



PARCIÁLNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Pavel Drábek a Gabriela Holubová



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pavel Drábek a Gabriela Holubová
Parciální diferenciální rovnice

© Pavel Drábek, Gabriela Holubová, 2011
ISBN

Předmluva

Text, který právě čtete, je záznamem přednášek předmětu *Parciální diferenciální rovnice*, který je v této formě na Fakultě aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni přednášen od akademického roku 1995/96. Jedná se o druhé, výrazným způsobem přepracované a doplněné vydání, které vzniklo v rámci řešení projektu „*Matematika pro inženýry 21. století – inovace výuky matematiky na technických školách v nových podmínkách rychle se vyvíjející informační a technické společnosti*“ (<http://mi21.vsb.cz>).

O parciálních diferenciálních rovnicích, které tvoří jeden z nejmocnějších nástrojů matematického modelování problémů reálného světa, v dnešní době existují stovky, možná tisíce knih (učebnic i monografií), které obsahují obrovské množství materiálu. To je na jedné straně výhoda, neboť díky tomuto faktu je dnes možné řešit celou řadu složitých problémů, na straně druhé však existence tak rozsáhlé literatury začátečníkům velmi ztěžuje orientaci v této problematice. Nejsou schopni rozlišit podstatné od nepodstatného, rozhodnout se, co studovat dříve a co odložit na pozdější dobu apod.

Protože naše přednáška není určena pouze studentům, kteří se chtějí v dalším studiu specializovat na matematiku, a protože v naší přednášce jde o první seznámení s parciálními diferenciálními rovnicemi, je náš text na velmi elementární úrovni. Naším cílem je, aby student pochopil, co to je parciální diferenciální rovnice, jak vzniká a proč je potřeba ji řešit. Chceme také, aby pochopil základní principy, které pro jednotlivé typy parciálních diferenciálních rovnic platí, a osvojil si některé klasické metody jejich řešení. V neposlední řadě chceme, aby si student uvědomil, že v současné době existuje celá řada programových balíčků, které může pro řešení řady speciálních typů parciálních diferenciálních rovnic využít, ale které mu bez pochopení podstaty věci nebudou příliš mnoho platné. Proto jsme se omezili pouze na základní typy rovnic a základní metody jejich zkoumání.

Rádi bychom na tomto místě zdůraznili, že velmi často pracujeme s pojmy pouze intuitivně a úmyslně se vyhýbáme některým definicím a přesným důkazům. Věříme, že tento způsob výkladu přispěje ke snadnější čitelnosti textu a zároveň vyniknou základní myšlenkové postupy a použité metody. Text obsa-

huje řadu řešených příkladů a ilustrativních obrázků. Na konci každé kapitoly je vždy několik cvičení, která dávají čtenáři šanci si aktivním způsobem procvičit studovanou problematiku. U komplikovaných a teoretických úloh je uveden návod k řešení, u příkladů založených na výpočtu čtenář nalezne očekávaný výsledek. Rádi bychom zdůraznili, že řešení může mít často i jiný tvar a jedinou kontrolou správnosti výpočtu je zkouška dosazením získaných výsledků do řešené rovnice.

Při omezeném rozsahu přednášky i tohoto textu si v žádném případě neklademe nárok na úplnost výkladu. Jde o výběr, který je subjektivní, ale který podle našeho názoru pokrývá to, co by měl znát a ovládat ten, kdo chce teorii parciálních diferenciálních rovnic dále používat nebo ji hlouběji studovat. Zabýváme se výhradně klasickými metodami, které jsou nezbytným východiskem pro další studium.

Nejedná se o naše první dílo tohoto druhu a proto jsme si dobře vědomi toho, že jej není možné napsat bez chyb a zároveň tak, abychom se zavděčili každému čtenáři. Proto se předem omlouváme za případné chyby a jsme otevřeni jakékoli kritice, ale i nekritické chvále.

Obsah

Předmluva	iii
1 Motivace, odvození základních matematických modelů	1
1.1 Zákony zachování	1
1.1.1 Evoluční zákon zachování	3
1.1.2 Stacionární zákon zachování	5
1.1.3 Zákon zachování v jedné dimenzi	5
1.2 Konstitutivní zákony	7
1.3 Základní modely	7
1.3.1 Proudění a transportní rovnice	8
1.3.2 Difuze v jedné dimenzi	9
1.3.3 Vedení tepla v jedné dimenzi	10
1.3.4 Vedení tepla ve třech dimenzích	11
1.3.5 Kmitání struny a vlnová rovnice	11
1.3.6 Vlnová rovnice ve dvou dimenzích – kmitající membrána	15
1.3.7 Laplaceova a Poissonova rovnice – stacionární případ	16
1.4 Cvičení	18
2 Klasifikace, typy rovnic, okrajových a počátečních podmínek	21
2.1 Základní typy rovnic	22
2.2 Obecné a generické řešení	23
2.3 Okrajové a počáteční podmínky	26
2.4 Korektní a nekorektní úloha	28
2.5 Klasifikace lineárních rovnic druhého řádu	29
2.6 Cvičení	32
3 Lineární parciální diferenciální rovnice prvního řádu	37
3.1 Rovnice s konstantními koeficienty	38
3.1.1 Geometrická interpretace – metoda charakteristik	38
3.1.2 Souřadnicová metoda	42
3.1.3 Metoda charakteristických souřadnic	43

3.2	Rovnice s nekonstantními koeficienty	45
3.2.1	Metoda charakteristik	45
3.2.2	Metoda charakteristických souřadnic	49
3.3	Úlohy s okrajovými podmínkami	50
3.4	Parametrické vyjádření řešení	56
3.5	Cvičení	60
4	Vlnová rovnice v jedné prostorové proměnné – počáteční úloha v $\mathbb{R}$	65
4.1	Obecné řešení vlnové rovnice	65
4.1.1	Převod na soustavu dvou rovnic prvního řádu	65
4.1.2	Metoda charakteristik	66
4.2	Počáteční úloha na přímce	67
4.3	Princip kauzality	73
4.4	Vlnová rovnice se zdrojem	74
4.4.1	Využití Greenovy věty	76
4.4.2	Operátorová metoda	77
4.5	Cvičení	79
5	Difuzní rovnice v jedné prostorové proměnné – počáteční úloha v $\mathbb{R}$	83
5.1	Počáteční úloha na přímce	83
5.2	Difuzní rovnice se zdrojem	91
5.3	Cvičení	94
6	Laplaceova a Poissonova rovnice ve dvou dimenzích	97
6.1	Invariantnost Laplaceova operátoru	97
6.2	Transformace Laplaceova operátoru do polárních souřadnic	98
6.3	Řešení Laplaceovy a Poissonovy rovnice v $\mathbb{R}^2$	99
6.3.1	Laplaceova rovnice	99
6.3.2	Poissonova rovnice	100
6.4	Cvičení	101
7	Řešení počátečně-okrajových úloh pro evoluční rovnice	105
7.1	Počátečně-okrajové úlohy na polopřímce	105
7.1.1	Difuze a vedení tepla na polopřímce	105
7.1.2	Vlna na polopřímce	107
7.1.3	Úlohy s nehomogenní okrajovou podmínkou	111
7.2	Počátečně-okrajová úloha na konečném intervalu – Fourierova metoda	112
7.2.1	Dirichletovy okrajové podmínky, vlnová rovnice	113

7.2.2	Dirichletovy okrajové podmínky, difuzní rovnice	118
7.2.3	Neumannovy okrajové podmínky	120
7.2.4	Newtonovy okrajové podmínky	122
7.2.5	Princip Fourierovy metody	127
7.3	Fourierova metoda pro nehomogenní úlohy	128
7.3.1	Nehomogenní rovnice	128
7.3.2	Nehomogenní okrajové podmínky a jejich transformace	130
7.4	Přechod k jednodušším úlohám	132
7.4.1	Boční přestup tepla povrchem tyče	132
7.4.2	Úloha s konvektivním členem	133
7.5	Cvičení	133
8	Řešení okrajových úloh pro stacionární rovnice	143
8.1	Laplaceova rovnice na obdélníku	144
8.2	Laplaceova rovnice na kruhu	146
8.3	Poissonova formule	148
8.4	Cvičení	149
9	Metody integrálních transformací	153
9.1	Laplaceova transformace	153
9.2	Fourierova transformace	159
9.3	Cvičení	165
10	Obecné principy	171
10.1	Princip kauzality (vlnová rovnice)	171
10.2	Zákon zachování energie (vlnová rovnice)	174
10.3	Nekorektní úloha (difuze pro záporná t)	177
10.4	Princip maxima (vedení tepla)	178
10.5	Energetická metoda (difuzní rovnice)	181
10.6	Princip maxima (Laplaceova rovnice)	182
10.7	Důsledky Poissonovy formule (Laplaceova rovnice)	183
10.8	Srovnání vlnové, difuzní a Laplaceovy rovnice	186
10.9	Cvičení	186
11	Laplaceova a Poissonova rovnice ve vyšších dimenzích	191
11.1	Invariantnost Laplaceova operátoru	191
11.2	První Greenova identita	194
11.3	Vlastnosti harmonických funkcí	195
11.3.1	Věta o průměru a silný princip maxima	195
11.3.2	Dirichletův princip	197
11.3.3	Jednoznačnost řešení Dirichletovy úlohy	198

11.3.4	Nutná podmínka řešitelnosti Neumannovy úlohy	198
11.4	Druhá Greenova identita a věta o reprezentaci	199
11.5	Greenova funkce okrajové úlohy	201
11.6	Dirichletova úloha na poloprostoru a na kouli	203
11.6.1	Dirichletova úloha na poloprostoru	203
11.6.2	Dirichletova úloha na kouli	206
11.7	Cvičení	210
12	Difuzní rovnice ve vyšších dimenzích	213
12.1	Počáteční úloha v $\mathbb{R}^3$	213
12.1.1	Homogenní úloha	213
12.1.2	Nehomogenní úloha	216
12.2	Difuze na omezených oblastech, Fourierova metoda	216
12.2.1	Fourierova metoda	217
12.2.2	Nehomogenní úlohy	226
12.3	Obecné principy pro difuzní rovnici	226
12.4	Cvičení	227
13	Vlnová rovnice ve vyšších dimenzích	231
13.1	Počáteční úloha v $\mathbb{R}^3$ – Kirchhoffova formule	231
13.2	Počáteční úloha v $\mathbb{R}^2$	234
13.3	Vlna se zdrojem v $\mathbb{R}^3$	237
13.4	Charakteristiky, singularity, energie a princip kauzality	239
13.4.1	Charakteristiky	239
13.4.2	Energie	240
13.4.3	Princip kauzality	241
13.5	Vlna na omezených oblastech, Fourierova metoda	243
13.6	Cvičení	260
A	Sturmova-Liouvilleova úloha	265
B	Besselovy funkce	267
	Typické úlohy	273
	Značení	275
	Literatura	277
	Rejstřík	279

1

Kapitola

Motivace, odvození základních matematických modelů

Vznik a rozvoj teorie parciálních diferenciálních rovnic byly úzce spjaty s fyzikálními vědami a se snahou popsat jazykem matematiky co možná nejpřesněji (zároveň však relativně jednoduše) některé fyzikální děje a jevy. S nástupem nových oborů však takto vybudovaný matematický aparát nacházel uplatnění i mimo fyziku. Šíře a složitost zkoumaných problémů dala vzniknout novému odvětví nazvanému *matematické modelování*. Teorie parciálních diferenciálních rovnic se vyčlenila v jeho rámci jako samostatná vědní disciplína. Přesto však studium parciálních diferenciálních rovnic zůstává těsně svázáno s popisem – modelováním – fyzikálních či jiných jevů.

V úvodní kapitole nastíníme odvození několika základních matematických modelů, kterým se budeme v dalším textu podrobněji věnovat.

1.1 Zákony zachování

Matematickým modelem v našem textu rozumíme matematickou úlohu, jejíž řešení popisuje chování zkoumaného systému. Obecně je matematický model zjednodušeným matematickým popisem (fyzikální) reality. V našem případě se budeme zabývat modely popsány parciálními diferenciálními rovnicemi, tj. diferenciálními rovnicemi se dvěma a více nezávislými proměnnými.

Při studiu přírodních, technických, ekonomických, biologických, chemických a dokonce i sociálních jevů a dějů můžeme často pozorovat snahu dosáhnout jisté rovnováhy mezi příčinami a jejich následky, případně snahu tuto rovnováhu narušit. Velká část matematických modelů tedy vychází z tzv. bilančních zákonů nebo principů, které vyjadřují právě takovou rovnováhu mezi *stavovými veličinami* a *tokovými veličinami* a jejich prostorovými a časovými změnami.

Uvažujme prostředí (těleso, tekutinu, plyn, pevnou látku apod.), které vyplňuje danou oblast

$$\Omega \subset \mathbb{R}^N.$$

V tomto případě N značí prostorovou dimenzi. V reálných situacích se obvykle pohybujeme ve třech prostorových dimenzích, tj. $N = 3$, ve zjednodušených modelech se často omezujeme na případ $N = 2$ nebo $N = 1$. Stavovou funkci (stav) uvažovaného prostředí v místě $\mathbf{x}$ a čase t budeme značit

$$u = u(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in \langle 0, T \rangle \subset \langle 0, +\infty \rangle.$$

Většinou budeme uvažovat skalární stavovou funkci, obecně ale může jít i o funkci vektorovou nebo tenzorovou. Funkci toku (obvykle vektorovou) téhož prostředí budeme značit

$$\phi = \phi(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in \langle 0, T \rangle \subset \langle 0, +\infty \rangle.$$

Hustota rozložení zdrojů v místě $\mathbf{x}$ a čase t je většinou značena skalární funkcí

$$f = f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in \langle 0, T \rangle \subset \langle 0, +\infty \rangle.$$

Nechť $\Omega_B \subset \Omega$ je libovolná vnitřní podoblast (tzv. *bilanční oblast*) oblasti Ω . Integrál

$$U(\Omega_B, t) = \int_{\Omega_B} u(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x}$$

pak můžeme chápat jako celkové množství uvažované veličiny u obsažené v bilanční oblasti Ω_B v čase t . Integrál

$$U(\Omega_B, t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega_B} u(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} \, dt$$

představuje celkové množství veličiny u v Ω_B během časového intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle \subset \langle 0, T \rangle$. (Množina $\Omega_B \times \langle t_1, t_2 \rangle$ se nazývá časoprostorová bilanční oblast.)

Pokud například stavová funkce $u(\mathbf{x}, t)$ odpovídá hmotnostní hustotě $\varrho(\mathbf{x}, t)$, pak integrál

$$m(\Omega_B, t) = \int_{\Omega_B} \varrho(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x}$$

představuje hmotnost substance v bilanční oblasti Ω_B v čase t , zatímco hodnota

$$m(\Omega_B, t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega_B} \varrho(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} \, dt$$

vystihuje celkovou hmotnost substance obsažené v Ω_B během časového intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$.

Pokud symbolem $\partial\Omega_B$ označíme hranici bilanční oblasti Ω_B , pak hraniční integrál (tj. plošný integrál v $\mathbb{R}^3$, křivkový integrál v $\mathbb{R}^2$)

$$\Phi(\partial\Omega_B, t) = \int_{\partial\Omega_B} \phi(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \, dS$$

reprezentuje množství dané veličiny „protékající“ hranicí $\partial\Omega_B$ ve směru vnější normály $\mathbf{n}$ v čase t . Podobně integrál

$$\Phi(\partial\Omega_B, t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\Omega_B} \phi(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \, dS \, dt$$

odpovídá celkovému množství dané veličiny, které protéklo hranicí $\partial\Omega_B$ ve směru vnější normály $\mathbf{n}$ během časového úseku $\langle t_1, t_2 \rangle$.

Jak jsme již uvedli výše, hustota zdrojů v bodě $\mathbf{x}$ a čase t je obvykle popsána funkcí $f = f(\mathbf{x}, t)$. Integrál

$$F(\Omega_B, t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega_B} f(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} \, dt$$

reprezentuje celkovou produkci zdrojů v oblasti Ω_B během časového intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$.

1.1.1 Evoluční zákon zachování

Pokud se modelovaný systém vyvíjí nezanedbatelným způsobem v čase, hovoříme o *evolučním (nestacionárním) procesu*. Pro odvození bilančního principu takového procesu zvolíme libovolnou bilanční oblast $\Omega_B \subset \Omega$ a libovolný časový interval $\langle t_1, t_2 \rangle \subset \langle 0, \infty \rangle$. Pro jednoduchost budeme uvažovat skalární stavovou funkci $u = u(\mathbf{x}, t)$, vektorovou funkci toku $\phi = \phi(\mathbf{x}, t)$ a skalární funkci popisující rozložení zdrojů $f = f(\mathbf{x}, t)$.

Základní bilanční zákon říká, že změna celkového množství veličiny u obsažené v oblasti Ω_B mezi časy t_1 a t_2 se musí rovnat celkovému množství veličiny

protekly přes hranici $\partial\Omega_B$ během období od t_1 do t_2 a přírůstku (nebo úbytku) veličiny vyprodukované zdroji (nebo pohlcené norami) uvnitř Ω_B během časového intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$. V jazyce matematiky můžeme toto tvrzení zapsat následovně

$$(1.1) \quad \boxed{\begin{aligned} & \int_{\Omega_B} u(\mathbf{x}, t_2) d\mathbf{x} - \int_{\Omega_B} u(\mathbf{x}, t_1) d\mathbf{x} \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\Omega_B} \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega_B} f(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} dt. \end{aligned}}$$

Znaménko minus před prvním členem na pravé straně odpovídá skutečnosti, že tok chápeme jako kladný při pohybu směrem ven. Rovnost (1.1) představuje *evoluční zákon zachování v integrálním (globálním) tvaru*.

Pokud předpokládáme, že funkce u má spojitou parciální derivaci vzhledem k proměnné t , můžeme rozdíl $u(\mathbf{x}, t_2) - u(\mathbf{x}, t_1)$ zapsat jako $\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) dt$ a zaměnit pořadí integrace na levé straně rovnosti (1.1):

$$(1.2) \quad \begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega_B} \frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} dt \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\Omega_B} \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega_B} f(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} dt. \end{aligned}$$

Jelikož jsme časový interval $\langle t_1, t_2 \rangle$ zvolili libovolně, můžeme (za předpokladu spojitosti příslušných funkcí vzhledem k časové proměnné) přejít ke vztahu

$$(1.3) \quad \int_{\Omega_B} \frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = - \int_{\partial\Omega_B} \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS + \int_{\Omega_B} f(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}.$$

Pokud dále předpokládáme, že funkce $\boldsymbol{\phi}$ je spojitě diferencovatelná vzhledem ke svým prostorovým proměnným, můžeme použít Gaussovu-Ostrogradského větu (někdy též uváděnou pod názvem věta o divergenci), podle které platí

$$\int_{\partial\Omega_B} \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS = \int_{\Omega_B} \operatorname{div} \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}.$$

Po dosazení tohoto vztahu bude mít rovnost (1.3) tvar

$$(1.4) \quad \int_{\Omega_B} \frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{\Omega_B} (-\operatorname{div} \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}, t) + f(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x}.$$

Protože jsme bilanční oblast Ω_B zvolili naprosto libovolně, musí rovnost platit i pro samotné integrandy v (1.4) (za předpokladu spojitosti všech funkcí vzhledem k prostorovým proměnným). Odtud dostáváme evoluční zákon zachování v tzv. *lokálním (diferenciálním) tvaru*

$$(1.5) \quad \boxed{\frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div} \phi(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t).}$$

Vztah (1.5) představuje jednu rovnici pro dvě neznámé funkce u a ϕ . Funkce f popisující rozložení zdrojů je obvykle dána, může však záviset na proměnných $\mathbf{x}, t$ i nepřímo prostřednictvím veličiny u , tj. můžeme mít $f = f(\mathbf{x}, t, u(\mathbf{x}, t))$.

1.1.2 Stacionární zákon zachování

V některých případech nás nezajímá vývoj uvažovaného systému v čase. Říkáme, že studujeme *stacionární stav* nebo chování systému v *ustáleném (rovnovážném) stavu*. Znamená to, že všechny veličiny uvažujeme nezávislé na čase (tj. jejich časové derivace jsou nulové). V takových případech pracujeme se zjednodušenou verzí zákona zachování. Stacionární zákon zachování v globálním tvaru je pak popsán vztahem

$$(1.6) \quad \int_{\partial\Omega_B} \phi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \, dS = \int_{\Omega_B} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

a jeho lokální verzi můžeme zapsat jako

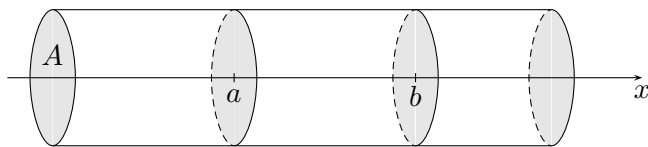
$$(1.7) \quad \operatorname{div} \phi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$$

(za předpokladu spojitosti všech uvedených funkcí a jejich prostorových derivací).

1.1.3 Zákon zachování v jedné dimenzi

V některých situacích lze předpokládat, že všechny významné změny systému probíhají pouze v jednom směru (např. modelujeme-li proudění v dostatečně široké trubici a nezajímá nás situace u stěn trubice, anebo – naopak – modelujeme-li chování tenké struny nebo úzké tyče s konstantním průřezem). V takových případech můžeme náš model zredukovat do jedné prostorové dimenze. Jelikož se jednorozměrný základní zákon zachování v některých drobných aspektech liší od obecného zákona (např. tok ϕ je skalární funkce), uvedeme ho zde zvlášť.

Uvažujme trubici s konstantním průřezem A , na ní libovolný (avšak pevný) úsek $a \leq x \leq b$, časový interval $\langle t_1, t_2 \rangle$ a veličinu o hustotě u . Zákon zachování



Obrázek 1.1: Izolovaná trubice s průřezem A . Uvažované veličiny se mění pouze ve směru osy x .

opět říká, že změna celkového množství dané veličiny v prostorovém úseku $\langle a, b \rangle$ mezi časy t_1 a t_2 musí být rovna celkovému toku bodem $x = a$ zmenšenému o celkový tok bodem $x = b$ od času t_1 do t_2 a celkové bilanci zdrojů v intervalu $\langle a, b \rangle$ a časovém rozmezí $\langle t_1, t_2 \rangle$:

$$(1.8) \quad \boxed{\begin{aligned} & \int_a^b u(x, t_2) dx - \int_a^b u(x, t_1) dx \\ &= \int_{t_1}^{t_2} (\phi(a, t) - \phi(b, t)) dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_a^b f(x, t) dx dt. \end{aligned}}$$

Tato rovnost představuje *jednorozměrný zákon zachování v integrálním (globálním) tvaru* (nechť jej čtenář porovná s obecným vyjádřením (1.1)). Pokud jsou funkce u a ϕ dostatečně hladké, můžeme stejně jako v obecném vícerozměrném případě přejít k diferenciální formulaci.

Pokud má konkrétně hustota u spojitou parciální derivaci vzhledem k času t a tok ϕ spojitou parciální derivaci vzhledem k prostorové proměnné x , můžeme vztah (1.8) přepsat do tvaru

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_a^b [u_t(x, t) + \phi_x(x, t) - f(x, t)] dx dt = 0.$$

Jelikož jsme intervaly $\langle a, b \rangle$ a $\langle t_1, t_2 \rangle$ volili zcela libovolně, musí být integrand identicky roven nule, tj.

$$(1.9) \quad \boxed{u_t(x, t) + \phi_x(x, t) = f(x, t).}$$

Rovnost (1.9) je lokální verzí vztahu (1.8) a vyjadřuje *jednorozměrný zákon zachování v diferenciálním (lokálním) tvaru* (opět porovnejte s obecným vztahem (1.5)).

Pokud modelujeme jednorozměrný stacionární jev, použijeme stacionární verzi předchozího zákona zachování, tj.

$$(1.10) \quad \phi_x(x) = f(x),$$

což není nic jiného než obyčejná diferenciální rovnice pro neznámou funkci ϕ .

1.2 Konstitutivní zákony

Jak jsme již zmínili dříve, zákon zachování představuje jednu rovnici pro dvě neznámé funkce: stavovou veličinu u a tok ϕ . K vytvoření matematického modelu potřebujeme ještě další vazbu mezi těmito veličinami. U konkrétních procesů a jevů mají stavové a tokové funkce své konkrétní názvy a značení. Například při popisu termodynamických dějů obvykle používáme tyto veličiny:

stavové veličiny:	hustota	tokové veličiny:	rychlost
	tlak		hybnost
	teplota		napětí
	entropie		tepelný tok

Otázky vzájemné závislosti nebo nezávislosti těchto parametrů bývají velice komplikované a jsou úzce spojené s volbou matematického modelu. Vztahy mezi stavovými veličinami a odpovídajícími tokovými veličinami jsou obvykle založeny na zobecnění experimentálních pozorování a závisí na vlastnostech konkrétního prostředí nebo materiálu. Obvykle je nazýváme *konstitutivními zákony* nebo *materiálovými vztahy*.

Příkladem konstitutivního vztahu z teorie pružnosti je *Hookův zákon*, který říká, že mezi napětím (tokovou veličinou) a příslušným posuvem, resp. deformací (stavovou veličinou) je za určitých podmínek lineární závislost.

1.3 Základní modely

Na závěr této kapitoly odvodíme jednoduché matematické modely několika základních fyzikálních procesů: unášení nečistoty proudící tekutinou, difuze v úzké trubici i v trojrozměrné nádobě, vedení tepla v tyči i v trojrozměrném tělese a kmitání tenké struny a dvojrozměrné membrány. Matematickým popisem jejich evolučního a stacionárního chování získáme transportní, difuzní, vlnovou a Laplaceovu rovnici, které představují fundamentální lineární parciální diferenciální rovnice. Znalost jejich vlastností a metod řešení patří k základům klasické teorie parciálních diferenciálních rovnic a jejich studium bude tvořit stěžejní část tohoto textu.

1.3.1 Proudění a transportní rovnice

Jednorozměrný evoluční model, ve kterém je tok přímo úměrný hustotě, tedy

$$\phi = cu,$$

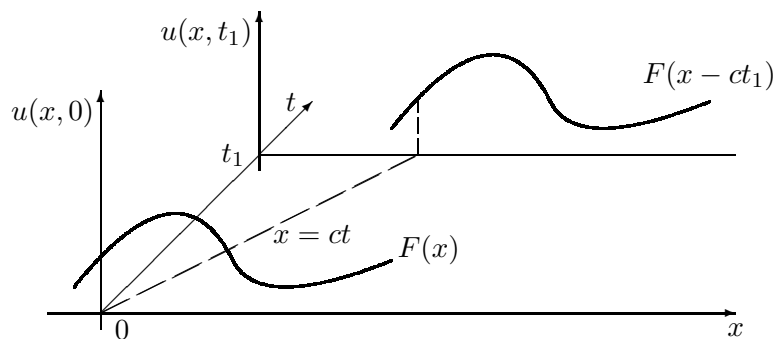
kde c je konstanta, popisuje např. unášení látky v trubici s proudící tekutinou. Veličina u zde představuje koncentraci unášené látky (řekněme nečistoty) a parametr c odpovídá rychlosti proudění. Do modelu není zahrnuta difuze. Dosadíme-li takto vyjádřený tok do jednorozměrného základního zákona zachování (1.9) a budeme-li uvažovat, že rychlost proudění $c > 0$ je konstantní a zdroje f nulové, dostáváme tzv. *transportní rovnici* (pro neznámou koncentraci u)

$$(1.11) \quad \boxed{u_t + cu_x = 0.}$$

Jak ukážeme později, řešením rovnice (1.11) je funkce

$$(1.12) \quad \boxed{u(x, t) = F(x - ct),}$$

kde F je libovolná diferencovatelná funkce. Takové řešení se nazývá *pravá postupná vlna* (anglicky: *right travelling wave*), protože grafem funkce $F(x - ct)$ je graf $F(x)$ posunutý doprava o hodnotu ct . Tedy s rostoucím časem se profil $F(x)$ pohybuje nezměněn doprava rychlostí c (viz obrázek 1.2).



Obrázek 1.2: *Postupná vlna.*

Pokud je rychlostní parametr c záporný, což odpovídá tomu, že tekutina a stejně tak unášená látka proudí *doleva* rychlostí $|c|$, řešení $u(x, t) = F(x - ct)$ se nazývá *levá postupná vlna*.

Pokud je tok ϕ nelineární funkcí hustoty u , dostává zákon zachování (pro $f = 0$) podobu

$$(1.13) \quad u_t + (\phi(u))_x = u_t + \phi'(u)u_x = 0.$$

Tento vztah modeluje nelineární transport, který je ovšem z hlediska další analýzy mnohem komplikovanější.

Proudění s rozpadem. Z teorie obyčejných diferenciálních rovnic je známo, že rozpad (např. radioaktivní) lze popsat vztahem

$$\frac{du}{dt} = -\lambda u,$$

kde u je počet dosud nerozpadlých částic v čase t a λ je rychlost rozpadu. Chování radioaktivní chemikálie unášené trubicí rychlostí c lze tedy modelovat rovnicí

$$(1.14) \quad \boxed{u_t + cu_x = -\lambda u.}$$

V tomto případě je opět $\phi = cu$ a $f = -\lambda u$ popisuje zdroje dané rozpadem částic.

1.3.2 Difuze v jedné dimenzi

Studujeme chování plynu v jednodimenzionální trubici. Koncentraci plynu v místě x a v čase t označme $u = u(x, t)$ (stavová funkce) a odpovídající hustotu toku označme $\phi = \phi(x, t)$ (toková funkce). Pokud neuvažujeme žádné zdroje ($f = 0$), splňují obě veličiny jednodimenzionální zákon zachování (1.9) ve tvaru

$$u_t + \phi_x = 0.$$

Na základě pozorování lze usoudit, že molekuly plynu se pohybují z míst s vyšší koncentrací do míst s nižší koncentrací a čím větší je gradient koncentrace, tím větší je tok. Stejně chování můžeme pozorovat např. i u hmyzu v klimatizační rouře nebo u lidského davu v koridoru. Nejjednodušší vztah, jaký těmto předpokladům odpovídá, je lineární závislost

$$(1.15) \quad \phi = -ku_x,$$

kde k je konstanta úměrnosti. Znaménko minus zaručuje, že pokud je $u_x < 0$, pak ϕ je kladné a tok směřuje doprava. Vztah (1.15) se nazývá *Fickův zákon* a konstanta k *difuzní konstantou*. Dosadíme-li (1.15) do základního zákona

zachování, dostáváme tzv. jednodimenzionální *difuzní rovnici* (pro neznámou koncentraci u)

$$(1.16) \quad \boxed{u_t - ku_{xx} = 0.}$$

Proudění s difuzí. Pokud chceme do modelu zahrnout proudění i difuzi, pak musí pro tok platit konstitutivní vztah

$$\phi = cu - ku_x$$

a ze zákona zachování dostáváme rovnici

$$(1.17) \quad \boxed{u_t + cu_x - ku_{xx} = 0.}$$

Takto lze nalézt např. rozložení hustoty chemikálie, která je unášena proudící tekutinou s rychlostí c a zároveň do této tekutiny difunduje s difuzní konstantou k .

1.3.3 Vedení tepla v jedné dimenzi

Stejně předpoklady, z jakých jsme vycházeli při odvozování difuzní rovnice, lze uplatnit i na modelování vedení tepla. Uvažujme jednorozměrnou tyč s konstantní hustotou ρ a konstantní měrnou tepelnou kapacitou c . Označíme-li teplotu v bodě x a čase t funkcí $u = u(x, t)$, pak veličina $\rho cu(x, t)$ představuje hustotu tepelné energie. V tomto případě zákon zachování vyjadřuje rovnováhu mezi vnitřní energií ρcu a tepelným tokem ϕ :

$$(1.18) \quad (\rho cu)_t(x, t) + \phi_x(x, t) = 0$$

(pro jednoduchost zatím neuvažujeme žádné zdroje). Konstitutivním vztahem, který svazuje tok ϕ a teplotu u , zde bude *Fourierův tepelný zákon*, který říká, že tok je přímo úměrný gradientu teploty se zápornou konstantou úměrnosti, tedy

$$\phi = -Ku_x.$$

Konstanta K představuje součinitel tepelné vodivosti. Fourierův zákon je obdobou Fickova zákona: teplo proudí z teplejších oblastí do chladnějších. Dosadíme-li výše uvedené vztahy do základního zákona zachování (1.18), dostáváme

$$(1.19) \quad \boxed{u_t - ku_{xx} = 0, \quad k = \frac{K}{\rho c},}$$

což je opět difuzní rovnice v jedné dimenzi. (Konstanta k se nazývá tepelná difuzivita.) Oba jevy, vedení tepla i difuzi, lze tedy modelovat toutéž rovnicí.

1.3.4 Vedení tepla ve třech dimenzích

Při odvození rovnice vedení tepla ve více (v tomto případě ve třech) dimenzích, postupujeme podobným způsobem jako v jednorozměrném případě. Nechť Ω je prostorová oblast v $\mathbb{R}^3$ a nechť $u = u(x, y, z, t)$ značí teplotu v čase t a místě $(x, y, z) \in \Omega$. Předpokládejme, že materiál, který vyplňuje danou oblast, je homogenní a je charakterizován konstantní hustotou ρ a konstantní měrnou tepelnou kapacitou c . Vnitřní energie v místě (x, y, z) a čase t odpovídá veličině $c\rho u(x, y, z, t)$, tepelný tok je dán vektorovou funkcí $\phi = \phi(x, y, z, t)$ a rozložení tepelných zdrojů je popsáno skalární funkcí $f = f(x, y, z, t)$. Zákon zachování tepelné energie (v diferenciálním tvaru) vyjadřuje rovnováhu mezi těmito veličinami následujícím způsobem:

$$(1.20) \quad c\rho u_t + \operatorname{div} \phi = f$$

pro všechna $(x, y, z) \in \Omega$, $t > 0$.

Konstitutivním zákonem je v tomto případě trojrozměrná verze Fourierova tepelného zákona, a sice

$$\phi = -K \operatorname{grad} u.$$

Stejně jako v jednorozměrném případě tento zákon říká, že tepelný tok je přímo úměrný teplotnímu gradientu se zápornou konstantou úměrnosti (teplo proudí z teplejších oblastí do chladnějších). Uvědomíme-li si navíc, že platí

$$\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = \nabla \cdot \nabla u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz},$$

kde Δ značí Laplaceův operátor, dostáváme po dosazení do (1.20) konečnou podobu rovnice vedení tepla ve třech dimenzích

$$(1.21) \quad \boxed{u_t - k\Delta u = \frac{1}{c\rho} f.}$$

Tato rovnice rovněž vystihuje chování difundující látky v trojrozměrné oblasti, proto ji budeme opět nazývat (nehomogenní) *difuzní rovnicí*.

Analogicky bychom dostali stejné vyjádření i v případě dvoudimenzionálního problému. Laplaceův operátor by pak měl podobu $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$.

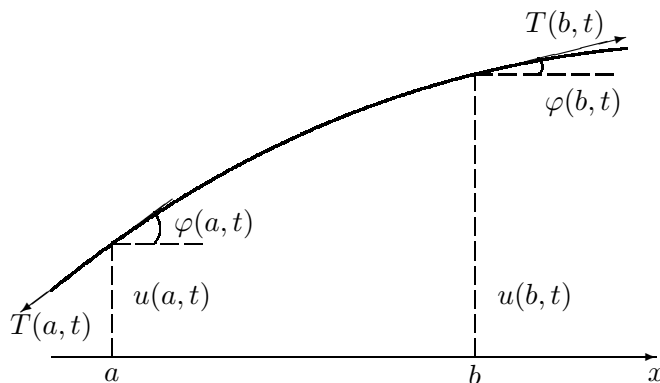
1.3.5 Kmitání struny a vlnová rovnice

V předchozích odstavcích jsme odvodili transportní a difuzní rovnici standardním způsobem: dosadili jsme konkrétní konstitutivní vztah do základního zákona zachování a získali odpovídající model. Nyní budeme postupovat poněkud odlišným způsobem a odvodíme další základní parciální diferenciální rovnici,

tzv. *vlnovou rovnici*, která popisuje jeden z nejčastějších jevů v přírodě: vlnění (zmiňme např. elektromagnetické vlnění, vlny na vodní hladině nebo akustické vlny).

Uvažujme pružnou strunu délky l a předpokládejme, že dochází pouze k malým kmitům ve vertikálním směru. Výchylku v bodě x a čase t popíšeme spojitě diferencovatelnou funkcí $u(x, t)$. Vlastnosti struny jsou popsány spojitými funkcemi $\rho(x, t)$ a $T(x, t)$, které představují hustotu a vnitřní napětí struny v bodě x a čase t . Předpokládáme, že napětí $T(x, t)$ má vždy směr tečny k profilu struny v bodě x . Uvažujme nyní libovolný, avšak pevný úsek struny mezi body $x = a$, $x = b$ (viz obrázek 1.3). Úhel, který svírá tečna v daném bodě s horizontálou, je spojitá funkce, kterou označíme $\varphi(x, t)$. Všimněme si, že platí

$$(1.22) \quad \operatorname{tg} \varphi(x, t) = u_x(x, t).$$



Obrázek 1.3: Úsek struny.

K odvození rovnice popisující pohyb struny použijeme tentokrát Newtonův pohybový zákon, který říká, že změna hybnosti v daném úseku je rovna působící síle. Budeme předpokládat, že jedinou silou, která na úsek struny působí, je napětí vyvolané okolními částmi struny (tíhu a tlumení prozatím neuvažujeme). Protože v horizontálním směru nedochází k žádnému pohybu, musí platit

$$(1.23) \quad T(b, t) \cos \varphi(b, t) - T(a, t) \cos \varphi(a, t) = 0.$$

Jelikož jsme interval $\langle a, b \rangle$ volili libovolně, nezávisí veličina $T(x, t) \cos \varphi(x, t)$ na proměnné x . Označme

$$(1.24) \quad \tau(t) = T(x, t) \cos \varphi(x, t).$$

Ve vertikálním směru získáme kinetickou rovnici pro hledanou výchylku u z pohybového zákona:

$$(1.25) \quad \frac{d}{dt} \int_a^b \rho(x, t) u_t(x, t) \sqrt{1 + u_x(x, t)^2} dx = \\ = T(b, t) \sin \varphi(b, t) - T(a, t) \sin \varphi(a, t).$$

(Výraz $\sqrt{1 + u_x(x, t)^2} dx$ představuje element obloukové délky.) Všimněme si, že tento vztah odpovídá jednodimenzionálnímu zákonu zachování (1.3) s hybností jako uvažovanou veličinou. Abychom mohli přejít k lokální verzi, využijeme další zákon zachování – zákon zachování hmotnosti. Ten říká, že časová změna celkové hmotnosti daného segmentu je nulová. (Zde je uvažovanou veličinou hmotnost, tok i zdroje jsou nulové.) Jinými slovy to znamená, že hmotnost daného úseku v libovolném čase t musí být rovna hmotnosti téhož úseku v čase $t = 0$. Označíme-li $\rho_0(x) = \rho(x, 0)$ a budeme-li uvažovat, že na počátku, tj. v čase $t = 0$, je struna v rovnovážné poloze $u(x, 0) \equiv u_0 = \text{konst.}$, dostáváme rovnost

$$\int_a^b \rho(x, t) \sqrt{1 + u_x(x, t)^2} dx = \int_a^b \rho_0(x) dx.$$

Interval $\langle a, b \rangle$ jsme však volili libovolně, musí tedy platit

$$(1.26) \quad \rho(x, t) \sqrt{1 + u_x(x, t)^2} = \rho_0(x)$$

pro všechna x a t .

Nyní se můžeme vrátit ke kinetické rovnici (1.25). Využijeme-li vztah (1.26) a zaměníme-li pořadí derivování a integrování (což opět vyžaduje dostatečnou hladkost uvažovaných funkcí), dostáváme

$$(1.27) \quad \int_a^b \rho_0(x) u_{tt}(x, t) dx = T(b, t) \sin \varphi(b, t) - T(a, t) \sin \varphi(a, t).$$

Pravou stranu vztahu (1.27) můžeme s využitím (1.22) a (1.24) přepsat následujícím způsobem

$$T(b, t) \cos \varphi(b, t) \operatorname{tg} \varphi(b, t) - T(a, t) \cos \varphi(a, t) \operatorname{tg} \varphi(a, t) \\ = \tau(t)(u_x(b, t) - u_x(a, t)) = \tau(t) \int_a^b u_{xx}(x, t) dx.$$

Odtud dostáváme

$$\int_a^b \rho_0(x) u_{tt}(x, t) \, dx = \tau(t) \int_a^b u_{xx}(x, t) \, dx.$$

Tento vztah musí opět platit pro libovolný interval $\langle a, b \rangle$, můžeme tedy přejít k diferenciálnímu vyjádření

$$\rho_0(x) u_{tt}(x, t) = \tau(t) u_{xx}(x, t).$$

V případě, že $\rho_0(x) \equiv \rho_0$, $\tau(t) \equiv \tau_0$, a označíme-li $c = \sqrt{\tau_0/\rho_0}$, dospějeme k základní rovnici matematického modelování popisující kmitání struny v jedné dimenzi

$$(1.28) \quad \boxed{u_{tt} = c^2 u_{xx}.}$$

Rovnice (1.28) se nazývá *vlnová rovnice* a konstanta $c > 0$ vystihuje *rychlost šíření vlny*.

Základní vlnovou rovnici lze různými způsoby modifikovat.

- (i) V případě, že uvažujeme přítomnost *vnějšího tlumení* (např. odpor okolního prostředí), v rovnici se objeví člen úměrný rychlosti u_t :

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + r u_t = 0$$

s koeficientem *tlumení* $r > 0$.

- (ii) Pokud v rovnici uvažujeme *elastickou sílu* struny, dostáváme

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + k u = 0$$

s *tuhostí* $k > 0$.

- (iii) Pokud chceme do modelu zahrnout přítomnost *vnějšího buzení* popsaného funkcí $f(x, t)$, dostáváme *nehomogenní* vlnovou rovnici

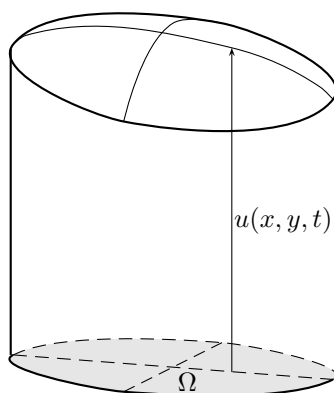
$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x, t).$$

- (iv) Všechny tyto vlivy můžeme kombinovat. Dostáváme pak rovnici tvaru

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + r u_t + k u = f(x, t).$$

1.3.6 Vlnová rovnice ve dvou dimenzích – kmitající membrána

Dvojměrnou analogií kmitající struny je vibrující membrána napjatá na pevném rámu. Uvažujme opět pouze vertikální kmity a výchylku v bodě (x, y) a čase t označme $u(x, y, t)$. Zvolme libovolnou pevnou podoblast Ω membrány (viz obrázek 1.4) a aplikujme Newtonův pohybový zákon a zákon zachování hmotnosti. Postupujeme stejným způsobem jako v jedné dimenzi (odstavec 1.3.5).



Obrázek 1.4: Kmitající membrána nad podoblastí Ω .

Aplikování obou zmíněných zákonů zachování vede ke vztahu

$$(1.29) \quad \iint_{\Omega} \rho_0(x, y) u_{tt}(x, y, t) \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} T(x, y, t) \frac{\partial u}{\partial n} \, ds$$

(srovnejte se vztahem (1.27) pro jednodimenzionální strunu). Zde $\partial\Omega$ značí hranici oblasti Ω a předpokládáme, že v každém bodě hranice $\partial\Omega$ existuje vektor normály. Funkce $T = T(x, y, t)$ představuje vnitřní napětí membrány a $\rho_0 = \rho_0(x, y)$ značí rozložení hustoty membrány v čase $t = 0$. Protože neuvažujeme pohyb v horizontálním směru, můžeme předpokládat, že $T(x, y, t)$ nezávisí na x a y , tj. musí platit $T(x, y, t) = \tau(t)$. Použijeme-li Greenovu větu, můžeme křivkový integrál na pravé straně rovnice (1.29) přepsat na integrál plošný:

$$\int_{\partial\Omega} \tau(t) \frac{\partial u}{\partial n} \, ds = \iint_{\Omega} \operatorname{div}(\tau(t) \operatorname{grad} u) \, dx \, dy.$$

Odtud tedy plyne

$$\iint_{\Omega} \rho_0(x, y) u_{tt}(x, y, t) \, dx \, dy = \iint_{\Omega} \tau(t) \underbrace{\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)}_{\Delta u} \, dx \, dy,$$

kde $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ je Laplaceův operátor ve dvou dimenzích. Jelikož jsme oblast Ω volili libovolně, můžeme (za předpokladu dostatečné hladkosti funkce u) přejít k diferenciálnímu vyjádření. Pokud budeme navíc uvažovat hustotu ρ_0 i napětí τ konstantní, tj. $\rho_0(x) = \rho_0$, $\tau(t) = \tau_0$, a označíme-li $c = \sqrt{\tau_0/\rho_0}$, dostaneme vztah

$$(1.30) \quad \boxed{u_{tt} = c^2 \Delta u.}$$

Je zřejmé, že obdobným způsobem bychom odvodili analogický vztah v trojrozměrném případě, kde však $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ je Laplaceův operátor ve třech dimenzích. Z fyzikálního hlediska by takový model popisoval vibrace v elastickém tělese, šíření zvukových vln vzduchem, šíření seismických vln v zemské kůře, elektromagnetické vlnění apod.

Je-li u ve vztahu (1.30) neznámou funkcí, pak mluvíme o vlnové rovnici ve dvou, respektive třech prostorových proměnných.

1.3.7 Laplaceova a Poissonova rovnice – stacionární případ

Při vyšetřování výše odvozených modelů nás často zajímá pouze chování v tzv. *rovnovážném (ustáleném) stavu*, tedy ve stavu, kdy řešení nezávisí na čase ($u_t = u_{tt} = 0$). Vlnová i difuzní rovnice pak v libovolné dimenzi přejde na *Laplaceovu rovnici*

$$(1.31) \quad \boxed{\Delta u = 0,}$$

která má ve dvou dimenzích tvar $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Řešením Laplaceovy rovnice jsou tzv. *harmonické funkce*.

Uvažujme např. těleso, které je zahříváno v peci. Předpokládáme, že teplota v peci není rozložena rovnoměrně (není prostorově konstantní). Po určitém čase dosáhne teplota v tělese rovnovážného stavu, který bude popsán právě harmonickou funkcí $u(x, y, z)$. V případě, že v peci bude teplota ve všech bodech stejná, bude rovnovážným stavem tělesa rovněž $u(x, y, z) = \text{konst.}$ V jednorozměrném případě si lze představit podélně izolovanou tenkou tyč, u které dochází k výměně tepla s okolím pouze přes její konce. Funkce u popisující teplotu v tyči pak závisí pouze na proměnné x . Laplaceova rovnice se zredukuje na tvar

$$u_{xx} = 0$$

a jejím řešením je lineární funkce $u(x) = c_1x + c_2$. Ve vícerozměrném případě je situace mnohem zajímavější.

Rovnovážný stav můžeme zkoumat i v případě, že jsou v modelu přítomny časově nezávislé zdroje. Vlnová i difuzní rovnice pak pro $u_t = u_{tt} = 0$ přejde na tvar

$$\Delta u = f,$$

což je tzv. *Poissonova rovnice*.

Kromě stacionární difuze a vlnění se s Laplaceovou a Poissonovou rovnicí můžeme setkat např. v následujících modelech.

Elektrostatika. Maxwellovy rovnice

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

popisují elektrostatické vektorové pole intenzity $\mathbf{E}$ v prostředí o konstantní permitivitě ε ; ρ značí objemovou hustotu elektrického náboje. Z první rovnice plyne existence tzv. *elektrického potenciálu*, kterým je skalární funkce ϕ splňující vztah $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi$. Dosadíme-li do druhé rovnice, dostáváme

$$\Delta \phi = \operatorname{div}(\operatorname{grad} \phi) = -\operatorname{div} \mathbf{E} = -\frac{\rho}{\varepsilon},$$

což je Poissonova rovnice s pravou stranou $f = -\frac{\rho}{\varepsilon}$.

Ustálené proudění. Předpokládejme, že modelujeme nevířivé proudění popsané rovnicí $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$, kde $\mathbf{v}$ je rychlost proudění (nezávislá na čase). Tato rovnice implikuje existenci skalární funkce ϕ (tzv. *rychlostního potenciálu*) takové, že $\mathbf{v} = -\operatorname{grad} \phi$. Dále předpokládejme, že proudící tekutina je nestlačitelná (např. voda) a proudění solenoidální (tj. beze zřídél a nor). Pak $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$. Dosadíme-li do tohoto vztahu potenciál ϕ , můžeme psát $-\Delta \phi = -\operatorname{div}(\operatorname{grad} \phi) = \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$. Dostáváme tedy Laplaceovu rovnici $\Delta \phi = 0$.

Holomorfní funkce komplexní proměnné. Označme $z = x + iy$ komplexní proměnnou a

$$f(z) = u(z) + iv(z) = u(x + iy) + iv(x + iy)$$

komplexní funkci proměnné z . Funkce u a v jsou reálné funkce komplexní proměnné z a představují reálnou a imaginární část funkce f . Jelikož lze Gaussovu komplexní rovinu ztotožnit s $\mathbb{R}^2$, můžeme chápat $u(z) = u(x, y)$, $v(z) = v(x, y)$ jako funkce dvou nezávislých reálných proměnných x a y . Teorie funkcí komplexní proměnné říká, že holomorfní funkce f na oblasti Ω (tj. komplexní funkce

f , která má derivaci $f'(z)$ v každém bodě $z \in \Omega$) je lokálně rozvinutelná v mocninnou řadu se středem v $z_0 \in \Omega$. Pokud $z_0 = 0$, má tento rozvoj funkce f tvar

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

kde a_n jsou komplexní konstanty. Dosadíme-li za f a z , dostáváme

$$u(x, y) + iv(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x + iy)^n.$$

Formálním derivováním této řady snadno odvodíme (proved'te!)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{a} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

což jsou tzv. *Cauchyovy-Riemannovy* podmínky derivovatelnosti komplexní funkce komplexní proměnné. Jejich dalším derivováním zjistíme, že

$$u_{xx} = v_{yx} = v_{xy} = -u_{yy},$$

tedy $\Delta u = 0$. Obdobně i $\Delta v = 0$. To znamená, že reálná i imaginární část libovolné holomorfní funkce jsou funkce harmonické.

1.4 Cvičení

1. Jak by se změnilo odvození zákona zachování (1.9) v případě trubice s proměnným průřezem $A = A(x)$?
2. Odvoďte model kmitající struny, který zahrnuje působení gravitační síly:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} - g.$$

Zde g je konstanta reprezentující gravitační zrychlení. Uvědomte si, že tíha působí ve svislém směru v každém bodě struny, tj. objeví se jako vnější zdroj v zákonu zachování hybnosti.

3. Odvoďte *vlnovou rovnici s tlumením*:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} - k u_t,$$

která popisuje kmitání struny, jejíž vertikální pohyb je zpomalován tlumící silou úměrnou rychlosti struny. Zde k je koeficient tlumení.

4. Uvažujte proces vedení tepla v dokonale podélně izolované tyči, bez vnitřních zdrojů tepla a s měrnou tepelnou kapacitou, hustotou hmotnosti a součinitelem tepelné vodivosti závislými na proměnné x , tj. $c(x)$, $\varrho(x)$ a $K(x)$. Vyjděte ze zákona zachování a odvoďte příslušnou rovnici vedení tepla.
5. Uvažujte dokonale podélně izolovanou tyč, avšak tentokrát s proměnným průřezem, tj. $A(x)$. Využijte zákon zachování odvozený ve cvičení 1 a Fourierův tepelný zákon (jako konstitutivní vztah) a odvoďte příslušnou rovnici vedení tepla.
6. Hustota aut na rušné jednoproudé dálnici bez výjezdů a nájezdů je v místě o souřadnici x a čase t dána funkcí $u = u(x, t)$ aut na kilometr. Nechť $\phi = \phi(x, t)$ udává tok aut měřený počtem aut za hodinu. Můžeme učinit následující pozorování. Pokud nejsou na dálnici žádná auta, je tok nulový. Zároveň existuje kritická hodnota hustoty aut, označme ji u_j , pro kterou nastává dopravní zácpa a tok je opět nulový. Dále musí existovat optimální hodnota u_m , $0 < u_m < u_j$, pro kterou je tok maximální. Pokuste se zformulovat jednoduchý konstitutivní zákon svazující u a ϕ a odvoďte základní (nelineární) model dopravního proudu.

[Dopravní konstitutivní zákon může mít např. podobu $\phi = u(u_j - u)$ a příslušný dopravní model má tvar $u_t + u_j u_x - 2uu_x = 0$.]

7. Odvoďte nelineární rovnici popisující chování bakterií v jednorozměrné trubici za předpokladu, že se populační růst řídí logistickým zákonem $ru(1 - u/K)$. Zde $u = u(x, t)$ značí koncentraci bakterií, r je růstová konstanta a K představuje kapacitu prostředí. Využijte základní zákon zachování s tokem $\phi = -Du_x$ (bakterie difundují uvnitř trubice s difuzní konstantou D) a zdrojem $f = ru(1 - u/K)$, který vystihuje reprodukci populace.

[Výsledný model $u_t - Du_{xx} = ru(1 - u/K)$ je znám jako *Fisherova rovnice*.]

8. Odvoďte tzv. *Burgersovu rovnici*

$$u_t - Du_{xx} + uu_x = 0,$$

která popisuje vazbu mezi nelineárním prouděním a difuzí v mechanice tekutin. Využijte jednorozměrný zákon zachování (1.9) beze zdrojů a konstitutivní vztah $\phi = -Du_x + \frac{1}{2}u^2$. Zde první člen představuje difuzní proces, zatímco druhý člen odpovídá nelineárnímu transportu.

9. Ukažte, že Burgersovu rovnici $u_t - Du_{xx} + uu_x = 0$ lze transformovat na difuzní rovnici $\varphi_t - D\varphi_{xx} = 0$ pomocí *Coleovy-Hopfovy transformace* $u = \psi_x$, $\psi = -2D \ln \varphi$.

10. Modelujte elektrické vedení, které není dobře odizolované od země. Uvažujte, že pro napětí $V(x, t)$ a proud $I(x, t)$ platí vztahy $V_x = -LI_t - RI$ a $I_x = -CV_t - GV$, kde L je indukčnost, R je odpor, C je kapacita a G je svod do země. Ukažte, že V a I splňují *telegrafní rovnici*

$$u_{xx} = LCu_{tt} + (RC + LG)u_t + RG u.$$

2

Kapitola

Klasifikace, typy rovníc, okrajových a počátečních podmínek

Jedním z hlavních cílů teorie parciálních diferenciálních rovnic je vyjádřit neznámou funkci více nezávisle proměnných z rovnosti, ve které vystupuje tato funkce spolu se svými parciálními derivacemi. V dalším výkladu se budeme držet následující konvence: t bude značit časovou proměnnou a $x, y, z, \dots$ prostorové proměnné. Obecný zápis pro parciální diferenciální rovnici pro neznámou funkci u ve třech prostorových dimenzích pak vypadá takto:

$$F(x, y, z, t, u, u_x, u_y, u_z, u_t, u_{xy}, u_{xt}, \dots) = 0,$$

přičemž $(x, y, z) \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$, $t \in I$, kde Ω je zadaná oblast v $\mathbb{R}^3$ a $I \subset \mathbb{R}$ je časový interval. Je-li $\mathbf{F}$ vektorová funkce, tj. $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_m)$, a neznámých funkcí, které hledáme, je více: $u = u(x, y, z, t)$, $v = v(x, y, z, t)$, $\dots$, pak

$$\mathbf{F}(x, y, z, t, u, u_x, \dots, v, v_x, \dots) = \mathbf{0}$$

je tzv. systém parciálních diferenciálních rovnic. Je patrné, že jde o vztahy obecně velmi komplikované, a matematická teorie v současné době umí zkoumat pouze některé speciální typy. Proto je důležité umět jednotlivé typy rovnic rozeznat a vzájemně je od sebe odlišit.

2.1 Základní typy rovnic

Klasifikovat parciální diferenciální rovnice můžeme na základě nejruznějších hledisek. Je-li čas t jednou z nezávisle proměnných, hovoříme o *evolučních* rovnicích, v opačném případě (kdy v rovnici vystupují pouze prostorové nezávisle proměnné) hovoříme o *stacionárních* rovnicích. Nejvyšší řád derivace hledané funkce, který se v rovnici vyskytuje, určuje *řád* rovnice. Je-li vztah mezi u a jejími derivacemi lineární (např. neobsahuje součiny typu uu_x , $u_x u_{xy}$ atd.) hovoříme o *lineární* rovnici. V opačném případě jde o *nelineární* rovnici. Lineární rovnici můžeme symbolicky zapsat pomocí tzv. lineárního diferenciálního operátoru L , tj. operátoru s vlastností

$$L(\alpha u + \beta v) = \alpha L(u) + \beta L(v),$$

kde α, β jsou reálné konstanty a u, v jsou reálné funkce. Rovnici

$$L(u) = 0$$

pak nazýváme *homogenní*, rovnici

$$L(u) = f,$$

kde f je zadaná funkce, pak nazýváme *nehomogenní*. Funkci f nazýváme *pravou stranou* rovnice.

Z výše uvedených hledisek můžeme následující rovnice klasifikovat takto:

1. Transportní rovnice v jedné prostorové proměnné:

$$u_t + u_x = 0$$

je evoluční, prvního řádu, lineární s operátorem $L(u) = u_t + u_x$, homogenní.

2. Laplaceova rovnice ve třech prostorových proměnných:

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$$

je stacionární, druhého řádu, lineární s operátorem $L(u) = \Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$, homogenní.

3. Poissonova rovnice ve dvou prostorových proměnných:

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y),$$

kde $f = f(x, y)$ je zadaná funkce, je stacionární, druhého řádu, lineární s operátorem $L(u) = \Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, nehomogenní.

4. Vlnová rovnice v jedné prostorové proměnné:

$$u_{tt} - u_{xx} + u^3 = 0$$

je evoluční, druhého řádu, nelineární. Tato rovnice se nazývá *vlnovou rovnicí s interakcí* reprezentovanou členem u^3 .

5. Difuzní rovnice v jedné prostorové proměnné:

$$u_t - u_{xx} = f(x, t)$$

je evoluční, druhého řádu, lineární s operátorem $L(u) = u_t - u_{xx}$, nehomogenní.

6. Rovnice vibrujícího nosníku:

$$u_{tt} + u_{xxxx} = 0$$

je evoluční, čtvrtého řádu, lineární s operátorem $L(u) = u_{tt} + u_{xxxx}$, homogenní.

7. Schrödingerova rovnice v jedné prostorové proměnné:

$$u_t - iu_{xx} = 0$$

je evoluční, druhého řádu, lineární s operátorem $L(u) = u_t - iu_{xx}$, homogenní (zde i je imaginární jednotka: $i^2 = -1$).

8. Rovnice disperzní vlny:

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$$

je evoluční, třetího řádu, nelineární.

2.2 Obecné a generické řešení

Funkci u nazveme *řešením* parciální diferenciální rovnice, pokud po dosazení této funkce (společně s příslušnými parciálními derivacemi) je daná rovnice identicky splněna v každém bodě. To znamená, že funkce u musí mít všechny derivace, které se v rovnici vyskytují. Obvykle ale požadujeme o něco více. Je-li k řád příslušné parciální diferenciální rovnice, pak jejím řešením rozumíme funkci třídy C^k , která vyhovuje dané rovnici. V takovém případě mluvíme o *klasickém řešení* parciální diferenciální rovnice. Řešíme-li tedy např. difuzní rovnici v jedné prostorové proměnné, tj. rovnici

$$u_t = ku_{xx},$$

kteřá je druhého řádu, pak jejím klasickým řešením bude funkce třídy C^2 , tj. funkce, která má spojitě parciální derivace až do druhého řádu ve všech uvažovaných bodech (x, t) . Požadujeme tedy existenci a spojitost i derivací u_{tt} a u_{xt} , které se v rovnici vůbec nevyskytují!

Stejně jako v případě obyčejných diferenciálních rovnic není řešení parciální diferenciální rovnice určeno jednoznačně. U obyčejných diferenciálních rovnic mluvíme o tzv. *obecném řešení*, které závisí na *volitelných konstantách* a jejich počet je dán řádem rovnice. V případě parciálních diferenciálních rovnic může být situace zajímavější. Tuto skutečnost si ukážeme na následujících příkladech.

Příklad 2.1. Hledejme funkci dvou proměnných $u = u(x, y)$ splňující rovnici

$$(2.1) \quad u_{xx} = 0.$$

Tuto úlohu můžeme řešit přímou integrací rovnice (2.1). Vzhledem k tomu, že integrujeme podle x , může integrační konstanta záviset obecně na y . Z rovnice (2.1) vyplývá

$$u_x(x, y) = f(y)$$

a další integrací pak

$$u(x, y) = f(y)x + g(y).$$

Pro libovolné funkce f a g proměnné y tak dostáváme řešení rovnice (2.1). Chceme-li však mluvit o klasickém řešení, musí být funkce f a g dvakrát spojitě diferencovatelné.

□

Příklad 2.2. Hledejme funkci $u = u(x, y, z)$ splňující rovnici

$$(2.2) \quad u_{xx} + u = 0.$$

Podobně jako v případě obyčejné diferenciální rovnice pro neznámou funkci $v = v(t)$,

$$v'' + v = 0,$$

kdy řešením je funkce $v(t) = A \cos t + B \sin t$ s libovolně volitelnými konstantami $A, B \in \mathbb{R}$, má klasické řešení rovnice (2.2) tvar

$$u(x, y, z) = f(y, z) \cos x + g(y, z) \sin x,$$

kde f a g jsou libovolné dvakrát spojitě diferencovatelné funkce proměnných y a z .

□

Příklad 2.3. Hledejme funkci $u = u(x, y)$ splňující rovnici

$$(2.3) \quad u_{xy} = 0.$$

Integrací (2.3) podle x dostáváme

$$u_y = f(y)$$

(f je libovolná „konstanta“ závislá na y). Další integrací podle y pak obdržíme

$$u(x, y) = F(y) + G(x),$$

kde $F' = f$. Funkce F a G jsou opět libovolné. Má-li být řešení u klasické, pak obě funkce F a G musí být opět dvakrát spojitě diferencovatelné. □

Z předchozích příkladů bychom mohli usoudit, že řešení parciální diferenciální rovnice závisí na *volitelných funkcích* (analogicky k volitelným konstantám v případě obyčejných rovnic). Je-li navíc n počet nezávisle proměnných v rovnici, pak tyto funkce závisí na $(n - 1)$ proměnných a jejich počet je opět dán řádem rovnice. Toto pravidlo však vyvrací následující příklad.

Příklad 2.4. Hledejme funkci $u = u(x, y)$ splňující rovnici

$$(2.4) \quad (u_{xx})^2 + (u_{yy})^2 = 0.$$

Rovnice (2.4) říká, že součet kvadrátů $(u_{xx})^2$ a $(u_{yy})^2$ má být nulový. To znamená, že $u_{xx} = 0$ a současně $u_{yy} = 0$. Z první rovnosti dostaneme

$$u(x, y) = f_1(y)x + f_2(y),$$

kde f_1, f_2 jsou libovolné funkce, zatímco druhá rovnost znamená

$$u(x, y) = g_1(x)y + g_2(x),$$

kde opět g_1, g_2 jsou libovolné funkce. Mají-li oba předpisy platit současně, dostáváme

$$u(x, y) = axy + bx + cy + d,$$

kde a, b, c, d jsou libovolná reálná čísla. Řešení tedy nezávisí na dvou libovolných funkcích jedné proměnné, ale na čtyřech libovolných konstantách! □

Na základě výše uvedených příkladů budeme rozlišovat tzv. *obecné řešení* a *generické řešení*.

Obecným řešením parciální diferenciální rovnice rozumíme soubor všech řešení dané rovnice. (V anglické literatuře se používá termín *general solution*.) Často lze obecné řešení zapsat předpisem, který obsahuje volitelné funkce nebo konstanty, po jejichž konkrétním dosazení získáme jedno z řešení dané rovnice.

Generickým řešením parciální diferenciální rovnice řádu k s n nezávislými proměnným rozumíme funkci, která závisí na k volitelných funkcích $(n-1)$ proměnných, které jsou třídy C^k . (V anglické literatuře se používá termín *generic solution*.)

V řadě případů oba pojmy splývají, v řadě případů jsou však různé. Jak uvidíme později na příkladu difuzní rovnice, existují i parciální diferenciální rovnice, pro které nejsme schopni obecné ani generické řešení vůbec nalézt.

2.3 Okrajové a počáteční podmínky

Stejně jako u obyčejných diferenciálních rovnic platí, že samotná parciální diferenciální rovnice neposkytuje dostatečnou informaci k tomu, abychom její řešení byli schopni určit jednoznačně. K jednoznačnému určení řešení je třeba mít k dispozici ještě další informace. U *stacionárních rovnic* to bývají nejčastěji tzv. *okrajové podmínky*, které spolu s rovnicí tvoří tzv. *okrajovou úlohu*. Např.

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & (x, y) \in B(\mathbf{0}, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}, \\ u(x, y) = 0, & (x, y) \in \partial B(\mathbf{0}, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \end{cases}$$

tvoří tzv. Dirichletovu homogenní okrajovou úlohu pro Laplaceovu rovnici na jednotkovém kruhu se středem v počátku. Je-li obecně Ω omezená oblast v $\mathbb{R}^3$, rozlišujeme následující základní typy okrajových podmínek.

Dirichletova okrajová podmínka:

$$u(x, y, z) = g(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \partial\Omega,$$

Neumannova okrajová podmínka:

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y, z) = g(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \partial\Omega,$$

Newtonova (někdy též *Robinova*) okrajová podmínka:

$$A \frac{\partial u}{\partial n}(x, y, z) + Bu(x, y, z) = g(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \partial\Omega,$$

kde $\frac{\partial u}{\partial n}$ značí derivaci podle vnější normály k hranici (povrchu) oblasti Ω , $A, B, A^2 + B^2 \neq 0$, jsou dané konstanty. Pokud jsou na různých částech hranice $\partial\Omega$ zadány různé typy okrajových podmínek, jedná se o úlohu se *smíšenými* okrajovými podmínkami. V případě, že $g \equiv 0$, mluvíme o *homogenních* okrajových podmínkách, v opačném případě o *nehomogenních* okrajových podmínkách. V jedné dimenzi, tj. v případě úloh na intervalu $\Omega = (a, b)$, tvoří hranici $\partial\Omega$ pouze dva body $x = a, x = b$. V takovém případě se např. nehomogenní Neumannova okrajová podmínka redukuje na tvar

$$-u_x(a) = g_1, \quad u_x(b) = g_2.$$

Na neomezené oblasti, např. na intervalu $\Omega = (0, \infty)$, kdy není možné hovořit o hodnotě dané funkce v bodě „nekonečno“, vypadá Dirichletova homogenní okrajová podmínka takto:

$$u(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = 0.$$

Stejně jako samotné rovnice i okrajové podmínky mají svoji fyzikální interpretaci.

Kmitající struna. Kmitání struny délky l , která je pevně uchycena na obou koncích, popíšeme jednodimenzionální vlnovou rovnicí s homogenními Dirichletovými okrajovými podmínkami $u(0, t) = u(l, t) = 0$. Naopak, struně s volnými konci odpovídají homogenní Neumannovy podmínky $u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0$ (napětí na koncích je nulové). Newtonova okrajová podmínka by pak popisovala konec struny uchycený na pružině (podléhající Hookovu zákonu), která jej táhne zpět do rovnovážné polohy.

Difuze. Je-li difundující substance uzavřena v nádobě Ω tak, že nic nemůže uniknout ven ani vniknout dovnitř, je její tok přes hranici nádoby nulový a tedy (z Fickova zákona) $\partial u / \partial n = 0$ na $\partial\Omega$, což je homogenní Neumannova okrajová podmínka. Naopak, pokud je nádoba konstruována tak, že jakákoli substance, která se dostane na hranici, okamžitě oteče ven, pak máme $u = 0$ na $\partial\Omega$.

Vedení tepla. Proces vedení tepla je popsán opět difuzní rovnicí, kde hledanou veličinou $u(x, y, z, t)$ je teplota. Pokud je objekt Ω , kterým teplo proudí, dokonale izolovaný, je tepelný tok hranicí nulový a dostáváme Neumannovu okrajovou podmínku $\partial u / \partial n = 0$ na $\partial\Omega$. Naopak, pokud je objekt ponořen do velkého rezervoáru s danou teplotou $g(t)$ a tepelná vodivost je ideální (tj. nekonečná), pak na hranici $\partial\Omega$ máme Dirichletovu okrajovou podmínku $u = g(t)$. Modelujeme-li homogenní tyč délky l , která je podélně izolovaná a jejíž konec $x = l$ je ponořen do nádoby o teplotě $g(t)$, můžeme předpokládat, že mezi

koncem tyče a nádobou dochází k výměně tepla. Tento proces lze popsat Newtonovým zákonem o přestupu tepla (odtud název Newtonova okrajová podmínka)

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = -a[u(l, t) - g(t)],$$

kde $a > 0$ (teplo z horké tyče proudí do chladnější nádoby).

U *evolučních rovnic* máme obvykle k dispozici kromě okrajových podmínek ještě tzv. *počáteční podmínky*, které spolu s rovnicí a okrajovými podmínkami tvoří tzv. *počátečně-okrajovou* úlohu. Např.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & t \in (0, \infty), x \in (0, 1), \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t \in (0, \infty), \\ u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in (0, 1), \end{cases}$$

tvoří tzv. počátečně-okrajovou úlohu pro vlnovou rovnici. Okrajové podmínky jsou zde homogenní Dirichletovy. Funkce φ značí počáteční výchylku a ψ počáteční rychlost struny v daném bodě x . Derivace u_t se v čase $t = 0$ chápe jako derivace zprava. V případě, že hledáme tzv. klasické řešení, jsou φ a ψ spojité funkce a také hledané u je spojitou funkcí. Proto okrajové a počáteční podmínky musí splňovat tzv. *podmínky kompatibility*:

$$\varphi(0) = \varphi(1) = 0.$$

Řešením (klasickým řešením) počátečně-okrajové (resp. okrajové) úlohy rozumíme funkci, která je (klasickým) řešením dané parciální diferenciální rovnice a splňuje i dané okrajové a počáteční podmínky v každém bodě. Tyto požadavky mohou být příliš silné, a proto pojem řešení chápeme často v jiném (zobecněném) smyslu. V našem textu se až na výjimky omezíme na hledání klasických řešení. Budeme-li uvažovat obecnější situace a pracovat s pojmem zobecněného řešení, čtenáře na tuto skutečnost upozorníme.

2.4 Korektní a nekorektní úloha

Dalším pojmem, který v této části zavedeme, je *korektnost* okrajové (nebo počátečně-okrajové) úlohy. Úloha se nazývá *korektní* (anglicky: *well-posed*), jsou-li splněny následující tři podmínky:

- (i) řešení úlohy *existuje*;
- (ii) řešení úlohy je určeno *jednoznačně*;

- (iii) řešení úlohy je *stabilní* vůči *vstupním datům*, což znamená, že „velmi malá změna“ počátečních či okrajových podmínek, pravé strany (nebo jiných dat úlohy) vyvolá pouze „malou změnu“ řešení.

Poslední podmínka se obzvláště týká modelů fyzikálních problémů, protože vstupní data nikdy nelze naměřit s absolutní přesností. V definici stability je však otázkou, co je to „velmi malá“, resp. „malá“ změna. To závisí na konkrétním zadání úlohy a v tomto okamžiku se spokojíme pouze s intuitivním chápáním tohoto pojmu.

Opakem korektní úlohy je úloha *nekorektní* (anglicky: *ill-posed*), tj. úloha, která nesplňuje alespoň jeden ze tří předchozích požadavků. Pokud řešení existuje, ale není zaručena jednoznačnost, může se jednat o úlohu nedostatečně určenou. Naopak, pokud řešení neexistuje, může se jednat o pře určenou úlohu. Nedostatečně určená úloha, pře určená úloha a stejně tak úloha nestabilní přesto mohou mít reálný smysl. Dále stojí za zmínku, že pojem korektnosti úlohy je úzce vázán na definici řešení. Jak uvidíme později, vlnová rovnice s nehladkými počátečními podmínkami je ve smyslu klasického řešení definovaného výše úlohou nekorektní, neboť její klasické řešení neexistuje. Uvažujeme-li však řešení v zobecněném smyslu, úloha se již stává korektní, zobecněné řešení existuje, je určeno jednoznačně a je stabilní vůči „malým“ změnám dat úlohy.

2.5 Klasifikace lineárních rovnic druhého řádu

V této kapitole uvedeme klasifikaci základních typů parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu, které se v praktických modelech vyskytují nejčastěji. Začneme s rovnicemi se dvěma nezávislými proměnnými.

Základními typy lineárních evolučních rovnic druhého řádu jsou *vlnová rovnice* (v jedné prostorové proměnné):

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad (c = 1),$$

která je *hyperbolického typu*, a *difuzní rovnice* (v jedné prostorové proměnné):

$$u_t - u_{xx} = 0 \quad (k = 1),$$

která je *parabolického typu*. Základním typem lineární stacionární rovnice druhého řádu (ve dvou prostorových proměnných) je *Laplaceova rovnice*:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

která je *eliptického typu*. Formálními analogiemi těchto parciálních diferenciálních rovnic jsou rovnice kuželoseček v rovině: rovnice hyperboly $t^2 - x^2 = 1$,

rovnice paraboly $t - x^2 = 1$ a rovnice elipsy (zde jejího speciálního případu – kružnice) $x^2 + y^2 = 1$.

Uvažujme obecnou lineární homogenní parciální diferenciální rovnici druhého řádu

$$(2.5) \quad a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + a_1u_x + a_2u_y + a_0u = 0$$

s nezávisle proměnnými x, y a se šesti reálnými koeficienty, které mohou obecně záviset na x a y . Označme

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

matici tvořenou koeficienty u parciálních derivací druhého řádu. Je možné ukázat, že existuje lineární transformace proměnných x, y , která zredukuje rovnici (2.5) na jeden z následujících tvarů. V této souvislosti hraje důležitou roli determinant matice $\mathbf{A}$: $\det \mathbf{A}$.

(i) *Eliptický tvar*: Pokud $\det \mathbf{A} > 0$, tj. $a_{11}a_{22} > a_{12}^2$, je rovnice redukovatelná na

$$u_{xx} + u_{yy} + \dots = 0,$$

kde tři tečky reprezentují členy s derivacemi nižších řádů.

(ii) *Hyperbolický tvar*: Pokud $\det \mathbf{A} < 0$, tj. $a_{11}a_{22} < a_{12}^2$, je rovnice redukovatelná na

$$u_{xx} - u_{yy} + \dots = 0.$$

(iii) *Parabolický tvar*: Pokud $\det \mathbf{A} = 0$, tj. $a_{11}a_{22} = a_{12}^2$, je rovnice redukovatelná na

$$u_{xx} + \dots = 0, \quad (\text{resp. } u_{yy} + \dots = 0),$$

pokud není $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$. Tři tečky opět představují členy s derivacemi nižších řádů.

Nalezení příslušných transformačních vztahů a zredukování rovnice je založeno na stejné myšlence jako analýza kuželoseček v analytické geometrii. Pro jednoduchost uvažujme pouze podstatné členy v rovnici, tj. nechte $a_{11} = 1$, $a_1 = a_2 = a_0 = 0$. Zavedeme-li ještě označení $\partial_x = \partial/\partial x$, $\partial_y^2 = \partial^2/\partial y^2$ atd., můžeme rovnici (2.5) zapsat takto:

$$(\partial_x^2 + 2a_{12}\partial_x\partial_y + a_{22}\partial_y^2)u = 0$$

a formálním doplněním na čtverec ji převedeme na tvar

$$(2.6) \quad (\partial_x + a_{12}\partial_y)^2u + (a_{22} - a_{12}^2)\partial_y^2u = 0.$$

Uvažujme dále eliptický případ, tedy $a_{22} > a_{12}^2$, a označme $b = (a_{22} - a_{12}^2)^{1/2}$, tj. $b \in \mathbb{R}$. Zavedeme nové nezávisle proměnné ξ a η následujícími vztahy

$$x = \xi, \quad y = a_{12}\xi + b\eta.$$

Pro transformované derivace platí

$$\partial_\xi = \partial_x + a_{12}\partial_y, \quad \partial_\eta = b\partial_y$$

a rovnice (2.6) přejde na tvar

$$\partial_\xi^2 u + \partial_\eta^2 u = 0$$

neboli

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0.$$

Ve zbylých dvou případech bychom postupovali analogicky (v parabolickém případě máme $b = 0$, v hyperbolickém případě je $b = i(a_{12}^2 - a_{22})^{1/2} \in \mathbb{C}$).

Příklad 2.5. Určeme typy následujících rovnic:

- (a) $u_{xx} - 5u_{xy} = 0.$
- (b) $4u_{xx} - 12u_{xy} + 9u_{yy} + u_y = 0.$
- (c) $4u_{xx} + 6u_{xy} + 9u_{yy} = 0.$

Na základě předchozího výkladu rozhodujeme podle znaménka $\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$. Tedy v případě (a) dostáváme $\det \mathbf{A} = -25/4 < 0$ a rovnice je hyperbolického typu. V případě (b) je $\det \mathbf{A} = 0$, jedná se tedy o parabolický typ. V případě (c) je $\det \mathbf{A} = 27 > 0$ a rovnice je eliptická. □

Pokud matice $\mathbf{A}$ závisí na x a y (tj. rovnice má nekonstantní koeficienty), pak se typ rovnice může lišit v různých částech roviny xy . Tuto skutečnost ilustrují následující příklady.

Příklad 2.6. V rovině xy nalezneme oblasti, ve kterých je rovnice

$$yu_{xx} - 2u_{xy} + xu_{yy} = 0$$

eliptická, hyperbolická nebo parabolická.

V tomto případě koeficienty závisí na x a y a dostáváme $\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = xy - 1$. Rovnice je tedy parabolická na hyperbole $xy = 1$, eliptická ve dvou konvexních oblastech $xy > 1$ a hyperbolická v souvislé oblasti $xy < 1$. (Načrtněte si obrázek!) □

Příklad 2.7. Nalezněme v rovině xy oblasti, ve kterých je rovnice

$$(1+x)u_{xx} + 2xyu_{xy} - y^2u_{yy} = 0$$

eliptická, hyperbolická nebo parabolická.

