Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava
Západočeská univerzita v Plzni

NUMERICKÉ MODELOVÁNÍ V HYDROLOGII

Marek Brandner
Jiří Egermaier
Hana Kopincová

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Marek Brandner, Jiří Egermaier, Hana Kopincová
Numerické modelování v hydrologii

ISBN

Předmluva

Cílem tohoto učebního textu je seznámit čtenáře se základními numerickými přístupy používanými v oblasti hydrologie. Vzhledem k šíři problematiky a vzhledem k odborné činnosti autorského týmu jsme se zaměřili na modelování proudění v otevřených kanálech. Ještě konkrétněji lze říci, že jde o matematické modely založené na Saint-Venantových rovnicích. Použijeme-li při budování modelů právě uvedené vztahy obdržíme úlohy, které lze z hlediska matematické klasifikace zařadit mezi počátečně-okrajové úlohy pro parciální diferenciální rovnice hyperbolického typu. V učebním textu popisované přístupy je možné po zobecnění do více prostorových dimenzí použít i na modelování rozlivů a na modelování proudění v mořích, oceánech a vodních nádržích. Speciální pozornost je věnována i úlohám s nehladkými daty. Proto je v textu velice stručně vyložena problematika zobecněných řešení a jsou popsány metody vhodné k aproximaci těchto řešení. Tyto metody lze pak využít při numerickém modelování protržení přehradních hrází. Zdůrazňujeme, že text je zaměřen matematicky. Čtenář získá tedy poznatky z oblasti matematického a numerického modelování, přičemž některá numerická schémata jsou přímo aplikována na některý z modelů říčního proudění. Doporučujeme prostudování další literatury zaměřené přímo na hydrologii.

První kapitola skript je věnována odvození matematických modelů a stručnému nástinu základních pojmů z teorie parciálních diferenciálních rovnic hyperbolického typu. Kapitola druhá je věnována diferenčním metodám (někdy nazývanými metody konečných diferencí). Jedná se o metody, které se velice snadno implementují a jejich pochopení je relativně snadné. Mají také ovšem řadu nevýhod. Jsou vhodné k aproximaci pouze klasických řešení a lze je využít pro řešení problémů s jednoduchou geometrií. Kapitola třetí je věnována zobecnění diferenčních metod tak, aby je bylo možné využít i pro aproximaci řešení nehladkých. Kapitola čtvrtá podává souhrn vlastností, které jsou obvykle zkoumány při analýze numerických metod pro řešení parciálních diferenciálních rovnic hyperbolického typu. Jsou zde také naznačeny vzájemné vazby mezi těmito vlastnostmi. V kapitole páté jsou velice stručně popsány další přístupy používané při matematickém modelování proudění s volnou hladinou. Jsou zde také stručně popsány další numerické metody používané v této oblasti. Závěr obrazovkové verze skript je věnován ukázkám konkrétních numerických simulací. Celý text je uzavřen interaktivním testem, přehledem literatury a rejstříkem.

Věříme, že tento učební text přinese užitek, jak studentům matematických studijních oborů, kteří si rozšíří poznatky o využití numerických metod v zajímavé aplikační oblasti, tak studentům oborů souvisejících s hydrologií, kteří si budou moci rozšířit poznatky o některé metody používané v oblasti výpočetní mechaniky tekutin. V rámci projektu Matematika pro inženýry 21. století připravujeme ještě další rozsáhlejší text, který bude věnován obecnější problematice - numerickému řešení parciálních diferenciálních rovnic hyperbolického typu. Tento text s předstihem doporučujeme těm z Vás, kteří si chtějí zde získané poznatky rozšířit. Závěrem si dovolujeme předem poděkovat čtenářům za veškeré kritické připomínky, náměty k doplnění i za případnou chválu.

V Plzni 31. 1. 2011 Marek Brandner, Jiří Egermaier, Hana Kopincová

Obsah

Kapitola 1

Formulace matematických modelů

Průvodce studiem

V této kapitole se čtenář seznámí s principy odvození matematických modelů pro proudění řek (založených na Saint-Venantových rovnicích), včetně zjednodušených modelů (např. modelu KWA). Dále bude čtenář obeznámen s obecnou matematickou formulací zákonů zachování a souvisejících počátečních a počátečně-okrajových úloh. V kapitole se také věnujeme definici klasického řešení a slabého (zobecněného) řešení a problematice jeho jednoznačnosti. Nakonec se budeme zabývat tříděním zákonů zachování a s pojmy důležitými pro matematické modelování proudění tekutin.

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete schopni:

- chápat princip odvození matematických modelů pro proudění řek (založených na Saint-Venantových rovnicích),
- mít přehled o zjednodušených matematických modelech,
- definovat klasické, slabé a entropické řešení a chápat nutnost zavedení těchto řešení,
- znát pojmy úzce spjaté s modelováním proudění.

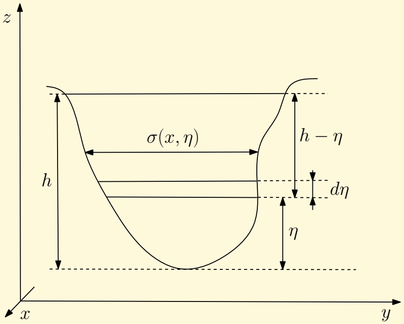
1.1. Popisy proudění v hydrologii

1.1.1. Saint-Venantovy rovnice

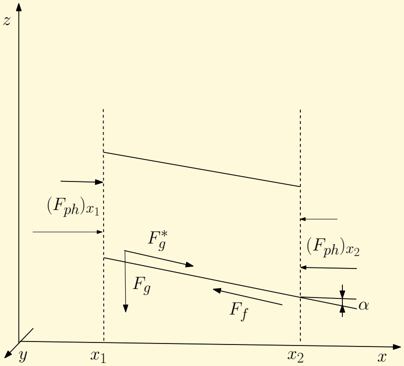
Pro modelování proudění existuje značné množství matematických modelů. Jeden z nejobecnějších modelů je založen na tzv. Navierových-Stokesových rovnicích používaných pro modelování proudění vazkých stlačitelných i nestlačitelných tekutin. Pro modelování říčního proudění obecným korytem není nutné používat takto složitý model, proto se zavádějí následující zjednodušující předpoklady:

- Budeme uvažovat nestlačitelné nevazké proudění.
- Proudění uvažujeme jedno-dimenzionální a uvažujeme pouze horizontální rychlost proudění, kterou považujeme za konstantní přes celou plochu příčného řezu koryta.
- Vertikální složku zrychlení proudění zanedbáme.
- Sklon dna je dostatečně malý.

Odvození Saint-Venantových rovnic, které zde popíšeme, lze nalézt například v [2]. Předpokládejme, že koryto má obecný tvar, viz Obr. 1.1 a uvažujme kontrolní úsek řeky $\langle x_1, x_2 \rangle$ (Obr. 1.2) v časovém intervalu (t_1, t_2).



Obr. 1.1 Obecné říční koryto.



Obr. 1.2 Kontrolní objem.

Označme a plochu zaplaveného příčného řezu koryta, v rychlost proudění (horizontální složka). Dále označme průtok $q = va$ a hmotnostní tok (často též hmotnostní průtok) $q_m = \rho va = \rho q$, kde ρ je hustota kapaliny. Rozdíl množství kapaliny, která vteče hranicí x_1 v časovém intervalu (t_1, t_2) a která vyteče hranicí x_2 ve stejném časovém intervalu lze reprezentovat následujícím integrálem

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[q_m|_{x_1} - q_m|_{x_2} \right] \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \left[(\rho q)|_{x_1} - (\rho q)|_{x_2} \right] \mathrm{d}t, \tag{1.1}$$

Obsah
12. strana ze 161
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka/Okno

kde $q_m|_{x_1}$ bude v následujícím textu značit $q_m(x_1, t)$. Podle zákona zachování hmotnosti platí, že celkové množství přítoku (1.1) je rovno celkové změně množství kapaliny uvnitř sledované oblasti v časovém intervalu (t_1, t_2), která je dána

$$\int_{x_1}^{x_2} [(\rho a)|_{t_1} - (\rho a)|_{t_2}] \,\mathrm{d}x, \tag{1.2}$$

tj. za předpokladu konstantní hustoty ρ (souvisí s předpokladem nestlačitelného proudění) platí následující integrální tvar rovnice kontinuity

$$\int_{x_1}^{x_2} (a|_{t_1} - a|_{t_2}) \,\mathrm{d}x + \int_{t_1}^{t_2} (q|_{x_1} - q|_{x_2}) \,\mathrm{d}t = 0. \tag{1.3}$$

Pro odvození druhého bilančního vztahu modelu proudění říčním korytem využijeme zákon zachování hybnosti (2. Newtonův zákon), který říká, že součet změny hybnosti uvnitř sledovaného objemu v daném časovém úseku (t_1, t_2) a celkové hybnosti, která je transportována prouděním dovnitř a ven ze sledovaného objemu (tzv. tokem hybnosti), tj.

$$\int_{x_1}^{x_2} [(\rho v a)|_{t_1} - (\rho v a)|_{t_2}] \,\mathrm{d}x + \int_{t_1}^{t_2} \left[(\rho v^2 a)|_{x_2} - (\rho v^2 a)|_{x_1}\right] \,\mathrm{d}t, \tag{1.4}$$

je roven celkové vnější síle na tento objem působící, tj.

$$\int_{t_1}^{t_2} F_{out} \,\mathrm{d}t, \tag{1.5}$$

kde F_{out} vyjádříme jako součet jednotlivých složek vnější síly, tj.

$$F_{out} = F_{ph} + F_{zk} + F_g^* - F_f. \tag{1.6}$$

F_{ph} značí celkovou tlakovou sílu způsobenou hydrostatickým tlakem (Obr. 1.2), která je dána součtem tlakové síly působící v místě x_1 a tlakové síly v místě x_2, která působí v záporném směru (předpokládáme působení této síly na celý sledovaný objem v časovém intervalu (t_1, t_2)), tj.

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} F_{ph}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left[(F_{ph})|_{x_1} - (F_{ph})|_{x_2}\right]\,\mathrm{d}t. \tag{1.7}$$

Hydrostatický tlak v hloubce h je dán vztahem $p = \rho g h$, kde g je tíhové zrychlení, a tlaková síla je dána vztahem $F_{ph} = ap = a\rho g h$. Tedy na element plošky $da = \sigma(x,\eta)d\eta$ působí tlak vody ve sloupci $h - \eta$ (Obr. 1.1). Tlakovou sílu v místě x lze tedy zapsat

$$(F_{ph})|_x = g\rho \int\limits_0^{h(x)} [h(x) - \eta]\sigma(x,\eta)\,\mathrm{d}\eta. \tag{1.8}$$

Dosazením (1.8) pro $x = x_1$ a $x = x_2$ do (1.7) získáme celkovou tlakovou sílu pro daný časový interval, tj.

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} F_{ph}\,\mathrm{d}t = g \int\limits_{t_1}^{t_2} \left[(\rho I_1)|_{x_1} - (\rho I_1)|_{x_2}\right]\,\mathrm{d}t, \tag{1.9}$$

kde jsme označili

$$I_1 = \int_0^{h(x)} [h(x) - \eta]\,\sigma(x,\eta)\,\mathrm{d}\eta. \tag{1.10}$$

F_{zk} označuje celkovou tlakovou sílu způsobenou změnou šířky koryta $\sigma(x,\eta)$. Předpokládáme, že tato změna je pozvolná. V případě prudkých (skokových) změn zaplavené plochy koryta by se musely vzít v úvahu kromě hydrostatické tlakové síly i další síly. Změna šířky koryta, za předpokladu konstantní hloubky, vyvolá změnu v zaplavené ploše průřezu koryta ve směru x, a tedy vyvolá tlakovou sílu působící z boku koryta. Označme $\frac{\partial\sigma(x,\eta)}{\partial x}$ jednotkovou změnu šířky koryta $\sigma(x,\eta)$ ve směru x (uvažujeme pouze jednodimenzionální proudění, tj. pouze ve směru x). Tedy na plošku $\frac{\partial\sigma(x,\eta)}{\partial x} d\eta$ působí tlak ve sloupci vody $h-\eta$, tj. získáme elementární tlakovou sílu

$$dF_{zk} = g\rho[h(x)-\eta]\left[\frac{\partial\sigma(x,\eta)}{\partial x}\right]_{h=h_0} d\eta. \tag{1.11}$$

Sečtením všech elementárních sil přes celý interval (x_1,x_2) získáme tlakovou sílu, tj.

$$F_{zk} = \int\limits_{x_1}^{x_2} g\rho[h(x)-\eta]\left[\frac{\partial\sigma(x,\eta)}{\partial x}\right]_{h=h_0} \mathrm{d}\eta\mathrm{d}x. \tag{1.12}$$

Celkový příspěvek tlakové síly způsobené změnou koryta v čase (t_1,t_2) je dán

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} F_{zk}\,\mathrm{d}t = g\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{x_1}^{x_2} \rho I_2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t, \tag{1.13}$$

kde jsme označili

$$I_2 = \int_0^{h(x)} [h(x)-\eta]\left[\frac{\partial\sigma(x,\eta)}{\partial x}\right]_{h=h_0} \mathrm{d}\eta. \tag{1.14}$$

Tíhová síla je součin hmotnosti a tíhového zrychlení, tj. $F_g = mg$, a působí ve směru kolmém (viz Obr. 1.2). Tedy pro sílu působící ve směru toku platí $F_g^* = mgS_0$, kde $S_0 = \sin\alpha$ je podélný sklon říčního koryta. Za předpokladu, že α je malé, lze psát

$$-\frac{\partial b}{\partial x} = \tan\alpha \approx \sin\alpha, \tag{1.15}$$

kde b je výška dna nad referenční úrovní. Hmotnost vody, kterou obsahuje koryto mezi body x_1 a x_2 lze vyjádřit jako $m = \int\limits_{x_1}^{x_2} \rho a \, \mathrm{d}x$. A tedy celkový příspěvek tíhové síly ve směru proudění je dán

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} F_g^* \, \mathrm{d}t = -\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{x_1}^{x_2} \rho g a b_x \, \mathrm{d}x\mathrm{d}t. \tag{1.16}$$

Třecí síla F_f je u Saint-Venantových rovnic často předpokládána nulová, ale pro další potřeby zde uvedeme její tvar. Tato síla je dána tzv. třecím součinitelem S_f, který je definován jako třecí síla na hranici (pouze třecí síla o kanál, nikoliv vnitřní třecí síla) na jednotku hmotnosti vody v kanále. Třecí síla na jednotku délky kanálu je tedy definována jako $\rho g a S_f$. Celkový příspěvek třecí síly za časový interval (t_1, t_2) lze tedy vyjádřit následujícím způsobem

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} F_f \, \mathrm{d}t = \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{x_1}^{x_2} \rho g a S_f \, \mathrm{d}x\mathrm{d}t. \tag{1.17}$$

Celkovou bilanci lze vyjádřit z (1.4), (1.5) a (1.6) následujícím způsobem v integrálním tvaru

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[(\rho v a)|_{t_1} - (\rho v a)|_{t_2}\right] \mathrm{d}x + \int_{t_1}^{t_2} \left[(\rho v^2 a)|_{x_2} - (\rho v^2 a)|_{x_1}\right] \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} (F_{ph} + F_{zk} + F_g^* - F_f)\,\mathrm{d}t. \tag{1.18}$$

Za předpokladu konstantní hustoty a dosazením za jednotlivé síly, tj. (1.9), (1.13), (1.16) a (1.17), získáváme integrální tvar bilance hybnosti

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[(va)|_{t_1} - (va)|_{t_2}\right] \mathrm{d}x + \int_{t_1}^{t_2} \left[(v^2 a)|_{x_2} - (v^2 a)|_{x_1}\right] \mathrm{d}t = g \int_{t_1}^{t_2} \left(I_1|_{x_1} - I_1|_{x_2}\right) \mathrm{d}t + \tag{1.19}$$

$$+ g \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} I_2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} gab_x \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} gaS_f \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

Saint-Venantovy rovnice se uvádějí častěji v diferenciálním tvaru, tedy

$$\begin{aligned} a_t + q_x &= 0, & (1.20)\\ q_t + \left(\frac{q^2}{a} + gI_1\right)_x &= -gab_x + gI_2 - gaS_f. \end{aligned}$$

Funkce $a = a(x,t)$ reprezentuje hledanou zaplavenou plochu příčného řezu říčního koryta, $q = q(x,t)$ hledaný průtok, $b = b(x)$ je daná funkce popisující tvar dna, g je tíhová konstanta a

$$I_1 = \int_0^{h(x)} [h(x) - \eta]\,\sigma(x,\eta)\,\mathrm{d}\eta, \tag{1.21}$$

$$I_2 = \int_0^{h(x)} (h(x) - \eta) \left[\frac{\partial \sigma(x, \eta)}{\partial x} \right] \mathrm{d}\eta, \tag{1.22}$$

kde η je integrační proměnná, $h(x)$ je hloubka vody a $\sigma(x, \eta)$ je šířka průřezu v hloubce η. Často se používají Saint-Venantovy rovnice s nulovou třecí silou, kdy poslední člen na pravé straně pohybové rovnice je nulový.

1.1.1.1. Zjednodušené varianty Saint-Venantových rovnic

Následující odstavec je přehledem základních podob Saint-Venantových rovnic pro konkrétní tvary koryt. U všech budeme předpokládat, že třecí síla je nulová. Jestliže má průřez koryta tvar neměnného rovnoramenného lichoběžníka (Obr. 1.3), lze vztahy (1.20) upravit na následující rovnosti

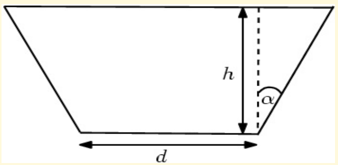
$$\begin{aligned} a_t + q_x &= 0, \\ q_t + \left[\frac{q^2}{a} + g \left(\frac{1}{2} h^2 d + \frac{1}{3} h^3 \tan \alpha \right) \right]_x &= -gab_x, \end{aligned} \tag{1.23}$$

kde $d = konst.$ je šířka dna koryta, $\alpha = konst.$ je sklon břehu a obsah průřezu $a = h(d + h \tan \alpha)$.

Za předpokladu, že koryto má proměnný obdélníkový průřez, získáme následující rovnosti

$$\begin{aligned} a_t + q_x &= 0, \\ q_t + \left(\frac{q^2}{a} + \frac{ga^2}{2l} \right)_x &= \frac{ga^2}{2l^2} l_x - gab_x, \end{aligned} \tag{1.24}$$

Obsah
18. strana ze 161
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka/Okno



Obr. 1.3 Průřez pravidelného lichoběžníkového koryta.

kde $l = l(x)$ je daná funkce reprezentující šířku koryta.

Poslední model, který uvedeme, je opět založen na Saint-Venantových rovnicích. Popisuje proudění v korytě s neměnným obdélníkovým průřezem

$$\begin{aligned} h_t + (hv)_x &= 0, \\ (hv)_t + \left(hv^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)_x &= -ghb_x. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Funkce $h(x,t)$ reprezentuje hledanou hloubku, $v(x,t)$ horizontální rychlost a $q(x,t) = hv$ průtok. Pro přesnost upozorněme, že zde je definice průtoku jiná než v předchozích případech, kde platí $q = av$, a tedy pro model (1.25) by měl být průtok definován jako $q = dhv$, kde $d = konst.$ je šířka koryta řeky. Při úpravách se obě strany obou rovností šířkou koryta vydělí a pro jednodušší manipulaci se průtok předefinuje. Studium výše uvedeného modelu je důležité, protože jej lze považovat za speciální tvar související s dvoudimenzionálním modelem.

Výše uvedené modely proudění řeky v korytech s různým tvarem jsou reprezentovány nehomogenními soustavami parciálních diferenciálních rovnic hyperbolického typu (definováno v odstavci 1.2.2), obvykle používanými právě k modelování proudění tekutin.

1.1.2. Zjednodušené modely a model ve dvou prostorových dimenzích

V rámci studia matematických modelů pro říční proudění zde uvedeme ještě dva další modely, a to konkrétně tzv. model KWA (Kinematic Wave Approximation - kinematická vlnová aproximace) a dvoudimenzionální model Saint-Venantových rovnic, který je důležitý hlavně v případě modelování rozlivů z říčních koryt nebo například vln v mořích. Pro odvození modelu KWA zopakujme, že Saint-Venantovy rovnice pro proudění řeky obecným korytem (1.20, 1.21, 1.22) reprezentují rovnici kontinuity (zákon zachování hmotnosti) a pohybovou bilanci (vychází ze zákona zachování hybnosti). V následujících modelech budeme uvažovat nezměněnou rovnici kontinuity, tj.

$$a_t + q_x = 0, \tag{1.26}$$

a upravovat budeme pouze pohybovou bilanci, tj.

$$q_t + \left(\frac{q^2}{a} + gI_1\right)_x = -gab_x + gI_2 - gaS_f. \tag{1.27}$$

Předpokládejme, že všechny funkce jsou dostatečně hladké, potom lze odvodit vztah mezi I_1 a I_2. Užitím Leibnizova pravidla, tj. záměnou pořadí derivování a integrování (za předpokladu dostatečně hladkých funkcí), a pravidla o integrování součinu získáme

$$
\begin{aligned}
(gI_1)_x &= \frac{\partial}{\partial x}\left(g\int_0^{h(x)}[h(x)-\eta]\,\sigma(x,\eta)\,\mathrm{d}\eta\right) = g\int_0^{h(x)}\frac{\partial}{\partial x}\left([h(x)-\eta]\,\sigma(x,\eta)\right)\,\mathrm{d}\eta\\
&= g\int_0^{h(x)}\left[\frac{\partial}{\partial x}[h(x)-\eta]\;\sigma(x,\eta)+(h(x)-\eta)\;\frac{\partial}{\partial x}\sigma(x,\eta)\right]\,\mathrm{d}\eta =\\
&= g\frac{\partial h(x)}{\partial x}\int_0^{h(x)}\sigma(x,\eta)\,\mathrm{d}\eta + g\int_0^{h(x)}(h(x)-\eta)\;\frac{\partial}{\partial x}\sigma(x,\eta)\,\mathrm{d}\eta =\\
&= gah_x + gI_2,
\end{aligned}
\tag{1.28}
$$

a můžeme velmi jednoduše upravit pohybovou bilanci (1.27) na následující tvar

$$(av)_t + (v^2a)_x + gah_x + ga(S_f - S_0) = 0, \tag{1.29}$$

kde $S_0 = -b_x$, S_f je třecí součinitel (viz 1.1.1) a využili jsme vztah $q = av$. Tato rovnost se také nazývá dynamická vlnová rovnice , ale častěji ji nalezneme v jiném tvaru, který zde odvodíme. V následujícím užijeme pravidlo derivování součinu a též rovnici kontinuity (1.26), konkrétně vztah

$$a_t = -q_x = -(av_x + va_x). \tag{1.30}$$

Platí

$$
\begin{gathered}
cva_t + av_t + 2avv_x + v^2a_x + gah_x + ga(S_f - S_0) = -v(av_x + va_x) + av_t + 2avv_x +\\
+v^2a_x + gah_x + ga(S_f - S_0) = av_t + avv_x + gah_x + ga(S_f - S_0) = 0.
\end{gathered}
$$

Vydělením členem ga získáme jiný tvar rovnosti (1.29)

$$\frac{1}{g}v_t + \frac{1}{g}vv_x + h_x + S_f - S_0 = 0. \tag{1.31}$$

Pokud budeme předpokládat, že zrychlení, tj. $\frac{\partial v}{\partial t}$ a setrvačné síly, tj. $\frac{1}{g} v \frac{\partial v}{\partial x}$ jsou zanedbatelné, získáme následující vztah

$$\frac{\partial h}{\partial x} + S_f - S_0 = 0, \tag{1.32}$$

který se nazývá difuzní vlnová rovnice a společně s rovnicí kontinuity (1.26) vede na model nazývaný difuzní vlnová aproximace.

Pokud učiníme ještě jeden omezující předpoklad, a to že volnou hladinu uvažujeme rovnoběžnou se dnem kanálu, získáme následující jednoduchou rovnost

$$S_f - S_0 = 0, \tag{1.33}$$

která se nazývá kinematická vlnová rovnice a vede na kinematickou vlnovou aproximaci, kterou odvodíme podrobněji.

Předpokládejme nyní, že pro speciální výše uvedený stav (tj. zrychlení a setrvačné síly jsou zanedbatelné a volná hladina je rovnoběžná se dnem kanálu) existuje vztah svazující sklon dna S_0, průtok q, popř. rychlost v, a obsah příčného řezu koryta a:

$$\varphi(S_0, q, a) = 0. \tag{1.34}$$

Tuto funkci lze stanovit empiricky, popřípadě ji lze odvodit na základě obecně platných i empirických vztahů. Uveďme zde několik příkladů:

$$q = Ca\sqrt{\frac{D_h}{4} S_0}, \tag{1.35}$$

kde $C[m^{1/2}s^{-1}]$ je tzv. Chézyho koeficient a D_h je tzv. hydraulický obvod, který je definován vztahem $D_h = \frac{4a}{P_h}$, kde P_h je mokrý (zatopený) obvod koryta. Vztah (1.35) se nazývá

Chézyho rovnice. Další možností je tzv. Gaucklerova-Manningova formule

$$q = \frac{1}{n} a \left(\frac{D_h}{4} \right)^{2/3} \sqrt{S_0}, \tag{1.36}$$

kde $n[sm^{-1/3}]$ je Gaucklerův-Manningův koeficient. Jinou možností může být například Darcyova-Weisbachova rovnice

$$q = \sqrt{\frac{8g}{f}} a \sqrt{\frac{D_h}{4}} \sqrt{S_0}, \tag{1.37}$$

kde f je Darcyův-Weisbachův faktor, který pro laminární proudění nabývá hodnoty $f = \frac{64}{Re}$, kde Re je Reynoldsovo číslo. Existují i další vztahy, které za určitých speciálních podmínek svazují průtok, hloubku, sklon dna a geometrii koryta. Tyto vztahy se obvykle nazývají konsumpční funkce (popř. konsumpční křivky). Jiná možnost pro obdélníkové koryto bude uvedena v části (2.3.1).

Vraťme se nyní k popisu modelu KWA. Výše uvedené vztahy lze dosadit do rovnice kontinuity

$$a_t + q_x = 0, \tag{1.38}$$

a získáme skalární rovnost. Konkrétně volme například obdélníkové koryto, tj. model (1.25) a Gaucklerovu-Manningovu rovnici, tj. (1.36). V tomto případě platí $a = dh$, kde $d = konst.$ je šířka obdélníkového koryta. Pro hydraulický obvod platí $D_h = \frac{4dh}{d+2h}$, a tedy vztah (1.36) bude mít následující tvar

$$q = \frac{1}{n} dh \left(\frac{dh}{d + 2h} \right)^{2/3} \sqrt{S_0}, \tag{1.39}$$

a tedy derivace podle x je

$$q_x = \frac{\sqrt{S_0}}{n}\left(\frac{dh}{d+2h}\right)^{2/3}\left[\frac{5}{3}d - \frac{4}{3}\frac{dh}{d+2h}\right]h_x. \tag{1.40}$$

Dosazením do rovnice kontinuity a vydělením šířkou koryta d získáváme skalární rovnici

$$h_t + \frac{\sqrt{S_0}}{n}\left(\frac{dh}{d+2h}\right)^{2/3}\left[\frac{5}{3} - \frac{4}{3}\frac{h}{d+2h}\right]h_x = 0, \tag{1.41}$$

která pro naši konkrétní volbu tvaru koryta a konsumpční křivky reprezentuje model KWA.

Dále si uvědomme, že vztahy (1.35), (1.36), (1.37) nebo jakékoliv jiné konsumpční křivky lze využít ke stanovení třecího členu gaS_f na pravé straně obecných Saint-Venantových rovnic (1.20). Stačí zpětně vyjádřit S_f a dosadit do modelu. Je nutné si ovšem uvědomit, že náš postup pro odvození třecího členu pro Saint-Venantovy rovnice, je platný za zjednodušujících předpokladů, tj. zanedbáváme zrychlení, setrvačné síly a předpokládáme, že hladina je rovnoběžná se dnem, tj. má stejný sklon.

Jako příklad vezměme Chézyho rovnici (1.35) a odvoďme tvar třecího členu pro obecné Saint-Venantovy rovnice, kdy budeme chtít vyjádřit S_f na základě platnosti vztahu (1.33). Ze vztahu (1.35) vyjádříme S_0

$$S_0 = S_f = \frac{q^2}{C^2}\frac{1}{a^2\frac{a}{P_h}}. \tag{1.42}$$

V případě nestacionárního proudění (obecné Saint-Venantovy rovnice) se používá mírně upravený vztah

$$S_f = \frac{q|q|}{C^2}\frac{1}{a^2\frac{a}{P_h}}, \tag{1.43}$$

který umožňuje vzít v úvahu opačný směr proudění, kdy člen $q|q|$ může nabývat i záporných hodnot.

Na konci této kapitoly uveďme ještě model Saint-Venantových rovnic pro dvoudimenzionální proudění

$$
\begin{aligned}
h_t + (hu)_x + (hv)_y &= 0, && (1.44)\\
(hu)_t + \left(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)_x + (huv)_y &= -ghb_x, && (1.45)\\
(hv)_t + (huv)_x + \left(hv^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)_y &= -ghb_y,
\end{aligned}
$$

kde $h = h(x, y, t)$ je hloubka v bodě $[x, y]$ a čase t, $u = u(x, y, t)$ a $v = v(x, y, t)$ jsou rychlosti ve směru x a y v bodě $[x, y]$ a čase t, $b = b(x, y)$ je tvar dna a $b_x = \frac{\partial b}{\partial x}(x, y)$, $b_y = \frac{\partial b}{\partial x}(x, y)$, g je tíhové zrychlení.

1.2. Zákony zachování, bilanční vztahy

V této části obecně zapíšeme předchozí zákony zachování. Cílem je obecná formulace počáteční, popřípadě počátečně-okrajové úlohy. Dále zde definujeme klasické, slabé a entropické řešení. Ukážeme, že hladká řešení nemusí existovat, a je proto nutné zavést koncept slabého řešení, a následně, že slabé řešení není jednoznačné, a je tudíž nutné vybrat fyzikálně korektní, tj. entropické řešení. Zákony zachování jsou odvozeny z fyzikálních zákonů v integrálním tvaru. Složky vektoru $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ reprezentují hustotu zachovávané veličiny v místě $\boldsymbol{x}$ a čase t, a tedy integrál

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{u} \,\mathrm{d}\Omega$$

reprezentuje celkové množství veličiny $\boldsymbol{u}$ v oblasti Ω. Zákon zachování říká, že celkové množství zachovávané veličiny uvnitř oblasti Ω se v časovém intervalu (t_1, t_2) mění pouze tokem přes uzavřenou hranici oblasti S, a tedy platí

$$\int\limits_{\Omega} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t_2)\,\mathrm{d}\Omega - \int\limits_{\Omega} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t_1)\,\mathrm{d}\Omega = -\int\limits_{t_1}^{t_2} \oint\limits_{S} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t))\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}\mathrm{d}t, \tag{1.46}$$

kde $d\boldsymbol{S}$ je vektor elementu hranice S ve směru vnější normály. $\boldsymbol{f}$ je základní veličina nazývaná tok, která je definována jako množství veličiny $\boldsymbol{u}$, které projde jednotkou hranice S za jednotku času. Tok uvažujeme jako autonomní funkci, tedy $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})$.

