byly prezentovány základní poznatky matematické teorie pružnosti, formulované pro pružné homogenní a izotropní těleso. Kapitola slouží pouze k získání základních informací o obecné teorii pružnosti, která bude dále rozvíjena v dalších předmětech oborového studia. Současně zde byla nastíněna problematika numerických výpočtů.

Příklad 13.1. Příklad použití matematické teorie pružnosti při řešení jednorozměrného případu – blíže viz kapitola 1. Představme si tenký prut, jež je nahoře pevně vetknut a je zatížen pouze vlastní tíhou – viz obr. 13.5. Daná je geometrie prutu – jeho délka L, průřez S. Materiálové vlastnosti jsou popsány modulem pružnosti E a hustotou ρ. Tíhové zrychlení je g. Úkolem je určit prodloužení prutu, jeho deformaci a napjatost v libovolném bodě tělesa.



Obr. 13.5

Jedná se o přímou metodu. Řešení provedeme pomocí deformační metody – primární neznámé jsou posuvy. V našem případě bude primární veličinou posuv u. Jednotlivé rovnice MTP se redukují na následující tvary.

Rovnice rovnováhy

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_x}{\mathrm{d}x} + X = 0. \tag{P1}$$

Geometrické rovnice

$$\varepsilon_x = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}. \tag{P2}$$

Fyzikální rovnice (Hookův zákon)

$$\sigma_x = E\varepsilon_x. \tag{P3}$$

Dosazení rovnice (P2) do rovnice (P3) vede ke vztahu

$$\sigma_x = E\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}. \tag{P4}$$

Derivací poslední rovnice dle x a dosazením do rovnice (P1) získáme

$$E\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} + X = 0. \tag{P5}$$

Připomeňme, že X je objemová síla na jednotku objemu $[N/m^3]$. U našeho případu je objemová síla

$$X = \rho g.$$

Dosadíme-li do relace (P5), získáme rovnici

$$E\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} + \rho g = 0. \tag{P6}$$

Pro konzistenci s jednorozměrnou úlohou můžeme získanou rovnici vynásobit plochou průřezu S, tedy

$$E\,S\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} + \rho g S = 0. \tag{P7}$$

Druhý člen v této rovnici představuje sílu na jednotku délky $[N/m]$. Tato rovnice společně s okrajovými podmínkami popisuje chování našeho problému. Napišme okrajové podmínky.

Tyč je v horní části vetknuta. V místě $x = 0$ je tedy předepsána kinematická okrajová podmínka. V matematickém tvaru ji můžeme zapsat následovně

$$u(x = 0) = 0. \tag{P8}$$

Na druhém konci není předepsána žádná kinematická vazba. Proto zde musí být předepsána silová okrajová podmínka. Na volném konci nepůsobí žádná síla, a proto zde okrajová podmínka získává s použitím výrazu (13.4) tvar (P5)

$$E\frac{\mathrm{d}u(x = L)}{\mathrm{d}x} = 0. \tag{P9}$$

Nyní řešme diferenciální rovnici (P7). Úpravou a dvojí integrací získáme výraz (P10) a (P11)

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\frac{\rho g}{E}x + C_1, \tag{P10}$$

$$u = -\frac{\rho g}{E}\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2. \tag{P11}$$

Aplikací okrajových podmínek (P8) a (P9) na rovnice (P10) a (P11) určíme integrační konstanty

$$C_1 = \frac{\rho g\, L}{E},$$

$$C_2 = 0.$$

Výsledný výraz pro posuv u je

$$u = \frac{\rho g}{E}\left(Lx - \frac{x^2}{2}\right).$$

(P12)

Výraz pro deformaci získáme derivací rovnice (P11) dle proměnné x tak, jak to předepisuje geometrická rovnice (P2). Získáme výraz

$$\varepsilon_x = \frac{\rho g}{E}(L - x). \tag{P13}$$

Poslední neznámou je napětí v tyči. Získáme ho dle přepisu (P3)

$$\sigma_x = \rho g(L - x). \tag{P14}$$

Tímto jsme vyřešili zadaný problém. Tyto výsledky může čtenář srovnat s výsledky v kapitole č. 6.