Tentokrát platí $\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -y^2(1+x) - x^2y^2$. Rovnice je tedy hyperbolická v celé rovině kromě osy x , na které je parabolická. □

Poznámka 2.8. Podobným způsobem můžeme klasifikovat lineární parciální diferenciální rovnice druhého řádu s libovolným konečným počtem proměnných n . Potom je matice $\mathbf{A}$ typu $n \times n$ a o typu rovnice rozhoduje definitnost matice $\mathbf{A}$, resp. znaménka jejích vlastních čísel:

- (i) rovnice je *eliptická*, pokud jsou vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ všechna kladná nebo všechna záporná (tj. matice $\mathbf{A}$ je pozitivně nebo negativně definitní);
- (ii) rovnice je *parabolická*, pokud má matice $\mathbf{A}$ právě jedno vlastní číslo nulové a všechna ostatní vlastní čísla mají stejné znaménko (tj. speciální případ pozitivně nebo negativně semidefinitní matice);
- (iii) rovnice je *hyperbolická*, pokud má matice $\mathbf{A}$ právě jedno záporné vlastní číslo a všechna ostatní vlastní čísla jsou kladná, anebo má matice $\mathbf{A}$ právě jedno kladné vlastní číslo a všechna ostatní vlastní čísla jsou záporná (tj. speciální případ indefinitní matice);
- (iv) rovnice je *ultrahyperbolická*, pokud má matice $\mathbf{A}$ více než jedno kladné vlastní číslo, více než jedno záporné vlastní číslo a žádné nulové vlastní číslo (tj. speciální případ indefinitní matice).

Všimněme si, že matice $\mathbf{A}$ je symetrická (uvažujeme záměnné druhé smíšené parciální derivace) a tedy všechna její vlastní čísla musí být reálná.

2.6 Cvičení

1. Rozhodněte, které z následujících operátorů jsou lineární.

- (a) $u \mapsto y u_x + u_y$,
- (b) $u \mapsto u u_x + u_y$,
- (c) $u \mapsto u_x^3 + u_y$,
- (d) $u \mapsto u_x + u_y + x + y$,

$$(e) \quad u \mapsto (x^2 + y^2)(\sin y) u_x + x^3 u_{yxy} + [\arccos(xy)]u.$$

[a,d,e]

2. U každé z následujících rovnic určete její řád a to, zda je nelineární, lineární nehomogenní nebo lineární homogenní. Svá tvrzení zdůvodněte.

$$(a) \quad u_t - 3u_{xx} + 5 = 0,$$

$$(b) \quad u_t - u_{xx} + xt^3 u = 0,$$

$$(c) \quad u_t + u_{xxt} + u^2 u_x = 0,$$

$$(d) \quad u_{tt} - 4u_{xx} + x^4 = 0,$$

$$(e) \quad iu_t - u_{xx} + x^3 = 0,$$

$$(f) \quad u_x(1 + u_x^2)^{-1/2} + u_y(1 + u_y^2)^{-1/2} = 0,$$

$$(g) \quad e^x u_x + u_y = 0,$$

$$(h) \quad u_t + u_{xxx} + \sqrt[3]{1+u} = 0.$$

$$(i) \quad u_{xx} + e^t u_{tt} = u \cos x.$$

[lineární: a,b,d,e,g,i]

3. Ověřte, že funkce $u(x, y) = f(x)g(y)h(z)$ je generickým řešením rovnice $u^2 u_{xyz} = u_x u_y u_z$ pro libovolnou trojici (diferencovatelných) funkcí f , g a h jedné reálné proměnné.

4. Ukažte, že nelineární rovnice $u_t = u_x^2 + u_{xx}$ může být převedena na difuzní rovnici $u_t = u_{xx}$ pomocí transformace závisle proměnné $w = e^u$.

5. Jaké jsou typy následujících rovnic?

$$(a) \quad u_{xx} - u_{xy} + 2u_y + u_{yy} - 3u_{yx} + 4u = 0,$$

[hyperbolický typ]

$$(b) \quad 9u_{xx} + 6u_{xy} + u_{yy} + u_x = 0.$$

[parabolický typ]

6. Klasifikujte rovnici

$$u_{xx} + 2ku_{xt} + k^2 u_{tt} = 0, \quad k \neq 0.$$

Použijte transformaci $\xi = x + bt$, $\tau = x + dt$ nezávisle proměnných s neznámými koeficienty b a d , která převede rovnici na jednodušší tvar $u_{\xi\xi} = 0$. Nalezněte generické řešení původní rovnice.

[rovnice parabolického typu; $u(x, t) = f(x - \frac{t}{k})x + g(x - \frac{t}{k})$]

7. Klasifikujte rovnici

$$xu_{xx} - 4u_{xt} = 0$$

v oblasti $x > 0$. Řešte tuto rovnici *nelineární* substitucí $\tau = t$, $\xi = t + 4 \ln x$.

[rovnice hyperbolického typu; $u = e^{-t/4}f(t + 4 \ln x) + g(t)$]

8. Ukažte, že rovnici

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + au_t + bu_x + du = f(x, t)$$

lze transformovat na tvar

$$w_{\xi\tau} + kw = g(\xi, \tau), \quad w = w(\xi, \tau)$$

substitucemi $\xi = x - ct$, $\tau = x + ct$ a $u = we^{\alpha\xi + \beta\tau}$ pro vhodnou volbu konstant α a β .

$$[\alpha = \frac{b+ac}{4c^2}, \beta = \frac{b-ac}{4c^2}]$$

9. Klasifikujte rovnici

$$u_{xx} - 6u_{xy} + 12u_{yy} = 0.$$

Nalezněte transformaci nezávisle proměnných, která ji převede na Laplaceovu rovnici.

[rovnice eliptického typu; $\xi = x$, $\eta = \sqrt{3}x + \frac{1}{\sqrt{3}}y$]

10. Rozhodněte, v kterých oblastech roviny
- xy
- jsou následující rovnice eliptické, hyperbolické nebo parabolické.

(a) $2u_{xx} + 4u_{yy} + 4u_{xy} - u = 0$,

(b) $u_{xx} + 2y u_{xy} + u_{yy} + u = 0$,

(c) $\sin(xy)u_{xx} - 6u_{xy} + u_{yy} + u_y = 0$,

(d) $u_{xx} - \cos(x)u_{xy} + u_{yy} + u_y - u_x + 5u = 0$,

(e) $(1 + x^2)u_{xx} + (1 + y^2)u_{yy} + xu_x + yu_y = 0$,

(f) $e^{2x}u_{xx} + 2e^{x+y}u_{xy} + e^{2y}u_{yy} + (e^{2y} - e^{x+y})u_y = 0$,

(g) $u_{xx} - 2 \sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} - \cos x u_y = 0$,

(h) $e^{xy}u_{xx} + (\cosh x)u_{yy} + u_x - u = 0$,

(i) $[\log(1 + x^2 + y^2)]u_{xx} - [2 + \cos x]u_{yy} = 0$.

11. Pokuste se nalézt parciální diferenciální rovnice, jejichž obecné a současně generické řešení má tvar

- (a) $u(x, y) = \varphi(x + y) + \psi(x - 2y)$,
 (b) $u(x, y) = x\varphi(x + y) + y\psi(x + y)$,
 (c) $u(x, y) = \frac{1}{x}(\varphi(x - y) + \psi(x + y))$.

Ve všech případech jsou φ a ψ libovolné diferencovatelné funkce.

[(a) $2u_{xx} - u_{xy} - u_{yy} = 0$, (b) $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0$, (c) $x(u_{xx} - u_{yy}) + 2u_x = 0$.]

12. Uvažujte tzv. *Tricomioho rovnici*

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Ukažte, že tato rovnice je

- (a) eliptická pro $y > 0$ a lze ji převést na

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{3\eta}u_\eta = 0$$

pomocí transformace $\xi = x$, $\eta = \frac{2}{3}y^{3/2}$;

- (b) hyperbolická pro $y < 0$ a lze ji převést na

$$u_{\xi\eta} - \frac{1}{6(\xi - \eta)}(u_\xi - u_\eta) = 0$$

pomocí transformace $\xi = x - \frac{2}{3}(-y)^{3/2}$, $\eta = x + \frac{2}{3}(-y)^{3/2}$.

13. Ukažte, že rovnici

$$u_{xx} + yu_{yy} + \frac{1}{2}u_y = 0$$

lze převést na kanonický tvar $u_{\xi\eta} = 0$ v oblasti, kde je hyperbolického typu. Využijte tuto skutečnost a ukažte, že v této oblasti má příslušné obecné (i generické) řešení tvar

$$u(x, y) = f(x + 2\sqrt{-y}) + g(x - 2\sqrt{-y}),$$

kde f a g jsou libovolné dostatečně hladké funkce.

14. Rozhodněte, zda následující třídimenziální rovnice jsou eliptické, hyperbolické, ultrahyperbolické nebo parabolické:

- (a) $u_{xx} + 2u_{yz} + (\cos x)u_z - e^{y^2}u = \cosh z$,
 (b) $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 2u_{zz} - (1 + xy)u = 0$,
 (c) $7u_{xx} - 10u_{xy} - 22u_{yz} + 7u_{yy} - 16u_{xz} - 5u_{zz} = 0$,

(d) $e^z u_{xy} - u_{xx} = \log(x^2 + y^2 + z^2 + 1).$

15. Určete oblasti prostoru xyz , ve kterých je rovnice

$$u_{xx} - 2x^2 u_{xz} + u_{yy} + u_{zz} = 0$$

eliptická, hyperbolická, ultrahyperbolická nebo parabolická.

3

Kapitola

Lineární parciální diferenciální rovnice prvního řádu

Lineární parciální diferenciální rovnice prvního řádu pro funkci $u = u(x, y)$ dvou nezávisle proměnných x a y má obecně tvar

$$(3.1) \quad a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = f(x, y),$$

kde koeficienty a, b, c a pravá strana f jsou obecně funkce zobrazující (x, y) z množiny $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}$. Jednoduchým příkladem je *transportní rovnice*, kterou jsme odvodili v odstavci 1.3.1:

$$(3.2) \quad u_t + cu_x = 0.$$

Tento model popisuje například unášení nečistoty v trubici s proudící tekutinou. Veličina u představuje koncentraci unášené nečistoty a parametr c odpovídá konstantní rychlosti proudící tekutiny. Připomeňme, že tento jednoduchý model neuvažuje difuzi nečistoty v tekutině.

Pokud modelujeme chování např. radioaktivní chemikálie unášené tekutinou konstantní rychlostí c a do modelu kromě transportu zahrneme i rozpad částic, dostáváme transportní rovnici s rozpadem (viz odstavec 1.3.1):

$$(3.3) \quad u_t + cu_x + \lambda u = 0.$$

V tomto případě u značí počet dosud nerozpadlých částic v čase t a místě x a konstanta λ udává rychlost rozpadu.

V následujících odstavcích si ukážeme několik metod, které vedou k nalezení řešení transportní rovnice (3.2), transportní rovnice s rozpadem (3.3), případně obecné lineární rovnice prvního řádu (3.1).

3.1 Rovnice s konstantními koeficienty

Uvažujme lineární diferenciální rovnici prvního řádu ve dvou proměnných s *konstantními koeficienty*

$$(3.4) \quad \boxed{au_x + bu_y = 0,}$$

kde $u = u(x, y)$ je hledaná funkce, a, b jsou konstanty takové, že $a^2 + b^2 > 0$ (tj. nejsou obě zároveň rovny nule). Rovnice (3.4) je speciálním případem obecné rovnice (3.1) s volbou $a(x, y) \equiv a$, $b(x, y) \equiv b$, $c(x, y) \equiv f(x, y) \equiv 0$. K jejímu řešení můžeme přistoupit z různých hledisek. V následujících odstavcích uvedeme tři základní metody.

3.1.1 Geometrická interpretace – metoda charakteristik

Označme $\mathbf{v} = (a, b)$, $\nabla u = \text{grad } u = (u_x, u_y)$. Levou stranu rovnice (3.4) pak můžeme chápat jako skalární součin

$$au_x + bu_y = \mathbf{v} \cdot \nabla u = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}}$$

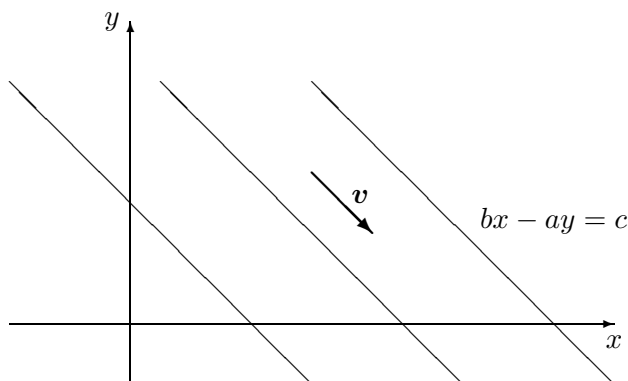
a rovnici (3.4) interpretovat takto: „derivace funkce u podle vektoru $\mathbf{v}$ je rovna nule“ neboli „funkce u se nemění (je konstantní) ve směru vektoru $\mathbf{v}$.“ Jinými slovy, u je konstantní na každé přímce, jejíž směrový vektor je $\mathbf{v}$ (ale pozor, tato konstanta je na různých přímkách obecně různá!).

Platí tedy

$$(3.5) \quad \boxed{u(x, y) = f(c) = f(bx - ay),}$$

neboť funkce $u(x, y)$ nabývá hodnoty $f(c)$ (a tudíž je konstantní) na dané přímce $bx - ay = c$. Zde f je libovolná diferencovatelná reálná funkce. Přímkám o rovnicích $bx - ay = c$, $c \in \mathbb{R}$, říkáme *charakteristické přímky*, neboli *charakteristiky* rovnice (3.4).

Vyjádření (3.5) je obecným (a současně i generickým) řešením rovnice (3.4). Jak jsme již zmínili v odstavci 1.3.1, tomuto tvaru řešení říkáme *pravá* (případně levá) *postupná vlna*, jelikož dochází pouze k posouvání profilu funkce f doprava (případně doleva) podél charakteristik. Abychom určili konkrétní tvar řešení, musíme k rovnici připojit *počáteční* nebo *okrajovou podmínku*. Konkrétní postup si ukážeme na následujícím příkladě.



Obrázek 3.1: Charakteristické přímky.

Příklad 3.1. Řešme rovnici

$$4u_x - 3u_y = 0$$

s podmínkou $u(0, y) = y^3$.

Na základě vztahu (3.5) platí, že obecné řešení má tvar

$$u(x, y) = f(-3x - 4y),$$

kde f je libovolná diferencovatelná funkce. S využitím podmínky

$$y^3 = u(0, y) = f(-4y)$$

po substituci $w = -4y$ dostáváme

$$f(w) = -\frac{w^3}{64}.$$

Odtud plyne

$$u(x, y) = \frac{(3x + 4y)^3}{64}$$

(viz obrázek 3.2).

Každé řešení úlohy by mělo být zakončeno zkouškou. Protože

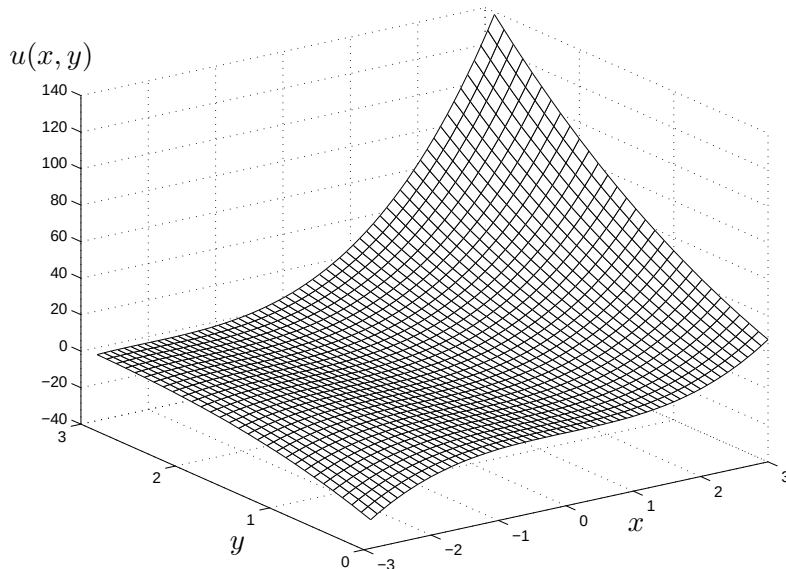
$$u_x = \frac{9}{64}(3x + 4y)^2, \quad u_y = \frac{12}{64}(3x + 4y)^2,$$

po dosazení do rovnice zjistíme, že levá strana se rovná pravé:

$$4u_x - 3u_y = \frac{9}{16}(3x + 4y)^2 - \frac{9}{16}(3x + 4y)^2 = 0.$$

Zároveň také platí $u(0, y) = y^3$.

□



Obrázek 3.2: Řešení z příkladu 3.1.

Poznámka 3.2. V příkladě 3.1 jsme řešili lineární rovnici (3.4) s konstantními koeficienty $a \neq 0$, $b \neq 0$ společně s okrajovou podmínkou, která byla zadána na jedné ze souřadnicových os, tj.

$$(3.6) \quad u(0, y) = g(y),$$

kde g je daná funkce. V takovém případě není obtížné ukázat, že odpovídající řešení je určeno jednoznačně. Kdyby tomu tak nebylo a existovala by dvě řešení $u_1 = u_1(x, y)$ a $u_2 = u_2(x, y)$, která by splňovala rovnici (3.4) i podmínku (3.6), pak jejich rozdíl $w = u_1 - u_2$ musí vyhovovat rovnici (3.4) a podmínce $w(0, y) = 0$. Odtud dostáváme $w(x, y) = f(bx - ay)$ a současně $0 = w(0, y) = f(-ay)$. To však znamená, že $f \equiv 0$ a rovněž $w(x, y) \equiv 0$. Tedy funkce u_1 a u_2 splývají.

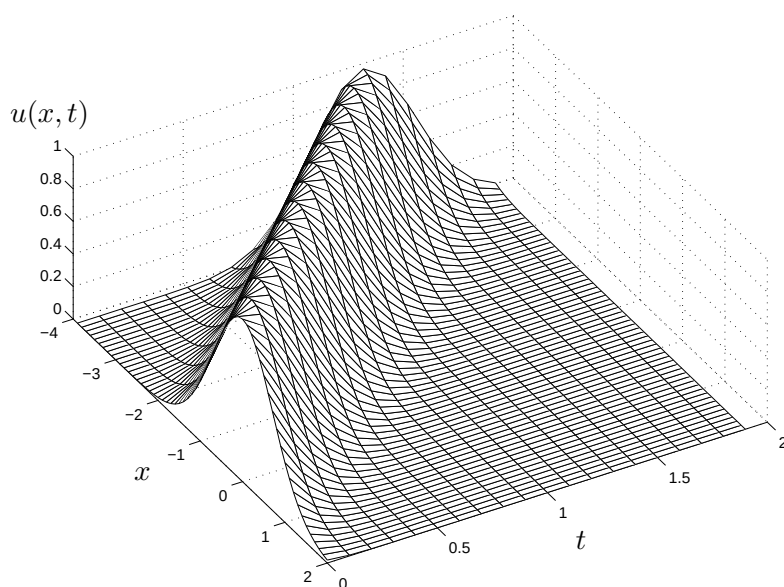
Na obrázku 3.3 je znázorněna funkce $u(x, t) = e^{-(3t+x)^2}$, která je řešením rovnice

$$u_t - 3u_x = 0$$

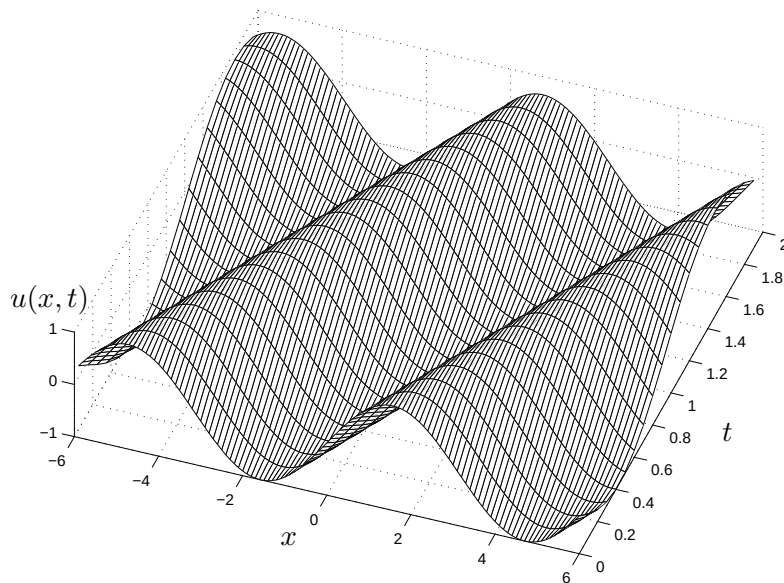
s podmínkou $u(x, 0) = e^{-x^2}$. Podobně na obrázku 3.4 je znázorněna funkce $u(x, t) = -\sin(3t - x)$, která je řešením rovnice

$$u_t + 3u_x = 0$$

s podmínkou $u(x, 0) = \sin x$. V obou případech upozorňujeme na způsob „šíření počáteční podmínky“ podél charakteristik.



Obrázek 3.3: Řešení úlohy $u_t - 3u_x = 0$, $u(x, 0) = e^{-x^2}$.



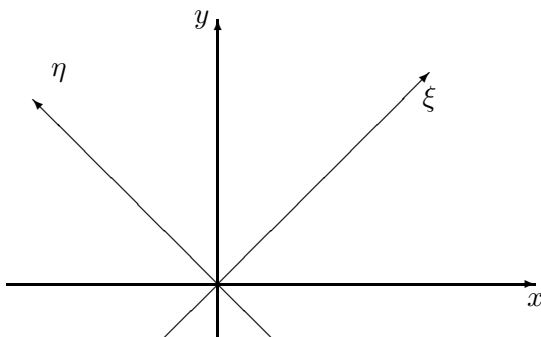
Obrázek 3.4: Řešení úlohy $u_t + 3u_x = 0$, $u(x, 0) = \sin x$.

Nevýhodou geometrické metody charakteristik je skutečnost, že ji nelze použít k řešení obecnějších úloh, např. rovnic s nenulovou pravou stranou. Z tohoto důvodu si představíme další metody řešení lineárních rovnic prvního řádu založené na transformaci souřadnic.

3.1.2 Souřadnicová metoda

Opět uvažujme lineární rovnici 3.4 s konstantními koeficienty a tentokrát zavedme nový pravoúhlý systém souřadnic substitucí

$$\xi = bx - ay, \quad \eta = ax + by.$$



Obrázek 3.5: Transformace souřadného systému.

Podle pravidla pro derivování složené funkce platí:

$$\begin{aligned} u_x = \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = bu_\xi + au_\eta, \\ u_y = \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = -au_\xi + bu_\eta. \end{aligned}$$

Rovnici (3.4) lze potom psát ve tvaru

$$abu_\xi + a^2u_\eta - abu_\xi + b^2u_\eta = 0,$$

$$\underbrace{(a^2 + b^2)}_{\neq 0} u_\eta = 0,$$

tedy

$$u_\eta = 0.$$

Odtud plyne

$$u(\xi, \eta) = f(\xi),$$

kde f je libovolná diferencovatelná funkce, a po přechodu k původním souřadnicím dostáváme nám již známé řešení ve tvaru postupné vlny

$$u(x, y) = f(bx - ay).$$

3.1.3 Metoda charakteristických souřadnic

Další metoda, kterou můžeme použít k řešení rovnice (3.4), je metoda založená opět na změně souřadného systému. Tentokrát však nebudeme souřadný systém otáčet, ale použijeme tzv. pohybující se systém souřadnic. Zavedeme tedy nové nezávisle proměnné ξ a τ , nazývané *charakteristické souřadnice*:

$$\xi = bx - ay, \quad \tau = y.$$

Proměnnou ξ můžeme chápat jako souřadnici, která se šíří společně se signálem, zatímco druhá proměnná (často představující čas) zůstává beze změny. S využitím pravidla pro derivování složené funkce snadno odvodíme

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi \xi_x + u_\tau \tau_x = bu_\xi, \\ u_y &= u_\xi \xi_y + u_\tau \tau_y = -au_\xi + u_\tau. \end{aligned}$$

Po dosazení do původního vztahu dostáváme

$$abu_\xi - abu_\xi + bu_\tau = bu_\tau = 0.$$

Opět tedy docházíme ke stejnému závěru

$$u = f(\xi) = f(bx - ay),$$

kde f je libovolná diferencovatelná funkce.

Souřadnicovou metodu i metodu charakteristických souřadnic můžeme použít k řešení obecnější lineární rovnice prvního řádu ve tvaru

$$(3.7) \quad au_x + bu_y + c(x, y)u = f(x, y),$$

kde koeficienty a, b jsou reálná čísla a c, f jsou reálné funkce dvou reálných proměnných (x, y) . Po zavedení nových souřadnic dostáváme v obou případech jednodušší rovnici

$$(a^2 + b^2)u_\eta + c(\xi, \eta)u = f(\xi, \eta),$$

případně

$$bu_\tau + c(\xi, \tau)u = f(\xi, \tau),$$

kterou můžeme chápat jako obyčejnou diferenciální rovnici s parametrem a řešit ji dále standardními metodami teorie obyčejných diferenciálních rovnic. (Upozorňujeme čtenáře, že jsme zde ponechali stejné značení pro funkce c a f po transformaci jejich nezávisle proměnných, tj. chápeme $c(\xi, \eta) = c(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$ a obdobně v dalších případech.)

Příklad 3.3. Nalezněme všechna řešení rovnice

$$(3.8) \quad u_x + 2u_y + (2x - y)u = 2x^2 + 3xy - 2y^2.$$

K řešení použijeme souřadnicovou metodu, jelikož po zavedení substituce

$$\xi = bx - ay = 2x - y, \quad \eta = ax + by = x + 2y$$

se rovnice (3.8) transformuje do jednoduššího tvaru

$$5u_\eta + \xi u = \xi \eta.$$

To je lineární nehomogenní obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu v proměnné η s parametrem ξ . Nejprve nalezneme obecné řešení homogenní rovnice

$$u_H(\xi, \eta) = f(\xi)e^{-\frac{1}{5}\xi\eta},$$

kde f je libovolná diferencovatelná funkce. Poté, např. metodou variace konstant, určíme partikulární řešení nehomogenní rovnice

$$u_P(\xi, \eta) = \eta - \frac{5}{\xi}.$$

Obecné řešení nehomogenní rovnice je pak součtem funkcí u_H a u_P :

$$u(\xi, \eta) = \eta - \frac{5}{\xi} + f(\xi)e^{-\frac{1}{5}\xi\eta}$$

a po přechodu k původním proměnným x a y dostáváme

$$u(x, y) = x + 2y - \frac{5}{2x - y} + f(2x - y)e^{-\frac{1}{5}(2x^2 + 3xy - 2y^2)}.$$

Správnost řešení ověřte zkouškou.

□

Příklad 3.4. Nalezněme obecné řešení rovnice

$$u_t + 2u_x - u = t.$$

Tentokrát zavedeme charakteristické souřadnice vztahy

$$\xi = x - 2t, \quad \tau = t,$$

díky kterým transformujeme rovnici na tvar

$$u_\tau - u = \tau.$$

Nyní se na tuto rovnici díváme jako na obyčejnou diferenciální rovnici v proměnné τ s parametrem ξ . Obecné řešení odpovídající homogenní rovnice má podobu

$$u_H(\xi, \tau) = g(\xi)e^\tau$$

s libovolnou diferencovatelnou funkcí g , partikulární řešení nehomogenní rovnice dostáváme ve tvaru

$$u_P(\xi, \tau) = -(1 + \tau).$$

Obecné řešení nehomogenní rovnice je pak součtem $u = u_H + u_P$. Na závěr přejdeme k původním proměnným x a t :

$$u(x, t) = -(1 + t) + g(x - 2t)e^t.$$

Opět proveďte zkoušku!

□

3.2 Rovnice s nekonstantními koeficienty

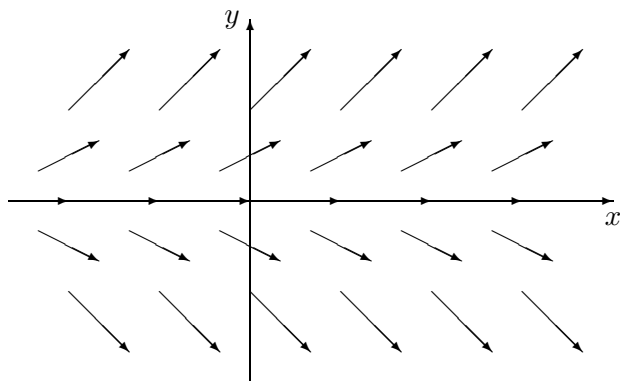
3.2.1 Metoda charakteristik

Metodou charakteristik, založenou na geometrické interpretaci, lze řešit i rovnice s nekonstantními koeficienty $a(x, y)$ a $b(x, y)$. Rozdíl spočívá v tom, že charakteristiky nyní nebudou přímkami, ale obecně křivkami. Začneme jednoduchým příkladem.

Příklad 3.5. Řešme rovnici

$$(3.9) \quad u_x + yu_y = 0.$$

Zde máme $a = 1$, $b = y$ a zavedeme proměnný vektor $\mathbf{v} = (1, y)$. Druhá složka vektoru $\mathbf{v}$ není konstantní, ale závisí na proměnné y . Množinu vektorů $\mathbf{v}$ si lze v rovině představit tak, jak je znázorněno na obrázku 3.6.

Obrázek 3.6: Vektorové pole $\mathbf{v} = (1, y)$.

Rovnici (3.9) můžeme stejně jako v případě rovnic s konstantními koeficienty chápat jako

$$\mathbf{v} \cdot \nabla u = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}} = 0,$$

tj. hledaná funkce u se nemění (zůstává konstantní) podél charakteristik určených proměnným směrovým vektorem $\mathbf{v}$. Charakteristikami jsou křivky, pro něž je vektor $\mathbf{v}$ tečným vektorem, tedy jejich tečna v daném bodě má směrnici

$$\frac{dy}{dx} = y.$$

Řešením této obyčejné diferenciální rovnice dostáváme charakteristiky ve tvaru

$$y = ce^x.$$

Snadno ověříme, že řešení u je opravdu podél charakteristik konstantní. Nechť $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta. Potom

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, ce^x) = u_x + u_y \underbrace{ce^x}_y = 0,$$

neboť u je řešením rovnice (3.9); dále platí

$$\frac{\partial}{\partial y} u(x, ce^x) = u_x \times 0 + u_y \times 0 = 0,$$

protože ani jedna proměnná funkce u nezávisí na y . Řešení u je tedy skutečně konstantní na každé křivce $y = ce^x$. Volbou konstanty c pak dostaneme konkrétní křivku. Proměnné x a y jsou na této křivce svázány vztahem

$$ye^{-x} = c.$$

Tedy pro libovolnou diferencovatelnou funkci $f = f(z)$ lze řešení u psát ve tvaru

$$u(x, y) = f(c) = f(ye^{-x}).$$

□

Máme-li obecně rovnici

$$(3.10) \quad \boxed{a(x, y)u_x(x, y) + b(x, y)u_y(x, y) = 0,}$$

postupujeme zcela analogicky. Nyní $\mathbf{v} = (a(x, y), b(x, y))$ a charakteristiky jsou křivky, které získáme vyřešením obyčejné diferenciální rovnice

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x, y)}{a(x, y)}.$$

Nechť toto řešení lze zapsat ve tvaru

$$h(x, y) = c,$$

kde c je reálná konstanta. Pak hledaným řešením rovnice (3.10) je libovolná diferencovatelná funkce f argumentu $c = h(x, y)$, tj.

$$u(x, y) = f(c) = f(h(x, y)).$$

Příklad 3.6. Nalezněme všechna řešení rovnice

$$u_x + 2xy^2u_y = 0.$$

Zde $\mathbf{v} = (1, 2xy^2)$ a charakteristiky jsou křivky, které řeší rovnici

$$\frac{dy}{dx} = 2xy^2.$$

Snadno zjistíme (např. metodou separace proměnných), že funkce

$$y = -\frac{1}{x^2 + c}, \quad c \in \mathbb{R},$$

a také

$$y \equiv 0$$

jsou řešení a tedy popisují charakteristiky řešené rovnice. Odtud můžeme vyjádřit

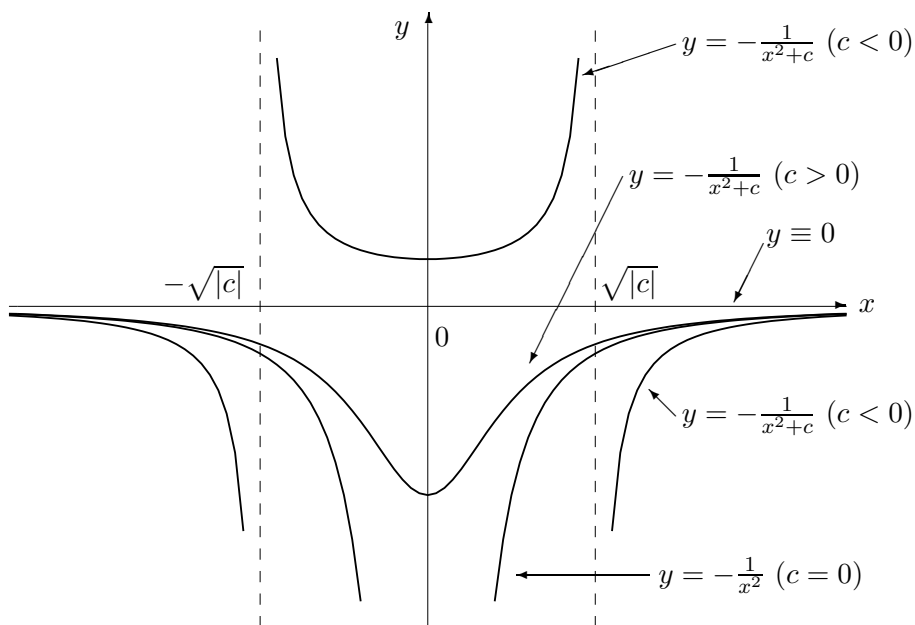
$$c = -x^2 - \frac{1}{y},$$

a hledaná řešení dostáváme ve tvaru

$$u(x, y) = \begin{cases} f\left(x^2 + \frac{1}{y}\right) & \text{pro } y \neq 0, \\ \text{konst.} & \text{pro } y = 0. \end{cases}$$

(Proveďte zkoušku!) Zde obecně f může být libovolná diferencovatelná funkce. Avšak v takovém případě musíme řešení chápat v zobecněném smyslu. Pokud bychom požadovali klasické řešení, museli bychom na funkci f klást další požadavky, které by zajistily spojitost funkce u a jejích prvních derivací na ose $y = 0$!

□



Obrázek 3.7: Charakteristiky rovnice $u_x + 2xy^2u_y = 0$.

Stejně jako v případě rovnic s konstantními koeficienty nelze geometrickou metodu charakteristik použít přímo k řešení obecnějších úloh s více členy. K tomu opět využijeme metody založené na transformaci souřadnic. Geometrická metoda nám však poskytla návod, jakou transformaci máme použít.

3.2.2 Metoda charakteristických souřadnic

V odstavci 3.1.3 jsem se seznámil s metodou charakteristických souřadnic pro rovnice prvního řádu s konstantními koeficienty, která byla založena na myšlence, že jednu z původních souřadnic ponecháme beze změny, kdežto druhou souřadnici necháme pohybovat podél charakteristik, tj. uvažovali jsme transformaci $\xi = bx - ay$, $\tau = y$, kde $bx - ay = \text{konst.}$ bylo právě analytické vyjádření charakteristik dané rovnice. Nyní tedy uvažujme obecnou rovnici (3.1), tj. rovnici

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = f(x, y)$$

s proměnnými koeficienty a postupujme zcela analogicky. Zavedeme nový souřadný systém tak, aby opět jedna ze souřadnic „cestovala“ podél charakteristik. Díky předchozí geometrické metodě již víme, že charakteristiky jsou v tomto případě křivky dané obyčejnou diferenciální rovnicí

$$(3.11) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{b(x, y)}{a(x, y)}.$$

Jsme-li schopni řešení této rovnice popsat analytickým vztahem $h(x, y) = \text{konst.}$, můžeme zavést nový souřadný systém předpisem

$$\xi = h(x, y), \quad \tau = y.$$

S využitím pravidla pro derivování složené funkce získáme

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi \xi_x + u_\tau \tau_x = h_x u_\xi, \\ u_y &= u_\xi \xi_y + u_\tau \tau_y = h_y u_\xi + u_\tau. \end{aligned}$$

Jelikož rovnice $h(x, y) = \text{konst.}$ popisuje charakteristiky, můžeme s využitím (3.11) psát

$$0 = \frac{d}{dx} h(x, y(x)) = h_x + h_y \frac{dy}{dx} = h_x + h_y \frac{b(x, y)}{a(x, y)}$$

a tedy $a(x, y)h_x + b(x, y)h_y = 0$ v libovolném bodě $(x, y(x))$. Odtud dostáváme

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = \underbrace{(a(x, y)h_x + b(x, y)h_y)}_{=0} u_\xi + b(x, y)u_\tau$$

a po dosazení transformačních vztahů se původní rovnice (3.1) redukuje na tvar

$$b(\xi, \tau)u_\tau + c(\xi, \tau)u = f(\xi, \tau),$$

s kterým již můžeme zacházet jako s obyčejnou diferenciální rovnicí v proměnné τ a s parametrem ξ .

Příklad 3.7. Nalezněme všechna řešení nehomogenní rovnice

$$(3.12) \quad u_x + yu_y = ye^y.$$

Nejprve určíme charakteristiky rovnice. Stejně jako v příkladě 3.5 jsou dány diferenciální rovnicí

$$\frac{dy}{dx} = y,$$

jejímiž řešeními jsou funkce $y(x) = ce^x$, kde $c \in \mathbb{R}$. Množinu charakteristik můžeme tedy popsat vztahem $ye^{-x} = c$, $c \in \mathbb{R}$. Nyní zavedeme nový souřadný systém

$$\xi = ye^{-x}, \quad \tau = y.$$

Novou proměnnou ξ jsme volili tak, aby se pohybovala podél charakteristik, zatímco druhá proměnná zůstala beze změny. Pro partiální derivace platí

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi \xi_x + u_\tau \tau_x = -ye^{-x} u_\xi, \\ u_y &= u_\xi \xi_y + u_\tau \tau_y = e^{-x} u_\xi + u_\tau \end{aligned}$$

a po dosazení nových proměnných do rovnice (3.12) dostáváme

$$\tau u_\tau = \tau e^\tau \quad \text{neboli} \quad u_\tau = e^\tau.$$

Přímou integrací získáme řešení této rovnice ve tvaru

$$u(\xi, \tau) = e^\tau + g(\xi)$$

a po přechodu k původním proměnným dostaneme výslednou podobu řešení

$$(3.13) \quad u(x, y) = e^y + g(ye^{-x}),$$

kde g je libovolná diferencovatelná funkce. Doporučujeme čtenáři provést zkoušku.

□

3.3 Úlohy s okrajovými podmínkami

V odstavci 3.1.1 (příklad 3.1 a poznámka 3.2) jsme se setkali s úlohou doplněnou o okrajovou podmínku zadanou na jedné ze souřadnicových os. Vraťme se nyní k rovnici (3.12) z příkladu 3.7, jejíž obecné řešení je dáno formulí (3.13), a připojme k ní postupně podmínky

$$u(0, y) = \sin y, \quad u(x, 0) = \sin x, \quad u(x, 0) = 10.$$

V prvním případě dostáváme

$$\sin y = u(0, y) = e^y + g(y)$$

a tedy $g(y) = \sin y - e^y$ a rovnice (3.12) s podmínkou $u(0, y) = \sin y$ má právě jedno řešení dané předpisem

$$u(x, y) = e^y + \sin(ye^{-x}) - e^{ye^{-x}}.$$

V druhém případě máme

$$\sin x = u(x, 0) = 1 + g(0),$$

což splnit nelze a rovnice (3.12) s podmínkou $u(x, 0) = \sin x$ nemá řešení.

Ve třetím případě požadujeme splnění rovnosti

$$10 = u(x, 0) = 1 + g(0),$$

čemuž vyhovuje jakákoli funkce g , která v nule nabývá hodnoty 9. Tedy rovnice (3.12) s podmínkou $u(x, 0) = 10$ má nekonečně mnoho řešení.

Všimněme si, že v prvním případě byla podmínka zadána na ose y , která protíná všechny charakteristiky rovnice (3.12) právě jednou a pod nenulovým úhlem, kdežto v dalších dvou případech byla podmínka dána na ose x , která je přímo jednou z charakteristik!

Okrajová podmínka nemusí být zadána jen na jedné ze souřadnicových os, ale hodnoty řešení můžeme předepsat i na obecné *křivce* γ dané parametrickými vztahy

$$\gamma: \quad x = x_0(s), \quad y = y_0(s), \quad s \in I,$$

kde $I \subset \mathbb{R}$ je námi uvažovaný interval. Okrajová podmínka podél této křivky má pak podobu

$$u(x, y) = u_0(s) \quad \text{pro } (x, y) \in \gamma,$$

kde u_0 je daná funkce jedné reálné proměnné (parametru křivky γ). V dalším textu se pro jednoduchost omezíme na *regulární* křivky. Následující tvrzení je postačující podmínkou jednoznačné řešitelnosti okrajové úlohy pro rovnici prvního řádu s takto obecnou okrajovou podmínkou.

Věta 3.8. Uvažujme lineární parciální diferenciální rovnici prvního řádu ve tvaru

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = f(x, y),$$

kde funkce a, b, c, f jsou třídy C^1 na oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, s okrajovou podmínkou $u = u_0(s)$ rovněž třídy C^1 zadanou na regulární křivce

$$\gamma : \begin{cases} x &= x_0(s), \\ y &= y_0(s), \end{cases} \quad s \in I.$$

Pokud je splněna podmínka

$$(3.14) \quad \frac{dx_0}{ds}b(x_0(s), y_0(s)) - \frac{dy_0}{ds}a(x_0(s), y_0(s)) \neq 0 \quad \forall s \in I,$$

pak existuje právě jedno řešení $u = u(x, y)$ dané rovnice definované na okolí křivky γ , které splňuje podmínku $u(x_0(s), y_0(s)) = u_0(s)$.

Poznámka 3.9. Podmínka (3.14) říká, že vektor (a, b) není tečným vektorem křivky γ v žádném z bodů (x_0, y_0) . To znamená, že křivka γ protíná charakteristiky dané rovnice transversálně (tj. pod nenulovým úhlem). Pověšme si rovněž, že věta 3.8 zaručuje existenci jednoznačného řešení pouze lokálně.

Příklad 3.10. Řešme rovnici

$$u_x + u_y = 0$$

s podmínkou $u(2s, s) = e^{-s^2}$, $s \in \mathbb{R}$.

Rovnice má konstantní koeficienty $a = 1$, $b = 1$ a její charakteristiky jsou tedy přímky $y - x = c$, $c \in \mathbb{R}$. Dříve než se pustíme do řešení úlohy, zkontrolujeme podmínku (3.14):

$$\frac{dx_0}{ds}b - \frac{dy_0}{ds}a = 2 - 1 \neq 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

To odpovídá skutečnosti, že křivka γ , kterou je přímka $y = x/2$, protíná všechny charakteristiky právě jednou a pod nenulovým úhlem. (Doporučujeme čtenáři si charakteristiky i počáteční křivku graficky znázornit.) Na základě věty 3.8 máme tedy zaručenou jednoznačnou řešitelnost naší okrajové úlohy. Obecně (i generické) řešení můžeme zapsat ve tvaru

$$u(x, y) = f(y - x),$$

kde f je libovolná diferencovatelná funkce. Konkrétní tvar funkce f získáme na základě okrajové podmínky. Musí platit

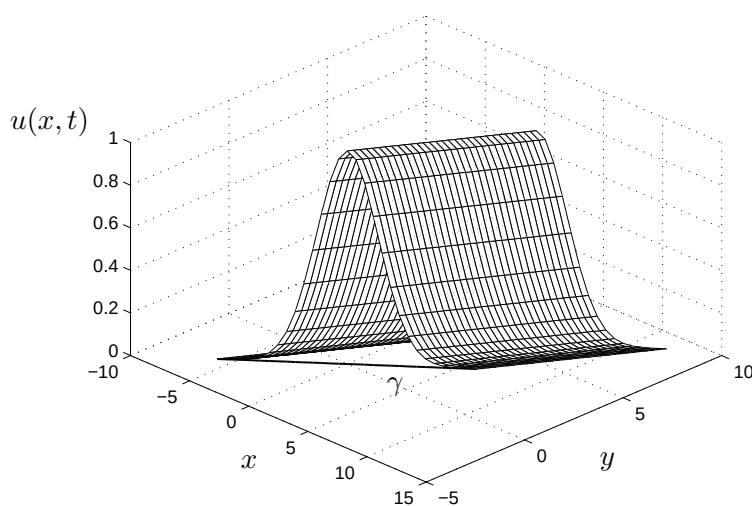
$$e^{-s^2} = u(2s, s) = f(s - 2s) = f(-s)$$

a tedy hledaným řešením je funkce

$$u(x, y) = e^{-(y-x)^2}.$$

Graf řešení je znázorněn na obrázku 3.8.

□



Obrázek 3.8: Řešení úlohy $u_x + u_y = 0$, $u(s, 2s) = e^{-s^2}$.

Příklad 3.11. Řešme rovnici

$$u_x + u_y = 0$$

s podmínkou $u(\cos s, \sin s) = s$, $s \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Tentokrát uvažujeme stejnou rovnici jako v předchozím příkladě, ale okrajovou podmínku máme zadanou na jednotkové kružnici

$$\gamma : \begin{cases} x = \cos s, \\ y = \sin s, \end{cases} \quad s \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Podmínka (3.14) nám dává požadavek

$$\frac{dx_0}{ds}b - \frac{dy_0}{ds}a = -\sin s - \cos s \neq 0,$$

který není splněn v bodech $s = \frac{3}{4}\pi$ a $s = \frac{7}{4}\pi$. Chceme-li mít zaručenou jednoznačnou řešitelnost naší úlohy, musíme okrajovou podmínku zadat pouze na té části kružnice, která tyto body neobsahuje. Uvažujme tedy např. oblouk

$$\gamma : \begin{cases} x = \cos s, \\ y = \sin s, \end{cases} \quad s \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle.$$

Obecné řešení rovnice je libovolná diferencovatelná funkce $u = f(y - x)$. Po dosazení okrajové podmínky dostáváme

$$s = u(\cos s, \sin s) = f(\sin s - \cos s), \quad s \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle.$$

Zavedeme-li $w = \sin s - \cos s$, s využitím goniometrických vztahů snadno vyjádříme

$$s = \frac{\pi}{4} + \arcsin \frac{w}{\sqrt{2}}, \quad w \in \langle -1, 1 \rangle.$$

Tedy $f(w) = \frac{\pi}{4} + \arcsin \frac{w}{\sqrt{2}}$ a řešení naší úlohy s okrajovou podmínkou na čtvrtkružnici můžeme zapsat ve tvaru

$$u(x, y) = \frac{\pi}{4} + \arcsin \frac{y - x}{\sqrt{2}}, \quad -1 \leq y - x \leq 1.$$

Graf řešení je znázorněn na obrázku 3.9. Povšimněte si, že řešení je určeno pouze v pásu $-1 \leq y - x \leq 1$, tj. v oblasti, která vznikla pohybem křivky γ podél charakteristik.

□

Příklad 3.12. Řešme rovnici

$$u_x + y u_y = 0$$

s podmínkou $u(s, s^3) = e^{-s^2}$, $s \in I$, kde I je vhodně zvolený interval.

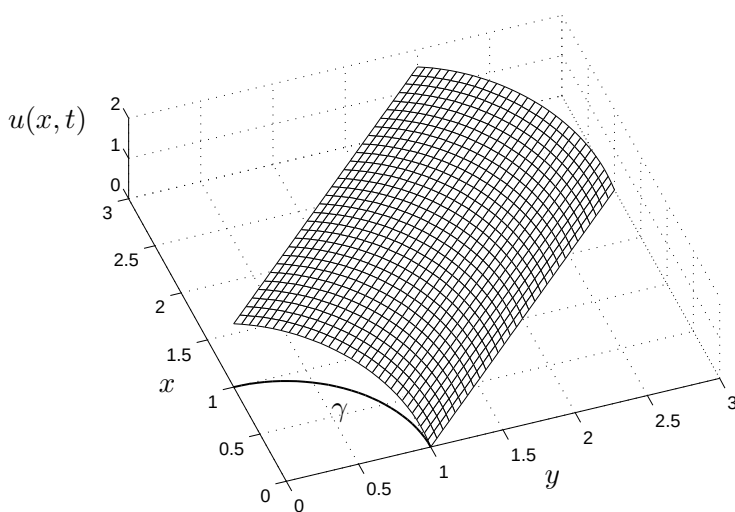
V tomto případě máme koeficienty $a = 1$, $b = y$ a okrajová podmínka je zadána na křivce

$$\gamma : \begin{cases} x = s, \\ y = s^3, \end{cases} \quad s \in I,$$

neboli $\gamma : y = x^3$, $x \in I$. Podmínka (3.14) nám dává požadavek

$$\frac{dx_0}{ds} b(x_0, y_0) - \frac{dy_0}{ds} a(x_0, y_0) = s^3 - 3s^2 \neq 0,$$

který není splněn v bodech $s = 0$ a $s = 3$. Povšimněme si, že opravdu v bodech $[0, 0]$ a $[3, 27]$ má křivka γ a příslušná charakteristika společnou tečnu.



Obrázek 3.9: Řešení úlohy $u_x + u_y = 0$, $u(\cos s, \sin s) = s$, $s \in (0, \pi/2)$.

Chceme-li mít zaručenou jednoznačnou řešitelnost naší úlohy, musíme se těmito body vyhnout. Uvažujme tedy např. $s \in I = (0, 3)$. Z příkladu 3.5 již víme, že charakteristiky rovnice $u_x + yu_y = 0$ jsou křivky, které můžeme popsat vztahem

$$ye^{-x} = c, \quad c \in \mathbb{R},$$

a obecné řešení má tvar

$$u(x, y) = f(ye^{-x}),$$

kde f je libovolná diferencovatelná funkce. Využijeme-li okrajovou podmínku, získáme rovnost

$$e^{-s^2} = u(s, s^3) = f(s^3 e^{-s}), \quad s \in (0, 3),$$

ze které bychom teoreticky získali předpis pro funkci f a následně výsledný tvar řešení. Oproti předchozím příkladům se nám však zde nepodaří funkci f jednoduše zapsat. V tomto případě není explicitní analytické vyjádření řešení vhodné.

□

3.4 Parametrické vyjádření řešení

V příkladu 3.12 jsme viděli, že někdy bývá obtížné (případně zcela nemožné) získat analytický popis řešení okrajové úlohy pro rovnici prvního řádu. V tomto odstavci si ukážeme, že mnohem výhodnější a v jistém smyslu i přirozenější bývá parametrické vyjádření.

Uvažujme tedy opět obecnou lineární rovnici prvního řádu ve dvou nezávislých proměnných

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = f(x, y)$$

s okrajovou podmínkou $u(x, y) = u_0(s)$ zadanou na křivce

$$\gamma : \begin{cases} x &= x_0(s), \\ y &= y_0(s), \end{cases} \quad s \in I.$$

Křivku γ tedy již máme parametricky popsanou s parametrem s . Hledáme-li řešení $u = u(x, y)$ rovněž v parametrickém tvaru, znamená to, že hledáme vyjádření

$$\begin{cases} x &= x(t, s), \\ y &= y(t, s), \\ u &= u(t, s), \end{cases} \quad s \in I, \quad t \in \mathbb{R},$$

tak, aby funkce $x = x(t, s)$, $y = y(t, s)$, $u = u(t, s)$ vyhovovaly rovnici i okrajové podmínce. Parametr t bude vyjadřovat pohyb podél charakteristik a bývá zvykem volit $t = 0$ na křivce γ (viz obrázek 3.10). Parametrické vyjádření charakteristik pak získáme vyřešením soustavy

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} x(t, s) = a(x(t, s), y(t, s)), \\ \frac{\partial}{\partial t} y(t, s) = b(x(t, s), y(t, s)) \end{cases}$$

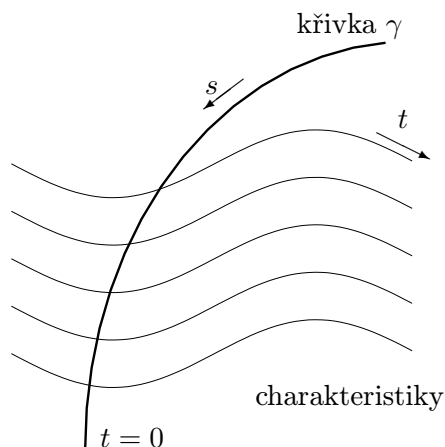
s počáteční podmínkou $x(0, s) = x_0(s)$, $y(0, s) = y_0(s)$. Dále platí

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

a původní parciální diferenciální rovnice se redukuje na rovnici

$$u_t + c(x(t, s), y(t, s))u = f(x(t, s), y(t, s)),$$

se kterou můžeme zacházet jako s obyčejnou diferenciální rovnicí v proměnné t a s parametrem s . Na závěr připojíme počáteční podmínku $u(0, s) = u_0(s)$. Konkrétní postup si ukážeme znovu na příkladu 3.12.

Obrázek 3.10: Charakteristiky a křivka γ transportní úlohy.

Příklad 3.13. Řešme rovnici

$$u_x + yu_y = 0$$

s podmínkou $u(s, s^3) = e^{-s^2}$, $s \in I$, kde I je vhodně zvolený interval. Řešení vyjádříme v parametrickém tvaru.

Nejprve nalezneme parametrické vyjádření charakteristik. Řešíme tedy soustavu rovnic

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}x(t, s) = 1, \\ \frac{\partial}{\partial t}y(t, s) = y(t, s) \end{cases}$$

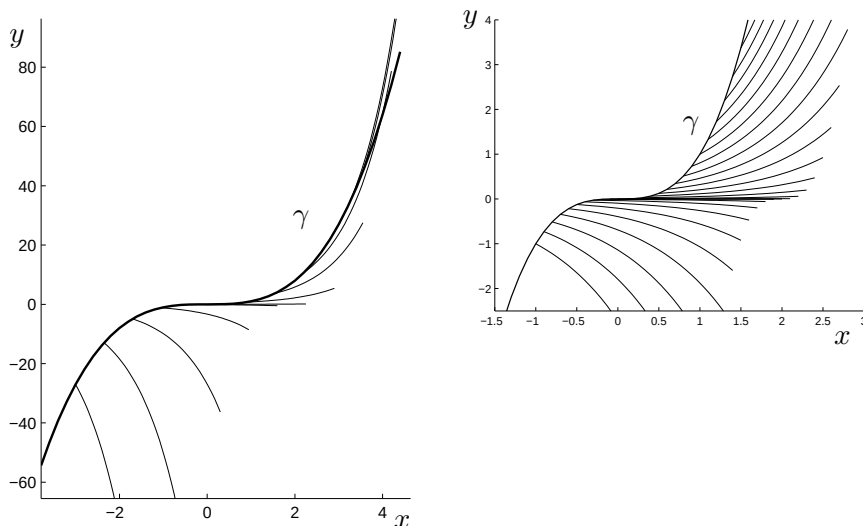
s počáteční podmínkou $x(0, s) = s$, $y(0, s) = s^3$. Její obecné řešení má tvar:

$$x(t, s) = t + g_1(s), \quad y(t, s) = g_2(s)e^t, \quad s \in I, \quad t \in \mathbb{R},$$

kde g_1 a g_2 jsou libovolné funkce, a po dosazení počátečních podmínek získáme parametrický popis charakteristik:

$$x(t, s) = t + s, \quad y(t, s) = s^3 e^t, \quad s \in I, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Na obrázku 3.11 je znázorněna křivka γ a charakteristiky pro volbu $I = (-3, 4)$ a $t \in (0, 2)$. Povšimněme si problematických bodů $[0, 0]$ a $[3, 27]$, na které jsme upozorňovali již v příkladu 3.12.



Obrázek 3.11: Křivka $\gamma : x = s, y = s^3$ a charakteristiky rovnice $u_x + yu_y = 0$. Vlevo: $s \in (-3, 4)$, vpravo: detail na okolí počátku.

Dále platí $u_x + yu_y = x_t u_x + y_t u_y = u_t$ a původní parciální diferenciální rovnice se redukuje na jednoduchý tvar

$$u_t = 0,$$

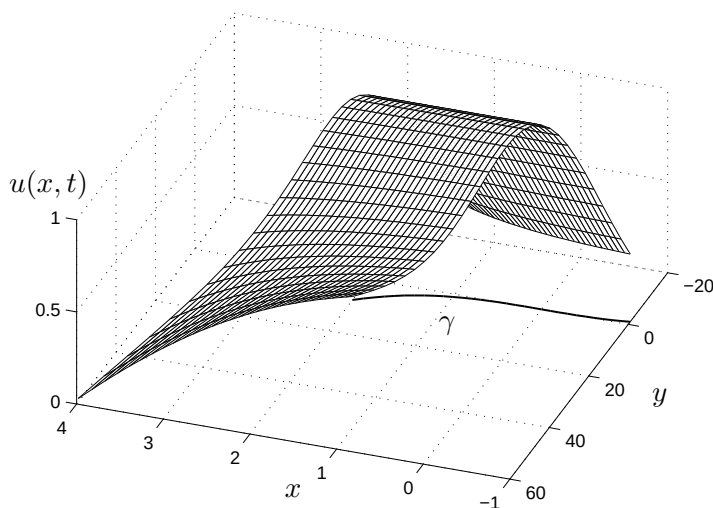
jejímž řešením je libovolná konstanta vzhledem k proměnné t , tj. $u(t, s) = f(s)$. Využijeme-li počáteční podmínku $u(0, s) = e^{-s^2}$, dostaneme triviálně $f(s) = e^{-s^2}$. Výsledný parametrický popis řešení je dán trojicí vztahů

$$\begin{cases} x(t, s) &= t + s, \\ y(t, s) &= s^3 e^t, \\ u(t, s) &= e^{-s^2}, \end{cases} \quad s \in I, t \in \mathbb{R}.$$

(Porovnejte tento postup s postupem v příkladu 3.12 a správnost řešení ověřte zkouškou!) Na obrázku 3.12 je znázorněno řešení pro volbu $I = (-1, 2)$ a $t \in (0, 2)$.

□

Poznámka 3.14. Podmínka (3.14) je podmínkou postačující, nikoli nutnou. To znamená, že její nesplnění neznamená nutně neexistenci nebo nejednoznačnost řešení dané úlohy. U předchozího příkladu 3.13 si všimněme, že v bodě $[0, 0]$ sice



Obrázek 3.12: Řešení úlohy $u_x + yu_y = 0$ s podmínkou $u(s, s^3) = e^{-s^2}$.

charakteristiky neprotínají křivku γ transversálně, ale „rozvíjejí se“ (viz obrázek 3.11 vpravo) a řešení na okolí tohoto bodu existuje a je určeno jednoznačně. Naopak na okolí druhého podezřelého bodu $[3, 27]$ k problémům opravdu dochází, charakteristiky se „překlápí“ přes křivku γ , kříží se a pro $I \ni 3$ daná úloha nemá jednoznačné řešení. Parametrické vyjádření řešení má tu nevýhodu, že z něj tuto skutečnost na první pohled nemusíme poznat. Při bližším zkoumání ale zjistíme, že na okolí hodnoty $s = 3$ nelze vyjádřit u jako funkci proměnných x, y . Doporučujeme čtenáři zkusit si řešení graficky znázornit např. pro volbu $I = (2, 4)$.

Poznámka 3.15. Metoda hledání řešení v parametrickém tvaru má tu výhodu, že ji lze snadno zobecnit do více dimenzí. Řešíme-li např. rovnici

$$a(x, y, z)u_x + b(x, y, z)u_y + c(x, y, z)u_z + d(x, y, z)u = f(x, y, z)$$

se třemi nezávislými proměnnými x, y, z , pak charakteristiky jsou křivky, jejichž

parametrický popis získáme vyřešením soustavy

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}x(t, s, r) = a(x(t, s, r), y(t, s, r), z(t, s, r)), \\ \frac{\partial}{\partial t}y(t, s, r) = b(x(t, s, r), y(t, s, r), z(t, s, r)), \\ \frac{\partial}{\partial t}z(t, s, r) = c(x(t, s, r), y(t, s, r), z(t, s, r)), \end{cases}$$

kde proměnná t reprezentuje pohyb po charakteristice a s, r jsou v tuto chvíli volné parametry. Samotná rovnice se pak redukuje na tvar

$$u_t + c(x(t, s, r), y(t, s, r), z(t, s, r))u = f(x(t, s, r), y(t, s, r), z(t, s, r))$$

a je dále řešitelná technikami pro obyčejné diferenciální rovnice. Chceme-li k rovnici připojit okrajovou podmínku $u(0, s, r) = u_0(s, r)$, je třeba ji zadat na *ploše* σ , která opět protíná charakteristiky právě jednou a pod nenulovým úhlem:

$$\sigma : \begin{cases} x &= x_0(s, r), \\ y &= y_0(s, r), \\ z &= z_0(s, r), \end{cases} \quad s \in I, \quad r \in J.$$

3.5 Cvičení

1. Řešte rovnici $u_t - 3u_x = 0$ s podmínkou $u = e^{-x^2}$ pro $t = 0$ (viz obrázek 3.3).

$$[u(x, t) = e^{-(x+3t)^2}]$$

2. Řešte rovnici $u_t + 3u_x = 0$ s podmínkou $u = \sin x$ pro $t = 0$ (viz obrázek 3.4).

$$[u(x, t) = \sin(x - 3t)]$$

3. Řešte rovnici $3u_y + u_{xy} = 0$ pomocí substituce $v = u_y$.

$$[u(x, y) = e^{-3x}g(y) + f(x)]$$

4. Řešte lineární rovnici $(1 + x^2)u_x + u_y = 0$. Načrtněte některé z charakteristik.

$$[u(x, y) = f(y - \arctg x)]$$

5. Řešte rovnici $\sqrt{1 - x^2}u_x + u_y = 0$ s podmínkou $u(0, y) = y$.

$$[u(x, y) = y - \arcsin x]$$

6. S použitím souřadnicové metody řešte rovnici $au_x + bu_y + cu = 0$.

$$[u(x, y) = e^{-\frac{c}{a^2+b^2}} f(bx - ay)]$$

7. S použitím souřadnicové metody řešte rovnici $u_x + u_y + u = e^{x+2y}$ s počáteční podmínkou $u(x, 0) = 0$.

$$[u(x, y) = \frac{1}{4} (e^{x+2y} - e^{x-2y})]$$

8. Řešte rovnici $u_t + au_x = x^2t + 1$, kde a je konstanta, s počáteční podmínkou $u(x, 0) = x + 2$.

$$[u(x, t) = x - at + 2 + t + \frac{x^2t^2}{2} - \frac{1}{3}axt^3 + \frac{1}{12}a^2t^4]$$

9. Řešte rovnici $u_t + t^\alpha u_x = 0$, kde $\alpha > -1$ je konstanta, s počáteční podmínkou $u(x, 0) = \varphi(x)$.

$$[u(x, t) = \varphi\left(x - \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)]$$

10. Řešte rovnici $u_t + xt u_x = x^2$ s počáteční podmínkou $u(x, 0) = \varphi(x)$.

$$[u(x, t) = \varphi(xe^{-1/2t^2}) + x^2e^{-t^2} \int_0^t e^{s^2} ds]$$

11. Nalezněte obecné řešení transportní rovnice s rozpadem $u_t + cu_x = -\lambda u$ pomocí transformace nezávislých proměnných

$$\xi = x - ct, \quad \tau = t.$$

$$[u(x, t) = e^{-\lambda t} f(x - ct)]$$

12. Ukažte, že konvektivní člen v transportní rovnici s rozpadem

$$u_t + cu_x = -\lambda u$$

může být odstraněn substitucí $w = ue^{\lambda t}$.

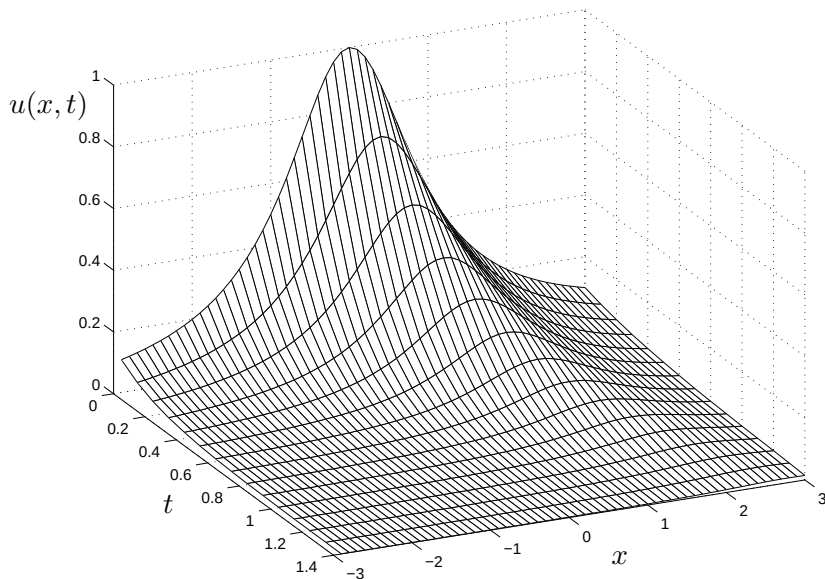
13. Řešte počáteční úlohu

$$\begin{cases} u_t + u_x - 3u = t, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = x^2, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$[u(x, t) = -\frac{1}{3}t - \frac{1}{9} + e^{3t}((x-t)^2 + \frac{1}{9})]$$

14. Řešte transportní rovnici s konvektivním členem

$$u_t + 2u_x = -3u$$



Obrázek 3.13: Řešení úlohy $u_t + 2u_x = -3u$, $u(x, 0) = 1/(1+x^2)$.

za podmínky $u(x, 0) = \frac{1}{1+x^2}$.

[Řešení má tvar $u(x, t) = \frac{e^{-3t}}{1+4t^2-4tx+x^2}$ a je znázorněno na obrázku 3.13. Povšimněte si vlivu konvektivního členu $3u$ na tvar řešení v různých časových hladinách.]

15. Řešte počátečně-okrajovou úlohu

$$\begin{cases} u_t + cu_x = -\lambda u, & x, t > 0, \\ u(x, 0) = 0, & x > 0, \quad u(0, t) = g(t), \quad t > 0. \end{cases}$$

Uvažujte zvlášť případ $x > ct$ a $x < ct$. Okrajová podmínka se projeví v oblasti $x < ct$, zatímco počáteční podmínka ovlivní řešení pouze v oblasti $x > ct$.

$$[u(x, t) = g(t - \frac{x}{c})e^{-\frac{\lambda}{c}x} \quad \text{pro } x - ct < 0, \quad u(x, t) = 0 \quad \text{pro } x - ct > 0]$$

16. Nalezněte předpis, který implicitně definuje řešení $u = u(x, t)$ počáteční úlohy pro rovnici transportní reakce

$$\begin{cases} u_t + vu_x = -\frac{\alpha u}{\beta + u}, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Zde v, α, β jsou kladné konstanty. Ukažte, že z implicitní formule lze vždy vyjádřit u v závislosti na x a t .

$$[\beta \ln |u(x, t)| + u(x, t) = -\alpha t + f(x - vt) + \beta \ln |f(x - vt)|]$$

17. Nalezněte obecná řešení následujících rovnic.

- (a) $u_x + x^2 u_y = 0$,
- (b) $u_x + \sin x u_y = 0$,
- (c) $x u_x + y u_y = 0$,
- (d) $e^{x^2} u_x + x u_y = 0$,
- (e) $x u_x + y u_y = x^n$.

18. Řešte lineární rovnici

$$x u_x - y u_y + y^2 u = y^2, \quad x, y \neq 0.$$

$$[u(x, y) = f(xy)e^{y^2/2} + 1]$$

19. Uvažujte rovnici $y u_x - x u_y = 0$. Zadejte takové křivky a okrajové podmínky na nich zadané, aby daná úloha měla jednoznačné řešení, žádné řešení nebo nekonečně mnoho řešení.

$$[\text{např. a) } u_0(x, 0) = x^2, \text{ b) } u_0(x, y) = y \text{ na } x^2 + y^2 = 1,$$

$$\text{c) } u_0(x, y) = 1 \text{ na } x^2 + y^2 = 1]$$

20. Uvažujte kvazilineární rovnici $u_y + a(u)u_x = 0$ s podmínkou $u(x, 0) = h(x)$. Ukažte, že její řešení lze vyjádřit v implicitním tvaru $u = h(x - a(u)y)$. Jaké jsou zde charakteristiky? Co se stane, když $a(h(x))$ bude rostoucí funkce?

21. Uvažujte rovnici

$$(3.15) \quad u_y = \left(\frac{y}{x} u \right)_x.$$

Ukažte, že

(a) obecné řešení rovnice (3.15) má tvar $u = x f(x^2 + y^2)$;

(b) funkce

$$I(x, y) = \frac{x}{y} \int_0^\infty e^{-y\sqrt{1+t^2}} \cos xt \, dt$$

vyhovuje rovnici (3.15);

(c) platí následující rovnost:

$$\int_0^{\infty} e^{-y\sqrt{1+t^2}} \cos xt \, dt = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \int_0^{\infty} e^{-\sqrt{(1+t^2)(x^2+y^2)}} dt, \quad y > 0.$$

22. Ukažte, že počáteční úloha

$$u_t + u_x = 0, \quad u(x, t) = x \quad \text{na } x^2 + t^2 = 1$$

nemá řešení. Pokud však zadáme počáteční podmínku pouze na půlkružnici, která leží v polorovině $x + t \leq 0$, řešení existovat bude, ale nebude diferencovatelné podél charakteristik vycházejících z obou koncových bodů půlkružnice.

23. Ukažte, že počáteční úloha

$$(t - x)u_x - (t + x)u_t = 0, \quad u(x, 0) = f(x), \quad x > 0,$$

nemá řešení. Jak vypadají příslušné charakteristiky?

24. Ukažte, že rovnice $a(x)u_x + b(t)u_t = 0$ má obecné řešení $u(x, t) = F(A(x) - B(t))$, kde $A'(x) = 1/a(x)$ a $B'(t) = 1/b(t)$.

25. Ukažte, že rovnice $a(t)u_x + b(x)u_t = 0$ má obecné řešení $u(x, t) = F(B(x) - A(t))$, kde $B'(x) = b(x)$ a $A'(t) = a(t)$.

26. Ukažte, že úloha

$$u_t + u_x = x, \quad u(x, x) = 1$$

nemá řešení.

27. Uvažujte semilineární rovnici

$$a(x, y, u(x, y)) u_x + b(x, y, u(x, y)) u_y = c(x, y, u(x, y))$$

a ukažte, že metodou charakteristik dostaneme

$$\frac{dx}{a(x, y, u(x, y))} = \frac{dy}{b(x, y, u(x, y))} = \frac{du(x, y)}{c(x, y, u(x, y))}.$$

[Návod: Diferenciální rovnici můžeme chápat jako skalární součin vektoru koeficientů $(a(x, y, u), b(x, y, u), c(x, y, u))$ a normálového vektoru $(u_x, u_y, -1)$ k ploše řešení $u = u(x, y)$ v prostoru (x, y, u) .]

4

Kapitola

Vlnová rovnice v jedné prostorové proměnné – počáteční úloha v $\mathbb{R}$

4.1 Obecné řešení vlnové rovnice

Uvažujme vlnovou rovnici

$$(4.1) \quad \boxed{u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,}$$

kterou jsme odvodili v odstavci 1.3.5, a hledejme její obecné řešení. Intuitivně si můžeme představovat „nekonečně dlouhou“ strunu. Ukážeme si dvě metody, kterými lze obecné řešení rovnice (4.1) nalézt.

4.1.1 Převod na soustavu dvou rovnic prvního řádu

Rovnici (4.1) můžeme formálně přepsat následujícím způsobem

$$(4.2) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0.$$

Zavedeme-li novou funkci v vztahem $v = u_t + cu_x$, převedeme původní rovnici (4.1) na soustavu dvou rovnic prvního řádu

$$(4.3) \quad \begin{cases} v_t - cv_x &= 0, \\ u_t + cu_x &= v. \end{cases}$$

Obě rovnice jsou nyní řešitelné např. souřadnicovou metodou (viz odstavec 3.1.2). Z prvního vztahu dostáváme

$$v(x, t) = h(x + ct),$$

kde h je libovolná diferencovatelná funkce. Dosadíme-li za v do druhé rovnice soustavy (4.3), získáme vztah

$$u_t + cu_x = h(x + ct),$$

který představuje transportní rovnici s konstantními koeficienty a s nenulovou pravou stranou. Řešení odpovídající homogenní rovnice má podobu

$$(4.4) \quad u_H(x, t) = g(x - ct).$$

Protože pravou stranou rovnice je libovolná diferencovatelná funkce argumentu $x + ct$, musí být partikulární řešení, které vystihuje její vliv, rovněž libovolná diferencovatelná funkce stejného argumentu, tedy

$$(4.5) \quad u_P(x, t) = f(x + ct).$$

Obecné (a zároveň generické) řešení vlnové rovnice je pak součtem řešení (4.4) a (4.5):

$$(4.6) \quad \boxed{u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct).}$$

4.1.2 Metoda charakteristik

Druhý způsob odvození obecného řešení vlnové rovnice na přímce spočívá v zavedení speciálních souřadnic

$$\xi = x + ct, \quad \eta = x - ct.$$

Podle pravidla o derivování složené funkce platí

$$\partial_x = \partial_\xi + \partial_\eta, \quad \partial_t = c\partial_\xi - c\partial_\eta$$

a tedy

$$\begin{aligned} \partial_t - c\partial_x &= -2c\partial_\eta, \\ \partial_t + c\partial_x &= 2c\partial_\xi. \end{aligned}$$

Po dosazení do vyjádření (4.2) získáme transformovanou rovnici

$$-4c^2 \partial_\xi \partial_\eta u = 0$$

neboli

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

S jejím řešením jsme se již seznámili v kapitole 2 (viz příklad 2.3),

$$u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta),$$

f a g jsou opět libovolné diferencovatelné funkce. Přejdeme-li zpět k původním proměnným x a t , dostaneme již jednou odvozené obecné řešení jednodimenzi-onální vlnové rovnice

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct).$$

Jak je patrné, jedná se o součet dvou postupných vln, pravé a levé, které se pohybují rychlostí $c > 0$. Přímkou $x + ct = \text{konst.}$, $x - ct = \text{konst.}$, podél kterých se příslušné vlny šíří, se nazývají *charakteristiky vlnové rovnice*.

4.2 Počáteční úloha na přímce

Jestliže nyní budeme uvažovat počáteční úlohu

$$(4.7) \quad \boxed{\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, & t > 0, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), & u_t(x, 0) &= \psi(x), \end{aligned}}$$

určíme konkrétní tvar funkcí f a g z obecného řešení (4.6) v závislosti na daných funkcích φ a ψ , které popisují *počáteční výchylku* a *počáteční rychlost* hledané vlny.

Vydeme-li z vyjádření (4.6), potom pro $t = 0$ musí platit

$$\varphi(x) = f(x) + g(x), \quad \psi(x) = cf'(x) - cg'(x).$$

Z první rovnosti vyplývá (předpokládáme, že všechny naznačené derivace existují):

$$\varphi'(x) = f'(x) + g'(x),$$

což v kombinaci s druhou rovností implikuje

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}\varphi'(x) + \frac{1}{2c}\psi(x), \\ g'(x) &= \frac{1}{2}\varphi'(x) - \frac{1}{2c}\psi(x) \end{aligned}$$

a po integraci

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x \psi(\tau) d\tau + A, \\ g(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x \psi(\tau) d\tau + B, \end{aligned}$$

kde A, B jsou integrační konstanty. Z podmínky $u(x, 0) = \varphi(x)$ však plyne $A + B = 0$. Po dosazení předchozích vztahů do obecného vyjádření řešení (4.6) získáváme řešení počáteční úlohy pro vlnovou rovnici v jedné dimenzi ve tvaru

$$(4.8) \quad u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\tau) d\tau.$$

Tento tvar řešení byl odvozen d'Alembertem v roce 1746. První dva členy na pravé straně vystihují vliv počáteční výchylky: počáteční vlna se rozdělí na dvě části, z nichž jedna postupuje ve směru kladné poloosy x rychlostí c a druhá postupuje ve směru záporné poloosy x rychlostí c . Integrál na pravé straně vyjadřuje vliv počáteční rychlosti. Řešení vyjádřené d'Alembertovou formulí je určeno jednoznačně (viz cvičení 6 v odstavci 10.9).

Následující věta je fundamentálním tvrzením o existenci a jednoznačnosti řešení počáteční úlohy pro vlnovou rovnici.

Věta 4.1. *Nechť $\varphi \in C^2$, $\psi \in C^1$ na celém $\mathbb{R}$. Počáteční úloha (4.7) pro vlnovou rovnici na přímce s počáteční výchylkou $\varphi(x)$ a počáteční rychlostí $\psi(x)$ má pak právě jedno klasické řešení $u \in C^2$ dané d'Alembertovým vzorcem (4.8).*

Příklad 4.2. Nalezněme řešení vlnové rovnice na přímce, je-li počáteční výchylka nulová a počáteční rychlost je dána funkcí $\sin x$.