Pro další potřebu uveďme také jednodimenzionální zákon zachování, kde oblast Ω bude interval (x_1, x_2), a tedy

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \boldsymbol{u}(x, t_2)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{x_1}^{x_2} \boldsymbol{u}(x, t_1)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(x_1, t)) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(x_2, t))\right]\,\mathrm{d}t. \tag{1.47}$$

Uveďme též semidiskrétní variantu integrálního zákona zachování, kde předpokládáme, že funkce $\boldsymbol{u}(x, t)$ je skoro všude spojitá a omezená, a tedy platí

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{x_1}^{x_2} \boldsymbol{u}(x, t)\,\mathrm{d}x = \left[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(x_1, t)) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(x_2, t))\right]. \tag{1.48}$$

Z integrálního tvaru zákona zachování lze snadno přejít k diferenciálnímu tvaru za předpokladu, že funkce $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})$ jsou dostatečně hladké. Dostáváme

$$\boldsymbol{u}_t + [\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})]_x = \boldsymbol{0}. \tag{1.49}$$

Upozorněme zde, že výše uvedená rovnost je v tzv. konzervativním tvaru, což znamená, že řešení $\boldsymbol{u}$ se v čase mění pouze tokem $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})$ přes hranici oblasti, a proto je často používána jako formální zápis zákona zachování. Spolu s počátečními a okrajovými podmínkami tvoří jeden z matematických modelů, který budeme studovat (a to i v případě nehladkých dat).

Dalšími vztahy, které jsou obvyklé při matematickém modelování proudění tekutin, jsou bilanční zákony, které lze zapsat v diferenciálním tvaru analogicky k (1.49)

$$\boldsymbol{u}_t + [\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})]_x = \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{u}, x), \tag{1.50}$$

kde $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{u}(x,t), x)$ se obvykle nazývá zdrojový člen.

Například Saint-Venantovy rovnice pro proměnný obdélníkový průřez koryta (1.24) lze zapsat ve tvaru (1.50), kde jednotlivé vektory mají následující tvar

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} a \\ q \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} q \\ \frac{q^2}{a} + \frac{ga^2}{2l} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{u}, x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{ga^2}{2l^2} l_x - gab_x \end{bmatrix}. \tag{1.51}$$

1.2.1. Klasické, slabé a entropické řešení

Problém (1.49) lze formulovat jako počáteční úlohu

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_t + [\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})]_x &= \boldsymbol{0}, \quad x \in \mathbb{R},\ t \in (0, T), \\ \boldsymbol{u}(x, 0) &= \boldsymbol{u}_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{1.52}$$

kde $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(x,t) : \mathbb{R} \times \langle 0, T) \to \mathbb{R}^m$ je hledaná funkce (jak bylo poznamenáno výše, jde o vektor zachovávaných veličin), $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{u}_0(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ a $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ jsou dané funkce. Předpokládáme, že funkce $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})$ je dostatečně hladká.

V praxi nejsou modely proudění řešeny pro $x \in \mathbb{R}$, ale řešíme je na omezeném intervalu, např. $0 \leqq x \leqq L$, kde L je délka např. úseku řeky. Pro soustavu o m rovnicích je potřeba nejvýše $2m$ okrajových podmínek. Některé z těchto podmínek mohou být předepsány na levé hranici $x = 0$ a některé na pravé $x = L$. Tyto podmínky jsou obvykle specifikovány fyzikální situací, kterou chceme modelovat. Proto úlohu (1.52) přeformulujeme jako počátečně-okrajovou

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_t + [\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})]_x &= \boldsymbol{0}, \quad x \in (0, L),\ t \in (0, T), \\ \boldsymbol{u}(x, 0) &= \boldsymbol{u}_0(x), \quad x \in (0, L), \\ u_k(0, t) &= g_k^0(t), \quad t \in (0, T),\ k = 1, \ldots, n, \\ u_l(L, t) &= g_l^L(t), \quad t \in (0, T),\ l = 1, \ldots, p, \end{aligned} \tag{1.53}$$

kde $g_k^0(t)$ reprezentuje prvky n-dimenzionálního vektoru předepisující chování veličiny na levém okraji a $g_l^L(t)$ jsou prvky p-dimenzionálního vektoru popisující pravou okrajovou podmínku. Čísla n a p závisí na úloze a platí $n + p \leqq 2m$.

Definice 1.1. *Klasickým řešením* úlohy (1.52) nazveme $\boldsymbol{u}(x, t)$ takové, že $\boldsymbol{u} \in [\mathrm{C}(\mathbb{R} \times \times \langle 0, T))]^m$, má všechny derivace obsažené v rovnici (1.52) spojité na $\mathbb{R} \times (0, T)$ a splňuje všechny rovnice (1.52) na $\mathbb{R} \times (0, T)$ a počáteční podmínku na $\mathbb{R}$.

Analogicky lze definovat klasické řešení pro počátečně-okrajovou úlohu (1.53). K podmínkám uvedeným v definici 1.1 budeme navíc požadovat splnění okrajových podmínek.

Pokud funkce vyhovuje diferenciálnímu tvaru a okrajové podmínce (1.52), tj. jde o klasické řešení: $\boldsymbol{u} \in [\mathrm{C}^1(\mathbb{R} \times \langle 0, T))]^m$, potom pro ni platí i integrální rovnost (1.47). Původní úloha vychází z integrálního tvaru, který je odvozen z fyzikálních zákonů a její řešení mohou být i nehladká a nespojitá. Právě pro tato řešení nejsou parciální diferenciální rovnice (1.49) definovány v klasickém smyslu [3].

Obsah
28. strana ze 161
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka/Okno

Uvažujme počáteční úlohu pro skalární nelineární rovnici

$$\begin{aligned} u_t + [f(u)]_x &= 0, \\ u(x,0) &= u_0(x), \end{aligned} \tag{1.54}$$

pro $t > 0$ a $x \in \mathbb{R}$. Přepíšeme rovnici (1.54) do kvazilineárního tvaru

$$u_t + f'(u)u_x = 0, \tag{1.55}$$

což je advekční rovnice s rychlostí $f'(u)$. Zvolme křivku $(x(s), t(s))$ definovanou následujícími rovnostmi

$$\frac{\mathrm{d}t(s)}{\mathrm{d}s} = 1 \quad \text{a} \quad \frac{\mathrm{d}x(s)}{\mathrm{d}s} = f'(u). \tag{1.56}$$

Rovnost (1.55) lze interpretovat jako skalární součin

$$(1, f'(u)) \cdot (u_t, u_x) = 0,$$

a tedy platí, že řešení podél této křivky (obvykle nazývané charakteristika) je konstantní

$$\frac{\mathrm{d}u(x(s), t(s))}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = u_t + f'(u)u_x = 0, \tag{1.57}$$

a tedy platí

$$u(x(s), t(s)) = u(x(0), t(0)) = u(x_0, 0) = u_0(x_0). \tag{1.58}$$

Ze vztahů (1.56) plyne

$$t = s \quad \text{a} \quad x = x_0 + sf'(u), \tag{1.59}$$

a tedy dosazením do (1.58) dostáváme řešení (dokud se charakteristiky neprotnou)

$$u(x,t) = u_0(x - tf'(u)). \tag{1.60}$$

Zderivujeme vztah (1.60) podle časové, resp. prostorové proměnné, a získáme

$$u_t = u_0'(x - tf'(u)) \left(-f'(u) - tf''(u)u_t\right), \tag{1.61}$$

resp.

$$u_x = u_0'(x - tf'(u)) \left(1 - tf''(u)u_x\right). \tag{1.62}$$

Z výše uvedených rovností jednoduše určíme u_t a u_x

$$u_t = -\frac{u_0'(x - tf'(u))\, f'(u)}{1 + tf''(u)\, u_0'(x - tf'(u))}, \tag{1.63}$$

$$u_x = \frac{u_0'(x - tf'(u))}{1 + tf''(u)\, u_0'(x - tf'(u))}. \tag{1.64}$$

Uvažujme situaci, kdy například $u_0' = -\delta_0 < 0$ a $f'' = \varphi_0 > 0$, potom pro $t = \frac{1}{\varphi_0\delta_0}$ bude jmenovatel u výše uvedených derivací následující

$$1 + tf''(u)\, u_0'(x - tf'(u)) = 1 + \frac{1}{\varphi_0\delta_0}\varphi_0(-\delta_0) = 0,$$

což je v rozporu s předpokladem hladkého řešení.

Hladké řešení $u(x,t)$ nelineárního zákona zachování (1.54) tedy může ztratit svou regularitu v kritických časech, ve kterých $u_x \to \infty$. Musíme tedy zavést slabé řešení problému.

Definice 1.2. *Slabým řešením* úlohy (1.52) nazveme $\boldsymbol{u}(x,t)$ takové, že $\boldsymbol{u}(x,t) \in [\mathcal{L}^{\infty}_{loc}(\mathbb{R} \times \times (0,\infty))]^m$, $\boldsymbol{u}_0(x) \in [\mathcal{L}^{\infty}_{loc}(\mathbb{R})]^m$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) \in [\mathcal{C}^1(\mathbb{R})]^m$ a pro libovolné $\boldsymbol{\varphi} \in [\mathcal{C}^{\infty}_0(\mathbb{R} \times \langle 0,\infty))]^m$ platí následující integrální rovnost

$$\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [\boldsymbol{\varphi}_t \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\varphi}_x \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t = -\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{\varphi}(x,0)\boldsymbol{u}_0(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.65}$$

Poznámka 1.3. Prostor funkcí $\mathcal{C}^{\infty}_0$ označuje množinu všech funkcí, které jsou nekonečněkrát spojitě diferencovatelné a mají kompaktní nosič (tj. pro dostatečně velké $|x|$ a t je $\varphi(x,t) = 0$). Prostor funkcí $\mathcal{L}^{\infty}_{loc}$ značí množinu všech funkcí definovaných skoro všude na Ω (tj. $\mathbb{R} \times (0,\infty)$ nebo $\mathbb{R}$), které jsou esenciálně omezené na všech kompaktních podmnožinách Ω.

Slabé řešení není jednoznačné a je třeba vybrat jediné řešení, které je navíc ‚fyzikálně správné' . K tomu slouží koncept entropického řešení. Než přistoupíme k definici entropického řešení, uvědomme si, že počáteční úlohu

$$\begin{array}{rcl} u_t + f(u)_x & = & 0, \\ u(x,0) & = & u_0(x), \end{array} \tag{1.66}$$

lze chápat jako následující úlohu s pravou stranou a s $\varepsilon = 0$

$$\begin{array}{rcl} u_t + f(u)_x & = & \varepsilon u_{xx}, \\ u(x,0) & = & u_0(x), \end{array} \tag{1.67}$$

kde ε je difúzní koeficient. Lze ukázat, že úloha (1.67) má pro $\varepsilon > 0$ jednoznačné klasické řešení, které splňuje princip maxima pro libovolnou množinu počátečních podmínek. Protože pro úlohu (1.66) je $\varepsilon = 0$, je představa taková, že vezmeme malý difúzní parametr, tj. $\varepsilon \ll 1$ a limita $\varepsilon \to 0_+$ nám definuje smysluplné řešení úlohy (1.66). Lze ukázat, že pokud řešení (1.67), označme ho $u^\varepsilon(x,t)$, konverguje skoro všude na $\mathbb{R}\times(0,T\rangle$ k funkci $u(x,t)$ pro $\varepsilon \to 0_+$, potom $u(x,t)$ je slabým řešením úlohy (1.66). Tudíž je možné vybrat ‚správné' slabé řešení tak, že budeme vyžadovat, aby bylo zároveň ‚limitním řešením' úlohy (1.67). Pro řešení u^ε platí mimo jiné tzv. entropická nerovnost, a lze tedy definovat ‚fyzikálně správné' řešení jako tzv. entropické řešení.

Definice 1.4. Slabé řešení $\boldsymbol{u}(x,t)$ úlohy (1.52) nazveme *entropické* (často též přípustné), pokud pro libovolné $\boldsymbol{\varphi} \in [\mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}\times(-\infty,T))]^m$, $\boldsymbol{\varphi} \geqq \mathbf{0}$ a pro každou konvexní a spojitou entropii E s entropickým tokem F, splňuje

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [\boldsymbol{\varphi}_t E(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\varphi}_x F(\boldsymbol{u})]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^\infty \boldsymbol{\varphi}(x,0)E(\boldsymbol{u}_0(x))\,\mathrm{d}x \geqq 0. \tag{1.68}$$

Abychom ilustrovali problematiku klasického, slabého a entropického řešení, zvolíme jednoduchou skalární homogenní nelineární rovnici. Konkrétně jde o model dopravního proudu, též označovaný jako LWR (Lighthill, Whitham, Richards) model (více lze nalézt v [1])

$$u_t + (uU(u))_x = 0, \tag{1.69}$$

kde $u = u(x,t)$ reprezentuje hustotu aut (jde o poměrovou veličinu, a tudíž bezrozměrnou), přičemž předpokládáme, že $0 \leqq u \leqq 1$ a $U(u) = v_{max}(1-u)$. Konstanta v_{max} je rychlost při nulové hustotě ($u = 0$), tj. když je prázdná silnice, potom $U(u) = v_{max}$. Pokud je hustota aut maximální ($u = 1$), tj. úplně plná silnice, potom $U(u) = 0$. Pro jednoduchost položíme

$v_{max} = 1\,ms^{-1}$ a získáváme následující jednoduchou rovnici

$$u_t + [u(1-u)]_x = 0. \tag{1.70}$$

Uvažujme počáteční podmínku

$$u(x,0) = u_0(x) = 0.5 \quad \text{pro} \quad x \in (0;100), \tag{1.71}$$

tj. uvažujeme konstantní hustotu aut na silnici o délce $100\,m$. Okrajové podmínky nejsou v této chvíli důležité, proto se jim zde nebudeme věnovat. Na Obr. 1.4 je vidět klasické řešení v čase $t = 10\,s$ této počáteční úlohy s počáteční podmínkou, která je stejná jako řešení, tj. také Obr. 1.4. Toto řešení má v každém bodě spojitou derivaci a tudíž rovnice (1.70) je splněna v každém bodě. Auta se v podstatě pohybují konstantní rychlostí $U(u) = v_{max}(1-u) = 0.5\,ms^{-1}$, mají mezi sebou konstantní rozestupy, a tedy jejich hustota zůstává konstantní, jde o tzv. stacionární řešení.

Dále představíme dvě slabá řešení s počáteční podmínkou

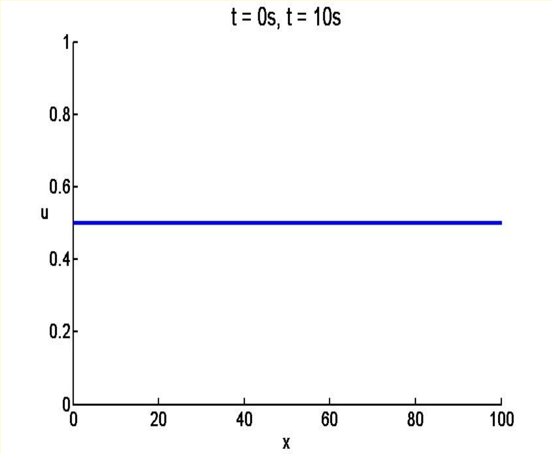
$$u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} 0.5 & \text{pro} \quad x \in (0;50), \\ 0 & \text{pro} \quad x \in (50;100). \end{cases} \tag{1.72}$$

Je vidět, že v bodě $x = 50\,m$ tj. v bodě nespojitosti, neexistuje derivace a tudíž rovnice (1.70) nemá klasické řešení. První slabé řešení je na Obr. 1.6 s počáteční podmínkou na obrázku (1.5). Druhé slabé řešení je na Obr. 1.8. Pouze řešení na Obr. 1.8 je entropické a tudíž „fyzikálně správné“.

1.2.1.1. Rankineův-Hugoniotův vztah

Jak bylo naznačeno v předchozí kapitole, slabé řešení může obsahovat nespojitosti, např. viz Obr. 1.6. Jedním z takových nespojitých řešení je například tzv. rázová vlna. V této sekci se

Obsah
33. strana ze 161
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka/Okno

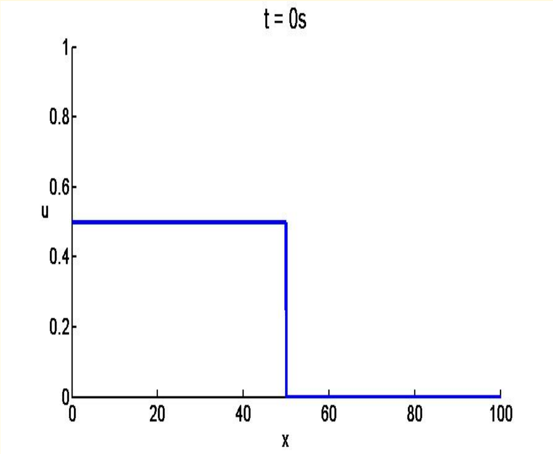


Obr. 1.4 Počáteční podmínky a současně řešení

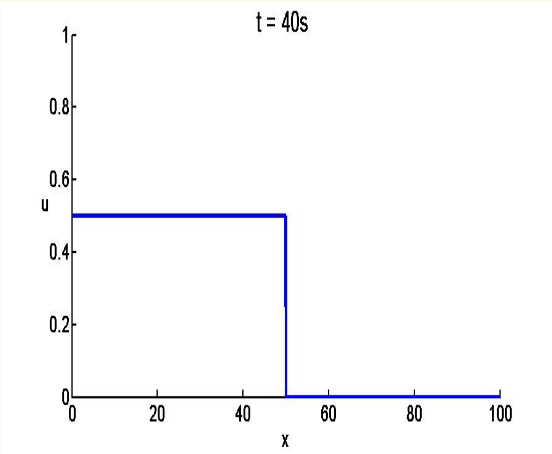
budeme zabývat odvozením rovnosti, která se nazývá Rankineův-Hugoniotův vztah. Tento vztah odvodíme pro skalární zákon zachování, ale jeho platnost lze rozšířit i na soustavy.

Předpokládejme oblast Ω, která je rozdělena na dvě části Ω_1 a Ω_2 hladkou křivkou $x = \xi(t)$, viz Obr. (1.9). Dále předpokládejme platnost zákona zachování v diferenciálním tvaru (1.54) a dostatečně hladkou funkci u, která tuto rovnost splňuje pro $x < \xi(t)$ a $x > \xi(t)$ se skokem podél hladké křivky $x = \xi(t)$, navíc tato funkce splňuje počáteční podmínku (jde o klasické řešení ve smyslu definice 1.1), více viz [3]. Tato funkce má pro libovolné t limity zprava a zleva, které budeme značit následujícím způsobem

$$\lim_{x \to \xi(t)^+} u(x,t) = u^+(\xi(t),t) := u_r,$$



Obr. 1.5 Počáteční podmínka.



Obr. 1.6 Hustota v čase 40s.

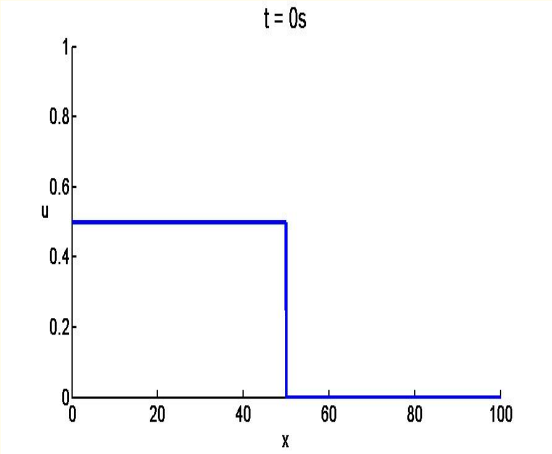
$$\lim_{x \to \xi(t)^-} u(x,t) = u^-(\xi(t),t) := u_l,$$

analogicky

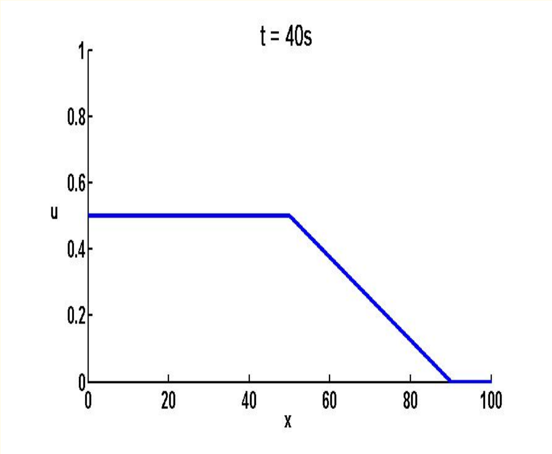
$$\lim_{x \to \xi(t)^+} f(u(x,t)) := f(u_r),$$

$$\lim_{x \to \xi(t)^-} f(u(x,t)) := f(u_l).$$

Námi předpokládaná funkce $u(x,t)$ musí v Ω_1 a v Ω_2 splňovat definici slabého řešení (viz definice 1.2), kde nebude zahrnuta počáteční podmínka, protože oblast Ω je volena mimo



Obr. 1.7 Počáteční podmínka.

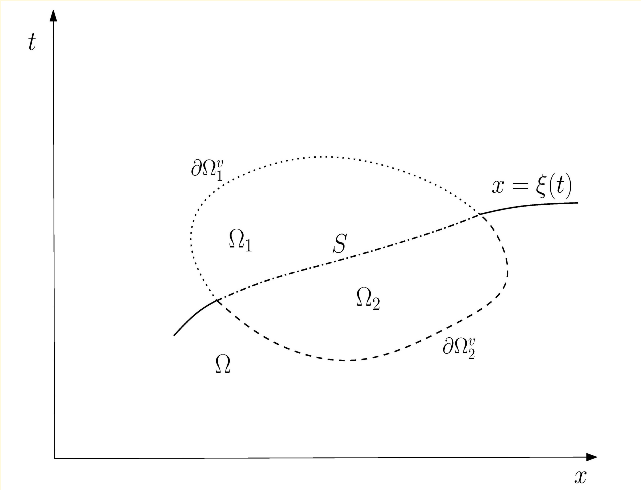


Obr. 1.8 Hustota v čase 40s.

počátek, tj. musí platit

$$\int_{\Omega_i} [\varphi_t u + \varphi_x f(u)] \, \mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0 \quad \text{pro} \quad i = 1, 2$$

pro všechny funkce φ, které nyní uvažujeme nulové na hranici $\partial\Omega = \partial\Omega_1^v \cup \partial\Omega_2^v$, tj. z podprostoru funkcí $[\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R} \times \langle 0, \infty))]$. Označíme hranici oblasti Ω_1 jako $\partial\Omega_1 = \partial\Omega_1^v \cup S$ a hranici oblasti Ω_2 jako $\partial\Omega_2 = \partial\Omega_2^v \cup S$. Dále označíme složky vnějších normál k $\partial\Omega_1$ a $\partial\Omega_2$ následovně: $\boldsymbol{n}_1 = (n_1^x, n_1^t)$ a $\boldsymbol{n}_2 = (n_2^x, n_2^t)$. Použitím Greenovy věty, (1.54) v oblastech Ω_1, Ω_2 a faktu, že φ jsme speciálně zvolili nulové na hranici $\partial\Omega$,



Obr. 1.9 Ilustrace k odvození Rankineovy-Hugoniotovy podmínky.

dostaneme

$$
\begin{aligned}
0 &= \int\limits_{\Omega_1} [\varphi_t u + \varphi_x f(u)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int\limits_{\Omega_2} [\varphi_t u + \varphi_x f(u)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \\
&= \int\limits_{\partial\Omega_1} \varphi\, u\, n_1^t\,\mathrm{d}S + \int\limits_{\partial\Omega_1} \varphi f(u)\, n_1^x\,\mathrm{d}S - \int\limits_{\Omega_1} \varphi\, u_t\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int\limits_{\Omega_1} \varphi\, f(u)_x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \\
&+ \int\limits_{\partial\Omega_2} \varphi\, u\, n_2^t\,\mathrm{d}S + \int\limits_{\partial\Omega_2} \varphi f(u)\, n_2^x\,\mathrm{d}S - \int\limits_{\Omega_2} \varphi\, u_t\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int\limits_{\Omega_2} \varphi\, f(u)_x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t =
\end{aligned}
$$

Obsah
37. strana ze 161
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka/Okno

$$= \int\limits_{\partial\Omega_1} (f(u)\, n_1^x + u\, n_1^t)\varphi \,\mathrm{d}S + \int\limits_{\partial\Omega_2} (f(u)\, n_2^x + u\, n_2^t)\varphi \,\mathrm{d}S - \int\limits_{\Omega_1} (u_t + f(u)_x)\,\varphi \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t -$$

$$- \int\limits_{\Omega_2} (u_t + f(u)_x)\,\varphi \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int\limits_{\partial\Omega_1} (f(u), u)\,\varphi\, \boldsymbol{n}_1 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int\limits_{\partial\Omega_2} (f(u), u)\,\varphi\, \boldsymbol{n}_2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t =$$

$$= \int\limits_{\partial\Omega_1^v} (f(u), u)\,\varphi\, \boldsymbol{n}_1 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int\limits_{S} \lim_{x\to\xi(t)^-} (f(u), u)\,\varphi\, \boldsymbol{n}_1 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int\limits_{\partial\Omega_2^v} (f(u), u)\,\varphi\, \boldsymbol{n}_2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t +$$

$$+ \int\limits_{S} \lim_{x\to\xi(t)^+} (f(u), u)\,\varphi\, \boldsymbol{n}_2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int\limits_{S} (f(u_r), u_r)\,\varphi\, \boldsymbol{n}_1 \,\mathrm{d}S + \int\limits_{S} (f(u_l), u_l)\,\varphi\, \boldsymbol{n}_2 \,\mathrm{d}S.$$

Pro S platí, že $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_1 = -\boldsymbol{n}_2$, a tedy

$$\int\limits_{S} (f(u_r) - f(u_l), u_r - u_l)\,\varphi\, \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}S = 0.$$

Funkce φ je libovolná, a tedy platí

$$(f(u_r) - f(u_l), u_r - u_l)\, \boldsymbol{n} = 0.$$

Pro křivku S parametrizovanou $x = \xi(t)$ je jednotkový vektor normály

$$\boldsymbol{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \dot{\xi}(t)^2}}, -\frac{\dot{\xi}(t)}{\sqrt{1 + \dot{\xi}(t)^2}} \right),$$

a tedy na křivce S platí

$$f(u_r) - f(u_l) = \dot{\xi}(t)(u_r - u_l), \tag{1.73}$$

kde $\dot{\xi}(t) = s$ je rychlost šíření nespojitosti. Výše uvedená rovnost se nazývá Rankineův-Hugoniotův vztah (v této souvislosti velmi často nazývaný Rankineova-Hugoniotova podmínka nebo podmínka skoku).

Funkce $u(x, t)$ je slabé řešení, pokud je řešením v klasickém smyslu v obou regionech Ω_1 a Ω_2 a splňuje Rankineův-Hugoniotův vztah podél hladké křivky $x = \xi(t)$.

1.2.2. Rovnice hyperbolického typu a jejich soustavy

V této kapitole popíšeme základní třídění rovnic. Začneme příkladem skalární lineární rovnice, konkrétně jednoduchou advekční rovnicí

$$u_t + au_x = 0, \tag{1.74}$$

kde $u(x, t)$ reprezentuje koncetraci a $a = konst.$ je rychlost. Další možností je skalární nelineární zákon zachování, který lze obecně zapsat ve tvaru

$$u_t + [f(u)]_x = 0, \tag{1.75}$$

popř. bilance

$$u_t + [f(u)]_x = \psi(u, x), \tag{1.76}$$

kde $f(u)$ je tzv. toková funkce a $\psi(u, x)$ zdrojový člen. Konkrétně může být toková funkce definovaná následovně

$$f(u) = \frac{1}{2}u^2, \tag{1.77}$$

kdy po dosazení do zákona zachování (1.75) získáváme tzv. Burgersovu rovnici. Jiným příkladem může být kinematická vlnová aproximace (1.41). Soustavy rovnic opět dělíme na lineární a nelineární. Obecnou lineární soustavu rovnic lze zapsat například následovně

$$\boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_x = \boldsymbol{0}. \tag{1.78}$$

Příkladem lineární soustavy může být model používaný v akustice

$$\begin{bmatrix} p \\ u \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} 0 & K_0 \\ \frac{1}{\rho_0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ u \end{bmatrix}_x = \boldsymbol{0}, \tag{1.79}$$

kde p a u jsou perturbace tlaku a rychlosti (v akustice). Parametr K_0 reprezentuje modul objemové pružnosti stlačitelnosti a ρ_0 je hustota. Nelineární soustavu lze obecně zapsat

$$\boldsymbol{u}_t + [\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})]_x = \boldsymbol{0}, \tag{1.80}$$

popř.

$$\boldsymbol{u}_t + [\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})]_x = \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{u}, x). \tag{1.81}$$

Jako příklad výše uvedeného bilančního vztahu uveďme všechny varianty Saint-Venantových rovnic uvedené v kapitole 1.1.1.1. Nelineární soustavy lze formálně přepsat do tzv. kvazilineárního tvaru, tj

$$\boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}_x = \boldsymbol{0}, \tag{1.82}$$

popř.

$$\boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}_x = \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{u}, x). \tag{1.83}$$

Definice 1.5. Soustava nelineárních parciálních diferenciálních rovnic (1.52) se nazývá *slabě hyperbolická*, pokud Jacobiho matice $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{u}_0)$ má reálná vlastní čísla pro jakýkoliv fyzikálně relevantní stav $\boldsymbol{u}_0 \in \mathbb{R}^m$.
Soustava nelineárních parciálních diferenciálních rovnic (1.52) se nazývá *(silně) hyperbolická*, pokud Jacobiho matice $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{u}_0)$ je diagonalizovatelná a má reálná vlastní čísla pro jakýkoliv fyzikálně relevantní stav $\boldsymbol{u}_0 \in \mathbb{R}^m$.
Soustava nelineárních parciálních diferenciálních rovnic (1.52) se nazývá *ryze (striktně) hyperbolická*, pokud Jacobiho matice $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{u}_0)$ je diagonalizovatelná a má navzájem různá reálná vlastní čísla pro jakýkoliv fyzikálně relevantní stav $\boldsymbol{u}_0 \in \mathbb{R}^m$.

Vlastní čísla Jacobiho matice $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{u})$ se často nazývají charakteristické rychlosti, značí se $\lambda_i(\boldsymbol{u})$ a definují tzv. charakteristická pole λ_i.

Poznámka 1.6. Gradient vlastních čísel (tj. charakteristických rychlostí) je dán

$$\nabla\lambda_i(\boldsymbol{u}) = \left[\frac{\partial\lambda_i}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial\lambda_i}{\partial u_m}\right]^T.$$

Vektor $\boldsymbol{r}^i(\boldsymbol{u})$ značí vlastní vektory (přesněji pravé vlastní vektory) příslušející vlastnímu číslu $\lambda_i(\boldsymbol{u})$.

Definice 1.7. Charakteristické pole λ_i se nazývá *lineárně degenerované* pokud platí

$$\nabla\lambda_i(\boldsymbol{u})\boldsymbol{r}^i(\boldsymbol{u}) = 0, \quad \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m. \tag{1.84}$$

Poznámka 1.8. Všechna vlastní čísla lineární soustavy (1.78) jsou konstanty, tedy gradient je nulový, a tudíž jsou všechna charakteristická pole lineárně degenerovaná.

