MATEMATICKÉ MODELOVÁNÍ A METODA KONEČNÝCH PRVKŮ

Radim Blaheta

Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století* (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Radim Blaheta
MATEMATICKÉ MODELOVÁNÍ A METODA KONEČNÝCH PRVKŮ

© Radim Blaheta, 12. června 2012, 22:00
ISBN

Předmluva

Čtenář dostává do rukou text, vzniklý na základě přednášek, které jsem vedl pro studenty různých oborů magisterského a doktorského studia na VŠB-TU v Ostravě během uplynulých dvaceti let. Při zpracování jsem se snažil využít nejen zkušeností z přednášek, ale také zkušeností z vlastního výzkumu, který byl, vzhledem k mé práci na Ústavu geoniky AV ČR, motivován výpočetně náročnými aplikacemi metody konečných prvků v inženýrské oblasti s využitím iteračních metod. Iterační metody jsou také obsahem navazujícího přednáškového kurzu.

Přednášených kurzů se zúčastňují studenti a doktorandi více či méně teoretických oborů, a proto se snažím, aby byl učební text soběstačný, aby se nerozvíjel do šíře, ale ukazoval základní myšlenky potřebné k porozumění metodě konečných prvků a jejímu použití v matematickém modelování. Uvádím přitom řadu odkazů, abych zájemcům o vlastní vědeckou práci ukázal, kde najít další informace, které mohou potřebovat.

Rád bych poděkoval studentům, kteří byli inspirací při promýšlení metodiky výkladu, a také doc. Daliborovi Lukášovi za dlouholetou spolupráci při realizaci kurzů. Děkuji také projektu Matematika pro inženýry 21. století, který mě přinutil dlouho zamýšlený učební text dokončit. Velmi oceňuji pomoc dr. Oldřicha Vlacha při závěrečné redakci textu a za cenné připomínky děkuji také recenzentovi prof. Pavlu Burdovi z ČVUT v Praze.

Čtenářům budu velmi vděčný za sdělení všech připomínek.[1]

Tento i ostatní v rámci projektu Matematika pro inženýry 21 století připravované výukové materiály lze najít na stránkách http://mi21.vsb.cz/.

V Ostravě, duben 2012 Radim Blaheta

[1] Všechny připomínky (výhrady, komentáře a doporučení) k textu zasílejte na e-mailovou adresu: radim.blaheta@ugn.cas.cz

Obsah

Kapitola 1

Úvod, matematické modelování

Tento text by čtenáři rád poskytl představu o matematickém popisu fyzikálních procesů[1] pomocí okrajových a počátečních úloh pro obyčejné a parciální diferenciální rovnice a o řešení těchto úloh metodou konečných prvků. Budeme se snažit ukázat co nejvíce myšlenek a přístupů s využitím co nejjednoduššího aparátu. Základním požadavkem je pro nás srozumitelnost, nikoliv obecnost či úplnost, někde nahradíme přesné, ale technicky náročné, odvozování pomocí intuice. Jde nám o to oslovit co nejvíce čtenářů, které zajímá matematické modelování ve smyslu využití numerického řešení okrajových úloh pro řešení inženýrských problémů.

Matematické modelování vychází z určení základních kvantifikovatelných (měřitelných) veličin, které charakterizují určitou fyzikální situaci nebo proces. Takovými veličinami může být teplota a tepelný tok, posunutí bodů při zatížení tělesa a síly působící na jeho části, rychlost pohybu, elektrický potenciál apod. Tyto veličiny a vztahy mezi těmito veličinami vytvářejí matematický model.

Při formulaci matematických modelů musíme zanedbávat souvislosti, které jsou méně významné, jinak by vytvořené modely byly příliš složité, těžko řešitelné, srozumitelné pro použití. Pokud je ovšem zjednodušení velké, pak řešení modelu nebude odpovídat skutečnosti a pak je naopak potřeba přikročit k doplnění a použití často mnohem složitějších modelů. Je dobré vědět, že existují hierarchie modelů, které jsou postupně více a více složitější. Proto také nesmíme zapomínat na ověřování vztahu modelu a skutečnosti, kterému se říká validace modelu a které má ukázat přesnost a vypovídací schopnost modelu přes přijatá zjednodušení. Jen po řádné validaci můžeme model používat k predikci nových stavů a dějů.

Matematický model může být formulován jako soustava rovnic a nerovnic. V našem kurzu budeme pracovat s modely, které jsou formulovány jako okrajové nebo počáteční úlohy pro diferenciální rovnice. Pokud chceme takový matematický mo-

[1] V tomto učebním textu jde výlučně o fyzikální procesy a také historicky byly právě fyzikální procesy nejdříve objektem matematického popisu a modelování. Nicméně obdobným způsobem jsou dnes modelovány i procesy chemické, biologické a dokonce i procesy ekonomické či společenské.

del využít, musíme být schopni vyjádřit nebo aproximovat jeho řešení. V tomto ohledu poskytuje matematika analytická řešení některých speciálních případů, ale především řadu numerických metod pro přibližné řešení obecnějších úloh. Mezi tyto metody patří i metoda konečných prvků, kterou se budeme zabývat. Samozřejmě i zde je nutné ověřovat vztah řešení matematického modelu a přibližného řešení, navíc vzniklého realizací numerických metod na počítači s konečnou aritmetikou. Tomuto ověření se říká verifikace numerické či počítačové realizace modelu.

Celkově můžeme popsaný postup modelování vyjádřit schématem:

1. skutečnost, proces charakterizovaný veličinou u,
2. matematický model s (jediným?) řešením u_M,
3. zjednodušený matematický model s řešením $\tilde{u}_M$,
4. diskrétní model s řešením u_D,
5. numerické řešení na počítači s výstupem u_N.

K popsaným krokům poznamenejme, že zjednodušený matematický model může vzniknout například tak, že zjednodušíme materiálově závislý vztah na lineární, omezíme se na studium fyzikálního jevu pouze v určitém rovinném řezu tělesem a podobně. Diskrétní model pak znamená, že přibližné řešení hledáme jen mezi funkcemi, které lze popsat konečným počtem parametrů či hodnotami ve vybraných oddělených (diskretních) bodech. Numerické řešení pak zahrnuje další nutná zjednodušení jako je např. aproximace oblasti, numerická integrace, numerické řešení soustav lineárních algebraických rovnic i použití nepřesné počítačové aritmetiky.

Pro poznání nebo predikci jevu tedy používáme získané řešení u_N nikoliv skutečnou veličinu u. Je zřejmé, že nás musí zajímat rozdíl (chyba) $u - u_N$, která se skládá z částí

$$u - u_N = (u - u_M) + (u_M - \tilde{u}_M) + (\tilde{u}_M - u_D) + (u_D - u_N),$$

jinými slovy zajímá nás validace $u - u_N$ a verifikace $\tilde{u}_M - u_N$ modelu.