Tento problém zapíšeme v jazyce matematiky jako počáteční úlohu

$$(4.9) \quad \begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = 0, & u_t(x, 0) = \sin x. \end{cases}$$

Po dosazení počátečních podmínek do d'Alembertova vzorce (4.8) dostáváme

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \sin \tau d\tau = \frac{1}{2c} [\cos(x + ct) - \cos(x - ct)]$$

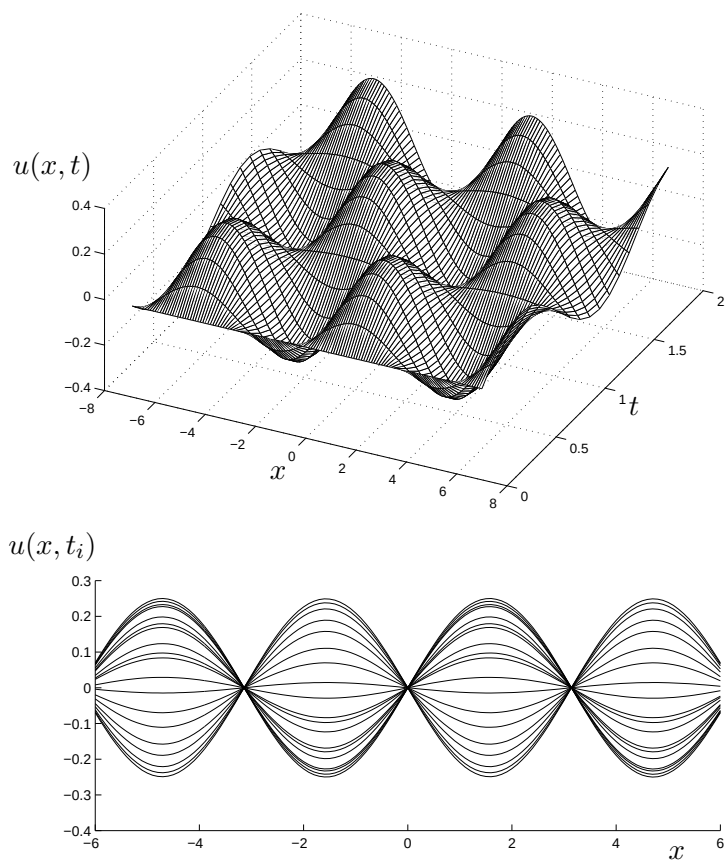
a s využitím goniometrického vzorce $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$ můžeme řešení $u(x, t)$ zapsat ve tvaru

$$(4.10) \quad u(x, t) = \frac{1}{c} \sin ct \sin x.$$

Proveďte zkoušku!

□

Všimněte si následující speciální vlastnosti řešení (4.10): nulové body funkce u jsou v bodech $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, pro libovolné $t \geq 0$. „Necestují“ tedy po ose x s měnícím se časem. Řešení vlnové rovnice s výše uvedenou vlastností se nazývá *stojaté vlnění* (anglicky: *standing waves* – viz obrázek 4.1).



Obrázek 4.1: *Stojaté vlnění* – řešení počáteční úlohy (4.9).

Poznámka 4.3. Je možné dokázat, že počáteční úloha pro vlnovou rovnici má právě jedno klasické řešení *právě tehdy, když* $\varphi \in C^2$ a $\psi \in C^1$. To je více, než říká věta 4.1. Tyto požadavky na počáteční podmínky jsou však silně omezující a často v rozporu s praktickými úlohami, které je třeba řešit metodami matematického modelování. Takové úlohy, pokud jsou chápány v klasickém smyslu, jsou nekorektní. Tento fakt byl pro matematiky v osmnáctém století těžkým problémem a trvalo velmi dlouho, než dospěli k obecnějšímu chápání řešení (slabé řešení, velmi slabé řešení, zobecněné řešení, silné řešení, ...). V tomto textu se těmito otázkami nebudeme podrobně zabývat. Omezíme se pouze na konstatování, že formule (4.8) vyjadřující v explicitním tvaru řešení počáteční úlohy pro vlnovou rovnici má smysl i pro daleko obecnější počáteční podmínky, než jsou funkce $\varphi \in C^2$, $\psi \in C^1$. Na řešení u se pak například můžeme dívat jako na funkci, která splňuje diferenciální rovnici pouze v těch bodech, kde existují příslušné parciální derivace u_{tt} a u_{xx} . Na druhou stranu množina bodů, kde tyto derivace neexistují (a rovnice nemá smysl), nemůže být „příliš velká“.

Pokud φ je C^2 funkce a ψ je C^1 funkce na $\mathbb{R}$ s výjimkou konečně mnoha bodů (tzv. *singulárních bodů* nebo *singularit*), má vzorec (4.8) stále smysl, parciální derivace funkce u existují a jsou spojité s výjimkou konečného počtu přímk v rovině (x, t) a rovnice (4.1) je splněna ve všech bodech, které na těchto přímkách neleží. V takovém (zobecněném) smyslu budeme chápat i řešení následujících počátečních úloh. Čtenář by si však měl uvědomit, že požadavky na funkce φ a ψ lze ještě více zeslabit (např. uvažovat lokálně integrovatelné funkce) a řešení úlohy (4.1) chápat daleko obecněji. I v tomto případě lze dokázat existenci a jednoznačnost řešení.

Příklad 4.4. Řešme vlnovou rovnici s počáteční výchylkou

$$\varphi(x) = \begin{cases} b - \frac{b}{a}|x| & \text{pro } |x| \leq a, \\ 0 & \text{pro } |x| > a \end{cases}$$

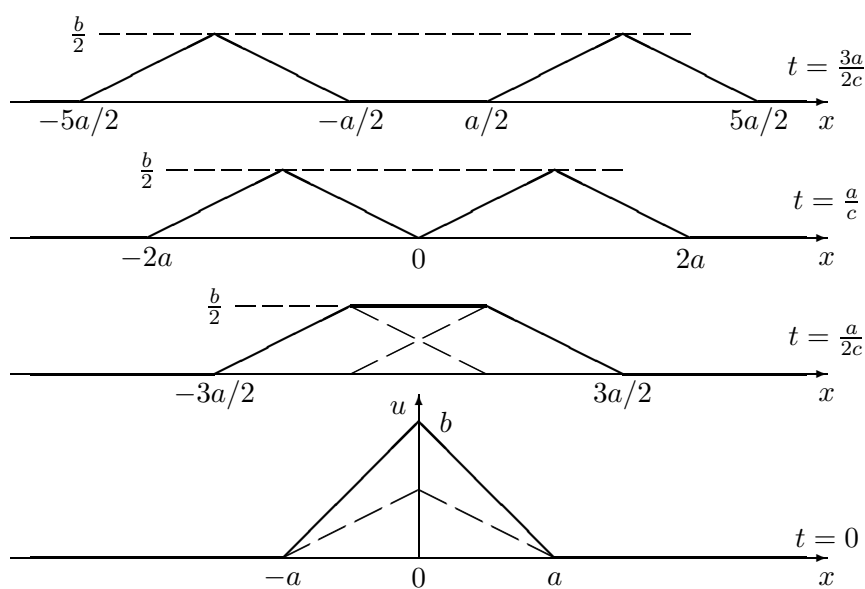
a s nulovou počáteční rychlostí $\psi(x) \equiv 0$. Tato úloha popisuje chování nekonečně dlouhé struny, která je v čase $t = 0$ vychýlena „třemi prsty“ a následně uvolněna. Body $x \in \{-a, 0, a\}$ představují singularity počáteční výchylky φ .

Podle d'Alembertova vzorce (4.8) má příslušné řešení tvar

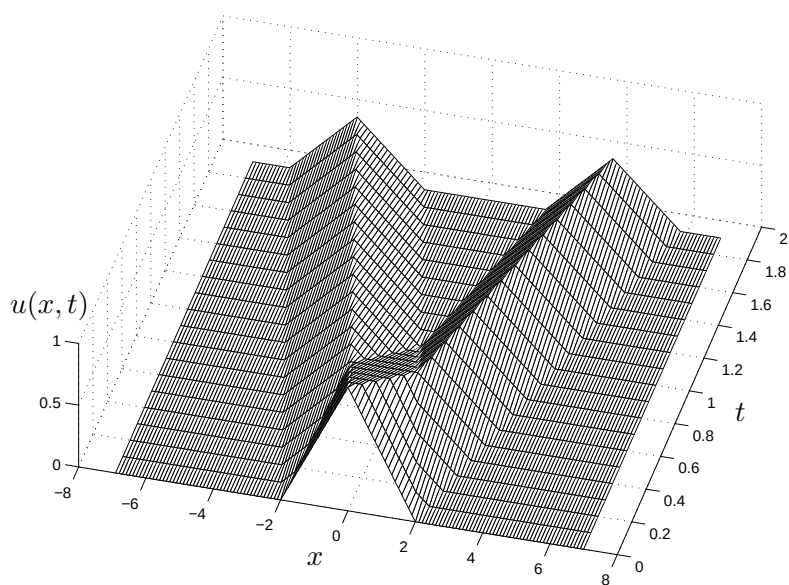
$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x - ct) + \varphi(x + ct)],$$

jde tedy o součet dvou „trojúhelníkových funkcí“, které se s rostoucím časem od sebe vzdalují. Tvar řešení na vybraných časových hladinách je znázorněn na obrázku 4.2, celkový průběh funkce $u(x, t)$ pak na obrázku 4.3 (pro hodnoty $c = 2$, $b = 1$, $a = 2$). Povšimněme si přímk v rovině (x, t) , na kterých parciální derivace řešení u neexistují a rovnice (4.1) tedy nemá smysl.

□



Obrázek 4.2: Řešení příkladu 4.4 na vybraných časových hladinách.



Obrázek 4.3: Průběh řešení z příkladu 4.4.

Příklad 4.5. Řešme vlnovou rovnici s nulovým počátečním rozložením $\varphi(x) \equiv 0$ a s počáteční rychlostí

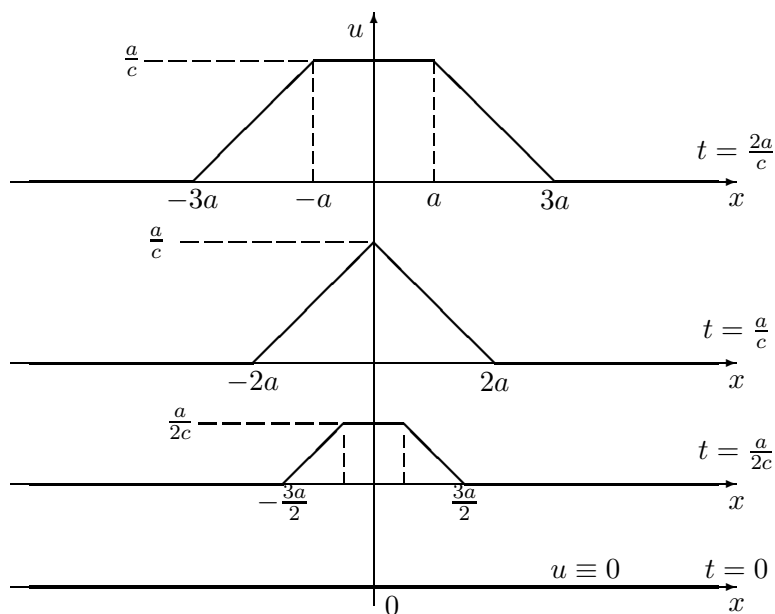
$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } |x| \leq a, \\ 0 & \text{pro } |x| > a. \end{cases}$$

Tuto úlohu lze považovat za zjednodušený model chování nekonečně dlouhé struny po úderu kladivem o šířce $2a$. V tomto případě představují body $x \in \{-a, a\}$ singularity počáteční rychlosti ψ . Z d'Alembertova tvaru řešení dostáváme

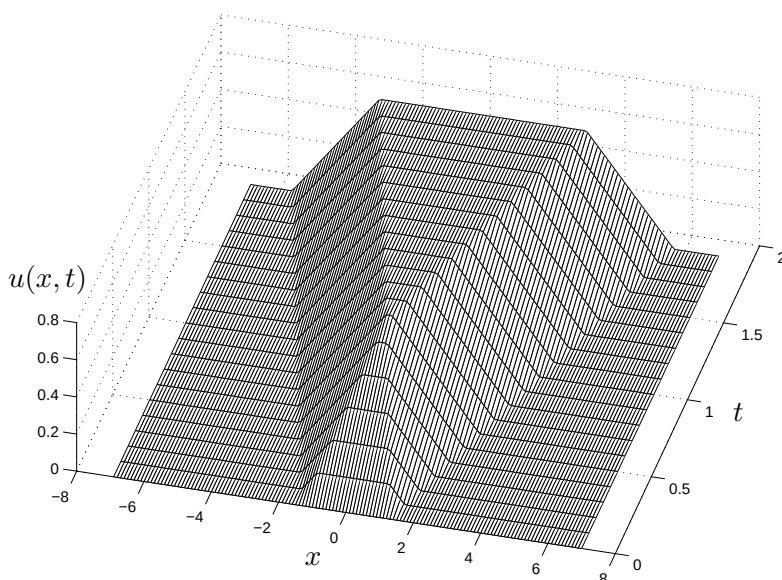
$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\tau) d\tau = \frac{1}{2c} \times \text{délka intervalu } \{(-a, a) \cap (x-ct, x+ct)\}.$$

Tvar řešení na vybraných časových hladinách je znázorněn na obrázku 4.4, celkový průběh funkce $u(x, t)$ pak na obrázku 4.5, kde jsou voleny hodnoty $c = 2.3$ a $a = 1.3$. Opět si všimněme přímk v rovině (x, t) , kde parciální derivace funkce u neexistují a rovnice (4.1) nemá smysl.

□



Obrázek 4.4: Řešení příkladu 4.5 na vybraných časových hladinách.



Obrázek 4.5: Průběh řešení z příkladu 4.5.

4.3 Princip kauzality

Všimněme si podrobněji řešení počáteční úlohy pro vlnovou rovnici na přímce. Zjistíme, že počáteční podmínka v bodě $(x_0, 0)$ se může „rozšířit“ pouze do té části roviny (x, t) , která je vymezena přímkami o rovnicích $x \pm ct = x_0$ (charakteristiky procházející bodem $(x_0, 0)$) – viz obrázek 4.6. Výše s těmito hraničními body se nazývá *oblast vlivu* bodu $(x_0, 0)$.

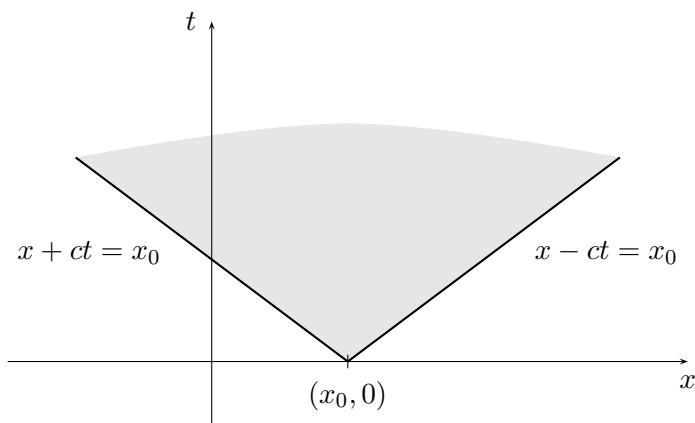
Speciálně odtud např. vyplývá, že platí-li pro počáteční podmínky

$$\varphi(x) = \psi(x) \equiv 0 \quad \text{pro } |x| > R,$$

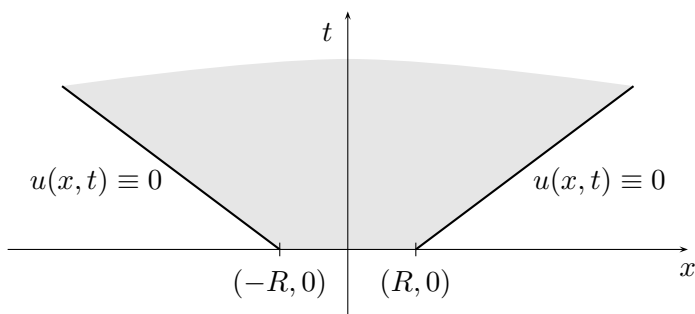
je řešení identicky nulové $u(x, t) \equiv 0$ „vpravo“ od přímky $x - ct = R$ a „vlevo“ od přímky $x + ct = -R$ (viz obrázek 4.7).

Opačný pohled na zákon kauzality (vlivu) je následující: zvolme libovolný bod (x, t) a ptejme se, které hodnoty počátečních podmínek na ose x (pro $t = 0$) mohou ovlivnit tvar řešení v bodě (x, t) . Z výše uvedeného vyplývá, že jsou to právě hodnoty $\varphi(x - ct)$, $\varphi(x + ct)$ a hodnoty $\psi(x)$ pro x z intervalu mezi $x - ct$ a $x + ct$ – viz obrázek 4.8.

Trojúhelník $\triangle_{xt}$ o vrcholech v bodech $(x - ct, 0)$, $(x + ct, 0)$ a (x, t) se nazývá *oblast historie* (příp. *charakteristický trojúhelník*) bodu (x, t) .



Obrázek 4.6: Oblast vlivu bodu x_0 v čase $t \geq 0$.



Obrázek 4.7: Oblast vlivu intervalu $(-R, R)$ v čase $t \geq 0$.

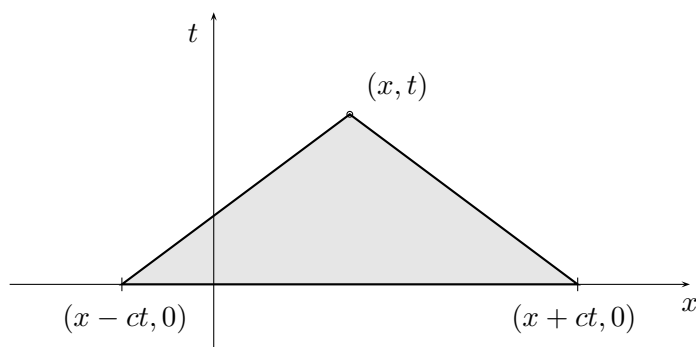
4.4 Vlnová rovnice se zdrojem

Uvažujme nyní počáteční úlohu pro vlnovou rovnici s nenulovou pravou stranou

$$(4.11) \quad \boxed{\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= f(x, t), & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), & u_t(x, 0) = \psi(x). \end{aligned}}$$

Následující tvrzení o existenci a jednoznačnosti řešení je zobecněním věty 4.1.

Věta 4.6. *Nechť $\varphi \in C^2$, $\psi \in C^1$, $f \in C^1$. Počáteční úloha (4.11) má právě*

Obrázek 4.8: Oblast historie (charakteristický trojúhelník) bodu (x, t) .

jedno klasické řešení, které má tvar

$$(4.12) \quad \boxed{u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y) dy + \frac{1}{2c} \iint_{\Delta} f(y, s) dy ds.}$$

Symbol $\Delta = \Delta_{xt}$ v posledním integrálu značí charakteristický trojúhelník (viz obrázek 4.8), tj.

$$\iint_{\Delta} f(y, s) dy ds = \int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y, s) dy ds.$$

To znamená, že vliv vnějšího buzení f na chování modelované struny je dán pouze integrací funkce f přes celou oblast historie bodu (x, t) až do času $t = 0$. Opět tedy platí princip kauzality.

Poznámka 4.7. Doporučujeme čtenáři, aby zkouškou ověřil, že funkce daná formulí (4.12) je skutečně řešením úlohy (4.11). (Viz cvičení 12 v odstavci 4.5.) Rovněž si povšimněme, že klasické řešení existuje za obecnějšího předpokladu $f \in C$.

Způsobů odvození formule (4.12) je několik. Jedna z možností spočívá v aplikaci metody charakteristik, jiná v převodu vlnové rovnice na soustavu dvou transportních rovnic. Druhé odvození je náplní cvičení č. 19 v odstavci 4.5. V dalším výkladu soustředíme naši pozornost na jiné dva způsoby, kterými jsme se doposud nezabývali, a to na využití *Greenovy věty* a na aplikaci tzv. *operátorové metody*.

4.4.1 Využití Greenovy věty

Pro jednoduchost uvažujme pevný bod (x_0, t_0) a předpokládejme, že u je klasické řešení úlohy (4.11). Vyjdeme z vlnové rovnice a zintegrujeme ji přes oblast historie bodu (x_0, t_0) , tj. přes charakteristický trojúhelník $\triangle$:

$$\iint_{\triangle} f \, dx \, dt = \iint_{\triangle} (u_{tt} - c^2 u_{xx}) \, dx \, dt.$$

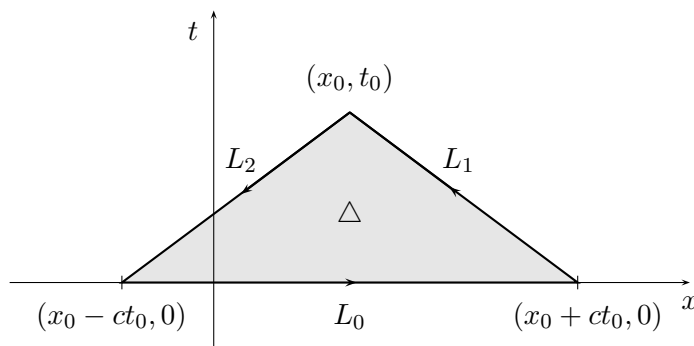
Na pravou stranu nyní aplikujeme Greenovu větu, podle které platí

$$\iint_{\triangle} (P_x - Q_t) \, dx \, dt = \int_{\partial\triangle} P \, dt + Q \, dx$$

pro libovolné spojitě diferencovatelné funkce P, Q . Křivkový integrál přes hranici $\partial\triangle$ oblasti $\triangle$ uvažujeme v kladném směru, tj. proti směru hodinových ručiček. V našem případě zvolíme $P = -c^2 u_x$, $Q = -u_t$. Označíme-li jednotlivé strany charakteristického trojúhelníka L_0, L_1, L_2 (viz obrázek 4.9), dostáváme

$$\iint_{\triangle} f \, dx \, dt = \int_{L_0 \cup L_1 \cup L_2} -c^2 u_x \, dt - u_t \, dx,$$

což lze přepsat jako součet tří křivkových integrálů přes příslušné úsečky.



Obrázek 4.9: Charakteristický trojúhelník bodu (x_0, t_0) .

Na straně L_0 platí $t = 0$, $dt = 0$ a $u_t(x, 0) = \psi(x)$, tedy

$$\int_{L_0} -c^2 u_x \, dt - u_t \, dx = - \int_{x_0 - ct_0}^{x_0 + ct_0} \psi(x) \, dx.$$

Na straně L_1 máme $x + ct = x_0 + ct_0$ a tedy $dx + c dt = 0$. Odtud dostaneme

$$\int_{L_1} -c^2 u_x dt - u_t dx = c \int_{L_1} u_x dx + u_t dt = c \int_{L_1} du = cu(x_0, t_0) - c\varphi(x_0 + ct_0),$$

kde du značí totální diferenciál funkce $u = u(x, t)$. Obdobně pro stranu L_2 , kde platí $dx - c dt = 0$, vyjádříme

$$\int_{L_2} -c^2 u_x dt - u_t dx = -c \int_{L_2} u_x dx + u_t dt = -c \int_{L_2} du = -c\varphi(x_0 - ct_0) + cu(x_0, t_0).$$

Dosadíme-li tyto tři dílčí výsledky zpět, dostáváme

$$\iint_{\Delta} f dx dt = 2cu(x_0, t_0) - c[\varphi(x_0 + ct_0) + \varphi(x_0 - ct_0)] - \int_{x_0 - ct_0}^{x_0 + ct_0} \psi(x) dx$$

a odtud již požadovaný tvar řešení u v bodě (x_0, t_0) .

4.4.2 Operátorová metoda

Tentokrát se pokusíme odvodit tvar řešení počáteční úlohy pro nehomogenní vlnovou rovnici na základě analogie s obyčejnou diferenciální rovnicí

$$(4.13) \quad \frac{d^2 v}{dt^2} + A^2 v(t) = f(t)$$

s počátečními podmínkami

$$v(0) = \varphi, \quad \frac{dv}{dt}(0) = \psi,$$

kde φ a ψ jsou reálná čísla. Metodou variace konstant získáme řešení rovnice (4.13) pro nenulovou konstantu A ve tvaru

$$(4.14) \quad v(t) = S'(t)\varphi + S(t)\psi + \int_0^t S(t-s)f(s) ds,$$

kde

$$(4.15) \quad S(t) = \frac{1}{A} \sin At, \quad S'(t) = \cos At.$$

Tedy v případě $\varphi = 0$, $f = 0$ má řešení tvar $v(t) = S(t)\psi$.

Nyní se vrátíme k naší vlnové rovnici. Řešení homogenní rovnice pro $\varphi(x) \equiv 0$, $f(x, t) \equiv 0$ jsme odvodili ve tvaru

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y) dy.$$

Zavedeme-li tzv. *zdrojový operátor* $\mathcal{S}(t)$ předpisem

$$(4.16) \quad \mathcal{S}(t)\psi(x) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y) dy,$$

můžeme psát

$$u(x, t) = \mathcal{S}(t)\psi(x).$$

Podle prvního členu na pravé straně vztahu (4.14) bychom mohli očekávat, že reakce na nenulovou počáteční výchylku bude mít analogicky tvar $\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{S}(t)\varphi(x)$. Opravdu platí

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{S}(t)\varphi(x) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \varphi(y) dy = \frac{1}{2c} [c\varphi(x+ct) - (-c)\varphi(x-ct)],$$

což je v souladu s d'Alembertovým tvarem řešení (4.8). Jsme tedy na dobré cestě.

Nyní si všimněme pouze vlivu samotné pravé strany na tvar řešení. Uvažujme $\varphi = \psi = 0$. Použijeme-li analogii s řešením obyčejné diferenciální rovnice (4.14), dostáváme, že příslušné řešení vlnové rovnice by mohlo mít tvar

$$u(t) = \int_0^t \mathcal{S}(t-s)f(s) ds.$$

S využitím definice zdrojového operátoru (4.16) získáme

$$u(x, t) = \int_0^t \left(\frac{1}{2c} \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y, s) dy \right) ds = \frac{1}{2c} \iint_{\Delta} f(y, s) dy ds,$$

což se shoduje s výrazem (4.12) pro $\varphi = \psi = 0$. Řešení jsme tedy „uhodli“ a nyní by zbývalo ověřit, že je náš odhad správný (viz náplň cvičení 12 v odstavci 4.5).

Tento přístup, založený na myšlence, že ze znalosti řešení homogenní rovnice lze odvodit i řešení nehomogenní rovnice, se v souvislosti s vlnovou rovnicí nazývá *Duhamelův princip*.

4.5 Cvičení

1. Ověřte, že funkce

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi) d\xi$$

řeší vlnovou rovnici $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, kde c je konstanta a g je spojitě diferencovatelná funkce. Použijte pravidla pro derivování integrálu podle parametrů x a t , které se vyskytují v mezích integrace.

2. Lineární aproximace jednorozměrného isotropického proudění ideálního plynu je popsána soustavou

$$u_t + \rho_x = 0, \quad u_x + c^2 \rho_t = 0,$$

kde $u = u(x, t)$ je rychlost plynu a $\rho = \rho(x, t)$ je jeho hustota. Ukažte, že u i ρ splňuje vlnovou rovnici.

3. Při odvození obecného řešení (4.6) vlnové rovnice jsme využili skutečnost, že lineární vlnový operátor $L = (\partial_t)^2 - c^2(\partial_x)^2$ je tzv. *reducibilní* (nebo *faktorizovatelný*), tj. můžeme jej zapsat jako součin lineárních operátorů prvního řádu: $L = L_1 L_2$. S využitím stejné myšlenky nalezněte obecná řešení následujících rovnic.

(a) $u_{xx} + u_x = u_{yy} + u_y$.

[$L_1 = \partial_x - \partial_y$, $L_2 = \partial_x + \partial_y + 1$. Obecné řešení lze zapsat ve tvaru $u(x, y) = \varphi(x + y) + e^{-x}\psi(x - y)$ nebo ve tvaru $u(x, y) = \varphi(x + y) + e^{-y}h(x - y)$, kde φ , ψ a h jsou libovolné diferencovatelné funkce.]

(b) $3u_{xx} + 10u_{xy} + 3u_{yy} = 0$.

[$L_1 = 3\partial_x + \partial_y$, $L_2 = \partial_x + 3\partial_y$; $u(x, y) = \varphi(3x - y) + \psi(x - 3y)$ s libovolnými diferencovatelnými funkcemi φ , ψ .]

4. Řešte počáteční úlohu $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, $u(x, 0) = e^x$, $u_t(x, 0) = \sin x$.

$$[u(x, t) = \frac{1}{2}(e^{x+ct} + e^{x-ct}) - \frac{1}{2c}(\cos(x + ct) - \cos(x - ct))]$$

5. Řešte počáteční úlohu $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, $u(x, 0) = \ln(1 + x^2)$, $u_t(x, 0) = 4 + x$.

$$[u(x, t) = \ln \sqrt{(1 + (x + ct)^2)(1 + (x - ct)^2)} + t(4 + x)]$$

6. Řešte počáteční úlohu $u_{tt} - 3u_{xt} - 4u_{xx} = 0$, $u(x, 0) = x^2$, $u_t(x, 0) = e^x$. Použijte stejného postupu jako při odvození obecného řešení vlnové rovnice.

$$[u(x, t) = x^2 + 4t^2 + \frac{e^{x+4t} - e^{x-t}}{5}]$$

7. Řešte počáteční úlohu $u_{tt} - u_{xx} = 0$, $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = -2xe^{-x^2}$.

$$[u(x, t) = \frac{1}{2}(e^{-(x+t)^2} - e^{-(x-t)^2})]$$

8. Řešte počáteční úlohu $u_{tt} - u_{xx} = 0$, $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$.

$$[u(x, t) = \frac{1}{4}(\frac{1}{1+(x-t)^2} - \frac{1}{1+(x+t)^2})]$$

9. Řešte počáteční úlohu $u_{tt} - u_{xx} = 0$ pro

$$u(x, 0) = \begin{cases} e^{-x}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases} \quad u_t(x, 0) = 0.$$

10. Řešte počáteční úlohu $u_{tt} - u_{xx} = 0$ pro

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \begin{cases} e^{-x}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

11. Dokažte, že funkce

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [e^{-(x-2t)^2} + e^{-(x+2t)^2}]$$

(viz obrázek 4.10) je řešením počáteční úlohy

$$(4.17) \quad \begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = e^{-x^2}, & u_t(x, 0) = 0. \end{cases}$$

12. Přímým dosazením ověřte, že funkce

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \iint_{\Delta} f(y, s) dy ds$$

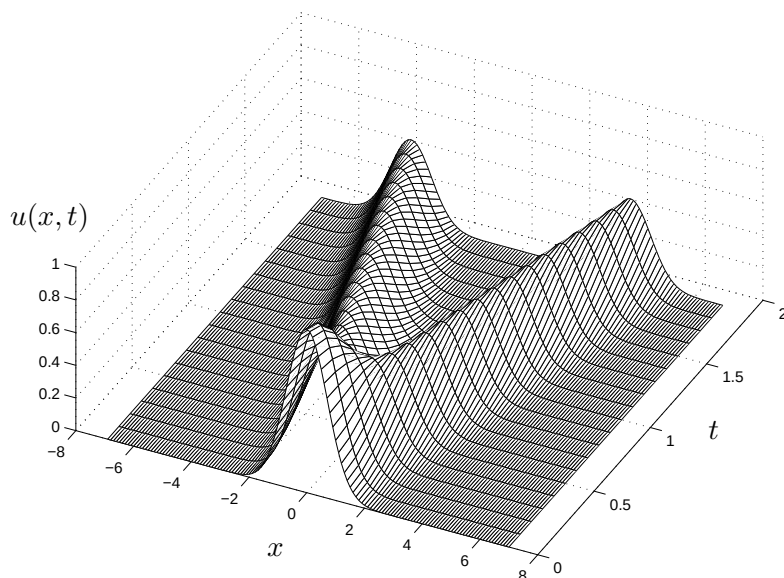
řeší nehomogenní vlnovou rovnici $u_{tt} - c^2 u_{xx} = f$ (věta 4.6). Vysvětlete, proč potřebujeme požadavek $f \in C^1$.

13. Řešte počáteční úlohu $u_{tt} = c^2 u_{xx} + xt$, $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 0$.

$$[u(x, t) = \frac{xt^3}{6}]$$

14. Řešte počáteční úlohu $u_{tt} = c^2 u_{xx} + e^{at}$, $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 0$.

$$[u(x, t) = \frac{1}{a^2}(e^{at} - at - 1)]$$



Obrázek 4.10: Řešení úlohy (4.17).

15. Řešte počáteční úlohu $u_{tt} = c^2 u_{xx} + \cos x$, $u(x, 0) = \sin x$, $u_t(x, 0) = 1 + x$.

$$[u(x, t) = \cos ct \sin x + (1 + x)t + \frac{\cos x}{c^2} - \frac{\cos x \cos ct}{c^2}]$$

16. Řešte počáteční úlohu $u_{tt} - u_{xx} = e^{x-t}$, $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 0$.

$$[u(x, t) = \frac{1}{4}(e^{x+t} - e^{x-t}) - \frac{1}{2}te^{x-t}]$$

17. Řešte počáteční úlohu $u_{tt} - u_{xx} = \sin x$, $u(x, 0) = \cos x$, $u_t(x, 0) = x$.

$$[u(x, t) = \cos x \cos t + xt + \sin x - \sin x \cos t]$$

18. Řešte počáteční úlohu $u_{tt} - u_{xx} = x^2$, $u(x, 0) = \cos x$, $u_t(x, 0) = 0$.

$$[u(x, t) = \cos x \cos t + \frac{x^2 t^2}{2} + \frac{t^4}{12}]$$

19. Odvoďte řešení nehomogenní vlnové rovnice dalším možným způsobem:

(a) Přepište rovnici na systém

$$u_t + cu_x = v, \quad v_t - cv_x = f.$$

(b) V případě první rovnice nalezněte řešení u závislé na v ve tvaru

$$u(x, t) = \int_0^t v(x - ct + cs, s) \, ds.$$

(c) Obdobně vyřešte druhou rovnici, tj. nalezněte v závislé na f .

(d) Dosadte výsledek části (c) do výsledku části (b).

20. Uvažujte *telegrafní rovnici* $u_{xx} - \frac{1}{c^2}u_{tt} + \alpha u_t + \beta u = 0$ a položte $v = u$, $w = u_x$ a $z = u_t$. Ukažte, že v , w a z splňují následující systém tří rovnic prvního řádu:

$$\begin{aligned}v_t - z &= 0, \\w_t - z_x &= 0, \\z_t - c^2(w_x + \alpha z + \beta v) &= 0.\end{aligned}$$

5

Kapitola

Difuzní rovnice v jedné prostorové proměnné – počáteční úloha v $\mathbb{R}$

5.1 Počáteční úloha na přímce

Uvažujme počáteční úlohu pro difuzní rovnici

(5.1)

$$\begin{aligned} u_t &= ku_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) &= \varphi(x). \end{aligned}$$

Z fyzikálního hlediska tato úloha popisuje difuzi v nekonečně dlouhé trubici nebo šíření tepla v nekonečně dlouhé tyči. U první varianty funkce $\varphi(x)$ vystihuje počáteční koncentraci difundující látky, v druhém případě pak počáteční rozložení teploty v tyči.

Jelikož pro difuzní rovnici není znám tvar obecného řešení, postupujeme při řešení úlohy (5.1) zcela odlišně, než jak jsme postupovali v případě vlnové rovnice a od samého počátku pracujeme s celou počáteční úlohou. Začneme tím, že nalezneme řešení úlohy (5.1) se speciální „skokovou“ počáteční podmínkou $\varphi(x)$. Přesněji, řešíme úlohu

$$(5.2) \quad \begin{cases} w_t = kw_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ w(x, 0) = 0 & \text{pro } x < 0; \quad w(x, 0) = w_0 \equiv 1 & \text{pro } x > 0. \end{cases}$$

K odvození řešení této speciální úlohy využijeme skutečnosti, že jakýkoli fyzikální zákon lze převést do tzv. *bezrozměrného tvaru*. Jinými slovy, pokud uva-

žujeme rovnici svazující fyzikální veličiny $q_1, \dots, q_m$, které mají určité rozměry (čas, délka, hmota atd.), můžeme nalézt ekvivalentní vztah s bezrozměrnými veličinami, které byly odvozeny z veličin $q_1, \dots, q_m$. Tento postup je znám jako *Buckinghamův II Teorém* a ilustrujeme si jej na jednoduchém příkladu. Představme si těleso, které bylo v čase $t = 0$ vyhozeno kolmo vzhůru rychlostí v . Jeho výška h v čase t je dána vzorcem

$$h = -\frac{1}{2}gt^2 + vt.$$

Konstanta g představuje gravitační zrychlení. Použité veličiny jsou zde tedy h , t , v a g s rozměry délky, času, délky za čas a délky za kvadrát času. Tento zákon lze ekvivalentně zapsat také takto

$$\frac{h}{vt} = -\frac{1}{2} \left(\frac{gt}{v} \right) + 1.$$

Označíme-li

$$P_1 = \frac{h}{vt} \quad \text{a} \quad P_2 = \frac{gt}{v},$$

pak P_1 , P_2 jsou veličiny bezrozměrné a původní rovnice má podobu

$$P_1 = -\frac{1}{2}P_2 + 1.$$

Podobnou úvahu můžeme provést i v případě naší speciální počáteční úlohy (5.2). Uvažované veličiny jsou x , t , w , w_0 , k , které mají v případě modelu pro vedení tepla rozměry délky, času, stupňů, opět stupňů a kvadrátu délky za čas. Je zřejmé, že w/w_0 je bezrozměrná veličina. Jedinou další bezrozměrnou veličinou odvozenou ze zbylých parametrů je $x/\sqrt{4kt}$ (konstanta 4 je zde čistě z důvodu zjednodušení dalších zápisů). Můžeme tedy očekávat, že řešení úlohy (5.2) bude mít tvar jakési kombinace těchto bezrozměrných proměnných, neboli

$$\frac{w}{w_0} = f \left(\frac{x}{\sqrt{4kt}} \right),$$

kde f je zatím neznámá funkce, kterou musíme určit. Připomeňme, že $w_0 \equiv 1$. Zavedme nyní substituci

$$w = f(z), \quad z = \frac{x}{\sqrt{4kt}}$$

a dosaďme do rovnice v úloze (5.2). Podle pravidla o derivování složené funkce určíme

$$\begin{aligned} w_t &= f'(z)z_t = -\frac{1}{2} \frac{x}{\sqrt{4kt^3}} f'(z), \\ w_x &= f'(z)z_x = \frac{1}{\sqrt{4kt}} f'(z), \quad w_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} w_x = \frac{1}{4kt} f''(z). \end{aligned}$$

Dosadíme-li a provedeme-li jednoduché úpravy, dostáváme obyčejnou diferenciální rovnici

$$f''(z) + 2zf'(z) = 0$$

pro neznámou funkci $f(z)$. Snadno odvodíme, že

$$f(z) = c_1 \int_0^z e^{-s^2} ds + c_2,$$

kde c_1, c_2 jsou integrační konstanty. (Zdůvodněte podrobně!) Tím jsme tedy získali řešení počáteční úlohy (5.2) ve tvaru

$$w(x, t) = c_1 \int_0^{x/\sqrt{4kt}} e^{-s^2} ds + c_2.$$

K určení konstant c_1, c_2 využijeme počáteční podmínku. Uvažujme pevné záporné x a provedme limitní přechod pro $t \rightarrow 0+$, pak

$$0 = w(x, 0) = c_1 \int_0^{-\infty} e^{-s^2} ds + c_2.$$

Naopak pro pevné kladné x a $t \rightarrow 0+$ máme

$$1 = w(x, 0) = c_1 \int_0^{\infty} e^{-s^2} ds + c_2.$$

Uvědomíme-li si, že platí

$$\int_0^{\infty} e^{-s^2} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

snadno určíme $c_1 = 1/\sqrt{\pi}$, $c_2 = 1/2$. Odtud tedy pro řešení úlohy (5.2) dostáváme vzorec

$$(5.3) \quad w(x, t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/\sqrt{4kt}} e^{-s^2} ds.$$

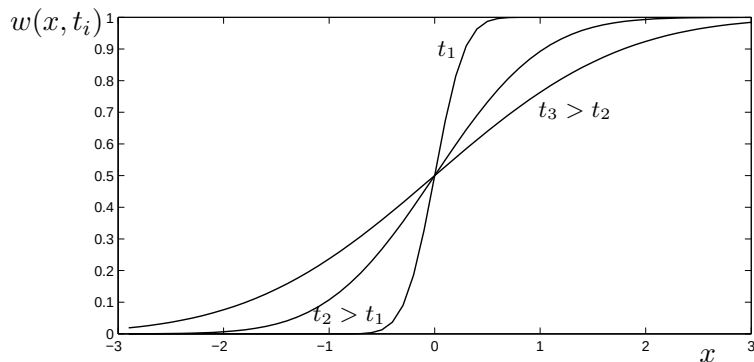
Zavedeme-li tzv. *chybovou funkci* (*error function*) předpisem

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-s^2} ds,$$

můžeme řešení (5.3) zapsat v ekvivalentním tvaru

$$(5.4) \quad w(x, t) = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{4kt}} \right) \right).$$

Několik časových hladin řešení (5.4) je znázorněno na obrázku 5.1.



Obrázek 5.1: Teplotní profil na různých časových hladinách v případě skokové počáteční teploty.

Nyní přistoupíme k druhému kroku odvození řešení obecné počáteční úlohy (5.1). Později (viz kapitola 9) podložíme následující úvahy argumenty založenými na Fourierově transformaci, prozatím se však spokojíme s intuitivním odvozením. Nejprve si všimněme, že je-li w řešení difuzní rovnice a existují-li derivace w_{xt} a w_{xxx} , pak i funkce w_x je řešením téže rovnice. Platí totiž

$$0 = (w_t - kw_{xx})_x = (w_x)_t - k(w_x)_{xx}.$$

Funkce

$$G(x, t) = w_x(x, t),$$

kde $w(x, t)$ je dána předpisem (5.3), musí tedy rovněž řešit difuzní rovnici. Přímým derivováním podle x získáme G ve tvaru

$$(5.5) \quad G(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-x^2/(4kt)}.$$

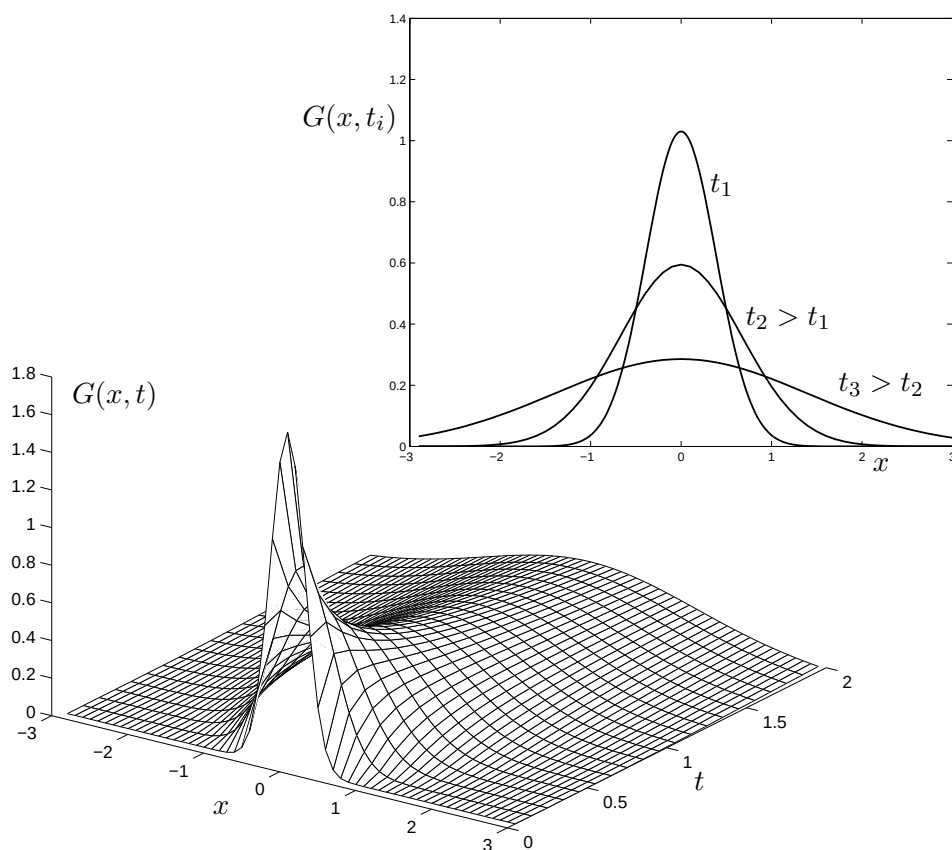
Funkce G se nazývá *tepelné (difuzní) jádro* nebo *fundamentální řešení* difuzní rovnice (občas se můžeme setkat i s označením Greenova funkce, zřídlová funkce, Gaussián, příp. propagátor). Pro $t > 0$ je jejím grafem „zvonovitá“ křivka (viz

obrázek 5.2), která má tu vlastnost, že pro všechna t je plocha pod ní rovna jedné, tj.

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x, t) dx = 1, \quad t > 0.$$

Pro $t \rightarrow 0+$ se $G(x, t)$ „blíží“ tzv. *Diracově distribuci* $\delta(x)$.

Poznámka 5.1. Poznamenejme, že Diracovu distribuci můžeme intuitivně chápat jako zobecněnou funkci, která v bodě 0 „nabývá“ nekonečné hodnoty, v ostatních bodech je rovna nule a platí $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$. (Poznamenejme, že tento integrál musíme chápat v obecnějším smyslu než Riemannův integrál!) Otázka korektní definice Diracovy distribuce a použitého slova „blíží“ je věcí teorie distribucí a přesahuje rámec tohoto textu.



Obrázek 5.2: *Fundamentální řešení difuzní rovnice.*

Z fyzikálního hlediska popisuje funkce $G(x, t)$ rozložení teploty, které je reakcí na počáteční jednotkový bodový zdroj tepla v místě $x = 0$. Dále pozorujeme, že difuzní rovnice je invariantní vůči posunutí. Tedy i posunuté difuzní jádro $G(x - y, t)$ řeší difuzní rovnici a představuje reakci na počáteční jednotkový bodový zdroj tepla v pevném, avšak libovolném místě y . Pokud počáteční zdroj není jednotkový, ale má velikost $\varphi(y)$, pak jeho příspěvek v bodě x a čase t je dán funkcí $\varphi(y)G(x - y, t)$. Plocha pod teplotní křivkou je pak $\varphi(y)$, kde y je bod, ve kterém je zdroj umístěn.

Předpokládejme nyní, že počáteční teplota φ v úloze (5.1) představuje spojitě rozložené tepelné zdroje $\varphi(y)$ v bodech $y \in \mathbb{R}$. Pak výsledné rozložení teploty dostaneme jako „součet“ všech reakcí $\varphi(y)G(x - y, t)$ na jednotlivé zdroje $\varphi(y)$ ve všech bodech y neboli

$$(5.6) \quad \begin{aligned} u(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)G(x - y, t) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} dy. \end{aligned}$$

Můžeme tedy říci, že řešení počáteční úlohy pro difuzní rovnici je *konvolucí* příslušné počáteční podmínky $\varphi(x)$ a difuzního jádra $G(x, t)$, tj.

$$u(x, t) = (G * \varphi)(x, t).$$

Tímto jsme odvodili následující fundamentální existenční větu pro difuzní rovnici.

Věta 5.2. *Nechť φ je omezená spojitá funkce na $\mathbb{R}$. Počáteční úloha (5.1) pro difuzní rovnici na přímce má pak klasické řešení dané vztahem (5.6).*

Poznámka 5.3. Lze ukázat, že funkce $u(x, t)$ daná vztahem (5.6) řeší úlohu (5.1) i v případě, že φ je pouze *po částech spojitá*. Pak však v bodech nespojitosti konverguje řešení pro $t \rightarrow 0+$ k aritmetickému průměru limit zprava a zleva funkce φ , tedy

$$u(x, t) \rightarrow \frac{1}{2}[\varphi(x-) + \varphi(x+)].$$

Klesající charakter difuzního jádra $G(x - y, t)$ pro $|y| \rightarrow +\infty$ a x pevné dovoluje dokázat, že integrál ve vztahu (5.6) je konečný (a vyjadřuje řešení počáteční úlohy (5.1)) i pro některé neomezené počáteční podmínky φ .

Pokud jde o jednoznačnost řešení, je možné dokázat, že počáteční úloha (5.1) má pouze jedno *omezené* řešení. Obecně, bez dodatečných podmínek na chování v nekonečnu, může mít počáteční úloha víc než jedno řešení (viz např. [13]).

Nyní si všimněme některých základních vlastností řešení počáteční úlohy pro difuzní rovnici. Vztah (5.6) je integrální a ukazuje se, že pro většinu počátečních podmínek φ jej nelze analyticky vyjádřit (tzn. zapsat pomocí elementárních funkcí). Pokud nás v konkrétním případě zajímá tvar řešení, musíme integrovat numericky.

Dále si všimněme, že pro $t > 0$ je řešení $u(x, t)$ nenulové v libovolném bodě x i v případě, že počáteční podmínka φ je nenulová pouze na „malém intervalu“. To by znamenalo, že se *teplota šíří nekonečnou rychlostí* a rovněž *difuze má nekonečnou rychlost*. Tento jev ovšem neodpovídá skutečnosti a svědčí o faktu, že difuzní rovnice je pouze přibližným modelem reálného děje. Na druhou stranu, pro malá t se vliv počátečního rozložení s rostoucí vzdáleností rychle vytrácí, jde tedy o model dostatečně přesný, aby byl z praktického hlediska ve většině případů vyhovující. Další vlastností řešení (5.6) je jeho hladkost. Bez ohledu na vlastnosti funkce φ je řešení u pro $t > 0$ funkcí třídy C^∞ (tj. nekonečněkrát spojitě diferencovatelnou funkcí v obou svých proměnných).

Příklad 5.4. Řešme úlohu

$$(5.7) \quad \begin{cases} u_t = ku_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1, \\ 0 & |x| \geq 1. \end{cases} \end{cases}$$

Jedná se o počáteční úlohu pro difuzní rovnici s po částech spojitou (tedy *nehladkou*) počáteční podmínkou. Řešení určíme dosazením počáteční podmínky do vztahu (5.6):

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-1}^1 e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} dy.$$

Zavedeme-li substituci $p = (x - y)/\sqrt{4kt}$, dostáváme vyjádření

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x-1}{\sqrt{4kt}}}^{\frac{x+1}{\sqrt{4kt}}} e^{-p^2} dp$$

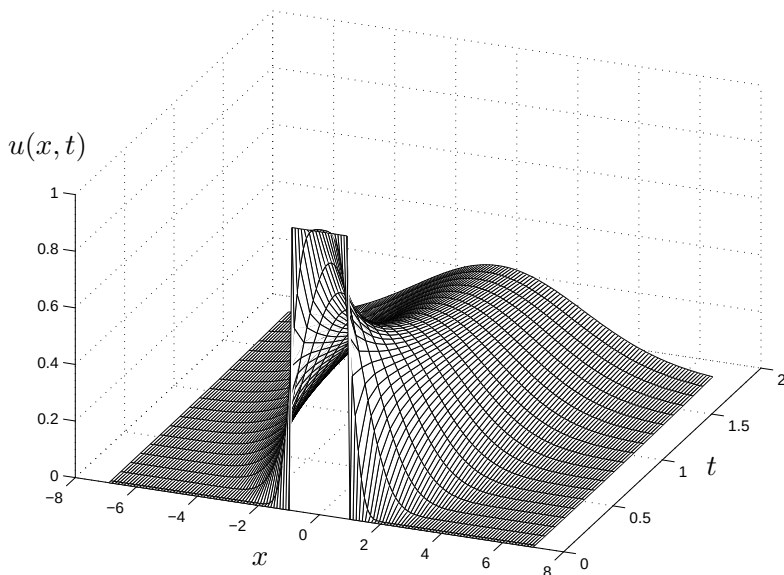
neboli

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{x+1}{\sqrt{4kt}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-1}{\sqrt{4kt}}\right) \right].$$

□

Poznámka 5.5. Průběh řešení z příkladu 5.4 je znázorněn na obrázku 5.3 (pro $k = 2$). Všimněme si jeho základních rysů. Počátečním rozložením teploty byla

po částech spojitá funkce, okamžitě však dochází k jejímu úplnému vyhlazení. V libovolně malém čase je řešení na celé reálné ose nenulové, přestože počáteční podmínka byla nenulová pouze na intervalu $(-1, 1)$. Dále je patrné, že řešení nabývalo své maximální hodnoty v čase $t = 0$ a s rostoucím časem dochází k jeho „rozprostření“.



Obrázek 5.3: Řešení z příkladu 5.4.

Příklad 5.6. Řešme úlohu

$$(5.8) \quad \begin{cases} u_t = ku_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = e^{-x}. \end{cases}$$

Uvědomme si, že takto zadaná *počáteční podmínka není na $\mathbb{R}$ omezená* (srovnejte s poznámkou 5.3). Použijeme-li vzorec (5.6), dostáváme řešení ve tvaru

$$(5.9) \quad u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} e^{-y} dy.$$

Integrál na pravé straně je možné vypočítat a dostáváme

$$(5.10) \quad u(x, t) = e^{kt-x}$$

(výpočet je náplní cvičení 2 v odstavci 5.3). V tomto případě řešení s rostoucím časem neklesá, pouze se šíří ve směru kladné poloosy x .

□

5.2 Difuzní rovnice se zdrojem

Uvažujme počáteční úlohu pro difuzní rovnici s nenulovou pravou stranou

$$(5.11) \quad \begin{cases} u_t - ku_{xx} = f(x, t), & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x). \end{cases}$$

Platí následující existenční věta.

Věta 5.7. *Nechť $f = f(x, t)$ a $\varphi = \varphi(x)$ jsou omezené a spojitě funkce. Počáteční úloha (5.11) pro nehomogenní difuzní rovnici má klasické řešení dané vztahem*

$$(5.12) \quad u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x - y, t) \varphi(y) dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} G(x - y, t - s) f(y, s) dy ds,$$

kde G je difuzní jádro.

Nejprve se pokusíme vztah (5.12) odvodit a použijeme k tomu *operátorovou metodu* (viz odstavec 4.4) založenou na analogii s obyčejnou diferenciální rovnicí

$$(5.13) \quad \frac{dv}{dt} + Av(t) = f(t), \quad v(0) = \varphi,$$

kde A je konstanta a $\varphi \in \mathbb{R}$. Snadno zjistíme, že odpovídající řešení má podobu

$$(5.14) \quad v(t) = S(t)\varphi + \int_0^t S(t - s)f(s) ds,$$

kde $S(t) = e^{-tA}$. (Zdůvodněte podrobně!)

Nyní se vrátíme k původnímu difuznímu problému (5.11). Řešení homogenní difuzní rovnice můžeme zapsat ve tvaru

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x - y, t) \varphi(y) dy.$$

Obdobně jako v odstavci 4.4 položíme

$$(5.15) \quad u(x, t) = \mathcal{S}(t)\varphi(x), \quad \text{tj.} \quad \mathcal{S}(t)\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x - y, t)\varphi(y) dy.$$

Operátor $\mathcal{S}(t)$, nazývaný *zdrojový operátor*, převádí funkci φ na řešení homogenní difuzní rovnice a je zřejmou analogií funkce $S(t)$. Využijeme-li této analogie, můžeme očekávat, že řešení nehomogenní difuzní rovnice bude mít v souladu se vztahem (5.14) podobu

$$u(t) = \mathcal{S}(t)\varphi + \int_0^t \mathcal{S}(t - s)f(s) ds,$$

což je (po dosazení za $\mathcal{S}(t)$) odvozovaný vztah (5.12)

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x - y, t)\varphi(y) dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} G(x - y, t - s)f(y, s) dy ds.$$

Nyní nám již nezbývá nic jiného, než dosazením ověřit, že (5.12) skutečně řeší úlohu (5.11). Pro jednoduchost předpokládejme $\varphi(x) \equiv 0$ a uvažujme pouze vliv pravé strany f . Nejprve ověříme, že řešení vyhovuje rovnici. Použijeme-li pravidlo o derivování integrálu podle parametru, dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} G(x - y, t - s)f(y, s) dy ds = \\ &= \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G}{\partial t}(x - y, t - s)f(y, s) dy ds + \\ &\quad + \lim_{s \rightarrow t} \int_{-\infty}^{\infty} G(x - y, t - s)f(y, s) dy. \end{aligned}$$

Musíme si však dát pozor na singularity funkce $G(x - y, t - s)$ v čase $t = s$! Využijeme-li skutečnosti, že G řeší difuzní rovnici, a zavedeme-li v druhém integrálu substituci $s = t - \epsilon$, dostáváme

$$(5.16) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} k \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x - y, t - s)f(y, s) dy ds + \\ &\quad + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} G(x - y, \epsilon)f(y, t - \epsilon) dy. \end{aligned}$$

Nyní můžeme zaměnit pořadí integrování a derivování u prvního členu na pravé straně. Jelikož pro $\epsilon \rightarrow 0$ se $G(x - y, \epsilon)$ blíží Diracově distribuci posunuté do bodu x (tato vlastnost plyne z teorie distribucí) a $f(y, t - \epsilon)$ konverguje k $f(y, t)$ (díky spojitosti funkce f), můžeme psát

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} G(x - y, \epsilon) f(y, t - \epsilon) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - y) f(y, t) dy = f(x, t).$$

Rovnost (5.16) tedy přejde do tvaru

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= k \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} G(x - y, t - s) f(y, s) dy ds + f(x, t) = \\ &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \end{aligned}$$

což je přesně nehomogenní difuzní rovnice z úlohy (5.11).

Dále musíme ověřit splnění počáteční podmínky. Díky vlastnostem difuzního jádra G se první člen ve vztahu (5.12) pro $t \rightarrow 0+$ blíží počáteční podmínce $\varphi(x)$. Druhý člen je integrálem od 0 do 0, tedy

$$\lim_{t \rightarrow 0+} u(x, t) = \varphi(x) + \int_0^0 \dots = \varphi(x),$$

což jsme chtěli ověřit.

Dosadíme-li do vyjádření (5.12) konkrétní podobu difuzního jádra (5.5), dostáváme řešení počáteční úlohy pro nehomogenní difuzní rovnici (5.11) ve tvaru

$$(5.17) \quad \boxed{u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} \varphi(y) dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi k(t-s)}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4k(t-s)}} f(y, s) dy ds.}$$

Poznámka 5.8. Čtenář by si měl uvědomit, že jsme při předchozích výpočtech použili formálně některá tvrzení (např. o derivaci integrálu vzhledem k parametru, o limitním přechodu za integračním znaménkem, vlastnosti Diracovy distribuce) bez pečlivého ověření jejich předpokladů. Obdobně jako v případě věty 5.2 lze existenční tvrzení věty 5.7 dokázat i pro obecnější funkce φ a f .

5.3 Cvičení

1. Ověřte, že funkce

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi kt} e^{-x^2/4kt}$$

řeší difuzní rovnici $u_t = ku_{xx}$ na oblasti $-\infty < x < \infty, t > 0$. Uvědomte si, jakým způsobem je tvar řešení ovlivňován velikostí difuzního parametru k .

2. Ukažte, že řešení z příkladu 5.6 dané předpisem (5.9) lze zjednodušit do tvaru (5.10).

Použijte úpravu $\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} e^{-y} dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-x+2kt)^2}{4kt}} e^{kt-x} dy$ a substituci $s = \frac{y-x+2kt}{\sqrt{4kt}}$.

3. Pro jaké hodnoty a a b je funkce $u(x, t) = e^{at} \sin bx$ řešením difuzní rovnice $u_t - u_{xx} = 0$?

$$[a + b^2 = 0]$$

4. Předpokládejte, že platí $|\varphi(x)| \leq M$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$ (M je kladná konstanta). Využijte nerovnost $|\int f| \leq \int |f|$ a ukažte, že řešení počáteční úlohy (5.1) pro difuzní rovnici splňuje $|u(x, t)| \leq M$ pro všechna $x \in \mathbb{R}, t > 0$.

5. Ověřte, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x, t) dx = 1, \quad t > 0.$$

6. Řešte difuzní rovnici $u_t = ku_{xx}$ s počáteční podmínkou

$$\varphi(x) = 1 \text{ pro } x > 0, \quad \varphi(x) = 3 \text{ pro } x < 0.$$

Řešení запиšte pomocí chybové funkce $\operatorname{erf}(x)$.

$$[u(x, t) = 2 - \operatorname{erf}(\frac{x}{\sqrt{4kt}})]$$

7. Řešte difuzní rovnici $u_t = ku_{xx}$ s počáteční podmínkou $\varphi(x) = e^{3x}$.

$$[u(x, t) = e^{3x+9kt}]$$

8. Řešte difuzní rovnici $u_t = ku_{xx}$ s počáteční podmínkou

$$\varphi(x) = e^{-x} \text{ pro } x > 0, \quad \varphi(x) = 0 \text{ pro } x < 0.$$

$$[u(x, t) = \frac{1}{2}e^{kt-x}(1 - \operatorname{erf}(\frac{2kt-x}{\sqrt{4kt}}))]$$

9. Řešte difuzní rovnici $u_t = u_{xx}$ s počáteční podmínkou

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1-x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1+x, & -1 \leq x \leq 0, \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

Ukažte, že $u(x, t) \rightarrow 0$ pro $t \rightarrow \infty$ a libovolné x .

10. Pomocí substituce $u(x, t) = e^{-bt}v(x, t)$ řešte difuzní rovnici

$$u_t - ku_{xx} + bu = 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x).$$

Kladná konstanta b zde reprezentuje disipaci.

11. Pomocí substituce $y = x - Vt$ řešte rovnici vedení tepla

$$u_t - ku_{xx} + Vu_x = 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x).$$

Kladná konstanta V zde reprezentuje konvekci.

$$[u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-Vt-z)^2/(4kt)} \varphi(z) dz]$$

12. Ukažte, že rovnici $u_t = k(t)u_{xx}$ lze transformovat na difuzní rovnici změnou časové proměnné t na

$$\tau = \int_0^t k(\eta) d\eta.$$

Obdobně ukažte, že rovnici $u_t = ku_{xx} - b(t)u_x$ lze transformovat na difuzní rovnici změnou prostorové proměnné x na

$$\xi = x - \int_0^t b(\eta) d\eta.$$

13. Nalezněte řešení úlohy

$$u_t - ku_{xx} = \sin x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = 0.$$

$$[u(x, t) = \frac{1}{k}(1 - e^{-kt}) \sin x]$$

14. Ukažte, že transportní rovnici s difuzí a rozpadem

$$u_t = ku_{xx} - cu_x - \lambda u$$

lze převést na difuzní rovnici substitucí

$$u(x, t) = w(x, t)e^{\alpha x - \beta t},$$

kde $\alpha = \frac{c}{2k}$ a $\beta = \lambda + \frac{c^2}{4k}$.

6

Kapitola

Laplaceova a Poissonova rovnice ve dvou dimenzích

V předchozích kapitolách jsme se seznámili se základními typy hyperbolických a parabolických rovnic: s vlnovou rovnicí a difuzní rovnicí. V této kapitole se budeme věnovat nejjednodušší eliptické rovnici ve dvou dimenzích, kterou je *Laplaceova rovnice*

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Jak jsme již uvedli v odstavci 1.3.7, Laplaceovu rovnici můžeme chápat jako stacionární difuzi nebo stacionární vlnění a jejími řešeními jsou tzv. *harmonické funkce*. Nehomogenní analogií Laplaceovy rovnice s danou funkcí f je tzv. *Poissonova rovnice*

$$\Delta u = f.$$

6.1 Invariantnost Laplaceova operátoru

Laplaceův operátor Δ (též *Laplacián*) je invariantní vůči libovolné transformaci skládající se z posuvů a otáčení.

Posunutí v rovině o vektor (a, b) je dáno transformačními vztahy

$$x' = x + a, \quad y' = y + b.$$

Očividně platí $u_{xx} + u_{yy} = u_{x'x'} + u_{y'y'}$.

Otočení v rovině o úhel α je dáno transformací

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\y' &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha.\end{aligned}$$

S využitím pravidla o derivování složené funkce odvodíme

$$\begin{aligned}u_x &= u_{x'} \cos \alpha - u_{y'} \sin \alpha, \\u_y &= u_{x'} \sin \alpha + u_{y'} \cos \alpha, \\u_{xx} &= u_{x'x'} \cos^2 \alpha - 2u_{x'y'} \sin \alpha \cos \alpha + u_{y'y'} \sin^2 \alpha, \\u_{yy} &= u_{x'x'} \sin^2 \alpha + 2u_{x'y'} \sin \alpha \cos \alpha + u_{y'y'} \cos^2 \alpha,\end{aligned}$$

a po sečtení dostaneme

$$u_{xx} + u_{yy} = u_{x'x'} + u_{y'y'}.$$

Díky těmto vlastnostem se Laplaceův operátor používá při modelování *izotropních* fyzikálních jevů.

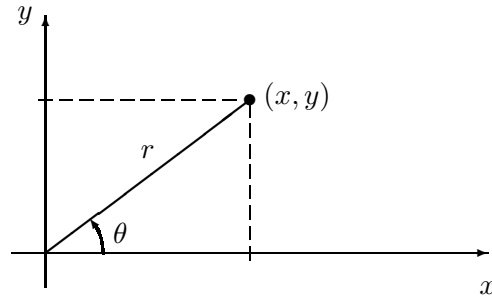
6.2 Transformace Laplaceova operátoru do polárních souřadnic

Invariantnost vůči otáčení naznačuje, že by Laplaceův operátor mohl nabývat jednodušší podoby v *polárních souřadnicích*, obzvláště v radiálně symetrickém případě. Transformační vztahy mezi kartézskými a polárními souřadnicemi mají podobu

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

a odpovídající Jacobiova matice $\mathbf{J}$ a její inverze $\mathbf{J}^{-1}$ mají tvar

$$\begin{aligned}\mathbf{J} &= \begin{pmatrix} x_r & y_r \\ x_\theta & y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}, \\ \mathbf{J}^{-1} &= \begin{pmatrix} r_x & \theta_x \\ r_y & \theta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\frac{\sin \theta}{r} \\ \sin \theta & \frac{\cos \theta}{r} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Obrázek 6.1: Polární souřadnice r a θ .

Postupným derivováním tedy snadno odvodíme následující symbolicky zapsané vztahy

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)^2 \\ &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} - 2 \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 2 \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{\partial}{\partial r}, \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)^2 \\ &= \sin^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2 \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - 2 \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{r} \frac{\partial}{\partial r}. \end{aligned}$$

Po sečtení těchto operátorů dostáváme

$$(6.1) \quad \boxed{\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.}$$

6.3 Řešení Laplaceovy a Poissonovy rovnice v $\mathbb{R}^2$

6.3.1 Laplaceova rovnice

„Obecné řešení“ Laplaceovy rovnice v rovině můžeme nalézt, využijeme-li její podobnost s vlnovou rovnicí (4.1). Vlnová a Laplaceova rovnice jsou formálně identické, pokud položíme rychlost šíření vlny c rovnu imaginární jednotce $i = \sqrt{-1}$. Pak na základě vztahu (4.6) dostáváme, že jakákoliv funkce ve tvaru

$$u(x, y) = f(x + iy) + g(x - iy)$$

řeší Laplaceovu rovnici $\Delta u = 0$ ve dvou dimenzích. Zde f a g jsou libovolné diferencovatelné funkce komplexní proměnné. Jelikož $x - iy$ je číslo komplexně sdružené k číslu $x + iy$, můžeme obecné řešení Laplaceovy rovnice zapsat jednoduše jako

$$u(x, y) = f(x + iy).$$

Další analýza už je však náplní teorie komplexních funkcí a přesahuje rámec tohoto textu.

V radiálně symetrickém případě, tj. v případě, kdy uvažovaná funkce nezávisí na úhlu θ (tj. $u_{\theta\theta} = 0$), se Laplaceova rovnice v polárních souřadnicích redukuje na tvar

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r = 0.$$

Po vynásobení poloměrem $r > 0$ získáváme rovnici

$$ru_{rr} + u_r = 0,$$

která je ekvivalentní

$$(ru_r)_r = 0.$$

Jde o obyčejnou diferenciální rovnici, která je snadno řešitelná přímou integrací:

$$ru_r = c_1$$

a odtud

$$u(r) = c_1 \ln r + c_2.$$

Radiálně symetrickými harmonickými funkcemi v $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ jsou tedy konstanta a logaritmus, který bude hrát důležitou roli i v dalších odstavcích.

6.3.2 Poissonova rovnice

Stejně postupy můžeme použít i při řešení *Poissonovy rovnice* $\Delta u = f(x, y)$. Konkrétně v radiálně symetrickém případě, tj. v případě, kdy $f = f(\sqrt{x^2 + y^2})$, se původní úloha po transformaci do polárních souřadnic redukuje na rovnici

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r = f(r),$$

která je ekvivalentní vztahu

$$ru_{rr} + u_r = r f(r) \quad \text{neboli} \quad (ru_r)_r = r f(r).$$

Přímou integrací pak dostáváme

$$ru_r = c_1 + \int_0^r s f(s) \, ds$$

a konečně

$$u(r) = c_1 \ln r + c_2 + \int_0^r \frac{1}{\sigma} \int_0^\sigma s f(s) \, ds \, d\sigma.$$

6.4 Cvičení

1. Ověřte, že dané funkce řeší dvojrozměrnou Laplaceovu rovnici.

- (a) $u = x + y$.
- (b) $u = x^2 - y^2$.
- (c) $u = \frac{x}{x^2 + y^2}$.
- (d) $u = \ln(x^2 + y^2)$.
- (e) $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.
- (f) $u = e^y \cos x$.

2. Rozhodněte, zda dané funkce vyhovují Laplaceově rovnici.

- (a) $u = \frac{y}{x^2 + y^2}$.
- (b) $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.
- (c) $u = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$.
- (d) $u = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \frac{y}{x^2 + y^2}$.
- (e) $u = xy$.

[ano v případech a,c,e]

- 3. Ukažte, že pokud u a v jsou harmonické funkce a α a β jsou (reálná) čísla, pak $\alpha u + \beta v$ je rovněž harmonická funkce.
- 4. Uveďte příklad dvou harmonických funkcí u a v takových, že součin uv není harmonický.
- 5. Ukažte, že pokud u a u^2 jsou obě harmonické funkce, pak u musí být konstantní.

6. Ukažte, že pokud u , v a $u^2 + v^2$ jsou harmonické funkce, pak u a v musí být konstantní.
7. Nechť $u(x, y)$ je řešení Laplaceovy rovnice. Dokažte, že libovolná parciální derivace funkce $u(x, y)$ vzhledem ke kartézským souřadnicím (např. u_x , u_{xx} , u_{xy}) je rovněž jejím řešením.
8. Uvažujte úlohu

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{v } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = 0, & u_y(x, 0) = \frac{\cos nx}{n^2}. \end{cases}$$

Ukažte, že $u_n(x, y) = \frac{1}{n^3} \sinh ny \cos nx$ je řešením, ale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{(x, y) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)} |u_n(x, y)| \neq 0.$$

9. Funkce z^2 , z^3 , e^z , $\ln z$ komplexní proměnné $z = x + iy$ jsou analytické. Přepište je do následujícího tvaru:

$$\begin{aligned} z^2 &= (x^2 - y^2) + i(2xy), \\ z^3 &= (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3), \\ e^z &= (e^x \cos y) + i(e^x \sin y), \\ \ln z &= (\ln \sqrt{x^2 + y^2}) + i(\arg z) = \ln r + i\theta \end{aligned}$$

a ukažte, že všechny (jakožto funkce proměnných x a y) splňují Laplaceovu rovnici.

10. Ukažte, že funkce $u(x, y) = \operatorname{arctg}(y/x)$ vyhovuje Laplaceově rovnici $u_{xx} + u_{yy} = 0$ pro $y > 0$. S využitím této skutečnosti nalezněte řešení Laplaceovy rovnice na oblasti $y > 0$, které splňuje okrajové podmínky $u(x, 0) = 1$ pro $x > 0$ a $u(x, 0) = -1$ pro $x < 0$.
11. Ukažte, že $e^{-\xi y} \sin(\xi x)$, $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$, je řešením Laplaceovy rovnice pro libovolnou hodnotu parametru ξ . Dokažte, že funkce

$$u(x, y) = \int_0^\infty c(\xi) e^{-\xi y} \sin(\xi x) d\xi$$

je řešením téže rovnice pro libovolnou funkci $c(\xi)$, která je omezená a spojitá na $(0, \infty)$. (Požadavky na funkci c umožní derivovat za integračním znaménkem.)

12. Nalezněte radiálně symetrické řešení rovnice $u_{xx} + u_{yy} = 1$ v kruhu $x^2 + y^2 < a^2$ s okrajovou podmínkou $u(x, y) = 0$ na hranici $x^2 + y^2 = a^2$.

$$[u(r) = \frac{1}{4}(r^2 - a^2)]$$

13. Nalezněte radiálně symetrické řešení rovnice $u_{xx} + u_{yy} = 1$ v mezikruží $a^2 < x^2 + y^2 < b^2$ s okrajovou podmínkou $u(x, y) = 0$ na obou hraničních kružnicích $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = b^2$.

$$[u(r) = \frac{r^2}{4} + \frac{b^2 - a^2}{4 \ln \frac{a}{b}} \ln r - \frac{b^2 \ln a - a^2 \ln b}{4 \ln \frac{a}{b}}]$$

14. (a) Ukažte, že pokud $v(x, y)$ je harmonická funkce, pak $u(x, y) = v(x^2 - y^2, 2xy)$ je rovněž harmonická funkce.
- (b) Využijte transformaci do polárních souřadnic a ukažte, že transformace $(x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$ zobrazuje první kvadrant na polorovinu $\{y > 0\}$.

7

Kapitola

Řešení počátečně-okrajových úloh pro evoluční rovnice

7.1 Počátečně-okrajové úlohy na polopřímce

Vraťme se k vyšetřování difuzní a vlnové rovnice na celé reálné přímce. Všimněme si, že je-li počáteční podmínka pro difuzní rovnici sudá, resp. lichá funkce, je také řešení počáteční úlohy sudá, resp. lichá funkce. Totéž platí i v případě počáteční úlohy pro vlnovou rovnici. (Oba případy dokažte!) Z tohoto pozorování vyjdeme při hledání řešení počátečně-okrajových úloh pro difuzní a vlnovou rovnici na polopřímce s homogenní okrajovou podmínkou.

7.1.1 Difuze a vedení tepla na polopřímce

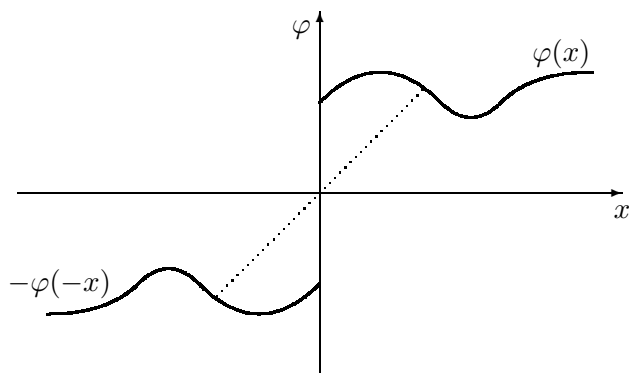
Uvažujme nejprve počátečně-okrajovou úlohu pro rovnici vedení tepla

$$(7.1) \quad \boxed{\begin{aligned} u_t &= ku_{xx}, & x > 0, \ t > 0, \\ u(0, t) &= 0, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \end{aligned}}$$

která popisuje rozložení teploty v polonekonečné tyči s tepelně izolovaným povrchem. Dirichletova okrajová podmínka vystihuje skutečnost, že na konci $x = 0$ je udržována nulová teplota. K řešení této úlohy použijeme tzv. *metodu odrazu*

(zvanou též *metoda zrcadlení*), která spočívá v myšlence rozšíření problému na celou reálnou osu takovým způsobem, aby okrajová podmínka $u(0, t) = 0$ byla automaticky splněna. V našem případě, tj. v případě homogenní Dirichletovy okrajové podmínky, to znamená použít *liché rozšíření* počáteční podmínky $\varphi(x)$. Definujeme tedy

$$(7.2) \quad \tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0, \\ -\varphi(-x), & x < 0, \end{cases} \quad \tilde{\varphi}(0) = 0.$$



Obrázek 7.1: *Liché rozšíření.*

Jelikož liché počáteční podmínce odpovídá liché řešení, automaticky dostaneme $u(0, t) = 0$ pro všechna $t > 0$ (viz obrázek 7.1). Uvažujme tedy rozšířenou úlohu

$$(7.3) \quad \begin{cases} v_t = kv_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ v(x, 0) = \tilde{\varphi}(x), \end{cases}$$

jejíž řešení můžeme zapsat ve tvaru

$$v(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x - y, t) \tilde{\varphi}(y) dy.$$

Rozdělíme-li integrál na dvě části ($y > 0$ a $y < 0$), dostáváme

$$\begin{aligned}
 v(x, t) &= \int_{-\infty}^0 G(x-y, t) \tilde{\varphi}(y) dy + \int_0^{\infty} G(x-y, t) \tilde{\varphi}(y) dy \\
 &= - \int_{-\infty}^0 G(x-y, t) \varphi(-y) dy + \int_0^{\infty} G(x-y, t) \varphi(y) dy \\
 &= - \int_0^{\infty} G(x+y, t) \varphi(y) dy + \int_0^{\infty} G(x-y, t) \varphi(y) dy \\
 &= \int_0^{\infty} [G(x-y, t) - G(x+y, t)] \varphi(y) dy.
 \end{aligned}$$

Řešení u původní úlohy (7.1) je pak restrikcí funkce v pro $x > 0$, tedy

$$(7.4) \quad u(x, t) = \int_0^{\infty} [G(x-y, t) - G(x+y, t)] \varphi(y) dy, \quad x > 0, t > 0.$$

Příklad 7.1. Ověřte, že funkce

$$u(x, t) = \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{4kt}} \right),$$

znázorněná na obrázku 7.2, je řešením počáteční úlohy

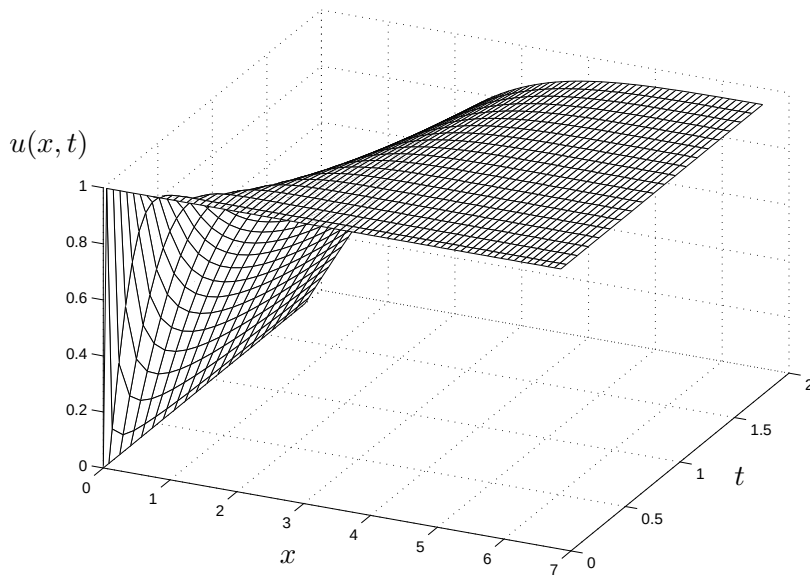
$$(7.5) \quad \begin{cases} u_t = k u_{xx}, & x > 0, t > 0, \\ u(x, 0) = 1, & u(0, t) = 0. \end{cases}$$

□

7.1.2 Vlna na polopřímce

K řešení vlnové rovnice na polopřímce můžeme přistupovat stejným způsobem. Uvažujme polonekonečnou strunu ($x > 0$), jejíž konec $x = 0$ je pevně uchycen. Odpovídající počátečně-okrajová úloha má podobu

$$(7.6) \quad \begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & x > 0, t > 0, \\ u(0, t) = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & u_t(x, 0) = \psi(x). \end{cases}$$



Obrázek 7.2: Řešení úlohy (7.5) pro hodnotu parametru $k = 1$.