Definice 1.9. Charakteristické pole λ_i se nazývá *ryze nelineární* pokud platí

$$\nabla\lambda_i(\boldsymbol{u})\boldsymbol{r}^i(\boldsymbol{u}) \neq 0, \quad \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m. \tag{1.85}$$

Pro vysvětlení výše uvedených pojmů předpokládejme nějakou hladkou křivku $\tilde{\boldsymbol{u}}(\eta)$, která je parametrizována skalárním parametrem η. Předpokládejme, že jde o integrální křivku, tj. v každém bodě křivky $\tilde{\boldsymbol{u}}(\eta)$ je tečný vektor, tj. $\tilde{\boldsymbol{u}}'(\eta)$, vlastním vektorem $f'(\tilde{\boldsymbol{u}}(\eta))$ odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_i(\tilde{\boldsymbol{u}}(\eta))$. Tedy $\tilde{\boldsymbol{u}}'(\eta)$ je skalárním násobkem jednotlivých vlastních vektorů, tj.

$$\tilde{\boldsymbol{u}}'(\eta) = \alpha(\eta) r^i(\tilde{\boldsymbol{u}}(\eta)), \tag{1.86}$$

kde $\alpha(\eta)$ závisí na zvolené parametrizaci. Důležité však je, že tečna k integrální křivce $\tilde{\boldsymbol{u}}(\eta)$ je vždy ve směru odpovídajícího vlastního vektoru vyčísleného v daném bodě integrální křivky. Změnu vlastního čísla vzhledem k parametru η lze vyjádřit jako

$$\frac{d}{d\eta}\lambda_i(\tilde{\boldsymbol{u}}(\eta)) = \nabla\lambda_i(\tilde{\boldsymbol{u}}(\eta))\tilde{\boldsymbol{u}}'(\eta), \tag{1.87}$$

kdy vzhledem k (1.86) lze výše uvedené pojmy vysvětlit následujícím způsobem: pokud je na nějaké integrální křivce derivace vlastního čísla (tj. charakteristické rychlosti) nulová, potom se nelineární problém chová jako lineární (degeneruje na lineární chování), tj. charakteristiky jsou rovnoběžky. Ryzí nelinearita naopak zajišťuje, že tato situace nikdy nenastane.

Uveďme zde příklad pro tzv. Burgersovu rovnici

$$u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = 0. \tag{1.88}$$

Jediné vlastní číslo je $\lambda(u) = f'(u) = u$ a vlastní vektor můžeme zvolit $r = 1$. Tedy platí

$$\nabla\lambda_i(u) r^i(u) = u \neq 0, \quad \forall u \in \mathbb{R} - \{0\} \tag{1.89}$$

a toto charakteristické pole je ryze nelineární.

Dále zde uveďme příklad na vlastní čísla a vlastní vektory pro model proudění obdélníkovým kanálem, tj. pro model (1.25). Tento model pro další potřebu přepíšeme pomocí zachovávaných proměnných následujícím způsobem

$$\begin{aligned} h_t + q_x &= 0, \\ q_t + \left(\frac{q^2}{h} + \frac{1}{2} g h^2\right)_x &= -g h b_x, \end{aligned} \tag{1.90}$$

připomeňme, že $h(x,t)$ je hledaná hloubka, $q(x,t) = hv$ je hledaný průtok a $v(x,t)$ je rychlost. Vektor zachovávaných proměnných $\boldsymbol{u}$ a toková funkce $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})$ v (1.49) jsou v tomto případě reprezentovány vektory

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} h \\ q \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} q \\ \frac{q^2}{h} + \frac{1}{2} g h^2 \end{bmatrix}. \tag{1.91}$$

Jacobiho matice má následující tvar

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -v^2 + gh & 2v \end{bmatrix}. \tag{1.92}$$

Vlastní čísla této matice se určí jako kořeny charakteristického polynomu, a tedy platí

$$\det(\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{u}) - \lambda \boldsymbol{I}) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -v^2 + gh & 2v - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2v\lambda + v^2 - gh. \tag{1.93}$$

Obsah
43. strana ze 161
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka/Okno

Kořeny tohoto polynomu, a tedy vlastní čísla, jsou

$$\lambda_{1,2} = \frac{2v \pm \sqrt{4v^2 - 4(v^2 - gh)}}{2} = v \pm \sqrt{gh} = \frac{q}{h} \pm \sqrt{gh}. \tag{1.94}$$

Vlastní vektory $\boldsymbol{r}^1$ a $\boldsymbol{r}^2$ jsou nenulovými řešeními dvou homogenních rovnic

$$(\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{u}) - \lambda_i \boldsymbol{I})\boldsymbol{r}^i, \quad i = 1, 2, \tag{1.95}$$

a tedy

$$\boldsymbol{r}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ v \ + \sqrt{gh} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{r}^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ v \ - \sqrt{gh} \end{bmatrix}. \tag{1.96}$$

Určeme nyní charakteristická pole, která jsou dána vlastními čísly λ_1 a λ_2 ve smyslu definic (1.7) a (1.9). Nejprve určeme gradient prvního vlastního čísla

$$\nabla\lambda_1 = \left[\frac{\partial\lambda_1}{\partial h}, \frac{\partial\lambda_1}{\partial q}\right]^T = \left[-\frac{q}{h^2} - \frac{g}{2\sqrt{gh}}, \frac{1}{h}\right]^T, \tag{1.97}$$

a tedy pro skalární součin gradientu $\nabla\lambda_1$ a vlastního vektoru $\boldsymbol{r}^1$ platí

$$\nabla\lambda_1 \boldsymbol{r}^1 = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{h}} \neq 0, \tag{1.98}$$

a tedy charakteristické pole λ_1 je ryze nelineární. Stejným způsobem lze ukázat, že rovněž druhé charakteristické pole λ_2 je ryze nelineární.

Na závěr této kapitoly ještě uvedeme několik poznámek. Jako první uvedeme rozdělení proudění podle tzv. Froudova čísla, které má tvar

$$Fr = \frac{|v|}{c}, \tag{1.99}$$

Obsah
44. strana ze 161
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka/Okno

kde v je horizontální rychlost proudění a $c = \sqrt{gh}$. Froudovo číslo je analogie k Machovu číslu v dynamice plynů, kde ovšem c je označení rychlosti zvuku.

- Bystřinné proudění: $F_r > 1$, jde o situaci, kdy vlastní čísla $\lambda_{1,2}$ v (1.94) jsou buď obě kladná nebo obě záporná. Tento typ zahrnuje pouze proudění jedním směrem.
- Říční proudění: $F_r < 1$, kdy jedno vlastní číslo je kladné a druhé záporné. Říční proudění tedy zahrnuje i tzv. zpětné proudění.
- Kritické proudění: Froudovo číslo v průběhu proudění přejde přes jedničku, tj. vlastní čísla změní v průběhu proudění znaménko (přejdou přes nulu).

V případě říčního modelování jsou vlnami, tj. změnami, které se šíří v řešení rychlostmi $\lambda_{1,2}$, míněny tzv. gravitační vlny. Jsou důsledkem hydrostatického tlaku, který je způsoben tíhou vody (gravitací). Na rozdíl od modelování vln v akustice, kde vlnou je myšlena zvuková vlna. Důvodem vzniku zvukových vln je naopak stlačitelnost tekutin. Protože se v našich modelech uvažuje proudění kapalin, tedy zanedbáváme stlačitelnost, zanedbáváme i zvukové vlny.

Pojmy k zapamatování

— Saint-Venantovy rovnice

— kinematická vlnová aproximace (model KWA)

— zákon zachování v diferenciálním tvaru a v integrálním tvaru

— bilanční vztah

— počáteční úloha

— klasické, slabé a entropické řešení

— Rankineův-Hugoniotův vztah

— slabě hyperbolická, hyperbolická a ryze hyperbolická soustava

— charakteristické pole lineárně degenerované a ryze nelineární

— charakteristické rychlosti

Příklady k procvičení

1. Určete KWA model pro Chézyho rovnici (1.35) a obdélníkové koryto.

2. Určete KWA model pro Darcyovu-Weisbachovu rovnici (1.37) a lichoběžníkové koryto.

3. Určete vlastní čísla (charakteristické rychlosti) a vlastní vektory pro model popisující proudění lichoběžníkovým kanálem, tj. (1.23).

4. Určete typ charakteristických polí, které jsou určeny vlastními čísly $\lambda_{1,2}$ pro lichoběžníkové koryto.

Klíč k příkladům k procvičení

1.
$$h_t + \left[C\sqrt{\frac{4dh}{d+2h}}S_0 + \frac{Ch}{\sqrt{4dhS_0(d+2h)^3}}\left(4dhS_0(d+2h) - 8dhS_0\right)\right] h_x = 0$$

2.
$$h_t + \sqrt{\frac{8g}{f}S_0}\,\frac{\sqrt{d+h\tan\alpha}\,(d+\frac{5}{2}h\tan\alpha)}{\sqrt[4]{1+\tan^2\alpha}\,(d+2h\tan\alpha)}h_x = 0$$

3.

$$\lambda_1 = \frac{q}{a} - \sqrt{\frac{ga}{\sqrt{d^2 + 4a\tan\alpha}}} = u - \sqrt{\frac{ga}{d + 2h\tan\alpha}}$$

$$\lambda_2 = \frac{q}{a} + \sqrt{\frac{ga}{\sqrt{d^2 + 4a\tan\alpha}}} = u + \sqrt{\frac{ga}{d + 2h\tan\alpha}}$$

$$\boldsymbol{r}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{r}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

4.

$$\nabla\lambda_1 = \left[-\frac{q}{a^2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{a}}\frac{1}{\sqrt[4]{d^2 + 4a\tan\alpha}} + \frac{\sqrt{ga}\tan\alpha}{\sqrt[4]{(d^2 + 4a\tan\alpha)^5}}, \frac{1}{a} \right]^T$$

$$\begin{aligned} (\nabla\lambda_1)^T\boldsymbol{r}_1 &= \frac{-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{a}}(d^2 + 4a\tan\alpha) + \tan\alpha\sqrt{ga}}{\sqrt[4]{(d^2 + 4a\tan\alpha)^5}} \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{a}}(d^2 + 4a\tan\alpha) \neq \tan\alpha\sqrt{ga} \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{2}d^2 \neq -5a\tan\alpha \end{aligned}$$

platí pro všechny fyzikálně relevantní stavy a, q, tedy charakteristické pole příslušející k λ_1 je ryze nelineární.

$$\nabla\lambda_2 = \left[-\frac{q}{a^2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{a}}\frac{1}{\sqrt[4]{d^2 + 4a\tan\alpha}} - \frac{\sqrt{ga}\tan\alpha}{\sqrt[4]{(d^2 + 4a\tan\alpha)^5}}, \frac{1}{a} \right]^T$$

$$
\begin{aligned}
(\nabla\lambda_2)^T \boldsymbol{r}_2 \quad &= \quad \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{a}}(d^2+4a\tan\alpha)-\tan\alpha\sqrt{ga}}{\sqrt[4]{(d^2+4a\tan\alpha)^5}} \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{a}}(d^2+4a\tan\alpha) \neq \tan\alpha\sqrt{ga} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}d^2 \neq -a\tan\alpha
\end{aligned}
$$

platí pro všechny fyzikálně relevantní stavy a, q, tedy charakteristické pole příslušející k λ_2 je ryze nelineární.

Obsah
48. strana ze 161
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka/Okno

Kapitola 2

Diferenční metody

Průvodce studiem

V této kapitole se čtenář seznámí s řadou numerických metod, které lze použít na řešení úloh založených na evolučních rovnicích hyperbolického typu. Půjde o skalární problémy i o problémy popsané soustavami rovnic. Dozví se také, jaké vlastnosti rozhodují o kvalitě metod a přesnosti získaného řešení. Dále se seznámí s konkrétními aplikacemi metod především na úlohy proudění v hydrologii. Na získaných řešeních bude moci porovnat vlastnosti jednotlivých metod.

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete schopni:

- sestavit a aplikovat několik numerických metod pro problémy proudění
- rozumět vlastnostem metod nutným pro získání korektních řešení

- rozumět rozdílům mezi jednotlivými metodami a posoudit vhodnost jejich použití na konkrétní problémy
- definovat důležité pojmy jako konzistence, konzervativita a stabilita

2.1. Skalární úlohy

Uvažujme nyní skalární případ. Stejně jako v případě vektorových funkcí (1.52), můžeme i zde sestavit počáteční nelineární úlohu

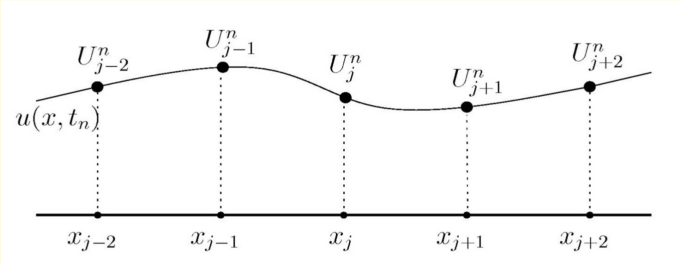
$$\begin{aligned} u_t + [f(u)]_x &= 0, \qquad t \in (0,T), x \in \mathbb{R}, T > 0, \\ u(x,0) &= u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

nebo úlohu lineární

$$\begin{aligned} u_t + a u_x &= 0, \qquad t \in (0,T), x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}, T > 0, \\ u(x,0) &= u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

kde $u = u(x,t)$ a $f \in C^2(\mathbb{R})$. Předpokládejme, že funkce u_0 má omezený nosič, tedy $\mathrm{supp}\ u_0 = \overline{\{x \in \mathbb{R} : u_0(x) \neq 0\}}$ je omezená množina.

Diferenční metody jsou založeny na tom, že si daný interval, na kterém hledáme řešení, rozdělíme na několik částí, které nazýváme subintervaly. Jednotlivé subintervaly jsou odděleny body x_j. Jsou-li všechny subintervaly stejně veliké, hovoříme o konstantním diskretizačním kroku $\Delta x = x_{j+1} - x_j$ a ekvidistantní síti. Dále si pro jednoduchost podobným způsobem zavedeme konstantní dělení časového intervalu s časovým krokem $\Delta t = t_{n+1} - t_n, n \in \mathbb{N}_0, T \geqq n\Delta t$. Budeme předpokládat, že $\frac{\Delta t}{\Delta x} =$ konst. Hodnotu přesného řešení v bodě x_j a čase t_n značíme $u_j^n = u(x_j, t_n)$, její aproximaci U_j^n. Dále definujme $\boldsymbol{U}^{(n)}$ jako vektor se složkami $U_j^n, j = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$.



Obr. 2.1 Diskretizace neznámé funkce

2.1.1. Laxova-Friedrichsova metoda

Laxova-Friedrichsova metoda je jedna z centrálních metod. Tyto metody se tak nazývají proto, že k aproximacím prostorových derivací využívají centrálních diferencí. Konkrétně u této metody aproximujeme derivaci neznámé funkce v bodě x_j v čase t_n výrazem

$$u_x(x_j,t_n) \approx \frac{1}{2\Delta x}(U^n_{j+1} - U^n_{j-1}). \tag{2.3}$$

Ve smyslu této aproximace nahrazujeme i hodnotu neznámé funkce v bodě x_j a v čase t_n výrazem

$$u(x_j,t_n) \approx \frac{1}{2}(U^n_{j-1} + U^n_{j+1}). \tag{2.4}$$

Této hodnoty využijeme při stanovení aproximace časové derivace neznámé funkce

$$u_t(x_j,t_n) \approx \frac{1}{\Delta t}\left(u(x_j,t_{n+1}) - u(x_j,t_n)\right) \approx \frac{1}{\Delta t}\left(U^{n+1}_j - \frac{1}{2}(U^n_{j-1} + U^n_{j+1})\right). \tag{2.5}$$

Dosazením aproximací (2.3) a (2.4) do diferenciální rovnice (2.2) získáme diskrétní analogii lineárního problému v následujícím tvaru

$$\frac{1}{\Delta t}\left(U_j^{n+1} - \frac{1}{2}(U_{j-1}^n + U_{j+1}^n)\right) + a\frac{1}{2\Delta x}(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) = 0, \tag{2.6}$$

ze kterého je možné jednoduchými úpravami získat závislost hodnoty neznámé funkce na nové časové vrstvě, a tedy tvar Laxovy-Friedrichsovy metody pro lineární úlohu je

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2}(U_{j-1}^n + U_{j+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}a(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n). \tag{2.7}$$

V nelineárním případě je třeba obdobným způsobem zavést aproximaci derivace tokové funkce v daném bodě, a to výrazem

$$[f(u)(x_j, t_n)]_x \approx \frac{1}{2\Delta x}(f(U_{j+1}^n) - f(U_{j-1}^n)). \tag{2.8}$$

Dosazení této aproximace a aproximací (2.3) a (2.5) do nelineární rovnice (2.1) získáme Laxovu-Friedrichsovu metodu pro řešení nelineární rovnice

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2}(U_{j-1}^n + U_{j+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(f(U_{j+1}^n) - f(U_{j-1}^n)). \tag{2.9}$$

2.1.2. Laxova-Wendroffova metoda

Ukažme si nyní také odvození Laxovy-Wendroffovy metody pro lineární a nelineární případ. Při její konstrukci využijeme více členů Taylorova rozvoje než tomu bylo u Laxovy-Friedrichsovy metody a tím docílíme vyšší přesnosti aproximace. Předpokládáme, že existují veškeré derivace, se kterými pracujeme.

V lineárním případě vyjdeme z diferenciálního zákona zachování ve tvaru

$$u_t = -au_x. \tag{2.10}$$

Na základě Taylorova rozvoje aproximujeme hodnotu $u(x_j, t_n)$ s přesností $O(\Delta t^3)$ vztahem

$$u(x_j, t_{n+1}) = u(x_j, t_n) + \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_n)\Delta t + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t_n)\frac{\Delta t^2}{2}. \tag{2.11}$$

Zderivováním vztahu (2.10) získáme následující rovnosti

$$u_{tt} = -au_{xt} = -[au_t]_x = a^2 u_{xx}. \tag{2.12}$$

Dosazením rovností (2.12) a (2.10) do vztahu (2.11) získáme

$$u(x_j, t_{n+1}) = u(x_j, t_n) - a\frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t_n)\Delta t + a^2\frac{\partial^2 u(x_j, t_n)}{\partial x^2}\frac{\Delta t^2}{2}. \tag{2.13}$$

S využitím aproximací neznámé funkce a centrálních poměrných diferencí získáme Laxovu--Wendroffovu metodu ve tvaru

$$U_j^{n+1} = U_j^n - a\frac{\Delta t}{2\Delta x}(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + \frac{a^2\Delta t^2}{2\Delta x^2}(U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n). \tag{2.14}$$

V nelineárním případě má diferenciální zákon zachování tvar

$$u_t = -[f(u)]_x. \tag{2.15}$$

Hodnotu $u(x_j, t_n)$ opět aproximujeme vztahem (2.11). Zderivováním vztahu (2.15) získáme následující rovnosti

$$u_{tt} = -[f(u)]_{xt} = -[a(u)u_t]_x = [a(u)f(u)_x]_x, \tag{2.16}$$

kde $a(u) = f'(u)$. Dosazením rovností (2.16) a (2.15) do vztahu (2.11) získáme

$$u(x_j, t_{n+1}) = u(x_j, t_n) - \frac{\partial f(u)}{\partial x}(x_j, t_n)\Delta t + \frac{\partial}{\partial x}\left(a(u(x_j, t_n))\frac{\partial f(u(x_j, t_n))}{\partial x}\right)\frac{\Delta t^2}{2}. \quad (2.17)$$

S využitím aproximací neznámé funkce a jejích poměrných diferencí získáme Laxovu-Wendroffovu metodu ve tvaru

$$\begin{aligned} U_j^{n+1} &= U_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(f(U_{j+1}^n) - f(U_{j-1}^n)) + \\ &+ \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2}(a_{j+1/2}^n(f(U_{j+1}^n) - f(U_j^n)) - a_{j-1/2}^n(f(U_j^n) - f(U_{j-1}^n)), \end{aligned} \quad (2.18)$$

kde $a_{j+1/2}^n = \frac{f(U_{j+1}^n) - f(U_j^n)}{U_{j+1}^n - U_j^n}$.

Lze však získat i jiný tvar Laxovy-Wendroffovy metody. Při něm se částečně využije dvoukrokového přístupu, kdy nestanovujeme hodnoty na časové vrstvě t_{n+1} přímo z hodnot v čase t_n, ale nejprve určíme hodnoty v mezičase $t_{n+1/2}$. V tomto mezičase navíc změníme dělení ze subintervalů $\langle x_{j-1/2}, x_{j+1/2}\rangle$ na $\langle x_j, x_{j+1}\rangle$ (Obr. 2.2). Pro získání hodnot na v čase $t_{n+1/2}$ využijeme opět centrálních diferencí přesně tak, jako v případě Laxovy-Friedrichsovy metody

$$U_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2}(U_j^n + U_{j+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(f(U_{j+1}^n) - f(U_j^n)). \quad (2.19)$$

Hodnoty $U_{j+1/2}^{n+1/2}$ využijeme pro aproximace tokových funkcí v diferenciálním zákoně zachování na původních intervalech $\langle x_{j-1/2}, x_{j+1/2}\rangle \times \langle t_n, t_{n+1}\rangle$ a získáme tak metodu druhého řádu přesnosti, která má tvar

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(f(U_{j+1/2}^{n+1/2}) - f(U_{j-1/2}^{n+1/2})\right), \quad (2.20)$$

Obsah

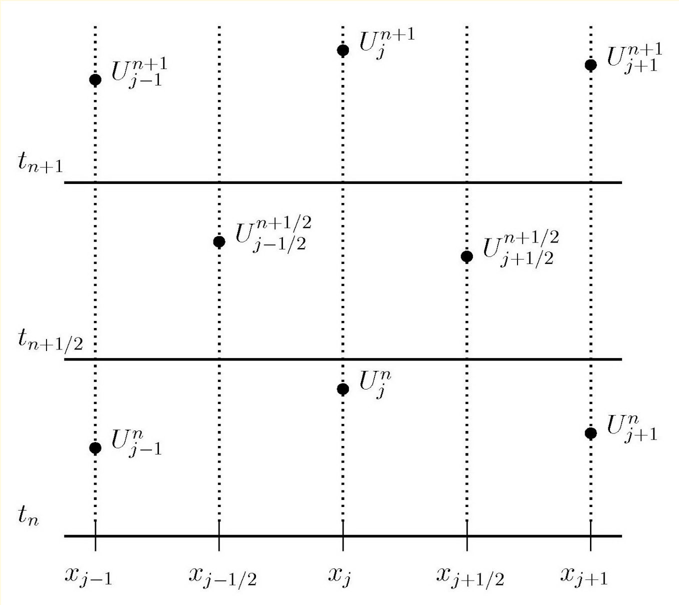
54. strana ze 161

Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

kde hodnoty $U_{j+1/2}^{n+1/2}$ jsou definovány vztahem (2.19).



Obr. 2.2 Poloviční krok Laxovy-Wendroffovy metody

2.1.3. MacCormackova metoda

MacCormackova metoda je dvoukroková metoda. Využívá pomocné hodnoty mezi časovými vrstvami t_n a t_{n+1} podobně, jako tomu bylo u Laxovy-Wendroffovy metody. Nejprve získáme pomocnou hodnotu $\tilde{U}_j^{n+1}$ využitím vztahu

$$\tilde{U}_j^{n+1} = U_j^n - a\frac{\Delta t}{\Delta x}(U_{j+1}^n - U_j^n). \tag{2.21}$$

Tuto hodnotu následně využijeme k získání nové hodnoty neznámé funkce na časové vrstvě t_{n+1} podle vztahu

$$U_j^{n+1} = \frac{U_j^n + \tilde{U}_j^{n+1}}{2} - a\frac{\Delta t}{2\Delta x}(\tilde{U}_j^{n+1} - \tilde{U}_{j-1}^{n+1}). \tag{2.22}$$

V nelineárním případě pak obdobným způsobem získáme metodu tvaru

$$U_j^{n+1} = \frac{U_j^n + \tilde{U}_j^{n+1}}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(f(\tilde{U}_j^{n+1}) - f(\tilde{U}_{j-1}^{n+1})), \tag{2.23}$$

kde

$$\tilde{U}_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(f(U_{j+1}^n) - f(U_j^n)). \tag{2.24}$$

2.1.4. Metoda typu upwind

Při řešení lineární skalární úlohy (2.2) touto metodou je důležité znaménko konstanty a, které určuje směrnici charakteristik. Jak již bylo zmíněno v kapitole 1, charakteristiky jsou v tomto případě přímky, na kterých je řešení dané úlohy konstantní. V případě, že $a < 0$, směrnice je záporná, charakteristiky směřují doleva, a proto zavedeme diskretizaci úlohy pomocí dopředných diferencí

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + a\frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{\Delta x} = 0. \tag{2.25}$$

Je to z toho důvodu, že se informace potřebné pro získání řešení na nové časové vrstvě díky směru charakteristik šíří zprava doleva. Pokud $a > 0$, situace je opačná, charakteristiky směřují doprava a my sestavíme metodu pomocí zpětné prostorové diference

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + a\frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{\Delta x} = 0. \tag{2.26}$$

Abychom mohli zapsat metodu v kompaktnější podobě, která zahrnuje obě předchozí varianty, zavedeme hodnoty

$$a^+ = \max\{a, 0\}, \qquad a^- = \min\{a, 0\}. \tag{2.27}$$

Metodu typu upwind pak můžeme napsat následovně

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[a^+(U_j^n - U_{j-1}^n) + a^-(U_{j+1}^n - U_j^n)\right]. \tag{2.28}$$

Metodu typu upwind pro nelineární skalární úlohu (2.1) můžeme psát v tzv. *divergentním tvaru*, který má následující podobu

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n). \tag{2.29}$$

Funkce $F^n_{j+1/2}$ budeme nazývat numerické toky. K tomu, abychom určili hodnoty těchto numerických toků, využijeme kvazilineárního tvaru naší úlohy. Ten získáme analogicky na základě tvaru lineární úlohy (2.2) zavedením

$$a(u) = \frac{df(u)}{du}. \tag{2.30}$$

Potom lze diferenciální rovnici v úloze (2.1) přepsat do kvazilineárního tvaru

$$u_t + a(u)u_x = 0. \tag{2.31}$$

Diskrétní podoba vztahu (2.30) na časové vrstvě t_n mezi buňkami j a $j+1$ má tvar

$$a^n_{j+1/2} = \frac{f(U^n_{j+1}) - f(U^n_j)}{U^n_{j+1} - U^n_j}, \tag{2.32}$$

kterým aproximujeme hodnotu směrnice charakteristiky procházející bodem $x^n_{j+1/2}$. Numerické toky pak volíme podobně jako v případě metody typu upwind pro lineární úlohu na základě znaménka $a^n_{j+1/2}$

$$F^n_{j+1/2} = \begin{cases} f(U^n_j), & \text{když } a^n_{j+1/2} \geqq 0, \\ f(U^n_{j+1}), & \text{když } a^n_{j+1/2} < 0. \end{cases} \tag{2.33}$$

Takto zvolený numerický tok má potom následující podobu

$$F^n_{j+1/2} = \frac{1}{2}\left[f(U^n_j) + f(U^n_{j+1})\right] - \frac{1}{2}\left|a^n_{j+1/2}\right|\left(U^n_{j+1} - U^n_j\right). \tag{2.34}$$

Dosazením hodnot numerických toků (2.34) do metody (2.29) získáme metodu typu upwind pro nelineární skalární úlohy.

Lze sestavit i jiný tvar metody, který je obdobný tvaru (2.28) použitému pro lineární úlohu. Zavedeme-li na rozhraní všech buněk

$$a_{j+1/2}^{n,+} = \max\{a_{j+1/2}^n, 0\}, \qquad a_{j+1/2}^{n,-} = \min\{a_{j+1/2}^n, 0\}, \tag{2.35}$$

získáme metodu ve tvaru

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[a_{j-1/2}^{n,+}(U_j^n - U_{j-1}^n) + a_{j+1/2}^{n,-}(U_{j+1}^n - U_j^n)\right]. \tag{2.36}$$

Je vhodné poznamenat, že rovnost (2.31) lze například aproximovat také takto

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} f'(U_j^n)(U_{j+1}^n - U_j^n). \tag{2.37}$$

Dále si však ukážeme, že aproximace pomocí numerických toků (2.34) je mnohem vhodnější.

2.1.5. Metody pro soustavy rovnic

Metody pro řešení skalárních úloh, které jsme si odvodili na začátku této kapitoly, lze s jistými úpravami použít i na řešení soustav hyperbolických rovnic, které jsme popsali v části 1.2.2. Tvary některých metod pro lineární úlohu (2.47) si zde uvedeme bez odvození, která jsou analogická ke skalárnímu případu.