V technice i přírodních vědách hrají významnou roli děje tepelné a mechanické, které v našem kurzu využijeme jako příklady. Z hlediska matematického modelu přitom nemusí být žádný nebo jen nepodstatný rozdíl mezi těmito a dalšími modely, např. modely dějů jako je difuse, filtrace, elektrické pole či laminární proudění. Další modely (např. elektromagnetické pole) jsou opět, přes určitá specifika, velmi podobné. Tato univerzálnost je také jednou z výhod matematického modelování a umožňuje přenášet poznatky z jednoho oboru do druhého.

Formulace matematických modelů má za sebou dlouhou historii. Teoretický přístup, který transformuje přírodní zákony na vztahy mezi měřitelnými veličinami se rozvíjí především od 17. a 18. století. K protagonistům tohoto přístupu patří například G. Galilei (1564–1642), I. Newton (1642–1727), G.W. Leibniz (1646–1716), L. Euler (1707–1783) a mnoho dalších známých vědců. Proces matematizace věd taky znamenal a znamená novou kvalitu poznání[1]. Klasické modely jako vedení tepla, pružnost, proudění, elektromagnetické pole pak byly formulovány v 19. století J.-B. Fourierem (1768–1830), A.-L. Cauchym (1789–1857), C.L. Navierem (1785–1836), G. Stokesem (1819–1903), J.C. Maxwellem (1831–1879) a dalšími vědci. Velký rozvoj matematického modelování a jeho široká aplikace však byly možné až v době počítačů a rozvoje numerických metod, tedy od druhé poloviny 20. století.

V následujícím textu uvažujeme úlohy vedení tepla a pružnosti[2]. Začínáme jednorozměrnými úlohami, kdy se neznámá veličina mění v závislosti na jedné prostorové proměnné. Variační formulaci a numerické řešení metodou konečných prvků probereme nejprve u těchto úloh, protože tak vyniknou základní myšlenky, jejichž odvození je v této situaci technicky nenáročné. Teprve pak se zabýváme řešením úloh na vícerozměrných oblastech, kdy pracujeme s funcemi více proměnných a technicky náročnějším aparátem. Při řešení vícerozměrných úloh využijeme vše co jsme vyvinuli pro úlohy jednorozměrné, ale budeme studovat i některé nové jevy jako je závislost na tvaru oblasti či tvaru konečného prvku apod.

Pro numerické řešení budeme používat metodu konečných prvků (MKP). Půjde nám o odvození algoritmu metody i o analýzu diskretizační chyby, která je důležitá pro spolehlivé používání metody a pro porozumění chování numerické metody. V analýze chyby použijeme jak apriorní, tak aposteriorní odhady.

Poznamenejme, že česká matematika přispěla významě k rozvoji metody konečných prvků. Především u zrodu apriorních odhadů a matematické teorie stojí fundamentální práce M. Zlámala [15, 30] a u zrodu aposteriorních odhadů práce I. Babušky [4]. Jako příklad učebního textu ke kurzu probíhajícímu od začátku let sedmdesátých uveďme [17]. Teorie MKP se přitom silně opírá o teorii Sobolevových prostorů a slabého řešení okrajových úloh, která byla u nás rozvíjena školou J. Nečase [20]. Je také dobré připomenout, že zájem M. Zámala i I. Babušky o metodu konečných prvků byl motivován inženýrskými aplikacemi a s tím související prací jejich kolegů.

Znovu připomeňme, že se budeme snažit o kompromis mezi matematickou přesností a úplností výkladu a čtivostí pro matematického i inženýrského uživatele metody konečných prvků. Snad to umožní i snadný přechod od matematického pojetí metody konečných prvků, které je reprezentováno knihami typu [10, 6, 8, 2] k inženýrskému pojetí, viz např. knihy [11, 28], a opačně k přechodu od inženýrského pojetí k matematické analýze metody konečných prvků. Připomeňme také, že učební text souvisí i s dalšími texty projektu Matematika pro inženýry 21 století.

---

[1] I. Kant (1724–1804) konstatuje, že každá věda je natolik skutečnou vědou, nakolik využívá matematiku.

[2] Zájemci o úlohy proudění můžeme doporučit např. [14], zjemcům o úlohy elektromagnetického pole např. [19].

Kapitola 2

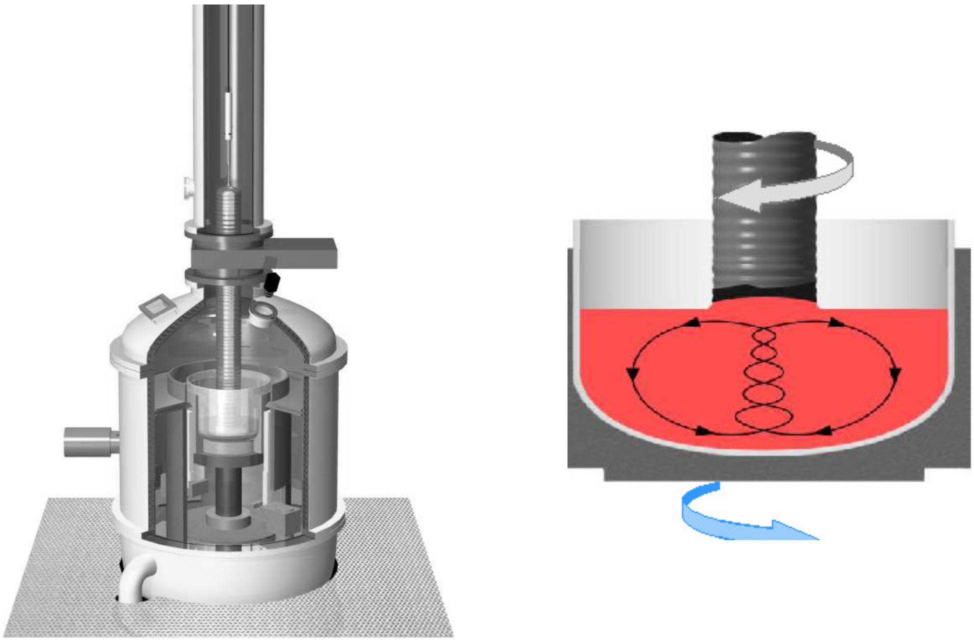
Jednorozměrné modely (vedení tepla, pružnost)

Účelem této kapitoly je ukázat odvození matematického modelu fyzikálního procesu na základě vhodně vybraných základních veličin a fyzikálních vztahů mezi těmito veličinami. Odvození v této kapitole provedeme pro jednoduchou „jednorozměrnou“ situaci, kdy stačí použít funkce jedné reálné proměnné. Později odvození zopakujeme pro obecnou „třírozměrnou“ situaci, kdy potřebujeme složitější aparát funkcí více reálných proměnných.

