PROSTORY FUNKCÍ A ŘEŠITELNOST ZÁKLADNÍCH TYPŮ PARCIÁLNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

Jiří Benedikt a Petr Girg

Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století* (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Jiří Benedikt a Petr Girg
PROSTORY FUNKCÍ A ŘEŠITELNOST ZÁKLADNÍCH TYPŮ PARCIÁLNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

ISBN

Předmluva

Vážený čtenáři,

předložený text se váže ke stejnojmennému modulu vytvořeného v rámci řešení projektu „*Matematika pro inženýry 21. století– inovace výuky matematiky na technických školách v nových podmínkách rychle se vyvíjející informační a technické společnosti*“.

V textu jsou vyloženy základní partie týkající se abstraktních prostorů, prostorů funkcí, prostorů distribucí a jejich aplikace na řešení úloh pro eliptické, parabolické a hyperbolické parciální diferenciální rovnice.

Cílem předkládaného textu je vysvětlit, že existence a násobnost řešení okrajových úloh parciálních diferenciálních rovnic závisí na funkčním prostoru, v němž tato řešení hledáme. Čtenář bude seznámen se základními poznatky z teorie prostorů diferencovatelných funkcí, integrovatelných funkcí, teorií distribucí a teorií Sobolevových prostorů. Teoretické poznatky jsou pak aplikovány při studiu existence řešení základních typů diferenciálních rovnic. Základním pojmem, na kterém stavíme, je distribuce.

Text byl vysázen pomocí sázecího systému TEX ve formátu pdf LATEX.

Tento a také ostatní výukové materiály vzniklé (a nadále vznikající) v rámci projektu Matematika pro inženýry 21. století lze najít na stránkách `http://mi21.vsb.cz/`.

V Plzni 30. 8. 2011 Jiří Benedikt a Petr Girg

Obsah

KAPITOLA 1

Abstraktní prostory a prostory funkcí

1.1. Abstraktní prostory

1.1.1. Topologický prostor. V následujícím textu uvažujeme systémy $\{A_i\}_{i\in I}$ prvků nějaké množiny B ($\forall i \in I : A_i \in B$) popsané pomocí indexu i z množiny I, která může být spočetná i nespočetná. Systém $\{A_i\}_{i\in I}$ chápeme jako zobrazení $I \to B$, které indexu $i \in I$ přiřadí prvek $A_i \in B$. Je-li $I = \mathbb{N}$, pak $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ je posloupnost prvků v B a zapisujeme to též jako $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$. Je-li $I = \{1, 2, \dots, M\}$ konečná podmnožina $\mathbb{N}$, píšeme $\{A_i\}_{i=1}^{M}$. V tomto textu je většinou $I \subset \mathbb{R}$.

Definice 1.1 (Topologie, topologický prostor, spojitost, [**13**], Definice 1.2)**.** Nechť X je neprázdná množina.

(1) Systém $\mathcal{T} \subset 2^X$ podmnožin množiny X se nazývá *topologie* na X, má-li následující tři vlastnosti
 (T1) $\emptyset \in \mathcal{T}$ a $X \in \mathcal{T}$.
 (T2) $\forall M \in \mathbb{N}\, \forall \{V_i\}_{i=1}^{M} \subset \mathcal{T}\colon \bigcap\limits_{i=1}^{M} V_i \in \mathcal{T}$.
 (T3) $\forall \{V_\alpha\}_{\alpha\in I} \subset \mathcal{T}$ (indexová množina I může být konečná, spočetná i nespočetná), platí $\bigcup\limits_{\alpha\in I} V_\alpha \in \mathcal{T}$.
(2) Je-li $\mathcal{T}$ topologie na X, nazýváme $(X, \mathcal{T})$ *topologický prostor* a prvky systému $\mathcal{T}$ nazýváme *otevřené množiny* v X.
(3) Jsou-li X, Y topologické prostory a $f\colon X \to Y$ zobrazení X do Y, říkáme, že f je *spojité* právě tehdy, když pro každou otevřenou množinu $V \subset Y$ je její vzor $f^{-1}(V)$ otevřená množina v X.

Definice 1.2 (Uzavřenost a kompaktnost, [**13**], Definice 2.3)**.** Nechť $(X, \mathcal{T})$ je topologický prostor .

(1) Množina $E \subset X$ je *uzavřená*, jestliže $X \setminus E \in \mathcal{T}$
(2) *Uzávěr* $\overline{E}$ množiny $E \subset X$ je nejmenší uzavřená podmnožina X obsahující E (nejmenší ve smyslu inkluzí).
(3) Množina $K \subset X$ je *kompaktní*, jestliže pro každý systém $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I} \subset \mathcal{T}\colon K \subset \bigcup_{\alpha\in I} V_\alpha$ existuje konečný podsystém, jehož sjednocení obsahuje K. (Říkáme, že z každého pokrytí kompaktní množiny K otevřenými množinami lze vybrat konečné podpokrytí).
(4) Jestliže K je kompaktní množina, nazývá se *kompaktní prostor* .
(5) *Okolí bodu* $x \in X$ je každá $U \in \mathcal{T}$ taková, že $x \in U$.
(6) $(X, \mathcal{T})$ je *Hausdorffův prostor*, jestliže platí:

$$\forall p, q \in X\, \exists U, V \in \mathcal{T}\colon p \neq q \implies (p \in U) \wedge (q \in V) \wedge (U \cap V = \emptyset)$$

(tzv *axiom oddělitelnosti dvou bodů*).
(7) X je *lokálně kompaktní*, jestliže

$$\forall x \in X\, \exists U \in \mathcal{T}\colon x \in U \wedge \overline{U} \text{ je kompaktní}\,.$$

Poznámka 1.3. Kompaktnost hraje ústřední roli v aproximaci. Většina metod hledání řešení je na aproximaci a postupném přibližování k řešení založena. Proto nás bude velmi zajímat charakterizace kompaktnosti podmnožin v různých prostorech.

Topologii $\mathcal{T}$ lze často vyjádřit pomocí menší množiny zvané báze.

Definice 1.4. *Báze topologického prostoru* $(X, \mathcal{T})$ je soustava otevřených množin $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ taková, že každá otevřená množina $A \in \mathcal{T}$ se dá zapsat jako sjednocení prvků v $\mathcal{B}$, tj.

$$\forall A \in \mathcal{T}\, \exists \{\tau_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset \mathcal{B} \colon A = \bigcup_{i \in I} \tau_\alpha \,.$$

Definice 1.5. Necht' $(X, \mathcal{T})$ je topologický prostor, $\{u_i\}_{i=1}^{+\infty} \subset X$ je posloupnost bodů z X a $u \in X$. Jestliže ke každému okolí G bodu x existuje index $n_G \in \mathbb{N}$ takový, že $u_n \in G$ pro všechna $n > n_G$, řekneme, že posloupnost $\{u_i\}_{i=1}^{+\infty}$ *konverguje k bodu* $u \in X$ a píšeme $x_n \to x$ v $(X, \mathcal{T})$ nebo $\lim_{i \to \infty} u_i = u$, případně také

$$x_n \overset{(X,\mathcal{T})}{\longrightarrow} x \,.$$

1.1.2. Metrický prostor.

Definice 1.6. Nechť $X \neq \emptyset$ je libovolná množina a $\rho \colon X \times X \to [0, +\infty)$ splňuje pro všechna $x, y \in X$ podmínky

(MT1) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
(MT2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (*symetrie*),
(MT3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, x)$ (*trojúhelníková nerovnost*).

Potom zobrazení ρ říkáme *metrika* a dvojice (X, ρ) se nazývá *metrický prostor.*

Poznámka 1.7. Metrický prostor je zároveň topologickým prostorem. Na metrickém prostoru X uvažujeme tzv. zobecněné koule $B(x, r) \overset{\text{def}}{=} \{y \in X \colon \rho(x, y) < r\}$ se *středem* $x \in X$ a *poloměrem* $r > 0$. Topologie $\mathcal{T}$ na metrickém prostoru je pak množina všech možných sjednocení zobecněných koulí. Této topologii říkáme *topologie indukovaná metrikou* ρ. *Bází topologie indukovanou metrikou* je pak systém všech otevřených koulí $B(x, r)$, kde x probíhá všechny prvky X a r probíhá interval $(0, +\infty)$.

Věta 1.8. *Posloupnost prvků* $\{u_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X$ *konverguje v metrickém prostoru* (X, ρ) *k prvku* $u \in X$ *(v topologii indukované metrikou* ρ*) právě tehdy, když platí*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N} \colon n \geq n_0 \Longrightarrow \rho(u, u_n) < \varepsilon \,.$$

Definice 1.9. Řekneme, že posloupnost prvků $\{u_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X$ je *cauchyovská* v metrickém prostoru (X, ρ), pokud platí:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall m, n \in \mathbb{N} \colon m, n \geq n_0 \Longrightarrow \rho(u_m, u_n) < \varepsilon \,.$$

Definice 1.10. Řekneme, že metrický prostor (X, ρ) je *úplný*, pokud každá cauchyovská posloupnost konverguje k nějakému prvku tohoto prostoru.

Definice 1.11. Zobrazení $A\colon X \to X$ se nazývá *kontrakce*, pokud existuje $0 < \alpha < 1$ takové, že pro všechna $x, y \in X$ platí

$$\rho\left(A\left(x\right), A\left(y\right)\right) \leq \alpha\rho(x, y)\,.$$

Následující tvrzení je klíčové v mnohých důkazech existence řešení operátorových rovnic (speciálně parciálních diferenciálních rovnic) a zároveň podtrhuje význam úplnosti prostoru. Proto i přes jeho notorickou známost mezi matematickou veřejností si zde dovolíme provést důkaz.

Věta 1.12. *Nechť (X, ρ) je neprázdný úplný metrický prostor a $A\colon X \to X$ je kontrakce na X. Pak existuje právě jeden prvek $x \in X$ takový, že $A(x) = x$.*

Důkaz. Nejprve definujeme rekurentní posloupnost $x_{n+1} = A(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$ a $x_0 \in X$ je libovolný prvek. Nyní ukážeme, že tato posloupnost je cauchyovská. To ukážeme snadno z trojúhelníkové nerovnosti (MT3) a faktu, že A je kontrakce. Zvolíme $\varepsilon > 0$ a hledáme příslušné $n_0 \in \mathbb{N}$. Nechť $m, n \in \mathbb{N}$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $m > n$ (symetrie ρ):

$$\rho(x_m, x_n) \leq \rho(x_m, x_{m-1}) + \rho(x_{m-1}, x_{m-2}) + \cdots + \rho(x_{n+1}, x_n) =$$

$$\rho(A(x_{m-1}), A(x_{m-2})) + \rho(A(x_{m-2}), A(x_{m-3})) + \cdots +$$

$$+ \cdots + \rho(A(x_n), A(x_{n-1})) \leq$$

$$\alpha\rho(x_{m-1}, x_{m-2}) + \alpha\rho(x_{m-2}, x_{m-3}) + \cdots + \alpha\rho(x_n, x_{n-1}) \leq$$

$$\leq \alpha^{m-1}\rho(x_1, x_0) + \alpha^{m-2}\rho(x_1, x_0) + \cdots + \alpha^n\rho(x_1, x_0) \leq$$

$$\leq \frac{1-\alpha^{m-n}}{1-\alpha}\alpha^n\rho(x_1, x_0) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_1, x_0)\,.$$

Protože $\lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha^n}{1-\alpha} = 0$, lze najít $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n > n_0$ platí:

$$0 < \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_1, x_0) < \varepsilon\,.$$

Tudíž je posloupnost cauchyovská. Protože podle předpokladu je prostor X úplný, konverguje posloupnost x_n k nějakému prvku $x \in X$. Zřejmě platí

$$\rho(A(x), A(x_{n-1})) \leq \alpha\rho(x, x_n)\,,$$

kde $x_n \to x$. Proto též $A(x_{n-1}) \to A(x)$. Z výše uvedených konvergencí a rekurence

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon A(x_{n-1}) = x_n$$

již plyne

$$A(x) = x\,.$$

Jednoznačnost plyne opět z vlastnosti kontrakce. Nechť $x, y \in X\colon x \neq y$ a zároveň $A(x) = x, A(y) = y$. Potom

$$\rho(A(x), A(y)) \leq \alpha\rho(x, y) = \alpha\rho(A(x), A(y))\,,$$

což je spor s $0 < \alpha < 1$. ■

Definice 1.13. Necht' (X, ρ) je metrický prostor. O množině $M \subset X$ řekneme, že je v prostoru (X, ρ) *hustá*, jestliže $\overline{M} = X$, naproti tomu o M řekneme, že je *řídká*, jestliže $X \setminus M$ je hustá. Dále řekneme, že množina $M \subset X$ je *1. kategorie*, jestliže $M = \cup_{n=1}^{\infty} M_n$, kde M_n jsou řídké v X a že množina $M \subset X$ je *2. kategorie*, jestliže M není 1. kategorie.

Následující věta má zajímavé důsledky, s nimiž se seznámíte později.

Věta 1.14 (Baire, Rudin [**14**]). *Necht' (X, ρ) je úplný metrický prostor a $M \subset X$ je libovolná otevřená a neprázdná podmnožina. Pak M je 2. kategorie v X. Speciálně X je 2. kategorie sám v sobě.*

Definice 1.15. Metrický prostor se nazývá *separabilní*, jestliže v něm existuje spočetná hustá podmnožina.

Věta 1.16. *Metrický prostor (X, ρ) je separabilní, právě tehdy, když existuje spočetná báze topologie indukované metrikou ρ.*

1.1.3. Lineární prostor.

Definice 1.17. *Lineární prostor nad* $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$; obecně nad libovolným tělesem $\mathbb{F}$) je množina X společně se dvěma operacemi: *sčítání* $\cdot + \cdot\colon X \times X \to X$ a *násobení* reálným (komplexním) číslem (obecně prvkem tělesa $\mathbb{F}$): $\mathbb{R} \times X \to X$. Tyto dvě operace splňují axiomy: Pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$; obecně $\mathbb{F}$) a $u, v, w \in X$:

(LP1) $\exists o \in X\, \forall v \in X\colon v + o = v$. Prvek o se nazývá *neutrální prvek* nebo *nulový vektor.*
(LP2) $\forall v \in X\, \exists w \in V\colon v + w = o$. Prvek w se nazývá *opačný prvek* k prvku v.
(LP3) $\forall u, v, w \in X\colon u + (v + w) = (u + v) + w$.
(LP4) $\forall u, v \in X\colon u + v = v + u$.
(LP5) $\forall u \in X\, \forall a, b \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$; obecně $\mathbb{F}$)$\colon a\,(b\,v) = (a\,b)\,v$.
(LP6) $\forall u \in X\colon 1v = v$, kde 1 je číslo jedna (v obecném případě jednotkový prvek tělesa $\mathbb{F}$).
(LP7) $\forall u, v \in X\, \forall a \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$; obecně $\mathbb{F}$)$\colon a\,(u + v) = a\,u + a\,v$.
(LP8) $\forall u \in X\, \forall a, b \in \mathbb{R}\colon (a + b)\,u = a\,v + b\,u$.

Nebudeme zde rozvádět obsáhlou teorii lineárních prostorů. Axiomy jsme zde uvedli jen pro zopakování. Každý čtenář by měl umět dokázat tato tvrzení.

1. Každý lineární prostor má právě jeden nulový prvek.
2. Pro každý prvek $u \in X$ existuje právě jeden opačný prvek a tento opačný prvek je roven $(-1)\,u$.

1.1.4. Normovaný lineární prostor, Banachův prostor.

Definice 1.18. Nechť X je lineární prostor. Nezáporná funkce $\|\cdot\|_X : X \to [0,+\infty)$ se nazývá *norma na lineárním prostoru* X, splňuje-li axiomy

(N1) $\forall u \in X : \|u\|_X = 0 \Longrightarrow u = o$, kde o je neutrální prvek X,
(N2) $\forall u \in X\, \forall \kappa \in \mathbb{R} : \|\kappa\, u\|_X = |\kappa|\, \|u\|_X$,
(N3) $\forall u, v \in X : \|u+v\|_X \leq \|u\|_X + \|v\|_X$.

Nezáporná funkce $|\!|\!|\cdot|\!|\!|_X : X \to [0,+\infty)$ splňující (N2)-(N3) se nazývá *seminorma na lineárním prostoru* X.

Dvojici $(X, \|\cdot\|_X)$ nazýváme *normovaný lineární prostor.*

Normovaný lineární prostor je metrický prostor s metrikou $d(u,v) \stackrel{\text{def}}{=} \|u-v\|_X$. Jako každý metrický prostor je to tedy i topologický prostor. V teorii parciálních diferenciálních rovnic se nejčastěji potřebují *úplné normované prostory*, proto mají svůj název, říká se jim prostory *Banachovy* na počest polského matematika Stefana Banacha.

Definice 1.19. Nechť $(X, \|\cdot\|_X)$ je normovaný lineární prostor. Řekneme, že je tento prostor *Banachův*, pokud je vzhledem k metrice $d(u,v) \stackrel{\text{def}}{=} \|u-v\|_X$ úplný, tj. každá cauchyovská posloupnost prvků $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ v normě $\|\cdot\|_X$ konverguje v téže normě k nějakému prvku $u \in X$.

Poznámka 1.20. *Zkuste si sami odpovědět na otázku, proč se v analýze nejčastěji potřebují Banachovy prostory. Svoji odpověď zdůvodněte.*

Na jednom prostoru může být definováno více norem.

Definice 1.21. Nechť X je lineární prostor, $\|\cdot\|_1 : X \to [0,+\infty)$, $\|\cdot\|_2 : X \to [0,+\infty)$ jsou zobrazení splňující axiomy normy (N1)-(N2)-(N3) na X. Řekneme, že normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou *ekvivalentní*, pokud existují konstanty $C > c > 0$ takové, že platí

$$\forall u \in X : c\|u\|_1 \leq \|u\|_2 \leq C\|u\|_1 \tag{1.1}$$

Poznámka 1.22. Snadno se ověří, že se jedná o relaci ekvivalence na třídě zobrazení splňujících axiomy (N1)-(N2)-(N3) na X. Takže název *ekvivalence norem* na X je oprávněný.

Věta 1.23. *Ekvivalentní normy na X indukují tutéž topologii $\mathcal{T}$ na X (tj. otevřené množiny vzhledem k jedné z ekvivalentních norem jsou otevřené i vzhledem k druhé a naopak).*

Ve světle předchozí věty, je pak většinou naším cílem v rámci systému ekvivalentních norem najít takovou, se kterou se nám bude nejlépe v daném případě pracovat.

Definice 1.24. Nechť jsou dány dva Banachovy prostory X s normou $\|\cdot\|_X$ a Y s normou $\|\cdot\|_Y$. Řekneme, že prostor X je *spojitě vnořen* do prostoru Y, pokud platí:

$$X \subset Y \tag{1.2}$$

$$\exists C > 0\, \forall u \in X \quad : \quad \|u\|_Y < C\|u\|_X\,. \tag{1.3}$$

Tento fakt symbolicky zapisujeme $X \hookrightarrow Y$ a této relaci mezi X a Y říkáme *spojité vnoření* X do Y.

Pokud je navíc identické zobrazení $\mathrm{Id} : X \to Y, u \mapsto u$ kompaktní, řekneme, že prostor X je *kompaktně vnořen* do prostoru Y (pozor u se sice zobrazí na u, ale ve výchozím prostoru X je obecně jiná topologie než na cílovém prostoru Y). Tento fakt symbolicky zapisujeme $X \overset{\mathrm{C}}{\hookrightarrow} Y$ a této relaci mezi X a Y říkáme *kompaktní vnoření*.

1.1.5. Unitární lineární prostor, Hilbertův prostor.

Definice 1.25. Nechť X je lineární prostor nad $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$). Řekneme, že $g\colon X \times X \to \mathbb{R}$ ($g\colon X \times X \to \mathbb{C}$) je *skalární součin* na X, splňuje-li následující axiomy:

(U1) $\forall u \in X\colon \quad u \neq o \Longrightarrow g(u,u) > 0$, kde o je neutrální prvek X (*pozitivní definitnost*);

(U2) $\forall u, v \in X\colon \quad g(u,v) = g(v,u)$ (*symetrie*) (nebo pro X nad $\mathbb{C}$ platí $g(u,v) = \overline{g(v,u)}$, tzv. *konjugovaná symetrie*);

(U3) $\forall u, v, w \in X\, \forall a \in \mathbb{R}$ (nebo $a \in \mathbb{C}$) platí

$$g(a\,u, v) = a\,g(u,v)\,, \quad g(u+w, v) = g(u,v) + g(w,v)\,.$$

Dvojici (X, g) nazýváme *prostor se skalárním součinem* nebo též *unitární prostor*.

Poznámka ke značení: skalární součin se často značí pomocí závorek, např. $(u,v)_X$, $\langle u,v\rangle_X$ nebo pro $X = \mathbb{R}^N$ pomocí tečky $u \cdot v$.

Věta 1.26 (Norma indukovaná skalárním součinem)**.** *Nechť (X,g) je unitární prostor. Zobrazení $\|\cdot\|_{(X,g)}\colon X \to \mathbb{R}$, $u \mapsto \sqrt{g(u,u)}$ je norma na X.*

Věta 1.27. *Nechť (X,g) je unitární prostor. Potom pro všechna $u, v \in X$ platí* Cauchyova-Schwarzova nerovnost

$$|g(u,v)| \leq \|u\|_{(X,g)}\,\|v\|_{(X,g)}\,. \tag{1.4}$$

Navíc pro všechna $u, v \in X$ platí také rovnoběžníková rovnost

$$\|u+v\|^2_{(X,g)} + \|u-v\|^2_{(X,g)} = 2\left(\|u\|^2_{(X,g)} + \|v\|^2_{(X,g)}\right)\,. \tag{1.5}$$

Poznámka 1.28. Protože lze pomocí skalárního součinu definovat normu na unitárním prostoru, je unitární prostor také v tomto smyslu normovaný (vzhledem k této normě) tudíž i metrický i topologický prostor.

Definice 1.29 (Hilbertův prostor)**.** Je-li (X,g) je unitární prostor a $(X, \|\cdot\|_{(X,g)})$ je Banachův prostor, potom (X,g) se nazývá *Hilbertův prostor*.

Věta 1.30 (Propozice 5.1 [**2**])**.** *Každý Hilbertův prostor je reflexivní.*

Věta 1.31 (Projekce na konvexní množinu, Věta 5.2 [**2**])**.** *Nechť (H,g) je Hilbertův prostor a $K \subset H$ je jeho neprázdná uzavřená konvexní podmnožina. Potom pro všechna $f \in H$ existuje právě jedno $u \in K$ takové, že*

$$\|f-u\|_{(H,g)} = \min_{v \in K} \|f-v\|_{(H,g)} = \operatorname{dist}(f,K)\,. \tag{1.6}$$

Navíc u je jediný prvek splňující podmínku

$$u \in K \wedge \forall v \in K\colon g(f-u, v-u) \leq 0\,. \tag{1.7}$$

Důkaz. Nejprve dokážeme existenci. Nechť $\{v_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$ je minimizující posloupnost, to jest

$$d_n \stackrel{\text{def}}{=} \|f - v_n\|_{(H,g)} \to d = \inf_{v \in K} \|f - v\|_{(H,g)} \quad \text{pro } n \to +\infty .$$

Snadno ukážeme, že minimizující posloupnost musí být cauchyovská. Zvolíme-li $u := (f - v_n)/2$ a $v := (f - v_m)/2$ v rovnoběžníkové rovnosti (1.5), dostaneme

$$\left\| f - \frac{v_n + v_m}{2} \right\|_{(H,g)} + \left\| \frac{v_n - v_m}{2} \right\|_{(H,g)} = \frac{1}{2} \left(d_n^2 + d_m^2 \right) .$$

Protože K je konvexní, platí $\frac{v_n + v_m}{2} \in K$ a tudíž

$$\left\| f - \frac{v_n + v_m}{2} \right\|_{(H,g)} \geq \inf_{v \in K} \|f - v\|_{(H,g)} = d .$$

Odtud

$$\left\| \frac{v_n - v_m}{2} \right\|_{(H,g)} \leq \frac{1}{2} \left(d_n^2 + d_m^2 \right) - d^2 = \frac{1}{2}(d_n^2 - d^2) + \frac{1}{2}(d_m^2 - d^2) .$$

A tedy minimizující posloupnost $\{v_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$ je cauchyovská. Protože H je prostor Hilbertův a tedy úplný vzhledem k $\| \cdot \|_{(H,g)}$, existuje $u \in H$ tak, že $v_n \to u$ pro $n \to +\infty$. Množina K je uzavřená a $\{v_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$, tudíž $u \in K$. Ze spojitosti zobrazení $v \mapsto \|f - v\|_{(H,g)}$ vzhledem ke konvergenci v $\| \cdot \|_{(H,g)}$ plyne, že $d = \|f - u\|_{(H,g)}$. Tím je existence u z tvrzení dokázána.

Nyní dokážeme jednoznačnost. Nechť existují $u_1, u_2 \in K$, $u_1 \neq u_2$ taková, že $\|f - u_1\|_{(H,g)} = d$ a $\|f - u_2\|_{(H,g)} = d$. Potom

$$\left\| f - \frac{u_1 + u_2}{2} \right\|_{(H,g)} + \left\| \frac{u_1 - u_2}{2} \right\|_{(H,g)} = \frac{1}{2} \left(d^2 + d^2 \right) = d^2 .$$

Odtud stejným postupem jako výše dostaneme

$$\left\| \frac{u_1 - u_2}{2} \right\|_{(H,g)} \leq d^2 - d^2 = 0 ,$$

což je spor s $u_1 \neq u_2$. Jednoznačnost je tím dokázána.

Zbývá ukázat, že u je jediný prvek splňující podmínku (1.7). Ukážeme, že (1.6) a (1.7) jsou ekvivalentní. Nechť $u \in K$ splňuje (1.6) a $w \in K$ je libovolný prvek. Potom z konvexnosti K dostaneme

$$\forall t \in [0, 1] \colon v_t = (1 - t)u + tw \in K$$

a tudíž z definice infima

$$\|f - u\|_{(H,g)} \leq \|f - ((1 - t)u + tw)\|_{(H,g)} = \|(f - u) - t(w - u)\|_{(H,g)} .$$

Vícenásobným užitím linearity a symetrie skalárního součinu v reálném Hilbertově prostoru dostaneme pravidlo pro skalární roznásobení součtu dvou prvků:

$$\forall a, b \in H \colon g\,(a + b, a + b) = g(a, a) + 2g(a, b) + g(b, b) .$$

Pomocí tohoto pravidla pak již zjistíme, že

$$\begin{aligned}\|f-u\|^2_{(H,g)} &\le \|(f-u)-t(w-u)\|^2_{(H,g)} = \\ &= g\left((f-u)-t(w-u),(f-u)-t(w-u)\right) = \\ &= g(f-u,f-u) - 2tg(f-u,w-u) + t^2 g(w-u,w-u) = \\ &= \|f-u\|_{(H,g)} - 2tg(f-u,w-u) + t^2\|w-u\|^2_{(H,g)}\,.\end{aligned}$$

Tudíž

$$t\|w-u\|^2_{(H,g)} \ge 2g(f-u,w-u)\,.$$

Protože $t \in [0,1]$ je libovolné, musí platit

$$g(f-u,w-u) \le 0.$$

Naopak uvažujme nyní $u \in K$ splňující (1.7). Potom

$$\|u-f\|^2_{(H,g)} - \|v-f\|^2_{(H,g)} = 2g(f-u,v-u) - \|u-v\|^2_{(H,g)}$$

a tudíž splňuje i (1.6). Tím je důkaz hotov.

■

Poznámka 1.32. V předchozí větě je konvexnost důležitá kvůli jednoznačnosti a konvexnost kombinovaná s uzavřeností je potřebná pro existenci minima v dané množině (podmnožině úplného prostoru nekonečné dimenze).

Definice 1.33 (Projekce na konvexní množinu)**.** Prvek u z Věty 1.31 se nazývá projekce na množinu K a značí se

$$u = P_K f\,.$$

Věta 1.34 (Propozice 5.3, [**2**])**.** *Nechť (H,g) je Hilbertův prostor a $K \subset H$ je jeho neprázdná uzavřená konvexní množina a $P_K : H \to K, u \mapsto P_K u$ je projekce na tuto množinu. Potom platí*

$$\forall f_1, f_2 \in H\colon \|P_K f_1 - P_K f_2\|_{(H,g)} \le \|f_2 - f_1\|_{(H,g)}\,.$$

Důsledek 1.35. *Nechť $M \subset H$ je uzavřený lineární podprostor Hilbertova prostoru H a $f \in H$. Potom $u = P_M f$ je jediný prvek splňující*

$$u \in M \wedge \forall v \in M\colon g(f-u,v) = 0\,.$$

Navíc v tomto případě je P_M lineární zobrazení, kterému se říká ortogonální projekce.

Důkaz. Každý uzavřený lineární podprostor M Hilbertova prostoru H je konvexní množina. Podle Věty 1.31 existuje právě jeden $u \in M$ tak, že

$$\forall v \in M\colon g(f-u,v-u) \le 0\,.$$

Platí-li nerovnost pro všechna $v \in M$, pak musí platit také pro $v = w + u$, kde $w \in M$ je libovolné (protože $u \in M$ a M je lineární prostor). Odtud dostaneme

$$\forall w \in M\colon g(f-u,w) \le 0\,.$$

Protože M je prostor, $w \in M$ implikuje $-w \in M$. Proto také platí

$$\forall w \in M\colon g(f-u,-w) \leq 0\,.$$

Odtud z linearity g dostaneme $g(f-u,-w) = -g(f-u,w)$. Z opačných neostrých nerovností plyne rovnost a musí tedy platit

$$\forall w \in M\colon g(f-u,w) = 0\,.$$

■

Věta 1.36 (Rieszova věta o reprezentaci, Věta 5.5, [**2**])**.** *Nechť H je Hilbertův prostor se skalárním součinem g. Pro každé $\phi \in H^*$ existuje právě jedno $f \in H$ tak, že*

$$\forall u \in H\colon \phi(u) = g(f,u)\,.$$

Navíc

$$\|f\|_{(H,g)} = \|\phi\|_{H^*} \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{|\phi(u)| : u \in H, \|u\|_{(H,g)} = 1\}\,. \tag{1.8}$$

Důkaz. Nechť $M = \varphi^{-1}(\{0\})$ (jádro ϕ), tudíž z linearity a spojitosti ϕ plyne, že M je uzavřený podprostor H. Uvažujme dva případy $M = H$ a $M \neq H$. Případ $M = H$ znamená, že ϕ je nulový funkcionál a stačí položit $f = o$, potom $g(f,u) = 0$ pro všechna $u \in H$. V případě, že $M \neq H$, zvolme $h \in H$ tak, že $h \notin M$. Nechť $h^\perp = (h - P_M h)/\|(h - P_M h)\|_{(H,g)}$. Potom

$$\|h^\perp\|_{(H,g)} = 1 \text{ and } g(h^\perp, v) = 0 \quad \forall v \in M\,. \tag{1.9}$$

Pro libovolné $u \in H$ položme

$$v \stackrel{\text{def}}{=} u - \frac{\phi(u)}{\phi(h^\perp)} h^\perp\,,$$

kde $\phi(h^\perp) \neq 0$, protože $h^\perp \notin M$ a zároveň $v \in M$, neboť

$$\phi(v) = \phi(u) - \frac{\phi(u)}{\phi(h^\perp)}\phi(h^\perp) = 0\,.$$

Nyní položme $f = \phi(h^\perp)h^\perp$. Podle (1.9) je

$$0 = g\left(h^\perp, v\right) = g\left(h^\perp, u - \frac{\phi(u)}{\phi(h^\perp)}h^\perp\right) = g\left(h^\perp, u\right) - g\left(h^\perp, \frac{\phi(u)}{\phi(h^\perp)}h^\perp\right)$$

a tudíž ($g(h^\perp, h^\perp) = 1$) platí

$$g\left(h^\perp, u\right) = \frac{\phi(u)}{\phi(h^\perp)}\,.$$

Odtud po úpravě

$$\phi(h^\perp) g(h^\perp, u) = \phi(u)\,,$$

odkud je již vidět, že hledané $f \in H$ je $f \stackrel{\text{def}}{=} \phi(h^\perp)h^\perp$.

■

Definice 1.37. Nechť (H,g) je reálný Hilbertův prostor. Zobrazení $a : H \times H \to \mathbb{R}$ splňující $\forall u, v, w \in H$ a $\lambda \in \mathbb{R}$ podmínky

(BF1) $a(u+v,w) = a(u+v,w)$ a $a(w,u+v) = a(w,u+v)$
(BF2) $a(\lambda u, v) = \lambda a(w,v)$ a $a(u,\lambda v) = \lambda a(w,v)$

se nazývá *bilineární forma* na H.

Řekneme, že bilineární forma a je *symetrická*, pokud platí

$$\forall u, v \in H\colon a(u,v) = a(v,u)\,. \tag{1.10}$$

Řekneme, že bilineární forma a je *omezená*, pokud platí

$$\exists C > 0\, \forall u, v \in H\colon |a(u,v)| \leq C\|u\|_g\|v\|_g\,. \tag{1.11}$$

Řekneme, že bilineární forma a je (H,g)*-koercivní*, pokud platí

$$\exists c > 0\, \forall u \in H\colon c\|u\|_g \leq |a(u,u)|\,. \tag{1.12}$$

Věta 1.38 (Stampacchia, viz Věta 5.6 [**2**])**.** *Předpokládejme, že $a(u,v)$ je omezená (H,g)-koercivní bilineární forma na reálném Hilbertově prostoru (H,g). Potom ke každému $\phi \in H^*$ existuje právě jeden prvek $u \in H$ takový, že*

$$\forall v \in K\colon a(u,v) \geq \phi(v)\,. \tag{1.13}$$

Navíc, je-li a symetrická, potom $u \in K$ je jediný prvek splňující

$$\frac{1}{2}a(u,u) - \phi(u) = \min_{v\in K}\left\{\frac{1}{2}a(v,v) - \phi(v)\,.\right\} \tag{1.14}$$

Důkaz. Z Rieszovy věty o reprezentaci plyne, že existuje právě jedno $f \in H$ tak, že

$$\forall v \in H\colon g(f,v) = \phi(v)\,.$$

Pro libovolné pevné $u \in H$ je zobrazení $v \mapsto a(u,v)$ spojitý lineární funkcionál na H. Užijeme-li Rieszovu větu o reprezentaci na tento funkcionál, nalezneme k danému u právě jeden prvek, označme jej Au, takový, že

$$\forall v \in H\colon g(Au,v) = a(u,v)\,.$$

Operátor $A : H \to H$ splňuje následující vlastnosti:

$$\forall u \in H : \|Au\|_{(H,g)} = \sqrt{g(Au,Au)} \leq C\|u\|_{(H,g)}\,, \tag{1.15}$$

$$\forall u \in H : g(Au,u) \geq c\|u\|^2_{(H,g)}\,. \tag{1.16}$$

Naším cílem je nalézt $u \in K$ tak, že

$$\forall v \in K\colon g(Au, v-u) \geq (f, v-u)\,.$$

Nechť $\rho > 0$. Potom předchozí nerovnice je ekvivalentní nerovnici

$$\forall v \in K\colon g(\rho f - \rho Au + u - u, v - u) \leq 0\,,$$

což lze s využitím Věty 1.31 a Definice 1.33 zapsat ekvivalentně jako

$$u = P_K(\rho f - \rho Au + u)\,.$$

Nyní definujeme zobrazení $S : K \to K, w \mapsto P_K(\rho f - \rho Aw + w)$. Předchozí rovnici můžeme zapsat jako úlohu o pevném bodě pro operátor S:

$$u = S(u)\,. \tag{1.17}$$

Protože P_K nezvětšuje vzdálennost (Věta 1.34), platí odhad:

$$\|Sw_1 - Sw_2\|_{(H,g)} \leq \|(w_1 - w_2) - \rho(Aw_1 - Aw_2)\|_{(H,g)}$$

a tudíž

$$\begin{aligned}
&\|Sw_1 - Sw_2\|^2_{(H,g)} = \\
&= \|w_1 - w_2\|_{(H,g)} - 2\rho g(Aw_1 - Aw_2, w_1 - w_2) + \rho^2 \|Aw_1 - Aw_2\|^2_{(H,g)} \leq \\
&\leq (1 - 2\rho c + \rho^2 C^2)\|w_1 - w_2\|^2_{(H,g)} \,.
\end{aligned}$$

Snadno zjistíme, že pro $0 < \rho < 2c/C^2$ je $(1 - 2\rho c + \rho^2 C^2) < 1$ a tudíž S je kontraktivní. Existuje tedy právě jedno řešení rovnice (1.17), což je zároveň jediným hledaným $u \in K$.

Nyní předpokládejme, že bilineární forma a je navíc symetrická. Z podmínky (H, g)-koercivity snadno ověříme, že $a(u, u) > 0 \Leftrightarrow u \neq 0$. Tudíž a je také skalární součin na H. Z (H, g)-koercivity a spojitosti dostaneme:

$$\forall u \in H \colon cg(u, u) \leq a(u, u) \leq Cg(u, u)\,, \tag{1.18}$$

odkud snadno plyne ekvivalence norem $\|\cdot\|_{(H,g)}$ a $\|\cdot\|_{(H,a)} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{a(u,u)}$. Topologicky jsou tedy prostory (H, g) a (H, a) nerozlišitelné a proto je prostor (H, a) také Hilbertův.

Podle Rieszovy věty o reprezentaci, nyní ovšem na prostoru (H, a), existuje právě jedno $w \in H$ takové, že

$$\forall v \in H \colon a(w, v) = \phi(w)\,.$$

Nerovnici (1.13) lze pak přepsat jako

$$\forall v \in K \colon a(u, v - u) \geq a(w, v - u)$$

a tedy

$$\forall v \in K \colon a(w - u, v - u) \leq 0\,.$$

Řešení této nerovnice je $u = P_K w$, kde projekce P_K je nyní počítána ve skalárnín součinu a. Toto řešení je jediné a minimalizuje vzdálenost, tj.

$$\sqrt{a(w - u, w - u)} = \min v \in K \sqrt{a(w - v, w - v)}$$

a tedy i polovinu kvadrátu vzdálenosti

$$\frac{1}{2}a(w - v, w - v) = \frac{1}{2}a(v, v) - a(w, v) + \frac{1}{2}a(w, w) = \frac{1}{2}a(v, v) - \phi(v) + \frac{1}{2}a(w, w)\,.$$

Protože $w \in K$ je pevný prvek a tedy $\frac{1}{2}a(w, w)$ je konstantní vůči změnám v, minimalizace posledně uvedeného výrazu je ekvivalentní minimalizaci funkcionálu:

$$\frac{1}{2}a(v, v) - \phi(v)\,,$$

což jsme měli dokázat.

■

Věta 1.39 (Laxovo-Milgramovo Lemma, Věta 5.8 [**2**])**.** *Předpokládejme, že $a(u,v)$ je omezená (H,g)-koercivní bilineární forma na reálném Hilbertově prostoru (H,g). Potom ke každému $\phi \in H^*$ existuje právě jeden prvek $u \in H$ takový, že*

$$\forall v \in H\colon a(u,v) = \phi(v)\,. \tag{1.19}$$

Zároveň je splněna nerovnost

$$\|u\|_{(H,g)} \leq \frac{1}{c}\|\phi\|_{H^*}\,. \tag{1.20}$$

Navíc, je-li a symetrická, potom je $u \in H$ jediný prvek splňující

$$\frac{1}{2}a(u,u) - \phi(u) = \min_{v\in H}\left\{\frac{1}{2}a(v,v) - \phi(v)\,.\right\} \tag{1.21}$$

Důkaz. Laxovo-Milgramovo Lemma je důsledkem Věty 1.38. Stačí zvolit $K = H$. Potom existuje právě jeden prvek $u \in H$ splňující

$$\forall v \in H\colon a(u,v) \geq \phi(v)\,.$$

Protože H je lineární prostor, $v \in H \Leftrightarrow -v \in H$ a tedy platí zároveň nerovnosti

$$a(u,v) \geq \phi(v) \wedge a(u,-v) \geq \phi(-v)$$

a z linearity a i ϕ dostaneme

$$a(u,v) \geq \phi(v) \wedge a(u,v) \leq \phi(v)\,.$$

Platí tedy

$$\forall v \in H\colon a(u,v) = \phi(v)\,.$$

Z této identity nyní dokážeme odhad normy (1.20):

$$\forall v \in H\colon |a(u,v)| = |\phi(v)| = |g(f,v)| \leq \|f\|_{(H,g)}\|v\|_{(H,g)}\,,$$

kde $f \in H$ je takový, že

$$\forall v \in H\colon g(f,v) = \phi(v)\,,$$

viz Rieszova Věta 1.36. Speciálně

$$c\|u\|^2_{(H,g)} \leq |a(u,u)| \leq \|f\|_{(H,g)}\|u\|_{(H,g)}$$

a tudíž

$$\|u\|_{(H,g)} \leq \frac{1}{c}\|f\|_{(H,g)} = \frac{1}{c}\|\phi\|_{H^*}\,.$$

Minimizace (1.21) je přímý důsledek Věty 1.38 pro $K = H$.

■

Důsledek 1.40. *Nechť jsou splněny předpoklady předchozí věty. Potom řešení rovnice* (1.19)

$$\forall v \in H\colon a(u,v) = \phi(v)\,.$$

závisí spojitě na ϕ.

Důkaz. Nechť $u_i \in H$, $i = 1, 2$, řeší rovnici

$$\forall v \in H \colon a(u_i, v) = \phi_i(v)\,,$$

kde $\phi_i \in H^*$, $i = 1, 2$. Potom díky linearitě bilineární formy a v prvním argumentu prvek $w := u_2 - u_1$ řeší rovnici

$$\forall v \in H \colon a(w, v) = \phi_2(v) - \phi_1(v)\,.$$

Podle (1.20)

$$\|w\|_{(H,g)} = \|\phi_2 - \phi_1\|_{H^*}\,,$$

což implikuje spojitou závislost na ϕ.

■

1.1.6. $\mathbb{R}^N$ - topologický, metrický, lineární a normovaný prostor. Množinu $\mathbb{R}^N$, kde $N \in \mathbb{N} \colon N > 1$ definujeme jako kartézský součin

$$\mathbb{R}^N \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n-\text{krát}}\,. \tag{1.22}$$

Prvky této množiny budeme podle kontextu nazývat buď vektory nebo body podle toho, zda budeme $\mathbb{R}^N$ považovat za vektorový nebo afinní prostor. Pro vektory $a, b \in \mathbb{R}^N$ definujeme vnitřní operaci sčítání a vnější operaci násobení reálným číslem $\alpha \in \mathbb{R}$. obvyklým způsobem po složkách. Je-li tedy

$$a = (a_1, a_2, \ldots, a_N) \text{ a } b = (b_1, b_2, \ldots, b_N)\,,$$

pak

$$a + b \stackrel{\text{def}}{=} (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_N + b_N)$$

a

$$\alpha\, a \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha\, a_1, \alpha\, a_2, \ldots, \alpha\, a_N)\,.$$

Vzhledem k těmto operacím tvoří $\mathbb{R}^N$ lineární prostor nad $\mathbb{R}$ s neutrálním (nulovým) prvkem $o = (0, 0, \ldots, 0)$.

Nechť $A \subset \mathbb{R}^N$, $x \in \mathbb{R}^N$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. V následujícím textu budeme používat značení

$$A + x \stackrel{\text{def}}{=} \left\{y \in \mathbb{R}^N \colon \exists a \in A \text{ takové, že } y = a + x\right\} \tag{1.23}$$

a

$$\alpha\, A \stackrel{\text{def}}{=} \left\{y \in \mathbb{R}^N \colon \exists a \in A \text{ takové, že } y = \alpha\, x\right\}\,. \tag{1.24}$$

Definice 1.41. Nechť $p \in [1, +\infty)$ a $u = (u_1, u_2, \ldots, u_N)$. Na $\mathbb{R}^N$ definujeme zobrazení $|\cdot|_{\mathbb{R}^N,p} \colon \mathbb{R}^N \to [0, +\infty)$ předpisem

$$|u|_{\mathbb{R}^N,p} \stackrel{\text{def}}{=} \left(|u_1|^p + |u_2|^p + \cdots + |u_N|^p\right)^{1/p}\,. \tag{1.25}$$

Také definujeme zobrazení $|\cdot|_{\mathbb{R}^N,\infty} \colon \mathbb{R}^N \to [0, +\infty)$ předpisem

$$|u|_{\mathbb{R}^N,\infty} \stackrel{\text{def}}{=} \max\left\{|u_1|, |u_2|, \ldots, |u_N|\right\} \tag{1.26}$$

Těmto zobrazením říkáme *normy* na $\mathbb{R}^N$. Normě $|\cdot|_{\mathbb{R}^N,2}$ ($p=2$) říkáme *eukleidovská norma* na $\mathbb{R}^N$.

Věta 1.42. *Výše uvedená zobrazení* $|\cdot|_{\mathbb{R}^N,p}\colon \mathbb{R}^N \to [0,+\infty)$ *pro* $p\in[1,+\infty)$ *a* $|\cdot|_{\mathbb{R}^N,\infty}\colon \mathbb{R}^N \to [0,+\infty)$ *splňují axiomy normy na* $\mathbb{R}^N$.

V $\mathbb{R}^N$ platí velice důležitá věta.

Věta 1.43. *Všechny normy* $|\cdot|_{\mathbb{R}^N,p}$ *pro* $p\in[1,+\infty)$ *a* $|\cdot|_{\mathbb{R}^N,\infty}$ *jsou ekvivalentní normy na* $\mathbb{R}^N$.

Zajímáme-li se pouze o topologickou strukturu $\mathbb{R}^N$, můžeme pracovat s tou normou, která je v dané situaci nejvýhodnější. Většinou se pracuje s normami $|\cdot|_{\mathbb{R}^N,1}$ (součet absolutních hodnot složek), $|\cdot|_{\mathbb{R}^N,\infty}$ (pracuje po složkách, což je většinou velmi výhodné) a $|\cdot|_{\mathbb{R}^N,2}$ (rotační symetrie).

V $\mathbb{R}^N$ platí následující kritérium kompaktnosti.

Věta 1.44 (Heine-Borel)**.** *Kompaktní podmnožiny prostoru* $\mathbb{R}^N$ *s topologií indukovanou normou* $|\cdot|_{\mathbb{R}^N,\infty}$*, a tedy i indukovanou všemi ekvivalentními normami* $|\cdot|_{\mathbb{R}^N,p}$*,* $p\in[1,+\infty)$*, jsou právě ty množiny, které jsou uzavřené a omezené.*

Definice 1.45. Řekneme, že podmnožina $A\subset\mathbb{R}^N$ je *obloukově souvislá*, pokud ke každé dvojici bodů $a,b\in A$ existuje spojitá křivka $\gamma\colon[0,1]\to A$ taková, že $\gamma(0)=a$ a $\gamma(1)=b$.

V teorii parciálních diferenciálních rovnic mezi podmnožinami $\mathbb{R}^N$ hrají ústřední úlohu tzv. oblasti.

Definice 1.46. Otevřená obloukově souvislá podmnožina $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ se nazývá *oblast*.

Definice 1.47. Říkáme, že podmnožina $A\subset\mathbb{R}^N$ je *omezená*, pokud existuje $R>0$ takové, že $A\subset B(o,R)$, kde $B(o,R)$ je koule vzhledem ke kterékoliv z ekvivalentních norem s normou eukleidovskou.

Definice 1.48. Řekneme, že omezená oblast $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ je *jednoduše souvislá omezená oblast*, pokud $\mathbb{R}^N\setminus\Omega$ je obloukově souvislá podmnožina $\mathbb{R}^N$.

V dalším textu budeme podle potřeb přidávat definice dalších vlastností oblastí v $\mathbb{R}^N$.

1.2. Přehled výsledků teorie míry a integrálu

1.2.1. Rozšířená reálná osa.

Definice 1.49. Množina $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\cup\{-\infty\}\cup\{+\infty\}$ spolu s operací uspořádaní $<$ definovanou pro $a,b\in\mathbb{R}$ stejně jako na $\mathbb{R}$ a splňující $-\infty<+\infty$ a

$$\forall a\in\mathbb{R}\colon\ -\infty<a<+\infty$$

se *nazývá rozšířená reálná osa.*

Na $\mathbb{R}^*$ rozšíříme operace *sčítání* a *násobení* následujícím způsobem:

$$\begin{aligned}
a+(+\infty) &\overset{\text{def}}{=} +\infty\,, \quad +\infty + a = a + (+\infty)\,, \quad \forall a \in (0,+\infty]\,,\\
a+(-\infty) &\overset{\text{def}}{=} -\infty\,, \quad -\infty + a = a + (-\infty)\,, \quad \forall a \in [-\infty,0)\,,\\
a\cdot(\pm\infty) &\overset{\text{def}}{=} \pm\infty\,, \quad (\pm\infty)\cdot a = a\cdot(\pm\infty)\,, \quad \forall a \in (0,+\infty]\,,\\
a\cdot(\pm\infty) &\overset{\text{def}}{=} \mp\infty\,, \quad (\pm\infty)\cdot a = a\cdot(\pm\infty)\,, \quad \forall a \in [-\infty,0)\,,\\
0\cdot(\pm\infty) &\overset{\text{def}}{=} 0\,, \quad 0\cdot(\pm\infty) = \pm\infty\cdot 0\,.
\end{aligned}$$

Poznámka 1.50. Není definována operace $+\infty + (-\infty)$. Takto definované operace na rozšířeném oboru splňují axiomy *komutativity* $a\star b = b\star a$, *asociativity* $a\star(b\star c) = (a\star b)\star c$ (symbol $\star$ zastupuje v daném výrazu buď $+$ nebo $\cdot$) a *distributivity* $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$.

Poznámka 1.51. Definici $0\cdot(\pm\infty) \overset{\text{def}}{=} 0$ zavádíme z toho důvodu, že integrujeme-li např. nulovou funkci přes množinu libovolné (i nekonečné) míry chceme, aby výsledek v souladu s intuicí byl 0 (kde nic není, ani čert nebere). Stejně tak chceme, aby příspěvek integrandu (který může nabývat i nekonečné hodnoty) na množině míry nula byl nulový. Tato definice nás v žádném případě neopravňuje k následujícím úpravám limit:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0,\ \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n = 0\ \cdot\ (+\infty) = 0\,.$$

Prostudujte si pořádně důkaz věty o algebře limit a uvidíte, že takto limity nelze počítat ani s naší novou definicí. *Principiálně to souvisí s tím, že limita funkce je vlastnost prstencového okolí bodu, nikoliv bodu samého* a v $\mathbb{R}^*$ to platí i pro posloupnosti, protože jsme přidali body $-\infty$ a $+\infty$. V limitním přechodu $n \to +\infty$ proměnná n totiž nenabývá hodnoty $+\infty$, jedná se o souhrnné chování pro extrémně velká $n \in \mathbb{N}$. Proto není rozpor v tom, že $\lim_{n\to+\infty} 1/n = 0$, $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$,

$$\left(\lim_{n\to+\infty} 1/n\right)\left(\lim_{n\to+\infty} n\right) = 0\ \cdot\ (+\infty) = 0 \neq 1 = \lim_{n\to+\infty} 1 = \lim_{n\to+\infty} 1/n\ \cdot\ n\,.$$

Nejsme tedy nijak ve sporu s klasickou reálnou analýzou byť to tak na první pohled vypadá. Na druhou stranu, je-li například $a_n = 0$ a $b_n = +\infty$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} (0\ \cdot\ (+\infty)) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0\,.$$

Výsledek jsme ovšem dostali z toho, že $a_n b_n = 0$ je konstantní posloupnost a ne z věty o algebře limit.

Věta 1.52 (Rudin, [**13**])**.** *Rozšířená reálná osa* $\mathbb{R}^*$ *se sytémem* $\mathcal{T} \subset 2^{\mathbb{R}^*}$ *tvořeným otevřenými intervaly* (a,b)*, množinami typu* $(a,+\infty]$*,* $[-\infty,b)$*,* $a,b \in \mathbb{R}$*, a jejich libovolnými sjednoceními je topologický prostor.*

1.2.2. Základní pojmy. V teorii parciálních diferenciálních rovnic ať už klasické založené na teorii potenciálu či moderní založené na pojmu slabého řešení se pracuje s mírou a integrálem. V této podkapitole stučně a přehledně zopakujeme výsledky teorie míry. Nejedná se o ucelený a systematický výklad, ale jen o připomenutí základních pojmů, které budeme potřebovat. Velmi pěkný výklad z něhož zde čerpáme lze nalézt v učebním textu Malý [**10**].

Definice 1.53. Nechť X je prostor (neprázdná množina). Řekneme, že $\mathfrak{S} \subset 2^X$ je *σ-algebra* na množině X, pokud

(S1) $\emptyset \in \mathfrak{S}$,
(S2) $\forall A \subset X \colon A \in \mathfrak{S} \Rightarrow X \setminus A \in \mathfrak{S}$,
(S3) $\forall \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathfrak{S} \colon \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathfrak{S}$.

Množinová funkce $\mu \colon \mathfrak{S} \to [0, +\infty]$ se nazývá *míra*, pokud platí

(M1) $\mu(\emptyset) = 0$,
(M2) $\forall \{A\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{S}\, \forall i, j \in \mathbb{N} \colon \ (i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset) \Rightarrow \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i) = \mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right)$.

Trojici $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ se říká *prostor s mírou.*

Poznámka 1.54. Pro daný prostor X může existovat více σ-algeber a na dané σ-algebře může také být definováno více měr.

Definice 1.55. Množině $E \subset \mathfrak{S} \colon \mu(E) = 0$ se říká *množina míry nula* (vzhledem k míře μ) nebo *množina nulové míry* (vzhledem k míře μ).

Definice 1.56. Nechť P je nějaká vlastnost bodu $x \in D \subset \mathfrak{S}$, kterou bod x buď má nebo nemá. Výrok „*Pro μ-skoro všechna $x \in D$ platí $P(x)$*" chápeme v tom smyslu, že existuje $N \in \mathfrak{S} \colon \mu(N) = 0$ taková, že výrok

$$\forall x \in D \setminus N \colon P(x)$$

platí.

V následující definici jsou zadefinovány některé speciální typy měr.

Definice 1.57.

(1) Míra μ se nazývá *úplná*, pokud platí
$$\forall A \subset X\, \forall E \in \mathfrak{S} \colon \ (\mu(E) = 0 \wedge A \subset E) \Rightarrow (A \in \mathfrak{S} \wedge \mu(A) = 0) \ .$$
(2) Míra μ se nazývá *konečná*, pokud platí $\mu(X) < +\infty$.
(3) Míra μ se nazývá *σ-konečná*, pokud existuje spočetný systém $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{S}$, takový, že $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ a zároveň $\forall i \in \mathbb{N} \colon \mu(A_i) < +\infty$.

Míra se většinou vytváří z tzv. výchozí množinové funkce pomocí vnější míry. Vnější míra je na rozdíl od míry definována na všech podmnožinách prostoru X.

Definice 1.58. Množinová funkce $\mu^* \colon 2^X \to [0, +\infty]$ se nazývá *vnější míra*, pokud platí

(VM1) $\mu^*(\emptyset) = 0$,
(VM2) $\forall A, B \subset X \colon A \subset B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ (monotonie),
(VM3) $\forall \{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset X \colon \mu^*\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu^*(A_i)$ (σ-subaditivita).

Vnější míra je na rozdíl od míry pouze σ-subaditivní. Následující důležitý výsledek ukazuje, že restrikce vnější míry na vhodnou podmnožinu je již míra.

Definice 1.59. Nechť $\gamma\colon 2^X \to [0,+\infty]$ je vnější míra na X. Množinu $M \subset X$ nazveme *γ-měřitelnou* (*podle Carathéodoryho*), jestliže platí

$$\forall T \subset X\colon \gamma(T) = \gamma(T \cap M) + \gamma(T \setminus M)\,. \tag{1.27}$$

Množinu všech $M \subset X$ splňujících (1.27) označíme $\mathfrak{M}(\gamma)$.

Věta 1.60 (Věta Carathéodoryova[**10**])**.** *Nechť γ je vnější míra na X. Pak množina $\mathfrak{M}(\gamma)$ tvoří σ-algebru a restrikce $\gamma|_{\mathfrak{M}(\gamma)}$ je úplná míra na $\mathfrak{M}(\gamma)$.*

Užitečnost výše uvedeného tvrzení bude patrná až při konstrukci míry. V praxi máme dánu nějakou výchozí množinovou funkci μ^0 definovanou na nějaké podmnožině $\mathcal{G} \subset 2^X$, $\mu^0\colon \mathcal{G} \to [0,+\infty]$. Množina $\mathcal{G}$ je zpravidla množinou nějakých jednoduchých geometrických útvarů, jimž je snadné přiřadit míru (intuitivně, tak aby měla geometricky nebo fyzikálně smysl - objem, hmotnost a podobně). Například při konstrukci trojrozměrné Lebesgueovy míry (viz dále) se jedná o množinu všech kvádrů se stěnami rovnoběžnými s rovinami xy, yz, zx. V abstraktní teorii míry jedinou podmínkou na výchozí funkci je tzv. počáteční podmínka:

$$\emptyset \in \mathcal{G} \text{ a } \mu^0(\emptyset) = 0\,. \tag{1.28}$$

Z funkce μ^0 vytvoříme množinovou funkci definovanou na celém 2^X:

$$A \in 2^X \mapsto \inf\left\{\sum_{i\in\mathbb{N}} \mu^0(G_i)\colon A \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} G_i\,, G_i \in \mathcal{G}\,, i \in \mathbb{N}\right\}\,. \tag{1.29}$$

Platí následující věta.

Věta 1.61 ([**10**])**.** *Zobrazení definované v rovnici* (1.29) *splňuje axiomy* (VM1)-(VM3) *vnější míry Definice 1.58 .*

Nyní máme z výchozí množinové funkce vytvořenu vnější míru

$$\mu^*(A) \overset{\text{def}}{=} \inf\left\{\sum_{i\in\mathbb{N}} \mu^0(G_i)\colon A \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} G_i\,, G_i \in \mathcal{G}\,, i \in \mathbb{N}\right\}$$

definovanou na celém 2^X, která je obecně pouze σ-subaditivní. Její restrikcí na $\mathfrak{M}(\mu^*)$ dostáváme úplnou míru μ na $\mathfrak{M}(\mu^*)$. Bohužel abstraktní konstrukce nezaručuje ani

$$\forall G \in \mathcal{G}\colon \mu^0(G) = \mu(G) \tag{1.30}$$

dokonce ani inkluzi

$$\mathcal{G} \subset \mathfrak{M}(\mu)\,. \tag{1.31}$$

Toto je třeba dokázat pro daný konkrétní případ a je to obvykle nejpracnější část celé konstrukce. Jakmile je (1.30) a (1.31) dokázáno, považuje se konstrukce za úspěšnou.

1.2.3. Lebesgueova míra. Nejčastěji používaná míra v teorii diferenciálních rovnic je Lebesgueova míra, protože se jedná o zobecnění objemu. Výchozí množinovou funkcí je objem N-rozměrného intervalu (kvádru).

Definice 1.62. Množina $Q \subset \mathbb{R}^N$ se nazývá *omezený N-rozměrný interval*, pokud existuje N omezených intervalů $I_1, I_2, \dots I_N$, takových, že $Q = I_1 \times I_2 \times \dots I_N$. Množinu všech *omezených N-rozměrných intervalů* budeme značit $\mathcal{I}_N$. Nechť $a_i = \inf I_i$ a $b_i = \sup I_i$. Potom definujeme *objem N-rozměrného omezeného intervalu* $Q \in \mathcal{I}_N$:

$$\ell^N(Q) \overset{\text{def}}{=} (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot \ \dots \ \cdot (b_N - a_N)\,. \tag{1.32}$$

Objem ℓ^N N-rozměrného omezeného intervalu Q vezmeme jako výchozí množinovou funkci definovanou na $\mathcal{I}_N$. Snadno se ověří podmínka $\ell^N(\emptyset) = 0$, protože např. $\emptyset = (0,0) \times (0,0) \times \dots \times (0,0)$ (kartézský součin N prázdných intervalů). K ℓ^N vytvoříme funkci $\lambda^{N,*}\colon 2^{\mathbb{R}^N} \to [0,+\infty]$ předpisem

$$\lambda^{N,*}(A) \overset{\text{def}}{=} \inf \left\{ \sum_{i\in\mathbb{N}} \ell^N(Q_i) \colon A \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} Q_i\,, Q_i \in \mathcal{I}_N\,, i \in \mathbb{N} \right\}. \tag{1.33}$$

O funkci $\lambda^{N,*}$ víme podle Věty 1.61, že je to vnější míra. Této funkci se říká Lebesgueova vnější míra. Nyní se provede restrikce $\lambda^{N,*}$ na $\mathfrak{M}(\lambda^{N,*})$ a podle Věty 1.60 dostaneme úplnou míru λ^N na $\mathfrak{M}(\lambda^{N,*})$. Této míře se říká *$N$-rozměrná Lebesgueova míra.* Nyní nastává nejpracnější část celé konstrukce a sice musí se dokázat, že $\mathcal{I}_N \subset \mathfrak{M}(\lambda^{N,*})$ a $\forall Q \in \mathcal{I}_N : \lambda^N(Q) = \ell^N(Q)$. Nebudeme zde dokazovat, jen poznamenáme, že se k tomu používá následující lemma.

Lemma 1.63 (Subaditivita objemu)**.** *Nechť $Q \in \mathcal{I}_N$ je N-rozměrný interval a $\{G\}_k$ je (konečná nebo spočetná) posloupnost N-rozměrných intervalů, $Q \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} G_k$. Potom*

$$\ell^N(Q) \le \sum_{k\in\mathbb{N}} \ell^N(G_k)\ .$$

Důkaz. viz Malý [**10**].

Základní vlastnosti Lebesgueovy míry, které se zásadně projevují v teorii parciálních diferenciálních rovnic, jsou uvedeny v následující větě.

Věta 1.64. *Lebesgueova míra λ^N je úplná a σ-konečná míra na $\mathbb{R}^N$. Nechť $e \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\sum_{i=1}^N e_i^2 = 1$, a T_e je operátor otočení okolo počátku $o \in \mathbb{R}^N$, který převede vektor $(1,0,0,\dots,0)$ na e. Potom platí následující implikace:*

1. $\forall A \in 2^{\mathbb{R}^N}\, \forall x \in \mathbb{R}^N\colon A \in \mathfrak{M}(\lambda^{N,*}) \Rightarrow A + x \in \mathfrak{M}(\lambda^{N,*})$ *a* $\lambda^N(A) = \lambda^N(A+x)$ *(translační invariance Lebesgueovy míry).*
2. $\forall A \in 2^{\mathbb{R}^N}\, \forall e \in \mathbb{R}^N\colon \sum_{i=1}^N e_i^2 = 1 \wedge A \in \mathfrak{M}(\lambda^{N,*}) \Rightarrow T_e(A) \in \mathfrak{M}(\lambda^{N,*})$ *a* $\lambda^N(A) = \lambda^N(T_e(A))$ *(rotační invariance Lebesgueovy míry).*

Na závěr jedna nepříjemná věta.

Věta 1.65 (Existence lebesgueovsky neměřitelné množiny)**.** *Existuje $E \subset \mathbb{R}^N$ taková, že $E \notin \mathfrak{M}(\lambda^{N,*})$.*

Poznámka 1.66. Existence lebesgueovsky neměřitelné množiny se dokazuje pomocí axiomu výběru. Přestože důkaz je čistě existenční a prakticky vyskytující se množiny měřitelné jsou, je třeba měřitelnost množiny, jejíž míru počítáme, dokázat. V teorii nelineárních parciálních diferenciálních rovnic se často potřebuje odhadnout Lebesgueova míra vzoru číselné množiny v zobrazení, které je (neznámým) řešením parciální diferenciální rovnice. Zde je třeba maximální opatrnosti (jakákoliv intuice může být zavádějící) a měřitelnost tohoto vzoru je třeba rigorózně dokázat z apriorních znalostí o řešení daného typu rovnice.

1.2.4. Měřitelný prostor a topologie.

Věta 1.67 ([**13**], Věta 1.10)**.** Je-li $\mathcal{F} \subset 2^X$ libovolný systém podmnožin X, potom existuje na X nejmenší σ-algebra $\mathfrak{M}_{\mathcal{F}}$ obsahující $\mathcal{F}$.

Na základě této věty má smysl následující definice.

Definice 1.68. Nechť $(X, \mathcal{T})$ je topologický prostor, kde $\mathcal{T}$ je systém všech otevřených podmnožin na X. Potom definujeme $\mathfrak{B}(X, \mathcal{T})$ jako nejmenší σ-algebru obsahující $\mathcal{T}$. σ-algebře $\mathfrak{B}(X, \mathcal{T})$ říkáme *σ-algebra borelovských množin.*

Poznámka 1.69. Z Definice 1.53 se snadno ukáže, že $\mathfrak{B}(X, \mathcal{T})$ obsahuje také všechny uzavřené množiny.

Poznámka 1.70. Borelovské množiny provazují strukturu prostoru s mírou $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ s topologií prostoru $(X, \mathcal{T})$, která mimo jiné určuje spojitost funkcí na něm. Proto míry definované na systému borelovských množin, tj. pokud $\mathfrak{B}(X, \mathcal{T}) \subset \mathfrak{S}$, hrají jistou ústřední úlohu, jak uvidíte později.

Na $\mathbb{R}^N$ (obecněji na lokálně kompaktních Hausdorffových topologických prostorech) lze topologii provázat s měřitelností ještě více. Zde se omezíme na definici pro $\mathbb{R}^N$ s topologií danou eukleidovskou (nebo ekvivalentní) normou, kterou budeme při studiu parciálních diferenciálních rovnic nejvíce potřebovat.

Definice 1.71 (Úplná Radonova míra, Malý [**10**])**.** Nechť $N \in \mathbb{N}$, $(\mathbb{R}^N, \mathfrak{S}, \mu)$ je prostor s mírou a μ je úplná míra na $\mathfrak{S}$. Řekneme, že μ je *úplná Radonova míra*, pokud platí:

(RM1) Je-li $K \subset \mathbb{R}^N$ kompaktní, pak $K \in \mathfrak{S}$ a $\mu(K) < +\infty$ (*konečnost na kompaktních množinách*).

(RM2) Je-li $E \subset \mathfrak{S}$, pak $\mu(E) = \sup\{\mu(K) \colon K \subset E, K \text{ je kompaktní}\}$ (*vnitřní regularita*).

Platí totiž následující věta, důkaz viz [**10**]:

Věta 1.72 (Vlastnosti úplných Radonových měr, Malý [**10**])**.** *Nechť $\mathfrak{S}$ je σ-algebra na $\mathbb{R}^N$ a μ je úplná Radonova míra definovaná na $\mathfrak{S}$. Potom*

(1) *$\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^N} \subset \mathfrak{S}$ (symbol $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^N}$ bude značit borelovskou σ-algebru na $\mathbb{R}^N$ s topologií danou eukleidovskou normou),*

(2) *μ je σ-konečná.*

Věta 1.73. *Lebesgueova míra v $\mathbb{R}^N$ je úplná Radonova míra.*

1.2.5. Další míry používané v teorii parciálních diferenciálních rovnic. Následující míry jsou důležité v teorii distribucí a Sobolevových prostorů.