- Laxova-Friedrichsova metoda

$$\boldsymbol{U}_j^{n+1} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{U}_{j-1}^n + \boldsymbol{U}_{j+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{U}_{j+1}^n - \boldsymbol{U}_{j-1}^n). \tag{2.38}$$

- Laxova-Wendroffova metoda

$$\boldsymbol{U}_j^{n+1} = \boldsymbol{U}_j^n - \boldsymbol{A}\frac{\Delta t}{2\Delta x}(\boldsymbol{U}_{j+1}^n - \boldsymbol{U}_{j-1}^n) + \boldsymbol{A}^2\frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2}(\boldsymbol{U}_{j+1}^n - 2\boldsymbol{U}_j^n + \boldsymbol{U}_{j-1}^n). \tag{2.39}$$

- MacCormackova metoda

$$\boldsymbol{U}_j^{n+1} = \frac{\boldsymbol{U}_j^n + \tilde{\boldsymbol{U}}_j^{n+1}}{2} - \boldsymbol{A}\frac{\Delta t}{2\Delta x}(\tilde{\boldsymbol{U}}_j^{n+1} - \tilde{\boldsymbol{U}}_{j-1}^{n+1}), \tag{2.40}$$

  kde

$$\tilde{\boldsymbol{U}}_j^{n+1} = \boldsymbol{U}_j^n - \boldsymbol{A}\frac{\Delta t}{\Delta x}(\boldsymbol{U}_{j+1}^n - \boldsymbol{U}_j^n). \tag{2.41}$$

V nelineárním případě mají pak tyto metody tvary

- Laxova-Friedrichsova metoda

$$\boldsymbol{U}_j^{n+1} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{U}_{j-1}^n + \boldsymbol{U}_{j+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}_{j+1}^n) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}_{j-1}^n)). \tag{2.42}$$

- Laxova-Wendroffova metoda

$$\boldsymbol{U}_j^{n+1} = \boldsymbol{U}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}_{j+1/2}^{n+1/2}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}_{j-1/2}^{n+1/2})), \tag{2.43}$$

  kde

$$\boldsymbol{U}_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{U}_j^n + \boldsymbol{U}_{j+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}_{j+1}^n) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}_j^n)). \tag{2.44}$$

- MacCormackova metoda

$$\boldsymbol{U}_j^{n+1} = \frac{\boldsymbol{U}_j^n + \tilde{\boldsymbol{U}}_j^{n+1}}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(\boldsymbol{f}(\tilde{\boldsymbol{U}}_j^{n+1}) - \boldsymbol{f}(\tilde{\boldsymbol{U}}_{j-1}^{n+1})), \tag{2.45}$$

kde

$$\tilde{\boldsymbol{U}}_j^{n+1} = \boldsymbol{U}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}_{j+1}^n) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}_j^n)). \tag{2.46}$$

Metoda typu upwind

Východiskem pro sestavení metody typu upwind pro řešení soustavy lineárních rovnic je rozklad na soustavu m nezávislých rovnic pro m nezávislých proměnných. Mějme lineární soustavu (ryze hyperbolickou) s reálnou čtvercovou maticí $\boldsymbol{A}$ a hladkou počáteční funkcí $\boldsymbol{u_0} = \boldsymbol{u_0}(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_x &= \boldsymbol{0}, \qquad x \in \mathbb{R}, t \in (0, T), \\ \boldsymbol{u}(x, 0) &= \boldsymbol{u_0}(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{2.47}$$

Předpokládáme, že matice $\boldsymbol{A}$ je diagonalizovatelná, a lze ji tedy napsat jako

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{R}^{-1}, \tag{2.48}$$

kde $\boldsymbol{R}$ je regulární matice, jejíž sloupce jsou tvořeny vlastními vektory $\boldsymbol{R}^m$ matice $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{\Lambda} = \operatorname{diag}(\lambda^1, \dots, \lambda^m)$ diagonální matice tvořena vlastními čísly matice $\boldsymbol{A}$. Soustavy tohoto typu lze rozložit na soustavy m rovnic pro m nezávislých proměnných

$$v_t^p + \lambda^p v_x^p = 0 \qquad p = 1, \dots, m, \tag{2.49}$$

kde $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{u}$. Každou z těchto rovnic lze řešit metodou typu upwind odvozenou v části 2.1.4. Ta má pro p-tou rovnici v bodě x_j tvar

$$V_j^{p,n+1} = V_j^{p,n} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\lambda^{p,+}(V_j^{p,n} - V_{j-1}^{p,n}) + \lambda^{p,-}(V_{j+1}^{p,n} - V_j^{p,n})\right], \tag{2.50}$$

kde

$$\lambda^{p,+} = \max\{\lambda^p, 0\}, \qquad \lambda^{p,-} = \min\{\lambda^p, 0\}. \tag{2.51}$$

Zavedeme-li vektor $\boldsymbol{V}_j^n$ o m složkách, které tvoří funkce $V_j^{p,n}$, můžeme tyto rovnice zapsat v maticové podobě

$$\boldsymbol{V}_j^{n+1} = \boldsymbol{V}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\boldsymbol{\Lambda}^+(\boldsymbol{V}_j^n - \boldsymbol{V}_{j-1}^n) + \boldsymbol{\Lambda}^-(\boldsymbol{V}_{j+1}^n - \boldsymbol{V}_j^n)\right], \tag{2.52}$$

kde matice $\boldsymbol{\Lambda}^+ = \mathrm{diag}(\lambda^{1,+}, \ldots, \lambda^{m,+})$ a $\boldsymbol{\Lambda}^- = \mathrm{diag}(\lambda^{1,-}, \ldots, \lambda^{m,-})$. Jelikož $\boldsymbol{V}_j^n = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{U}_j^n$, soustavu lze přepsat do tvaru

$$\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{U}_j^{n+1} = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{U}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\boldsymbol{\Lambda}^+(\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{U}_j^n - \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{U}_{j-1}^n) + \boldsymbol{\Lambda}^-(\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{U}_{j+1}^n - \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{U}_j^n)\right]. \tag{2.53}$$

Vynásobíme ji zleva maticí $\boldsymbol{R}$

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{U}_j^{n+1} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{U}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\boldsymbol{R}\boldsymbol{\Lambda}^+\boldsymbol{R}^{-1}(\boldsymbol{U}_j^n - \boldsymbol{U}_{j-1}^n) + \boldsymbol{R}\boldsymbol{\Lambda}^-\boldsymbol{R}^{-1}(\boldsymbol{U}_{j+1}^n - \boldsymbol{U}_j^n)\right] \tag{2.54}$$

a tím získáme metodu typu upwind pro řešení lineární soustavy rovnic tvaru

$$\boldsymbol{U}_j^{n+1} = \boldsymbol{U}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\boldsymbol{A}^+(\boldsymbol{U}_j^n - \boldsymbol{U}_{j-1}^n) + \boldsymbol{A}^-(\boldsymbol{U}_{j+1}^n - \boldsymbol{U}_j^n)\right], \tag{2.55}$$

kde $\boldsymbol{A}^{+} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{\Lambda}^{+}\boldsymbol{R}^{-1}$ a $\boldsymbol{A}^{-} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{\Lambda}^{-}\boldsymbol{R}^{-1}$.

Metodu typu upwind lze pochopitelně zkonstruovat i pro řešení nelineárních soustav rovnic. Tvar je opět maticovou obdobou metody pro řešení nelineární skalární rovnice sestavené v části 2.1.4. Nelineární úlohy mají tvar

$$\begin{aligned} \boldsymbol{U}_t + [\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U})]_x &= \boldsymbol{0}, \qquad x \in \mathbb{R}, t \in (0,T) \\ \boldsymbol{U}(x,0) &= \boldsymbol{u_0}(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{2.56}$$

který lze upravit na

$$\begin{aligned} \boldsymbol{U}_t + \boldsymbol{A}(\boldsymbol{U})\boldsymbol{U}_x &= \boldsymbol{0}, \qquad x \in \mathbb{R}, t \in (0,T) \\ \boldsymbol{U}(x,0) &= \boldsymbol{u_0}(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{2.57}$$

kde $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{U}) = \boldsymbol{F}'(\boldsymbol{U})$ je Jacobiho matice vektorové funkce $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U})$. Tvar metody typu upwind je potom

$$\boldsymbol{U}_j^{n+1} = \boldsymbol{U}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\boldsymbol{F}_{j+1/2}^n - \boldsymbol{F}_{j-1/2}^n). \tag{2.58}$$

Numerické toky jsou definovány vztahy

$$\boldsymbol{F}_{j+1/2}^n = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}_j^n) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}_{j+1}^n)\right] - \frac{1}{2}\left|\boldsymbol{A}_{j+1/2}^n\right|\left(\boldsymbol{U}_{j+1}^n - \boldsymbol{U}_j^n\right), \tag{2.59}$$

kde matice $\boldsymbol{A}_{j+1/2}^n$ je nějaká vhodná aproximace matice $|\boldsymbol{A}| = \boldsymbol{R}|\boldsymbol{\Lambda}^{+}|\boldsymbol{R}^{-1}$ v čase t_n mezi buňkami j a $j+1$. Některé volby těchto matic budou uvedeny později.

2.1.6. Vlastnosti metod

Dosud jsme konstruovali nejrůznější numerické metody, aniž bychom se příliš zajímali o to, zda jsou vhodné pro řešení našich úloh a zda vůbec „fungují“. V této části si popíšeme několik základních vlastností, které by „fungující“ metody měly splňovat.

Obsah
63. strana ze 161
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka/Okno

Budeme zde pracovat s pojmy konvergence, konzistence a stabilita, které si nyní přiblížíme. Pod pojmem konvergence přibližného řešení k přesnému řešení úlohy míníme takovou vlastnost, kdy získané řešení danou metodou lze libovolně zpřesňovat (tedy přibližovat k přesnému řešení) tím, že zmenšujeme velikost časového kroku. V limitním případě $\Delta t \to 0$ (a tedy i $\Delta x \to 0$, neboť stále předpokládáme, že $\frac{\Delta t}{\Delta x} = \text{konst.}$) pak získáme přesné řešení. Konzistencí metody s danou diferenciální rovnicí míníme vlastnost, kdy příslušné diferenční schéma je v limitním případě $\Delta t \to 0$ shodné s danou diferenciální rovnicí. Stabilita metody pak zajišťuje, že chyby, kterými jsou zatížena vstupní data metody, zůstávají během výpočtu omezené.

V této části uvedeme definice některých základních pojmů z teorie diferenčních metod pro řešení skalárních úloh. Připomeňme, že uvažujeme $\frac{\Delta t}{\Delta x} = \text{konst.}$ Explicitní diferenční formule metod lze potom zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{U}^{(n+1)} = \boldsymbol{\mathcal{H}}(\boldsymbol{U}^{(n)}), \tag{2.60}$$

kde $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ je operátor přechodu z časové vrstvy n na vrstvu $n+1$. Lineární diferenční schéma pak lze psát ve tvaru

$$\boldsymbol{U}^{(n+1)} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{U}^{(n)}, \tag{2.61}$$

kde $\boldsymbol{H}$ je lineární operátor . Nyní uvažujme případ hladkých řešení.

Definice 2.1. *Lokální diskretizační chybu* $\boldsymbol{L}^{(n)}$ metody (2.60) definujeme předpisem

$$\boldsymbol{L}^{(n)} = \frac{1}{\Delta t}\left[\boldsymbol{U}^{(n+1)} - \mathcal{H}\boldsymbol{U}^{(n)}\right], \tag{2.62}$$

kde $\boldsymbol{U}^{(n)}$ je posloupnost o členech $u_j^n = u(x_j, t_n)$.

Definice 2.2. *Globální diskretizační chybu* $E(x_j, t_n)$ (budeme ji značit E_j^n) metody (2.60) v bodě x_j a čase t_n definujeme předpisem

$$E_j^n = U_j^n - u(x_j, t_n). \tag{2.63}$$

Definice 2.3. Diferenční formule se nazývá *konzistentní* s příslušnou aproximovanou rovnicí, jestliže pro všechna j a n taková, že $T \geqq n\Delta t$ platí

$$L_j^n \to 0 \text{ pro } \Delta t \to 0. \tag{2.64}$$

Pro příklad dosaďme do Laxovy-Friedrichsovy metody (2.7) hodnoty přesného řešení $u(x,t)$. Lokální diskretizační chyba je pak podle definice 2.1 určena vztahem

$$L_j^n = \frac{1}{\Delta t}\left[u_j^{n+1} - \frac{1}{2}\left(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n\right) + \frac{\Delta t}{2\Delta x} a \left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right)\right]. \tag{2.65}$$

Zajímá nás limitní případ, kdy $\Delta t \to 0$. Potom i $\Delta x \to 0$. V případě klasického řešení platí

$$\frac{1}{2}\left(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n\right) \to u_j^n \tag{2.66}$$

a lokální diskretizační chyba je tedy

$$\lim_{\Delta t\to 0} L_j^n = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \lim_{\Delta x\to 0} \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = (u_j)_t + a(u_j)_x = 0. \tag{2.67}$$

Metoda je tedy konzistentní s rovnicí (2.2).

Definice 2.4. Největší přirozené číslo p, pro které existuje konstanta $C_L > 0$ taková, že pro všechna j a n taková, že $T \geqq n\Delta t$ platí

$$L_j^n \leqq C_L(\Delta t)^p \text{ pro } \Delta t \to 0, \tag{2.68}$$

se nazývá *řád konzistence.*

Mějme opět Laxovu-Friedrichsovu metodu (2.7). Využijeme Taylorova rozvoje druhého řádu členů u_j^{n+1}, u_{j-1}^n a u_{j+1}^n

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n + \Delta t u_t + \frac{(\Delta t)^2}{2} u_{tt}(\xi_1), \\ u_{j-1}^n &= u_j^n - \Delta x u_x + \frac{(\Delta x)^2}{2} u_{xx}(\xi_2), \\ u_{j+1}^n &= u_j^n + \Delta x u_x + \frac{(\Delta x)^2}{2} u_{xx}(\xi_3), \end{aligned}$$

kde ξ_1, ξ_2 a ξ_3 jsou body z příslušných okolí x_j, x_{j-1} a x_{j+1}. Tyto rozvoje dosadíme do vztahu pro lokální diskretizační chybu (2.65). Dále využijeme toho, že $u_t + au_x = 0$, a tedy $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ (viz (2.12)). Lokální diskretizační chyba má potom tvar

$$L_j^n = \frac{1}{\Delta t}\left[\frac{a^2(\Delta t)^2}{2} u_{xx}(\xi_1) - \frac{(\Delta x)^2}{4}(u_{xx}(\xi_2) + u_{xx}(\xi_3)) + \frac{(\Delta x)^2}{2}(u_{xx}(\xi_2) - u_{xx}(\xi_3))\right]. \tag{2.69}$$

Metoda je tedy prvního řádu konzistence ($p = 1$) neboť platí

$$\frac{a^2\Delta t}{2} u_{xx}(\xi_1) - \frac{(\Delta x)^2}{4\Delta t}(u_{xx}(\xi_2) + u_{xx}(\xi_3)) + \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t}(u_{xx}(\xi_2) - u_{xx}(\xi_3)) \leqq C_L \Delta t \tag{2.70}$$

tedy

$$\frac{a^2}{2}u_{xx}(\xi_1) - \frac{(\Delta x)^2}{4(\Delta t)^2}(u_{xx}(\xi_2) + u_{xx}(\xi_3)) + \frac{(\Delta x)^2}{2(\Delta t)^2}(u_{xx}(\xi_2) - u_{xx}(\xi_3)) \leqq C_L \tag{2.71}$$

za předpokladu, že $\frac{(\Delta x)^2}{(\Delta t)^2} = $ konst. a u_{xx} je ve všech bodech omezená.

Definice 2.5. Metoda určená formulí (2.60) je *konvergentní,* jestliže pro všechna j a n taková, že $T \geqq n\Delta t$, platí

$$E_j^n \to 0 \text{ pro } \Delta t \to 0. \tag{2.72}$$

Definice 2.6. Řekneme, že lineární metoda (2.61) je *lineárně stabilní,* je-li posloupnost $\{\|\boldsymbol{H}^n\|\}$ omezená, tzn. pro každé T existuje číslo $C_S > 0$ takové, že platí

$$\|\boldsymbol{H}^n\| \leqq C_S \tag{2.73}$$

pro všechna n taková, že $n\Delta t \leqq T$.

Poznámka 2.7. Dalo by se říci, že stabilní metoda je taková, která zabraňuje tomu, aby se chyby ve vstupních datech příliš zvětšovaly. Máme-li například přesná data $\boldsymbol{V}$ a data zatížená chybou $\tilde{\boldsymbol{V}}$, pak velikost této chyby (označme ji e) definujeme například

$$\mathrm{e} = \|\boldsymbol{V} - \tilde{\boldsymbol{V}}\|. \tag{2.74}$$

Chceme-li, aby tato chyba se během výpočtu nezvětšovala, musí platit

$$\|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{V}) - \boldsymbol{H}(\tilde{\boldsymbol{V}})\| \leqq \|\boldsymbol{V} - \tilde{\boldsymbol{V}}\|. \tag{2.75}$$

Obsah
67. strana ze 161
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka/Okno

Tento požadavek lze použít i obecně, tedy i pro nelineární případy. V lineárním případě navíc platí

$$\|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{V})-\boldsymbol{H}(\tilde{\boldsymbol{V}})\| = \|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{V}-\tilde{\boldsymbol{V}})\| \leqq \|\boldsymbol{H}\|\|\boldsymbol{V}-\tilde{\boldsymbol{V}}\|. \tag{2.76}$$

Velikost chyby tedy zůstane omezená, pokud $\|\boldsymbol{H}\| \leqq 1$. Jelikož úlohu řešíme po časových krocích Δt, pro hodnotu řešení v čase $t_n = n\Delta t$ platí

$$\|\boldsymbol{V}^n-\tilde{\boldsymbol{V}}^n\| = \|\boldsymbol{H}^n(\boldsymbol{V}^n-\tilde{\boldsymbol{V}}^n)\| = \|\boldsymbol{H}\|^n\|\boldsymbol{V}-\tilde{\boldsymbol{V}}\| \leqq \|\boldsymbol{V}-\tilde{\boldsymbol{V}}\|. \tag{2.77}$$

Platí $\|\boldsymbol{H}^n\| \leqq \|\boldsymbol{H}\|^n \leqq 1$ a chyba ve vstupních datech se nebude časem zvětšovat. Lze ukázat, že je možné také uvažovat splnění následující nerovnosti

$$\|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{V})-\boldsymbol{H}(\tilde{\boldsymbol{V}})\| \leqq (1+\alpha\Delta t)\|\boldsymbol{V}-\tilde{\boldsymbol{V}}\|, \tag{2.78}$$

pro nějaké $\alpha > 0$. Při této volbě má pak konstanta C_S uvedená v definici 2.6 tvar

$$C_S = \mathrm{e}^{\alpha T}. \tag{2.79}$$

Poznámka 2.8. Použitá maticová norma je indukovaná zvolenou vektorovou normou a to tak, že pro matici $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m,m}$ je definovaná vztahem

$$\|\boldsymbol{A}\| = \sup_{\boldsymbol{v}\neq 0} \frac{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|}, \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^m. \tag{2.80}$$

Je možné použít například obvyklou Eukleidovskou normu $||\cdot||_2$ nebo normu $||\cdot||_{2,\Delta x}$ definovanou

$$||\boldsymbol{U}||_{2,\Delta x} = \sqrt{\sum_{j=-\infty}^{\infty} (u_j)^2 \Delta x}. \tag{2.81}$$

Pracovat s vektorovými a maticovými normami je možné, neboť funkce $u_0(x)$ má omezený nosič a vzhledem k tomu, že se hodnoty funkce $u(x,t)$ šíří po charakteristikách, kterými jsou přímky s kladnou směrnicí, existují $x_{\min}, x_{\max} \in \mathbb{R}$ takové, že hodnoty $u(x,t)$ jsou nulové pro $x \notin \langle x_{\min}, x_{\max} \rangle$.

O konvergenci lineární metody hovoří následující věta, jejíž důkaz je možné nalézt např. v [1].

Věta 2.9 (Laxova). Nechť lineární metoda (2.61) je konzistentní. Tato metoda je konvergentní právě tehdy, když je stabilní.

Jako příklad si vezměme metodu typu upwind

$$U_j^{n+1} = U_j^n - a\frac{\Delta t}{\Delta x}(U_{j+1}^n - U_j^n) \tag{2.82}$$

pro lineární rovnici (2.2), kde je konstanta $a < 0$. Ukažme si pro tuto metodu odvození podmínky stability. Z (2.82) plyne

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |U_j^{n+1}|^2 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |(1 + a\frac{\Delta t}{\Delta x})U_j^n - a\frac{\Delta t}{\Delta x}U_{j+1}^n|^2 \leqq$$

$$\leqq \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[(1 + a\frac{\Delta t}{\Delta x})^2 |U_j^n|^2 + 2|1 + a\frac{\Delta t}{\Delta x}||a\frac{\Delta t}{\Delta x}||U_j^n||U_{j+1}^n| + |a\frac{\Delta t}{\Delta x}|^2 |U_{j+1}^n|^2 \right] \leqq$$

$$\leqq \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[(1 + a\frac{\Delta t}{\Delta x})^2 |U_j^n|^2 + |1 + a\frac{\Delta t}{\Delta x}||a\frac{\Delta t}{\Delta x}| \left(|U_j^n|^2 + |U_{j+1}^n|^2 \right) + |a\frac{\Delta t}{\Delta x}|^2 |U_{j+1}^n|^2 \right] \leqq$$

$$\leqq \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[(1 + a\frac{\Delta t}{\Delta x})^2 + 2|1 + a\frac{\Delta t}{\Delta x}||a\frac{\Delta t}{\Delta x}| + |a\frac{\Delta t}{\Delta x}|^2 \right] |U_j^n|^2.$$

Po odmocnění a přenásobení diskretizačním krokem Δx tedy platí

$$||U^{n+1}||_{2,\Delta x} \leqq \left[|1 + a\frac{\Delta t}{\Delta x}| + |a\frac{\Delta t}{\Delta x}| \right] ||U^n||_{2,\Delta x},$$

$$||U^{n+1}||_{2,\Delta x} \leqq \left[|1 + a\frac{\Delta t}{\Delta x}| + |a\frac{\Delta t}{\Delta x}| \right]^{n+1} ||U^0||_{2,\Delta x}.$$

Pro

$$-1 \leqq a\frac{\Delta t}{\Delta x} \leqq 0, \qquad a < 0 \tag{2.83}$$

platí

$$|1 + a\frac{\Delta t}{\Delta x}| + |a\frac{\Delta t}{\Delta x}| = 1 + a\frac{\Delta t}{\Delta x} - a\frac{\Delta t}{\Delta x} = 1.$$

Metoda je tedy stabilní za předpokladů (2.83).

Obdobnou podmínku stability získáme i pro Laxovu-Friedrichsovu metodu, která má pro lineární skalární úlohu (2.2) tvar

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2}(U_{j-1}^n + U_{j+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} a(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n). \tag{2.84}$$

Pro názornost použijeme jiného postupu než v případě metody typu upwind. Laxovu-Friedrichsovu metodu pro řešení na celém intervalu přepíšeme do maticového tvaru $\boldsymbol{U}^{n+1} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{U}^n$

$$\begin{bmatrix} U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ U_3^{n+1} \\ \vdots \\ U_{N-1}^{n+1} \\ U_N^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_L & 0 & c_R & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_L & 0 & c_R & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & c_L & 0 & c_R \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^n \\ U_2^n \\ U_3^n \\ \vdots \\ U_{N-1}^n \\ U_N^n \end{bmatrix}, \tag{2.85}$$

kde $c_L = \frac{1}{2} + \frac{a\Delta t}{2\Delta x}$ a $c_R = \frac{1}{2} - \frac{a\Delta t}{2\Delta x}$. Na krajích intervalu jsou hodnoty položeny rovny nule. Zvolená maticová norma $\|.\|_1$, která je rovna maximální hodnotě řádkového součtu $\|\boldsymbol{H}\|_1 = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{N} |h_{ij}|$, je

$$\|\boldsymbol{H}\|_1 = \left|\frac{1}{2} + \frac{a\Delta t}{2\Delta x}\right| + \left|\frac{1}{2} - \frac{a\Delta t}{2\Delta x}\right| \leqq 1 \Leftrightarrow \left|\frac{a\Delta t}{2\Delta x}\right| \leqq \frac{1}{2}. \tag{2.86}$$

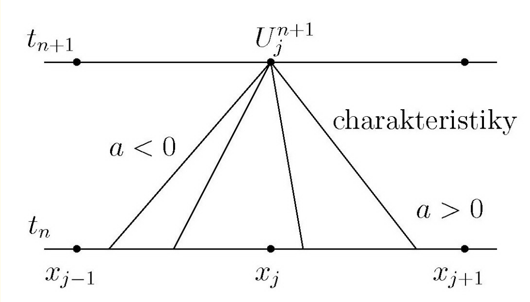
Metoda je tedy stabilní za podmínky

$$|a|\frac{\Delta t}{\Delta x} \leqq 1. \tag{2.87}$$

Poznámka 2.10. Pro konkrétní metodu a úlohu (2.2) nebo (2.1) často vyjadřujeme důsledek podmínky stability (2.73) ve tvaru

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leqq \text{konst.} \tag{2.88}$$

Hovoříme pak o *Courantově-Friedrichsově-Lewyho (CFL) podmínce.* Pro názornost si ukažme geometrickou interpretaci CFL podmínky na lineární rovnici $u_t + au_x = 0$. Ta má tvar (2.87). Řešení je v tomto případě konstantní na charakteristikách, které mají směrnici $\frac{1}{a}$. CFL podmínka pak zaručuje přenos řešení z místa mezi „správnými“ uzly (viz Obr.2.3).



Obr. 2.3 Geometrická interpretace CFL podmínky

V tabulce 2.1 jsou uvedena schémata některých metod a jim odpovídající podmínky stability.

V případě nelineární úlohy (2.1) jsou charakteristiky přímky, pro něž platí rovnost $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f'(u)$, nejsou tedy rovnoběžné. Hodnota konkrétní směrnice je závislá na funkci u. Délku časového kroku je tedy třeba volit s ohledem na hodnotu řešení na celém intervalu, proto ji vyjadřujeme ve tvaru

$$\max_j |f'(U_j^n)| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leqq 1. \tag{2.89}$$

Název metody	Diferenční schéma	pro	Podmínka stability
jednostranná L	$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} a(U_j^n - U_{j-1}^n)$	$a > 0$	$a\frac{\Delta t}{\Delta x} \leqq 1$
jednostranná R	$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} a(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n)$	$a < 0$	$-a\frac{\Delta t}{\Delta x} \leqq 1$
Laxova-Friedrichsova	$U_j^{n+1} = \frac{1}{2}(U_{j-1}^n + U_{j+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} a(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n)$	$a \in \mathbb{R}$	$\lvert a\rvert\frac{\Delta t}{\Delta x} \leqq 1$
Laxova-Wendroffova	$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} a(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} a^2(U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n)$	$a \in \mathbb{R}$	$\lvert a\rvert\frac{\Delta t}{\Delta x} \leqq 1$

Tab. 2.1 Podmínky stability pro rovnici $u_t + au_x = 0$

Vezměme si opět Laxovu-Friedrichsovu metodu a ukažme, že při splnění podmínky (2.89) je stabilní. Mějme dvě řešení nelineární úlohy (2.1) V a $\tilde{V}$, tedy platí

$$V_j^{n+1} = \frac{1}{2}(V_{j-1}^n + V_{j+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(f(V_{j+1}^n) - f(V_{j-1}^n)) \tag{2.90}$$

a

$$\tilde{V}_j^{n+1} = \frac{1}{2}(\tilde{V}_{j-1}^n + \tilde{V}_{j+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(f(\tilde{V}_{j+1}^n) - f(\tilde{V}_{j-1}^n)). \tag{2.91}$$

Zaveďme si $W_j^n = V_j^n - \tilde{V}_j^n$ pro rozdíl obou řešení. Odečtením vztahu (2.91) od vztahu (2.90) získáme

$$W_j^{n+1} = \frac{1}{2}(W_{j-1}^n + W_{j+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left[\left(f(V_{j+1}^n) - f(\tilde{V}_{j+1}^n)\right) - \left(f(V_{j-1}^n) - f(\tilde{V}_{j-1}^n)\right)\right]. \tag{2.92}$$

Je-li f hladká konvexní funkce, potom pro nějaké $\xi_j^n \in \langle V_j^n, \tilde{V}_j^n \rangle$ platí

$$f(V_j^n) - f(\tilde{V}_j^n) = f'(\xi_j^n)(V_j^n - \tilde{V}_j^n) = f'(\xi_j^n) W_j^n. \tag{2.93}$$

Využitím tohoto vztahu můžeme rovnost (2.92) přepsat do tvaru

$$W_j^{n+1} = \left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} f'(\xi_{j+1}^n) \right) W_{j+1}^n + \left(\frac{1}{2} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} f'(\xi_{j-1}^n) \right) W_{j-1}^n. \tag{2.94}$$

Při předpokládaném splnění podmínky (2.89) (připomeňme, že funkce $f(u)$ je konvexní, tedy funkce $f'(u)$ je monotónní, a proto splnění podmínky (2.89) v uzlových bodech x_j zaručuje, že $\frac{\Delta t}{2\Delta x} f'(\xi_{j+1}^n) \leqq \frac{1}{2}$) jsou obě závorky v (2.94) nezáporné. Proto platí

$$|W_j^{n+1}| \leqq \left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} f'(\xi_{j+1}^n) \right) |W_{j+1}^n| + \left(\frac{1}{2} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} f'(\xi_{j-1}^n) \right) |W_{j-1}^n|. \tag{2.95}$$

Sečteme-li tyto vztahy přes všechny uzly j, dostáváme

$$\begin{aligned} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |W_j^{n+1}| \leqq \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |W_{j+1}^n| + \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |W_{j-1}^n| - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \sum_{j=-\infty}^{\infty} f'(\xi_{j+1}^n)|W_{j+1}^n| \quad + \\ + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \sum_{j=-\infty}^{\infty} f'(\xi_{j-1}^n)|W_{j-1}^n|. \end{aligned} \tag{2.96}$$

Vzhledem k tomu, že v krajních uzlech předpokládáme nulové hodnoty neznámých funkcí, poslední dva součty vztahu (2.96) se vzájemně vynulují a docházíme ke vztahu

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |W_j^{n+1}| \leqq \sum_{j=-\infty}^{\infty} |W_j^n| \qquad \text{neboli} \qquad \|\boldsymbol{V}^{n+1} - \tilde{\boldsymbol{V}}^{n+1}\|_1 \leqq \|\boldsymbol{V}^n - \tilde{\boldsymbol{V}}^n\|_1. \tag{2.97}$$

Laxova-Friedrichsova metoda je tedy stabilní.

Při řešení soustav lineárních rovnic vychází odvození podmínky stability z rozkladu na soustavu nezávislých rovnic (2.49). Řešení jednotlivých rovnic se šíří po charakteristikách o směrnicích $\frac{1}{\lambda^p}$. Pro stabilitu celé soustavy je tedy nutné zvolit časový krok, který je stabilní pro každou z rovnic. Docházíme tak k podmínce

$$\max_p |\lambda^p| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leqq 1. \tag{2.98}$$

V nelineárním případě vyházíme ze soustavy (2.57) a na základě analogie k (2.98 vyjadřujeme tuto podmínku tvarem

$$\max_p |\lambda^p(u)| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leqq 1, \tag{2.99}$$

kde $\lambda^p(u)$ jsou vlastní čísla matice $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u})$.

Konzervativita

Dalším pojmem, který si zde vysvětlíme, je konzervativita. Ta znamená, že veškeré změny celkové bilance neznámé funkce jsou v dané oblasti způsobeny pouze rozdílem vstupního a výstupního toku. V dané oblasti se tedy nic neztrácí ani nic nevzniká (stejně jako je tomu u popisovaného fyzikálního děje). Řešení našich úloh (2.1) a (2.2) tuto vlastnost splňují. Proto je vhodné na řešení těchto úloh použít konzervativní metody.

Definice 2.11. Řekneme, že metoda je *konzervativní*, jestliže pro aproximaci neznámé funkce platí

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} U_j^{n+1} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} U_j^n. \tag{2.100}$$

Předpokládáme, že $\lim_{j\to-\infty} U_j = 0$ a $\lim_{j\to\infty} U_j = 0$.

Ukažme si nyní, že metody, které lze zapsat v divergentním tvaru jsou konzervativní. Pro řešení v bodě x_j platí

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n). \tag{2.101}$$

Sečtením těchto rovností přes všechny uzly s indexy j získáme

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} U_j^{n+1} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n). \tag{2.102}$$

Protože $F_{j+1/2}^n = F_{(j+1)-1/2}^n$, toky uvnitř intervalu se vzájemně odečtou a pro dostatečně velké indexy $|j|$ předpokládáme nulové hodnoty neznámé funkce a tedy i toků. Celková bilance neznámé funkce tak zůstane zachována

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} U_j^{n+1} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} U_j^n. \tag{2.103}$$

Metody v divergentním tvaru se proto často označují jako metody v konzervativním tvaru.

Obsah

76. strana ze 161

Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Pro řešení úloh, ve kterých se vyskytují veličiny, které z fyzikálního hlediska nemohou nabývat záporných hodnot (např. hloubka vody), je vhodné použití metod, které zaručí nezápornost daných aproximací. Takové vlastnosti se říká pozitivní semidefinitnost.

Definice 2.12. Řekneme, že daná metoda je *pozitivně semidefinitní*, jestliže platí

$$(\boldsymbol{U}^n \geqq \boldsymbol{0}) \Longrightarrow (\boldsymbol{U}^{n+1} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{U}^n) \geqq \boldsymbol{0}). \tag{2.104}$$

Jako příklad si vezměme Laxovu-Friedrichsovu metodu a ukažme, že je konzervativní a pozitivně semidefinitní. Řešení v čase t_{n+1} v bodě x_j má hodnotu

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_{j-1}^n + U_{j+1}^n\right) - a\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n\right). \tag{2.105}$$

Konzervativitu ukážeme tak, že rovnosti (2.105) sečteme přes všechny uzly

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} U_j^{n+1} = \frac{1}{2}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left(U_{j-1}^n + U_{j+1}^n\right) - a\frac{\Delta t}{2\Delta x}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n\right). \tag{2.106}$$

Opět je zřejmé, že za předpokladu $\lim\limits_{j\to-\infty} U_j = 0$ a $\lim\limits_{j\to\infty} U_j = 0$ platí

$$\frac{1}{2}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left(U_{j-1}^n + U_{j+1}^n\right) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} U_j^n, \qquad \sum_{j=-\infty}^{\infty}\left(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n\right) = 0 \tag{2.107}$$

a podmínka konzervativity $\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} U_j^{n+1} = \sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} U_j^n$ je splněna.