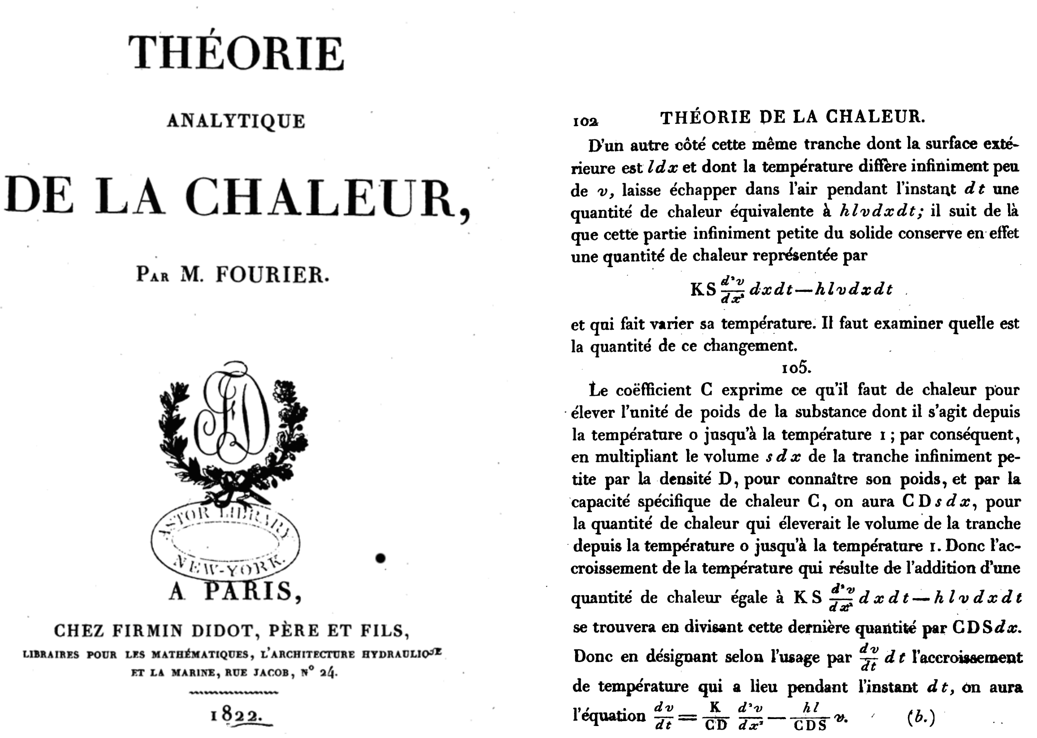
Naším základním modelem bude lineární stacionární model vedení tepla, který lze formulovat jako okrajovou úlohu pro diferenciální rovnici 2. řádu. Ukážeme však také, že tento základní model lze zobecňovat uvažováním materiálové nelinearity, konvekce, časového vývoje a podobně. Tím lze získat řadu variant základního matematického modelu.

Model vedení tepla je důležitý pro studium technologií přípravy materiálů a mnohé další aplikace. Příklad použití vidíme na obr. 2.1, kde je znázorněna výroba monokrystalu kremíku tažením z taveniny Czochralského metodou. Vzniklý monokrystal je používán při výrobě integrovaných obvodů. Při této technologii je důležité sladit zahřívání a pohyb kelímku s roztaveným křemíkem s rychlostí tažení monokrystalu tak, aby nedocházelo k poruchám v krystalové struktuře. K optimalizaci je třeba řešit dosti složitou úlohu vedení tepla s konvekcí danou pohybem taveniny a fázovým rozhraním mezi taveninou a monokrystalem.

Model vedení tepla je také jedním z historicky prvních matematických modelů, který byl popsán již v knize „Théorie analytique de la chaleur“ od známého francouzského matematika J.-B. Fouriera, vydané roce 1822 (viz obrázek 2.2). Poznamenejme, že obdobným postupem lze odvodit také matematické modely dalších fyzikálních jevů jako např. modely difuse nebo filtrace. V závěru kapitoly ukážeme obdobné odvození úlohy pružnosti, která je základem modelů deformace těles pod silovým zatížením, a zmíníme i termopružnost, která je kombinací obou modelů.



Obr. 2.1: Výroba monokrystalu křemíku Czochralského metodou.



THÉORIE

ANALYTIQUE

DE LA CHALEUR,

PAR M. FOURIER.

ASTOR LIBRARY
NEW-YORK.

A PARIS,

CHEZ FIRMIN DIDOT, PÈRE ET FILS,

LIBRAIRES POUR LES MATHÉMATIQUES, L'ARCHITECTURE HYDRAULIQUE ET LA MARINE, RUE JACOB, N° 24.

1822.

D'un autre côté cette même tranche dont la surface extérieure est $l\,dx$ et dont la température diffère infiniment peu de v, laisse échapper dans l'air pendant l'instant dt une quantité de chaleur équivalente à $hlv\,dx\,dt$; il suit de là que cette partie infiniment petite du solide conserve en effet une quantité de chaleur représentée par

$$\mathrm{KS}\frac{d^2v}{dx^2}dx\,dt - hlv\,dx\,dt$$

et qui fait varier sa température. Il faut examiner quelle est la quantité de ce changement.

105.

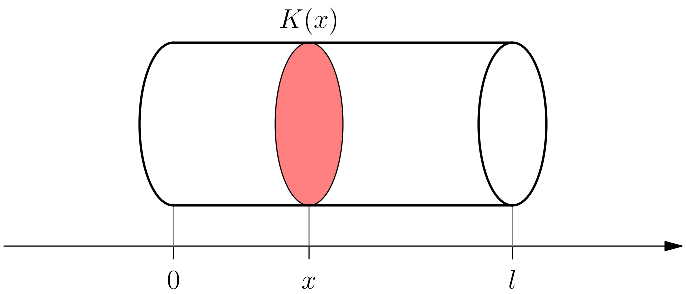
Le coëfficient C exprime ce qu'il faut de chaleur pour élever l'unité de poids de la substance dont il s'agit depuis la température 0 jusqu'à la température 1; par conséquent, en multipliant le volume $s\,dx$ de la tranche infiniment petite par la densité D, pour connaître son poids, et par la capacité spécifique de chaleur C, on aura $\mathrm{CD}s\,dx$, pour la quantité de chaleur qui éleverait le volume de la tranche depuis la température 0 jusqu'à la température 1. Donc l'accroissement de la température qui résulte de l'addition d'une quantité de chaleur égale à $\mathrm{KS}\frac{d^2v}{dx^2}dx\,dt - hlv\,dx\,dt$ se trouvera en divisant cette dernière quantité par $\mathrm{CDS}dx$. Donc en désignant selon l'usage par $\frac{dv}{dt}dt$ l'accroissement de température qui a lieu pendant l'instant dt, on aura l'équation $\frac{dv}{dt} = \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{CD}}\frac{d^2v}{dx^2} - \frac{hl}{\mathrm{CDS}}v$. (b.)