Definice 1.74. Úplná Radonova míra definovaná na nějaké σ-algebře $\mathfrak{S}$ prostoru $\mathbb{R}$ se nazývá *Lebesgueova-Stieltjesova míra.*

Budeme využívat následující dvě věty převzaté z textu [**10**], kde je uveden důkaz:

Věta 1.75. *Nechť $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je neklesající zprava spojitá funkce. Potom existuje právě jedna Lebesgueova-Stieltjesova míra μ na $\mathbb{R}$ taková, že platí*

$$-\infty < a < b < +\infty \Longrightarrow F(b) - F(a) = \mu\left((a, b]\right) .$$

Věta 1.76. *Nechť μ je Lebesgueova-Stieltjesova míra na $\mathbb{R}$. Potom existuje zprava spojitá neklesající funkce $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taková, že platí*

$$-\infty < a < b < +\infty \Longrightarrow \mu\left((a, b]\right) = F(b) - F(a) .$$

Funkce F je mírou μ určena jednoznačně až na aditivní konstantu.

Pro měření např. délek a povrchů M-rozměrných útvarů v N-rozměrném prostoru se používá Hausdorffova míra. Tuto míru nyní definujeme pomocí základní konstrukce z vnější míry.

Definice 1.77 (Průměr množiny)**.** Řekneme, že množina $E \subset 2^{\mathbb{R}^N}$ má *průměr* $d \geq 0$ (značíme $\operatorname{diam}(E)$), pokud platí

$$d = \operatorname{diam}(E) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{|x - y|_{\mathbb{R}^N} : x, y \in E\} , \tag{1.34}$$

kde $|\cdot|_{\mathbb{R}^N}$ značí eukleidovskou normu na $\mathbb{R}^N$.

Definice 1.78 (Hausdorffova vnější míra)**.** Nechť $E \subset \mathbb{R}^N$. Řekneme, že spočetný systém $\{A_i\}_{i=\mathbb{N}} \subset 2^{\mathbb{R}^N}$ je *δ-pokrytí E*, pokud platí

$$0 < \operatorname{diam}(A_i) < \delta$$

a

$$E \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i .$$

Nechť $s \in [0, +\infty)$. Pro libovolné $\delta > 0$ definujme nejprve pomocnou množinovou funkci $\mathcal{H}^s_\delta\colon 2^{\mathbb{R}^N} \to [0, +\infty]$ předpisem

$$\mathcal{H}^s_\delta \stackrel{\text{def}}{=} \inf\left\{2^{-s}\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(1 + s/2)}\sum_{i\in\mathbb{N}}(\operatorname{diam} A_i)^s : \{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \text{ je } \delta\text{-pokrytí } E\right\} . \tag{1.35}$$

Množinová funkce $\mathcal{H}^{s,*}\colon 2^{\mathbb{R}^N} \to [0, +\infty]$ definovaná předpisem

$$\mathcal{H}^{s,*}(E) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\delta>0} \mathcal{H}^s_\delta(E) \tag{1.36}$$

se nazývá *s-rozměrná Hausdorffova vnější míra.*

Poznámka 1.79. V předchozí definici je použita Eulerova funkce $\Gamma\colon \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}_0^- \to \mathbb{R}$:

$$\Gamma(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{+\infty} x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\,.$$

Pro $s\in\mathbb{N}$ představuje výraz $\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(1+s/2)}$ objem jednotkové koule v $\mathbb{R}^s$.

Lemma 1.80 (Attouch-Buttazzo-Michaille [**3**], Propozice 4.1.1, str. 110)**.** *Množinová funkce $\mathcal{H}^{s,*}\colon 2^{\mathbb{R}^N}\to[0,+\infty]$ z Definice 1.78 splňuje axiomy vnější míry, viz Definice 1.58.*

Důkaz. viz [**3**] str. 110–111. ∎

Standarním postupem vytvoříme z vnější míry $\mathcal{H}^{s,*}$ úplnou míru $\mathcal{H}^s$ definovanou na σ-algebře $\mathfrak{M}(\mathcal{H}^{s,*})$. Zkráceně budeme používat

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{H}^s} = \mathfrak{M}(\mathcal{H}^{s,*})\,.$$

Definice 1.81. Míře vytvořené z vnější míry $\mathcal{H}^{s,*}$ standarní konstrukcí říkáme *s-rozměrná Hausdorfova míra.*

V následující větě shrneme poznatky o $\mathcal{H}^s$ a $\mathfrak{M}_{\mathcal{H}^s}$.

Věta 1.82 ([**3**], shrnutí vět a komentářů, str. 109–116)**.**

(1) *Borelovské množiny na $\mathbb{R}^N$ jsou $\mathcal{H}^s$ měřitelné, tj. $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^N}\subset\mathfrak{M}_{\mathcal{H}^s}$.*

(2) *V prostoru $\mathbb{R}^N$ platí: $\mathfrak{M}_{\mathbb{R}^N}\subset\mathfrak{M}_{\mathcal{H}^N}$ a*

$$\forall E\in\mathfrak{M}_{\mathbb{R}^N}\colon \lambda^N(E)=\mathcal{H}^N(E)\,.$$

(3) $\forall N\in\mathbb{N}\,\forall E\subset\mathbb{R}^N\,\forall s>N\colon \mathcal{H}^s(E)=0$.

(4) $\forall N\in\mathbb{N}\,\forall E\subset\mathbb{R}^N\,\forall\kappa>0\colon \mathcal{H}^s(\kappa E)=\kappa^s\mathcal{H}^s(E)$.

(5) *Míra $\mathcal{H}^0$ je počítací míra (přiřadí podmnožině $\mathbb{R}^N$ počet jejích prvků $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$).*

(6) *Pro $0\le s<N$ není $\mathcal{H}^s$ na $\mathbb{R}^N$ σ-konečná.*

Pro dostatečně regulární M-rozměrnou nadplochu v $\mathbb{R}^N$ je M-rozměrná Hausdorffova míra rovna klasickému povrchu této plochy vypočtenému pomocí parametrizace.

Věta 1.83 ([**3**], Propozice 4.1.6, str. 117)**.** *Nechť $M,N\in\mathbb{N}$, $M\le N$, $f\colon\mathbb{R}^M\to\mathbb{R}^N$ je prosté zobrazení splňující Lipschitzovu podmínku. Nechť $E\in\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^N}$. Potom*

$$\mathcal{H}^M(f(E)) = \int_E \left(\sum_{i=1}^{\binom{N}{M}} |J_i|^2\right)^{(1/2)} \mathrm{d}\lambda^N\,,$$

kde J_i, $i=1,2,\dots,\binom{N}{M}$ jsou minory $M\times M$ Jacobiho matice zobrazení f a $\binom{N}{M}\stackrel{\text{def}}{=}\frac{N!}{M!(N-M)!}$ je kombinační číslo.

1.2.6. Abstraktní Lebesgův integrál.

Definice 1.84. Nechť $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ je prostor s mírou. Řekneme, že *funkce* $f\colon X \to \mathbb{R}^*$ je *μ-měřitelná* nebo *$\mathfrak{S}$-měřitelná*, pokud vzorem každé borelovské množiny $E \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^*}$ je μ-měřitelná množina, tj. $E \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^*} \Rightarrow f^{-1}(E) \in \mathfrak{S}$.

Poznámka 1.85. K definici pojmu měřitelnosti funkce nepotřebujeme míti dánu míru. Stačí nám k tomu σ-algebra $\mathfrak{S}$ na X. Protože ovšem v praktických situacích tato σ-algebra vzniká až při konstrukci nějaké konkrétní míry, definujeme jak $\mathfrak{S}$-měřitelnost tak μ-měřitelnost, i když je to totéž.

Věta 1.86 (Kritérium měřitelnosti)**.** *Nechť $\mathfrak{S}$ je σ-algebra na X, $D \in \mathfrak{S}$, $f\colon S \to \mathbb{R}^*$ a*

$$\forall q \in \mathbb{Q}: \quad \{x \in X\colon f(x) > q\} \in \mathfrak{S}\,.$$

Potom je funkce f $\mathfrak{S}$-měřitelná.

Věta 1.87. *Nechť $(X, \mathcal{T})$ je topologický prostor, $f\colon X \to \mathbb{R}^*$ je spojitá funkce vzhledem k topologii $\mathcal{T}$, potom vzorem borelovské množiny $E \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^*}$ je borelovská množina $f^{-1}(E) \in \mathfrak{B}(X, \mathcal{T})$.*

Důsledek předchozí věty později sehraje důležitou roli při charakterizaci spojitých funkcionálů na prostoru spojitých funkcí:

Důsledek 1.88. *Nechť $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ je prostor s borelovskou mírou, $\mathfrak{B}(X, \mathcal{T}) \subset \mathfrak{S}$ a $f\colon X \to \mathbb{R}^*$ je spojitá, pak je μ měřitelná.*

Tato věta je velice důležitá v teorii nelineárních parciálních diferenciálních rovnic:

Věta 1.89 (Měřitelnost složené funkce, [**10**])**.** *Nechť $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ je prostor s mírou, f je μ-měřitelná a $g\colon G \subset \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ je spojitá funkce na otevřené nebo uzavřené množině G. Potom je množina $D' = \{x \in X\colon f(x) \in G\}$ měřitelná a složená funkce $g \circ f$ je měřitelná na D'.*

Poznámka 1.90. Pozor, budeme-li skládat funkce v opačném pořadí, tj. vnější bude měřitelná a vnitřní spojitá, nemusíme obecně dostat měřitelnou funkci. Naštěstí přirozené pořadí skládání funkcí u nelineárních parciálních diferenciálních rovnic je stejné jako ve Větě 1.89, takže v praktických situacích jsme zachráněni. Vyjímečně se též v praxi vyšetřují úlohy (např. suché tření), kde g je po částech spojitá s konečně mnoha skoky. Tímto případem se zde zabývat nebudeme.

Definice 1.91. Nechť $\mathfrak{S}$ je σ-algebra na množině X a $E \in \mathfrak{S}$. Konečný systém

$$\{A_1, A_2, \ldots, A_m\} \subset \mathfrak{S}$$

po dvou disjunktních množin, tj. $A_i \cap A_j = \emptyset$ pro $i \neq j$, nazýváne *dělením množiny E*, pokud platí

$$E = \bigcup_{i=1}^{m} A_i\,.$$

Definice 1.92 (Kladná a záporná část funkce)**.** Nechť $f : D \to \mathbb{R}^*$, kde D je nějaká množina. Definujeme funkce

$$f^+ : D \to \mathbb{R}^*, x \mapsto \max\{0, f(x)\}\,, \tag{1.37}$$

$$f^- : D \to \mathbb{R}^*, x \mapsto \max\{0, -f(x)\}\,. \tag{1.38}$$

(1.39)

Funkci f^+ se říká *kladná část funkce f* a funkci f^- se říká *záporná část funkce f*.

Poznámka 1.93. Pro všechna $x \in D$ platí $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$.

Definice 1.94 (Definice Lebesgueova integrálu, [**10**])**.** Nechť $f\colon D \in \mathfrak{S} \to \mathbb{R}^*$ je nezáporná μ-měřitelná funkce, pak definujeme

$$\int_D f \mathrm{d}\mu \stackrel{\text{def}}{=} \sup \left\{ \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mu(A_j)\colon \quad \{A_1, A_2, \dots A_m\} \text{ je dělení } D \wedge \right. \tag{1.40}$$
$$\left. \wedge\, \forall x \in A_j\colon 0 \le \alpha_j \le f(x)\,, j = 1, 2, \dots m \right\}$$

Nechť $f\colon D \in \mathfrak{S} \to \mathbb{R}^*$ je μ-měřitelná funkce a

$$\int_D f^+ \mathrm{d}\mu < +\infty \vee \int_D f^- \mathrm{d}\mu < +\infty$$

definujeme

$$\int_D f \mathrm{d}\mu \stackrel{\text{def}}{=} \int_D f^+ \mathrm{d}\mu - \int_D f^- \mathrm{d}\mu\,.$$

Nechť $f\colon D' \in \mathfrak{S} \to \mathbb{R}^*$ je μ-měřitelná funkce, $D' \subset D$ a $\mu(D \setminus D') = 0$, potom definujeme

$$\int_D f \mathrm{d}\mu \stackrel{\text{def}}{=} \int_{D'} f \mathrm{d}\mu\,.$$

Věta 1.95 (Různé vlastnosti Lebesgueova integrálu, [**10**], Věty 8.6, 8.11 a 8.12)**.** *Nechť $D \subset \mathfrak{S}$ a f, g jsou $\mathfrak{S}$-měřitelné funkce na D.*

(LI1) *Je-li $f \ge 0$, $D_1, D_2 \in \mathfrak{S}$ a $D_1 \subset D_2 \subset D$, pak*

$$\int_{D_1} f \mathrm{d}\mu \le \int_{D_2} f \mathrm{d}\mu\,;$$

(monotonie vzhledem k integračnímu oboru).

(LI2) *Jestliže $D_1, D_2 \in \mathfrak{S}$, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ a $D_1 \cup D_2 = D$, pak*

$$\int_D f \mathrm{d}\mu = \int_{D_1} f \mathrm{d}\mu + \int_{D_2} f \mathrm{d}\mu$$

(aditivita vzhledem k integračnímu oboru).

(LI3) *Je-li*

$$\int_D |f| \mathrm{d}\mu < +\infty \,,$$

pak $|f(x)| < +\infty$ *pro* μ*-skoro všechna* $x \in D$*.*

(LI4) *Je-li*

$$\int_D |f| \mathrm{d}\mu = 0 \,,$$

pak $f(x) = 0$ *pro* μ*-skoro všechna* $x \in D$*.*

(LI5) *Jestliže pro* μ*-skoro všechna* $x \in D$ *platí* $f(x) \le g(x)$ *pak nerovnost*

$$\int_D f \mathrm{d}\mu \le \int_D g \mathrm{d}\mu$$

platí, kdykoliv oba integrály existují (monotonie vzhledem k integrandu)*.*

(LI6) *Existuje-li konečný integrál*

$$\int_D g \mathrm{d}\mu < +\infty$$

a $|f(x)| \le g(x)$ *pro* μ*-skoro všechna* $x \in D$*, pak existuje i konečný integrál*

$$\int_D f \mathrm{d}\mu < +\infty \,.$$

(LI7)

$$\int_D (f+g) \mathrm{d}\mu = \int_D g \mathrm{d}\mu + \int_D f \mathrm{d}\mu$$

(aditivita vzhledem k integrandu)*.*

(LI8) *Nechť* $\kappa \in \mathbb{R}$*, potom*

$$\int_D (\kappa f) \mathrm{d}\mu = \kappa \int_D f \mathrm{d}\mu$$

(homogenita vzhledem k integrandu)*.*

1.2.7. Konvergenční věty. V prostoru $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ lze definovat různé způsoby konvergence, uvedeme zde jen následující dva, které budeme v tomto textu potřebovat.

Definice 1.96. Nechť $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ je prostor s mírou, $u_n, u \colon X \to \mathbb{R}^*$ jsou měřitelné funkce.

(1) Řekneme, že posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje k* u *bodově* μ*-skoro všude* jestliže existuje $E \subset \mathfrak{S}$ taková, že $\mu(E) = 0$ a pro všechna $x \in X \setminus E$ platí

$$\lim_{n \to +\infty} u_n(x) = u(x) \,.$$

(2) Řekneme, že posloupnost $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje k* u *v míře* μ jestliže pro všechna $\varepsilon > 0$ platí:

$$\lim_{n \to \infty} \mu \left(\{ x \in X \colon |u_n(x) - u(x)| > \varepsilon \} \right) = 0 \,.$$

Věta 1.97 (Leviho věta, [**10**]). *Nechť* $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ *je prostor s mírou. Buď* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *posloupnost nezáporných* μ*-měřitelných funkcí definovaných na* $D \subset \mathfrak{S}$ *splňující podmínku* $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots$ *pro* μ*-skoro všechna* $x \in D$*. Potom pro* μ*-skoro všechna* $x \in D$ *existuje limita*

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x)\,,$$

funkce f *je* μ*-měřitelná, její integrál existuje a*

$$\int_D f \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_D f_n \mathrm{d}\mu\,.$$

Poznámka 1.98. Leviho věta v této podobě je vyjímečná v tom, že umožňuje narozdíl od jiných konvergenčních vět dokázat, že integrál limitní funkce je roven $+\infty$. Ve většině literatury je bohužel psána pro omezené funkce. Tím se ztrácí její původní význam.

Věta 1.99 (Fatouovo Lemma). *Nechť* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost nezáporných* μ*-měřitelných funkcí definovaných na* $D \subset \mathfrak{S}$*. Potom funkce* $\liminf_{n \to +\infty} f_n$ *je měřitelná, má Lebesgův integrál a platí*

$$\int_D \liminf_{n \to +\infty} f_n \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n \to +\infty} \int_D f_n \mathrm{d}\mu\,.$$

Věta 1.100 (Lebesgueova věta o dominantní konvergenci). *Nechť* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost* μ*-měřitelných funkcí definovaných na* $D \subset \mathfrak{S}$ *a pro* μ*-skoro všechna* $x \in D$ *platí*

$$f_n(x) \to f(x)\,,$$

tj. u_n *konverguje k* u *bodově* μ*-skoro všude. Předpokládejme dále, že existuje* μ*-měřitelná nezáporná funkce* g *definovaná na* D *s konečným Lebesgueovým integrálem na množině* D *taková, že pro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *a* μ*-skoro všechna* $x \in D$ *platí*

$$|f_n(x)| \leq g(x)\,.$$

Potom funkce f_n*,* $n \in \mathbb{N}$*, a* f *mají konečný Lebesguův integrál a platí:*

$$\int_D f \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_D f_n \mathrm{d}\mu\,.$$

Z výše uvedené věty lze dokázat věty o spojitosti integrálu podle parametru a derivování podle parametru. Tyto věty se pak hojně používají v teorii parciálních diferenciálních rovnic a ve variačním počtu.

Věta 1.101 (Spojitost integrálu podle parametru, Fučík-John-Kufner [**5**]). *Buď* $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ *prostor s mírou a* M *je metrický prostor. Nechť* $D \subset \mathfrak{S}$*,* $A \subset M$ *a* $f\colon D \times A \to \mathbb{R}$*. Předpokládejme, že platí*

(i) *Pro* μ*-skoro všechna* $x \in D$ *je* $f(x, \cdot\,)$ *spojitá na* A*.*
(ii) *Pro každé* $\alpha \in A$ *je* $f(\,\cdot\,, \alpha)$ *měřitelná funkce na* D*.*
(iii) *Existuje nezáporná funkce* μ*-měřitelná funkce definovaná na* D *s konečným Lebesgueovým integrálem taková, že pro všechna* $\alpha \in A$ *a skoro všechna* $x \in D$ *platí*

$$|f(x, \alpha)| \leq g(x)\,.$$

Potom

$$F(\alpha) \overset{\text{def}}{=} \int_D f(\,\cdot\,,\alpha)\mathrm{d}\mu$$

je spojitou funkcí proměnné α na množině A.

Věta 1.102 (Derivace integrálu podle parametru, Fučík-John-Kufner [**5**])**.** *Buď $(X,\mathfrak{S},\mu)$ prostor s mírou a $I=(a,b)$ interval. Nechť $D\subset\mathfrak{S}$ a $f\colon D\times I\to\mathbb{R}$. Nechť platí*

(i) *Integrál*

$$F(\alpha) \overset{\text{def}}{=} \int_D f(\,\cdot\,,\alpha)\mathrm{d}\mu$$

je konečný alespoň pro jednu hodnotu $\alpha\in(a,b)$.

(ii) *Pro každé $\alpha\in(a,b)$ je funkce $f(\,\cdot\,,\alpha)$ měřitelná na D.*

(iii) *Pro všechna $\alpha\in(a,b)$ a skoro všechna $x\in D$ existuje konečná derivace*

$$\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)\,.$$

(iv) *Existuje nezáporná funkce μ-měřitelná funkce definovaná na D s konečným Lebesgueovým integrálem taková, že pro všechna $\alpha\in A$ a skoro všechna $x\in D$ platí*

$$\frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)\le g(x)\,.$$

Potom pro každé $\alpha\in(a,b)$ platí, že integrál

$$F(\alpha)=\int_D f(\,\cdot\,,\alpha)\mathrm{d}\mu$$

je konečný a

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\alpha}(\alpha)=\int_D\frac{\partial f}{\partial\alpha}(\,\cdot\,,\alpha)\mathrm{d}\mu\,.$$

Než uvedeme jednu z nejobecnějších konvergenčních vět vyslovíme následující definici.

Definice 1.103. Nechť $(X,\mathfrak{S},\mu)$ je prostor s mírou, $1\le p<+\infty$. Řekneme, že systém $\mathcal{F}$ měřitelných funkcí $u\colon X\to[-\infty,+\infty]$ je *p-ekviintegrovatelný*, jestliže pro všechna $\varepsilon>0$ existuje $\delta>0$ tak, že

$$\int_E |u|^p\mathrm{d}\mu\le\varepsilon$$

pro všechna $u\in\mathcal{F}$ a pro všechny měřitelné množiny $E\subset X\colon \mu(E)\le\delta$.

Věta 1.104 (Vitalliova konvergenční věta, Leoni [**9**], Věta B.101, str. 535)**.** *Nechť $(X,\mathfrak{S},\mu)$ je prostor s mírou, $1\le p<+\infty$, $\{u_n\}_{n=1}^\infty\subset L^p(X,\mathfrak{S},\mu)$. Potom u_n konverguje k $u\in L^p(X,\mathfrak{S},\mu)$ právě tehdy, když*

(i) *$\{u_n\}_{n=1}^\infty$ konverguje k u v míře μ;*

(ii) *$\{u_n\}_{n=1}^\infty$ je p-ekviintegrovtelná;*

(iii) *pro každé $\varepsilon>0$ existuje $E\in\mathfrak{S}$ taková, že $\mu(E)<+\infty$ a pro všechna $n\in\mathbb{N}$ platí*

$$\int_{X\setminus E}|u_n|^p\mathrm{d}\mu\le\varepsilon\,.$$

Poznámka 1.105. Podmínka (iii) je splněna automaticky, pokud $\mu(X) < +\infty$.

Toto je vhodné kritérium pro ověření ekviintegrability.

Věta 1.106 ([**9**], Věta B.102, str. 535)**.** *Nechť* $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ *je prostor s mírou. Nechť* $\mathcal{F}$ *je systém měřitelných funkcí* $u\colon X \to [-\infty, +\infty]$. *Uvažujme následující podmínky:*

(i) *Systém* $\mathcal{F}$ *je* 1*-ekviintegrovatelný.*

(ii)

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{u\in\mathcal{F}} \int_{\{x\in X\colon |u|>t\}} |u| \mathrm{d}\mu = 0$$

(iii) *Existuje rostoucí funkce* $\gamma\colon [0, +\infty] \to [0, +\infty]$ *s limitou*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\gamma(t)}{t} = +\infty$$

taková, že

$$\sup_{u\in\mathcal{F}} \int_X \gamma(|u|) \mathrm{d}\mu < +\infty\,.$$

Potom (ii) *a* (iii) *jsou ekvivalentní a každá z nich implikuje* (i)*. Pokud navíc předpokládáme*

$$\sup_{u\in\mathcal{F}} \int_X |u| \mathrm{d}\mu < +\infty\,,$$

potom (i) *implikuje* (ii) *a všechny tři podmínky jsou ekvivalentní.*

1.2.8. Součin měr a Fubiniova věta. Nechť $(X_1, \mathfrak{S}_1, \mu_1)$ a $(X_2, \mathfrak{S}_2, \mu_2)$ jsou dva prostory s mírou, kde míry μ_1 a μ_2 jsou σ-konečné. Na prostoru $X_1 \times X_2$ uvažujme systém množin $\mathcal{G} = \{G \in 2^{X_1\times X_2}\colon G = G_1 \times G_2,\ \text{kde } G_i \in \mathfrak{S}_i, i = 1, 2\}$ (systém měřitelných obdélníků), a množinovou funkci $\mu^0\colon \mathcal{G} \to [0, +\infty]$ definovanou pro $G = G_1 \times G_2$ takto

$$\mu^0(G) = \mu_1(G_1) \cdot \mu(G_2)\,.$$

Snadno se ověří, že $\mu^0(\emptyset) = 0$. Standardní konstrukcí dostaneme z této výchozí množinové funkce přes vnější míru μ^* úplnou míru μ na prostoru $X_1 \times X_2$. V textu [**10**] je ukázáno, že $\mathcal{G} \subset \mathfrak{M}(\mu^*)$ a že platí $\mu(G) = \mu^0(G) = \mu_1(G_1) \cdot \mu(G_2)$ pro $G \in \mathcal{G}$, $G = G_1 \times G_2$. Míra μ se nazývá součinová míra měr μ_1 a μ_2 a píše se $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$.

Věta 1.107 (Fubiniova věta)**.** *Nechť* $(X_1, \mathfrak{S}_1, \mu_1)$ *a* $(X_2, \mathfrak{S}_2, \mu_2)$ *jsou prostory se* σ*-konečnými mírami* μ_1, μ_2 *a* μ *je součinová míra* $\mu_1 \otimes \mu_2$ *na* $X_1 \times X_2$. *Nechť* $f\colon X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$ *je* μ*-měřitelná a* $\int_{X_1\times X_2} |f| \mathrm{d}\mu < +\infty$. *Potom pro* μ_2*-skoro všechny hodnoty* $x_2 \in X_2$ *platí*

$$\textit{funkce } f(\,\cdot\,, x_2) \textit{ je } \mu_1\textit{-měřitelná a } \int_{X_1} |f(\,\cdot\,, x_2)| \mathrm{d}\mu < +\infty\,.$$

Navíc funkce $g\colon X_1 \to \mathbb{R}$ *definovaná integrálem*

$$g(x_2) \overset{\text{def}}{=} \int_{X_1} f(\,\cdot\,, x_2) \mathrm{d}\mu_1 \textit{ je } \mu_2\textit{-měřitelná a } \int_{X_2} |g(x_2)| \mathrm{d}\mu_2 < +\infty\,.$$

Platí rovnost

$$\int_{X_1 \times X_2} f \mathrm{d}\mu = \int_{X_2} g \mathrm{d}\mu_2 = \int_{X_2} \left(\int_{X_1} f(\,\cdot\,, x_2) \mathrm{d}\mu_1 \right) \mathrm{d}\mu_2 \,.$$

Poznámka 1.108. Prostory X_1 a X_2 jsou rovnocenné a tak platí i rovnost

$$\int_{X_1 \times X_2} f \mathrm{d}\mu = \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, \,\cdot\,,) \mathrm{d}\mu_2 \right) \mathrm{d}\mu_1 \,.$$

Věta 1.109 (Tonelliho věta)**.** *Nechť* $(X_1, \mathfrak{S}_1, \mu_1)$ *a* $(X_2, \mathfrak{S}_2, \mu_2)$ *jsou prostory se* σ*-konečnými mírami* μ_1*,* μ_2 *a* μ *je součinová míra* $\mu_1 \otimes \mu_2$ *na* $X_1 \times X_2$*. Nechť* $f \colon X_1 \times X_2 \to [0, +\infty]$ *je* μ*-měřitelná. Potom platí rovnost*

$$\int_{X_1 \times X_2} f \mathrm{d}\mu = \int_{X_2} \left(\int_{X_1} f(\,\cdot\,, x_2) \mathrm{d}\mu_1 \right) \mathrm{d}\mu_2 = \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, \,\cdot\,) \mathrm{d}\mu_2 \right) \mathrm{d}\mu_1 \,,$$

kde integrály mohou nabývat hodnot z oboru $[0, +\infty]$*.*

1.2.9. Integrál a derivace. Nyní uvedeme přehled vět, které dávají do souvislosti Lebesgueovu míru, derivaci a diferenciál funkce. Jednorozměrná Lebesgueova míra je vytvořena z délky intervalu, proto se dá intuitivně očekávat, že následující věty pro Lebesgueovu míru platí. Samozřejmě jejich důkazy jsou značně komplikované.

Definice 1.110. Nechť f je λ^N měřitelná funkce definovaná na $\mathbb{R}^N$ a pro každou kompaktní podmnožinu $D \subset \mathbb{R}^N$ platí $\int_D |f| \mathrm{d}\lambda^N < +\infty$. Potom řekneme, že bod $x \in \mathbb{R}^N$ je *Lebesgueovým bodem* funkce f, pokud platí:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{|B(x, \varepsilon)|} \int_{B(x,\varepsilon)} |f - f(x)| \, \mathrm{d}\lambda^N = 0 \,.$$

Poznámka 1.111. Nechť f je λ^N měřitelná funkce definovaná na $\mathbb{R}^N$ a pro každou kompaktní podmnožinu $D \subset \mathbb{R}^N$ platí $\int_D |f| \mathrm{d}\lambda^N < +\infty$. Každý bod, v němž je funkce f spojitá je jejím Lebesgueovým bodem.

Věta 1.112. *Nechť* f *je* λ^N *měřitelná funkce definovaná na* $\mathbb{R}^N$ *a pro každou kompaktní podmnožinu* $D \subset \mathbb{R}^N$ *platí* $\int_D |f| \mathrm{d}\lambda^N < +\infty$*. Potom skoro každý bod* $x \in \mathbb{R}^N$ *je Lebesgův bod funkce* f*.*

Lemma 1.113. *Nechť* $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *je monotónní. Potom derivace* $f'(x)$ *existuje pro* λ*-skoro všechna* $x \in [a, b]$*.*

Poznámka 1.114. I když derivace monotónní funkce existuje skoro všude, nemusí platit $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) \, \mathrm{d}x$. Uvažujme například funkci $s \colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $s(x) = -1$ pro $[-1, 0)$ a $s(x) = 1$ pro $x \in [0, 1]$. Potom $s'(x) = 0$ pro všechna $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ a zároveň $s(1) - s(-1) = 2 \neq 0 \int_{[-1,1]} s'(x) \, \mathrm{d}x$.

Definice 1.115. Funkce $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ se nazývá *absolutně spojitá*, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje takové $\delta > 0$, že pro každý systém intervalů $[a_i, b_i]$, $i = 1, 2, \ldots, M$, $M \in \mathbb{N}$:

$$a \le a_1 < b_1 \le a_2 < b_2 \le \ldots a_M < b_M \le b$$

platí

$$\sum_{i=1}^{M}(b_i - a_i) < \delta \Longrightarrow \sum_{i=1}^{M} |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon\,.$$

Věta 1.116. *Nechť funkce $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je absolutně spojitá. Potom derivace f' existuje pro λ-skoro všechna $x \in (a,b)$ a pro všechna $x, y \in [a,b]$ platí $f(y) - f(x) = \int_{(x,y)} f' \mathrm{d}\lambda$.*

Věta 1.117 (Věta Rademacherova)**.** *Nechť $M, N \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je oblast a $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^M$ splňuje Lipschitzovu podmínku:*

$$\exists L > 0\, \forall x, y \in \Omega\colon \quad \frac{|f(y) - f(x)|_{\mathbb{R}^M}}{|y - x|_{\mathbb{R}^N}} \leq L$$

na oblasti Ω, potom je zobrazení f diferencovatelné λ^N-skoro všude v Ω.

1.2.10. Prostory integrovatelných funkcí.

Definice 1.118. Nechť $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ je prostor s mírou a $u\colon X \to \mathbb{R}^*$ μ-měřitelná funkce na X. Pro $1 \leq p < +\infty$ definujeme

$$\|u\|_p \overset{\text{def}}{=} \left(\int_X |u|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p}$$

a pro $p = +\infty$ definujeme

$$\|u\|_\infty \overset{\text{def}}{=} \inf \{C \geq 0\colon |u(x)| \leq C \text{ pro skoro všechna } x \in X\}\,.$$

Věta 1.119. *Nechť $p \in [0, +\infty]$, $\mathcal{L}^p(X, \mathfrak{S}, \mu)$ je množina všech μ-měřitelných funkcí u definovaných na X takových, že*

$$\|u\|_p < +\infty\,.$$

Potom $\mathcal{L}^p(X, \mathfrak{S}, \mu)$ je lineární prostor a $\|\cdot\|_p\colon \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{S}, \mu) \to [0, +\infty)$ je seminorma na $\mathcal{L}^p(X, \mathfrak{S}, \mu)$.

Věta 1.120. *Relace $\sim$ definovaná na $\mathcal{L}^p(X, \mathfrak{S}, \mu) \times \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{S}, \mu)$ vztahem*

$$u \sim v \Leftrightarrow u(x) = v(x) \textit{ pro skoro všechna } x \in X$$

je relací ekvivalence na $\mathcal{L}^p(X, \mathfrak{S}, \mu)$.

Definice 1.121. Symbolem $L^p(X, \mathfrak{S}, \mu)$ označíme faktorprostor

$$L^p(X, \mathfrak{S}, \mu) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{S}, \mu)/\sim$$

obsahující třídy $\sim$-ekvivalence prvků prostoru $\mathcal{L}^p(X, \mathfrak{S}, \mu)$:

$$[u] \overset{\text{def}}{=} \{v \in \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{S}, \mu)\colon v \sim u\}\,.$$

Poznámka 1.122. Lze pak také psát

$$L^p(X, \mathfrak{S}, \mu) = \{[u]\colon u \in \mathcal{L}^p(X, \mathfrak{S}, \mu)\}\,.$$

Poznámka 1.123. Pokud nejste sběhlí s třídami ekvivance a faktorprostory, nejsnazší objekty, na kterých tento velmi důležitý koncept pochopit jsou zbytkové třídy $\mod$ v $(\mathbb{Z},+)$, které tvoří faktorgrupy $(\mathbb{Z},+)$.

Definice 1.124. Na prostoru $L^p(X,\mathfrak{S},\mu)$ definujeme vnitřní binární operaci *sčítání*:

$$[u]+[v] \overset{\text{def}}{=} [u+v]$$

a operaci vnější binární operaci *násobení reálným číslem*:

$$\kappa\,[u] \overset{\text{def}}{=} [\kappa\, u]\,.$$

Dále definujeme zobrazení $\|\cdot\|_{L^p(X,\mathfrak{S},\mu)}\colon L^p(X,\mathfrak{S},\mu)\to(0,+\infty)$ předpisem

$$\|[u]\|_{L^p(X,\mathfrak{S},\mu)} \overset{\text{def}}{=} \|u\|_p$$

a také relaci uspořádání:

$$[u]<[v] \Leftrightarrow u(x)=v(x) \text{ pro } \mu\text{-skoro všechna } x\in X$$

Věta 1.125. *Prostor $L^p(X,\mathfrak{S},\mu)$ vybavený výše uvedenými operacemi sčítání a násobení reálným číslem je lineární prostor.*

Zobrazení $\|\cdot\|_{L^p(X,\mathfrak{S},\mu)}$ je norma na $L^p(X,\mathfrak{S},\mu)$ a prostor $L^p(X,\mathfrak{S},\mu)$ je vzhledem k této normě úplný (tj. Banachův prostor).

Definice 1.126. Řekneme, že *prvek $[u]\in L^p(X,\mathfrak{S},\mu)$ je spojitý*, pokud existuje reprezentant $u\in\mathcal{L}^p(X,\mathfrak{S},\mu)$, který je spojitý.

Definice 1.127 (Prostory lokálně integrovatelných funkcí)**.** Nechť $(X,\mathcal{T})$ je lokálně kompaktní Hausdorfův prostor a $(X,\mathfrak{S},\mu)$ je prostor s borelovskou mírou $\mu\colon\mathfrak{S}\to[0,+\infty]$, $\mathfrak{B}(X,\mathcal{T})\subset\mathfrak{S}$ a $1\le p\le+\infty$. Prostor $L^p_{\text{loc}}(X,\mathfrak{S},\mu)$ je prostor tříd $\sim$-ekvivalence $[u]$ měřitelných funkcí $u\colon X\to[-\infty,+\infty]$ takových, že pro každou kompaktní množinu $K\subset X$ platí $[u]\in L^p(K,2^K\cap\mathfrak{S},\mu)$.

1.2.11. Duální prostory k $L^p(X,\mathfrak{S},\mu)$.

Definice 1.128. Nechť $1\le p\le+\infty$. Hölderův konjugovaný exponent je prvek rozšířeného reálného oboru $p'\in[1,+\infty]$ definovaný takto:

$$p' \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{p}{p-1} & \text{pro } 1<p<+\infty \\ +\infty & \text{pro } p=1 \\ 1 & \text{pro } p=+\infty \end{cases} \tag{1.41}$$

Poznámka 1.129. Pro $p\in(1,+\infty)$ je $p'\in(1,+\infty)$ a je splněna rovnice

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1 \tag{1.42}$$

Pro dualitu na prostorech $L^p(X,\mathfrak{S},\mu)$ je klíčová Hölderova nerovnost.

Věta 1.130 (Hölderova nerovnost)**.** *Nechť $L^p(X, \mathfrak{S}, \mu)$ je prostor s mírou a $1 \le p \le +\infty$ a p' je Hölderův konjugovaný exponent p. Jestliže $u, v\colon X \to \mathbb{R}^*$ jsou μ-měřitelné funkce, pak platí*

$$\|u\,v\|_{L^1(X,\mathfrak{S},\mu)} \le \|u\|_{L^p(X,\mathfrak{S},\mu)} \|v\|_{L^{p'}(X,\mathfrak{S},\mu)}\,.$$

Věta 1.131. (Rieszova věta o reprezentaci v $L^p(X, \mathfrak{S}, \mu)$). *Nechť $L^p(X, \mathfrak{S}, \mu)$ je prostor s mírou a $1 < p < +\infty$ a p' je Hölderův konjugovaný exponent p. Potom každý omezený lineární funkcionál $l\colon L^p(X, \mathfrak{S}, \mu) \to \mathbb{R}$ lze reprezentovat právě jedním $v_l \in L^{p'}(X, \mathfrak{S}, \mu) \to \mathbb{R}$ takovým, že*

$$\forall u \in L^p(X, \mathfrak{S}, \mu)\colon l(u) = \int_X u\,v_l \mathrm{d}\mu\,.$$

Navíc operátorová norma l je stejná, jako $\|v_l\|_{L^{p'}(X,\mathfrak{S},\mu)}$. Platí též opačné tvrzení, že zobrazení $l_v\colon v \mapsto \int_X u\,v\mathrm{d}\mu$ definuje omezený lineární funkcionál na $L^p(X, \mathfrak{S}, \mu)$. V tomto smyslu lze duální prostor $(L^p(X, \mathfrak{S}, \mu))^*$ ztotožnit s $L^{p'}(X, \mathfrak{S}, \mu)$ (mezi těmito dvěma prostory existuje izometrický izomorfismus). $L^p(X, \mathfrak{S}, \mu)$ je reflexívní prostor ($(p')' = p$).

Věta 1.132. (Rieszova věta o reprezentaci v $L^1(X, \mathfrak{S}, \mu)$, [**9**], Věta B.95, str. 533). *Nechť $L^1(X, \mathfrak{S}, \mu)$ je prostor se σ-konečnou mírou, potom duální prostor k $L^1(X, \mathfrak{S}, \mu)$ lze ztotožnit s $L^\infty(X, \mathfrak{S}, \mu)$.*

Definice 1.133. Nechť X je neprázdná množina a $\mathfrak{A}$ je *algebra podmnožin X*, to jest

(A1) $\emptyset, X \in \mathfrak{A}$;
(A2) $\forall E \in \mathfrak{A}\colon X \setminus A \in \mathfrak{A}$;
(A3) $\forall E_1, E_2 \in \mathfrak{A}\colon E_1 \cup E_2 \in \mathfrak{A}$.

Řekneme, že množinová funkce $\nu\colon \mathfrak{A} \to [-\infty, +\infty]$ je *konečně aditivní znaménková míra*, platí-li

(KM1) $\nu(\emptyset)$;
(KM2) ν nabývá nejvýše jedné z hodnot $-\infty$, $+\infty$, tj. buď $\nu\colon \mathfrak{A} \to [-\infty, +\infty)$ nebo $\nu\colon \mathfrak{A} \to (-\infty, +\infty]$;
(KM3) pro všechna $E_1, E_2 \in \mathfrak{A}\colon E_1 \cap E_2 = \emptyset$ platí

$$\nu(E_1 \cup E_2) = \nu(E_1) + \nu(E_2)\,.$$

Nechť $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ je prostor s mírou. Definujeme prostor $\mathrm{ba}(X, \mathfrak{S}, \mu)$ *konečně aditivních znaménkových měr absolutně spojitých vzhledem k μ* jako množinu všech $\nu\colon \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$ takových, že

(i) ν je konečně aditivní znaménková míra na $\mathfrak{S}$;
(ii) ν je *omezená*, tj. její totální variace

$$|\nu| \overset{\text{def}}{=} \sup\left\{\sum_{n=1}^{l} |\nu\left(E_n\right)|\right\},$$

je konečná, kde supremum je přes všechna konečná dělení prostoru X;
(iii) *absolutně spojitá vzhledem k μ*, tj. pro všechna $E \in \mathfrak{S}\colon \mu(E) = 0$ platí $\nu(E) = 0$.

Věta 1.134. (Rieszova věta o reprezentaci v $L^\infty(X,\mathfrak{S},\mu)$, [**9**], Věta B.96, str. 533; Yosida-Hewitt [**20**], Věta 2.3, str. 53). *Nechť $L^\infty(X,\mathfrak{S},\mu)$ je prostor s mírou. Potom duální prostor k $L^\infty(X,\mathfrak{S},\mu)$ lze ztotožnit s prostorem omezených konečně aditivních znaménkových měr absolutně spojitých vzhledem k μ v tom smyslu, že ke každému omezenému lineárnímu funkcionálu l na $L^\infty(X,\mathfrak{S},\mu)$ odpovídá právě jeden prvek $\nu_l \in \mathrm{ba}(X,\mathfrak{S},\mu)$ takový, že pro všechna $u \in L^\infty(X,\mathfrak{S},\mu)$ platí*

$$l(u) = \int_X u \mathrm{d}\nu_l \,.$$

Navíc operátorová norma l je rovna totální variaci $|\nu|$. Naopak pro daný prvek $\nu \in \mathrm{ba}(X,\mathfrak{S},\mu)$ je zobrazení $l_\nu\colon u \to \int_X u\mathrm{d}\nu$ omezený lineární funkcionál na $L^\infty(X,\mathfrak{S},\mu)$.

Poznámka 1.135. Jak plyne z předchozí věty, prostory $L^1(X,\mathfrak{S},\mu)$ a $L^\infty(X,\mathfrak{S},\mu)$ nejsou reflexivní. To výrazně ztěžuje analýzu v těchto prostorech. Bohužel někdy je i přes tyto obtíže z důvodu regularity nutno v těchto prostorech pracovat.

1.2.12. Vnoření prostorů integrovatelných funkcí.

Věta 1.136 ([**9**], Věta B.84, str. 531)**.** *Nechť $(X,\mathfrak{S},\mu)$ je prostor s mírou a $1 \le p < q < +\infty$. Potom*

(1) *$L^p(X,\mathfrak{S},\mu)$ není podmnožinou $L^q(X,\mathfrak{S},\mu)$ právě tehdy, když X obsahuje měřitelné množiny libovolně malé míry, tj.*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists E \in \mathfrak{S}\colon \mu(E) < \varepsilon \,.$$

(2) *$L^q(X,\mathfrak{S},\mu)$ není podmnožinou $L^p(X,\mathfrak{S},\mu)$ právě tehdy, když X obsahuje měřitelné množiny libovolně velké míry, tj.*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists E \in \mathfrak{S}\colon \mu(E) > \varepsilon \,.$$

Věta 1.137 (srovnej [**9**], Důsledek B.85, str. 531)**.** *Nechť $(X,\mathfrak{S},\mu)$ je prostor s mírou a $1 \le p < q \le +\infty$. Jestliže $\mu(X) < +\infty$, potom*

$$L^q(X,\mathfrak{S},\mu) \subset L^p(X,\mathfrak{S},\mu)\,.$$

Navíc existuje $c > 0$ tak, že $\|u\|_p \le c\|u\|_q$ pro všechna $u \in L^q(X,\mathfrak{S},\mu)$ a tedy

$$L^q(X,\mathfrak{S},\mu) \hookrightarrow L^p(X,\mathfrak{S},\mu)\,.$$

1.2.13. Typy konvergencí a kompaktní množiny v $L^p(X,\mathfrak{S},\mu)$. O charakterizaci totálně omezených podmnožin $L^p(\Omega)$ hovoří Kolmogorova věta viz Adams [**1**, Věta 2.21, strana 31].

V následující větě budeme k funkci u definované na měřitelné množině $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ uvažovat její rozšíření $\tilde{u}$ nulou na celé $\mathbb{R}^N$, tj.

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{pro } x \in \Omega\,, \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega\,. \end{cases} \tag{1.43}$$

Věta 1.138 (Kolmogorova věta)**.** *Nechť* $1 \le p < +\infty$*. Omezená podmmnožina* $K \subset L^p(\Omega)$*, tj. podmnožina splňující podmínku*

$$\sup_{u \in K} \|u\|_{L^p(\Omega)} < c < +\infty \tag{1.44}$$

je totálně omezená v $L^p(\Omega)$ *(její uzávěr je kompaktní v* $L^p(\Omega)$*) právě tehdy, když pro všechna* $\varepsilon > 0$ *existuje* $\delta > 0$ *a* $G \subsetneq \Omega$ *takové, že pro všechna* $u \in K$ *a všechna* $h \in \mathbb{R}^N\colon |h|_{\mathbb{R}^N} < \delta$ *platí*

$$\int_\Omega |\tilde{u}(x+h) - \tilde{u}(x)|^p \,\mathrm{d}x < \varepsilon^p \tag{1.45}$$

a

$$\int_{\Omega \setminus \overline{G}} |u(x)|^p \,\mathrm{d}x < \varepsilon^p \tag{1.46}$$

Poznámka 1.139. Podmínce (1.45) se říká spojitost v průměru a podmínce (1.46) se říká pokles v nekonečnu.

1.2.14. Znaménkové a komplexní míry.

Definice 1.140. Nechť $\mathfrak{S}$ je σ-algebra na množině X a $E \in \mathfrak{S}$. Spočetný systém $\{E_i\} \subset \mathfrak{S}$ po dvou disjunktních množin, tj. $E_i \cap E_j = \emptyset$ pro $i \neq j$, nazýváne *rozklad množiny* E, pokud platí $E = \bigcup E_i$. *Znaménková (komplexní) míra* μ na $\mathfrak{S}$ je pak taková reálná (komplexní) funkce na $\mathfrak{S}$, že pro každé $E \in \mathfrak{S}$ a každý rozklad $\{E_i\}$ množiny E uvedená řada konverguje a platí:

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)\,.$$

Poznámka 1.141. Protože permutace indexů systému $\{E_i\}$ nemění sjednocení systému, uvedená řada konverguje dokonce absolutně.

Definice 1.142. Nechť μ je znaménková (komplexní) míra na $\mathfrak{S}$. Množinovou funkci $\mu\colon \mathfrak{S} \to \mathbb{R}^+$ definovanou vztahem:

$$|\mu|(E) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)|\colon \quad \{E_i\} \text{ je rozklad } E \right\}$$

nazýváme *variace míry* μ. Číslo $\mu(X)$ se nazývá totální variace míry μ na X.

Věta 1.143 (Rudin, věty 6.2 a 6.4)**.** *Variace* $|\mu|$ *znaménkové (komplexní) míry* μ *definované na* σ*-algebře* $\mathfrak{S}$ *je (nezáporná) míra na* $\mathfrak{S}$*. Navíc* $|\mu(X)| < \infty$*.*

Poznámka 1.144. Nechť μ a ν jsou znaménkové (komplexní) míry definované na téže σ-algebře $\mathfrak{S}$ a $c \in \mathbb{R}$ ($c \in \mathbb{C}$). Definujme operace $\mu + \nu$ a $c\mu$ obvyklým způsobem, tj. pro každé $E \in \mathfrak{S}$

$$(\mu + \lambda)(E) = \mu(E) + \lambda(E)\,, \quad (c\,\mu)(E) = c\,\mu(E)\,.$$

Lehce lze ověřit, že $\mu + \lambda$ a $c\,\mu$ jsou znaménkové (komplexní) míry. Systém všech komplexních měr na $\mathfrak{S}$ tvoří vektorový prostor. Položíme-li $\|\mu\| = |\mu|(X)$, lze ověřit, že jsou splněny axiomy normovaného lineárního prostoru.

Definice 1.145. Nechť (X,T) je Hausdorffův topologický prostor a nechť $\mathfrak{S}$ je σ-algebra na X obsahující otevřené množiny T (takže každá otevřená množina je měřitelná a $\mathfrak{S}$ je alespoň tak jemná jako σ-algebra Borelovských množin na X). Potom míra μ na měřitelném prostoru $(X,\mathfrak{S})$ se nazývá *regulární zevnitř* pokud pro každou množinu A z $\mathfrak{S}$, platí

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K)|\text{compact } K \subseteq A\}.$$

Tato vlastnost se také někdy nazývá "aproximace kompaktními množinami.

Definice 1.146. *Borelovská míra* je definována následovně: Nechť X je lokálně kompaktní Hausdorffův prostor, a nechť $\mathfrak{B}(X)$ je nejmenší σ-algebra obsahující všechny otevřené podmnožiny X (takzvaná σ-algebra Borelovských množin). Každá míra μ definovaná na σ-algebře Borelovských množin se nazývá Borelovská míra. Jestliže Borelovská míra μ je zároveň *regulární zevnitř* i *regulární zvnějšku*, nazývá se regulární Borelovská míra. Je-li μ zároveň regulární zevnitř a lokálně konečná (pro každou kompaktní $C \in \mathfrak{B}(X)$ je $\mu(C) < +\infty$), nazývá se Radonova míra.

Definice 1.147. Lineární prostor všech spojitých zobrazení $\phi : X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ takových, že jejich nosič

$$\overline{\{x \in X : \phi(x) \neq 0\}}$$

je kompaktní množina v $(X,\mathcal{T})$ označíme $C_{\mathrm{c}}(X)$.

Věta 1.148. *Nechť X je lokálně kompaktní Hausdorfův topologický prostor. Potom ke každému omezenému lineárnímu funkcionálu Φ na prostoru $C_{\mathrm{c}}(X)$ existuje právě jedna regulární (znaménková nebo komplexní) borelovská míra μ taková, že platí*

$$\Phi(f) = \int_X f \mathrm{d}\mu$$

pro všechny funkce $f \in C_{\mathrm{c}}(X)$. Navíc je norma Φ rovna totální variaci μ:

$$\|\Phi\| = |\mu|(X).$$

Poznámka 1.149. Připomeňme si, že je-li $f\colon X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ spojitá na X, pak vzor $f^{-1}(A)$ otevřené množiny $A \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ je také otevřená množina a tedy $f^{-1}(A) \in \mathfrak{B}(X)$. Funkce f spojitá na X je tudíž μ-měřitelná libovolnou borelovskou mírou na X. Z linearity integrálu je vidět, že zobrazení $\Phi(f) = \int_X f \mathrm{d}\mu$ je lineární.

1.2.15. Značení používané mimo abstraktní teorii. Tam, kde se Lebesgův integrál s Lebesgueovou mírou používá mimo výše uvedenou abstraktní teorii, se většinou z historických důvodů používá následující značení:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \overset{ozn.}{=} \int_{(a,b)} f\,\mathrm{d}\lambda$$

$$\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x \overset{ozn.}{=} \int_\Omega f\,\mathrm{d}\lambda^N$$

$$\int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \overset{ozn.}{=} \int_\Omega f\,\mathrm{d}\lambda^2$$

$$\int_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \overset{ozn.}{=} \int_\Omega f\,\mathrm{d}\lambda^3$$

Toto značení též odráží fakt, že Lebesgův integrál zobecňuje Riemannův integrál, který se takto tradičně zapisuje. I my se budeme v tomto textu většinou tohoto značení držet. Vždy to buď vyplyne z kontextu (nebude-li hrozit nedorozumění), nebo to výslovně zmíníme.

1.3. Prostory spojitých funkcí

1.3.1. Základní prostory.

Definice 1.150. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je oblast. Definujeme následující množiny funkcí:

(1) $C(\Omega)$ (nebo $C^0(\Omega)$) – množina všech funkcí definovaných v každém bodě oblasti Ω a spojitých v každém bodě oblasti Ω.

(2) $C^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$ – množina všech funkcí definovaných v každém bodě oblasti Ω, které mají v každém bodě oblasti Ω všechny parciální derivace až do řádu k včetně a tyto derivace jsou spojité v každém bodě oblasti Ω.

(3) $C^\infty(\Omega)$ – množina funkcí mající spojité derivace všech řádů v každém bodě Ω, to jest

$$C^\infty(\Omega) \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\Omega)\,.$$

Poznámka 1.151. Protože součet dvou spojitých funkcí $u, v \in C(\Omega)$ je opět spojitá funkce $u + v \in C(\Omega)$ a násobením spojité funkce $u \in C(\Omega)$ reálným číslem $\gamma \in \mathbb{R}$ dostaneme opět spojitou funkci $\gamma\, u \in C(\Omega)$, jsou výše uvedené množiny z hlediska algebraické struktury *lineární prostory nad tělesem reálných čísel.*

Definice 1.152. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je oblast. Nechť funkce u je definována v každém bodě Ω. Množinu

$$\operatorname{supp} u \overset{\text{def}}{=} \overline{\{x \in \Omega \colon u(x) \neq 0\}} \tag{1.47}$$

nazýváme *nosičem funkce u.*

Definice 1.153. Nechť $k \in \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Symbolem $C^k_{\mathrm{c}}(\Omega)$ označíme množinu všech funkcí z $C^k(\Omega)$, jejichž nosiče jsou kompaktní v Ω.

Poznámka 1.154. Opět se snadno nahlédne, že výše definované množiny $C^k_{\mathrm{c}}(\Omega)$ jsou z hlediska algebraické struktury *lineární prostory nad tělesem reálných čísel.*

Definice 1.155. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je oblast. Definujeme ještě následující množiny funkcí:

(1) $C(\overline{\Omega})$ (nebo $C^0(\overline{\Omega})$) – množina všech funkcí z $C(\Omega)$, které jsou omezené a stejnoměrně spojité na Ω.
(2) $C^k(\overline{\Omega})$, $k \in \mathbb{N}$ – množina všech funkcí $u \in C^k(\Omega)$ takových, že každá jejich parciální derivace až do řádu k leží v $C(\overline{\Omega})$.
(3) $C^\infty(\overline{\Omega})$ – množina definovaná předpisem

$$C^\infty(\overline{\Omega}) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\overline{\Omega}) .$$

Věta 1.156. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast. Potom lze funkci $u \in C(\overline{\Omega})$ jednoznačně spojitě rozšířit na $\overline{\Omega}$.*

Poznámka 1.157. Pro omezené oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ budeme s funkcemi $u \in C(\overline{\Omega})$ pracovat jako s jejich spojitými rozšířeními na $\overline{\Omega}$. Tím bude možné používat např. Weierstrassovu větu a budeme moci uvažovat, že funkce $u \in C(\overline{\Omega})$ (ve smyslu spojitého rozšíření) nabývá svého maxima a minima na $\overline{\Omega}$.

Podle předchozí poznámky má smysl následující definice.

Definice 1.158. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast. Pro funkce $u \in C(\overline{\Omega})$ definujeme

$$\|u\|_{C(\overline{\Omega})} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)| \tag{1.48}$$

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast. Pro $k \in \mathbb{N}$ a funkce $u \in C^k(\overline{\Omega})$ definujeme

$$\|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)| + \sum_{|\alpha|=1}^{k} \max_{x \in \overline{\Omega}} \left| \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^{\alpha_1} \cdots \partial x^{\alpha_N}}(x) \right| , \tag{1.49}$$

kde $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$, $N \in \mathbb{N}$ je dimenze oblasti Ω a $|\alpha| \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N$. N-tici α říkáme *multiindex* a číslu $|\alpha|$ říkáme *délka multiindexu* α.

Věta 1.159. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast. Potom platí*

(i) *zobrazení* $\|\cdot\|_{C(\overline{\Omega})} \colon C(\overline{\Omega}) \to \mathbb{R}_0^+$ *dané předpisem* (1.48) *je norma na* $C(\overline{\Omega})$.
(ii) *Prostor* $C(\overline{\Omega})$ *je vzhledem k této normě Banachův prostor.*
(iii) *Prostor* $C(\overline{\Omega})$ *s touto normou je navíc separabilní.*

Poznámka 1.160. Konvergence v normě dané předpisem (1.48) odpovídá stejnoměrné konvergenci na $\overline{\Omega}$. Úplnost dokážeme tak, že nejprve najdeme bodovou limitu (cauchyovská číselná posloupnost je konvergentní). Dále využijeme faktu, že limitou stejnoměrně konvergující posloupnosti spojitých funkcí na kompaktní množině $\overline{\Omega}$ ($\overline{\Omega}$ je dle předpokladu omezená a uzavřená), je funkce spojitá na $\overline{\Omega}$. Díky tomu je prostor $C(\overline{\Omega})$ úplný.

Separabilita vyplývá z následující věty.

Věta 1.161 ([8], Věta 1.4.4, str. 30)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast, $u \in C(\overline{\Omega})$ a $\varepsilon > 0$. Potom existuje $n \in \mathbb{N}$ a polynom P_n (v proměnných $x_1, x_2, \dots x_N$)*

$$P_n(x) = \sum_{|\alpha| \le n} a_\alpha x_1^{\alpha_1} \cdots x_N^{\alpha_N}$$

takový, že

$$\|u - P_n\|_{C(\overline{\Omega})} < \varepsilon\,.$$

Poznámka 1.162. K předchozí větě je třeba dodat, že daný polynom lze volit tak, že všechny jeho koeficienty splňují $a_\alpha \in \mathbb{Q}$. Množina všech polynomů s racionálními koeficienty $\mathscr{Q}$ je spočetné sjednocení množin všech polynomů s racionálními koeficienty stupně nejvýše $n \in \mathbb{N}_0$, proto je $\mathscr{Q}$ spočetná. Z výše uvedené věty plyne, že spočetná množina $\mathscr{Q}$ je hustá v $C(\overline{\Omega})$ a tudíž je $C(\overline{\Omega})$ separabilní prostor.

Z podobných důvodů jako u Věty 1.159 platí i následující věta.

Věta 1.163. *Nechť $k \in \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast. Potom platí*

(i) *zobrazení $\|\cdot\|_{C^k(\overline{\Omega})}\colon C^k(\overline{\Omega}) \to \mathbb{R}_0^+$ dané předpisem* (1.49) *je norma na $C^k(\overline{\Omega})$.*

(ii) *Prostor $C^k(\overline{\Omega})$ je vzhledem k této normě Banachův prostor.*

(iii) *Prostor $C^k(\overline{\Omega})$ s touto normou je navíc separabilní.*

1.3.2. Hölderovy prostory.

Definice 1.164. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je oblast a $0 < \lambda \le 1$. Pro funkci $u \in C^k(\Omega)$ a multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ definujeme

$$H_{\alpha,\lambda}(u) \overset{\text{def}}{=} \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)|}{|x-y|^\lambda}\,. \tag{1.50}$$

Symbolem $C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$ označíme množinu všech funkcí z $C^k(\overline{\Omega})$ takových, že

$$\forall \alpha\colon |\alpha| = k\colon H_{\alpha,\lambda}(u) < +\infty\,.$$

Pro $u \in C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$ definujeme

$$\|u\|_{C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})} \overset{\text{def}}{=} \|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} + \sum_{|\alpha|=k} H_{\alpha,\lambda}(u) \tag{1.51}$$

Poznámka 1.165. Nechť $L, H > 0$ jsou reálné konstanty. Ze základního kurzu matematické analýzy víte, že funkci splňující podmínku

$$|f(x) - f(y)| \le L|x-y|_{\mathbb{R}^N} \tag{1.52}$$

pro všechna $x, y \in E \subset \mathbb{R}^N$ se říká lipschitzovská funkce na množině E. Podmínce (1.53) se říká Lipschitzova podmínka a konstantě L Lipschitzova konstanta funkce f. Podobně, je-li $0 < \lambda < 1$, funkci splňující podmínku

$$|f(x) - f(y)| \le H|x-y|_{\mathbb{R}^N}^\lambda \tag{1.53}$$

pro všechna $x, y \in E \subset \mathbb{R}^N$ se říká hölderovská funkce na množině E. Podmínce (1.53) se říká Hölderova podmínka a konstantě H Hölderova konstanta funkce f.

Věta 1.166 ([**8**], Lemma 1.3.1., str. 25; Věta 1.3.3, str. 26)**.** *Nechť $k \in \mathbb{N}_0$, $0 < \lambda \leq 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast. Potom $\|\cdot\|_{C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})}$ je norma na $C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$. Prostor $C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$ je vzhledem k této normě Banachův.*

Věta 1.167 ([**8**], Cvičení 1.2.8, str. 23)**.** *Nechť je $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast, $0 < \nu \leq \lambda \leq 1$, $k \geq 0$ a $u \in C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$. Potom pro všechna $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ taková, že $|\alpha| = k$ platí:*

$$H_{\alpha,\nu}(u) \leq (\operatorname{diam}\Omega)^{\lambda-\nu} H_{\alpha,\lambda}(u)\,; \tag{1.54}$$

$$H_{\alpha,\nu}(u) \leq \left(2\max_{x\in\overline{\Omega}} |\partial^\alpha u(x)|\right)^{(\lambda-\nu)/\lambda} (H_{\alpha,\lambda}(u))^{\lambda/\nu}\,. \tag{1.55}$$

Z předchozí věty plyne následující důležitá věta o vnoření:

Věta 1.168. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast, $0 < \nu \leq \lambda \leq 1$, $k \geq 0$. Potom*

$$C^{k,\lambda}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{k,\nu}(\overline{\Omega})\,. \tag{1.56}$$

Jemnějšími odhady lze dokonce získat kompaktní vnoření:

Věta 1.169 ([**8**], Věta 1.5.10, Poznámka 1.5.11 str. 38–39)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast, $0 < \nu \leq \lambda \leq 1$, $k \geq 0$. Potom*

$$C^{k,\lambda}(\overline{\Omega}) \overset{\mathrm{C}}{\hookrightarrow} C^{k,\nu}(\overline{\Omega}) \overset{\mathrm{C}}{\hookrightarrow} C^{k}(\overline{\Omega})\,. \tag{1.57}$$

Dalším typem vnoření, která jsou užitečná při studiu parciálních diferenciálních rovnic jsou tato

$$C^{k+1,\lambda}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})\,, \tag{1.58}$$

$$C^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{k,\lambda}(\overline{\Omega}). \tag{1.59}$$

V případech vnoření prostorů s vyšší diferenecovatelností do prostorů s nižší diferencovatelností je situace poněkud složitější než bychom na první pohled čekali a závisí na tvaru oblasti. Ukažme si to na základním příkladě: $C^1(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{0,1}(\overline{\Omega})$. Potřebujeme z omezenosti prvních derivací

$$\forall x \in \Omega\colon \quad \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right| \leq \|u\|_{C^1(\overline{\Omega})}\,, i = 1, \ldots, N$$

vyvodit odhad na $H_{1,0}$ seminormu funkce u (tj. odhad na Lipschitzovu konstantu funkce u: $H_{1,0}(u) = L \geq 0$) tak, aby platilo $H_{1,0}(u) \leq M\|u\|_{C^1(\overline{\Omega})}$, kde konstanta M *nesmí záviset* na konkrétní funkci u, ale může eventuelně záviset na oblasti Ω.

V čem spočívá problém odhadu rozdílu funkčních hodnot pomocí derivace je nejlépe vidět z následující úvahy o grafu funkce nad křivkou ve dvou dimenzích (modifikaci pro vhodnou oblast proveďte podrobně sami). Mějme spirálu $S\colon x = 1/t\cos t, \quad y = 1/t\sin t$, $t \in (\pi, +\infty)$. Délka oblouku této spirály je

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{1+\pi^2}}{\pi} - \operatorname{arcsinh}\pi - \frac{\sqrt{1+t^2}}{\pi} + \operatorname{arcsinh} t\,. \tag{1.60}$$

Snadno zjistíme, že $\lim_{t\to\infty} s(t) = +\infty$. Dále uvažujme funkci

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0\,, \\[2ex] \dfrac{4}{\pi^2}t^2 - \dfrac{4}{\pi^3}t^3 + \dfrac{1}{\pi^4}t^4 & 0 < t < 2\pi\,, \\[2ex] 0 & t \ge 2\pi\,. \end{cases}$$

Snadno se ověří, že

$$u'(0) = u'(2\pi) = 0 \tag{1.61}$$

$$\max_{t\in\mathbb{R}} |u(t)| = u(\pi) = 1\,, \quad \max_{t\in\mathbb{R}} |u'(t)| = \frac{8}{3\sqrt{3}\pi} \tag{1.62}$$

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = 0 \tag{1.63}$$

Nyní budeme uvažovat inverzní funkci k funkci (1.60), $s \mapsto t(s)$, a zobrazení $Z_c\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} x(s) &= 1/t(s)\cos t(s)\,, \\ y(s) &= 1/t(s)\sin t(s)\,, \\ z(s) &= u(s+c) \end{aligned}$$

pro $s \in (0,+\infty)$, kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolná předem zvolená konstanta. Zobrazení $x(s) = 1/t(s)\cos t(s)$, $y(s) = 1/t(s)\sin t(s)$ je vyjádření spirály S v přirozeném parametru - délce oblouku. To znamená, výška grafu zobrazení Z_c nad rovinou xy je po uběhnutí oblouku $s > 0$ po spirále S rovna $z = u(s+c)$. Derivace výšky z vzhledem k oblouku s je $u'(s+c)$, pro kterou platí $|u'(s+c)| \le \frac{8}{3\sqrt{3}\pi}$. Maximální výšky $z = 1$ se nabývá pro $s_{\max} = \pi - c$. Protože $\lim_{s\to+\infty} u(s+c) = 0$ a $\lim_{s\to+\infty} 1/t(s)\cos t(s)$, $\lim_{s\to+\infty} 1/t(s)$, $\sin t(s)$, dostáváme následující dolní odhad

$$\sup_{s_1,s_2\in(0,+\infty)} \frac{|z(s_2) - z(s_1)|}{\sqrt{\big(x(s_2)-x(s_1)\big)^2 + \big(y(s_2)-y(s_1)\big)^2}} \ge$$

$$\ge \frac{|z(s_{\max})|}{\sqrt{\big(x(s_{\max})\big)^2 + \big(y(s_{\max})\big)^2}} \ge \frac{1}{\sqrt{\big(x(s_{\max})\big)^2 + \big(y(s_{\max})\big)^2}} =$$

$$= t(s_{\max}) = t(\pi - c)\,.$$

Uvažujme nyní poslopoupnost $c_n \to -\infty$ a odpovídající posloupnost zobrazení Z_c. Potom $t(\pi - c_n) \to +\infty$ a tudíž

$$\sup_{s_1,s_2\in(0,+\infty)} \frac{|z(s_2) - z(s_1)|}{\sqrt{\big(x(s_2)-x(s_1)\big)^2 + \big(y(s_2)-y(s_1)\big)^2}}$$

nelze odhadnout $\max_{s\in(0,+\infty)}|u'(s)|$. Důvod je ten, že zatímco růst funkce máme derivací kontrolován pouze podél oblouku spirály, výše uvedené supremum počítáme i tzv. "skokem přes závit". Tím, že délka oblouku spirály S je $+\infty$ ($\lim_{t\to\infty} s(t) = +\infty$), můžeme $s_{\max}$ libovolně zvětšovat, čímž se bod se $z(s_s) = 1$ na spirále posunuje do míst, kde jsou závity čím dál blíže k sobě, a zároveň pro dostatečně velká $s > s_max + \pi$ je $z(s) = 0$. Podobně by tomu bylo například, pokud bychom studovali graf funkce u nad grafem křivky $K\colon (0,1) \to \mathbb{R}^2, x(t) = t, y(t) = \sin(1/t)$ (opět kombinace nekonečné délky grafu se zahušťováním vln v okolí bodu 0, proveďte rozbor sami).