Opět použijeme metodu *lichého rozšíření* obou počátečních podmínek na celou reálnou osu. Zavedeme tedy

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0, \\ -\varphi(-x), & x < 0, \end{cases} \quad \tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x), & x > 0, \\ -\psi(-x), & x < 0, \end{cases} \quad \begin{matrix} \tilde{\varphi}(0) = 0, \\ \tilde{\psi}(0) = 0, \end{matrix}$$

a uvažujeme rozšířenou úlohu

$$(7.7) \quad \begin{cases} v_{tt} = c^2 v_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ v(x, 0) = \tilde{\varphi}(x), & v_t(x, 0) = \tilde{\psi}(x). \end{cases}$$

Její řešení je dáno d'Alembertovou formulí

$$v(x, t) = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}(x + ct) + \tilde{\varphi}(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \tilde{\psi}(y) dy.$$

Řešení u původní úlohy (7.6) bychom získali jako restrikcí funkce v pro $x > 0$.

Všimněme si nejprve oblasti $x > ct$. Pro tyto body (x, t) platí, že celá základna jejich oblasti vlivu leží v intervalu $(0, \infty)$, kde $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$, $\tilde{\psi}(x) = \psi(x)$. Zde je tedy řešení dáno „obvyklým“ vztahem

$$(7.8) \quad u(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y) dy, \quad x > ct.$$

Avšak v oblasti $0 < x < ct$ platí $\tilde{\varphi}(x - ct) = -\varphi(ct - x)$ a tedy

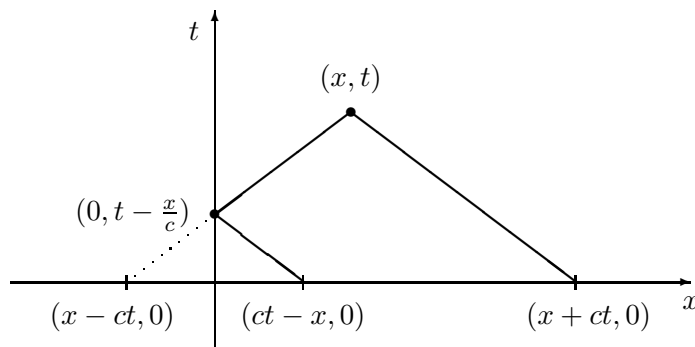
$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x + ct) - \varphi(ct - x)] + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} \psi(y) dy + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^0 [-\psi(-y)] dy.$$

Přejdeme-li v posledním integrálu od proměnné y k proměnné $-y$, dostáváme řešení ve tvaru

$$(7.9) \quad u(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(ct + x) - \varphi(ct - x)] + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{ct+x} \psi(y) dy, \quad 0 < x < ct.$$

Úplné řešení úlohy (7.6) je tedy dáno dvojicí předpisů (7.8), (7.9).

Graficky můžeme tento výsledek interpretovat následovně. Do roviny xt zakreslíme zpětné charakteristiky z bodu (x, t) . V případě, že (x, t) leží v oblasti $x < ct$, protne jedna z charakteristik osu t dříve, než se dotkne osy x . Vztah (7.9) říká, že dojde k odrazu od konce $x = 0$ a řešení závisí na hodnotách funkce φ v bodech $ct \pm x$ a na hodnotách funkce ψ na krátkém intervalu mezi těmito body. Ostatní hodnoty funkce ψ nemají na řešení v bodě (x, t) vliv (viz obrázek 7.3).



Obrázek 7.3: Metoda odrazu pro vlnovou rovnici.

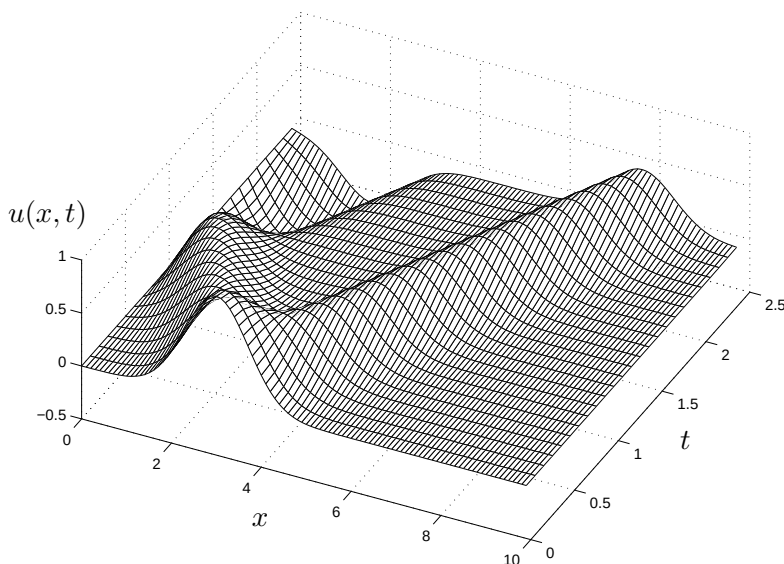
V případě úloh s homogenní Neumannovou okrajovou podmínkou bychom postupovali analogicky. Použili bychom však metodu *sudého rozšíření*, která využívá skutečnosti, že sudým počátečním podmínkám odpovídá sudé řešení, které automaticky v bodě $x = 0$ splňuje podmínku $u_x(0, t) = 0$. Odvození příslušných tvarů řešení necháváme na čtenáři.

Příklad 7.2. Řešte počátečně-okrajovou úlohu

$$(7.10) \quad \begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & x > 0, \ t > 0, \\ u(0, t) = 0, \\ u(x, 0) = e^{-(x-3)^2}, & u_t(x, 0) = 0. \end{cases}$$

Nalezené řešení porovnejte s jeho grafem na obrázku 7.4 (zde je $c = 2$). Povšimněte si odrazu počáteční vlny od hranice $x = 0$.

□



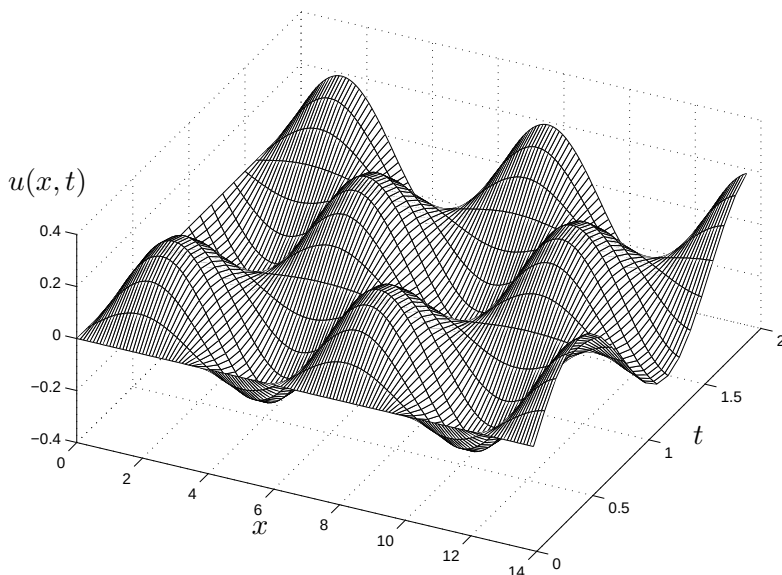
Obrázek 7.4: Řešení úlohy (7.10) pro $c = 2$.

Příklad 7.3. Řešte počátečně-okrajovou úlohu

$$(7.11) \quad \begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & x > 0, \ t > 0, \\ u(0, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0, & u_t(x, 0) = \sin x. \end{cases}$$

Přímým dosazením do předpisů (7.8) a (7.9) zjistíme, že $u(x, t) = \frac{1}{c} \sin x \sin ct$ v obou oblastech $0 < x < ct$ a $x > ct$. Graf řešení je znázorněn na obrázku 7.5 pro hodnotu parametru $c = 4$. (S obdobnou úlohou, avšak na reálné ose, jsme se setkali v kapitole 4, viz příklad 4.2 a obrázek 4.1. Připomeňme, že příslušné řešení bylo pro své vlastnosti nazýváno *stojatým vlněním*.)

□

Obrázek 7.5: Řešení úlohy (7.11) pro $c = 4$.

7.1.3 Úlohy s nehomogenní okrajovou podmínkou

Uvažujme počátečně-okrajovou úlohu pro difuzní rovnici na polopřímce s *nehomogenní* okrajovou podmínkou

$$(7.12) \quad \begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0, & x > 0, t > 0, \\ u(0, t) = h(t), \\ u(x, 0) = \varphi(x). \end{cases}$$

V tomto případě postupujeme tak, že zavedeme novou funkci

$$v(x, t) = u(x, t) - h(t),$$

která pak řeší úlohu

$$\begin{cases} v_t - kv_{xx} = -h'(t), & x > 0, t > 0, \\ v(0, t) = 0, \\ v(x, 0) = \varphi(x) - h(0). \end{cases}$$

Vliv počáteční podmínky jsme tak převedli na pravou stranu rovnice, tj. řešíme *nehomogenní* difuzní rovnici s *homogenní* okrajovou podmínkou. K nalezení řešení této transformované úlohy můžeme opět použít metodu lichého rozšíření.

V případě, že není splněna podmínka kompatibility ($\varphi(0) = h(0)$), dostaneme „zobecněné“ řešení, které není v bodě $(0, 0)$ spojitě (avšak všude jinde již ano).

V případě nehomogenní Neumannovy okrajové podmínky $u_x(0, t) = h(t)$ bychom použili transformaci $v(x, t) = u(x, t) - xh(t)$, která „vnese“ do úlohy nehomogenní pravou stranu $-xh'(t)$, avšak zajistí homogenost okrajové podmínky $v_x(0, t) = 0$. Transformovanou úlohu řešíme metodou sudého rozšíření. Detailní odvození si dovoluujeme nechat na čtenáři.

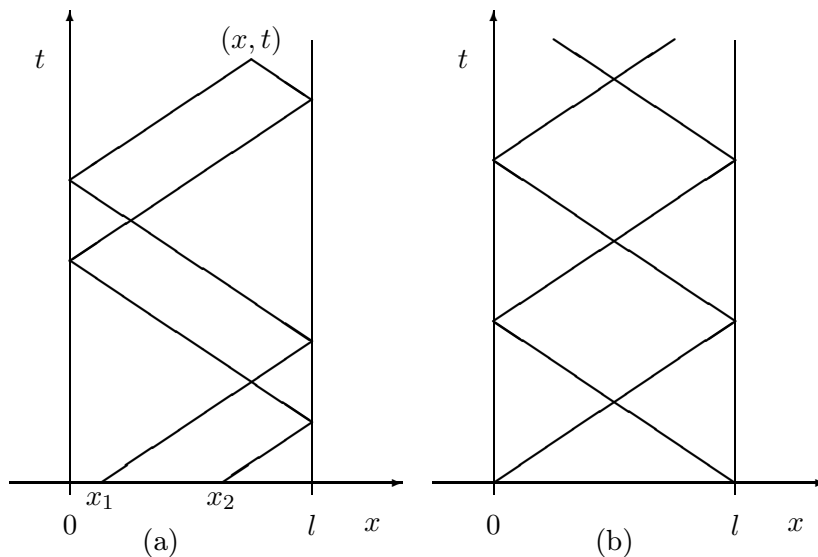
7.2 Počátečně-okrajová úloha na konečném intervalu – Fourierova metoda

V tomto odstavci se budeme zabývat počátečně-okrajovými úlohami pro vlnovou a difuzní rovnici na konečném intervalu. Okrajové podmínky jsou tedy zadány na obou koncích intervalu. K řešení těchto úloh je možné přistupovat z různých hledisek. Jednou možností, která se nabízí, je aplikovat *metodu odrazu* (diskutovanou v předchozích odstavcích) na oba konce daného intervalu. V případě homogenních Dirichletových okrajových podmínek to znamená použít liché rozšíření počátečních podmínek vzhledem k oběma koncovým bodům a dále dodefinovat všechny funkce periodicky na celou reálnou osu. To znamená, že místo původní počáteční podmínky $\varphi = \varphi(x)$, $x \in (0, l)$, uvažujeme rozšířenou funkci

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in (0, l), \\ -\varphi(-x), & x \in (-l, 0), \\ 2l - \text{periodická} & \text{jinde.} \end{cases}$$

(V případě Neumannových okrajových podmínek bychom použili sudé rozšíření.) Pak můžeme využít známe formule pro řešení jednotlivých úloh na reálné ose. Avšak po zpětném dosazení za „vlnkované“ počáteční podmínky získáme poměrně komplikované vztahy!

Například uvažujeme-li počátečně-okrajovou úlohu pro *vlnovou rovnici*, můžeme získat požadovanou hodnotu řešení v bodě (x, t) následujícím způsobem: Zakreslíme zpětně charakteristiky vedoucí z bodu (x, t) a odrazíme je, kdykoliv narazí do přímk $x = 0$, $x = l$, dokud se nedostaneme na nulovou časovou hladinu $t = 0$ (viz obrázek 7.6(a)). Tím získáme dvojici bodů x_1 a x_2 . Řešení je pak určeno počáteční výchylkou v těchto bodech, počáteční rychlostí v intervalu (x_1, x_2) a také počtem odrazů, ke kterým došlo. Obecně nám tedy charakteristické přímky rozdělí časoprostorovou oblast $(0, l) \times (0, \infty)$ na kosočtvercové podoblasti a na každé z nich je řešení dáno jinou formulí (viz obrázek 7.6(b)).



Obrázek 7.6: Metoda odrazu pro vlnovou rovnici na konečném intervalu.

V následujícím textu se zaměříme na vysvětlení podstaty další standardní metody, tzv. *Fourierovy metody* (někdy též zvané *metoda separace proměnných*). Její použití při řešení počátečně-okrajové úlohy pro vlnovou rovnici vedlo k systematickému studiu trigonometrických řad, které byly mnohem později nazvány Fourierovými řadami.

7.2.1 Dirichletovy okrajové podmínky, vlnová rovnice

Nejprve se budeme zabývat počátečně-okrajovou úlohou, která popisuje kmitání struny konečné délky l , jejíž koncové body jsou upevněny v „nulové poloze“, a jejíž počáteční výchylka a počáteční rychlost jsou dány funkcemi $\varphi(x)$ a $\psi(x)$:

$$(7.13) \quad \begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x). \end{cases}$$

Vydeme z předpokladu, že existuje řešení vlnové rovnice ve tvaru

$$u(x, t) = X(x)T(t),$$

kde $X = X(x)$ a $T = T(t)$ jsou reálné funkce jedné reálné proměnné, jejichž druhá derivace existuje a je spojitá. Proměnné x a t jsou tedy v tomto tvaru řešení vzájemně odděleny (separovány). Dosazením do rovnice dostáváme

$$XT'' = c^2 X''T$$

a po vydělení členem $-c^2 XT$ (za předpokladu, že $XT \neq 0$) pak

$$-\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = -\frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Tento vztah říká, že funkce $-\frac{T''}{c^2 T}$, která závisí pouze na proměnné t , se musí rovnat funkci $-\frac{X''}{X}$, která závisí pouze na prostorové proměnné x . Tato rovnost musí platit pro všechna $t > 0$ a $x \in (0, l)$ a tedy

$$-\frac{T''}{c^2 T} = -\frac{X''}{X} = \lambda,$$

kde λ je *konstanta*. Původní parciální diferenciální rovnici jsme tedy převedli na dvojici *separovaných* obyčejných diferenciálních rovnic pro neznámé funkce $X(x)$ a $T(t)$:

$$(7.14) \quad X''(x) + \lambda X(x) = 0,$$

$$(7.15) \quad T''(t) + c^2 \lambda T(t) = 0.$$

Dále máme zadány homogenní Dirichletovy okrajové podmínky

$$(7.16) \quad X(0) = X(l) = 0,$$

neboť ze zadání úlohy (7.13) plyne, že $u(0, t) = u(l, t) = 0$ pro všechna $t > 0$. Nejprve budeme řešit okrajovou úlohu (7.14), (7.16). Protože nás zjevně nezajímá triviální řešení $X(x) \equiv 0$, vyloučíme případ $\lambda \leq 0$. Je-li $\lambda > 0$, dostáváme z rovnice (7.14) řešení ve tvaru

$$X(x) = C \cos \sqrt{\lambda} x + D \sin \sqrt{\lambda} x$$

a z okrajových podmínek (7.16) plyne

$$X(0) = C = 0 \quad \text{a} \quad X(l) = D \sin \sqrt{\lambda} l = 0.$$

Netriviální řešení získáme pouze v případě, že

$$\sin \sqrt{\lambda} l = 0,$$

tedy

$$(7.17) \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Každému takovému λ_n pak odpovídá řešení

$$(7.18) \quad X_n(x) = C_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad n \in \mathbb{N},$$

kde C_n jsou libovolné konstanty. Nyní se vrátíme k rovnici (7.15). Její řešení má pro $\lambda = \lambda_n$ tvar

$$(7.19) \quad T_n(t) = A_n \cos \frac{n\pi ct}{l} + B_n \sin \frac{n\pi ct}{l}, \quad n \in \mathbb{N},$$

kde A_n a B_n jsou opět libovolné konstanty. Původní parciální diferenciální rovnici z úlohy (7.13) pak řeší každá z funkcí

$$u_n(x, t) = \left(A_n \cos \frac{n\pi ct}{l} + B_n \sin \frac{n\pi ct}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad n \in \mathbb{N},$$

kteří již splňují i předepsané homogenní okrajové podmínky. Poznamenejme, že místo $A_n C_n$ a $B_n C_n$ píšeme pouze A_n a B_n , neboť jde o libovolné reálné konstanty. Jelikož úloha je lineární, je řešením i *libovolný konečný součet* tvaru

$$(7.20) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^N \left(A_n \cos \frac{n\pi ct}{l} + B_n \sin \frac{n\pi ct}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

Funkce daná předpisem (7.20) bude vyhovovat i počátečním podmínkám, pokud bude platit

$$(7.21) \quad \varphi(x) = \sum_{n=1}^N A_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

$$(7.22) \quad \psi(x) = \sum_{n=1}^N \frac{n\pi c}{l} B_n \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Pro libovolná počáteční data v této podobě je úloha (7.13) jednoznačně řešitelná a příslušné řešení je dáno vztahem (7.20).

Je zřejmé, že podmínky (7.21), (7.22) jsou značně omezující a jejich splnění je obtížné zaručit. Z tohoto důvodu hledáme řešení úlohy (7.13) ve tvaru *nekonečného součtu* a vyjádříme jej ve formě *Fourierovy řady*

$$(7.23) \quad \boxed{u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi ct}{l} + B_n \sin \frac{n\pi ct}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}.}$$

Konstanty A_n a B_n (resp. $\frac{n\pi c}{l}B_n$) jsou pak dány jako Fourierovy koeficienty sinových rozvoů funkcí $\varphi(x)$, $\psi(x)$, tedy

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \\ \psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{l} B_n \sin \frac{n\pi x}{l}.\end{aligned}$$

Jinými slovy, řešení počátečně-okrajové úlohy pro vlnovou rovnici je v každém čase t vyjádřitelné ve formě Fourierovy sinové řady v proměnné x , pokud lze takto vyjádřit počáteční podmínky $\varphi(x)$, $\psi(x)$. Ukazuje se, že pro dostatečně širokou třídu funkcí je takový rozklad možný a příslušné řady funkcí konvergují. V takovém případě pak k výpočtu koeficientů A_n , B_n využijeme ortogonalitu funkcí $\sin \frac{n\pi x}{l}$, $n = 1, 2, \dots$, a dostáváme následující vyjádření pro koeficienty v nekonečné řadě (7.23):

$$\begin{aligned}A_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \\ B_n &= \frac{l}{n\pi c} \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{n\pi c} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.\end{aligned}$$

Aby bylo nalezené řešení úlohy (7.13) ve tvaru řady (7.23) matematicky korektní, je třeba dokázat, že řada (7.23) konverguje. To závisí na vlastnostech funkcí φ , ψ a na druhu požadované konvergence. Tyto otázky přesahují rámec tohoto textu a my se jimi zabývat nebudeme.

Poznámka 7.4. Koeficienty před časovou proměnnou v argumentech goniometrických funkcí ve vyjádření (7.23), tedy hodnoty $n\pi c/l$, se nazývají *frekvence*. Vrátime-li se ke struně, kterou úloha (7.13) popisuje, mají příslušné frekvence podobu

$$\frac{n\pi\sqrt{T}}{l\sqrt{\rho}} \quad \text{pro } n = 1, 2, 3, \dots$$

„Základnímu“ tónu struny odpovídá nejmenší z těchto hodnot, tedy $\pi\sqrt{T}/(l\sqrt{\rho})$. Vyšší (aliquotní) tóny jsou pak dány přesně celými násobky této základní frekvence. Objev, že hudební tóny lze takto snadno matematicky popsat, učinil Euler roku 1749.

Příklad 7.5. Řešme počátečně-okrajovou úlohu

$$(7.24) \quad \begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & x \in (0, \pi), \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = \sin 2x, \quad u_t(x, 0) = 0. \end{cases}$$

S využitím výše odvozených vztahů můžeme řešení zapsat ve tvaru

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nct + B_n \sin nct) \sin nx.$$

Nulová počáteční rychlost implikuje nulové „sinové koeficienty“ $B_n = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Počáteční výchylka určuje „kosinové koeficienty“ A_n :

$$u(x, 0) = \sin 2x = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx.$$

Jelikož funkce $\sin nx$ tvoří úplný ortogonální systém na intervalu $(0, \pi)$, snadno získáme

$$A_2 = 1, \quad A_n = 0 \quad \text{pro } n \in \mathbb{N} \setminus \{2\}.$$

Můžeme tedy učinit závěr, že řešení úlohy (7.24) má jednoduchý tvar

$$u(x, t) = \cos 2ct \sin 2x.$$

□

Příklad 7.6. Obdobně jako v předchozím příkladě můžeme ukázat, že funkce

$$(7.25) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi ct}{l},$$

kde

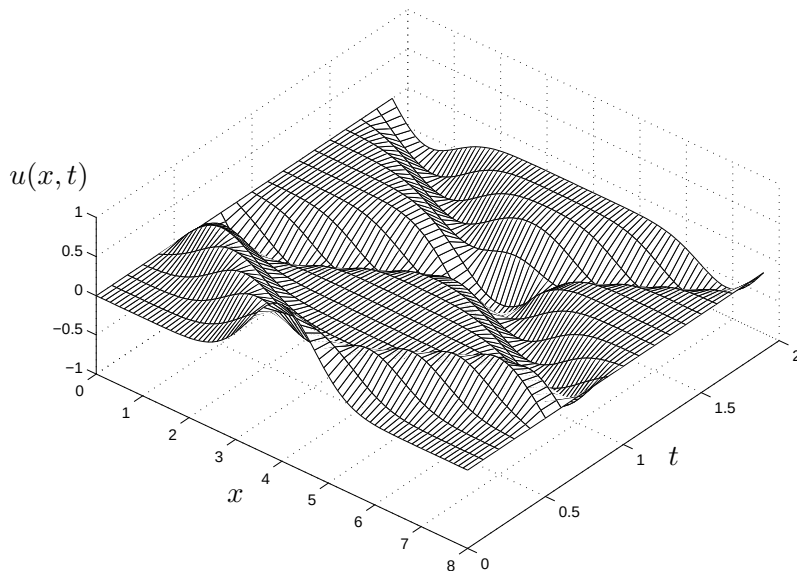
$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l e^{-(x-l/2)^2} \sin \frac{n\pi x}{l} dx,$$

řeší počátečně-okrajovou úlohu

$$(7.26) \quad \begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & x \in (0, l), \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = e^{-(x-l/2)^2}, \quad u_t(x, 0) = 0. \end{cases}$$

Na obrázku 7.7 je znázorněn částečný součet řady (7.25) do členu $n = 15$ pro hodnoty $c = 6$ a $l = 8$, který je přibližným řešením úlohy (7.26).

□



Obrázek 7.7: Grafické znázornění řešení úlohy (7.26).

7.2.2 Dirichletovy okrajové podmínky, difuzní rovnice

Nyní uvažujme počátečně-okrajovou úlohu pro rovnici vedení tepla

$$(7.27) \quad \begin{cases} u_t = k u_{xx}, & 0 < x < l, \ t > 0, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \end{cases}$$

která modeluje tenkou tyč, jejíž konce jsou udržovány na konstantní teplotě $u = 0$, a kde je v čase $t = 0$ rozložení teploty v tyči dáno funkcí $\varphi = \varphi(x)$. Nalézt rozložení teploty v tyči v čase $t > 0$ znamená nalézt řešení $u = u(x, t)$ úlohy (7.27). Stejný problém popisuje i difuzní proces substance v trubici, která je konstruována tak, že jakákoli substance, která se dostane ke kraji trubice, okamžitě odteče pryč.

Postupujeme stejným způsobem jako v předchozím případě. Nejprve tedy hledáme takové řešení rovnice, které splňuje pouze homogenní okrajové podmínky a které má tvar

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

Po dosazení do rovnice vedení tepla a po jednoduché úpravě dostáváme

$$-\frac{T'(t)}{kT(t)} = -\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda,$$

kde λ je konstanta. Tím jsme tedy původní rovnici převedli na dvojici obyčejných diferenciálních rovnic

$$(7.28) \quad T' + \lambda k T = 0,$$

$$(7.29) \quad X'' + \lambda X = 0.$$

K rovnici (7.29) nyní připojíme okrajové podmínky $X(0) = X(l) = 0$ a hledáme takové hodnoty λ , aby tato úloha měla netriviální řešení. Stejně jako v případě vlnové rovnice dostáváme

$$(7.30) \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

a odpovídající řešení ve tvaru

$$(7.31) \quad X_n(x) = C_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad n \in \mathbb{N},$$

kde C_n jsou libovolné konstanty. Vrátime-li se k rovnici (7.28) a dosadíme-li $\lambda = \lambda_n$, dostáváme

$$(7.32) \quad T_n(t) = A_n e^{-(n\pi/l)^2 kt}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Řešení u původní úlohy (7.27) pak můžeme vyjádřit ve formě nekonečné Fourierovy řady

$$(7.33) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(n\pi/l)^2 kt} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

za předpokladu, že počáteční podmínka je také rozvinutelná do odpovídající řady, tj.

$$(7.34) \quad \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Z fyzikálního hlediska vyjádření (7.33) říká, že s rostoucím časem je teplo odváděno konci tyče a teplota v celé tyči klesá k nule.

Příklad 7.7. Nechtě a_n jsou sinové Fourierovy koeficienty funkce $\varphi(x) = 10x^3(l-x)$ na intervalu $(0, l)$. Pak funkce

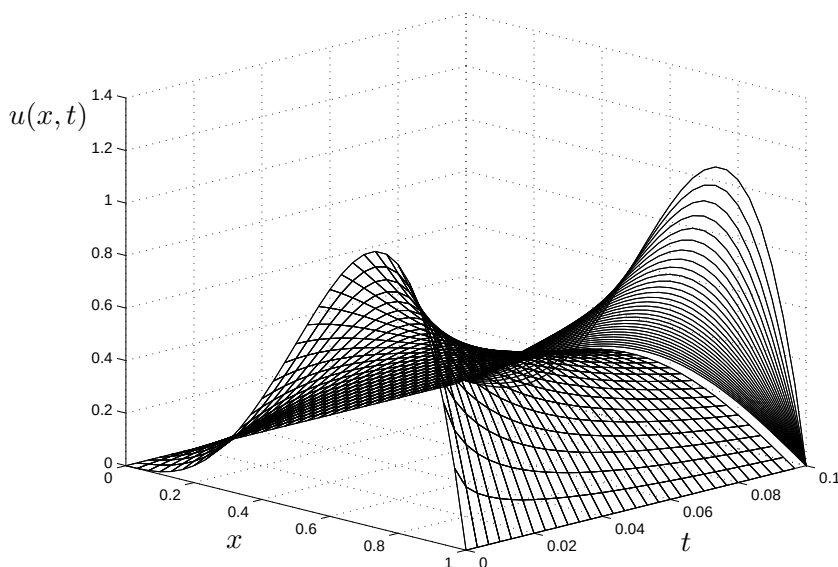
$$(7.35) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} e^{-\frac{n^2 \pi^2 kt}{l^2}}$$

řeší počátečně-okrajovou úlohu

$$(7.36) \quad \begin{cases} u_t = ku_{xx}, & x \in (0, l), \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = 10x^3(l - x). \end{cases}$$

Na obrázku 7.8 je znázorněn částečný součet řady (7.35) pro $n = 42$ a pro hodnoty $l = 1$ a $k = 1$.

□



Obrázek 7.8: Grafické znázornění řešení úlohy (7.36).

7.2.3 Neumannovy okrajové podmínky

Stejnou metodu lze použít i pro homogenní Neumannovy okrajové podmínky

$$u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0.$$

V případě vlnové rovnice tyto podmínky odpovídají struně s volnými konci. Modelujeme-li difuzní proces, pak popisují trubici s izolovanými konci (nic nepronikne dovnitř ani ven a tok difundující látky přes hranici je nulový). Obdobně v případě vedení tepla homogenní Neumannovy podmínky reprezentují izolované konce tyče (opět je tepelný tok přes hranici nulový).

Uvažujeme-li úlohu pro vlnovou nebo difuzní rovnici na intervalu $(0, l)$, vede tentokrát separace proměnných na obyčejnou diferenciální rovnici

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X'(0) = X'(l) = 0,$$

která má netriviální řešení pro $\lambda > 0$ a pro $\lambda = 0$. Konkrétně dostáváme

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$X_n(x) = C_n \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Počátečně-okrajová úloha pro difuzní rovnici s Neumannovými okrajovými podmínkami má pak řešení tvaru

$$(7.37) \quad u(x, t) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(n\pi/l)^2 kt} \cos \frac{n\pi x}{l},$$

pokud je počáteční podmínka rozvinutelná ve Fourierovu kosinovou řadu

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{l}.$$

V případě počátečně-okrajové úlohy pro vlnovou rovnici s Neumannovými okrajovými podmínkami na intervalu $(0, l)$ dostáváme

$$(7.38) \quad u(x, t) = \frac{1}{2}A_0 + \frac{1}{2}B_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi ct}{l} + B_n \sin \frac{n\pi ct}{l} \right) \cos \frac{n\pi x}{l},$$

kde počáteční data musí splňovat

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{l}, \\ \psi(x) &= \frac{1}{2}B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{l} B_n \cos \frac{n\pi x}{l}. \end{aligned}$$

V obou případech proveďte detailní odvození!

Příklad 7.8. Nechť a_n jsou kosinové Fourierovy koeficienty funkce $\varphi(x) = \frac{1}{2} - 200x^4(1-x)^4$ na intervalu $(0, l)$. Pak funkce

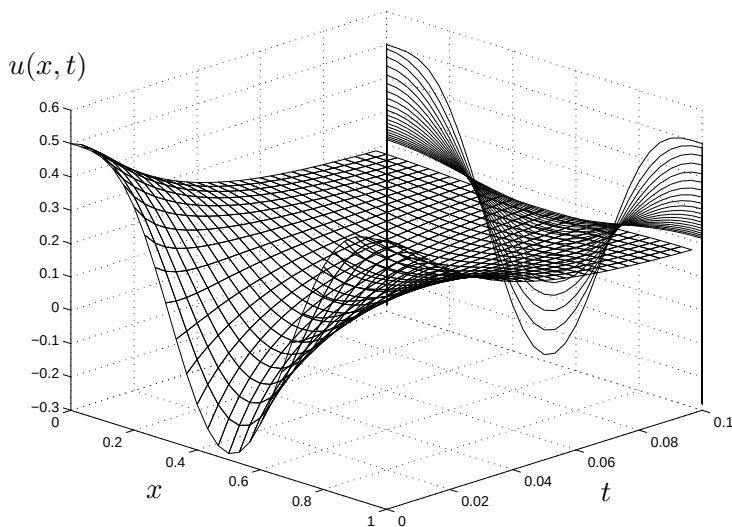
$$(7.39) \quad u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} e^{-\frac{n^2 \pi^2 kt}{l^2}}$$

řeší počátečně-okrajovou úlohu

$$(7.40) \quad \begin{cases} u_t = ku_{xx}, & x \in (0, l), \quad t > 0, \\ u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = \frac{1}{2} - 200x^4(1 - x)^4. \end{cases}$$

Na obrázku 7.9 je znázorněn částečný součet řady (7.39) pro $n = 15$ a pro hodnoty $l = 1$ a $k = 1$.

□



Obrázek 7.9: Grafické znázornění řešení úlohy (7.40).

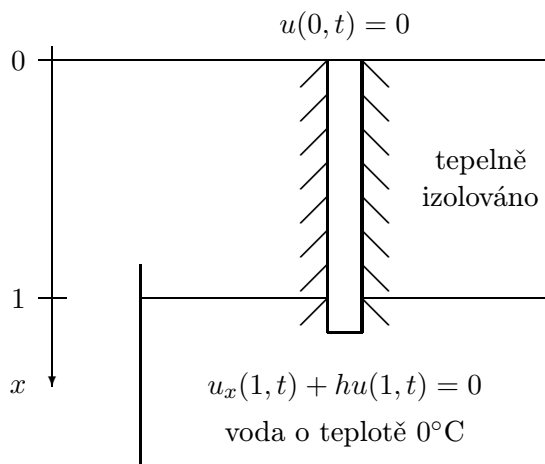
7.2.4 Newtonovy okrajové podmínky

Spolu s vlnovou rovnicí popisují Newtonovy okrajové podmínky strunu, jejíž konce jsou uchyceny na pružinách (splňujících Hookův zákon), které ji táhnou zpátky do rovnovážného stavu. V případě vedení tepla v tyči tyto podmínky modelují přenos tepla mezi konci tyče a okolním prostředím.

Uvažujme následující modelovou úlohu znázorněnou na obrázku 7.10. Mějme svislou tyč jednotkové délky, jejíž horní konec je udržován na nulové teplotě a dolní je ponořen do rezervoáru s vodou o nulové teplotě. Mezi dolním koncem tyče a vodou dochází k výměně tepla podle Newtonova zákona $u_x(1, t) = -hu(1, t)$. Konstanta h představuje koeficient přenosu tepla. Předpokládejme, že počáteční teplota tyče je dána funkcí $u(x, 0) = x$. Hledat rozložení teploty

v tyči znamená řešit počátečně-okrajovou úlohu pro rovnici vedení tepla se smíšenými okrajovými podmínkami (Dirichletovy a Newtonovy okrajové podmínky):

$$(7.41) \quad \begin{cases} u_t = ku_{xx}, & 0 < x < 1, t > 0, \\ u(0, t) = 0, \\ u_x(1, t) + hu(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = x. \end{cases}$$



Obrázek 7.10: Schématické znázornění úlohy (7.41).

Při výpočtu řešení postupujeme stejně jako v předchozích případech. V prvním kroku oddělíme proměnné, tj. uvažujeme řešení ve tvaru $u(x, t) = X(x)T(t)$ a po dosazení do rovnice dostáváme

$$-\frac{T'}{kT} = -\frac{X''}{X} = \lambda,$$

kde λ je zatím neznámá konstanta. Tím jsme původní rovnici převedli na dvojici navzájem nezávislých obyčejných diferenciálních rovnic

$$(7.42) \quad T' + \lambda kT = 0,$$

$$(7.43) \quad X'' + \lambda X = 0.$$

Funkce $X(x)$ musí navíc splňovat okrajové podmínky

$$X(0) = 0, \quad X'(1) + hX(1) = 0.$$

Jednoduchým rozбором vyloučíme hodnoty $\lambda \leq 0$, které vedou pouze k triviálnímu řešení $X(x) \equiv 0$. Uvažujme tedy $\lambda = \mu^2 > 0$. Potom

$$X(x) = A \sin \mu x + B \cos \mu x,$$

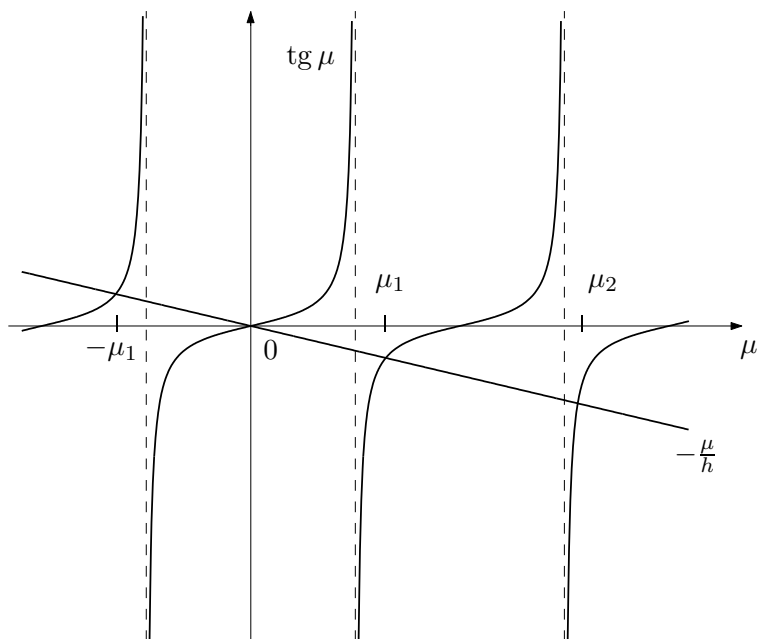
a po dosazení do okrajových podmínek dostáváme

$$B = 0, \quad A\mu \cos \mu + hA \sin \mu = 0.$$

Protože hledáme netriviální řešení, tj. $A \neq 0$, můžeme poslední rovnost psát ve tvaru

$$(7.44) \quad \operatorname{tg} \mu = -\frac{\mu}{h}.$$

Nalézt kořeny transcendentní rovnice (7.44) znamená nalézt průsečíky grafů funkcí $\operatorname{tg} \mu$ a $-\frac{\mu}{h}$ (viz obrázek 7.11).



Obrázek 7.11: Průsečíky grafů funkcí $\operatorname{tg} \mu$ a $-\frac{\mu}{h}$.

Je zřejmé, že existuje nekonečná posloupnost kladných hodnot μ_n , $n \in \mathbb{N}$, taková, že odpovídající řešení $X_n(x)$ pak mají podobu

$$X_n(x) = A_n \sin \mu_n x.$$

V následující tabulce je uvedeno prvních pět přibližných hodnot μ_n pro $h = 1$.

n	1	2	3	4	5
μ_n	2.02	4.91	7.98	11.08	14.20

Vrátíme-li se k rovnici (7.42), dostáváme

$$T_n(t) = C_n e^{-k\mu_n^2 t}$$

a odtud

$$u_n(x, t) = A_n e^{-k\mu_n^2 t} \sin \mu_n x.$$

Výsledné řešení původní úlohy pak hledáme ve tvaru Fourierovy řady

$$(7.45) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k\mu_n^2 t} \sin \mu_n x.$$

Koeficienty A_n určíme tak, aby byla splněna počáteční podmínka, tedy

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \mu_n x = x.$$

Vynásobíme-li tento vztah funkcí $\sin \mu_m x$ a integrujeme-li od 0 do 1, dostáváme

$$\int_0^1 x \sin \mu_m x \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^1 \sin \mu_n x \sin \mu_m x \, dx.$$

Protože

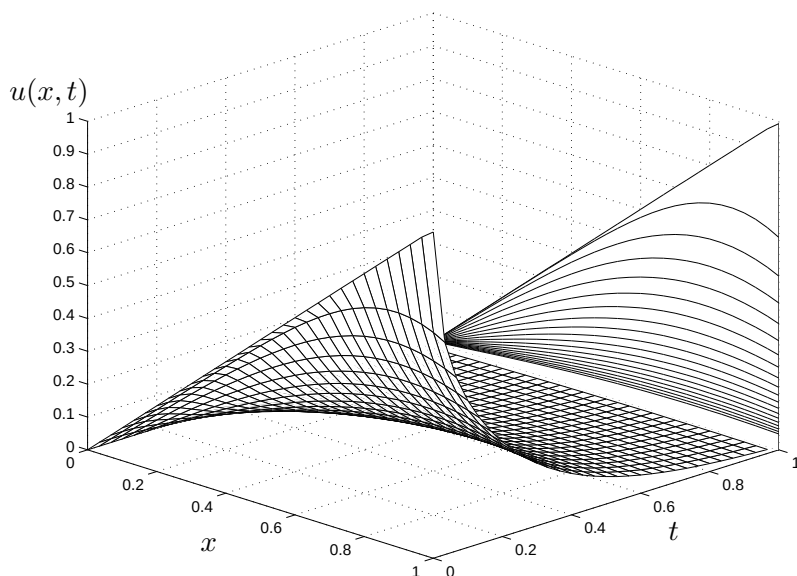
$$\int_0^1 \sin \mu_n x \sin \mu_m x \, dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \frac{\mu_n - \sin \mu_n \cos \mu_n}{2\mu_n}, & n = m, \end{cases}$$

získáme po jednoduché úpravě

$$A_n = \frac{2\mu_n}{\mu_n - \sin \mu_n \cos \mu_n} \int_0^1 x \sin \mu_n x \, dx.$$

Poznámka 7.9. V předchozích příkladech jsme se setkali se speciálními typy následující okrajové úlohy pro obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu:

$$(7.46) \quad \boxed{\begin{aligned} -y'' &= \lambda y, & 0 < x < l, \\ \alpha_0 y(0) + \beta_0 y'(0) &= 0, \\ \alpha_1 y(l) + \beta_1 y'(l) &= 0. \end{aligned}}$$



Obrázek 7.12: Grafické znázornění řešení $u(x, t)$ úlohy (7.41) pro $h = 1$ a $k = 1$.

Parametr $\lambda \in \mathbb{R}$, pro který existuje nenulové řešení úlohy (7.46), se nazývá *vlastní číslo*. Odpovídající nenulové řešení se pak nazývá *vlastní funkce* příslušná vlastnímu číslu λ . Ve Fourierově metodě jsme využili některé speciální vlastnosti vlastních čísel λ_n a vlastních funkcí $y_n(x)$ úlohy (7.46). Speciálně platí, že vlastní funkce $y_n(x)$ tvoří úplný ortogonální systém. To jest

$$\int_0^l y_n(x) y_m(x) dx = 0,$$

pokud $y_m(x)$ a $y_n(x)$ jsou dvě vlastní funkce příslušné dvěma různým vlastním číslům λ_m a λ_n . Mnoho funkcí definovaných na intervalu $(0, l)$ je navíc rozvinutelných do Fourierovy řady vzhledem k systému vlastních funkcí y_n :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n y_n(x),$$

kde F_n jsou Fourierovy koeficienty definované vztahem

$$F_n = \frac{\int_0^l f(x)y_n(x) dx}{\int_0^l y_n^2(x) dx}.$$

Tyto vlastnosti jsou typické nejen pro siny a kosiny, které řeší úlohu (7.46), ale též pro mnohem obecnější funkce, které jsou řešením tak zvané *Sturmovy-Liouvilleovy okrajové úlohy*. Základní fakta Sturmovy-Liouvilleovy teorie jsou uvedena v příloze A.

7.2.5 Princip Fourierovy metody

Princip Fourierovy metody pro počátečně-okrajové úlohy na konečném intervalu s homogenní rovnicí a homogenními okrajovými podmínkami můžeme shrnout do následujících bodů:

- (i) Řešení úlohy hledáme v separovaném tvaru $u(x, t) = X(x)T(t)$.
- (ii) Parciální diferenciální rovnici převedeme na dvojici obyčejných diferenciálních rovnic pro neznámé funkce $X(x)$ a $T(t)$.
- (iii) Vyřešením obyčejné diferenciální rovnice pro $X(x)$ s homogenními okrajovými podmínkami nalezneme vlastní čísla λ_n a vlastní funkce $X_n(x)$ odpovídající okrajové úlohy.
- (iv) Vlastní čísla λ_n dosadíme do obyčejné diferenciální rovnice pro neznámou funkci $T(t)$ a nalezneme její obecné řešení.
- (v) Řešení původní parciální diferenciální rovnice zapíšeme ve tvaru nekonečné Fourierovy řady $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t)$.
- (vi) Počáteční podmínky rozvineme rovněž ve Fourierovy řady podle systému navzájem ortogonálních vlastních funkcí $X_n(x)$.
- (vii) Porovnáním rozvojů počátečních podmínek a řešení $u(x, t)$ vypočítáme zbylé koeficienty.

Výše uvedený postup je formální a přesné zdůvodnění jednotlivých kroků si vyžaduje matematický aparát, který přesahuje rámec tohoto textu. Případní zájemci mohou nalézt potřebné informace např. v knize [24].

7.3 Fourierova metoda pro nehomogenní úlohy

7.3.1 Nehomogenní rovnice

V případě lineárních rovnic s nenulovou pravou stranou obvykle řešíme nejprve homogenní rovnici a poté využijeme znalost jejího řešení k nalezení partikulárního řešení nehomogenní rovnice, které vystihuje vliv pravé strany (připomeňte si např. metodu variace konstant pro obyčejné diferenciální rovnice). Při použití Fourierovy metody u počátečně-okrajových úloh pro nehomogenní parciální diferenciální rovnice využijeme obdobu tohoto přístupu. Jako obvykle budeme hledat řešení v separovaném tvaru $u(x, t) = T(t)X(x)$ a následně ve formě Fourierovy řady

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x).$$

Funkce $X_n(x)$ získáme opět jako vlastní funkce příslušné homogenní úlohy, zatímco funkce $T_n(t)$ již budou respektovat vliv pravé strany. Konkrétní postup si ukážeme na jednoduchém příkladu nehomogenní difuzní rovnice s homogenními Dirichletovými okrajovými podmínkami.

Řešme počátečně-okrajovou úlohu

$$(7.47) \quad \boxed{\begin{aligned} u_t - ku_{xx} &= f(x, t), & 0 < x < 1, & t > 0, \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) &= \varphi(x). \end{aligned}}$$

Nejprve určíme vlastní čísla λ_n a systém vlastních funkcí $X_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$. Získáme je stejným způsobem jako v předchozích odstavcích, tj. vyřešením odpovídající homogenní úlohy

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0, & 0 < x < 1, t > 0, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x). \end{cases}$$

Připomeňme, že v tomto případě máme

$$\lambda_n = (n\pi)^2, \quad X_n(x) = \sin n\pi x, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nyní rozvineme všechna data původní úlohy (7.47) do Fourierovy řady vzhledem k systému vlastních funkcí $X_n(x)$. Pro pevné $t > 0$ tedy zapíšeme pravou stranu $f(x, t)$ ve tvaru

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin n\pi x,$$

kde složky $f_n(t)$ jsou Fourierovy sinové koeficienty funkce $f(x, t)$:

$$f_n(t) = 2 \int_0^1 f(x, t) \sin n\pi x \, dx.$$

Obdobným způsobem rozvineme počáteční podmínku

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin n\pi x$$

s koeficienty

$$\varphi_n = 2 \int_0^1 \varphi(x) \sin n\pi x \, dx.$$

Nyní hledáme řešení úlohy (7.47) ve formě řady

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin n\pi x.$$

Dosadíme-li všechny výše uvedené rozvoje do rovnice úlohy (7.47), dostáváme

$$(7.48) \quad \sum_{n=1}^{\infty} T'_n(t) \sin n\pi x + k \sum_{n=1}^{\infty} (n\pi)^2 T_n(t) \sin n\pi x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin n\pi x.$$

Díky úplnosti systému vlastních funkcí $\sin n\pi x$, je rovnice (7.48) ekvivalentní systému obyčejných diferenciálních rovnic

$$T'_n + k(n\pi)^2 T_n = f_n(t), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Abychom zaručili splnění počáteční podmínky

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin n\pi x = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin n\pi x = \varphi(x),$$

musí všechny funkce $T_n(t)$ splňovat $T_n(0) = \varphi_n$. Odtud již snadno dostaneme

$$T_n(t) = \varphi_n e^{-k(n\pi)^2 t} + \int_0^t e^{-k(n\pi)^2 (t-\tau)} f_n(\tau) \, d\tau.$$

Výsledné řešení úlohy (7.47) má tedy podobu

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{-k(n\pi)^2 t} \sin n\pi x + \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\pi x \int_0^t e^{-k(n\pi)^2 (t-\tau)} f_n(\tau) \, d\tau.$$

První sčítanec představuje řešení odpovídající homogenní úlohy s danou počáteční podmínkou, zatímco druhý sčítanec vystihuje vliv pravé strany.

7.3.2 Nehomogenní okrajové podmínky a jejich transformace

Jak jsme se přesvědčili v předcházejících odstavcích, je pro použitelnost Fourierovy metody nezbytný předpoklad homogenity okrajových podmínek. Proto se nyní budeme zabývat otázkou přechodu od počátečně-okrajové úlohy s nehomogenními okrajovými podmínkami k úloze s podmínkami homogenními. V následujícím příkladě si ukážeme nejjednodušší modelovou situaci.

Příklad 7.10. Nechť tepelně izolovaná tyč délky l má konce udržované při konstantních teplotách g_0 a g_1 . Počáteční rozložení teploty je dáno funkcí $\varphi = \varphi(x)$. Průběh teploty $u(x, t)$ v tyči získáme tedy vyřešením počátečně-okrajové úlohy

$$(7.49) \quad \boxed{\begin{aligned} u_t - ku_{xx} &= 0, & 0 < x < l, & t > 0, \\ u(0, t) &= g_0, & u(l, t) &= g_1, \\ u(x, 0) &= \varphi(x). \end{aligned}}$$

Fyzikální intuice nás vede k domněnce, že pro $t \rightarrow \infty$ bude rozložení teploty $u(x, t)$ v tyči konvergovat k lineární funkci $w(x) = g_0(1 - \frac{x}{l}) + g_1\frac{x}{l}$. Má tedy smysl předpokládat, že řešení úlohy (7.49) bude mít tvar

$$(7.50) \quad u(x, t) = g_0 \left(1 - \frac{x}{l}\right) + g_1 \frac{x}{l} + U(x, t).$$

Člen $w(x) = g_0(1 - \frac{x}{l}) + g_1\frac{x}{l}$ představuje stacionární část (tj. nezávisí na čase a splňuje rovnici $w_t = kw_{xx}$ a okrajové podmínky $w(0) = g_0$, $w(l) = g_1$). Člen $U(x, t)$ představuje časově závislou část, která bude konvergovat k nule pro $t \rightarrow \infty$. Vzhledem k tomu, že stacionární část $w(x)$ je jednoznačně určena konstantami g_0 , g_1 , můžeme namísto funkce $u(x, t)$ hledat přímo neznámou funkci $U(x, t)$. Dosadíme-li vyjádření (7.50) do (7.49), zjistíme, že $U(x, t)$ musí řešit počátečně-okrajovou *homogenní* úlohu

$$\begin{cases} U_t - kU_{xx} = 0, & 0 < x < l, & t > 0, \\ U(0, t) = 0, & U(l, t) = 0, \\ U(x, 0) = \varphi(x) - [g_0 + \frac{x}{l}(g_1 - g_0)], \end{cases}$$

kterou je již možné řešit standardní Fourierovou metodou. □

V praxi se však častěji vyskytují okrajové podmínky, které *závisí na čase*. Jejich transformaci na homogenní okrajové podmínky si opět předvedeme na příkladě.

Příklad 7.11. Uvažujme počátečně-okrajovou úlohu

$$(7.51) \quad \boxed{\begin{aligned} u_t - ku_{xx} &= 0, & 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= g_1(t), \\ u_x(l, t) + hu(l, t) &= g_2(t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \end{aligned}}$$

a hledejme její řešení.

Neznámou funkci u budeme hledat ve tvaru

$$u(x, t) = A(t) \left(1 - \frac{x}{l}\right) + B(t) \frac{x}{l} + U(x, t),$$

přičemž funkce $A(t)$ a $B(t)$ zvolíme tak, aby „kvazistacionární“ část $w(x, t) = A(t) \left[1 - \frac{x}{l}\right] + B(t) \frac{x}{l}$ splňovala okrajové podmínky z úlohy (7.51). Funkce $U(x, t)$ pak už bude muset vyhovovat homogenním okrajovým podmínkám. Dosadíme tedy funkci $w(x, t)$ do okrajových podmínek

$$\begin{aligned} w(0, t) &\equiv A(t) = g_1(t), \\ w_x(l, t) + hw(l, t) &\equiv -\frac{A(t)}{l} + \frac{B(t)}{l} + hB(t) = g_2(t), \end{aligned}$$

a dostaneme

$$A(t) = g_1(t), \quad B(t) = \frac{g_1(t) + lg_2(t)}{1 + lh}$$

a tedy

$$u(x, t) = g_1(t) \left(1 - \frac{x}{l}\right) + \frac{g_1(t) + lg_2(t)}{1 + lh} \frac{x}{l} + U(x, t).$$

Dosazením tohoto výrazu do (7.51) snadno zjistíme, že $U(x, t)$ musí řešit počátečně-okrajovou úlohu

$$\begin{cases} U_t - kU_{xx} = -w_t, & 0 < x < l, \quad t > 0, \\ U(0, t) = 0, \\ U_x(l, t) + hU(l, t) = 0, \\ U(x, 0) = \varphi(x) - w(x, 0). \end{cases}$$

V tomto případě jsme tedy původní úlohu s homogenní rovnicí a nehomogenními okrajovými podmínkami převedli na úlohu s nenulovou pravou stranou, ale s homogenními okrajovými podmínkami, kterou můžeme řešit Fourierovou metodou.

□

7.4 Přechod k jednodušším úlohám

Cílem tohoto odstavce je upozornit na některé transformace, s jejichž pomocí můžeme přejít k úloze s jednodušší parciální diferenciální rovnicí.

7.4.1 Boční přestup tepla povrchem tyče

Uvažujme počátečně-okrajovou úlohu

$$(7.52) \quad \begin{cases} u_t - ku_{xx} + qu = 0, & 0 < x < 1, t > 0, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x). \end{cases}$$

Úloha popisuje vedení tepla tyčí, ve které dochází k přestupu tepla do okolí povrchem tyče. Koeficient přestupu tepla je označen q . Budeme hledat substituci, která povede ke zjednodušení parciální diferenciální rovnice z úlohy (7.52). Přitom se budeme opírat o fyzikální vlastnosti modelu. Teplota $u(x, t)$ se v každém bodě x_0 tyče mění na základě následujících dvou faktů:

1. difuze tepla podél tyče (popsané členem $-ku_{xx}$),
2. přestupu tepla bočním povrchem tyče (popsaného členem qu).

Předpokládejme, že by nedocházelo k difuzi tepla podél tyče (tj. $k = 0$), potom by průběh teploty v každém bodě tyče byl dán vztahem

$$u(x_0, t) = u(x_0, 0)e^{-qt}$$

(neboť pro $k = 0$ je funkce $u(x_0, t)$ řešením obyčejné diferenciální rovnice $u_t + qu = 0$ s počáteční podmínkou $u = u(x_0, 0)$). Na základě tohoto zjištění se pokusíme vyjádřit řešení počátečně okrajové úlohy (7.52) (nyní již s $k \neq 0$) ve tvaru

$$(7.53) \quad u(x, t) = e^{-qt}w(x, t),$$

kde $w = w(x, t)$ je neznámá funkce, která by měla vystihovat difuzi tepla podél tyče. Dosadíme-li vyjádření (7.53) do (7.52), dostáváme následující úlohu pro hledanou funkci $w(x, t)$

$$\begin{cases} w_t - kw_{xx} = 0, & 0 < x < 1, t > 0, \\ w(0, t) = w(1, t) = 0, \\ w(x, 0) = \varphi(x). \end{cases}$$

To je však klasická homogenní úloha pro rovnici vedení tepla, jejíž řešení je již čtenáři známo.

7.4.2 Úloha s konvektivním členem

Parciální diferenciální rovnice

$$(7.54) \quad \boxed{u_t - ku_{xx} + cu_x = 0}$$

popisuje tzv. *konvektivní difuzi*, kde c je konstanta popisující rychlost šíření média (viz odstavec 1.3.2). Rovnici (7.54) můžeme převést na klasickou difuzní rovnici pomocí substituce

$$u(x, t) = e^{\frac{c}{2k}(x - \frac{ct}{2})} w(x, t).$$

Ověřte! Exponenciální člen je v tomto případě podmíněn pohybem média, $w(x, t)$ pak pouze difuzí.

7.5 Cvičení

1. Dokažte, že je-li $f(x) \in C^2((0, \infty))$, pak její liché rozšíření $\tilde{f}(x)$ je třídy $C^2(\mathbb{R})$ právě tehdy, když $f(0) = f''(0) = 0$.
2. Pomocí metody sudého rozšíření odvoďte vztah pro řešení difuzní rovnice na polopřímce s homogenní Neumannovou okrajovou podmínkou v bodě $x = 0$. Uvažujte obecnou počáteční podmínku $u(x, 0) = \varphi(x)$.

$$[u(x, t) = \int_0^\infty \varphi(y)(G(x+y, t) + G(x-y, t))dy]$$

3. Pomocí metody sudého rozšíření odvoďte vztah pro řešení vlnové rovnice na polopřímce s homogenní Neumannovou okrajovou podmínkou v bodě $x = 0$. Uvažujte obecné počáteční podmínky $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_t(x, 0) = \psi(x)$.

$$[u(x, t) = \frac{1}{2}(\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\tau) d\tau, \quad x > ct,$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\varphi(ct+x) + \varphi(ct-x)) + \frac{1}{2c} \int_0^{ct+x} \psi(\tau) d\tau + \frac{1}{2c} \int_0^{ct-x} \psi(\tau) d\tau, \quad 0 < x < ct]$$

4. Nalezněte řešení úlohy

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & x > 0, t > 0, \\ u(0, t) = 0, \\ u(x, 0) = 1, u_t(x, 0) = 0. \end{cases}$$

Načrtněte graf řešení na několika časových hladinách.

$$[u(x, t) = 1 \text{ pro } x > t, u(x, t) = 0 \text{ pro } 0 < x < t]$$

5. Nalezněte řešení úlohy

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & x > 0, t > 0, \\ u(0, t) = 0, \\ u(x, 0) = xe^{-x}, & u_t(x, 0) = 0. \end{cases}$$

Náčrtněte graf řešení na několika časových hladinách. Povšimněte si odrazu vlny od hranice.

$$\begin{aligned} [u(x, t) &= \frac{1}{2}(x+t)e^{-x-t} + \frac{1}{2}(x-t)e^{-x+t} \quad \text{pro } x > t, \\ u(x, t) &= \frac{1}{2}(t+x)e^{-t-x} - \frac{1}{2}(t-x)e^{-t+x} \quad \text{pro } 0 < x < t] \end{aligned}$$

6. Nalezněte řešení úlohy

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & x > 0, t > 0, \\ u(0, t) = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & u_t(x, 0) = 0, \end{cases}$$

kde

$$\varphi(x) = \begin{cases} \cos^3 x, & x \in (\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}), \\ 0, & x \in (0, \infty) \setminus (\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}). \end{cases}$$

Náčrtněte graf řešení na několika časových hladinách.

7. Nalezněte řešení úlohy

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & x > 0, t > 0, \\ u(0, t) = 1, \\ u(x, 0) = 0. \end{cases}$$

$$[u(x, t) = 0 \text{ pro } x > t, u(x, t) = 1 \text{ pro } 0 < x < t]$$

8. Tepelný tok v kovové tyči s vnitřním teplotním zdrojem je popsán úlohou

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx} + 1, & 0 < x < l, t > 0, \\ u(0, t) = 0, & u(l, t) = 1. \end{cases}$$

Jaká bude teplota tyče v ustáleném stavu, kterého se dosáhne po dostatečně dlouhé době? (Uvědomte si, že v ustáleném stavu závisí u pouze na x .) Je překážkou, že není zadána žádná počáteční podmínka?

$$[u(x) = -\frac{x^2}{2k} + (1 + \frac{1}{2k})x]$$

9. Z tyče uniká teplo přes její boční strany rychlostí úměrnou její teplotě u . Odpovídající úloha má podobu

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx} - au, & 0 < x < l, t > 0, \\ u(0, t) = 0, & u(l, t) = 1. \end{cases}$$

Nakreslete rozložení teploty v ustáleném stavu a rozeberte, jak teplo proudí v tyči a přes její hranici.

10. Bakterie v jednorozměrném médiu (trubice jednotkového průřezu, délky l , uzavřená na obou koncích) se množí podle logistického zákona $ru(l-u/K)$, kde r je růstová konstanta, K je kapacita prostředí a $u = u(x, t)$ je hustota bakterií na jednotku délky. Na počátku je hustota dána funkcí $u = ax(l-x)$. V čase $t > 0$ bakterie rovněž difundují s difuzní konstantou D . Zformulujte počátečně-okrajovou úlohu popisující jejich hustotu. Jaké bude rozložení hustoty, počkáme-li dostatečně dlouho? Intuitivně načrtněte několik profilů znázorňujících vývoj hustoty v čase. Uvažujte případy $al^2 < 4K$ a $al^2 > 4K$ odděleně.
11. Uvažujte tyč délky l , která je izolovaná takovým způsobem, že nedochází k žádné výměně tepla s okolním prostředím. Ukažte, že průměrná teplota

$$\frac{1}{l} \int_0^l u(x, t) dx$$

je konstantní vzhledem k časové proměnné t .

[Návod: Integrujte příslušnou řadu člen po členu.]

12. Řešte úlohu popisující pohyb struny jednotkové délky

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases}$$

pro následující data. Pohyb struny ilustруйте grafickým zobrazením částečného součtu výsledné řady pro různé hodnoty t . Srovnáním grafu pro $t = 0$ a grafu funkce $\varphi(x)$ rozhodněte, zda je počet členů v součtu dostatečný.

(a) $\varphi(x) = 0.05 \sin \pi x$, $\psi(x) = 0$, $c = 1/\pi$.

$$[u(x, t) = 0.05 \sin \pi x \cos t]$$

(b) $\varphi(x) = \sin \pi x \cos \pi x$, $\psi(x) = 0$, $c = 1/\pi$.

(c) $\varphi(x) = \sin \pi x + 3 \sin 2\pi x - \sin 5\pi x$, $\psi(x) = 0$, $c = 1$.

$$[u(x, t) = \sin \pi x \cos \pi t + 3 \sin 2\pi x \cos 2\pi t - \sin 5\pi x \cos 5\pi t]$$

(d) $\varphi(x) = \sin \pi x + 0.5 \sin 3\pi x + 3 \sin 7\pi x$, $\psi(x) = \sin 2\pi x$, $c = 1$.

(e) $\psi(x) = 0$, $c = 4$,

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1/2, \\ 2(1-x), & 1/2 < x \leq 1. \end{cases}$$

$$[u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8(-1)^k}{\pi^2(2k+1)^2} \sin(2k+1)\pi x \cos 4(2k+1)\pi t]$$

(f) $\psi(x) = 2, c = 1/\pi,$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1/3, \\ 1/30(x - 1/3), & 1/3 \leq x \leq 2/3, \\ 1/30(1 - x), & 2/3 < x \leq 1. \end{cases}$$

(g) $\psi(x) = 1, c = 4,$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 4x, & 0 \leq x \leq 1/4, \\ 1, & 1/4 \leq x \leq 3/4, \\ 4(1 - x), & 3/4 < x \leq 1. \end{cases}$$

$$[u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^2 n^2} (\sin(n\pi/4) + \sin(3n\pi/4)) \sin n\pi x \cos 4n\pi t \\ + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 (2k+1)^2} \sin(2k+1)\pi x \sin 4(2k+1)\pi t]$$

(h) $\varphi(x) = x \sin \pi x, \psi(x) = 0, c = 1/\pi.$

(i) $\varphi(x) = x(1 - x), \psi(x) = \sin \pi x, c = 1.$

$$[u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^3 (2k+1)^3} \sin(2k+1)\pi x \cos(2k+1)\pi t + \frac{1}{\pi} \sin \pi x \sin \pi t]$$

(j) $\psi(x) = 0, c = 1,$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 4x, & 0 \leq x \leq 1/4, \\ -4(x - 1/2), & 1/4 \leq x \leq 3/4, \\ 4(x - 1), & 3/4 < x \leq 1. \end{cases}$$

13. Řešte vlnovou rovnici na intervalu $(0, 4\pi)$ s rychlostí $c = 1$, s homogenními Dirichletovými okrajovými podmínkami, nulovou počáteční rychlostí $\psi = 0$ a počáteční výchylkou danou předpisem

$$\varphi(x) = \begin{cases} \cos^3 x, & x \in [\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}], \\ 0, & x \in \langle 0, 4\pi \rangle \setminus \langle \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \rangle. \end{cases}$$

Nakreslete graf řešení na několika časových hladinách.

14. Řešte vlnovou rovnici na intervalu $(0, 4\pi)$ s rychlostí $c = 1$, s homogenními Neumannovými okrajovými podmínkami, nulovou počáteční rychlostí $\psi = 0$ a počáteční výchylkou danou předpisem

$$\varphi(x) = \begin{cases} \cos^3 x, & x \in [\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}], \\ 0, & x \in \langle 0, 4\pi \rangle \setminus \langle \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \rangle. \end{cases}$$

Nakreslete graf řešení na několika časových hladinách.

15. Řešte následující počátečně-okrajovou úlohu pro vlnovou rovnici:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < 3, \ t > 0, \\ u(0, t) = 0, & u(3, t) = 0, \\ u(x, 0) = 1 - \cos \frac{\pi x}{3}, \\ u_t(x, 0) = 0. \end{cases}$$

16. Řešte následující počátečně-okrajovou úlohu pro vlnovou rovnici:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < 1, \ t > 0, \\ u(0, t) = 0, & u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = x \cos \pi x, \\ u_t(x, 0) = 1. \end{cases}$$

17. Struna délky 2π s upevněnými konci je vybuzena úderem kladiva, které jí udělilo počáteční rychlost

$$\psi(x) = \begin{cases} 100, & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}, \\ 0, & x \in \langle 0, 2\pi \rangle \setminus (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}). \end{cases}$$

Nalezněte předpis popisující vibrace struny za předpokladu, že počáteční výchylka byla nulová.

18. Struna s pevným koncem v bodě 0 a volným koncem v bodě 2π má počáteční výchylku danou funkcí

$$\varphi(x) = \begin{cases} -x, & 0 \leq x < \frac{3\pi}{2}, \\ 3x - 6\pi, & \frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

a nulovou počáteční rychlost. Předpokládejte, že se struna pohybuje v prostředí, které klade jejím vibracím odpor. Tento odpor je přímo úměrný rychlosti struny s konstantou úměrnosti 0.03. Zformulujte příslušný model a nalezněte jeho řešení.

19. Řešte úlohu

$$\begin{cases} u_{tt} + u_t = u_{xx}, & 0 < x < \pi, \ t > 0, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = \sin x, \ u_t(x, 0) = 0. \end{cases}$$

$$[u(x, t) = e^{-t/2}(\cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t) \sin x]$$

20. Řešte úlohu

$$\begin{cases} u_{tt} + u_t = u_{xx}, & 0 < x < \pi, \ t > 0, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = x \sin x, \ u_t(x, 0) = 0. \end{cases}$$

$$[u(x, t) = \frac{\pi}{2} e^{-t/2} (\cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t) \sin x \\ - \frac{16}{\pi} e^{-t/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(4k^2-1)^2} (\cos \sqrt{4k^2 - \frac{1}{4}} t + \frac{1}{2\sqrt{4k^2-1/4}} \sin \sqrt{4k^2 - \frac{1}{4}} t) \sin 2kx]$$

21. Řešte úlohu

$$\begin{cases} u_{tt} + 3u_t = u_{xx}, & 0 < x < \pi, \ t > 0, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0, \ u_t(x, 0) = 10. \end{cases}$$

Graficky ilustруйте skutečnost, že řešení klesá k nule pro t jdoucí do nekonečna.

$$[u(x, t) = \frac{16\sqrt{5}}{\pi} e^{-3t/2} \sin x \sinh \frac{\sqrt{5}}{2} t \\ + \frac{40}{\pi} e^{-3t/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)\sqrt{(2k+1)^2-9/4}} \sin(2k+1)x \sin \sqrt{(2k+1)^2-9/4} t]$$

22. Řešte úlohu

$$\begin{cases} u_t = k u_{xx}, & 0 < x < l, \ t > 0, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases}$$

pro následující data.

(a) $l = \pi, k = 1, \varphi(x) = 78$.

$$[u(x, t) = \frac{312}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} e^{-(2k+1)^2 t} \sin(2k+1)x]$$

(b) $l = \pi, k = 1, \varphi(x) = 30 \sin x$.

(c) $l = \pi, k = 1, \varphi(x) = \begin{cases} 33x, & 0 < x \leq \pi/2, \\ 33(\pi - x), & \pi/2 < x < \pi. \end{cases}$

$$[u(x, t) = \frac{132}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} e^{-(2k+1)^2 t} \sin(2k+1)x]$$

(d) $l = \pi, k = 1, \varphi(x) = \begin{cases} 100, & 0 < x \leq \pi/2, \\ 0, & \pi/2 < x < \pi. \end{cases}$

(e) $l = 1, k = 1, \varphi(x) = x$.

$$[u(x, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-n^2 \pi^2 t} \sin n\pi x]$$

(f) $l = 1, k = 1, \varphi(x) = e^{-x}$.

23. Nakreslete rozložení teploty pro různá $t > 0$ pro hodnoty z příkladu 22(a). Odhadněte, jak dlouho bude trvat, než maximální teplota klesne na 50°C .

24. Řešte úlohu

$$\begin{cases} u_t = k u_{xx}, & 0 < x < l, \ t > 0, \\ u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases}$$

pro následující data.

(a) $l = \pi$, $k = 1$, $\varphi(x) = 100$.

[V tomto případě lze odpověď uhodnout na základě fyzikální intuice: $u(x, t) = 100$.]

(b) $l = \pi$, $k = 1$, $\varphi(x) = x$.

(c) $l = \pi$, $k = 1$, $\varphi(x) = \begin{cases} 100x, & 0 < x \leq \pi/2, \\ 100(\pi - x), & \pi/2 < x < \pi. \end{cases}$

$$[u(x, t) = 25\pi - \frac{200}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} e^{-4(2n+1)^2 t} \cos 2(2n+1)x]$$

(d) $l = 1$, $k = 1$, $\varphi(x) = \begin{cases} 100, & 0 < x \leq 1/2, \\ 0, & 1/2 < x < \pi. \end{cases}$

(e) $l = 1$, $k = 1$, $\varphi(x) = \cos \pi x$.

$$[u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \cos \pi x]$$

(f) $l = 1$, $k = 1$, $\varphi(x) = \sin \pi x$.

25. Řešte následující počátečně-okrajovou úlohu pro difuzní rovnici:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < 2, \ t > 0, \\ u_x(0, t) = 0, \quad u_x(2, t) = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \end{cases}$$

kde

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

26. Řešte následující počátečně-okrajovou úlohu pro difuzní rovnici:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + 2u = 0, & 0 < x < 1, \ t > 0, \\ u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = \cos x. \end{cases}$$

27. Řešte nehomogenní počátečně-okrajovou úlohu

$$\begin{cases} u_t = k u_{xx}, & 0 < x < l, \ t > 0, \\ u(0, t) = T_1, \quad u(l, t) = T_2, & t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & 0 < x < l \end{cases}$$

pro následující data:

- (a) $T_1 = 100, T_2 = 0, \varphi(x) = 30 \sin(\pi x), l = 1, k = 1.$

$$[u(x, t) = 100(1 - x) + 30e^{-\pi^2 t} \sin \pi x - \frac{200}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-n^2 \pi^2 t} \sin n\pi x]$$

- (b) $T_1 = 100, T_2 = 100, \varphi(x) = 50x(1 - x), l = 1, k = 1.$

- (c) $T_1 = 100, T_2 = 50, \varphi(x) = \begin{cases} 33x, & 0 < x \leq \pi/2, \\ 33(\pi - x), & \pi/2 < x < \pi, \end{cases}$
 $l = \pi, k = 1.$

$$[u(x, t) = 100 - \frac{50x}{\pi} + \frac{132}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} e^{-(2k+1)^2 t} \sin(2k+1)x - \frac{100}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-(-1)^n}{n} e^{-n^2 t} \sin nx]$$

- (d) $T_1 = 0, T_2 = 100, \varphi(x) = \begin{cases} 100, & 0 < x \leq \pi/2, \\ 0, & \pi/2 < x < \pi, \end{cases}$
 $l = \pi, k = 1.$

28. Řešte následující počátečně-okrajovou úlohu pro difuzní rovnici:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < 1, t > 0, \\ u(0, t) = 2, & u(1, t) = 6, \\ u(x, 0) = \sin 2\pi x + 4x. \end{cases}$$

29. Řešte následující počátečně-okrajovou úlohu pro nehomogenní vlnovou rovnici:

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 2 \sin \pi x, & 0 < x < 1, t > 0, \\ u(0, t) = 1, & u(1, t) = 1, \\ u(x, 0) = 0, \\ u_t(x, 0) = 0. \end{cases}$$

30. Řešte vlnovou rovnici

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = A \sin \omega t, \quad 0 < x < l, t > 0,$$

s homogenními Dirichletovými okrajovými podmínkami a nulovými počátečními podmínkami. Pro jaká ω řešení poroste v čase (dojde k tzv. *rezonanci*)?

31. Uvažujte vedení tepla v tenkém kruhovém prstenci jednotkového poloměru, který je podél bočních stran izolovaný. Rozložení teploty v prstenci lze popsat standardní jednorozměrnou difuzní rovnicí, kde x představuje

délku oblouku podél prstence. Díky tvaru oblasti musíme uvažovat periodické okrajové podmínky

$$u(-\pi, t) = u(\pi, t), \quad u_x(-\pi, t) = u_x(\pi, t).$$

Řešte tuto úlohu s obecnou počáteční podmínkou $u(x, 0) = \varphi(x)$, $x \in (-\pi, \pi)$.

32. Separujte následující parciální diferenciální rovnice na příslušné obyčejné diferenciální rovnice:

(a) $u_t = ku_{xx} + u$,

(b) $u_t = ku_{xx} - mu_x + u$,

(c) $u_t = (k(x)u_x)_x + u$.

33. Rozhodněte, zda jsou následující parciální diferenciální rovnice separovatelné. V kladném případě separaci proveďte a nalezněte příslušné obyčejné diferenciální rovnice. V záporném případě podejte vysvětlení.

(a) $u_{tt} = c^2 u_{xx} + u$,

(b) $u_{tt} = c^2 u_{xx} - mu_x + u$,

(c) $c(x)\rho(x)u_{tt} = (T(x)u_x)_x - u_t + u$.

34. Řešte následující úlohu:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - u_t + u_x, & 0 < x < \frac{3\pi}{2}, \quad t > 0, \\ u(0, t) = 0, & u(3\pi/2, t) = 0, \\ u(x, 0) = \cos x, \\ u_t(x, 0) = x^2 - (3\pi/2)^2. \end{cases}$$

Vysvětlete její fyzikální význam.

35. Řešte počátečně-okrajovou úlohu

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + 2u_t = \sin^3 x, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(0, t) = 0, & u(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = \sin x, \\ u_t(x, 0) = 0. \end{cases}$$

Použijte identitu $\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$.

8

Kapitola

Řešení okrajových úloh pro stacionární rovnice

V této kapitole budeme uvažovat dvoudimenzionální okrajové úlohy pro Laplaceovu (případně Poissonovu) rovnici. Základní matematickou úlohou je nalézt řešení těchto rovnic na dané oblasti (tj. otevřené a souvislé množině) $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ s předepsanými podmínkami na hranici $\partial\Omega$:

$\Delta u = f$	v Ω ,
$u = h_1$	na Γ_1 ,
$\frac{\partial u}{\partial n} = h_2$	na Γ_2 ,
$\frac{\partial u}{\partial n} + au = h_3$	na Γ_3 ,

kde f a h_i , $i = 1, 2, 3$, jsou dané funkce, a je daná konstanta a $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 = \partial\Omega$. V konkrétních případech mohou být některé části hranice prázdné.

Na obdélníku (případně na pásu nebo v polorovině) je možné nalézt řešení Laplaceovy rovnice pomocí separace proměnných, tj. Fourierovou metodou. Obecný postup je stejný jako v případě evolučních rovnic.

1. Řešení parciální diferenciální rovnice hledáme v separovaném tvaru.
2. Vezmeme v úvahu homogenní okrajové podmínky a získáme vlastní čísla úlohy. Právě v tomto kroku je důležitá obdélníková geometrie oblasti.
3. Řešení zapíšeme ve tvaru řady.

4. Zahrneme nehomogenní okrajové podmínky.

Existuje několik dalších speciálních oblastí, jejichž geometrie umožňuje použít Fourierovu metodu. Jsou to oblasti, které je možné jistou transformací převést na obdélník, jako např. kruh (nebo jeho vhodné části) při transformaci do polárních souřadnic.

8.1 Laplaceova rovnice na obdélníku

Uvažujme Laplaceovu rovnici $u_{xx} + u_{yy} = 0$ na obdélníku $R = \{0 < x < a, 0 < y < b\}$ s okrajovými podmínkami znázorněnými na obrázku 8.1.

$$\begin{array}{c}
 u = g \\
 \\
 u = 0 \quad \boxed{(0, a) \times (0, b)} \quad u_x = 0 \\
 \\
 u_y + u = 0
 \end{array}$$

Obrázek 8.1: Obdélník R a okrajové podmínky z úlohy (8.1).