Obsah
77. strana ze 161
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka/Okno

Pro prokázání pozitivní semidefinitnosti předpokládáme, že $U^n_{j-1} \geqq 0$, $U^n_{j+1} \geqq 0$ a platí CFL podmínka $|a|\frac{\Delta t}{\Delta x} \leqq 1$. Metodu lze snadno přepsat do tvaru

$$U^{n+1}_j = U^n_{j-1}\left(\frac{1}{2} + a\frac{\Delta t}{2\Delta x}\right) + U^n_{j+1}\left(\frac{1}{2} - a\frac{\Delta t}{2\Delta x}\right). \tag{2.108}$$

Pokud je $a > 0$ potom

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + a\frac{\Delta t}{2\Delta x} &> \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2} - a\frac{\Delta t}{2\Delta x} &\geqq \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0. \end{aligned} \tag{2.109}$$

Pokud je $a < 0$ potom

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + a\frac{\Delta t}{2\Delta x} &\geqq \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0, \\ \frac{1}{2} - a\frac{\Delta t}{2\Delta x} &> \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{2.110}$$

V obou případech jsou obě závorky ve vztahu (2.108) nezáporné, a proto platí, že $U^{n+1}_j \geqq 0$. Laxova-Friedrichsova metoda je tedy pozitivně semidefinitní.

2.1.7. Lokální Laxova-Friedrichsova metoda

Centrální metody jsou, jak uvidíme, obecně zatíženy velkou numerickou difúzí. Difúze je jev, který se projevuje například při šíření tepla, kdy se teplo šíří z míst s větší teplotou do míst s menší teplotou. Obecně dochází k vyrovnávání rozdílů v hodnotách sledovaných veličin. Přesné řešení našich úloh však žádnou difúzi neobsahuje, a je tedy vhodné tento nežádoucí jev potlačit. Jako příklad si opět vezměme Laxovu-Friedrichsovu metodu pro nelineární skalární rovnici (2.9), kterou lze zapsat také v divergentním tvaru

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n\right], \tag{2.111}$$

kde

$$F_{j+1/2}^n = \frac{1}{2}\left[f(U_{j+1}^n) + f(U_j^n)\right] - a\frac{1}{2}(U_{j+1}^n - U_j^n), \qquad a = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \tag{2.112}$$

Přestože je tato metoda konstruována pro řešení zákona zachování $u_t + [f(u)]_x = 0$, lze ukázat, že přesněji aproximuje bilanční vztah

$$u_t + [f(u)]_x = Du_{xx}, \tag{2.113}$$

kde D je difúzní koeficient. Přepíšeme-li Laxovu-Friedrichsovu metodu s numerickým tokem (2.112), získáme

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + \frac{f(U_{j+1}^n) - f(U_{j-1}^n)}{2\Delta x} = a\frac{\Delta x}{2}\frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j+1}^n}{(\Delta x)^2}. \tag{2.114}$$

V této aproximaci tak difúznímu koeficientu odpovídá člen $D \approx \frac{a}{2}\Delta x = \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t}$. Abychom numerickou difúzi snížili, zavedeme lokálně závislý parametr

$$a_{j+1/2}^n = \max(|f'(u)|), \qquad \forall u \in \langle U_j^n, U_{j+1}^n\rangle. \tag{2.115}$$

V případě konvexní funkce f je

$$a_{j+1/2}^n = \max\{|f'(U_j^n)|, |f'(U_{j+1}^n)|\}. \tag{2.116}$$

Takto zavedený parametr skutečně snižuje numerickou difúzi metody, neboť při splnění nutné podmínky stability $|f'(u)|\frac{\Delta t}{\Delta x} \leqq 1$ pro všechny hodnoty funkce u platí

$$|f'(u)| \leqq \frac{\Delta x}{\Delta t} = a. \tag{2.117}$$

Pro lokální Laxovu-Friedrichsovu metodu v divergentním tvaru se tedy používají numerické toky ve tvaru

$$F^n_{j+1/2} = \frac{1}{2}\left[f(U^n_{j+1}) - f(U^n_{j-1}) - a^n_{j+1/2}(U^n_{j+1} - U^n_j)\right]. \tag{2.118}$$

Poznámka 2.13. Všimněme si ještě, že takto zvolený numerický tok je jakýmsi přechodem mezi numerickými toky centrální metody a metodou typu upwind popsané v části 2.1.4, u které je vliv numerické difúze nejmenší. To je zřejmé z tvaru tokové funkce, který u metody typu upwind je

$$F^n_{j+1/2} = \frac{1}{2}\left[f(U^n_j) + f(U^n_{j+1})\right] - \frac{1}{2}\left|a^n_{j+1/2}\right|\left(U^n_{j+1} - U^n_j\right), \tag{2.119}$$

kde

$$a^n_{j+1/2} = \frac{f(U^n_{j+1}) - f(U^n_j)}{U^n_{j+1} - U^n_j}. \tag{2.120}$$

Numerická difúze zde nemůže být větší než u lokální Laxovy-Friedrichsovy metody, kde je parametr $a^n_{j+1/2}$ volen jako maximální hodnota podílu (2.120) na daném intervalu.

Poznámka 2.14. Abychom se zcela zbavili vlivu numerické difúze, použili bychom numerický tok (2.112) s volbou $a = 0$. Taková metoda je však nestabilní a ukazuje se, že určité množství numerické difúze je potřebné k zajištění stability metody.

V případě nelineární soustavy diferenciálních rovnic o m rovnicích je třeba podobně jako u metody typu upwind využít ke konstrukci lokální Laxovy-Friedrichsovy metody aproximace Jacobiho matice soustavy a jejích vlastních čísel a vlastních vektorů. Numerický tok je definován

$$\boldsymbol{F}^n_{j+1/2} = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}^n_j) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}^n_{j+1})\right] - \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{m} a^{n,p}_{j+1/2}\alpha^p_{j+1/2}\boldsymbol{r}^p_{j+1/2}, \tag{2.121}$$

kde je využito rozkladu skoku v neznámé funkci

$$\boldsymbol{U}^n_{j+1} - \boldsymbol{U}^n_j = \sum_{r=1}^{m} \alpha^p_{j+1/2}\boldsymbol{r}^p_{j+1/2} \tag{2.122}$$

a

$$a^{n,p}_{j+1/2} = \max\{|\lambda^{n,p}_j|, |\lambda^{n,p}_{j+1}|\}. \tag{2.123}$$

Další variantou metody je použití numerického toku (2.119) s volbou

$$a^n_{j+1/2} = \max\{\max_p\{|\lambda^{n,p}_j|, |\lambda^{n,p}_{j+1}|\}\}, \tag{2.124}$$

jejíž obdoba bude podrobněji popsána při konstrukci metody typu central-upwind v části 3.5.1. Podrobnosti o těchto rozkladech je možné nalézt například v [1].

2.2. Úlohy s pravou stranou

Dosud jsme se v této kapitole věnovali homogenním úlohám, tedy takovým, které mají nulovou pravou stranou. Nyní si stručně popišme způsoby, jakými lze modifikovat použité

Obsah
81. strana ze 161
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka/Okno

metody na nehomogenní úlohy. Jako příklad si vezměme skalární úlohu se zdrojovou funkcí ψ

$$\begin{aligned} u_t + a u_x &= \psi(u,x), \qquad t \in (0,T), x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}, T > 0, \\ u(x,0) &= u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{2.125}$$

kde $u = u(x,t)$ a $\psi = \psi(u,x)$. Na tuto úlohu lze aplikovat všechny popsané metody, do kterých je pouze nutno přidat nějakou vhodnou aproximaci zdrojového členu Ψ. Pokud bychom chtěli použít například Laxovu-Friedrichsovu metodu, měla by tvar

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2}(U_{j-1}^n + U_{j+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} a(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + \Delta t \Psi(U_j^n, x_j^n). \tag{2.126}$$

Metodu typu upwind bychom mohli zkonstruovat například takto

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[a^+(U_j^n - U_{j-1}^n) + a^-(U_{j+1}^n - U_j^n)\right] + \Delta t \Psi(U_j^n, x_j^n), \tag{2.127}$$

kde $a^+ = \max\{a,0\}, a^- = \min\{a,0\}$. Ukazuje se, že u této metody je lepší využít upwindingu i v aproximaci pravé strany. Schéma pak může mít následující podobu

$$\begin{aligned} U_j^{n+1} &= U_j^n - \tfrac{\Delta t}{\Delta x}\left[a^+(U_j^n - U_{j-1}^n) + a^-(U_{j+1}^n - U_j^n)\right] + \\ &+ \tfrac{\Delta t}{2}\left(\tfrac{a^+}{a}\left(\Psi(U_{j-1}^n, x_{j-1}) + \Psi(U_j^n, x_j)\right) + \tfrac{a^-}{a}\left(\Psi(U_j^n, x_j) + \Psi(U_{j+1}^n, x_{j+1})\right)\right). \end{aligned} \tag{2.128}$$

Poznámka 2.15. Někdy je vhodné převést danou nehomogenní úlohu na úlohu homogenní v kvazilineárním tvaru. K tomu je třeba rozšířit počet rovnic o další, kde se mezi neznámými objeví některé funkce obsažené ve zdrojovém členu. Tento postup má své výhody i nevýhody, je vhodný například pro úlohy, kdy hledáme ustálené stavy. Konstrukce tohoto způsobu řešení je nad rámec těchto skript, pro Saint-Venantovy rovnice jej čtenář nalezne například v [7].

Další možností řešení nehomogenních soustav je použití metody štěpení. Tato metoda má především tu výhodu, že lze beze změn využít všechny metody k vyřešení homogenního problému a pravou stranu uvažovat zvlášť. Na každé časové vrstvě se řeší dvě úlohy.

1. Homogenní rovnice $\boldsymbol{u}_t + [\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})]_x = \boldsymbol{0}$, jejíž řešení je použito jako počáteční podmínka v druhém kroku

2. Obyčejná diferenciální rovnice $\boldsymbol{u}_t = \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{u}, x)$.

Tato metoda je populární především pro svou jednoduchost a širokou možnost použití. Další výhodou je to, že každý krok lze řešit naprosto odlišnou metodou. Navíc díky tomu, že podproblémy představují jednodušší úlohy než původní problém (homogenní úloha a obyčejná diferenciální rovnice), existuje větší množství metod na jejich řešení.

Mohou zde však nastat problémy především v situacích, kdy se blížíme k ustálenému stavu, ve kterém $\boldsymbol{u}_t = \boldsymbol{0}$, a tedy $[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})]_x = \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{u}, x)$. V takových případech je tato metoda nevhodná, neboť produkuje značné výchylky od ustáleného stavu a je tedy obtížné jej numericky určit (říkáme, že metoda neudržuje ustálený stav).

Dalším problémem jsou okrajové podmínky, které jsou dané pro původní úlohu se zdrojovými členy. Není vždy jednoduché na jejich základě stanovit, jaké okrajové podmínky zvolit pro obě nově sestavené úlohy. Problémy mohou být také se stabilitou celé metody štěpení - přestože metody použité na oba kroky budou stabilní, jejich kombinování může přinést nestabilitu. Podrobnosti o této metodě je možné nalézt například v [1].

Obsah
83. strana ze 161
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka/Okno

2.3. Aplikace na matematické modely

2.3.1. Aplikace metod na KWA model

Použijme metodu typu upwind popsanou v části 2.1.4 na řešení úlohy popsané KWA modelem, jehož princip je odvozen v 1.1.2. Pro obdélníkové koryto je možné využít vztahu (konsumpční křivky)

$$q = \frac{b\sqrt{I}}{M} h^{5/3} \tag{2.129}$$

a model je potom reprezentován skalárním vztahem

$$h_t + \left(\frac{\sqrt{I}}{M} h^{\frac{5}{3}} \right)_x = 0, \tag{2.130}$$

kde $I =$ konst. je sklon koryta a $M =$ konst. je Manningův koeficient drsnosti. Metoda typu upwind má tvar

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n), \tag{2.131}$$

kde numerické toky jsou definovány takto

$$F_{j+1/2}^n = \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{I}}{M} (H_j^n)^{\frac{5}{3}} + \frac{\sqrt{I}}{M} (H_{j+1}^n)^{\frac{5}{3}} \right] - \frac{1}{2} \left| \frac{\frac{\sqrt{I}}{M} (H_{j+1}^n)^{\frac{5}{3}} - \frac{\sqrt{I}}{M} (H_j^n)^{\frac{5}{3}}}{H_{j+1}^n - H_j^n} \right| (H_{j+1}^n - H_j^n). \tag{2.132}$$

V případě, že $H_{j+1}^n - H_j^n = 0$, volíme v souladu s tvarem numerického toku (2.33) $F_{j+1/2}^n =$ $= \frac{\sqrt{I}}{M} (H_j^n)^{\frac{5}{3}}$.

2.3.2. Aplikace metod na Saint-Venantovy rovnice

Ukažme si konkrétní aplikace metod na řešení Saint-Venantových rovnic pro proudění obdélníkovým korytem konstantní šířky. Jak je uvedeno v části 1.1.1, jedná se o nelineární soustavu rovnic tvaru

$$\begin{aligned} h_t + (hv)_x &= 0, \\ (hv)_t + \left(hv^2 + \tfrac{1}{2}gh^2\right)_x &= -ghb_x. \end{aligned} \tag{2.133}$$

Laxova-Friedrichsova metoda má pro tuto soustavu rovnic tvar

$$\boldsymbol{U}_j^{n+1} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{U}_{j-1}^n + \boldsymbol{U}_{j+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}_{j+1}^n) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}_{j-1}^n)) + \Delta t \boldsymbol{\Psi}_j^n. \tag{2.134}$$

Pokud ji aplikujeme na řešení Saint-Venantových rovnic, mají jednotlivé vektory v uzlu x_j tvar

$$\boldsymbol{U}_j^n = \begin{bmatrix} H_j^n \\ H_j^n V_j^n \end{bmatrix}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}_j^n) = \begin{bmatrix} H_j^n V_j^n \\ H_j^n (V_j^n)^2 + \frac{1}{2}g(H_j^n)^2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\Psi}_j^n = \begin{bmatrix} 0 \\ -gH_j^n \frac{B_{j+1}-B_{j-1}}{2\Delta x} \end{bmatrix}. \tag{2.135}$$

Aplikace metody typu upwind:

$$\boldsymbol{U}_j^{n+1} = \boldsymbol{U}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\boldsymbol{F}_{j+1/2}^n - \boldsymbol{F}_{j-1/2}^n) + \Delta t \boldsymbol{\Psi}_j^n \tag{2.136}$$

s numerickými toky

$$\boldsymbol{F}_{j+1/2}^n = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}_j^n) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}_{j+1}^n)\right] - \frac{1}{2}\left|\boldsymbol{A}_{j+1/2}^n\right|\left(\boldsymbol{U}_{j+1}^n - \boldsymbol{U}_j^n\right) \tag{2.137}$$

vyžaduje zvolit nějakou vhodnou aproximaci Jacobiho matice soustavy $\boldsymbol{A}^n_{j+1/2}$, jak již bylo uvedeno v části 2.1.5. Jacobiho matice soustavy má tvar

$$\boldsymbol{A} = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ gh - v^2 & 2v \end{bmatrix} \tag{2.138}$$

s vlastními čísly $\lambda^1 = v - \sqrt{gh}, \lambda^2 = v + \sqrt{gh}$ a vlastními vektory

$$\boldsymbol{r}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda^1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{r}^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda^2 \end{bmatrix}, \tag{2.139}$$

tak, jak bylo odvozeno v části 1.2.2. Jednou z vhodných voleb je zavedení aproximací hodnot neznámých funkcí (hloubky a rychlosti) v bodech $x_{j+1/2}$ následujícím způsobem

$$H_{j+1/2} = \frac{H_j + H_{j+1}}{2}, \qquad V_{j+1/2} = \frac{V_j\sqrt{H_j} + V_{j+1}\sqrt{H_{j+1}}}{\sqrt{H_j} + \sqrt{H_{j+1}}}. \tag{2.140}$$

Tato volba zaručuje splnění vztahu

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}^n_{j+1}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}^n_j) = \boldsymbol{A}^n_{j+1/2}(\boldsymbol{U}^n_{j+1} - \boldsymbol{U}^n_j), \tag{2.141}$$

který je analogií k volbě $a^n_{j+1/2} = \frac{f(U^n_{j+1}) - f(U^n_j)}{U^n_{j+1} - U^n_j}$ ve skalárním případě. Aproximace Jacobiho matice soustavy je tedy volena ve tvaru

$$\boldsymbol{A}^n_{j+1/2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ gH_{j+1/2} - (V_{j+1/2})^2 & 2V_{j+1/2} \end{bmatrix} \tag{2.142}$$

Obsah
86. strana ze 161
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka/Okno

s vlastními čísly $\lambda^1_{j+1/2} = V_{j+1/2} - \sqrt{gH_{j+1/2}}, \lambda^2_{j+1/2} = V_{j+1/2} + \sqrt{gH_{j+1/2}}$ a vlastními vektory

$$\boldsymbol{r}^1_{j+1/2} = \left[\begin{array}{c} 1 \\ \lambda^1_{j+1/2} \end{array} \right], \qquad \boldsymbol{r}^2_{j+1/2} = \left[\begin{array}{c} 1 \\ \lambda^2_{j+1/2} \end{array} \right]. \tag{2.143}$$

Pomocí těchto vlastních čísel a vlastních vektorů provedeme rozklad

$$|\boldsymbol{A}^n_{j+1/2}|(\boldsymbol{U}^n_{j+1} - \boldsymbol{U}^n_j) = \alpha^1_{j+1/2}|\lambda^1_{j+1/2}|\boldsymbol{r}^1_{j+1/2} + \alpha^2_{j+1/2}|\lambda^2_{j+1/2}|\boldsymbol{r}^2_{j+1/2}. \tag{2.144}$$

Numerické toky $\boldsymbol{F}^n_{j+1/2}$ lze pak získat dosazením hodnot toků $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}^n_j)$ a $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}^n_{j+1})$ a rozkladu (2.144). Ještě je vhodné poznamenat, že volbu aproximace pravé strany je možné i zde volit různými způsoby, například s využitím upwindingu jak bylo ukázáno ve skalárním případě.

Pojmy k zapamatování

— konzistence

— konzervativita

— stabilita

— centrální metody

— metody typu upwind

— lokální diskretizační chyba

— globální diskretizační chyba

— diskretizace úlohy

— CFL podmínka

— pozitivní semidefinitnost

Kontrolní otázky

1. Jak se nazývá nutná podmínka stability explicitních metod a jak ji lze geometricky interpretovat?
2. Stačí konzistence a konvergence metody k její stabilitě?
3. Jaký je rozdíl mezi lokální a globální diskretizační chybou?
4. Je metoda v divergentním tvaru konzervativní?
5. Co je to konzistence metody s diferenciální rovnicí?
6. Jaké jsou hlavní rozdíly mezi centrálními metodami a metodami typu upwind?
7. Co je to pozitivní semidefinitnost metody?

Příklady k procvičení

1. Stanovte řád konzistence pro Laxovu-Wendroffovu metodu.

2. Dokažte konzistenci Laxovy-Wendroffovy metody s lineární skalární rovnicí (2.2).

3. Ukažte, že metoda tvaru (2.28) je konzervativní.

4. Ukažte, že Laxovu-Friedrichsovu metodu tvaru (2.9) lze zapsat v divergentním tvaru (2.111).

5. Odvoďte rozklad soustavy lineárních rovnic $\boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_x = \boldsymbol{0}$ na soustavu nezávislých rovnic.

6. Napište tvar Laxovy-Wendroffovy metody a metody typu upwind pro řešení Burgersovy rovnice $u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = 0$.

Obsah
88. strana ze 161
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka/Okno

7. Sestavte metodu pro řešení lineární skalární úlohy, pro níž bude mít CFL podmínka stability podobu
$$|a|\frac{\Delta t}{\Delta x} \leqq 10.$$

Klíč k příkladům k procvičení

1. Konzistence druhého řádu.

2. Postupujte analogicky jako při důkazu konzistence Laxovy-Friedrichsovy metody v části (2.1.6).

3. Pro konzervativitu je třeba splnit rovnost
$\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} U_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} \left[a^+(U_j^n - U_{j-1}^n) + a^-(U_{j+1}^n - U_j^n)\right] = \sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} U_j^n.$
Druhá suma je nulová, neboť se členy vzájemně odečtou a při $j \to \pm\infty$ je $U_j^n = 0$.

4. Numerický tok je v tomto případě definován
$$F_{j+1/2}^n = \frac{1}{2}(f(U_j^n) + f(U_{j+1}^n)) - \frac{\Delta x}{2\Delta t}(U_{j+1}^n - U_j^n)$$

5. Využijte rozkladu (2.48) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R\Lambda R}^{-1}$ a zaveďte vektor $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{u}$. S tímto přepíšete soustavu na tvar
$$(\boldsymbol{Rv})_t + \boldsymbol{R\Lambda}\mathbb{R}^{-1}(\boldsymbol{Rv})_x = \boldsymbol{0}$$
$$\boldsymbol{Rv}_t + \boldsymbol{R\Lambda v}_x = \boldsymbol{0}$$
$$\boldsymbol{v}_t + \boldsymbol{\Lambda v}_x = \boldsymbol{0}.$$
Získáte tak soustavu nezávislých rovnic $(v^p)_t + \lambda^p(v^p)_x = 0$.

6. Dosazením do tvaru metody pro řešení nelineární skalární rovnice (2.20) získáte Laxovu-Wendroffovu metodu

$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left((U_{j+1/2}^{n+1/2})^2 - (U_{j-1/2}^{n+1/2})^2\right)$,
kde $U_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2}\left(U_j^n - U_{j+1}^n\right) - \frac{\Delta t}{4\Delta x}\left((U_{j+1}^n)^2 - (U_j^n)^2\right)$. Dosazením do (2.29) získáte metodu typu upwind
$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{4\Delta x}\left[(U_{j+1}^n)^2 - |U_{j+1}^n + U_j^n|(U_{j+1}^n - U_j^n) - (U_{j-1}^n)^2 + |U_j^n + U_{j-1}^n|(U_j^n - U_{j-1}^n)\right]$.

7. Jedním z řešení je sestavení obdoby Laxovy-Friedrichsovy metody ve tvaru

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2}(U_{j-k}^n + U_{j+k}^n) - \frac{\Delta t}{2k\Delta x}a(U_{j+k}^n - U_{j-k}^n), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Analogickým postupem jako v případě (2.85) získáte podmínku stability

$$\left|\frac{1}{2} + \frac{a\Delta t}{2k\Delta x}\right| + \left|\frac{1}{2} - \frac{a\Delta t}{2k\Delta x}\right| \leqq 1 \Leftrightarrow \left|\frac{a\Delta t}{2k\Delta x}\right| \leqq \frac{1}{2}.$$

Tato metoda je tedy stabilní za podmínky

$$|a|\frac{\Delta t}{\Delta x} \leqq k.$$

Zvolíte $k = 10$.

Obsah
90. strana ze 161
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka/Okno

Kapitola 3

Metody pro úlohy s nehladkým řešením

Průvodce studiem

V této kapitole se čtenář seznámí s rozdíly mezi metodami prvního a vyššího řádu. Naučí se, jakými způsoby lze konstruovat metody vyššího řádu přesnosti řešení použitím korekčních toků nebo polynomiální rekonstrukce neznámé funkce. Pozná nepříznivé jevy, které metody vyššího řádu vnášejí do řešení, a naučí se některým postupům, jak je omezit. Dále se seznámí s konstrukcí komplexnější metody pro úlohy se zdrojovými členy, která je schopna udržet některé ustálené stavy. Uvidí, jakým způsobem ovlivňuje řešení numerická difúze. Na základě znalosti vlastností jednotlivých metod pronikne do problematiky výběru vhodné metody pro konkrétní problém.

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete schopni:

- sestavit metody vyššího řádu
- sestavit metody s vysokým rozlišením
- definovat důležité pojmy jako metody s vysokým rozlišením, ustálený stav, apod.

3.1. Nehladká data

V řadě aplikací se setkáváme s úlohami, které obsahují nehladká data. Ta se mohou v úloze objevit z různých důvodů, například díky počáteční podmínce, kdy se hodnota neznámé funkce v nějakém bodě skokově změní.Také vliv zdrojových členů může do naší úlohy vnést nespojitosti v řešení (například skoková změna dna říčního koryta) nebo se tyto nespojitosti mohou objevit díky samotné nelinearitě problému.

Pro získání přesnějšího řešení je vhodné konstruovat metody vyššího řádu přesnosti. Tyto metody, které jsou založeny na Taylorově rozvoji, je možné konstruovat pro úlohy s hladkými daty. V případě úloh s nehladkými daty ztrácejí tyto metody smysl a získané řešení může v místech nespojitostí obsahovat například umělé oscilace, které se v přesném řešení nevyskytují. Ukážeme, že je vhodné sestavit metodu, která bude vyššího řádu v bodech, ve kterých je řešení hladké a zároveň bude dostatečně přesně aproximovat řešení v bodech nespojitosti mimo jiné také tak, že nebude produkovat umělé oscilace. Takovým metodám budeme říkat metody s vysokým rozlišením. Konstrukce metody, která by perfektně splňovala tyto požadavky je velice složitá a většinou ji lze uskutečnit pouze pro některé jednoduché případy.

Obsah
92. strana ze 161
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka/Okno

3.2. Vlastnosti teoretického řešení pro skalární případ

Uvažujme nyní skalární lineární úlohu

$$\begin{aligned} u_t + a u_x &= 0, \qquad t \in (0,T), x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}, T > 0, \\ u(x,0) &= u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Lze ukázat, že přesné řešení této úlohy je konstantní na charakteristikách (podrobněji popsány v části 1.2.1), což jsou obecně křivky v rovině (x,t), které splňují rovnici

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a. \tag{3.2}$$

V našem lineárním případě, kdy $a(x,t) =$ konst., se jedná o přímky. Přesné řešení na těchto charakteristikách má tvar (viz část 1.2.1)

$$u(x,t) = u_0(x - at). \tag{3.3}$$

Řešení v bodě x_j a čase t_n je tedy jednoznačně určeno počáteční hodnotou neznámé funkce v bodě $x_j - at_n$. V případě hladké funkce u_0 se jedná o klasické řešení, lze však definovat i zobecněná řešení, kdy například nespojitost v počáteční podmínce se opět šíří po příslušné charakteristice.

Je patrné, že přesné řešení neobsahuje žádné oscilace, které by se nevyskytovaly v počáteční podmínce. Proto od numerického řešení mimo jiné požadujeme, aby žádné oscilace neobsahovalo. Některé metody, které zamezují vzniku umělých oscilací, však zároveň omezují i lokální extrémy přesného řešení.

3.3. Chování metod prvního a vyššího řádu

Metody prvního řádu mají výhodu v jednodušší implementaci a také v tom, že zachovávají monotonii řešení a neprodukují další lokální extrémy oproti přesnému řešení. Nevýhodou je pochopitelně samotný nízký řád přesnosti.

Metody druhého řádu se vyznačují vyšší přesností v místech, kde je řešení hladké. V případě nespojitého řešení však tyto metody produkují umělé oscilace, které přesné řešení neobsahuje.

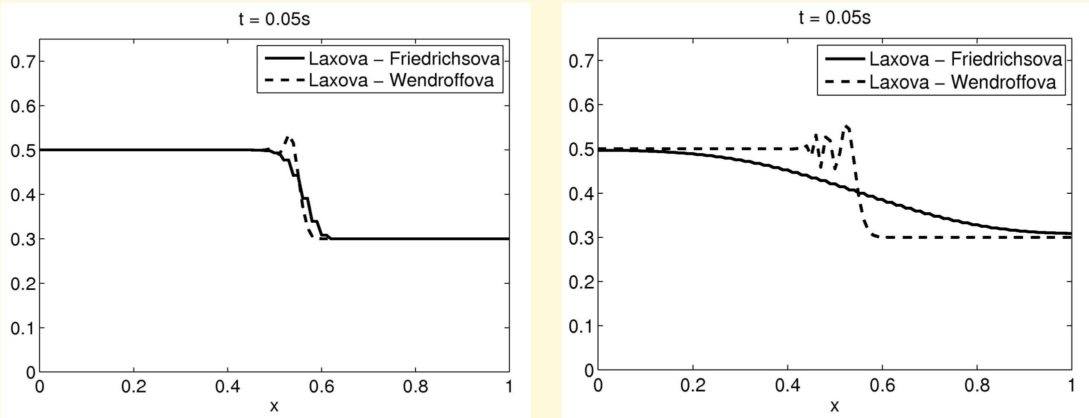
Ukažme si na příkladu jednoduché lineární rovnice chování metody prvního řádu (Laxova-Friedrichsova metoda) a metody druhého řádu (Laxova-Wendroffova metoda) při dvou různých volbách velikosti časové diskretizace.

Příklad 3.1. Pomocí Laxovy-Friedrichsovy metody a Laxovy-Wendroffovy metody řešte lineární úlohu

$$\begin{aligned} &u_t + u_x = 0, \qquad t > 0, x \in \langle 0, 1 \rangle, \\ &u(x,0) = \begin{cases} 0,5 & \text{pro } x \leqq 0,5, \\ 0,3 & \text{pro } x > 0,5, \end{cases} \\ &u(0,t) = 0,5, \qquad u(1,t) = 0,3. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Řešení. Obrázky 3.1 ukazují řešení v čase $t = 0,05s$ s použitím obou metod a s příslušnými časovými kroky Δt v závislosti na velikosti prostorového kroku Δx (zvoleno $\Delta x = 0,01$). Na obrázku 3.1 vidíme, že u metody druhého řádu dochází ke vzniku oscilací v místě nehladkého řešení, zatímco u metody prvního řádu je zachována monotonie řešení. Dále je vidět, že snižováním velikosti časového kroku oscilací přibývá. ▲

Zaměřme se nyní na konstrukci metody s vysokým rozlišením, která bude měnit řád přesnosti v závislosti na datech úlohy.



$\Delta t = \Delta x/2$ $\Delta t = (\Delta x)^2$

Obr. 3.1 Porovnání řešení získaného metodou prvního a druhého řádu

3.4. Metody založené na korekci numerických toků

První způsob konstrukce metody s vysokým rozlišením bude založen na přidání tzv. korekčních toků k metodě prvního řádu. Korekční toky v místech s hladkým řešením způsobí, že se zvýší řád přesnosti, zatímco v místech nespojitosti se jejich vliv na řešení bude blížit nule a metoda tak zůstane pouze prvního řádu a nebude vytvářet nežádoucí oscilace. Druhý způsob bude založen na polynomiální rekonstrukci neznámé funkce. Rekonstrukcí dojde ke zmenšení skoků neznámé funkce a mimo původních uzlových bodů budeme mít k dispozici další hodnoty pro zpřesnění řešení.