Zde popsané situace nás přivádí k definici vhodného typu oblastí, kde vnoření (1.58) a (1.59) platí [1].

Definice 1.170 ([**8**], Definice 1.2.12, str. 24)**.** Řekneme, že oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ splňuje S-podmínku, pokud existuje konstanta $M > 0$ taková, že pro každé dva body $x, y \in \Omega$ existuje $n \in \mathbb{N}$ a $(n+1)$-tice bodů $z_0, \ldots, z_n \in \mathbb{R}^N$ splňující tyto tři podmínky:

$$x = z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n = y\,, \tag{1.64}$$

$$\forall t \in [0,1], i = 0, \ldots n-1\colon tz_i + (1-t)z_{i+1} \subset \Omega\,, \tag{1.65}$$

$$\textstyle\sum_{i=0}^{n-1} |z_{i+1} - z_i| \le M|x-y|\,. \tag{1.66}$$

Věta 1.171 ([**8**], Věta 1.2.14)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ splňuje S-podmínku, potom platí následující vnoření*

$$\begin{aligned} C^{k+1,\lambda}(\overline{\Omega}) &\hookrightarrow C^{k,1}(\overline{\Omega})\,, \\ C^{k+1,\lambda}(\overline{\Omega}) &\overset{\mathrm{C}}{\hookrightarrow} C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})\,, \\ C^{k+1}(\overline{\Omega}) &\overset{\mathrm{C}}{\hookrightarrow} C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})\,, \end{aligned}$$

platí pro $k \in \mathbb{N}_0$ a $0 < \lambda < 1$.

Důkaz. Dokážeme speciální případ $C^1(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{0,1}(\overline{\Omega})$. Dále se využije následujícího řetězce vnoření, který plyne z Věty 1.168:

$$C^{1,\lambda}(\overline{\Omega}) \overset{\mathrm{C}}{\hookrightarrow} C^1(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{0,1}(\overline{\Omega}) \overset{\mathrm{C}}{\hookrightarrow} C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})\,.$$

Obecný případ $k > 1$ se dokazuje analogicky jen je technicky komplikovanější. Mějme dány dva body $x, y \in \Omega$ a nechť $z_0, \ldots, z_n \in \mathbb{R}^N$ je $(n+1)$-tice bodů splňující podmínky (1.64)–(1.66). Zřejmě

$$u(y) - u(x) = u(z_n) - u(z_{n-1}) + u(z_{n-1}) - u(z_{n-2}) \cdots + u(z_1) - u(z_0)\,.$$

[1]Podmínka z monografie [**8**], Definice 1.2.12, str. 24, je nejlepší, kterou se nám pro tato vnoření podařilo vyhledat. Navíc, jak je vidět z předchozích úvah je velmi přirozená. V monografii [**1**] je uvedena pouze podmínka konvexnosti nebo hvězdicovosti oblasti.

Z trojúhelníkové nerovnosti odtud dostaneme

$$|u(y) - u(x)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |u(z_i + 1) - u(z_i)| \ .$$

Užitím věty o střední hodnotě na každé z úseček $tz_i + (1-t)z_{i+1}$, $t \in [0,1]$, dostaneme pro vhodné $\theta \in [0,1]$ rovnost:

$$u(z_{i+1}) - u(z_i) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_k}(\theta z_i + (1-\theta) z_{i+1}) v_k \,,$$

kde v_k je k-tá složka vektoru $v \stackrel{\text{def}}{=} z_{i+1} - z_i$. Tudíž díky Cauchyově-Schwarzově nerovnosti a ekvivalenci norem v $\mathbb{R}^N$ existuje konstanta $K > 0$ nezávislá na u, z_{i+1}, z_i taková, že

$$|u(z_{i+1}) - u(z_i)| \leq K \|u\|_{C^1(\overline{\Omega})} |z_{i+1} - z_i|_{\mathbb{R}^N} \,.$$

$$|u(y) - u(x)| \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} |u(z_i + 1) - u(z_i)| \leq K \|u\|_{C^1(\overline{\Omega})} \sum_{i=0}^{n-1} |z_{i+1} - z_i|_{\mathbb{R}^N} \leq$$

$$\leq K \|u\|_{C^1(\overline{\Omega})} M |x - y|_{\mathbb{R}^N} \,,$$

kde v poslední nerovnosti jsme použili (1.66) s konstantou $M > 0$ z definice (1.170) pro danou oblast Ω (nezávislou na volbě bodů $x, y \in \Omega$).

■

Příklad 1.172 ([**6**],str. 53)**.** Uveďme příklad, kde výše uvedené vnoření neplatí a na první pohled není patrné, že není splněna S-podmínka. Uvažujme oblast $\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^2 \colon x_1^2 + x_2^2 < 1 \wedge x_2 < |x_1|^{1/2}\}$. Nechť $1 < \beta < 2$. Potom pro funkci $u \colon \Omega \to \mathbb{R}, x \to x_2^\beta \operatorname{sgn} x_1$ platí $u \in C^1(\overline{\Omega})$ a zároveň $u \notin C^\alpha(\overline{\Omega})$ pro $\beta/2 < \alpha \leq 1$.

Řešení. Platnost $u \in C^1(\overline{\Omega})$ a $u \notin C^\alpha(\overline{\Omega})$ pro $\beta/2 < \alpha \leq 1$ dokažte sami. Problém s S-podmínkou nastává na okolí bodu $o = (0,0)$. Uvažujme systém dvojic bodů x_h, y_h na hranici $\partial\Omega$ splňující $x = (-h, \sqrt{h})$ a $y = (h, \sqrt{h})$, $h \in (0, 1/4]$. Vzdálenost dvojic těchto bodů je $|x_h - y_h|_{\mathbb{R}^2} = 2h$ zatímco nejkratší lomenná čára ležící v $\overline{\Omega}$ spojující dvojici x_h a y_h je sjednocení úseček $x_h o$ a $o y_h$, jejíž délka je $2\sqrt{h^2 + h}$. Dále platí

$$\frac{|x - o|_{\mathbb{R}^2} + |o - y|_{\mathbb{R}^2}}{|x - y|_{\mathbb{R}^2}} = \lim_{h \to 0+} \frac{2h}{2\sqrt{h^2 + h}} = \lim_{h \to 0+} \frac{1}{\sqrt{1 + 1/h}} = +\infty \,.$$

Proto tato oblast nesplňuje S-podmínku.

□

Tato věta asi čtenáře nepotěší, ale čtenář znalý této věty se bude moci vyhnout některým chybám v důkazech vět z teorie parciálních diferenciálních rovnic založených na aproximaci.

Věta 1.173 ([**8**], Věta 1.4.9, str. 32)**.** *Nechť* $k \in \mathbb{N}_0$ *a* $0 < \lambda \leq 1$*, potom prostor* $C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$ *není separabilní.*

Následující věta je užitečná v některých konstrukcích řešení parciálních diferenciálních rovnic, kdy potřebujeme mít funkci dodefinovanou vně oblasti, kde je zadána (a zachovat přitom třídu spojitosti).

Věta 1.174 (McShane [**11**], Důsledek 1)**.** *Nechť* $E \subset \mathbb{R}^N$ *a* $f : E \to \mathbb{R}$ *splňuje na* E *Lipschitzovu nebo Hölderovu podmínku, tj. existuje* $M > 0$ *a* $0 < \alpha \leq 1$ *takové, že*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^N : x, y \in E \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^{\alpha}_{\mathbb{R}^N} . \tag{1.67}$$

Pak lze f *rozšířit na* $\mathbb{R}^N$ *tak, že je podmínka* (1.67) *zachována.*

Následující věta se týká zhlazování spojitých a Hölderovských funkcí. Nejprve ale definujme tzv. zhlazující jádro.

Definice 1.175 (Systém standardních zhlazujících jader)**.** Pro libovolné dané $\varepsilon > 0$ definujeme funkci $\omega_\varepsilon : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ po částech předpisem

$$\omega_\varepsilon(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} C_\varepsilon \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2}\right) & \text{pro} \quad |x| < \varepsilon\,, \\ 0 & \text{pro} \quad |x| \geq \varepsilon\,, \end{cases} \tag{1.68}$$

kde C_ε je voleno tak, aby $\int_{\mathbb{R}^N} \omega_\varepsilon \, \mathrm{d}x = 1$. Tomuto systému funkcí říkáme *systém standardních zhlazujících jader.*

Věta 1.176 (Gilbarg-Trudinger [**6**], Lemma 7.1, str. 147)**.** *Nechť* $u \in C(\Omega)$*. Pro libovolnou* $\Omega' \colon \overline{\Omega'} \subsetneq \Omega$ *a* $0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(\partial\Omega, \overline{\Omega'})$ *definujeme* $u_\varepsilon \colon \Omega' \to \mathbb{R}$ *vztahem* $u_\varepsilon(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega'} u(x)\omega_\varepsilon(x - y)\,\mathrm{d}y$*. Potom pro libovolnou* $\Omega' \colon \overline{\Omega'} \subsetneq \Omega$ *platí* $\lim_{\varepsilon \to 0} \|u_\varepsilon - u\|_{C(\overline{\Omega'})} = 0$.

Podobné tvrzení platí i pro Hölderovy prostory.

Věta 1.177 (srovnej diskuzi v [**6**] na str. 148)**.** *Nechť* $u \in C^\alpha(\overline{\Omega})$*,* $0 < \alpha \leq 1$*. Pro libovolnou* $\Omega' \colon \overline{\Omega'} \subsetneq \Omega$ *a* $0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(\partial\Omega, \overline{\Omega'})$ *definujeme* $u_\varepsilon \colon \Omega' \to \mathbb{R}$ *vztahem* $u_\varepsilon(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega'} u(x)\omega_\varepsilon(x - y)\,\mathrm{d}y$*. Potom pro libovolnou* $\Omega' \colon \overline{\Omega'} \subsetneq \Omega$ *a libovolné* $0 < \beta < \alpha$ *platí* $\lim_{\varepsilon \to 0} \|u_\varepsilon - u\|_{C^\beta(\overline{\Omega'})} = 0$.

1.4. Typy oblastí

Definice 1.178. Řekneme, že omezená oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ má hranici třídy $C^{k,\alpha}$, jestliže tato hranice může být pokryta konečně mnoha $(N-1)$-dimensionálními nadplochami Γ^i, $i = 1, 2, \ldots, M < +\infty$, které ve vhodně zvoleném lokálním systému souřadnic $(\xi^i_1, \ldots, \xi^i_N)$ lze vyjádřit ve tvaru

$$\xi^i_N = g^i(\xi^i_1, \ldots, \xi^i_{N-1})\,, \quad i = 1, 2, \ldots, M\,,$$

kde

$$g^i \in C^{k,\alpha}(Q^i)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, M\,,$$

$Q^i \stackrel{\text{def}}{=} \{(\xi_1^i, \ldots, \xi_{N-1}^i) \in \mathbb{R}^{N-1} \colon |(\xi_1^i, \ldots, \xi_{N-1}^i)|_{\mathbb{R}^{N-1}} \leq r^i\}$ a $r^i > 0$. Dále předpokládáme, že existuje $\varepsilon_0 > 0$ tak, že paralelní posuv nadplochy Γ_ε^i daný rovnicí

$$\xi_N^i = g^i(\xi_1^i, \ldots, \xi_{N-1}^i) + \varepsilon\,,$$

pro $-\varepsilon_0 < \varepsilon < 0$ leží v Ω a pro $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ v Ω neleží. (Díky tomu oblast Ω leží lokálně na jedné straně své hranice $\partial\Omega$).

Věta 1.179. *Omezená oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ s hranicí třídy $C^{k,\alpha}$, $k+\alpha \geq 1$, splňuje S-podmínku.*

Důsledek 1.180. *Nechť oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ má hranici třídy $C^{k,\alpha}$, $k + \alpha \geq 1$. Potom na této oblasti vnoření z Věty 1.171 platí.*

1.5. Kompaktnost množin v prostorech spojitých funkcí

Věta 1.181 (Arzelà-Ascoli, dodat citaci)**.** *Nechť X je kompaktní metrický prostor s metrikou $d : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ a K je omezená podmnožina $C(X)$, tj.*

$$\sup_{u \in C(X)} \|u\|_{C(X)} < c < +\infty\,. \tag{1.69}$$

Jestliže pro všechna $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x_1, x_2 \in X$ a všechna $u \in K$ platí implikace

$$d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow |u(x_1) - u(x_2)| < \varepsilon\,, \tag{1.70}$$

pak uzávěr K v $C(K)$ je kompaktní.

Poznámka 1.182. Podmínce (1.69) se říká *stejná omezenost* a podmínce (1.70) se říká *stejná spojitost*.

KAPITOLA 2

Úvod do teorie distribucí

2.1. Motivace

Koncept distribuce vychází přirozeně z poměrně jednoduchých fyzikálních úvah týkajících se rozložení nějaké fyzikální veličiny v prostoru. Odtud název distribuce. Rozložení fyzikálních veličin může být spojité, nespojité i diskrétní, případně různé kombinace těchto rozložení. Protože většina rovnic matematické fyziky popisujících vztah mezi fyzikálními veličinami má diferenciální charakter, je cílem teorie distribucí vytvořit takový aparát, který by umožnil užití metod diferenciálního počtu i na nespojité případně diskrétně rozložené veličiny. Z matematického pohledu lze distribuce považovat za jisté zobecnění funkcí, které zbavuje diferenciální počet komplikací způsobených existencí nehladkých funkcí. Teorie distribucí rozšiřuje metody diferenciálního počtu na velice širokou třídu objektů, distribucí, kterým se také říká zobecněné funkce. Toto rozšíření diferenciálního počtu na širší třídu objektů splňuje následující přirozené požadavky (viz Rudin [**14**, Kap. 6]):

(1) Každá lokálně integrovatelná funkce je distribuce.
(2) Každá distribuce má všechny parciální derivace, které jsou opět distribucemi. Třída distribucí je tedy uzavřená vzhledem k derivování a každá distribuce má derivace všech řádů.
(3) Pro diferencovatelnou funkci je nově definovaná derivace pro distribuce identická (v jistém smyslu) s původní definicí.
(4) Běžná formální pravidla diferenciálního počtu platí i pro distribuce.
(5) Teorie distribucí je vybudována tak, aby platily vhodné konvergenční věty pro limitní procesy.

Nyní se vrátíme k fyzikální motivaci pojmu distribuce. Uvidíme, že distribuce matematicky vyjadřuje fyzikální fakt, že není v praxi možné stanovit hodnotu fyzikální veličiny v daném bodě, ale pouze její průměrnou hodnotu v nějaké dostatečně malé testovací oblasti obsahující daný bod. Za tímto účelem uvažujme prostorové rozložení nějaké fyzikální veličiny popsané funkcí f. Abychom mohli vyjádřit průměrnou hodnotu funkce v dané testovací oblasti pomocí integrálu, budeme o této funkci předpokládat, že je lokálně integrovatelná v Lebesguově smyslu, tj. $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, kde Ω je otevřená podmnožina $\mathbb{R}^N$ (oblast). Z teorie lebesguovsky integrovatelných funkcí je známo, že prostor $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ je faktor-prostor integrovatelných funkcí nabývajících stejných hodnot v Ω až na množinu Lebesgueovy míry nula a tudíž funkční hodnota daného reprezentanta $f(x)$ v konkrétním bodě $x \in \Omega$ nemá žádný význam (buď není definována vůbec, a pokud je, pak stejně neovlivní hodnotu integrálu). Avšak z fyzikálního hlediska, je možné uvažovat pouze integrální průměry f na libovolně malých podoblastech Ω. Speciálně můžeme uvažovat integrální průměry na koulích $B(x,\varepsilon) \subset \Omega$, se středem v $x \in \Omega$ a poloměrem ε. Z teorie Lebesgueova integrálu plyne, že pro skoro všechna $x \in \Omega$ (ve smyslu Lebesguovy míry), následující limita existuje a pro skoro všechna $x \in \Omega$ platí

$$f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{|B(x,\varepsilon)|} \int_{B(x,\varepsilon)} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,.$$

Body, ve kterých toto platí nazýváme Lebesguovými body funkce f. Povšimněte si, že integrály přes koule $B(x,\varepsilon) \subset \Omega$ lze přepsat jako integrály přes celou oblast následujícím způsobem:

$$\frac{1}{|B(x,\varepsilon)|}\int_{B(x,\varepsilon)} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_\Omega f(\xi)v_{x,\varepsilon}(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,,$$

kde

$$v_{x,\varepsilon}(\xi) = \begin{cases} 1/|B(x,\varepsilon)| & \text{pokud } \xi \in B(x,\varepsilon)\,, \\ 0 & \text{jinak}\,. \end{cases}$$

Tudíž je ekvivalentní znát f jakožto element $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ nebo znát hodnoty integrálů

$$\int_\Omega f(\xi)v_{x,\varepsilon}(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,, \tag{2.1}$$

pro všechna $x \in \Omega$ a $\varepsilon > 0$ taková, že $B(x,\varepsilon) \subset \Omega$. Obecněji, distribuci přiřazenou k funkci f pak chápeme jako zobrazení $\mathcal{F} : v \mapsto \int_\Omega f(\xi)v(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ pro v z určité třídy funkcí, které se nazývají testovací funkce. Protože integrály (2.1) nám poskytují informaci o tom, jak jsou funkční hodnoty v Ω rozloženy, tj. distribuovány, je tato úvaha motivací k zavedení abstrakního pojmu distribuce.

Před tím, než vyslovíme přesnou definici se ještě podíváme na jeden motivační příklad, který ukazuje, že distribucemi můžeme popisovat i taková fyzikálně opodstatněná rozložení veličin, která pomocí funkcí z $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ popsat nejdou. Předpokládejme, že bychom chtěli popsat fyzikální situaci, kdy je hmota soustředěna do velmi malého prostoru, jehož velikost je pod rozlišovací schopnosti přístrojů. Z gravitačních účinků jsme pouze schopni určit celkovou hmotnost soustředěnou do tohoto zanedbatelného prostoru a známe polohu těžiště (tu lze z gravitačních účinků zjistit měřením). Pro jednoduchost uvažujme polohu tohoto těžiště v počátku $o \in \Omega$ a hmotu soustředěnou do počátku uvažujme jednotkovou. Potom celková hmota soustředěná v kouli $B(x,\varepsilon)$ je

$$m(B(x,\varepsilon)) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } o \in B(x,\varepsilon)\,, \\ 0 & \text{pokud } o \notin B(x,\varepsilon)\,. \end{cases}$$

Předpokládejme sporem, že takovéto rozložení lze popsat funkcí $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, to jest, existuje $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ taková, že

$$\int_{B(x,\varepsilon)} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \begin{cases} 1 & \text{pokud } o \in B(x,\varepsilon)\,, \\ 0 & \text{pokud } o \notin B(x,\varepsilon)\,. \end{cases} \tag{2.2}$$

Pro $x \neq o$ platí $o \notin B(x,\varepsilon)$ pro všechna $\varepsilon : 0 < \varepsilon < |x|_{\mathbb{R}^N}$. Máme pro skoro všechna $x \in \Omega$: $f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{|B(x,\varepsilon)|}\int_{B(x,\varepsilon)} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 0$. Na druhou stranu, je-li $f(x) = 0$ pro skoro všechna $x \in \Omega$, pak $\int_{B(x,\varepsilon)} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 0$ pro všechny koule $B(x,\varepsilon) \subset \Omega$, tedy i $\int_{B(0,\varepsilon)} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 0$, což je ve sporu s předpokladem (2.2), neboť $o \in B(0,\varepsilon)$ pro libovolné $\varepsilon > 0$.

Nyní se na celou situaci podívejme z jiného pohledu. Fakt, že hmota je koncentrována do počátku, lze považovat za limitní případ rovnoměrného rozdělení stejné celkové hmoty v čím dál menších koulích se středem v počátku. Uvažujme tedy jednoparametrický systém funkcí $f_\varepsilon \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ definovaných vztahem:

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1/|B(0,\varepsilon)| & x \in B(0,\varepsilon)\,, \\ 0\,, \end{cases}$$

pro $\varepsilon > 0 :\ B(0,\varepsilon) \subset \Omega$. Potom distribuce přiřazená k funkci f_ε, je zobrazení

$$v \mapsto \int_\Omega f_\varepsilon(\xi)v(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{|B(0,\varepsilon)|}\int_{B(0,\varepsilon)} v(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,.$$

Zbývá vyjasnit z jaké třídy volit testovací funkce v. Protože $f_\varepsilon \in L^\infty(\Omega)$ a $f_\varepsilon = 0$ vně $B(0,\varepsilon)$, je patrné, že integrály mají smysl pro libovolnou testovací funkci $v \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Z Věty 1.112 plyne, že pro testovací funkci $v \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ limita

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{|B(x,\varepsilon)|}\int_{B(x,\varepsilon)} v(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

existuje ve skoro každém bodě $x \in \Omega$ a je rovna $v(x)$. Pokud by tedy testovací funkce v byla z $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, limita

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega f_\varepsilon(\xi)v(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{|B(x,\varepsilon)|}\int_{B(x,\varepsilon)} v(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

obecně nemá smysl, neboť $v(x)$ není v třídě $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ dáno jednoznačně a ani nemusí být definováno. Pokud vezmeme za třídu testovacích funkcí prostor $C_{\text{c}}(\Omega)$ (prostor spojitých funkcí s kompaktním nosičem v Ω), pak podle Poznámky 1.111,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega f_\varepsilon(\xi)v(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{|B(x,\varepsilon)|}\int_{B(x,\varepsilon)} v(\xi)\,\mathrm{d}\xi = v(o)\,.$$

Hledaná limitní distribuce je tedy zobrazení:

$$\delta_o : C_{\text{c}}(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto v(0)\,. \tag{2.3}$$

Protože se jedná o fyzikálně významnou distribuci, značíme ji δ_o a nazýváme ji Diracova distribuce. Jak bylo ukázáno výše, Diracovu distribuci δ_o nelze reprezentovat lokálně integrovatelnou funkcí. Budeme-li pro jednoduchost uvažovat *omezenou* oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, pak zobrazení definované vztahem (2.3) je spojité a podle Rieszovy-Alexandrovovy věty 1.148 existuje Borelovská míra $\mu : \mathfrak{B}(\Omega) \to \mathbb{R}$ taková, že

$$v(o) = \delta_o(v) = \int_\Omega v\,\mathrm{d}\mu$$

pro všechny funkce $v \in C(\overline{\Omega})$. Tato míra se nazývá též Diracova míra a také se obvykle značí δ_o. Zápis pak vypadá takto:

$$\delta_o(v) = \int_\Omega v\,\mathrm{d}\delta_o\,.$$

Pro neomezené oblasti je situace trochu komplikovanější a bude vyřešena v následující kapitole.

Pomocí distribucí můžeme pracovat s celou řadou objektů reprezentujících lineární funkcionály, které nelze ztotožnit s funkcemi. Můžeme například definovat derivaci libovolné funkce z $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Pro jednoduchost, protože ještě nemáme definované potřebné pojmy, si to vysvětlíme na funkci z $L^1(\Omega)$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je *omezená* oblast. Vezměme $f \in L^1(\Omega)$ a pokusme se nalézt vhodnou definici pro $\partial f/\partial x_i$. Za testovací funkce vezměme prostor $C^1(\overline{\Omega})$, což je normovaný lineární prostor nad tělesem $\mathbb{R}$. Tento prostor uvažujeme s normou $\|\cdot\|_{C^1(\overline{\Omega})}$, vzhledem ke které je Banachův. *Distribucemi* budeme *v tomto příkladě* rozumět spojité lineární funkcionály na $C^1(\overline{\Omega})$. K definici distributivní derivace funkce $f \in L^1(\Omega)$ se dostateme pomocí názorného limitního přechodu. Aproximujme funkci $f \in L^1(\Omega)$ posloupností funkcí f_n z $C^1(\overline{\Omega})$. Připomeňme, že prostor $C^1(\overline{\Omega})$ je hustý v $L^1(\Omega)$. Pro libovolnou funkci $f_n \in C^1(\overline{\Omega})$ pak příslušná distribuce $\partial f_n/\partial x_i$ je zobrazení

$$C^1(\overline{\Omega}) \to \mathbb{R}, v \mapsto \int_\Omega \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(x)v(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

V integrálu však nemůžeme přejít k limitě pro $n \to \infty$. Integrací per-partes dostaneme ekvivalentní vyjádření

$$\int_\Omega \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(x)v(x)\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega f_n(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\,\mathrm{d}x$$

platné pro každé $n \in \mathbb{N}$. Protože $f_n \to f$ v $L^1(\Omega)$, dostáváme

$$\sup_{v\in C^1(\overline{\Omega}),\|v\|_{C^1(\overline{\Omega})}\le 1}\left|\int_\Omega (f_n(x)-f(x))\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_\Omega |f_n(x)-f(x)|\,\mathrm{d}x \to 0\,.$$

Z předchozí nerovnosti plyne, že posloupnost T_n spojitých funkcionálů asociovaných s $f_n \in C^1(\overline{\Omega})$

$$T_n : C^1(\overline{\Omega}) \to \mathbb{R}, v \mapsto \int_\Omega \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(x)v(x)\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega f_n(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\,\mathrm{d}x$$

konverguje v operátorové normě k funkcionálu

$$T : C^1(\overline{\Omega}) \to \mathbb{R}, v \mapsto -\int_\Omega f(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{2.4}$$

Tento operátor pak nazveme distributivní derivace $f \in L^1(\Omega)$. Distribuce přiřazená k $\partial f/\partial x_i$ je potom spojitý lineární funkcionál T definovaný (2.4).

Podobně bychom na $\overline{\Omega}$ mohli definovat i derivace vyšších řádů tím, že bychom zvýšili požadavky na hladkost testovacích funkcí. Předchozí příklady nás motivovaly k zavedení pojmu distribuce a první distributivní derivace. Abychom mohli podobné limitní přechody provádět nejen na kompaktních podmnožinách $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^N$, kde Ω je omezená oblast, ale i na obecně otevřených i neomezených oblastech Ω, musíme vhodně zvolit prostor testovacích funkcí a hlavně velmi netriviálním způsobem definovat na tomto prostoru topologii, která nám tyto limitní přechody umožní. O tom pojednává následující odstavec.

2.2. Prostor testovacích funkcí $\mathscr{D}(\Omega)$

V tomto odstavci definujeme prostor testovacích funkcí a zavedeme na něm vhodnou topologii a uvedeme některá klíčová tvrzení. Důkazy těchto tvrzení mají fundamentální charakter a jsou velmi obtížné. Proto je zde neuvádíme a odkazujeme do monografie [**14**, Rudin, str. 32 a 33].

Definice 2.1. Prvek $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$, kde $N \in \mathbb{N}$ je dimenze oblasti Ω (Ω je otevřená souvislá podmnožina $\subset \mathbb{R}^N$) se nazývá *multiindex*. Přirozené číslo $|\alpha| \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N$ se nazývá *délka multiindexu* α. Symbol $D^\alpha v$ bude v následujícím textu značit parciální derivaci (a to i v zobecněném smyslu, viz dále):

$$D^\alpha v \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_N^{\alpha_N}} .$$

Řekneme, že funkce $v : \Omega \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) definovaná na oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ patří do $C^\infty(\Omega)$, pokud $D^\alpha v \in C(\Omega)$ pro všechny multiindexy $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$.

Definice 2.2. *Nosič* funkce $v : \Omega \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) je množina

$$\operatorname{supp} v \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\{x \in \Omega : v(x) \neq 0\}} .$$

Je-li $K \subset \Omega$ kompaktní množina, potom $\mathscr{D}_K(\Omega)$ značí prostor všech funkcí $v \in C^\infty(\Omega)$ s nosičem obsaženým v K, tj.

$$\mathscr{D}_K(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in C^\infty(\Omega) : \operatorname{supp} v \subset K\} . \tag{2.5}$$

Poznámka 2.3. Snadno se ověří, že $C^\infty(\Omega)$ i $\mathscr{D}_K(\Omega)$ jsou lineární prostory. V následujícím definujeme na těchto prostorech lokálně konvexní topologii i metriku.

Nechť K_i, $i \in \mathbb{N}$ je posloupnost kompaktních množin takových, že $K_i \subset \operatorname{int} K_{i+1}$ a $\Omega = \cup_{i \in \mathbb{N}} K_i$. Na prostoru $C^\infty(\Omega)$ definujeme následující systém seminorem:

$$|\!|\!| v |\!|\!|_i \stackrel{\text{def}}{=} \max\{|D^\alpha v(x)| : x \in K_i, |\alpha| \le i\} . \tag{2.6}$$

Lokální báze lineárního topologického prostoru $C^\infty(\Omega)$ je potom

$$V_i = \{v \in C^\infty(\Omega) : |\!|\!| v |\!|\!| < 1/i\} \quad \text{pro } i \in \mathbb{N} .$$

Systémem seminorem $|\!|\!| \cdot |\!|\!|_i$ je definována metrizovatelná lokálně konvexní topologie na $C^\infty(\Omega)$, viz [**14**, Věta 1.37, str. 26, a bod (c) v poznámce 1.38, str. 27]. Příslušná metrika je dána tímto vztahem:

$$\varrho(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{-i} |\!|\!| u - v |\!|\!|_i}{1 + |\!|\!| u - v |\!|\!|_i} . \tag{2.7}$$

Prostor $C^\infty(\Omega)$, ale bohužel není lokálně omezený a není tudíž ani normovatelný ([**14**, str. 34]). V monografii [**14**, str. 33] je navíc ukázáno, že $C^\infty(\Omega)$ je vzhledem k metrice (2.7) úplný prostor.

Konečně se dostáváme k definici prostoru testovacích funkcí.

Definice 2.4. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je oblast. *Prostorem hladkých funkcí s kompaktním nosičem* nazveme množinu

$$C_c^\infty(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{\substack{K \subset \Omega \\ K \text{ je kompaktní}}} \mathscr{D}_K(\Omega)\,.$$

Snadno se nahlédne, že $C_c^\infty(\Omega)$ je lineární prostor. Problém je se zavedením vhodné topologie na tomto prostoru.

Poznámka 2.5. Prostor $\mathscr{D}_K(\Omega)$ je uzavřený podprostor $C_c^\infty(\Omega)$.[1] Tedy prostor $\mathscr{D}_K(\Omega)$ je také úplný vzhledem k metrice (2.7).

Nejprve začneme "špatnou" topologií. Na prostoru $C_c^\infty(\Omega)$ můžeme uvažovat systém seminorem (2.6) a definovat metriku (2.7). Bohužel vzhledem k této metrice není tento prostor úplný, jak dokládá následující příklad.

Příklad 2.6. Pro jednoduchost zvolme $N = 1$ a $\Omega = \mathbb{R}$. Uvažujme funkci $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ s nosičem v $[-1, 1]$. Potom posloupnost funkcí

$$\phi_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \phi(x-1) + \frac{1}{2}\phi(x-2) + \frac{1}{3}\phi(x-3) + \cdots + \frac{1}{n}\phi(x-n)\,, \quad x \in \mathbb{R}$$

je cauchyovská vzhledem k metrice (2.7), ale její limita nemá kompaktní nosič a tudíž nepatří do $C_c^\infty(\Omega)$ (patří do $C^\infty(\Omega)$, protože tento prostor je již úplný vzhledem k (2.7)).

Definice 2.7. Nechť Ω je oblast v $\mathbb{R}^N$, K je kompaktní podmnožina Ω a nechť τ_K je topologie na $\mathscr{D}_K(\Omega)$ indukovaná metrikou (2.7).

(B) Označme β sjednocení všech konvexních vyvážených[2] množin $U \subset C_c^\infty(\Omega)$ takových, že
$$U \cap \mathscr{D}_K(\Omega) \in \tau_K$$
pro každou kompaktní množinu $K \subset \Omega$.

(T) Označme τ sjednocení všech množin tvaru $\phi + U$, kde $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ a $U \in \beta$.

Věta 2.8 ([**14**, Věta 6.4, str. 138])**.** *Nechť τ a β jsou systémy mmožin z Definice 2.7. Potom*

(a) τ je topologie na lineárním prostoru $C_c^\infty(\Omega)$;
(b) β je lokální báze τ;
(c) prostor $C_c^\infty(\Omega)$ s topologií τ je lokálně konvexní lineární topologický prostor.

---

[1] Pro libovolné pevně dané $x_0 \in \Omega$ definujeme funkcionál
$$\mathcal{F}_{x_0} : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C}), v \mapsto v(x_0)\,.$$
Takto definované funkcionály jsou spojité pro všechna $x_0 \in \Omega$. Snadno zjistíme, že $\mathscr{D}_K(\Omega) = \cap_{x_0 \in \Omega\setminus K} \ker \mathcal{F}_{x_0}$. Tvrzení o uzavřenosti $\mathscr{D}_K(\Omega)$ pak plyne z toho, že jádro spojitého funkcionálu je uzavřená množina a průnik libovolného systému uzavřených množin je uzavřená množina.

[2] Řekneme, že podmnožina E lineárního prostoru L nad $\mathbb{R}$ je vyvážená, pokud $tx \in E$ pro všechna $x \in E$ a $t \in [-1, 1]$

Definice 2.9. Lineární topologický prostor $(C_c^\infty(\Omega), \tau)$ se nazývá *prostor testovacích funkcí* a značí se $\mathscr{D}(\Omega)$.

Definice 2.10. *(Zobecnění cauchyovské posloupnosti a úplnosti prostoru na topologické lineární prostory.)* Nechť X je lineární topologický prostor s topologií τ. Nechť dále β je libovolná lokální báze τ. Řekneme, že posloupnost $\{v_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ je *cauchyovská*, pokud ke každému $U \in \beta$ lze najít $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby $v_n - v_m \in U$ pro všechna $n, m > n_0$.

Lineární topologický prostor X s topologií τ je úplný, pokud každá cauchyovská posloupnost má limitu v X.

Věta 2.11 ([**14**, Věta 6.5 na str. 139])**.**

(1) Topologie τ_k na $\mathscr{D}_K(\Omega)$ je stejná jako topologie, kterou má $\mathscr{D}_K(\Omega)$ jakožto podprostor $\mathscr{D}(\Omega)$.

(2) Je-li E omezená podmnožina $\mathscr{D}(\Omega)$, potom $E \subset \mathscr{D}_K(\Omega)$ pro nějakou kompaktní podmnožinu Ω a navíc existuje posloupnost $\{M_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ taková, že

$$\forall \phi \in E \, \forall n \in \mathbb{N} \colon \|\!|\phi|\!\|_n \leq M_n \, .$$

(3) Je-li $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathscr{D}(\Omega)$ cauchyovská posloupnost, potom existuje kompaktní podmnožina $K \subset \Omega$ taková, že $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathscr{D}_K(\Omega)$ a navíc pro každé pevně dané $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\lim_{i,j\to\infty} \|\!|\phi_i - \phi_j|\!\|_n \to 0 \, .$$

(4) Každá cauchyovská posloupnost v $\mathscr{D}(\Omega)$ je konvergentní (tj. prostor $\mathscr{D}(\Omega)$ je úplný).

(5) Jestliže posloupnost funkcí $\phi_i \to 0$ v topologii $\mathscr{D}(\Omega)$, potom existuje kompaktní podmnožina $K \subset \Omega$ taková, že $\operatorname{supp} \phi_i \subset K$ pro všechna $i \in \mathbb{N}$ a $D^\alpha \phi_i \to 0$ uniformě na K (tedy i na Ω) pro všechny multiindexy $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$.

Poznámka 2.12. *Prostor $\mathscr{D}(\Omega)$ není metrizovatelný.* K tomuto tvrzení se použije Baireho věta o kategoriích [**14**, Věta 2.2 na str. 42] nebo přesněji její důsledek:
Úplný metrický prostor je druhé kategorie sám v sobě, tj. není spočetné sjednocení nikde hustých podmnožin. Protože $\mathscr{D}(\Omega)$ je spočetné sjednocení prostorů $\mathscr{D}_K(\Omega)$, prostory $\mathscr{D}_K(\Omega)$ jsou vzhledem k topologii τ uzavřené (viz poznámka na str. 51), navíc $\mathscr{D}_K$ mají vzhledem k topologii τ prázdný vnitřek, *nemůže být* prostor $\mathscr{D}(\Omega)$ s topologií τ *metrizovatelný* (protože je vzhledem k τ úplný).

Bod 5) z předchozí věty lze přepsat do následujícího tvrzení.

Věta 2.13. *Posloupnost funkcí $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ konverguje v prostoru $\mathscr{D}(\Omega)$ k funkci $v \in \mathscr{D}(\Omega)$ pokud jsou splněny následující podmínky:*

(1) existuje kompaktní množina $K \subset \Omega$ taková, že $\operatorname{supp} v_n \subset K$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $\operatorname{supp} v \subset K$;

(2) pro všechny multiindexy $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, $D^\alpha v_n \to D^\alpha v$ stejnoměrně na K.

Poznámka 2.14. Alternativně se předchozí Věta 2.13 používá k defininici sekvenciální konvergence na $\mathscr{D}(\Omega)$ a topologie τ na $\mathscr{D}(\Omega)$ se pak vůbec nedefinuje.

Věta 2.15 ([**14**, Důsledek Věty 6.6, str. 141])**.** *Každý diferenciální operátor D^α, $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, je spojité zobrazení $\mathscr{D}(\Omega)$ do $\mathscr{D}(\Omega)$.*

2.2.1. Prostor distribucí.

Definice 2.16. *Distribuce* T (na Ω) je spojitá lineární forma na $\mathscr{D}(\Omega)$.

Poznámka 2.17. Podle Věty 2.8 je $\mathscr{D}(\Omega)$ lokálně konvexní prostor. Lokálně konvexní prostory mají tu význačnou vlastnost, že prvky duálního prostoru v něm oddělují prvky [**14**, Důsledek Věty 3.4 na str. 59]. To znamená, že $x_1 = x_2 \in X$ právě tehdy, když $l(x_1) = l(x_2)$ pro všechny $l \in X^*$. Tato vlastnost bude velice významná v aplikacích, např. umožňuje definovat slabou topologii na $\mathscr{D}(\Omega)$ a na topologickém duálu k $\mathscr{D}(\Omega)$ budeme moci definovat $*$-slabou topologii.

Alternativně, bere-li se Věta 2.13 za definici sekvenciální konvergence, lineární forma $T : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ je distribucí na Ω, jestliže pro každou posloupnost $\{v_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathscr{D}(\Omega)$ platí následující implikace:

$$v_n \to 0 \quad \text{v } \mathscr{D}(\Omega) \quad (\text{viz Věta 2.13}) \Longrightarrow T(v_n) \to 0\,.$$

Prostor distribucí na Ω značíme $\mathscr{D}'(\Omega)$. Dualitu mezi $\mathscr{D}(\Omega)$ a $\mathscr{D}'(\Omega)$ zapisujeme

$$\langle T, v\rangle_{(\mathscr{D}'(\Omega),\mathscr{D}(\Omega))} = \langle T, v\rangle = T(v)\,.$$

Následující tvrzení nám umožní rozhodnout, zda je daná lineární forma na $\mathscr{D}(\Omega)$ spojitá a tudíž distribuce.

Propozice 2.18. *Nechť T je lineární forma na $\mathscr{D}(\Omega)$. Potom T je distribuce na Ω právě tehdy, když pro všechny kompaktní $K \subset \Omega$ existuje $n \in \mathbb{N}_0$ a $C \geq 0$ případně závisející na K takové, že*

$$\forall v \in \mathscr{D}(\Omega) : \operatorname{supp} v \subset K \Longrightarrow |T(v)| \leq C \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N :\, |\alpha|\leq n} \|D^\alpha v\|_\infty\,.$$

Poznámka 2.19. *Číslo n z předchozí věty může případně záviset na kompaktní množině $K \subset \Omega$. Pokud n na K nezávisí jedná o takzvanou distribuci konečného řádu n.*

Definice 2.20. Řekneme, že distribuce $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ je *konečného řádu n*, pokud existuje $n \in \mathbb{N}_0$ takové, že pro všechny kompaktní $K \subset \Omega$ existuje $C \geq 0$ případně závisející na K takové, že

$$\forall v \in \mathscr{D}(\Omega) : \operatorname{supp} v \subset K \Longrightarrow |T(v)| \leq C \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N :\, |\alpha|\leq n} \|D^\alpha v\|_\infty\,.$$

Příklad 2.21. Nechť $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Potom f definuje distribuci konečného řádu 0 identitou:

$$\forall \phi \in \mathscr{D}(\Omega) \colon T_f(\phi) = \int_\Omega f(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Takto definovaná distribuce T_f se pak v praxi ztotožňuje s funkcí f.

Řešení. Z linearity integrálu plyne, že T_f je lineární zobrazení. Nyní dokážeme spojitost T_f. Uvažujme K kompaktní podmnožinu $K \subset \Omega$ a $u \in \mathscr{D}_K$, t.j. $u \in \mathscr{D}$ a její nosič je podmnožinou K. Potom podle Hölderovy nerovnosti platí

$$\begin{aligned} |T_f(\phi)| &= \left| \int_K f(x)\phi(x)dx \right| \\ &\leq \int_K |f(x)| \; |\phi(x)|\, dx \\ &\leq \int_K |f(x)| dx \, \|\phi\|_\infty . \end{aligned}$$

Protože f je lokálně integrovatelná, je $\int_K |f(x)| \,\mathrm{d}x$ konečné. Ke každé kompaktní $K \subset \Omega$ tedy existuje $0 \leq C_K = \int_K |f(x)| \,\mathrm{d}x < +\infty$ takové, že

$$|T_f(\phi)| \leq C_K \|\phi\|_\infty \,.$$

Tudíž f je distribuce řádu 0 dle Definice 2.20. □

Definice 2.22. Nechť $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ a nechť existuje $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ tak, že je spléna identita

$$\forall \phi \in \mathscr{D}(\Omega)\colon T(\phi) = \int_\Omega f(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x \,, \tag{2.8}$$

pak se T nazývá *regulární* distribuce a funkce f se nazývá *funkcí asociovanou s distribucí* T_f.

Příklad 2.23. Nechť $\Omega = \mathbb{R}$. Nechť $f(x) = 0$ pro $x \leq 0$ a $f(x) = 1/x$ pro $x > 0$. Zobrazení $T_1 : \mathscr{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \phi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x$ není spojité, tedy není to distribuce. Naproti tomu, je-li $\Omega = \mathbb{R}^+$ a $f(x) = 1/x$ pro $x > 0$, potom obrazení $T_2 : \mathscr{D}(\mathbb{R}^+) \to \mathbb{R}, \phi \mapsto \int_{\mathbb{R}^+} f(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x$ je spojité a je to dokonce distribuce nultého řádu.

Řešení. Funkce $f(x) = 0$ pro $x \leq 0$ a $f(x) = 1/x$ pro $x > 0$ není integrovatelná na kompaktních podmnožinách $\mathbb{R}$ a integrál $\int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x$ není definován pro všechny $\phi(x) \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Stačí např. uvažovat funkce z $\mathscr{D}(\Omega)$ konstantní nenulové na nějakém okolí bodu $x = 0$.

Funkce $f(x) = 1/x$ je lokálně integrovatelná na $\mathbb{R}^+$ a tudíž definuje distribuci nultého řádu.

Příklad 2.24. Nechť $o \in \Omega \subset \mathbb{R}$. Potom δ_0 definovaná identitou

$$\delta_0(\phi) = \phi(o) \quad \forall \phi \in \mathscr{D}(\Omega)$$

je distribuce konečného řádu 0.

Řešení. Zřejmé. Dokažte sami.

Příklad 2.25. Nechť $\mu : \mathfrak{B}(\Omega) \to [0, +\infty]$ je Radonova míra. Potom μ definuje distribuci konečného řádu 0 identitou:

$$T_\mu(\phi) = \int_\Omega \phi \,\mathrm{d}\mu \quad \forall \phi \in \mathscr{D}(\Omega) \,.$$

Takto definovaná distribuce T_μ se pak v praxi ztotožňuje s mírou μ.

Řešení. Nechť $K \subset \Omega$ je kompaktní a $\phi \in \mathscr{D}_K(\Omega)$. Z Hölderovy nerovnosti platí [3]:

$$|T_\mu(\phi)| = \left|\int_\Omega \phi \, \mathrm{d}\mu\right| = \left|\int_K \phi \, \mathrm{d}\mu\right| = \|\phi\|_\infty \left|\int_K \mathrm{d}\mu\right| = \|\phi\|_\infty \, \mu(K) \, .$$

Hledaná konstanta C_K je tedy $\mu(K)$, což je konečné číslo dle předpokladu na míru μ.

Zajímavější je ovšem opačné tvrzení k tvrzení předchozího příkladu.

Věta 2.26. [**9**, Leoni, Věta 9.13] *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je oblast a nechť $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$.*

(1) Jestliže T je kladná distribuce, tj. $T(\phi) \geq 0$ pro všechny nezáporné funkce $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$, potom existuje právě jedna Radonova míra $\mu : \mathfrak{B}(\Omega) \to [0, +\infty]$ taková, že

$$T(\phi) = \int_\Omega \phi \, \mathrm{d}\mu \quad \forall \phi \in \mathscr{D}(\Omega) \, .$$

(2) Jestliže T je distribuce nultého řádu, potom existují dvě Radonovy míry $\mu_1, \mu_2 : \mathfrak{B}(\Omega) \to [0, +\infty]$ takové, že

$$T(\phi) = \int_\Omega \phi \, \mathrm{d}\mu_1 - \int_\Omega \phi \, \mathrm{d}\mu_2 \quad \forall \phi \in \mathscr{D}(\Omega) \, .$$

Poznámka 2.27. Všimněte si, že narozdíl od Riesz-Alexandrovovy věty 1.148, v této větě vystupuje míra, u které se připouští hodnota $+\infty$. Je to dáno topologií prostoru $\mathscr{D}(\Omega)$. Stačí nám *konečnost na kompaktních množinách*. Příkladem Radonovy míry konečné na kompaktních množinách je Lebesgueova míra na $\mathbb{R}^N$ nebo třeba množinová funkce: $\mu(A) \stackrel{\text{def}}{=} \int_A f(x) \, \mathrm{d}x$ pro $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ a $f \geq 0$. Tato míra by nedávala spojitý lineární funkcionál na $C_0(\Omega)$, protože například pro $\Omega = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, $\phi(x) = 1/(1 + x^2) \in C_0(\mathbb{R})$, $\int_\mathbb{R} f(x)v(x) \, \mathrm{d}x = +\infty$.

2.2.2. Lokalizace distribuce - nosič distribuce. Z definice distribuce jakožto spojitého funkcionálu na $\mathscr{D}(\Omega)$ je zřejmé, že není obecně možné počítat hodnoty distribuce v daném bodě $x \in \Omega$ (to není možné ani u lokálně integrovatelných funkcí, které distribuce zobecňují). Na druhou stranu můžeme určit kdy je distribuce nulová v dané oblasti.

Definice 2.28. [**17**, Vladimirov, str. 70–71]

(1) Řekneme, že *distribuce $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ je nulová v oblasti* $G \subset \Omega$, pokud $T(\phi) = 0$ pro všechna $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$, $\operatorname{supp} \phi \subset G$. Píšeme zkráceně $T = 0$ na G.
(2) Řekneme, že *dvě distribuce $S, T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ se rovnají na oblasti $G \subset \Omega$*, pokud $T - S = 0$ na G. Zkráceně píšeme $S = T$ na G.
(3) Řekneme, že *distribuce $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ je třídy $C^k(G)$*, jestliže existuje funkce $f_{k,G} \in C^k(G)$ taková, že T je na G rovna distribuci asociované s funkcí $f_{k,G}$.

Lemma 2.29. [**17**, str. 71] *Nechť $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je pokryta spočetným systémem okolí $B(x_k; R_k)$ (koule se středem x_k a poloměrem R_k), $k \in \mathbb{N}$. Dále nechť na každém okolí $B(x_k; R_k)$ platí $T = T_k \in \mathscr{D}(\Omega)$. Potom je T určeno jednoznačně systémem T_k.*

[3] V této Hölderovy nerovnosti uvažujeme nejprve $\|\phi\|_{\infty,\mu} \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{a \in \mathbb{R} : \mu(\{x : \phi(x) > a\}) = 0\}$. Protože však $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$ je funkce spojitá, $\|\phi\|_{\infty,\mu} = \max_{x \in \Omega} |\phi(x)|$ pro všechny Borelovské míry a můžeme tedy použít supremovou normu pro Lebesgueovu míru $\|\phi\|_\infty$.

Věta 2.30. [**17**, str. 71] *K tomu, aby $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ byla rovna nule na $G \subset \Omega$ je nutné a stačí, aby byla nulová v okolí každého bodu $x \in G$.*

Definice 2.31. Množina všech bodů $x \in \Omega$ takových, že na každém okolí x platí $T \neq 0$, se nazývá nosič distribuce T. Tuto množinu značíme $\operatorname{supp} T$.

Lemma 2.32. [**17**, Du Bois Reymondovo Lemma; str. 72] *K tomu, aby funkce $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(G)$ byla nulová ve smyslu distribucí je nutné a stačí, aby $f(x) = 0$ pro skoro všechna $x \in G$.*

Nejčastěji se používá tento důsledek Du Bois Reymondovo lemmatu:

Důsledek 2.33. *Každá regulární distribuce je definována právě jednou $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ (tedy třídou integrovatelných funkcí lišících nejvýše na množině míry nula).*

Další důsledek Lemmatu 2.32 je tento.

Důsledek 2.34. *Nosič distribuce (podle Def. 2.28) asociované se spojitou funkcí $f \in C(\Omega)$ je stejná množina jako nosič této funkce t.j.* $\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$.

Tematicky do této kapitoly též patří pojem restrikce distribuce.

Definice 2.35. Nechť Ω a Ω' jsou otevřené podmnožiny $\mathbb{R}^N$ a $\Omega \subsetneq \Omega'$. Nechť $E_{\Omega\Omega'} : \mathscr{D}(\Omega') \to \mathscr{D}(\Omega)$ je operátor rozšíření funkcí z $\mathscr{D}(\Omega')$ na $\mathscr{D}(\Omega)$ nulou na $\Omega \setminus \Omega'$, tj.

$$E_{\Omega'\Omega} u \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} u & \text{na } \Omega' \\ 0 & \text{na } \Omega \setminus \Omega' \end{cases} \tag{2.9}$$

pro každou $u \in \mathscr{D}(\Omega')$. Potom restrikce $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ na Ω' je distribuce $T|_{\Omega'} \in \mathscr{D}'(\Omega)$ splňující

$$T|_{\Omega'}(\phi) = T(E_{\Omega'\Omega}\phi) \tag{2.10}$$

pro všechny $\phi \in \mathscr{D}(\Omega')$.

2.2.3. Derivace distribucí.

Věta 2.36. *Nechť $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ je multiindex a $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ je distribuce, potom identita*

$$(D^\alpha T)(\phi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \phi) \quad \forall \phi \in \mathscr{D}(\Omega) \tag{2.11}$$

definuje spojitý lineární funkcionál $(D^\alpha T)$ na $\mathscr{D}(\Omega)$ tj. distribuci.

Důkaz. Linearita se ověří snadno. Je-li $|T(\phi)| \leq C \sum_{|\gamma| \leq n} \|D^\gamma \phi\|_\infty$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}_0$ a všechna $\phi \in \mathscr{D}_K(\Omega)$, potom přímo z definice

$$|\,(D^\alpha T)(\phi)| \leq C \sum_{|\gamma| \leq n + |\alpha|} \|D^\gamma \phi\|_\infty .$$

Tudíž podle Propozice 2.18 je $D^\alpha T$ distribuce. ∎

Definice 2.37. Distribuci $(D^\alpha T)$ přiřazenou $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ a multiindexu $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ identitou (2.11) nazýváme *distributivní derivací T.*

Poznamenejme, že záměna pořadí distributivních derivací $D^\alpha D^\beta T = D^{\alpha+\beta}T = D^\beta D^\alpha T$ platí pro každou distribuci $T \in \mathscr{D}(\Omega)$ a libovolné multiindexy α a β, neboť operátory D^α a D^β komutují na $\mathscr{D}(\Omega)$:

$$(D^\alpha D^\beta T)(\phi) = (-1)^{|\alpha|}(D^\beta T)(D^\alpha \phi) = (-1)^{|\alpha|+|\beta|}T(D^\beta D^\alpha \phi) = \\ (-1)^{|\alpha|+|\beta|}T(D^{\beta+\alpha}\phi) = (D^{\beta+\alpha}T)(\phi)\,.$$

Při práci s distributívními derivacemi funkcí se často používá více rozměrné integrování *per-partes* a Greenovy identity. Zde si uveďme variantu pro dostatečně hladkou dvojici funkcí a oblast s dostatečně hladkou hranicí (v případě výpočtu přes konkrétní hladkou hranici se Hausdorffova míra $\mathcal{H}^{N-1}$ vypočte z parciálních derivací parametrizace dané $N-1$ rozměrné nadplochy).

Věta 2.38 (Vícerozměrná integrace *per-partes*)**.** *Nechť oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast s hranicí $\partial\Omega$ třídy C^1 a $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$. Potom platí*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u(x)v(x)n_i(x)\mathcal{H}^{N-1} - \int_\Omega u(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\,\mathrm{d}x\,, \tag{2.12}$$

kde $n_i(x)$ je i-tá složka jednotkového vektoru vnější normály $\vec{n}(x)$ k nadploše $\partial\Omega$ v bodě $x \in \partial\Omega$ a $i = 1 \dots N$.

Věta 2.39 (Greenova první a druhá identita)**.** *Nechť oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast s hranicí $\partial\Omega$ třídy C^1 a $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. Potom*

$$\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega u(x)\Delta v(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u(x)\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}(x)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \tag{2.13}$$

$$\int_\Omega (u(x)\Delta v(x) - v(x)\Delta u(x))\,\mathrm{d}x = \\ = \int_{\partial\Omega}\left(u(x)\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}(x) - v(x)\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x)\right)\mathrm{d}\mathcal{H}^{N-1} \tag{2.14}$$

V následujícím příkladě si techniku práce s vícerozměrnou integrací *per-partes* názorně předvedeme.

Příklad 2.40. Nechť $\Omega = \mathbb{R}^2$. $f(x,y) = (x^3y - y^3x)/(x^2+y^2)$ pro $(x,y) \neq 0$ a $f(0,0) = 0$. Druhé smíšené parciální derivace této funkce nejsou záměnné v bodě $(0,0)$: $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1 \neq 1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. Naproti tomu pro distributívní derivace platí $D^{(0,1)}D^{(1,0)}f = D^{(1,0)}D^{(0,1)}f$.

Řešení. Výpočtem snadno zjistíme, že

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \\
&= \frac{3y^2-3x^2}{x^2+y^2} - \frac{2y\,(y^3-3x^2y)}{\left(x^2+y^2\right)^2} - \frac{2x\,(3xy^2-x^3)}{\left(x^2+y^2\right)^2} + \frac{8xy\,(xy^3-x^3y)}{\left(x^2+y^2\right)^3} \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)
\end{aligned}$$

pro $(x,y) \neq (0,0)$.

Na druhou stranu,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x,y)-f(0,y)}{x} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(x^3y-y^3x)/(x^2+y^2)-0}{x} = -y \quad \text{pro } y \neq 0\,, \\
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0\,, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{-y-0}{y} = -1
\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) &= \lim_{y\to 0} \frac{f(x,y)-f(x,0)}{x} = \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{(x^3y-y^3x)/(x^2+y^2)-0}{y} = x \quad \text{pro } x \neq 0\,, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0\,, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{y} = \lim_{x\to 0} \frac{x-0}{x} = 1\,.
\end{aligned}$$

Odtud máme hledanou nerovnost $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = -1 \neq 1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Druhé derivace funkce f nejsou záměnné v bodě $(0,0)$. Přesto distribuce $T_f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$ definovaná vztahem:

$$T_f(\phi) \overset{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x,y)(x^3y-y^3x)/(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \forall \phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$$

má derivace všech řádů záměnné. Z definice distributívní derivace a hladkosti ϕ totiž plyne:

$$
\begin{aligned}
&D^{(0,1)}D^{(1,0)}T_f(\phi) = \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}(x,y)(x^3y - y^3x)/(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x}(x,y)(x^3y - y^3x)/(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\
&= D^{(0,1)}D^{(1,0)}T_f(\phi) = D^{(1,1)}T_f(\phi)
\end{aligned}
$$

Ukázali jsme, že klasické smíšené parciální derivace nejsou pro funkci f záměnné, na druhou stranu distributívní derivace záměnné jsou. Z toho vyvstává následující otázka: lze distributívní derivaci $D^{(1,1)}f$ reprezentovat pomocí integrálu a klasické parciální derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ nebo $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$?

Nechť $R > 0$ je takové, že $\operatorname{supp}\phi \subsetneq B(0,R)$. Pro libovolně malé $\varepsilon \in (0,R)$ užitím vzorečku (2.12) pro x na mezikruží $\varepsilon < x^2+y^2 < R$ dostaneme:

$$
\begin{aligned}
&D^{(1,1)}T_f(\phi) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x}(x,y)(x^3y - y^3x)/(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\
&= \left(\int_{\varepsilon<x^2+y^2<R} + \int_{0<x^2+y^2<\varepsilon}\right) \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x}(x,y)f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\
&= \left(\int_{x^2+y^2=\varepsilon^2} + \int_{x^2+y^2=R^2}\right) \frac{\partial\phi}{\partial y}(x,y)f(x,y)n_x\,\mathrm{d}\mathcal{H}^1 - \\
&- \int_{\varepsilon<x^2+y^2<R} \frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \\
&+ \int_{0<x^2+y^2<\varepsilon} \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}(x,y)f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.
\end{aligned}
$$

Protože $\operatorname{supp}\phi \subsetneq B(0,R)$, platí $\int_{x^2+y^2=R^2}\frac{\partial\phi}{\partial y}(x,y)f(x,y)n_x\,\mathrm{d}\mathcal{H}^1 = 0$. Odtud dále pokračujeme a pro libovolně malé $\varepsilon \in (0,R)$ užitím vzorečku (2.12) pro y na mezikruží

$\varepsilon < x^2 + y^2 < R$ dostaneme:

$$\begin{aligned}D^{(1,1)}T_f(\phi) = &\int_{x^2+y^2=\varepsilon^2} \frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y)f(x,y)n_x \,\mathrm{d}\mathcal{H}^1 - \\ &- \left(\int_{x^2+y^2=\varepsilon^2} + \int_{x^2+y^2=R^2}\right) \phi(x,y)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)n_y \,\mathrm{d}\mathcal{H}^1 + \\ &+ \int_{\varepsilon<x^2+y^2<R} \phi(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \\ &+ \int_{0<x^2+y^2<\varepsilon} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}(x,y)f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.\end{aligned}$$

Opět, protože $\operatorname{supp}\phi \subsetneq B(0,R)$, dostaneme $\int_{x^2+y^2=R^2} \phi(x,y)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)n_y \,\mathrm{d}\mathcal{H}^1 = 0$. Protože jak f tak i $\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x}$ jsou spojité na $\overline{B(0,R)}$, pro $\varepsilon \to 0$, dostáváme

$$\int_{\varepsilon<x^2+y^2<R} \phi(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \to \int_{0<x^2+y^2<R} \phi(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

a

$$\int_{0<x^2+y^2<\varepsilon} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}(x,y)f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \to 0\,.$$

Dále f i $\frac{\partial f}{\partial x}$ jsou omezené a spojité na $\overline{B(0,R)}$. Proto

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x^2+y^2=\varepsilon^2} \frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y)f(x,y)n_x \,\mathrm{d}\mathcal{H}^1 = 0 \tag{2.15}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x^2+y^2=\varepsilon^2} \phi(x,y)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)n_y \,\mathrm{d}\mathcal{H}^1 = 0 \tag{2.16}$$

Tudíž

$$\begin{aligned}D^{(1,1)}T_f(\phi) &= \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ \text{(a stejně tak i) } &= \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.\end{aligned}$$

Distribuci $D^{(1,1)}T_f$ lze vyjádřit pomocí $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$, neboť se liší jen v jednom bodě, tedy na množině míry nula. □

Nechť $T_f \in \mathscr{D}(\Omega)$ je distribuce asociovaná s lokálně integrovatelnou funkcí. Potom distributívní derivace T_f existuje a je podle výše uvedené věty také distribucí. Nyní vyvstává zajímavá otázka, co se stane, pokud $D^\alpha f$ existuje v klasickém smyslu a je lokálně integrovatelná. Zajímá nás vztah mezi klasickou derivací $D^\alpha f$ a $D^\alpha T_f$, speciálně nás zajímá, zda platí

$$(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega f(x)(D^\alpha \phi)(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega (D^\alpha f)(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall \phi \in \mathscr{D}(\Omega)\,.$$

Pokud f má všechny parciální derivace spojité až do řádu M včetně a $|\alpha| \leq M$, předchozí rovnost platí — stačí integrovat per-partes jako v předchozím příkladě. Problém nastane pokud tato podmínka spojitosti neplatí, jak ukazuje následující příklad:

Příklad 2.41. Nechť $\Omega = \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ pro $x < 0$ a $f(x) = 1$ pro $x \geq 0$. Potom $f'(x) = 0$ pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}$ a tudíž $f' \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Na druhou stranu

$$\left\langle D^{(1)} T_f, \phi \right\rangle = -\left\langle T_f, \phi' \right\rangle = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\phi'(x)\,\mathrm{d}x = \\ -\int_0^\infty \phi'(x)\,\mathrm{d}x = \phi(0) - \lim_{x\to\infty} \phi(x) = \phi(0) = \delta_0(\phi)\,.$$

Předchozí příklad lze ještě poněkud zobecnit.

Věta 2.42. *Nechť $\Omega = \mathbb{R}$ a f je zprava spojitá neklesající funkce. Potom identita*

$$\left\langle D^{(1)} f, \phi \right\rangle = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) f'(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall \phi \in \mathscr{D}(\Omega)$$

platí právě tehdy, když f je absolutně spojitá. Pokud f je zprava spojitá neklesající funkce ale není absolutně spojitá, pak platí alespoň toto:

$$\left\langle D^{(1)} f, \phi \right\rangle = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \quad \forall \phi \in \mathscr{D}(\Omega)\,, \tag{2.17}$$

kde μ je úplná Lebesgueova-Stieltjesova míra splňující $\mu((a,b]) = f(b) - f(a)$ pro všechna $a < b \in \mathbb{R}$.

Důkaz. Je známo, že derivace zprava spojité nerostoucí funkce existuje v klasickém smyslu skoro všude vzhledem k Lebesgueově míře 1.113 a že platí $f' \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Nyní dokážeme identitu (2.17). Vyjdeme z definice distributívní derivace

$$\left\langle D^{(1)} f, \phi \right\rangle = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\phi'(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall \phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})\,.$$

Zvolme $K > 0$ takové, že pro dané $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ platí $\operatorname{supp}\phi \subset (-K, K)$. Potom $f(y) = \mu((-K, y]) + f(-K)$ a

$$
\begin{aligned}
&-\int_{\mathbb{R}} f(x)\phi'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-K}^{K} f(x)\phi'(x)\,\mathrm{d}x = \\
&= -\int_{-K}^{K} \big\{ f(-K) + \mu\left((-K, x]\right) \big\} \phi'(x)\,\mathrm{d}x = \\
&= -f(-K)\int_{-K}^{K} \phi'(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-K}^{K} \left(\int_{-K}^{x} \mathrm{d}\mu(y) \right) \phi'(x)\,\mathrm{d}x = \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} - \iint\limits_{-K<x<K,-K<y<x} \phi'(x)\,\mathrm{d}\mu(y) \otimes \mathrm{d}x = \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} - \int_{-K}^{K} \left(\int_{y}^{K} \phi'(x)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}\mu(y) = \\
&= - \textstyle\int_{-K}^{K} \left[\phi(x)\right]_y^K \,\mathrm{d}\mu(y) = \int_{-K}^{K} \phi(y)\,\mathrm{d}\mu(y) = \int_{\mathbb{R}} \phi(y)\,\mathrm{d}\mu(y)\,.
\end{aligned}
$$

Úprava třetího řádku na čtvrtý a čtvrtého řádku na pátý je provedena pomocí Fubiniovy věty[4]. Protože rovnost

$$
\int_{-K}^{K} \phi(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{-K}^{K} \phi(x) f'(x)\,\mathrm{d}x
$$

nastává právě tehdy, když f je absolutně spojitá, dostáváme odtud hledané kritérium v jedné dimenzi. ■

Příklad 2.43. Distributivní derivace Cantorovy funkce $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je Borelovská míra.

Řešení. Připomeňme aritmetickou definici Cantorovy funkce. Funkce $C(x) = 0$ pro $x < 0$, $C(x) = 1$ pro $x > 1$ a tedy $C'(x) = 0$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]$. Nyní definujeme $C(x)$ pro $x \in [0, 1]$. Nechť $x \in [0, 1]$ je libovolné pevné a posloupnost $\{a_{x,j}\}_{j=1}^{\infty}$ je taková, že $a_{x,j} = \{0, 1, 2\}$ pro všechna $j \in \mathbb{N}$ a $x = \sum_{j=1}^{\infty} 3^{-j} a_{x,j}$ (triadický rozvoj x). Připomeňme, že tento rozvoj existuje pro každé číslo $x \in [0, 1]$ a je jednoznačný, pokud pro všechna

---

[4] Lebesgueova-Stieltjesova míra vytvořená z neklesající zprava spojité funkce f je σ-konečná na $\mathbb{R}$ a konečná na $(-K, K)$. Z tohoto důvodu je i součinová míra $\mu \otimes \lambda$ (λ značí Lebesgueovu míru) konečná na $(-K, K) \times (-K, K)$. Integrál

$$
- \iint\limits_{-K<x<K,-K<y<x} \phi'(x)\,\mathrm{d}\mu(y) \otimes \mathrm{d}x
$$

má smysl, neboť integrujeme omezenou spojitou funkci $\phi(x)$ přes oblast $(-K, K) \times (-K, K)$ konečné $\mu \otimes \lambda$-míry. Tím jsou ověřeny podmínky Fubiniovy věty.

$k, m \in \mathbb{N}$ platí $x \neq \pm m/3^k$. Pokud $x = \pm m/3^k$ pro nějaké $k, m \in \mathbb{N}$, existují dva rozvoje čísla x:

$$x = \sum_{j=1}^{j_0} 3^{-j} a_{x,j} \quad \text{a } x = \sum_{j=1}^{j_0-1} 3^{-j} a_{x,j} + (a_{x,j_0} - 1)3^{-j_0} + 2\sum_{j_0+1}^{\infty} 3^{-j}\,,$$

kde $a_{x,j_0} \in \{1,2\}$. V případě nejednoznačného rozvoje volíme ten druhý. Nechť $M_x \overset{\text{def}}{=} \min\{i \in \mathbb{N} : a_{x,i} = 1\}$ pokud $\{i \in \mathbb{N} : a_{x,i} = 1\} \neq \emptyset$ a $M_x \overset{\text{def}}{=} \infty$ v opačném případě. Potom hodnota Cantorovy funkce v bodě x je definována následovně:

$$C(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2^{M_x}} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{M_x-1} 2^{-j} a_{x,j}\,, \tag{2.18}$$

kde pro $M_x = \infty$ položíme $1/2^{M_x} \overset{\text{def}}{=} 0$ a sumu do $M_x - 1$ chápeme jako součet nekonečné řady. Tato definice je převzata z přehledového článku o Cantorově funkci Dovgoshey-Martio-Ryazanov-Vuorinen [**4**].

Z aritmetické definice snadno plyne, že Cantorova funkce je *neklesající* funkce (dokažte jako cvičení).