Řešíme tedy úlohu

$$(8.1) \quad \boxed{
 \begin{array}{l}
 u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{v } R, \\
 u(0, y) = u_x(a, y) = 0, \\
 u_y(x, 0) + u(x, 0) = 0, \\
 u(x, b) = g(x).
 \end{array}
 }$$

V prvním kroku hledáme řešení v separovaném tvaru: $u(x, y) = X(x)Y(y)$, $X \neq 0$, $Y \neq 0$. Po dosazení do rovnice a po vydělení členem XY dostáváme

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0.$$

Musí tedy existovat konstanta λ taková, že $X'' + \lambda X = 0$ pro $0 < x < a$ a $Y'' - \lambda Y = 0$ pro $0 < y < b$. Funkce X navíc musí vyhovovat homogenním okrajovým podmínkám $X(0) = X'(a) = 0$. Jednoduchou diskusí zjistíme, že nenulové řešení $X = X(x)$ existuje pouze pro

$$(8.2) \quad \lambda_n = \beta_n^2 = \left((2n-1) \frac{\pi}{2a} \right)^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

a odpovídající řešení mají tvar

$$(8.3) \quad X_n(x) = C_n \sin \beta_n x.$$

Nyní se vrátíme k proměnné y a řešíme úlohu

$$Y'' - \beta_n^2 Y = 0, \quad Y'(0) + Y(0) = 0$$

(*nehomogenní* okrajovou podmínku pro $y = b$ vezmeme v úvahu až na závěr). Protože všechna $\lambda_n = \beta_n^2$ jsou kladná, dostáváme Y ve tvaru

$$Y_n(y) = A_n \cosh \beta_n y + B_n \sinh \beta_n y.$$

Dále musí platit $0 = Y'_n(0) + Y_n(0) = B_n \beta_n + A_n$. Bez ztráty jakékoli informace můžeme položit $B_n = -1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a tedy $A_n = \beta_n$. Odtud dostáváme

$$Y_n(y) = \beta_n \cosh \beta_n y - \sinh \beta_n y.$$

Řada

$$(8.4) \quad u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \beta_n x (\beta_n \cosh \beta_n y - \sinh \beta_n y)$$

je pak harmonickou funkcí na obdélníku R , která splňuje homogenní okrajové podmínky $u(0, y) = 0$, $u_x(a, y) = 0$ pro $y \in (0, b)$ a $u_y(x, 0) + u(x, 0) = 0$ pro $x \in (0, a)$. Zbývá okrajová podmínka $u(x, b) = g(x)$. K jejímu splnění je třeba zaručit, že

$$(8.5) \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n (\beta_n \cosh \beta_n b - \sinh \beta_n b) \sin \beta_n x$$

pro všechna $x \in (0, a)$. Zde předpokládáme, že $(\beta_n \cosh \beta_n b - \sinh \beta_n b) \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Výraz (8.5) pak není nic jiného než Fourierova řada funkce g vzhledem k systému vlastních funkcí $\sin \beta_n x$. Odtud tedy získáme předpis pro zbylé neznámé koeficienty C_n :

$$(8.6) \quad C_n = \frac{2}{a} (\beta_n \cosh \beta_n b - \sinh \beta_n b)^{-1} \int_0^a g(x) \sin \beta_n x \, dx.$$

Pokud $(\beta_n \cosh \beta_n b - \sinh \beta_n b) = 0$ pro některé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, pak obecně nelze okrajovou podmínku $g(x)$ rozvinout do řady (8.5). V takovém případě může mít úloha (8.1) nekonečně mnoho řešení nebo žádné řešení (podle toho, jaký je vztah funkce $g(x)$ a ostatních dat úlohy). To značí, že úloha (8.1) je špatně podmíněná.

Poznámka 8.1 (Nehomogenní okrajové podmínky). Uvažujme opět Laplaceovu rovnici na obdélníku, ale tentokrát se všemi okrajovými podmínkami *nehomogenními*. (Nezáleží na tom, jaký typ okrajových podmínek je na jednotlivých stranách zadán.) V předchozím příkladě jsme viděli, jak výhodná je situace, kdy je pouze jediná okrajová podmínka nehomogenní a zbývající tři podmínky jsou homogenní. Využijeme-li linearitu úlohy, můžeme rozložit nehomogenní úlohu na čtyři částečně homogenní problémy, které již umíme snadno vyřešit. Tento rozklad je schématicky znázorněn na obrázku 8.2.

$$\begin{array}{ccccc}
 & g_4 & & 0 & & 0 \\
 g_1 & \boxed{\begin{array}{c} \Delta u = 0 \\ u = u_1 + u_2 \\ + u_3 + u_4 \end{array}} & g_2 & = & g_1 & \boxed{\begin{array}{c} \Delta u_1 = 0 \end{array}} & 0 & + & 0 & \boxed{\begin{array}{c} \Delta u_2 = 0 \end{array}} & g_2 \\
 & g_3 & & 0 & & 0 & & & 0 & & 0 \\
 & & & 0 & & & & & g_4 & & \\
 & & & + & 0 & \boxed{\begin{array}{c} \Delta u_3 = 0 \end{array}} & 0 & + & 0 & \boxed{\begin{array}{c} \Delta u_4 = 0 \end{array}} & 0 \\
 & & & & & g_3 & & & 0 & &
 \end{array}$$

Obrázek 8.2: Rozklad nehomogenní okrajové úlohy pro Laplaceovu rovnici na obdélníku.

8.2 Laplaceova rovnice na kruhu

Mnohem zajímavějším případem je *Dirichletova úloha pro Laplaceovu rovnici na kruhu*. Rotační invariantnost Laplaceova operátoru Δ dává tušit, že kruh je přirozeným tvarem pro harmonické funkce v rovině. Uvažujme tedy úlohu

$$(8.7) \quad \boxed{\begin{array}{ll} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{pro } x^2 + y^2 < a^2, \\ u = h(\theta) & \text{pro } x^2 + y^2 = a^2. \end{array}}$$

Rovnici řešíme na kruhu D se středem v počátku a s poloměrem a . Okrajová podmínka $h(\theta)$ je zadána na hraniční kružnici ∂D . Poznamenejme, že θ je polární souřadnicí značící „středový“ úhel, který svírá průvodič bodu (x, y) s kladnou poloosou x .

Opět použijeme metodu separace proměnných, ale tentokrát v polárních souřadnicích: $u = R(r)\Theta(\theta)$. Použijeme-li transformační vztah $\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$, přepíšeme rovnici na tvar

$$0 = u_{xx} + u_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = R''\Theta + \frac{1}{r}R'\Theta + \frac{1}{r^2}R\Theta''.$$

Po vydělení členem $R\Theta$ (za předpokladu, že $R\Theta \neq 0$) a vynásobením r^2 získáme dvě rovnice

$$(8.8) \quad \Theta'' + \lambda\Theta = 0,$$

$$(8.9) \quad r^2R'' + rR' - \lambda R = 0,$$

kde λ je zatím neznámá konstanta. Obě tyto obyčejné diferenciální rovnice jsou snadno řešitelné, otázkou zůstává, jaké k nim připojíme okrajové podmínky.

Pro $\Theta(\theta)$ je přirozené požadovat periodické okrajové podmínky:

$$\Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta) \quad \text{pro } \theta \in \mathbb{R}$$

(neboli $\Theta(0) = \Theta(2\pi)$, $\Theta'(0) = \Theta'(2\pi)$). Odtud dostáváme

$$(8.10) \quad \lambda_n = n^2 \quad \text{a} \quad \Theta_n(\theta) = A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Rovnice pro hledanou funkci R je rovnice Eulerova typu a její řešení musí mít tvar $R(r) = r^\alpha$. Protože $\lambda = n^2$, má odpovídající charakteristická rovnice podobu

$$\alpha(\alpha - 1)r^\alpha + \alpha r^\alpha - n^2 r^\alpha = 0,$$

a tedy $\alpha = \pm n$. Pro $n \in \mathbb{N}$ dostáváme $R_n(r) = \tilde{A}_n r^n + \tilde{B}_n r^{-n}$ a řešení u_n můžeme zapsat ve tvaru

$$(8.11) \quad u_n = \left(\tilde{A}_n r^n + \frac{\tilde{B}_n}{r^n} \right) (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta).$$

V případě $n = 0$ jsou dvojicí lineárně nezávislých řešení rovnice (8.9) funkce $R = 1$ a $R = \ln r$. Příslušné u_0 má tedy tvar

$$(8.12) \quad u_0 = \tilde{A}_0 + \tilde{B}_0 \ln r.$$

Z fyzikálních důvodů musí být funkce u_n i u_0 omezené na celém kruhu D (tj. i v počátku $r = 0$) a proto ve všech případech položíme $\tilde{B}_n = 0$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Zbylá řešení sečteme a výslednou funkci u zapíšeme ve tvaru nekonečné řady

$$(8.13) \quad u = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta).$$

Nyní přichází na řadu nehomogenní okrajová podmínka na hranici $r = a$. Její splnění zaručíme, pokud bude funkce h rozvinutelná ve Fourierovu řadu

$$h(\theta) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta).$$

Odtud již snadno odvodíme

$$(8.14) \quad A_n = \frac{1}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} h(\phi) \cos n\phi \, d\phi, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$(8.15) \quad B_n = \frac{1}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} h(\phi) \sin n\phi \, d\phi, \quad n \in \mathbb{N}.$$

8.3 Poissonova formule

Překvapivou skutečností u výše uvedeného příkladu je, že součet řady (8.13) lze explicitně vyjádřit ve tvaru integrální formule. Dosadíme-li (8.14) a (8.15) do vyjádření (8.13), dostaneme

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\phi) \, d\phi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} h(\phi) [\cos n\phi \cos n\theta + \sin n\phi \sin n\theta] \, d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\phi) \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a} \right)^n \cos n(\theta - \phi) \right] \, d\phi. \end{aligned}$$

Vyjádříme-li funkci kosinus pomocí komplexní exponenciely (tj. $\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$), můžeme výraz v závorce přepsat následujícím způsobem:

$$1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a} \right)^n \cos n(\theta - \phi) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a} \right)^n e^{in(\theta - \phi)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a} \right)^n e^{-in(\theta - \phi)}.$$

Řady v tomto vyjádření jsou geometrické řady s kvocientem $q = \frac{r}{a}e^{\pm i(\theta - \phi)}$, který pro $r < a$ splňuje podmínku $|q| < 1$. Dostáváme tedy

$$\begin{aligned} 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a} \right)^n \cos n(\theta - \phi) &= 1 + \frac{re^{i(\theta - \phi)}}{a - re^{i(\theta - \phi)}} + \frac{re^{-i(\theta - \phi)}}{a - re^{-i(\theta - \phi)}} \\ &= \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar \cos(\theta - \phi) + r^2}. \end{aligned}$$

Odtud již dosazením zpět do integrálu získáme řešení původní úlohy (8.7) ve tvaru

$$(8.16) \quad u(r, \theta) = \frac{a^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{h(\phi)}{a^2 - 2ar \cos(\theta - \phi) + r^2} d\phi,$$

které nazýváme *Poissonovou formulí* v polárních souřadnicích. Z vyjádření (8.16) vyplývá, že harmonickou funkci uvnitř kruhu lze popsat pouze pomocí jejích hraničních hodnot.

Nyní přejdeme zpět do kartézských souřadnic. Označíme $\mathbf{x} = (x, y)$ bod uvnitř kruhu o polárních souřadnicích (r, θ) a $\mathbf{x}'$ bod na hranici o polárních souřadnicích (a, ϕ) . Pak $r = |\mathbf{x}|$, $a = |\mathbf{x}'|$ a pro $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ platí podle kosinové věty

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos(\theta - \phi).$$

(Načrtněte si obrázek!) Element délky oblouku je v tomto případě $ds = a d\phi$. Poissonovu formuli pak můžeme přepsat do tvaru

$$(8.17) \quad u(\mathbf{x}) = \frac{a^2 - |\mathbf{x}|^2}{2\pi a} \int_{|\mathbf{x}'|=a} \frac{u(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} ds$$

pro $\mathbf{x} \in D$. Zde $u(\mathbf{x}') = h(\phi)$ a integrujeme podle oblouku přes celý obvod kruhu.

Výše provedené výpočty můžeme shrnout v následujícím tvrzení.

Věta 8.2. *Nechť $h(\phi)$ je spojitá funkce na kružnici ∂D . Pak Poissonova formule (8.16) nebo (8.17) popisuje jedinou harmonickou funkci v kruhu D s vlastností*

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'} u(\mathbf{x}) = h(\phi),$$

kde ϕ je středový úhel příslušný bodu $\mathbf{x}' \in \partial D$.

Některé důležité důsledky Poissonovy formule jsou shrnuty v odstavci 10.7.

8.4 Cvičení

V následujících cvičeních značí r a θ polární souřadnice.

1. Řešte rovnici $u_{xx} + u_{yy} = 1$ v kruhu $\{r < a\}$ s okrajovou podmínkou $u(x, y) = 0$ na hranici $r = a$.

$$[u(r) = \frac{1}{4}(r^2 - a^2)]$$

2. Řešte rovnici $u_{xx} + u_{yy} = 1$ v mezikruží $\{a < r < b\}$ s okrajovou podmínkou $u(x, y) = 0$ na obou hraničních kružnicích $r = a$, $r = b$.

$$[u(r) = \frac{r^2}{4} + \frac{b^2 - a^2}{4 \ln \frac{a}{b}} \ln r - \frac{b^2 \ln a - a^2 \ln b}{4 \ln \frac{a}{b}}]$$

3. Řešte rovnici $u_{xx} + u_{yy} = 0$ na obdélníku $\{0 < x < a, 0 < y < b\}$ s okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} u_x(0, y) &= -a, & u_x(a, y) &= 0, \\ u_y(x, 0) &= b, & u_y(x, b) &= 0. \end{aligned}$$

Řešení hledejte ve tvaru polynomu druhého stupně v proměnných x a y .

$$[u(x, y) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 - ax + by + c, \text{ kde } c \text{ je libovolná konstanta}]$$

4. Nalezněte harmonickou funkci $u(x, y)$ na čtverci $D = \{0 < x < \pi, 0 < y < \pi\}$ s okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} u_y(x, 0) &= u_y(x, \pi) = 0, \\ u(0, y) &= 0, \quad u(\pi, y) = \cos^2 y = \frac{1}{2}(1 + \cos 2y). \end{aligned}$$

5. Nalezněte harmonickou funkci $u(x, y)$ na čtverci $D = \{0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ s okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= x, & u(x, 1) &= 0, \\ u_x(0, y) &= 0, & u_x(1, y) &= y^2. \end{aligned}$$

6. Nechť u je harmonická funkce na kruhu $D = \{r < 2\}$ a $u = 3 \sin 2\theta + 1$ pro $r = 2$. Aniž byste hledali konkrétní tvar řešení, určete hodnotu u v počátku.

$$[u(0, 0) = 1]$$

7. Řešte rovnici $u_{xx} + u_{yy} = 0$ v kruhu $\{r < a\}$ s okrajovou podmínkou $u = 1 + 3 \sin \theta$ pro $r = a$.

$$[u(r, \theta) = 1 + 3\left(\frac{r}{a}\right) \sin \theta]$$

8. Řešte rovnici $u_{xx} + u_{yy} = 0$ v kruhu $\{r < a\}$ s okrajovou podmínkou $u = \sin^3 \theta$ pro $r = a$. Využijte rovnost $\sin^3 \theta = 3 \sin \theta - 4 \sin 3\theta$.

$$[u(r, \theta) = 3\left(\frac{r}{a}\right) \sin \theta - 4\left(\frac{r}{a}\right)^3 \sin 3\theta]$$

9. Řešte rovnici $u_{xx} + u_{yy} = 0$ v oblasti $\{r > a\}$ (tj. *vně kruhu*) s okrajovou podmínkou $u = 1 + 3 \sin \theta$ na hranici $r = a$ a s podmínkou, že řešení u je omezené pro $r \rightarrow \infty$.

$$[u(r, \theta) = 1 + 3 \frac{a}{r} \sin \theta]$$

10. Řešte rovnici $u_{xx} + u_{yy} = 0$ v kruhu $\{r < a\}$ s okrajovou podmínkou

$$\frac{\partial u}{\partial r} - hu = f(\theta),$$

kde $f(\theta)$ je libovolná funkce. Řešení zapište pomocí Fourierových koeficientů funkce f .

11. Odvoďte Poissonovu formuli pro doplněk kruhu v $\mathbb{R}^2$.
12. Nalezněte ustálené rozložení teploty uvnitř mezikruží $\{1 < r < 2\}$, jehož vnější okraj ($r = 2$) je tepelně izolovaný a na jehož vnitřním okraji ($r = 1$) udržujeme teplotu popsanou funkcí $\sin^2 \theta$.

$$[u(r, \theta) = \frac{1}{2}(1 - \frac{\ln r}{\ln 2}) + (\frac{r^2}{30} - \frac{8}{15r^2}) \cos 2\theta]$$

13. Nalezněte harmonickou funkci u v půlkruhu $\{r < 1, 0 < \theta < \pi\}$, splňující podmínky

$$u(r, 0) = u(r, \pi) = 0, \quad u(1, \theta) = \pi \sin \theta - \sin 2\theta.$$

14. Řešte rovnici $u_{xx} + u_{yy} = 0$ v kruhové výseči $\{r < a, 0 < \theta < \beta\}$ s okrajovými podmínkami

$$u(a, \theta) = \theta, \quad u(r, 0) = 0, \quad u(r, \beta) = \beta.$$

Hledejte řešení nezávislé na r .

15. Řešte rovnici $u_{xx} + u_{yy} = 0$ ve čtvrtině kruhu $\{x^2 + y^2 < a^2, x > 0, y > 0\}$ s okrajovými podmínkami

$$u(0, y) = u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial r} = 1 \text{ pro } r = a.$$

Řešení hledejte ve formě nekonečné řady a první dva nenulové členy zapište explicitně.

$$[\text{první dva nenulové členy: } \frac{r^2}{2a} \sin 2\theta + \frac{r^4}{4a^3} \sin 4\theta]$$

16. Řešte rovnici $u_{xx} + u_{yy} = 0$ v oblasti $\{\alpha < \theta < \beta, a < r < b\}$ s okrajovými podmínkami $u = 0$ na obou stranách $\theta = \alpha$ a $\theta = \beta$, $u = g(\theta)$ na oblouku $r = a$ a $u = h(\theta)$ na oblouku $r = b$.

17. Řešte okrajovou úlohu pro Laplaceovu rovnici na čtverci $K = \{(x, y); 0 < x < \pi, 0 < y < \pi\}$ pro následující data:

(a) $u_y(x, 0) = u_y(x, \pi) = u_x(0, y) = 0, \quad u_x(\pi, y) = \cos 3y;$

$$[u(x, y) = \frac{\cosh 3x}{3 \sinh 3\pi} \cos 3y]$$

(b) $u(0, y) = u_y(x, 0) + u(x, 0) = u_x(\pi, y) = 0, \quad u_x(x, \pi) = \sin \frac{3x}{2}.$

$$[u(x, y) = \frac{3 \cosh(3y/2) - 2 \sinh(3y/2)}{3 \cosh(3\pi/2) - 2 \sinh(3\pi/2)} \sin \frac{3x}{2}]$$

18. Řešte Dirichletovu úlohu

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{v } x^2 + y^2 < 1, \\ u(x, y) = x^4 - y^3 & \text{na } x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

$$[u(r, \theta) = \frac{3}{8} - \frac{3}{4}r \sin \theta + \frac{r^2}{2} \cos 2\theta + \frac{r^3}{4} \sin 3\theta + \frac{r^4}{8} \cos 4\theta]$$

19. Řešte Poissonovu rovnici $u_{xx} + u_{yy} = f(x, y)$ na jednotkovém čtverci $\{0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ pro následující data.

(a) $f(x, y) = x, u(x, 0) = u(x, 1) = u(0, y) = u(1, y) = 0.$

$$[u(x, y) = \frac{8}{\pi^4} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m^2 + (2k+1)^2)m(2k+1)} \sin m\pi x \sin(2k+1)\pi y]$$

(b) $f(x, y) = \sin \pi x, u(x, 0) = u(0, y) = u(1, y) = 0, u(x, 1) = x.$

$$[u(x, y) = \frac{-4 \sin \pi x}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\pi y}{(1+(2k+1)^2)(2k+1)} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin n\pi x \sinh n\pi y}{n \sinh n\pi}]$$

(c) $f(x, y) = xy, u(x, 0) = u(0, y) = u(1, y) = 0, u(x, 1) = x.$

20. Řešte rovnici $u_{xx} + u_{yy} = 3u - 1$ uvnitř jednotkového čtverce $\{0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ s podmínkou $u = 0$ na hranici čtverce.

$$[u(x, y) = \frac{16}{\pi^2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\pi x \sin(2l+1)\pi y}{(2l+1)(2k+1)(3+\pi^2((2l+1)^2 + (2k+1)^2))}]$$

9

Kapitola

Metody integrálních transformací

V této kapitole si představíme další třídu metod vhodných pro řešení počátečních nebo počátečně-okrajových úloh pro evoluční rovnice. Jsou to tzv. *metody integrálních transformací*. Mezi dvě základní patří metody Laplaceovy a Fourierovy transformace.

9.1 Laplaceova transformace

S Laplaceovou transformací se již čtenář pravděpodobně seznámil při řešení lineárních obyčejných diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty, které tato transformace převádí na algebraické rovnice. Tato myšlenka je snadno rozšiřitelná i na parciální diferenciální rovnice, u kterých dochází po transformaci ke snížení počtu nezávisle proměnných. Parciální diferenciální rovnice ve dvou proměnných se tedy transformují na obyčejné diferenciální rovnice.

Nechť $u = u(t)$ je po částech spojitá funkce na intervalu $\langle 0, \infty \rangle$, která „neroste příliš rychle“. Předpokládejme např., že u je *exponenciálního řádu*, což znamená, že $|u(t)| \leq ce^{at}$ pro t dostatečně velké, kde $a, c > 0$ jsou vhodně volené konstanty. Laplaceova transformace funkce u je pak definována předpisem

$$(9.1) \quad (\mathcal{L}u)(s) \equiv U(s) = \int_0^{\infty} u(t)e^{-st} dt.$$

V tomto vzorci jsou U a s tzv. *transformované proměnné*, U závisle a s nezávisle proměnná, a U je definována pro $s > a$, kde $a > 0$ závisí na $u(t)$. Funkci U

říkáme *Laplaceův obraz* funkce u , kterou pak nazýváme *originál*. Laplaceova transformace je lineární zobrazení, tj.

$$\mathcal{L}(c_1 u + c_2 v) = c_1 \mathcal{L}u + c_2 \mathcal{L}v,$$

kde c_1, c_2 jsou libovolné konstanty. Pokud známe Laplaceův obraz $U(s)$, pak originál $u(t)$ získáme *inverzní Laplaceovou transformací* obrazu $U(s)$: $\mathcal{L}^{-1}U = u$. Dvojice Laplaceových obrazů a jejich originálů lze nalézt v tabulkách, případně lze k převodu využít nejrozumnější programové balíky.

Důležitou vlastností Laplaceovy transformace, stejně jako jiných integrálních transformací, je skutečnost, že převádí operátory derivování v originálech na operátory násobení v obrazech. Platí:

$$(9.2) \quad (\mathcal{L}u')(s) = s U(s) - u(0),$$

$$(9.3) \quad (\mathcal{L}u^{(n)})(s) = s^n U(s) - s^{n-1}u(0) - s^{n-2}u'(0) - \dots - u^{(n-1)}(0),$$

pokud jsou příslušné derivace transformovatelné (tj. po částech spojitě a nejvýše exponenciálního řádu). Přesněji bychom měli psát $\lim_{t \rightarrow 0+} u(t)$, $\lim_{t \rightarrow 0+} u'(t)$, ... namísto $u(0)$, $u'(0)$, ... Bez ztráty na obecnosti však můžeme předpokládat, že funkce u a její derivace jsou spojitě zprava v bodě $t = 0$. Vztahy (9.2), (9.3) lze snadno odvodit přímo z definice pomocí metody integrace per partes (provedte!). Aplikací Laplaceovy transformace na obyčejnou lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty získáme lineární algebraickou rovnici pro neznámou funkci $U(s)$. Po jejím vyřešení nalezneme původní funkci $u(t)$ inverzní (zpětnou) transformací.

Tutěž myšlenku můžeme využít i k řešení parciálních diferenciálních rovnic pro funkce dvou proměnných, např. $u = u(x, t)$. Transformaci budeme provádět vzhledem k časové proměnné $t \geq 0$, na prostorovou proměnnou x se budeme dívat jako na parametr, který tato transformace neovlivní. Důvodem je skutečnost, že definice Laplaceovy transformace vyžaduje, aby nezávisle proměnná, vzhledem ke které se transformace provádí, byla z intervalu $\langle 0, \infty \rangle$. Konkrétně definujeme Laplaceovu transformaci funkce $u(x, t)$ předpisem

$$(9.4) \quad (\mathcal{L}u)(x, s) \equiv U(x, s) = \int_0^{\infty} u(x, t) e^{-st} dt.$$

Časové derivace se pak transformují stejně jako v případě funkcí jedné proměnné, tedy např.

$$(\mathcal{L}u_t)(x, s) = sU(x, s) - u(x, 0).$$

Prostorové derivace naopak zůstávají neměnné, tedy

$$(\mathcal{L}u_x)(x, s) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) e^{-st} dt = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty u(x, t) e^{-st} dt = U_x(x, s).$$

Použitím Laplaceovy transformace na parciální diferenciální rovnici v proměnných x a t tedy získáme obyčejnou diferenciální rovnici v proměnné x a s parametrem s .

Příklad 9.1 (Dífuze s konstantní okrajovou podmínkou). Užitím Laplaceovy transformace řešíme následující počátečně-okrajovou úlohu pro difuzní rovnici. Nechť $u = u(x, t)$ značí koncentraci chemické nečistoty rozpuštěné v tekutině na polonekonečné oblasti $x > 0$. Předpokládejme, že v čase $t = 0$ je koncentrace nulová. Na hranici $x = 0$ udržujeme v čase $t > 0$ konstantní jednotkovou koncentraci nečistoty. Situaci v případě jednotkové difuzní konstanty vystihuje matematický model

$$(9.5) \quad \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x > 0, t > 0, \\ u(x, 0) = 0, \\ u(0, t) = 1, & u(x, t) \text{ omezené.} \end{cases}$$

Požadavek na omezenost souvisí s fyzikálními vlastnostmi modelu a jeho řešení.

Použijeme-li Laplaceovu transformaci na obě strany rovnice z (9.5), dostáváme pro obraz U rovnici

$$sU(x, s) - U_{xx}(x, s) = 0,$$

což je obyčejná diferenciální rovnice druhého řádu s nezávisle proměnnou x a s reálným kladným parametrem s . Její obecné řešení má tvar

$$U(x, s) = a(s)e^{-\sqrt{s}x} + b(s)e^{\sqrt{s}x}.$$

Jelikož požadujeme omezenost řešení u v obou proměnných x a t , musí být i obraz U omezený v proměnné x . Tedy $b(s) = 0$ a dostáváme

$$U(x, s) = a(s)e^{-\sqrt{s}x}.$$

Nyní aplikujeme Laplaceovu transformaci na okrajovou podmínku a získáme $U(0, s) = \mathcal{L}(1) = 1/s$. Odtud plyne $a(s) = 1/s$ a transformované řešení má podobu

$$U(x, s) = \frac{1}{s} e^{-\sqrt{s}x}.$$

Z tabulek Laplaceovy transformace nebo využitím některého z programových balíků snadno zjistíme, že

$$u(x, t) = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4t}}\right),$$

kde erfc je funkce definovaná vztahem

$$\operatorname{erfc}(y) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-r^2} dr = 1 - \operatorname{erf}(y).$$

□

V předchozím příkladě jsme byli schopni nalézt k Laplaceově obrazu $U(x, s)$ originál $u(x, t)$ pomocí tabulek nebo programových balíků. Existuje obecná formule pro inverzní Laplaceovu transformaci, která je založena na teorii funkcí komplexní proměnné (viz např. [23]). Má však teoretický charakter a při řešení praktických úloh se téměř nevyužívá.

V některých případech můžeme namísto výše zmíněné inverzní formule využít další užitečný nástroj, kterým je tzv. *věta o konvoluci*.

Věta 9.2. *Nechť u a v jsou po částech spojitě funkce na intervalu $(0, \infty)$, exponenciálního řádu a $U = \mathcal{L}u$, $V = \mathcal{L}v$ jsou jejich Laplaceovy obrazy. Označme*

$$(u * v)(t) = \int_0^t u(t - \tau)v(\tau) d\tau$$

konvoluci funkcí u a v (která je též exponenciálního řádu). Pak platí

$$\mathcal{L}(u * v)(s) = (\mathcal{L}u)(s) (\mathcal{L}v)(s) = U(s)V(s).$$

Poznámka 9.3. Z věty 9.2 konkrétně plyne, že

$$u * v = \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}u \mathcal{L}v).$$

Všimněte si, že Laplaceova transformace je sice aditivní, ale není multiplikační!

Příklad 9.4 (Difuze s nekonstantní okrajovou podmínkou). Uvažujme situaci z předchozího příkladu, kde pouze změníme okrajovou podmínku na časově závislou funkci:

$$(9.6) \quad \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x > 0, t > 0, \\ u(x, 0) = 0, \\ u(0, t) = f(t), & u(x, t) \text{ omezené.} \end{cases}$$

Po aplikaci Laplaceovy transformace na rovnici dostaneme opět obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu

$$sU(x, s) - U_{xx}(x, s) = 0,$$

jejíž řešení má tvar

$$U(x, s) = a(s)e^{-\sqrt{s}x}.$$

Zde jsme již zohlednili požadavek na omezenost řešení. Transformací okrajové podmínky (předpokládáme, že Laplaceova transformace funkce f existuje) získáme vztah $U(0, s) = F(s)$, kde $F = \mathcal{L}f$. Odtud tedy $a(s) = F(s)$ a řešení v obrazech má podobu

$$U(x, s) = F(s)e^{-\sqrt{s}x}.$$

Podle věty o konvoluci a poznámky 9.3 je

$$u = \mathcal{L}^{-1}U = \mathcal{L}^{-1}F * \mathcal{L}^{-1}(e^{-\sqrt{s}x}) = f * \mathcal{L}^{-1}(e^{-\sqrt{s}x}).$$

Využijeme-li znalost následujícího převodního vztahu

$$\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-\sqrt{s}x}\right) = \frac{x}{\sqrt{4\pi t^3}}e^{-x^2/4t},$$

dostaneme řešení původního problému ve tvaru

$$u(x, t) = \int_0^t \frac{x}{\sqrt{4\pi(t-\tau)^3}} e^{-x^2/4(t-\tau)} f(\tau) d\tau.$$

□

Příklad 9.5 (Vynucené kmitání polonekonečné struny). Uvažujme „polonekonečnou strunu“, která je na jednom konci upevněna v počátku a v čase $t = 0$ leží v klidu. Strunu uvedeme do pohybu působením síly $f(t)$. Její chování pak modeluje úloha

$$(9.7) \quad \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(t), & x > 0, t > 0, \\ u(0, t) = 0, \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, & u(x, t) \text{ omezené.} \end{cases}$$

Obě strany rovnice transformujeme vzhledem k časové proměnné t a využijeme-li počáteční podmínky, dostaneme

$$-c^2 U_{xx}(x, s) + s^2 U(x, s) = F(s).$$

To je obyčejná diferenciální rovnice druhého řádu v proměnné x s konstantními koeficienty a nenulovou pravou stranou. Její řešení je součtem řešení U_H homogenní rovnice: $U_H(x, s) = A(s)e^{-sx/c} + B(s)e^{sx/c}$ a partikulárního řešení U_P nehomogenní rovnice: $U_P(x, s) = F(s)/s^2$, tedy

$$U(x, s) = A(s)e^{-\frac{s}{c}x} + B(s)e^{\frac{s}{c}x} + \frac{F(s)}{s^2}.$$

Jelikož požadujeme omezenost původního řešení $u(x, t)$, musí být transformované řešení $U(x, s)$ rovněž omezené pro $s > 0$, $x > 0$ a tedy $B(s) = 0$. Z transformované okrajové podmínky vyplývá $A(s) = -F(s)/s^2$ a tedy

$$U(x, s) = F(s) \frac{1 - e^{-\frac{s}{c}x}}{s^2}.$$

Při zpětné Laplaceově transformaci využijeme větu o konvoluci a vztahů

$$\mathcal{L}^{-1}(1/s^2) = t, \quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-sx/c}}{s^2}\right) = \left(t - \frac{x}{c}\right)\mathcal{H}\left(t - \frac{x}{c}\right),$$

kde $\mathcal{H}$ je Heavisideova skoková funkce, tj. $\mathcal{H}(t) = 0$ pro $t \leq 0$, $\mathcal{H}(t) = 1$ pro $t > 0$. Řešení původní úlohy má pak tvar

$$u(x, t) = f(t) * \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1 - e^{-\frac{s}{c}x}}{s^2}\right) = f(t) * \left[t - \left(t - \frac{x}{c}\right)\mathcal{H}\left(t - \frac{x}{c}\right)\right]$$

neboli

$$u(x, t) = \int_0^t f(t - \tau) \left[\tau - \left(\tau - \frac{x}{c}\right)\mathcal{H}\left(\tau - \frac{x}{c}\right)\right] d\tau.$$

□

Následující příklad je konkrétním zajímavým případem příkladu 9.5.

Příklad 9.6 (Kmitání struny vlivem gravitačního zrychlení). Pokud bude jedinou působící vnější silou v příkladu 9.5 gravitační zrychlení g , řešíme vlnovou rovnici ve tvaru

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = -g.$$

Za stejných počátečních a okrajových podmínek jako v předchozím příkladu (tj. $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$ pro $x > 0$ a $u(0, t) = 0$ pro $t > 0$) bude mít řešení tvar

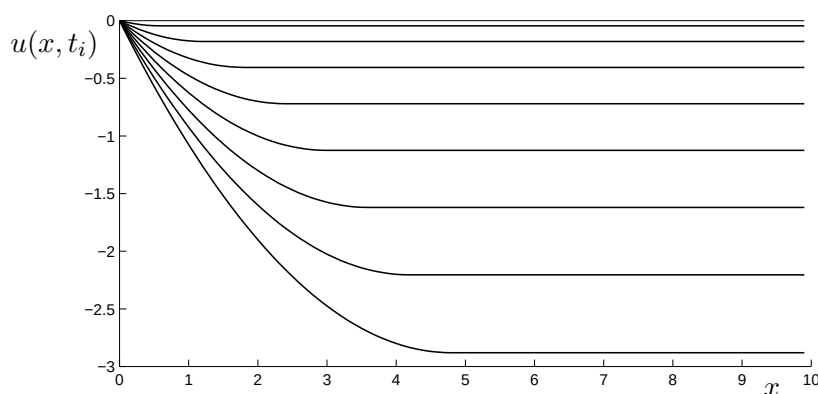
$$\begin{aligned} u(x, t) &= -g \int_0^t \left[\tau - \left(\tau - \frac{x}{c}\right)\mathcal{H}\left(\tau - \frac{x}{c}\right)\right] d\tau \\ &= -g \left[\frac{1}{2}t^2 - \int_0^t \left(\tau - \frac{x}{c}\right)\mathcal{H}\left(\tau - \frac{x}{c}\right) d\tau \right]. \end{aligned}$$

Jednoduchou geometrickou úvahou vyčíslíme integrál na pravé straně a získáme výsledný tvar řešení:

$$u(x, t) = \begin{cases} -\frac{g}{2}(t^2 - (t - \frac{x}{c})^2) & \text{pro } 0 < x < ct, \\ -\frac{gt^2}{2} & \text{pro } x > ct. \end{cases}$$

Na obrázku 9.1 je znázorněno řešení na různých časových hladinách. Tento příklad modeluje polonekonečnou strunu s jedním pevně uchyceným koncem padající z nulové (horizontální) polohy vlivem gravitace. Když si uvědomíme, že poloha volně padajícího hmotného bodu je popsána funkcí $-gt^2/2$, vidíme, že pro x větší než ct struna padá volně. Zbylá část struny ($x < ct$) však padá pomaleji vlivem pevně uchyceného konce. Všimněte si, že tento jev se šíří od bodu $x = 0$ doprava rychlostí právě rovnou konstantě c (šíří se podél charakteristiky $x - ct = 0$).

□



Obrázek 9.1: Struna padající vlivem gravitace.

9.2 Fourierova transformace

Fourierova transformace je další integrální transformací s podobnými vlastnostmi jako Laplaceova transformace. Díky tomu, že opět převádí operace derivování v originálech na násobení v obrazech, je užitečným nástrojem při řešení diferenciálních rovnic. Na rozdíl od Laplaceovy transformace, která se obvykle používá na časovou proměnnou, Fourierova transformace se aplikuje na prostorovou proměnnou na celé reálné ose.

Nejprve začneme s funkcemi jedné prostorové proměnné. Fourierova transformace funkce $u = u(x)$, $x \in \mathbb{R}$, je zobrazení definované předpisem

$$(9.8) \quad (\mathcal{F}u)(\xi) \equiv \hat{u}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-i\xi x} dx.$$

Pokud je $|u|$ integrovatelná v $\mathbb{R}$, tj. $\int_{-\infty}^{\infty} |u| dx < \infty$, lze ukázat, že $\hat{u}$ existuje.

Avšak v teorii Fourierovy transformace je běžné pracovat s menší množinou funkcí. Definujeme tzv. *Schwartzovu množinu* $\mathcal{S}$ jako množinu funkcí na $\mathbb{R}$, které mají spojitě derivace všech řádů a které společně se svými derivacemi klesají pro $x \rightarrow \pm\infty$ k nule rychleji než libovolná mocninná funkce $|x|^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$. Tedy

$$\mathcal{S} = \{u \in C^\infty; \exists M \in \mathbb{R}, \left| \frac{d^k u}{dx^k} \right| \leq M \frac{1}{|x|^n} \text{ pro } |x| \rightarrow \infty, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}; n \in \mathbb{N}\}.$$

Lze ukázat, že pokud $u \in \mathcal{S}$, pak $\hat{u} \in \mathcal{S}$, a naopak. Říkáme, že Schwartzova množina $\mathcal{S}$ je uzavřenou množinou vzhledem k Fourierově transformaci.

Je důležité připomenout, že neexistuje žádná ustálená úmluva, jak definovat Fourierovu transformaci. V literatuře se můžeme setkat s obdobou definičního vztahu (9.8), kde je před integrálem uvedena konstanta $1/\sqrt{2\pi}$ nebo $1/(2\pi)$. Rovněž existují definice s kladným znaménkem v exponentu. Je dobré mít tento fakt na paměti při práci s různými prameny nebo při využití transformačních tabulek.

Základní vlastností Fourierovy transformace je zobrazení k -té derivace $u^{(k)}$:

$$(9.9) \quad (\mathcal{F}u^{(k)})(\xi) = (i\xi)^k \hat{u}(\xi), \quad u \in \mathcal{S}.$$

Odvození tohoto vztahu spočívá v integraci per partes, kde všechny „hraniční hodnoty“ vymizí díky nulovosti funkce i jejích derivací v nekonečnu. V případě funkcí dvou proměnných, např. $u = u(x, t)$, hraje proměnná t roli parametru a definujeme

$$(9.10) \quad (\mathcal{F}u)(\xi, t) \equiv \hat{u}(\xi, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i\xi x} dx.$$

Derivace podle prostorové proměnné x se transformují obdobně jako (9.9), derivace podle časové proměnné t zůstávají nezměněny, tedy např.

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}u_x)(\xi, t) &= (i\xi)\hat{u}(\xi, t), \\(\mathcal{F}u_{xx})(\xi, t) &= (i\xi)^2\hat{u}(\xi, t), \\(\mathcal{F}u_t)(\xi, t) &= \hat{u}_t(\xi, t).\end{aligned}$$

Parciální diferenciální rovnice ve dvou proměnných x, t přechází Fourierovou transformací na obyčejnou diferenciální rovnici v proměnné t . Jejím vyřešením dostáváme transformovanou funkci (obraz) $\hat{u}$, kterou převedeme na původně hledanou funkci u zpětnou Fourierovou transformací

$$(9.11) \quad \boxed{(\mathcal{F}^{-1}\hat{u})(x, t) \equiv u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\xi, t) e^{i\xi x} d\xi.}$$

Ve srovnání se zpětnou Laplaceovou transformací, kde je obecný inverzní vztah značně komplikovaný, je předpis (9.11) pro inverzní Fourierovu transformaci velice jednoduchý. Přesto je při řešení konkrétních úloh výhodné používat transformační tabulky nebo některé programové balíky.

Opět je důležité připomenout, že v případě použití modifikovaného definičního vztahu (9.10) je nutné modifikovat i vztah (9.11).

Stejně jako v případě Laplaceovy transformace platí i u Fourierovy transformace věta o konvoluci, která nachází bezprostřední uplatnění při řešení diferenciálních rovnic. Konvoluce dvou funkcí u a v je však nyní definována takto:

$$(u * v)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x - y)v(y) dy.$$

Věta 9.7. *Pokud $u, v \in \mathcal{S}$, pak*

$$\mathcal{F}(u * v)(\xi) = \hat{u}(\xi)\hat{v}(\xi).$$

Příklad 9.8 (Počáteční úloha pro difuzní rovnici). Nyní použijeme Fourierovu transformaci k odvození řešení počáteční úlohy pro difuzní rovnici, kterou jsme se zabývali v kapitole 5. Uvažujme tedy úlohu

$$(9.12) \quad \begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x). \end{cases}$$

Předpokládejme $\varphi \in \mathcal{S}$. Fourierovou transformací převedeme difuzní rovnici na tvar

$$\hat{u}_t = -\xi^2 k \hat{u},$$

což je obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu v proměnné t pro neznámou funkci $\hat{u}(\xi, t)$ s parametrem ξ . Jejím řešením je

$$\hat{u}(\xi, t) = C e^{-\xi^2 k t}.$$

Z počáteční podmínky dostáváme $\hat{u}(\xi, 0) = \hat{\varphi}(\xi)$ a tedy $C = \hat{\varphi}(\xi)$. Řešení v obrazech má tedy tvar

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{\varphi}(\xi) e^{-\xi^2 k t}.$$

Využijeme-li znalosti transformačního vztahu

$$\mathcal{F} \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi k t}} e^{-x^2/(4kt)} \right) = e^{-\xi^2 k t}$$

a věty o konvoluci, dostaneme řešení počáteční úlohy (9.12) ve tvaru

$$(9.13) \quad u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi k t}} e^{-(x-y)^2/(4kt)} \varphi(y) dy,$$

což je přesně formule (5.6) odvozená v kapitole 5. □

Poznámka 9.9. Při použití Fourierovy transformace jsme řešení (9.13) získali za předpokladu, že počáteční podmínka φ patří do Schwartzovy množiny. V okamžiku, kdy však máme řešení odvozeno, se můžeme pokusit ukázat jeho existenci i za slabších předpokladů na funkci φ . Lze např. dokázat, že funkce u z (9.13) řeší úlohu (9.12), pokud φ je spojitá a omezená funkce na $\mathbb{R}$.

Příklad 9.10 (Počáteční úloha pro vlnovou rovnici). Řešme počáteční úlohu

$$(9.14) \quad \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & u_t(x, 0) = \psi(x). \end{cases}$$

Opět aplikujeme Fourierovu transformaci vzhledem k prostorové proměnné na rovnici i obě počáteční podmínky a získáme transformovanou úlohu

$$\begin{cases} \hat{u}_{tt}(\xi, t) + c^2 \xi^2 \hat{u}(\xi, t) = 0, \\ \hat{u}(\xi, 0) = \hat{\varphi}(\xi), & \hat{u}_t(\xi, 0) = \hat{\psi}(\xi). \end{cases}$$

Jejím řešením je funkce

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{\varphi}(\xi) \cos c\xi t + \frac{1}{c\xi} \hat{\psi}(\xi) \sin c\xi t.$$

K nalezení řešení původní počáteční úlohy použijeme inverzní Fourierovu transformaci a dostaneme

$$(9.15) \quad u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{\varphi}(\xi) \cos c\xi t + \frac{1}{c\xi} \hat{\psi}(\xi) \sin c\xi t] e^{i\xi x} d\xi.$$

Toto integrální vyjádření, ve kterém navíc vystupují Fourierovy transformace počátečních podmínek, není příliš průhledné. Lze ho však převést na d'Alembertovu formuli (4.8) odvozenou v kapitole 4. Dosadíme-li komplexní reprezentaci funkcí sinus a kosinus do (9.15), dostaneme

$$(9.16) \quad \begin{aligned} u(x, t) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \hat{\varphi}(\xi) (e^{ic\xi t} + e^{-ic\xi t}) e^{i\xi x} d\xi \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2ic\xi} \hat{\psi}(\xi) (e^{ic\xi t} - e^{-ic\xi t}) e^{i\xi x} d\xi. \end{aligned}$$

První integrál na pravé straně můžeme zapsat ve tvaru

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\hat{\varphi}(\xi) e^{i(x+ct)\xi} + \hat{\varphi}(\xi) e^{i(x-ct)\xi} \right) d\xi,$$

což je (s využitím definice inverzní Fourierovy transformace (9.11)) přesně první člen d'Alembertovy formule

$$\frac{1}{2} (\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)).$$

Druhý integrál ve vyjádření (9.16) je po obdobných úpravách roven

$$\frac{1}{4\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{i\xi} \hat{\psi}(\xi) (e^{i(x+ct)\xi} - e^{i(x-ct)\xi}) d\xi = \frac{1}{4\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(\xi) \int_{x-ct}^{x+ct} e^{iy\xi} dy d\xi.$$

Zaměníme-li pořadí integrace a využijeme-li opět inverzní Fourierovu transformaci, dostaneme druhý člen d'Alembertovy formule

$$\frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y) dy.$$

□

Poznámka 9.11. V některých případech lze metody integrálních transformací použít i na rovnice s nekonstantními koeficienty. Uvažujme např. počáteční úlohu pro transportní rovnici

$$\begin{cases} tu_x + u_t = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x). \end{cases}$$

Protože proměnným koeficientem je v tomto případě časová proměnná t , použijeme Fourierovu transformaci, u které hraje čas roli parametru. Platí tedy

$$\mathcal{F}(tu_x) = t\mathcal{F}(u_x) = i\xi t\hat{u}.$$

Po transformaci rovnice i počáteční podmínky dostáváme

$$i\xi t\hat{u} + \hat{u}_t = 0, \quad \hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi),$$

a odtud

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi)e^{-i\frac{t^2}{2}\xi}.$$

Zpětnou Fourierovou transformací, resp. využitím transformačních vztahů, získáme řešení původní rovnice ve tvaru

$$u(x, t) = f\left(x - \frac{t^2}{2}\right).$$

Poznámka 9.12 (Laplaceova a Poissonova rovnice). V některých případech můžeme metodami integrálních transformací řešit i úlohy pro Laplaceovu a Poissonovu rovnici.

Jako příklad uvažujme následující problém

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & x \in \mathbb{R}, y > 0, \\ u(x, 0) = f(x), \\ u(x, y) \text{ omezené pro } y \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Řešení hledáme pomocí Fourierovy transformace vzhledem k proměnné x . Aplikujeme-li ji na naši úlohu, získáme rovnici

$$\hat{u}_{yy} - \xi^2 \hat{u} = 0,$$

jejíž obecné řešení má tvar $\hat{u}(\xi, y) = a(\xi)e^{-\xi y} + b(\xi)e^{\xi y}$ pro libovolné funkce a, b . Z požadavku na omezenost plyne

$$\begin{aligned} b(\xi) &= 0 && \text{pro } \xi > 0, \\ a(\xi) &= 0 && \text{pro } \xi < 0. \end{aligned}$$

Tedy $\hat{u}(\xi, y) = c(\xi)e^{-|\xi|y}$, kde c je libovolná funkce. Vezmeme-li v úvahu okrajovou podmínku, odvodíme rovnost $c(\xi) = \hat{f}(\xi)$ a tedy

$$\hat{u}(\xi, y) = e^{-|\xi|y} \hat{f}(\xi).$$

Inverzní transformace nám dává řešení původní úlohy ve tvaru konvoluce:

$$u(x, y) = \left(\frac{y}{\pi} \frac{1}{x^2 + y^2} \right) * f = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau) d\tau}{(x - \tau)^2 + y^2}.$$

Povšimněte si, že v této konvoluci má proměnná y roli pouze parametru.

9.3 Cvičení

1. Odvoďte následující transformační vztahy:

$$(a) \quad \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \quad s > 0,$$

$$(b) \quad \mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2},$$

$$(c) \quad \mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad s > 0,$$

$$(d) \quad \mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s - a}, \quad s > a,$$

$$(e) \quad \mathcal{L}\{\sin(at)\} = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad s > 0,$$

$$(f) \quad \mathcal{L}\{\cos(at)\} = \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad s > 0.$$

2. Odvoďte následující základní vlastnosti Laplaceovy transformace (zde $U = \mathcal{L}\{u\}$):

$$(a) \quad \mathcal{L}\{t^n u(t)\} = (-1)^n U^{(n)}(s),$$

$$(b) \quad \mathcal{L}\{e^{at} u(t)\} = U(s - a),$$

$$(c) \quad \mathcal{L}\left\{\int_0^t u(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s} U(s), \quad s > 0,$$

$$(d) \quad \mathcal{L}\left\{\frac{1}{t} u(t)\right\} = \int_s^\infty U(\sigma) d\sigma,$$

$$(e) \quad \mathcal{L}\{u(ct)\} = \frac{1}{c} U\left(\frac{s}{c}\right), \quad c > 0.$$

3. S využitím substituce a Fubiniovy věty dokažte, že platí vztahy ve větách 9.2 a 9.7.
4. Metodou Laplaceovy transformace řešte následující okrajové úlohy. Výsledek co možná nejvíce zjednodušte.

(a)

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x > 0, t > 0, \\ u(0, t) = 70, \\ u(x, 0) = 0. \end{cases}$$

$$[u(x, t) = 70 \operatorname{erfc}(\frac{x}{\sqrt{4t}})]$$

(b)

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + t, & x > 0, t > 0, \\ u(0, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0. \end{cases}$$

$$[u(x, t) = \frac{1}{3!}t^3 - \frac{1}{3!}\mathcal{H}(t-x)(t-x)^3]$$

(c)

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + e^{-t}, & x > 0, t > 0, \\ u(0, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0. \end{cases}$$

(d)

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - g, & x > 0, t > 0, \\ u(0, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 1. \end{cases}$$

$$[u(x, t) = t - (t-x)\mathcal{H}(t-x) - \frac{g}{2}(t^2 - (t-x)^2\mathcal{H}(t-x))]$$

(e)

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + t^2, & x > 0, t > 0, \\ u(0, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0. \end{cases}$$

(f)

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & x > 0, t > 0, \\ u(0, t) = \sin t, \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 1. \end{cases}$$

$$[u(x, t) = t + \sin(t-x)\mathcal{H}(t-x) - (t-x)\mathcal{H}(t-x)]$$

(g)

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & x > 0, t > 0, \\ u(0, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 1. \end{cases}$$

5. Metodou Laplaceovy transformace řešte počátečně-okrajovou úlohu

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \sin \pi x, & 0 < x < 1, \ t > 0, \\ u(0, t) = 0, \ u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0, \ u_t(x, 0) = 0. \end{cases}$$

6. Ukažte, že řešení počátečně-okrajové úlohy

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & x > 0, \ t > 0, \\ u(0, t) = T_0, \\ u(x, 0) = T_1 \end{cases}$$

je dáno vztahem

$$u(x, t) = (T_0 - T_1) \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{\sqrt{4kt}} \right) + T_1 = (T_0 - T_1) \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{4kt}} \right) + T_0.$$

7. Metodou Laplaceovy transformace řešte počátečně-okrajovou úlohu

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & x > 0, \ t > 0, \\ u(0, t) = \alpha, \ \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = \beta, \\ u(x, 0) = \gamma. \end{cases}$$

8. Metodou Laplaceovy transformace řešte počátečně-okrajovou úlohu

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & x > 0, \ t > 0, \\ u_x(0, t) = \alpha, \ \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = \beta, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \ u_t(x, 0) = \psi(x). \end{cases}$$

9. Metodou Laplaceovy transformace řešte počátečně-okrajovou úlohu

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + \cos \omega t \sin \pi x, & 0 < x < 1, \ t > 0, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0. \end{cases}$$

Předpokládejte, že $\omega > 0$, a postupujte opatrně v případě $\omega = ct$. Výsledek ověřte jeho zderivováním.

10. Dokažte následující transformační vztahy (zde $\hat{u}(\xi) = \mathcal{F}\{u(x)\}$):

$$(a) \quad u(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a, \\ 0, & |x| > a, \end{cases} \quad \hat{u}(\xi) = 2 \frac{\sin a\xi}{\xi},$$

$$(b) \quad u(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{a}, & |x| < a, \\ 0, & |x| > a, \end{cases} \quad \hat{u}(\xi) = 4 \frac{\sin^2(a\xi/2)}{a\xi^2},$$

$$(c) \quad u(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}, \quad a > 0, \quad \hat{u}(\xi) = \frac{\pi e^{-a\xi}}{a},$$

$$(d) \quad u(x) = e^{-ax^2}, \quad a > 0, \quad \hat{u}(\xi) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} e^{-\xi^2/4a},$$

$$(e) \quad u(x) = \frac{\sin ax}{x}, \quad a > 0, \quad \hat{u}(\xi) = \begin{cases} \pi, & |\xi| < a, \\ \frac{\pi}{2}, & |\xi| = a, \\ 0, & |\xi| > a. \end{cases}$$

11. Odvodte následující základní vlastnosti Fourierovy transformace (zde $\hat{u} = \mathcal{F}\{u\}$):

$$(a) \quad \mathcal{F}\{x^n u(x)\} = i^n \hat{u}^{(n)}(\xi),$$

$$(b) \quad \mathcal{F}\{e^{iax} u(x)\} = \hat{u}(\xi - a),$$

$$(c) \quad \mathcal{F}\{u(x - a)\} = e^{-ia\xi} \hat{u}(\xi),$$

$$(d) \quad \mathcal{F}\{u(ax)\} = \frac{1}{|a|} \hat{u}\left(\frac{\xi}{a}\right), \quad a \neq 0.$$

12. Metodou Fourierovy transformace řešte následující počáteční úlohy.

(a)

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \frac{1}{1+x^2}, \quad u_t(x, 0) = 0. \end{cases}$$

$$[u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\xi|} \cos \xi t e^{i\xi x} d\xi]$$

(b)

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{100} u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \end{cases}$$

kde

$$\varphi(x) = \begin{cases} 100, & -1 < x < 1, \\ 0, & \text{jinde.} \end{cases}$$

(c)

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin x}{x}, \quad u_t(x, 0) = 0. \end{cases}$$

$$[u(x, t) = \frac{50}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\xi^2} e^{-(x-\xi)^2/4t} d\xi]$$

(d)

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \end{cases}$$

kde

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 - |x|/2, & -2 < x < 2, \\ 0, & \text{jinde.} \end{cases}$$

(e)

$$\begin{cases} u_t = e^{-t}u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = 100. \end{cases}$$

13. Metodou Fourierovy transformace řešte linearizovanou Kortewegovu-deVriesovu rovnici

$$u_t = u_{xxx}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

s počáteční podmínkou

$$u(x, 0) = e^{-x^2/2}.$$

14. Metodou Fourierovy transformace řešte počáteční úlohu

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{txx} - b u_{xxx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) = \psi(x). \end{cases}$$

15. Metodou Fourierovy transformace řešte rovnici vedení tepla s konvekčním členem

$$u_t = k u_{xx} + \mu u_x, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

a s počáteční podmínkou $u(x, 0) = \varphi(x)$. Předpokládejte, že $u(x, t)$ je omezené a $k > 0$.

$$[u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) e^{-(\mu t + x - y)^2 / (4kt)} dy]$$

16. Metodou Fourierovy transformace vzhledem k proměnné x nalezněte harmonickou funkci v polorovině $y > 0$, která splňuje Neumannovu podmínku $\frac{\partial u}{\partial y} = h(x)$ na hranici $y = 0$.

17. Metodou Fourierovy transformace řešte Laplaceovu rovnici $u_{xx} + u_{yy} = 0$ v nekonečném pásu $\{x \in \mathbb{R}, 0 < y < 1\}$ s podmínkami $u(x, 0) = 0$ a $u(x, 1) = f(x)$.

$$[u(x, y) = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi \sinh k} f(\xi) \sinh ky \cos(kx - k\xi) d\xi dk]$$

10

Kapitola

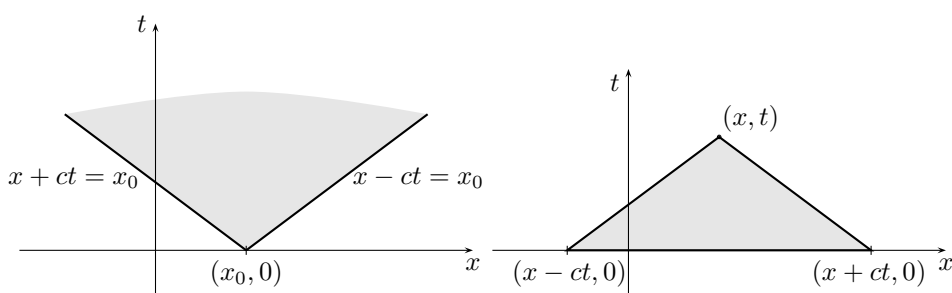
Obecné principy

V této kapitole shrneme hlavní kvalitativní vlastnosti parciálních diferenciálních rovnic, kterými jsme se zabývali v předchozích kapitolách.

10.1 Princip kauzality (vlnová rovnice)

Jak již víme z d'Alembertovy formule a kapitoly 4, hodnota počáteční výchylky φ a počáteční rychlosti ψ v bodě x_0 ovlivní řešení vlnové rovnice pouze v tzv. *oblasti vlivu*, kterou je výšeč vymezená charakteristickými přímkami $x \pm ct = x_0$. (viz obrázek 10.1).

Naopak řešení v bodě (x, t) je ovlivněno pouze hodnotami z tzv. *oblasti závislosti*, kterou představuje *charakteristický trojúhelník* o vrcholech $(x - ct, 0)$, $(x + ct, 0)$ a (x, t) (viz obrázek 10.1).



Obrázek 10.1: Oblast vlivu bodu $(x_0, 0)$ a oblast závislosti bodu (x, t) .

Tyto vlastnosti však plynou přímo ze samotné vlnové rovnice a k jejich

odvození není potřeba znát předpis pro příslušné řešení. Postupovat budeme následujícím způsobem.

Začneme s vlnovou rovnicí $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ a vynásobíme ji derivací u_t . Výslednou identitu můžeme zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned}
 0 &= u_{tt}u_t - c^2 u_{xx}u_t \\
 &= \left(\frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}c^2 u_x^2\right)_t - c^2(u_t u_x)_x \\
 (10.1) \quad &= (\partial_x, \partial_t) \cdot \left(-c^2 u_t u_x, \frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}c^2 u_x^2\right).
 \end{aligned}$$

Povšimněme si, že poslední skalární součin není nic jiného než dvojrozměrná divergence vektoru $\mathbf{f} = (-c^2 u_t u_x, \frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}c^2 u_x^2)$. Nyní integrujeme (10.1) přes lichoběžník F , který je částí charakteristického trojúhelníku (viz obrázek 10.2). Použijeme-li Greenovu větu, která říká následující

$$\iint_F \operatorname{div} \mathbf{f} \, dx \, dy = \int_{\partial F} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, ds$$

(porovnejte s jinou variantou použitou v odstavci 4.4), dostáváme

$$(10.2) \quad \int_{\partial F} [(-c^2 u_t u_x)n_1 + (\frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}c^2 u_x^2)n_2] \, ds = 0.$$

Zde vektor $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ představuje vnější normálu k hranici ∂F . Ta se skládá z „horní podstavy“ T , „dolní podstavy“ B , a „stran“ $K = K_1 \cup K_2$. Integrál ve vztahu (10.2) lze tedy rozdělit na čtyři části

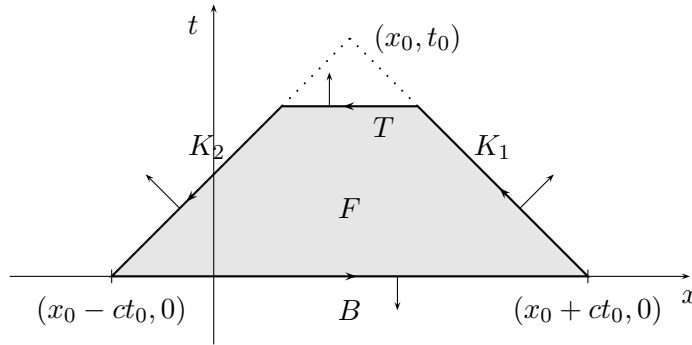
$$\int_{\partial F} = \int_T + \int_B + \int_{K_1} + \int_{K_2} = 0.$$

Nyní uvažujme každou část odděleně. Na horní podstavě T má normálový vektor směr $\mathbf{n} = (0, 1)$ a tedy

$$\int_T \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_T \frac{1}{2}(u_t^2 + c^2 u_x^2) \, ds.$$

Na dolní podstavě B máme $\mathbf{n} = (0, -1)$ a tedy

$$\int_B \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_B -\frac{1}{2}(u_t^2 + c^2 u_x^2) \, ds = \int_B -\frac{1}{2}(\psi^2 + c^2 \varphi_x^2) \, ds.$$



Obrázek 10.2: Lichoběžník v charakteristickém trojúhelníku.

Na straně K_1 platí $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}(1, c)$ a tudíž

$$\begin{aligned} \int_{K_1} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, ds &= \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \int_{K_1} [c \frac{1}{2}(u_t^2 + c^2 u_x^2) - c^2 u_t u_x] \, ds \\ &= \frac{c}{2\sqrt{1+c^2}} \int_{K_1} (u_t - cu_x)^2 \, ds \geq 0. \end{aligned}$$

Obdobně na straně K_2 máme $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}(-1, c)$ a tudíž

$$\begin{aligned} \int_{K_2} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, ds &= \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \int_{K_2} [c \frac{1}{2}(u_t^2 + c^2 u_x^2) + c^2 u_t u_x] \, ds \\ &= \frac{c}{2\sqrt{1+c^2}} \int_{K_2} (u_t + cu_x)^2 \, ds \geq 0. \end{aligned}$$

Složíme-li všechny tyto dílčí výsledky dohromady, zjistíme, že

$$\int_T \frac{1}{2}(u_t^2 + c^2 u_x^2) \, ds - \int_B \frac{1}{2}(\psi^2 + c^2 \varphi_x^2) \, ds \leq 0$$

neboli

$$(10.3) \quad \int_T (u_t^2 + c^2 u_x^2) \, ds \leq \int_B (\psi^2 + c^2 \varphi_x^2) \, ds.$$

Budeme-li nyní předpokládat, že obě funkce φ a ψ jsou nulové na dolní podstavě B , nerovnost (10.3) implikuje $u_t^2 + c^2 u_x^2 = 0$ na horní podstavě T

a tedy $u_t \equiv u_x \equiv 0$ na T . Protože navíc tento výsledek platí pro lichoběžník libovolné výšky, dostáváme, že u_t a u_x jsou nulové (a tedy u konstantní) uvnitř celého charakteristického trojúhelníku. A protože jsme předpokládali $u \equiv 0$ na B , můžeme konstatovat, že v celém trojúhelníku platí $u \equiv 0$.

Tento výsledek implikuje též jednoznačnost řešení vlnové rovnice: budeme-li uvažovat dvě řešení u_1 a u_2 se stejnými počátečními podmínkami na B , tj. v intervalu $(x_0 - ct_0, x_0 + ct_0)$, pak v celém charakteristickém trojúhelníku obě řešení splývají: $u_1 \equiv u_2$.

Princip kauzality lze odvodit i dalšími (a pravděpodobně jednoduššími) metodami. Výhodou tohoto přístupu je jeho aplikovatelnost v libovolné dimenzi (viz odstavec 13.4). Všimněte si, že analogií Greenovy věty ve dvojrozměrném případě je tzv. Gaussova-Ostrogradského věta ve vyšších dimenzích.

10.2 Zákon zachování energie (vlnová rovnice)

Vyjděme z představy nekonečně dlouhé struny o rovnici

$$(10.4) \quad \boxed{\rho u_{tt}(x, t) = T u_{xx}(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,}$$

kde ρ , T jsou konstanty (předpokládáme, že výchylky struny jsou dostatečně malé). Pro jednoduchost navíc uvažujme, že počáteční výchylka i rychlost splňují podmínku $\varphi \equiv \psi \equiv 0$ pro $|x| > R$, $R > 0$ dostatečně velké. Předpokládáme, že příslušná počáteční úloha má klasické řešení.

Kinetická energie struny je dána předpisem

$$E_k(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \rho u_t^2(x, t) \, dx$$

(porovnejte tento vztah se známou formulí $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ pro kinetickou energii hmotného bodu). Předpoklad spojitosti druhé derivace u_{tt} nám umožňuje psát

$$\frac{dE_k(t)}{dt} = \rho \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x, t) u_{tt}(x, t) \, dx,$$

a po dosazení za u_{tt} z rovnice (10.4) dostáváme

$$\begin{aligned} (10.5) \quad \frac{dE_k(t)}{dt} &= T \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x, t) u_{xx}(x, t) \, dx \\ &= \left[T u_t(x, t) u_x(x, t) \right]_{x=-\infty}^{x=+\infty} - T \int_{-\infty}^{\infty} u_{tx}(x, t) u_x(x, t) \, dx. \end{aligned}$$

Jelikož

$$\left[T u_t(x, t) u_x(x, t) \right]_{x=-\infty}^{x=+\infty} = 0$$

(viz předpoklad $\varphi \equiv \psi \equiv 0$ pro $|x|$ dostatečně velké a princip kauzality) a

$$u_{tx}(x, t) u_x(x, t) = \left(\frac{1}{2} u_x^2(x, t) \right)_t,$$

dostáváme po dosazení do vztahu (10.5) následující rovnost:

$$(10.6) \quad \frac{dE_k(t)}{dt} = - \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} T u_x^2(x, t) dx.$$

Pro potenciální energii struny máme následující vyjádření:

$$(10.7) \quad E_p(t) = \frac{1}{2} T \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(x, t) dx.$$

Ze vztahů (10.6) a (10.7) vyplývá

$$\frac{dE_k(t)}{dt} = - \frac{dE_p(t)}{dt}.$$

Jelikož celková energie struny je součtem kinetické a potenciální energie: $E(t) = E_k(t) + E_p(t)$, dostáváme

$$\frac{dE(t)}{dt} = 0,$$

což není nic jiného než matematicky zapsaný zákon zachování energie. Jinými slovy, celková energie struny

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\rho u_t^2(x, t) + T u_x^2(x, t)) dx \equiv E$$

je konstanta nezávislá na čase t !

Poznámka 10.1. Předpis (10.7) pro potenciální energii struny lze odvodit např. následujícím způsobem. Potenciální energie představuje součin síly a prodloužení struny, které tato síla způsobila (viz známý vztah $E_p = mgh$ pro potenciální energii hmotného bodu). V našem případě reprezentuje působící

sílu napětí T . Prodloužení h struny délky l je rozdíl délky oblouku (prohnuté struny) s a původní délky l , tedy

$$h(t) = s(t) - l = \int_0^l \sqrt{1 + u_x^2(x, t)} \, dx - l.$$

Nahradíme-li odmocninu na pravé straně prvními dvěma členy jejího Taylorova rozvoje, můžeme psát

$$h(t) \approx \int_0^l \left[1 + \frac{1}{2}u_x^2(x, t)\right] dx - l = \frac{1}{2} \int_0^l u_x^2(x, t) \, dx.$$

Pro potenciální energii tedy platí $E_p(t) = \frac{1}{2}T \int_0^l u_x^2(x, t) \, dx$. V případě struny nekonečné délky dostáváme vyjádření (10.7).

Příklad 10.2. Určeme celkovou energii nekonečně dlouhé struny, která měla v čase $t = 0$ nulovou počáteční rychlost a počáteční výchylku danou funkcí

$$\varphi(x) = \begin{cases} b - \frac{b}{a}|x| & \text{pro } |x| \leq a, \\ 0 & \text{pro } |x| > a. \end{cases}$$

Jelikož celková energie struny nezávisí na čase, platí

$$E = E(t) = E(0).$$

Nepotřebujeme tedy hledat tvar řešení v libovolném čase t , ale k určení celkové energie nám postačí znalost počátečních podmínek. Z nulové počáteční rychlosti vyplývá nulová kinetická energie v čase $t = 0$, tj.

$$E_k(0) = 0.$$

Potenciální energii vyjádříme vztahem (10.7), tj.

$$E_p(0) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} T \varphi_x^2(x) \, dx = \frac{1}{2} \int_{-a}^a T \varphi_x^2(x) \, dx = \frac{1}{2} \int_{-a}^a T \frac{b^2}{a^2} \, dx = \frac{b^2}{a} T.$$

Celková energie je pak součtem potenciální a kinetické energie:

$$E = E(0) = \frac{b^2}{a} T.$$

□

10.3 Nekorektní úloha (difuze pro záporná t)

Nejprve uvažujme následující počáteční úlohu pro „speciální variantu difuzní rovnice“:

$$(10.8) \quad u_t = -u_{xx}, \quad u(x, 0) = 1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

Povšimněte si, že zde máme difuzní koeficient k roven -1 ! Očividně je funkce $u(x, t) \equiv 1$ řešením této úlohy. Dále snadno ověříme, že funkce

$$u_n(x, t) = 1 + \frac{1}{n} \sin nx \, e^{n^2 t}$$

řeší počáteční úlohu

$$(10.9) \quad u_t = -u_{xx}, \quad u(x, 0) = 1 + \frac{1}{n} \sin nx$$

pro libovolné přirozené n . Počáteční podmínky v úlohách (10.8) a (10.9) se liší pouze o člen $\frac{1}{n} \sin nx$, který stejnoměrně konverguje k nule pro $n \rightarrow \infty$. Avšak rozdíl příslušných řešení je funkce

$$\frac{1}{n} \sin nx \, e^{n^2 t},$$

která pro libovolné pevné x (s výjimkou celých násobků π) diverguje pro $n \rightarrow \infty$ do nekonečna. To znamená, že v případě difuzní rovnice se záporným koeficientem *konstantní řešení* $u(x, t) \equiv 1$ *není stabilní* a příslušná úloha je nekorektní.

Nyní se vraťme k počáteční úloze pro standardní difuzní rovnici ($k > 0$) se záporným časem,

$$(10.10) \quad u_t = ku_{xx}, \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t < 0.$$

Použijeme-li substituci

$$w(x, t) = u(x, -t),$$

$$w_t = -u_t, \quad w_{xx} = u_{xx},$$

dostaneme úlohu

$$(10.11) \quad w_t = -kw_{xx}, \quad w(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

Avšak výše jsme ukázali, že taková úloha (pro $k = 1$) je nekorektní. Stejně tak tedy i problém (10.10).

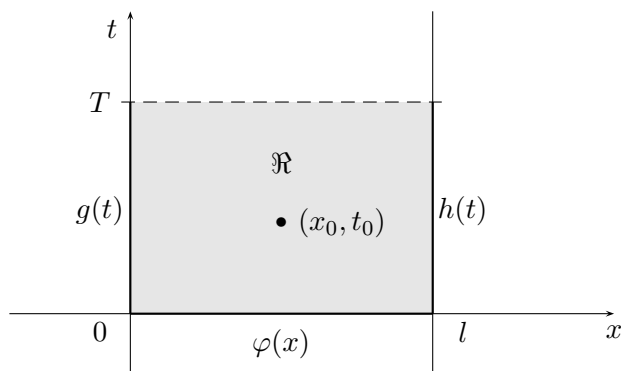
Tento jev má i své fyzikální vysvětlení: difuze, vedení tepla, tzv. Brownův pohyb apod. jsou *nevratné procesy* a návrat v čase vede k *chaosu*. Oproti tomu vlnění je vratný proces a vlnová rovnice je korektní i pro $t < 0$.

10.4 Princip maxima (vedení tepla)

Opustíme nyní úlohy na celé reálné přímce a uvažujme proces vedení tepla v konečné tyči délky l , na jejíchž koncích udržujeme v libovolném čase t teplotu $g(t)$ a $h(t)$ a počáteční rozložení teploty v čase $t = 0$ je dáno spojitou funkcí $\varphi(x)$. Máme tedy počátečně-okrajovou úlohu

$$(10.12) \quad \begin{cases} u_t = ku_{xx}, & x \in (0, l), \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \\ u(0, t) = g(t), \quad u(l, t) = h(t). \end{cases}$$

Pod pojmem časoprostorový válec $\mathfrak{R}$, budeme rozumět v našem případě obdélník v rovině (x, t) , jehož jeden vrchol je umístěn do počátku $(0, 0)$ a dvě strany leží na souřadnicových osách (viz obrázek 10.3). Délka strany na ose x je l , délka strany na ose t je T . Přitom dnem válce $\mathfrak{R}$ rozumíme vodorovnou stranu ležící na ose x a pláštěm válce $\mathfrak{R}$ rozumíme obě svislé strany. Horní vodorovnou úsečku pak nazýváme horní podstavou válce $\mathfrak{R}$. Důvod, proč používáme tohoto značení, spočívá v tom, že stejným způsobem můžeme princip maxima odvodit i pro difuzní rovnici ve více prostorových proměnných, kdy je představa válce více realistická.



Obrázek 10.3: Časoprostorový válec $\mathfrak{R}$.

Dokážeme, že platí následující tvrzení.

Věta 10.3 (Princip maxima). *Nechť $u = u(x, t)$ je klasické řešení úlohy (10.12). Pak u nabývá extrémních hodnot (minimální a maximální) na dně a plášti časoprostorového válce $\mathfrak{R}$.*

Ve skutečnosti lze vyslovit silnější tvrzení, které říká, že uvnitř válce a na horní podstavě jsou hodnoty funkce u ostře menší (resp. větší) než maximum

(resp. minimum) na zbytku hranice válce $\mathfrak{R}$ (pokud není funkce $u(x, t)$ konstantní).

Důkaz věty 10.3. Důkaz provedeme pro maximální hodnotu. V případě minimální hodnoty bychom postupovali analogicky ($\min u = -\max(-u)$).

Myšlenka důkazu využívá skutečnosti, že ve *vnitřním* bodě maxima máme zaručenu nulovost prvních derivací funkce u a nekladnost druhých derivací. Pokud bychom v bodě maxima vyloučili případ $u_{xx} = 0$, dostali bychom $u_{xx} < 0$ a současně $u_t = 0$, tedy $u_{xx} \neq u_t$. Tento spor s difuzní rovnicí by znamenal, že maximum musí ležet někde na hranici. Protože však případ $u_{xx} = 0$ vyloučit nemůžeme, musíme postupovat opatrněji.

Označme M maximální hodnotu funkce $u(x, t)$ na stranách $t = 0$, $x = 0$ a $x = l$ a položíme $v(x, t) = u(x, t) + \epsilon x^2$, kde ϵ je kladná konstanta. Naším cílem je ukázat, že $v(x, t) \leq M + \epsilon l^2$ na celém válci $\mathfrak{R}$.

Z definice funkce v vyplývá, že nerovnost $v(x, t) \leq M + \epsilon l^2$ je splněna na hraničních úsečkách $t = 0$, $x = 0$ a $x = l$. Dále pro všechna $(x, t) \in \mathfrak{R}$ platí tzv. *difuzní nerovnost*:

$$\begin{aligned} v_t(x, t) - kv_{xx}(x, t) &= u_t(x, t) - k(u(x, t) + \epsilon x^2)_{xx} \\ &= u_t(x, t) - ku_{xx}(x, t) - 2\epsilon k \\ &= -2\epsilon k < 0. \end{aligned}$$

Protože v je spojitá funkce a $\mathfrak{R}$ omezená uzavřená množina, musí na $\mathfrak{R}$ existovat bod maxima (x_0, t_0) funkce v . Předpokládejme nejprve, že tento bod leží *uvnitř* válce $\mathfrak{R}$ ($0 < x_0 < l$, $0 < t_0 < T$). Pak ovšem musí platit $v_t = 0$, $v_{xx} \leq 0$ v bodě (x_0, t_0) , což je spor s difuzní nerovností. Nechť tedy (x_0, t_0) leží na horní podstavě časoprostorového válce $\mathfrak{R}$, tj. $t_0 = T$, $0 < x_0 < l$. Pak $v_x(x_0, t_0) = 0$, $v_{xx}(x_0, t_0) \leq 0$ a $v_t(x_0, t_0) \geq 0$, což dává opět spor s difuzní nerovností. Odtud dostáváme, že bod maxima funkce v musí ležet na zbytku hranice, tedy na úsečkách $t = 0$, $x = 0$, $x = l$. Zde ovšem platí nerovnost $v(x, t) \leq M + \epsilon l^2$. Z těchto skutečností vyplývá, že vztah $v(x, t) \leq M + \epsilon l^2$ platí pro všechna $(x, t) \in \mathfrak{R}$. Dosadíme-li za v , dostaneme $u(x, t) \leq M + \epsilon(l^2 - x^2)$. Protože jsme $\epsilon > 0$ volili naprosto libovolně, plyne odtud

$$u(x, t) \leq M$$

pro každé $(x, t) \in \mathfrak{R}$, což jsme chtěli dokázat. ■

Poznámka 10.4. S jistou variantou principu maxima jsme se setkali rovněž v případě difuzní rovnice na celé reálné ose. Řešení dosahovalo své maximální i minimální hodnoty v čase $t = 0$ a s rostoucím časem jsme mohli pozorovat, jak se hodnoty řešení „vyrovnávají“ a blíží se ke střední hodnotě mezi extrémy (viz příklad 5.4).

Důsledek 10.5 (Jednoznačnost). *Počátečně-okrajová úloha pro difuzní rovnici*

$$(10.13) \quad \begin{cases} u_t - ku_{xx} = f(x, t), & x \in (0, l), \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \\ u(0, t) = g(t), \quad u(l, t) = h(t). \end{cases}$$

má nejvýše jedno klasické řešení.

Důkaz. Necht' $u_1(x, t)$ a $u_2(x, t)$ jsou dvě klasická řešení úlohy (10.13). Položme $w = u_1 - u_2$. Pak funkce w splňuje homogenní úlohu

$$w_t - kw_{xx} = 0, \quad w(x, 0) = 0, \quad w(0, t) = 0, \quad w(l, t) = 0.$$

Podle principu maxima nabývá funkce w svého maxima na úsečkách $t = 0$, $x = 0$, $x = l$, kde je ovšem nulová. Tedy $w(x, t) \leq 0$. Stejná úvaha pro minimum dává $w(x, t) \geq 0$. Odtud dostáváme, že $w(x, t) \equiv 0$ a tedy $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$. ■

Důsledek 10.6 (Stejnoměrná stabilita). *Necht' u_1 a u_2 jsou dvě klasická řešení počátečně-okrajové úlohy (10.13) odpovídající dvěma počátečním podmínkám φ_1, φ_2 . Pak v libovolném čase $t > 0$ platí*

$$\max_{x \in (0, l)} |u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \max_{x \in (0, l)} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|,$$

tj. klasické řešení úlohy (10.13) je stabilní vůči malým perturbacím počáteční podmínky.