Obsah
95. strana ze 161
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka/Okno

Pro úpravu metody prvního řádu na metodu vysokého rozlišení je možné využít tzv. korekčních toků $F^{n,H}_{j+1/2}$. Tyto korekční toky přidáme k metodě prvního řádu. Mějme například metodu v divergentním tvaru pro řešení skalárního nelineárního problému $u_t + [f(u)]_x = 0$, který lze přepsat do kvazilineární podoby $u_t + f'(u)u_x = 0$. Metoda vysokého rozlišení založená na této metodě má tvar

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[F^n_{j+1/2} - F^n_{j-1/2}\right] - \frac{\Delta t}{\Delta x}(F^{n,H}_{j+1/2} - F^{n,H}_{j-1/2}), \tag{3.5}$$

kde

$$F^{n,H}_{j+1/2} = \frac{1}{2}|a^n_{j+1/2}|\left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x}|a^n_{j+1/2}|\right)(U^n_{j+1} - U^n_j)\Psi(\Theta^n_{j+1/2}). \tag{3.6}$$

$$\Theta^n_{j+1/2} = \begin{cases} \frac{U^n_j - U^n_{j-1}}{U^n_{j+1} - U^n_j} & \text{pro } a^n_{j+1/2} > 0, \\ \frac{U^n_{j+2} - U^n_{j+1}}{U^n_{j+1} - U^n_j} & \text{jinak.} \end{cases} \tag{3.7}$$

Funkce $\Psi = \Psi(\Theta)$ se nazývá omezovací funkce (limiter) a je mírou lokální hladkosti řešení. Je možné ji definovat několika způsoby, pro příklad si zde uveďme dva.

- $\Psi(\Theta) = \frac{\Theta + |\Theta|}{1 + |\Theta|}$,
- $\Psi(\Theta) = \mathrm{minmod}(1, \Theta)$,

kde

$$\mathrm{minmod}(a, b) = \begin{cases} a & \text{pokud } |a| < |b| \wedge ab > 0, \\ b & \text{pokud } |b| < |a| \wedge ab > 0, \\ 0 \text{ pokud } ab \leqq 0. & \end{cases} \tag{3.8}$$

Obsah
96. strana ze 161
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka/Okno

Pokud je $\Psi(\Theta^n_{j+1/2}) = 1$, jedná se o metodu druhého řádu. Konkrétně pro volbu

$$a_{j+1/2} = \frac{f(U_{j+1}) - f(U^n_j)}{U^n_{j+1} - U^n_j}, \qquad F^n_{j+1/2} = \frac{1}{2}(f(U^n_j) + f(U^n_{j+1}) - \frac{1}{2}|a^n_{j+1/2}|(U^n_{j+1} - U^n_j) \quad (3.9)$$

získáme Laxovu Wendroffovu metodu (2.18). Pokud je $\Psi(\Theta^n_{j+1/2}) < 1$ dochází ke snížení řádu přesnosti a zároveň k omezení oscilací numerického řešení. Toto nastává, pokud je v místě $x_{j+1/2}$ nespojitost ve funkčních hodnotách U^n, pak výraz $U^n_{j+1} - U^n_j$ nabývá vysokých hodnot a tím i jmenovatel ve výrazu (3.7). Pomocí funkce $\Psi(\Theta^n_{j+1/2})$ se tak snižuje vliv korekčních toků na řešení. Funkční hodnoty $\Psi(\Theta^n_{j+1/2}) \approx 1$ v případě, že v místě $x_{j+1/2}$ mají funkce $\boldsymbol{U}^n$ hladký charakter a metoda je tedy druhého řádu přesnosti. $\Psi(\Theta^n_{j+1/2}) = 0$ tehdy, když $\Theta^n_{j+1/2} < 0$ tj. jednostranné diference mají v bodě $x_{j+1/2}$ opačné znaménko. V bodě $x_{j+1/2}$ se nachází lokální extrém a metoda je prvního řádu přesnosti.

3.4.0.1. KWA model

Ukažme si nyní pro názornost použití této metody vysokého rozlišení na řešení úlohy založené na KWA modelu 2.130. Jedná se o nelineární skalární rovnici, pro kterou má metoda tvar

$$U^{n+1}_j = U^n_j - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[F^n_{j+1/2} - F^n_{j-1/2}\right] - \frac{\Delta t}{\Delta x}(F^{n,H}_{j+1/2} - F^{n,H}_{j-1/2}), \qquad (3.10)$$

kde numerické toky $F^n_{j+1/2}$ jsou definovány dle (2.132) a korekční toky $F^{n,H}_{j+1/2}$ následujícím způsobem

$$F^{n,H}_{j+1/2} = \frac{1}{2}|a_{j+1/2}|\left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x}|a_{j+1/2}|\right)\widehat{\Upsilon}^{n,p}_{j+1/2}. \qquad (3.11)$$

Obsah
97. strana ze 161
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka/Okno

Zde máme

$$a_{j+1/2} = \frac{\frac{\sqrt{I}}{M}(H^n_{j+1})^{\frac{5}{3}} - \sqrt{I}M(H^n_j)^{\frac{5}{3}}}{H^n_{j+1} - H^n_j} \tag{3.12}$$

a

$$\widehat{\Upsilon}^{n,p}_{j+1/2} = \Psi(\Theta^{n,p}_{j+1/2})\Upsilon^{n,p}_{j+1/2}, \qquad \Upsilon^{n,p}_{j+1/2} = (H^n_{j+1} - H^n_j), \tag{3.13}$$

kde

$$\Theta^{n,p}_{j+1/2} = \begin{cases} \frac{H^n_j - H^n_{j-1}}{H^n_{j+1} - H^n_j} & \text{pro } a_{j+1/2} > 0, \\ \frac{H^n_{j+2} - H^n_{j+1}}{H^n_{j+1} - H^n_j} & \text{jinak.} \end{cases} \tag{3.14}$$

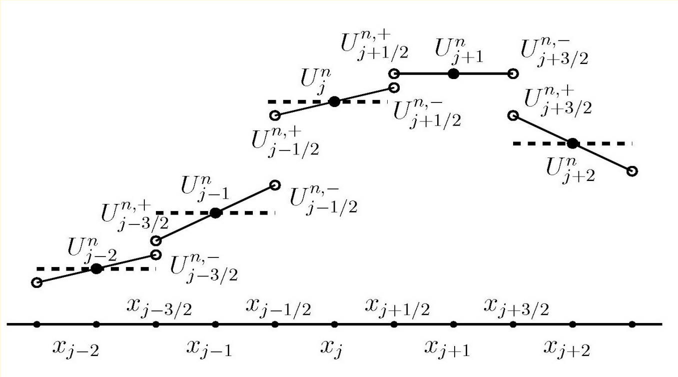
Limiter $\Psi = \Psi(\Theta)$ lze možné zvolit ve tvarech popsaných výše.

3.5. Metody založené na rekonstrukci hledané funkce

Druhým způsobem sestrojení metody s vysokým rozlišením je využití rekonstrukce neznámé funkce, tj. sestrojení pomocných hodnot neznámé funkce mimo původní uzly tak, aby přechod mezi sousedními hodnotami neznámé funkce byl „pozvolnější“ než u původního dělení. Na Obr.3.2 je naznačeno, jak si lze takovou rekonstrukci představit. Pomocí uzlových hodnot v bodech x_j lze zpětně aproximovat funkci u jako po částech spojitou. Přidáním hodnot v bodech $x^-_{j+1/2}$ a $x^+_{j+1/2}$ (tj. aproximace jednostranných limit v bodě $x_{j+1/2}$) lze funkci aproximovat přesněji jako po částech lineární.

Mějme např. metodu v divergentním tvaru

$$U^{n+1}_j = U^n_j - \frac{\Delta t}{\Delta x}[F^n_{j+1/2} - F^n_{j-1/2}]. \tag{3.15}$$



Obr. 3.2 Rekonstrukce neznámé funkce

Dosud jsme numerické toky $F^n_{j+1/2}$ definovali pomocí hodnot U^n_j a U^n_{j+1}. Nyní pro získání vyšší přesnosti definujeme numerické toky pomocí nových hodnot $U^{n,-}_{j+1/2}$ a $U^{n,+}_{j+1/2}$ (tj. v předchozích definicích numerických toků bychom provedli substituci $U^{n,-}_{j+1/2} = U^n_j$ a $U^{n,+}_{j+1/2} = U^n_{j+1}$).

Existuje celá řada způsobů, jak tyto pomocné hodnoty získat. Pro nás je důležité použít takové, které zabraňují vzniku umělých oscilací u metod vyšších řádů. Jednou z nich je metoda využívající tzv. minmod funkce, jejíž definici a použití uvidíme později při konstrukci metody central-upwind. Další metody s podobnými vlastnostmi založené například na rekonstrukcích typu ENO (Essentially Non-Oscillatory) a WENO (Weighted Essentially Non-Oscillatory) je možné nalézt například v [6].

Obsah
99. strana ze 161
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka/Okno

Obdobně lze sestrojit i metodu pro řešení nelineární soustavy rovnic, jakou jsou například Saint-Venantovy rovnice (příklad takové metody je uveden v části 3.5.1. V takovém případě používáme vektorové funkce $\boldsymbol{U}_{j+1/2}^{n,\pm}$, které lze získat tak, že aplikujeme postup skalární rekonstrukce na každou složku zvlášť. Pro Saint-Venantovy rovnice aplikujeme postup samostatně pro funkce popisující hloubku vody a průtok. To ovšem může přinášet některé nežádoucí jevy, například porušení udržení ustálených stavů nebo vnášení umělých oscilací do řešení. V některých případech je tedy vhodné použít postupy zohledňující kompletní strukturu vlastních čísel a vlastních vektorů Jacobiho matice soustavy.

3.5.1. Metoda typu central-upwind

Popišme si nyní jednu z metod založených na rekonstrukci hledané funkce a na lokální Laxově-Friedrichsově metodě. Tato metoda využívá jak výhod centrálních metod, tak i metod typu upwind (menší numerická difúze, udržení některých ustálených stavů). Udržení některých ustálených stavů je velká výhoda oproti centrálním metodám, které nejsou obecně vhodné pro úlohy, kde je udržení ustálených stavů vyžadováno, jako je tomu i u uvedených problémů proudění.

Uvažujme pro jednoduchost nejprve homogenní soustavu $\boldsymbol{U}_t + [\boldsymbol{f}(\boldsymbol{U})]_x = \boldsymbol{0}$. Použitím numerických toků $\boldsymbol{F}_{j+1/2}(t)$, $j = 1, \ldots, N-1$, lze semidiskrétní metodu typu central-upwind psát v následující podobě (viz [4])

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{U}_j}{\mathrm{d}t} = -\frac{\boldsymbol{F}_{j+1/2} - \boldsymbol{F}_{j-1/2}}{\Delta x}. \tag{3.16}$$

Obsah
100. strana ze 161
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka/Okno

Numerické toky $\boldsymbol{F}_{j+1/2}$ jsou pak dány výrazy

$$\boldsymbol{F}_{j+1/2} = \frac{a^+_{j+1/2}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}^-_{j+1/2}) - a^-_{j+1/2}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}^+_{j+1/2})}{a^+_{j+1/2} - a^-_{j+1/2}} + \frac{a^+_{j+1/2}a^-_{j+1/2}}{a^+_{j+1/2} - a^-_{j+1/2}}\left[\boldsymbol{U}^+_{j+1/2} - \boldsymbol{U}^-_{j+1/2}\right], \tag{3.17}$$

kde hodnoty $a^+_{j+1/2}$ a $a^-_{j-1/2}$ jsou dány těmito vztahy

$$\begin{aligned} a^+_{j+1/2} &= \max\left\{\lambda^N\left(\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{U}^-_{j+1/2})\right), \lambda^N\left(\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{U}^+_{j+1/2})\right), 0\right\}, \\ a^-_{j+1/2} &= \min\left\{\lambda^1\left(\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{U}^-_{j+1/2})\right), \lambda^1\left(\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{U}^+_{j+1/2})\right), 0\right\}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Zde předpokládáme, že máme seřazena vlastní čísla Jacobiho matice $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{u})$ podle velikosti, tj. $\lambda^1 < \cdots < \lambda^N$. Nebudeme se zde detailně věnovat odvození těchto numerických toků, pouze si je zjednodušeně přiblížíme. Na konstrukci lze pohlížet podobně, jako tomu bylo u lokální Laxovy-Friedrichsovy metody v části 2.1.7, kde se kvůli snížení numerické difúze Laxovy-Friedrichsovy metody modifikovaly numerické toky pomocí maximálních hodnot derivace tokové funkce na okolí daného uzlu. U soustav místo derivací pracujeme s vlastními čísly příslušné Jacobiho matice. Lze ukázat, že i takto sestrojený tok (3.17) snižuje numerickou difúzi metody.

Hodnoty $\boldsymbol{U}^+_{j+1/2}$ a $\boldsymbol{U}^-_{j+1/2}$ jsou pomocné hodnoty v centrálních bodech získané pomocí polynomiální rekonstrukce z hodnot sousedních uzlů. Tato rekonstrukce, jak již bylo zmíněno, je zvolena především tak, aby potlačovala oscilace v řešení. Dále je možno pomocí vhodné volby CFL podmínky zajistit pozitivní semidefinitnost schématu (viz [4]).

3.5.1.1. Volba hodnot $U^{\pm}_{j+1/2}$

Hodnoty $\boldsymbol{U}^{\pm}_{j+1/2}$ lze volit několika způsoby, například jim přiřazovat hodnoty v sousedních uzlech, tedy $\boldsymbol{U}^{+}_{j+1/2} = \boldsymbol{U}_{j+1}, \boldsymbol{U}^{-}_{j+1/2} = \boldsymbol{U}_j$. Tím ovšem získáme metodu pouze prvního řádu. Lépe je použít například již dříve zmiňovanou polynomiální TVD rekonstrukci, kde hodnoty získáme z hodnot funkce v sousedních uzlech následujícím způsobem dle [5]

$$\begin{aligned} \boldsymbol{U}^{+}_{j+1/2} &= \boldsymbol{U}_{j+1} - \tfrac{\Delta x}{2}(\boldsymbol{U}_x)_{j+1}, \\ \boldsymbol{U}^{-}_{j+1/2} &= \boldsymbol{U}_{j+1} + \tfrac{\Delta x}{2}(\boldsymbol{U}_x)_{j}, \end{aligned} \tag{3.19}$$

kde výraz $(\boldsymbol{U}_x)_j$ představuje

$$(\boldsymbol{U}_x)_j = \operatorname{minmod}\left(\frac{\boldsymbol{U}_j - \boldsymbol{U}_{j-1}}{\Delta x}, \frac{\boldsymbol{U}_{j+1} - \boldsymbol{U}_j}{\Delta x}\right), \tag{3.20}$$

přičemž funkce $\operatorname{minmod}(a, b)$ je definovaná

$$\operatorname{minmod}(a, b) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sgn}(a) + \operatorname{sgn}(b)\right] \cdot \min\left(|a|, |b|\right). \tag{3.21}$$

Pro hodnotu derivace $(\boldsymbol{U}_x)_j$ je použita funkce minmod především pro její vlastnost tlumit oscilace, které vznikají u rekonstrukcí druhého řádu. Ze dvou možností hodnot derivace $(\boldsymbol{U}_x)_j$ vybereme totiž tu menší, pokud mají obě stejná znaménka. V opačném případě se v bodě x_j nachází lokální extrém funkce $\boldsymbol{U}$, proto pokládáme $(\boldsymbol{U}_x)_j = 0$. Tím je realizována jakási obdoba přepínání mezi metodou prvního a druhého řádu v místech, kde řešení není hladké.

Samozřejmě lze využít i jiných rekonstrukcí. Volba závisí nejen na požadovaných vlastnostech, ale také na výpočetní náročnosti při jejich použití. Jednou ze skupin rekonstrukcí, které také dokáží tlumit oscilace v řešení jsou již zmíněné WENO rekonstrukce popsané například v [6].

3.5.1.2. Aproximace zdrojového členu

Nyní uvažujme soustavu se zdrojovými členy $\boldsymbol{U}_t + [\boldsymbol{f}(\boldsymbol{U})]_x = \boldsymbol{\psi}(u, x)$. Otázkou tedy je, jakou zvolit aproximaci zdrojového členu $\boldsymbol{\psi}(u, x)$. Možností je pochopitelně několik, my se zaměříme na takovou, díky níž získá metoda další vhodnou vlastnost. Tou vlastností bude udržení tzv. ustálených stavů. To jsou stavy, kdy se řešení časem nemění, to znamená, že $\boldsymbol{U}_t = \boldsymbol{0}$ a tedy $[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{U})]_x = \boldsymbol{\psi}(u, x)$. Zvolíme proto takovou aproximaci zdrojového členu, která tuto vlastnost zaručí i v diskrétní podobě.

Metoda typu central-upwind však není schopna udržet libovolné ustálené stavy, ale pouze takové, u kterých jsou prostorové derivace neznámých rovny nule. Z tohoto důvodu nebudeme používat například Saint-Venantovy rovnice ve tvaru (2.133), ale jejich tvar upravený zavedením nové veličiny $c(x, t) = h(x, t) + b(x)$ pro výšku hladiny. Pak budeme schopni udržet speciální ustálený stav, kterému se říká „klid v jezeře,“ a nastává, pokud $v = 0, c =$ konst. Jak je zřejmé ze samotného tvaru tohoto ustáleného stavu, platí $C_j^n = C_{j+1}^n$ a díky použité rekonstrukci (3.20) platí i $C_{j+1/2}^{n,-} = C_{j+1/2}^{n,+}$. Soustava zavedením nové veličiny získá podobu

$$\begin{aligned} c_t + (hv)_x &= 0 \\ (hv)_t + \left[\frac{hv^2}{c-b} + \frac{1}{2}g(c-b)^2\right]_x &= -g(c-b)b_x. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Analogickým postupem jako v případě homogenní soustavy rovnic získáme

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{U}_j}{\mathrm{d}t} = -\frac{\boldsymbol{F}_{j+1/2} - \boldsymbol{F}_{j-1/2}}{\Delta x} + \boldsymbol{\Psi}_j, \tag{3.23}$$

Obsah
103. strana ze 161
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka/Okno

kde $\boldsymbol{\Psi}_j$ představuje aproximaci integrálního vyjádření zdrojového členu

$$\boldsymbol{\Psi}_j \approx \frac{1}{\Delta x} \int\limits_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \boldsymbol{\Psi}\left(\boldsymbol{U}(x,t), x\right) \mathrm{d}x. \tag{3.24}$$

Numerické toky $\boldsymbol{F}_{j+1/2}$ jsou definovány vztahem (3.17). Nyní ještě zbývá zvolit vhodnou diskretizaci zdrojového členu (3.24). Tu zvolíme tak, aby naše numerické řešení splňovalo podmínky ustáleného stavu „klid v jezeře“. Za tohoto stavu platí $v^+_{j+1/2} = v^-_{j+1/2}$ a $a^+_{j+1/2} = -a^-_{j+1/2}$ (tyto hodnoty jsou definovány vztahy (3.18)). Potom numerický tok $\boldsymbol{F}_{j+1/2}$ je v bodě $x_{j+1/2}$ dán výrazem

$$\boldsymbol{F}_{j+1/2} = \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}^+_{j+1/2}) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}^-_{j+1/2})}{2} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}_{j+1/2}). \tag{3.25}$$

První složka numerického toku $F^{(1)}_{j+1/2}$ je identicky nulová, druhá pak zřejmě dána výrazem

$$F^{(2)}_{j+1/2} = \frac{1}{2} g \left(C_{j+1/2} - B_{j+1/2}\right)^2. \tag{3.26}$$

Uvažujeme-li stále podmínky ustáleného řešení, pak druhou složku prvního členu pravé strany rovnosti (3.23) můžeme vyjádřit v následujícím tvaru

$$\begin{aligned} -\frac{F^{(2)}_{j+1/2} - F^{(2)}_{j-1/2}}{\Delta x} &= -\frac{1}{2\Delta x} g \left(\left(C_{j+1/2} - B_{j+1/2}\right)^2 - \left(C_{j-1/2} - B_{j-1/2}\right)^2 \right) = \\ &= g \frac{B_{j+1/2} - B_{j-1/2}}{\Delta x} \cdot \frac{C_{j+1/2} - B_{j+1/2} + C_{j-1/2} - B_{j-1/2}}{2}. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Abychom tedy splnili podmínku ustáleného řešení $\boldsymbol{U}_t = 0$, musí být pravá strana rovnice (3.23) rovněž nulová. Z tohoto důvodu pak volíme diskretizaci pravé strany druhé rovnice soustavy (3.22) ve tvaru

$$\Psi_j^{(2)} \approx -g\frac{B_{j+1/2} - B_{j-1/2}}{\Delta x} \cdot \frac{\left(C_{j+1/2}^{-} - B_{j+1/2}\right) + \left(C_{j-1/2}^{+} - B_{j-1/2}\right)}{2}. \tag{3.28}$$

Nakonec opět zvolíme vhodnou časovou diskretizaci.

Příklad 3.2. Ukažme si na následující úloze rozdíl mezi metodou, která drží ustálený stav a metodou, která ne. Uvažujme Saint-Venantovy rovnice v upravené podobě (3.22) s počáteční podmínkou

$$c(x,0) = h(x,0) + B(x) = 0.6, \quad v(x,0) = 0, \quad x \in \langle 0, 1\rangle. \tag{3.29}$$

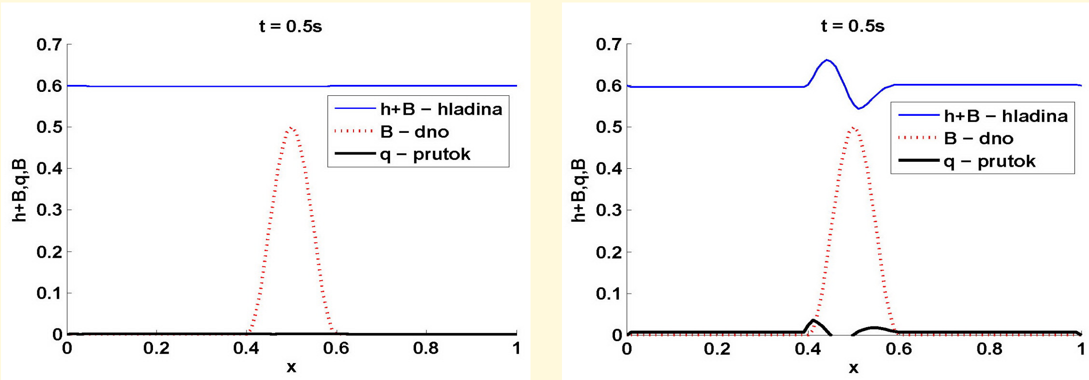
Hodnoty na krajích intervalu jsou konstantní po celou dobu simulace

$$h(0,t) + B(0) = h(1,t) + B(1) = 0.6, v(0,t) = v(1,t) = 0. \tag{3.30}$$

Řešení. K řešení je použita metoda central-upwind, popsaná v tomto textu, s různými volbami aproximace zdrojového členu. Vlevo na Obr. 3.3 je vidět řešení s použitím aproximace (3.28), kdy ustálený stav zůstal zachován. Vpravo na Obr. 3.3 je pak vidět řešení s použitím aproximace zdrojového členu ve tvaru

$$\boldsymbol{\Psi}_j^{(2)} \approx -gH_j\frac{B_{j+1/2} - B_{j-1/2}}{2}, \tag{3.31}$$

kde již ustálený stav není zachován. Dochází ke vzniku nežádoucího pohybu hladiny, který je z fyzikálního hlediska nesmyslný. Pro řešení úloh, ve kterých se vyskytují ustálené stavy, je třeba volit takové metody, které tyto ustálené stavy zachovávají. ▲



Obr. 3.3 Udržení ustáleného stavu „klid v jezeře“ při různé volbě aproximace pravé strany. Vlevo je použita metoda držící ustálený stav, vpravo metoda s jinou volbou aproximace pravé strany.

3.6. Porovnání vlivu numerické difúze jednotlivých metod

Ukažme si na jednoduchém experimentu, jak se projeví množství numerické difúze na řešení získané jednotlivými metodami. Uvažujme jednodimenzionální úlohu proudění vodorovným korytem obdélníkového průřezu popsanou homogenními Saint-Venantovými rovnicemi

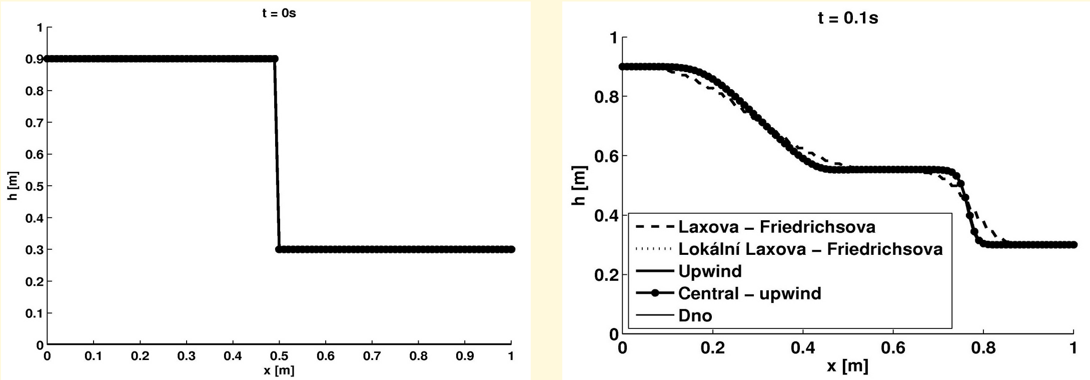
$$\begin{aligned} h_t + (hv)_x &= 0, \\ (hv)_t + \left(hv^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)_x &= 0 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Obsah
106. strana ze 161
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka/Okno

na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ s počátečními podmínkami (Obr. 3.4 vlevo)

$$h(x,0) = \begin{cases} 0.9, & x \in \langle 0, 0.5\rangle, \\ 0.3, & x \in (0.5, 1\rangle, \end{cases} \qquad v(0,x) = 0, x \in \langle 0, 1\rangle. \tag{3.33}$$

Tuto úlohu řešíme Laxovou-Friedrichsovou metodou, lokální Laxovou-Friedrichsovou metodou, metodou central-upwind a metodou typu upwind. Na obrázku 3.4 vpravo vidíme řešení v čase $t = 0.1s$. Je patrné podobné množství numerické difúze u lokální Laxovy--Friedrichsovy metody, metody central-upwind a metody typu upwind, naopak mnohem vyšší množství u Laxovy-Friedrichsovy metody.



Obr. 3.4 Porovnání vlivu numerické difúze na řešení.

3.7. Několik poznámek ke konzistenci a stabilitě

Pochopitelně i v případě metod s vysokým rozlišením požadujeme, aby byla zajištěna stabilita a konzistence numerické metody. Tím bude podle Laxovy věty zajištěna i konvergence k danému řešení. Stabilitu metody zajišťujeme, jak již bylo uvedeno dříve, splněním CFL podmínky a také použitím limiterů zabraňujících vzniku umělých oscilací u metod vyšších řádů. Konzistenci pak požadujeme ve smyslu následující definice.

Definice 3.3. Řekneme, že *numerický tok je konzistentní* s homogenní rovnicí $u_t + [f(u)]_x = 0$, jestliže při konstantní hodnotě funkce $u(x,t) = \bar{u}$ platí, že se hodnota numerického toku redukuje na hodnotu $f(\bar{u})$, platí tedy

$$F(\bar{u}, \bar{u}, \ldots, \bar{u}) = f(\bar{u}), \forall \bar{u} \in \mathbb{R}, \tag{3.34}$$

a dále pro všechna $u_{j-m}, \ldots, u_{j+k}, \bar{u} \in \langle u_{\min}, u_{\max} \rangle$, $u_{\min}, u_{\max} \in \mathbb{R}$, existuje $K > 0$:

$$|F(u_{j-m}, \ldots, u_{j+k}) - f(\bar{u})| \leqq K \max\{|u_{j-m} - \bar{u}|, \ldots, |u_{j+k} - \bar{u}|\}. \tag{3.35}$$

Je zřejmé, že z platnosti nerovnosti (3.35) automaticky plyne rovnost (3.34).

Uveďme si nyní dva příklady numerických toků a ukažme si jejich konzistenci s nelineární skalární rovnicí $u_t + [f(u)]_x = 0$.

1. $F^n_{j+1/2} = \frac{1}{2}[f(U^n_j) + f(U^n_{j+1})]$,
2. $F^n_{j+1/2} = \frac{1}{2}[f(U^n_j) + f(U^n_{j+1})] - \frac{1}{2}|a^n_{j+1/2}|(U^n_{j+1} - U^n_j), a^n_{j+1/2} = \frac{f(U^n_{j+1}) - f(U^n_j)}{U^n_{j+1} - U^n_j}$.

Pro konzistenci s danou nelineární rovnicí tedy požadujeme splnění nerovnosti (3.35). Jelikož se pohybujeme na jedné časové vrstvě, nebudeme pro jednoduchost uvádět horní index n.

1.

$$\begin{aligned}\left|F_{j+1/2}-f(\bar{u})\right| &= \left|\frac{1}{2}[f(U_j)+f(U_{j+1})]-f(\bar{u})\right| = \\ &= \left|\frac{1}{2}[f(U_j)-f(\bar{u})]+\frac{1}{2}[f(U_{j+1})-f(\bar{u})]\right| \leqq \\ &\leqq \frac{1}{2}\left|f(U_j)-f(\bar{u})\right|+\frac{1}{2}\left|f(U_{j+1})-f(\bar{u})\right|\end{aligned}$$

Dále $\exists C>0$ taková, že

$$|f(U_{j+1})-f(U_j)| \leqq C|U_{j+1}-U_j|, \qquad \forall U_{j+1},U_j \in \langle U_{\min},U_{\max}\rangle. \tag{3.36}$$

Potom

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left|f(U_j)-f(\bar{u})\right|+\frac{1}{2}\left|f(U_{j+1})-f(\bar{u})\right| \leqq \frac{1}{2}C\left|U_j-\bar{u}\right|+\frac{1}{2}C\left|U_{j+1}-\bar{u}\right| \leqq \\ \leqq C\max\left\{|U_j-\bar{u}|,|U_{j+1}-\bar{u}|\right\}.\end{aligned}$$

Zde tedy můžeme položit $K=C$.

2.

$$\begin{aligned}&\left|F_{j+1/2}-f(\bar{u})\right| = \\ = &\left|\tfrac{1}{2}[f(U_j)+f(U_{j+1})]-\tfrac{1}{2}\underbrace{\left|\frac{f(U_{j+1})-f(U_j)}{U_{j+1}-U_j}\right|}_{\leqq C,\forall U_j,U_{j+1}\in\langle U_{\min},U_{\max}\rangle}(U_{j+1}-U_j)-f(\bar{u})\right| \leqq\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqq \quad \tfrac{1}{2}C\,|U_j-\bar u| + \tfrac{1}{2}C\,|U_{j+1}-\bar u| + \tfrac{1}{2}C|U_{j+1}-U_j| \leqq \\
&\leqq \quad \tfrac{1}{2}C\,|U_j-\bar u| + \tfrac{1}{2}C\,|U_{j+1}-\bar u| + \tfrac{1}{2}C\,|U_j-\bar u| + \tfrac{1}{2}C\,|U_{j+1}-\bar u| \leqq \\
&\leqq \quad 2C\max\left\{|U_j-\bar u|, |U_{j+1}-\bar u|\right\}.
\end{aligned}
$$

V tomto případě položíme $K = 2C$.