Z konstrukce je dále patrné, že Cantorova funkce je konstantní na intervalech, které lze zapsat v trojkové soustavě jako

$$I_{(b_1,b_2,\ldots,b_n)} = (0.b_1b_2b_3\cdots b_n022222\cdots\,,\ 0.b_1b_2b_3\cdots b_n122222\cdots)\,,$$

$b_i \in \{0,2\}, i = 1\ldots n$ a $n \in \mathbb{N}$, což jsou přesně ty intervaly, které se vyjímají z intervalu $[0,1]$ při konstrukci Cantorova diskontinua.

Nyní dokážeme spojitost funkce C na intervalu $[0,1]$. Pro libovolné dva body $x, y \in [0,1] : x \neq y$ platí

$$x \to y \Rightarrow \min\{n \in \mathbb{N} : a_{x,n} - a_{y,n} \neq 0\} \to \infty\,. \tag{2.19}$$

Uvažujme posloupnost $y_m \to x$, $y_m \neq x$ a označme

$$N_m \overset{\text{def}}{=} \min\{n \in \mathbb{N} : a_{x,n} - a_{y_m,n} \neq 0\}\,. \tag{2.20}$$

Pak z (2.19) plyne, že $N_m \to \infty$ pro $m \to \infty$. Pro $M_x \neq \infty$ tedy existuje $m_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall m \in \mathbb{N}$: $m > m_0 \Rightarrow N_m > M_x$. Potom

$$M_x = \min\{n \in \mathbb{N} : a_{x,n}\} = \min\{n \in \mathbb{N} : a_{y_m,n}\} = M_{y_m} \quad \forall m > m_0\,.$$

Pak ovšem platí

$$C(x) - C(y) = \frac{1}{2^{M_x}} - \frac{1}{2^{M_x}} + \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{M_x-1} 2^{-j} a_{x,j} - \sum_{j=1}^{M_{y_m}-1} 2^{-j} a_{y_m,j}\right) = 0$$

pro všechna $m > m_0$. Funkce C je spojitá ve všech bodech $x \in [0,1]$, kde $M_x < \infty$. Pro $M_x = \infty$ musí $M_{y_m} \to \infty$. Potom

$$\begin{aligned}
&|C(x) - C(y_m)| = \\
&= \left| -\frac{1}{2^{M_{y_m}}} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_m - 1} 2^{-j} \left(a_{x,j} - a_{y_m,j}\right) + \frac{1}{2} \sum_{j=N_m}^{\infty} 2^{-j} \left(a_{x,j} - a_{y_m,j}\right) \right| \leq \\
&\leq \frac{1}{2^{M_{y_m}}} + \frac{1}{2} \sum_{j=N_m}^{\infty} 2^{-j} \left(a_{x,j} + a_{y_m,j}\right) \leq \frac{1}{2^{M_{y_m}}} + \frac{1}{2} \sum_{j=N_m}^{\infty} 2^{-j} (2+2) = \\
&= \frac{1}{2^{M_{y_m}}} + \frac{1}{2} 2^{1-N_m} 4 = \frac{1}{2^{M_{y_m}}} + 2^{2-N_m} \to 0
\end{aligned}$$

pro $m \to \infty$. Cantorova funkce je tedy spojitá na $[0,1]$. Protože $C(0) = 0$ a $C(1) = 1$, je Cantorova funkce spojitá na $\mathbb{R}$.

Derivace Cantorovy funkce existuje v klasickém smyslu na $I_{(b_1, b_2, \ldots, b_n)}$ a je rovna 0. Množina

$$[0,1] \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \{0,2\}^n} I_{(b_1, b_2, \ldots, b_n)}$$

je známé Cantorovo diskontinuum, které má Lebesgueovu míru 0. Derivace Cantorovy funkce tedy existuje v klasickém smyslu skoro všude na $\mathbb{R}$ a je rovna nule. Tudíž $C' \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Na druhou stranu je Cantorova funkce nekonstatní a tudíž *není absolutně spojitá.* Podle Věty 2.42 tedy neplatí

$$\left\langle D^{(1)} C, \phi \right\rangle = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) C'(x) \, \mathrm{d}x \quad \forall \phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) \, .$$

Lze říci alespoň toto: úplná Lebesgue-Stietjesova míra κ vytvořená z výchozí množinové funkce $\kappa((a,b]) \stackrel{\text{def}}{=} C(b) - C(a)$ (standardním procesem vytvoření míry z množinové funkce viz např. [Malý]) je distributívní derivace C, tj.:

$$\left\langle D^{(1)} C, \phi \right\rangle = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \, \mathrm{d}\kappa \quad \forall \phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) \, .$$

□

Větu 2.42 lze ještě dále zobecnit:

Věta 2.44. *Nechť $\Omega = \mathbb{R}$ a f je zprava spojitá funkce konečné variace na kompaktních podmnožinách $\mathbb{R}$. Potom identita*

$$\left\langle D^{(1)} f, \phi \right\rangle = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) f'(x) \, \mathrm{d}x \quad \forall \phi \in \mathscr{D}(\Omega)$$

platí právě tehdy, když f je absolutně spojitá*.*

Důkaz. Protože funkce f je zprava spojitá a má konečnou variaci na kompaktních intervalech, na daném kompaktním intervalu ji rozložíme na rozdíl dvou neklesajících zprava spojitých funkcí f_1 a f_2 k nimž vytvoříme Lebesgue-Stieltjesovy míry μ_1 a μ_2. Potom $f(b) - f(a) = \int_a^b \mathrm{d}\mu_1 - \int_a^b \mathrm{d}\mu_2$ pro všechna $a < b \in \mathbb{R}$. Dále postupujeme analogicky jako ve Větě 2.42. ■

Tento výsledek lze dále zobecnit do $\mathbb{R}^N$ viz [Schwartz], Kap. 2, Sek. 5, Věta V, část (1).

Věta 2.45. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je oblast a $P_i^\top\Omega$ je ortogonální projekce Ω do nadroviny $x_i = 0$ v $\mathbb{R}^N$. Nechť $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ je absolutně spojitá vzhledem k proměnné x_i na skoro všech přímkách rovnoběžných s osou x_i procházejících $P_i^\top\Omega$, t.j. pro danou třídu funkcí $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$* [5] *existuje reprezentant $\overline{f}$ takový, že pro $\mathcal{H}^{N-1}$-skoro všechna*

$$(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_N) : (x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_N) \in P_i^\top\Omega$$

platí, že funkce

$$\overline{f}(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_N)$$

je absolutně spojitá funkce jedné reálné proměnné t, kde

$$t \in \{s \in \mathbb{R} : (x_1, \ldots, x_{i-1}, s, x_{i+1}, \ldots, x_N) \in \Omega\} \ .$$

[6] *Nechť dále $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Potom pro každou $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$ lze integrovat* per-partes*:*

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \phi \right\rangle = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega f(x)\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x)\,\mathrm{d}x = \left\langle D^{(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)}f, \phi \right\rangle$$

a tudíž příslušná distributívní parciální derivace souhlasí s klasickou parciální derivací *skoro všude v Ω.*

Důkaz. Viz např. [Schwartz], Kap. 2, Sek. 5, Věta V, část (1). ■

Dále následují užitečné příklady distributívních derivací různých integrovatelných funkcí i distribucí.

Příklad 2.46. Uvažujme $\Omega = \mathbb{R}$. Potom první distributivní derivace funkce $|x|$ je distribuce asociovaná s Heavisideovou funkcí $H_0(x) = 0$ pro $x < 0$, $H_0(x) = 1$ pro $x \geq 0$. Druhá distributivní derivace funkce $|x|$ je Diracova distribuce.

Řešení. Nechť $T(\phi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} |x|\phi(x)\,\mathrm{d}x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Potom dle definice distributívní derivace $T'(\phi) = -\int_{-\infty}^{+\infty} |x|\phi'(x)\,\mathrm{d}x$ pro všechna $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Protože $|x|$ je absolutně spojitá a ϕ má kompaktní nosič na $\mathbb{R}$, integrací *per-partes* dostaneme:

$$T'(\phi) = -\int_{-\infty}^{+\infty} |x|\phi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} H_0(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

pro všechna $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$.

---

[5] Připomeňme opět, že $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ je faktorprostor funkcí $f(x) = \overline{f}(x)$ skoro všude v Ω

[6] Snadno se ověří, že množina $\{s \in \mathbb{R} : (x_1, \ldots, x_{i-1}, s, x_{i+1}, \ldots, x_N) \in \Omega\}$ je otevřená a tudíž spočetné sjednocení otevřených intervalů. Na těchto intervalech pak požadujeme absolutní spojitost $t \to \overline{f}(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_N)$.

Opět podle definice distributívní derivace $T''(\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|\phi''(x)\,\mathrm{d}x$ pro všechna $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Integrací *per-partes* stejně jako v předchozím případě dostaneme:

$$T''(\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|\phi''(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{+\infty} H_0(x)\phi'(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

pro všechna $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Dále již *per-partes* integrovat nemůžeme, protože funkce H_0 není spojitá v nule. Z definice Heavisideovy funkce je patrné, že

$$T''(\phi) = -\int_{-\infty}^{+\infty} H_0(x)\phi'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{0}^{+\infty} \phi'(x)\,\mathrm{d}x$$

a odtud dále integrací:

$$T''(\phi) = -\int_{0}^{+\infty} \phi'(x)\,\mathrm{d}x = -\Big(\lim_{x\to\infty} \phi(x) - \phi(0)\Big) = \phi(0).$$

Tato rovnost je platná pro libovolnou $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$, tudíž $T'' = \delta_0$, což jsme měli ukázat.

Příklad 2.47. Uvažujme $\Omega = \mathbb{R}$. Zobrazení

$$\mathscr{P}_{1/x} : \phi \mapsto \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}} \phi(x)/x\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \phi(x)/x\,\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{\infty} \phi(x)/x\,\mathrm{d}x \right)$$

je distribuce prvního řádu.

Připomeňme, že pro měřitelnou funkci f na $\mathbb{R}$ (funkce f nemusí být integrovatelná) lze definovat tzv. Cauchyovu hlavní hodnotu v nule

$$\text{p.v.} \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \right)\,,$$

kdykoliv má uvedená limita smysl.

Řešení. Nechť $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Potom lze najít $k > 0$ tak, že $\operatorname{supp}\phi \subset [-k, k]$. Pro každé $\varepsilon > 0$, je funkce $\phi(x)/x$ na množině $[-k, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, k]$ lebesgueovsky integrovatelná. Tudíž, po substituci $x \mapsto -x$ pro $x \in [-k, -\varepsilon]$ dostaneme

$$\mathscr{P}_{1/x}(\phi) = \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}} \phi(x)/x\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{[\varepsilon,k]} \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x}\,\mathrm{d}x. \tag{2.21}$$

Protože $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, je integrand v posledním výraze spojitý a dokonce diferencovatelný pro všechna $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Navíc integrand konverguje k $2\phi'(0)$ pro $x \to 0$, tudíž má odstranitelnou nespojitost v $x = 0$. Dodefinováním integrandu hodnotou $2\phi'(0)$ v bodě $x = 0$ dostaneme spojitou funkci na $[0, k]$. Takto dodefinovaný integrand je tedy zřejmě Lebesgueovsky měřitelný a také integrovatelný na $[0, k]$. Použijeme jej tedy jako majorantu v následujícím limitním přechodu. Uvažujme posloupnost $f_n(x) = \chi_{[1/n,k]}\big(\phi(x)-\phi(-x)\big)/x$. Užitím Lebesgueovy věty o dominantní konvergenci dostaneme

$$\mathscr{P}_{1/x}(\phi) \;=\; \int_{[0,k]} \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Jak jsme právě ukázali, integrál na pravé straně existuje a je konečný pro libovolnou $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Tudíž hodnota $\mathscr{P}_{1/x}(\phi)$ je konečná a funkcionál $\mathscr{P}_{1/x}$ zobrazuje $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ do $\mathbb{R}$. Protože $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ je lineární prostor, z linearity integrálu dostáváme linearitu $\mathscr{P}_{1/x}$.

Zbývá dokázat spojitost $\mathscr{P}_{1/x}$. Uvažujme tedy kompaktní množinu $K \subset \mathbb{R}$ a $\phi \in \mathscr{D}_K$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $K \subset [-k,k]$ pro nějaké $k > 0$. Pro $x > 0$ platí

$$\begin{aligned}\left|\frac{\phi(x)-\phi(-x)}{x}\right| &= \left|\frac{1}{x}\int_{(-x,x)} \phi'(t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leq 2\|\phi'\|_\infty,\end{aligned}$$

kde $\|\cdot\|_\infty$ je supremová norma. V rovnosti užijeme základní větu kalkulu pro Lebesgueův integrál, neboť ϕ je absolutně spojitá na $[-k,k]$). Tudíž

$$\left|\mathscr{P}_{1/x}(\phi)\right| \leq 2k\|\phi'\|_\infty$$

a $\mathscr{P}_{1/x}$ je distribuce prvního řádu, což jsme měli ukázat. □

Příklad 2.48. Nechť $\Omega = \mathbb{R}$. Distributívní derivace funkce $\ln|x| \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ je funkcionál $\mathscr{P}_{1/x}$ a nikoliv funkce $\frac{1}{x} \notin L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$.

Řešení. Protože klasická derivace $\frac{\mathrm{d}\ln|x|}{\mathrm{d}x} = 1/x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ (tj. pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}$) a funkce $1/x$ není lokálně integrovatelná, vyvstává otázka jak souvisí distributívní derivace funkce $D^{(1)}\ln|x|$ s funkcí $1/x$.

Z definice distributívní derivace:

$$\left\langle D^{(1)}\ln|x|, \phi\right\rangle = -\left\langle \ln|x|, \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right\rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} \ln|x|\,\phi'(x)\,\mathrm{d}x\,, \tag{2.22}$$

přičemž poslední rovnost platí, protože $\ln|x|$ je lokálně integrovatelná funkce.

Protože $\ln|x|\,\phi'(x)$ je integrovatelná funkce na okolí bodu 0, lze psát

$$\left\langle D^{(1)}\ln|x|, \phi\right\rangle = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon} \ln|x|\,\phi'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Poslední výraz integrujeme *per-partes* s využitím faktu, že ϕ má kompaktní nosič:

$$\begin{aligned}\left\langle D^{(1)}\ln|x|, \phi\right\rangle &= -\lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\ln|x|\,\phi(x)\right]_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\phi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0+} 2\varepsilon\ln\varepsilon\frac{\phi(\varepsilon)-\phi(-\varepsilon)}{2\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\phi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \text{p.v.}\int_{\mathbb{R}}\frac{\phi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \\ &= \mathscr{P}_{1/x}(\phi)\,.\end{aligned}$$

Zbývá ukázat, že $D^{(1)}\ln|x|$ nelze vyjádřit pomocí žádné integrovatelné funkce. Pokud by existovala taková funkce $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, pak by podle Věty 2.30 a Lemmatu 2.32 muselo platit $f(x) - 1/x = 0$ skoro všude na každé oblasti $G \subset \mathbb{R}$ neobsahující bod 0. To by ale znamenalo, že $f(x) = 1/x$ skoro všude v $\mathbb{R}$, což je spor s lokální integrovatelností f.

□

Příklad 2.49. Nechť $\Omega = \mathbb{R}$. Distribuce $T = D^{(1)}\,\mathscr{P}_{1/x}$ je druhého řádu. Navíc platí $T(\phi) = -\,\text{p.v.}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}$.

Řešení. Z definice distributívní derivace máme

$$\left\langle D^{(1)}\,\mathscr{P}_{1/x}, \phi \right\rangle = -\left\langle \mathscr{P}_{1/x}, \phi' \right\rangle = \langle \ln|x|, \phi'' \rangle = \int_{\mathbb{R}} \ln|x|\,\phi''(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

První část tvrzení plyne z toho faktu, že funkce $\ln|x|$ je lokálně integrovatelná. Zbylou část tvrzení dokažte sami integrací *per-partes*.

$\square$

2.2.4. Konvoluce. Nyní zobecníme pojem konvoluce dvou funkcí na konvoluci distribuce a testovací funkce a poté ještě na konvoluci dvou distribucí (z nichž alespoň jedna má kompaktní nosič).

Definice 2.50. Pro funkci $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ a $x, y \in \mathbb{R}^N$ definujeme $\tau_x u$ a $\breve{u}$ předpisy

$$(\tau_x u)\,(y) \stackrel{\text{def}}{=} u(y-x) \tag{2.23}$$

a

$$\breve{u}(y) \stackrel{\text{def}}{=} u(-y)\,. \tag{2.24}$$

Zřejmě

$$(\tau_x \breve{u})\,(y) = \breve{u}(y-x) = u(x-y)\,.$$

Nechť $u, v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ jsou měřitelné funkce, pak jejich konvoluce je definována výrazem

$$(u * v)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^N} u(y)v(x-y)\,\mathrm{d}y \tag{2.25}$$

pokud integrál existuje pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}^N$. Tento integrál existuje pro všechna $x \in \mathbb{R}^N$, pokud jsou např. $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ a $v \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ [7]. Protože (2.25) lze psát jako

$$(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}^\mathbb{N}} u(y)\,(\tau_x \breve{v})\,(y)\,\mathrm{d}y \tag{2.26}$$

je následující definice přirozeným rozšířením definice konvoluce dvou funkcí na konvoluci distribuce a testovací funkce.

Definice 2.51. Nechť $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$ a $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$. *Konvolucí* T a ϕ nazveme funkci $(T * \phi) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ definovanou

$$(T * \phi)(x) \stackrel{\text{def}}{=} T(\tau_x \breve{\phi})\,. \tag{2.27}$$

Poznámka 2.52. Všimněte si, že zobrazení $x \mapsto T(\tau_x \breve{\phi})$ je definováno pro každé $x \in \mathbb{R}^N$, protože je-li $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$, pak také pro každé $x \in \mathbb{R}^N$ je i $\tau_x \breve{\phi} \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ a $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$ je spojitá lineární forma na $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$.

[7] V tomto případě $(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} u(y)v(x-y)\,\mathrm{d}y = \int_{\text{supp}(\tau_x \breve{v})} u(y)\,(\tau_x \breve{v})\,(y)\,\mathrm{d}y$, kde $\text{supp}(\tau_x \breve{v})$ je kompaktní množina a díky tomu stačí $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Pomocí Lebesguovy věty o dominantní konvergenci se pak snadno ověří, že $u * v$ je spojitá funkce na $\mathbb{R}^\mathbb{N}$.

Vzhledem k tomu, že pro měřitelné funkce platí:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \big(\tau_x u\big)(y) v(y)\, \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^N} u(y)\big(\tau_{-x} v\big)(y)\, \mathrm{d}y$$

kdykoliv integrály mají smysl, je přirozené definovat translaci distribuce.

Definice 2.53 (Translace distribuce)**.** Nechť $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$, potom translace distribuce je definována

$$\big(\tau_x T\big)(\phi) = \Big\langle \tau_x T, \phi \Big\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \Big\langle T, \tau_{-x}\phi \Big\rangle = T(\tau_{-x}\phi) \tag{2.28}$$

pro všechna $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$.

Věta 2.54 ([**14**, Věta 6.30, str.156], [**9**, Věta 9.29, str. 275])**.** *Nechť $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$ a $\phi, \psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$. Potom*

(1) $\tau_x(T * \phi) = (\tau_x T) * \phi = T * (\tau_x \phi)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^N$;
(2) $T * \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$;
(3) $\operatorname{supp}(T * \phi) \subset \operatorname{supp} T + \operatorname{supp} \phi$;
(4) pro každý multiindex α platí

$$D^\alpha(T * \phi) = T * \left(\frac{\partial^{|\alpha|}\phi}{\partial x^\alpha}\right) = (D^\alpha T) * \phi\,,$$

(5)

$$(T * \phi) * \psi = T * (\phi * \psi)\,.$$

Důkaz. Viz [**14**], str. 156–157 nebo [**9**], str. 275.

■

Smysl má i následující definice

Definice 2.55. Nechť $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$ má kompaktní nosič a $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. V tomto případě pro každé $x \in \mathbb{R}^N$ definujeme $(T * \phi)(x)$ opět vzorcem (2.27), tj:

$$(T * \phi)(x) \stackrel{\text{def}}{=} T(\tau_x \breve{\phi})\,.$$

Poznámka 2.56. Distribuci $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$ s kompaktním nosičem lze rozšířit na spojitý lineární funkcionál definovaný na $C^\infty(\mathbb{R}^N)$, viz [**14**, Věta 6.24].

Věta 2.57 (Věta 6.35, [**14**])**.** *Předpokládejme, že $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$ má kompaktní nosič a $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. Potom platí*

(1) $\tau_x\,(T * \phi) = (\tau_x u) * \phi = u * (\tau_x\, \phi)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^N$,
(2) $T * \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ a

$$D^\alpha(T * \phi) = (D^\alpha T) * \phi = T * (D^\alpha \phi)\,.$$

(3) Jestliže navíc $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$, potom dokonce $T * \psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$ a

$$T * (\phi * \psi) = (T * \psi) * \psi = (T * \psi) * \phi\,.$$

Definice 2.58. Nechť $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$, $S \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$ a alespoň jedna z těchto distribucí má kompaktní nosič, potom definujeme konvoluci dvou distribucí $T * S$ identitou

$$(T * S)(\phi) \stackrel{\text{def}}{=} T * (S * \phi) \quad \forall \phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)\,.$$

Poznámka 2.59. Správnost této definice vyplývá z úvah v [**14**] na str. 159–160.

Věta 2.60 ([**14**, Věta 6.37, str. 160])**.** *Nechť $R, S, T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$.*

(1) Nechť alespoň jedna z distribucí S, T má kompaktní nosič. Potom

$$S * T = T * S \quad a \ \operatorname{supp}(S * T) = \operatorname{supp} S + \operatorname{supp} T\,.$$

(2) Jestliže alespoň dva nosiče $\operatorname{supp} R, \operatorname{supp} S, \operatorname{supp} T$ *jsou kompaktní, potom*

$$R * (S * T) = (R * S) * T\,.$$

(3) Je-li δ Diracova distribuce a α multiindex, pak

$$D^\alpha T = (D^\alpha \delta) * T\,.$$

Speciálně platí

$$T = \delta * T\,.$$

Důkaz. Viz [**14**], str. 160–161. ■

Tato věta je velice důležitá při konstrukci řešení parciálních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty, známe-li fundamentální řešení.

2.2.5. Topologie v prostoru distribucí. Nyní definujeme vhodnou topologii v prostoru $\mathscr{D}'(\Omega)$ tak, aby byl topologickým duálem k $\mathscr{D}(\Omega)$. Prostor $\mathscr{D}'(\Omega)$ je podle definice prostor všech lineárních funkcionálů definovaných na $\mathscr{D}(\Omega)$ a spojitých v topologii prostoru $\mathscr{D}(\Omega)$. Podle Věty 2.8(c) (viz též [**14**], str. 66) je prostor $\mathscr{D}(\Omega)$ *lokálně konvexní lineární topologický prostor*. Na lokálně konvexních lineárních topologických prostorech lze definovat tzv. $*$-slabou topologii. Nejprve si vysvětlíme, co je $*$-slabá topologie v abstraktních prostorech.

Nechť X je lokálně konvexní lineární topologický prostor (nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$) a nechť X' je množina všech *spojitých* lineárních funkcionálů definovaných na X. Pro pevné $x \in X$ definujeme seminormu na X',

$$p_x : X' \to \mathbb{R}_0^+, p_x(F) \stackrel{\text{def}}{=} |F(x)|\,.$$

Snadno se ověří, že jsou splněny axiomy seminormy:

(1) $p_x(F) \geq 0$ pro všechna $F \in X'$,
(2) $p_x(aF) = |a| p_x(F)$ pro všechna $F \in X'$, $a \in \mathbb{R}$ ($a \in \mathbb{C}$),
(3) $p_x(F + G) \leq p_x(F) + p_x(G)$ pro všechna $F, G \in X'$.

Definice 2.61 ($*$-slabá topologie na X')**.** Topologie na X' definovaná systémem seminorem $\{p_x : x \in X\}$ (lokální báze) se nazývá $*$-slabá topologie na X'.

Tato $*$-slabá topologie na X' je nejslabší topologie taková, že pro libovolné $x \in X$ je zobrazení tvaru $F \mapsto F(x)$ spojité z X' do $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$).

Podle Věty 2.8(c), je $\mathscr{D}(\Omega)$ lokálně konvexní lineární topologický prostor. Proto můžeme na $\mathscr{D}'(\Omega)$ definovat $*$-slabou topologii.

Definice 2.62 ($*$-slabá topologie na $\mathscr{D}'(\Omega)$)**.** Topologie na $\mathscr{D}'(\Omega)$ definovaná systémem seminorem $\{p_\phi : \phi \in \mathscr{D}(\Omega)\}$, $p_\phi(T) \stackrel{\text{def}}{=} |T(\phi)| : T \in \mathscr{D}'(\Omega), \phi \in \mathscr{D}(\Omega)$, se nazývá $*$-slabá topologie na $\mathscr{D}'(\Omega)$.

Tato definice okolí pak vede na následující vlastnost pro konvergenci posloupností:

Věta 2.63 (Konvergence posloupnosti distribucí)**.** *Nechť $\{T_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathscr{D}'(\Omega)$ je posloupnost distribucí a $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Posloupnost $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ konverguje k T v $*$-slabé topologii na $\mathscr{D}'(\Omega)$ právě tehdy, když*

$$\lim_{n\to\infty} T_n(\phi) = T(\phi) \quad \forall \phi \in \mathscr{D}(\Omega)\,.$$

Zkráceně konvergenci v $*$-slabé topologii posloupnosti nebo parametrického systému distribucí zapisujeme $T_n \stackrel{*}{\rightharpoonup} T$ v $\mathscr{D}'(\Omega)$ nebo $\lim_{n\to\infty} T_n = T$ v $\mathscr{D}'(\Omega)$.

Věta 2.64 ([**?**, Propozice 2.2.7, str. 27])**.** *Nechť $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ je multiindex. Zobrazení*

$$T \in \mathscr{D}'(\Omega) \mapsto D^\alpha T \in \mathscr{D}'(\Omega)$$

je spojité pro každý multiindex α. To znamená, že pro každou posloupnost $\{T_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathscr{D}'(\Omega)$ a $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ platí

$$T_n \stackrel{*}{\rightharpoonup} T \quad v\ \mathscr{D}'(\Omega) \Rightarrow D^\alpha T_n \stackrel{*}{\rightharpoonup} D^\alpha T \quad v\ \mathscr{D}'(\Omega)$$

Důkaz. Viz [**?**], str. 28.

■

Příklad 2.65. Nechť $\Omega = \mathbb{R}$. Posloupnost spojitých lokálně integrovatelných funkcí $f_n(x) = x/(x^2 + 1/n)$ konverguje ve smyslu distribucí k $\mathscr{P}_{1/x}$ pro $n \to \infty$.

Řešení. Uvažujme posloupnost

$$F_n(x) = \int_1^x \frac{s}{s^2 + 1/n}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{nx^2+1}{n+1}\right).$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $f_n \in L^1(\mathbb{R})$, proto $F_n \in AC(I)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každý kompaktní interval $I \subset \mathbb{R}$. Tudíž pro distributivní derivaci $D^{(1)}F_n$ platí

$$\langle D^{(1)}F_n, \phi\rangle = \langle f_n, \phi\rangle \quad \forall \phi \in \mathscr{D}'(\Omega)\,. \tag{2.29}$$

Platí následující nerovnost:

$$0 \le |F_n(x)| \le \big|\ln|x|\big| \qquad \forall n \in \mathbb{N} \text{ a } \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\,.$$

Protože $\big|\ln|x|\big| \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ a $F_n(x) \to \ln|x|$ pro všechna $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, z Lebesgueovy věty dostáváme

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \langle F_n, \phi \rangle &= \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} F_n(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{-K}^{K} F_n(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x = \\
&= \int_{-K}^{K} \ln(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \ln(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x = \\
&= \langle \ln|x|, \phi \rangle \quad \forall \phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})\,,
\end{aligned} \tag{2.30}
$$

kde $K = \max\{-\min \operatorname{supp}\phi, \max \operatorname{supp}\phi\}$. Z rovnice (2.30) plyne, že $F_n \xrightarrow{*} \ln|x|$ v prostoru distribucí $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ (z důvodu srozumitelnosti v předchozím výkladu ztotoňujeme funkce F_n s příslušnými distribucemi a funkci $\ln|x|$ s příslušnou distribucí). Podle Věty 2.64 dostaneme, že také $D^{(1)}F_n \xrightarrow{*} D^{(1)} \ln|x|$ v $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Podle (2.29) lze distributívní derivaci $D^{(1)}F_n$ vyjádřit pomocí klasické derivace a z Příkladu 2.48 víme, že $D^{(1)} \ln|x| = \mathscr{P}_{1/x}$. Proto

$$
\frac{x}{x^2 + 1/n} = D^{(1)}F_n \xrightarrow{*} D^{(1)} \ln|x| = \mathscr{P}_{1/x}
$$

v $\mathscr{D}(\mathbb{R})$.

□

Příklad 2.66. Nechť $\Omega = (0, +\infty)$. Zobrazení $T : \mathscr{D}(0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definované výrazem

$$
T(\phi) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{n}\right)
$$

je distribuce $T \in \mathscr{D}'(0, +\infty)$ nekonečného řádu. Nelze jej rozšířit na distribuci na $\mathbb{R}$, tj. neexistuje distribuce $S \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ taková, že $S|_{(0,+\infty)} = T$. Nekonečnou řadu chápeme jako limitu posloupnosti částečných součtů, proto tento příklad tematicky zařazujeme mezi posloupnosti distribucí.

Řešení. Tento příklad vyřešte sami. Pro důkaz nerozšiřitelnosti uvažujte funkci ϕ s kompaktním nosičem v $\mathbb{R}$ rovnou $\exp(x)$ na nějakém okolí bodu 0.

□

Zde si připomeneme definici systému standardních zhlazujících jader.

Připomenutí. (Definice 1.175, strana 43.) Pro libovolné dané $\varepsilon > 0$ definujeme funkci $\omega_\varepsilon : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ po částech předpisem

$$
\omega_\varepsilon(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} C_\varepsilon \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2}\right) & \text{pro} \quad |x| < \varepsilon\,, \\ 0 & \text{pro} \quad |x| \geq \varepsilon\,, \end{cases} \tag{2.31}
$$

kde C_ε je voleno tak, aby $\int_{\mathbb{R}^N} \omega_\varepsilon \,\mathrm{d}x = 1$. Tomuto systému funkcí říkáme *systém standardních zhlazujících jader.*

Věta 2.67. *Nechť $\varepsilon > 0$ a ω_ε je standardní zhlazující jádro. Potom $\omega_\varepsilon \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$.*

Důsledek 2.68. *Nechť $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$, $\varepsilon > 0$ a ω_ε je standardní zhlazující jádro. Potom $T * \omega_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$.*

Věta 2.69 ([**9**, Věta 9.30, str. 277])**.** *Nechť $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$ a nechť $\{\omega\}_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, je jednoparametrický systém standardních zhlazujících jader. Potom pro $\varepsilon \to 0+$ systém $T * \omega_\varepsilon \stackrel{*}{\rightharpoonup} T$ v prostoru distribucí $\mathscr{D}'(\Omega)$, tedy*

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\mathbb{R}^N} (T * \omega_\varepsilon)(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x = T(\phi) \quad \forall \phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)\,.$$

Důkaz. Viz [**9**], str. 277.

■

Důsledek 2.70. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je oblast a $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Pak existuje posloupnost $\{T_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathscr{D}'(\Omega)$ taková, že $\overline{\mathrm{supp} T_n} \subset \Omega$ a $T_n \stackrel{*}{\rightharpoonup} T$ v $\mathscr{D}'(\Omega)$. Dokonce existuje $\{T_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathscr{D}'(\Omega)$ s výše uvedenou vlastností, kde každý prvek T_n lze reprezentovat funkcí z $C_\mathrm{c}^\infty(\Omega)$.*

Z předchozího tvrzení plyne tato věta.

Věta 2.71. *Prostor $C_\mathrm{c}^\infty(\Omega)$ je hustý v $\mathscr{D}'(\Omega)$ vzhledem k $*$-slabé topologii na $\mathscr{D}'(\Omega)$.*

2.2.6. Diferenciální rovnice ve smyslu distribucí.

Definice 2.72. Nechť $a \in C^\infty(\Omega)$ a $S \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Potom součin aS je distribuce splňující identitu

$$\langle (aS), \phi \rangle = \langle S, a\phi \rangle \quad \forall \phi \in \mathscr{D}(\Omega)\,. \tag{2.32}$$

Příklad 2.73. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $a \in C^\infty(\Omega)$. Potom $a\,\delta_o = a(o)\delta$, neboť platí

$$\langle a\,\delta_o, \phi \rangle = \langle \delta_o, a\,\phi \rangle = a(o)\phi(o) = \langle a(o)\,\delta_o, \phi \rangle \qquad \forall \phi \in \mathscr{D}(\Omega)\,.$$

Příklad 2.74. Nechť $\Omega = \mathbb{R}$. Potom $x\mathscr{P}_{1/x} = 1$ ve smyslu ditribucí, neboť platí

$$\begin{aligned} \left\langle x\,\mathscr{P}_{1/x}, \phi \right\rangle &= \left\langle \mathscr{P}_{1/x}, x\phi \right\rangle = \\ &= \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}} \frac{x\phi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)\,\mathrm{d}x = \langle 1, \phi \rangle \qquad \forall \phi \in \mathscr{D}(\Omega)\,. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Poznámka 2.75. Obecně součin dvou distribucí nemusí být distribuce. Navíc součin dvou distribucí nelze obecně konzistentně definovat tak, aby splňoval běžná pravidla pro násobení čísel tj. nemůže být zároveň komutativní i asociativní. To dokázal již v padesátých letech dvacátého století zakladatel této teorie, Laurent Schwartz. Například užitím výsledků Příkladů 2.73 a 2.74 dostaneme absurdní řetězec rovností:

$$0 = 0\,\mathscr{P}_{1/x} = (x\delta_0)\;\mathscr{P}_{1/x} = (\delta_0 x)\;\mathscr{P}_{1/x} = \delta_0\left(x\,\mathscr{P}_{1/x}\right) = \delta_0$$

Pouze násobení distribuce funkcí třídy C^∞ je opět distribuce (hned z definice).

Věta 2.76 (Leibnizův vzorec pro derivaci součinu)**.** *Nechť* $a \in C^\infty(\Omega)$ *a* $S \in \mathscr{D}'(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^N : |\alpha| = 1$, *tj. existuje právě jedno* $i \in \{1, \dots, N\}$ *takové, že* $\alpha_i = 1$ *a* $\alpha_j = 0$ *pro* $j \neq i$. *Potom pro distributívní derivaci součinu* aS *platí Leibnizův vzorec*

$$D^\alpha (aS) = \frac{\partial a}{\partial x_i} S + a D^\alpha S\,. \tag{2.34}$$

Důkaz. Důkaz je jednoduchý. Proveďte sami podrobně. ■

Definice 2.77. Nechť $m \geq 1$, $F \in \mathscr{D}'(\Omega)$, $a_\alpha \in C^\infty(\Omega)$. Distribuci $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ splňující rovnici ve smyslu distribucí

$$\sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha\, D^\alpha u = F \tag{2.35}$$

nazveme *řešením diferenciální rovnice*

$$\sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha(x) \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}(x) = F, \quad x \in \Omega \tag{2.36}$$

ve smyslu distribucí.

Poznámka 2.78. Samozřejmě, že diferenciální rovnici (2.36) nelze obecně chápat tak, že je splněna v každém bodě oblasti Ω. Je-li však distribuce F reprezentovatelná dostatečně hladkou funkcí $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, má smysl uvažovat o splnění diferenciální rovnice

$$\sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha(x) \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}(x) = f(x) \tag{2.37}$$

v každém bodě $x \in \Omega$.

Poznámka 2.79. Díky předpokladu $a_\alpha \in C^\infty(\Omega)$ je výsledek operátoru na levé straně distribuce. Operátor můžeme dle definice součinu hladké funkce a distribuce a derivace distribuce přepsat na tvar

$$\left\langle \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha\, D^\alpha u, \phi \right\rangle = \left\langle u, \sum_{|\alpha|=0}^{m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha\, \phi) \right\rangle . \tag{2.38}$$

Poznámka 2.80. Přestože řešením diferenciální rovnice ve smyslu distribucí je obecně distribuce, v teorii diferenciálních rovnic se většinou omezujeme na $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ případně ještě navíc požadujeme integrovatelnost některých distributívních derivací řešení. O tom bude podrobně pojednáno v následující kapitole.

Příklad 2.81. Nechť $\Omega = \mathbb{R}$. Řešením diferenciální rovnice prvního řádu

$$x^2 u'(x) = 0$$

ve smyslu distribucí je

$$S \in \mathscr{D}'(\Omega) : S = c_1 \mathbb{1} + c_2 H_0 + c_3 \delta_0\,,$$

kde $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ jsou libovolné konstanty, $\mathbb{1}$ je distribuce asociovaná s konstantní funkcí nabývající hodnoty 1 na $\mathbb{R}$, H_0 je distribuce asociovaná s Heavisideovou funkcí $H_0(x) = 0$ pro $x < 0$, $H_0(x) = 1$ pro $x \geq 0$ (značíme zde stejně funkci i distribuci) a δ_0 je Diracova distribuce lokalizovaná v bodě 0. Řešení ve smyslu distribucí $\mathbb{1}, H_0, \delta_0$ jsou lineárně nezávislá.

Řešení. Ověřte sami splnění identity

$$\left\langle c_1\mathbb{1} + c_2 H_0 + c_3\delta_0, 2x\phi + x^2\phi'\right\rangle = 0 \quad \forall \phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})\,.$$

Poznámka 2.82. Všimněte si toho, že řešení ve smyslu distribucí může mít více parametrů (3 parametry) než je řád rovnice (první řád). Konstantní řešení $\mathbb{1} \in \mathscr{D}'(\Omega)$ je reprezentovatelné spojitě difencovatelnou konstantní funkcí nabývající hodnoty 1 na $\mathbb{R}$. Řešení $H_0 \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ není diferencovatelné a ani spojité v bodě 0. Další nezávislé řešení $\delta_0 \in \mathscr{D}'(\Omega)$ nelze ani vyjádřit lokálně integrovatelnou funkcí.

Příklad 2.83. Nechť $\Omega = \mathbb{R}^2$. Potom $\Delta \ln|x| = 2\pi\delta_o$, kde druhé derivace v operátoru $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ jsou chápány ve smyslu distribucí, tj. $\Delta = D^{(2,0)} + D^{(0,2)}$.

Řešení. Z definice derivace distribuce dostaneme:

$$\begin{aligned}\langle \Delta \ln|x|, \phi\rangle &= \left\langle D^{(2,0)} \ln|x| + D^{(0,2)} \ln|x|,\ \phi\right\rangle = \left\langle \ln|x|,\ \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}\right\rangle = \\ &= \langle \ln|x|, \Delta\phi\rangle = \int_{\mathbb{R}^2} \ln|x|\,\Delta\phi(x)\,\mathrm{d}x\,,\end{aligned}$$

kde poslední integrál má smysl, neboť funkce $\ln|x|$ je lokálně integrovatelná v $\mathbb{R}^2$.

Poslední integrál pak přepíšeme jako limitu

$$\int_{\mathbb{R}^2} \ln|x|\,\Delta\phi(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{|x|>\varepsilon} \ln|x|\,\Delta\phi(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Nyní použijeme Greenovu identitu (2.14). Zvolme $\Omega' \subset \mathbb{R}^2$ s dostatečně hladkou hranicí, která obsahuje nosič ϕ a zároveň uzávěr koule $B(0,\varepsilon)$. Nejsnaší je za Ω' volit kouli $B(0,R)$, $R > \varepsilon$, takovou, aby $\operatorname{supp}\phi \subset B(0,R)$. Užitím Greenovy identity (2.14) na $B(0,R)\setminus\overline{B(0,\varepsilon)}$ dostaneme:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} \ln|x|\,\Delta\phi(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{|x|>\varepsilon} \ln|x|\,\Delta\phi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{B(0,R)\setminus\overline{B(0,\varepsilon)}} \Delta\ln|x|\,\phi(x)\,\mathrm{d}x \\ &+ \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\partial\left(B(0,R)\setminus\overline{B(0,\varepsilon)}\right)} \left(\ln|x|\,\frac{\partial\phi(x)}{\partial\vec{n}} - \frac{\partial\ln|x|}{\partial\vec{n}}\,\phi(x)\right)\mathrm{d}\mathcal{H}^1\,.\end{aligned} \tag{2.39}$$

Snadno se ověří přímým výpočtem, že pro $|x| > \varepsilon > 0$ platí bodově pro klasické parciální derivace $\Delta \ln|x| = 0$. Protože nosič ϕ je vlastní podmnožinou $B(0,R)$, je $\phi(x)$ i $\partial\phi(x)/\partial\vec{n}$

rovno nule na $\partial B(0,R)$. Tudíž

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2} \ln|x|\,\Delta\phi(x)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^1 = \\
&-\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\partial B(0,\varepsilon)}\left(\ln|x|\,\frac{\partial\phi(x)}{\partial\vec{n}} - \frac{\partial\ln|x|}{\partial\vec{n}}\,\phi(x)\right)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^1 = \\
&-\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{|x|=\varepsilon}\left(\ln\varepsilon\,\frac{\partial\phi(x)}{\partial\vec{n}} - \frac{1}{\varepsilon}\,\phi(x)\right)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^1 = \\
&-\lim_{\varepsilon\to 0+}\varepsilon\ln\varepsilon\,\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{\varepsilon}\int_{|x|=\varepsilon}\frac{\partial\phi(x)}{\partial\vec{n}}\,\mathrm{d}\mathcal{H}^1 - \frac{1}{\varepsilon}\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{|x|=\varepsilon}\phi(x)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^1 = \\
&= 0\cdot 2\pi\frac{\partial\phi}{\partial\vec{n}}(0) + 2\pi\phi(0)
\end{aligned}
\tag{2.40}
$$

Ukázali jsme tedy, že

$$\langle\Delta\ln|x|,\,\phi\rangle = 2\pi\phi(0) = \langle 2\pi\delta_0,\phi\rangle \quad \forall\phi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^2)\,,$$

což znamená, že

$$\Delta\ln|x| = 2\pi\delta_0$$

ve smyslu distribucí. □

Příklad 2.84. Nechť $\Omega=\mathbb{R}^3$. Potom $\Delta(1/|x|)=4\pi\delta_0$.

Řešení. Pro $\Omega=\mathbb{R}^3$ se rovnice $\Delta(1/|x|)=4\pi\delta_0$ dokáže analogicky pomocí Greenovy identity (2.14). □

K pojmu řešení diferenciální rovnice ve smyslu distribucí se úzce váže následující významný výsledek - Weylovo lemma. Toto lemma představuje jedno z prvních tvrzení týkajících se regularity zobecněných řešení parciálních diferenciálních rovnic. Teorie *regularity zobecněných řešení* zkoumá podmínky, za jakých je např. řešení ve smyslu distribucí též řešením klasickým, tj. za jakých podmínek je řešení diferencovatelné až do řádu rovnice[8] a rovnice je splněna ve všech bodech dané oblasti Ω.

Lemma 2.85 (Weylovo lemma, viz např. [**18**])**.** *Nechť $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ je oblast. Nechť $u\in\mathscr{D}'(\Omega)$ splňuje ve smyslu distribucí rovnici $\Delta u=f$, kde $f\in C^\infty(\Omega)$. Potom také $u\in C^\infty(\Omega)$.*

Poznámka 2.86. Regularita řešení rovnice $\Delta u=f$ v sobě obsahuje zajímavý paradox. Řešení eliptické rovnice závisí na hodnotách f v celém Ω, ale naproti tomu je regularita lokální jev. Pokud např. $f\in\mathscr{D}'(\Omega)$ bude nějaká obecně "divoká"distribuce na Ω a zároveň restrikce f na podmnožinu $\Omega'\subsetneq\Omega$ bude reprezentovatelná funkcí z $C^\infty(\Omega')$, pak také restrikce řešení u na podmnožinu $\Omega'\subsetneq\Omega$ bude reprezentovatelná funkcí z $C^\infty(\Omega')$, i když hodnoty této restrikce budou závislé na hodnotách f na $\Omega\setminus\Omega'$. Jak tento paradox funguje bude zřejmé až z důkazu Weylova lemmatu. To, že hodnoty funkce u závisí na hodnotách f na celém Ω je vidět např. z toho, že pro $\Omega=\mathbb{R}^2$ a $f=2\pi\delta_o$ je $u=\ln|x|$, kde $u(x)<0$ pro všechna $0<|x|<1$ a $u(x)>0$ pro všechna $1<|x|$. Zároveň ale $u\in C^\infty(\Omega')$ pro každou $\Omega'\subset\mathbb{R}^2$ takovou, že $o\notin\Omega'$.

[8]nebo existují všechny parciální derivace vyskytující se v rovnici ve všech bodech oblasti

Ve většině učebních textů týkajících se zobecněných řešení parciálních diferenciálních rovnic je toto tvrzení uvedeno bez důkazu. Z hlediska formy výkladu i zvoleného postupu nás zaujal článek [**18**], kde je důkaz z velké části proveden netradičním postupem pomocí teorie potenciálu. Původní Weylův důkaz (viz [**19**]) také založený na teorii potenciálu je mnohem techničtější. Protože důkaz v článku [**18**] neobsahuje všechny detaily, rozhodli jsme se je v těchto skriptech doplnit. Než přistoupíme k důkazu Weylova lemmatu dokážeme následující pomocné tvrzení, které se k důkazu v článku [**18**] používá, ale explicitně se nezmiňuje ani nedokazuje.

Lemma 2.87 (Pomocné tvrzení k Weylově lemmatu). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast. Nechť $w_t \in \mathscr{D}(\Omega)$, $t \in (0,1]$, je jednoparametrický systém funkcí a nechť pro každé $m \in \mathbb{N}$ existuje $K_m > 0$ tak, že pro všechna $t \in (0,1]$ a multiindexy $\alpha \in \mathbb{N}_0^N : |\alpha| = m$ platí*

$$\left\| \frac{\partial^{|\alpha|} w_t}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}} \right\|_\infty \le K_m \,. \tag{2.41}$$

Nechť dále pro $t \to 0+$ konverguje $w_t \overset{*}{\rightharpoonup} W \in \mathscr{D}'(\Omega)$, tj.

$$\lim_{t\to 0+} \int_\Omega w_t(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x = \langle W, \phi\rangle \quad \forall \phi \in \mathscr{D}(\Omega)\,. \tag{2.42}$$

Potom distribuci $W \in \mathscr{D}'(\Omega)$ lze reprezentovat funkcí $w \in L^1(\Omega) \cap C^\infty(\overline{\Omega_K})$ pro každou podoblast $\Omega_K : \overline{\Omega_K} \subsetneq \Omega$ s hladkou hranicí $\partial\Omega_K$.

Důkaz pomocného tvrzení k Weylově lemmatu. Protože $\|w_t\|_\infty \le K_0$ a

$$\|\partial^{|\alpha|} w_t / \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}\|_\infty \le K_1\,,$$

pro všechna $\alpha \in \mathbb{N}_0^N : |\alpha| = 1$ a pro všechna $t \in (0,1]$, je systém funkcí w_t, $t \in (0,1]$, stejně omezený v normě $L^1(\Omega)$ (podmínka (1.44)) a stejně spojitý v průměru (podmínka (1.45)). Pokles v nekonečnu (podmínka (1.46)) je zaručen předpokladem omezenosti Ω. Tím jsou splněny podmínky Věty 1.138 (Kolmogorova věta) a existuje vybraná posloupnost $w_{t_n} \to w \in L^1(\Omega)$. Ukážeme, že $W \in \mathscr{D}'(\Omega)$ z tvrzení Lemmatu 2.87 lze reprezentovat funkcí $w \in L^1(\Omega)$, tj., že platí

$$\int_\Omega w(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x = \langle W, \phi\rangle \quad \forall \phi \in \mathscr{D}(\Omega)\,. \tag{2.43}$$

Vskutku, podle Lebesgueovy věty o dominantní konvergenci ($\|w_t\|_\infty \le K_0$ pro všechna $t \in (0,1]$) dostáváme

$$\lim_{t_n\to 0+} \int_\Omega w_{t_n}(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega w(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall \phi \in \mathscr{D}(\Omega)$$

a zároveň podle předpokladu (2.42)

$$\lim_{t_n\to 0+} \int_\Omega w_{t_n}(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x = \langle W, \phi\rangle \quad \forall \phi \in \mathscr{D}(\Omega)\,.$$

Odtud srovnáním

$$\int_\Omega w(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x = \langle W, \phi\rangle \quad \forall \phi \in \mathscr{D}(\Omega)\,,$$

čímž jsme (2.43) dokázali pro podposloupnost funkcí $\{w_{t_n}\}_{n=1}^{\infty}$. Distribuce $W \in \mathscr{D}'(\Omega)$ je reprezentovatelná integrovatelnou funkcí $w \in L^1(\Omega)$ a tedy regulární.

Nyní ukážeme, že toto platí nejen pro podposloupnost $\{w_{t_n}\}_{n=1}^{\infty}$, ale dokonce pro celý systém funkcí w_t, $t \in (0,1]$, platí $w_t \to w$ pro $t \to 0+$ v $L^1(\Omega)$. Pokud by to neplatilo, pak bychom z množiny $(0,1] \setminus \{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ vybrali posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergující k $0+$ pro $n \to \infty$ takovou, že pro nějaké $\varepsilon > 0$ platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{\Omega} |w_{s_n}(x) - w(x)| \,\mathrm{d}x > \varepsilon \,. \tag{2.44}$$

Z posloupnosti funkcí w_{s_n} lze postupem jako výše díky stejné omezenosti v normě $L^1(\Omega)$ a stejné spojitosti v průměru vybrat podposloupnost $w_{s_{n_k}} \to v$ konvergující v $L^1(\Omega)$ a zároveň podle (2.44) musí platit $w \neq v$. Podle Lebesgueovy věty o dominantní konvergenci dostaneme

$$\lim_{s_{n_k}\to 0+} \int_{\Omega} w_{s_{n_k}}(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\Omega} w(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall \phi \in \mathscr{D}(\Omega)$$

a zároveň podle předpokladu (2.42)

$$\lim_{s_{n_k}\to 0+} \int_{\Omega} w_{s_{n_k}}(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x = \langle W, \phi\rangle \quad \forall \phi \in \mathscr{D}(\Omega)\,.$$

Odtud srovnáním

$$\int_{\Omega} v(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x = \langle W, \phi\rangle \quad \forall \phi \in \mathscr{D}(\Omega)\,.$$

Podle Důsledku 2.33 je regulární distribuce $W \in \mathscr{D}'(\Omega)$ reprezentována právě jednou funkcí z $L^1(\Omega)$. Tudíž $w = v$. Toto je spor s (2.44) a platí $w_t \to w$ pro $t \to 0+$.

Nyní ukážeme, že pro každou podooblast Ω_K, $\overline{\Omega_K} \subset \Omega$ platí $w_t \rightrightarrows w \in C(\overline{\Omega_K})$ konvergující v $C(\overline{\Omega_K})$ stejnoměrně pro $t \to 0+$. Protože $\|w_t\|_\infty \leq K_0$ a $\|\partial^{|\alpha|} w_t/\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}\|_\infty \leq K_1$, pro $|\alpha| = 1$, pro všechna $t \in (0,1]$, je systém funkcí w_t, $t \in (0,1]$, stejně omezený v $C(\overline{\Omega_K})$ (podmínka (1.69) z Věty 1.181) a stejně spojitý (podmínka (1.70) z Věty 1.181). Tím jsou splněny podmínky Věty 1.181 (Arzelàova-Ascoliova věta) a uzávěr systému w_t, $t \in (0,1]$, v $C(\overline{\Omega_K})$ je kompaktní a existuje vybraná posloupnost $w_{t_n} \rightrightarrows u \in C(\overline{\Omega_K})$ pro $n \to +\infty$ a $t_n \to 0+$. Předpokládejme, že $u - w \neq 0$ na podmnožině $\omega_K \subset \overline{\Omega_K}$ nenulové míry. Podle Lebesgueovy věty o dominantní konvergenci dostaneme

$$\lim_{t_n\to 0+} \int_{\Omega_K} w_{t_n}(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\Omega_K} u(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall \phi \in \mathscr{D}(\Omega_K)$$

a zároveň podle předpokladu (2.42)

$$\lim_{t_n\to 0+} \int_{\Omega_K} w_{t_n}(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x = \langle W, \phi\rangle \quad \forall \phi \in \mathscr{D}(\Omega_K)\,.$$

Odtud srovnáním

$$\int_{\Omega_K} u(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x = \langle W, \phi\rangle \quad \forall \phi \in \mathscr{D}(\Omega_K)\,.$$

Odtud dostaneme spor, protože restrikce distribuce $W \in \mathscr{D}'(\Omega)$ na Ω_K je reprezentována restrikcí funkce w na Ω_K a je také regulární. Podle Důsledku 2.33 je regulární distribuce reprezentována právě jednou lokálně integrovatelnou funkcí. Tudíž $w = v$ skoro všude na Ω_K. Toto je spor s tím, že $u - w \neq 0$ na podmnožině $\omega_K \subset \overline{\Omega_K}$ nenulové míry. Platí tedy $w_t \rightrightarrows w$ stejnoměrně na $\overline{\Omega_K}$ pro $t \to 0+$ (přesněji, existuje spojitý reprezentant w dané třídy funkcí z faktorprostoru $L^1(\Omega)$, který je zároveň v $C(\overline{\Omega_k})$ a ke kterému w_t konverguje stejnoměrně na $\overline{\Omega_K}$ pro $t \to 0+$).

Nyní ukážeme, že $w \in C^\infty(\overline{\Omega_K})$. Předpokládejme, že existuje $\beta \in \mathbb{N}_0^N$ tak, že $D^\beta W$ nelze reprezentovat spojitou funkcí $u \in C(\overline{\Omega_K})$ takovou, že

$$\frac{\partial^{|\beta|} w}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_N^{\beta_N}}(x) = u(x) \quad \forall x \in \overline{\Omega_K}$$

($\overline{\Omega_K} \subset \Omega$) a zároveň, že pro všechna $\alpha \in \mathbb{N}_0^N : |\alpha| < |\beta|$ platí

$$\frac{\partial^{|\alpha|} w}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}} \in C(\overline{\Omega_K}) .$$

Postupným dosazením za $m := |\beta|$ a $m := |\beta| + 1$ do nerovnosti (2.41) zjistíme, že systém funkcí

$$\frac{\partial^{|\beta|} w_t}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_N^{\beta_N}} \quad t \in (0, t]$$

je stejně omezený a stejně spojitý na $\overline{\Omega_K}$. Podle Věty 1.181, Arzelàova-Ascoliova věta, lze vybrat konvergentní posloupnost $\{t_n\}_{n=1}^\infty$, $t_n \to 0+$ pro $n \to \infty$, takovou, že

$$\frac{\partial^{|\beta|} w_{t_n}}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_N^{\beta_N}} \rightrightarrows u \in C(\overline{\Omega_K})$$

pro $n \to \infty$ a $t_n \to 0+$. Z Lebesgueovy věty o dominantní konvergenci ihned dostaneme

$$\lim_{t_n \to 0+} \int_\Omega \frac{\partial^{|\beta|} w_{t_n}}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_N^{\beta_N}}(x) \phi(x) \, \mathrm{d}x = \int_{\Omega_K} u(x) \phi(x) \, \mathrm{d}x \quad \forall \phi \in \mathscr{D}(\Omega_K) .$$

Zároveň podle (2.42) dostaneme

$$\lim_{t_n \to 0+} \int_{\Omega_K} \frac{\partial^{|\beta|} w_{t_n}}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_N^{\beta_N}}(x) \phi(x) \, \mathrm{d}x = \left\langle D^\beta W, \phi \right\rangle \quad \forall \phi \in \mathscr{D}(\Omega_K) .$$

Srovnáním

$$\int_{\Omega_K} u(x) \phi(x) \, \mathrm{d}x = \left\langle D^\beta W, \phi \right\rangle \quad \forall \phi \in \mathscr{D}(\Omega_K) .$$

Nyní ukážeme, že pro celý systém

$$\frac{\partial^{|\beta|} w_t}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_N^{\beta_N}}, t \in (0, 1], \quad \text{platí} \quad \frac{\partial^{|\beta|} w_{t_n}}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_N^{\beta_N}} \rightrightarrows u \in C(\overline{\Omega_K}) \tag{2.45}$$

pro $t \to 0+$. Pokud by to neplatilo, vybrali bychom (opět pomocí Arzelàovy-Ascoliovy věty) z množiny $(0, 1] \setminus \{t_n\}_{n=1}^\infty$ posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^\infty$, $s_n \to 0$ pro $n \to \infty$ takovou, že

$$\frac{\partial^{|\beta|} w_{s_n}}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_N^{\beta_N}} \rightrightarrows v \in C(\overline{\Omega_K})$$

a zároveň $u \neq v$. Opět by muselo platit (Lebesgueova věta a (2.42))

$$\int_{\Omega_K} v(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x = \langle D^\beta W, \phi\rangle \quad \forall \phi \in \mathscr{D}(\Omega_K)$$

a podle Důsledku 2.33 bychom dostali $u = v$, což je spor. Platí tedy (2.45).

Zbývá ukázat, že

$$\frac{\partial^{|\beta|} w}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_N^{\beta_N}}(x) = u(x) \quad \forall x \in \overline{\Omega_K}\,.$$

Od tohoto momentu dále budeme využívat předpokladu, že Ω_K má hladkou hranici $\partial\Omega_K$. Dále využijeme předpokladu, že pro všechna $\alpha \in \mathbb{N}_0^N : |\alpha| < |\beta|$ platí

$$\frac{\partial^{|\alpha|} w}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}} \in C(\overline{\Omega_K})\,.$$

Nechť $\beta_j = \alpha_j$ pro $j = 1, \dots, N$, $j \neq i$, a $\beta_i = \alpha_i - 1$ (zřejmě nás zajímají jen taková $i \in 1, \dots, N$, pro která $\alpha_i > 0$). Můžeme tedy s pomocí Věty 2.38 (věta o vícerozměrné integraci *per-partes*) psát

$$\int_{\Omega_K} u(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x = \langle D^\beta W, \phi\rangle = \tag{2.46}$$

$$= (-1)^{|\beta|} \int_{\Omega_K} w(x) \frac{\partial^{|\beta|} \phi}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_N^{\beta_N}}(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\int_{\Omega_K} \frac{\partial^{|\beta|-1} w}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_{i-1}^{\beta_{i-1}} \partial x_i^{\beta_i - 1} \partial x_{i+1}^{\beta_{i+1}} \dots \partial x_N^{\beta_N}}(x) \frac{\partial \phi}{\partial x^i}(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Nyní ukážeme, že na uzávěru Ω_K je

$$q \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^{|\beta|-1} w}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_{i-1}^{\beta_{i-1}} \partial x_i^{\beta_i - 1} \partial x_{i+1}^{\beta_{i+1}} \dots \partial x_N^{\beta_N}}$$

lipschitzovská funkce. Definujme ještě

$$q_t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^{|\beta|-1} w_t}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_{i-1}^{\beta_{i-1}} \partial x_i^{\beta_i - 1} \partial x_{i+1}^{\beta_{i+1}} \dots \partial x_N^{\beta_N}}\,.$$

Z předpokladu (2.41) je ihned vidět, že pro všechna $t \in (0, 1]$ je $q_t \in \mathscr{D}(\Omega)$ a $\|\partial q_t / \partial x_j\|_\infty \leq K_\beta$ pro všechna $j = 1, \dots, N$. Zvolme $x \in \Omega_K$. Nechť $h \in \mathbb{R}^N$, $|h| > 0$, je takový, že $x + \theta h \in \overline{\Omega_K}$ pro všechna $\theta \in [0, 1]$. Označme $y = x + h$. Potom podle věty o střední hodnotě

$$q_t(y) - q_t(x) = q_t(x + h) - q_t(x) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial q_t}{\partial x_j}(x + \theta h) h_j$$

pro nějaké $\theta \in [0,1]$. Odtud pomocí Hölderovy nerovnosti v $\mathbb{R}^N$:

$$|q_t(y) - q_t(x)| \leq \sum_{j=1}^{N} \left| \frac{\partial q_t}{\partial x_j}(x + \theta h) \right| \cdot \max_{j=1,\dots,N} |h_j| \leq N K_\beta \max_{j=1,\dots,N} |h_j| \ ;$$

tato nerovnost platí pro všechna $t \in (0,1]$.

Pro výše dané $h \in \mathbb{R}^N$ zvolme $\varepsilon : 0 < \varepsilon < \max_{j=1,\dots,N} |h_j|$. Protože $q_t \rightrightarrows q$ na $\overline{\Omega_K}$, lze najít $\delta > 0$ takové, že pro všechna $t \in (0,\delta)$ je

$$\max_{x \in \Omega_K} |q_t(x) - q(x)| < \varepsilon < \max_{j=1,\dots,N} |h_j| \ .$$

Odtud dostaneme následující nerovnost pro q na $\overline{\Omega}_K$ s hladkou hranicí:

$$\begin{aligned} |q(y) - q(x)| &\leq |q(y) - q_t(y) + q_t(y) - q_t(x) + q_t(x) - q(x)| \leq \\ &\leq |q_t(y) - q_t(x)| + |q_t(y) - q(y)| + |q_t(x) - q(x)| \leq \\ &\leq N K_\beta \max_{j=1,\dots,N} |h_j| + 2 \max_{j=1,\dots,N} |h_j| \leq (2 + N K_\beta) \max_{j=1,\dots,N} |h_j| \ . \end{aligned} \tag{2.47}$$

Tato nerovnost již zaručuje splnění Lipschitzovy podmínky na oblasti s hladkou hranicí (oblasti s hladkou hranicí splňují S-podmínku).

Nyní ověříme podmínky Věty 2.2.6. Podle Věty 1.117, Rademacherova věta, pak $\partial q/\partial x_i$ existuje skoro všude na Ω_K. Navíc $|\partial q/\partial x_i|$ je omezená Lipschitzovou konstantou a tudíž $\partial q/\partial x_i \in L^1(\Omega_K)$. Další předpoklady věty (absolutní spojitost na úsečkách rovnoběžných s osou x_i) vyplynou též z Lipschitzovy podmínky (ověřte sami). Podle Věty 2.2.6 lze tedy provést integraci *per-partes* vzhledem k proměnné x_i ještě o jeden krok dále a dostaneme

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_K} u(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x = \\ &= -\int_{\Omega_K} \frac{\partial^{|\beta|-1} w}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_{i-1}^{\beta_{i-1}} \partial x_i^{\beta_i - 1} \partial x_{i+1}^{\beta_{i+1}} \dots \partial x_N^{\beta_N}}(x) \frac{\partial \phi}{\partial x^i}(x)\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_{\Omega_K} \frac{\partial^{|\beta|} w}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_N^{\beta_N}}(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x \,. \end{aligned} \tag{2.48}$$

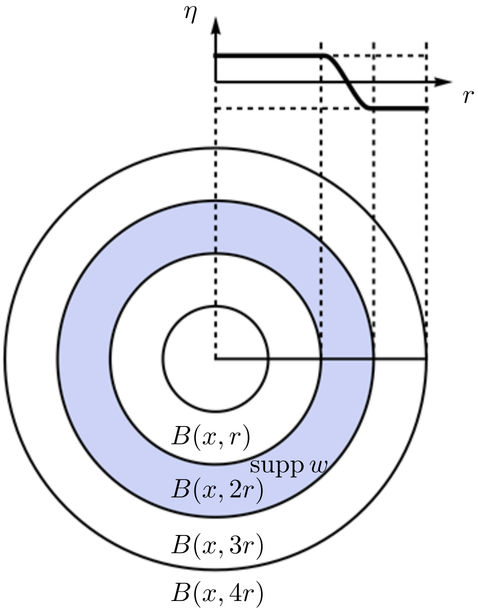
pro každé $\phi \in \mathscr{D}(\Omega_K)$. To je spor. Distribuci $W \in \mathscr{D}'(\Omega)$ lze tedy reprezentovat funkcí $w \in L^1(\Omega) \cap C^\infty(\overline{\Omega_K})$. ■

Nyní můžeme přistoupit k důkazu Weylova lemmatu.

Řešení. Chceme ukázat, že pro každé $f \in C^\infty(\Omega)$ platí, že $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ splňující

$$\langle u, \Delta\phi \rangle = \langle f, \phi \rangle \,, \quad \forall \phi \in \mathscr{D}(\Omega) \tag{2.49}$$

musí již náležet do $C^\infty(\Omega)$.



OBRÁZEK 1. Koule $B(x,r), \dots B(x,4r)$, funkce η a $\operatorname{supp} w$.

Položme

$$\gamma_t(x) \stackrel{\text{def}}{=} (4\pi t)^{-\frac{N}{2}} \exp\left[-\frac{|x|^2}{4t}\right] \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}^N \text{ a } t \in [0,1]\,.$$

Tato funkce je třídy $C^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$ a pro její klasické derivace platí

$$\frac{\partial \gamma_t}{\partial t}(x) = \Delta\gamma_t(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N\, \forall t \in \mathbb{R}\,.$$

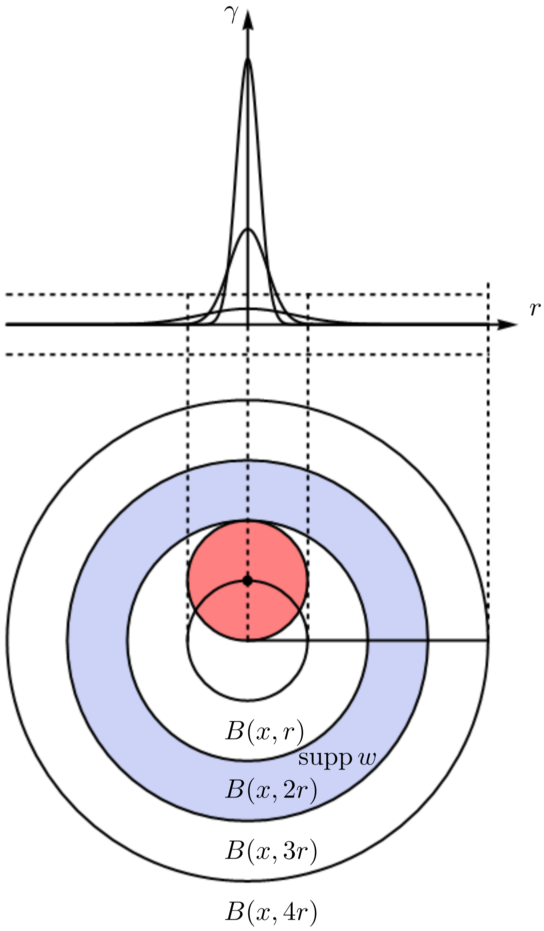
Pro libovolné předem zvolené $x_0 \in \Omega$ vyberme $r > 0$ tak, aby $\overline{B(x_0,4r)} \subsetneq \Omega$. Nechť dále $\eta \in C_c^\infty(B(x_0,4r))$ je funkce s oborem hodnot $\mathrm{H}(\eta) = [0,1]$ taková, že $\operatorname{supp}\eta \subset \overline{B(x_0,3r)}$ a $\eta(x) = 1$ pro $x \in B(x_0,2r)$. Položme $v \stackrel{\text{def}}{=} \eta u$ a $w \stackrel{\text{def}}{=} \Delta v - \eta f$. Potom $v = u$ na $B(x_0,2r)$ a $v = 0$ na $B(x_0,4r) \setminus \overline{B(x_0,3r)})$. Dále $w = \Delta v - \eta f = \Delta v - f = 0$ na $B(x_0,2r)$ a $w = 0$ na $B(x_0,4r) \setminus \overline{B(x_0,3r)})$. Proto $\operatorname{supp} w \subset B(x_0,3r) \setminus \overline{B(x_0,2r)}$. Nyní vezměme

$$v_t(x) = (\gamma_t * v)(x) = \langle v, \tau_x \check{\gamma}_t \rangle$$

a

$$w_t(x) = (\gamma_t * w)(x) = \langle w, \tau_x \check{\gamma}_t \rangle$$

(zde užíváme definici konvoluce pro distribuci s kompaktním nosičem s funkcí z $C^\infty(\mathbb{R}^N)$, Definice 2.55). Podle Věty 2.57 dostaneme, že pro každé $t > 0$ platí $v_t \in C^\infty(B(x_0,4r))$.