Toto tvrzení říká, že „malá“ změna počátečních podmínek způsobí pouze „malou“ změnu řešení v libovolném čase.

Důkaz. Necht' řešení $u_1(x, t)$ odpovídá počáteční podmínce $\varphi_1(x)$ a řešení $u_2(x, t)$ odpovídá podmínce $\varphi_2(x)$; okrajové podmínky i pravá strana jsou v obou případech stejné. Opět označme $w = u_1 - u_2$ jejich rozdíl. Funkce w pak řeší úlohu

$$w_t - kw_{xx} = 0, \quad w(x, 0) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x), \quad w(0, t) = 0, \quad w(l, t) = 0.$$

Podle principu maxima dostáváme

$$w(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t) \leq \max_{x \in (0, l)} (\varphi_1 - \varphi_2) \leq \max_{x \in (0, l)} |\varphi_1 - \varphi_2|.$$

Obdobně z „principu minima“ (to jest z principu maxima aplikovaného na funkci $-w$)

$$w(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t) \geq \min_{x \in (0, l)} (\varphi_1 - \varphi_2) \geq - \max_{x \in (0, l)} |\varphi_1 - \varphi_2|.$$

Odtud tedy plyne

$$\max_{x \in (0,l)} |u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leq \max_{x \in (0,l)} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|$$

pro každé $t > 0$. ■

10.5 Energetická metoda (difuzní rovnice)

Ukážeme ještě jeden způsob, jakým můžeme dokázat jednoznačnost klasického řešení úlohy (10.13) a její stabilitu (nyní ovšem vzhledem k obecnější normě). Způsob důkazu se nazývá *energetická metoda*.

Uvažujme opět dvě řešení $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ úlohy (10.13) a jejich rozdíl $w(x,t)$. Funkce w splňuje homogenní difuzní rovnici s homogenními okrajovými podmínkami $w(0,t) = w(l,t) = 0$. Vynásobíme-li difuzní rovnici pro w samotnou funkcí w , dostáváme

$$0 = (w_t - kw_{xx})w = \left(\frac{1}{2}w^2\right)_t + (-kw_x w)_x + kw_x^2.$$

Po integraci přes interval $0 < x < l$ obdržíme

$$0 = \int_0^l \left(\frac{1}{2}w^2(x,t)\right)_t dx - kw_x(x,t)w(x,t) \Big|_{x=0}^{x=l} + k \int_0^l w_x^2(x,t) dx.$$

Druhý člen na pravé straně vymizí díky nulovým okrajovým podmínkám a po záměně časové derivace a integrálu dostáváme

$$\frac{d}{dt} \int_0^l \frac{1}{2}w^2(x,t) dx = -k \int_0^l w_x^2(x,t) dx \leq 0.$$

To však znamená, že integrál závislý na parametru t , $\int_0^l w^2(x,t) dx$, je jako funkce času t klesající, tedy

$$(10.14) \quad \int_0^l w^2(x,t) dx \leq \int_0^l w^2(x,0) dx$$

pro $t \geq 0$. V případě, že dvojice řešení $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ odpovídala stejné počáteční podmínce, dostáváme $w(x,0) = 0$ a tedy $\int_0^l w^2(x,t) dx = 0$ pro všechna

$t > 0$. To však znamená, že $w \equiv 0$ a $u_1 \equiv u_2$ pro všechna $t \geq 0$. Jinými slovy, dostáváme opět jednoznačnost řešení počátečně-okrajové úlohy (10.13).

Pokud dvojice řešení $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ odpovídala dvojici různých počátečních podmínek $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, pak $w(x, 0) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ a vztah (10.14) přejde do tvaru

$$\int_0^l (u_1(x, t) - u_2(x, t))^2 dx \leq \int_0^l (\varphi_1(x) - \varphi_2(x))^2 dx,$$

což vyjadřuje *stabilitu řešení vzhledem k počáteční podmínce v normě prostoru L^2* .

10.6 Princip maxima (Laplaceova rovnice)

Základní vlastností všech harmonických funkcí je tzv. *princip maxima*.

Věta 10.7 (Princip maxima). *Nechť Ω je omezená oblast (tj. souvislá otevřená množina) v rovině $\mathbb{R}^2$. Nechť $u(x, y)$ je harmonická funkce na Ω (tj. $\Delta u = 0$ v Ω), která je spojitá na $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Pak své maximální a minimální hodnoty nabývá funkce u na hranici $\partial\Omega$.*

Stejně jako u difuzní rovnice lze i v tomto případě vyslovit silnější tvrzení které vychází z Poissonovy formule a které si včetně důkazu uvedeme v odstavci 10.7. V tuto chvíli se spokojíme se slabší verzí z věty 10.7 a předvedeme si její důkaz, jehož idea je velice podobná myšlence důkazu věty 10.3.

Důkaz. Pro jednoduchost označme $\mathbf{x} = (x, y)$ a $|\mathbf{x}| = (x^2 + y^2)^{1/2}$. Zavedeme $v(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) + \epsilon|\mathbf{x}|^2$, kde ϵ je libovolně malá kladná konstanta. Ve všech bodech oblasti Ω platí

$$\Delta v = \Delta u + \epsilon \Delta(x^2 + y^2) = 0 + 4\epsilon > 0.$$

Pokud by funkce v nabývala svého maxima uvnitř Ω , muselo by v takovém bodě platit $\Delta v = v_{xx} + v_{yy} \leq 0$, což by byl spor s předchozí nerovností. Maximum funkce v se tedy musí nabývat na hranici – tento bod označme $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$. Pak pro všechna $\mathbf{x} \in \Omega$ dostáváme

$$u(\mathbf{x}) \leq v(\mathbf{x}) \leq v(\mathbf{x}_0) = u(\mathbf{x}_0) + \epsilon|\mathbf{x}_0|^2 \leq \max_{\mathbf{y} \in \partial\Omega} u(\mathbf{y}) + \epsilon|\mathbf{x}_0|^2.$$

Jelikož jsme ϵ volili libovolně, platí

$$u(\mathbf{x}) \leq \max_{\mathbf{y} \in \partial\Omega} u(\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x} \in \overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega.$$

V případě minima bychom postupovali analogicky. ■

Věta 10.8 (Jednoznačnost řešení Dirichletovy úlohy). *Řešení Dirichletovy úlohy pro Poissonovu rovnici na oblasti Ω je určeno jednoznačně.*

Důkaz. Předpokládejme, že

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{v } \Omega, \\ u = h & \text{na } \partial\Omega, \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta v = f & \text{v } \Omega, \\ v = h & \text{na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Položíme-li $w = u - v$, dostaneme $\Delta w = 0$ v Ω a $w = 0$ na $\partial\Omega$. Z principu maxima (věty 10.7) odvodíme

$$0 = \min_{\mathbf{y} \in \overline{\Omega}} w(\mathbf{y}) \leq w(\mathbf{x}) \leq \max_{\mathbf{y} \in \overline{\Omega}} w(\mathbf{y}) = 0 \quad \text{pro všechna } \mathbf{x} \in \Omega.$$

To však znamená, že $w \equiv 0$ a tedy $u \equiv v$. ■

10.7 Důsledky Poissonovy formule (Laplaceova rovnice)

Prvním důsledkem Poissonovy formule (8.17) je tzv. *věta o průměru* (anglicky: *mean value property*).

Věta 10.9 (Věta o průměru). *Nechť u je harmonická funkce na kruhu D , spojitá v jeho uzávěru $\overline{D}$. Pak hodnota funkce u ve středu kruhu D je rovna průměru hodnot u na hranici ∂D .*

Důkaz. Souřadný systém posuneme tak, aby počátek $\mathbf{0}$ ležel ve středu kruhu (Laplaceův operátor je invariantní vůči posunutí). Dosadíme $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ do Poissonovy formule (8.17) a dostaneme

$$u(\mathbf{0}) = \frac{a^2}{2\pi a} \int_{|\mathbf{x}'|=a} \frac{u(\mathbf{x}')}{a^2} ds = \frac{1}{2\pi a} \int_{\partial D} u(\mathbf{x}') ds.$$

To je však přesně integrální průměr funkce u přes kružnici $|\mathbf{x}'| = a$. ■

Dalším důležitým důsledkem Poissonovy formule je silná verze principu maxima.

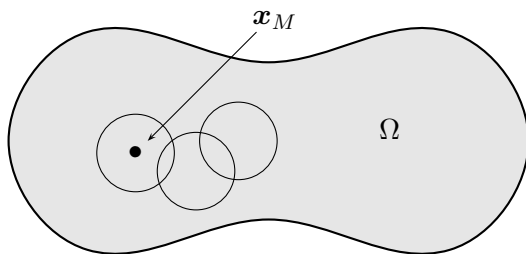
Věta 10.10 (Silný princip maxima). *Nechť u je harmonická funkce v oblasti $\Omega \in \mathbb{R}^2$, spojitá na $\overline{\Omega}$. Pak buď u je konstantní v celém uzávěru $\overline{\Omega}$, anebo u nabývá své maximální (minimální) hodnoty právě na hranici $\partial\Omega$ (tj. ne uvnitř Ω).*

Myšlenka důkazu. Označme $\mathbf{x}_M$ bod, ve kterém nabývá funkce u své maximální hodnoty M na uzávěru oblasti Ω (jeho existence vyplývá ze spojitosti funkce u na $\bar{\Omega}$ a z Weierstrassovy věty). Ukážeme, že $\mathbf{x}_M$ nemůže ležet uvnitř Ω , pokud u není konstantní.

Nechť $\mathbf{x}_M \in \Omega$. Uvažujme kruhové okolí bodu $\mathbf{x}_M$, které celé leží v Ω . Podle věty o průměru je $u(\mathbf{x}_M)$ rovno průměru hodnot na hranici tohoto kruhového okolí. Protože průměr funkce nemůže být větší než její maximum, dostáváme nerovnost

$$M = u(\mathbf{x}_M) = \text{průměr na hranici kruhu} \leq M$$

a tedy u musí nabývat hodnoty M na celé hranici kruhového okolí. Totéž navíc platí pro libovolný kruh, který má střed v bodě $\mathbf{x}_M$ a má menší poloměr. Pak tedy $u(\mathbf{x}) = M$ pro všechna $\mathbf{x}$ z původního kruhového okolí. Nyní si můžeme představit, že celou oblast Ω pokryjeme kruhovými okolími (viz obrázek 10.4). Protože oblast Ω je souvislá, dostáváme $u(\mathbf{x}) \equiv M$ na celé oblasti Ω a tedy u je konstantní. ■



Obrázek 10.4: Pokrytí oblasti Ω kruhovými okolími.

Posledním důsledkem Poissonovy formule, který zde uvedeme, je následující tvrzení.

Věta 10.11 (Diferencovatelnost). *Nechť u je harmonická funkce na oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Pak $u(\mathbf{x}) = u(x, y)$ má na Ω spojitě parciální derivace všech řádů.*

Tato vlastnost harmonických funkcí je do jisté míry podobná vlastnosti, s kterou jsme se již setkali u jednorozměrné difuzní rovnice (viz kapitola 5).

Myšlenka důkazu. Uvažujme nejprve kruhovou oblast D se středem v počátku. Z Poissonovy formule (8.17) je zřejmé, že funkce za integračním znaménkem je

libovolně diferencovatelná pro všechna $\mathbf{x} \in D$. Všimněte si, že $\mathbf{x}' \in \partial D$ a tedy $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$. Jelikož můžeme aplikovat větu o záměně integrace a derivování, má v oblasti D parciální derivace všech řádů i funkce u .

Nechť je nyní D libovolné kruhové okolí bodu $\mathbf{x}_0 \in \Omega$, které celé leží v Ω . Použijeme-li substituci $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, posuneme střed kruhu D do počátku. Z výše uvedeného plyne, že u je diferencovatelná v D . Stejnou úvahu můžeme provést pro libovolný bod $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ a tedy u je diferencovatelná ve všech bodech oblasti Ω .

■

Poznámka 10.12 (Laplaceova rovnice v konečných diferencích). Podívejme se na Laplaceovu rovnici z „numerického hlediska“. Uvažujme bod (x, y) a jeho sousedy $(x \pm h, y)$, $(x, y \pm h)$, kde $h > 0$ je dostatečně malé. Z Taylorova rozvoje získáme

$$\begin{aligned} u(x-h, y) &= u(x, y) - hu_x(x, y) + \frac{1}{2}h^2u_{xx}(x, y) + O(h^3), \\ u(x+h, y) &= u(x, y) + hu_x(x, y) + \frac{1}{2}h^2u_{xx}(x, y) + O(h^3) \end{aligned}$$

a po sečtení můžeme vyjádřit druhou derivaci ve tvaru

$$u_{xx}(x, y) = \frac{1}{h^2}[u(x-h, y) - 2u(x, y) + u(x+h, y)] + O(h^2).$$

Analogicky

$$u_{yy}(x, y) = \frac{1}{h^2}[u(x, y-h) - 2u(x, y) + u(x, y+h)] + O(h^2).$$

Všimněte si, že jde o vyjádření druhých derivací pomocí centrálních diferencí používaných např. v metodě sítí. Dosadíme-li do Laplaceovy rovnice $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ a zanedbáme-li členy vyšších řádů, dostáváme přibližnou hodnotu hledané funkce u v bodě (x, y) jako

$$u(x, y) \approx \frac{1}{4}[u(x-h, y) + u(x+h, y) + u(x, y-h) + u(x, y+h)].$$

To však znamená, že hodnota $u(x, y)$ je přibližně aritmetickým průměrem okolních hodnot. Tento aritmetický průměr pak nemůže být větší (ani menší) než všechny okolní hodnoty. Tedy i zde se setkáváme s jakousi numerickou analogií principu maxima a věty o průměru.

10.8 Srovnání vlnové, difuzní a Laplaceovy rovnice

Z výše uvedených principů a z vlastností řešení počátečních a okrajových úloh vyplývá následující základní srovnání všech tří typů lineárních rovnic druhého řádu:

Vlastnost	Vlna	Difuze	Laplace
rychlost šíření	konečná ($\leq c$)	nekonečná	nulová
singularity	šíří se podél charakteristik rychlostí c	okamžitě vymizí (řešení jsou hladká)	řešení jsou hladká
korektnost	ANO pro $t > 0$ ANO pro $t < 0$	ANO pro $t > 0$ NE pro $t < 0$	ANO
princip maxima	NE	ANO	ANO
energie (počáteční úlohy)	energie zůstává konstantní	energie klesá (je-li φ integrovatelná)	ustálený stav

10.9 Cvičení

1. Ukažte, že vlnová rovnice má následující invariantní vlastnosti:

- (a) Libovolně posunuté řešení $u(x - y, t)$, kde y je pevné, je rovněž řešením.
- (b) Libovolná derivace řešení (např. u_x) je opět řešením.
- (c) Dilatované řešení $u(ax, at)$, kde $a > 0$, je opět řešením.

2. V případě řešení $u(x, t)$ vlnové rovnice (10.4) s parametry $\rho = T = c = 1$ je hustota energie definována vztahem $e = \frac{1}{2}(u_t^2 + u_x^2)$ a hustota hybnosti je dána předpisem $p = u_t u_x$.

- (a) Ukažte, že $e_t = p_x$ a $p_t = e_x$.
- (b) Ukažte, že obě funkce $e(x, t)$ a $p(x, t)$ rovněž vyhovují vlnové rovnici.

3. Nechť $u(x, t)$ řeší vlnovou rovnici $u_{tt} = u_{xx}$. Dokažte, že pro všechna x, t, k a h platí identita

$$u(x + h, t + k) + u(x - h, t - k) = u(x + k, t + h) + u(x - k, t - h).$$

Načrtněte charakteristický čtyřúhelník, jehož vrcholy jsou argumenty v předchozím vztahu.

4. Uvažujte *tlumenou* strunu popsanou rovnicí $u_{tt} - c^2 u_{xx} + r u_t = 0$ a ukažte, že její celková energie klesá.
5. Uvažujte dvě počáteční úlohy pro vlnovou rovnici s různými počátečními daty:

$$\begin{cases} u_{tt}^i = c^2 u_{xx}^i, & x \in \mathbb{R}, 0 < t < T, \\ u^i(x, 0) = \varphi^i(x), & u_t^i(x, 0) = \psi^i(x) \end{cases}$$

pro $i = 1, 2$, kde $\varphi^1, \varphi^2, \psi^1, \psi^2$ jsou dané funkce. Nechť

$$|\varphi^1(x) - \varphi^2(x)| \leq \delta_1, \quad |\psi^1(x) - \psi^2(x)| \leq \delta_2$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Ukažte, že platí $|u^1(x, t) - u^2(x, t)| \leq \delta_1 + \delta_2 T$ pro všechna $x \in \mathbb{R}, 0 < t < T$. Co to znamená s ohledem na stabilitu řešení?

6. Pomocí zákona zachování energie dokažte, že počáteční úloha pro vlnovou rovnici

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), & u_t(x, 0) = \psi(x) \end{aligned}$$

má jednoznačné řešení.

7. Uvažujte difuzní rovnici na celé reálné ose. Pomocí principu maxima ukažte, že lichá (resp. sudá) počáteční podmínka vede k lichému (resp. sudému) řešení.
8. Uvažujte řešení difuzní rovnice $u_t = u_{xx}$, $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t < \infty$.
- Nechť $M(T)$ je maximum funkce $u(x, t)$ na obdélníku $\{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$. Klesá nebo roste $M(T)$ jako funkce T ?
 - Nechť $m(T)$ je minimum funkce $u(x, t)$ na obdélníku $\{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$. Klesá nebo roste $m(T)$ jako funkce T ?
9. Uvažujte difuzní rovnici $u_t = u_{xx}$ na intervalu $(0, 1)$ s okrajovými podmínkami $u(0, t) = u(1, t) = 0$ a počáteční podmínkou $u(x, 0) = 1 - x^2$. Všimněte si, že počáteční podmínka nesplňuje okrajovou podmínku na levém konci, avšak řešení ji již pro libovolné $t > 0$ splňovat bude.

- (a) Ukažte, že $u(x, t) > 0$ ve všech vnitřních bodech $0 < x < 1, 0 < t < \infty$.
- (b) Nechť pro každé $t > 0$ představuje $\mu(t)$ maximum funkce $u(x, t)$ na $0 \leq x \leq 1$. Ukažte, že $\mu(t)$ je nerostoucí funkcí t .
[Návod: Předpokládejte, že se maxima nabývá v bodě $X(t)$, tj. $\mu(t) = u(X(t), t)$. Derivujte $\mu(t)$ (za předpokladu, že $X(t)$ je diferencovatelná funkce).]
- (c) Načrtněte řešení na několika časových hladinách.
10. Uvažujte difuzní rovnici $u_t = u_{xx}$ na intervalu $(0, 1)$ s okrajovými podmínkami $u(0, t) = u(1, t) = 0$ a počáteční podmínkou $u(x, 0) = 4x(1 - x)$.
- (a) Ukažte, že $0 < u(x, t) < 1$ pro všechna $t > 0$ a $0 < x < 1$.
- (b) Ukažte, že $u(x, t) = u(1 - x, t)$ pro všechna $t \geq 0$ a $0 \leq x \leq 1$.
- (c) Pomocí energetické metody ukažte, že $\int_0^1 u^2(x, t) dx$ je ostře klesající funkcí proměnné t .
11. Cílem tohoto cvičení je ukázat, že princip maxima neplatí pro rovnici $u_t = xu_{xx}$ s proměnným koeficientem.
- (a) Ověřte, že funkce $u(x, t) = -2xt - x^2$ je řešením. Nalezněte její maximum na obdélníku $\{-2 \leq x \leq 2, 0 \leq t \leq 1\}$.
- (b) V kterém místě selže důkaz principu maxima v případě této rovnice?
12. Uvažujte úlohu vedení tepla s vnitřním tepelným zdrojem
- $$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2(t+1)x + x(1-x), & 0 < x < 1, t > 0, \\ u(0, t) = 0, & u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = x(1-x). \end{cases}$$
- Ukažte, že v tomto případě princip maxima neplatí:
- (a) Ověřte, že $u(x, t) = (t+1)x(1-x)$ je řešením.
- (b) Jaká je maximální hodnota M a minimální hodnota m počátečních a okrajových dat?
- (c) Ukažte, že v určitém čase $t > 0$ teplota v některých bodech tyče přesáhne hodnotu M .
13. Dokažte srovnávací princip pro difuzní rovnici: Pokud u a v jsou dvě řešení a $u \leq v$ pro $t = 0$, pro $x = 0$ a $x = l$, pak $u \leq v$ pro $0 \leq t < \infty, 0 \leq x \leq l$.

14. (a) Dokažte následující obecnější tvrzení: Nechť $u_t - ku_{xx} = f$, $v_t - kv_{xx} = g$, $f \leq g$ a $u \leq v$ pro $x = 0$, $x = l$ a $t = 0$, potom $u \leq v$ pro $0 \leq t < \infty$, $0 \leq x \leq l$.
- (b) Nechť $v_t - v_{xx} \geq \sin x$ pro $0 \leq x \leq \pi$, $0 < t < \infty$. Dále nechť $v(0, t) \geq 0$, $v(\pi, t) \geq 0$ a $v(x, 0) \geq \sin x$. Využijte část (a) a dokažte, že $v(x, t) \geq (1 - e^{-t}) \sin x$.

15. Uvažujte difuzní rovnici na intervalu $(0, l)$ s Newtonovými okrajovými podmínkami $u_x(0, t) - a_0 u(0, t) = 0$ a $u_x(l, t) + a_l u(l, t) = 0$, kde $a_0 > 0$ a $a_l > 0$. Pomocí energetické metody ukažte, že koncové body přispívají k poklesu hodnoty $\int_0^l u^2(x, t) dx$. (Část energie se na hranici ztrácí. Tyto okrajové podmínky se někdy nazývají *disipativní*.)

16. Ukážeme přímou souvislost mezi vlnovou a difuzní rovnicí. Nechť $u(x, t)$ řeší vlnovou rovnici na celé reálné ose a její druhé derivace jsou omezené. Položme

$$v(x, t) = \frac{c}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2 c^2 / (4kt)} u(x, s) ds.$$

- (a) Ukažte, že $v(x, t)$ řeší difuzní rovnici.
- (b) Ukažte, že $\lim_{t \rightarrow 0} v(x, t) = u(x, 0)$.

[Návod: (a) Napište formuli ve tvaru $v(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(s, t) u(x, s) ds$, kde $H(x, t)$ řeší difuzní rovnici s konstantou k/c^2 pro $t > 0$. Pak $v(x, t)$ zderivujte. (b) Využijte skutečnost, že $H(s, t)$ je fundamentální řešení difuzní rovnice s prostorovou proměnnou s .]

17. Ukažte, že pro vlnovou rovnici neplatí princip maxima.
18. Nechť u je harmonická funkce na kruhu $D = \{r < 2\}$ a nechť $u = 3 \sin 2\theta + 1$ pro $r = 2$. Aniž byste hledali konkrétní tvar řešení, zodpovězte následující otázky:
- (a) Jaká je maximální hodnota funkce u na $\overline{D}$?
- (b) Jaká je hodnota funkce u v počátku?

[(a) 4, (b) 1]

19. Dokažte jednoznačnost Dirichletovy úlohy $\Delta u = f$ v D , $u = g$ na ∂D pomocí energetické metody.

20. Uvažujte Neumannovu úlohu na omezené otevřené množině Ω

$$\Delta u = f \text{ v } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g \text{ na } \partial\Omega.$$

Ukažte, že libovolná dvě řešení se liší o konstantu.

21. Nechť Ω je omezená otevřená množina. Ukažte, že Neumannova úloha

$$\Delta u + \alpha u = f \text{ v } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g \text{ na } \partial\Omega$$

má nejvýše jedno řešení, pokud $\alpha < 0$ v Ω .

22. Dokažte, že funkce $u(x, y) = \frac{1-x^2-y^2}{x^2+(y-1)^2}$ je harmonická v $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 1\}$. Naleznete maximum M a minimum m funkce $u(x, y)$ na kruhu $D_\rho = \{x^2 + y^2 < \rho^2\}$, $\rho < 1$, a ukažte, že $Mm = 1$. Nakreslete graf $u(x, y)$ pro $(x, y) \in D_{0.9}$ v polárních souřadnicích.

11

Kapitola

Laplaceova a Poissonova rovnice ve vyšších dimenzích

V této kapitole se budeme zabývat Laplaceovým operátorem a harmonickými funkcemi v $\mathbb{R}^3$. Na rozdíl od dvojrozměrného případu je zde situace komplikovanější a nemůžeme se spolehnout na metody založené na výpočtu řešení. Proto se budeme snažit získat co nejvíce informací o řešení a jeho vlastnostech přímo ze samotné rovnice. Zaměříme se především na ty aspekty, které se výrazněji liší od případu dvojrozměrného. Vlastnosti, které na dimenzi nezávisí, uvedeme bez detailního odvození.

11.1 Invariantnost Laplaceova operátoru a jeho transformace do sférických souřadnic

Laplaceův operátor je i ve třech dimenzích invariantní vůči posunutí a otáčení. Připomeňme pouze, že při použití maticového zápisu je otáčení v $\mathbb{R}^3$ dáno transformačním vztahem

$$\mathbf{x}' = \mathbf{B}\mathbf{x},$$

kde $\mathbf{x} = (x, y, z)$ a $\mathbf{B} = (b_{ij})$, $i, j = 1, 2, 3$, je *ortogonální matice* (tj. $\mathbf{B}\mathbf{B}^t = \mathbf{B}^t\mathbf{B} = \mathbf{I}$). S využitím pravidla o derivování složené funkce odvodíme

$$\begin{aligned}
u_x &= b_{11}u_{x'} + b_{21}u_{y'} + b_{31}u_{z'}, \\
u_y &= b_{12}u_{x'} + b_{22}u_{y'} + b_{32}u_{z'}, \\
u_z &= b_{13}u_{x'} + b_{23}u_{y'} + b_{33}u_{z'},
\end{aligned}$$

dále pro druhé (nesmíšené) derivace

$$\begin{aligned}
u_{xx} &= b_{11}^2 u_{x'x'} + b_{11}b_{21}u_{x'y'} + b_{11}b_{31}u_{x'z'} \\
&\quad + b_{21}b_{11}u_{y'x'} + b_{21}^2 u_{y'y'} + b_{21}b_{31}u_{y'z'} \\
&\quad + b_{31}b_{11}u_{z'x'} + b_{31}b_{21}u_{z'y'} + b_{31}^2 u_{z'z'}
\end{aligned}$$

a obdobně pro u_{yy} a u_{zz} . Po sečtení a za předpokladu záměnnosti (druhých) smíšených parciálních derivací dostáváme

$$\begin{aligned}
u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} &= \underbrace{(b_{11}^2 + b_{12}^2 + b_{13}^2)}_{=1} u_{x'x'} \\
&\quad + 2 \underbrace{(b_{11}b_{21} + b_{12}b_{22} + b_{13}b_{23})}_{=0} u_{x'y'} + 2 \underbrace{(b_{11}b_{31} + b_{12}b_{32} + b_{13}b_{33})}_{=0} u_{x'z'} \\
&\quad + \dots = u_{x'x'} + u_{y'y'} + u_{z'z'}
\end{aligned}$$

díky ortogonalitě matice $\mathbf{B}$. Čtenáři doporučujeme provést předchozí výpočty detailněji.

Invariantnost Laplaceova operátoru vůči otáčení naznačuje, že v radiálně symetrických případech by transformace do *sférických souřadnic* (r, θ, ϕ) mohla vést k jeho výraznému zjednodušení.

Budeme používat následující značení (viz obrázek 11.1)

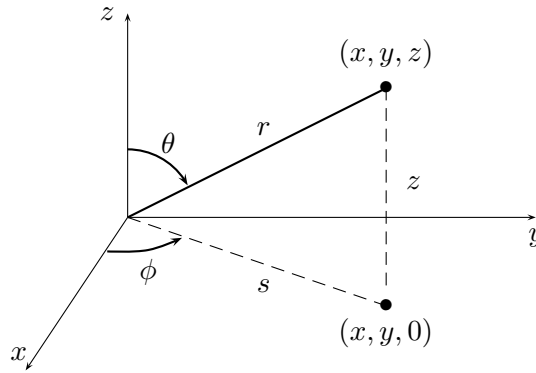
$$\begin{aligned}
r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{s^2 + z^2}, \\
s &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\
x &= s \cos \phi, \quad z = r \cos \theta, \\
y &= s \sin \phi, \quad s = r \sin \theta.
\end{aligned}$$

K transformaci využijeme znalosti transformačních vztahů do polárních souřadnic

$$\begin{aligned}
u_{zz} + u_{ss} &= u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}, \\
u_{xx} + u_{yy} &= u_{ss} + \frac{1}{s}u_s + \frac{1}{s^2}u_{\phi\phi}.
\end{aligned}$$

Po sečtení dostáváme

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + \frac{1}{s}u_s + \frac{1}{s^2}u_{\phi\phi}.$$

Obrázek 11.1: *Sférické souřadnice.*

U posledních dvou členů dosadíme $s = r \sin \theta$ a u předposledního členu nahradíme u_s následujícím způsobem

$$u_s = \frac{\partial u}{\partial s} = u_r \frac{\partial r}{\partial s} + u_\theta \frac{\partial \theta}{\partial s},$$

neboť $\frac{\partial \phi}{\partial s} = 0$. Použijeme-li např. inverzní Jacobiho matici transformace do polárních souřadnic (viz odstavec 6.1 pro $r = r$, $\theta = \theta$ a $s = y$), dostaneme

$$\frac{\partial r}{\partial s} = \sin \theta = \frac{s}{r}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{\cos \theta}{r}$$

a tedy

$$u_s = u_r \frac{s}{r} + u_\theta \frac{\cos \theta}{r}.$$

Odtud již snadno odvodíme

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} u_\theta + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} u_{\phi\phi}.$$

Při použití symbolického zápisu dostáváme následující analogii „dvojměrného případu“ (6.1):

$$(11.1) \quad \boxed{\begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \end{aligned}}$$

V radiálně symetrickém případě, tj. v případě, kdy funkce u nezávisí na úhlech ϕ a θ , se Laplaceova rovnice ve sférických souřadnicích redukuje na obyčejnou diferenciální rovnici

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r}u_r = 0,$$

která po přenásobení členem r^2 přejde na tvar

$$(r^2 u_r)_r = 0.$$

Odtud integrací snadno dostaneme $u_r = c_1/r^2$ a $u = -c_1 r^{-1} + c_2$. Fundamentální harmonickou funkcí ve třech dimenzích je tedy funkce

$$u(r) = \frac{1}{r} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}},$$

kterou můžeme považovat za analogii dvojrozměrné harmonické funkce $\ln(x^2 + y^2)^{1/2}$, s níž jsme se setkali v kapitole 6. V *elektrostatice* např. $u(\mathbf{x}) = r^{-1}$ představuje *elektrostatický potenciál* v bodě $\mathbf{x}$ s průvodičem r , který odpovídá jednotkovému náboji umístěnému v počátku.

11.2 První Greenova identita

V následujícím textu se soustředíme na třidimenzionální případ, avšak veškerá tvrzení jsou platná i ve dvojrozměrném nebo obecně n -rozměrném případě. Vyjděme z pravidla o derivování součinu

$$\begin{aligned} (vu_x)_x &= v_x u_x + v u_{xx}, \\ (vu_y)_y &= v_y u_y + v u_{yy}, \\ (vu_z)_z &= v_z u_z + v u_{zz}. \end{aligned}$$

Po sečtení těchto tří rovnic dostáváme

$$\nabla \cdot (v \nabla u) = \nabla v \cdot \nabla u + v \Delta u.$$

Zintegrujeme-li tento vztah a použijeme-li na levé straně Gaussovu-Ostrogradského větu (viz str. 4), získáme tzv. *první Greenovu identitu*

$$(11.2) \quad \iint_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u d\mathbf{x} + \iiint_{\Omega} v \Delta u d\mathbf{x},$$

kde $\partial u / \partial n = \mathbf{n} \cdot \nabla u$ značí derivaci podle vnější normály k hranici oblasti Ω . Identita (11.2) může být interpretována jako integrace per-partes ve třech dimenzích a má celou řadu důsledků.

11.3 Vlastnosti harmonických funkcí

Základní vlastností harmonických funkcí je *slabý princip maxima*. Tato vlastnost, stejně jako její důkaz, nezávisí na dimenzi. Čtenáři doporučujeme prostudovat větu 10.7 a její důkaz a uvědomit si jeho použitelnost i ve vyšších dimenzích. Rovněž důsledek o *jednoznačné řešitelnosti Dirichletovy úlohy* (viz věta 10.8) můžeme ponechat beze změny.

11.3.1 Věta o průměru a silný princip maxima

Jednou z vlastností harmonických funkcí, která plyne z první Greenovy identity, je trojrozměrná verze *věty o průměru*. Připomeňme, že s její dvojrozměrnou variantou jsme se setkali v kapitole 6 (věta 10.9).

Věta 11.1 (Věta o průměru). *Průměr hodnot libovolné harmonické funkce v oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ přes jakoukoliv sféru obsaženou v Ω je roven její hodnotě ve středu sféry.*

Důkaz. Uvažujme kouli $B(\mathbf{0}, a) = \{|\mathbf{x}| < a\} \subset \Omega$ o poloměru a se středem v počátku (připomínáme, že Laplaceův operátor je invariantní vůči posunutí). Dále nechť $\Delta u = 0$ v Ω , $\overline{B(\mathbf{0}, a)} \subset \Omega$. V případě sféry má vnější normála $\mathbf{n}$ směr průvodiče, tedy

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial n} &= \mathbf{n} \cdot \nabla u = \frac{\mathbf{x}}{r} \cdot \nabla u = \frac{x}{r} u_x + \frac{y}{r} u_y + \frac{z}{r} u_z \\ &= \frac{\partial x}{\partial r} u_x + \frac{\partial y}{\partial r} u_y + \frac{\partial z}{\partial r} u_z = \frac{\partial u}{\partial r}, \end{aligned}$$

kde $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = |\mathbf{x}|$ je sférická souřadnice (vzdálenost bodu (x, y, z) od středu $\mathbf{0}$ sféry). Použijeme-li první Greenovu identitu pro kouli $B(\mathbf{0}, a)$ a volíme-li $v \equiv 1$, dostáváme

$$\iint_{\partial B(\mathbf{0}, a)} \frac{\partial u}{\partial r} dS = \iiint_{B(\mathbf{0}, a)} \Delta u d\mathbf{x} = 0.$$

Integrál na levé straně přepíšeme do sférických souřadnic (r, θ, ϕ) , tj.

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi u_r(a, \theta, \phi) a^2 \sin \theta d\theta d\phi = 0$$

(na sféře $\partial B(\mathbf{0}, a)$ platí $r = a$), a rovnost vydělíme konstantou $4\pi a^2$, která odpovídá míře $\partial B(\mathbf{0}, a)$ (tj. povrchu koule $B(\mathbf{0}, a)$). Tento výsledek platí pro

všechna $a > 0$, můžeme tedy a nahradit proměnnou r . Zaměníme-li navíc pořadí integrace a derivace (což je možné za jistých předpokladů na u), dostáváme

$$(11.3) \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u(r, \theta, \phi) \sin \theta \, d\theta \, d\phi \right) = 0.$$

To však znamená, že výraz

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u(r, \theta, \phi) \sin \theta \, d\theta \, d\phi$$

který představuje průměr hodnot u na sféře $\{|x| = r\}$, je *nezávislý na polo-měru r* . Konkrétně pro $r \rightarrow 0$ máme

$$(11.4) \quad \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u(\mathbf{0}) \sin \theta \, d\theta \, d\phi = u(\mathbf{0}).$$

Ze vztahů (11.3) a (11.4) plyne, že pro libovolné $a > 0$ platí:

$$(11.5) \quad \boxed{u(\mathbf{0}) = \frac{1}{\text{meas } \partial B(\mathbf{0}, a)} \iint_{\partial B(\mathbf{0}, a)} u \, dS.}$$

Tím je princip důkazu věty o průměru ve třech dimenzích dokončen. (Uvědomte si, že myšlenku důkazu lze použít i obecně v n dimenzích.) ■

Stejně jako v případě dvou dimenzí (viz věta 10.10), je přímým důsledkem věty o průměru *silná verze principu maxima*.

Věta 11.2 (Silný princip maxima). *Nechť Ω je libovolná oblast v $\mathbb{R}^3$. Ne-konstantní harmonická funkce v Ω , spojitá v $\overline{\Omega}$, nemůže nabývat svého maxima (minima) uvnitř Ω , ale pouze na hranici $\partial\Omega$.*

Myšlenka důkazu je naprosto stejná jako v případě věty 10.10, proto ji zde nebudeme opakovat.

11.3.2 Dirichletův princip

Další důležitou matematickou větou, která plyne z první Greenovy identity a má i své fyzikální opodstatnění, je *Dirichletův princip*.

Věta 11.3 (Dirichletův Princip). *Nechť $u(\mathbf{x})$ je harmonická funkce na oblasti Ω , která splňuje Dirichletovu okrajovou podmínku*

$$(11.6) \quad u(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}) \quad \text{na } \partial\Omega.$$

Nechť $w(\mathbf{x})$ je libovolná spojitě diferencovatelná funkce na $\overline{\Omega}$ splňující (11.6). Pak

$$E(w) \geq E(u),$$

kde E je energie definovaná vztahem

$$(11.7) \quad E(w) = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} |\nabla w|^2 d\mathbf{x}.$$

Jinými slovy, Dirichletův princip říká, že mezi všemi funkcemi splňujícími okrajovou podmínku (11.6) právě harmonická funkce odpovídá stavu s nejnižší energií. Výraz (11.7) představuje *potenciální energii* – nekoná se žádný pohyb a tudíž je kinetická energie nulová. Mezi základní fyzikální principy patří, že každý systém má tendenci setrvávat ve stavu s nejnižší energií. Harmonické funkce tedy popisují tyto nejčastěji se vyskytující „základní (klidové) stavy“.

Důkaz věty 11.3. Označme $w = u + v$ a upravme definiční vztah energie (11.7) následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} E(w) &= \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} |\nabla(u+v)|^2 d\mathbf{x} \\ &= E(u) + \iiint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\mathbf{x} + E(v). \end{aligned}$$

Na prostřední člen aplikujeme první Greenovu identitu a využijeme skutečnosti, že $v = 0$ na $\partial\Omega$ (u i w splňují stejnou okrajovou podmínku) a $\Delta u = 0$ v Ω . Odtud plyne rovnost $\iiint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\mathbf{x} = 0$ a tedy

$$E(w) = E(u) + E(v).$$

Protože zřejmě platí $E(v) \geq 0$, dostáváme $E(w) \geq E(u)$ a Dirichletův princip je dokázán. ■

11.3.3 Jednoznačnost řešení Dirichletovy úlohy

Přímým důsledkem principu maxima je jednoznačnost řešení Dirichletovy úlohy pro Poissonovu rovnici. Čtenáře odkazujeme na větu 10.8 a její důkaz, který lze použít v libovolné dimenzi. Zde si ukážeme jinou techniku důkazu založenou na tzv. *energetické metodě* spočívající v aplikaci první Greenovy identity.

Uvažujme Dirichletovu úlohu $\Delta u = f$ v oblasti Ω , $u = h$ na hranici $\partial\Omega$ a dvojici řešení u_1, u_2 . Označme jejich rozdíl $u = u_1 - u_2$. Funkce u je harmonickou funkcí v Ω s nulovými hodnotami na hranici $\partial\Omega$. Nyní použijeme první Greenovu identitu (11.2) pro $v = u$. Protože u je harmonická funkce (tj. $\Delta u = 0$ v Ω), dostáváme

$$\iint_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint_{\Omega} |\nabla u|^2 d\mathbf{x}.$$

Jelikož $u = 0$ na hranici $\partial\Omega$, levá strana je rovna nule. Odtud tedy plyne

$$\iiint_{\Omega} |\nabla u|^2 d\mathbf{x} = 0,$$

z čehož vyplývá $|\nabla u| = 0$ v Ω . To znamená, že funkce u musí být v oblasti Ω konstantní. Protože však zároveň nabývá nulových hodnot na hranici $\partial\Omega$, dostáváme, že $u(\mathbf{x}) \equiv 0$ v Ω a tedy $u_1(\mathbf{x}) \equiv u_2(\mathbf{x})$ v Ω .

Obdobným způsobem bychom dokázali, že řešení *Neumannovy úlohy* je určeno *jednoznačně až na konstantu* (viz cvičení 1 v odstavci 11.7).

11.3.4 Nutná podmínka řešitelnosti Neumannovy úlohy

Zvolíme-li speciálně $v \equiv 1$, dostává první Greenova identita podobu

$$(11.8) \quad \iint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint_{\Omega} \Delta u d\mathbf{x}.$$

Uvažujme-li Neumannovu úlohu na oblasti Ω

$$(11.9) \quad \begin{cases} \Delta u = f(x) & \text{v } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = h(x) & \text{na } \partial\Omega \end{cases}$$

a dosadíme-li za $\frac{\partial u}{\partial n}$ a Δu do vztahu (11.8), získáme nutnou podmínku řešitelnosti úlohy (11.9) ve tvaru

$$(11.10) \quad \iint_{\partial\Omega} h dS = \iiint_{\Omega} f d\mathbf{x}.$$

To znamená, že pokud má existovat řešení Neumannovy úlohy, vstupní data (funkce f a h) nemohou být zcela libovolná, ale musí splňovat podmínku (11.10). Navíc lze ukázat, že podmínka (11.10) je zároveň podmínkou postačující k tomu, aby úloha (11.9) měla řešení. Z hlediska řešitelnosti tedy není Neumannova úloha korektní. Rovněž z hlediska jednoznačnosti zde zaznamenáváme nekořektnost (řešení zůstává řešením i po přičtení libovolné konstanty). Přesto má Neumannova okrajová úloha rozumný smysl a v aplikacích se velice často vyskytuje.

11.4 Druhá Greenova identita a věta o reprezentaci

Použijeme-li první Greenovu identitu pro dvojici funkcí u a v a následně pro dvojici v a u a obě rovnosti od sebe odečteme, dostaneme vztah

$$(11.11) \quad \boxed{\iint_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) \, d\mathbf{x} = \iint_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) \, dS,}$$

který je znám pod označením *druhá Greenova identita*.

Důležitým důsledkem druhé Greenovy identity je tzv. *věta o reprezentaci*, která říká, že hodnotu harmonické funkce v libovolném vnitřním bodě oblasti Ω lze vyjádřit pouze pomocí jejích hodnot na hranici $\partial\Omega$.

Věta 11.4 (Věta o reprezentaci). *Nechť $\mathbf{x}_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$. Pro každou harmonickou funkci na oblasti Ω a spojitou na $\overline{\Omega}$ platí*

$$(11.12) \quad \boxed{u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial\Omega} \left[-u(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \right) + \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}) \right] \, dS.}$$

Povšimněte si, že ve vztahu (11.12) se vyskytuje základní radiálně symetrická harmonická funkce $r^{-1} = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^{-1}$, s kterou jsme se již setkali v předchozích odstavcích této kapitoly, pouze posunutá o vektor $\mathbf{x}_0$.

Důkaz. Vztah (11.12) je speciálním případem druhé Greenovy identity pro volbu

$$v(\mathbf{x}) = \frac{-1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}.$$

Tato funkce je však *neomezená* v bodě $\mathbf{x}_0$, proto nemůžeme druhou Greenovu identitu použít na celé oblasti Ω . Označme tedy Ω_ε oblast $\Omega \setminus B(\mathbf{x}_0, \varepsilon)$, kde

$B(\mathbf{x}_0, \varepsilon) \subset \Omega$ je koule se středem v bodě $\mathbf{x}_0$ a poloměrem ε . Tato oblast je již přípustná pro použití druhé Greenovy identity.

Pro jednoduchost posuňme bod $\mathbf{x}_0$ do počátku (opět připomínáme invariančnost Laplaceova operátoru vůči posunutí). Pak tedy $v(\mathbf{x}) = -1/(4\pi r)$, kde $r = |\mathbf{x}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$. Využijeme-li skutečnosti, že $\Delta u = \Delta v = 0$ na Ω_ε , dostáváme po aplikaci druhé Greenovy identity rovnost

$$-\frac{1}{4\pi} \iint_{\partial\Omega_\varepsilon} \left[u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{\partial u}{\partial n} \frac{1}{r} \right] dS = 0.$$

Avšak hranice $\partial\Omega_\varepsilon$ se skládá ze dvou částí: z hranice původní oblasti $\partial\Omega$ a ze sféry $\partial B(\mathbf{x}_0, \varepsilon)$. Na této sféře navíc platí $\partial/\partial n = -\partial/\partial r$. Předchozí plošný integrál se tedy rozpadne na dvě části a můžeme psát

$$\begin{aligned} (11.13) \quad & -\frac{1}{4\pi} \iint_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{\partial u}{\partial n} \frac{1}{r} \right) dS \\ & = -\frac{1}{4\pi} \iint_{r=\varepsilon} \left(u \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{\partial u}{\partial r} \frac{1}{r} \right) dS. \end{aligned}$$

Tato rovnost musí platit pro libovolně malé $\varepsilon > 0$. Na sféře $|\mathbf{x}| = r = \varepsilon$ máme

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} = -\frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Pravou stranu vztahu (11.13) tedy můžeme přepsat na tvar

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \iint_{r=\varepsilon} u dS + \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iint_{r=\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial r} dS = \bar{u} + \varepsilon \overline{\frac{\partial u}{\partial r}},$$

kde $\bar{u}$ značí integrální průměr funkce $u(\mathbf{x})$ na sféře $|\mathbf{x}| = r = \varepsilon$ a $\overline{\partial u/\partial r}$ představuje integrální průměr hodnot $\partial u/\partial n$ na této sféře. Provedeme-li nyní limitní přechod pro $\varepsilon \rightarrow 0$, dostáváme

$$\bar{u} + \varepsilon \overline{\frac{\partial u}{\partial r}} \longrightarrow u(\mathbf{0}) + 0 \times \frac{\partial u}{\partial r}(\mathbf{0}) = u(\mathbf{0})$$

(funkce u je spojitá a $\partial u/\partial r$ omezená). Odtud a ze vztahu (11.13) již snadno získáme platnost vztahu (11.12). (Zdůvodněte!) ■

Poznámka 11.5. Stejným postupem bychom získali odpovídající formuli v libovolné dimenzi. Důležitou roli vždy hraje příslušná základní radiálně symetrická harmonická funkce, tj. v případě $N \geq 3$ funkce r^{-N+2} a v případě $N = 2$

funkce $\ln r$ (viz odstavec 6.3). Konkrétně ve *dvou dimenzích* má reprezentační formule podobu

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \left(u(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n} (\ln |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|) - \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}) \ln |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \right) ds,$$

kde $\Delta u = 0$ v rovinné oblasti Ω a $\mathbf{x}_0 \in \Omega$. Integrujeme zde podél křivky $\partial\Omega$ a ds značí element délky oblouku této křivky.

11.5 Greenova funkce okrajové úlohy

Hlavní nevýhodou věty o reprezentaci je skutečnost, že vztah (11.12) obsahuje hraniční hodnoty jak samotné funkce u , tak derivace $\frac{\partial u}{\partial n}$. Avšak při řešení standardních okrajových úloh máme obvykle zadány buď Dirichletovy okrajové podmínky, nebo Neumannovy okrajové podmínky, nikoli oboje současně! Věta o reprezentaci se opírá o dvě vlastnosti funkce $v(\mathbf{x}) = -1/(4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|)$: jde o funkci harmonickou mimo bod $\mathbf{x}_0$ a singularita v tomto bodě má „vhodný“ tvar. Naším cílem je modifikovat tuto funkci tak, aby jeden člen v předpisu (11.12) vymizel. Takto modifikovanou funkci budeme nazývat *Greenovou funkcí* příslušnou oblasti Ω .

Definice 11.6. *Greenova funkce* $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ příslušná Laplaceovu operátoru, homogenní Dirichletově okrajové podmínce, oblasti Ω a bodu $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ je funkce definovaná následujícími vlastnostmi:

- (i) $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ má spojité druhé parciální derivace vzhledem k $\mathbf{x}$ a $\Delta G = 0$ v Ω s výjimkou bodu $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ (Laplaceův operátor je zde uvažován vzhledem k $\mathbf{x}$, zatímco $\mathbf{x}_0$ hraje roli parametru).
- (ii) $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = 0$ pro $\mathbf{x} \in \partial\Omega$.
- (iii) Funkce $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + 1/(4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|)$ je konečná v bodě $\mathbf{x}_0$, má spojité parciální derivace druhého řádu v celé oblasti Ω a je harmonická.

Lze dokázat, že Greenova funkce existuje a je určena jednoznačně (důkaz jednoznačnosti je založen na principu maxima, resp. na větě o jednoznačné řešitelnosti Dirichletovy úlohy, a jeho detailní provedení necháváme na čtenáři – viz cvičení 2 v odstavci 11.7). Obvykle budeme Greenovu funkci značit $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$, abychom zdůraznili její závislost na bodu $\mathbf{x}_0$.

Věta 11.7. Je-li $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ Greenova funkce, pak řešení Dirichletovy úlohy pro Laplaceovu rovnici můžeme vyjádřit ve tvaru

$$(11.14) \quad u(\mathbf{x}_0) = \iint_{\partial\Omega} u(\mathbf{x}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)}{\partial n} dS.$$

Důkaz. Z věty o reprezentaci víme, že

$$(11.15) \quad u(\mathbf{x}_0) = \iint_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} v \right) dS,$$

kde opět $v(\mathbf{x}) = -(4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|)^{-1}$. Nyní definujme $H(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) - v(\mathbf{x})$. Podle vlastnosti (iii) z definice 11.6 je funkce $H(\mathbf{x})$ harmonická na celé oblasti Ω . Můžeme tedy použít druhou Greenovu identitu na dvojici $u(\mathbf{x})$, $H(\mathbf{x})$:

$$(11.16) \quad 0 = \iint_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial H}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} H \right) dS.$$

Sečteme-li (11.15) a (11.16), dostáváme

$$u(\mathbf{x}_0) = \iint_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial G}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} G \right) dS.$$

Navíc podle vlastnosti (ii) Greenovy funkce je $G = 0$ na hranici $\partial\Omega$. Odtud tedy již přímo plyne dokazovaný vztah (11.14). ■

Poznámka 11.8. Greenova funkce je symetrická, tj.

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = G(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) \quad \text{pro } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0.$$

V elektrostatičce představuje $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ elektrický potenciál uvnitř uzavřeného vodivého povrchu $S = \partial\Omega$ vyvolaný nábojem umístěným v bodě $\mathbf{x}_0$. Symetrie Greenovy funkce je pak známa jako *princip reciprocity*, podle kterého zdroj umístěný v bodě $\mathbf{x}_0$ vyvolá v bodě $\mathbf{x}$ tentýž efekt, jaký by vyvolal zdroj umístěný v bodě $\mathbf{x}$ v bodě $\mathbf{x}_0$.

Greenovu funkci můžeme využít i k řešení *Poissonovy rovnice*.

Věta 11.9. *Dirichletova okrajová úloha pro Poissonovu rovnici*

$$(11.17) \quad \begin{cases} \Delta u = f & \text{v } \Omega, \\ u = h & \text{na } \partial\Omega \end{cases}$$

má jednoznačné řešení dané předpisem

$$(11.18) \quad u(\mathbf{x}_0) = \iint_{\partial\Omega} h(\mathbf{x}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)}{\partial n} dS + \iiint_{\Omega} f(\mathbf{x}) G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) d\mathbf{x}$$

pro libovolný bod $\mathbf{x}_0 \in \Omega$.

Snadno lze ověřit, že $u = u(\mathbf{x})$ dané vztahem (11.18) skutečně řeší úlohu (11.17) – viz cvičení 3 v odstavci 11.7. Otázce jednoznačnosti řešení jsme se věnovali již v odstavci 11.3.

Nedostatkem vztahů (11.14) a (11.18) je nezbytná znalost explicitního vyjádření Greenovy funkce. To je však možné nalézt pouze na oblastech se speciální geometrií. Dva takové případy si ukážeme v následujících odstavcích.

11.6 Dirichletova úloha na poloprostoru a na kouli

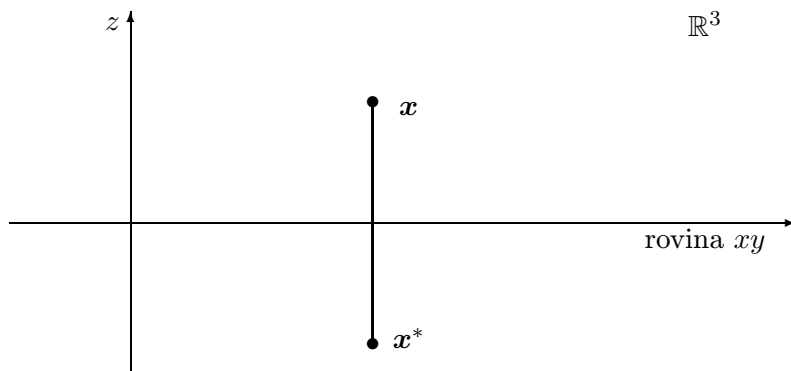
Poloprostor a koule v $\mathbb{R}^3$ patří mezi oblasti, na kterých je možné nalézt explicitně Greenovu funkci a tedy i řešení odpovídající Dirichletovy úlohy. V obou případech použijeme tzv. *metodu zrcadlení (odrazu)*.

11.6.1 Dirichletova úloha na poloprostoru

Ačkoli je poloprostor neomezenou oblastí, všechna výše uvedená tvrzení včetně pojmu Greenovy funkce zůstávají v platnosti, pokud připojíme „okrajovou podmínku v nekonečnu“, kterou rozumíme, že funkce a jejich derivace jdou k nule pro $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$.

Souřadnice bodu $\mathbf{x}$ označme standardně (x, y, z) . Poloprostor $\Omega = \{\mathbf{x}, z > 0\}$ je tedy oblast ležící „nad“ rovinou xy . Každému bodu $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \Omega$ odpovídá jeho *zrcadlový obraz* $\mathbf{x}^* = (x, y, -z)$, který zřejmě v Ω neleží (viz obrázek 11.2).

Již víme, že funkce $1/(4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|)$ splňuje podmínky (i) a (iii) kladené na Greenovu funkci. Pokusíme se ji tedy pozměnit takovým způsobem, abychom zajistili i platnost podmínky (ii).



Obrázek 11.2: Poloprostor a metoda zrcadlení.

Tvrdíme, že Greenova funkce pro poloprostor Ω má podobu

$$(11.19) \quad G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} + \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0^*|}.$$

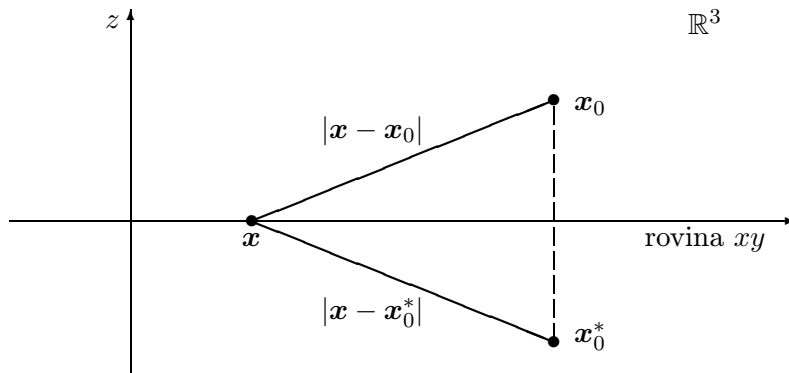
Přepsáno v souřadnicích

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) &= -\frac{1}{4\pi}[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{-1/2} \\ &\quad + \frac{1}{4\pi}[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z + z_0)^2]^{-1/2}. \end{aligned}$$

Povšimněte si, že oba členy se liší pouze složkou $(z \pm z_0)$. Ověřme, že funkce definovaná vztahem (11.19) má vlastnosti Greenovy funkce uvedené v definici 11.6.

- (i) Zřejmě G je konečná a diferencovatelná s výjimkou bodu $\mathbf{x}_0$. Rovněž $\Delta G = 0$.
- (ii) Nechť $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, tj. $z = 0$. Z obrázku 11.3 je patrné, že $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0^*|$. Odtud tedy $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = 0$ na $\partial\Omega$.
- (iii) Protože bod $\mathbf{x}_0^*$ leží mimo oblast Ω , nemá funkce $-1/(4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0^*|)$ v oblasti žádné singularity. Funkce G má tedy jedinou singularitu v bodě $\mathbf{x}_0$ a ta odpovídá požadavkům kladeným na Greenovu funkci.

Tím jsme dokázali, že předpis (11.19) určuje Greenovu funkci příslušnou poloprostoru Ω . Nyní ji můžeme použít k nalezení řešení Dirichletovy úlohy



Obrázek 11.3: Ověření vlastnosti (ii) Greenovy funkce.

(11.20)

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{pro } z > 0, \\ u(x, y, 0) &= h(x, y). \end{aligned}$$

Využijeme formuli (11.14). Povšimněte si, že $\partial G / \partial n = -\partial G / \partial z|_{z=0}$, protože vnější normála $\mathbf{n}$ míří „dolů“ (ven z oblasti). Dále

$$-\frac{\partial G}{\partial z} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{z + z_0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0^*|^3} - \frac{z - z_0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3} \right) = \frac{1}{2\pi} \frac{z_0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3}$$

pro $z = 0$. Odtud již dosazením získáme řešení úlohy (11.20) ve tvaru

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{z_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z_0^2]^{-3/2} h(x, y) \, dx \, dy$$

neboli ve vektorovém zápisu

(11.21)

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{z_0}{2\pi} \iint_{\partial\Omega} \frac{h(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3} \, dS.$$

Poznámka 11.10. Obdobným způsobem můžeme postupovat v libovolné dimenzi. Podívejme se konkrétně na tentýž problém ve dvojrozměrném případě,

tj. uvažujme Laplaceovu rovnici v „horní polorovině“:

$$(11.22) \quad \boxed{\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0, & x \in \mathbb{R}, y > 0, \\ u(x, 0) &= h(x), & x \in \mathbb{R}. \end{aligned}}$$

Příslušná Greenova funkce má tvar

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| - \frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0^*|,$$

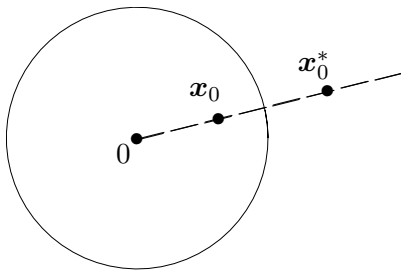
kde $\mathbf{x} = (x, y)$ a $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$. Řešení Dirichletovy úlohy (11.22) je pak dáno předpisem

$$\boxed{u(x_0, y_0) = \frac{y_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(x)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2} dx = \frac{y_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(x)}{(x - x_0)^2 + y_0^2} dx.}$$

Povšimněme si, že úloha (11.22) byla se stejným výsledkem řešena již v kapitole 9, tenkrát jsme ovšem k nalezení řešení použili Fourierovu transformaci (viz poznámka 9.12).

11.6.2 Dirichletova úloha na kouli

Další oblastí, na které je možné řešit Dirichletovu úlohu pomocí explicitně nalezené Greenovy funkce, je koule $\Omega = \{|\mathbf{x}| < a\}$ s poloměrem a . I nyní použijeme *metodu zrcadlení*, tentokrát však vzhledem ke sféře $\{|\mathbf{x}| = a\}$, která je hranicí $\partial\Omega$ (viz obrázek 11.4). Metoda se v tomto případě nazývá *sférickou inverzí*.



Obrázek 11.4: Koule Ω a sférická inverze.

Uvažujme pevný bod $\mathbf{x}_0 \in \Omega$. Odražený (zrcadlený) bod $\mathbf{x}_0^*$ je určen následujícími vlastnostmi:

- (i) $\mathbf{x}_0^*$ leží na přímce procházející body $\mathbf{0}$ a $\mathbf{x}_0$,
- (ii) jeho vzdálenost od počátku je dána vztahem $|\mathbf{x}_0| |\mathbf{x}_0^*| = a^2$.

To znamená, že

$$\mathbf{x}_0^* = \frac{a^2 \mathbf{x}_0}{|\mathbf{x}_0|^2}.$$

Nechť $\mathbf{x}$ je libovolný bod a označme $\rho(\mathbf{x}) = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$ a $\rho^*(\mathbf{x}) = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0^*|$. Pak je pro $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$ Greenova funkce na kouli Ω dána předpisem

$$(11.23) \quad G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = -\frac{1}{4\pi\rho} + \frac{a}{|\mathbf{x}_0|} \frac{1}{4\pi\rho^*}.$$

Toto tvrzení ověříme prověřením vlastností (i), (ii) a (iii) z definice 11.6. Příklad $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ prozkoumáme zvlášť.

Především jedinou singularitou funkce G je bod $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, protože $\mathbf{x}_0^*$ leží mimo oblast Ω . Funkce $1/\rho$ a $1/\rho^*$ jsou obě harmonické v Ω kromě bodu $\mathbf{x}_0$. Podmínky (i) a (iii) jsou tedy splněny.

K ověření podmínky (ii) ukážeme, že ρ^* je úměrné ρ pro všechna $\mathbf{x}$ ležící na sféře $|\mathbf{x}| = a$. Ze shodnosti trojúhelníků na obrázku 11.5 plyne

$$(11.24) \quad \left| \frac{r_0}{a} \mathbf{x} - \frac{a}{r_0} \mathbf{x}_0 \right| = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|,$$

kde $r_0 = |\mathbf{x}_0|$. Pro levou stranu rovnice (11.24) platí

$$\frac{r_0}{a} \left| \mathbf{x} - \frac{a^2}{r_0^2} \mathbf{x}_0 \right| = \frac{r_0}{a} \rho^*.$$

Odtud tedy dostáváme

$$\frac{r_0}{a} \rho^* = \rho \quad \text{pro všechna } |\mathbf{x}| = a.$$

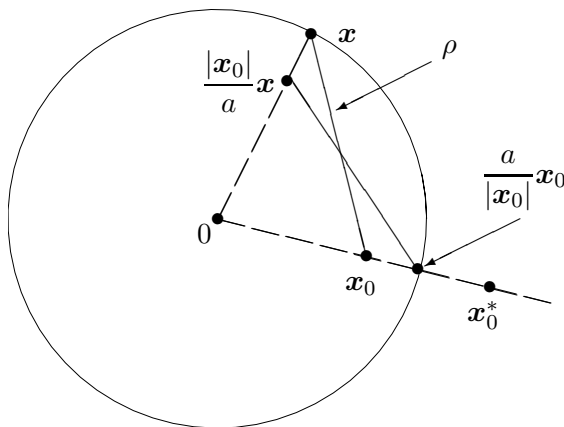
To však znamená, že funkce $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = -\frac{1}{4\pi\rho} + \frac{a}{r_0} \frac{1}{4\pi\rho^*}$ je na sféře $|\mathbf{x}| = a$ nulová a podmínka (ii) je splněna.

Formuli (11.23) můžeme přepsat do tvaru

$$(11.25) \quad G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} + \frac{1}{4\pi \left| \frac{r_0}{a} \mathbf{x} - \frac{a}{r_0} \mathbf{x}_0 \right|}.$$

V případě $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ má Greenova funkce podobu

$$(11.26) \quad G(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} + \frac{1}{4\pi a}.$$



Obrázek 11.5: Shodné trojúhelníky a úměrnost ρ a ρ^* .

Ověření necháváme na čtenáři (viz cvičení 4 v odstavci 11.7).

Nyní využijeme znalosti Greenovy funkce k nalezení řešení Dirichletovy okrajové úlohy pro Laplaceovu rovnici na kouli

$$(11.27) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{pro } |\mathbf{x}| < a, \\ u = h & \text{pro } |\mathbf{x}| = a. \end{cases}$$

Z věty 11.1 (o průměru) již víme, že $u(\mathbf{0})$ je průměrem hodnot funkce $h(\mathbf{x})$ na sféře $\partial\Omega$. Uvažujme tedy pouze případ $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$. Abychom mohli použít předpis (11.14) z věty 11.4 (o reprezentaci), musíme určit $\partial G/\partial n$ na $|\mathbf{x}| = a$. Vyjdeme ze vztahu $\rho^2 = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2$. Po jeho zderivování podle $\mathbf{x}$ dostáváme $2\rho\nabla\rho = 2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$. Tedy $\nabla\rho = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)/\rho$ a $\nabla(\rho^*) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0^*)/\rho^*$. Nyní vypočteme gradient funkce G ze vztahu (11.23):

$$(11.28) \quad \begin{aligned} \nabla G &= \nabla \left(-\frac{1}{4\pi\rho} + \frac{a}{|\mathbf{x}_0|} \frac{1}{4\pi\rho^*} \right) \\ &= \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{4\pi\rho^3} - \frac{a}{|\mathbf{x}_0|} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0^*}{4\pi\rho^{*3}}. \end{aligned}$$

Připomínáme, že $\mathbf{x}_0^* = (a/r_0)^2 \mathbf{x}_0$. V případě $|\mathbf{x}| = a$ jsme výše ukázali, že $\rho^* = (a/r_0)\rho$. Dosadíme-li tyto výrazy do vyjádření (11.28), dostáváme

$$\nabla G = \frac{1}{4\pi\rho^3} \left[\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 - \left(\frac{r_0}{a} \right)^2 \mathbf{x} + \mathbf{x}_0 \right]$$

na sféře $\partial\Omega$ a tedy

$$\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\mathbf{x}}{a} \cdot \nabla G = \frac{a^2 - r_0^2}{4\pi a \rho^3}.$$

Nyní již dosazením do vzorce (11.14) z věty 11.4 (o reprezentaci) získáme řešení úlohy (11.27) ve tvaru

$$(11.29) \quad u(\mathbf{x}_0) = \frac{a^2 - |\mathbf{x}_0|^2}{4\pi a} \iint_{|\mathbf{x}|=a} \frac{h(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3} dS.$$

Jedná se vlastně o trojrozměrnou verzi Poissonovy formule. Často se můžeme setkat s přepisem vzorce (11.29) do sférických souřadnic:

$$u(r_0, \theta_0, \phi_0) = \frac{a(a^2 - r_0^2)}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{h(\theta, \phi)}{(a^2 + r_0^2 - 2ar_0 \cos \psi)^{3/2}} \sin \theta d\theta d\phi,$$

kde ψ značí úhel mezi „vektory“ $\mathbf{x}_0$ a $\mathbf{x}$.

Poznámka 11.11. Stejným způsobem můžeme postupovat ve dvoudimenzionálním případě. Uvažujme úlohu

$$(11.30) \quad \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & x^2 + y^2 < a^2, \\ u(x, y) = h(x, y), & x^2 + y^2 = a^2. \end{cases}$$

Odpovídající Greenova funkce má podobu

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \rho - \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{a}{|\mathbf{x}_0|} \rho^* \right).$$

Příslušné řešení Dirichletovy úlohy (11.30) je pak

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{a^2 - |\mathbf{x}_0|^2}{2\pi a} \int_{|\mathbf{x}|=a} \frac{h(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2} ds,$$

což přesně odpovídá Poissonově formuli (8.17) odvozené v kapitole 6 zcela odlišným způsobem.

11.7 Cvičení

V následujících cvičeních značí $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ jednu ze sférických souřadnic zavedených v odstavci 11.1.

1. Dokažte, že řešení Neumannovy úlohy pro Poissonovu rovnici je v oblasti Ω určeno jednoznačně až na konstantu.
2. Dokažte, že Greenova funkce příslušná Laplaceovu operátoru, oblasti Ω a bodu $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ je určena jednoznačně.
3. Dokažte vztah (11.18).
4. Ověřte vzorec (11.26) pro $G(\mathbf{x}, \mathbf{0})$.
5. Uvažujte Dirichletovu úlohu

$$\begin{cases} \Delta u = \lambda u, & \text{v } \Omega, \\ u = 0, & \text{na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Vynásobte rovnici funkcí u a integrujte ji přes oblast Ω . Pomocí první Greenovy identity dokažte, že netriviální řešení $u = u(x, y, z)$ může existovat pouze pro záporné hodnoty λ .

6. Nalezněte radiálně symetrická řešení rovnice $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = k^2 u$, kde k je kladná konstanta. Použijte substituci $v = u/r$.

$$[u(x, y, z) = \frac{1}{r}(Ae^{kr} + Be^{-kr})]$$

7. Řešte rovnici $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ ve skořepině $\{0 < a < r < b\}$ s okrajovými podmínkami $u = A$ pro $r = a$ a $u = B$ pro $r = b$, kde A a B jsou konstanty. Hledejte radiálně symetrické řešení.

$$[u(x, y, z) = B + (A - B)(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})^{-1}(\frac{1}{r} - \frac{1}{b})]$$

8. Řešte rovnici $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 1$ ve skořepině $\{a < r < b\}$ s podmínkou $u = 0$ na vnější i vnitřní hranici.

$$[u(x, y, z) = \frac{1}{6}(r^2 - a^2) - \frac{1}{6}ab(a + b)(\frac{1}{a} - \frac{1}{r})]$$

9. Řešte rovnici $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 1$ ve skořepině $\{a < r < b\}$ s podmínkami $u = 0$ pro $r = a$ a $\partial u / \partial r = 0$ pro $r = b$. Pak uvažujte limitní přechod $a \rightarrow 0$ a výsledek zdůvodněte.

10. Ukažte, že homogenní Newtonova úloha

$$\Delta u = 0 \quad \text{v } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial n} + au = 0 \quad \text{na } \partial\Omega,$$

kde Ω je oblast v $\mathbb{R}^3$ a a je kladná konstanta, má pouze triviální řešení $u \equiv 0$. Využijte tento výsledek k důkazu jednoznačnosti okrajové úlohy

$$\Delta u = f \quad \text{v } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial n} + au = g \quad \text{na } \partial\Omega.$$

11. Nechť $\phi(\mathbf{x})$ je libovolná C^2 -funkce definovaná na $\mathbb{R}^3$ a nulová vně nějaké koule. Ukažte, že

$$\phi(\mathbf{0}) = -\frac{1}{4\pi} \iiint \frac{1}{|\mathbf{x}|} \Delta \phi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Zde integrujeme přes oblast, kde je funkce $\phi(\mathbf{x})$ nenulová.

12. Nalezněte Greenovu funkci na polokouli $\Omega = \{x^2 + y^2 + z^2 < a^2, z > 0\}$. Uvažujte řešení na celé kouli a použijte metodu zrcadlení podobně jako v odstavci 11.6.

[Výsledek je součtem čtyř členů obsahujících vzdálenosti bodu $\mathbf{x}$ od bodů $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_0^*$, $\mathbf{x}_0^\#$ a $\mathbf{x}_0^{*\#}$, kde $*$ značí zrcadlení vzhledem ke sféře a $\#$ značí zrcadlení vzhledem k rovině $z = 0$.]

13. Nalezněte Greenovu funkci na osmině koule $\Omega = \{x^2 + y^2 + z^2 < a^2, x > 0, y > 0, z > 0\}$.
14. Stejným způsobem, jakým jsme na oblasti Ω definovali Greenovu funkci, můžeme definovat tzv. *Neumannovu funkci* $N(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ pouze s tím rozdílem, že vlastnost (ii) nahradíme Neumannovou okrajovou podmínkou

$$\frac{\partial N}{\partial n} = 0 \quad \text{pro } \mathbf{x} \in \partial\Omega.$$

Vyslovte a dokažte analogii věty 11.7 o vyjádření řešení Neumannovy úlohy pomocí Neumannovy funkce.

15. Řešte Neumannovu úlohu na poloprostoru:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{pro } z > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial z}(x, y, 0) = h(x, y), & u \text{ omezené v nekonečnu.} \end{cases}$$

Uvažujte úlohu pro funkci $v = \partial u / \partial z$.

$$[u(x, y, z) = C + \int_{-\infty}^{\infty} h(x - \xi) \ln(y^2 + \xi^2) \, d\xi]$$

16. Uvažujte čtyřrozměrný Laplaceův operátor $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + u_{ww}$. Ukažte, že jeho fundamentálním symetrickým řešením je funkce $r^{-3/2}$, kde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$.

17. Dokažte vektorovou obdobu druhé Greenovy identity

$$\iiint_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u}) d\mathbf{x} = \iint_{\partial\Omega} (\mathbf{u} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} - \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dS,$$

kde $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ jsou hladké vektorové funkce, Ω je oblast s hladkou hranicí, $\mathbf{n}$ je vektor vnější normály k hranici $\partial\Omega$ a $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ značí vektorový součin vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$.

18. Dokažte první Greenovu identitu pro biharmonický operátor Δ^2 :

$$\iiint_{\Omega} v \Delta^2 u d\mathbf{x} = \iiint_{\Omega} \Delta u \Delta v d\mathbf{x} - \iint_{\partial\Omega} \Delta u \frac{\partial v}{\partial n} dS + \iint_{\partial\Omega} v \frac{\partial}{\partial n} (\Delta u) dS.$$

Zde $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u) = u_{xxxx} + u_{yyyy} + u_{zzzz} + 2u_{xxyy} + 2u_{yyzz} + 2u_{xxzz}$.

19. Funkce u , která vyhovuje rovnici $\Delta^2 u = 0$, se nazývá biharmonická. Dokažte Dirichletův princip pro biharmonické funkce:

„Mezi všemi funkcemi v , které splňují okrajové podmínky

$$v(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial v}{\partial n}(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega,$$

kde $g(\mathbf{x})$, $h(\mathbf{x}) \in C(\partial\Omega)$, dosahuje nejnižší energie

$$E(v) = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} |\Delta v|^2 d\mathbf{x}$$

právě biharmonická funkce.“

12

Kapitola

Difuzní rovnice ve vyšších dimenzích

V předchozích kapitolách jsme uvažovali pouze jednorozměrné modely evolučních rovnic. Většina fyzikálních jevů a dějů se však odehrává v rovině nebo v prostoru. Proto se nyní podíváme na difuzní rovnici (resp. rovnici vedení tepla) ve vyšších dimenzích, tj. na rovnici

$$(12.1) \quad u_t - k\Delta u = f,$$

kde $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ v případě dvojrozměrného modelu, respektive $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ v případě trojrozměrného modelu.

12.1 Počáteční úloha v $\mathbb{R}^3$

12.1.1 Homogenní úloha

Uvažujme počáteční úlohu

$$(12.2) \quad \boxed{\begin{aligned} u_t &= k\Delta u, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, & t > 0, \\ u(\mathbf{x}, 0) &= \varphi(\mathbf{x}). \end{aligned}}$$

Jako obvykle značíme $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Jak již víme z jednorozměrného případu (viz kapitola 5), řešení počáteční úlohy pro difuzní rovnici na $\mathbb{R}$ můžeme vyjádřit v integrálním tvaru

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x - y, t) \varphi(y) \, dy,$$

kde φ je daná počáteční podmínka a G je tzv. *fundamentální řešení* (nebo též difuzní jádro)

$$G(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}.$$

Nyní si ukážeme, že tentýž vztah platí i ve vyšších dimenzích.

Začneme s následujícím pozorováním. Nechtě $u_1(x, t)$, $u_2(y, t)$, $u_3(z, t)$ jsou řešení jednorozměrné difuzní rovnice. Pak $u(x, y, z, t) = u_1(x, t)u_2(y, t)u_3(z, t)$ řeší difuzní rovnici v $\mathbb{R}^3$. Doporučujeme čtenáři ověřit toto tvrzení přímým dosazením. To znamená, že rovněž funkce

$$\begin{aligned} G_3(\mathbf{x}, t) &= G(x, t)G(y, t)G(z, t) \\ &= \frac{1}{8\sqrt{(\pi kt)^3}} e^{-\frac{1}{4kt}(x^2+y^2+z^2)} = \frac{1}{8\sqrt{(\pi kt)^3}} e^{-\frac{1}{4kt}|\mathbf{x}|^2} \end{aligned}$$

řeší difuzní rovnici $u_t - k\Delta u = 0$ v $\mathbb{R}^3$. Jelikož platí

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} G_3(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = 1$$

(čtenář si laskavě ověří pomocí Fubiniho věty), můžeme funkci G_3 nazvat opět *fundamentálním řešením* (nebo *difuzním jádrem*).

Naším cílem je ukázat, že řešení počáteční úlohy (12.2) lze opět zapsat ve tvaru konvoluce fundamentálního řešení $G_3(\mathbf{x}, t)$ a počáteční podmínky $\varphi(\mathbf{x})$, tj. ve tvaru

$$(12.3) \quad u(\mathbf{x}, t) = \iiint_{\mathbb{R}^3} G_3(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) \varphi(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

Zde $\mathbf{y} = (\xi, \eta, \theta) \in \mathbb{R}^3$.

Pro začátek uvažujme speciální počáteční podmínku se separovanými proměnnými

$$\varphi(\mathbf{x}) = \phi(x)\psi(y)\zeta(z).$$

V tomto případě máme

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= \iiint_{\mathbb{R}^3} G_3(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) \varphi(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G(x - \xi) \phi(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} G(y - \eta) \psi(\eta) d\eta \int_{-\infty}^{\infty} G(z - \theta) \zeta(\theta) d\theta \\ &= u_1(x, t) u_2(y, t) u_3(z, t), \end{aligned}$$

kde u_1, u_2, u_3 jsou řešení jednorozměrné difuzní rovnice. Tedy $u(\mathbf{x}, t)$ musí řešit trojrozměrnou difuzní rovnici. Navíc platí

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0+} u(\mathbf{x}, t) &= \lim_{t \rightarrow 0+} u_1(x, t) \lim_{t \rightarrow 0+} u_2(y, t) \lim_{t \rightarrow 0+} u_3(z, t) \\ &= \phi(x)\psi(y)\zeta(z) = \varphi(\mathbf{x})\end{aligned}$$

a počáteční podmínka se separovanými proměnnými je rovněž splněna. Díky linearitě rovnice platí stejný výsledek pro libovolnou konečnou lineární kombinaci funkcí se separovanými proměnnými:

$$(12.4) \quad \varphi(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n c_k \phi_k(x) \psi_k(y) \zeta_k(z).$$

Lze ukázat, že libovolnou spojitou a omezenou funkci v $\mathbb{R}^3$ lze na omezených oblastech stejnoměrně aproximovat funkcemi typu (12.4). Tato skutečnost plyne z vlastností Bernsteinových polynomů, které přesahují rámec tohoto textu. Nicméně odtud plyne následující existenční výsledek (viz např. [20]).