Tím jsme ukázali konzistenci obou numerických toků s tokem $f = f(u)$.

Pojmy k zapamatování

— metody s vysokým rozlišením

— korekční tok

— limiter

— rekonstrukce funkce

— ustálený stav „klid v jezeře“

— numerická difúze

Kontrolní otázky

1. Co rozumíme pod pojmem metody s vysokým rozlišením?
2. Co je to korekční tok?
3. Jakým způsobem je možné z metody prvního řádu udělat metodu vyššího řádu?
4. Co je to limiter a na čem je založen?
5. Co se rozumí pod pojmem polynomiální rekonstrukce neznámé funkce?

6. Jak je definován speciální ustálený stav „klid v jezeře“?
7. Co je to numerická difúze a u kterých metod ovlivňuje řešení více a u kterých méně?

Příklady k procvičení

1. Ukažte, že funkce $u = u_0(x - at)$ je přesným řešením úlohy (3.1).

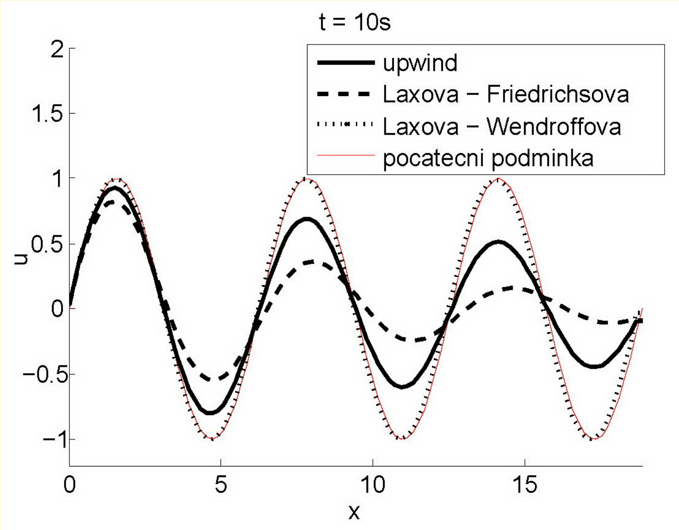
2. Najděte přesné řešení rovnice $u_t + \pi u_x = 0$ s počáteční podmínkou $u_0 = \sin(x)$ v čase $t = 10$. (Porovnejte s řešeními získanými numerickými metodami v obrazovkové verzi skript v kapitole s numerickými simulacemi)

3. Ověřte, že pro volbu numerických toků (3.9) a pro volbu $\Psi(\Theta^n_{j+1/2}) = 1$ je metoda vysokého rozlišení (3.5) shodná s Laxovou-Wendroffovou metodou (2.18).

Klíč k příkladům k procvičení

1. $u_t = -au_0'(x - at)$ a $u_x = u_0(x - at)$ dosadíme do rovnice v (3.1). Dále je splněna počáteční podmínka, neboť když $t = 0$, $u = u_0(x - at) = u_0(x)$.

2. $u = \sin(x - 10\pi) = \sin(x)$. Přesné řešení je tedy rovno počáteční podmínce. Pro porovnání uvádíme řešení získané třemi numerickými metodami. Jak je z Obr. 3.5 vidět, Laxova-Wendroffova metoda, která je druhého řádu, dává nejpřesnější řešení, zatímco řešení získaná zbylými metodami jsou zatížena numerickou difúzí



Obr. 3.5 Řešení úlohy $u_t + \pi u_x = 0, \quad u_0 = \sin(x)$, třemi různými metodami.

3. Dosadíme numerické a korekční toky do (3.5) a upravíme

$$
\begin{aligned}
&U_j^{n+1} = U_j^n - \\
&-\tfrac{\Delta t}{2\Delta x}\left[f(U_j^n)+f(U_{j+1}^n)-|a_{j+1/2}^n|(U_{j+1}^n-U_j^n)-(f(U_{j-1}^n)+f(U_j^n)-|a_{j-1/2}^n|(U_j^n-U_{j-1}^n))\right]- \\
&-\tfrac{\Delta t}{\Delta x}\left[\tfrac{1}{2}|a_{j+1/2}^n|(1-\tfrac{\Delta t}{\Delta x}|a_{j+1/2}^n|)(U_{j+1}^n-U_j^n)-\tfrac{1}{2}|a_{j-1/2}^n|(1-\tfrac{\Delta t}{\Delta x}|a_{j-1/2}^n|)(U_j^n-U_{j-1}^n)\right]= \\
&U_j^n-\tfrac{\Delta t}{2\Delta x}(f(U_{j+1}^n)+f(U_{j-1}^n))+\tfrac{(\Delta t)^2}{2(\Delta x)^2}\left[|a_{j+1/2}^n|^2(U_{j+1}^n-U_j^n)-|a_{j-1/2}^n|^2(U_j^n-U_{j-1}^n)\right]= \\
&U_j^n-\tfrac{\Delta t}{2\Delta x}(f(U_{j+1}^n)-f(U_{j-1}^n))+\tfrac{(\Delta t)^2}{2(\Delta x)^2}\left[a_{j+1/2}^n(f(U_{j+1}^n)-f(U_j^n))-a_{j-1/2}^n(f(U_j^n)-f(U_{j-1}^n))\right].
\end{aligned}
$$

Obsah
112. strana ze 161
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka/Okno

Kapitola 4

Vlastnosti metod

Průvodce studiem

V této kapitole se čtenář seznámí s přehledem základních vlastností metod studovaných v předchozích kapitolách. Pochopí, že zkoumání těchto vlastností je základem analýzy každé používané či nově navržené metody. Čtenář bude také upozorněn, že je v obecném případě obvykle nemožné dosáhnout toho, aby metoda měla všechny vlastnosti, jejichž splnění požadujeme. Čtenáři doporučujeme dát do souvislosti poznatky obecně zmiňované v této kapitole s konkrétními údaji z kapitol předchozích.

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete schopni:

- na základní úrovni posoudit některé vlastnosti metod

- posoudit jejich vzájemné souvislosti
- vybrat ty vlastnosti, které jsou pro danou aplikační oblast důležité

4.1. Konzervativita a konzistence diskrétních aproximací zákonů zachování

Konzervativitě a konzistenci byla pozornost věnována již v předchozích kapitolách. Zde uvedeme pouze několik doplňujících poznámek.

Konzistence může být definována různými způsoby. V případě, ve kterém hledáme klasické řešení, je konzistence definována vzhledem k rovnici. V tomto případě zkoumáme soulad diferenciální rovnice a diferenční rovnice, která ji aproximuje. Lokální diskretizační chybu získáme tak, že do diferenční formule dosadíme klasické řešení úlohy. Takto získaný vztah však již není splněný přesně. Pokud pro časový a prostorový krok jdoucí k nule získáme původní diferenciální rovnici, je příslušná diskrétní aproximace konzistentní s diferenciální rovnicí. V případě, ve kterém hledáme zobecněné řešení, je konzistence definována vzhledem k tokové funkci $f = f(u)$. Zkoumáme soulad této funkce vystupující v původním bilančním vztahu a numerického toku $F = F(U_{j-l}, \dots, U_{j+k})$, viz definice 3.3. Hodnoty funkce F závisí na síťových hodnotách aproximujících přesné řešení. Požadujeme, aby se hodnoty numerického toku blížily k hodnotám exaktní tokové funkce v případě, že se všechny síťové hodnoty U_{j-l} , $\dots$, U_{j+k} blíží k argumentu přesné tokové funkce. Tento typ konzistence tedy souvisí s integrální formulací bilančního vztahu.

Vystupuje-li v úloze zákon zachování, požadujeme, aby i zvolená diskrétní aproximace představovala diskrétní zákon zachování (viz definice 2.11). Požadujeme tedy, aby součet funkčních hodnot síťové funkce na všech časových vrstvách zůstával konstantní. Jinými slovy jde o splnění jedné a té samé vlastnosti pro přesné řešení i jeho aproximaci. Pokud je diskrétní aproximace v divergentním tvaru (2.29), je konzervativní nezávisle na volbě numerické tokové funkce. Pokud je aproximace v jiném tvaru, je nutné její konzervativitu ověřit (např. převedením na divergentní tvar). V některých případech se ukáže, že aproximace je konzervativní pouze za dodatečných předpokladů. Tyto předpoklady se obvykle nazývají podmínky konzervativity a lze je interpretovat jako nějaký důsledek zákona zachování.

4.2. Stabilita

I stabilitě diskrétních aproximací byla v předchozím textu věnována pozornost. V případě evolučních úloh rozumíme obecně stabilitou takovou vlastnost, která zajistí, že při volbě dvou počátečních podmínek je rozdíl získaných řešení závislý pouze na čase a dalších datech úlohy (a nikoliv datech souvisejících s metodou). Takto zavedená vlastnost vede v případě lineárních úloh a metod k tzv. Laxově-Richtmyerově stabilitě (definice 2.6). Částečně lze tento koncept stability použít i pro nelineární úlohy a metody. Obecně se však v případě nelineárních úloh používá spíše přístup založený na pojmu totální variace. Pak hovoříme o tzv. TV-stabilitě (viz [1]). V případě skalárních problémů lze ukázat, že vhodnou vlastností je TVD (total variation diminishing). Tato vlastnost znamená, že přibližné řešení získané touto metodou má v čase nerostoucí totální variaci.

Na závěr tohoto odstavce poznamenejme, že cílem je vyslovit větu, která říká, že je-li metoda konzistentní a stabilní, pak je konvergentní. Takovou větu máme k dispozici pro případ skalární nelineární parciální diferenciální rovnice hyperbolického typu v jedné prostorové dimenzi a pro případ soustav lineárních parciálních diferenciálních rovnic hyperbolického typu. V případě zobecněného řešení je tímto ovšem míněna konzistence tokových funkcí a TV-stabilita. Je třeba si uvědomit, že konzistenci tokových funkcí nelze jednoduše propojit v příslušných důkazech se stabilitou typu (2.75).

4.3. Udržení ustálených stavů

V případě, že základem úlohy je bilanční formulace, tj. máme úlohu s nenulovou pravou stranou, je třeba věnovat speciální pozornost udržení ustálených stavů. V případě hydrologických modelů je základním ustáleným stavem tzv. klid v jezeře. Jedná se o stav, při kterém je rychlost proudění nulová a součet výšky vodního sloupce a hodnoty funkce reprezentující topografii dna v daném bodě je konstantní.

Pokud uvažujeme pouze klasická řešení, tj. řešení dostatečně hladká, lze odvodit i obecnější ustálený stav. Vztah popisující tento ustálený stav je analogií Bernoulliho rovnice. V případě zobecněných řešení nastává se zavedením obecných ustálených stavů zásadní problém. Saint-Venantovy rovnice nejsou obecně zákony zachování, jedná se o bilanční vztahy. Tyto vztahy nelze upravit do divergentního tvaru. Nelze tak pro ně zformulovat tzv. Rankineův-Hugoniotův vztah, který vede na vztah pro ustálený stav. Přesněji řečeno, lze formulovat analogii Rankineova-Hugoniotova vztahu i pro úlohy v nedivergentním (nekonzervativním) tvaru, ta však ustálený stav nepopíše jednoznačně.

V případě numerických metod požadujeme, aby diskrétní aproximace udržovaly analogie teoretických ustálených stavů. Jinak řečeno, chceme, aby při použití zkoumaného diferenčního schématu nedošlo ke změně přibližného řešení, pokud do něj dosadíme hodnoty přesného ustáleného stavu v odpovídajících síťových bodech. Tento vztah může být splněn přesně nebo přibližně. Pak říkáme, že aproximace udržuje ustálený stav přesně nebo přibližně. Je třeba si uvědomit, že zdaleka ne všechny metody diskutovanou vlastnost mají. Není problémem zkonstruovat aproximace, které udržují ustálené stavy v případě hladkého řešení. Zásadní problémy nastávají, pokud připustíme i nehladká řešení. Speciální problém pak představují metody, které jsou založeny na nespojité aproximaci dat. V jejich případě se pak se všemi daty pracuje jako s nehladkými. Pak je nutné zajišťovat udržení ustáleného stavu speciální modifikací příslušné metody.

Obsah
116. strana ze 161
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka/Okno

4.4. Nezápornost řešení

Některé fyzikální veličiny (průřez, hloubka), které vystupují v námi zkoumaných problémech, jsou nezáporné. Tuto vlastnost zachovávají i používané matematické modely. Naším cílem je pochopitelně navrhnout numerické modely, které mají totožnou vlastnost. Nejde pouze o soulad s matematickým modelem. Ve většině případů by mohlo dojít v případě výskytu záporných hodnot i ke zhroucení výpočtu (v řadě algoritmů vystupuje výpočet odmocniny hloubky či průřezu). U některých metod je nezápornost vybraných funkcí zajištěna automaticky. Pokud je součástí metody linearizace, není nezápornost přibližného řešení zajištěna a metodu je třeba vhodně modifikovat. Je tedy třeba věnovat speciální pozornost pozitivní semidefinitnosti metody (viz definice 2.12).

4.5. Numerická vazkost

Až na výjimky lze ukázat, že přibližné řešení získané numerickou metodou je zatíženo numerickou vazkostí (v případě některých modelů je vhodnější hovořit o numerické difúzi). Příliš mnoho numerické vazkosti způsobí umělé „rozmazání“ řešení (srovnej s příkladem v odstavci 3.3). Určité množství vazkosti je nutné pro zajištění stability metody. V případě, že zobecněné řešení není pouze jedno, může numerická vazkost přispět k tomu, že metoda konverguje k fyzikálně relevantnímu řešení. Jednotlivé metody se vyznačují různým množstvím numerické vazkosti.

4.6. Fázový posuv, numerická disperze

Matematické modely studované v tomto učebním textu mají podobný charakter jako modely, ve kterých vystupuje vlnová rovnice. Je-li řešení v daném čase nekonstantní pouze na konečném intervalu, pak v každém pevném následujícím čase se toto řešení od dané konstanty liší také pouze na nějakém konečném intervalu. Tento fakt je dán tím, že změna řešení v prostorové proměnné se šíří v čase konečnou rychlostí (po křivkách zvaných charakteristiky - viz část 1.2.1). V této souvislosti pak hovoříme o šíření vlny. Můžeme zkoumat jakými směry a jakou rychlostí se vlna šíří.

Na rozdíl od přesného řešení je přibližné řešení zatíženo numerickou disperzí. To znamená, že rychlost šíření vlny je závislá na její vlnové délce. Disperze je významným jevem především u metod vyššího řádu. Naším cílem je většinou působení numerické disperze eliminovat. Toho dosáhneme například tak, že použijeme metody s vysokým rozlišením.

Poznamenejme ještě, že disperzní jev hraje důležitou roli při modelování solitonů a šíření vln tsunami [1]. Saint-Venantovy rovnice jsou také často základem pro modelování vln tsunami, protože neobsahují disperzní člen. Podrobnější rozbor této problematiky z hlediska numerické matematiky nalezne čtenář např. v [7].

[1] Pojem soliton je používán ve více významech. Lze říci, že jde o vlny, které si zachovávají tvar v průběhu času (dochází pouze ke změně fázového posuvu při interakci s jiným solitonem). Soliton je řešením rovnice s disperzním členem. Tsunami v češtině znamená přístavní vlny. Jde o vlny vznikající např. při zemětřesení nebo při sesuvu mořského dna. Na volném moři má tsunami vysokou rychlost a malou výšku. U pobřeží její rychlost klesá a výška roste. Doporučujeme čtenáři, aby si právě uvedené údaje dal do souvislosti s tvarem Saint-Venantových rovnic.

4.7. Numerická oblast závislosti a vlivu, CFL podmínka

Jak jsme uvedli v minulém odstavci, má smysl zkoumat otázky, jakými hodnotami z minulosti je řešení v aktuálním čase ovlivněno, a také, jaké hodnoty v budoucnosti řešení v aktuálním čase ovlivní. Definujeme oblast závislosti a oblast vlivu [1].

Oblast závislosti a vlivu lze analogicky definovat i u diskrétních aproximací bilančních vztahů. Je pochopitelné, že například požadujeme, aby numerická oblast závislosti byla v souladu s teoretickou oblastí závislosti. Numerická oblast závislosti souvisí s volbou diferencí a s velikostí prostorového a časového kroku. Podmínka zajišťující právě zmíněný soulad se nazývá Courantova-Friedrichsova-Lewyho podmínka (CFL podmínka - viz část 2.1.6). Lze ji interpretovat jako nutnou podmínku stability. Použijeme-li jednostranné diference, je třeba navíc realizovat tzv. upwinding, tj. výběr diferencí podle směru šíření vln. Problematika souladu oblastí závislosti souvisí také s množstvím numerické vazkosti.

4.8. Riemannův problém a jeho řešení

V kapitole 3 jsme věnovali speciální pozornost řešení úloh s nehladkými daty. Problém jsme však vyřešili částečně formálně. Pro řešení úlohy s nehladkými (v některých případech i s nespojitými) daty jsme použili kombinaci metod odvozených pro data hladká. To samozřejmě není plně korektní postup. Navíc zvolený postup neumožní plnohodnotný popis některých jevů souvisejících se zobecněným řešením.

Počáteční úloha, jejíž počáteční podmínka je dána skokovou funkcí, se nazývá Rieman-

[1] Oblastí vlivu počáteční podmínky rozumíme množinu bodů, v nichž jsou hodnoty řešení ovlivněny počáteční podmínkou. Obráceně hodnota řešení v bodě (x_0, t_0) závisí na hodnotách počáteční funkce v jistých bodech. Množinu těchto bodů označujeme jako oblast závislosti bodu (x_0, t_0) na počáteční podmínce.

nův problém. Pro řešení tohoto problému je třeba použít odpovídající postupy založené na zobecněném pojetí pojmu řešení. Příslušná úloha musí být formulována v zobecněném smyslu. V této formulaci nevystupují diferenciální vztahy, vystupují zde vztahy integrální. Přibližné řešení má na každé časové vrstvě tvar po částech spojité funkce. Výpočet hodnot na další časové vrstvě pak obsahuje řešení úloh s nespojitými daty, tj. řešení Riemannových problémů. Toto je třeba respektovat při konstrukci numerické metody. Lze zkonstruovat metody, které jsou nezávislé na tvaru řešení Riemannova problému, některé metody obsahují přesný řešič Riemannova problému, některé pouze přibližný Riemannův řešič. Metody popsané v kapitole 3 lze zařadit patří do skupiny metod bez Riemannova řešiče nebo do skupiny metod s přibližným Riemannovým řešičem. Při analýze těchto metod musíme věnovat pozornost tomu, zda konvergují (pokud vůbec konvergují) k fyzikálně relevantnímu řešení. Podrobnosti čtenář opět nalezne v [1].

4.9. Řád metody

Ve druhé kapitole věnované metodě konečných diferencí jsme zavedli pojem řád metody. Tímto způsobem zavedený řád metody má smysl pouze v případě hladkých řešení. Tento pojem je používán i pro úlohy s nehladkými daty. V tomto případě je však vhodnější hovořit pouze o formálním řádu metody. Je otázkou, jaký je skutečný řád metody v případě nehladkých dat. V jednoduchých případech lze tento problém vyřešit i analyticky [1]. Ve

[1]Uvažujme např. metodu formálně prvního řádu založenou na jednostranných diferencích pro lineární advekční rovnici s konstantním koeficientem ve tvaru $u_t + au_x = 0$. Postupujeme tak, že srovnáme přesné zobecněné řešení a přesné řešení tzv. modifikované rovnice. Modifikovanou rovnicí rozumíme rovnici, jejíž přesné řešení „lépe aproximuje“ numerické řešení původní rovnice. V právě uvedeném případě se jedná o rovnici $u_t + au_x = \frac{ah}{2}\left(1 - a\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)u_{xx}$. Metoda, která je založena na aproximaci prvního řádu lineární advekční rovnice, je současně aproximací druhého řádu modifikované rovnice. Srovnáním přesných řešení

složitějších případech lze řád metody odhadnout pomocí numerických experimentů. Dále připomeňme, že metody formálně vyšších řádů generují oscilace. Rozdíl mezi teoretickým řešením a řešením přibližným nemá cenu v takovém případě zkoumat.

Na závěr konstatujme, že v kapitole 3 jsme studovali metody s vysokým rozlišením, tj. metody, které byly založeny na přepínání metod formálně prvního a vyššího řádu. Jako celek se tedy jednalo o metody formálně prvního řádu. Přesto získané výsledky jsou přesnější než výsledky získané metodami, které jsou založeny pouze na aproximacích prvního řádu. Řečeno lapidárně, formální řád metody není všechno.

Problematice řádu metod je věnována pozornost v řadě publikací. Jako zdroj, ve kterém lze nalézt i další odkazy, uvádíme [1].

4.10. Validita modelu a kontext

Jedním ze zásadních problémů matematického modelování je otázka vhodnosti zvoleného modelu. Saint-Venantovy rovnice jsou základem řady modelů. V některých případech postačuje využití diferenčních metod aplikovaných na nekonzervativní tvar soustavy Saint Venantových diferenciálních rovnic. Za použití tohoto přístupu získáme obvykle velice jednoduché metody. Ty mohou být dokonce v některých případech upřednostňovány - lze je použít jako základ jednoduchých numerických modelů pro říční proudění či (po jednoduché úpravě) jako základ numerických modelů šíření tsunami v hlubokých vodách.

V případě modelování nehladkých jevů – jako je např. šíření vln u pobřeží – je potřeba vycházet z konzervativního tvaru diferenciálních rovnic, resp. z jejich integrálního tvaru, je třeba využít metody v divergentním tvaru, uplatnit upwinding a věnovat pozornost otázkám spojeným s výše zmíněnými Riemannovy problémy. Jedině tak máme možnost získat

advekční a modifikované rovnice dostáváme odhad řádu aproximace. V tomto případě dostáváme 1/2.

korektní výsledky. Na tomto místě je vhodné uvést, že přestože Saint Venantovy rovnice jsou silným zjednodušením reálných jevů na pobřeží, přesto dávají překvapivě korektní výsledky.

Problematika ustálených stavů byla zmiňována v samostatném odstavci. Zde pouze dodejme, že při modelování mořského proudění hraje důležitou roli i stav typu klid v jezeře (na volném moři lze považovat tsunami za malé odchylky od tohoto ustáleného stavu). Při modelování říčního proudění hrají zásadní roli obecnější ustálené stavy.

V případě říčního proudění hraje důležitou roli modelování rozlivů [1], v případě mořského proudění je důležité korektně modelovat šíření vln na pobřeží. Zvláště u mořského proudění je třeba, jak jsme již zmínili, věnovat pozornost nehladkým řešením. Dále je důležité věnovat pozornost nezápornosti hloubek a průřezů a modelování přechodu mezi suchými a mokrými stavy. Zde lze postupovat různými způsoby. V nejjednodušším případě je pobřežní čára modelována v daném čase jako pevná hranice. Posunutí pobřežní čáry pro potřeby výpočtu v dalším časovém kroku je pak odvozeno z výšky hladiny v hraničních bodech. Další možností, používanou v přístupech označovaných jako shoreline-tracking, je posouvat hranici zatopené oblasti explicitně pomocí heuristicky odvozených vztahů. Třetí používanou možností, založenou na přístupech označovaných jako shock-capturing, je zahrnutí nezatopených výpočetních buněk podél hranice do výpočetní oblasti. Na hranici mezi každou zatopenou a nezatopenou buňkou je pak řešen speciální typ Riemannova problému.

Dalším často opomíjeným problémem je zajištění souladu matematického a numerického modelu s okolím. V řadě případů jsou vstupní data pro numerický model ovlivněna jinými výpočty, aproximacemi či zjednodušenými předpoklady. Jako příklad uveďme využití konsumpční funkce, která je využívána ke stanovení průtoku pomocí hloubky. Tvar této funkce je odvozen ze speciálního tvaru Saint-Venantových rovnic a je ovlivněn zvoleným tvarem průřezu koryta. Tento fakt musíme pochopitelně vzít v našich modelech v potaz.

[1] Rozlivem rozumíme jev, při kterém voda opustí koryto vodního toku

Obsah
122. strana ze 161
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka/Okno

4.11. Shrnutí

V předchozím textu jsme shrnuli některé vlastnosti, které by měl ideální algoritmus pro řešení námi studovaných problémů mít. Bohužel nelze až na speciální výjimky dosáhnout současného splnění všech vlastností. Zde uvedeme jenom několik faktů, které je nutno vzít v potaz:

- Chceme-li minimalizovat numerickou vazkost, je třeba obvykle volit složitější přibližný Riemannův řešič (nebo přesný).
- Pouze metody bez linearizace mohou být formálně vyššího (než druhého) řádu pro hladká data.
- Linearizace porušuje pozitivní semidefinitnost.
- V případě metod bez linearizace nelze však zaručit udržení jiných ustálených stavů, než jsou stavy typu klid v jezeře.
- Metody s Riemannovým řešičem často obsahují linearizaci.
- Pozitivně semidefinitní metody obvykle neobsahují linearizaci. Vyznačují se ovšem relativně velkým množstvím numerické vazkosti.
- Řešení linearizovaného Riemannova problému nemusí být dobrou aproximací původního Riemannova problému.

Metodu volíme vždy tak, že zvážíme, které její parametry jsou pro naší úlohu důležité. Nelze tedy učinit obecné prohlášení a doporučit jednu metodu jako univerzální.

Pojmy k zapamatování

— konzervativita, konzistence a stabilita

— ustálený stav, stacionární řešení

— pozitivní semidefinitnost

— numerická vazkost

— Riemannův problém

— řád metody

Kapitola 5

Další přístupy v oblasti modelování proudění s volnou hladinou

Průvodce studiem

V této kapitole se čtenář seznámí s přehledem dalších metod obvykle používaných v numerickém modelování proudění tekutin. Seznámí se také s dalšími přístupy tvorby matematických modelů v této oblasti.

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete schopni:

- popsat další používané matematické modely

- popsat další používané numerické modely
- srovnat jednotlivé matematické modely a numerické přístupy

Přístupy používané v numerickém modelování dynamiky tekutin lze roztřídit různými způsoby. Každé třídění je pochopitelně zjednodušující. Přesto však je obvykle přínosem proto, že nám umožňuje udělat si ucelený náhled. Základní rozdělení lze provést například v těchto kategoriích:

- Matematický model. Lze vycházet z matematických modelů a z různých úrovní rozlišení. Základem mohou být Navierovy-Stokesovy rovnice, Saint-Venantovy rovnice či modely založené na kinetické vlnové aproximaci. Je také možné vycházet z modelů na jiné úrovni rozlišení, než je makroskopický pohled. Hovoříme pak o mezoskopických či mikroskopických modelech. Modely těchto typů vycházejí z poznatků částicové fyziky nebo například z kinetické Boltzmannovy rovnice.

- Formulace úlohy. Přístupy lze také roztřídit podle typu formulace úlohy. Je možné vyjít z lokální diferenciální formulace, globální integrální bilance, ze silné formulace, nebo ze slabé formulace. [1]

- Numerický model. Pro řešení získané úlohy lze použít různé metody. Lze tedy také realizovat třídění podle metody. Druhou možností je hovořit o numerickém modelu. Tím obvykle míníme souhrnné označení pro matematický model, na který je uplatněn zvolený numerický přístup. [2]

[1] Některé formulace byly popsány v první kapitole věnované matematickým modelům.

[2] Různé numerické modely mohou být založeny na stejném matematickém modelu. Lišit se mohou podle zvolené numerické metody. Zatímco v matematických modelech mechaniky kontinua jsou hledaným výstupem obvykle funkce reálných proměnných, v numerických modelech jsou výstupem funkce diskrétních proměnných.

5.1. Modely proudění s volnou hladinou

V první kapitole jsme popsali modely, které jsou založeny na tzv. Saint-Venantových rovnicích. Pochopitelně se nejedná o jediný možný matematický model. Obecný makroskopický model proudění s volnou hladinou je založen na Navierových-Stokesových rovnicích.

V našem případě se z fyzikálního hlediska jedná o bilanční vztahy popisující proudění nestlačitelné vazké tekutiny. Příslušný problém je pak obvykle formulován jako počátečně-okrajová úloha pro parciální diferenciální rovnice smíšeného typu. Neznámými jsou rychlost a tlak jako funkce prostorové a časové proměnné. Součástí formulace jsou vhodné počáteční a okrajové podmínky. Základním problémem pro použití tohoto postupu je, že pro náš případ dostáváme úlohu s volnou hranicí (ta je tvořena geometrií hladiny, která se v čase mění). Na této hranici je třeba volit odpovídající okrajové podmínky a současně je třeba formulaci úlohy doplnit o matematický popis dynamiky pohyblivé hranice.

Druhou variantou je vzít v potaz i vrstvu vzduchu nad hladinou a modelovat problém jako systém dvou nemísících se vazkých tekutin. V této souvislosti lze i vzduch považovat za nestlačitelnou tekutinu. Při použití těchto přístupů je třeba věnovat velkou pozornost následujícím požadavkům na numerický model:

- Numerická metoda pro advekci volné hranice nebo volného rozhraní voda-vzduch musí být konzervativní, aby nedocházelo k umělému numerickému úbytku či přírůstku množství vody.

- Numerická metoda pro advekci volného rozhraní nesmí generovat umělé numerické oscilace (obdoba tohoto jevu byla popsána v odstavci 3.3).

- Numerická metoda pro advekci volného rozhraní nesmí generovat „umělé kapky vody“ a „umělé bubliny vzduchu“.

- Rozhraní mezi vodou a vzduchem musí být korektně rekonstruuováno z hodnot podílové funkce vystupující v advekční rovnici pro rozhraní.
- Pro potřeby diskretizace Navierových-Stokesových rovnic musí být speciálně konstruovány konečné objemy na rozhraní mezi vodou a vzduchem.

Podrobnosti lze nalézt např. v [9].

Další z možností je použít modely na nižších úrovních. Mezi ně patří modely na mikroskopické úrovni založené na buněčných automatech (lattice gas cellular automata). V tomto případě je tekutina modelována pomocí velkého počtu fiktivních částic, které se pohybují v rámci předem definované pravidelné mříže (čtvercová, šestiúhelníková) a které mají konečný počet stavů. Během simulace dochází k interakcím jednotlivých částic podle předepsaných pravidel. Makroskopické veličiny jsou získány pomocí speciálních „průměrovacích“ výpočtů.

Jinou možností je vyjít z Boltzmannovy kinetické rovnice. Jde o přístup na tzv. mezoskopické škále. V tomto případě předpokládáme, že statistické průměrování přes element fázového prostoru má fyzikální smysl. Nesledujeme tedy dynamiku jednotlivých částic. Hledanou funkcí je hustota toku částic jako funkce směru, rychlosti, polohy a času. Na těchto myšlenkách jsou založeny postupy typu LBM (lattice Boltzmann method). Opět je definována pravidelná síť. Na této síti je provedena diskretizace směrové a rychlostní proměnné. Dále je definována tzv. rovnovážná distribuční funkce a kolizní operátor. Pomocí vypočtených hodnot hustoty toku částic jsou stanoveny makroskopické veličiny. Modely typu LGCA a LBM mají řadu výhod, vykazují však také některé nedostatky. Jejich rozbor lze najít v literatuře [8]. V žádném případě však nelze říci, že některý z modelů popsaných v tomto odstavci je obecně lepší než ostatní.