OBRÁZEK 2. Koule $B(x,r), \dots B(x,4r)$ a omezenost posunuté γ_t.

Navíc

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v_t(x) = \lim_{s\to t} \frac{\langle v, \tau_x \breve{\gamma}_s\rangle - \langle v, \tau_x \breve{\gamma}_t\rangle}{s-t} =$$

$$= \lim_{s\to t} \left\langle v, \frac{\tau_x \breve{\gamma}_s - \tau_x \breve{\gamma}_t}{s-t} \right\rangle =$$

$$= \lim_{s\to t} \left\langle v, \tau_x \frac{\partial \breve{\gamma}_t}{\partial t} + \tau_x \breve{o}(|s-t|) \right\rangle =$$

$$= \left\langle v, \tau_x \frac{\partial \breve{\gamma}_t}{\partial t} \right\rangle = \left\langle v, \tau_x \Delta \breve{\gamma}_t \right\rangle =$$

$$= \langle w + \eta f, \tau_x \breve{\gamma}_t\rangle = \langle \eta f \tau_x \breve{\gamma}_t\rangle + \langle w \tau_x \breve{\gamma}_t\rangle \ .$$

Tím dostáváme diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v_t(x) = \langle \eta f, \tau_x \check{\gamma}_t\rangle + \langle w, \tau_x \check{\gamma}_t\rangle \ .$$

Její integrací dostaneme:

$$v_t(x) = v_1(x) - \int_t^1 \gamma_t * (\eta f)(x)\,\mathrm{d}\tau - \int_t^1 w_\tau(x)\,\mathrm{d}\tau \,.$$

Protože $v \in \mathscr{D}'(\Omega)$ má kompaktní nosič a pro všechna $t \in (0,1]$ je $\gamma_t \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, podle Věty 2.57 dostaneme:

$$v_1(x) = (\gamma_1 * v)\,(x) \in C^\infty(B(x_0, 4r))\,.$$

Dále z předpokladu $f \in C^\infty(\Omega)$ dostaneme $\eta f \in C^\infty_{\mathrm{c}}(B(x_0,4r))$ (prohodili se role zhlazujícího činitele: zde ηf má derivace všech řádů a má kompaktní nosič, zatímco γ_t je pro $t = 0$ prvek $\mathscr{D}'(\Omega)$) a tudíž podle Věty 2.54 platí $\gamma_t * (\eta f) \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ pro všechna $t \in [0,1]$. Odtud již dostáváme: $\int_t^1 (\gamma_t * (\eta f))\,(x)\,\mathrm{d}\tau \in C^\infty(B(x_0,4r))$. Důkaz hladkosti posledního členu je poněkud pracnější a je proveden v následujících odstavcích.

Protože

$$\operatorname{supp} w_t \subset B(x_0,4r) \setminus \overline{B(x_0,2r)}\,,$$

omezíme se nyní na $B(x_0,4r) \setminus \overline{B(x_0,2r)}$. Indukcí lze dokázat (provedeme úplně na závěr celého důkazu na straně 85), že pro všechny multiindexy $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ existuje polynom $P_\alpha(x,t)$: $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stupně nejvýše $|\alpha|$ v proměnných $x = (x_1, \dots, x_N)$ a t tak, že

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}(4\pi t)^{-\frac{N}{2}} \exp\left[-\frac{|x|^2}{4t}\right] = (4\pi t)^{-\frac{N}{2}} t^{-|\alpha|} \exp\left[-\frac{|x|^2}{4t}\right] P_\alpha(x,t)\,.$$

Odtud lze ukázat, že

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^N \quad \forall r > 0 \quad \exists K_{\alpha,r} > 0 \quad \forall |x| > r \quad \forall t \in (1,0] : \tag{2.50}$$
$$\left|\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}(4\pi t)^{-\frac{N}{2}} \exp\left[-\frac{|x|^2}{4t}\right]\right| < K_{\alpha,r}\,.$$

Protože $\gamma_t \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ pro všechna $t \in (0,1]$ a všechny derivace jsou odhadnuty uniformně nerovností (2.50) pro všechna $t \in (0,1]$ a $|x| > r$, je funkce

$$w_t(x) = \langle \tau_x \check{\gamma}_t, w\rangle$$

třídy $C^\infty(B(x_0,r))$ a její parciální derivace všech řádů jsou uniformně odhadnuty nerovnostmi:

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^N \quad \forall r > 0 \quad \exists K_{\alpha,r} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \quad \forall t \in (0,1] : \tag{2.51}$$
$$|x - x_0| < r \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{\partial^{|\alpha|} w_t}{\partial x^\alpha}\right| < K_{\alpha,r}\,.$$

Funkce $w_t|_{B(x_0,r)}$ konverguje k distribuci $w \in \mathscr{D}'(B(x_0,r))$ ve smyslu distribucí. Vezmeme-li v úvahu uniformní odhady (2.51) pro všechna $t \in (0,\infty]$ a faktu, že koule $B(x_0,r)$ v Eukleidovské normě má hladkou hranici, pak z Lemmatu 2.87 plyne, že distribuce $w \in$

$\mathscr{D}'(B(x_0,r))$ je reprezentovatelná funkcí $w \in C^\infty(B(x_0,r))$ (zde jsme použili stejné značení pro funkci i distribuci).

Protože $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je dle předpokladu oblast, tj. otevřená souvislá množina, lze ke každému $x_0 \in \Omega$ najít $r > 0$ tak, že $B(x_0,r) \subset \Omega$. Z předchozích úvah dostaneme $w \in C^\infty(B(x_0,r))$. Proto $w \in C^\infty(\Omega)$.

Zbývá dokázat, že pro všechny multiindexy $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ existuje polynom $P_\alpha(x,t) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stupně nejvýše $|\alpha|$ v proměnných $x = (x_1, \ldots, x_N)$ a t tak, že

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}(4\pi t)^{-\frac{N}{2}} \exp\left[-\frac{|x|^2}{4t}\right] = (4\pi t)^{-\frac{N}{2}} t^{-|\alpha|} \exp\left[-\frac{|x|^2}{4t}\right] P_\alpha(x,t)\,.$$

První indukční krok, $|\alpha| = 1$. Nechť $i = 1, \ldots, N$, potom

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(4\pi t)^{-\frac{N}{2}} \exp\left[-\frac{|x|^2}{4t}\right] = (4\pi t)^{-\frac{N}{2}} t^{-1} \exp\left[-\frac{|x|^2}{4t}\right] \frac{1}{2} x_i\,,$$

tedy $P_{(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)}(x,t) = \frac{1}{2}x_i$.

Druhý indukční krok. Platí-li rovnost pro $\beta \in \mathbb{N}_0^N : |\beta| = k \in \mathbb{N}$, *pak platí i pro* $\alpha \in \mathbb{N}_0^N : |\alpha| = k+1$. Nechť $j = 1, \ldots, N$, potom

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}(4\pi t)^{-\frac{N}{2}} \exp\left[-\frac{|x|^2}{4t}\right] = \frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^\beta}(4\pi t)^{-\frac{N}{2}} t^{-|\beta|} \exp\left[-\frac{|x|^2}{4t}\right] P_\beta(x,t) =$$

$$= (4\pi t)^{-\frac{N}{2}} t^{-|\beta|} \exp\left[-\frac{|x|^2}{4t}\right] \left(\frac{1}{2t} x_j P_\beta(x,t) + t\frac{\partial P_\beta}{\partial x_j}(x,t)\right) =$$

$$= (4\pi t)^{-\frac{N}{2}} t^{-|\beta|-1} \exp\left[-\frac{|x|^2}{4t}\right] \left(\frac{1}{2} x_j P_\beta(x,t) + t\frac{\partial P_\beta}{\partial x_j}(x,t)\right)\,,$$

$P_\alpha(x,t) := \left(\frac{1}{2}x_j P_\beta(x,t) + t\frac{\partial P_\beta}{\partial x_j}(x,t)\right)$. Zřejmě $|\alpha| = |\beta| + 1$ a $P_\alpha(x,t)$ je stupně nejvýše $|\alpha|$ v proměnných $x_1, \ldots x_N$ a t. ■

S pomocí teorie distribucí a Weylova lemmatu 2.85 v následujícím příkladě ukážeme poněkud překvapivý výsledek o neexistenci klasického řešení pro Poissonovu rovnici se spojitou pravou stranou $f \in C(\overline{\Omega})$. Tento příklad osvětluje základní těžkosti a jevy, se kterými se nesetkáme při řešení obyčejných diferenciálních rovnic, ale které se typicky projevují i u těch strukturálně nejjednodušších parciálních diferenciálních rovnic.

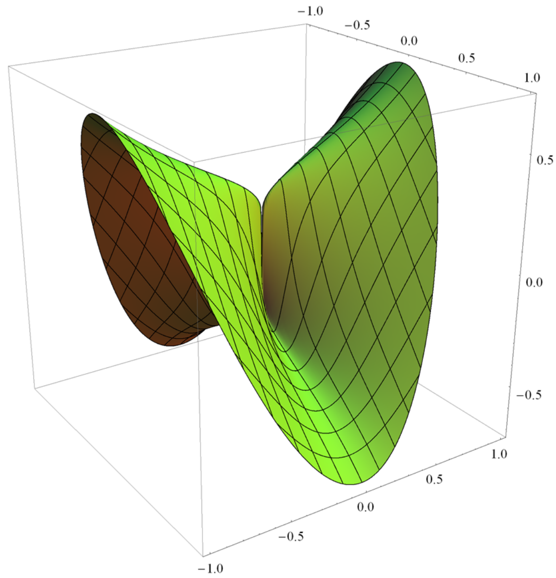
Příklad 2.88. Pro *spojitou* funkci

$$f(x_1,x_2) = -\frac{(x_1^2 - x_2^2)\left(8\left(\ln 2 - \ln\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right) + 1\right)}{16\,(x_1^2+x_2^2)\left(\ln 2 - \log\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)^{3/2}}\,,$$

pro $x_1, x_2 \neq 0$ a $f(0,0) = 0$ nemá Dirichletovy úloha

$$\begin{array}{lcl} -\Delta u(x) & = & f(x) \quad 0 \leq |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 1 \\ u(x) & = & 0 \quad |x| = 1 \end{array} \tag{2.52}$$

klasické řešení, tj. neexistuje $u \in C^2(B(o,1)) \cap C_0(\overline{B(o,1)})$ splňující rovnici v každém bodě koule $B(o,1) = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq |x| < 0\}$ (zde $o = (0,0)$) a $u(x) = 0$ pro každý bod kružnice $x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1$.



Obrázek 3. Spojitá pravá strana f rovnice z Příkladu 2.88 na straně 85.

Řešení. V následujícím ukážeme, že

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{4}\left(x_1^2 - x_2^2\right)\left(\sqrt{\ln 2 - \ln \sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - \sqrt{\ln 2}\right)$$

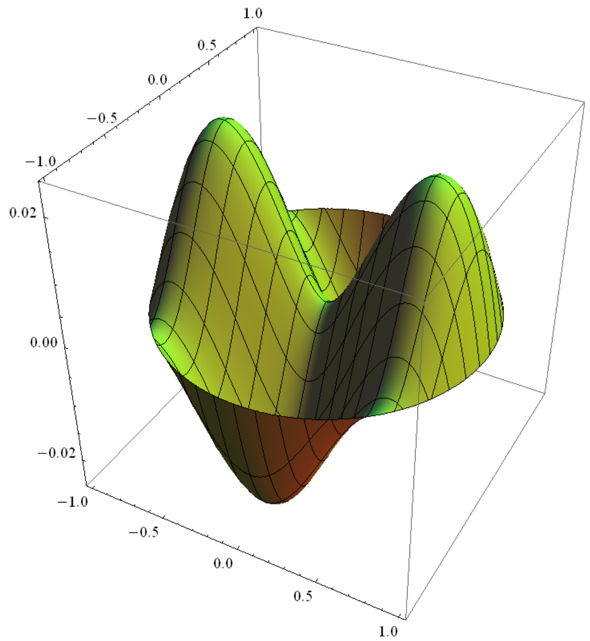
splňuje okrajovou podmínku úlohy (2.52), tj. $u(x) = 0$ pro $|x| = 1$; $u \notin C^2(B(o,1))$; u splňuje rovnici $-\Delta u = f$ ve smyslu distribucí na $\Omega = B(o,1)$ a nakonec ukážeme, že úloha (2.52) žádné další řešení ve smyslu distribucí nemá. Protože klasická řešení jsou zároveň řešeními ve smyslu distribucí, úloha nemůže mít klasické řešení.

Za prvé si všimněme, že funkce u má tuto strukturu

$$u(x_1, x_2) = \left(x_1^2 - x_2^2\right) g(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}) = \left(x_1^2 - x_2^2\right) g(|x|)\,,$$

což lze v polárních souřadnicicích $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ vyjádřit takto

$$u(\rho, \varphi) = \rho^2 \cos 2\varphi\, g(\rho)\,.$$



Obrázek 4. Řešení úlohy $\Delta u = f$ na $B(o,1)$, $u = 0$ na $\partial B(o,1)$ ve smyslu distribucí z Příkladu 2.88 na straně 85, které není z prostoru $C^2(B(o,1))$.

V následujícím výpočtu budeme potřebovat radiální parciální derivaci funkce $u(\rho,\varphi)$ na obvodu jednotkové kružnice. Tu lze vypočítat dosazením do radiální parciální derivace v obecném bodě (ρ,φ):

$$\frac{\partial}{\partial\rho}u(\rho,\varphi) = \cos 2\varphi \cdot \left(2\rho\, g(\rho) + \rho^2\, g'(\rho)\right) . \tag{2.53}$$

Okrajová podmínka. Dosazením za $\rho = x^2 + y^2 = 1$ dostaneme

$$u(1,\varphi) = \frac{1}{2}\cos 2\varphi \left(\sqrt{\ln 2 - \ln\sqrt{1}} - \sqrt{\ln 2}\right) = \frac{1}{2}\cos 2\varphi \cdot 0 = 0\,.$$

Splnění rovnice bodově na $B(o,1)\setminus\{o\}$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_1,x_2) = \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \ln\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right) - \frac{\sqrt{\ln 2}}{2} + \tag{2.54}$$

$$+\frac{-3x_1^4-6x_2^2x_1^2+x_2^4}{8\left(x_1^2+x_2^2\right)^2\sqrt{\ln 2-\ln\sqrt{x_1^2+x_2^2}}}+$$

$$+\frac{\left(x_2^2-x_1^2\right)x_1^2}{16\left(x_1^2+x_2^2\right)^2\left(\ln 2-\ln\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_1,x_2) = -\frac{1}{2}\sqrt{\ln 2 - \ln\sqrt{x_1^2+x_2^2}} + \frac{\sqrt{\ln 2}}{2} + \tag{2.55}$$

$$+\frac{-x_1^4+6x_2^2x_1^2+3x_2^4}{8\left(x_1^2+x_2^2\right)^2\sqrt{\ln 2-\ln\sqrt{x_1^2+x_2^2}}}+$$

$$+\frac{\left(x_2^2-x_1^2\right)x_2^2}{16\left(x_1^2+x_2^2\right)^2\left(\ln 2-\ln\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)^{3/2}}$$

Sečtením dostaneme:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_1,x_2)+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_1,x_2) = -\frac{\left(x_1^2-x_2^2\right)\left(8\left(\ln 2-\ln\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)+1\right)}{16\left(x_1^2+x_2^2\right)\left(\ln 2-\log\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)^{3/2}},$$

což znamená:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = f(x,y) \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|>0\,.$$

Splnění rovnice ve smyslu distribucí. Budeme pracovat s funkcí u zapsanou ve tvaru $u(x) = u(x_1,x_2) = (x_1^2-x_2^2)\,g(|x|)$. Máme ověřit, že platí

$$\left\langle D^{(2,0)}u,\phi\right\rangle + \left\langle D^{(0,2)}u,\phi\right\rangle = \int_{B(o,1)} f(x)\,\phi(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall\phi\in\mathscr{D}'(B(o,1))\,,$$

kde $x = (x,y)$. Z definice derivace distribuce a linearity integrálu dostaneme následující integrální identitu:

$$\int_{B(o,1)} u(x)\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}(x)+\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}(x)\right)\mathrm{d}x = \int_{B(o,1)} f(x)\,\phi(x)\,\mathrm{d}x \tag{2.56}$$

splněnou pro všechna $\phi \in \mathscr{D}'(B(o,1))$.

Tuto identitu dokážeme sporem. Předpokládejme, že existuje $\phi \in \mathscr{D}'(B(o,1))$ a $q > 0$ tak, že

$$\left| \int_{B(o,1)} u(x) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2}(x) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2}(x) \right) \mathrm{d}x - \int_{B(o,1)} f(x)\, \phi(x)\, \mathrm{d}x \right| > q\,. \tag{2.57}$$

Nejprve upravíme integrál $\int_{B(o,1)} u(x) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2}(x) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2}(x) \right) \mathrm{d}x$. Nechť $0 < \varepsilon < 1$. Rozdělíme integrační obor na $B(o,1) \setminus B(o,\varepsilon)$ a $B(o,\varepsilon)$. Na integrál přes $B(o,1) \setminus B(o,\varepsilon)$ užijeme Greenovu identitu (2.14):

$$\begin{aligned} &\int_{B(o,1)} u(x) \Delta \phi(x)\, \mathrm{d}x = \\ &= \left(\int_{B(o,\varepsilon)} + \int_{B(o,1)\setminus B(o,\varepsilon)} \right) u(x) \Delta\phi(x)\, \mathrm{d}x = \\ &= \int_{B(o,\varepsilon)} u(x)\Delta\phi(x)\, \mathrm{d}x + \\ &+ \int_{B(o,1)\setminus B(o,\varepsilon)} \Delta u(x) \phi(x)\, \mathrm{d}x \\ &+ \int_{\partial\left(B(o,1)\setminus \overline{B(o,\varepsilon)}\right)} \left(u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}(x) - \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) \varphi(x) \right) \mathrm{d}\mathcal{H}^1 = \\ &= \int_{B(o,\varepsilon)} u(x)\Delta\phi(x)\, \mathrm{d}x + \\ &+ \int_{B(o,1)\setminus B(o,\varepsilon)} f(x) \phi(x)\, \mathrm{d}x \\ &+ \int_{\partial\left(B(o,1)\setminus \overline{B(o,\varepsilon)}\right)} \left(u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}(x) - \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) \varphi(x) \right) \mathrm{d}\mathcal{H}^1 \end{aligned} \tag{2.58}$$

Protože $x \mapsto u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}(x)$ je spojitá funkce v $\mathbb{R}^2$, je

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial B(o,\varepsilon)} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}(x)\, \mathrm{d}\mathcal{H}^1 = 0\,. \tag{2.59}$$

Dále $u(x) = 0$ pro $|x| = 1$, proto je

$$\int_{\partial B(o,1)} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}(x)\, \mathrm{d}\mathcal{H}^1 = 0\,. \tag{2.60}$$

Hranice $\partial B(o,\varepsilon)$ je kružnice se středem v počátku, proto přejdeme do polárních souřadnic $x_1 = \rho \cos\varphi$, $x_2 = \rho \sin \varphi$. Potom je derivace $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ ve směru normály k $\partial B(o,\varepsilon)$ derivací podle radiusu ρ pro $\rho = 1$. Dosazením z (2.53) a užitím parametrizace oblouku kružnice dostaneme

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B(o,\varepsilon)}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^1=\varepsilon\int_0^{2\pi}\frac{\partial u}{\partial\rho}(\varepsilon,\varphi)\,\mathrm{d}\varphi= \tag{2.61}$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\left\{2\varepsilon\, g\,(\varepsilon)+\varepsilon^2\, g'\,(\varepsilon)\right\}\int_0^{2\pi}\cos 2\phi\,\mathrm{d}\varphi=\lim_{\varepsilon\to 0}0=0\,.$$

Analogicky

$$\int_{\partial B(o,1)}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^1=\varepsilon\int_0^{2\pi}\frac{\partial u}{\partial\rho}(1,\varphi)\,\mathrm{d}\varphi= \tag{2.62}$$
$$=\{2\,g\,(1)+g'\,(1)\}\int_0^{2\pi}\cos 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi=0\,.$$

Odtud pro libovolné $0<\varepsilon<1$ dostaneme:

$$\left|\int_{B(o,1)}u(x)\Delta\phi(x)\,\mathrm{d}x-\int_{B(o,1)}f(x)\,\phi(x)\,\mathrm{d}x\right|= \tag{2.63}$$
$$=\Bigg|\int_{B(o,\varepsilon)}u(x)\Delta\phi(x)\,\mathrm{d}x-\int_{B(o,\varepsilon)}f(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x+$$
$$+\int_{\partial\left(B(o,1)\setminus\overline{B(o,\varepsilon)}\right)}\left(u(x)\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}}(x)-\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}(x)\varphi(x)\right)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^1\Bigg|\,.$$

Protože $f(x)$ i $u(x)\Delta\phi(x)$ jsou spojité funkce, z Lebesguovy věty (o dominantní konvergenci), a rovností (2.58), (2.59), (2.60), (2.61), (2.62) a (2.63) plyne, že pro libovolné $q>0$ existuje $\varepsilon>0$ tak, že

$$\left|\int_{B(o,1)}u(x)\Delta\phi(x)\,\mathrm{d}x-\int_{B(o,1)}f(x)\,\phi(x)\,\mathrm{d}x\right|<q\,,$$

což je ve sporu s (2.57) a identita (2.56) platí.
$u\notin C^2(B(o,1))$. Z předchozích výpočtů plyne, že například

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_1,x_2)=\frac{1}{2}\left(\ln 2-\ln\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)+\mathrm{O}(1)\,.$$

Tato funkce má limitu $+\infty$ pro $(x_1,x_2)\to(0,0)$. Tudíž $u\notin C^2(B(o,1))$.
Neexistuje klasické řešení úlohy (2.52). Předpokládejme, že kromě výše uvedeného řešení $u\notin C^2(B(o,1))$ existuje ještě klasické řešení $v\in C^2(B(o,1))$. Potom je toto řešení též řešením ve smyslu distribucí. Rozdíl $u-v$ pak řeší rovnici $\Delta w=0$ na kouli $B(o,1))$ ve smyslu distribucí. Podle Weylova lemmatu Lemma 2.85 je $w\in C^\infty(B(o,1))$. To je spor, protože rozdíl funkce $v\in C^2(B(o,1))$ a $u\notin C^2(B(o,1))$ nemůže být třídy $C^\infty(B(o,1))$. Tento trik je převzat z monografie Zeidler [**21**, Protipříklad 6.3 na str. 249]. □

Podobný výsledek jako Weylovo lemma týkající se regularity řešení ve smyslu distribucí platí i pro rovnici vedení tepla.

Věta 2.89 ([**18**]). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ je libovolná otevřená množina. Jestliže distribuce $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ splňuje rovnici vedení tepla*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = f \in C^\infty(\Omega)$$

ve smyslu distribucí, tj. $\forall \phi \in \mathscr{D}(\Omega)$ platí

$$\left\langle u, -\frac{\partial \phi}{\partial t} + \Delta \phi \right\rangle = \langle f, \phi \rangle \in C^\infty(\Omega)\,,$$

potom je distribuce u reprezentovatelná funkcí $u \in C^\infty(\Omega)$.

Naopak pro vlnovou rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f$$

výsledek tohoto typu neplatí. Například funkce $u\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} : \mathbb{R}, u(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\left(\operatorname{sgn}(x+t) + \operatorname{sgn}(x-t)\right)$ splňuje vlnovou rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \tag{2.64}$$

pro $\Omega = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ve smyslu distribucí a přitom není diferencovatelná pro $x = t$. Splnění vlnové rovnice (2.64) ve smyslu distribucí ověříme tak, že budeme uvažovat zhlazenou posloupnost

$$u_n\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}, u_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\left(\omega_{1/n} * \operatorname{sgn}(x+t) + \omega_{1/n} * \operatorname{sgn}(x-t)\right)\,.$$

Posloupnost funkcí $u_n \in C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ splňuje rovnici (2.64) klasicky (D'Alambertův vzorec), tedy v každém bodě $(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ a tedy i ve smyslu distribucí. Současně $u_n \stackrel{*}{\rightharpoonup} u$ pro $n \to +\infty$ ve smyslu distribucí. Tudíž limita u splňuje rovnici (2.64) ve smyslu distribucí.

KAPITOLA 3

Sobolevovy prostory

3.1. Základní definice

Definice 3.1. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je oblast a $1 \leq p \leq \infty$. *Sobolevův prostor* $W^{1,p}(\Omega)$ je prostor všech (tříd) funkcí $u \in L^p(\Omega)$, jejichž první parciální derivace ve smyslu distribucí leží v $L^p(\Omega)$, přesněji pro všechna $i = 1, 2, \dots, N$ existuje funkce $g_i \in L^p(\Omega)$ taková, že

$$\int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \mathrm{d}x = - \int_\Omega g_i \, \phi \mathrm{d}x$$

pro všechna $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Funkci g_i se říká *slabá parciální derivace* funkce u vzhledem k x_i a značí se stejně jako klasická parciální derivace $\frac{\partial u}{\partial x_i}$.

U funkcí z $W^{1,p}(\Omega)$ budeme vždy implicitně předpokládat, že $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ značí slabou derivaci pokud nebude výslovně řečeno, že se jedná o parciální derivaci klasickou.

Příklad 3.2. (Leoni, Příklad 10.14) Nechť $\Omega = B(o, 1) \subset \mathbb{R}^N$, $a + 1 < N$, $1 \leq p < +\infty$. Potom funkce

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|x|^a_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}} \quad \text{pro } x \neq 0$$

náleží $W^{1,p}(B(o, 1))$ v tom a jen v tom případě, že $(a+1)p < N$. Speciálně $f \notin W^{1,p}(B(o, 1))$, pokud $p \geq N$.

Předchozí příklad lze ještě vylepšit a dostaneme až neuvěřitělně divokou funkci patřící do $W^{1,p}(B(o, 1))$.

Příklad 3.3. (Leoni, Příklad 10.14, modifikace) Nechť $\Omega = B(o, 1) \subset \mathbb{R}^N$, $a + 1 < N$, $1 \leq p < +\infty$. Nechť dále $P : \mathbb{N} \leftrightarrow B(o, 1) \cap \mathbb{Q}^N$ je bijekce (tzv. očíslování bodů s racionálními souřadnicemi). Potom funkce

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{1}{|x - P(n)|^a_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}} \quad \text{pro } x \neq P(n), n \in \mathbb{N}$$

náleží $W^{1,p}(B(o, 1))$ v tom a jen v tom případě, že $(a + 1)p < N$.

Poznámka 3.4. Všimněte si, že funkce f z předchozího příkladu není omezená na žádné kompaktní podmnožině $K \subset B(o, 1)$ s *neprázdným* vnitřkem. Její hodnota není definována pro $B(o, 1) \cap \mathbb{Q}^N$ a naopak nabývá reálné hodnoty pro $x \in B(o, 1) \setminus \mathbb{Q}^N$.

Příklad 3.5. Nechť $\Omega = (-1, 1)$. Funkce $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{sgn}(x)$ nepatří do $W^{1,p}(-1, 1)$ pro žádné $1 < p < +\infty$.

Poznámka 3.6. Všimněte si, že $f'(x)$ existuje skoro všude na intervalu $(-1, 1)$ a je skoro všude rovna 0. Platí tedy, že $f' \in L^\infty(-1, 1)$ a zdálo by se tak, že $f \in W^{1,p}(-1, 1)$ pro libovolné $p > 1$. Ovšem není tomu tak, neboť distributívní derivace $f = \operatorname{sgn}$ je Diracova distribuce δ_0, která *není reprezentovatelná* integrovatelnou funkcí, ale Borelovskou mírou.

Příklad 3.7. Nechť $\Omega = (0, 1)$. Cantorova funkce $C(x)$ nepatří do $W^{1,p}(0, 1)$ pro žádné $1 < p < +\infty$.

Poznámka 3.8. Tentokrát se jedná o případ spojité funkce, která neleží ve $W^{1,p}(0,1)$. Opět jako v Příkladě 3.5 platí, že $C'(x)$ existuje skoro všude na intervalu $(0,1)$ a je na něm skoro všude rovna 0. Platí tedy, že $C' \in L^\infty(-1,1)$. Ovšem jak víme z příkladu 2.43, je distributívní derivace funkce C reprezentovatelná mírou, která není absolutně spojitá vůči Lebesgueově míře. Tudíž distributívní derivace funkce C není integrovatelná funkce a C tedy nepatří do $W^{1,p}(0,1)$ pro žádné $1 < p < +\infty$.

Definice 3.9. Pro $1 < p < +\infty$ definujeme zobrazení $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)} \colon W^{1,p}(\Omega) \to [0,+\infty)$ předpisem

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p}, \tag{3.1}$$

kde $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)$ jsou slabé derivace u. Dále definujeme zobrazení $\|\cdot\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \colon W^{1,\infty}(\Omega) \to [0,+\infty)$ předpisem

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \stackrel{\text{def}}{=} \max \left\{ \|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L^\infty(\Omega)}, \dots, \left\| \frac{\partial u}{\partial x_N} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \right\}, \tag{3.2}$$

kde $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^\infty(\Omega)$ jsou opět slabé derivace u.

Věta 3.10. *Pro $1 < p < +\infty$ je zobrazení $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)} \colon W^{1,p}(\Omega) \to [0,+\infty)$ definované předpisem (3.1) norma na prostoru $W^{1,p}(\Omega)$. Metrický prostor $\big(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}\big)$ je Banachův. Zobrazení $\|\cdot\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \colon W^{1,\infty}(\Omega) \to [0,+\infty)$ definované předpisem (3.2) je norma na prostoru $W^{1,\infty}(\Omega)$. Metrický prostor $\big(W^{1,\infty}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}\big)$ je Banachův.*

Poznámka 3.11. Místo $\big(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}\big)$ píšeme pro stručnost jen $W^{1,p}(\Omega)$. Pokud bychom chtěli uvažovat $W^{1,p}(\Omega)$ s jinou normou než $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$, tento fakt explicitně zmíníme.

Definice 3.12. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je oblast a $1 \le p \le +\infty$. Definujme ještě prostor $W^{1,p}_0(\Omega)$ jako uzávěr $\mathscr{D}(\Omega)$ ve $W^{1,p}(\Omega)$ vzhledem k normě $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$. Tuto skutečnost též zapisujeme jako

$$W^{1,p}_0(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\mathscr{D}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}}. \tag{3.3}$$

Poznámka 3.13. Výše uvedená definice má jednu drobnou vadu na kráse, a sice tu, že směšujeme funkce z $\mathscr{D}(\Omega)$ a třídy funkcí z $W^{1,p}(\Omega)$. Korektní postup je vzít funkci $u \in \mathscr{D}(\Omega)$ jako reprezentanta třídy funkcí lišících se od u na množině Lebesgueovy míry nula a pak pracovat s touto třídou.

Věta 3.14. *Zobrazení $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_{W^{1,2}(\Omega)} : W^{1,2}(\Omega) \times W^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definované předpisem*

$$\langle u, v \rangle_{W^{1,2}(\Omega)} \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x + \int_\Omega u\, v \,\mathrm{d}x \tag{3.4}$$

je skalární součin na $W^{1,2}(\Omega)$ *resp. na* $W_0^{1,2}(\Omega)$ *a unitární prostor* $(W^{1,2}(\Omega), \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_{W^{1,2}(\Omega)})$ *resp.* $(W_0^{1,2}(\Omega), \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_{W^{1,2}(\Omega)})$ *je Hilbertův.*

Definice 3.15. Prostor $W^{1,2}(\Omega)$ resp. $W_0^{1,2}(\Omega)$ se skalárním součinem $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_{W^{1,2}(\Omega)}$ budeme značit $H^1(\Omega)$ resp. $H_0^1(\Omega)$ (abychom zdůraznili hilbertovskou strukturu těchto prostorů).

Definice 3.16. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je oblast, $k \in \mathbb{N}$: $k \geq 2$ a $1 \leq p \leq \infty$. *Sobolevův prostor* $W^{k,p}(\Omega)$ je prostor všech (tříd) funkcí $u \in L^p(\Omega)$, jejichž všechny parciální derivace ve smyslu distribucí o multiindexu $\alpha \in {\mathbb{N}_0}^N$: $1 \leq |\alpha| \leq k$ leží v $L^p(\Omega)$, přesněji ke každému všechna $\alpha \in {\mathbb{N}_0}^N$: $1 \leq |\alpha| \leq k$ existuje funkce $g_\alpha \in L^p(\Omega)$ taková, že

$$\int_\Omega u\,\frac{\partial^{|\alpha|}\phi}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_N^{\alpha_N}}\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega g_\alpha\,\phi\mathrm{d}x$$

pro všechna $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Funkci g_α se říká *slabá parciální derivace* funkce u odpovídající multiindexu α a značí se stejně jako klasická parciální derivace $\frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_N^{\alpha_N}}$ (je to distributivní derivace, která je integrovatelnou funkcí, proto ji značíme stejně jako klasickou derivaci).

U funkcí z $W^{1,p}(\Omega)$ budeme vždy implicitně předpokládat, že $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ značí slabou derivaci pokud nebude výslovně řečeno, že se jedná o parciální derivaci klasickou.

Definice 3.17. Pro $1 < p < +\infty$ definujeme zobrazení $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}\colon W^{1,p}(\Omega) \to [0,+\infty)$ předpisem

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \overset{\text{def}}{=} \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{\substack{\alpha\in{\mathbb{N}_0}^N\\ 1\leq|\alpha|\leq k}}\left\|\frac{\partial^\alpha u}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_N^{\alpha_N}}\right\|_{L^p(\Omega)}^p\right)^{1/p}, \tag{3.5}$$

kde $\frac{\partial^\alpha u}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_N^{\alpha_N}} \in L^p(\Omega)$ jsou slabé derivace u. Dále definujeme zobrazení $\|\cdot\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}\colon W^{1,\infty}(\Omega) \to [0,+\infty)$ předpisem

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \overset{\text{def}}{=} \max_{\substack{\alpha\in{\mathbb{N}_0}^N\\ 0\leq|\alpha|\leq k}}\left\|\frac{\partial^\alpha u}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_N^{\alpha_N}}\right\|_{L^\infty(\Omega)}, \tag{3.6}$$

kde $\frac{\partial^\alpha u}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_N^{\alpha_N}} \in L^\infty(\Omega)$ jsou opět slabé derivace u a pro $\alpha = (0,\ldots,0)$, tj. pro $|\alpha| = 0$, výraz $\frac{\partial^\alpha u}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_N^{\alpha_N}}$ interpretujeme jako u.

Věta 3.18. *Pro* $1 < p < +\infty$ *je zobrazení* $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}\colon W^{k,p}(\Omega) \to [0,+\infty)$ *definované předpisem* (3.5) *norma na prostoru* $W^{k,p}(\Omega)$*. Metrický prostor* $\big(W^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}\big)$ *je Banachův. Zobrazení* $\|\cdot\|_{W^{k,\infty}(\Omega)}\colon W^{k,\infty}(\Omega) \to [0,+\infty)$ *definované předpisem* (3.6) *je norma na prostoru* $W^{k,\infty}(\Omega)$*. Metrický prostor* $\big(W^{k,\infty}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{k,\infty}(\Omega)}\big)$ *je Banachův.*

Definice 3.19. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je oblast, $k \geq 2$ a $1 \leq p \leq +\infty$. Definujme ještě prostor $W_0^{k,p}(\Omega)$ jako uzávěr $\mathscr{D}(\Omega)$ ve $W^{k,p}(\Omega)$ vzhledem k normě $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$. Tuto skutečnost též zapisujeme jako

$$W_0^{k,p}(\Omega) \overset{\text{def}}{=} \overline{\mathscr{D}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}}. \tag{3.7}$$

Věta 3.20. *Nechť $k \geq 2$. Zobrazení $\langle \cdot\,, \cdot \rangle_{W^{k,2}(\Omega)} : W^{k,2}(\Omega) \times W^{k,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definované předpisem*

$$\langle u, v \rangle_{W^{1,2}(\Omega)} \overset{\text{def}}{=} \sum_{1 \leq |\alpha| \leq k} \int_\Omega \frac{\partial^\alpha u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}} \frac{\partial^\alpha v}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}} \, \mathrm{d}x + \int_\Omega u\, v \, \mathrm{d}x \tag{3.8}$$

je skalární součin na $W^{k,2}(\Omega)$ resp. na $W_0^{k,2}(\Omega)$ a unitární prostor $(W^{k,2}(\Omega), \langle \cdot\,, \cdot \rangle_{W^{k,2}(\Omega)})$ resp. $(W_0^{k,2}(\Omega), \langle \cdot\,, \cdot \rangle_{W^{k,2}(\Omega)})$ je Hilbertův.

Definice 3.21. Prostor $W^{k,2}(\Omega)$ resp. $W_0^{k,2}(\Omega)$ se skalárním součinem $\langle \cdot\,, \cdot \rangle_{W^{k,2}(\Omega)}$ budeme značit $H^k(\Omega)$ resp. $H_0^k(\Omega)$ (abychom zdůraznili hilbertovskou strukturu těchto prostorů).

3.2. Poincarého nerovnost a Rellichova-Kondrachovova věta ve $W_0^{1,p}(\Omega)$

Poincarého nerovnost je základní součástí variačního přístupu k Dirichletově úloze. Poskytuje koercivitu Dirichletova integrálu $\int_\Omega |Dv|^2 \mathrm{d}x$ na prostoru $H_0^1(\Omega)$.

Věta 3.22 (Poincarého nerovnost)**.** *Buď Ω otevřená podmnožina $\mathbb{R}^N$, která je omezená v jednom směru. Pak pro každé $1 \leq p < +\infty$ existuje konstanta $C_{p,N}(\Omega)$, závisející pouze na Ω, p a N, taková, že*

$$\left(\int_\Omega |v(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_{p,N}(\Omega) \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^N \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{3.9}$$

Důkaz. Protože Ω je omezená v jednom směru, můžeme najít soustavu souřadnic, kterou pro jednoduchost stále značíme $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$, takovou, že Ω leží v pásu $a \leq x_N \leq b$. Píšeme $x = (x', x_N)$, kde $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{N-1})$.

Protože $\mathcal{D}(\Omega)$ je hustá podmnožina $W_0^{1,p}(\Omega)$ (podle definice $W_0^{1,p}(\Omega)$), uvažujme nejprve $v \in \mathcal{D}(\Omega)$. Výsledek pak rozšíříme s využitím hustoty a spojitosti. Definujme

$$\tilde{v} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} v & \text{na } \Omega, \\ 0 & \text{na } \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

Pro libovolné $x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^N$, kde $a \leq x_N \leq b$ a $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$, máme

$$\tilde{v}(x) = \tilde{v}(x', x_N) = \tilde{v}(x', a) + \int_a^{x_N} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_N}(x', t) \mathrm{d}t.$$

Protože $\tilde{v}(x', a) = 0$, platí

$$\tilde{v}(x', x_N) = \int_a^{x_N} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_N}(x', t) \mathrm{d}t.$$

Z Hölderovy nerovnosti ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$) nyní dostaneme

$$\begin{aligned} |\tilde{v}(x', x_N)|^p &\leq (x_N - a)^{\frac{p}{p'}} \int_a^{x_N} \left|\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_N}(x', t)\right|^p \mathrm{d}t \\ &\leq (x_N - a)^{\frac{p}{p'}} \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_N}(x', t)\right|^p \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Integrujme nejprve podle $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$. Dostaneme

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |\tilde{v}(x', x_N)|^p \mathrm{d}x' \leq (x_N - a)^{\frac{p}{p'}} \int_{\mathbb{R}^N} \left|\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_N}(x)\right|^p \mathrm{d}x.$$

Po integraci podle x_N $(a \leq x_N \leq b)$ pak obdržíme

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{v}(x)|^p \mathrm{d}x \leq \frac{(b-a)^{1+\frac{p}{p'}}}{1 + \frac{p}{p'}} \int_{\mathbb{R}^N} \left|\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_N}(x)\right|^p \mathrm{d}x.$$

Protože $\frac{\partial \tilde v}{\partial x_N} = Dv \cdot n$, kde n je jednotkový normálový vektor k pásu obsahujícímu Ω, platí

$$\left|\frac{\partial \tilde v}{\partial x_N}\right|^p = \left|\sum_{i=1}^N \frac{\partial \tilde v}{\partial x_i} n_i\right|^p \le \left(\sum_{i=1}^N \left|\frac{\partial \tilde v}{\partial x_i}\right|^p\right)\left(\sum_{i=1}^N n_i^{p'}\right)^{\frac{p}{p'}} \le N^{\frac{p}{p'}} \sum_{i=1}^N \left|\frac{\partial \tilde v}{\partial x_i}\right|^p.$$

Máme $1 + \frac{p}{p'} = p$, a tedy

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\tilde v(x)|^p \mathrm{d}x \le \frac{(b-a)^p}{p} N^{\frac{p}{p'}} \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{i=1}^N \left|\frac{\partial \tilde v}{\partial x_i}\right|^p \mathrm{d}x.$$

Protože vně množiny Ω platí $\tilde v = \frac{\partial \tilde v}{\partial x_i} = 0$, $i = 1, \ldots, N$, a v množině Ω máme $\tilde v = v$ a $\frac{\partial \tilde v}{\partial x_i} = \frac{\partial v}{\partial x_i}$, dostáváme

$$\left(\int_\Omega |v(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \le C_{p,N}(\Omega) \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^N \left|\frac{\partial \tilde v}{\partial x_i}\right|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega),$$

kde $C_{p,N}(\Omega) = (b-a)\frac{N^{\frac{1}{p'}}}{p^{\frac{1}{p}}}$.

Hustota $\mathcal{D}(\Omega)$ v $W_0^{1,p}(\Omega)$ umožňuje uvedenou nerovnost přímo rozšířit na $W_0^{1,p}(\Omega)$. Tím je důkaz (3.9) proveden. ■

Definice 3.23. *Poincarého konstantou nazveme nejmenší konstantu C takovou, že platí* (3.9)*, tj.*

$$\bar C_{p,N}(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=}$$
$$\inf\left\{C : \left(\int_\Omega |v(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \le C\left(\int_\Omega \sum_{i=1}^N \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)\right\}.$$

Jinými slovy,

$$\frac{1}{\bar C_{p,N}(\Omega)} = \inf\left\{\left(\int_\Omega \sum_{i=1}^N \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} : \int_\Omega |v|^p \mathrm{d}x = 1,\ v \in W_0^{1,p}(\Omega)\right\}.$$

V některých případech (viz např. „ledový mrak“ („cloud of ice“) v Attouch [**?**]) je užitečné vědět přesně, jak Poincarého konstanta závisí na velikosti Ω.

Tvrzení 3.24. *Pro libovolné $R > 0$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ platí*

$$\bar C_{p,N}(R\Omega) = R\bar C_{p,N}(\Omega).$$

Důkaz. Nechť $v \in W_0^{1,p}(R\Omega)$. Definujeme $v_R(x) \stackrel{\text{def}}{=} v(Rx)$. Zřejmě $v_R \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\int_\Omega |v_R(x)|^p \mathrm{d}x = \int_\Omega |v(Rx)|^p \mathrm{d}x = R^{-N} \int_{R\Omega} |v(y)|^p \mathrm{d}y$$

a

$$\begin{aligned}\int_\Omega |Dv_R(x)|^p \mathrm{d}x &= \int_\Omega \sum_{i=1}^N \left|\frac{\partial v_R}{\partial x_i}(x)\right|^p \mathrm{d}x = \int_\Omega \sum_{i=1}^N \left|\frac{\partial}{\partial x_i} v(Rx)\right|^p \mathrm{d}x \\ &= R^p \int_\Omega \sum_{i=1}^N \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}(Rx)\right|^p \mathrm{d}x \\ &= R^{p-N} \int_{R\Omega} \sum_{i=1}^N \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}(\xi)\right|^p \mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

Potom

$$\begin{aligned}\int_{R\Omega} |v(y)|^p \mathrm{d}y = R^N \int_\Omega |v_R(x)|^p \mathrm{d}x &\le R^N \bar{C}^p_{p,N}(\Omega) \int_\Omega |Dv_R|^p \mathrm{d}x \\ &\le R^N R^{p-N} \bar{C}^p_{p,N}(\Omega) \int_{R\Omega} |Dv|^p \mathrm{d}x \\ &= (R\bar{C}_{p,N}(\Omega))^p \int_{R\Omega} |Dv|^p \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Tato nerovnost platí pro libovolné $v \in W_0^{1,p}(R\Omega)$, takže

$$\bar{C}_{p,N}(R\Omega) \le R\bar{C}_{p,N}(\Omega).$$

Naopak, protože $\Omega = \frac{1}{R}(R\Omega)$, máme $\bar{C}_{p,N}(\Omega) \le \frac{1}{R}\bar{C}_{p,N}(R\Omega)$, a tudíž platí rovnost $\bar{C}_{p,N}(R\Omega) = R\bar{C}_{p,N}(\Omega)$. ■

V [**22**, Theorem 8.4.1] je uveden vztah Poincarého konstanty pro $p = 2$ a prvního vlastního čísla Laplacova operátoru s Dirichletovými okrajovými podmínkami.

Dalším základním tvrzením je Rellichova-Kondrachovova věta o kompaktním vnoření. Nejprve připomeneme Kolmogorovova kritéria kompaktnosti v $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Věta 3.25 (Kolmogorov)**.** *Nechť $p \in [1, +\infty)$ a $\mathcal{F} \subset L^p(\mathbb{R}^N)$. Potom $\mathcal{F}$ je relativně kompaktní v $L^p(\mathbb{R}^N)$ právě tehdy, když jsou splněny následující tři podmínky:*

(i) *$\mathcal{F}$ je omezená v $L^p(\mathbb{R}^N)$;*

(ii) *$\lim\limits_{R\to+\infty} \int_{|x|>R} |v(x)|^p \mathrm{d}x = 0$ stejnoměrně vzhledem k $v \in \mathcal{F}$;*

(iii) *$\lim\limits_{h\to 0} \|\tau_h v - v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = 0$ stejnoměrně vzhledem k $v \in \mathcal{F}$, kde $\tau_h v$ je posunutá funkce $(\tau_h v)(x) \stackrel{\text{def}}{=} v(x-h)$.*

Důkaz. Dokážeme pouze implikaci, která je užitečná v aplikacích, tj. ((i)), ((ii)), ((iii)) $\Longrightarrow \mathcal{F}$ je relativně kompaktní v $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Dokážeme ekvivalentní vlastnost, že $\mathcal{F}$ je prekompaktní. To znamená, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje konečný počet koulí $B(v_1, \varepsilon), \ldots, B(v_k, \varepsilon)$, které pokrývají $\mathcal{F}$. Zvolme tedy $\varepsilon > 0$ pevné. Podle ((ii)) existuje $R > 0$ takové, že pro všechna $v \in \mathcal{F}$

$$\int_{|x|>R} |v(x)|^p \mathrm{d}x < \varepsilon.$$

Nechť $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je zhlazující jádro. Z [**22**, Proposition 2.2.4] plyne, že

$$\forall n \geq 1 \ \forall v \in L^p(\mathbb{R}^N) \quad \|v - v*\rho_n\|_{L^p}^p \leq \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(y)\|v - \tau_y v\|_{L^p}^p \mathrm{d}y.$$

Tedy

$$\|v - v*\rho_n\|_{L^p} \leq \sup_{|y|\leq \frac{1}{n}} \|v - \tau_y v\|_{L^p}.$$

Díky ((iii)) existuje nějaké $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $v \in \mathcal{F}$

$$\|v - v*\rho_{N(\varepsilon)}\|_{L^p} < \varepsilon.$$

Na druhou stranu, pro libovolné $x, x' \in \mathbb{R}^N$, $v \in Ł^p(\mathbb{R}^N)$ a $n \in \mathbb{N}$ máme

$$\begin{aligned}|(v*\rho_n)(x) - (v*\rho_n)(x')| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |v(x-y) - v(x'-y)|\rho_n(y)\mathrm{d}y \\ &\leq \|\tau_x \check{v} - \tau_{x'}\check{v}\|_{L^p}\|\rho_n\|_{L^{p'}} \\ &\leq \|\tau_{x-x'}v - v\|_{L^p}\|\rho_n\|_{L^{p'}}.\end{aligned}$$

(V posledním kroku jsme využili translační invarianci Lebesguovy míry.) Dále platí

$$|(v*\rho_n)(x)| \leq \|v\|_{L^p}\|\rho_n\|_{L^{p'}}.$$

Uvažujme třídu $\mathcal{H} = \{v*\rho_{N(\varepsilon)} \colon B(0,R) \to \mathbb{R},\ v \in \mathcal{F}\}$. Z ((i)) a ((iii)) plyne, že splňuje předpoklady Ascoliho věty. Tudíž je prekompaktní vzhledem k topologii stejnoměrné konvergence na $B(0,R)$, a tedy existuje konečná množina $\{v_1, \dots, v_k\}$ prvků z $\mathcal{F}$, splňující

$$\bigcup_{i=1}^k B(v_i * \rho_{N(\varepsilon)}, \varepsilon R^{-\frac{N}{p}}) \supset \mathcal{H}.$$

Takže pro všechna $v \in \mathcal{F}$ existuje $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ takové, že

$$\forall x \in B(0,R) \quad |v*\rho_{N(\varepsilon)}(x) - v_j*\rho_{N(\varepsilon)}(x)| \leq \varepsilon|B(0,R)|^{-\frac{1}{p}}.$$

Odtud plyne

$$\begin{aligned}\|v - v_j\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq &\left(\int_{|x|>R} |v|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{|x|>R} |v_j|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \\ &+ \|v - v*\rho_{N(\varepsilon)}\|_{L^p} + \|v_j - v_j*\rho_{N(\varepsilon)}\|_{L^p} \\ &+ \|v*\rho_{N(\varepsilon)} - v_j*\rho_{N(\varepsilon)}\|_{L^p(B(0,R))}.\end{aligned}$$

Poslední výraz můžeme odhadnout shora:

$$\begin{aligned}&\|v*\rho_{N(\varepsilon)} - v_j*\rho_{N(\varepsilon)}\|_{L^p(B(0,R))} \\ &\quad = \left(\int_{B(0,R)} |v*\rho_{N(\varepsilon)}(x) - v_j*\rho_{N(\varepsilon)}(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad \leq \varepsilon|B(0,R)|^{-\frac{1}{p}}|B(0,R)|^{\frac{1}{p}} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Máme tedy

$$\|v - v_j\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq 5\varepsilon$$

a důkaz prekompaktnosti $\mathcal{F}$ v $L^p(\mathbb{R}^N)$ je dokončen. ■

Rychlost konvergence $\tau_h v$ k v v prostoru $L^p(\mathbb{R}^N)$ pro $|h| \to 0$ můžeme určit přesně pro funkce v z prostoru $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Tvrzení 3.26. *Pro všechna $1 \leq p \leq +\infty$ a všechna $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ platí následující nerovnost:*

$$\forall h \in \mathbb{R}^N \quad \|\tau_h v - v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \|Dv\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}|h|,$$

kde $\|Dv\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |Dv(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$ a $|Dv(x)|$ je eukleidovská norma $Dv(x)$.

Důkaz. Protože $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ je hustá podmnožina $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, stačí dokázat požadovanou nerovnost pouze pro $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Platí

$$(\tau_h v)(x) - v(x) = v(x-h) - v(x) = -\int_0^1 Dv(x-th)h\mathrm{d}t.$$

Podle Cauchyho-Schwarzovy nerovnosti potom

$$|(\tau_h v)(x) - v(x)| \leq \int_0^1 |Dv(x-th)|\,|h|\mathrm{d}t,$$

a tedy díky Hölderově nerovnosti

$$|(\tau_h v)(x) - v(x)|^p \leq |h|^p \int_0^1 |Dv(x-th)|^p \mathrm{d}t,$$

Integrací přes $\mathbb{R}^N$ dostaneme

$$\int_{\mathbb{R}^N} |(\tau_h v)(x) - v(x)|^p \mathrm{d}x \leq |h|^p \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_0^1 |Dv(x-th)|^p \mathrm{d}t\right) \mathrm{d}x,$$

Z Fubiniho-Tonelliho věty a translační invariance Lebesguovy míry v $\mathbb{R}^N$ nyní plyne

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\tau_h v - v|^p \mathrm{d}x \leq |h|^p \int_{\mathbb{R}^N} |Dv(x)|^p \mathrm{d}x,$$

a tím je důkaz hotov. ■

Nyní už můžeme zformulovat hlavní větu o kompaktním vnoření Sobolevova prostoru do Lebesguova prostoru.

Věta 3.27 (Rellich-Kondrachov)**.** *Buď Ω omezená otevřená podmnožina $\mathbb{R}^N$. Pak je kanonické vnoření $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ kompaktní. Jinými slovy, každá omezená podmnožina $W_0^{1,p}(\Omega)$ je relativně kompaktní podmnožina $L^p(\Omega)$.*

Důkaz. Označme q přirozený rozšiřující operátor dodefinování nulou mimo Ω, který je spojitý z $W_0^{1,p}(\Omega)$ do $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Z [**22**, Proposition 5.1.1] totiž plyne, že q je lineární izometrie.

Operátor $r\colon L^p(\mathbb{R}^N) \to L^p(\Omega)$, který funkci $v \in L^p(\mathbb{R}^N)$ přiřadí její restrikci na Ω, tj. $r(v) = v|_\Omega$, je zřejmě lineární a spojitý s normou menší nebo rovnou jedné. Tudíž můžeme naše vnoření

$$i\colon W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

napsat jako složení $i = r \circ j \circ q$,

$$W_0^{1,p}(\Omega) \xrightarrow{q} W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \xrightarrow{j} L^p(\mathbb{R}^N) \xrightarrow{r} L^p(\Omega),$$

kde j je kanonické vnoření $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ do $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Nechť $\mathcal{B}$ je jednotková koule v $W_0^{1,p}(\Omega)$. Protože operátor r je spojitý a obrazem kompaktní množiny ve spojitém zobrazení je kompaktní množina, potřebujeme dokázat, že $(j \circ q)(\mathcal{B})$ je relativně kompaktní podmnožina $L^p(\mathbb{R}^N)$. K tomu použijeme Kolmogorovova kritéria kompaktnosti v $L^p(\mathbb{R}^N)$, viz Věta 3.25.

(i) Protože j a q jsou lineární a spojité, je $(j \circ q)(\mathcal{B})$ omezená v $L^p(\mathbb{R}^N)$.

(ii) Předpokládáme, že Ω je omezená, takže existuje $R > 0$ takové, že $\Omega \subset B(0, R)$. Tudíž pro všechna $v \in \mathcal{B}$ platí $q(v) = 0$ na $\mathbb{R}^N \setminus B(0, R)$, a tedy $\int_{|x|>R} |q(v)|^p \mathrm{d}x = 0$.

(iii) Protože $q(\mathcal{B})$ je podmnožinou jednotkové koule v $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, plyne z Propozice 3.26, že existuje konstanta $C > 0$ taková, že

$$\forall v \in \mathcal{B} \quad \|\tau_h q(v) - q(v)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \le C|h|.$$

To znamená, že $\tau_h q(v)$ konverguje k $q(v)$ v prostoru $L^p(\mathbb{R}^N)$ pro $h \to 0$, a to stejnoměrně vzhledem k $v \in \mathcal{B}$.

Tímto je důkaz dokončen. ∎

Podobně lze dokázat i následující užitečné tvrzení.

Důsledek 3.28. *Buď $\mathcal{F}$ podmnožina $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, $1 \le p < +\infty$, splňující následující dvě podmínky:*

(i) *$\mathcal{F}$ je omezená v $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, tj. $\sup\limits_{v\in\mathcal{F}} \|v\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} < +\infty$.*

(ii) *$\mathcal{F}$ je L^p-ekviintegrovatelná v nekonečnu, tj.*

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{|x|>R} |v(x)|^p \mathrm{d}x = 0$$

stejnoměrně vzhledem k $v \in \mathcal{F}$.

Potom je $\mathcal{F}$ relativně kompaktní podmnožinou $L^p(\mathbb{R}^N)$.

3.3. Rozšiřující operátory z $W^{1,p}(\Omega)$ do $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ a jejich aplikace.

Podařilo se nám dokázat některé důležité vlastnosti prostoru $W_0^{1,p}(\Omega)$, a to bez jakýchkoliv předpokladů na regularitu hranice otevřené množiny Ω, protože vždy existuje spojitý rozšiřující operátor z $W_0^{1,p}(\Omega)$ do $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, jmenovitě dodefinování nulou ([**22**, Proposition 5.1.1]). V případě práce s prostorem $W^{1,p}(\Omega)$ je situace komplikovanější a regularita hranice Ω bude hrát zásadní roli v důkazech a příslušných tvrzeních. Hlavním úkolem bude opět nalezení rozšiřujícího operátoru. To nám pak umožní využít předchozích výsledků ve $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, kde se přirozeně aplikují techniky jako konvoluce či posunutí.

Značení. Pro $x \in \mathbb{R}^N$ píšeme $x = (x', x_N)$, kde $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$, $x' = (x_1, x_2, \dots, x_{N-1})$. Píšeme

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^N_+ &= \{x = (x', x_N) : x_N > 0\} \text{ – otevřený horní poloprostor,} \\ B &= B(0,1) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : |x| = \left(\textstyle\sum_{i=1}^N x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} < 1 \right\} \text{ – otevřená jednotková koule v } \mathbb{R}^N, \\ B_+ &= B(0,1) \cap \mathbb{R}^N_+, \\ B_0 &= B \cap \mathbb{R}^{N-1} = \{x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^N : |x'| \le 1 \text{ a } x_N = 0\}. \end{aligned}$$

C^1-diffeomorfizmem z otevřené množiny $U \subset X$ do otevřené množiny $V \subset Y$, kde X a Y jsou normované lineární prostory, nazveme takové vzájemně jednoznačné zobrazení φ z U do V, které je spojitě diferencovatelné a k němu inverzní zobrazení φ^{-1} je spojitě diferencovatelné z V do U.

Definice 3.29. *Buď Ω otevřená podmnožina $\mathbb{R}^N$. Řekneme, že Ω je třídy C^1, pokud pro všechna $x \in \Gamma = \partial\Omega$ (topologická hranice Ω) existuje otevřené okolí G bodu x a C^1-diffeomorfizmus φ z $B(0,1)$ do G takový, že*

$$\varphi(B_+) = G \cap \Omega \quad a \quad \varphi(B_0) = G \cap \Gamma.$$

Věta 3.30. *Buď Ω otevřená podmnožina $\mathbb{R}^N$ třídy C^1, která je omezená (nebo $\Omega = \mathbb{R}^N_+$). Potom existuje rozšiřující operátor $P\colon W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, který je lineární a spojitý. Přesněji řečeno, pro libovolné $v \in W^{1,p}(\Omega)$ platí*

(i) $Pv|_\Omega = v$,
(ii) $\|Pv\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \le C\|v\|_{L^p(\Omega)}$,
(iii) $\|Pv\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \le C\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Konstanta C závisí pouze na Ω a p.

Důkaz Věty 3.30 provedeme nejprve pro případ, kdy $\Omega = \mathbb{R}^N_+$ je poloprostor, a pak pro obecný případ s použitím rozkladu jedničky a lokálních souřadnic.

Lemma 3.31. *Existuje rozšiřující operátor $P\colon W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, který vznikne zrcadlením:*

$$(Pu)(x', x_N) = \begin{cases} u(x', x_N) & \text{pro } x_N > 0, \\ u(x', -x_N) & \text{pro } x_N < 0. \end{cases}$$

Operátor P je navíc lineární a spojitý, platí

$$\|Pu\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \le 2\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N_+)},$$
$$\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \le 2\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)}.$$

Důkaz. Zřejmě $Pu \in L^p(\mathbb{R}^N)$ a

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |Pu(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} = \left(2\int_{\mathbb{R}^N_+} |u(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= 2^{\frac{1}{p}}\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N_+)} \le 2\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N_+)}.$$

Dokážeme, že

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(Pu) = P\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \quad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, N-1,$$
$$\frac{\partial}{\partial x_N}(Pu) = S\left(\frac{\partial u}{\partial x_N}\right),$$

kde operátor S definujeme

$$(Sv)(x', x_N) = \begin{cases} v(x', x_N) & \text{pro } x_N > 0, \\ -v(x', -x_N) & \text{pro } x_N \le 0. \end{cases}$$

Dále potřebujeme zavést funkci oříznutí (na oblast). Nechť $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ splňuje

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{pro } t > 1. \end{cases}$$

Označme $\eta_k(t) \overset{\text{def}}{=} \eta(kt)$ pro $k \in \mathbb{N}^*$. Pro dané $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ nyní spočítejme $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(Pu), \varphi \right\rangle_{(\mathcal{D}', \mathcal{D})}$:

(a) Nejprve vezměme $1 \le i \le N-1$. Podle definice

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(Pu), \varphi \right\rangle_{(\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N), \mathcal{D}(\mathbb{R}^N))} = -\int_{\mathbb{R}^N} Pu \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \mathrm{d}x. \tag{3.10}$$

Podle definice P dále

$$\int_{\mathbb{R}^N} Pu \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \mathrm{d}x' \int_{\mathbb{R}^+} u(x', x_N) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x', x_N) \mathrm{d}x_N$$
$$+ \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \mathrm{d}x' \int_{\mathbb{R}^-} u(x', -x_N) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x', x_N) \mathrm{d}x_N$$
$$= \int_{\mathbb{R}^N_+} u(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \mathrm{d}x, \tag{3.11}$$

kde $\psi(x', x_N) \overset{\text{def}}{=} \varphi(x', x_N) + \varphi(x', -x_N)$.

Protože ale ψ nepatří do $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N_+)$, potřebujeme nyní použít metodu oříznutí.

Vezměme testovací funkci $(\eta_k\psi)(x', x_N) = \eta_k(x_N)\psi(x', x_N)$. Protože $\eta_k\psi$ patří do $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N_+)$ a $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$, máme

$$\int_{\mathbb{R}^N_+} u\frac{\partial}{\partial x_i}(\eta_k\psi)\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}^N_+} \frac{\partial u}{\partial x_i}\eta_k\psi\mathrm{d}x.$$

Když si uvědomíme, že $\frac{\partial}{\partial x_i}(\eta_k\psi) = \eta_k\frac{\partial\psi}{\partial x_i}$ (protože uvažujeme $1 \le i \le N-1$), dostaneme

$$\int_{\mathbb{R}^N_+} u\eta_k\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}^N_+} \frac{\partial u}{\partial x_i}\eta_k\psi\mathrm{d}x.$$

Nyní přejdeme k limitě pro $k \to +\infty$. Z Lebesguovy věty (o dominantní konvergenci) pak plyne

$$\int_{\mathbb{R}^N_+} u\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}^N_+} \frac{\partial u}{\partial x_i}\psi\mathrm{d}x. \tag{3.12}$$

Kombinací (3.10), (3.11) a (3.12) dostáváme

$$\begin{aligned}\left\langle\frac{\partial}{\partial x_i}(Pu), \varphi\right\rangle &= \int_{\mathbb{R}^N_+} \frac{\partial u}{\partial x_i}\psi\mathrm{d}x\\ &= \int_{\mathbb{R}^N_+} \frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi(x', x_N)\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N_+} \frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi(x', -x_N)\mathrm{d}x\\ &= \int_{\mathbb{R}^N} P\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\varphi\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Tedy $\frac{\partial}{\partial x_i}(Pu) = P\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$ pro $i = 1, 2, \dots, N-1$.

(b) Nyní vezměme $i = N$ a počítejme

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} Pu\frac{\partial\varphi}{\partial x_N}\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}}\mathrm{d}x' \int_{\mathbb{R}^+} u(x', x_N)\frac{\partial\varphi}{\partial x_N}(x', x_N)\mathrm{d}x_N\\ &\quad+ \int_{\mathbb{R}^{N-1}}\mathrm{d}x' \int_{\mathbb{R}^-} u(x', -x_N)\frac{\partial\varphi}{\partial x_N}(x', x_N)\mathrm{d}x_N.\end{aligned}$$

Dále platí

$$\int_{\mathbb{R}^-} u(x', -x_N)\frac{\partial\varphi}{\partial x_N}(x', x_N)\mathrm{d}x_N = \int_{\mathbb{R}^+} u(x', x_N)\frac{\partial}{\partial x_N}(\varphi(x', -x_N))\mathrm{d}x_N.$$

Označme $\chi(x', x_N) \overset{\text{def}}{=} \varphi(x', x_N) - \varphi(x', -x_N)$. Potom

$$\int_{\mathbb{R}^N} Pu\frac{\partial\varphi}{\partial x_N}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N_+} u\frac{\partial\chi}{\partial x_N}\mathrm{d}x. \tag{3.13}$$

Protože $\chi(x', 0) = 0$, existuje konstanta $M > 0$ taková, že

$$|\chi(x', x_N)| \le M|x_N| \quad \text{pro } |x_N| \le R, \quad \text{kde } \operatorname{supp}\varphi \subset B(0, R).$$

Pomocí funkce oříznutí η_k (platí $\eta_k\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N_+)$), dostaneme obdobně jako výše

$$\int_{\mathbb{R}^N_+} u\frac{\partial}{\partial x_N}(\eta_k\chi)\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}^N_+} \frac{\partial u}{\partial x_N}\eta_k\chi\mathrm{d}x.$$

Přitom

$$\frac{\partial}{\partial x_N}(\eta_k\chi) = \eta_k\frac{\partial\chi}{\partial x_N} + \eta_k'\chi$$

a

$$\eta_k'(x_N) = k\eta'(kx_N).$$

Tudíž

$$\int_{\mathbb{R}^N_+} \frac{\partial u}{\partial x_N}\eta_k\chi\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}^N_+} u\eta_k\frac{\partial\chi}{\partial x_N}\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N_+} uk\eta'(kx_N)\chi(x',x_N)\mathrm{d}x. \tag{3.14}$$

Nyní přejdeme k limitě pro $k \to +\infty$. Podle Lebesguovy věty

$$\int_{\mathbb{R}^N_+} \frac{\partial u}{\partial x_N}\eta_k\chi\mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^N_+} \frac{\partial u}{\partial x_N}\chi\mathrm{d}x,$$
$$\int_{\mathbb{R}^N_+} u\eta_k\frac{\partial\chi}{\partial x_N}\mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^N_+} u\frac{\partial\chi}{\partial x_N}\mathrm{d}x$$

a poslední integrál v (3.14) lze shora odhadnout

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^N_+} ku\eta'(kx_N)\chi(x',x_N)\mathrm{d}x\right| &\le kMC\int_{0<x_N<\frac{1}{k}} |u|x_N\mathrm{d}x \\ &\le MC\int_{0<x_N<\frac{1}{k}} |u(x)|\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

kde $C \stackrel{\text{def}}{=} \sup\limits_{t\in[0,1]} \eta'(t)$. Odtud

$$\int_{\mathbb{R}^N_+} \frac{\partial u}{\partial x_N}\chi\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}^N_+} u\frac{\partial\chi}{\partial x_N}\mathrm{d}x,$$

a tedy podle (3.13)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} Pu\frac{\partial\varphi}{\partial x_N}\mathrm{d}x &= -\int_{\mathbb{R}^N_+} \frac{\partial u}{\partial x_N}\chi\mathrm{d}x \\ &= -\int_{\mathbb{R}^N_+} \frac{\partial u}{\partial x_N}(\varphi(x',x_N) - \varphi(x',-x_N))\mathrm{d}x \\ &= -\int_{\mathbb{R}^N_+} \frac{\partial u}{\partial x_N}\varphi\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N_-} \left(\frac{\partial u}{\partial x_N}\right)(x',-x_N)\varphi\mathrm{d}x \\ &= -\int_{\mathbb{R}^N} S\left(\frac{\partial u}{\partial x_N}\right)\varphi\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

tj.

$$\frac{\partial}{\partial x_N}(Pu) = S\left(\frac{\partial u}{\partial x_N}\right).$$

■

Nyní uvažujme obecně otevřenou omezenou množinu $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ třídy C^1. Použijeme rozklad jedničky. Existuje konečný počet otevřených množin $G_0, G_1, \ldots, G_k$ takových, že $\overline{\Omega} \subset \bigcup_{i=0}^k G_i$ a $\overline{G_0} \subset \Omega$ a dále pro každé $i = 1, 2, \ldots, k$ existuje soustava lokálních souřadnic $\varphi_i \colon B(0,1) \to G_i$.