Obr. 2.2: Ukázka z knihy J.-B. Fouriera

2.1 Jednorozměrná úloha vedení tepla

Zajímá nás rozložení teploty v tyči délky l s konstantním příčným řezem $K = K(x)$ o obsahu $|K| = \varkappa$, viz obr. 2.3. Předpokládáme, že tyč je vyrobená z tepelně vodivého materiálu charakterizovaného koeficientem tepelné vodivosti k. Předpokládáme také, že tyč je tepelně izolovaná po celém obvodovém plášti.

Omezení na popsanou situaci je pro nás důležité tím, že při vytváření matematického modelu umožní předpokládat, že teplota je konstantní v každém příčném řezu. Tyto řezy $K = K(x)$ jsou charakterizovány svou vzdáleností x od levého koncového řezu.



Obr. 2.3: Základní situace

Pro formulaci matematického modelu pak využijeme následující veličiny:

- teplotu $u = u(x)$,
- teplotní spád $\varepsilon = \varepsilon(x)$,
- tepelný tok $\tau = \tau(x)$.

Přitom teplotní spád v bodě x je definován jako limitní případ teplotního spádu v úseku $\langle x, x+h\rangle$ pro $h \to 0_+$. Za předpokladu existence derivace $u'(x)$, bude teplotní spád

$$\varepsilon(x_+) = \lim_{h\to 0_+} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = u'(x_+) = u'(x) \tag{2.1}$$

$$\varepsilon(x_-) = \lim_{h\to 0_-} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = u'(x_-) = u'(x). \tag{2.2}$$

Dále uvidíme, že v případě materiálového rozhraní může nastat také případ $\varepsilon(x_+) \neq \neq \varepsilon(x_-)$.

Měrným tepelným tokem v bodě x nazveme množství tepla, které prochází jednotkou plochy příčného řezu $K(x)$ za jednotku času ve směru z části $\langle x-h, x\rangle$ do části $\langle x, x+h\rangle$.

Mezi tepelným tokem a teplotním spádem je vztah daný Fourierovým zákonem:

$$\tau(x) = -k(x)\varepsilon(x), \tag{2.3}$$

kde $k = k(x) > 0$ je koeficient tepelné vodivosti.

Fyzikální jednotky můžeme uvažovat následovně K pro teplotu, Km^{-1} pro teplotní spád, $Js^{-1}m^{-2} = Wm^{-2}$ pro tepelný tok a $Wm^{-1}K^{-1}$ pro koeficient tepelné vodivosti.

Nyní můžeme dokončit popis úlohy vedení tepla. Především specifikujeme situaci na koncových řezech. Například můžeme předpokládat, že

- na levém konci tyče je udržována teplota $\hat{u}$,
- na pravém konci je dán tepelný tok $\hat{\tau}$.

Lze samozřejmě uvažovat i další možnosti a kombinace.

Popis úlohy dokončíme tím, že popíšeme tepelné zdroje působící v tyči, např. teplo, které je vyvíjeno průchodem elektrického proudu. Tyto tepelné zdroje lze popsat hustotou f, která říká, že v úseku $\langle x_1, x_2\rangle$ je za jednotku času vyvíjeno teplo

$$Q(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \varkappa f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.4}$$

Při průchodu elektrického proudu drátem vznikne podle Joulova zákona v úseku $\langle x_1, x_2\rangle$ teplo $Q(x_1, x_2) = RI^2(x_2 - x_1)$, kde R je měrný odpor a I je elektrický proud procházející tyčí. V tomto případě tedy uvažujeme hustotu $f(x) = RI^2$.

2.2 Matematický model vedení tepla

Pokud jsou všechny uvažované veličiny nezávislé na čase a uvažujeme tedy stacionární model vedení tepla (ustálený děj), potom musí být množství tepla v libovolné části tyče neměnné v čase.

Nechť $x \in (0, l)$ a $h > 0$ je tak malé, že $\langle x, x + h\rangle \subset (0, l)$. Potom nulová změna tepla v úseku mezi řezy $K(x)$ a $K(x + h)$ znamená, že

$$\varkappa\tau(x) - \varkappa\tau(x + h) + \int_{x}^{x+h} \varkappa f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 0. \tag{2.5}$$

Pokud bude funkce f spojitá v $\langle x, x + h\rangle$, potom využitím věty o střední hodnotě dostaneme

$$\lim_{h\to 0_+} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \varkappa f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \varkappa f(x_+)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h\to 0_+} \left\{ \frac{\varkappa\tau(x) - \varkappa\tau(x+h)}{h} + \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \varkappa f(\xi)\,\mathrm{d}\xi \right\} \\ &= -\varkappa\tau'(x_+) + \varkappa f(x_+), \end{aligned}$$

Obdobně lze studovat chování za předpokladu, že f je spojitá v $\langle x-h, x\rangle$, s výsledkem $0 = -\varkappa\tau'(x_-) + \varkappa f(x_-)$. Za předpokladu, že f je spojitá v $(0,l)$, dostaneme

$$\tau'(x) = f(x) \qquad \text{pro všechna } x \in (0,l). \tag{2.6}$$

Dosazením z Fourierova zákona a přidáním podmínek, které vyjadřují situaci v koncových řezech, přicházíme k matematickému modelu - okrajové úloze vedení tepla:

$$-(ku'(x))' = f(x) \qquad \text{pro všechna } x \in \Omega = (0,l) \tag{2.7}$$

$$u(0) = \hat{u}, \tag{2.8}$$

$$-ku'(l) = \hat{\tau}. \tag{2.9}$$

Úlohu vedení tepla jsme tedy formulovali jako okrajovou úlohu pro diferenciální rovnici druhého řádu s okrajovou podmínkou Dirichletova typu v $x = 0$ a okrajovou podmínkou Neumannova typu v $x = l$.

Uvedená okrajová úloha je diferenciální formulací problému. Je odvozena z bilanční formulace

$$\varkappa\tau(x_1) - \varkappa\tau(x_2) + \int_{x_1}^{x_2} \varkappa f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 0 \quad \forall (x_1, x_2) \subset (0,l). \tag{2.10}$$

Cvičení 2.1. Dokažte, že pokud u splňuje uvedenou okrajovou úlohu, potom je splněna bilanční podmínka (2.10).