▲

Příklady k procvičení

Vzhledem k tomu, že tato kapitola slouží pouze k stručnému nastínění matematické teorie pružnosti, nejsou v této kapitole uvedeny příklady k procvičení. Specializované obory se seznámí detailněji ve vyšších ročnících s užitím matematické teorie pružnosti a prohloubí si znalosti z tohoto oboru. Pro ostatní studenty bude mít tato kapitola přínos v předmětech, zabývajících se numerickým řešením napěťově–deformačního chování součástí a strojních uzlů.

Pojmy k zapamatování

- rovnice rovnováhy
- geometrické rovnice
- fyzikální rovnice
- rovnice kompatibility
- silové okrajové podmínky
- kinematické okrajové podmínky
- numerické metody

?

Kontrolní otázky

1. Co je předmětem matematické teorie pružnosti?
   (a) Řešení rovnic, popisujících chování tuhého tělesa při zatížení vnějšími silami.
   (b) Popisuje vztah mezi vnějším zatížením a vnitřními silami.
   (c) Vyšetřování stavů napjatosti a deformace obecného pružného tělesa.
2. Jaké pole je pole napjatosti?
   (a) Tenzorové.
   (b) Vektorové.
   (c) Skalární.
3. Co vyjadřují rovnice kompatibility?
   (a) Geometrickou spojitost deformovatelného tělesa.
   (b) Rovnováhu libovolného bodu tělesa.
   (c) Geometrickou nespojitost deformovatelného tělesa.

Literatura

[1] Lenert, J.: *Pružnost a pevnost 1*. 3. vydání, Skriptum FS VŠB–TU Ostrava, 2009, 142s. ISBN 978-80-248-2111-5

[2] Kuba, F.: *Pružnost a pevnost (základní část)*. Skriptum FS VŠB–TU Ostrava,1976. 385s.

[3] Trebuňa, F.; Šimčák, F.; Jurica, V.: *Pružnosť a pevnosť I.*. VIENALA Košice, 2000.

[4] Krčál, O.; Frydrýšek, K.; Adámková, L.: *Příklady z pružnosti a pevnosti I (část 2.)*. Fakulta strojní VŠB–TU Ostrava, 2008. 124s. Skriptum. ISBN 978-80-248-1826-9

[5] Vable, M.: *Mechanics of Materials, Second Edition* [online]. Michigan Technological University. 2010. [cit. 2011-1-19]. Dostupný z: http://www.me.mtu.edu/m̃avable/MoM2nd.htm.

[6] Hőschl, C.: *Pružnost a pevnost ve strojnictví.*. SNTL Praha, 1971. 376s.

[7] Timošenko, Š.: *Pružnost a pevnost I.*. SNTL Praha, 1951. 324s.

[8] Lenert, J.: *Pružnost a pevnost II.* 1.vydání. Skriptum FS VŠB–TU Ostrava,1998. 173s. ISBN 80-7078-572-3

[9] Kuba, F.: *Teorie pružnosti a vybrané aplikace*. SNTL Praha, 1977. 288s.

[10] Timošenko, Š.: *Pružnost a pevnost II.*. SNTL Praha, 1951. 424s.

[11] Miroljubov, I. N. a kol.: *Řešení úloh z pružnosti a pevnosti*. SNTL, 1976.

[12] Strnadel, B.: *Řešené příklady a technické úlohy z materiálového inženýrství*. VŠB–TU Ostrava, 1998, 334 s.

[13] Frydrýšek, K.; Adámková, L.: *Mechanics of Materials 1 – Extended Edition (Introduction, Simple Stress and Strain, Basic of Bending)*. skriptum, Faculty of Mechanical Engineering, VŠB–Technical University of Ostrava, Ostrava, ISBN 978-80-248-1914-3, Ostrava, 2008, Czech Republic, pp.203.

[14] Frydrýšek, K.: *Pravděpodobnostní výpočty v mechanice*. Katedra pružnosti a pevnosti, FS VŠB–TU Ostrava, ISBN 978-80-248-2314-0, Ostrava, 2010, pp.149.