Zavedeme si rozklad jedničky vzhledem k otevřenému pokrytí $\{G_0, G_1, \ldots, G_k\}$ kompaktní množiny $\overline{\Omega}$: existuje $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$, kde $\alpha_i \in \mathcal{D}(G_i)$, $0 \le i \le k$ a $\sum_{i=0}^k \alpha_i = 1$ na $\overline{\Omega}$. Nyní máme vše potřebné k důkazu Věty 3.30.

Důkaz Věty 3.30. Mějme $v \in W^{1,p}(\Omega)$. Protože $1 = \sum_{i=0}^k \alpha_i$ na Ω, platí

$$v = \left(\sum_{i=0}^k \alpha_i\right) v = \sum_{i=0}^k \alpha_i v = \sum_{i=0}^k v_i, \quad \text{kde } v_i = \alpha_i v.$$

Nyní rozšíříme každou z funkcí v_i na celé $\mathbb{R}^N$. Musíme odlišit případ $i = 0$ od případu $i \ge 1$.

(a) Rozšíření v_0. Přirozeným rozšířením je

$$\widetilde{v_0}(x) = \begin{cases} v_0(x) & \text{pro } x \in \Omega, \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

Snadno ověříme, že

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\widetilde{v}_0 = \alpha_0 \widetilde{\frac{\partial v}{\partial x_i}} + \frac{\partial \alpha_0}{\partial x_i}\widetilde{v}$$

patří do $L^p(\mathbb{R}^N)$, a tedy $\widetilde{v_0} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

(b) Rozšíření v_i, $1 \le i \le k$. Pomocí lokálních souřadnic φ_i na G_i definujeme pro $1 \le i \le k$

$$w_i \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} v_i \circ \varphi_i & \text{na } B_+, \\ 0 & \text{na } \mathbb{R}^N_+ \setminus B_+. \end{cases}$$

Tato funkce patří do $W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$. Aplikací operátoru rozšíření zrcadlením P (viz Lemma 3.31) dostaneme

$$Pw_i \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \quad \text{přičemž} \quad \operatorname{supp} Pw_i \subset B(0,1).$$

Nyní se vrátíme k množině G_i tím, že budeme uvažovat $Pw_i \circ \varphi_i^{-1}$. Definujeme

$$\hat{v}_i \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} Pw_i \circ \varphi_i^{-1} & \text{na } G_i, \\ 0 & \text{na } \mathbb{R}^N \setminus G_i. \end{cases}$$

Protože $v = \sum_{i=0}^k v_i$ a protože hledáme lineární rozšiřující operátor, položíme

$$Pv = \widetilde{v_0} + \sum_{i=1}^k \hat{v}_i.$$

Snadno ověříme, že Pv se shoduje s v na Ω a protože uvedená konstrukce sestává ze spojitých operací na $W^{1,p}$, je spojitý i operátor P. ∎

Jako přímý důsledek Věty 3.30 dostáváme následující tvrzení, kde značíme $\mathcal{D}(\overline{\Omega}) = \{v|_\Omega : v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)\}$.

Tvrzení 3.32. *Nechť Ω je otevřená podmnožina $\mathbb{R}^N$ třídy C^1, nebo $\Omega = \mathbb{R}^N_+$. Pak $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ je hustá podmnožina $W^{1,p}(\Omega)$ $(1 \le p < +\infty)$.*

Důkaz. Nechť $v \in W^{1,p}(\Omega)$. Podle Věty 3.30 je $Pv \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Z hustoty $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ ve $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ (viz [**22**, Theorem 5.1.3]) plyne, že existuje posloupnost $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ taková, že $v_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} Pv$ ve $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Potom $v_n|_\Omega \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ a $v_n|_\Omega \to Pv|_\Omega = v$ ve $W^{1,p}(\Omega)$.

V případě $\Omega = \mathbb{R}^N_+$ lze tvrzení dokázat pomocí oříznutí (viz [**?**, Corollary IX.8]). ∎

Dalším důležitým důsledkem Věty 3.30 je Rellichova-Kondrachovova věta o kompaktním vnoření $W^{1,p}(\Omega)$.

Věta 3.33. *Něchť Ω je omezená otevřená podmnožina $\mathbb{R}^N$ třídy C^1. Je-li $1 \le p \le +\infty$, pak kanonické vnoření $W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)$ je kompaktní.*

Důkaz. Nechť $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je omezená posloupnost ve $W^{1,p}(\Omega)$. Podle Věty 3.30 je posloupnost $(P(v_n))$ omezená ve $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Díky omezenosti Ω existuje konstanta $R > 0$ taková, že $\Omega \subset B(0,R)$. Zvolme $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ tak, aby $\alpha = 1$ na $B(0,R)$ a $\alpha = 0$ na $\mathbb{R}^N \setminus B(0,2R)$. Posloupnost $(\alpha P(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ je tedy omezená ve $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ a identicky rovna nule na $\mathbb{R}^N \setminus B(0,2R)$. Z Rellichovy-Kondrachovovy věty ve $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ (srov. Důsledek 3.28) pak plyne, že posloupnost $(\alpha P(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ je relativně kompaktní v $L^p(\mathbb{R}^N)$. Nechť $\alpha P(v_{n_k}) \to v$ v $L^p(\mathbb{R}^N)$. Potom

$$\alpha P(v_{n_k})|_\Omega \to v|_\Omega \text{ v } L^p(\Omega).$$

Protože $\alpha P(v_{n_k})|_\Omega = v_{n_k}$, máme $v_{n_k} \to v|_\Omega$ v $L^p(\Omega)$. ∎

Rellichovu-Kondrachovovu větu ve $W^{1,p}(\Omega)$ použijeme v důkazu následujícího tvrzení.

Věta 3.34. *Nechť Ω je omezená otevřená souvislá podmnožina $\mathbb{R}^N$ třídy C^1. Buď $V \subset W^{1,p}$ uzavřený lineární podprostor $W^{1,p}(\Omega)$ takový, že jedinou konstatní funkcí, patřící do V, je funkce identicky nulová. Pak existuje konstanta $C > 0$ taková, že*

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} \le C \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall v \in V.$$

Důkaz provedeme sporem. Nechť existuje posloupnost $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ve V, $v_n \not\equiv 0$ taková, že

$$\|v_n\|_{L^p} > n\|Dv_n\|_{L^p},$$

kde $Du \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{i=1}^{N} \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. Označme $u_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{v_n}{\|v_n\|_{L^p}}$. Máme tedy $u_n \in V$ (protože V je lineární podprostor), $\|u_n\|_{L^p} = 1$ a $\|Du_n\|_{L^p} < \frac{1}{n}$, takže $\lim\limits_{n\to+\infty} \|Du_n\|_{L^p} = 0$. Posloupnost $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je omezená ve $W^{1,p}(\Omega)$, takže podle Rellichovy-Kondrachovovy věty je relativně kompaktní podmnožinou $L^p(\Omega)$. Můžeme z ní tudíž vybrat podposloupnost $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ takovou, že

$$u_{n_k} \to u \text{ v } L^p(\Omega).$$

Protože

$$Du_{n_k} \to 0 \text{ v } L^p(\Omega),$$

máme $Du = 0$. Množina Ω je souvislá, je tedy $u \equiv C$ a

$$u_{n_k} \to C \text{ ve } W^{1,p}(\Omega).$$

Dále V je uzavřená ve $W^{1,p}(\Omega)$, takže C patří do V, a tedy podle předpokladu věty musí být $C = 0$. Na druhou stranu, protože $\|u_{n_k}\|_{L^p} = 1$ a $u_{n_k} \to C$ v L^p, máme $|C||\Omega|^{\frac{1}{p}} = 1$, což je spor s $C = 0$. ■

Důsledek 3.35 (Poincarého-Wirtingerova nerovnost)**.** *Nechť Ω splňuje předpoklady Věty 3.34. Potom existuje konstanta $C_p > 0$ taková, že*

$$\left\| v - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega v(x)\mathrm{d}x \right\|_{L^p(\Omega)} \le C_p \|Dv\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall v \in W^{1,p}(\Omega).$$

Důkaz. Označme $V \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in W^{1,p}(\Omega) : \int_\Omega v(x)\mathrm{d}x = 0\}$. Zřejmě platí, že V je uzavřený lineární podprostor $W^{1,p}(\Omega)$ a jedinou konstantní funkcí, patřící do V, je funkce identicky nulová. Tvrzení tedy plyne z Věty 3.34, jelikož $v - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega v\,\mathrm{d}x$ patří do V pro libovolné $v \in W^{1,p}(\Omega)$.

3.4. Sobolevovy prostory pomocí Fourierovy transformace. Prostor $H^s(\Omega)$, $s \in \mathbb{R}$

Uvedeme popis prostoru $H^1(\mathbb{R}^N)$ s využitím Fourierovy transformace. Připomínáme, že pro funkci $v \in L^1(\mathbb{R}^N)$ je její Fourierova transformace $\hat{v}$ definovaná vztahem

$$\hat{v}(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} v(x) \mathrm{d}x. \tag{3.15}$$

Lze ukázat, že $\hat{v}$ patří do $C_0(\mathbb{R}^N)$. Pokud $\hat{v} \in L^1(\mathbb{R}^N)$, lze Fourierovu transformaci obrátit a získat v pomocí následujícího vztahu.

$$v(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} \hat{v}(\xi) \mathrm{d}\xi. \tag{3.16}$$

Protože s podmínkou $\hat{v} \in L^1(\mathbb{R}^N)$ se ne vždy dobře pracuje, je často výhodnější používat následující Fourierovu-Plancherelovu transformaci.

Základní vlastností je, že pokud $v \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$, potom $\hat{v} \in L^2(\mathbb{R}^N)$ a platí

$$\|\hat{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}. \tag{3.17}$$

Pozor! Lebesguova míra $\mathbb{R}^N$ je nekonečná, a proto $L^2(\mathbb{R}^N)$ není podprostor $L^1(\mathbb{R}^N)$ a nelze přímo definovat $\hat{v}$ pro $v \in L^2(\mathbb{R}^N)$ pomocí vzorce (3.15). Nicméně pokud $v \in L^1 \cap L^2$, potom (3.15) má smysl a (3.17) říká, že $v \mapsto \hat{v}$ je izometrie vzhledem k L^2 normě.

Protože $L^1 \cap L^2$ je hustá podmnožina L^2 (například všechny spojité funkce s kompaktním nosičem patří do $L^1 \cap L^2$), lze Fourierovu transformaci rozšířit na celé L^2. Takto získané zobrazení pak nazýváme Fourierova-Plancherelova transformace a značíme ho $\mathcal{F}$. Základní vlastnosti $\mathcal{F}$ shrnuje následující tvrzení.

Tvrzení 3.36. *Existuje zobrazení $\mathcal{F}\colon L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ (nazývané Fourierova-Plancherelova transformace) s následujícími vlastnostmi:*

(i) $\mathcal{F}v = \hat{v}$ $\forall v \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$.

(ii) $\|\mathcal{F}v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ $\forall v \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

(iii) *Zobrazení $\mathcal{F}$ je izometrický izomorfizmus $L^2(\mathbb{R}^N)$ na $L^2(\mathbb{R}^N)$.*

(iv) *Pokud pro $v \in L^2(\mathbb{R}^N)$ a všechna $n \in \mathbb{N}$ označíme*

$$w_n(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{|x| \le n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} v(x) \mathrm{d}x,$$

potom pro $n \to +\infty$ máme $w_n \to \mathcal{F}v$ v $L^2(\mathbb{R}^N)$.

(v) *Naopak, vezmeme-li $v \in L^2(\mathbb{R}^N)$ a pro všechna $n \in \mathbb{N}$ označíme*

$$v_n(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{|\xi| \le n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} \mathcal{F}(v)(\xi) \mathrm{d}\xi,$$

potom pro $n \to +\infty$ máme $v_n \to v$ v $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Nyní můžeme dokázat následující charakterizaci Sobolevova prostoru $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Věta 3.37. *Platí*

$$H^1(\mathbb{R}^N) = \left\{ v \in L^2(\mathbb{R}^N) : (1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}\mathcal{F}(v) \in L^2(\mathbb{R}^N) \right\}.$$

Navíc pro libovolné $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ *máme*

$$\|v\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \left\| (1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}\mathcal{F}(v) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Důkaz. Nejprve vezměme $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Podle definice

$$\widehat{\frac{\partial v}{\partial x_k}}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} \frac{\partial v}{\partial x_k}(x)\mathrm{d}x.$$

Na uvedený integrál použijeme integraci per partes. Protože v má kompaktní nosič, dostaneme

$$\widehat{\frac{\partial v}{\partial x_k}}(\xi) = (\mathrm{i}\xi_k)\hat{v}(\xi),$$

$k \in \{1, 2, \dots, N\}$. Nyní využijeme hustotu $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ v $H^1(\mathbb{R}^N)$ (viz [**22**, Theorem 5.1.3]). Pro libovolné $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ existuje posloupnost $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prvků z $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ taková, že $v_n \to v$ v normě prostoru $H^1(\mathbb{R}^N)$. Tudíž pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$\widehat{\frac{\partial v_n}{\partial x_k}}(\xi) = (\mathrm{i}\xi_k)\hat{v}_n(\xi).$$

Protože Fourierova-Plancherelova transformace je pro funkce z $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ totožná s klasickou Fourierovou transformací, máme rovněž

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial v_n}{\partial x_k}\right)(\xi) = (\mathrm{i}\xi_k)\mathcal{F}(v_n)(\xi). \tag{3.18}$$

Protože $v_n \to v$ v normě $H^1(\mathbb{R}^N)$, máme $v_n \to v$ v $L^2(\mathbb{R}^N)$ a $\frac{\partial v_n}{\partial x_k} \to \frac{\partial v}{\partial x_k}$ v $L^2(\mathbb{R}^N)$. S využitím spojitosti $\mathcal{F}$ vzhledem k normě $L^2(\mathbb{R}^N)$ přejdeme nyní ve vztahu (3.18) k limitám. Existuje tedy podposloupnost n_p taková, že pro $p \to +\infty$ máme

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}(v_{n_p})(\xi) \to \mathcal{F}(v)(\xi) && \text{pro skoro všechna } \xi \in \mathbb{R}^N \text{ a} \\ &\mathcal{F}\left(\frac{\partial v_{n_p}}{\partial x_k}\right)(\xi) \to \mathcal{F}\left(\frac{\partial v}{\partial x_k}\right)(\xi) && \text{pro skoro všechna } \xi \in \mathbb{R}^N, \end{aligned}$$

a tudíž

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial v}{\partial x_k}\right)(\xi) = (\mathrm{i}\xi_k)\mathcal{F}(v)(\xi) \quad \text{pro skoro všechna } \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Odtud a z izometrie $\mathcal{F}$ v $L^2(\mathbb{R}^N)$ plyne, že

$$\begin{aligned} &v \in H^1(\mathbb{R}^N) \\ &\qquad \Longleftrightarrow \mathcal{F}(v) \in L^2(\mathbb{R}^N) \text{ a } \mathrm{i}\xi_k\mathcal{F}(v) \in L^2(\mathbb{R}^N)\ \forall k \in \{1, 2, \dots, N\} \\ &\qquad \Longleftrightarrow (1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}\mathcal{F}(v) \in L^2(\mathbb{R}^N). \end{aligned}$$

Dále platí

$$\begin{aligned}
\|v\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} &= \int_{\mathbb{R}^N} v^2(x) + \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial v}{\partial x_k}\right)^2 (x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\mathcal{F}(v)(\xi)|^2 + \sum_{k=1}^{N} \left|\mathcal{F}\left(\frac{\partial v}{\partial x_k}\right)(\xi)\right|^2 \right) \mathrm{d}\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} (1+|\xi|^2)|\mathcal{F}(v)(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi \\
&= \|(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}\mathcal{F}(v)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)},
\end{aligned}$$

a tím je důkaz hotov. ■

Uvedená charakterizace prostoru $H^1(\mathbb{R}^N)$, využívající Fourierovu-Plancherelovu transformaci, je velmi užitečná. Lze pomocí ní elegantně získat mnoho důležitých vlastností Sobolevových prostorů. Nejprve ukážeme, jak lze získat Rellichovu-Kondrachovovu větu.

Věta 3.38 (alternativní důkaz Rellichovy-Kondrachovovy věty)**.** *Nechť Ω je omezená otevřená podmnožina $\mathbb{R}^N$ s hranicí $\partial\Omega$ třídy C^1. Potom je vnoření $H^1(\Omega)$ do $L^2(\Omega)$ kompaktní.*

Důkaz. Mějme posloupnost $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prvků z $H^1(\Omega)$, která je omezená v normě prostoru $H^1(\Omega)$, tj. $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|v_n\|_{H^1(\Omega)} < +\infty$. Díky existenci operátoru rozšíření P z Věty 3.30, který je lineární a spojitý z $H^1(\Omega)$ do $H^1(\mathbb{R}^N)$, a díky možnosti využití metody oříznutí (Ω je omezená) můžeme předpokládat, že posloupnost v_n je omezená v $H^1(\mathbb{R}^N)$ a $v_n \equiv 0$ vně nějaké koule $B(0,R)$ (kde R nezávisí na $n \in \mathbb{N}$).

Jelikož je posloupnost $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ omezená v $L^2(\mathbb{R}^N)$, má slabě konvergentní podposloupnost

$$v_{n_k} \rightharpoonup v \quad \text{v } L^2(\mathbb{R}^N),$$

$k \to +\infty$. Dokážeme, že stejnoměrné omezení normy prvků v_{n_k} v prostoru $H^1(\mathbb{R}^N)$ zaručuje, že tato konvergence v $L^2(\mathbb{R}^N)$ je dokonce silná. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $v = 0$ (v_{n_k} lze nahradit $v_{n_k} - v$).

Pro jednoduchost budeme psát v_k místo v_{n_k}. Máme

$$\begin{aligned}
&v_k \rightharpoonup 0 \quad \text{v } L^2(\mathbb{R}^N), \\
&v_k \equiv 0 \quad \text{vně } B(0,R), \\
&\sup_{k\in\mathbb{N}} \|v_k\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} < +\infty
\end{aligned} \tag{3.19}$$

a chceme dokázat, že $v_k \to 0$ v $L^2(\mathbb{R}^N)$. K tomu použijeme Fourierovy-Plancherelovu transformaci a její vlastnost, že je izometrií $L^2(\mathbb{R}^N)$ na $L^2(\mathbb{R}^N)$. Potřebujeme dokázat, že

$$\|\mathcal{F}(v_k)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \to 0, \quad k \to +\infty,$$

přičemž víme (viz Věta 3.37), že

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{k\in\mathbb{N}} \|(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}\mathcal{F}(v_k)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} < +\infty.$$

Pro $M > 0$ můžeme psát

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |\mathcal{F}(v_k)(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi &= \int_{|\xi|\le M} |\mathcal{F}(v_k)(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi + \int_{|\xi|\ge M} |\mathcal{F}(v_k)(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi \\ &\le \int_{|\xi|\le M} |\mathcal{F}(v_k)(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi \\ &\quad + \frac{1}{1+M^2} \int_{\mathbb{R}^N} (1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}} |\mathcal{F}(v_k)(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi \\ &\le \int_{|\xi|\le M} |\mathcal{F}(v_k)(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi + \frac{C^2}{1+M^2}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Na druhou stranu, protože $v_k \equiv 0$ vně $B(0,R)$, máme $v_k \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N)$ a $\mathcal{F}(v_k) = \hat{v}_k$, tj.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(v_k)(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} v_k(x) \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} \chi_{B(0,R)}(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} v_k(x) \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Pro libovolné $\xi \in \mathbb{R}^N$ patří funkce $x \mapsto \chi_{B(0,R)}(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}$ do $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Využijeme-li (3.19), dostaneme

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^N \quad \mathcal{F}(v_k)(\xi) \to 0 \text{ pro } k \to +\infty. \tag{3.21}$$

Abychom mohli použít Lebesguovu větu (o dominantní konvergenci), všimneme si, že díky Cauchyho-Schwarzově nerovnosti platí

$$|\mathcal{F}(v_k)(\xi)|^2 \le \frac{1}{(2\pi)^N} \|v_k\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} |B(0,R)|, \tag{3.22}$$

kde $|B(0,R)|$ je Lebesguova míra koule $B(0,R)$.

Z (3.21) a (3.22) dostáváme

$$\int_{|\xi|\le M} |\mathcal{F}(v_k)(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi \to 0 \text{ pro } k \to +\infty. \tag{3.23}$$

Vrátíme-li se k (3.20), plyne nyní z (3.23), že

$$\limsup_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\mathcal{F}(v_k)(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi \le \frac{C^2}{1+M^2}.$$

Tato nerovnost platí pro libovolně velké M, takže pro $M \to +\infty$ konečně dostáváme

$$\lim_{k\to+\infty} \|\mathcal{F}(v_k)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 0,$$

a tím je důkaz proveden. ■

Charakterizaci prostoru $H^1(\mathbb{R}^N)$ pomocí Fourierovy-Plancherelovy transformace lze snadno rozšířit na Sobolevovy prostory vyššího řádu $H^m(\mathbb{R}^N)$, $m \in \mathbb{N}$.

Věta 3.39. *Pro libovolné $m \in \mathbb{N}$ platí*

$$H^m(\mathbb{R}^N) = \left\{ v \in L^2(\mathbb{R}^N) : (1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2}} \mathcal{F}(v) \in L^2(\mathbb{R}^N) \right\}$$

a pro každé $v \in H^m(\mathbb{R}^N)$ pak

$$\|v\|_{H^m(\mathbb{R}^N)} = \left\| (1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2}} \mathcal{F}(v) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Hlavním důvodem, proč zde tuto charakterizaci Sobolevových prostorů uvádíme, je, že nám nabízí přirozenou definici prostoru $H^s(\mathbb{R}^N)$ i pro jiné hodnoty s, než přirozená čísla. Zde s může být i zlomek či obecně reálné číslo, nemusí být ani kladné. Důvodem je to, že požadavek konečnosti integrálu

$$\int_{\mathbb{R}^N} (1 + |\xi|^2)^s |\mathcal{F}(v)(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi$$

má smysl pro libovolné $s \in \mathbb{R}$, protože mocnina a^s má smysl pro libovolné $s \in \mathbb{R}$, pokud $a > 0$ (zde $a = 1 + |\xi|^2 \geq 1 > 0$).

Tím se dostáváme k následující definici.

Definice 3.40. *Nechť $s \geq 0$ je nezáporné reálné číslo. Definujeme prostor*

$$H^s(\mathbb{R}^N) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ v \in L^2(\mathbb{R}^N) : (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \mathcal{F}(v) \in L^2(\mathbb{R}^N) \right\}$$

se skalárním součinem, který pro všechna $u, v \in H^s(\mathbb{R}^N)$ definujeme

$$\langle u, v \rangle_{H^s(\mathbb{R}^N)} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |\xi|^2)^s \mathcal{F}(u)(\xi) \overline{\mathcal{F}(v)}(\xi) \mathrm{d}\xi,$$

a příslušnou normou

$$\|v\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int_{\mathbb{R}^N} (1 + |\xi|^2)^s |\mathcal{F}(v)(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Následující tvrzení shrnuje některé základní vlastnosti Sobolevových prostorů $H^s(\mathbb{R}^N)$.

Tvrzení 3.41. *Pro libovolné $s \in \mathbb{R}^+$ je $H^s(\mathbb{R}^N)$ Hilbertův prostor. Je-li $s = m \in \mathbb{N}$, pak $H^s(\mathbb{R}^N) = H^m(\mathbb{R}^N) = W^{m,2}(\mathbb{R}^N)$ je klasický Sobolevův prostor.*

Důkaz. Zřejmě $\mathcal{F}$ je izomorfizmus prostoru $H^s(\mathbb{R}^N)$ na váhový Lebesgův prostor $L^2(a\mathrm{d}\xi)$, kde $a\mathrm{d}\xi$ je míra s hustotou $a(\xi) = (1 + |\xi|^2)^s$ vzhledem k Lebesguově míře $\mathrm{d}\xi$ na $\mathbb{R}^N$. Navíc je $\mathcal{F}$ izometrie, a tudíž se hilbertovská struktura váhového Lebesguova prostoru $L^2(a\mathrm{d}\xi)$ přenáší Fourierovým-Plancherelovým zobrazením $\mathcal{F}$ i do prostoru $H^s(\mathbb{R}^N)$. Máme tedy

$$H^s(\mathbb{R}^N) \cong L^2((1 + |\xi|^2)^s \mathrm{d}\xi) \quad \text{(izomorfizmus)},$$

a tím je důkaz hotov. ■

V souladu s definicí $H^{-1}(\Omega)$ jako topologického duálního prostoru k $H_0^1(\Omega)$ definujeme $H^{-s}(\mathbb{R}^N)$ pro $s \geq 0$ následujícím způsobem.

Definice 3.42. *Nechť s je nezáporné reálné číslo. Definujeme*

$$H^{-s}(\mathbb{R}^N) \stackrel{\text{def}}{=} H^s(\mathbb{R}^N)^*,$$

tj. topologický duální prostor k $H^s(\mathbb{R}^N)$.

3.5. Teorie stop pro prostory $W^{1,p}(\Omega)$

Abychom mohli studovat Dirichletovy okrajové úlohy veriačními metodami, musíme nejprve vyřešit následující problém:

„Je možné dát smysl okrajové podmínce $v = g$ na $\partial\Omega$ pro libovolné $v \in H^1(\Omega)$?“

Pokud bychom uvažovali o v pouze jako o prvku $L^2(\Omega)$, neměli bychom zřejmě dostatečnou informaci, abychom mohli hovořit o v na $\partial\Omega$, protože Lebesguova míra $\partial\Omega$ je nulová (je-li Ω dostatečně hladká). Chceme-li tedy dát smysl v na $\partial\Omega$, musíme využít i další informaci o v, tj. že $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ patří do $L^2(\Omega)$ pro všechna $i = 1, \ldots, N$.

Poznamenejme, že s výjimkou případu $N = 1$ není prostor $H^1(\Omega)$ vnořen do prostoru spojitých funkcí $C(\overline{\Omega})$. Dokážeme, že pro obecné $v \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \le p \le +\infty$, je možné dát smysl v na $\partial\Omega$, kterým je tzv. stopa v na $\partial\Omega$. K tomu využijeme geometrických vlastností $\partial\Omega$, konkrétně že $\partial\Omega$ je lokálně $(N-1)$-rozměrná varieta. Při tom musí platit, že pro hladkou funkci v je stopa v na $\partial\Omega$ totéž, co restrikce v na $\partial\Omega$. Tím se přirozeně nabízí definovat pojem stopy pomocí hustoty a spojitého rozšíření.

Věta 3.43. *Nechť Ω je omezená otevřená podmnožina $\mathbb{R}^N$, jejíž hranice $\partial\Omega$ je třídy C^1. Pak pro libovolné $1 \le p < +\infty$ je $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ hustá podmnožina $W^{1,p}(\Omega)$ a operátor restrikce*

$$\gamma_0 \colon \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \to L^p(\partial\Omega) : v \mapsto \gamma_0(v) \stackrel{\text{def}}{=} v|_{\partial\Omega},$$

který každému $v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ přiřazuje jeho restrikci na $\partial\Omega$, lze rozšířit na spojité lineární zobrazení z $W^{1,p}(\Omega)$ do $L^p(\partial\Omega)$, které stále značíme γ_0. (Lze též použít jednodušší označení $v|_{\partial\Omega}$.)

Takto definované zobrazení

$$\gamma_0 \colon W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$$

nazýváme operátor stop (řádu nula).

Důkaz. Díky Propozici 3.32 a hladkosti hranice $\partial\Omega$ víme, že $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ je hustá podmnožina $W^{1,p}(\Omega)$. Pro $v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ můžeme bez jakékoli nejednoznačnosti definovat $\gamma_0(v) \stackrel{\text{def}}{=} v|_{\partial\Omega}$, tj. restrikci v na $\partial\Omega$.

Předpokládejme na chvíli, že víme, že zobrazení

$$\gamma_0 \colon (\mathcal{D}(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}) \to (L^p(\partial\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\partial\Omega)})$$

je spojité. Protože je γ_0 lineární, je potom také stejnoměrně spojité. Prostor $L^p(\partial\Omega)$ je Banachův prostor (je úplný). Všechny předpoklady věty o spojitém rozšíření jsou tedy splněny, což zaručuje existenci $\hat{\gamma}_0$,

$$\hat{\gamma}_0 \colon W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega),$$

jednoznačného spojitého lineárního rozšíření γ_0. Pro jednoduchost značíme takto definovaný operátor, který je hledaným operátorem stop, stále γ_0.

Jediné, co tedy potřebujeme dokázat, je spojitost γ_0 na $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$. K tomu budeme nejprve uvažovat případ poloprostoru $\Omega = \mathbb{R}^N_+$ a pak použijeme lokální souřadnice.

Lemma 3.44. *Nechť* $\Omega = \mathbb{R}^N_+ = \{x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} : x_N > 0\}$. *Pak pro libovolné* $1 \leq p < +\infty$ *platí nerovnost*

$$\forall v \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^N_+}) \quad \|\gamma_0(v)\|_{L^p(\mathbb{R}^{N-1})} \leq p^{\frac{1}{p}} \|v\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)}.$$

Důkaz. Nechť $v \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^N_+})$. Pro každé $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$ máme

$$\begin{aligned} |v(x',0)|^p &= -\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x_N} |v(x', x_N)|^p \mathrm{d}x_N \\ &\leq p \int_0^{+\infty} |v(x', x_N)|^{p-1} \left| \frac{\partial v}{\partial x_N}(x', x_N) \right| \mathrm{d}x_N. \end{aligned}$$

Nyní použijeme Youngovu nerovnost

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'},$$

kde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, a kde zvolíme

$$a = \left| \frac{\partial v}{\partial x_N}(x', x_N) \right| \quad \text{a} \quad b = |v(x', x_N)|^{p-1}.$$

Dostaneme

$$|v(x',0)|^p \leq p \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{p} \left| \frac{\partial v}{\partial x_N}(x', x_N) \right|^p + \frac{1}{p'} |v(x', x_N)|^{(p-1)p'} \right) \mathrm{d}x_N.$$

S využitím vztahu $(p-1)p' = p$ získáme nerovnost

$$|v(x',0)|^p \leq (p-1) \int_0^{+\infty} |v(x', x_N)|^p \mathrm{d}x_N + \int_0^{+\infty} \left| \frac{\partial v}{\partial x_N}(x', x_N) \right|^p \mathrm{d}x_N.$$

Integrací přes $\mathbb{R}^{N-1}$ pak dostaneme

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |v(x',0)|^p \mathrm{d}x' &\leq (p-1) \int_{\mathbb{R}^N_+} |v(x)|^p \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N_+} \left| \frac{\partial v}{\partial x_N}(x) \right|^p \mathrm{d}x \\ &\leq (p-1) \int_{\mathbb{R}^N_+} |v(x)|^p \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N_+} \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^p \mathrm{d}x \\ &\leq p \int_{\mathbb{R}^N_+} \left(|v(x)|^p + \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^p \right) \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Tudíž

$$\|v(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R}^{N-1})} \leq p^{\frac{1}{p}} \|v\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)}$$

a důkaz je hotov. ∎

Důkaz Věty 3.43 (pokračování). Použijeme soustavu lokálních souřadnic. Při stejném značení jako v Odstavci 3.3 máme

$$\overline{\Omega} \subset \bigcup_{i=0}^{k} G_i, \quad \text{kde } \overline{G_0} \subset \Omega \text{ a } G_i \text{ je otevřená } \forall i \in \{0, \dots, k\},$$

a dále $\varphi_i \colon B(0,1) \to G_i$, $i = 1, 2, \dots, k$, jsou lokální souřadnice a $\{\alpha_0, \dots, \alpha_k\}$ je příslušný rozklad jedničky, tj. $\alpha_i \in \mathcal{D}(G_i)$, $\alpha_i \geq 0$ a $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 1$ na $\overline{\Omega}$.

Vezměme $v \in (\overline{\Omega})$. Pro každé $1 \leq i \leq k$ definujeme

$$w_i \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} (\alpha_i v) \circ \varphi_i & \text{na } B_+, \\ 0 & \text{na } \mathbb{R}^N_+ \setminus B_+. \end{cases}$$

Protože w_i zřejmě patří do $\mathcal{D}(R^N_+)$, plyne z Lemmatu 3.44, že

$$\|w_i(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R}^{N-1})} \leq p^{\frac{1}{p}} \|w_i\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)}. \tag{3.24}$$

Pomocí klasických pravidel diferenciálnho počtu (všechny funkce α_i, v, φ_i jsou spojitě diferencovatelné) dostáváme existenci konstanty C_i $(i = 1, \dots, k)$ takové, že

$$\|w_i\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)} \leq C_i \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \tag{3.25}$$

Z nerovností (3.24) a (3.25) pak dostáváme

$$\|w_i(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R}^{N-1})} \leq C_i p^{\frac{1}{p}} \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \tag{3.26}$$

Nyní použijeme definici normy v prostoru $L^p(\partial\Omega)$, která využívá lokální souřadnice. Lze ukázat, že k normě v $L^p(\partial\Omega)$ můžeme vyjádřit ekvivalentní normu pomocí lokálních souřadnic. Označíme-li $\widetilde{\cdot}$ rozšíření nulou vně množiny $\{y \in \mathbb{R}^{N-1} : |y| < 1\}$, platí

$$L^p(\partial\Omega) = \{v \colon \partial\Omega \to \mathbb{R} : \widetilde{(\alpha_i v) \circ \varphi_i}(\cdot, 0) \in L^p(\mathbb{R}^{N-1}),\ 1 \leq i \leq k\}$$

a

$$v \mapsto \left(\sum_{i=1}^{k} \|\widetilde{(\alpha_i v) \circ \varphi_i}\|^p_{L^p(\mathbb{R}^{N-1})} \right)^{\frac{1}{p}}$$

je norma ekvivalentní s normou v $L^p(\partial\Omega)$.

Tato definice normy v $L^p(\partial\Omega)$ a nerovnost (3.26) (máme $w_i = \widetilde{(\alpha_i v) \circ \varphi_i}$) dávají

$$\|v\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C(p, N, \Omega) \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

pro nějakou konstantu $C = C(p, N, \Omega)$. Tím jsme dokázali spojitost γ_0 na $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ a důkaz je hotov. ∎

Nyní dokážeme některé z nejdůležitějších vlastností operátoru stop γ_0.

Tvrzení 3.45. *Předpokládejme, že Ω je omezená otevřená podmnožina $\mathbb{R}^N$, jejíž hranice je třídy C^1. Pak pro libovolné $1 \leq p < +\infty$ je prostor $W^{1,p}_0(\Omega)$ totožný s jádrem operátoru stop γ_0, tj.*

$$W^{1,p}_0(\Omega) = \{v \in W^{1,p}(\Omega) : \gamma_0(v) = 0\}.$$

Důkaz. Začneme důkazem inkluze $W_0^{1,p}(\Omega) \subset \operatorname{Ker} \gamma_0$.

Vezměme $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Podle definice $W_0^{1,p}(\Omega)$ existuje posloupnost funkcí $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $v_n \in \mathcal{D}(\Omega)$, taková, že $v_n \to v$ v prostoru $W^{1,p}(\Omega)$. Protože $\gamma_0(v_n) = v_n|_{\partial\Omega} = 0$, plyne ze spojitosti γ_0, že $\gamma_0(v) = 0$, tj. $v \in \operatorname{Ker} \gamma_0$.

Důkaz opačné inkluze je náročnější, takže pouze naznačíme jeho základní body. Omezíme se při tom pouze na případ $\Omega = \mathbb{R}^N_+$, k případu libovolné omezené otevřené množiny Ω pak lze přejít pomocí lokálních souřadnic.

Vezměme $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$ takové, že $\gamma_0(v) = 0$. Dokážeme, že $v \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$. Nejprve rozšíříme v nulou vně $\mathbb{R}^N_+$. S využitím předpokladu $\gamma_0(v) = 0$ lze ověřit, že takto získané rozšíření $\tilde{v}$ patří do $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Nyní zavedeme posunutí funkce $\tilde{v}$. Pro $h > 0$ definujeme

$$(\tau_h \tilde{v})(x', x_N) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{v}(x', x_N - h).$$

Nakonec regularizujeme funkci $\tau_h \tilde{v}$ pomocí konvoluce. Víme, že funkce konvoluce $\varrho_\varepsilon * (\tau_h \tilde{v})$ patří do $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N_+)$ a $\varrho_\varepsilon * (\tau_h \tilde{v}) \to v$ v prostoru $W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$ pro $h \to 0+$ a $\varepsilon \to 0+$. Tudíž $v \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$. ■

Tvrzení 3.46 (Greenova formule). *Nechť Ω je omezená otevřená podmnožina $\mathbb{R}^N$, jejíž hranice $\partial\Omega$ je třídy C^1. Potom pro libovolné $u, v \in H^1(\Omega)$ a každé $1 \leq i \leq N$ platí*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v \mathrm{d}x = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \gamma_0(u)\gamma_0(v)(\vec{n} \cdot \vec{e}_i) \mathrm{d}\sigma.$$

Důkaz. Začneme důkazem Greenovy formule pro hladké funkce $u, v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$. Vyjdeme z následující rovnosti. Jsou-li reálná funkce u a vektorová funkce $\vec{V}$ obě třídy C^1, potom

$$\int_\Omega \operatorname{div}(u\vec{V}) \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u(\vec{V} \cdot \vec{n}) \mathrm{d}\sigma.$$

Zvolme $\vec{V} = v\vec{e}_i$, tj. všechny složky $\vec{V}$ jsou nulové vyjma i-té složky, která je rovna v. Dostaneme

$$\int_\Omega \left(u\frac{\partial v}{\partial x_i} + v\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} uv(\vec{n} \cdot \vec{e}_i) \mathrm{d}\sigma.$$

Nyní uvažujme libovolné $u, v \in H^1(\Omega)$. Využijeme hustotu $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ v $H^1(\Omega)$.

Podle Propozice 3.32 existují aproximující posloupnosti $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ a $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ prvků z $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ takové, že $u_n \to u$ a $v_n \to v$ v prostoru $H^1(\Omega)$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\int_\Omega \left(u_k\frac{\partial v_k}{\partial x_i} + v_k\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u_k v_k(\vec{n} \cdot \vec{e}_i) \mathrm{d}\sigma. \tag{3.27}$$

Nyní využijeme Větu 3.43. Podle definice γ_0 a díky spojitosti γ_0 z $H^1(\Omega)$ do $L^2(\partial\Omega)$ máme

$$u_k|_{\partial\Omega} \to \gamma_0(u) \text{ v } L^2(\partial\Omega),$$
$$v_k|_{\partial\Omega} \to \gamma_0(v) \text{ v } L^2(\partial\Omega).$$

Tudíž

$$\int_{\partial\Omega} u_k v_k(\vec{n} \cdot \vec{e}_i) \mathrm{d}\sigma \to \int_{\partial\Omega} \gamma_0(u)\gamma_0(v)(\vec{n} \cdot \vec{e}_i) \mathrm{d}\sigma.$$

Na levé straně rovnosti (3.27) lze snadno přejít k limitě, takže dostáváme

$$\int_\Omega \left(u\frac{\partial v}{\partial x_i} + v\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \gamma_0(u)\gamma_0(v)(\vec{n}\cdot\vec{e}_i)\mathrm{d}\sigma$$

a tím je důkaz proveden. ∎

Poznámka 3.47.

(a) Uvedený důkaz je návodem pro obecnou metodu důkazu Greenových formulí: začne se důkazem pro hladké funkce a pak se přejde k limitě pomocí spojitosti operátoru stop.

(b) Stejná formule platí i pro $u \in W^{1,p}(\Omega)$ a $v \in W^{1,q}(\Omega)$, kde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Nyní prozkoumáme prostor stop $\{\gamma_0(v) : v \in W^{1,p}(\Omega)\}$, tj. obor hodnot γ_0. Díky Větě 3.43 víme, že je podmnožinou $L^p(\partial\Omega)$. Ukážeme, že obor hodnot γ_0 je vlastní podmnožinou $L^p(\partial\Omega)$. Přesněji platí $\gamma_0(v) \in W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$. Pro důkaz toho tvrzení se ale používají Sobolevovy prostory lomeného řádu na varietách, takže je značně komplikovaný. Pro $p = 2$ ale máme i jiný, mnohem jednodušší důkaz, který využívá definici Sobolevových prostorů pomocí Fourierovy transformace.

Tvrzení 3.48 (obor hodnot γ_0)**.** *Nechť Ω je omezená otevřená podmnožina $\mathbb{R}^N$, jejíž hranice $\partial\Omega$ je třídy C^1. Potom je operátor stop γ_0 lineární spojitý operátor, zobrazující $H^1(\Omega)$ na $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.*

Důkaz. Prostor $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ je definován pomocí lokálních souřadnic. Potřebujeme tedy dokázat toto tvrzení pouze pro $\Omega = \mathbb{R}^N_+$, tj. $\partial\Omega = \mathbb{R}^{N-1}$. Díky spojitosti operátoru zrcadlení $P\colon H^1(\mathbb{R}^N_+) \to H^1(\mathbb{R}^N)$ (viz Lemma 3.31) nám stačí dokázat, že operátor stop

$$H^1(\mathbb{R}^N) \overset{\gamma_0}{\to} H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{N-1})$$

je spojitý. S využitím hustoty $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ v $H^1(\mathbb{R}^N)$ a definice γ_0 nakonec můžeme zredukovat celý důkaz na důkaz existence konstanty $C \geq 0$ takové, že pro všechna $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ platí

$$\|v(\cdot,0)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{N-1})} \leq C\|v\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}. \tag{3.28}$$

K důkazu (3.28) použijeme Fourierovu transformaci, definovanou v Odstavci 3.4.

Označíme-li $m_N = (2\pi)^{-\frac{N}{2}}x$, máme

$$\mathcal{F}_N(v)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} v(x)\mathrm{d}m_N,$$

kde $\mathcal{F}_N$ značí Fourierovu transformaci v $\mathbb{R}^N$. Budeme používat obvyklé značení $x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^{N-1}\times\mathbb{R}$. Pro libovolné $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ dostaneme podle Fubiniho věty

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_N(v)(x',x_N) &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_N t} \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x' y} v(y,t)\mathrm{d}m_{N-1}(y) \right) \mathrm{d}m_1(t) \\
&= \mathcal{F}_1(\mathcal{F}_{N-1}v(x',\cdot))(x_N) \\
&= \mathcal{F}_{N-1}(\mathcal{F}_1 v(\cdot,x_N))(x'). \qquad (3.29)
\end{aligned}$$

vypočítejme normu $\gamma_0(v)$ v prostoru $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{N-1})$. Máme

$$\gamma_0(v)(x') = v(x', 0) = \bar{\mathcal{F}}_1\mathcal{F}_1(v(x', \cdot))(0),$$

kde jsme použili vzorec pro inverzní Fourierovu transformaci (Propozice 3.36). Tudíž

$$\gamma_0(v)(x') = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_1(v(x', \cdot))(t)\mathrm{d}t. \tag{3.30}$$

Na obě strany rovnosti (3.30) aplikujeme transformaci $\mathcal{F}_{N-1}$ a s využitím (3.29) dostáváme

$$\mathcal{F}_{N-1}(\gamma_0(v))(x') = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{F}_N v)(x', t)\mathrm{d}t. \tag{3.31}$$

Z Věty 3.37 pak plyne

$$\begin{aligned}\|v\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} &= \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |x|^2)|(\mathcal{F}_N v)(x)|^2\mathrm{d}x\\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |x'|^2 + t^2)|(\mathcal{F}_N v)(x', t)|^2\mathrm{d}x'\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Dále přepíšeme (3.31) do tvaru

$$\mathcal{F}_{N-1}(\gamma_0(v))(x') = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{F}_N v)(x', t)(1 + |x'|^2 + t^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{(1 + |x'|^2 + t^2)^{\frac{1}{2}}}$$

a použijeme Cauchyho-Schwarzovu nerovnost. Dostaneme

$$\begin{aligned}&|\mathcal{F}_{N-1}(\gamma_0(v))(x')|^2\\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |(\mathcal{F}_N v)(x', t)|^2(1 + |x'|^2 + t^2)\mathrm{d}t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + |x'|^2 + t^2}.\end{aligned} \tag{3.32}$$

Pomocí substituce $t = (1 + |x'|^2)^{\frac{1}{2}}s$ snadno vypočteme, že

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + |x'|^2 + t^2} = \frac{\pi}{(1 + |x'|^2)^{\frac{1}{2}}}. \tag{3.33}$$

Kombinací (3.32) a (3.33) dostaneme nerovnost

$$|(1 + |x'|^2)^{\frac{1}{4}}\mathcal{F}_{N-1}(\gamma_0(v))(x')|^2 \leq \pi \int_{-\infty}^{+\infty} |(\mathcal{F}_N v)(x', t)|^2(1 + |x'|^2 + t^2)\mathrm{d}t. \tag{3.34}$$

Integrací (3.34) přes $\mathbb{R}^{N-1}$ pak získáme

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |(1 + |x'|^2)^{\frac{1}{4}}\mathcal{F}_{N-1}(\gamma_0(v))(x')|^2\mathrm{d}x'\\ &\quad\leq \pi \int_{\mathbb{R}^N} |(\mathcal{F}_N v)(x', t)|^2(1 + |x'|^2 + t^2)\mathrm{d}x'\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Z Věty 3.37 a Definice 3.40 prostoru $H^{\frac{1}{2}}$ tedy plyne

$$\|\gamma_0(v)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{N-1})} \leq \sqrt{\pi}\|v\|_{H^1(\mathbb{R}^N)},$$

což vyjadřuje spojitost γ_0 z $H^1(\mathbb{R}^N)$ do $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{N-1})$. ■

Poznámka 3.49. Pokud v patří do $W^{2,p}(\Omega)$, pak lze analogicky dát smysl i derivaci podle jednotkové vnější normály $\frac{\partial v}{\partial n}$. V tom případě totiž $\nabla v \in W^{1,p}(\Omega)^N$, a tedy stopa ∇v na $\partial\Omega$ patří do $L^p(\partial\Omega)^N$. Definujeme

$$\frac{\partial v}{\partial n} \overset{\text{def}}{=} \gamma_0(\nabla v) \cdot \vec{n},$$

což patří do $L^p(\partial\Omega)$. Přesněji lze ukázat, že

$$\frac{\partial v}{\partial n} \in W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega).$$

Pro $p = 2$ a $v \in H^2(\Omega)$ máme $\frac{\partial v}{\partial n} \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

Lze též dokázat, že operátor $v \mapsto \left\{v|_{\partial\Omega}, \frac{\partial v}{\partial n}\right\}$, je lineární spojitý operátor, zobrazující $W^{2,p}(\Omega)$ na $W^{2-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega) \times W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$.

3.6. Sobolevovy věty o vnoření

Nechť Ω je omezená otevřená podmnožina $\mathbb{R}^N$. V [**22**, Section 5.1, Theorem 5.1.1], je dokázáno, že každý prvek Sobolevova prostoru $W^{1,p}(a,b)$, $1 \leq p \leq +\infty$, má spojitého reprezentanta. Pro prvky prostoru $W^{1,2}(\Omega)$ už to však neplatí, jakmile je dimenze prostoru $N \geq 2$. Vyvstává tedy přirozeně otázka, zda existuje vztah mezi čísly m, p a N, který by zaručil, že $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$. Pozitivní odpověď na tuto otázku dává Sobolevova věta o vnoření (Věta 3.51, resp. Věta 3.65), která říká, že uvedené vnoření platí pro $mp > N$. Kromě toho ještě Sobolevova věta o vnoření říká, že i když $v \in W^{m,p}(\Omega)$ a $mp < N$, stále máme lepší informaci než pouze $v \in L^p(\Omega)$, a to $v \in L^q(\Omega)$, kde $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N}$.

Zdůrazněme, že Sobolevova věta o vnoření hraje podstatnou roli ve variačním přístupu k parciálním diferenciálním rovnicím, protože nám dává vztah mezi dvěma druhy prostorů: $W^{m,p}(\Omega)$ a $C^{k,\alpha}(\Omega)$.

Pro speciální případ $p = 2$ můžeme důkaz provést poměrně snadno pomocí Fourierovy-Plancherelovy transformace, zavedené v Odstavci 3.4.

Věta 3.50. *Nechť $s > 0$ splňuje $2s > N$. Potom je prostor $H^s(\mathbb{R}^N)$ spojitě vnořen do $C(\mathbb{R}^N)$.*

Důkaz. Připomeňme (Věta 3.37 a Definice 3.40), že

$$v \in H^s(\mathbb{R}^N) \Leftrightarrow (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}(v) \in L^2(\mathbb{R}^N).$$

Označme $g \stackrel{\text{def}}{=} (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}(v)$. Podle předpokladu $g \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Máme tedy $\mathcal{F}(v) = g(1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}$ a $v = \bar{\mathcal{F}}(\mathcal{F}v)$. Patří-li $\mathcal{F}(v) = g(1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}$ do $L^1(\mathbb{R}^N)$, pak je $\bar{\mathcal{F}}$ totožné s klasickou inverzní Fourierovou transformací (3.16), a tedy $v \in C(\mathbb{R}^N)$. Protože g patří do $L^2(\mathbb{R}^N)$, pak nám na to, aby funkce $g(1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}$ patřila do $L^1(\mathbb{R}^N)$, stačí ukázat, že $(1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}$ patří do $L^2(\mathbb{R}^N)$, tj. $\int_{\mathbb{R}^N}(1+|\xi|^2)^{-s}\mathrm{d}\xi < +\infty$. Dále platí

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\mathrm{d}\xi}{(1+|\xi|^2)^s} = c\int_0^{+\infty} \frac{r^{N-1}}{(1+r^2)^s}\mathrm{d}r$$

a poslední integrál je konečný právě tehdy, když $2s - (N-1) > 1$, tj. $2s > N$. ■

Nyní přistoupíme k obecnému případu $1 \leq p \leq +\infty$. Začneme vnořením prostoru $W^{1,p}(\Omega)$. Indukcí přes m pak odvodíme vnoření pro $W^{m,p}(\Omega)$.

Věta 3.51 (Sobolev)**.** *Nechť Ω je omezená otevřená podmnožina $\mathbb{R}^N$ s hranicí $\partial\Omega$ třídy C^1. Uvažujeme prostor $W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$. Pak platí následující tvrzení o spojitých vnořeních.*

(i) *Pokud $1 \leq p < N$, pak $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$, kde $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$. Přesněji řečeno každý prvek $v \in W^{1,p}(\Omega)$ patří zároveň do $L^{p^*}(\Omega)$ a existuje konstanta C, závisející pouze na p, N a Ω taková, že pro všechna $v \in W^{1,p}(\Omega)$ platí*

$$\|v\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

(ii) *Pokud $p = N$, potom $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pro libovolné $1 \leq q < +\infty$.*

(iii) *Je-li $p > N$, pak $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$. Přesněji platí $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\Omega)$, kde $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$, tj. každý prvek $v \in W^{1,p}(\Omega)$ má Hölderovsky spojitého reprezentanta s exponentem α a existuje konstanta C závisející pouze na p, N a Ω taková, že pro všechna $v \in W^{1,p}(\Omega)$ máme*

$$|v(x) - v(y)| \leq C\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)}|x-y|^{\alpha} \quad \textit{pro s. v. } x, y \in \Omega.$$

Důkaz. Metoda důkazu je podobná metodě použité v Odstavci 3.3. Nejprve dokážeme spojitá vnoření ((i)), ((ii)) a ((iii)) pro případ $\Omega = \mathbb{R}^N$. Ve skutečnosti dostaneme ještě o trochu silnější tvzení, viz Věta 3.52 (Sobolev-Gagliardo-Nirenberg pro případ $1 \leq p < N$), Věta 3.60 (Morrey pro případ $p > N$) a Věta 3.61 (pro hraniční případ $p = N$).

Použijeme spojitý lineární rozšiřující operátor

$$P \colon W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^N),$$

jehož vlastnosti zachycuje Věta 3.30. Vezměme případ $1 \leq p < N$. Složení spojitých operátorů

$$W^{1,p}(\Omega) \xrightarrow{P} W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \overset{\text{Věta 3.52}}{\hookrightarrow} L^{p^*}(\mathbb{R}^N) \xrightarrow{r} L^{p^*}(\Omega)$$

(kde r je operátor restrikce na Ω) je rovněž spojité a je to kanonické vnoření prostoru $W^{1,p}(\Omega)$ do $L^{p^*}(\Omega)$, což je identita. Stejně postupujeme i v případech $p > N$ a $p = N$.

Poznamenejme, že k použití metody rozšiřujícího operátoru, zavedeného Větou 3.30, potřebujeme předpoklad regularity množiny Ω, tj. předpokládáme, že hranice $\partial\Omega$ je třídy C^1. ■

Ve zbytku tohoto Ostavce budeme pracovat s celým prostorem $\mathbb{R}^N$.

Případ $1 \leq p < N$.

Věta 3.52 (Sobolev-Gagliardo-Nirenberg)**.** *Nechť $1 \leq p < N$. Potom $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$, kde $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$. Přesněji řečeno existuje konstanta $C = C(p,N)$ taková, že*

$$\forall v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \quad \|v\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\nabla v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Poznámka 3.53. Než začneme dokazovat Větu 3.52, ukážeme, že elementární homogenní transformací nezávisle proměnné můžeme získat přesnou hodnotu $p^* = \frac{pN}{N-p}$. Předpokládejme, že existuje konstanta C a nějaké $1 \leq q < +\infty$ takové, že pro všechna $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ platí

$$\|v\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\nabla v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Dokážeme, že pak nutně $q = p^*$. V poslední nerovnosti vezměme místo v funkci $v_\lambda(x) \overset{\text{def}}{=} v(\lambda x)$, kde $\lambda > 0$. Dostaneme

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v(\lambda x)|^q \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^N} \lambda^p |\nabla v(\lambda x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pomocí substituce $y = \lambda x$ získáme nerovnost

$$\frac{1}{\lambda^{\frac{N}{q}}}\|v\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C\lambda\frac{1}{\lambda^{\frac{N}{p}}}\|\nabla v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)},$$

kterou upravíme do tvaru

$$\|v\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C\lambda^{\left(1-\frac{N}{p}+\frac{N}{q}\right)}\|\nabla v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Tato nerovnost má ovšem smysl pouze v případě, že $1-\frac{N}{p}+\frac{N}{q}=0$, tj. $q=p^*$. Jinak bychom totiž pro $\lambda \to 0+$ v případě, že $1-\frac{N}{p}+\frac{N}{q}>0$, resp. pro $\lambda \to +\infty$ v případě, že $1-\frac{N}{p}+\frac{N}{q}<0$, dostali, že $v=0$ skoro všude v celém $\mathbb{R}^N$, přestože $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ bylo libovolné, a to by byl spor.

K důkazu Věty 3.52 budeme potřebovat následující lemma, jehož autorem je Gagliardo.

Lemma 3.54. *Nechť $N \geq 2$ a $g_1, g_2, \ldots, g_N \in L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})$. Potom $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$, kde $g(x) \stackrel{\text{def}}{=} g_1(\tilde{x}_1)g_2(\tilde{x}_2)\ldots g_N(\tilde{x}_N)$, a platí*

$$\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \prod_{i=1}^{N}\|g_i\|_{L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})}.$$

Důkaz. Nerovnost je zřejmé pro $N=2$. Důkaz provedeme indukcí, takže budeme předpokládat, že nerovnost platí až do nějakého N, a dokážeme ji pro $N+1$. Mějme tedy $N+1$ funkcí g_1, g_2, …, g_{N+1} patřících do $L^N(\mathbb{R}^N)$ a uvažujme funkci g, definovanou pro všechna $x=(x_1,x_2,\ldots,x_{N+1}) \in \mathbb{R}^{N+1}$ předpisem

$$g(x) \stackrel{\text{def}}{=} g_1(\tilde{x}_1)g_2(\tilde{x}_2)\ldots g_{N+1}(\tilde{x}_{N+1}) = [g_1(\tilde{x}_1)\ldots g_N(\tilde{x}_N)]g_{N+1}(\tilde{x}_{N+1}).$$

Pro pevné x_{N+1} použijeme Hölderovu nerovnost

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N}|g(x)|\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\ldots\mathrm{d}x_N\\ &\quad\leq \|g_{N+1}\|_{L^N(\mathbb{R}^N)}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|g_1(\tilde{x}_1)\ldots g_N(\tilde{x}_N)|^{N'}\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_N\right)^{\frac{1}{N'}},\end{aligned}\tag{3.35}$$

kde $N' \stackrel{\text{def}}{=} \frac{N}{N-1}$. Dále si všimněme, že funkce $|g_1(\tilde{x}_1)|^{N'}, \ldots, |g_N(\tilde{x}_N)|^{N'}$ patří do $L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})$. Podle indukčního předpokadu

$$\int_{\mathbb{R}^N}|g_1(\tilde{x}_1)\ldots g_N(\tilde{x}_N)|^{N'}\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_N \leq \prod_{i=1}^{N}\|g_i(\cdot,x_{N+1})\|^{N'}_{L^N(\mathbb{R}^{N-1})}.\tag{3.36}$$

Kombinací (3.35) a (3.36) pak dostaneme

$$\int_{\mathbb{R}^N}|g(x)|\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_N \leq \|g_{N+1}\|_{L^N(\mathbb{R}^N)}\prod_{i=1}^{N}\|g_i(\cdot,x_{N+1})\|_{L^N(\mathbb{R}^{N-1})}.\tag{3.37}$$

Nyní opět uvažujme x_{N+1} a integrujme (3.37) přes $\mathbb{R}$. Máme

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^{N+1}}|g(x)|\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_{N+1}\\ &\quad\leq \|g_{N+1}\|_{L^N(\mathbb{R}^N)}\int_{\mathbb{R}}\prod_{i=1}^{N}\|g_i(\cdot,x_{N+1})\|_{L^N(\mathbb{R}^{N-1})}\mathrm{d}x_{N+1}.\end{aligned}\tag{3.38}$$

Poznamenejme, že pro všechna $i = 1, \dots, N$ patří $\|g_i(\cdot, x_{N+1})\|_{L^N(\mathbb{R}^{N-1})}$ do $L^N(\mathbb{R})$. Použitím Hölderovy nerovnosti na (3.38) pro $\frac{1}{N} + \cdots + \frac{1}{N} = 1$ (N krát) dostaneme

$$\int_{\mathbb{R}^{N+1}} |g(x)| \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_{N+1} \leq \|g_{N+1}\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \prod_{i=1}^{N} \|g_i\|_{L^N(\mathbb{R}^N)},$$

tj.

$$\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \prod_{i=1}^{N+1} \|g_i\|_{L^N(\mathbb{R}^N)},$$

čímž je důkaz indukcí dokončen. ■

Důkaz Věty 3.52.

(a) Využijeme hustoty a dokážeme, že je ekvivalentní, jestli nerovnost

$$\|v\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\nabla v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \tag{3.39}$$

platí pro všechna $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, nebo pro všechna $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Pro dané $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ můžeme díky [**22**, Theorem 5.1.3] najít posloupnost $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prvků $v_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ takovou, že

$$v_n \to v \text{ ve } W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \text{ a } v_n(x) \to v(x) \text{ pro skoro všechna } x \in \mathbb{R}^N.$$

Mějme

$$\|v_n\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\nabla v_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Potom

$$\begin{aligned}\|v\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} &\leq \liminf_{n\to+\infty} \|v_n\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq C \lim_{n\to+\infty} \|\nabla v_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = C\|\nabla v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)},\end{aligned}$$

kde první z nerovností je důsledkem Fatouova lemmatu.

(b) Nyní ukážeme, že nerovnost (3.39) stačí dokázat pro $p = 1$. Předpokládejme tedy, že pro $p = 1$ platí, tj.

$$\forall v \in W^{1,1}(\mathbb{R}^N) \quad \|v\|_{L^{1^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C_1(N)\|\nabla v\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}, \tag{3.40}$$

a dokažme, že potom platí pro libovolné $1 < p < N$.

Platí, že pokud $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, potom $|v|^{\frac{p^*}{1^*}}$ patří do $W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$. Skutečně, protože $p > 1$, máme $p^* > 1^*$ a funkce $|v|^{\frac{p^*}{1^*}}$ je spojitě diferencovatelná a má kompaktní nosič. Tudíž $|v|^{\frac{p^*}{1^*}} \in W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$ a

$$\nabla\left(|v|^{\frac{p^*}{1^*}}\right) = \frac{p^*}{1^*} \operatorname{sign} v\, |v|^{\frac{p^*}{1^*}-1} \nabla v. \tag{3.41}$$

Nahraďme v v nerovnosti (3.40) funkcí $|v|^{\frac{p^*}{1^*}}$. S využitím (3.41) dostaneme

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{p^*} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{1^*}} \leq C_1(N) \frac{p^*}{1^*} \int_{\mathbb{R}^N} |v|^{\frac{p^*}{1^*}-1} |\nabla v| \mathrm{d}x. \tag{3.42}$$

Použitím Hölderovy nerovnosti pro $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ na pravou stranu nerovnosti (3.42) získáme

$$\begin{aligned}&\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{p^*} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{1^*}} \\ &\quad \le C_1(N)\frac{p^*}{1^*}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{\left(\frac{p^*}{1^*}-1\right)p'} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned} \tag{3.43}$$

Jednoduchým výpočtem zjistíme, že $\frac{1}{1^*} - \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p'}$, což je ekvivalentní s $\left(\frac{p^*}{1^*} - 1\right)p' = p^*$, a tedy (3.43) můžeme zjednodušit do tvaru

$$\|v\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \le C_1(N)\frac{p^*}{1^*}\|\nabla v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)},$$

což je (3.39) s libovolným $1 < p < N$. Poznemenejme, že jsme navíc dokázali, že lze brát

$$C(p,N) = C_1(N)\frac{p^*}{1^*}. \tag{3.44}$$

(c) Nyní nám už stačí dokázat, že pro všechna $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$

$$\|v\|_{L^{1^*}(\mathbb{R}^N)} \le C_1(N)\|\nabla v\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}. \tag{3.45}$$

Pro libovolné $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ máme

$$\begin{aligned}|v(x)| &= \left|\int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_N)\mathrm{d}t\right| \\ &\le \int_{-\infty}^{x_i} \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_N)\right| \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Stejně tak

$$|v(x)| \le \int_{x_i}^{+\infty} \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_N)\right| \mathrm{d}t.$$

Sečtením těchto dvou nerovností dostaneme

$$|v(x)| \le \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_N)\right| \mathrm{d}t. \tag{3.46}$$

Budeme používat následující značení. Pro každé $x \in \mathbb{R}^N$ a $i = 1, 2, \dots, N$ definujeme

$$\begin{aligned}\tilde{x}_i &\stackrel{\text{def}}{=} (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n), \\ f_i(\tilde{x}_i) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n)\right| \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Nerovnost (3.46) můžeme tedy přepsat jako $|v(x)| \leq \frac{1}{2} f_i(\tilde{x}_i)$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, N$. Odtud plyne

$$|v(x)|^N \leq \frac{1}{2^N} \prod_{i=1}^{N} f_i(\tilde{x}_i). \tag{3.47}$$

Abychom dokázali (3.45), potřebujeme odhad shora pro $\|v\|_{L^{1^*}(\mathbb{R}^N)}$. Protože $1^* = \frac{N}{N-1}$, přepíšeme (3.47) do tvaru

$$|v(x)|^{1^*} \leq \frac{1}{2^{\frac{N}{N-1}}} \prod_{i=1}^{N} f_i(\tilde{x}_i)^{\frac{1}{N-1}}. \tag{3.48}$$

Pro každé $i = 1, 2, \ldots, N$ patří funkce $g_i(\tilde{x}_i) \overset{\text{def}}{=} f_i(\tilde{x}_i)^{\frac{1}{N-1}}$ do $L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})$ a navíc platí

$$\|g_i\|_{L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})} = \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{N-1}}. \tag{3.49}$$

Nyní aplikujeme Lemma 3.54 na (3.48) a použijeme (3.49). Dostaneme

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |v(x)|^{1^*} \mathrm{d}x &\leq \frac{1}{2^{\frac{N}{N-1}}} \left\| \prod_{i=1}^{N} g_i(\tilde{x}_i) \right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq \frac{1}{2^{\frac{N}{N-1}}} \prod_{i=1}^{N} \|g_i\|_{L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})} \\
&\leq \frac{1}{2^{\frac{N}{N-1}}} \prod_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{N-1}}.
\end{aligned}$$

Protože $1^* = \frac{N}{N-1}$, plyne odtud

$$\|v\|_{L^{1^*}(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{1}{2} \prod_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{N}}.$$

Z nerovnosti mezi geometrickým a aritmetickým průměrem $\left(\prod_{i=1}^{N} a_i\right)^{\frac{1}{N}} \leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} a_i$ konečně plyne

$$\|v\|_{L^{1^*}(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = \frac{1}{2N} \|\nabla v\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}, \tag{3.50}$$

a tím je důkaz hotov. ■

Poznámka 3.55. Zkombinujeme-li (3.40), (3.44) a (3.50), zjistíme, že lze brát

$$C(p, N) = \frac{1}{2N} \frac{p^*}{1^*} = \frac{p(N-1)}{2N(N-p)}.$$

Tato konstanta ovšem není optimální. Ta optimální je ostře menší než výše uvedená, je známá a její odvození je značně komplikované (srov. Aubin [**?**], Talenti [**?**] a Lieb [**?**]).

Jako přímý důsledek Sobolevovy-Gagliardovy-Nirenbergovy věty dostáváme následující Poincarého-Sobolevovu nerovnost.