Ve speciálním případě, kdy k, f jsou konstantní snadno určíme obecné řešení rovnice $-ku'' = f$, které bude mít tvar $u(x) = -\frac{f}{2k}x^2 + C_1 x + C_2$, kde C_1 a C_2 jsou konstanty. Také se snadno přesvědčíme, že řešení bude jednoznačně určené, pokud je alespoň jedna okrajová podmínka Dirichletova typu.

Naopak, v případě okrajových podmínek čistě Neumannova typu buď nebude řešení existovat, nebo bude nekonečně mnoho řešení, které se budou navzájem lišit o konstantu. Řešení Neumannovy úlohy bude přitom existovat právě tehdy, když bude splněna podmínka celkové bilance

$$\tau(0) - \tau(l) + \int_0^l f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 0.$$

Poznamenejme, že hovoříme o existenci stacionárního řešení. Otázkami existence a jednoznačnosti řešení se budeme hlouběji zabývat v kapitole 3.

2.3 Přestup tepla a šíření konvekcí

Všimněme si nejprve okrajové podmínky (2.9). Ta se jednoduše zadá v případě izolovaného konce, kdy $\hat{\tau} = 0$. V jiných případech může být výhodné použít podmínku přestupu tepla:

$$\hat{\tau} = \alpha[u(l) - \hat{U}], \quad \text{tj.} \ -ku'(l) = \alpha[u(l) - \hat{U}], \tag{2.11}$$

kde $\hat{U}$ je teplota vnějšího prostředí a α je koeficient přestupu tepla. Nová okrajová podmínka obsahuje jak neznámou funkci tak její derivaci a nazývá se okrajovou podmínkou Newtonova (Robinova) typu. Připomeňme, že v tomto případě předpokládáme, že tepelné děje v tyči neovlivní teplotu vnějšího prostředí $\hat{U}$.

Zkusme uvažovat i přestup tepla obvodovým pláštěm. V tomto případě k bilanci (2.5) přidáme člen

$$\int_x^{x+h} \omega\alpha[\hat{U} - u(\xi)] \,\mathrm{d}\xi, \tag{2.12}$$

kde ω je obvod řezu, α je koeficient přestupu tepla a $\hat{U}$ je teplota vnějšího prostředí. Pro $\hat{U} > u$ musí být člen (2.12) kladný, neboť dochází k toku tepla dovnitř tělesa.

Limitním přechodem pak dostaneme rovnici

$$-\varkappa\tau'(x) + \omega\alpha[\hat{U} - u(x)] + \varkappa f(x) = 0$$

a okrajovou úlohu

$$-(ku')' + k_0 u = f + k_0\hat{U} \qquad \text{v } \Omega = (0, l) \tag{2.13}$$

$$u(0) = \hat{u} \tag{2.14}$$

$$-ku'(l) = \hat{\tau} \tag{2.15}$$

za předpokladu původních okrajových podmínek a $k_0 = \alpha\omega/\varkappa$.

Člen $k_0 u$ se často nazývá reaktivním členem, neboť může znamenat i přísun tepla chemickou reakcí závislou na teplotě.

Poznamenejme, že naše úvahy o přestupu tepla pláštěm ale nejsou v souladu s předpokladem, že teplota je v jednotlivých řezech konstantní. Matematický model (2.13)–(2.15) tedy obsahuje spor, což nás musí nabádat přinejmenším k opatrnosti v používání tohoto modelu.

Nyní uvažujeme šíření tepla konvekcí v tyči či trubici, ve které se prostředí (kapalina nebo tavenina) pohybuje. Předpokládejme takový pohyb prostředí, při kterém se pohyb řezem $K(x)$ děje v celém řezu stejnou rychlostí $p = p(x)$.

Do bilance tepla v úseku $\langle x, x + h\rangle$ potom musíme doplnit teplo přicházející a odcházející díky pohybu prostředí. To znamená, že za jednotku času do úseku přichází objem $\varkappa p(x)$ látky s teplotou $u(x)$ a z úseku odchází objem $\varkappa p(x+h)$ s teplotou $u(x+h)$. K teplu přicházejícímu do části $\langle x, x+h\rangle$ proto přidáme člen

$$c\rho\varkappa\,[p(x)u(x) - p(x+h)u(x+h)]\,,$$

kde c je měrné teplo a ρ je hustota prostředí.

V případě spojité funkce f pak opět úpravou bilanční rovnice a limitním přechodem $h \to 0_+$ dostaneme rovnici pro vedení a konvekci tepla, která má tvar

$$-\varkappa\tau'(x) + \varkappa f(x) - c\rho\varkappa(p(x)u(x))' = 0.$$

Po úpravě pak dostaneme rovnici šíření tepla ve tvaru

$$-\,(ku')' + c\rho(pu)' = f, \tag{2.16}$$

která osahuje i konvektivní člen s první derivací řešení u.

2.4 Časově závislý model

Uvažujme stejnou situaci vedení tepla v tyči jako v části 2.1, ale časově proměnné veličiny, tedy

$$\begin{aligned} u &= u(x,t), \quad & \varepsilon &= \varepsilon(x,t), \quad & \tau &= \tau(x,t),\\ f &= f(x,t), \quad & \hat{u} &= \hat{u}(t), \quad & \hat{\tau} &= \hat{\tau}(t) \end{aligned}$$

a definujme počáteční stav $u(x,t_0) = u_0(x)$.

Bilanci tepla pak provedeme pro úsek $\langle x, x+h\rangle \subset (0,l) = \Omega$ a zároveň pro časový interval $\langle t, t+k\rangle$, kde $k > 0$ a $t > t_0$. Tak dostaneme

$$\int_t^{t+k} [\varkappa\tau(x,s) - \varkappa\tau(x+h,s)]\,\mathrm{d}s + \int_t^{t+k}\int_x^{x+h} \varkappa f(\xi,s)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}s. \tag{2.17}$$

Tato bilance však již nebude nulová, ale bude vyjádřena pomocí rozdílu teplot v různých časových okamžicích a materiálových vlastností: hustoty ρ a měrného tepla c. Bilance (2.17) se bude rovnat následujícímu výrazu s rozdílem teplot

$$\int_x^{x+h} \varkappa\rho c[u(\xi,t+k) - u(\xi,t)]\,\mathrm{d}\xi. \tag{2.18}$$

Pokud rovnosti (2.17) a (2.18) vydělíme $\frac{1}{hk}$ a provedeme limitní přechod $h \to 0_+$, $k \to 0_+$, pak za předpokladu, že f je spojitá, dostaneme rovnici

$$-\varkappa\frac{\partial\tau}{\partial x}(x,t) + \varkappa f(x,t) = \varkappa\rho c\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$$

a počáteční úlohu

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial u}{\partial x}\right) + f \quad \text{pro } x \in (0, l),\ t > t_0, \tag{2.19}$$
$$u(0, t) = \hat{u}(t) \quad \text{pro } t > t_0, \tag{2.20}$$
$$-k \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = \hat{\tau}(t) \quad \text{pro } t > t_0, \tag{2.21}$$
$$u(x, t_0) = u_0(x) \quad \text{pro } x \in \langle 0, l \rangle \tag{2.22}$$

Okrajové podmínky (2.20) a (2.21) nám opět slouží jako příklad a mohou být různě změněny.