Obsah
128. strana ze 161
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka/Okno

5.2. Metoda konečných diferencí

Nejdříve uveďme, že základem dále popisovaných metod je diskretizace. To znamená, že místo splnění nějaké diferenciální nebo integrální rovnosti v nekonečném (nespočetném) počtu bodů – kontinuu, požadujeme splnění jiných rovností v konečném počtu bodů. Příslušná metoda nám pak poskytuje návod, jak takové rovnosti ze zadané úlohy získat. Uvažujeme-li počítačovou aritmetiku, pak v daných diskretizačních bodech mohou příslušné funkce nabývat pouze konečného počtu stavů. Lze získat i řadu dalších informací - např. odhady chyb řešení v závislosti na datech úlohy a na zvolených diskretizačních bodech. Volíme tedy opačnou strategii než u modelů vycházejících z mikroskopické škály (tam se vychází z diskrétní formulace a makroskopické veličiny jsou získány speciálním postupem). Mezi těmito přístupy existují souvislosti. Některé analogie jsou pouze formální, hluboké souvislosti vycházejí z odpovídajících oblastí matematické fyziky.

Metodě konečných diferencí jsme věnovali pozornost ve druhé kapitole. Zde pouze shrneme její základní vlastnosti. Obvykle definujeme pravidelnou (obdélníkovou nebo čtvercovou síť). Dále lze postupovat tak, že derivace vystupující v diferenciální rovnici nahradíme diferencemi. V tomto případě aproximujeme rovnici. Druhou možností je přibližně nahradit hledanou funkci Taylorovým polynomem a dosadit jej do rovnice. V obou případech dostaneme algebraické rovnosti, které původní diferenciální rovnici nahrazují pouze přibližně. V obou případech vycházíme z klasické formulace, tj. z diferenciální rovnice. Metodu nelze obecně použít pro hledání zobecněných řešení. Nelze ji také použít v případě obecnějších sítí. Název metody je odvozen z toho, že místo prostředků infinitezimálního počtu využíváme diskrétní aproximace, tj. používáme diference místo derivací. Splnění diferenčních vztahů vyžadujeme pouze v konečném počtu bodů. Někdy je místo metoda konečných diferencí též užíván název diferenční metoda.

5.3. Metoda konečných objemů

Metodě konečných objemů jsme nevěnovali speciální pozornost. Metodu konečných diferencí a metody s vysokým rozlišením lze však interpretovat jako speciální případ této metody. Metoda konečných objemů vychází z globálního integrálního popisu problému. V tomto integrálním tvaru jsou obvykle zákony zachování a bilanční vztahy v mechanice kontinua a dalších disciplínách formulovány. Lokální diferenciální formulace je speciálním důsledkem takové integrální formulace.

Výklad lze formálně pojmout také tak, že lokální diferenciální formulace je vyjádřena jako integrální rovnost na nějaké podmnožině studované oblasti. Tato podmnožina se nazývá konečný objem. Na členy, ve kterých vystupuje divergence, je pak aplikována Gaussova věta. Získáme tak integrální formulaci, která je obvykle původní formulací problému.

Zmiňovaná integrální bilance vyjadřuje vztah mezi stavovými a tokovými veličinami. V případě Saint-Venantových rovnic popisujících proudění v kanále s konstantním obdélníkovým průřezem jsou stavovými veličinami hloubka h a průtok q, tokovou veličinou je opět průtok q a funkce $\frac{q^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2$. V případě metody konečných objemů pak nehledáme aproximace neznámých funkcí ve zvolených bodech, ale aproximace integrálních průměrů neznámých funkcí přes příslušný konečný objem.

Nyní popíšeme zjednodušeně základní myšlenku metody na jednodimenzionálním skalárním případu [1].

Zvolíme prostorový a časový diskretizační krok $\Delta x > 0$, $\Delta t > 0$ a definujeme rovnoměrnou síť bodů $x_j = j\Delta x$, $j \in Z$, $t_n = n\Delta t$, $n \in N_0$, $x_{j+1/2} = x_j + \Delta x/2$, $t_{n+1/2} = t_n + \Delta t/2$. Dále budeme značit $u_j^n = u(x_j, t_n)$. Velkými písmeny budeme značit aproximace, tj. $U_j^n =$

[1] Výklad je zde zaměřen pouze na jednu verzi metody konečných objemů, na tzv. RSA (reconstruct-solve-average) algoritmus Godunovova typu.

$= U(x_j, t_n) \approx u_j^n.$

Zavedeme dále označení integrálních průměrů

$$\bar{u}_j^n = \frac{1}{\Delta x} \int\limits_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, t_n)\ dx \tag{5.1}$$

a

$$\bar{f}_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{\Delta t} \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{j+1/2}, t))\ dt. \tag{5.2}$$

Vyjdeme z integrální rovnosti (skalární verze rovnosti (1.47)

$$\begin{gathered} \int\limits_{x_1}^{x_2} u(x, t_2)\ dx - \int\limits_{x_1}^{x_2} u(x, t_1)\ dx + \int\limits_{t_1}^{t_2} f(u(x_2, t)) - \int\limits_{t_1}^{t_2} f(u(x_1, t)) = 0, \\ \forall (x_1, x_2) \times (t_1, t_2) \subset R \times (0, T), \end{gathered} \tag{5.3}$$

kterou lze při uvedeném označení a pro $(x_{j-1/2}, x_{j+1/2}) \times (t_n, t_{n+1})$ přepsat na

$$\bar{u}_j^{n+1} = \bar{u}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\bar{f}_{j+1/2}^{n+1/2} - \bar{f}_{j-1/2}^{n+1/2}). \tag{5.4}$$

Kartézský součin intervalů $(x_{j-1/2}, x_{j+1/2}) \times (t_n, t_{n+1})$ nazýváme konečný nebo kontrolní objem.

Právě uvedená rovnost je základem metody konečných objemů. Tuto rovnost však nemůžeme použít jako rekurentní formuli pro výpočet hodnot integrálních průměrů hledané funkce na časové vrstvě $n+1$ z hodnot na časové vrstvě n. K tomu, abychom stanovili hodnoty $\bar{f}^{n+1/2}_{j+1/2}$, nám nepostačují hodnoty integrálních průměrů. Potřebujeme znát hodnoty funkce u v bodech $x_{j+1/2}$.

Pokud bychom vyšli z integrální bilance a použili prostředky infinitezimálního počtu, získali bychom za speciálních předpokladů limitními procesy uvažovanými v každém bodě (a tedy také v nekonečném počtu kontrolních objemů) dané oblasti lokální diferenciální bilanci. Integrální průměry funkcí tak splynou s bodovými hodnotami. V případě metody konečných objemů nepotřebujeme použít žádné speciální předpoklady, protože nerealizujeme limitní proces. Platíme za to však daň: nezískáme vztah mezi mezi bodovými hodnotami a jejich integrálními průměry.

Bodové hodnoty hledané funkce lze tedy stanovit pouze přibližně. Vztah 5.4 je tedy nutné nahradit aproximací (integrál z tokové funkce pouze aproximujeme)

$$\bar{U}^{n+1}_j = \bar{U}^n_j - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\bar{F}^{n+1/2}_{j+1/2} - \bar{F}^{n+1/2}_{j-1/2}), \tag{5.5}$$

kde $\bar{U}^n_j \approx \bar{u}^n_j$ a $\bar{F}^{n+1/2}_{j+1/2} \approx \bar{f}^{n+1/2}_{j+1/2}$. Další postup je následující. Pomocí integrálních průměrů $\bar{U}^n_j$ je zkonstruována funkce $U^n = U^n(x)$ aproximující řešení na n-té časové vrstvě. Tento krok se nazývá rekonstrukce nebo interpolace (reconstruction). Rekonstrukci nelze však provést zcela libovolně. Základním požadavkem je, aby integrální průměr rekonstruované funkce $U^n = U^n(x)$ byl na kontrolním objemu $\langle x_{j-1/2}, x_{j+1/2}\rangle$ roven $\bar{U}^n_j$. Současně předpokládáme, že funkce je po částech spojitá. Obvykle se jedná o polynom na každém z kontrolních objemů. Další požadavky kladené na funkci mají zajistit, aby funkce měla stejnou totální variaci jako rekonstrukce získaná použitím po částech konstantní funkce.

Máme-li k dispozici rekonstrukci funkce, použijeme ji jako počáteční podmínku pro úlohy řešené na rozhraních mezi konečnými objemy

$$
\begin{aligned}
u_t + [f(u)]_x &= 0, x \in R, t \in (t_n, t_{n+1}), \\
u(x, t_n) &= \begin{cases} U^n(x_{j+1/2}-), & x < x_{j+1/2}, \\ U^n(x_{j+1/2}+), & x > x_{j+1/2}. \end{cases}
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

Zde je třeba zdůraznit, že obecně (protože používáme po částech spojitou rekonstrukci) neplatí $\bar{U}^n(x_{j+1/2}-) = \bar{U}^n(x_{j+1/2}+)$. Na výše uvedenou počáteční úlohu nahlížíme tedy v zobecněném smyslu, označujeme ji jako (zobecněný) Riemannův problém a k jejímu řešení je třeba vyvinout speciální postupy. V případě, že počáteční data hladká jsou, řešíme úlohu standardními postupy. V obou případech je nutné zvolit vhodné omezení na časový krok. V prvním případě, aby nedošlo k vzájemnému ovlivnění řešení počátečních úloh na různých konečných objemech, ve druhém případě musíme navíc zajistit, aby počáteční data potřebná pro výpočet byla hladká. Omezení na časový krok je obvykle vyjádřeno pomocí tzv. Courantovy-Friedrichsovy-Lewyho (CFL) podmínky (popsáno například v části 2.1.6). Krok metody obsahující řešení počáteční úlohy se nazývá řešení (solve).

Posledním krokem je dosazení do (5.5). Tak stanovíme integrální průměry na další časové vrstvě. Tento krok se nazývá průměrování (average).

Metoda konečných objemů může být vykládána různými způsoby. Jeden z výkladů se nazývá omezování toků (flux limiting) a je založen na přístupu analogickém k postupu popsaném v kapitole 3 o metodách s vysokým rozlišením. Byla vyvinuta celá řada algoritmů metody konečných objemů a tato oblast je stále polem aktivního výzkumu. Podrobnosti lze opět najít např. v [1]. Námi popsaná verze metody má některé nedostatky – především v případě, pokud ji chceme použít ve více prostorových dimenzích. V této situaci je často vhodné použít vícedimenzionální metody typu upwind, například metody RDS (residual distribution schemes).

Obsah

133. strana ze 161

Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

5.4. Metoda konečných prvků

Metoda konečných prvků patří mezi přístupy Galerkinova typu, které jsou založeny na zobecněné formulaci úlohy.

V předchozím textu jsme se seznámili s klasickou formulací úlohy (která je základem metody konečných diferencí), s formulací založenou na integrálním bilančním vztahu (ta je základem metody konečných objemů). Dalšími formulací jsou silná a slabá formulace.

Je třeba si uvědomit, že silných i slabých formulací úlohy může být více. Záleží jak na tvaru integrální rovnosti, tak na volbě množiny přípustných a testovacích funkcí. Je samozřejmě otázkou, která z těchto formulací „nejlépe odpovídá fyzikálnímu pozadí úlohy“.

V případě metody konečných prvků (ale nejen v jejím případě) aplikované na evoluční úlohy vycházíme ze slabé formulace. Často se jedná o semidiskrétní slabou formulaci. Přístup používaný pro slabou formulaci je aplikován na členy s prostorovými derivacemi.

Základní princip metody konečných prvků spočívá v náhradě prostoru testovacích a přípustných funkcí jejich konečně-dimenzionální aproximací. Jinak řečeno, řešení je aproximováno jako lineární kombinace konečného počtu bázových funkcí. Tato aproximace řešení je dosazena do slabé formulace. Pak do takto modifikované slabé formulace dosadíme vybrané testovací funkce. Nalézt řešení úlohy pak znamená najít koeficienty lineární kombinace, která vyjadřuje aproximaci řešení. V případě stacionární úlohy jsou koeficienty konstantami, v případě evoluční úlohy jsou koeficienty funkcemi času. V prvním případě je úloha transformována na obecně nelineární soustavu rovnic, ve druhém případě obdržíme počáteční úlohu pro soustavu obyčejných diferenciálních rovnic. Podle volby bázových funkcí rozlišujeme různé metody. V případě metody konečných prvků jsou bázovými funkcemi funkce, které jsou po částech polynomy (tedy po částech hladké funkce), které nabývají vždy hodnoty 1 ve zvoleném bodě diskretizační sítě a nulové hodnoty ve všech ostatních bodech. Výhodou této volby je, že bázové funkce mají malý nosič. Díky tomu jsou matice, které případně vystupují v diskretizované úloze, řídké.

5.5. Závěr

Uveďme ještě dvě poznámky týkající se použitelnosti metod pro úlohy s nehladkými daty.

- Metody konečných diferencí, metody Galerkinova typu, pseudospektrální metody ani spektrální metody nejsou ve své původní podobě vhodné pro řešení úloh s nehladkými daty. Obvykle lze však tyto metody modifikovat tak, že využijeme přístupy, které jsou používané v metodě konečných objemů [1], tj.

  – využití Riemannových řešičů,

  – aproximaci hledané funkce pomocí po částech spojitých funkcí,

  – modifikace této aproximace tak, aby nedocházelo k růstu totální variace.

  V některých případech bývá použít jiný analogický přístup, který nahrazuje některé komponenty potřebné pro korektní řešení obecných úloh. Příkladem může být využití umělé numerické vazkosti či využití přepínání toků prvního a vyššího řádu. Výklad lze pochopitelně pojmout i tak, že v metodě konečných objemů také nejdříve volíme přístup, kdy nepoužíváme právě zmíněné modifikace, a poté prohlásíme, že pro řešení obecnějších úloh je třeba tyto modifikace implementovat.

- Existují metody, které jsou kombinacemi výše uvedených metod. Jednou z nich je např. nespojitá Galerkinova metoda (DGFEM, discontinuous Galerkin finite element

[1] Jedná se o důsledek historického vývoje metod. Problémy s nehladkými daty byly nejdříve řešeny právě pomocí metody konečných objemů nebo pomocí metod, které byly později jako metoda konečných objemů interpretovány.

Obsah
135. strana ze 161
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka/Okno

method). Tato metoda používá k aproximaci hledané funkce obecně nespojitou funkci a je kombinací metody konečných prvků a metody konečných objemů.

Na závěr poznamenejme, že použití metod, které korektně řeší úlohy s nehladkými daty a tedy splňují veškeré požadované vlastnosti přibližného řešení, je složité jak po implementační stránce, tak po stránce výpočetní. Toto platí zvláště v případě úloh ve více dimenzích s komplikovanou geometrií. Tyto metody proto používáme pouze v případě, kdy je jejich využití opodstatněné.

Pojmy k zapamatování

— metoda konečných diferencí

— metoda konečných objemů

— metoda konečných prvků

Kapitola 6

Simulace

Průvodce studiem

V této kapitole je uvedeno několik numerických experimentů. Čtenář si zde může prohlédnout především řešení úloh založených na Saint-Venantových rovnicích a to jak jednodimenzionálních tak i dvoudimenzionálních. Kromě skalárních úloh jsou úlohy řešeny metodou typu central--upwind popsané v části 3.5.1 a její dvoudimenzionální variantou.

6.1. Skalární úlohy

Mějme skalární lineární úlohu (jedná se o úlohu, která je součástí příkladů k procvičování v kapitole 3)

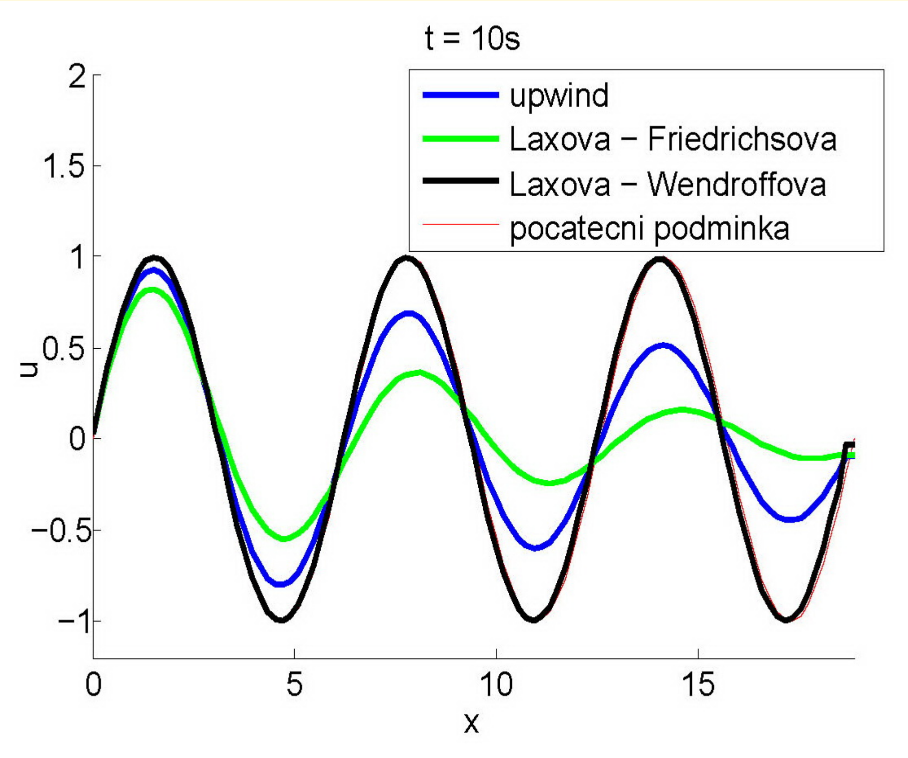
$$\begin{aligned} u_t + \pi u_x &= 0, \qquad t \in (0, 10), x \in \langle 0, 6\pi \rangle, &(6.1)\\ u_0 &= \sin(x), \qquad x \in \langle 0, 6\pi \rangle. &(6.2) \end{aligned}$$

Okrajové podmínky jsou zvoleny takto

$$u(0,t) = u_0(-\pi t), \qquad u_x(6\pi, t) = 0. \tag{6.3}$$

Na Obr. 6.1 vidíme řešení v čase $t = 10s$. získané třemi různými metodami a přesné řešení, které je shodné s počáteční podmínkou. Zatímco řešení získané Laxovou-Wendroffovou metodou se od přesného řešení příliš neliší, řešení získaná metodami prvního řádu vykazují značné nepřesnosti. Simulaci řešení během časového intervalu můžete shlédnout na následující animaci.

Animace řešení úlohy $u_t + \pi u_x = 0, \quad u_0 = \sin(x)$ třemi různými metodami.



Obr. 6.1 Řešení úlohy $u_t + \pi u_x = 0, \quad u_0 = \sin(x)$ třemi různými metodami.

6.2. Jednorozměrné proudění

Nyní si ukažme simulace několika řešení úloh založených na Saint-Venantových rovnicích v jedné prostorové dimenzi. Znázorněné řešení bylo získáno metodou central-upwind.

6.2.1. Proudění obdélníkovým korytem

Následující dvě animace jsou založeny na řešení úlohy popsané Saint-Venantovými rovnicemi (1.25) pro konstantní obdélníkový tvar koryta. První animace znázorňuje proudění korytem s tvarem dna, které je popsáno funkcí $B = B(x)$ (v animaci červená křivka). Počáteční podmínka je zvolena následovně

$$h(x,0) + B(x) = 0,6, \quad v(x,0) = \begin{cases} 0, & x \in (0,1\rangle, \\ 0,5, & x = 0. \end{cases} \tag{6.4}$$

Na začátku koryta je po celou dobu simulace držen konstantní průtok $h(0,t)v(0,t) = 0,3$ a $h_x(0,t) = 0$ a na konci je zvoleno $h_x(1,t) = 0$ a $v_x(1,t) = 0$. Všimněte si, že dochází k ustálení řešení, ale nejedná se o korektní ustálený stav, kdy $\boldsymbol{u}_t = 0$. V takovém případě by totiž nutně musel být průtok konstantní ($q_x = 0$) na celém intervalu, což jak vidno není. Metoda central-upwind totiž zachovává pouze speciální ustálený stav „klid v jezeře“, zatímco zde se jedná o obecný ustálený stav, který tato metoda nezachovává. Konstrukce metody zachovávající obecné ustálené stavy je nad rámec těchto skript, čtenář ji může nalézt například v [7].

Jednorozměrné proudění obdélníkovým korytem I.

Obsah

142. strana ze 161

Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Druhá animace znázorňuje opět proudění popsané Saint-Venantovými rovnicemi (1.25). Je zvolen jiný tvar dna. Počáteční podmínka je zde zvolena následovně

$$h(x,0) = 0,1, \quad v(x,0) = \begin{cases} 0, & x \in (0,1\rangle, \\ 0.5, & x = 0. \end{cases} \tag{6.5}$$

Na začátku koryta je po celou dobu simulace držen konstantní průtok $h(0,t)v(0,t) = 0,05$ a $h_x(0,t) = 0$ a na konci je zvoleno $h_x(1,t) = 0$ a $v_x(1,t) = 0$. I zde je možné si všimnout problémů s udržením obecného ustáleného stavu jako v předchozím případě.

Obsah
143. strana ze 161
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka/Okno

Jednorozměrné proudění obdélníkovým korytem II.

6.2.2. Proudění lichoběžníkovým korytem

Proudění říčním korytem je také možno popsat jako jednorozměrné proudění korytem lichoběžníkového tvaru, který je proměnný. Podrobněji byla pozornost obecnému tvaru Saint-Venantových rovnic věnována v části 1.1.1. Na následujících animací jsou tato proudění znázorněna. Upozorňujeme, že se i přes uvedenou vizualizaci skutečně jedná o jednorozměrnou úlohu (tj. v řezech kolmých na směr proudění je v korytě konstantní výška hladiny a rychlost proudění). Dále, že na osách jsou dosti rozdílná měřítka. Výška hladiny je pro lepší orientaci znázorněna pomocí modré plochy. K řešení je použita metoda central-upwind.

První animace znázorňuje proudění proměnným lichoběžníkovým korytem s konstantním spádem ($B_x =$ konst.). Počáteční podmínka je zvolena jako konstantní hladina a konstantní rychlost proudění po celé délce koryta

$$h(x,0) + B(x) = 0,5, \quad v(x,0) = 2, \quad x \in \langle 0, 1000 \rangle. \tag{6.6}$$

Na začátku koryta je po celou dobu simulace držen konstantní průtok $h(0,t)v(0,t) = 1$ a $v_x(0,t) = 0$ a na konci je zvoleno $h_x(1000,t) = 0$ a $v_x(1000,t) = 0$.

Jednorozměrné proudění proměnným lichoběžníkovým korytem s konstantním spádem.

Obsah
146. strana ze 161
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka/Okno

Druhá animace znázorňuje proudění proměnným lichoběžníkovým korytem s proměnným spádem ($B_x \neq$ konst.). Počáteční a okrajové podmínky jsou zvoleny stejně jako v předchozím případě.

Jednorozměrné proudění proměnným lichoběžníkovým korytem s proměnným spádem.

Obsah
147. strana ze 161
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka/Okno

6.3. 2D proudění obecným terénem

Na závěr ještě dvě ukázky simulací dvourozměrného proudění, které lze popsat Saint-Venantovými rovnicemi (1.44). Tyto úlohy stejně jako metody na jejich řešení jsou nad rámec těchto skript, uvádíme je zde jako motivaci pro studium jednorozměrných metod, na kterých jsou založeny a jako ukázku jejich využití v hydrologii. K řešení úloh v následujících animací byla použita metoda, která je založena na principu metody central-upwind. Čtenář ji může nalézt například v [4].

6.3.1. Protržení hráze

Tato animace znázorňuje protržení přehrady a následný rozliv vody do okolního terénu.

6.3.2. Rozliv

V této animaci je znázorněna simulace rozlití povodňové vlny do krajiny a poté ústup vody zpět do původního koryta.

Kapitola 7

Interaktivní test

Test zahájíte kliknutím na tlačítko „Zacátek testu“. U otázek, kde lze volit jen jednu odpověď (test nedovolí zaškrtnout více odpovědí), je správná odpověď bodována počtem bodů uvedených v závorce u zadání a špatná odpověď je bodována 0 body. U otázek, kde lze volit více správných odpovědí, je součet bodů správných odpovědí uveden v závorce u zadání a za každou špatnou odpověď bude odečten jeden bod.

Zacátek testu

1. (2b.) Pro které délky časových kroků bude Laxova-Friedrichsova metoda stabilní, pokud řešíme rovnici $u_t - 2u_x = 0$ s diskretizačním krokem $\Delta x = 0{,}1$.

   - [ ] $\Delta t = 0.02$
   - [ ] $\Delta t = 0.04$
   - [ ] $\Delta t = 0.06$
   - [ ] $\Delta t = 0.08$

2. (2b.) Jakého řádu je Laxova-Friedrichsova metoda?

- [ ] prvního
- [ ] druhého
- [ ] třetího

3. (2b.) Jakého řádu je Laxova-Wendroffova metoda?
   - [ ] prvního
   - [ ] druhého
   - [ ] třetího

4. (3b.) Které z následujících metod patří mezi centrální metody?
   - [ ] Laxova-Friedrichsova
   - [ ] Laxova-Wendroffova
   - [ ] MacCormackova
   - [ ] Metoda typu upwind

5. (2b.) Který z následujících tvarů metody typu upwind je vhodné použít pro řešení rovnicce $u_t - 2u_x = 0$?
   - [ ] $U_j^{n+1} = U_j^n - 2\dfrac{\Delta t}{\Delta x}(U_{j+1}^n - U_j^n)$
   - [ ] $U_j^{n+1} = U_j^n + 2\dfrac{\Delta t}{\Delta x}(U_{j+1}^n - U_j^n)$
   - [ ] $U_j^{n+1} = U_j^n - 2\dfrac{\Delta t}{\Delta x}(U_j^n - U_{j-1}^n)$
   - [ ] $U_j^{n+1} = U_j^n + 2\dfrac{\Delta t}{\Delta x}(U_j^n - U_{j-1}^n)$

6. (2b.) Jak je definována lokální diskretizační chyba explicitní metody?

   - [ ] $\boldsymbol{L}^{(n)} = \frac{1}{\Delta t}\left[\boldsymbol{U}^{(n+1)} - \mathcal{H}\boldsymbol{U}^{(n)}\right]$
   - [ ] $\boldsymbol{L}^{(n)} = \left[\boldsymbol{U}^{(n+1)} - \mathcal{H}\boldsymbol{U}^{(n)}\right]$
   - [ ] $\boldsymbol{L}^{(n)} = \frac{1}{\Delta t}\left[\boldsymbol{U}^{(n)} - \boldsymbol{u}^{(n)}\right]$
   - [ ] $\boldsymbol{L}^{(n)} = \left[\boldsymbol{U}^{(n)} - \boldsymbol{u}^{(n)}\right]$

7. (2b.) Jak je definována globální diskretizační chyba explicitní metody v bodě x_j a čase t_n?

   - [ ] $E_j^n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} L_j^n$
   - [ ] $E_j^n = U_j^n - u(x_j, t_n)$
   - [ ] $E_j^n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}(U_j^{n+1} - u(x_j, t_n))$
   - [ ] $E_j^n = \frac{1}{\Delta t}(U_j^n - u(x_j, t_n))$

8. (2b.) Jak je definován řád konzistence metody? Největší přirozené číslo p, pro které existuje konstanta $C_L > 0$ taková, že pro všechna j a n taková, že $T \geqq n\Delta t$ platí

   - [ ] $E_j^n \leqq C_L(\Delta x)^p$ pro $\Delta t \to 0$
   - [ ] $L_j^n \leqq C_L(\Delta x)^p$ pro $\Delta t \to 0$
   - [ ] $E_j^n \leqq C_L(\Delta t)^p$ pro $\Delta t \to 0$
   - [ ] $L_j^n \leqq C_L(\Delta t)^p$ pro $\Delta t \to 0$

9. (2b.) Jaké jsou postačující podmínky k tomu, aby lineární metoda byla konvergentní?

   - [ ] stabilita a pozitivní semidefinitnost
   - [ ] konzistence a udržení ustálených stavů
   - [ ] konzistence a stabilita
   - [ ] nízká numerická difúze a žádné umělé oscilace

10. (2b.) Které z následujících metod je pozitivně semidefinitní? Pro velikosti Δt a Δx

nejsou dány žádné podmínky.

- ☐ $U_j^{n+1} = \frac{1}{2}(U_{j-1}^n + U_{j+1}^n)$
- ☐ $U_j^{n+1} = U_j^n + \frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{\Delta x}$
- ☐ $U_j^{n+1} = U_j^n + \Delta t(U_{j+1}^n - U_j^n)$
- ☐ $U_j^{n+1} = U_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x}(U_{j+1}^n - U_j^n)$

11. (2b.) Určete hodnotu přesného řešení úlohy následující úlohy v čase $t = 6$ a bodě $x = 8$

$u_t - \frac{1}{2}u_x = 0$

$u_0 = -(x-10)^2 + 5.$ ☐

12. (2b.) Ve kterém místě jsou korekční toky metody s vysokým rozlišením nejmenší?

- ☐ V bodech, kde je neznámá funkce konstatní
- ☐ V bodech, kde je skok v neznámé funkci
- ☐ V bodech, kde neznámá funkce nabývá ostrého lokálního extrému

13. (2b.) Ve kterém místě jsou korekční toky metody s vysokým rozlišením největší?

- ☐ V bodech, kde je neznámá funkce konstatní
- ☐ V bodech, kde je skok v neznámé funkci
- ☐ V bodech, kde neznámá funkce nabývá ostrého lokálního extrému

Konec testu

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:

Výsledky

Pro ukončení testu je třeba kliknout na tlačítko „Konec testu“. Opravení testu se provede kliknutím na tlačítko „Výsledky“, správné odpovědi budou označeny zeleně a červeně budou označeny odpovědi chybné. Při použití otázky s tvořenou odpovědí se správná odpověď zobrazí v rámečku umístěném vpravo dole v navigačním panelu po kliknutí na tlačítko „Odpoved“.

Literatura

[1] LeVeque, R.J.: *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems.* Cambridge Texts in Applied Mathematics **31** (2004)

[2] Crossley, A. J. *Accurate and efficient numerical solutions for Saint Venant equations of open channel flow.*

[3] Straškraba, I. *Theory and Praxis of Mathematical Modelling of Hydrodynamical Processes.*

[4] Kurganov, A. and Levy, D.: *Central-Upwind Schemes for the Saint-Venant System.* Mathematical Modeling and Numerical **36** (2002), 397–425

[5] Kurganov, A. and Tadmor, E.: *New High-Resolution Central Schemes for Nonlinear Conservation Laws and Convection-Diffusion Equations.* Journal of Computational Physics **160** Issue 1 (2000), 241–282

[6] Črnjarič-Zič, N., Vukovič, S. and Sopta, L.: *Balanced finite volume WENO and central WENO schemes for the shallow water and the open-channel flow equations*. Journal of Computational Physics **200** Issue 2 (2004), 512–548

[7] George, D.L.: *Finite Volume Methods and Adaptive Refinement for Tsunami Propagation and Innundation*. University of Washington, Ph.D. Thesis, (2006)

[8] Wolf-Gladrow, D.A.: *Lattice gas celluar automata and lattice Boltzmann models: an introduction*, Lecture notes in mathematics **1725** (2000)

[9] Gueyffier, D., Li., J., Nadin, A, scardovelli, R. and zaleski, S.: *Volume-of-Fluid Interface Tracking with Smoothed Surface Stress Methods for Three-Dimensional Flows*. Journal of Computational Physics **152** (1999), 423–456

Rejstřík