Tvrzení 3.56. *Existuje konstanta $C(p,N)$ taková, že pro libovolnou otevřenou podmnožinu Ω prostoru $\mathbb{R}^N$ a pro libovolné $1 \leq p < N$ platí nerovnost*

$$\forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \|v\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C(p,N)\|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}.$$

Důkaz. Nechť $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ a $\tilde{v}$ je rozšířením v nulou mimo Ω. Podle [**22**, Proposition 5.1.1] patří $\tilde{v}$ do $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Protože $\|\tilde{v}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} = \|v\|_{L^{p^*}(\Omega)}$ a $\|\nabla\tilde{v}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}$, je dokazované tvrzení důsledkem Věty 3.52, použité, na funkci $\tilde{v}$. ■

Poznámka 3.57. (a) Zásadní vlastností Poincarého-Sobolevovy nerovnosti je, že platí pro libovolnou otevřenou množinu Ω (i neomezenou) a konstanta $C(p,N)$ nezávisí na Ω. Skutečně jsme ukázali, že lze brát $C(p,N) = \frac{p(N-1)}{2N(N-p)}$. Tato vlastnost platí díky tomu, že odhadujeme $\|v\|_{L^{p^*}}$ shora pomocí $\|\nabla v\|_{L^p}$. To je velký rozdíl oproti klasické Poincarého nerovnosti (Věta 3.22), kde odhadujeme $\|v\|_{L^p}$ shora pomocí $\|\nabla v\|_{L^p}$. Ta neplatí bez předpokladu omezenosti Ω (alespoň v jednom směru) a navíc Poincarého konstanta závisí na Ω.

(b) Je-li Ω omezená, můžeme klasickou Poincarého nerovnost odvodit z Propozice 3.56 pomocí Hölderovy nerovnosti. Za předpokladu $1 \leq p < N$ platí

$$\int_\Omega |v(x)|^p \mathrm{d}x \leq |\Omega|^{1-\frac{p}{p^*}} \left(\int_\Omega |v(x)|^{p^*} \mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{p^*}}.$$

Odtud plyne

$$\begin{aligned}\|v\|_{L^p(\Omega)} &\leq |\Omega|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p^*}}\|v\|_{L^{p^*}(\Omega)}\\ &\leq |\Omega|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p^*}}C(p,N)\|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}.\end{aligned}$$

Z rovnosti $\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*} = \frac{1}{N}$ tedy dostáváme

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{1}{N}}C(p,N)\|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}.$$

Tímto způsobem můžeme také vidět, jak Poincarého konstanta $\bar{C}_{p,N}(\Omega)$ závisí na Ω. Protože $|R\Omega|^{\frac{1}{N}} = R|\Omega|$, dostáváme opět tvrzení Propozice 3.24, tj. $\bar{C}_{p,N}(R\Omega) = R\bar{C}_{p,N}(\Omega)$.

Uvedené výsledky shrneme v následujícím tvrzení.

Důsledek 3.58. *Nechť Ω je omezená otevřená podmnožina $\mathbb{R}^N$ a nechť $1 \leq p < N$. Pak pro libovolné $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ platí nerovnost*

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{1}{N}}C(p,N)\|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}.$$

Je-li například $\Omega = B(0,r) \subset \mathbb{R}^N$, kde $N > 2$ $(= p)$, dostaneme

$$\int_{B(0,r)} v(x)^2 \mathrm{d}x \leq Cr^2 \int_{B(0,r)} |\nabla v(x)|^2 \mathrm{d}x \quad \forall v \in H_0^1(B(0,r)).$$

Platí také následující Poincarého-Wirtingerova-Sobolevova nerovnost.

Tvrzení 3.59. *Buď Ω omezená, souvislá a otevřená podmnožina $\mathbb{R}^N$, jejíž hranice $\partial\Omega$ je třídy C^1. Nechť $1 \leq p < +\infty$. Potom existuje konstanta $C(p,N,\Omega)$ taková, že pro libovolné $v \in W^{1,p}(\Omega)$ platí následující nerovnost.*

$$\left\| v - \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega v(x)\mathrm{d}x \right\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C(p,N,\Omega) \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}.$$

Důkaz. Označme $M(v) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega v(x)\mathrm{d}x$ a použijeme Sobolevovu větu o vnoření (Věta 3.51((i))) na funkci $v - M(v)$. Dostaneme

$$\begin{aligned} \|v - M(v)\|_{L^{p^*}(\Omega)} &\leq C_1(p,N,\Omega)\|v - M(v)\|_{W^{1,p}(\Omega)} \\ &\leq C_1(p,N,\Omega) \left(\|v - M(v)\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)} \right). \end{aligned}$$

Nyní použijeme klasickou Poincarého-Wirtingerovu nerovnost (Důsledek 3.35) na funkci v:

$$\|v - M(v)\|_{L^p(\Omega)} \leq C_2(p,N,\Omega)\|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}.$$

Z posledních dvou nerovností konečně plyne

$$\|v - M(v)\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C(p,N,\Omega)\|\nabla v\|_{L^p(\Omega)},$$

a tím je důkaz hotov.

Případ $p > N$.

Nyní uvažujeme prostor $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, kde $p > N$. Následující větu dokázal Morrey [?].

Věta 3.60 (Morrey)**.** *Předpokládejme, že $p > N$. Potom existuje spojité vnoření $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$, kde $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$. Přesněji řečeno, existuje konstanta $C(p,N)$ taková, že pro všechna $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ platí*

$$|v(y) - v(x)| \leq C(p,N)\|\nabla v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}|y - x|^\alpha \quad \textit{pro s.v. } x, y \in \mathbb{R}^N.$$

Důkaz. Začneme s $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Poté bude důkaz dokončen pomocí hustoty. Nechť Q je otevřená krychle obsahující počátek a jejíž hrany jsou rovnoběžné s osami souřadnic v $\mathbb{R}^N$ a jejich délka je vesměs rovna $r > 0$. Pro každé $x \in Q$ máme

$$v(x) - v(0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v(tx)\mathrm{d}t.$$

Odtud pak

$$\begin{aligned} |v(x)-v(0)| &\le \int_0^1 \sum_{i=1}^N |x_i| \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}(tx)\right| \mathrm{d}t \\ &\le r \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}(tx)\right| \mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Nechť $\tilde{v} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|Q|}\int_Q v(x)\mathrm{d}x$ značí integrální průměr v na Q. Integrací (3.51) přes Q dostaneme

$$|\tilde{v}-v(0)| \le \frac{r}{|Q|}\int_Q \mathrm{d}x \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}(tx)\right| \mathrm{d}t.$$

Nyní zaměníme pořadí integrování (Fubiniho věta):

$$|\tilde{v}-v(0)| \le \frac{1}{r^{N-1}}\int_0^1 \mathrm{d}t \int_Q \sum_{i=1}^N \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}(tx)\right| \mathrm{d}x.$$

Substitucí $y = tx$ dále dostaneme

$$|\tilde{v}-v(0)| \le \frac{1}{r^{N-1}}\int_0^1 \mathrm{d}t \int_{tQ} \sum_{i=1}^N \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}(y)\right| \frac{\mathrm{d}y}{t^N}. \tag{3.52}$$

Poslední integrál odhadneme shora pomocí Hölderovy nerovnosti:

$$\int_{tQ} \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}(y)\right| \mathrm{d}y \le |tQ|^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{tQ} \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}(y)\right|^p \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.53}$$

Protože $0 \in Q$, máme $tQ \subset Q$ pro libovolné $0 \le t \le 1$. Z výše uvedených nerovností (3.52) a (3.53) tedy plyne, že

$$\begin{aligned} |\tilde{v}-v(0)| &\le \frac{r^{\frac{N}{p'}}}{r^{N-1}} \int_0^1 \frac{t^{\frac{N}{p'}}}{t^N} \mathrm{d}t \sum_{i=1}^N \left(\int_Q \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}(y)\right|^p \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\le \frac{r^{1-\frac{N}{p}}}{1-\frac{N}{p}} \|\nabla v\|_{L^p(Q)}. \end{aligned}$$

Díky posunutí platí tato nerovnost pro libovolnou krychli, jejíž hrany jsou rovnoběžné s osami souřadnic a jejich délka je rovna r. Tudíž pro každé $x \in Q$ platí

$$|\tilde{v}-v(x)| \le \frac{r^{1-\frac{N}{p}}}{1-\frac{N}{p}} \|\nabla v\|_{L^p(Q)}.$$

Díky trojúhelníkové nerovnosti

$$|v(y)-v(x)| \le |v(y)-\tilde{v}| + |\tilde{v}-v(x)|$$

dále dostáváme

$$|v(y) - v(x)| \leq \frac{2r^{1-\frac{N}{p}}}{1-\frac{N}{p}} \|\nabla v\|_{L^p(Q)} \quad \forall x, y \in Q.$$

Nyní využijeme toho, že pro libovolné dva body $x, y \in \mathbb{R}^N$ existuje otevřená krychle Q, konstruovaná výše uvedeným způsobem, taková, že $x, y \in Q$ a $r = 2|y - x|$. Odtud pak plyne, že pro všechna $x, y \in \mathbb{R}^N$ platí nerovnost

$$|v(y) - v(x)| \leq C(p, N) \|\nabla v\|_{L^p(Q)} |y - x|^{1-\frac{N}{p}},$$

kde $C(p, N)$ závisí pouze na p a N. Zde jsme dostali $C(p, N) = \frac{2^{2-\frac{N}{p}}}{1-\frac{N}{p}}$. Zbytek důkazu se provede standardně pomocí hustoty $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. ■

Případ $p = N$.

Nejprve ukážeme, že pro libovolné $1 \leq q < +\infty$ je $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ spojitě vnořený do $L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Toto tvrzení snadno plyne ze Sobolevovy-Gagliardovy-Nirenbergovy věty pro případ $1 \leq p < N$ a toho, že $p^* = \frac{pN}{N-p} \to +\infty$ pro $p \to N_-$.

Připomeňme, že $v \in L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ znamená, že pro libovolné $R > 0$ máme $\int_{B(0,R)} |v(x)|^q \mathrm{d}x < +\infty$. Topologie na $L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ je generovaná třídou seminorem $\{\| \cdot \|_k,\ k = 1, 2, \dots\}$

$$\|v\|_k = \left(\int_{B(0,R_k)} |v(x)|^q \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q}},$$

kde R_k je libovolná posloupnost divergující do $+\infty$ pro $k \to +\infty$. Tímto způsobem dostaneme Frechetovu topologii (metrizovatelnou a úplnou), která nezávisí na volbě posloupnosti $(R_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $R_k \to +\infty$. Konvergence $v_n \to v$ v $L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ je ekvivalentní výroku

$$\forall R < +\infty \quad \int_{B(0,R)} |v_n(x) - v(x)|^q \mathrm{d}x \to 0.$$

Nyní můžeme přistoupit k formulaci následující věty.

Věta 3.61 (limitní případ $p = N$). *Platí*

$$W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N) \quad \forall 1 \leq q < +\infty.$$

Toto vnoření je spojité a prosté zobrazení.

Důkaz. Nechť $v \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$. Použijeme metodu oříznutí (na oblast). Díky [**22**, Lemma 5.1.2] víme, že pro libovolné $M \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ patří funkce Mv do $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ a má kompaktní nosič. Z toho plyne, že

$$Mv \in W^{1,N-\varepsilon}(\mathbb{R}^N) \quad \text{pro libovolně malé } \varepsilon > 0.$$

(Pro libovlné $R > 0$ a libovolně malé $\varepsilon > 0$ totiž platí $L^N(B(0, R)) \subset L^{N-\varepsilon}(B(0, R))$, což není pravda na celém $\mathbb{R}^N$!) Nyní použijeme Větu 3.52 pro $p = N - \varepsilon < N$. Dostaneme

$$Mv \in L^q(\mathbb{R}^N), \quad \text{kde } \frac{1}{q} = \frac{1}{N-\varepsilon} - \frac{1}{N} = \frac{\varepsilon}{N(N-\varepsilon)}.$$

Pro každé $M \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ a $0 < \varepsilon < N$ tedy máme $Mv \in L^{\frac{N(N-\varepsilon)}{\varepsilon}}(\mathbb{R}^N)$.

Zřejmě $\frac{N(N-\varepsilon)}{\varepsilon} \to +\infty$ pro $\varepsilon \to 0+$. Vezmeme-li $M \equiv 1$ na $B(0,R)$, dostaneme pro libovolné $1 \le q < +\infty$ a $R > 0$
$$v \in L^q(B(0,R)).$$
Snadno lze ověřit, že všechny použité operace jsou spojité, a tudíž i vnoření $W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ je spojité pro libovolné $1 \le q < +\infty$. ∎

Poznámka 3.62.

1. Vnoření $W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ platí pro konečné hodnoty q. Obecně z $v \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ neplyne, že v je omezené na omezených množinách, viz příklad funkce $v(x) = |\ln(x)|^k$, uvedený v [**22**, Section 5.1].
2. Lze ukázat (viz např. [**?**, Corollary IX.11]), že dokonce $W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$ pro všechna $1 \le q < +\infty$, což je zřejmě silnější tvrzení, než Věta 3.61.
3. I když funkce $v \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ nemusí být v $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, lze dokázat něco víc, že $v \in L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ pro každé $1 \le q < +\infty$. K tomu potřebujeme širší třídu prostorů, než klasické Lebesguovy prostory $\{L^p,\ 1 \le p \le +\infty\}$, a to Orliczovy prostory. Tvrzení formulujeme v následující propozici, kterou lze opět snadno dokázat pomocí Věty 3.52.

Tvrzení 3.63. *Existují dvě konstanty $K > 0$ a $L > 0$ takové, že pro libovolné $R > 0$ a libovolnou funkci $v \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ splňující* $\operatorname{supp} v \subset B(0,R)$ *a* $\|\nabla v\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \le 1$ *platí*
$$\int_{B(0,R)} \mathrm{e}^{Kv(x)} \mathrm{d}x \le L|B(0,R)|.$$

Důkaz. Vraťme se k Větě 3.52. Víme, že pro každé $1 \le p < N$ a $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ platí
$$\|v\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \le \frac{(N-1)p}{2N(N-p)} \|\nabla v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$
Máme
$$\frac{(N-1)p}{2N(N-p)} = \frac{N-1}{2N^2} \cdot \frac{Np}{N-p}.$$
Protože $p^* = \frac{Np}{N-p}$ a $\frac{N-1}{2N^2} \le 1$ pro libovolné $N \in \mathbb{N}$, platí $\frac{(N-1)p}{2N(N-p)} \le p^*$. Tudíž
$$\|v\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \le p^* \|\nabla v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$
Předpokládejme nyní, že $\operatorname{supp} v \subset B(0,R)$. Z Hölderovy nerovnosti pro
$$\frac{1}{\frac{p^*}{p}} + \frac{1}{\frac{N}{p}} = 1$$
plyne
$$\begin{aligned}\|\nabla v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} &= \left(\int_{B(0,R)} |\nabla v|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\le |B(0,R)|^{\frac{1}{p^*}} \left(\int_{B(0,R)} |\nabla v|^N \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{N}}.\end{aligned}$$

Kombinací posledních dvou nerovností dostaneme

$$\|v\|_{L^{p^*}(B(0,R))} \leq p^* |B(0,R)|^{\frac{1}{p^*}} \|\nabla v\|_{L^N(B(0,R))}.$$

Dále pokud $1 \leq p < N$, potom se příslušné $p^* = \frac{Np}{N-p}$ pohybuje mezi $\frac{N}{N-1}$ a $+\infty$. Zaměníme-li p^* za q, dostaneme následující tvrzení: pro libovolné q takové, že $\frac{N}{N-1} \leq q < +\infty$, platí

$$\|v\|_{L^q(B(0,R))} \leq q |B(0,R)|^{\frac{1}{q}} \|\nabla v\|_{L^N(B(0,R))}. \tag{3.54}$$

Nyní použijeme asymptotický rozvoj

$$\mathrm{e}^{K|v|} = 1 + K|v| + \frac{K^2}{2!}|v|^2 + \cdots + \frac{K^q}{q!}|v|^q + \cdots$$

a dostaneme

$$\begin{aligned} \int_{B(0,R)} \mathrm{e}^{K|v|} \mathrm{d}x =& |B(0,R)| + K \int_{B(0,R)} |v| \mathrm{d}x \\ &+ \sum_{q=2}^{+\infty} \frac{K^q}{q!} \int_{B(0,R)} |v|^q \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3.55}$$

Předpokládejme, že $N \geq 2$. Potom $\frac{N}{N-1} \leq 2$, a tedy (3.54) platí pro každé $q \geq 2$. Protože $\|\nabla v\|_{L^N(B(0,R))} \leq 1$, máme

$$\forall q \geq 2 \quad \frac{1}{|B(0,R)|} \int_{B(0,R)} |v|^q \mathrm{d}x \leq q^q. \tag{3.56}$$

Pro $q = 1$ použijeme Hölderovu nerovnost

$$\int_{B(0,R)} |v(x)| \mathrm{d}x \leq |B(0,R)|^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B(0,R)} |v(x)|^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}$$

a nerovnost (3.56) pro $q = 2$ a dostaneme

$$\frac{1}{|B(0,R)|} \int_{B(0,R)} |v(x)| \mathrm{d}x \leq \left(\frac{1}{|B(0,R)|} \int_{B(0,R)} |v(x)|^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \leq 2. \tag{3.57}$$

Z nerovností (3.55), (3.56) a (3.57) plyne

$$\frac{1}{|B(0,R)|} \int_{B(0,R)} \mathrm{e}^{K|v(x)|} \mathrm{d}x \leq 1 + 2K + \sum_{q=2}^{+\infty} \frac{K^q q^q}{q!}.$$

Položme $u_q \overset{\text{def}}{=} \frac{K^q q^q}{q!}$. Máme

$$\lim_{q \to +\infty} \frac{u_{q+1}}{u_q} = K \lim_{q \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{q}\right)^q = K\mathrm{e}.$$

Řada $\sum \frac{K^q q^q}{q!}$ je tedy konvergentní pro $K < \frac{1}{\mathrm{e}}$. Pro zvolené $K < \frac{1}{\mathrm{e}}$ tedy vezmeme $L = 1 + 2K + \sum_{q=2}^{+\infty} \frac{K^q q^q}{q!}$, a tedy pro libovolné $R > 0$ platí

$$\frac{1}{|B(0,R)|} \int_{B(0,R)} \mathrm{e}^{Kv(x)} \mathrm{d}x \le L,$$

čímž je důkaz dokončen. ∎

Tvrzení Propozice 3.63 lze vylepšit. Místo (3.54) lze dokázat přesnější odhad

$$\|v\|_{L^q} \le C_N q^{1-\frac{1}{N}} |B(0,R)|^{\frac{1}{q}} \|\nabla v\|_{L^N}.$$

Důležitá je zde znalost nejlepší konstanty $C(p,N)$ v Sobolevově větě o vnoření. Stejným postupem jako výše se odvodí následující nerovnost, dokázaná Trudingerem [?] a Moserem [?].

Tvrzení 3.64. *Mějme stejné předpoklady jako v Propozici* 3.63*. Potom existují konstanty $\sigma > 0$ a $K(N) > 0$ takové, že pro libovolné $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ splňující* $\operatorname{supp} v \subset B(0,R)$ *a $\|\nabla v\|_{L^N(B(0,R))} \le 1$ platí*

$$\int_{B(0,R)} \mathrm{e}^{\sigma |v(x)|^{\frac{N}{N-1}}} \mathrm{d}x \le K(N)|B(0,R)|.$$

Poznamenejme, že mocnina $\frac{N}{N-1}$ je optimální.

Vraťme se nyní s obecnému případu a dokončeme studium Sobolevových vět o vnoření následujícím tvrzením, které dostaneme opakovaným použitím Věty 3.51.

Věta 3.65. *Nechť Ω je otevřená omezená podmnožina $\mathbb{R}^N$ s hranicí $\partial\Omega$ třídy C^1. Nechť $1 \le p < +\infty$ a $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

(i) *Je-li $mp < N$, potom $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, kde $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N}$.*

(ii) *Je-li $mp = N$, potom $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pro libovolné $1 \le q < +\infty$.*

(iii) *Je-li $mp > N$, potom $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k,\alpha}(\Omega)$, kde*

$$C^{k,\alpha}(\Omega) \overset{\text{def}}{=} \left\{ v \in C^k(\Omega) : D^l v \in C^{0,\alpha}(\Omega) \text{ pro } |l| = k \right\},$$

$$k = \left[m - \tfrac{N}{p} \right] \text{ a } \alpha = m - \tfrac{N}{p} - k \ (0 \le \alpha < 1).$$

Poznámka 3.66. Jako příklad použití Věty 3.65 uveďme, že $H^2(\Omega)$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, je spojitě vnořen do $C(\overline{\Omega})$ pro $N < 4$, tj. $N = 1, 2, 3$.

Kapitolu zakončíme následující větou o kompaktním vnoření. Použitím Sobolevovy věty o vnoření lze vylepšit Rellichovu-Kondrachovovu větu (Věta 3.33).

Věta 3.67. *Nechť Ω je otevřená omezená podmnožina $\mathbb{R}^N$, jejíž hranice $\partial\Omega$ je třídy C^1. Pak máme následující kompaktní vnoření.*

(i) *Je-li $p < N$, potom $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$ pro každé $1 \le q < p^*$, kde $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$.*

(ii) *Je-li $p = N$, potom $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$ pro každé $1 \le q < +\infty$.*

(iii) *Je-li $p > N$, potom $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C(\overline{\Omega})$.*

Důkaz. Tvrzení ((iii)) plyne z Věty 3.51((iii)) a Ascoliho věty, protože libovolná podmnožina $W^{1,p}(\Omega)$ je omezená v $C^{0,\alpha}$, kde $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$, a tedy stejně spojitá.

Uvažujme případ ((i)). Vezměme omezenou posloupnost $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prvků prostoru $W^{1,p}(\Omega)$. Podle Sobolevovy věty o vnoření, Věty 3.51((i)), je posloupnost $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ omezená v prostoru $L^{p^*}(\Omega)$. Podle klasické Rellichovy-Kondrachovovy věty, Věty 3.33, můžeme vybrat podposloupnost $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ takovou, že $v_{n_k} \to v$ v prostoru $L^p(\Omega)$. Dokážeme, že konvergence $v_{n_k} \to v$ platí i v každém $L^q(\Omega)$, kde $1 \le q < p^*$.

Použijeme následující zobecněnou verzi Hölderovy nerovnosti. Pokud $f_1, f_2, \dots, f_k$ splňují $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $1 \le i \le k$, a

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_k} \le 1,$$

potom jejich součin $f = \prod_{i=1}^k f_i$ patří do $L^p(\Omega)$ a

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \le \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)}\|f_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} \cdots \|f_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}.$$

Speciálně, pokud $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, kde $1 \le p \le q < +\infty$, potom $f \in L^r(\Omega)$ pro všechna $p \le r \le q$ a platí následující interpolační vztah.

$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \le \|f\|^{\alpha}_{L^p(\Omega)}\|f\|^{1-\alpha}_{L^q(\Omega)}, \quad \text{kde } \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q} \ (0 \le \alpha \le 1). \tag{3.58}$$

Použili jsme Hölderovu nerovnost na $|f|^\alpha \in L^{\frac{p}{\alpha}}$ a $|f|^{1-\alpha} \in L^{\frac{q}{1-\alpha}}$ díky tomu, že

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\frac{p}{\alpha}} + \frac{1}{\frac{q}{1-\alpha}}.$$

Nyní vezmeme $p \le q < p^*$ a použijeme výše uvedený interpolační vztah (3.58) na $|v_{n_k} - v|$ pro $\frac{1}{q} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{p^*}$ a $\alpha > 0$ (protože $q < p^*$). Dostaneme

$$\begin{aligned}\|v_{n_k} - v\|_{L^q(\Omega)} &\le \|v_{n_k} - v\|^{\alpha}_{L^p(\Omega)}\|v_{n_k} - v\|^{1-\alpha}_{L^{p^*}(\Omega)}\\ &\le C\|v_{n_k} - v\|^{\alpha}_{L^p(\Omega)},\end{aligned}$$

protože posloupnost $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ je omezená v $L^{p^*}(\Omega)$. Například díky Fatouovu lemmatu navíc máme, že v patří do $L^{p^*}(\Omega)$. Protože $\alpha > 0$ a $v_{n_k} \to v$ v prostoru $L^p(\Omega)$, dostáváme, že $v_{n_k} \to v$ v $L^q(\Omega)$ pro libovolné $p \le q < p^*$, a tudíž i pro libovolné $1 \le q < p^*$ (Ω je omezená). ■

Poznámka 3.68. Jiný důkaz Věty 3.67 se opírá o použití Vitaliho věty. Lze ukázat, že pro libovolné $1 < q < p^*$ je posloupnost $(|v_{n_k}|^q)_{k\in\mathbb{N}}$ ekviintegrovatelná (přímým použitím klasické Hölderovy nerovnosti) a konverguje v míře (po přechodu k další vybrané podposloupnosti).

KAPITOLA 4

Eliptické diferenciální rovnice

4.1. Dirichletova úloha pro Poissonovu rovnici - variační přístup

Prototypem okrajové úlohy eliptické parciální diferenciální rovnice je homogenní Dirichletova úloha pro Poissonovu rovnici:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{v } \Omega\,, \\ u &= 0 && \text{na } \partial\Omega\,. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Klasickým řešením této úlohy je každá funkce $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ splňující okrajové podmínky. Jak jsme viděli v Příkladu 2.88, spojitost f na Ω nezaručuje existenci klasického řešení. Na druhou stranu řešení ve smyslu distribucí je příliš obecný pojem. Nemusí se jednat ani o funkci. Z tohoto důvodu se definuje *slabé řešení*.

Definice 4.1. Nechť $F \in H_0^1(\Omega)^*$. Řekneme, že funkce $u \in H_0^1(\Omega)$ je *slabým řešením* pokud platí

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi \, \mathrm{d}x = F(\phi) \tag{4.2}$$

pro všechna $\phi \in H_0^1(\Omega)$. Pro připomenutí: $\nabla u \cdot \nabla \phi = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$.

Věta 4.2 (Dirichletův princip)**.** *Nechť $F \in H_0^1(\Omega)^*$. Potom existuje právě jedno slabé řešení $u \in H_0^1(\Omega)$ úlohy* (4.1) *a platí odhad:*

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \le K \|F\|_{H_0^1(\Omega)^*}\,, \tag{4.3}$$

kde konstanta $K = K(N, \Omega)$ závisí jen na dimenzi N a oblasti Ω.

Navíc v tomto řešení se realizuje minimum kvadratického funkcionálu

$$J(v) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 \, \mathrm{d}x - F(v) \tag{4.4}$$

na $H_0^1(\Omega)$, to jest

$$J(u) = \min_{v \in H_0^1(\Omega)} F(v)\,.$$

Důkaz. Budeme aplikovat Větu 1.39 (Laxovo-Milgramovo Lemma). Na Hilbertově prostoru $H_0^1(\Omega)$ je skalární součin $\langle u, v \rangle_{H_0^1(\Omega)}$ dán předpisem

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla u \, v \, \mathrm{d}x$$

a norma $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{H_0^1(\Omega)}}$. Omezenost bilineární formy $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x$ je zřejmá z následující nerovnosti

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u \, \mathrm{d}x \le \int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x + \int_\Omega u^2 \, \mathrm{d}x = \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}$$

Nyní musíme dokázat $\Big(H_0^1(\Omega), \langle \cdot\,, \cdot \rangle_{H_0^1(\Omega)}\Big)$-koercivitu. Podle Věty 3.22 platí nerovnost (3.9), kterou přepíšeme pro $p = 2$:

$$\int_\Omega u^2 \, \mathrm{d}x \le c_{2,N}(\Omega) \int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x\,.$$

Tudíž

$$\|\nabla u\|^2_{H^1_0(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x + \int_\Omega u^2 \,\mathrm{d}x \le (1 + c_{2,N}(\Omega)) \int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x\,,$$

a tedy

$$\frac{1}{1 + c_{2,N}(\Omega)} \|\nabla u\|^2_{H^1_0(\Omega)} \le \int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x\,.$$

Tím je dokázána $\Big(H^1_0(\Omega), \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_{H^1_0(\Omega)}\Big)$-koercivita. Podle Věty 1.39 existuje právě jedno $u \in H^1_0(\Omega)$ splňující (4.9), to jest

$$\forall \phi \in H^1_0(\Omega)\colon \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi \,\mathrm{d}x = F(\phi)\,.$$

Pro toto řešení navíc platí odhad (1.20), což v našem případě po dosazení je

$$\|u\|_{H^1_0(\Omega)} \le (1 + c_{2,N}(\Omega))\,\|F\|_{H^1_0(\Omega)^*}$$

Protože konstanta $c_{2,N}(\Omega)$ $(p = 2)$ z Věty 3.22 závisí jen na dimenzi prostoru N a oblasti Ω, je dokázán odhad (4.3).

Z Věty 1.39 též plyne, že toto řešení navíc minimalizuje (4.4). ■

Propozice 4.3 (Charakterizace prvků duálu k $H^1(\Omega)$ a $H^1_0(\Omega)$)**.** *Nechť $F \in H^1(\Omega)^*$ resp. $H^1_0(\Omega)^*$ je spojitý lineární funkcionál na $H^1(\Omega)$ resp. $H^1_0(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Potom existují funkce $f_0, f_1, f_2, \dots f_N \in L^2(\Omega)$ takové, že*

$$\forall \phi \in H^1(\Omega) \text{ resp. } H^1_0(\Omega))\colon F(\phi) = \int_\Omega f_0\,\phi \,\mathrm{d}x + \int_\Omega f_i \,\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \,\mathrm{d}x \tag{4.5}$$

a zároveň platí rovnost

$$\|F\|_{H^1(\Omega)^*} = \left(\sum_{0\le i\le N} \|f_i\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac12} \text{ resp. } \|F\|_{H^1_0(\Omega)^*} = \left(\sum_{0\le i\le N} \|f_i\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac12}\,. \tag{4.6}$$

Naopak, jsou-li dány funkce $f_0, f_1, f_2, \dots f_N \in L^2(\Omega)$, je $F : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ resp. $F : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definovaný identitou (4.8) *lineární funkcionál, jehož norma splňuje nerovnost*

$$\|F\|_{H^1(\Omega)^*} \le \left(\sum_{0\le i\le N} \|f_i\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac12} \text{ resp. } \|F\|_{H^1_0(\Omega)^*} \le \left(\sum_{0\le i\le N} \|f_i\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac12}.. \tag{4.7}$$

Důkaz. Na Hilbertově prostoru $H^1(\Omega)$ je skalární součin $\langle u, v\rangle_{H^1(\Omega)}$ dán předpisem

$$\langle u, v\rangle_{H^1_0(\Omega)} = \int_\Omega u\,v \,\mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x\,.$$

Je-li dán funkcionál $F \in H^1(\Omega)^*$, pak podle Rieszovy věty o reprezentaci 1.36 spojitého lineárního funkcionálu na Hilbertově prostoru existuje $u \in H^1(\Omega)$ tak, že platí

$$\forall \phi \in H^1(\Omega)\colon F(\phi) = \int_\Omega u\,\phi \,\mathrm{d}x + \int_\Omega \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}\,\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \,\mathrm{d}x\,. \tag{4.8}$$

Protože $u \in H^1(\Omega)$, můžeme položit $f_0 = u \in L^2(\Omega)$ a $f_i = \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$. Rovnost (4.6) plyne přímo z Rieszovy věty, rovnice (1.8).

Nechť nyní opačně jsou dány funkce $f_0, f_1, f_2, \dots f_N \in L^2(\Omega)$. Linearita plyne z linearity integrálu. Zbývá dokázat spojitost na $H^1(\Omega)$. Podle Cauchyovy-Schwartzovy nerovnosti (1.4) na Hilbertově prostoru $L^2(\Omega)$ dostaneme

$$|F(\phi)| = \left| \int_\Omega f_0\, \phi \,\mathrm{d}x + \int_\Omega \sum_{i=1}^N f_i \,\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x \right| \le \|f_0\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \|f_i\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} .$$

Opětovným užitím Cauchyovy-Schwartzovy nerovnosti (1.4) na Hilbertově prostoru $\mathbb{R}^{N+1}$ ($|\sum_{i=0}^N a_i b_i| \le \left(\sum_{i=0}^N a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=0}^N b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$), dostaneme

$$|F(\phi)| \le \left(\sum_{i=0}^N \|f_i\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\|\phi\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=0}^N \|f_i\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \|\phi\|_{H^1(\Omega)} .$$

Tím je dokázána omezenost a tedy i spojitost. Zároveň odtud plyne i odhad (4.7).

Stejně bychom provedli důkaz pro $H^1_0(\Omega)$.

■

Poznámka 4.4. Poznamenejme, že při konstrukci funkcionálu F z funkcí $f_0, f_1, f_2, \dots f_N \in L^2(\Omega)$ nemůžeme obecně dostat rovnost v nerovnosti (4.7). Vytvoříme-li totiž F, může se stát, že prvek $u \in H^1(\Omega)$, který tento funkcionál reprezentuje (podle Rieszovy Věty o reprezentaci 1.36) nesplňuje rovnost $u = f_0$ a $\frac{\partial u}{\partial x_i} = f_i$, $i = 1, \dots, N$. Ne každá N-tice funkcí $f_1, f_2, \dots f_N \in L^2(\Omega)$ je totiž gradientem (ve slabém smyslu) funkce $f_0 \in L^2(\Omega)$! Rovnost nastane jen v tom případě, pokud platí $u = f_0$ a $\frac{\partial u}{\partial x_i} = f_i$, $i = 1, \dots, N$.

Poznámka 4.5. Ve světle předchozí věty se někdy slabé řešení definuje ekvivalentně takto. Nechť $f_0, f_1, \dots f_N \in L^2(\Omega)$. Řekneme, že funkce $u \in H^1_0(\Omega)$ je *slabým řešením* pokud platí

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f_0\, \phi \,\mathrm{d}x + \int_\Omega \sum_{i=1}^N f_i \,\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x \tag{4.9}$$

pro všechna $\phi \in H^1_0(\Omega)$.

V matematické fyzice se často vyskytuje Poissonova rovnice s nehomogenní okrajovou Dirichletovou podmínkou. V její klasické podobě, jsou dány funkce $f \in C(\Omega)$ a $v \in C(\partial\Omega)$. *Klasickým řešením* úlohy

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \qquad && \text{v } \Omega\,, \\ u &= w && \text{na } \partial\Omega\,. \end{aligned} \tag{4.10}$$

je každá funkce $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ splňující rovnici i okrajové podmínky v každém bodě. Tato úloha byla pro $f = 0$ studována od konce osmnáctého století. Byla to právě tato úloha, která podnítila rozvoj jak variačního počtu tak teorie potenciálu.

Věta 4.6 ([**2**], Věta 9.25)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ je omezená oblast s hranicí třídy C^2. Nechť $f \in L^2(\Omega)$ a $u \in H_0^1(\Omega)$ je slabé řešení úlohy 4.1. Potom $u \in H^2(\Omega)$ a $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2}$, kde C závisí pouze na Ω.*

Navíc, je-li Ω omezená oblast s hranicí třídy C^m a $f \in H^m(\Omega)$, potom $u \in H^{m+2}(\Omega)$ a $\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C\|f\|_{H^m(\Omega)}$, kde C závisí pouze na Ω.

Speciálně pro $m > N/2$, Ω omezenou oblast s hranicí třídy m a $f \in H^m(\Omega)$, dostaneme $u \in C^2(\overline{\Omega})$, $\|u\|_{C^2(\overline{\Omega})} \leq C\|f\|_{H^m(\Omega)}$. Konečně pro Ω omezenou oblast s hranicí třídy C^∞ a $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$ dostaneme $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

4.2. Princip maxima

Princip maxima pro klasická řešení se používá k jednoduchým avšak často velmi užitečným bodovým odhadům řešení.

Věta 4.7 ([**6**], Věta 3.7, str. 36)**.** *Nechť $L u \geq f$ v omezené oblasti Ω, L je unifomně eliptický operátor, $c \leq 0$ a $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. Potom*

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + C \sup_{\Omega} \frac{f^-}{\lambda}\,. \tag{4.11}$$

Pokud navíc $L u = f$ na dané oblasti potom

$$\sup_{\Omega} |u| \leq \sup_{\partial\Omega} |u| + C \sup_{\Omega} \frac{|f|}{\lambda}\,, \tag{4.12}$$

kde konstanta C závisí jen na $\operatorname{diam}\Omega$ *a*

$$\beta \stackrel{\text{def}}{=} \max_{i=1,\dots,N} \sup_{x\in\Omega} \frac{b_i(x)}{\lambda}\,.$$

Ve speciálním případě, kdy Ω leží mezi dvěma nadrovinami mezi nimiž je vzdálennost d, pak $C = \mathrm{e}^{(\beta+1)d} - 1$.

Důkaz. Nechť $d > 0$ je takové, že $\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^N : 0 < x_1 < d\}$. Položme

$$L_0\, u \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\,.$$

Pro $\alpha \geq \beta + 1$ platí

$$L_0\, \mathrm{e}^{\alpha x_1} = (\alpha^2 a_{11} + \alpha b_1)\mathrm{e}^{\alpha x_1} \geq \lambda \left(\alpha^2 - \alpha\beta\right) \mathrm{e}^{\alpha x_1} \geq \lambda\,.$$

Nechť

$$v \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\partial\Omega} u^+ + \left(\mathrm{e}^{\alpha d} - \mathrm{e}^{\alpha x_1} \sup_{\Omega} \frac{f^-}{\lambda}\right)\,.$$

Vezmeme-li v úvahu

$$L\, v = L_0\, v + cv \leq -\lambda \sup_{\partial\Omega} \frac{f^-}{\lambda}\,,$$

dostaneme

$$L(v-u) \le -\lambda \left(\sup_\Omega \frac{f^-}{\lambda} + \frac{f}{\lambda} \right) \quad \forall x \in \Omega$$

a $v - u \ge 0$ na $\partial\Omega$. Odtud pro $C = \mathrm{e}^{\alpha d} - 1$ a $\alpha \ge \beta + 1$ dostaneme nerovnost (4.11):

$$\sup_\Omega u \le \sup_\Omega u \le \sup_{\partial\Omega} u^+ + C \sup_\Omega \frac{f^+}{\lambda}\,.$$

Nerovnost (4.12) dostaneme z (4.11) záměnou u za $-u$.

■

4.3. Schauderova teorie

Schauderova teorie se týká diferenciálních operátorů typu

$$Lu \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^N b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + c(x)u(x)\,, \tag{4.13}$$

kde funkce a_{ij}, b_i a $c \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, $i,j = 1,\dots,N$, a funkce a_{ij} splňují podmínky uniformní eliptičnosti:

$$\exists \lambda > 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N: \quad \sum_{i,j=1}^N a_{ij}\, \xi_i\, \xi_j \ge \lambda |\xi|^2_{\mathbb{R}^N} \tag{4.14}$$

a symetrie

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \quad \forall x \in \overline{\Omega}\,. \tag{4.15}$$

Tato teorie se týká existence klasických řešení. Je založena na teorii potenciálu, kterou v jistém smyslu zobecňuje. Objev Schauderovy teorie Juliuszem Schauderem [**15**] v roce 1930 znamenal průlom nejen v teorii eliptických parciálních diferenciálních rovnic, ale přinesl rovněž stěžejní výsledky ve funkcionální analýze. Slavný Lerrayův-Schauderův stupeň zobrazení, dnes nepostradatelný nástroj nelineární analýzy, byl původně vytvořen za účelem studia i rovnic lineárních. Tento fakt je dnes v záplavě nelineárních článků již velice málo znám.

Věta 4.8 (Hlavní Schauderův odhad, Gilbarg-Trudinger [**6**], Věta 6.6)**.** *Nechť $0 < \alpha < 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je oblast s hranicí třídy $C^{2,\alpha}$ a nechť $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ je klasické řešení úlohy*

$$Lu = f \quad v\,\Omega\,, \tag{4.16}$$

$$u = \varphi \quad na\ \partial\Omega\,, \tag{4.17}$$

kde $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$, $\varphi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, koeficienty operátoru L splňují podmínku uniformní elipticity (4.14) *a existuje $\Lambda > 0$ takové, že*

$$\forall i,j = 1,\dots,N: \|a_{ij}\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})},\ \|b_i\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})},\ \|c\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \le \Lambda. \tag{4.18}$$

Potom

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \le C \left(\|u\|_{C^0(\overline{\Omega})} + \|\varphi\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} + \|f\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \right)\,, \tag{4.19}$$

kde $C > 0$ závisí jen na $N, \alpha, \lambda, \Lambda$ a Ω a nikoliv na u.

Poznámka 4.9. Aby nedošlo k mylné interpretaci předchozí věty, zdůrazněme, že věta předpokládá, že pokud *máme* klasické řešení $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ úlohy (4.16), o kterém *už víme*, že $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, pak je jeho norma odhadnuta nerovností (4.19). Věta neříká, že každé klasické řešení $u \in C(\Omega) \cap C^2(\Omega)$, úlohy (4.16) má normu $\|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})}$ odhadnutou nerovností (4.19) a tudíž je již z $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Poznámka 4.10. Všimněte si, že na pravé straně nerovnice (4.19) vystupuje též norma $\|u\|_{C^0(\overline{\Omega})}$ a proto Věta 4.8 zahrnuje i případ, kdy L má netriviální jádro. Například Dirichletova úloha na omezené oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ s hranicí třídy $C^{2,\alpha}$

$$\begin{aligned} \Delta u + \lambda_1 u &= 0 \quad \text{v}\ \Omega\,, \\ u &= 0 \quad \text{na}\ \partial\Omega\,, \end{aligned}$$

kde λ_1 je první vlastní číslo, má nekonečně mnoho řešení. Tyto řešení lze psát ve tvaru $u = t\,\varphi_1$, kde $t \in \mathbb{R}$ a φ_1 je první vlastní funkce operátoru Δ s homogenní Dirichletovou podmínkou na $\partial\Omega$.

Poznámka 4.11. Konstanta C závisí na oblasti Ω v tom smyslu, že C závisí na konstantě K, která omezuje $C^{2,\alpha}$ normy zobrazení ψ, která lokálně reprezentují hranici $\partial\Omega$.

Věta 4.12 (Existence klasického řešení Dirichletovy úlohy, Gilbarg-Trudinger [**6**], Věta 6.8, str. 100)**.** *Nechť $0 < \alpha < 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je oblast s hranicí třídy $C^{2,\alpha}$. Nechť L splňuje stejné předpoklady jako ve Větě 4.8 a nechť navíc $c(x) \le 0$ všude v $\overline{\Omega}$. Za těchto předpokladů platí následující implikace. Má-li Dirichletova úloha pro Poissonovu rovnici*

$$\begin{aligned} \Delta u &= f \quad v\ \Omega \\ u &= g \quad na\ \partial\Omega \end{aligned}$$

řešení v prostoru $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ pro každé $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ a každé $g \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, potom má i úloha

$$Lu = f \quad na\ \Omega\,, \tag{4.20}$$

$$u = g \quad v\ \partial\Omega \tag{4.21}$$

jednoznačné řešení v prostoru $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ pro každé $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ a každé $g \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Věta 4.12 se dokazuje pomocí odhadu (4.19) z Věty 4.8 a následující věty.

Věta 4.13 (Kontinuace vzhledem k parametru, Gilbarg-Trudinger [**6**], Věta 5.2, str. 75)**.** *Nechť $\mathscr{B}$ je Banachův prostor, $\mathscr{V}$ normovaný lineární prostor a $L_0, L_1 : \mathscr{B} \to \mathscr{V}$ jsou omezené lineární operátory. Pro každé $t \in [0,1]$ položme*

$$L_t \stackrel{\text{def}}{=} (1-t)\,L_0 + t\,L_1$$

a předpokládejme, že existuje konstanta $C > 0$ taková, že

$$\|u\|_{\mathscr{B}} \le C\|\,L_t\,u\|_{\mathscr{V}} \tag{4.22}$$

pro všechna $t \in [0,1]$. Potom L_1 zobrazuje $\mathscr{B}$ na $\mathscr{V}$ tehdy a jen tehdy, pokud L_0 zobrazuje $\mathscr{B}$ na $\mathscr{V}$.

Důkaz. Předpokládejme, že L_s zobrazuje $\mathscr{B}$ *na* $\mathscr{V}$ pro nějaké $s \in [0,1]$. Z podmínky (4.22) plyne, že L_s je prosté. Tudíž inverzní zobrazení L_s^{-1} existuje. Pro $t \in [0,1]$ a $y \in \mathscr{V}$ je rovnice $L_t\, u = y$ ekvivalentní s rovnicí

$$L_s\, u = y + (L_s - L_t)\, u =$$

$$= y + (t-s)\, L_0\, u - (t-s)\, L_1\, u\,,$$

což lze přepsat jako

$$x = L_s^{-1}\, y + (t-s)\, L^{-1}\, (L_0 - L^1)\, u\,.$$

Snadno ukážeme, že zobrazení

$$K_{s,t} : \mathscr{B} \to \mathscr{B}, \quad K_{s,t}\, u \overset{\text{def}}{=} L_s^{-1}\, y + (t-s)\, L^{-1}\, (L_0 - L^1)\, u$$

je kontraktivní pro $s, t \in [0,1]$ dostatečně blízko sebe. Vskutku pro $u, v \in \mathscr{B}$ dostaneme

$$\|K_{s,t}\, u - K_{s,t}\, v\|_{\mathscr{B}} \le |t-s|\, \left\|L_s^{-1}\, (L_0 - L^1)(u-v)\right\|_{\mathscr{B}} \le$$

$$|t-s| C \left(\|L_0\|_{\mathscr{L}(\mathscr{B},\mathscr{V})} + \|L_1\|_{\mathscr{L}(\mathscr{B},\mathscr{V})}\right) \|u-v\|_{\mathscr{B}}\,,$$

kde C je z nerovnosti (4.22). Pro každé $s, t \in [0,1]$ takové, že

$$|t-s| < \delta \overset{\text{def}}{=} C \left(\|L_0\|_{\mathscr{L}(\mathscr{B},\mathscr{V})} + \|L_1\|_{\mathscr{L}(\mathscr{B},\mathscr{V})}\right)\,,$$

je $K_{s,t}$ kontraktivní. Tudíž rovnice $x = K_{s,t}\, x$ má právě jedno řešení podle Věty 1.12. Toto řešení je ovšem řešením i původní rovnice $L_t\, u = y$. Zobrazení L_t zobrazuje tedy $\mathscr{B}$ na celý prostor $\mathscr{V}$ pro všechna $t \in [0,1] : |s-t| < \delta$.

Nyní rozdělíme interval $[0,1]$ na systém intervalů:

$$[0,1] = \bigcup_{i=0}^{M-1} \left[\frac{i}{M}, \frac{i+1}{M}\right]\,,$$

kde $M < 1/\delta$. Jistě platí, že $s \in [\frac{i_0}{M}, \frac{i_0+1}{M}]$ pro nějaké $i_0 \in \{1, \dots M_0\}$. Pak, ale L_t zobrazuje $\mathscr{B}$ na celý prostor $\mathscr{V}$ pro všechna $t \in [\frac{i_0}{M}, \frac{i_0+1}{M}]$. Dále použijeme jako startovní hodnoty krajní body tohoto intervalu $\frac{i_0}{M}$ a $\frac{i_0+1}{M}$ a výsledek rozšíříme na $[\frac{i_0-1}{M}, \frac{i_0}{M}]$ a $[\frac{i_0+1}{M}, \frac{i_0+2}{M}]$. Toto opakujeme tak dlouho, až pokryjeme celý interval $[0,1]$ (opakujeme nejvýše M krát). Tím dostaneme, že L_t zobrazuje $\mathscr{B}$ na celý prostor $\mathscr{V}$ pro všechna $t \in \bigcup_{i=0}^{M-1} [\frac{i}{M}, \frac{i+1}{M}] = [0,1]$. ■

Jako startovní bod nám slouží Kellogova věta.

Věta 4.14 (König [**7**], Věta 2, str. 32)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \ge 2$, je omezená oblast s hranicí $\partial\Omega$ třídy $C^{2,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. Potom pro každé $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ a $g \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ existuje právě jedno řešení $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ Dirichletovy okrajové úlohy*

$$\Delta u = f \quad \text{na } \Omega\,, \tag{4.23}$$

$$u = g \quad v\, \partial\Omega\,. \tag{4.24}$$

Důkaz Kellogovy věty je velice složitý. Výsledek nevyplývá jen čistě z teorie potenciálu a v důkaze je třeba kombinovat více přístupů. Z tohoto důvodu dokážeme větu ve speciálním tvaru, kdy je důkaz poměrně snadný. Důkaz plnohodnotného výsledku lze najít např. v knize Gilbarg-Trudinger [**6**]. Zajímavé je, že v našem přístupu použijeme metodu kontinuace již k důkazu oslabené Kelloggovy věty.

Důkaz. Budeme navíc předpokládat, že hranice oblasti je třídy C^{k+2}, kde $k \overset{\text{def}}{=} N/2+1$ pro N sudé a $k = \lceil N/2 \rceil$ pro N liché.

Bez ztráty na obecnosti lze předpokládat, že $g \equiv 0$, neboť můžeme rovnici (4.23) uvažovat s $w \overset{\text{def}}{=} u - g$. Rozšiřme funkci $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ α-Hölderovsky na celé $\mathbb{R}^N$ (podle Věty 1.174). Uvažujme jednoparametrický systém

$$f_t \overset{\text{def}}{=} f * \omega_t \quad \text{pro } t \in [0,1]\,.$$

Podle Věty 1.177 platí, že $f_t \in C^\infty(\overline{\Omega})$ pro $t \in (0,1]$ a $f_t \rightrightarrows f$ stejnoměrně na $\overline{\Omega}$. Dokonce podle Věty 1.177 pro všechna $t \in [0,1]$ platí

$$\|f_t\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} \le 2\|f\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})}\,.$$

Aplikací Věty 4.6 (L^2 teorie) na jednoparametrický systém úloh

$$\Delta u = f_t \quad \text{v } \Omega\,, \tag{4.25}$$

$$u = 0 \quad \text{na } \partial\Omega\,, \tag{4.26}$$

zjistíme, že tento problém má právě jedno řešení $u_t \in H^{k+2,2}(\Omega) \hookrightarrow C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Nyní, víme-li, že $u_t \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, můžeme použít Schauderova odhadu (4.19) a dostaneme

$$\|u_t\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \le C\left(\|u_t\|_{C^0(\overline{\Omega})} + \|f_t\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}\right) \le C\left(\|u_t\|_{C^0(\overline{\Omega})} + 2\|f\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}\right)\,,$$

kde $C > 0$ závisí jen na N, α a Ω a nikoliv na u_t. Z principu maxima, Věta 4.7, dále plyne, že

$$\|u_t\|_{C^0(\overline{\Omega})} \le C_{4.12}\|f_t\|_{C(\overline{\Omega})} \le C_{4.12}\|f_t\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \le 2C_{4.12}\|f\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}\,,$$

kde $C_{4.12}$ je konstanta z nerovnosti (4.12) závisející pouze na Ω a N. Odtud

$$\|u_t\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \le 2(C_{4.12} + C)\|f\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}\,.$$

Tento odhad je platný pro všechna $t \in [0,1]$.[1] Zvolme nějaké $t_0 \in [0,1]$. Pro toto t_0 má úloha (4.25)-(4.26) řešení $u_{t_0} \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Díky předešlému odhadu řešení pro $t = 0$ dostaneme kontinuací podle Věty 4.13.

■

Věta 4.15 (Existence klasického řešení Dirichletovy úlohy, Gilbarg-Trudinger [**6**], Věta 6.14, str. 107)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast, L je striktně eliptický lineární operátor typu* (4.13) *na Ω, $c \le 0$ na $\overline{\Omega}$, $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ a všechny koeficienty v L jsou z*

[1] Pro $t \in (0,1]$ tento odhad omezuje řešení o jejichž existenci již víme z L^2-teorie, pro $t = 0$ se jedná o *apriorní* odhad, tj. odhad typu pokud $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ řešení existuje, pak již musí být tímto odhadem omezené.

$C^\alpha(\overline{\Omega})$ *pro nějaké* $0 < \alpha < 1$. *Nechť dále* $\partial\Omega$ *je třídy* $C^{2,\alpha}$ *a funkce* $g \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. *Potom Dirichletova úloha*

$$Lu = f \quad \text{na } \Omega\,, \tag{4.27}$$

$$u = g \quad \text{v } \partial\Omega \tag{4.28}$$

má právě jedno řešení v prostoru $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$

Věta 4.16 (Fredholmova alternativa pro klasické řešení, Gilbarg-Trudinger [**6**], Věta 6.15, str. 107–108)**.** *Nechť* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *je omezená oblast,* L *je striktně eliptický lineární operátor typu* (4.13) *na* Ω *(*c *může nabývat i kladných hodnot) a všechny koeficienty v* L *jsou z* $C^\alpha(\overline{\Omega})$ *pro nějaké* $0 < \alpha < 1$. *Nechť dále* $\partial\Omega$ *je třídy* $C^{2,\alpha}$. *Potom nastává právě jedna z následujících možností.*

(1) Homogenní Dirichletova úloha

$$\begin{aligned} Lu &= 0 \quad \text{na } \Omega\,, \\ u &= 0 \quad \text{v } \partial\Omega \end{aligned}$$

má pouze nulové řešení. V tomto případě má Dirichletova úloha

$$\begin{aligned} Lu &= f \quad \text{na } \Omega\,, \\ u &= g \quad \text{v } \partial\Omega \end{aligned}$$

právě jedno řešení v prostoru $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ *pro libovoulnou* $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ *a* $g \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

(2) V opačném případě množina všech řešení homogenní Dirichletovy úlohy

$$\begin{aligned} Lu &= 0 \quad \text{na } \Omega\,, \\ u &= 0 \quad \text{v } \partial\Omega \end{aligned}$$

tvoří konečně dimenzionální podprostor $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

KAPITOLA 5

Hillova-Yosidova věta

5.1. Definice a základní vlastnosti maximálních monotónních operátorů

V celé kapitole bude H značit Hilbertův prostor.

Definice 5.1. *Neomezený lineární operátor* $A\colon D(A) \subset H \to H$ *nazýváme* monotónní, *jestliže splňuje*

$$(Av, v) \geq 0 \quad \forall v \in D(A).$$

Řekneme, že je maximální monotónní, *jestliže navíc platí* $R(I + A) = H$, *tj.*

$$\forall f \in H \; \exists u \in D(A) \text{ takové, že } u + Au = f.$$

Tvrzení 5.2. *Nechť* A *je maximální monotónní operátor. Potom*

(a) $D(A)$ *je hustá podmnožina* H,
(b) A *je uzavřený operátor,*
(c) *pro každé* $\lambda > 0$ *je* $(I + \lambda A)$ *bijekce* $D(A)$ *na* H, $(I + \lambda A)^{-1}$ *je omezený operátor a* $\|(I + \lambda A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$.

Důkaz.

(a) Nechť pro $f \in H$ platí $(f, v) = 0$ pro každé $v \in D(A)$. Tvrdíme, že pak $f = 0$. Existuje $v_0 \in D(A)$ takové, že $v_0 + Av_0 = f$. Máme

$$0 = (f, v_0) = \|v_0\|^2 + (Av_0, v_0) \geq \|v_0\|^2.$$

Tudíž $v_0 = 0$, a tedy $f = 0$.

(b) Zvolíme-li nějaké $f \in H$, existuje právě jedno $u \in D(A)$ takové, že $u + Au = f$. Kdyby totiž bylo $\bar{u}$ také řešení, platilo by

$$u - \bar{u} + A(u - \bar{u}) = 0.$$

Vezmeme-li skalární součin s $(u - \bar{u})$ a využijeme monotonii, dostaneme $u - \bar{u} = 0$. Dále platí $\|u\| \leq \|f\|$, protože $\|u\|^2 + (Au, u) = (f, u) \geq \|u\|^2$. Tudíž zobrazení $f \mapsto u$, které značíme $(I + A)^{-1}$, je omezený lineární operátor zobrazující H do sebe a $\|(I + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$. Nyní dokážeme, že A je uzavřený operátor. Nechť (u_n) je posloupnost v $D(A)$ taková, že $u_n \to u$ a $Au_n \to f$. Musíme ověřit, že $u \in D(A)$ a $Au = f$. Ale $u_n + Au_n \to u + f$, a tedy

$$u_n = (I + A)^{-1}(u_n + Au_n) \to (I + A)^{-1}(u + f).$$

Odtud máme $u = (I + A)^{-1}(u + f)$, tj. $u \in D(A)$ a $u + Au = u + f$.

(c) Dokážeme, že pokud $R(I + \lambda_0 A) = H$ pro nějaké $\lambda_0 > 0$, pak $R(I + \lambda A) = H$ pro každé $\lambda > \lambda_0/2$. Stejně jako v důkazu tvrzení ((b)) platí, že pro každé $f \in H$ existuje právě jedno $u \in D(A)$ takové, že $u + \lambda_0 Au = f$. Navíc je zobrazení $f \mapsto u$, které značíme $(I + \lambda_0 A)^{-1}$, omezený lineární operátor s normou $\|(I + \lambda_0 A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$. Chceme vyřešit rovnici

$$u + \lambda Au = f, \quad \text{kde } \lambda > 0. \tag{5.1}$$

Tato rovnice může být ekvivalentně zapsána ve tvaru

$$u + \lambda_0 Au = \frac{\lambda_0}{\lambda} f + \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right) u,$$

nebo též

$$u = (I + \lambda_0 A)^{-1}\left[\frac{\lambda_0}{\lambda} f + \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right) u\right]. \tag{5.2}$$

Je-li $\left|1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right| < 1$, tj. $\lambda > \lambda_0/2$, můžeme použít princip kontraktivního zobrazení [**2**, Theorem 5.7] k důkazu existence řešení rovnice (5.2).

Tvrzení ((c)) dokážeme snadno indukcí: protože $I + A$ je surjektivní, $I + \lambda A$ je surjektivní pro každé $\lambda > 1/2$, tudíž i pro každé $\lambda > 1/4$ atd. ■

Poznámka 5.3. Pokud A je maximální monotónní, potom také λA je maximální monotónní pro každé $\lambda > 0$. Nicméně jsou-li A a B maximální monotónní operátory, potom jejich součet $A + B$, definovaný na $D(A) \cap D(B)$, nemusí být maximální monotónní.

Definice 5.4. *Nechť A je maximální monotónní operátor. Pro libovolné $\lambda > 0$ značíme*

$$J_\lambda \overset{\text{def}}{=} (I + \lambda A)^{-1} \quad a \quad A_\lambda \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda),$$

kde J_λ nazýváme rezolventa *operátoru A a A_λ* Yosidova aproximace *(či* regularizace*) operátoru A. Připomínáme, že $\|J_\lambda\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$.*

Tvrzení 5.5. *Nechť A je maximální monotónní operátor. Potom*

(a) $A_\lambda v = A(J_\lambda v) \quad \forall v \in H$ *a* $\forall \lambda > 0$,
(b) $A_\lambda v = J_\lambda(Av) \quad \forall v \in D(A)$ *a* $\forall \lambda > 0$,
(c) $\|A_\lambda v\| \leq \|Av\| \quad \forall v \in D(A)$ *a* $\forall \lambda > 0$,
(d) $\lim_{\lambda \to 0} J_\lambda v = v \quad \forall v \in H$,
(e) $\lim_{\lambda \to 0} A_\lambda v = Av \quad \forall v \in D(A)$,
(f) $(A_\lambda v, v) \geq 0 \quad \forall v \in H$ *a* $\forall \lambda > 0$,
(g) $\|A_\lambda v\| \leq (1/\lambda)\|v\| \quad \forall v \in H$ *a* $\forall \lambda > 0$.

Důkaz.

(a) Rovnost lze přepsat jako $v = J_\lambda v + \lambda A(J_\lambda v)$, což je přímo definice $J_\lambda v$.
(b) Podle ((a)) máme

$$A_\lambda v + A(v - J_\lambda v) = Av,$$

tj.

$$A_\lambda v + \lambda A(A_\lambda v) = Av,$$

což znamená, že $A_\lambda v = (I + \lambda A)^{-1} Av$.
(c) plyne snadno z ((b)).
(d) Předpokládejme napřed, že $v \in D(A)$. Potom

$$\|v - J_\lambda v\| = \lambda \|A_\lambda v\| \leq \lambda \|Av\|$$

podle ((c)), a tudíž $\lim_{\lambda \to 0} J_\lambda v = v$.

Nyní vezmeme libovolný prvek v prostoru H. Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $v_1 \in D(A)$ takové, že $\|v - v_1\| \leq \varepsilon$, protože $D(A)$ je hustá podmnožina H podle Propozice 5.2. Máme

$$\begin{aligned}\|J_\lambda v - v\| &\leq \|J_\lambda v - J_\lambda v_1\| + \|J_\lambda v_1 - v_1\| + \|v_1 - v\| \\ &\leq 2\|v - v_1\| + \|J_\lambda v_1 - v_1\| \leq 2\varepsilon + \|J_\lambda v_1 - v_1\|.\end{aligned}$$

Tudíž

$$\limsup_{\lambda \to 0} \|J_\lambda v - v\| \leq 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0,$$

takže

$$\lim_{\lambda \to 0} \|J_\lambda v - v\| = 0.$$

(e) je důsledek ((b)) a ((d)).

(f) Máme

$$\begin{aligned}(A_\lambda v, v) &= (A_\lambda v, v - J_\lambda v) + (A_\lambda v, J_\lambda v) \\ &= \lambda \|A_\lambda v\|^2 + (A(J_\lambda v), J_\lambda v),\end{aligned}$$

a tedy

$$(A_\lambda v, v) \geq \lambda \|A_\lambda v\|^2. \tag{5.3}$$

(g) je důsledek (5.3) a Cauchyho-Schwarzovy nerovnosti. ■

Poznámka 5.6. Z Propozice 5.5 plyne, že $(A_\lambda)_{\lambda > 0}$ je třída *omezených* operátorů, které „aproximují“ *neomezený* operátor A pro $\lambda \to 0$. Tato aproximace bude často používána. Je pochopitelné, že norma $\|A_\lambda\|_{\mathcal{L}(H)}$ bude obecně neomezená pro $\lambda \to 0$.

5.2. Řešení evoluční úlohy $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + Au = 0$ na $[0, +\infty)$, $u(0) = u_0$. Existence a jednoznačnost

Výklad zahájíme následujícím klasickým výsledkem:

Věta 5.7 (Cauchy, Lipschitz, Picard). *Nechť E je Banachův prostor a $F\colon E \to E$ je lipschitzovské zobrazení, tj. existuje konstanta L taková, že*

$$\|Fu - Fv\| \le L\|u - v\| \quad \forall u, v \in E.$$

Potom pro každé $u_0 \in E$ existuje právě jedno řešení $u \in C^1([0, +\infty), E)$ úlohy

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) = Fu(t) \quad \text{na } [0, +\infty), \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{5.4}$$

Prvku u_0 říkáme počáteční data.

Důkaz.
Existence. Vyřešit úlohu (5.4) znamená nalézt $u \in C([0, +\infty), E)$ splňující integrální rovnici

$$u(t) = u_0 + \int_0^t F(u(s))\mathrm{d}s. \tag{5.5}$$

Mějme $k > 0$, které určíme později. Označme

$$X \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ u \in C([0, +\infty), E) : \sup_{t \ge 0} \mathrm{e}^{-kt}\|u(t)\| < \infty \right\}.$$

Snadno lze ověřit, že X je Banachův prostor s normou

$$\|u\|_X \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{t \ge 0} \mathrm{e}^{-kt}\|u(t)\|.$$

Pro každé $u \in X$ platí, že funkce Φu definovaná

$$(\Phi u)(t) = u_0 + \int_0^t F(u(s))\mathrm{d}s$$

patří také do X. Navíc máme

$$\|\Phi u - \Phi v\|_X \le \frac{L}{k}\|u - v\|_X \quad \forall u, v \in X.$$

Zvolíme-li $k > L$, pak má Φ (právě jeden) pevný bod u v X, který je řešením (5.5).
Jednoznačnost. Nechť u a $\bar{u}$ jsou řešení úlohy (5.4). Označme

$$\varphi(t) \stackrel{\text{def}}{=} \|u(t) - \bar{u}(t)\|.$$

Z rovnice (5.5) plyne, že

$$\varphi(t) \le L \int_0^t \varphi(s)\mathrm{d}s \quad \forall t \ge 0,$$

a tudíž $\varphi \equiv 0$. ∎

Předchozí věta je velmi užitečná pro studium *obyčejných diferenciálních rovnic*. Nicméně je málo užitečná pro studium *parciálních diferenciálních rovnic*. Zato následující věta je mocným nástrojem pro řešení *evolučních parciálních diferenciálních rovnic*, viz Kapitola 6.

Věta 5.8 (Hille-Yosida)**.** *Nechť A je maximální monotónní operátor a nechť $u_0 \in D(A)$. Potom existuje právě jedna funkce*

$$u \in C^1([0,+\infty), H) \cap C([0,+\infty), D(A))$$

(kde topologie na prostoru $D(A)$ je indukována grafovou normou $\|v\| + \|Av\|$, nebo ekvivalentní Hilbertovou normou $(\|v\|^2 + \|Av\|^2)^{1/2}$), splňující

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) + Au = 0 \quad \text{na } [0,+\infty), \\ \qquad\qquad u(0) = u_0. \end{cases} \tag{5.6}$$

Navíc platí

$$\|u(t)\| \le \|u_0\| \quad a \quad \left\|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t)\right\| = \|Au(t)\| \le \|Au_0\| \quad \forall t \ge 0.$$

Poznámka 5.9. Význam Věty 5.8 spočívá v tom, že převádí „evoluční úlohu“ na „stacionární rovnici“ $u + Au = f$ (víme-li již, že A je monotónní, což lze v praktických aplikacích snadno ověřit).

Důkaz je rozdělen do šesti kroků.
Krok 1: *Jednoznačnost.* Nechť u a $\bar{u}$ jsou řešení úlohy (5.6). Platí

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u - \bar{u}), u - \bar{u}\right) = -(A(u - \bar{u}), u - \bar{u}) \le 0.$$

Pro každé $\varphi \in C^1([0,+\infty), H)$ platí, že

$$\|\varphi\|^2 \in C^1([0,+\infty), \mathbb{R}) \quad \text{a} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\varphi\|^2 = 2\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}, \varphi\right),$$

a tedy

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t) - \bar{u}(t)\|^2 = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u(t) - \bar{u}(t)), u(t) - \bar{u}(t)\right).$$

Odtud plyne, že funkce $t \mapsto \|u(t) - \bar{u}(t)\|$ je nerostoucí na $[0,+\infty)$. Protože $\|u(0) - \bar{u}(0)\| = 0$, máme

$$\|u(t) - \bar{u}(t)\| = 0 \quad \forall t \ge 0.$$

Hlavní myšlenkou důkazu existence je nahradit operátor A v úloze (5.6) operátorem A_λ, použít Větu 5.7 na aproximující úlohu a pak přejít k limitě pro $\lambda \to 0$ s použitím různých *odhadů nezávislých na* λ. Nechť je tedy u_λ řešením úlohy

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t} + A_\lambda u_\lambda = 0 \quad \text{na } [0,+\infty), \\ \qquad\qquad u_\lambda(0) = u_0 \in D(A). \end{cases} \tag{5.7}$$

Krok 2: Máme odhady

$$\|u_\lambda(t)\| \le \|u_0\| \quad \forall t \ge 0\ \forall \lambda > 0, \tag{5.8}$$

$$\left\|\frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t}(t)\right\| = \|A_\lambda u_\lambda(t)\| \le \|Au_0\| \quad \forall t \ge 0\ \forall \lambda > 0, \tag{5.9}$$

které plynou přímo z následujícího lemmatu a skutečnosti, že $\|A_\lambda u_0\| \le \|Au_0\|$.

Lemma 5.10. *Nechť $w \in C^1([0,+\infty), H)$ je funkce splňující*

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} + A_\lambda w = 0 \quad na\ [0,+\infty). \tag{5.10}$$

Potom jsou funkce $t \mapsto \|w(t)\|$ a $t \mapsto \left\|\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}(t)\right\| = \|A_\lambda w(t)\|$ nerostoucí na $[0,+\infty)$.