2.5 Lineární a nelineární modely

V úloze vedení tepla patří hodnoty f, $\hat{u}$, $\hat{\tau}$ ke vstupním datům modelu či okrajové úlohy. Libovolným vstupním datům přísluší řešení. Jednou z důležitých vlastností okrajové úlohy (2.7)–(2.9) resp. (2.13)–(2.15) je linearita zobrazení

$$(f, \hat{u}, \hat{\tau}) \to u,$$

nazývaná též linearitou úlohy a vyjádřená skutečností, že pokud u_1 a u_2 jsou řešení odpovídající vstupním datům $(f_1, \hat{u}_1, \hat{\tau}_1)$ a $(f_2, \hat{u}_2, \hat{\tau}_2)$ a c je reálná konstanta, potom $u_1 + u_2$ je řešení odpovídající vstupním datům $(f_1 + f_2, \hat{u}_1 + \hat{u}_2, \hat{\tau}_1 + \hat{\tau}_2)$ a cu_1 je řešení odpovídající vstupním datům $(cf_1, c\hat{u}_1, c\hat{\tau}_1)$. Uvedené skutečnosti se často využívá při konstrukci řešení (tzv. superpozice řešení). Uvedená linearita modelu je důsledkem linearity všech vztahů, které používáme při konstrukci.

Uvažovat jen lineární vztahy však vždy nestačí. Příkladem může být teplotní závislost koeficientu tepelné vodivosti, t.j.

$$k = k(u) = k(x, u(x)), \tag{2.23}$$

kterou lze ne vždy zanedbat.

V tomto případě materiálový vztah $\tau = -k(u)u'$ přestane být lineární. Dosazením do bilanční rovnice (2.6) dostaneme okrajovou úlohu

$$-(k(u)u')' = f \quad \text{v } \Omega = (0, l) \tag{2.24}$$
$$u(0) = \hat{u}, \tag{2.25}$$
$$-ku'(l) = \hat{\tau}, \tag{2.26}$$

jejíž řešení nebude lineárně záviset na vstupních datech f, $\hat{u}$, $\hat{\tau}$. V tomto případě hovoříme o nelineárním modelu.

Při řešení nelineárních úloh obvykle využíváme různé způsoby linearizace a iterační postupy. Nejjednodušším případem je následující iterační postup, který je také znám jako Picardova metoda:

Zvolme výchozí aproximaci u^0 a provádějme následující kroky:

pro $i = 1, 2, \ldots$

určíme u^i řešením lineární úlohy

$$\begin{aligned} -(k(u^{i-1})(u^i)')' &= f \quad \text{v } \Omega = (0, l), \\ u^i(0) &= \hat{u}, \\ -k(u^{i-1})(u^i)'(l) &= \hat{\tau}. \end{aligned}$$

iterace ukončíme například když $\max_{x \in (0,l)} |u^{i-1}(x) - u^i(x)| < \delta$, kde δ je zadaná tolerance.

Picardova metoda bude fungovat dobře pokud není nelinearita příliš silná. V případech silnější nelinearity (většího odklonu od linearity) je nutné použít složitější metody. Známé jsou např. metody Newtonova typu.

Nelinearita vznikne také v případě, kdy na konci tyče dochází k přenosu tepla sáláním (radiací). V takovém případě totiž musíme použít nelineární okrajovou podmínku

$$\hat{\tau} = \sigma[u_K^4(l) - \hat{U}_K^4], \tag{2.27}$$

kde $\sigma = \sigma_B \epsilon$ je Stefanova-Boltzmannova konstanta upravená pro uvažovaný povrch a jeho geometrii ($\sigma_B = 5.67 \cdot 10^{-8}\ Wm^{-2}K^{-4}$ a $\epsilon \in \langle 0, 1 \rangle$, $\epsilon = 1$ pro absolutně černé těleso. Teplota musí být v tomto případě zadaná ve stupních Kelvina.

2.6 Nespojitá vstupní data a heterogenní materiálové prostředí

Klasická matematika pracuje s předpokladem spojitosti funkce f, řešení u a jeho derivací prvního a druhého řádu, i koeficientu k a jeho derivace. Fyzikální realita však může obsahovat řadu příčin nespojitosti.

Uvažujme situaci, kdy funkce f, která reprezentuje vnitřní zdroje tepla není spojitá na celé oblasti $\Omega = (0, l)$, ale má v bodě ξ nespojitost (skok). Tento skok může mít různé fyzikální důvody, např. uvažujeme zahřívání průchodem elektrického proudu a v bodě ξ je rozhraní mezi dvěma částmi tyče s různým elektrickým odporem. V takovém případě nám předchozí odvození dává

- diferenciální rovnici v částech $(0, \xi)$ a (ξ, l),
- okrajové podmínky v bodech 0 a l.

Potom potřebujeme dodat další podmínky v bodě ξ, které umožní navázat řešení ze dvou oddělených částí. Těmito podmínkami jsou podmínky přechodu, které vyjadřují spojitost základní veličiny u i toku τ,

$$\lim_{x \to \xi_-} u(x) = \lim_{x \to \xi_+} u(x), \tag{2.28}$$

$$\lim_{x \to \xi_-} -ku'(x) = \lim_{x \to \xi_+} -ku'(x). \tag{2.29}$$

Podmínky přechodu využijeme i v dalších případech, například pokud je v bodě ξ skok v materiálovém koeficientu k.

Poznamenejme, že odvození v sekci 2.2 ukazuje, že můžeme čekat skok v derivaci toku $\tau'(\xi_-) \neq \tau'(\xi_+)$. Rovnice

$$\tau(\xi - h) - \tau(\xi) + \int_{\xi-h}^{\xi} f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \quad \text{a} \quad \tau(\xi) - \tau(\xi + h) + \int_{\xi}^{\xi+h} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

vedou k důkazu spojitosti toku, pokud f je integrovatelná.