Věta 12.1. *Nechť $\varphi(\mathbf{x})$ je spojitá a omezená funkce na $\mathbb{R}^3$. Pak existuje řešení počáteční úlohy (12.2) dané předpisem*

$$u(\mathbf{x}, t) = \iiint_{\mathbb{R}^3} G_3(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) \varphi(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}$$

a platí

$$\lim_{t \rightarrow 0+} u(\mathbf{x}, t) = \varphi(\mathbf{x})$$

stejnoměrně na omezených oblastech v $\mathbb{R}^3$.

Poznámka 12.2. Tentýž výsledek platí v libovolné dimenzi. Obecně N -rozměrné ($N \geq 1$) fundamentální řešení má podobu

$$G_N(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2^N \sqrt{(\pi k t)^N}} e^{-\frac{1}{4kt} |\mathbf{x}|^2},$$

kde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}$, a řešení počáteční úlohy pro homogenní difuzní rovnici na $\mathbb{R}^N$ je dáno formulí

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^N} G_N(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) \varphi(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}.$$

12.1.2 Nehomogenní úloha

Stejným postupem, jaký jsme použili v odstavci 5.2, můžeme vyřešit difuzní rovnici v prostoru $\mathbb{R}^3$ s vnějšími zdroji:

$$(12.5) \quad \begin{cases} u_t - k\Delta u = f, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, t > 0, \\ u(\mathbf{x}, 0) = \varphi(\mathbf{x}). \end{cases}$$

Její řešení je dáno vztahem

$$u(\mathbf{x}, t) = \iiint_{\mathbb{R}^3} G_3(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) \varphi(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_0^t \iiint_{\mathbb{R}^3} G_3(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) f(\mathbf{y}, s) d\mathbf{y} ds.$$

Odvození a ověření tohoto vztahu necháváme na čtenáři.

12.2 Difuze na omezených oblastech, Fourierova metoda

V této kapitole se zaměříme na difuzní rovnici na omezených oblastech a na její řešení. Budeme tedy obecně uvažovat počátečně-okrajovou úlohu

$$\begin{cases} u_t(\mathbf{x}, t) = k\Delta u(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \Omega, t > 0, \\ u(\mathbf{x}, t) = h_1(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \Gamma_1, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}, t) = h_2(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \Gamma_2, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}, t) + au(\mathbf{x}, t) = h_3(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \Gamma_3, \\ u(\mathbf{x}, 0) = \varphi(\mathbf{x}), \end{cases}$$

kde Ω je oblast v $\mathbb{R}^N$, $\varphi, h_i, i = 1, 2, 3$ jsou dané funkce, a je konstanta a $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 = \partial\Omega$. Z fyzikálního hlediska taková úloha popisuje např. vedení tepla v tělese, které vyplňuje oblast Ω a jeho počáteční teplota je dána funkcí $\varphi(\mathbf{x})$. Na hranici Γ_1 udržujeme teplotu na hodnotě $h_1(\mathbf{x}, t)$, na hranici Γ_2 uvažujeme tepelný tok předepsaný funkcí $h_2(\mathbf{x}, t)$ a na třetím úseku hranice Γ_3 dochází k tepelné výměně s okolním prostředím popsáním koeficientem výměny tepla a a funkcí $h_3(\mathbf{x}, t)$. Obvykle bývá $h_3 = aT_0$, kde T_0 je teplota okolního prostředí.

Stejná úloha popisuje rovněž difuzní proces plynu v oblasti Ω . Funkce $\varphi(\mathbf{x})$ pak představuje počáteční koncentraci plynu. Dirichletova okrajová podmínka na hranici Γ_1 popisuje udržovanou hodnotu koncentrace, Neumannova okrajová podmínka na Γ_2 určuje tok plynu přes hranici a Newtonova okrajová podmínka na Γ_3 popisuje jistou rovnováhu koncentrace plynu a jeho toku přes třetí

segment hranice. V konkrétních případech mohou být některé úseky hranice prázdné.

Jedním ze způsobů jak řešit počátečně-okrajové úlohy tohoto typu je aplikace *Fourierovy metody*. Její použití si ukážeme na jednodušším příkladě. Následující výklad je pouze informativní a některá uvedená fakta by vyžadovala hlubší diskusi. Pro lepší pochopení základní myšlenky metody zde předvedeme pouze formální výpočty.

12.2.1 Fourierova metoda

Řešme difuzní rovnici $u_t = k\Delta u$ na omezené oblasti Ω s *homogenní* Dirichletovou, Neumannovou a Newtonovou okrajovou podmínkou na hranici $\partial\Omega$ a se standardní počáteční podmínkou. Myšlenka Fourierovy metody je stejná jako v případě jedné prostorové dimenze. Nejprve předpokládáme řešení v separovaném tvaru

$$u(\mathbf{x}, t) = V(\mathbf{x})T(t),$$

což po dosazení do rovnice vede na rovnost

$$\frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{\Delta V(\mathbf{x})}{V(\mathbf{x})} = -\lambda,$$

kde λ je konstanta. Tím získáme *úlohu na vlastní čísla* pro Laplaceův operátor

$$(12.6) \quad -\Delta V = \lambda V \quad \text{v } \Omega$$

s obecnými homogenními okrajovými podmínkami

$$(12.7) \quad V = 0 \quad \text{na } \Gamma_1,$$

$$(12.8) \quad \frac{\partial V}{\partial n} = 0 \quad \text{na } \Gamma_2,$$

$$(12.9) \quad \frac{\partial V}{\partial n} + \alpha V = 0 \quad \text{na } \Gamma_3.$$

Lze ukázat, že existuje nekonečná posloupnost nezáporných vlastních čísel λ_n :

$$\lambda_n \rightarrow \infty \quad \text{pro } n \rightarrow \infty,$$

pro něž má okrajová úloha (12.6)–(12.9) netriviální řešení. Příslušné vlastní funkce $V_n(\mathbf{x})$ tvoří – stejně jako v případě Sturmovy-Liouvilleovy úlohy (viz příloha A) – úplný ortogonální systém. Nalézt konkrétní hodnoty λ_n však může být velice obtížné.

Vrátíme-li se k obyčejné diferenciální rovnici v časové proměnné

$$T'(t) + k\lambda_n T(t) = 0,$$

dostaneme systém časově závislých funkcí

$$T_n(t) = A_n e^{-k\lambda_n t}.$$

Z těchto dílčích výsledků získáme řešení ve tvaru

$$(12.10) \quad u(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k\lambda_n t} V_n(\mathbf{x}).$$

To bude vyhovovat zadané počáteční podmínce, pokud ji bude možné rozvinout do Fourierovy řady

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n V_n(\mathbf{x})$$

podle systému $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$. Využijeme-li ortogonalitu vlastních funkcí $V_n(\mathbf{x})$, získáme předpis pro koeficienty A_n :

$$A_n = \frac{\int_{\Omega} \varphi(\mathbf{x}) V_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{\int_{\Omega} V_n^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}.$$

(Jelikož Ω je obecně oblast v $\mathbb{R}^N$, jsou výše uvedené integrály rovněž N -rozměrné!) Předchozí kroky si ukážeme na následujícím konkrétním příkladě.

Příklad 12.3. Určeme rozložení teploty v obdélníku $\Omega = (0, a) \times (0, b)$, jehož hranice je udržována na nulové teplotě a počáteční rozložení je dáno funkcí $\varphi(x, y)$. Řešíme tedy počátečně-okrajovou úlohu

$$(12.11) \quad \begin{cases} u_t = k(u_{xx} + u_{yy}), & (x, y) \in (0, a) \times (0, b), \quad t > 0, \\ u(0, y, t) = u(a, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, b, t) = 0, \\ u(x, y, 0) = \varphi(x, y). \end{cases}$$

Nejprve opět odseparujeme časovou a prostorové proměnné:

$$u(x, y, t) = V(x, y)T(t)$$

a získáme systém rovnic

$$\frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{V_{xx}(x, y) + V_{yy}(x, y)}{V(x, y)} = -\lambda,$$

kde λ je konstanta, neboli

$$T' + k\lambda T = 0, \quad V_{xx} + V_{yy} + \lambda V = 0.$$

Nyní se detailněji zaměříme na prostorovou úlohu. Protože se jedná o lineární stacionární parciální diferenciální rovnici na obdélníku, můžeme znovu použít separaci proměnných. Příslušné řešení tedy hledáme ve tvaru

$$V(x, y) = X(x)Y(y).$$

Po dosazení dostáváme

$$X''Y + XY'' + \lambda XY = 0$$

a po vydělení členem XY

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} - \lambda.$$

Jelikož levá strana závisí pouze na proměnné x a pravá strana závisí pouze na proměnné y , musí být obě strany rovnosti rovny konstantě. Označme ji např. $-\mu$. Tím jsme získali dvě obyčejné diferenciální rovnice

$$X'' + \mu X = 0, \quad Y'' + \nu Y = 0,$$

kde $\nu = \lambda - \mu$. Abychom vyhověli homogenním okrajovým podmínkám z úlohy (12.11), musí funkce X a Y splňovat podmínky

$$X(0) = X(a) = 0, \quad Y(0) = Y(b) = 0.$$

Začneme-li s úlohou v proměnné x , dostaneme

$$\mu_n = \frac{n^2\pi^2}{a^2}, \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Obdobně dostáváme pro úlohu v proměnné y řešení

$$\nu_m = \frac{m^2\pi^2}{b^2}, \quad Y_m(y) = \sin \frac{m\pi y}{b}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Vlastní čísla námi uvažovaného Laplaceova operátoru tedy tvoří posloupnost

$$\lambda_{mn} = \mu_n + \nu_m = \frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2}, \quad m, n \in \mathbb{N},$$

a příslušné vlastní funkce

$$V_{mn}(x, y) = X_n(x)Y_m(y) = \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}, \quad m, n \in \mathbb{N},$$

tvoří ortogonální systém na obdélníku $(0, a) \times (0, b)$. (Povšimněte si dvojitého indexu!) Lze ukázat, že tento systém je úplný a tedy λ_{mn} popisuje množinu

všech vlastních čísel Laplaceova operátoru na množině $(0, a) \times (0, b)$ s homogenními Dirichletovými okrajovými podmínkami. Nyní se můžeme vrátit k časové rovnici $T' + k\lambda_{mn}T = 0$, jejíž řešení mají tvar

$$T_{mn} = A_{mn}e^{-k\lambda_{mn}t}.$$

Řešení původní dvojrozměrné difuzní rovnice lze tedy zapsat následujícím způsobem

$$(12.12) \quad u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} e^{-k\lambda_{mn}t} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}.$$

Funkce v tomto tvaru již automaticky splňují homogenní Dirichletovy okrajové podmínky. Dosud nevyužitou informaci zůstává podmínka počáteční. Lze říci, že pro libovolnou počáteční podmínku, která je rozvinutelná ve Fourierovu řadu

$$(12.13) \quad \varphi(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b},$$

je řešení úlohy (12.11) dáno předpisem (12.12). Využijeme-li ortogonalitu vlastních funkcí, snadno získáme konstanty A_{mn} :

$$A_{mn} = \frac{\int_0^a \int_0^b \varphi(x, y) V_{mn}(x, y) dy dx}{\int_0^a \int_0^b V_{mn}^2(x, y) dy dx}.$$

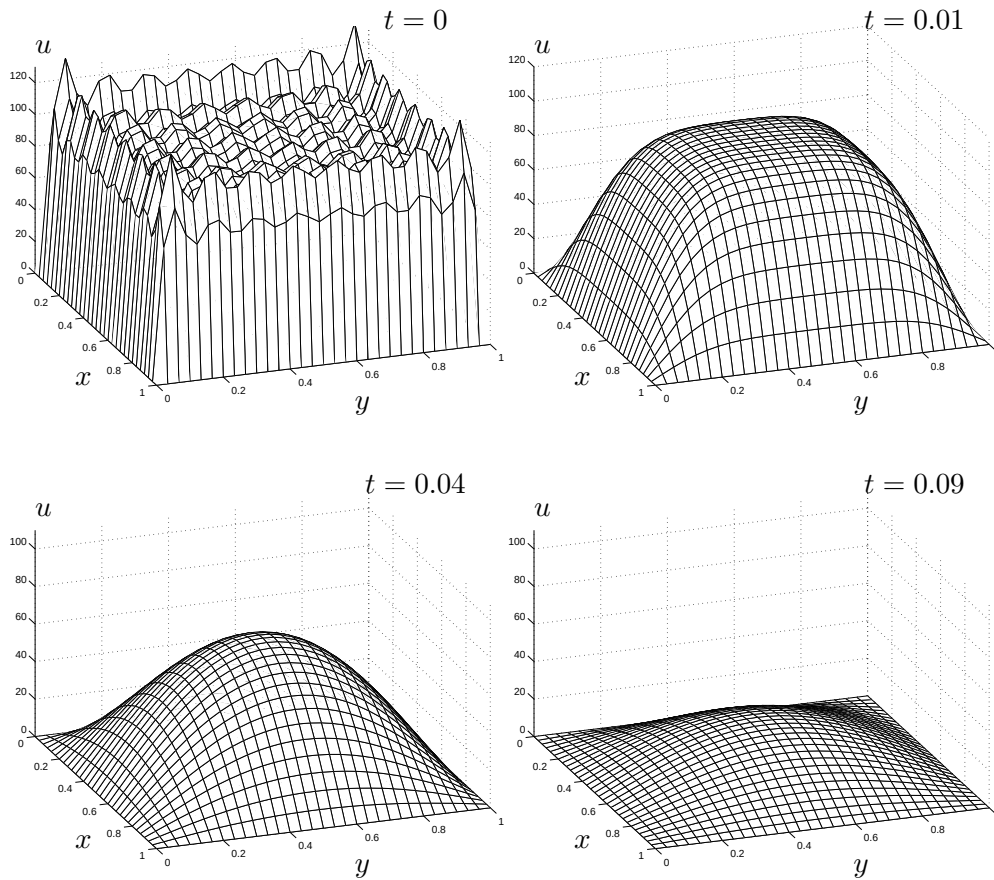
□

Na obrázku 12.1 je zobrazeno řešení úlohy (12.11) s konstantní počáteční podmínkou $\varphi(x) = 100$ a se vstupními daty $a = 1$, $b = 1$, $k = 1$. První graf odpovídá aproximované počáteční podmínce, další tři grafy ilustrují aproximovaná řešení v časech $t = 0.01$, $t = 0.04$ a $t = 0.09$. Použili jsme vztahy (12.12) a (12.13) s částečnými součty do hodnot $m = 15$, $n = 15$.

Stejným postupem bychom řešili též úlohy s jinými typy okrajových podmínek a rovněž úlohy ve vyšších dimenzích.

Příklad 12.4. Řešme počátečně-okrajovou úlohu pro difuzní rovnici $u_t = k\Delta u$ v krychli $\Omega = \{0 < x < \pi, 0 < y < \pi, 0 < z < \pi\}$. Tentokrát uvažujme homogenní Neumannovy okrajové podmínky

$$\begin{aligned} u_x(0, y, z, t) &= u_x(\pi, y, z, t) = 0, \\ u_y(x, 0, z, t) &= u_y(x, \pi, z, t) = 0, \\ u_z(x, y, 0, t) &= u_z(x, y, \pi, t) = 0, \end{aligned}$$



Obrázek 12.1: Grafické znázornění řešení počátečně-okrajové úlohy (12.11) s konstantní počáteční podmínkou na časových hladinách $t = 0, 0.01, 0.04, 0.09$.

a počáteční podmínku

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z).$$

Postupujeme stejným způsobem jako v předchozím příkladu. Nejprve odseparujeme časovou a prostorové proměnné a dostáváme

$$T' + k\lambda T = 0, \quad V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} + \lambda V = 0.$$

Dále použijeme metodu separace proměnných i na prostorovou úlohu. Získáme

tak tři obyčejné diferenciální rovnice

$$\begin{aligned} X'' + \mu X &= 0, \\ Y'' + \nu Y &= 0, \\ Z'' + \eta Z &= 0, \end{aligned}$$

kde $\lambda = \mu + \nu + \eta$. Připojíme okrajové podmínky $X'(0) = X'(\pi) = Y'(0) = Y'(\pi) = Z'(0) = Z'(\pi) = 0$ a nalezneme netriviální řešení příslušných okrajových úloh:

$$\mu_n = n^2, \quad \nu_m = m^2, \quad \eta_l = l^2, \quad l, m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

a

$$X_n(x) = \cos nx, \quad Y_m(y) = \cos my, \quad Z_l(z) = \cos lz, \quad l, m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Tím jsme získali posloupnost vlastních čísel Laplaceova operátoru v krychli $\Omega = \{0 < x < \pi, 0 < y < \pi, 0 < z < \pi\}$ s homogenními Neumannovými okrajovými podmínkami, tj.

$$\lambda_{lmn} = m^2 + n^2 + l^2, \quad m, n, l \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

a příslušný systém vlastních funkcí

$$V_{lmn} = \cos nx \cos my \cos lz, \quad m, n, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Povšimněte si, že v tomto případě má úloha i nulové vlastní číslo s konstantní vlastní funkcí.

Nyní pokračujeme vyřešením časové úlohy. Stejně jako v předchozích případech dostáváme

$$T_{lmn}(t) = B_{lmn} e^{-k\lambda_{lmn}t} \quad \text{pro } (m, n, l) \neq (0, 0, 0)$$

a

$$T_{000}(t) = B_{000}.$$

Nyní již můžeme sestavit požadované řešení ve tvaru řady

$$u(x, y, z, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} B_{lmn} e^{-k\lambda_{lmn}t} \cos nx \cos my \cos lz,$$

kde koeficienty B_{lmn} získáme rozvinutím počáteční podmínky

$$\varphi(x, y, z) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} B_{lmn} \cos nx \cos my \cos lz.$$

Tedy

$$(12.14) \quad B_{lmn} = \frac{2^3}{\pi^3} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \varphi(x, y, z) \cos nx \cos my \cos lz \, dx \, dy \, dz$$

pro $n, m, l > 0$; v případě hodnot B_{0mn} , B_{l0n} a B_{lm0} použijeme vztah (12.14) vynásobený jednou polovinou, v případě B_{00n} , B_{0m0} , B_{l00} jednou čtvrtinou a v případě B_{000} jednou osminou. $\square$

Jak jsme právě viděli, geometrie (konkrétně pravoúhlost) oblasti Ω je jedním z klíčových prvků, které rozhodují o tom, zda jsme schopni získat vlastní čísla a příslušné vlastní funkce uvažovaných problémů. Z předchozích částí již víme, že dalšími oblastmi, které dovolují použít Fourierovu metodu, jsou koule a kruh (nebo jejich vhodné části), protože obě se stávají pravoúhlými po transformaci do sférických, resp. polárních souřadnic. V případě radiálně symetrických situací se navíc úlohy podstatně zjednodušují.

Příklad 12.5 (Difuze na kruhu). Uvažujme úlohu vedení tepla v kruhu

$$(12.15) \quad \begin{cases} u_t = k\Delta u, & x^2 + y^2 < a^2, \, t > 0, \\ u(x, y, t) = 0, & x^2 + y^2 = a^2, \, t > 0, \\ u(x, y, 0) = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2}), & x^2 + y^2 < a^2. \end{cases}$$

Jelikož je oblast kruhová, transformujeme úlohu do polárních souřadnic (r, θ) . Navíc všechna data úlohy (tj. okrajové i počáteční podmínky) nezávisí na úhlu θ a tedy i řešení u můžeme očekávat radiálně symetrické a řešit zjednodušenou úlohu ve dvou proměnných r a t :

$$\begin{cases} u_t = k(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r), & 0 < r < a, \, t > 0, \\ u(r, t) = 0, & r = a, \, t > 0, \\ u(r, 0) = \varphi(r), & 0 \leq r < a. \end{cases}$$

Jako obvykle separujeme proměnné

$$u(r, t) = R(r)T(t)$$

a dostáváme

$$\frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{R''(r) + \frac{1}{r}R'(r)}{R(r)} = -\lambda.$$

Prostorová obyčejná diferenciální rovnice je tzv. *Besselova rovnice*

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) + \lambda R(r) = 0,$$

kteřá má dvě lineárně nezávislá řešení. Prvním řešením je tzv. *Besselova funkce nultého řádu*

$$R(r) = J_0(\sqrt{\lambda}r) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(\sqrt{\lambda}r/2)^{2j}}{(j!)^2}.$$

Druhé řešení Besselovy rovnice není v počátku $r = 0$ konečné a je tedy pro naše potřeby nezajímavé. (Další podrobnosti čtenář nalezne v příloze B.) Dále je zapotřebí splnit homogenní okrajovou podmínku na hranici $r = a$, tj.

$$R(a) = J_0(\sqrt{\lambda}a) = 0.$$

Odtud získáme posloupnost vlastních čísel

$$\lambda_n = \frac{1}{a^2} \mu_n^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

a příslušné vlastní funkce

$$R_n(r) = J_0(\sqrt{\lambda_n}r) = J_0(\mu_n \frac{r}{a}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Hodnoty μ_n jsou kladné kořeny Besselovy funkce J_0 , které tvoří posloupnost jdoucí do nekonečna (viz příloha B).

Nyní se vrátíme k časové úloze, která má standardní řešení

$$T_n(t) = A_n e^{-k\lambda_n t}.$$

Řešení původní úlohy (12.15) pak můžeme zapsat ve tvaru řady

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k\lambda_n t} J_0(\sqrt{\lambda_n}r),$$

kde koeficienty A_n určíme z počáteční podmínky

$$\varphi(r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\sqrt{\lambda_n}r).$$

Pro $\rho = \frac{r}{a} \in \langle 0, 1 \rangle$ máme

$$\varphi(a\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\mu_n \rho)$$

a z vlastností Besselových funkcí uvedených na konci přílohy B plyne

$$A_n = \frac{2}{J_0^2(\mu_n)} \int_0^1 \rho J_0(\mu_n \rho) \varphi(a\rho) d\rho$$

(detailní odvození necháváme na čtenáři).

□

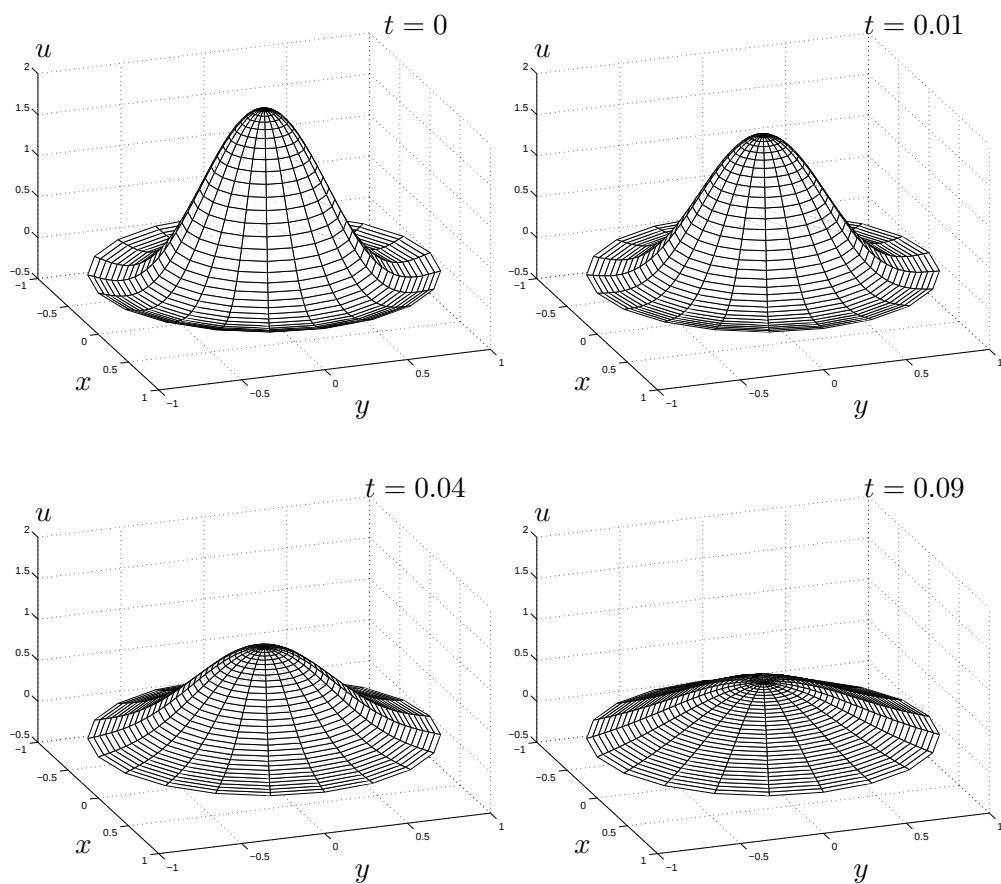
Obrázek 12.2 znázorňuje řešení úlohy (12.15) pro volbu $a = 1$, $k = 1$ a pro počáteční podmínku

$$(12.16) \quad \varphi(x, y) = \varphi(r) = J_0(\mu_1 r) + J_0(\mu_2 r),$$

kde J_0 je Besselova funkce nultého řádu a μ_1, μ_2 jsou její první dva kořeny. Povšimněte si, že pro tato počáteční data má řešení tvar

$$u(x, y, t) = u(r, t) = e^{-\mu_1^2 t} J_0(\mu_1 r) + e^{-\mu_2^2 t} J_0(\mu_2 r).$$

Jednotlivé grafy na obrázku 12.2 odpovídají řešení v časech $t = 0$, $t = 0.01$, $t = 0.04$ a $t = 0.09$.



Obrázek 12.2: Grafické znázornění řešení počátečně-okrajové úlohy (12.15) s počáteční podmínkou (12.16) na časových hladinách $t = 0, 0.01, 0.04, 0.09$.

12.2.2 Nehomogenní úlohy

Postup při řešení nehomogenních úloh pro difuzní rovnici ve vyšších dimenzích je zcela analogický postupu používanému v jednorozměrném případě. Pokud řešíme *nehomogenní rovnici*, nalezneme systém vlastních funkcí $V_n(\mathbf{x})$ příslušných homogenní úloze a rozvineme všechna data úlohy (tj. pravou stranu, počáteční podmínky i hledané řešení) do Fourierových řad vzhledem k tomuto systému. S využitím jeho úplnosti a ortogonalit rozdělíme původní parciální diferenciální úlohu na nekonečně mnoho obyčejných diferenciálních rovnic v časové proměnné, které již snadno vyřešíme.

Úlohy s *nehomogenními okrajovými podmínkami* mohou přinést více obtíží. Hlavní myšlenka spočívá v rozdělení řešení na dvě části: jedna část vyhovuje rovnici s homogenními okrajovými podmínkami, zatímco druhá *stacionární* (nebo *kvazistacionární*) část odpovídá nehomogenním okrajovým podmínkám. V jednodimenzionálních případech jsme obvykle stacionární část snadno „uhádli“ (viz odstavec 7.3). Ve vyšších dimenzích to však znamená vyřešit Laplaceovu rovnici s danými nehomogenními podmínkami, což může být velmi pracné. I v tomto případě hraje důležitou roli pravoúhlost uvažované oblasti.

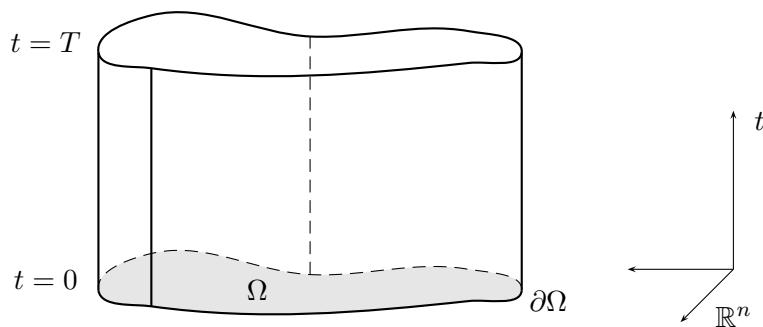
12.3 Obecné principy pro difuzní rovnici

Cílem tohoto odstavce je připomenout základní vlastnosti difuzní rovnice, které zůstávají v platnosti v libovolné dimenzi.

Z tvaru řešení z věty 12.1 plyne, že difuze (a stejně tak teplo) se šíří *nekoněnou rychlostí*. Po libovolně krátkém časovém úseku je řešení všude nenulové, i když počáteční podmínka byla nenulová pouze na malé podoblasti. Jak jsme již konstatovali v kapitole 5, tato skutečnost ilustruje nepřesnost difuzního modelu. Vzniklá chyba je však velice malá a difuzní rovnici je možné použít jako dobrou aproximaci řady reálných problémů.

Další vlastností, která se vyskytuje v libovolné dimenzi, je *nekorektnost* difuzních úloh pro $t < 0$. Není možné stanovit zpětně teplotu tělesa, ani nalézt původní koncentraci difundujícího plynu, pokud známe pouze aktuální stav.

Velice důležitou vlastností difuzní rovnice na libovolné (omezené i neomezené) oblasti v libovolné dimenzi je *princip maxima*. Jeho silná verze říká, že nekonstantní řešení Dirichletovy počátečně-okrajové úlohy nabývá své maximální a minimální hodnoty pouze na dně nebo plášti časoprostorového válce. V tomto případě se dnem válce rozumí (obecně N -rozměrná) oblast Ω v čase $t = 0$ a plášť představuje hranice $\partial\Omega$ v libovolném čase $t > 0$ (viz obrázek 12.3).

Obrázek 12.3: Časoprostorový válec $\Omega \times \langle 0, T \rangle$.

Stejně jako v jednorozměrném případě má princip maxima řadu důsledků. Nejdůležitější z nich jsou *jednoznačnost* a *stejněměrná stabilita* řešení Dirichletovy počátečně-okrajové úlohy pro difuzní rovnici. Při studiu příslušných důkazů v odstavci 10.4 si uvědomte jejich nezávislost na dimenzi úlohy.

Jednoznačnost a stabilitu řešení můžeme získat také pomocí *energetické metody*, kterou lze rovněž aplikovat v jakékoli dimenzi. V této souvislosti se opět odvoláváme na odstavce 10.5.

12.4 Cvičení

1. Řešte následující úlohu pro difuzní rovnici v celém prostoru:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \ t > 0, \\ u(x, y, z, 0) = x^2 y z. \end{cases}$$

$$[u(x, y, z, t) = x^2 y z + 2t y z]$$

2. Řešte následující úlohu pro difuzní rovnici v celém prostoru:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \ t > 0, \\ u(x, y, z, 0) = x^2 y z - x y z^2. \end{cases}$$

$$[u(x, y, z, t) = y(xz - 2t)(x - z)]$$

3. Pomocí metody odrazu (metody lichého rozšíření) nalezněte předpis pro řešení počátečně-okrajové úlohy pro difuzní rovnici v polorovině

$$\begin{cases} u_t - k \Delta u = 0, & x > 0, \ y \in \mathbb{R}, \ t > 0, \\ u(0, y, t) = 0, \\ u(x, y, 0) = \varphi(x, y). \end{cases}$$

$$[u(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} (G_2(x - \xi, y - \eta, t) - G_2(x + \xi, y - \eta, t)) \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta]$$

4. Pomocí metody odrazu (metody sudého rozšíření), nalezněte předpis pro řešení počátečně-okrajové úlohy pro difuzní rovnici v poloprostoru

$$\begin{cases} u_t - k\Delta u = 0, & (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad z > 0, \quad t > 0, \\ u_z(x, y, 0, t) = 0, \\ u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z). \end{cases}$$

$$[u(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} (G_3(x - \xi, y - \eta, z - \theta, t) - G_3(x + \xi, y - \eta, z - \theta, t)) \varphi(\xi, \eta, \theta) d\xi d\eta d\theta]$$

5. Řešte difuzní rovnici $u_t = u_{xx} + u_{yy}$ na kruhu $x^2 + y^2 < 1$ s homogenní Dirichletovou okrajovou podmínkou a s počáteční podmínkou $u(x, y, 0) = 1 - x^2 - y^2$.

$$[\text{v polárních souřadnicích: } u(r, t) = 8 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\mu_k^2 t} \frac{J_0(\mu_k r)}{\mu_k^3 J_1(\mu_k)}.]$$

6. Řešte úlohu

$$\begin{cases} u_t = a^2(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r), & 0 < r < R, \quad t > 0, \\ u(r, 0) = T, \\ \frac{\partial}{\partial r}u(r, t)|_{r=R} = q. \end{cases}$$

$$[u(r, t) = T + qR(2\frac{a^2 t}{R^2} - \frac{1}{4}(1 - 2\frac{r^2}{R^2})) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2e^{-(a\mu_n/R)^2 t}}{\mu_n^2 J_0(\mu_n)} J_0(\frac{\mu_n r}{R}), \text{ kde } \mu_n \text{ jsou kladné kořeny funkce } J_1]$$

7. Uvažujte úlohu chlazení koule o poloměru R s radiační okrajovou podmínkou

$$u_r(R, t) = -hu(R, t),$$

kde h je kladná konstanta a $Rh < 1$. Předpokládejte, že počáteční teplota $u(\mathbf{x}, t) = \varphi(r)$ závisí pouze na poloměru r . Řešte radiálně symetrickou difuzní rovnici pomocí Fourierovy metody. (Vlastní čísla λ_n získejte jako kladné kořeny rovnice $R\lambda = \frac{R\lambda}{1-Rh}$.)

8. Uvažujte tenkou obdélníkovou desku o délce a a šířce b s dokonalou boční izolací. Nalezněte rozložení teploty v desce pro následující data: $a = 2\pi$, $b = 4\pi$, $k = 1$, okrajové podmínky

$$\begin{aligned} u_x(0, y, t) &= 0, & u_x(a, y, t) &= 0, \\ u_y(x, 0, t) &= 0, & u_y(x, b, t) &= 0 \end{aligned}$$

a počáteční podmínku

$$u(x, y, 0) = \cos 3x, \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b.$$

9. Nalezněte rozložení teploty v polokruhové desce ($0 < \theta < \pi$) o poloměru 1 s počáteční podmínkou $u(r, \theta, 0) = g(r, \theta)$ a okrajovými podmínkami

(a) $u(r, 0, t) = 0, \quad u(r, \pi, t) = 0, \quad u(1, \theta, t) = 0.$

(b) $u_\theta(r, 0, t) = 0, \quad u_\theta(r, \pi, t) = 0, \quad u(1, \theta, t) = 0.$

K čemu dojde po nekonečně dlouhém čase?

13

Kapitola

Vlnová rovnice ve vyšších dimenzích

13.1 Počáteční úloha v $\mathbb{R}^3$ – Kirchhoffova formule

Uvažujme počáteční úlohu pro vlnovou rovnici v $\mathbb{R}^3$

$$(13.1) \quad \begin{cases} u_{tt} = c^2 \Delta u, & \mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, t > 0, \\ u(\mathbf{x}, 0) = \varphi(\mathbf{x}), & u_t(\mathbf{x}, 0) = \psi(\mathbf{x}). \end{cases}$$

Nejprve si uvedeme a odvodíme explicitní vztah pro její řešení.

Věta 13.1 (Kirchhoffova formule). *Nechť $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^3)$ a $\psi \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Klasické řešení počáteční úlohy pro vlnovou rovnici (13.1) je určeno jednoznačně předpisem*

$$(13.2) \quad u(\mathbf{x}_0, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|=ct} \psi(\mathbf{x}) \, dS + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|=ct} \varphi(\mathbf{x}) \, dS \right).$$

Integrály zde jsou plošné přes sféru se středem $\mathbf{x}_0$ a poloměrem ct . Tento vztah je znám jako *Kirchhoffova formule*, přestože původním autorem je Poisson. K jejímu odvození použijeme tzv. *sférické průměry*.

Označme $\bar{u}(\mathbf{x}_0, r, t)$ průměrnou hodnotu funkce $u(\mathbf{x}, t)$ přes sféru $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = r$, tj.

$$\bar{u}(\mathbf{x}_0, r, t) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|=r} u(\mathbf{x}, t) \, dS.$$

S využitím transformace do sférických souřadnic můžeme psát

$$\bar{u}(\mathbf{x}_0, r, t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u(r, \theta, \varphi, t) \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta,$$

kde

$$u(r, \theta, \varphi, t) = u(x_0 + r \cos \theta \sin \varphi, y_0 + r \sin \theta \sin \varphi, z_0 + r \cos \varphi, t).$$

Důkaz věty 13.1 (Odvození Kirchhoffovy formule). Hlavní myšlenka odvození Kirchhoffovy formule spočívá ve dvou krocích. Nejprve vyřešíme úlohu (13.1) pro sférické průměry a pak přejdeme k řešení původní úlohy pomocí vztahu

$$(13.3) \quad u(\mathbf{x}_0, t) = \lim_{r \rightarrow 0} \bar{u}(\mathbf{x}_0, r, t).$$

Začneme následujícím pozorováním: pokud funkce u splňuje vlnovou rovnici, pak $\bar{u}$ ji splňuje taktéž. Rovnost $\overline{u_{tt}} = (\bar{u})_{tt}$ je zřejmá a dále, využijeme-li sférické souřadnice a rotační invariantnost Laplaceova operátoru, dostáváme

$$(13.4) \quad \overline{\Delta u} = \Delta \bar{u} = \bar{u}_{rr} + \frac{2}{r} \bar{u}_r.$$

(Podrobné odvození vztahu (13.4) je náplní cvičení 3 v odstavci 13.6.) Průměrná hodnota $\bar{u}$ tedy splňuje rovnici

$$(13.5) \quad \boxed{\bar{u}_{tt} = c^2(\bar{u}_{rr} + \frac{2}{r} \bar{u}_r)}.$$

Nyní zavedeme substituci

$$(13.6) \quad v(r, t) = r \bar{u}(\mathbf{x}_0, r, t).$$

Jelikož $v_{tt} = r \bar{u}_{tt}$, $v_r = r \bar{u}_r + \bar{u}$ a $v_{rr} = r \bar{u}_{rr} + 2 \bar{u}_r$, rovnice (13.5) se redukuje na tvar

$$(13.7) \quad \boxed{v_{tt} = c^2 v_{rr}}$$

pro $(r, t) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$. Očividně můžeme položit

$$(13.8) \quad v(0, t) = 0.$$

Protože navíc u řeší původní počáteční úlohu (13.1), musí funkce v splňovat počáteční podmínky

$$(13.9) \quad v(r, 0) = r \bar{\varphi}(\mathbf{x}_0, r), \quad v_t(r, 0) = r \bar{\psi}(\mathbf{x}_0, r).$$

Rovnice (13.7) s okrajovou podmínkou (13.8) a počátečními podmínkami (13.9) však tvoří standardní jednorozměrnou úlohu pro vlnovou rovnici na polopřímce. Její řešení jsme našli v odstavci 7.1 a pro $0 \leq r \leq ct$ jej můžeme zapsat ve tvaru

$$v(r, t) = \frac{1}{2} [(ct + r)\bar{\varphi}(\mathbf{x}_0, ct + r) - (ct - r)\bar{\varphi}(\mathbf{x}_0, ct - r)] + \frac{1}{2c} \int_{ct-r}^{ct+r} s\bar{\psi}(\mathbf{x}_0, s) ds.$$

Pokud přepíšeme první člen na pravé straně, dostaneme ekvivalentní vyjádření

$$(13.10) \quad v(r, t) = \frac{1}{2c} \left(\frac{\partial}{\partial t} \int_{ct-r}^{ct+r} s\bar{\varphi}(\mathbf{x}_0, s) ds + \int_{ct-r}^{ct+r} s\bar{\psi}(\mathbf{x}_0, s) ds \right)$$

pro $0 \leq r \leq ct$.

Nyní určíme hodnotu $u(\mathbf{x}_0, t)$. Jak jsme již uvedli výše, využijeme vztah (13.3), tj.

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}_0, t) &= \lim_{r \rightarrow 0} \bar{u}(\mathbf{x}_0, r, t) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{v(r, t)}{r} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{v(r, t) - v(0, t)}{r} = \frac{\partial v}{\partial r}(0, t). \end{aligned}$$

Zderivujeme (13.10) a dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial r} &= \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} [(ct + r)\bar{\varphi}(\mathbf{x}_0, ct + r) + (ct - r)\bar{\varphi}(\mathbf{x}_0, ct - r)] \\ &\quad + \frac{1}{2c} [(ct + r)\bar{\psi}(\mathbf{x}_0, ct + r) + (ct - r)\bar{\psi}(\mathbf{x}_0, ct - r)]. \end{aligned}$$

Položíme-li $r = 0$, získáme

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}_0, t) &= \frac{\partial v}{\partial r}(0, t) = \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} \left((2ct)\bar{\varphi}(\mathbf{x}_0, ct) \right) + \frac{1}{2c} (2ct)\bar{\psi}(\mathbf{x}_0, ct) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(t\bar{\varphi}(\mathbf{x}_0, ct) \right) + t\bar{\psi}(\mathbf{x}_0, ct) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|=ct} \varphi(\mathbf{x}) dS \right) + \frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|=ct} \psi(\mathbf{x}) dS, \end{aligned}$$

což je přesně Kirchhoffova formule (13.2).

Jednoznačnost klasického řešení je důsledkem linearit rovnice a lze ji snadno dokázat (viz cvičení 13 v odstavci 13.6).

■

Poznámka 13.2. Na rozdíl od jednorozměrného případu, kde je řešení dané d'Alembertovou formulí stejně hladké jako počáteční podmínka, časová derivace v Kirchhoffově formulí způsobí ztrátu hladkosti. Obecně, pokud $\varphi \in C^{n+1}(\mathbb{R}^3)$ a $\psi \in C^n(\mathbb{R}^3)$, $n \geq 2$, pak řešení u je třídy C^n na $\mathbb{R}^3 \times (0, \infty)$. Pokud φ a ψ jsou obě třídy C^2 , pak druhé derivace u mohou být v některých bodech neomezené a řešení pak není řešením klasickým.

Huygensův princip. Povšimněme si, že podle Kirchhoffovy formule závisí řešení úlohy (13.1) v bodě $(\mathbf{x}_0, t)$ pouze na hodnotách $\varphi(\mathbf{x})$ a $\psi(\mathbf{x})$ pro $\mathbf{x}$ z kulové plochy $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = ct$ a je zcela nezávislé na hodnotách počátečních dat uvnitř této sféry. Naopak můžeme také říci, že hodnoty funkcí φ a ψ v bodě $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^3$ ovlivňují řešení trojrozměrné vlnové rovnice pouze na kulové ploše $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1| = ct$. Tento jev se nazývá *Huygensův princip*.

Tento princip odpovídá skutečnosti, že v „trojrozměrném světě“ se řešení vlnové rovnice šíří právě rychlostí c . Např. libovolný elektromagnetický signál ve vakuu se šíří právě rychlostí světla, anebo libovolný zvuk je přenášený vzduchem právě rychlostí zvuku bez jakýchkoli „ozvěn“ (neuvažujeme-li přítomnost překážek). To znamená, že v čase t slyší posluchač to, co mluvčí řekl přesně v čase $(t - d/c)$ (d je vzdálenost mezi oběma osobami), a ne směsicí zvuků pronesených v různých časech.

Jak již víme z d'Alembertovy formule, tento princip v jedné dimenzi neplatí, a jak uvidíme později, neplatí ani ve dvou dimenzích.

13.2 Počáteční úloha v $\mathbb{R}^2$

Uvažujme počáteční úlohu pro homogenní vlnovou rovnici v $\mathbb{R}^2$

$$(13.11) \quad \boxed{\begin{aligned} u_{tt} &= c^2(u_{xx} + u_{yy}), & (x, y) \in \mathbb{R}^2, & t > 0, \\ u(x, y, 0) &= \varphi(x, y), & u_t(x, y, 0) &= \psi(x, y). \end{aligned}}$$

Tuto úlohu můžeme považovat za „speciální trojrozměrnou úlohu“, jejíž řešení nezávisí na proměnné z . Podle Kirchhoffovy formule pak pro řešení $u = u(\mathbf{x}_0, t) = u(x_0, y_0, 0, t)$ platí

$$(13.12) \quad u(\mathbf{x}_0, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = ct} \psi(\mathbf{x}) \, dS + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = ct} \varphi(\mathbf{x}) \, dS \right).$$

V tomto případě $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, 0)$, $\mathbf{x} = (x, y, z)$ a $\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(x, y)$, $\psi(\mathbf{x}) = \psi(x, y)$ pro libovolné z . Vztah (13.12) skutečně popisuje řešení úlohy (13.11) (čtenář si laskavě sám ověří), můžeme však získat jednodušší a přehlednější vyjádření.

Nejprve lze oba integrály v (13.12) přepsat následujícím způsobem:

$$\iint_{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|=ct} \cdots = \iint_{S^+} \cdots + \iint_{S^-} \cdots = 2 \iint_{S^+} \cdots,$$

kde

$$S^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = \sqrt{c^2 t^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}\},$$

$$S^- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = -\sqrt{c^2 t^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}\}$$

je horní a dolní polovina kulové plochy. Na horní polovině můžeme přepsat povrchový element dS jako

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{-(x - x_0)}{z}\right)^2 + \left(\frac{-(y - y_0)}{z}\right)^2} dx dy = \frac{ct}{z} dx dy \\ &= \frac{ct}{\sqrt{c^2 t^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}} dx dy. \end{aligned}$$

Vztah (13.12) lze tedy upravit na tvar

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0, t) &= 2 \frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_D \psi(x, y) \frac{ct}{\sqrt{c^2 t^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}} dx dy \\ &\quad + 2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_D \varphi(x, y) \frac{ct}{\sqrt{c^2 t^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}} dx dy \right), \end{aligned}$$

kde D je kruh $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq c^2 t^2$. Odtud můžeme učinit závěr, že řešení počáteční úlohy (13.11) pro vlnovou rovnici v $\mathbb{R}^2$ je dáno předpisem

$$(13.13) \quad \boxed{u(\mathbf{x}_0, t) = \frac{1}{2\pi c} \iint_{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|\leq ct} \frac{\psi(\mathbf{x})}{\sqrt{c^2 t^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2}} d\mathbf{x} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\pi c} \iint_{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|\leq ct} \frac{\varphi(\mathbf{x})}{\sqrt{c^2 t^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2}} d\mathbf{x} \right)}.$$

Zde již značíme standardně $\mathbf{x} = (x, y)$ a $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$.

Povšimněme si hlavního rozdílu mezi Kirchhoffovou formulí (13.2) pro trojrozměrnou úlohu a formulí (13.13) pro dvojrozměrný problém. Tento rozdíl spočívá v oblasti integrace: v prvním případě se jedná pouze o *kulovou plochu* $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = ct$, zatímco v druhém případě integrujeme přes *celý kruh* $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq ct$. To znamená, že Huygensův princip ve dvou dimenzích neplatí! Oblázek hozený do vody by například (v ideálním případě) vyvolal nepřetržité vlnění. Každý bod vodní hladiny, který by zasáhla čelní vlna, by navěky setrval v pohybu. Mohli bychom pozorovat nové a nové kruhy, které by se neustále objevovaly na hladině. Vlnová rovnice je však pouze zjednodušený model a reálná situace je mnohem komplikovanější.

Dalším (fiktivním) příkladem je život na „ploché Zemi“. V takovém dvojrozměrném světě by se každý zvuk nešířil danou rychlostí c , ale všemi rychlostmi, které by byly menší nebo rovny c , a byl by tedy slyšet navěky. Posluchač by v daný moment slyšel směs slov vyslovených v různých časech.

Je možné ukázat, že metodu sférických průměrů lze aplikovat v jakékoli *liché* dimenzi větší nebo rovné třem a ve všech těchto případech tedy platí Huygensův princip. Naopak ve všech *sudých* dimenzích tento princip neplatí.

Příklad 13.3. Jednoduchým příkladem, který ilustruje rozdílné šíření vlnění v různých dimenzích, je „úder jednotkovým kladivem“. Řešme tedy úlohu

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 \Delta u, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0, \\ u(\mathbf{x}, 0) = \varphi(\mathbf{x}), & u_t(\mathbf{x}, 0) = \psi(\mathbf{x}) \end{cases}$$

s počátečními funkcemi

$$\varphi(\mathbf{x}) \equiv 0, \quad \psi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & |\mathbf{x}| < a, \\ 0, & |\mathbf{x}| > a, \end{cases}$$

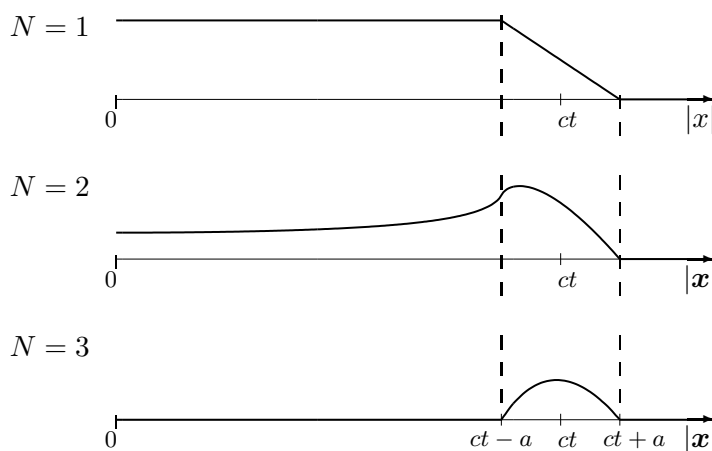
pro $N = 1, 2$ a 3 . V případě $N = 1$ je řešení určeno d'Alembertovou formulí, pro $N = 2$ použijeme vztah (13.13) a pro $N = 3$ je řešení popsáno Kirchhoffovou formulí (13.2). Můžeme pozorovat následující chování:

$N = 1$: V čase t ($> \frac{a}{c}$) dosahuje čelní vlna do bodu $|x| = ct + a$. V bodě $|x| = ct - a$ nabývá vlna své maximální výchylky (rovné $\frac{a}{c}$) a zůstává konstantní na celém intervalu $|x| < ct - a$. Čelní vlna se šíří rychlostí c , ale její vliv je patrný ve všech bodech $|x| < ct + a$. Detailní rozbor je uvedený v příkladu 4.5.

$N = 2$: V čase t dosahuje čelní vlna do bodu $|\mathbf{x}| = ct + a$, pak nabyde svého maxima (řádu $\frac{1}{\sqrt{t}}$) a pro $|\mathbf{x}| \rightarrow 0$ klesá řádově jako $\frac{1}{\sqrt{(ct)^2 - |\mathbf{x}|^2}}$. Vlna má ostré „čelo“, ale nemá ostrý „chvost“. Obdobně jako v případě jedné dimenze se nenulová počáteční podmínka v bodech $|\mathbf{x}| < a$ projeví nenulovou výchylkou ve všech bodech $|\mathbf{x}| < ct + a$.

$N = 3$: V čase t opět dosahuje čelní vlna do bodu $|\mathbf{x}| = ct + a$. Maximální výchylky $\frac{a^2}{4c^2t}$ nabývá v bodech $|\mathbf{x}| = ct$ a pak vlna opět klesne do nulové pozice v bodech $|\mathbf{x}| = ct + a$. Celá vlna se šíří rychlostí c a nemění svůj tvar – nenulová počáteční podmínka v bodech $|\mathbf{x}| < a$ způsobí nenulovou výchylku pouze v bodech $ct - a \leq |\mathbf{x}| < ct + a$.

Rozdílné chování v těchto třech případech je načrtnuto na obrázku 13.1. □



Obrázek 13.1: „Úder kladivem“ v jedné, ve dvou a ve třech dimenzích.

13.3 Vlna se zdrojem v $\mathbb{R}^3$

Uvažujme nehomogenní počáteční úlohu

$$(13.14) \quad \begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = f(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0, \\ u(\mathbf{x}, 0) = \varphi(\mathbf{x}), \quad u_t(\mathbf{x}, 0) = \psi(\mathbf{x}). \end{cases}$$

K jejímu vyřešení použijeme *operátorovou metodu*. Označme $u_H(\mathbf{x}, t)$ řešení homogenní úlohy (tj. úlohy (13.14) s $f \equiv 0$). V odstavci 13.1 jsme zjistili, že takové řešení lze zapsat ve tvaru

$$u_H(\mathbf{x}_0, t) = (\partial_t \mathcal{S}(t)\varphi)(\mathbf{x}_0) + (\mathcal{S}(t)\psi)(\mathbf{x}_0),$$

kde $\mathcal{S}$ je tzv. *zdrojový operátor* daný předpisem

$$(13.15) \quad (\mathcal{S}(t)\psi)(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|=ct} \psi(\mathbf{x}) \, dS.$$

Myšlenka operátorové metody je zcela identická jako v odstavci 4.4. Opět lze ukázat, že vliv pravé strany f v úloze (13.14) lze popsat členem

$$u_P(\mathbf{x}_0, t) = \int_0^t \mathcal{S}(t-s) f(\mathbf{x}_0, s) \, ds.$$

Po dosazení za zdrojový operátor $\mathcal{S}$ získáme

$$u_P(\mathbf{x}_0, t) = \int_0^t \frac{1}{4\pi c^2(t-s)} \iint_{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|=c(t-s)} f(\mathbf{x}, s) \, dS \, ds$$

a s využitím vztahu $s = t - \frac{1}{c}|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$ na kulové ploše, přes kterou integrujeme, dostáváme

$$(13.16) \quad u_P(\mathbf{x}_0, t) = \frac{1}{4\pi c} \int_0^t \iint_{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|=c(t-s)} \frac{f(\mathbf{x}, t - \frac{1}{c}|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \, dS \, ds.$$

Povšimněte si, že oblastí integrace je zde plášť čtyřrozměrného časoprostorového kužele s vrcholem v bodě $(\mathbf{x}_0, t)$ a základnou tvořenou koulí $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq ct$. Výraz ve (13.16) lze tedy přepsat na trojný integrál a tím získáme

$$(13.17) \quad u_P(\mathbf{x}_0, t) = \frac{1}{4\pi c} \iiint_{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|\leq ct} \frac{f(\mathbf{x}, t - \frac{1}{c}|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \, d\mathbf{x}.$$

(Čtenář laskavě ověří.) Díky linearitě rovnice je výsledné řešení úlohy (13.14) součtem funkcí u_H a u_P :

$$\boxed{u(\mathbf{x}_0, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|=ct} \psi(\mathbf{x}) \, dS + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|=ct} \varphi(\mathbf{x}) \, dS \right) + \frac{1}{4\pi c} \iiint_{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|\leq ct} \frac{f(\mathbf{x}, t - \frac{1}{c}|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \, d\mathbf{x}.}$$

Poznámka 13.4. Porovnejme předpis (13.17) se stacionárním řešením téhož problému, tj. s řešením u_{stat} Poissonovy úlohy

$$-c^2 \Delta u = f$$

na celém prostoru $\mathbb{R}^3$. Využijeme-li předpis (11.18) bez hraničního členu a s volbou $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi c|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}$, dostaneme

$$(13.18) \quad u_{\text{stat}}(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi c} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{f(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} d\mathbf{x}.$$

(Čtenář ověří, že jde skutečně o řešení Poissonovy rovnice na $\mathbb{R}^3$.) Jak můžeme vidět, evoluční formule (13.17) se od omezeného stacionárního řešení (13.18) liší pouze „opožděným“ časem o hodnotu $\frac{1}{c}|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$.

13.4 Charakteristiky, singularity, energie a princip kauzality

Nyní se zaměříme na kvalitativní vlastnosti vlnové rovnice a jejího řešení. Ukážeme si, jak lze tyto vlastnosti odvodit přímo ze samotné vlnové rovnice, aniž bychom museli znát formuli vyjadřující příslušné řešení.

13.4.1 Charakteristiky

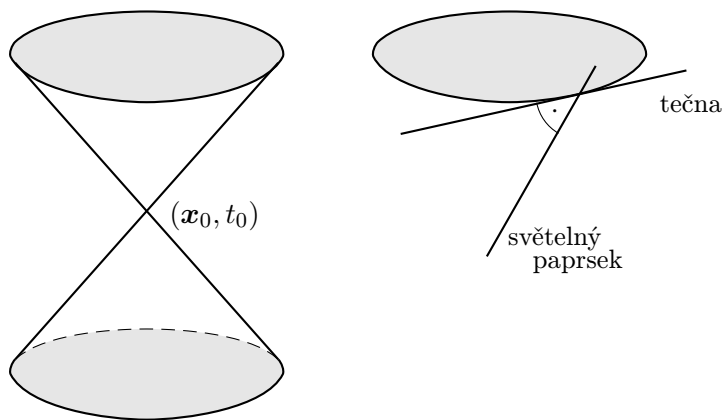
Obdobně jako v jedné dimenzi můžeme i v trojrozměrném případě zavést charakteristiky, nyní však budeme mluvit o *charakteristických plochách*. Základní plochu získáme otáčením jednorozměrné charakteristické přímky $x - x_0 = c(t - t_0)$ okolo osy $t = t_0$. Tím dostaneme kužel (resp. jeho plášť) ve čtyřrozměrném časoprostoru (tzv. „hyperkužel“):

$$(13.19) \quad |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = c|t - t_0|.$$

Tato množina se nazývá *charakteristický kužel* nebo též *světelný kužel* v bodě $(\mathbf{x}_0, t_0)$ a můžeme si ho představit jako sjednocení všech (světelných) paprsků, které vyzařují z bodu $(\mathbf{x}_0, t_0)$ rychlostí c , tj. $|\mathbf{dx}/dt| = c$. V pevném čase t se světelný kužel redukuje na kulovou plochu a všechny světelné paprsky jsou na ni kolmé (viz ilustrace v $\mathbb{R}^2$ na obrázku 13.2).

Těleso $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq c|t - t_0|$ se nazývá *plný světelný kužel* a můžeme ho rozdělit na *budoucí* a *minulý* polokužel. *Minulost* bodu $(\mathbf{x}_0, t_0)$ tvoří všechny body, které mohou ovlivnit řešení v bodě $(\mathbf{x}_0, t_0)$, a naopak *budoucnost* bodu $(\mathbf{x}_0, t_0)$ obsahuje body, které mohou být ovlivněny situací v bodě $(\mathbf{x}_0, t_0)$, tj. body, kterých může dosáhnout částice putující z bodu $(\mathbf{x}_0, t_0)$ libovolnou rychlostí menší nebo rovnou c .

Základní vlastností charakteristických ploch v libovolné dimenzi je skutečnost, že jsou to jediné plochy podél nichž se mohou šířit singularity řešení vlnové



Obrázek 13.2: Světelný kužel v bodě $(\mathbf{x}_0, t_0)$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$, a kolmost světelných paprsků ke sféře $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = c|t - t_0|$.

rovnice. Pouze připomínáme, že singularitou rozumíme body nespojitosti řešení nebo některé z jeho derivací.

13.4.2 Energie

Další vlastností vlnové rovnice, která zůstává v platnosti v libovolné dimenzi, je zákon zachování energie. Vynásobíme-li trojrozměrnou vlnovou rovnici členem u_t a integrujeme-li ji přes celý prostor $\mathbb{R}^3$, dostáváme

$$\begin{aligned}
 (13.20) \quad 0 &= \iiint_{\mathbb{R}^3} (u_{tt} - c^2 \Delta u) u_t \, d\mathbf{x} \\
 &= \iiint_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} c^2 |\nabla u|^2 \right)_t \, d\mathbf{x} - \iiint_{\mathbb{R}^3} c^2 \nabla \cdot (u_t \nabla u) \, d\mathbf{x}.
 \end{aligned}$$

Přepíšeme-li poslední integrál do tvaru

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} c^2 \nabla \cdot (u_t \nabla u) \, d\mathbf{x} = \lim_{r \rightarrow \infty} \iiint_{B_r(\mathbf{0})} c^2 \nabla \cdot (u_t \nabla u) \, d\mathbf{x},$$

kde $B_r(\mathbf{0})$ je koule se středem v počátku a s poloměrem r , a použijeme-li Gaussovu-Ostrogradského větu, získáme

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} c^2 \nabla \cdot (u_t \nabla u) \, d\mathbf{x} = \lim_{r \rightarrow \infty} \iint_{\partial B_r(\mathbf{0})} c^2 u_t \nabla u \cdot \mathbf{n} \, d\mathbf{x}.$$

Poslední integrál vymizí, budeme-li předpokládat, že derivace funkce $u(\mathbf{x}, t)$ jdou k nule dostatečně rychle pro $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$. Vztah (13.20) se pak redukuje na

$$0 = \iiint_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} c^2 |\nabla u|^2 \right)_t d\mathbf{x}.$$

Zaměníme-li navíc pořadí integrace a derivace, dostaneme

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} c^2 |\nabla u|^2 \right) d\mathbf{x}.$$

Jelikož člen $\iiint \frac{1}{2} u_t^2 d\mathbf{x}$ odpovídá *kinetické energii* E_k a člen $\iiint \frac{1}{2} c^2 |\nabla u|^2 d\mathbf{x}$ představuje *potenciální energii* E_p , můžeme učinit závěr, že *celková energie* $E = E_k + E_p$ je konstantní funkcí vzhledem k časové proměnné t .

13.4.3 Princip kauzality

Již víme (z Huygensova principu a z tvaru řešení), že řešení N -rozměrné počáteční úlohy pro vlnovou rovnici v bodě $(\mathbf{x}_0, t_0)$ závisí na hodnotách počáteční výchylky $\varphi(\mathbf{x})$ a počáteční rychlosti $\psi(\mathbf{x})$ pro $\mathbf{x}$ ze sféry $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = ct_0$, je-li N liché ($N \geq 3$), a pro $\mathbf{x}$ z celé koule $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq ct_0$, je-li N sudé. Obdobná informace (pouze o něco slabší) plyne přímo ze samotné vlnové rovnice. Můžeme zformulovat následující obecný *princip kauzality*.

Věta 13.5. *Hodnota $u(\mathbf{x}_0, t_0)$ může být ovlivněna pouze hodnotami funkcí $\varphi(\mathbf{x})$ a $\psi(\mathbf{x})$ pro $\mathbf{x}$ z koule $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq ct_0$.*

Myšlenka důkazu. Postupujeme stejným způsobem jako v jedné dimenzi (viz odstavec 10.1). Budeme uvažovat trojrozměrný případ, použitá myšlenka je však aplikovatelná v jakékoli dimenzi. Vlnovou rovnici vynásobíme členem u_t a po standardních úpravách a za předpokladu, že veškeré derivace mají smysl, získáme

$$\begin{aligned} 0 &= u_{tt}u_t - c^2 \Delta u u_t \\ &= \left(\frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} c^2 |\nabla u|^2 \right)_t - c^2 \nabla \cdot (u_t \nabla u) \\ &= \left(\frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} c^2 |\nabla u|^2 \right)_t + (-c^2 u_t u_x)_x + (-c^2 u_t u_y)_y + (-c^2 u_t u_z)_z \\ &= \operatorname{div} \mathbf{f}, \end{aligned}$$

kde $\mathbf{f}$ je čtyřrozměrný vektor

$$\mathbf{f} = (-c^2 u_t u_x, -c^2 u_t u_y, -c^2 u_t u_z, \frac{1}{2} (u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2)).$$

Rovnost $\operatorname{div} \mathbf{f} = 0$ nyní zintegrujeme přes komolý kužel F , který je částí plného světelného kužele ve čtyřrozměrném časoprostoru. Použijeme-li čtyřrozměrnou Gaussovu-Ostrogradského větu, můžeme psát

$$\begin{aligned} 0 &= \iiint_F \operatorname{div} \mathbf{f} = \iiint_{\partial F} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dV \\ &= \iiint_{\partial F} \left[\frac{1}{2} n_4 (u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2) - n_1 (c^2 u_t u_x) - n_2 (c^2 u_t u_y) - n_3 (c^2 u_t u_z) \right] dV, \end{aligned}$$

kde ∂F značí hranici F a $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3, n_4)$ je jednotkový vektor vnější normály k ∂F se složkami n_i , $i = 1, \dots, 4$, ve směrech x, y, z, t . Zbytek důkazu je stejný jako v jedné dimenzi (porovnejte s odstavcem 10.1). Hranice ∂F je trojrozměrný útvar, který se skládá z horní podstavy T , dolní podstavy B a z pláště K (viz $\mathbb{R}^2$ ilustrace na obrázku 13.3). Integrál lze tedy rozdělit na tři části

$$\iiint_{\partial F} = \iiint_T + \iiint_B + \iiint_K = 0.$$

Na horní podstavě T má normálový vektor směr $\mathbf{n} = (0, 0, 0, 1)$ a příslušný integrál se redukuje na

$$\iiint_T \left(\frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} c^2 |\nabla u|^2 \right) d\mathbf{x}.$$

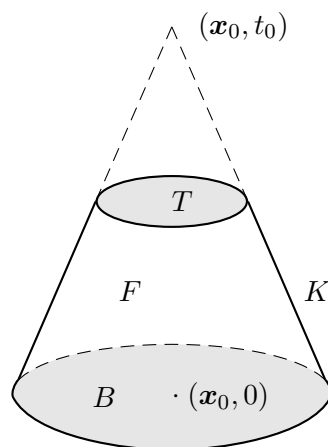
Obdobně na dolní podstavě B má normálový vektor směr $\mathbf{n} = (0, 0, 0, -1)$ a máme tedy

$$\iiint_B \left(-\frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} c^2 |\nabla u|^2 \right) d\mathbf{x} = - \iiint_B \left(\frac{1}{2} \psi^2 + \frac{1}{2} c^2 |\nabla \varphi|^2 \right) d\mathbf{x}.$$

Na plášti K nelze použít tytéž argumenty, lze však dokázat, že příslušný integrál je nezáporný (viz např. [21]). S využitím těchto skutečností získáme nerovnost

$$(13.21) \quad \iiint_T \left(\frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} c^2 |\nabla u|^2 \right) d\mathbf{x} \leq \iiint_B \left(\frac{1}{2} \psi^2 + \frac{1}{2} c^2 |\nabla \varphi|^2 \right) d\mathbf{x}.$$

Nyní uvažujme, že funkce φ a ψ jsou nulové na B . Z nerovnosti (13.21) plyne, že $\frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} c^2 |\nabla u|^2 = 0$ na T , a tedy $u_t \equiv \nabla u \equiv 0$ na T . Jelikož tento výsledek platí pro komolý kužel libovolné výšky, dostáváme, že u_t a ∇u jsou nulové (a tedy u konstantní) v celém plném kuželi. A protože $u = 0$ na B , můžeme uzavřít, že $u \equiv 0$ v celém kuželi. Mimo to odtud plyne, že uvažujeme-li dvě řešení u_1, u_2 se stejnými počátečními podmínkami na B , pak $u_1 \equiv u_2$ uvnitř celého kužele. ■

Obrázek 13.3: Komolý kužel F .

Poznámka 13.6. Lze vyslovit rovněž „opačné“ tvrzení k principu kauzality: počáteční podmínky φ, ψ v bodě $\mathbf{x}_0$ ovlivní řešení pouze v plném světelném kuželi s vrcholem v bodě $(\mathbf{x}_0, 0)$. (Povšimněte si, že toto tvrzení a stejně tak i princip kauzality platí i pro nehomogenní vlnovou rovnici.) I zde se můžeme setkat s terminologií, kterou již známe z jedné dimenze. Minulý kužel je též nazýván *oblastí závislosti* a budoucí kužel je *oblastí vlivu* bodu $(\mathbf{x}_0, t_0)$.

13.5 Vlna na omezených oblastech, Fourierova metoda

Ve zbytku této kapitoly se budeme věnovat počátečně-okrajovým úlohám pro vlnovou rovnici. Obecně budeme uvažovat problém

$$\begin{aligned} u_{tt}(\mathbf{x}, t) &= c^2 \Delta u(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0, \\ u(\mathbf{x}, t) &= h_1(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \Gamma_1, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}, t) &= h_2(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \Gamma_2, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}, t) + au(\mathbf{x}, t) &= h_3(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \Gamma_3, \\ u(\mathbf{x}, 0) &= \varphi(\mathbf{x}), \quad u_t(\mathbf{x}, 0) = \psi(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Jako obvykle Ω značí oblast v $\mathbb{R}^N$, $\varphi, \psi, h_i, i = 1, 2, 3$ jsou dané funkce, a je daná konstanta a $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 = \partial\Omega$.

Na začátek si připomeneme fyzikální význam uvedených okrajových podmínek. Modelujeme-li kmitající membránu, odpovídá funkce $u = u(x, y, t)$ vý-

chylce membrány a Dirichletova okrajová podmínka na Γ_1 popisuje tvar pevného rámu, na kterém je membrána upevněna. Pokud h_1 není konstanta, pak je rám pokrivený. Neumannova okrajová podmínka na Γ_2 určuje „sklon“ membrány na hranici. Speciálně *homogenní* Neumannova okrajová podmínka (tj. $h_2 \equiv 0$) odpovídá „volnému okraji“ membrány, který se volně třepetá. Newtonova okrajová podmínka na Γ_3 může popisovat pružný okraj membrány.

Používáme-li trojrozměrnou vlnovou rovnici pro modelování vlnění zvuku v kapalině, kde $u = u(x, y, z, t)$ vyjadřuje hustotu kapaliny, pak nejběžnější okrajovou podmínkou je homogenní Neumannova podmínka. Ta odpovídá situaci, kdy uvažovaná oblast má pevné stěny a kapalina jimi nemůže proniknout.

Stejně jako v předchozích kapitolách budeme řešit počátečně-okrajové úlohy pro vlnovou rovnici pomocí Fourierovy metody. Jelikož hlavní myšlenka i základní schéma jsou naprosto identické jako v případě difuzní rovnice, nebudeme je zde detailně opakovat a odkážeme čtenáře na odstavec 12.2. Omezíme se pouze na několik příkladů, které ilustrují několik zajímavých jevů nebo situací, o nichž jsme v předchozích kapitolách nepojednávali.

Příklad 13.7 (Obdélníková membrána). Začneme s jednoduchou modelovou situací. Budeme uvažovat dvojrozměrnou vlnovou rovnici, která popisuje vibrující membránu upevněnou na obdélníkovém rámu zafixovaném v nulové pozici. Na začátku membránu vychýlíme v prostředním bodě a následně ji uvolníme. Odpovídající matematický model má podobu

$$(13.22) \quad \begin{cases} u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}), & (x, y) \in (0, a) \times (0, b), \quad t > 0, \\ u(0, y, t) = u(a, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, b, t) = 0, \\ u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad u_t(x, y, 0) = 0, \end{cases}$$

kde

$$(13.23) \quad \varphi(x, y) = \begin{cases} xy, & 0 \leq x < a/2, \quad 0 \leq y < b/2, \\ x(b-y), & 0 \leq x < a/2, \quad b/2 \leq y \leq b, \\ (a-x)y, & a/2 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y < b/2, \\ (a-x)(b-y), & a/2 \leq x \leq a, \quad b/2 \leq y \leq b. \end{cases}$$

Tvar počáteční výchylky je zobrazen na obrázku 13.4 pro hodnoty $a = 2$, $b = 3$.

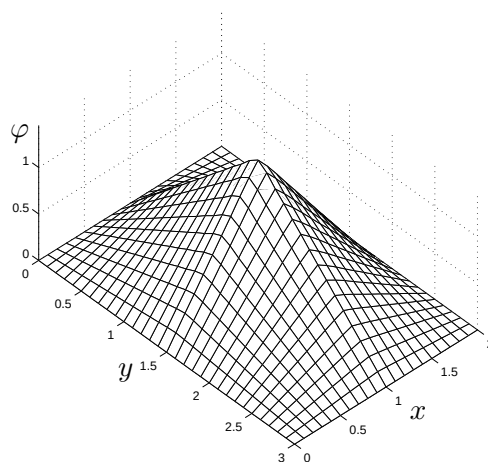
Nejprve odseparujeme časovou proměnnou a prostorové proměnné: $u(x, y, t) = V(x, y)T(t)$. Po dosazení do rovnice ve (13.22) získáme dvojici rovnic:

$$(13.24) \quad V_{xx} + V_{yy} + \lambda V = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b,$$

$$(13.25) \quad T'' + \lambda c^2 T = 0, \quad t > 0,$$

kde λ je konstanta. Funkce $V = V(x, y)$ musí navíc splňovat homogenní okrajové podmínky

$$(13.26) \quad V(0, y) = V(a, y) = V(x, 0) = V(x, b) = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b.$$



Obrázek 13.4: Počáteční podmínka (13.23) pro hodnoty $a = 2$, $b = 3$.

Jak již víme z příkladu 12.3, lze úlohu (13.24), (13.26) řešit opět Fourierovou metodou a získat vlastní čísla

$$\lambda_{mn} = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2, \quad m, n \in \mathbb{N},$$

a příslušný ortogonální systém vlastních funkcí

$$V_{mn}(x, y) = \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}.$$

Vrátíme-li se k časové rovnici (13.25), dostaneme

$$T_{mn} = A_{mn} \cos(c\sqrt{\lambda_{mn}}t) + B_{mn} \sin(c\sqrt{\lambda_{mn}}t).$$

(Připomínáme, že všechna vlastní čísla λ_{mn} jsou kladná!) Řešení původní úlohy pak tedy můžeme zapsat ve tvaru dvojně Fourierovy řady

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_{mn} \cos(c\sqrt{\lambda_{mn}}t) + B_{mn} \sin(c\sqrt{\lambda_{mn}}t) \right) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}.$$

Takto daná funkce splňuje požadované počáteční podmínky z (13.22), pokud je lze rovněž rozvinout do Fourierových řad vzhledem k systému funkcí $\{V_{mn}(x, y)\}$.

V našem případě to znamená

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}, \\ \psi(x, y) \equiv 0 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c\sqrt{\lambda_{mn}} B_{mn} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}.\end{aligned}$$

Z druhého vztahu plyne $B_{mn} = 0$ pro všechny indexy $m, n \in \mathbb{N}$. S využitím ortogonalit vlastních funkcí získáme předpis pro koeficienty A_{mn} :

$$A_{mn} = \frac{\int_0^a \int_0^b \varphi(x, y) V_{mn}(x, y) dy dx}{\int_0^a \int_0^b V_{mn}^2(x, y) dy dx}.$$

Dosadíme-li za V_{mn} a φ ze (13.23), můžeme vypočítat

$$\begin{aligned}A_{mn} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \varphi(x, y) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} dx dy \\ &= \frac{4}{ab} \frac{4a^2b^2}{n^2m^2\pi^4} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{m\pi}{2} = \frac{16ab}{n^2m^2\pi^4} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{m\pi}{2}.\end{aligned}$$

Můžeme tedy uzavřít, že řešení počátečně-okrajové úlohy (13.22) lze vyjádřit ve tvaru

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \cos(c\sqrt{\lambda_{mn}}t) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}.$$

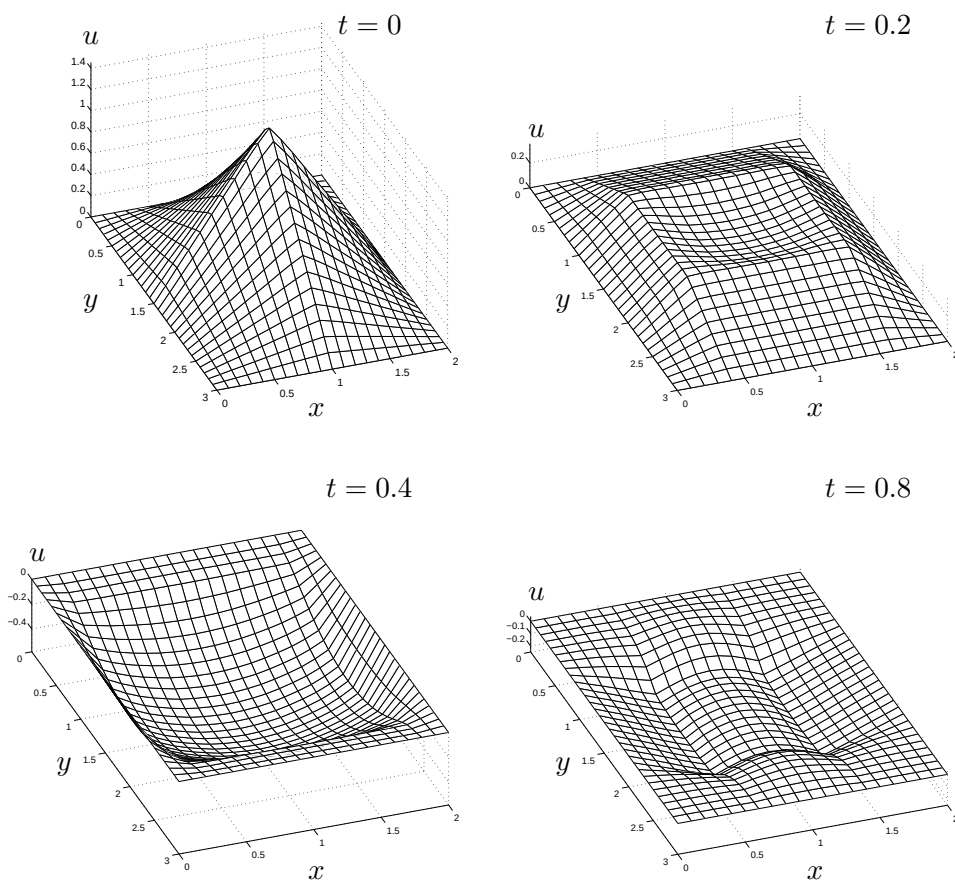
Graf řešení na několika časových hladinách je znázorněn na obrázku 13.5. Použili jsme data $c = 3$, $a = 2$, $b = 3$ a částečné součty do hodnot $n = m = 25$. Žádáme čtenáře, aby si povšiml šíření singularit a odrazu vlnění na hranici oblasti.

□

V dalších příkladech se budeme zabývat vlnovou rovnicí na kruhových oblastech. Budeme uvažovat radiálně symetrické i nesymetrické případy.