Důkaz. Máme

$$\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}, w\right) + (A_\lambda w, w) = 0.$$

Díky Propozici 5.5((f)) víme, že $(A_\lambda w, w) \ge 0$, takže $\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w\|^2 \le 0$, a tedy $\|w(t)\|$ je nerostoucí. Na druhou stranu A_λ je lineární omezený operátor, takže z rovnice (5.7) plyne (indukcí), že $w \in C^\infty([0,+\infty), H)$ a také, že

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\right) + A_\lambda\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\right) = 0.$$

Stejně jako $\|w(t)\|$ je tedy i $\left\|\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}(t)\right\|$ nerostoucí. Dokonce pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ je $\left\|\frac{\mathrm{d}^k w}{\mathrm{d}t^k}(t)\right\|$ také nerostoucí. ∎

Krok 3: Nyní dokážeme, že pro libovolné $t \ge 0$ konverguje $u_\lambda(t)$ pro $\lambda \to 0$ k nějaké limitě, kterou označíme $u(t)$. Tato konvergence je navíc stejnoměrná na libovolném omezeném intervalu $[0,T]$.

Pro každé $\lambda, \mu > 0$ máme

$$\frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}u_\mu}{\mathrm{d}t} + A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu = 0,$$

a tedy

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\|^2 + (A_\lambda u_\lambda(t) - A_\mu u_\mu(t), u_\lambda(t) - u_\mu(t)) = 0. \tag{5.11}$$

Vynecháme-li pro přehlednost argument t, můžeme psát

$$\begin{aligned}
&(A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu)\\
&= (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - J_\lambda u_\lambda + J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu + J_\mu u_\mu - u_\mu)\\
&= (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu)\\
&\quad + (A(J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu), J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu)\\
&\ge (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu).
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Z (5.9), (5.11) a (5.12) plyne

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_\lambda - u_\mu\|^2 \leq 2(\lambda+\mu)\|Au_0\|^2.$$

Integrací této nerovnosti dostáváme

$$\|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\|^2 \leq 4(\lambda+\mu)t\|Au_0\|^2,$$

tj.

$$\|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\| \leq 2\sqrt{(\lambda+\mu)t}\|Au_0\|. \tag{5.13}$$

Odtud plyne, že pro každé pevné $t \geq 0$ je $u_\lambda(t)$ cauchyovská posloupnost pro $\lambda \to 0$, a tedy konverguje k nějaké limitě, kterou označíme $u(t)$. Přechodem k limitě pro $\mu \to 0$ v nerovnosti (5.13) dostaneme

$$\|u_\lambda(t) - u(t)\| \leq 2\sqrt{\lambda t}\|Au_0\|.$$

Tato konvergence je tedy stejnoměrná pro t z libovolného omezeného intervalu $[0, T]$, takže $u \in C([0, +\infty), H)$.

Krok 4: Budeme-li navíc předpokládat, že $u_0 \in D(A^2)$, tj. nejen $u_0 \in D(A)$, ale i $Au_0 \in D(A)$, potom dokážeme, že $\frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t}(t)$ konverguje pro $\lambda \to 0$ k nějaké limitě a že tato konvergence je stejnoměrná na libovolném omezeném intervalu $[0, T]$.

Ozačíme-li $v_\lambda \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t}$, máme $\frac{\mathrm{d}v_\lambda}{\mathrm{d}t} + A_\lambda v_\lambda = 0$. Použitím stejného argumentu jako v Kroku 3 dostaneme, že

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|v_\lambda - v_\mu\|^2 \leq (\|A_\lambda v_\lambda\| + \|A_\mu v_\mu\|)(\lambda\|A_\lambda v_\lambda\| + \mu\|A_\mu v_\mu\|). \tag{5.14}$$

Z Lemmatu 5.10 plyne

$$\|A_\lambda v_\lambda(t)\| \leq \|A_\lambda v_\lambda(0)\| = \|A_\lambda A_\lambda u_0\| \tag{5.15}$$

a obdobně

$$\|A_\mu v_\mu(t)\| \leq \|A_\mu v_\mu(0)\| = \|A_\mu A_\mu u_0\|. \tag{5.16}$$

Protože $Au_0 \in D(A)$, dostáváme

$$A_\lambda A_\lambda u_0 = J_\lambda A J_\lambda A u_0 = J_\lambda J_\lambda A A u_0 = J_\lambda^2 A^2 u_0,$$

a tedy

$$\|A_\lambda A_\lambda u_0\| \leq \|A^2 u_0\| \quad \text{a} \quad \|A_\mu A_\mu u_0\| \leq \|A^2 u_0\|. \tag{5.17}$$

Z nerovností (5.14), (5.15), (5.16) a (5.17) konečně plyne, že

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|v_\lambda - v_\mu\|^2 \leq 2(\lambda+\mu)\|A^2 u_0\|^2.$$

Stejně jako v Kroku 3 odtud vyplývá, že $v_\lambda(t) = \frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t}(t)$ konverguje pro $\lambda \to 0$ k nějaké limitě a že tato konvergence je stejnoměrná na každém omezeném intervalu $[0, T]$.

Krok 5: Za předpokladu $u_0 \in D(A^2)$ dokážeme, že u je řešení úlohy (5.6).

Z předchozích Kroků 3 a 4 víme, že pro všechna $T < \infty$

$$\begin{cases} u_\lambda(t) \to u(t) \quad \text{pro } \lambda \to 0, \text{ stejnoměrně na } [0,T], \\ \frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t}(t) \text{ konverguje pro } \lambda \to 0, \text{ stejnoměrně na } [0,T]. \end{cases}$$

Odtud už plyne, že $u \in C^1([0,+\infty),H)$ a $\frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t}(t) \to \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t)$ pro $\lambda \to 0$, stejnoměrně na $[0,T]$. Přepíšeme rovnici v úloze (5.7) do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t}(t) + A(J_\lambda u_\lambda(t)) = 0. \tag{5.18}$$

Pro $\lambda \to 0$ konverguje $J_\lambda u_\lambda(t) \to u(t)$, protože

$$\begin{aligned} \|J_\lambda u_\lambda(t) - u(t)\| &\le \|J_\lambda u_\lambda(t) - J_\lambda u(t)\| + \|J_\lambda u(t) - u(t)\| \\ &\le \|u_\lambda(t) - u(t)\| + \|J_\lambda u(t) - u(t)\| \to 0. \end{aligned}$$

Protože A má uzavřený graf, plyne z (5.18), že $u(t) \in D(A)$ pro všechna $t \ge 0$ a

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) + Au(t) = 0.$$

Protože $u \in C^1([0,+\infty),H)$, je funkce $t \mapsto Au(t)$ spojitá z $[0,+\infty)$ do H, a tedy $u \in C([0,+\infty),D(A))$. Dostali jsme tedy řešení úlohy (5.6), které navíc splňuje

$$\|u(t)\| \le \|u_0\| \quad \text{a} \quad \left\|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t)\right\| = \|Au(t)\| \le \|Au_0\| \quad \forall t \ge 0.$$

Krok 6: Nyní dokončíme důkaz věty.

K tomu využijeme následující lemma.

Lemma 5.11. *Nechť $u_0 \in D(A)$. Potom pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\bar{u}_0 \in D(A^2)$ takové, že $\|u_0 - \bar{u}_0\| < \varepsilon$ a $\|Au_0 - A\bar{u}_0\| < \varepsilon$. Jinými slovy, $D(A^2)$ je hustá podmnožina $D(A)$ (v grafové normě).*

Důkaz. Zvolíme $\bar{u}_0 = J_\lambda u_0$ pro nějaké vhodné $\lambda > 0$, které určíme později. Máme

$$\bar{u}_0 \in D(A) \quad \text{a} \quad \bar{u}_0 + \lambda A\bar{u}_0 = u_0.$$

Je tedy $A\bar{u}_0 \in D(A)$, tj. $\bar{u}_0 \in D(A^2)$. Na druhou stranu díky Propozici 5.5 víme, že

$$\lim_{\lambda\to 0} \|J_\lambda u_0 - u_0\| = 0, \quad \lim_{\lambda\to 0} \|J_\lambda Au_0 - Au_0\| = 0 \quad \text{a} \quad J_\lambda Au_0 = AJ_\lambda u_0.$$

Požadované tvrzení dostaneme, zvolíme-li $\lambda > 0$ dostatečně malé. ■

Nyní se vrátíme k důkazu Věty 5.8. Pro dané $u_0 \in D(A)$ zkonstruujeme s použitím Lemmatu 5.11 posloupnost (u_{0n}) v $D(A^2)$ takovou, že $u_{0n} \to u_0$ a $Au_{0n} \to Au_0$. Podle Kroku 5 existuje řešení u_n úlohy

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t} + Au_n = 0 \quad \text{na } [0,+\infty), \\ u_n(0) = u_{0n}. \end{cases} \tag{5.19}$$

Pro libovolné $t \geq 0$ máme

$$\|u_n(t) - u_m(t)\| \leq \|u_{0n} - u_{0m}\| \underset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

$$\left\|\frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t}(t) - \frac{\mathrm{d}u_m}{\mathrm{d}t}(t)\right\| \leq \|Au_{0n} - Au_{0m}\| \underset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Tudíž

$$u_n(t) \to u(t) \quad \text{stejnoměrně na } [0,+\infty),$$

$$\frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t}(t) \to \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) \quad \text{stejnoměrně na } [0,+\infty),$$

kde $u \in C^1([0,+\infty), H)$. Přechodem k limitě v úloze (5.19) s využitím uzavřenosti operátoru A dostaneme, že $u(t) \in D(A)$ a u splňuje (5.6). Z (5.6) pak vyplývá, že $u \in C([0,+\infty), D(A))$. ∎

Poznámka 5.12. Nechť u_λ je řešení (5.7).

(a) Předpokládejme, že $u_0 \in D(A)$. Podle Kroku 3 víme, že pro $\lambda \to 0$ konverguje $u_\lambda(t)$ pro každé $t \geq 0$ k nějaké limitě $u(t)$. Lze přímo dokázat, že $u \in C^1([0,+\infty), H) \cap C([0,+\infty), D(A))$ a že splňuje (5.6).

(b) Předpokládejme pouze, že $u_0 \in H$. Stále můžeme dokázat, že pro $\lambda \to 0$ konverguje $u_\lambda(t)$ pro každé $t \geq 0$ k nějaké limitě, kterou značíme $u(t)$. Může se ale stát, že tato limita $u(t)$ nepatří do $D(A)$ pro všechna $t \geq 0$ a že $u(t)$ není na $[0,+\infty)$ nikde diferencovatelné. Pak $u(t)$ není „klasické“ řešení (5.6). Pro takové u_0 pak (5.6) nemá žádné klasické řešení. Můžeme nicméně takové $u(t)$ považovat za „zobecněné“ řešení úlohy (5.6). V sekci 5.4 uvidíme, že tato situace nemůže nastat, je-li operátor A samoadjungovaný. V tomto případě je $u(t)$ „klasické“ řešení (5.6) pro *každé* $u_0 \in H$, i když $u_0 \notin D(A)$.

Poznámka 5.13 (Kontrakční semigrupy)**.** Pro libovolné $t \geq 0$ uvažujme lineární zobrazení $u_0 \in D(A) \mapsto u(t) \in D(A)$, kde $u(t)$ je řešení úlohy (5.6), jehož existenci zaručuje Věta 5.8. Protože $\|u(t)\| \leq \|u_0\|$ a $D(A)$ je hustá podmnožina H, můžeme toto zobrazení spojitě rozšířit na omezený operátor z H do sebe, který značíme $S_A(t)$. Můžeme též použít Poznámku 5.12((b)) a definovat $S_A(t)$ na H přímo jako zobrazení $u_0 \in H \mapsto u(t) \in H$. Lze snadno ověřit, že $S_A(t)$ má následující vlastnosti:

(a) pro každé $t \geq 0$ je $S_A(t) \in \mathcal{L}(H)$ a $\|S_A(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$,

(b) $\begin{cases} S_A(t_1 + t_2) = S_A(t_1) \circ S_A(t_2) & \forall t_1, t_2 \geq 0, \\ S_A(0) = I, \end{cases}$

(c) $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \|S_A(t)u_0 - u_0\| = 0 \quad \forall u_0 \in H.$

Taková třída $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ operátorů (z H do sebe) závisející na parametru $t \geq 0$ se nazývá *spojitá semigrupa kontrakcí.*

Hille a Yosida dokonce dokázali i opačné tvrzení, tj., že pro každou spojitou semigrupu kontrakcí $S(t)$ na H existuje právě jeden maximální monotónní operátor A takový, že $S(t) = S_A(t)$ pro všechna $t \geq 0$. Tím je tedy dáno *vzájemně jednoznačné přiřazení mezi maximálními monotónními operátory a spojitými semigrupami kontrakcí.*

Poznámka 5.14. Nechť A je maximální monotónní operátor a $\lambda \in \mathbb{R}$. Úlohu

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + Au + \lambda u = 0 \quad \text{na } [0, +\infty), \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

lze redukovat na úlohu (5.6) pomocí jednoduché substituce. Označme

$$v(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{e}^{\lambda t} u(t).$$

Potom v splňuje

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + Av = 0 \quad \text{na } [0, +\infty), \\ v(0) = u_0. \end{cases}$$

5.3. Regularita

Dokážeme, že za dodatečných předpokladů na počáteční data u_0 je řešení u úlohy (5.6), jehož existenci zaručuje Věta 5.8, hladší, než pouze $C^1([0,+\infty),H) \cap C([0,+\infty),D(A))$. Za tím účelem definujeme indukcí prostor

$$D(A^k) = \left\{v \in D(A^{k-1}) : Av \in D(A^{k-1})\right\},$$

kde $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Vidíme, že $D(A^k)$ je Hilbertův prostor se skalárním součinem

$$(u,v)_{D(A^k)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{k} (A^j u, A^j v)$$

a příslušnou normou

$$\|u\|_{D(A^k)} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{j=0}^{k} \|A^j u\|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Věta 5.15. *Nechť $u_0 \in D(A^k)$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Potom řešení u úlohy* (5.6)*, dané Větou 5.8, splňuje*

$$u \in C^{k-j}([0,+\infty), D(A^j)) \quad \forall j \in \{0,1,\dots,k\}.$$

Důkaz. Nejprve předpokládejme, že $k=2$. Uvažujme Hilbertův prostor $H_1 = D(A)$ se skalárním součinem $(u,v)_{D(A)}$. Lze snadno ověřit, že operátor $A_1 \colon D(A_1) \subset H_1 \to H_1$, definovaný

$$\begin{cases} D(A_1) = D(A^2), \\ A_1 u = Au \quad \text{pro } u \in D(A_1), \end{cases}$$

je maximální monotónní na H_1. Použijeme-li Větu 5.8 *na operátor A_1 v prostoru H_1*, dostaneme existenci funkce

$$u \in C^1([0,+\infty), H_1) \cap C([0,+\infty), D(A_1))$$

takové, že

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + A_1 u = 0 \quad \text{na } [0,+\infty), \\ \qquad u(0) = u_0. \end{cases}$$

Tedy u je řešením úlohy (5.6), které je dáno jednoznačně. Zbývá tudíž dokázat, že $u \in C^2([0,+\infty),H)$. Protože

$$A \in \mathcal{L}(H_1, H) \quad \text{a} \quad u \in C([0,+\infty), H_1),$$

máme $Au \in C^1([0,+\infty),H)$ a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Au) = A\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right). \tag{5.20}$$

Použijeme-li (5.6), dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \in C^1([0,+\infty),H), \quad \text{tj. } u \in C^2([0,+\infty),H),$$

a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right) + A\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right) = 0 \quad \text{na } [0,+\infty). \tag{5.21}$$

Nyní přejdeme k obecnému případu $k \geq 3$. Budeme postupovat indukcí přes k. Předpokládejme, že tvrzení platí až do řádu $k-1$ a vezměme $u_0 \in D(A^k)$. Díky předchozí analýze víme, že řešení u úlohy (5.6) patří do $C^2([0,+\infty),H) \cap C^1([0,+\infty),D(A))$ a že splňuje (5.22). Označíme-li

$$v \overset{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t},$$

máme

$$v \in C^1([0,+\infty),H) \cap C([0,+\infty),D(A)),$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + Av = 0 \quad \text{na } [0,+\infty), \\ \qquad v(0) = -Au_0. \end{cases}$$

Jinými slovy, v je (jednoznačné) řešení úlohy (5.6) s počáteční podmínkou $v_0 = -Au_0$. Protože $v_0 \in D(A^{k-1})$, víme podle indukčního předpokladu, že

$$v \in C^{k-1-j}([0,+\infty),D(A^j)) \quad \forall j \in \{0,1,\ldots,k-1\}, \tag{5.22}$$

tj.

$$u \in C^{k-j}([0,+\infty),D(A^j)) \quad \forall j \in \{0,1,\ldots,k-1\}.$$

Už zbývá jen ověřit, že

$$u \in C([0,+\infty),D(A^k)). \tag{5.23}$$

Použijeme-li (5.22) s $j = k-1$, vidíme, že

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \in C([0,+\infty),D(A^{k-1})). \tag{5.24}$$

Z (5.24) a (5.6) pak plyne, že

$$Au \in C([0,+\infty),D(A^{k-1})),$$

tj. platí (5.23). ■

5.4. Samoadjungovaný případ

Nechť $A\colon D(A) \subset H \to H$ je neomezený lineární operátor s $\overline{D(A)} = H$. Ztotožníme-li H^* s H, můžeme na A^* nahlížet jako na neomezený lineární operátor na H.

Definice 5.16. *Říkáme, že*

- *A je* symetrický, *jestliže* $(Au, v) = (u, Av)$ $\forall u, v \in D(A)$,
- *A je* samoadjungovaný, *jestliže* $D(A^*) = D(A)$ *a* $A^* = A$.

Poznámka 5.17. Pro omezené operátory pojmy symetrického a samoadjungovaného operátoru splývají. Nicméně pro nemezené operátory je mezi symetrickým a samoadjungovaným operátorem jemný rozdíl. Každý samoadjungovaný operátor je zřejmě rovněž symetrický. Opačně to ale neplatí, protože symetrie operátoru A znamená pouze, že $A \subset A^*$, tj. $D(A) \subset D(A^*)$ a $A^* = A$ na $D(A)$. Může se ale stát, že A je symetrický a $D(A) \subsetneq D(A^*)$. Následující tvrzení říká, že pokud A je maximální monotónní, pak

$$A \text{ je symetrický} \quad \Longleftrightarrow \quad A \text{ je samoadjungovaný.}$$

Tvrzení 5.18. *Nechť A je maximální monotónní symetrický operátor. Potom je A samoadjungovaný.*

Důkaz. Označme $J_1 \overset{\text{def}}{=} (I + A)^{-1}$. Nejprve dokážeme, že J_1 je samoadjungovaný. Protože $J_1 \in \mathcal{L}(H)$, stačí ověřit, že

$$(J_1 u, v) = (u, J_1 v) \quad \forall u, v \in H. \tag{5.25}$$

Označíme $u_1 \overset{\text{def}}{=} J_1 u$ a $v_1 \overset{\text{def}}{=} J_1 v$, takže

$$u_1 + Au_1 = u,$$
$$v_1 + Av_1 = v.$$

Podle předpokladu máme $(u_1, Av_1) = (Au_1, v_1)$, a tedy $(u_1, v) = (u, v_1)$, tj. platí (5.25).

Nechť $u \in D(A^*)$ a označme $f \overset{\text{def}}{=} u + A^*u$. Máme

$$(f, v) = (u, v + Av) \quad \forall v \in D(A),$$

tj.

$$(f, J_1 w) = (u, w) \quad \forall w \in H.$$

Odtud plyne, že $u = J_1 f$, a tedy $u \in D(A)$. Tím jsme dokázali, že $D(A^*) = D(A)$, tedy že A je samoadjungovaný. ∎

Poznámka 5.19. Je třeba si dát pozor, že když je A monotónní operátor (dokonce symetrický monotónní operátor), pak A^* nemusí být monotónní. Nicméně lze dokázat, že následující vlastnosti jsou ekvivalentní:

$$A \text{ je maximální monotónní} \Longleftrightarrow A^* \text{ je maximální monotónní}$$
$$\Longleftrightarrow A \text{ je uzavřený, } D(A) \text{ je hustá, } A \text{ a } A^* \text{ jsou monotónní.}$$

Věta 5.20. *Nechť A je samoadjungovaný maximální monotónní operátor. Pak pro každé $u_0 \in H$ existuje právě jedna funkce*

$$u \in C([0,+\infty),H) \cap C^1((0,+\infty),H) \cap C((0,+\infty),D(A))$$

taková, že

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) + Au = 0 & \textit{na } (0,+\infty), \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Navíc máme

$$\|u(t)\| \le \|u_0\| \quad \textit{a} \quad \left\|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t)\right\| = \|Au(t)\| \le \frac{1}{t}\|u_0\| \quad \forall t > 0,$$

$$u \in C^k((0,+\infty),D(A^l)) \quad \forall k,l \in \{0,1,2,\dots\}. \tag{5.26}$$

Poznámka 5.21. Zdůrazněme rozdíl mezi Větami 5.8 a 5.20. Zde máme libovolné $u_0 \in H$ (místo $u_0 \in D(A)$), zato tvrzení říká, že řešení úlohy je hladké mimo $t = 0$ a $\left\|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t)\right\|$ může jít do nekonečna pro $t \to 0+$.

Důkaz.
Jednoznačnost. Nechť u a $\bar{u}$ jsou řešení. Díky monotonii A je pak funkce $\varphi(t) \stackrel{\text{def}}{=} \|u(t) - \bar{u}(t)\|^2$ nerostoucí na $(0,+\infty)$. Zároveň je φ spojitá na $[0,+\infty)$ a $\varphi(0) = 0$. Tudíž $\varphi \equiv 0$.
Existence. Důkaz rozdělíme do dvou kroků.
Krok 1. Nejprve budeme předpokládat, že $u_0 \in D(A^2)$ a že u je řešení (5.6), jehož existenci zaručuje Věta 5.8. Tvrdíme, že

$$\left\|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t)\right\| \le \frac{1}{t}\|u_0\| \quad \forall t > 0. \tag{5.27}$$

Stejně jako v důkazu Propozice 5.18 máme

$$J_\lambda^* = J_\lambda \quad \text{a} \quad A_\lambda^* = A_\lambda \quad \forall \lambda > 0.$$

Vracíme se přibližné úloze, formulované v důkazu Věty 5.8,

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t} + A_\lambda u_\lambda = 0 & \text{na } [0,+\infty), \\ u_\lambda(0) = u_0. \end{cases} \tag{5.28}$$

Vezmeme-li skalární součin rovnice v (5.28) s u_λ a zintegrujeme přes $[0,T]$, dostaneme

$$\frac{1}{2}\|u_\lambda(T)\|^2 + \int_0^T (A_\lambda u_\lambda, u_\lambda)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\|u_0\|^2. \tag{5.29}$$

Vezmeme-li skalární součin rovnice v (5.28) s $t\frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t}$ a zintegrujeme přes $[0,T]$, dostaneme

$$\int_0^T \left\|\frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t}(t)\right\|^2 t\,\mathrm{d}t + \int_0^T \left(A_\lambda u_\lambda(t), \frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t}(t)\right) t\,\mathrm{d}t = 0. \tag{5.30}$$

Máme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A_\lambda u_\lambda, u_\lambda) = \left(A_\lambda \frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t}, u_\lambda\right) + \left(A_\lambda u_\lambda, \frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t}\right) = 2\left(A_\lambda u_\lambda, \frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t}\right),$$

protože $A_\lambda^* = A_\lambda$. Použijeme-li integraci per partes na druhý integrál v (5.30), dostaneme

$$\begin{aligned}\int_0^T \left(A_\lambda u_\lambda(t), \frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t}(t)\right) t\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_0^T \frac{\mathrm{d}(A_\lambda u_\lambda, u_\lambda)}{\mathrm{d}t} t\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}(A_\lambda u_\lambda(T), u_\lambda(T))T - \frac{1}{2}\int_0^T (A_\lambda u_\lambda, u_\lambda)\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{5.31}$$

Protože je funkce $t \mapsto \left\|\frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t}(t)\right\|$ nerostoucí díky Lemmatu 5.10, máme

$$\int_0^T \left\|\frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t}(t)\right\|^2 t\,\mathrm{d}t \geq \left\|\frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t}(T)\right\|^2 \frac{T^2}{2}. \tag{5.32}$$

Nyní zkombinujeme (5.29), (5.30), (5.31) a (5.32) a dostaneme

$$\frac{1}{2}\|u_\lambda(T)\|^2 + T(A_\lambda u_\lambda(T), u_\lambda(T)) + T^2\left\|\frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t}(T)\right\|^2 \leq \frac{1}{2}\|u_0\|^2.$$

Odtud pak plyne

$$\left\|\frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t}(T)\right\| \leq \frac{1}{T}\|u_0\| \quad \forall T > 0. \tag{5.33}$$

Nakonec v (5.33) přejdeme k limitě pro $\lambda \to 0+$. Tím je dokončen důkaz (5.27), protože $\frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}t} \to \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ (viz Krok 5 důkazu Věty 5.8).

Krok 2. Nyní předpokládejme, že $u_0 \in H$. Nechť (u_{0n}) je posloupnost v $D(A^2)$ taková, že $u_{0n} \to u_0$ (připomeňme, že $D(A^2)$ je hustá podmnožina $D(A)$ a $D(A)$ je hustá podmnožina H, takže $D(A^2)$ je hustá podmnožina H). Nechť u_n je řešením úlohy

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t} + Au_n = 0 \quad \text{na } [0, +\infty), \\ \qquad u_n(0) = u_{0n}. \end{cases}$$

Díky Větě 5.8 víme, že

$$\|u_n(t) - u_m(t)\| \leq \|u_{0n} - u_{0m}\| \quad \forall m, n \in \mathbb{N}\ \forall t \geq 0$$

a díky Kroku 1, že

$$\left\|\frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t}(t) - \frac{\mathrm{d}u_m}{\mathrm{d}t}(t)\right\| \leq \frac{1}{t}\|u_{0n} - u_{0m}\| \quad \forall m, n \in \mathbb{N}\ \forall t > 0.$$

Odtud plyne, že u_n konverguje stejnoměrně na $[0, +\infty)$ k nějaké limitě $u(t)$ a $\frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t}(t)$ konverguje k $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t)$ stejnoměrně na libovolném intervalu $[\delta, +\infty)$, kde $\delta > 0$. Limitní funkce u splňuje

$$u \in C([0, +\infty), H) \cap C^1((0, +\infty), H),$$

$$u(t) \in D(A) \quad \forall t > 0 \quad \text{a} \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) + Au(t) = 0 \quad \forall t > 0$$

(zde využíváme toho, že A je uzavřený).

Nyní přikročíme k důkazu (5.26). Indukcí přes $k \geq 2$ dokážeme, že

$$u \in C^{k-j}((0,+\infty), D(A^j)) \quad \forall j \in \{0,1,\dots,k\}. \tag{5.34}$$

Předpokládejme tedy, že (5.34) platí až do řádu $k-1$. Platí tudíž

$$u \in C((0,+\infty), D(A^{k-1})). \tag{5.35}$$

K důkazu (5.34) stačí (vzhledem k Větě 5.15) ověřit, že

$$u \in C((0,+\infty), D(A^k)). \tag{5.36}$$

Uvažujme Hilbertův prostor $\tilde{H} \stackrel{\text{def}}{=} D(A^{k-1})$ a operátor $\tilde{A}\colon D(\tilde{A}) \subset \tilde{H} \to \tilde{H}$ definovaný

$$\begin{cases} D(\tilde{A}) = D(A^k), \\ \quad\ \tilde{A} = A. \end{cases}$$

Vidíme, že $\tilde{A}$ je maximální monotónní a symetrický v $\tilde{H}$, je tedy samoadjungovaný. Použijeme-li první tvrzení Věty 5.20 v Prostoru $\tilde{H}$ na operátor $\tilde{A}$, získáme jednoznačné řešení v úlohy

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) + Av = 0 \quad \text{na } (0,+\infty), \\ \qquad\quad v(0) = v_0. \end{cases}$$

pro libovolné $v_0\tilde{H}$. Navíc máme

$$v \in C([0,+\infty), \tilde{H}) \cap C^1((0,+\infty), \tilde{H}) \cap C((0,+\infty), D(\tilde{A})).$$

Zvolíme-li $v_0 = u(\varepsilon)$, kde $\varepsilon > 0$, dostaneme $u \in C((\varepsilon,+\infty), D(A^k))$, protože podle (5.35) již víme, že $v_0 \in \tilde{H}$. Tím jsme dokončili důkaz (5.36). ∎

KAPITOLA 6

Úlohy pro evoluční diferenciální rovnice

6.1. Rovnice vedení tepla: existence, jednoznačnost a regularita

Písmenem Ω budeme značit otevřenou podmnožinu $\mathbb{R}^N$ s hranicí $\partial\Omega$. Dále označme

$$Q \stackrel{\text{def}}{=} \Omega \times (0, +\infty),$$
$$\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \partial\Omega \times (0, +\infty),$$

kde Q nazýváme (časoprostorovým) válcem a Σ jeho pláštěm.

Uvažujme úlohu nalézt funkci $u(x,t) \colon \overline{\Omega} \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ takovou, že

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \qquad \text{na } Q, \tag{6.1}$$
$$u = 0 \qquad \text{na } \Sigma, \tag{6.2}$$
$$u(x,0) = u_0(x) \qquad \text{na } \Omega, \tag{6.3}$$

kde $\Delta = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ je Laplacův operátor v prostorových proměnných x, dále t je časová proměnná a $u_0(x)$ je daná funkce, zvaná počáteční (Cauchyho) podmínka či počáteční data.

Rovnici (6.1) nazýváme *rovnicí vedení tepla*, protože modeluje rozložení tepla u v oblasti Ω v čase t. Rovnice vedení tepla a její varianty se používají k modelování různých *difuzních jevů* (nejen difuze tepla). Rovnice vedení tepla je také nejjednodušším příkladem *parabolické rovnice.*

Rovnici (6.2) říkáme (homogenní) *Dirichletova okrajová podmínka.* Ta může být nahrazena *Neumannovou okrajovou podmínkou*

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{na } \Sigma, \tag{6.4}$$

kde n je vektor jednotkové vnější normály k $\partial\Omega$, případně jinou okrajovou podmínkou (viz např. [**2**, Chapters 8, 9]). Podmínka (6.2) odpovídá předpokladu, že teplota na hranici $\partial\Omega$ je udržována na nule, zatímco podmínka (6.4) odpovídá předpokladu, že tok tepla přes hranici $\partial\Omega$ je nulový (izolovaná hranice). Řešení $u(x,t)$ úlohy (6.1), (6.2), (6.3) budeme hledat jakožto funkci definovanou na $[0, +\infty)$ s hodnotami v prostoru H, kde H je vhodný prostor funkcí, závisejících pouze na x, například $H = L^2(\Omega)$ či $H = H_0^1(\Omega)$. Píšeme-li pouze $u(t)$, máme tím na mysli, že $u(t)$ je prvek prostoru H, tedy funkce $x \mapsto u(x,t)$. Tento přístup nám umožní vyřešit úlohu (6.1), (6.2), (6.3) *velmi snadno* kombinací Hillovy-Yosidovy věty a výsledků uvedených v [**2**, Chapters 8, 9].

Pro jednoduchost budeme v celé kapitole předpokládat, že Ω je třídy C^∞ s omezenou hranicí $\partial\Omega$, nicméně tento předpoklad lze podstatně zeslabit, pokud hledáme pouze slabá řešení.

Věta 6.1. *Nechť $u_0 \in L^2(\Omega)$. Potom existuje právě jedna funkce $u(x,t)$ splňující* (6.1), (6.2), (6.3),

$$u \in C([0, +\infty), L^2(\Omega)) \cap C((0, +\infty), H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \text{ a} \tag{6.5}$$
$$u \in C^1((0, +\infty), L^2(\Omega)). \tag{6.6}$$

Navíc platí

$$u \in C^\infty(\overline{\Omega} \times [\varepsilon, +\infty)) \quad \forall \varepsilon > 0,$$

dále $u \in L^2((0,+\infty), H_0^1(\Omega))$ *a*

$$\frac{1}{2}\|u(T)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^T \|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} \quad \forall T > 0, \tag{6.7}$$

kde

$$\|u(T)\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |u(x,T)|^2 \mathrm{d}x$$

a

$$\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^N \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t) \right|^2 \mathrm{d}x.$$

Důkaz provedeme pomocí Hillovy-Yosidovy teorie v prostoru $H = L^2(\Omega)$ (prostor lze zvolit i jinak, viz důkaz Věty 6.2). Uvažujme *neomezený* operátor $A\colon D(A) \subset H \to H$ definovaný

$$\begin{cases} D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \\ \quad Au = -\Delta u. \end{cases}$$

Je důležité zdůraznit, že *okrajové podmínky* (6.2) *jsou zahrnuty ve volbě definičního oboru* $D(A)$. Tvrdíme, že A je *samoadjungovaný maximální monotónní operátor*. Pak lze totiž použít Větu [**2**, Theorem 7.7] k důkazu existence jednoznačného řešení úlohy (6.1), (6.2), (6.3), splňujícího (6.5) a (6.6).

(i) A je monotónní. Pro všechna $u \in D(A)$ máme

$$(Au, u)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega (-\Delta u) u = \int_\Omega |\nabla u|^2 \geq 0.$$

(ii) A je maximální monotónní. Musíme ověřit, že $R(I + A) = H = L^2(\Omega)$. Víme (viz [**2**, Theorem 9.25]), že pro libovolné $f \in L^2(\Omega)$ existuje právě jedno řešení $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ rovnice $u - \Delta u = f$.

(iii) A je samoadjungovaný. Díky [**2**, Proposition 7.6] stačí ověřit, že operátor A je symetrický. Pro všechna $u, v \in D(A)$ platí

$$(Au, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega (-\Delta u) v = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$$

a

$$(u, Av)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(-\Delta v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v,$$

takže $(Au, v) = (u, Av)$.

Dále z [**2**, Theorem 9.25] plyne, že pro libovolné $l \in \mathbb{N}$ je $D(A^l) \subset H^{2l}(\Omega)$ se spojitým prostým vnořením. Přesněji řečeno,

$$D(A^l) = \left\{ u \in H^{2l}(\Omega) : u = \Delta u = \cdots = \Delta^{l-1} u = 0 \text{ na } \partial\Omega \right\}.$$

Díky [**2**, Theorem 7.7] víme, že řešení úlohy (6.1), (6.2), (6.3) splňuje

$$u \in C^k((0,+\infty), D(A^l)) \quad \forall k, l,$$

a tedy

$$u \in C^k((0,+\infty), H^{2l}(\Omega)) \quad \forall k, l.$$

Odtud plyne (díky [**2**, Corollary 9.15]), že

$$u \in C^k((0,+\infty), C^k(\overline{\Omega})) \quad \forall k.$$

Nyní dokážeme rovnost (6.7). Nejprve formálně vynásobíme rovnici (6.1) funkcí u a integrujeme přes $\Omega \times (0,T)$. To je třeba provést obezřetně, jelikož $u(t)$ je diferencovatelné na $(0,+\infty)$, ale ne na $[0,+\infty)$. Uvažujme funkci $\varphi(t) = \frac{1}{2}\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$. Tato funkce je třídy C^1 na $(0,+\infty)$ (podle (6.6)) a pro $t > 0$ máme

$$\varphi'(t) = \left(u(t), \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t)\right)_{L^2(\Omega)} = (u(t), \Delta u(t))_{L^2(\Omega)} = -\int_\Omega |\nabla u(t)|^2.$$

Pro $0 < \varepsilon < T < +\infty$ tedy dostáváme

$$\varphi(T) - \varphi(\varepsilon) = \int_\varepsilon^T \varphi'(t)\mathrm{d}t = -\int_\varepsilon^T \|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\mathrm{d}t.$$

Nakonec provedeme limitní přechod pro $\varepsilon \to 0+$. Již jsme dokázali, že $u \in C([0,+\infty), L^2(\Omega))$, takže platí $\varphi(\varepsilon) \to \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}$, a tedy $u \in L^2((0,+\infty), H^1_0(\Omega))$ a rovnost (6.7) je dokázaná. ■

Přidáme-li další předpoklady na počáteční podmínku u_0, pak řešení u bude hladší až do $t = 0$. Připomeňme, že mimo bod $t = 0$ zaručuje Věta 6.1 vždy, že řešení u je hladké, tj. $u \in C^\infty(\overline{\Omega} \times [\varepsilon,+\infty))$ pro libovolně malé $\varepsilon > 0$.

Věta 6.2. (a) *Je-li $u_0 \in H^1_0(\Omega)$, pak řešení u úlohy* (6.1), (6.2), (6.3) *splňuje*

$$u \in C([0,+\infty), H^1_0(\Omega)) \cap L^2((0,+\infty), H^2(\Omega))$$

a

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2((0,+\infty), L^2(\Omega)).$$

Navíc máme

$$\int_0^T \left\|\frac{\partial u}{\partial t}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \mathrm{d}t + \frac{1}{2}\|\nabla u(T)\|^2_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{2}\|\nabla u_0\|^2_{L^2(\Omega)} \quad \forall T > 0.$$

(b) *Je-li $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$, pak*

$$u \in C([0,+\infty), H^2(\Omega)) \cap L^2((0,+\infty), H^3(\Omega))$$

a

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2((0,+\infty), H^1_0(\Omega)).$$

(c) *Je-li* $u_0 \in H^k(\Omega)$ *pro všechna* $k \in \mathbb{N}$ *a splňuje tzv. podmínky kompatibility*

(6.8) $$u_0 = \Delta u_0 = \cdots = \Delta^j u_0 = \cdots = 0 \quad na\ \partial\Omega$$

pro všechna $j \in \mathbb{N}$, *potom* $u \in C^\infty(\overline{\Omega} \times [0, +\infty))$.

Důkaz ((a)). Pracujeme v prostoru $H_1 \stackrel{\text{def}}{=} H_0^1(\Omega)$ se skalárním součinem

$$(u, v)_{H_1} \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega uv.$$

V prostoru H_1 uvažujeme neomezený operátor $A_1 \colon D(A_1) \subset H_1 \to H_1$, definovaný

$$\begin{cases} D(A_1) = \left\{ u \in H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) : \Delta u \in H_0^1(\Omega) \right\}, \\ \quad A_1 u = -\Delta u. \end{cases}$$

Tvrdíme, že A_1 je maximální monotónní a samoadjungovaný.

(i) A_1 je monotónní. Pro všechna $u \in D(A_1)$ máme

$$\begin{aligned} (A_1 u, u)_{H_1} &= \int_\Omega \nabla(-\Delta u) \cdot \nabla u + \int_\Omega (-\Delta u) u \\ &= \int_\Omega |\Delta u|^2 + \int_\Omega |\nabla u|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

(ii) A_1 je maximální monotónní. Pro libovolné $f \in H^1(\Omega)$ patří podle [**2**, Theorem 9.25] řešení $u \in H_0^1(\Omega)$ úlohy

$$\begin{cases} u - \Delta u = f & \text{v } \Omega, \\ \qquad u = 0 & \text{na } \partial\Omega \end{cases}$$

do prostoru $H^3(\Omega)$. Pokud navíc $f \in H_0^1(\Omega)$, pak $\Delta u \in H_0^1(\Omega)$, a tedy $u \in D(A_1)$.

(iii) A_1 je symetrický. Pro každé $u, v \in D(A_1)$ platí

$$\begin{aligned} (A_1 u, v)_{H_1} &= \int_\Omega \nabla(-\Delta u) \cdot \nabla v + \int_\Omega (-\Delta u) v \\ &= \int_\Omega \Delta u \Delta v + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = (u, A_1 v)_{H_1}. \end{aligned}$$

Z [**2**, Theorem 7.7] plyne, že pokud $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, potom existuje řešení u úlohy (6.1), (6.2), (6.3) (které se díky jednoznačnosti shoduje s řešením získaným ve Větě 6.1) takové, že

$$u \in C([0, +\infty), H_0^1(\Omega)).$$

Nakonec označme $\varphi(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$. Tato funkce je třídy C^∞ na $(0, +\infty)$ a platí

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \left(\nabla u(t), \nabla \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) \right)_{L^2(\Omega)} \\ &= \left(-\Delta u(t), \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) \right)_{L^2(\Omega)} = -\left\| \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) \right\|^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Odtud pak plyne, že pro $0 < \varepsilon < T < +\infty$ máme

$$\varphi(T) - \varphi(\varepsilon) + \int_\varepsilon^T \left\| \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \mathrm{d}t = 0.$$

Tvrzení pak snadno dostaneme z toho, že $\varphi(\varepsilon) \to \frac{1}{2}\|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)}^2$ pro $\varepsilon \to 0+$.

Důkaz ((b)). Zde pracujeme v prostoru $H_2 \stackrel{\mathrm{def}}{=} H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ se skalárním součinem

$$(u, v)_{H_2} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)} + (u, v)_{L^2(\Omega)}$$

(dokažte, že příslušná norma je ekvivalentní s běžnou normou v $H^2(\Omega)$). V prostoru H_2 uvažujme neomezený oparátor $A_2\colon D(A_2) \subset H_2 \to H_2$, definovaný

$$\begin{cases} D(A_2) = \left\{u \in H^4(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) : \Delta u \in H_0^1(\Omega)\right\}, \\ \quad A_2 u = -\Delta u. \end{cases}$$

Lze snadno dokázat, že A_2 je samoadjungovaný maximální operátor v H_2. Můžeme tedy aplikovat [**2**, Theorem 7.7] na A_2 v prostoru H_2. Konečně označme $\varphi(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{2}\|\Delta u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$. Tato funkce je třídy C^∞ na $(0, +\infty)$ a platí

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \left(\Delta u(t), \Delta \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t)\right)_{L^2(\Omega)} \\ &= \left(\Delta u(t), \Delta^2 u(t)\right)_{L^2(\Omega)} = -\left\|\nabla \Delta u(t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Tudíž pro $0 < \varepsilon < T < +\infty$ máme

$$\varphi(T) - \varphi(\varepsilon) + \int_\varepsilon^T \|\nabla \Delta u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \,\mathrm{d}t = 0.$$

V limitě pro $\varepsilon \to 0+$ dostaneme, že $u \in L^2((0, +\infty), H^3(\Omega))$ (zdůvodněte!) a (díky rovnici (6.1)) $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \in L^2((0, +\infty), H^1(\Omega))$.

Důkaz ((c)). V prostoru $H \stackrel{\mathrm{def}}{=} L^2(\Omega)$ uvažujme neomezený operátor $A\colon D(A) \subset H \to H$, definovaný

$$\begin{cases} D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \\ \quad Au = -\Delta u. \end{cases}$$

Použitím [**2**, Theorem 7.5] dostaneme, že pokud $u_0 \in D(A^k)$, $k \in \mathbb{N}$, potom

$$u \in C^{k-j}([0, +\infty) : D(A^j)) \quad \forall j \in \{0, 1, \ldots, k\}.$$

Předpoklad (6.8) lze přepsat jako $u_0 \in D(A^k)$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$. Tudíž máme

$$u \in C^{k-j}([0, +\infty), D(A^j)) \quad \forall k \in \mathbb{N}\ \forall j \in \{0, 1, \ldots, k\}.$$

Z toho vyplývá (srov. důkaz Věty 6.1), že $u \in C^\infty(\overline{\Omega} \times [0, +\infty))$. ■

Poznámka 6.3. Věta 6.1 ukazuje, že rovnice vedení tepla má *silný zhlazovací efekt na počáteční data* u_0. Všimněte si, že řešení $u(x,t)$ je třídy C^∞ v proměnné x pro každé $t > 0$, a to i v případě, že jsou počáteční data nespojitá. Z toho mimo jiné plyne, že rovnici vedení tepla *nelze obrátit v čase.* To znamená, že obecně nelze řešit úlohu s „koncovou“ podmínkou

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \qquad \text{na } \Omega \times (0,T), \tag{6.9}$$

$$u = 0 \qquad \text{na } \partial\Omega \times (0,T), \tag{6.10}$$

$$u(x,T) = u_T(x) \qquad \text{na } \Omega. \tag{6.11}$$

Museli bychom totiž nutně předpokládat, že

$$u_T \in C^\infty(\overline{\Omega}) \quad \text{a} \quad \Delta^j u_T = 0 \text{ na } \partial\Omega \quad \forall j \in \{0,1,\dots\}.$$

Ale ani s tímto předpokladem by řešení *zpětné* úlohy (6.9), (6.10), (6.11) nemuselo existovat. Tato zpětná nesmí být zaměněna s úlohou (6.12), (6.10), (6.11), kde

$$-\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \quad \text{na } \Omega \times (0,T), \tag{6.12}$$

která má *vždy* právě jedno řešení pro libovolnou koncovou podmínku $u_T \in L^2(\Omega)$ (stačí použít substituci $t := T - t$ a aplikovat Větu 6.1).

Poznámka 6.4. Předchozí výsledky platí (po drobných úpravách), i když nahradíme Dirichletovu okrajovou podmínku Neumannovou okrajovou podmínkou.

Poznámka 6.5. Je-li Ω omezená, lze úlohu (6.1), (6.2), (6.3) řešit též *rozkladem v Hilbertově bázi* prostoru $L^2(\Omega)$. Pro tento účel je vhodné zvolit bázi $(e_i(x))_{i\in\mathbb{N}}$ prostoru $L^2(\Omega)$ sestávající z *vlastních funkcí* operátoru $-\Delta$ (s homogenní Dirichletovou okrajovou podmínkou), tj.

$$\begin{cases} -\Delta e_i = \lambda_i e_i & \text{na } \Omega, \\ \quad e_i = 0 & \text{na } \partial\Omega \end{cases}$$

(viz [**2**, Section 9.8]). Řešení u úlohy (6.1), (6.2), (6.3) hledáme ve tvaru řady

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t) e_i(x).$$

(Tato metoda je nazývána metodou *separace proměnných* či Fourierovou metodou. Fourierovy řady skutečně historicky vznikly, když Fourier studoval rovnici vedení tepla v jedné prostorové proměnné.) Okamžitě vidíme, že funkce $a_i(t)$ musí splňovat

$$a_i'(t) + \lambda_i a_i(t) = 0,$$

takže máme $a_i(t) = a_i(0)\mathrm{e}^{-\lambda_i t}$. Konstanty $a_i(0)$ pak určíme ze vztahu

$$u_0(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(0) e_i(x).$$

To znamená, že řešení u úlohy (6.1), (6.2), (6.3) dostaneme ve tvaru

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(0)\mathrm{e}^{-\lambda_i t} e_i(x),$$

kde konstanty $a_i(0)$ jsou souřadnice $u_0(x)$ v ortonormální bázi $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$, tj. $a_i(0) = \int_\Omega u_0 e_i$. Otázka konvergence této řady (a také regularity řešení u, získaného tímto způsobem) je studována v [?]. Všimněte si analogie mezi uvedenou metodou a standardní metodou řešení *lineární soustavy diferenciálních rovnic*

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + Mu = 0,$$

kde hodnoty $u(t)$ se nacházejí v konečně rozměrném lineárním vektorovém prostoru a M je symetrická matice. Zásadní rozdíl samozřejmě spočívá v tom, že úloha (6.1), (6.2), (6.3) přísluší *nekonečně rozměrná* soustava.

Poznámka 6.6. Podmínky kompatibility (6.8) vypadají možná na první pohled záhadně, ale ve skutečnosti jsou přirozené. Tyto podmínky jsou *nutné* k existenci řešení u úlohy (6.1), (6.2), (6.3), které je hladké až do $t = 0$, tj. $u \in C^\infty(\overline{\Omega} \times [0,+\infty))$ (jen podmínky $u_0 \in C^\infty(\overline{\Omega})$ a $u_0 = 0$ na $\partial\Omega$ nezaručují hladkost až do $t = 0$). Skutečně, předpokládejme, že $u \in C^\infty(\overline{\Omega}) \times [0,+\infty))$ splňuje (6.1), (6.2), (6.3). Pak zřejmě

$$\frac{\partial^j u}{\partial t^j} = 0 \quad \text{na } \Sigma \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

a díky spojitosti také

$$\frac{\partial^j u}{\partial t^j} = 0 \quad \text{na } \partial\Omega \times [0,+\infty) \quad \forall j \in \mathbb{N}. \tag{6.13}$$

Dále platí

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \Delta^2 u \quad \text{na } Q,$$

a indukcí dostaneme

$$\frac{\partial^j u}{\partial t^j} = \Delta^j u \quad \text{na } Q \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Opět díky spojitosti máme také

$$\frac{\partial^j u}{\partial t^j} = \Delta^j u \quad \text{na } \overline{\Omega} \times [0,+\infty) \quad \forall j \in \mathbb{N}. \tag{6.14}$$

Porovnáním (6.13) a (6.14) na $\partial\Omega \times \{0\}$ získáme (6.8).

Poznámka 6.7. Existuje ovšem mnoho variant věty o regularitě u blízko $t = 0$, pokud zvolíme předpoklady někde *mezi* případy ((b)) a ((c)) Věty 6.2.

6.2. Princip maxima

Principem maxima nazýváme následující tvrzení.

Věta 6.8. *Nechť* $u_0 \in L^2(\Omega)$ *a buď* u *řešení úlohy* (6.1), (6.2), (6.3). *Potom pro všechna* $(x, t) \in Q$ *platí*

$$\min\left\{0, \inf_\Omega u_0\right\} \le u(x,t) \le \max\left\{0, \sup_\Omega u_0\right\}.$$

Důkaz. Podobně jako v [**2**] pro eliptický případ použijeme Stampacchiovu metodu oříznutí. Označme

$$K \overset{\text{def}}{=} \max\left\{0, \sup_\Omega u_0\right\}$$

a předpokládejme, že $K < +\infty$. Zvolme funkci $G \in C^1(\mathbb{R})$, splňující

(i) $|G'(s)| \le M \quad \forall s \in \mathbb{R}$,
(ii) G je ostře rostoucí na $(0, +\infty)$,
(iii) $G(s) = 0 \quad \forall s \le 0$

a označme

$$H(s) \overset{\text{def}}{=} \int_0^s G(\sigma)\mathrm{d}\sigma, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Snadno lze ověřit, že funkce

$$\varphi(t) \overset{\text{def}}{=} \int_\Omega H(u(x,t) - K)\mathrm{d}x$$

má následující vlastnosti:

$$\varphi \in C([0, +\infty), \mathbb{R}), \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi \ge 0 \text{ na } [0, +\infty), \tag{6.15}$$

$$\varphi \in C^1((0, +\infty), \mathbb{R}) \tag{6.16}$$

a

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= \int_\Omega G(u(x,t) - K)\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\mathrm{d}x = \int_\Omega G(u(x,t) - K)\Delta u(x,t)\mathrm{d}x \\ &= -\int_\Omega G'(u - K)|\nabla u|^2\mathrm{d}x \le 0,\end{aligned}$$

díky tomu, že $G(u(x,t) - K) \in H_0^1(\Omega)$ pro všechna $t > 0$. Odtud pak plyne, že $\varphi \equiv 0$, a tedy pro všechna $t > 0$ platí $u(x,t) \le K$ skoro všude na Ω. ■

Důsledek 6.9. *Nechť* $u_0 \in L^2(\Omega)$. *Potom řešení* u *úlohy* (6.1), (6.2), (6.3) *má následující vlastnosti:*

(i) *Je-li* $u_0 \ge 0$ *skoro všude na* Ω, *pak* $u \ge 0$ *na* Q.
(ii) *Je-li* $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, *potom* $u \in L^\infty(Q)$ *a*

$$\|u\|_{L^\infty(Q)} \le \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{6.17}$$

Důsledek 6.10. *Nechť $u_0 \in C(\overline{\Omega}) \cap L^2(\Omega)$ a $u_0 = 0$ na $\partial\Omega$. Je-li Ω neomezená, předpokládejme navíc, že $u_0(x) \to 0$ pro $|x| \to +\infty$. Potom řešení u úlohy* (6.1), (6.2), (6.3) *patří do $C(\overline{Q})$.*

Důkaz. Zřejmě existuje posloupnost $(u_{0,n})_{n\in\mathbb{N}}$ funkcí z $C_0^\infty(\Omega)$ taková, že $u_{0,n} \to u_0$ v prostorech $L^\infty(\Omega)$ a $L^2(\Omega)$. Podle Věty 6.2 patří řešení u_n úlohy (6.1), (6.2), (6.3) s počáteční podmínkou $u_{0,n}$ do prostoru $C^\infty(\overline{Q})$. Dále díky [**2**, Theorem 7.7] víme, že

$$\|u_n(t) - u(t)\|_{L^2(\Omega)} \le \|u_{0,n} - u_0\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall t \ge 0.$$

Navíc podle (6.17) platí

$$\|u_n - u_m\|_{L^\infty(Q)} \le \|u_{0,n} - u_{0,m}\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Tudíž posloupnost $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konverguje k u stejnoměrně na $\overline{Q}$, a tedy $u \in C(\overline{Q})$. ∎

Podobně jako v eliptickém případě (viz [**2**]) existuje alternativní přístup k principu maxima. Pro jednoduchost nyní předpokládejme, že Ω je omezená. Nechť $u(x,t)$ splňuje

$$u \in C(\overline{\Omega} \times [0,T]), \tag{6.18}$$

(6.19) $\qquad u$ je třídy C^1 v t a třídy C^2 v x na $\Omega \times (0,T)$ a

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \le 0 \quad \text{na } \Omega \times (0,T). \tag{6.20}$$

(Všimněte si, nepředepisujeme žádnou okrajovou ani počáteční podmínku.)

Věta 6.11. *Nechť u splňuje* (6.18), (6.19) *a* (6.20). *Potom*

$$\max_{\overline{\Omega}\times[0,T]} u = \max_P u, \tag{6.21}$$

kde $P \stackrel{\text{def}}{=} (\overline{\Omega} \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0,T])$ (hranice časoprostorového válce $\Omega \times (0,T)$ bez „horní podstavy").

Důkaz. Označme $v(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} u(x,t) + \varepsilon|x|^2$, kde $\varepsilon > 0$, takže

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v \le -2\varepsilon N < 0 \quad \text{na } \Omega \times (0,T). \tag{6.22}$$

Dokážeme, že

$$\max_{\overline{\Omega}\times[0,T]} v = \max_P v.$$

Předpokládejme opak. Pak musí existovat bod $(x_0,t_0) \in \overline{\Omega} \times [0,T]$ takový, že $(x_0,t_0) \notin P$ a

$$\max_{\overline{\Omega}\times[0,T]} v = v(x_0,t_0).$$

Protože $x_0 \in \Omega$ a $0 < t_0 \le T$, máme

$$\Delta v(x_0,t_0) \le 0 \tag{6.23}$$

a

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x_0,t_0) \ge 0, \tag{6.24}$$

protože pokud $t_0 < T$, pak $\frac{\partial v}{\partial t}(x_0, t_0) = 0$ a pokud $t_0 = T$, potom $\frac{\partial v}{\partial t}(x_0, t_0) \geq 0$ (preciznější by bylo pracovat na $\Omega \times (0, T')$, kde $T' < T$, a pak přejít k limitě pro $T' \to T-$, protože v je třídy C^1 v t pouze na $\Omega \times (0, T)$). Kombinací (6.23) a (6.24) nyní dostáváme

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v\right)(x_0, t_0) \geq 0,$$

což je spor s (6.22). Dokázali jsme tedy, že

$$\max_{\overline{\Omega}\times[0,T]} v = \max_P v \leq \max_P u + \varepsilon C,$$

kde $C \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x\in\Omega} |x|^2$. Protože $u \leq v$, máme

$$\max_{\overline{\Omega}\times[0,T]} u \leq \max_P u + \varepsilon C \quad \forall \varepsilon > 0,$$

a tím je důkaz (6.21) dokončen. ■

6.3. Vlnová rovnice

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina. Stejně jako výše označme

$$Q \stackrel{\text{def}}{=} \Omega \times (0, +\infty),$$
$$\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \partial\Omega \times (0, +\infty).$$

Uvažujme následující úlohu: najít funkci $u(x,t)\colon \overline{\Omega} \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ splňující

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \quad \text{na } Q, \tag{6.25}$$

$$u = 0 \quad \text{na } \Sigma, \tag{6.26}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{na } \Omega, \tag{6.27}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0(x) \quad \text{na } \Omega, \tag{6.28}$$

kde $\Delta = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ je Laplacův operátor v prostorových proměnných x, dále t je časová proměnná a u_0 a v_0 jsou dané funkce.

Rovnici (6.25) nazýváme *vlnovou rovnicí*. Operátor $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)$ se často značí $\Box$ a nazývá se d'Alembertův operátor. Vlnová rovnice je typickým příkladem *hyperbolické rovnice*.

Pro $N = 1$ a $\Omega = (0,1)$ modeluje rovnice (6.25) malé *kmitání struny* při absenci vnějších sil. Malé proto, že plná rovnice je velmi složitá nelineární rovnice, jejíž linearizace blízko ekvilibria (rovnovážného stavu) je rovnice (6.25). Pro každé t popisuje graf funkce $x \in \Omega \mapsto u(x,t)$ polohu struny v čase t. Pro $N = 2$ modeluje rovnice (6.25) malé *kmitání pružné membrány*. Pro každé t pak graf funkce $x \in \Omega \mapsto u(x,t)$ popisuje polohu membrány v čase t. Obecně rovnice (6.25) modeluje *šíření vlny* (zvukové, elektromagnetické atd.) v homogenním pružném prostředí $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.

Rovnice (6.26) je (homogenní) Dirichletova okrajová podmínka. Ta může být nahrazena Neumannovou nebo i jinou podmínkou. Podmínka $u = 0$ na Σ znamená, že struna (nebo membrána) je pevně uchycená na $\partial\Omega$, zatímco Neumannova podmínka říká, že struna je v koncových bodech volná.

Rovnice (6.27) a (6.28) popisují počáteční stav soustavy, a to *počáteční rozložení* (počáteční výchylku) popsané funkcí u_0 a *počáteční rychlost* popsanou funkcí v_0. Data (u_0, v_0) jsou též nazývány *Cauchyho data*.

Pro zjednodušení situace budeme ve zbytku této sekce předpokládat, že Ω je třídy C^∞ s omezenou $\partial\Omega$.

Věta 6.12 (existence a jednoznačnost)**.** *Nechť $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ a $v_0 \in H_0^1(\Omega)$. Potom existuje jednoznačné řešení u úlohy* (6.25)*,* (6.26)*,* (6.27)*,* (6.28) *splňující*

$$\begin{aligned} u \in\ & C([0,+\infty), H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,+\infty), H_0^1(\Omega)) \\ & \cap C^2([0,+\infty), L^2(\Omega)). \end{aligned} \tag{6.29}$$

Navíc platí

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} = \|v_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u_0\|^2_{L^2(\Omega)} \quad \forall t \geq 0, \tag{6.30}$$

kde

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right|^2 \mathrm{d}x$$

a

$$\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^N \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t)\right|^2 \mathrm{d}x.$$

Poznámka 6.13. Rovnice (6.30) je zákon zachování, který říká, že energie soustavy se v čase nemění.

Před důkazem Věty 6.12 zmiňme ještě větu o regularitě.

Věta 6.14 (regularita)**.** *Předpokládejme, že počáteční podmínky splňují*

$$u_0 \in H^k(\Omega) \quad a \quad v_0 \in H^k(\Omega) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

a podmínky kompatibility

$$\Delta^j u_0 = \Delta^j v_0 = 0 \ na\ \partial\Omega \quad \forall j \in \{0,1,2,\dots\}.$$

Potom řešení u *úlohy* (6.25)*,* (6.26)*,* (6.27)*,* (6.28) *patří do* $C^\infty(\overline{\Omega} \times [0,+\infty))$.

Důkaz Věty 6.12. Stejně jako v sekci 6.1 se budeme na $u(x,t)$ dívat jako na zobrazení definované na $[0,+\infty)$ takové, že pro každé $t \geq 0$ je jeho hodnota $u(t)$ zobrazení $x \mapsto u(x,t)$. Rovnici (6.25) přepíšeme ekvivalentně ve tvaru soustavy dvou rovnic prvního řádu

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - v = 0 & \text{na } Q, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - \Delta u = 0 & \text{na } Q \end{cases} \tag{6.31}$$

(standardně se diferenciální rovnice k-tého řádu přepisuje jako soustava k rovnic prvního řádu). Označíme-li $U \stackrel{\text{def}}{=} (u,v)^T$, přejde (6.31) do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + AU = 0,$$

kde

$$AU \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ -\Delta u \end{pmatrix}. \tag{6.32}$$

Nyní aplikujeme Hillovu-Yosidovu teorii v prostoru $H = H^1_0(\Omega) \times L^2(\Omega)$ se skalárním součinem

$$(U_1, U_2) = \int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 \mathrm{d}x + \int_\Omega u_1 u_2 \mathrm{d}x + \int_\Omega v_1 v_2 \mathrm{d}x,$$

kde $U_1 = (u_1, v_1)^T$ a $U_2 = (u_2, v_2)^T$.

Uvažujme neomezený operátor $A\colon D(A) \subset H \to H$ definovaný (6.32) s

$$D(A) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega).$$

Poznamenejme, že okrajová podmínka (6.26) je zahrnuta ve volbě prostoru H. Podmínka $v = \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ na Σ je přímým důsledkem (6.26).

Tvrdíme, že $A + I$ je maximální monotónní na H.

(i) $A + I$ je monotónní. Pro $U = (u, v)^T \in D(A)$ skutečně máme

$$\begin{aligned}(AU, U)_H + \|U\|_H^2 &= -\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u - \int_\Omega uv + \int_\Omega (-\Delta u)v \\ &\quad + \int_\Omega u^2 + \int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega v^2 \\ &= \int_\Omega uv + \int_\Omega u^2 + \int_\Omega v^2 + \int_\Omega |\nabla u|^2 \geq 0.\end{aligned}$$

(ii) $A + I$ je maximální monotónní. To obnáší dokázat, že $A + 2I$ je na. Pro libovolné dané $F = (f, g)^T \in H$ tedy musíme dokázat existenci řešení soustavy $AU + 2U = F$, tj. soustavy

$$\begin{cases} -v + 2u = f & \text{na } \Omega, \\ -\Delta u + 2v = g & \text{na } \Omega, \end{cases} \tag{6.33}$$

kde

$$u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \quad \text{a} \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

Ze soustavy (6.33) plyne, že

$$-\Delta u + 4u = 2f + g. \tag{6.34}$$

Rovnice (6.34) má díky [**2**, Theorem 9.25] jednoznačné řešení $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Funkci $v \in H_0^1(\Omega)$ dostaneme jednoduše jako $v = 2u - f$. Tím máme řešení (6.33).

Použitím Hillovy-Yosidovy věty ([**2**, Theorem 7.4 a Remark 7.7]) dostáváme nyní existenci a jednoznačnost řešení úlohy

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + AU = 0 & \text{na } [0, +\infty), \\ U(0) = U_0, \end{cases}$$

kde

$$U \in C^1([0, +\infty), H) \cap C([0, +\infty), D(A)), \tag{6.35}$$

protože $U_0 = (u_0, v_0)^T \in D(A)$. Z (6.35) pak plyne (6.29).

K důkazu (6.30) stačí vynásobit rovnici (6.25) derivací $\frac{\partial u}{\partial t}$ a zintegrovat přes Ω. Využijeme při tom, že

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial t} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right|^2 \mathrm{d}x$$

a

$$\int_\Omega (-\Delta u)\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}x = \int_\Omega \nabla u \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\nabla u)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x.$$

■

Rejstřík

Literatura

[1] Adams, Robert A., *Sobolev spaces.* Pure and Applied Mathematics, Vol. 65. Academic Press, New York-London, 1975. xviii+268 pp.

[2] Brezis, Haim, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* Universitext. Springer, New York, 2011. xiv+599 pp. ISBN: 978-0-387-70913-0, 35-01 (46-01 46E35 46N20 47F05)

[3] Attouch, Hedy; Buttazzo, Giuseppe; Michaille, Gérard, *Variational analysis in Sobolev and BV spaces. Applications to PDEs and optimization.* MPS/SIAM Series on Optimization, 6. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA; Mathematical Programming Society (MPS), Philadelphia, PA, 2006. xii+634 pp. ISBN: 0-89871-600-4

[4] Dovgoshey, O.; Martio, O.; Ryazanov, V.; Vuorinen, M. The Cantor function. Expo. Math. 24 (2006), no. 1, 1–37.

[5] Fučík, S.; John, O.; Kufner, A.: Prostory funkcí I. (Integrovatelné funkce.) (MFF UK / Skripta.) Praha 1974.

[6] Gilbarg, David; Trudinger, Neil S. Elliptic partial differential equations of second order. Reprint of the 1998 edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. xiv+517 pp. ISBN: 3-540-41160-7.

[7] , König, Manfred; On Juliusz Schauder's paper on linear elliptic differential equations. Topol. Methods Nonlinear Anal. 11 (1998), no. 2, 351–360. 35J25 (35-03)

[8] Kufner, Alois; John, Oldřich; Fučík, Svatopluk Function spaces. Monographs and Textbooks on Mechanics of Solids and Fluids; Mechanics: Analysis. Noordhoff International Publishing, Leyden; Academia, Prague, 1977. xv+454 pp. ISBN: 90-286-0015-9.

[9] Leoni, Giovanni, *A first course in Sobolev spaces.* Graduate Studies in Mathematics, 105. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009. xvi+607 pp. ISBN: 978-0-8218-4768-8

[10] Malý, J.: `http://www.karlin.mff.cuni.cz/ maly/tmi07.pdf`

[11] McShane, E. J.; Extension of range of functions. Bull. Amer. Math. Soc. 40 (1934), no. 12, 837–842.

[12] Kolmogorov, A. N.; Fomin, S. V., *Introductory real analysis.* Translated from the second Russian edition and edited by Richard A. Silverman. Corrected reprinting. Dover Publications, Inc., New York, 1975. xii+403 pp, 46-01 (28-01)

[13] Rudin, Walter, *Analýza v reálném a komplexním oboru.* [Analysis in the real and complex domain] Translated from the second English edition by Ivan Netuka and Jiří Veselý. Academia, Prague, 1977. 463 pp

[14] Rudin, Walter, *Functional analysis.* McGraw-Hill Series in Higher Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York-Düsseldorf-Johannesburg, 1973. xiii+397 pp.

[15] J. Schauder, Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen, Studia Math. 2 (1930), 171–180.

[16] Leray, Jean; Schauder, Jules Topologie et équations fonctionnelles. Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, Sér. 3, 51 (1934), p. 45-78.

[17] Vladimirov, V. S. *Equations of mathematical physics.* Translated from the Russian by Audrey Littlewood. Edited by Alan Jeffrey. Pure and Applied Mathematics, 3 Marcel Dekker, Inc., New York 1971 vi+418 pp.

[18] Stroock, D. W., Weyl's Lemma, One of Many, in *Groups and Analysis, The legacy of Hermann Weyl.*, Edited by Katrin Tent. London Mathematical Society Lecture Note Series, 354. Cambridge University Press, Cambridge, 2008. x+326 pp. ISBN: 978-0-521-71788-5

[19] Weyl, H., The method of orthogonal projection in potential theory, *Duke Math. J.*, **7** (1940), pp. 414 – 444.

[20] Yosida, Ksaku.; Hewitt, Edwin, Finitely additive measures. *Trans. Amer. Math. Soc.* 72, (1952), pp. 46–66.

[21] Zeidler, E. *Nonlinear functional analysis and its applications. I. Fixed-point theorems.* Translated from the German by Peter R. Wadsack. Springer-Verlag, New York, 1986. xxi+897 pp. ISBN: 0-387-90914-1

[22] Sobolev Spaces