Použití podmínek přechodu můžeme ilustrovat následujícím příkladem:

Příklad 2.2. Uvažujme úlohu vedení tepla na $\Omega = (0,1)$ s nulovými Dirichletovými okrajovými podmínkami $u(0) = u(1) = 0$. Nechť dále

a) $k = 1$ a $f = \begin{cases} -1 & \text{v } \Omega_1 = (0, \frac{1}{2}) \\ -1/2 & \text{v } \Omega_2 = (\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$,

b) $k = \begin{cases} 1 & \text{v } \Omega_1 = (0, \frac{1}{2}) \\ 2 & \text{v } \Omega_2 = (\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$ a $f \equiv -1$.

V obou případech dostaneme diferenciální rovnici $-u'' = 1$ na Ω_1 a $-u'' = 1/2$ na Ω_2 a stejné okrajové podmínky. Úlohy a) a b) se ale liší podmínkami přechodu v bodě $1/2$. Díky tomu dostaneme dvě různá řešení. Poznamenejme ještě, že řešení a) nemá v bodě $1/2$ druhou derivaci a řešení b) nemá v bodě $1/2$ ani první derivaci.

Zamyšlení nad podmínkami přechodu i uvedeným případem nás vede k obecnějšímu chápání řešení okrajové úlohy (2.7)–(2.9). Řešení nemusí být vždy hladká funkce se spojitou derivací prvního i druhého řádu. Pokud k a f jsou po částech spojité, tedy spojité v $\Omega \setminus \{\xi_1, \dots, \xi_m\}$, potom řešením okrajové úlohy bude funkce, která je spojitá ale má jen po částech spojitou první a druhou derivaci. (Skok f v ξ indukuje skok v druhé derivaci, skok v k vede ke skoku v první derivaci řešení.) Toto řešení splňuje diferenciální rovnici mimo body $\xi_1, \dots, \xi_m$, ve kterých splňuje podmínky přechodu. Řešení okrajové úlohy samozřejmě splňuje i zadané okrajové podmínky.

2.7 Matematický model lineární pružnosti

V této části nám půjde o popis deformace tělesa působením vnějších sil. Tak jako v části 2.1 uvažujme tyč délky l s konstantním průřezem $K(x)$, která je vyrobena z pružného materiálu s modulem pružnosti E.

Uvažujeme, že tyč je osově zatížena a působí na ni objemová síla (gravitace, setrvačná síla, odstředivá síla, apod.) daná hustotou f. Působení této síly na úsek $\langle x_1, x_2\rangle \subset \langle 0, l\rangle$ má velikost

$$F(x_1, x_2) = \int\limits_{x_1}^{x_2} \varkappa f(x)\,\mathrm{d}x,$$

kde $\varkappa$ je opět obsah řezu $K(x)$. V případě gravitační síly bude $f(x) = \rho(x)g$, kde ρ je hustota a g je gravitační konstanta.

Budeme také uvažovat okrajové podmínky, např. následující
tyč je pevně fixována na řezu $K(0)$,
na řezu $K(l)$ působí tah nebo tlak velikosti $\hat{\tau}$.

Pro formulaci matematického modelu použijeme následující základní veličiny:
posunutí $u = u(x)$,
deformaci $\varepsilon = \varepsilon(x)$,
napětí $\tau = \tau(x)$.

Při osovém zatížení můžeme předpokládat, že změna tělesa spočívá jen ve skutečnosti, že se jednotlivé řezy $K(x)$ posunou do nové polohy $K(x')$ přičemž zůstávají rovinné a kolmé na osu x. Tato změna je tedy charakterizována posunutím $u(x)$ řezů $K(x)$ po zatížení, $u(x) = x' - x$.

Se změnou tělesa souvisí deformace, kterou lze v našem případě rozumět relativní prodloužení či zkrácení úseků tyče. Uvažujme úsek $\langle x, x+h\rangle \subset \langle 0, l\rangle$. Relativní prodloužení či zkrácení ε tohoto úseku lze vyjádřit pomocí posunutí následovně

$$\varepsilon(x, x+h) = \frac{x + h + u(x+h) - x - u(x) - h}{h} = \frac{u(x+h) - u(x)}{h}. \tag{2.30}$$

V případě existence $u'(x)$ bude deformaci v (okolí) bodu x vyjadřovat veličina

$$\varepsilon(x) = \lim_{h\to 0_+} \varepsilon(x,\, x+h) = u'(x), \tag{2.31}$$

kterou nazveme deformací v bodě x. Poznamenejme, že při místním prodloužení bude $\varepsilon > 0$.

Zbývá definovat poslední veličinu, kterou je napětí $\tau(x)$. Představme si rozdělení tyče řezem $K(x)$. Při takovém rozdělení by pravá část tyče působila na levou část silou $T(x)$,

$$T(x) = \varkappa(x)\tau(x). \tag{2.32}$$

Hodnotu $\tau(x)$ nazveme napětím v bodě (řezu) x. Samozřejmě opět předpokládáme, že napětí se na řezu nemění. Zřejmě T i τ budou kladné v případě tahu.

Hookeův zákon (Robert Hooke 1635–1703). Mezi deformací a napětím lze najít vztah závislý především na použitém materiálu, případně i na dalších okolnostech (teplotě, historii zatěžování apod.). V nejjednodušším případě platí lineární Hookův zákon

$$\tau(x) = E(x)\varepsilon(x), \tag{2.33}$$

kde E je modul pružnosti, taky nazývaný Youngův modul pružnosti (Thomas Young 1773–1829).

Fyzikální jednotky můžeme uvažovat následovně m pro posunutí, deformace bude bezrozměrná, $Nm^{-2} = Pa$ pro napětí a rovněž pro modul pružnosti.

Uvažujme opět nejprve stacionární stav, který je charakterizován podmínkou, že výslednice všech sil působících na libovolný úsek tyče je nulová. Pro úsek $\langle x, x+h\rangle \subset \subset (0, l)$ tedy platí podmínka rovnováhy

$$-\varkappa\tau(x) + \varkappa\tau(x+h) + \int_x^{x+h} \varkappa f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 0. \tag{2.34}$$

Stejnými úpravami jako v případě rovnice vedení tepla tedy násobením rovnice $\frac{1}{h}$ a limitním přechodem $h \to 0_+$ a dělením $\varkappa$ dostaneme v případě spojité funkce f rovnici rovnováhy

$$(\tau)' + f = 0 \qquad \text{v } \Omega = (0, l). \tag{2.35}$$

Doplněním okrajových podmínek a využitím Hookeova zákona dostaneme okrajovou úlohu s neznámou funkcí posunutí u:

$$-(Eu')' = f \qquad \text{v } \Omega = (0, l) \tag{2.36}$$

$$u(0) = 0, \tag{2.37}$$

$$Eu'(l) = \hat{\tau}. \tag{2.38}$$

Všimněme si, že z hlediska matematiky se odvozená úloha pružnosti neliší od dříve odvozené úlohy vedení tepla.