[15] Frydrýšek, K., Marvalová, B., Jágrová, J.: *Vybrané kapitoly z pružnosti a plasticity 1*. Faculty of Mechanical Engineering, VŠB–Technical University of Ostrava, Ostrava, ISBN 978-80-248-1855-9, Ostrava, 2008, Czech Republic, pp.127.

[16] Trebuňa, F.; Šimčák, F.: *Odolnosť prvkov mechanických sústav*. Košice: Emilena, 2004. 980 s. ISBN 80-8073-148-9.

[17] Kuba, F.: *Pružnost a pevnost*. VŠB–Technická univerzita Ostrava, Ostrava, 1982. 385 s. Skriptum.

[18] Hájek, E.; Reif, P.; Vanlenta, F.: *Pružnost a pevnost I.*. 1.vydání. Praha: SNTL, 1988. 432 s.

[19] Fuxa, J.: *Kritéria pevnosti, experimentální zařízení a metodika zkoušení*. Teze inaugurační přednášky v oboru „Technická mechanika", Katedra pružnosti a pevnosti, FS VŠB–TU Ostrava, Ostrava, 2001, pp.22.

[20] Rojíček, J.: *Statické hypotézy pevnosti*. Disertační práce v oboru „Aplikovaná mechanika", Katedra pružnosti a pevnosti, FS VŠB–TU Ostrava, Ostrava, 2007, pp.141.

[21] http://www.failurecriteria.com/

[22] http://classes.mst.edu/ide120/lessons/failure/theories/index.html

[23] Frydrýšek, K.; Lenert, J.: *Mechanics of Materials, (compendium)*. HFG VŠB–TU Ostrava, Ostrava, 2005, pp.63.

[24] Puchmajer, P.: *Stabilita pružných soustav*. České vysoké učení technické v Praze, 1987. 104 s.

[25] Šejnoha, J. – Bittnarová, J.: *Stabilita skořepin*. České vysoké učení technické v Praze, 1999. 45 s. ISBN 80-01-020168-9.

[26] Kučera, J.: *Úvod do mechaniky lomu. Nestabilní lom ocelových těles při statickém a dynamickém zatížení*. VŠB–TU Ostrava,2006. 297s. Skriptum. ISBN 80-248-1268-1.

[27] Kučera, J.: *Stručný úvod do mechaniky lomu. II.část. Únava materiálu*. VŠB–TU Ostrava,1994. 297s. Skriptum. ISBN 80-7078-244-7

[28] Dowling,N.E.: *Mechanical behavior of materials. Engineering Methods for Deformation, Fracture and fatigue*. Third edition. Pearson Prentice Hall,2007. ISBN 0-13-186312-6.

[29] Vlk a kol.: *Experimentální mechanika* [online]. VUT Brno, s.119-123. [cit. 2011-1-19]
http://www.umt-old.fme.vutbr.cz/_studium_/opory/Experimentalni_mechanika.pdf

[30] Macura P.: *Experimentální metody v pružnosti a plasticitě*. Skripta FS VŠB–TU Ostrava, Ostrava, 2001.

[31] Doyle J. F.: *Modern Experimental Stress Analysis*. Wiley InterScience, 2005.

[32] Trebuňa, F. – Šimčák, F.: *Příručka experimentálnej mechaniky*. TypoPress, Košice. Strojnícka fakulta TU v Košiciach. 1526s. ISBN 970-80-8073-816-7

[33] Lenert, J.: *Základy matematické teorie pružnosti*. Ostrava 1997: VŠB–TU Ostrava, 1997, ISBN 80-7078-437-7

[34] Němec, J.; Dvořák, J.; Hőschl, C.: *Pružnost a pevnost ve strojírenství, Technický průvodce 69.*. SNTL, Brno, 1989.

[35] Bittnar, Z.; Šejnoha, J.: *Numerické metody mechaniky 1*. Vydavatelství ČVUT, Praha, 1992.

[36] Lenert, J.: *Úvod do metody konečných prvků*. VŠB–TU Ostrava, 1999, ISBN 80-7078-686-8

Rejstřík