Příklad 13.8 (Kruhová membrána – symetrický případ). Tento příklad je vlnovou analogií příkladu 12.5, ve kterém jsme řešili difuzní rovnici. Tentokrát řešíme úlohu

$$(13.27) \quad \begin{cases} u_{tt} = c^2 \Delta u, & x^2 + y^2 < a^2, \quad t > 0, \\ u(x, y, t) = 0, & x^2 + y^2 = a^2, \\ u(x, y, 0) = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2}), \quad u_t(x, y, 0) = \psi(\sqrt{x^2 + y^2}), \end{cases}$$



Obrázek 13.5: Grafické znázornění řešení počátečně-okrajové úlohy (13.22) pro data $c = 3$, $a = 2$, $b = 3$ na časových hladinách $t = 0, 0.2, 0.4, 0.8$.

kterou lze použít jako model vibrující kruhové membrány s okrajem upevněným v nulové pozici. Jelikož počáteční podmínka závisí pouze na poloměru $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, můžeme předpokládat, že řešení bude radiálně symetrické, a po transformaci do polárních souřadnic dostáváme jednodušší úlohu

$$(13.28) \quad \begin{cases} u_{tt} = c^2(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r), & 0 < r < a, \ t > 0, \\ u(r, t) = 0, & r = a, \ t > 0, \\ u(r, 0) = \varphi(r), \ u_t(r, 0) = \psi(r), & 0 \leq r < a. \end{cases}$$

Zopakujeme-li jednotlivé kroky z příkladu 12.5, získáme řešení ve tvaru

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) R_n(r).$$

System vlastních funkcí R_n je určen předpisem

$$R_n(r) = J_0(\sqrt{\lambda_n}r),$$

kde J_0 je nultá Besselova funkce prvního druhu (viz příloha B); vlastní čísla λ_n jsou dána jako

$$\lambda_n = \frac{1}{a^2} \mu_n^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

kde μ_n jsou kořeny funkce J_0 . Časové funkce T_n získáme řešením rovnice

$$T''(t) + c^2 \lambda_n T(t) = 0.$$

Protože jsou všechna vlastní čísla kladná, můžeme psát

$$T_n(t) = A_n \cos(c\sqrt{\lambda_n}t) + B_n \sin(c\sqrt{\lambda_n}t).$$

Řešení úlohy (13.28) má tedy podobu

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos(c\sqrt{\lambda_n}t) + B_n \sin(c\sqrt{\lambda_n}t) \right) J_0(\sqrt{\lambda_n}r).$$

Konstanty A_n , B_n můžeme určit z počátečních podmínek, pokud jsou rozvinutelné do Fourierových řad vzhledem k systému $\{R_n(r)\}$:

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\sqrt{\lambda_n}r), \\ \psi(r) &= \sum_{n=1}^{\infty} c\sqrt{\lambda_n} B_n J_0(\sqrt{\lambda_n}r). \end{aligned}$$

S využitím ortogonality Besselových funkcí (viz příloha B) získáme

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{J_0^2(\mu_n)} \int_0^1 \rho J_0(\mu_n \rho) \varphi(a\rho) d\rho, \\ B_n &= \frac{2}{c\sqrt{\lambda_n} J_0^2(\mu_n)} \int_0^1 \rho J_0(\mu_n \rho) \psi(a\rho) d\rho. \end{aligned}$$

Dosaďme konkrétně $a = 1$, $c = 1$ a uvažujme počáteční hodnoty ve tvaru

$$\begin{aligned} (13.29) \quad \varphi(r) &= J_0(\mu_1 r) + J_0(\mu_2 r), \\ \psi(r) &= 0. \end{aligned}$$

Očividně pak $B_n = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a

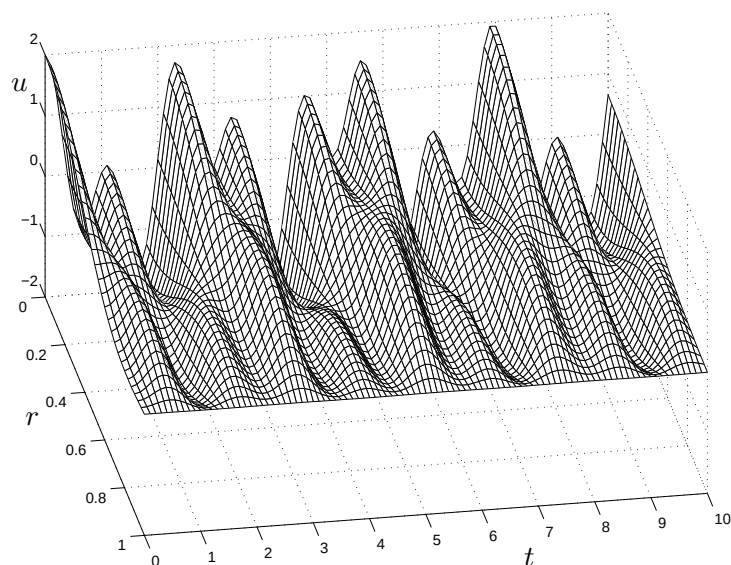
$$A_1 = A_2 = 1, \quad A_n = 0, \quad n = 3, 4, \dots$$

Příslušné řešení lze tedy zapsat jako

$$u(x, y, t) = u(r, t) = \cos \mu_1 t J_0(\mu_1 r) + \cos \mu_2 t J_0(\mu_2 r).$$

Obrázek 13.6 ilustruje závislost u na radiální souřadnici r a čase t . Graf funkce $u = u(x, y, t)$ na několika časových hladinách je znázorněn na obrázku 13.7. (Připomínáme, že $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $\theta \in \langle 0, 2\pi \rangle$.)

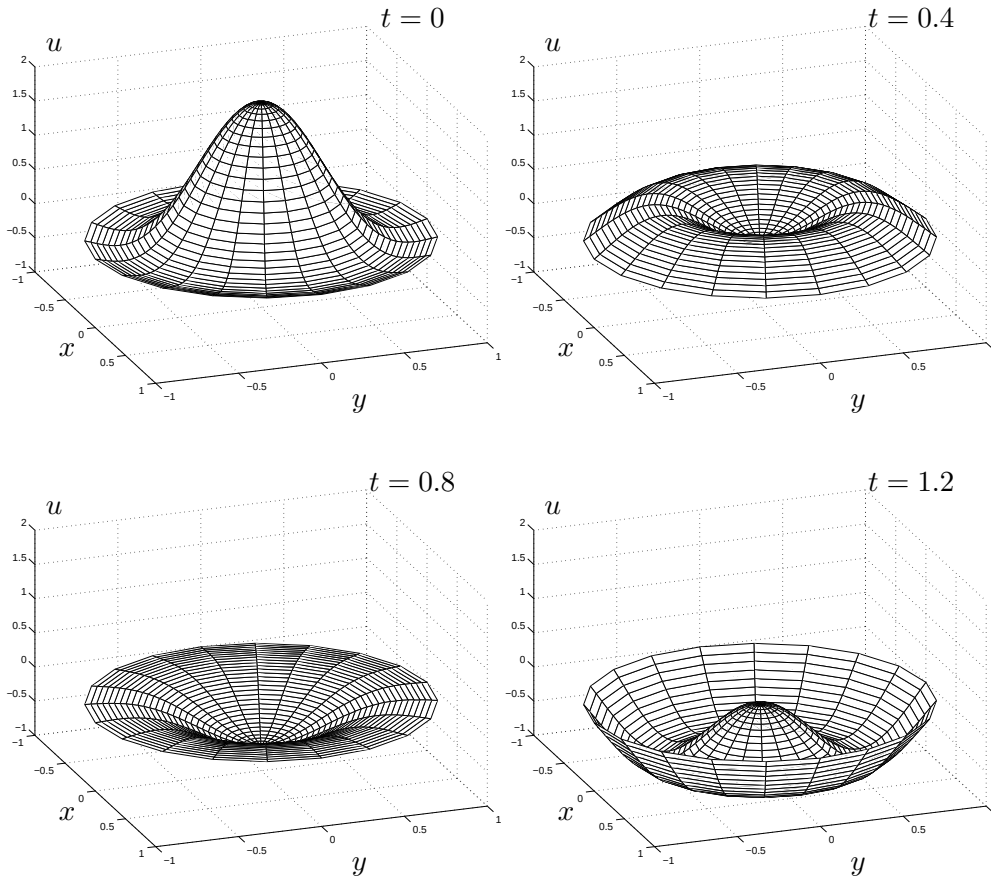
□



Obrázek 13.6: Závislost řešení počátečně-okrajové úlohy (13.27) s počáteční podmínkou (13.29) na proměnných r a t .

Příklad 13.9 (Kruhová membrána – nesymetrický případ). Uvažujme tentýž problém jako v předchozím příkladu, ale nyní bez jakékoli symetrie. Modelujeme tedy kmitající kruhovou membránu s okrajem upevněným v nulové pozici. Počáteční výchylka a počáteční rychlost jsou nyní obecné funkce $\varphi = \varphi(x, y)$, $\psi = \psi(x, y)$:

$$(13.30) \quad \begin{cases} u_{tt} = c^2 \Delta u, & x^2 + y^2 < a^2, \quad t > 0, \\ u(x, y, t) = 0, & x^2 + y^2 = a^2, \\ u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad u_t(x, y, 0) = \psi(x, y). \end{cases}$$



Obrázek 13.7: Grafické znázornění řešení počátečně-okrajové úlohy (13.27) s počáteční podmínkou (13.29) na časových hladinách $t = 0, 0.4, 0.8, 1.2$.

Stejně jako v předchozích případech nalezneme řešení pomocí Fourierovy metody. Jelikož je oblast kruhová, transformujeme opět úlohu do polárních souřadnic, které nám zajistí požadovanou pravoúhlost. Nyní však musíme použít obecné (nesymetrické) transformační schema (6.1) pro Laplaceův operátor. Původní úloha (13.30) se tedy změní na

$$(13.31) \quad \begin{cases} u_{tt} = c^2(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}), & 0 < r < a, \ 0 \leq \theta < 2\pi, \ t > 0, \\ u(r, \theta, t) = 0, & r = a, \ 0 \leq \theta < 2\pi, \ t > 0, \\ u(r, \theta, 0) = \varphi(r, \theta), \\ u_t(r, \theta, 0) = \psi(r, \theta), & 0 \leq r < a, \ 0 \leq \theta < 2\pi. \end{cases}$$

V prvním kroku odseparujeme časovou a prostorové proměnné:

$$u(r, \theta, t) = V(r, \theta)T(t),$$

a protože prostorovou úlohu budeme opět řešit Fourierovou metodou, můžeme rovnou separovat i $V(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$. Máme tedy

$$u(r, \theta, t) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$$

a standardními argumenty dojdeme k rovnosti

$$\frac{T''}{c^2 T} = -\lambda \quad \text{a} \quad \frac{R''}{R} + \frac{R'}{rR} + \frac{\Theta''}{r^2 \Theta} = -\lambda.$$

Separace v druhé rovnici vede na vztahy

$$\frac{\Theta''}{\Theta} = -\nu \quad \text{a} \quad \lambda r^2 + \frac{r^2 R''}{R} + \frac{r R'}{R} = \nu.$$

Funkce Θ musí zřejmě splňovat periodické okrajové podmínky $\Theta(0) = \Theta(2\pi)$, $\Theta'(0) = \Theta'(2\pi)$, z čehož plyne

$$\nu_n = n^2, \quad \Theta_n(\theta) = A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta, \quad n = \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Radiální rovnice má tedy podobu

$$(13.32) \quad r^2 R'' + r R' + (\lambda r^2 - n^2)R = 0,$$

což je *Besselova rovnice řádu n* . Jak vyplývá z přílohy **B**, její omezená řešení mají podobu

$$R(r) = J_n(\sqrt{\lambda}r),$$

kde J_n je *Besselova funkce prvního druhu řádu n* . Okrajová podmínka v (13.31) říká, že $R(a) = 0$, z čehož plyne

$$\lambda_{mn} = \frac{1}{a^2} \mu_{mn}^2, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad m \in \mathbb{N},$$

kde μ_{mn} jsou kladné kořeny funkce J_n . Můžeme tedy psát $R(r) = R_{mn}(r) = J_n(\sqrt{\lambda_{mn}}r)$. Dosadíme-li $\lambda = \lambda_{mn}$ do časové rovnice, dostáváme

$$T_{mn} = C_{mn} \cos c\sqrt{\lambda_{mn}}t + D_{mn} \sin c\sqrt{\lambda_{mn}}t.$$

Použijeme-li získané předpisy pro funkce R , Θ a T , můžeme říci, že řešení vlnové rovnice na kruhu s homogenní Dirichletovou okrajovou podmínkou má tvar

$$\begin{aligned} u(r, \theta, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} J_n(\sqrt{\lambda_{mn}}r) (A_{mn} \cos n\theta + B_{mn} \sin n\theta) \cos c\sqrt{\lambda_{mn}}t \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} J_n(\sqrt{\lambda_{mn}}r) (\bar{A}_{mn} \cos n\theta + \bar{B}_{mn} \sin n\theta) \sin c\sqrt{\lambda_{mn}}t. \end{aligned}$$

Píšeme zde A_{mn} místo $A_n C_{mn}$ a obdobně pro B_{mn} , $\overline{A}_{mn}$, $\overline{B}_{mn}$. K určení těchto koeficientů využijeme počáteční podmínky. Tento postup ilustrujeme na jednoduchém příkladu.

Uvažujme úlohu (13.31) s počátečními podmínkami

$$(13.33) \quad \begin{cases} \varphi(r, \theta) = (a^2 - r^2)r \sin \theta, \\ \psi(r, \theta) = 0. \end{cases}$$

Nulová počáteční rychlost má za následek, že všechny koeficienty u sinových řad (vzhledem k časové proměnné) jsou nulové, tj. $\overline{A}_{mn} = \overline{B}_{mn} = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m \in \mathbb{N}$. Předpis pro řešení se tedy zjednoduší na tvar

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} J_n(\sqrt{\lambda_{mn}}r) (A_{mn} \cos n\theta + B_{mn} \sin n\theta) \cos c\sqrt{\lambda_{mn}}t.$$

Položíme-li $t = 0$, dostáváme

$$(13.34) \quad \varphi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} J_n(\sqrt{\lambda_{mn}}r) (A_{mn} \cos n\theta + B_{mn} \sin n\theta).$$

Povšimněme si, že jde vlastně o Fourierovu řadu funkce φ vzhledem k systému $\{J_n(\sqrt{\lambda_{mn}}r) \cos n\theta, J_n(\sqrt{\lambda_{mn}}r) \sin n\theta\}_{mn}$. Přepíšme (13.34) do tvaru

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta) &= \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} A_{m0} J_0(\sqrt{\lambda_{m0}}r)}_{=:A_0(r)} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} J_n(\sqrt{\lambda_{mn}}r) \right)}_{=:A_n(r)} \cos n\theta \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{m=1}^{\infty} B_{mn} J_n(\sqrt{\lambda_{mn}}r) \right)}_{=:B_n(r)} \sin n\theta. \end{aligned}$$

Pro pevné r máme

$$\begin{aligned} A_0(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(r, \theta) d\theta, \\ A_n(r) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(r, \theta) \cos n\theta d\theta, \\ B_n(r) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(r, \theta) \sin n\theta d\theta. \end{aligned}$$

Dosadíme-li $\varphi(r, \theta) = (a^2 - r^2)r \sin \theta$ a využijeme-li ortogonality trigonometrických funkcí, získáme $A_0 = A_n = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $B_n = 0$ pro $n = 2, 3, \dots$. Jediný nenulový koeficient je B_1 :

$$B_1 = \sum_{m=1}^{\infty} B_{m1} J_1(\sqrt{\lambda_{m1}} r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (a^2 - r^2) r \sin^2 \theta \, d\theta.$$

S využitím vlastností Besselových funkcí (viz příloha B) dostaneme

$$\begin{aligned} (13.35) \quad B_{m1} &= \frac{2}{\pi a^2 J_2^2(\mu_{m1})} \int_0^a \int_0^{2\pi} (a^2 - r^2) r \sin^2 \theta J_1(\mu_{m1} \frac{r}{a}) r \, d\theta \, dr \\ &= \frac{2}{a^2 J_2^2(\mu_{m1})} \int_0^a (a^2 - r^2) r^2 J_1(\mu_{m1} \frac{r}{a}) \, dr. \end{aligned}$$

Připomínáme, že $\lambda_{m1} = (\mu_{m1}/a)^2$ a μ_{m1} jsou kladné kořeny Besselovy funkce J_1 . Odtud již snadno dojdeme k závěru, že řešení úlohy (13.30) nebo (13.31) s počáteční podmínkou (13.33) je dáno předpisem

$$(13.36) \quad \boxed{u(r, \theta, t) = \sin \theta \sum_{m=1}^{\infty} B_{m1} J_1(\mu_{m1} \frac{r}{a}) \cos \mu_{m1} \frac{ct}{a}}$$

s koeficienty B_{m1} určenými vztahem (13.35).

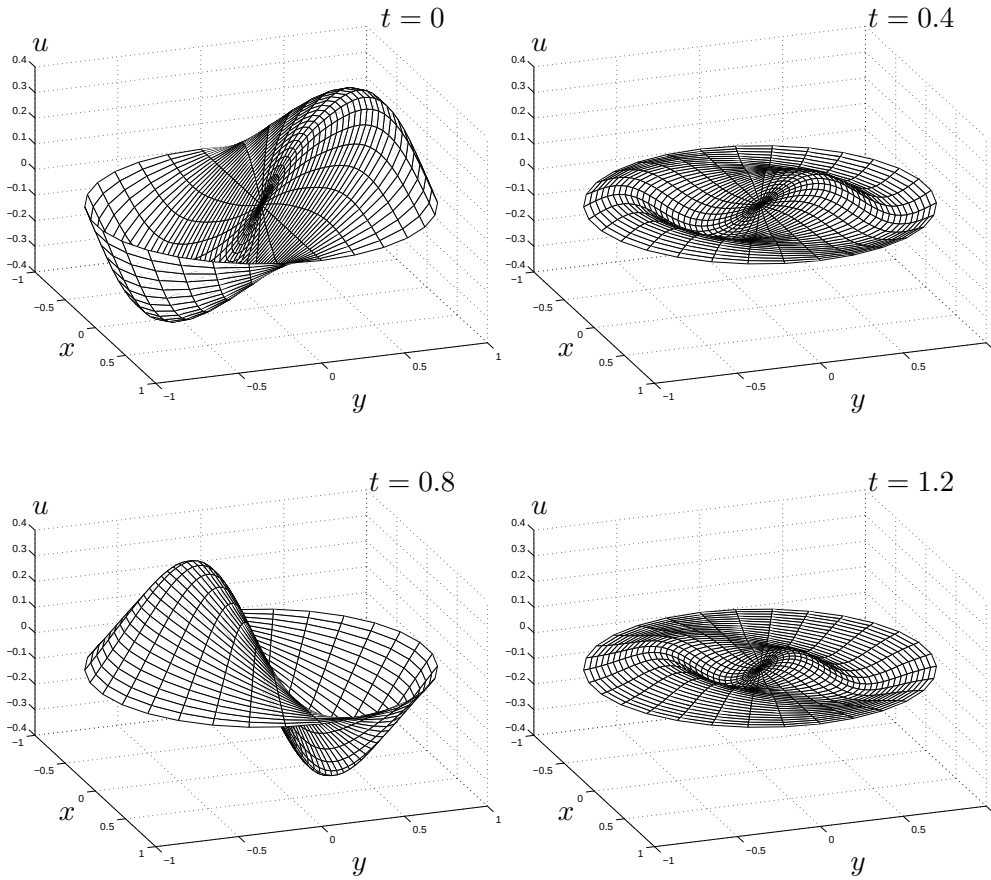
Řešení (13.36) na různých časových hladinách je zobrazeno na obrázku 13.8. Použity jsou hodnoty $a = 1$, $c = 1$ a částečný součet do $m = 3$.

□

V posledním příkladu přidáme ještě jednu prostorovou dimenzi. Budeme se však držet nejjednoduššího, tj. radiálně symetrického, případu.

Příklad 13.10 (Vibrace v kouli – symetrický případ). Uvažujme vibrace v kouli s pevně zafixovanou hranicí a s počátečními hodnotami, které závisí pouze na poloměru $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Řešíme tedy počátečně-okrajovou úlohu pro vlnovou rovnici s Dirichletovou okrajovou podmínkou

$$(13.37) \quad \begin{cases} u_{tt} = c^2 \Delta u, & x^2 + y^2 + z^2 < a^2, \, t > 0, \\ u(x, y, z, t) = 0, & x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ u(x, y, z, 0) = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}), \\ u_t(x, y, z, 0) = \psi(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}). \end{cases}$$



Obrázek 13.8: Grafické znázornění řešení počátečně-okrajové úlohy (13.30) s počáteční podmínkou (13.33) na časových hladinách $t = 0, 0.4, 0.8, 1.2$.

Geometrie oblasti nás nabádá k přechodu do sférických souřadnic r, φ, θ . Jelikož data úlohy navíc nezávisí na úhlech φ, θ , můžeme očekávat, že řešení bude radiálně symetrické. Laplaceův operátor se tedy redukuje na jednoduchý tvar $\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r}u_r$ a z úlohy (13.37) se stává problém ve dvou proměnných t a r :

$$(13.38) \quad \begin{cases} u_{tt} = c^2(u_{rr} + \frac{2}{r}u_r), & 0 < r < a, \quad t > 0, \\ u(r, t) = 0, & r = a, \quad t > 0, \\ u(r, 0) = \varphi(r), \quad u_t(r, 0) = \psi(r), & 0 \leq r < a. \end{cases}$$

Řešení budeme opět hledat Fourierovou metodou. Separací proměnných $u(r, t) =$

$R(r)T(t)$ získáme dvojici obyčejných diferenciálních rovnic

$$(13.39) \quad T'' + \lambda c^2 T = 0,$$

$$(13.40) \quad R'' + \frac{2}{r}R' + \lambda R = 0.$$

Radiální rovnici můžeme zjednodušit zavedením nové funkce $Y(r)$:

$$Y(r) = rR(r).$$

Vztah (13.40) pak přejde na

$$Y''(r) + \lambda Y(r) = 0$$

a pro $\lambda > 0$ má jeho řešení tvar $Y(r) = C \cos \sqrt{\lambda}r + D \sin \sqrt{\lambda}r$. Tím tedy získáme

$$R(r) = \frac{1}{r}(C \cos \sqrt{\lambda}r + D \sin \sqrt{\lambda}r), \quad 0 < r < a.$$

Funkce R musí navíc splňovat okrajové podmínky

$$\lim_{r \rightarrow 0+} R(r) \text{ je konečné číslo, } R(a) = 0.$$

Odtud plyne $C = 0$, protože funkce $\frac{1}{r} \cos \sqrt{\lambda}r$ je v okolí bodu $r = 0$ neomezená. (Uvědomme si, že $\frac{1}{r} \sin \sqrt{\lambda}r$ je naopak omezená a limitně se blíží k $\sqrt{\lambda}$ pro $r \rightarrow 0$.) Z druhé okrajové podmínky plyne

$$D \sin \sqrt{\lambda}a = 0,$$

odkud snadno určíme vlastní čísla

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}$$

a příslušný systém vlastních funkcí

$$R_n(r) = \frac{1}{r} \sin \frac{n\pi r}{a}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Časová úloha (13.39) má řešení $T_n(t) = A_n \cos c\sqrt{\lambda_n}t + B_n \sin c\sqrt{\lambda_n}t$ a tedy radiálně symetrické řešení vlnové rovnice s homogenní Dirichletovou okrajovou podmínkou lze psát ve tvaru

$$(13.41) \quad u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi ct}{a} + B_n \sin \frac{n\pi ct}{a} \right) \frac{1}{r} \sin \frac{n\pi r}{a}$$

pro $r > 0$. K určení hodnoty $u(0, t)$ využijeme skutečnost, že $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \sin \frac{n\pi r}{a} = \frac{n\pi}{a}$ a položíme

$$u(0, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{a} (A_n \cos \frac{n\pi ct}{a} + B_n \sin \frac{n\pi ct}{a}).$$

Abychom splnili i počáteční podmínku, musíme zajistit následující rovnosti

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{1}{r} \sin \frac{n\pi r}{a}, \\ \psi(r) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{a} B_n \frac{1}{r} \sin \frac{n\pi r}{a} \end{aligned}$$

pro $r > 0$, což je ekvivalentní vztahům

$$\begin{aligned} r\varphi(r) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi r}{a}, \\ r\psi(r) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{a} B_n \sin \frac{n\pi r}{a} \end{aligned}$$

pro $r \geq 0$. Pomocí standardních argumentů stanovíme koeficienty A_n a B_n :

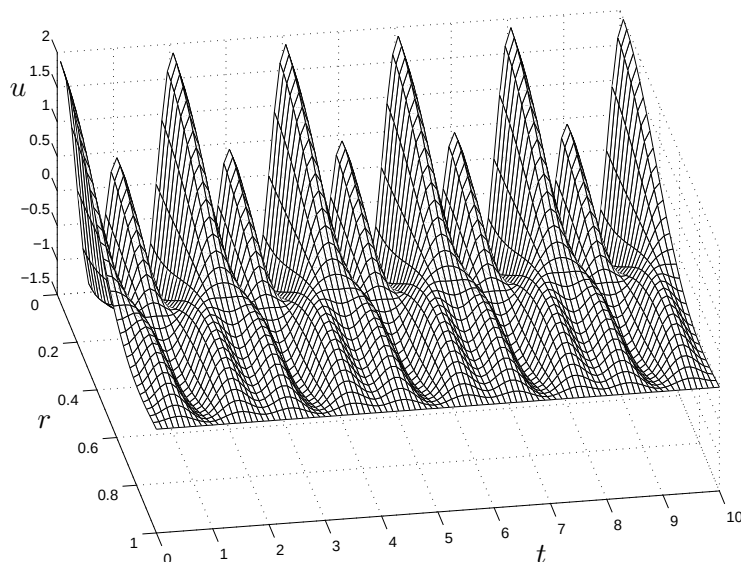
$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{a} \int_0^a r\varphi(r) \sin \frac{n\pi r}{a} dr, \\ B_n &= \frac{2}{n\pi c} \int_0^a r\psi(r) \sin \frac{n\pi r}{a} dr. \end{aligned}$$

Jelikož není snadné zobrazit řešení u jako funkci všech proměnných x, y, z, t , zachycuje obrázek 13.9 pouze hodnoty řešení (13.41) v závislosti na radiální souřadnici r a čase t . Pro ilustraci jsme zvolili data $a = 1$, $c = 1$, nulovou počáteční rychlost $\psi \equiv 0$ a počáteční výchylku danou předpisem

$$(13.42) \quad \varphi(r) = J_0(\mu_1 r) + J_0(\mu_2 r).$$

(Zde J_0 je nultá Besselova funkce prvního druhu, viz příloha B.) Použili jsme částečné součty do hodnoty $n = 20$. Tvar počáteční podmínky (13.42) je zachycen na obrázku 13.10.

□



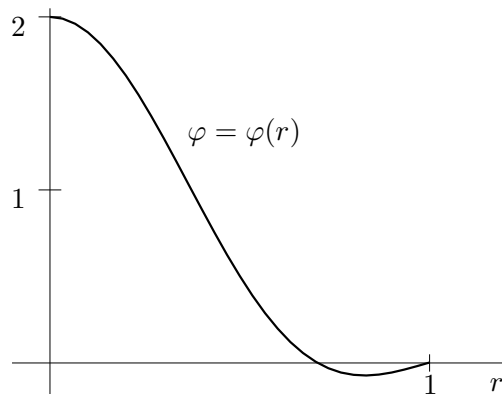
Obrázek 13.9: Grafické znázornění řešení počátečně-okrajové úlohy (13.39) s počáteční podmínkou (13.42).

Poznámka 13.11. V předchozím příkladě jsme zvolili počáteční výchylku (13.42), jelikož tatáž podmínka byla použita i v příkladě 13.8 pro úlohu s vibrující membránou. Podívejme se detailně na obrázek 13.9 a srovnáme ho s obrázkem 13.6. První z nich ilustruje radiálně symetrické kmity v jednotkové kouli (např. zvukové vlny), zatímco druhý zmíněný obrázek znázorňuje radiálně symetrické vibrace v jednotkovém kruhu. V obou případech jsme použili stejná data, avšak výsledné chování se značně liší (povšimněte si např. tvaru šířících se vln a časové periody).

Další příklad rozdílného chování ve dvou a ve třech dimenzích je ilustrován na obrázku 13.11. Zde jsem znázornili řešení dvojrozměrné a trojrozměrné vlnové rovnice na kruhu, resp. v kouli o poloměru $a = 10$, s homogenní Dirichletovou okrajovou podmínkou, vlnovou rychlostí $c = 1.5$, nulovou počáteční výchylkou $\varphi \equiv 0$ a počáteční rychlostí danou ve tvaru

$$\psi(r) = 1 \quad \text{pro } 0 \leq r \leq 1, \quad \psi(r) = 0 \quad \text{jinde.}$$

(Vlnovou rovnici s týmiž počátečními podmínkami – avšak na celé rovině, resp. celém prostoru – jsme uvažovali již v příkladu 13.3.) Ve dvou dimenzích tato úloha odpovídá situaci, kdy udeříme do kruhové membrány jednotkovým kruhovým kladivem. Můžeme pozorovat, že signál se šíří podél charakteristik a body,



Obrázek 13.10: Počáteční výchylka (13.42).

které zasáhne, zůstanou trvale vychýleny. Oproti tomu ve třech dimenzích signál přichází a zase se ztrácí. To odpovídá skutečnosti, že ve dvou dimenzích je (neodražené) řešení v bodě $(\mathbf{x}_0, t_0)$ ovlivněno počátečními hodnotami z *celého kruhu*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq (ct_0)^2,$$

zatímco ve třech dimenzích pouze počátečními hodnotami z *kulové plochy*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = (ct_0)^2.$$

Povšimněte si rovněž odrazu na hranici $r = a$ a efektu principu kauzality, který platí v libovolné dimenzi.

Poznámka 13.12. Radiální rovnice (13.40) je speciálním případem (pro $n = 0$) obecné rovnice

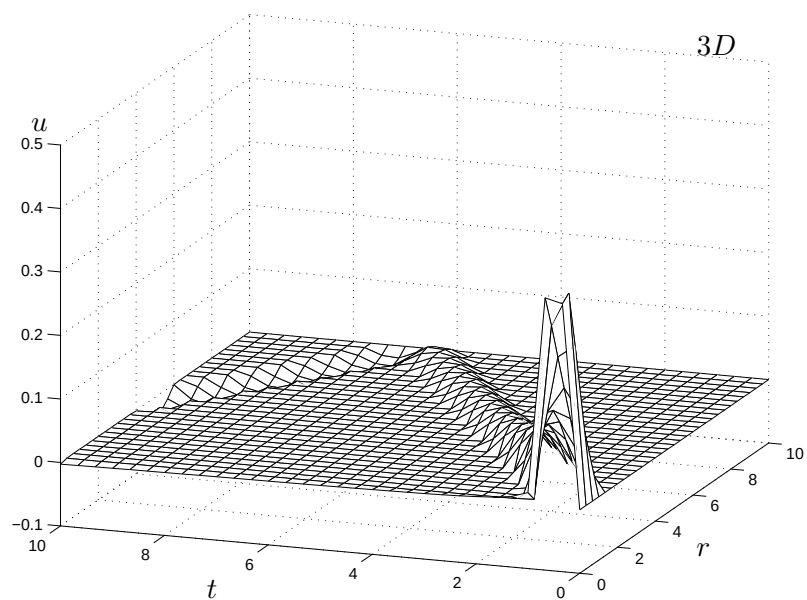
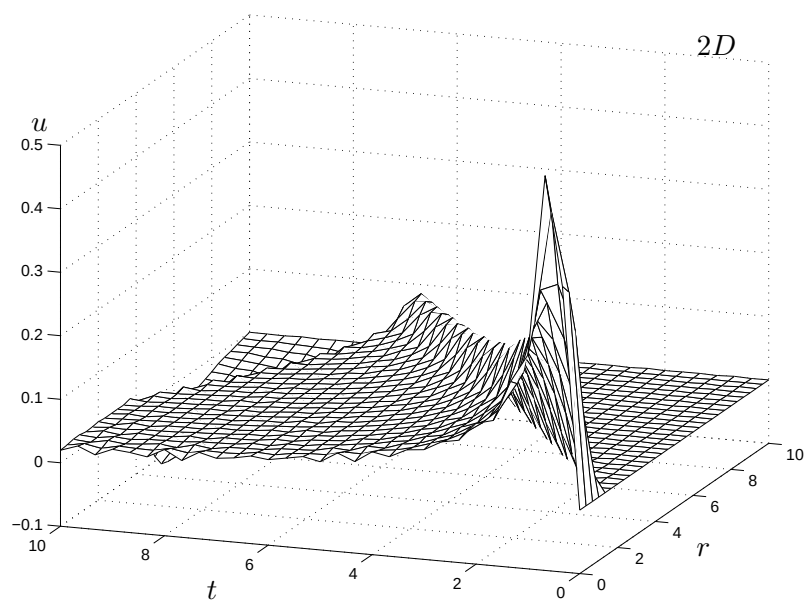
$$(13.43) \quad r^2 R'' + 2rR' + (\lambda r^2 - n(n+1))R = 0,$$

která se objevuje v nesymetrických úlohách na kouli. Lze ukázat, že řešení rovnice (13.43) mají tvar

$$R(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}r}} J_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}r),$$

kde $J_{n+\frac{1}{2}}$ je Besselova funkce prvního druhu (neceločíselného) řádu $n + \frac{1}{2}$, viz příloha B. Pro $n = 0$ můžeme řešení (13.40) zapsat ve tvaru

$$R(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}r}} J_{\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}r).$$



Obrázek 13.11: Grafické znázornění radiálně symetrických řešení Dirichletovy úlohy pro vlnovou rovnici ve 2D a ve 3D s počáteční rychlostí $\psi(r) = 1$ pro $0 \leq r \leq 1$ a nulovou jinde.

S využitím vyjádření (B.5) pro Besselovy funkce dostaneme

$$\begin{aligned} J_{\frac{1}{2}}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x/2)^{\frac{1}{2}+2k}}{k! \Gamma(\frac{1}{2} + k + 1)} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x. \end{aligned}$$

Řešení rovnice (13.40) lze tedy zapsat jednoduše jako

$$R(r) = \frac{1}{\sqrt{\lambda r}} \sin \sqrt{\lambda} r,$$

jak jsme již odvodili výše, ale odlišným způsobem.

13.6 Cvičení

1. Nalezněte všechny trojrozměrné rovinné vlny, tj. všechna řešení vlnové rovnice ve tvaru $u(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - ct)$, kde $\mathbf{k}$ je pevný vektor a f je funkce jedné proměnné.

[bud' $|\mathbf{k}| = 1$, anebo $u(\mathbf{x}, t) = a + b(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - ct)$, kde a, b jsou libovolné konstanty]

2. Ověřte, že funkce $(c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2)^{-1}$ splňuje vlnovou rovnici mimo světelného kužele.

3. Dokažte, že $\Delta(\bar{u}) = (\overline{\Delta u}) = \bar{u}_{rr} + \frac{2}{r}\bar{u}_r$ pro libovolnou funkci $u = u(x, y, z)$. Zde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ je sférická souřadnice.

[Návod: Zapište Δu ve sférických souřadnicích a ukažte, že úhlové členy mají nulový průměr na kulových plochách se středem v počátku.]

4. S využitím Kirchhoffovy formule řešte vlnovou rovnici ve třech dimenzích s počátečními daty $\varphi(x, y, z) \equiv 0$, $\psi(x, y, z) = y$.

$$[u(x, y, z, t) = ty]$$

5. Řešte vlnovou rovnici ve třech dimenzích s počátečními daty $\varphi(x, y, z) \equiv 0$, $\psi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Hledejte radiálně symetrické řešení a použijte substituci $v(r, t) = ru(r, t)$.

6. Řešte vlnovou rovnici ve třech dimenzích s počátečními podmínkami $\varphi(\mathbf{x}) \equiv 0$, $\psi(\mathbf{x}) = A$ pro $|\mathbf{x}| < \rho$ a $\psi(\mathbf{x}) = 0$ pro $|\mathbf{x}| > \rho$, kde A je konstanta. Tato úloha je analogií úderu kladiva studovaného v odstavci 4.1.

$$[u(\mathbf{x}, t) = \frac{A}{4cr}(\rho - (r - ct)^2) \quad \text{pro } |\rho - ct| \leq r \leq \rho + ct, \\ u(\mathbf{x}, t) = At \quad \text{pro } r \leq \rho - ct \text{ a } u(\mathbf{x}, t) = 0 \text{ jinde}]$$

7. Řešte vlnovou rovnici ve třech dimenzích s počátečními podmínkami $\varphi(\mathbf{x}) = A$ pro $|\mathbf{x}| < \rho$, $\varphi(\mathbf{x}) = 0$ pro $|\mathbf{x}| > \rho$ a $\psi(\mathbf{x}) \equiv 0$, kde A je konstanta. Kde má řešení skokovou nespojitost?

[Návod: Zderivujte řešení ze cvičení 6.]

$$[u(\mathbf{x}, t) = A \text{ pro } r < \rho - ct, u(\mathbf{x}, t) = A(r - ct)/2r \text{ pro } |\rho - ct| < r < \rho + ct \\ \text{a } u(\mathbf{x}, t) = 0 \text{ pro } r > \rho + ct]$$

8. S využitím Kirchhoffovy formule a metody odrazu řešte vlnovou rovnici na poloprostoru $\{(x, y, z, t); z > 0\}$ s Neumannovou podmínkou $\partial u / \partial z = 0$ na hranici $z = 0$ a s počátečními podmínkami $\varphi(x, y, z) \equiv 0$ a $\psi(x, y, z)$ libovolné.
9. Proč nefunguje metoda sférických průměrů v případě dvojrozměrného vlnění?
10. Předpokládejte, že neznáme d'Alembertovu formuli a řešte jednorozměrnou vlnovou rovnici s počátečními daty $\varphi(x) \equiv 0$ a libovolnou funkcí $\psi(x)$ pomocí metody snižování dimenze. To jest uvažujte $u(x, t)$ jako řešení dvojrozměrné rovnice nezávislé na proměnné y .
11. Uvažujte vlnovou rovnici s okrajovou podmínkou $\partial u / \partial n + b \partial u / \partial t = 0$, $b > 0$, a ukažte, že její energie klesá.
12. Uvažujte rovnici $u_{tt} - c^2 \Delta u + m^2 u = 0$, $m > 0$, která je známa jako *Kleinova-Gordonova rovnice*. Ukažte, že její energie je konstantní.
13. Dokažte jednoznačnost klasického řešení vlnové rovnice na $\mathbb{R}^3$. Využijte zákon zachování energie aplikovaný na rozdíl dvou řešení.
14. Nalezněte hodnotu $u(0, 0, 0, t)$ řešení vlnové rovnice

$$u_{tt} - \Delta u = g$$

ve třech prostorových proměnných, je-li

- (a) $\varphi(x, y, z) = f(x^2 + y^2 + z^2)$, $\psi \equiv 0$, $g \equiv 0$,
 (b) $\varphi \equiv 0$, $\psi(x, y, z) = f(x^2 + y^2 + z^2)$, $g \equiv 0$,
 (c) $\varphi \equiv 0$, $\psi \equiv 0$, $g(x, y, z, t) = f(x^2 + y^2 + z^2)$.

[Označíme-li $v(t) = u(0, 0, 0, t)$, pak a) $v(t) = f(c^2 t^2) + 2c^2 t^2 f'(c^2 t^2)$; b) $v(t) = t f(c^2 t^2)$; c) $v(t) = \int_0^t (t - \tau) f(c^2 (t - \tau)^2) d\tau$.]

15. Uvažujte rovnici

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} - bu_t + au_{yy}$$

na obdélníku $(0, a) \times (0, b)$ s okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} u(0, y, t) &= 0, & u_x(a, y, t) &= 0, \\ u_y(x, 0, t) &= 0, & u(x, b, t) &= 0. \end{aligned}$$

Nalezněte příslušné obyčejné diferenciální rovnice a okrajové podmínky vzniklé separací proměnných.

16. Separujte parciální diferenciální rovnici

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) - (u_x + u_y)$$

na příslušné obyčejné rovnice.

17. Řešte dvojrozměrnou vlnovou rovnici na jednotkovém čtverci s koeficientem $c = \frac{1}{\pi}$, homogenními Dirichletovými okrajovými podmínkami a následujícími počátečními podmínkami:

$$(a) \quad \varphi(x, y) = \sin 3\pi x \sin \pi y, \quad \psi(x, y) = 0,$$

$$[u(x, y, t) = \sin 3\pi x \sin \pi y \cos \sqrt{10}t]$$

$$(b) \quad \varphi(x, y) = \sin \pi x \sin \pi y, \quad \psi(x, y) = \sin \pi x,$$

$$(c) \quad \varphi(x, y) = x(1-x)y(1-y), \quad \psi(x, y) = 2 \sin \pi x \sin 2\pi y,$$

$$\begin{aligned} [u(x, y, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{64 \cos \sqrt{(2k+1)^2 + (2l+1)^2} t}{\pi^6 (2k+1)^3 (2l+1)^3} \sin(2k+1)\pi x \sin(2l+1)\pi y \\ + \frac{2}{\sqrt{5}} \sin \pi x \sin 2\pi y \sin \sqrt{5}t] \end{aligned}$$

$$(d) \quad \varphi(x, y) = x(1 - e^{x-1})y(1 - y^2), \quad \psi(x, y) = 0.$$

18. Řešte dvojrozměrnou vlnovou rovnici na kruhu o poloměru a s homogenní Dirichletovou okrajovou podmínkou. Použijte následující data:

$$(a) \quad a = 2, \quad c = 1, \quad \varphi(r) = 0, \quad \psi(r) = 1,$$

$$[u(r, t) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_n r/2)}{\mu_n^2 J_1(\mu_n)} \sin \frac{\mu_n}{2} t]$$

$$(b) \quad a = 1, \quad c = 10, \quad \varphi(r) = 1 - r^2, \quad \psi(r) = 1,$$

- (c) $a = 1, c = 1, \varphi(r) = 0, \psi(r) = J_0(\mu_3 r),$
 (d) $a = 1, c = 1, \varphi(r) = J_0(\mu_3 r), \psi(r) = 1 - r^2.$

$$[u(r, t) = J_0(\mu_3 r) \cos \mu_3 t + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_n r)}{\mu_n^4 J_1(\mu_n)} \sin \mu_n t]$$

19. Řešte dvojrozměrnou vlnovou rovnici na kruhu o poloměru a s homogenními Dirichletovými okrajovými podmínkami. Použijte následující data:

- (a) $a = 1, c = 1, \varphi(r, \theta) = (1 - r^2)r^2 \sin 2\theta, \psi(r, \theta) = 0,$

$$[u(r, \theta, t) = 24 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_2(\mu_{n2} r)}{\mu_{n2}^3 J_3(\mu_{n2})} \sin 2\theta \cos \mu_{n2} t]$$

- (b) $a = 1, c = 1, \varphi(r, \theta) = 0, \psi(r, \theta) = (1 - r^2)r^2 \sin 2\theta,$

$$[u(r, \theta, t) = 24 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_2(\mu_{n2} r)}{\mu_{n2}^4 J_3(\mu_{n2})} \sin 2\theta \sin \mu_{n2} t]$$

- (c) $a = 1, c = 1, \varphi(r, \theta) = 1 - r^2, \psi(r, \theta) = J_0(r).$

20. Uvažujte tenkou obdélníkovou desku o délce a a šířce b a popište její kmitání pro následující data: $a = \frac{\pi}{2}, b = \pi, c = 1$, okrajové podmínky

$$\begin{aligned} u(0, y, t) &= 0, & u_x(a, y, t) &= 0, \\ u_y(x, 0, t) &= 0, & u(x, b, t) &= 0, \end{aligned}$$

a počáteční podmínky

$$u(x, y, 0) = \begin{cases} y \sin x, & 0 \leq x \leq a, 0 \leq y < \frac{b}{2}, \\ (y - b) \sin x, & 0 \leq x \leq a, \frac{b}{2} \leq y \leq b, \end{cases}$$

a

$$u_t(x, y, 0) = \begin{cases} x(\cos y + 1), & 0 \leq x < \frac{a}{2}, 0 \leq y \leq b, \\ (x - a)(\cos y + 1), & \frac{a}{2} \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b. \end{cases}$$

21. Uvažujte tenkou vibrující obdélníkovou membránu o délce $\frac{3\pi}{2}$ a šířce $\frac{\pi}{2}$. Předpokládejte, že strany $x = 0$ a $y = 0$ jsou upevněné v nulové poloze a další dvě strany jsou volné. Pro nulovou počáteční rychlost a počáteční výchylku $\varphi(x, y) = (\sin x)(\sin y)$ určete časově závislé řešení a nakreslete jeho graf na několika časových hladinách.
22. Řešte úlohu kmitající kruhové membrány o poloměru 1 s pevnou hranicí, nulovou počáteční rychlostí a počáteční výchylkou popsanou funkcí $f(r) \sin 2\theta$.

23. Řešte úlohu kmitající kruhové membrány o poloměru π s volnou hranicí, nulovou počáteční rychlostí a počáteční výchylkou popsanou funkcí $f(r) \cos \theta$.
24. Uvažujte vertikální kmity kruhové výseče $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ o poloměru 2. Nalezněte příslušné řešení, jsou-li okrajové podmínky dány následovně:
- (a) $u(r, 0, t) = 0, \quad u(r, \frac{\pi}{4}, t) = 0, \quad u(2, \theta, t) = 0.$
- (b) $u_\theta(r, 0, t) = 0, \quad u_\theta(r, \frac{\pi}{4}, t) = 0, \quad u(2, \theta, t) = 0.$

V obou případech předpokládejte nulovou počáteční rychlost a počáteční výchylku jako funkci dvou proměnných, poloměru a úhlu.

25. Řešte úlohu

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2(u_{xx} + u_{yy}) = f(x, y) \sin \omega t, & (x, y) \in \Omega = (0, a) \times (0, b), \quad t > 0, \\ u(x, y, t) = 0, & (x, y) \in \partial\Omega, \\ u(x, y, 0) = 0, \quad u_t(x, y, 0) = 0. \end{cases}$$

Uvažujte zvlášť případ bez rezonance $\omega \neq \omega_{mn} = c\sqrt{(\frac{m\pi}{a})^2 + (\frac{n\pi}{b})^2}$ pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$ a případ v rezonanci $\omega = \omega_{m_0 n_0}$ pro určité (m_0, n_0) .

26. Nalezněte všechna řešení vlnové rovnice ve tvaru $u = e^{i\omega t} f(r)$, která jsou omezená v počátku. Zde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$[u(r, t) = Ae^{-i\omega t} J_0(\frac{\omega r}{c})]$$

A

Příloha

Sturmova- Liouvilleova úloha

Při aplikaci Fourierovy metody jsme se setkali s parametrickými okrajovými úlohami pro obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu, jejichž řešení (obvykle sinové a kosinové funkce) tvořily úplný ortogonální systém. Tato skutečnost hrála klíčovou roli při řešení původní úlohy pro parciální diferenciální rovnici a umožňovala vyjádřit její řešení ve tvaru nekonečné řady. Tyto vlastnosti nejsou typické pouze pro siny a kosiny, ale rovněž pro mnohem obecnější funkce, které řeší tzv. *Sturmovu-Liouvilleovu okrajovou úlohu*

$$(A.1) \quad \begin{aligned} &-(p(x)y')' + q(x)y = \lambda r(x)y, \quad a < x < b, \\ &\alpha_0 y(a) + \beta_0 y'(a) = 0, \\ &\alpha_1 y(b) + \beta_1 y'(b) = 0. \end{aligned}$$

Zde $\alpha_0^2 + \beta_0^2 > 0$, $\alpha_1^2 + \beta_1^2 > 0$ (tj. alespoň jeden koeficient z každé dvojice je nenulový) a λ je neznámý parametr.

Řekneme, že (A.1) tvoří *regulární Sturmovu-Liouvilleovu úlohu*, pokud $\langle a, b \rangle$ je uzavřený konečný interval a jsou splněny následující *podmínky regularity*: $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ a $r(x)$ jsou spojité reálné funkce na $\langle a, b \rangle$ a $p(x) > 0$, $r(x) > 0$ pro $a \leq x \leq b$.

Hodnota parametru λ , pro kterou existuje netriviální řešení úlohy (A.1), se nazývá *vlastní číslo*. Příslušné netriviální řešení nazveme *vlastní funkcí* příslušnou vlastnímu číslu λ .

Nyní shrneme hlavní důležité vlastnosti vlastních čísel a vlastních funkcí

regulární Sturmovy-Liouvilleovy úlohy.

- Vlastní čísla úlohy (A.1) jsou všechna reálná a tvoří nekonečnou rostoucí posloupnost

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_n < \dots \rightarrow \infty.$$

- Každému vlastnímu číslu λ_n přísluší jediná (až na nenulový násobek) vlastní funkce $y_n(x)$, která má v intervalu (a, b) právě $n - 1$ nulových bodů. (Povšimněte si, že libovolný násobek vlastní funkce je opět vlastní funkcí.) Navíc mezi dvěma sousedními nulovými body funkce $y_n(x)$ je právě jeden nulový bod funkce $y_{n+1}(x)$.
- Jsou-li $y_n(x)$ a $y_m(x)$ dvě vlastní funkce příslušné dvěma různým vlastním číslům λ_n a λ_m , pak

$$\int_a^b r(x) y_n(x) y_m(x) dx = 0$$

(tj. y_n a y_m jsou lineárně nezávislé a ortogonální s váhovou funkcí $r(x)$).

- Libovolná po částech hladká periodická funkce f se základní periodou $T = b - a$ je rozvinutelná ve Fourierovu řadu vzhledem k systému vlastních funkcí y_n , tj.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n y_n(x),$$

kde F_n jsou Fourierovy koeficienty definované předpisem

$$F_n = \frac{\int_a^b r(x) f(x) y_n(x) dx}{\int_a^b r(x) y_n^2(x) dx}.$$

Fourierova řada navíc konverguje v každém bodě x k hodnotě $f(x)$, pokud $f(x)$ je spojitá v x , a konverguje k hodnotě $\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$, pokud $f(x)$ má v x nespojitost prvního druhu (skok). Symboly $f(x^+)$ a $f(x^-)$ značí jednostranné limity funkce f v bodě x .

Obvykle říkáme, že vlastní funkce $y_n(x)$ tvoří úplný ortogonální systém.

V některých případech a za dodatečných podmínek platí výše uvedené vlastnosti i pro tzv. *singulární Sturmovu-Liouvilleovu úlohu*, viz např. [22]. V našem textu jsme se setkali pouze s jedním takovým případem a tím byla parametrická Besselova rovnice (viz příklady 12.5, 13.8, 13.9 a poznámka B.1 níže).

B

Příloha

Besselovy funkce

V kapitolách 12 a 13 jsme se setkali se speciálním případem tzv. *Besselovy rovnice řádu n*

$$(B.1) \quad x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$$

nebo ekvivalentně

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0, \quad x \neq 0.$$

Konstanta n je nezáporné číslo (ne nutně celočíselné; pro naše účely však budeme obvykle uvažovat $n \in \mathbb{N}$). Rovnice (B.1) je lineární obyčejná diferenciální rovnice druhého řádu a musí tedy mít dvojici lineárně nezávislých řešení, která je možné hledat ve tvaru

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\alpha}, \quad a_0 \neq 0.$$

Konkrétní hodnoty parametrů a_k a α nalezneme následovně. Dosadíme zpátky do rovnice (B.1) a dostaneme

$$\begin{aligned} & x^2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+\alpha)(k+\alpha-1)a_k x^{k+\alpha-2} \\ & + x \sum_{k=0}^{\infty} (k+\alpha)a_k x^{k+\alpha-1} + (x^2 - n^2) \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\alpha} = 0 \end{aligned}$$

neboli (po jednoduché úpravě a vydělení členem x^α)

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k + \alpha - n)(k + \alpha + n)a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+2} = 0.$$

Druhou sumu můžeme přepsat do tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+2} = \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^k$$

a získáme rovnici

$$(B.2) \quad \sum_{k=0}^{\infty} (k + \alpha - n)(k + \alpha + n)a_k x^k + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^k = 0.$$

Pro koeficienty u jednotlivých mocnin x musí tedy platit následující vztahy:

$$\begin{aligned} k = 0 : & \quad (\alpha - n)(\alpha + n)a_0 = 0, \\ k = 1 : & \quad (1 + \alpha - n)(1 + \alpha + n)a_1 = 0, \\ k \geq 2 : & \quad (k + \alpha - n)(k + \alpha + n)a_k + a_{k-2} = 0. \end{aligned}$$

Jelikož požadujeme $a_0 \neq 0$, z první rovnice plyne

$$\alpha = n \quad \text{nebo} \quad \alpha = -n.$$

Druhá rovnice musí být splněna pro všechna nezáporná n a tedy $a_1 = 0$. Třetí rovnice vede na *rekurentní formuli*

$$(B.3) \quad a_k = \frac{-1}{(k + \alpha - n)(k + \alpha + n)} a_{k-2}.$$

Protože $a_1 = 0$, dostáváme

$$a_3 = a_5 = \dots = a_{2k+1} = \dots = 0$$

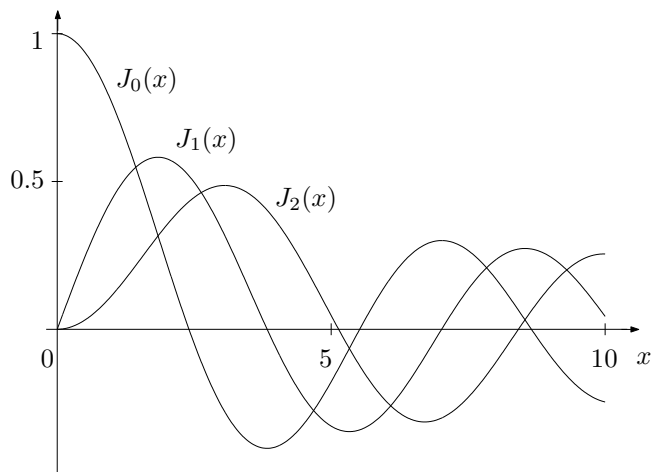
a nenulové koeficienty můžeme zapsat následovně

$$\begin{aligned} (B.4) \quad a_{2k} &= \frac{-1}{(2k + \alpha - n)(2k + \alpha + n)} a_{2k-2} \\ &= \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k} k! (1 + n)(2 + n)(3 + n) \dots (k + n)}. \end{aligned}$$

Obvykle volíme $a_0 = 2^{-n}/n!$ a pro $\alpha = n$ získáme první řešení Besselovy rovnice ve tvaru

$$(B.5) \quad J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!},$$

což je tzv. *Besselova funkce prvního druhu řádu n* . (Pokud $n \notin \mathbb{N}$, nahradíme faktoriál $(n+k)!$ Gamma funkcí $\Gamma(n+k+1)$, viz např. [1].) Několik Besselových funkcí prvního druhu je načrtnuto na obrázku B.1. Povšimněte si, že všechny tyto funkce jsou konečné i v singulárním bodě $x = 0$!



Obrázek B.1: *Besselovy funkce prvního druhu pro $n = 0, 1, 2$.*

Lze ukázat, že druhé lineárně nezávislé řešení Besselovy rovnice má podobu

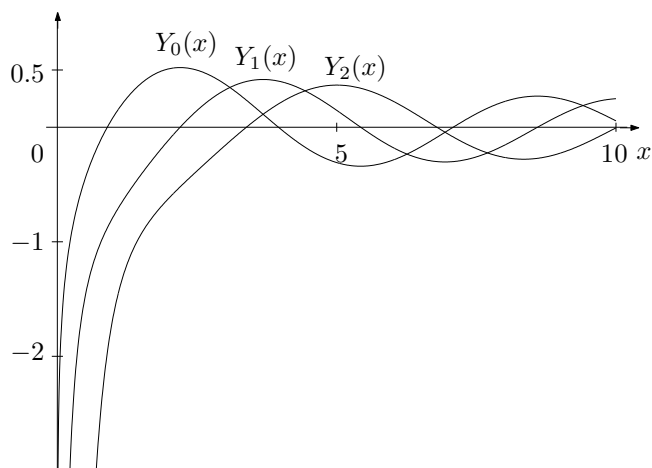
$$Y_n(x) = \lim_{q \rightarrow n} \frac{J_q(x) \cos q\pi - J_{-q}(x)}{\sin q\pi}$$

a je známo jako *Besselova funkce druhého druhu* (nebo též *Neumannova* nebo *Weberova funkce*) *řádu n* . Tyto funkce jsou již v singulárním bodě $x = 0$ neomezené. Pro $n > 0$ se Y_n chová na okolí bodu $x = 0$ jako $-\frac{1}{x^n}$, zatímco v případě $n = 0$ lze nahradit $Y_0(x) \approx \frac{2}{\pi} \ln x$ pro $x \rightarrow 0$. Několik Besselových funkcí druhého druhu je zobrazeno na obrázku B.2.

Bez důkazu uvedeme některé základní vlastnosti Besselových funkcí, které jsme využili v předchozím textu.

- Jak můžeme vidět na obrázcích B.1 a B.2, každá Besselova funkce má spočetně mnoho kladných nulových bodů μ_k , $k = 1, 2, \dots$.
- Pro libovolné $n \geq 0$ je systém funkcí $\{\sqrt{x}J_n(\mu_{nk}x)\}_{k=1}^{\infty}$ ortogonální na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, tj.

$$\int_0^1 x J_n(\mu_{nk}x) J_n(\mu_{nj}x) dx = 0 \quad \text{pro } j \neq k$$



Obrázek B.2: Besselovy funkce druhého druhu pro $n = 0, 1, 2$.

a

$$\int_0^1 x J_n^2(\mu_{nk}x) dx = \frac{1}{2} J_{n+1}^2(\mu_{nk}).$$

Zde μ_{nk} , $k = 1, 2, \dots$, jsou opět kladné kořeny funkce $J_n(x)$.

- Pro libovolné $n \geq 0$ platí

$$\frac{d}{dx}[x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x) \quad \text{a} \quad \frac{d}{dx}[x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x).$$

Speciálně pro $n = 0$ máme $\frac{d}{dx} J_0(x) = -J_1(x)$.

Poznámka B.1. V příkladech 12.5, 13.8 a 13.9 jsme se setkali s tzv. *parametrickým tvarem Besselovy rovnice*

$$(B.6) \quad x^2 y'' + xy' + (\lambda x^2 - n^2)y = 0$$

s okrajovými podmínkami

$$(B.7) \quad y(0) \text{ je konečné číslo, } y(a) = 0.$$

Pokud μ_{nk} značí kladné kořeny funkce $J_n(x)$, pak je úloha (B.6), (B.7) netriviálně řešitelná pro hodnoty $\lambda = \lambda_{nk} = \frac{\mu_{nk}^2}{a^2}$ a příslušná řešení mají tvar $J_n(\frac{\mu_{nk}}{a}x)$.

Povšimněte si, že rovnici (B.6) lze přepsat do ekvivalentní podoby

$$-(xy')' + \frac{n^2}{x}y = \lambda xy,$$

což (společně s okrajovými podmínkami) není nic jiného než Sturmova-Liouvilleova úloha na intervalu $(0, a)$ s volbou $p(x) = r(x) = x$ a $q(x) = \frac{n^2}{x}$. Jelikož $q(x)$ není definovaná v bodě $x = 0$ a naopak $p(0) = 0$, jedná se o singulární úlohu. Ze Sturmovy-Liouvilleovy teorie pak plynou některé výše zmíněné vlastnosti Besselových funkcí, zejména skutečnost, že funkce $J_n(\frac{\mu_{nk}}{a}x)$ tvoří úplný ortogonální systém na intervalu $(0, a)$ s váhovou funkcí $r(x) = x$.

Další vlastnosti Besselových funkcí lze nalézt např. v [1].

Typické úlohy

Transportní rovnice (kapitola 3)

$$u_t + cu_x = 0$$

Transportní rovnice s rozpadem (kapitola 3)

$$u_t + cu_x + \lambda u = f$$

Vlnová rovnice

- počáteční úloha na $\mathbb{R}$ (kapitoly 4, 9)

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} + f, & x \in \mathbb{R}, & t > 0, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), & u_t(x, 0) &= \psi(x) \end{aligned}$$

- počátečně-okrajová úloha v $\mathbb{R}$ (kapitoly 7, 9)

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} + f, & x \in (0, l), & t > 0, \\ u(0, t) &= u(l, t) = 0, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), & u_t(x, 0) &= \psi(x) \end{aligned}$$

- počáteční úloha na $\mathbb{R}^N$ (kapitola 13)

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 \Delta u + f, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N, & t > 0, \\ u(\mathbf{x}, 0) &= \varphi(\mathbf{x}), & u_t(\mathbf{x}, 0) &= \psi(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

- počátečně-okrajová úloha v $\mathbb{R}^N$ (kapitola 13)

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 \Delta u + f, & \mathbf{x} \in \Omega, & t > 0, \\ u(\mathbf{x}, t) &= 0, & \mathbf{x} \in \partial\Omega, \\ u(\mathbf{x}, 0) &= \varphi(\mathbf{x}), & u_t(\mathbf{x}, 0) &= \psi(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Difuzní rovnice

- počáteční úloha na $\mathbb{R}$ (kapitoly 5, 9)

$$\begin{aligned} u_t &= ku_{xx} + f, & x \in \mathbb{R}, & t > 0, \\ u(x, 0) &= \varphi(x) \end{aligned}$$

- počátečně-okrajová úloha v $\mathbb{R}$ (kapitoly 7, 9)

$$\begin{aligned} u_t &= ku_{xx} + f, & x \in (0, l), & t > 0, \\ u(0, t) &= u(l, t) = 0, \\ u(x, 0) &= \varphi(x) \end{aligned}$$

- počáteční úloha na $\mathbb{R}^N$ (kapitola 12)

$$\begin{aligned} u_t &= k\Delta u + f, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N, & t > 0, \\ u(\mathbf{x}, 0) &= \varphi(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

- počátečně-okrajová úloha v $\mathbb{R}^N$ (kapitola 12)

$$\begin{aligned} u_t &= k\Delta u + f, & \mathbf{x} \in \Omega, & t > 0, \\ u(\mathbf{x}, t) &= 0, & \mathbf{x} \in \partial\Omega, \\ u(\mathbf{x}, 0) &= \varphi(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Laplaceova (Poissonova) rovnice

- v $\mathbb{R}^2$ nebo $\mathbb{R}^3$ (kapitoly 6, 11)

$$\Delta u = f \quad \text{v } \mathbb{R}^2 \text{ nebo } \mathbb{R}^3$$

- okrajová úloha (kapitoly 8, 11)

$$\begin{aligned} \Delta u &= f & \text{v } \Omega, \\ u &= 0 & \text{na } \partial\Omega \end{aligned}$$

Značení

$\mathbb{R}, \mathbb{R}^N$	množina reálných čísel, N -rozměrný Eukleidovský prostor	str. 2
$\partial\Omega$	hranice oblasti Ω	str. 3
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	skalární součin vektorů $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$	str. 3
$\mathbf{n}(\mathbf{x})$	vektor vnější normály v bodě $\mathbf{x}$	str. 3
$\operatorname{div} \phi(\mathbf{x}) \left(= \nabla \cdot \phi = \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial \phi_N}{\partial x_N} \right)$	divergence vektorové funkce ϕ	str. 4
$u_t \left(= \frac{\partial u}{\partial t} \right), \phi_x \left(= \frac{\partial \phi}{\partial x} \right), u_{tt} \left(= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right), \phi_{xx} \left(= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right), \dots$	parciální derivace	str. 6
$\operatorname{grad} u(\mathbf{x}) = \nabla u \left(= \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right) \right)$	gradient skalární funkce u	str. 11, 38
$\Delta u(\mathbf{x}) \left(= \operatorname{div} (\operatorname{grad} u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2} \right)$	Laplaceův operátor	str. 11
$\frac{\partial u}{\partial n} (= \nabla u \cdot \mathbf{n})$	derivace podle vnější normály	str. 15
$\operatorname{rot} \mathbf{E} \left(= \nabla \times \mathbf{E} = \left(\frac{\partial E_3}{\partial y} - \frac{\partial E_2}{\partial z}, \frac{\partial E_1}{\partial z} - \frac{\partial E_3}{\partial x}, \frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y} \right) \right)$	rotace vektorového pole $\mathbf{E}$	str. 17
i	imaginární jednotka	str. 17
C^k	prostor k -krát spojitě diferencovatelných funkcí	str. 23

$\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_x^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \dots$	parciální derivace	str. 30
$\mathbb{C}$	množina komplexních čísel	str. 31
$\operatorname{erf}(z)$	chybová funkce	str. 85
$\varphi(x-) = \lim_{t \rightarrow x-} \varphi(t), \quad \varphi(x+) = \lim_{t \rightarrow x+} \varphi(t)$		str. 88
C^∞	množina funkcí se spojitými parciálními derivacemi všech řádů	str. 89
$\mathbb{N}$	množina přirozených čísel	str. 115
$\mathcal{L}$	Laplaceova transformace	str. 153
$\mathcal{L}^{-1}$	zpětná Laplaceova transformace	str. 154
$\mathcal{F}$	Fourierova transformace	str. 160
$\mathcal{F}^{-1}$	zpětná Fourierova transformace	str. 161
$u * v$	konvoluce funkcí u a v	str. 156, 161
$\mathcal{S}$	Schwartzova množina	str. 160
$\mathbb{R}$	časoprostorový válec	str. 178
$L^2(M)$	prostor funkcí integrovatelných s kvadrátem na množině M	str. 182
$f(t) = O(t^n)$	podíl $\frac{f(t)}{t^n}$ je omezený pro $t \rightarrow 0$	str. 185
B^t	transponovaná matice k matici B	str. 191
$\operatorname{meas} \partial B(\mathbf{0}, a)$	míra (povrch) koule $B(\mathbf{0}, a)$	str. 196
$ \nabla u ^2 = \operatorname{grad} u ^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$		str. 197
$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$	vektorový součin vektorů $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$	str. 212
$\Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$	biharmonický operátor	str. 212

V textu používáme stejné značení pro funkci u , pokud transformujeme pouze její nezávislé proměnné, např. $u = u(x, y)$ a $u = u(r, \theta)$ při transformaci z kartézských do polárních souřadnic.

Literatura

- [1] M. ABRAMOWITZ, I.A. STEGUN, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, Inc., New York, 1965.
- [2] V. I. ARNOLD, *Lectures on Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2004.
- [3] N. ASMAR, *Partial Differential Equations and Boundary Value Problems*, Prentice Hall, Upper Saddle River, 2000.
- [4] J. BARTÁK, L. HERRMANN, V. LOVICAR, O. VEJVODA, *Partial Differential Equations of Evolution*, Ellis Horwood-SNTL, New York-Praha, 1991.
- [5] P. BASSANINI, A. R. ELCRAT, *Theory and Applications of Partial Differential Equations*, Plenum Press, New York, 1997.
- [6] D. BLEECKER, G. CSORDAS, *Basic Partial Differential Equations*, International Press, Cambridge, 1996.
- [7] P. DRÁBEK, G. HOLUBOVÁ, *Elements of Partial Differential Equations*, Walter de Gruyter, Berlin – New York, 2007.
- [8] P. DRÁBEK, G. HOLUBOVÁ, *Parciální diferenciální rovnice: úvod do klasické teorie*, Západočeská univerzita, Plzeň 2001.
- [9] L. C. EVANS, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1998.
- [10] S. J. FARLOW, *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1982.
- [11] J. FRANČŮ, *Parciální diferenciální rovnice*, PC-DIR Real, Brno, 1998.
- [12] F. G. FRIEDLANDER, M. JOSHI, *Introduction to the Theory of Distributions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

- [13] A. FRIEDMAN, *Partial Differential Equations of Parabolic Type*, Prentice Hall, Englewood-Cliffs, 1964.
- [14] M. K. KEANE, *A Very Applied First Course in Partial Differential Equations*, Prentice Hall, Upper Saddle River, 2002.
- [15] J. D. LOGAN, *Applied Mathematics: A Contemporary Approach*, J. Wiley & Sons, Inc., New York, 1987.
- [16] J. D. LOGAN, *Applied Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [17] S. MÍKA, A. KUFNER, *Parciální diferenciální rovnice I, stacionární rovnice*, SNTL, Praha, 1983.
- [18] M. H. PROTTER, H. F. WEINBERGER, *Maximum Principles in Differential Equations*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1967.
- [19] A. D. SNIDER, *Partial Differential Equations: Sources and Solutions*, Prentice Hall, Upper Saddle River, 1999.
- [20] I. P. STAVROULAKIS, S. A. TERSIAN, *Partial Differential Equations, An Introduction with Mathematica and Maple*, World Scientific, Singapore, 1999.
- [21] W. A. STRAUSS, *Partial Differential Equations: An Introduction*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1992.
- [22] W. WALTER, *Ordinary Differential Equations*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 182, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [23] H. F. WEINBERGER, *A First Course in Partial Differential Equations*, Blaisdell, Waltham, Mass., 1965.
- [24] E. ZAUDERER, *Partial Differential Equations of Applied Mathematics*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989.

Rejstřík

- Besselova funkce, 226, 271
- Besselova rovnice, 225, 269
- bilanční oblast, 2
- bilanční zákon, 3
- boční přestup tepla, 132
- Brownův pohyb, 179
- Burgersova rovnice, 19

- Cauchyovy-Riemannovy podmínky, 18
- Coleova-Hopfova transformace, 19

- časoprostorová bilanční oblast, 2
- časoprostorový válec, 180
- časový interval, 2

- d'Alembertova formule, 68
- diferenciální operátor
 - lineární, 22
- difuze, 9
 - konvektivní, 133
 - na polopřímce, 105
- difuzní jádro, 86, 216
- difuzní rovnice, 23, 83, 215
 - se zdrojem, 91
- Diracova distribuce, 87
- Dirichletovy okrajové podmínky, 113, 118
- Dirichletův princip, 199
- druhá Greenova identita, 201
- Duhamelův princip, 78

- elektrický náboj, 17
- elektrický potenciál, 17
- elektrostatické pole, 17
- elektrostatika, 17
- energetická metoda, 183, 200
- energie
 - celková, 243
 - kinetická, 176, 243
 - potenciální, 177, 199, 243
- evoluční proces, 3
- evoluční rovnice, 22
- evoluční zákon zachování, 3

- Fisherova rovnice, 19
- formule
 - integrální, 148
 - Kirchhoffova, 233
 - Poissonova, 148, 211
- Fourierova metoda, 112, 127, 143, 219
- Fourierova transformace, 155, 161
 - zpětná, 163
- fundamentální řešení, 86, 216
- funkce
 - Besselova, 226, 271
 - Greenova, 86, 203
 - harmonická, 16
 - radiálně symetrická, 100
 - holomorfní, 17
 - chybová, 85
 - stavová, 2
 - toky, 2
 - zřídlová, 86

- Gaussián, 86
- Gaussova komplexní rovina, 17
- Gaussova-Ostrogradského věta, 4
- generické řešení, 23, 26
- Greenova funkce, 86, 203
- Greenova první identita, 196
- Greenova věta, 15, 76, 174

- harmonická funkce, 16
 - radiálně symetrická, 100
- hmotnostní hustota, 2
- holomorfní funkce, 17
- homogenní rovnice, 22

- hustota, 7, 12
 - hmotnosti, 2
- Huygensův princip, 236
- chaos, 179
- charakteristická rovnice, 147
- charakteristické přímky, 38
- charakteristický kužel, 241
- charakteristický trojúhelník, 73, 173
- charakteristiky, 38, 241
 - vlnové rovnice, 67
- chybová funkce, 85
- identita
 - druhá Greenova, 201
 - Greenova
 - druhá, 201
 - Greenova první, 196
- integrální formule, 148
- integrální transformace, 155
- inverzní Laplaceova transformace, 156
- Jacobiova matice, 98
- jednoznačnost řešení, 182, 185
- kinetická energie, 176, 243
- Kirchhoffova formule, 233
- klasické řešení, 23
- kmitání struny, 11
- konstitutivní zákon, 7
- konvektivní difuze, 133
- konvoluce, 88
- Kortewegova-deVriesova rovnice, 171
- kruhová membrána, 248
- kužel
 - charakteristický, 241
 - světelný, 241
 - plný, 241
- Laplaceova rovnice, 16, 22, 97, 143, 193
- Laplaceova transformace, 155
 - inverzní, 156
- Laplacián, 97
- levá postupná vlna, 8
- lineární diferenciální operátor, 22
- lineární rovnice, 22
- logistický zákon, 135
- matematické modelování, 1
- matematický model, 1
- materiálové vztahy, 7
- Maxwellovy rovnice, 17
- membrána, 15
 - kruhová, 248
 - obdélníková, 246
- metoda
 - energetická, 183, 200
 - Fourierova, 112, 127, 143, 219
 - charakteristik, 38, 66
 - integrálních transformací, 155
 - odrazu, 105, 112, 205
 - operátorová, 75, 77, 239
 - zrcadlení, 106, 205, 208
- množina
 - Schwartzova, 162
- model
 - dopravního proudu, 19
- nehomogenní rovnice, 22
- nekorektní úloha, 179
- nelineární rovnice, 22
- nelineární transport, 9
- Neumannova úloha, 200
- Neumannovy okrajové podmínky, 120
- nevratný proces, 179
- Newtonovy okrajové podmínky, 122
- Newtonův pohybový zákon, 12
- nory, 4
- obdélníková membrána, 246
- obecné řešení, 23, 26
- oblast
 - bilanční, 2
 - časoprostorová, 2
 - historie, 73
 - vlivu, 73, 173
 - závislosti, 173
- okrajová úloha, 143
 - Sturmova-Liouvilleova, 127, 267
- okrajové podmínky
 - Dirichletovy, 113, 118
 - Neumannovy, 120
 - Newtonovy, 122
 - periodické, 147

- operátor
 - diferenciální
 - lineární, 22
 - faktorizovatelný, 79
 - reducibilní, 79
 - zdrojový, 78, 92, 239
- operátorová metoda, 75, 77, 239
- parciální diferenciální rovnice, 1
- periodické okrajové podmínky, 147
- plný světelný kužel, 241
- počátečně-okrajová úloha, 105
- počáteční rychlost, 67
- počáteční úloha, 67, 83
 - pro difuzní rovnici, 83
 - pro vlnovou rovnici, 67
- počáteční výchylka, 67
- podmínky
 - Cauchyovy-Riemannovy, 18
 - okrajové
 - periodické, 147
- Poissonova formule, 148, 211
- Poissonova rovnice, 16, 22, 97, 143, 193
- potenciál
 - elektrický, 17
 - rychlostní, 17
- potenciální energie, 177, 199, 243
- pravá postupná vlna, 8, 38
- princip
 - Dirichletův, 199
 - Duhamelův, 78
 - Huygensův, 236
 - kauzality, 73, 173, 243
 - maxima, 180, 184
 - silný, 185
 - reciprocity, 204
- princip maxima
 - silný, 185, 198
- proces
 - evoluční, 3
 - nevratný, 179
- propagátor, 86
- proudění
 - s difuzí, 10
 - s rozpadem, 9
 - ustálené, 17
- přestup tepla
 - boční, 132
- radiální symetrie, 98, 100, 194
- rovnice
 - Besselova, 225, 269
 - Burgersova, 19
 - difuzní, 23, 83, 215
 - se zdrojem, 91
 - disperzní vlny, 23
 - evoluční, 22
 - Fisherova, 19
 - homogenní, 22
 - charakteristická, 147
 - Kortewegova-deVriesova, 171
 - Laplaceova, 16, 22, 97, 143, 193
 - lineární, 22
 - Maxwellovy, 17
 - nehomogenní, 22
 - nelineární, 22
 - parciální diferenciální, 1
 - Poissonova, 16, 22, 97, 143, 193
 - prvního řádu, 37
 - Schrödingerova, 23
 - stacionární, 16, 22
 - telegrafní, 20
 - telegravní, 82
 - transportní, 8, 22, 37
 - vibrujícího nosníku, 23
 - vlnová, 11, 15, 65, 233
 - s interakcí, 23
 - se zdrojem, 74
- rovnovážný stav, 16
- rychlost
 - šíření vlny, 14
- rychlostní potenciál, 17
- řád rovnice, 22
- řešení, 23
 - fundamentální, 86, 216
 - generické, 23, 26
 - klasické, 23
 - obecné, 23, 26
- sférické průměry, 233
- Schrödingerova rovnice, 23
- Schwartzova množina, 162

- silný princip maxima, 185, 198
 singularita, 70
 singulární bod, 70
 stabilita
 stejnoměrná, 182
 stacionární rovnice, 16, 22
 stacionární stav, 5
 stacionární zákon zachování, 5
 stav
 rovnovážný, 16
 stacionární, 5
 základní, 199
 stavová funkce, 2
 stavová veličina, 7
 stavové veličiny, 2
 stejnoměrná stabilita, 182
 stojaté vlnění, 69
 struna, 12
 Sturmova-Liouvilleova okrajová úloha,
 127, 267
 světelný kužel, 241
 plný, 241

 telegrafní rovnice, 20, 82
 tepelné jádro, 86
 tepelný tok, 7
 tlumená struna, 189
 tlumení
 vnější, 14
 tok
 tepelný, 7
 toková veličina, 7
 tokové veličiny, 2
 tón
 vyšší, 116
 základní, 116
 transformace
 Coleova-Hopfova, 19
 Fourierova, 155, 161
 zpětná, 163
 integrální, 155
 Laplaceova, 155
 inverzní, 156
 transport, 37
 nelineární, 9
 s rozpadem, 37

 transportní rovnice, 8, 22, 37
 tuhost, 14

 úloha
 nekorektní, 179
 Neumannova, 200
 okrajová, 143
 Sturmova-Liouvilleova, 127, 267
 počátečně-okrajová, 105
 počáteční, 67, 83
 ustálené proudění, 17

 vedení tepla, 10
 na polopřímce, 105
 veličina
 stavová, 7
 toková, 7
 veličiny
 stavové, 2
 tokové, 2
 věta
 Gaussova-Ostrogradského, 4
 Greenova, 15, 76, 174
 o divergenci, 4
 o průměru, 197
 o reprezentaci, 201
 o průměru, 185
 vlastní číslo, 126, 267
 vlastní funkce, 126, 267
 vlna
 levá postupná, 8
 na polopřímce, 107
 pravá postupná, 8, 38
 vlnová rovnice, 11, 15, 65, 233
 s interakcí, 23
 se zdrojem, 74
 vnější buzení, 14
 vnější tlumení, 14
 vnitřní napětí, 12
 vztahy
 materiálové, 7

 základní stav, 199
 zákon
 bilanční, 3
 konstitutivní, 7
 logistický, 135

- Newtonův pohybový, 12
- zachování
 - energie, 176
 - evoluční, 3
 - hmotnosti, 13
 - stacionární, 5
 - zachování energie, 242
- zákon zachování
 - energie, 176
 - stacionární, 5
- zákon zachování energie, 176
- zdroje, 4
- zdrojový operátor, 78, 92, 239
- zpětná Fourierova transformace, 163
- zřídlová funkce, 86