2.8 Nestacionární úloha. Dynamika.

V nestacionárním případě uvažujeme veličiny $u(x,t)$, $\varepsilon(x,t)$, $\tau(x,t)$, $f(x,t)$, $\hat{\tau}(t)$ s časovou proměnnou t. Silovou bilanci musíme provést v každém časovém okamžiku, přičemž výslednice sil působících na libovolný úsek nemusí být nulová, ale musí být podle Newtonova pohybového zákona rovna časové změně hybnosti.

Pro libovolný úsek $\langle x, x+h\rangle \subset (0, l)$ a čas $t > t_0$ má tedy platit

$$- \varkappa\tau(x,t) + \varkappa\tau(x+h,t) + \int\limits_x^{x+h} \varkappa f(\xi,t)\,\mathrm{d}\xi = \int\limits_x^{x+h} \varkappa\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi,t)\,\mathrm{d}\xi. \qquad (2.39)$$

Dělením $\frac{1}{h\varkappa}$ a limitním přechodem $h \to 0_+$ dostaneme

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau}{\partial x} + f \qquad \text{pro } x \in (0,l),\ t > t_0.$$

Odtud přicházíme k úloze: Najdi $u = u(x,t)$, $x \in (0,l)$, $t > t_0$ takové, že

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}(E\frac{\partial u}{\partial x}) = f \qquad \text{v } \Omega \times (t_0, \infty), \qquad (2.40)$$

$$u(0,t) = 0 \qquad \text{v } (t_0, \infty), \qquad (2.41)$$

$$E\frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = \hat{\tau}(t) \qquad \text{v } (t_0, \infty), \qquad (2.42)$$

$$u(x,t_0) = U_0(x) \qquad \text{v } \Omega, \qquad (2.43)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t_0) = U_1(x) \qquad \text{v } \Omega. \qquad (2.44)$$

Jde opět o počáteční úlohu. Na rozdíl od nestacionární úlohy vedení tepla zde nacházíme druhou derivaci podle času a přidáváme dvě počáteční podmínky.

Poznámka 2.3. První časová derivace se objevuje i v mechanice v evolučních úlohách, např. v úloze vazkopružnosti, kde

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}(x,t) = \frac{\tau(x,t)}{\eta(x)},$$

η je zde koeficient vazkosti.

2.9 Termopružnost

Představme si situaci, kdy je tyč současně zatížena i zahřívána z teploty $T_0 = T_0(x)$ na teplotu $T = T(x)$. V takovém případě bude posunutí u odpovídat celková deformace ε,

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = \varepsilon_T + \varepsilon_P,$$

kde část deformace ε_T je působena zahřátím nebo ochlazením,

$$\varepsilon_T = \alpha\,(T - T_0)\,,$$

kde $\alpha = \alpha(x)$ je koeficient teplotní roztažnosti. Část ε_P souvisí s vnitřními silami (napětím),

$$\varepsilon_P = \frac{\tau}{E}.$$

Tedy přicházíme k novému vztahu

$$\tau = E\varepsilon_P = E\left(u' - \alpha(T - T_0)\right),$$

který společně s rovnicí rovnováhy vede k okrajové úloze

$$-\left(E\left(u' - \alpha(T - T_0)\right)\right)' = f \qquad \text{v } \Omega = (0, l), \tag{2.45}$$

$$u(0) = 0, \tag{2.46}$$

$$E\left(u'(l) - \alpha(T - T_0)\right) = \hat{\tau}. \tag{2.47}$$

Rovnici rovnováhy lze upravit na vztah

$$-\left(E\left(u'\right)\right)' = f - \left(E\alpha(T - T_0)\right)',$$

který ukazuje že zahřátí či ochlazení můžeme považovat za určitou formu zatížení. Okrajovou úlohu mechaniky přitom sdružíme s úlohou vedení tepla, která určuje hodnoty teploty T. V uvedené situaci je vazba jednostranná, teplota ovlivní mechaniku, ne naopak. Ale pokud bychom uvažovali nestacionární případ dynamiky, můžeme dojít i k plně svázané úloze termopružnosti, když do rovnice vedení tepla přidáme teplo související s časovou změnou deformace.

Termopružnost je příkladem multifyzikálních modelů, které uvažují vztahy mezi různými fyzikálními procesy.

2.10 Shrnutí

Tato kapitola ukazuje dva typy formulace matematických modelů - bilanční, integrální formulaci a diferenciální formulaci. Oba tyto typy formulace lze použít k odvození numerických metod pro přibližné řešení okrajových a počátečních úloh. Z diferenciální formulace lze odvodit metodu konečných diferencí, z bilanční formulace lze odvodit metodu konečných objemů. K odvození a studiu metody konečných prvků však využijeme ještě jiný typ formulace.

Ukázali jsme také příklady různých typů okrajových a počátečních úloh: eliptické úlohy (stacionární vedení tepla a pružnost), parabolické úlohy (nestacionární vedení tepla) a hyperbolické úlohy (nestacionární pružnost - dynamika). Jde o tři základní třídy úloh s různým typem chování. V dalším se zaměříme na eliptické úlohy.

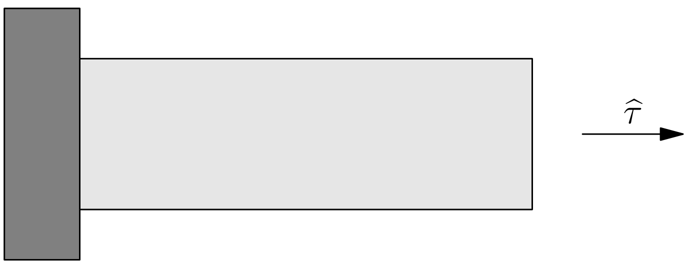
Kapitola 3

Variační formulace úloh

V předchozích kapitolách jsme matematické modely formulovali bilančně nebo pomocí diferenciálních rovnic, v této kapitole odvodíme nové formulace okrajových úloh. Tyto formulace jednak přirozeně zahrnují řešení okrajových úloh s nespojitými vstupními daty, jednak jsou důležité pro odvození metody konečných prvků, což ukážeme v následující kapitole.

3.1 Co je variační formulace

Ve variační formulaci půjde o nové vyjádření typu minima energie nebo rovnosti prací. Takové vyjádření má původ ve fyzice a můžeme je objasnit na jednoduché úloze s osově zatíženou tyčí konstantního průřezu a délky l upevněnou na jednom konci a osově zatíženou tahem $\hat{\tau}$ na druhém konci, viz obr. 3.1. Budeme předpokládat, že objemová síla je nulová nebo zanedbatelná, z čehož plyne, že deformace je konstantní a posunutí bude mít lineární průběh. Posunutí bude tedy určené hodnotou $\bar{u} = u(l)$.



Obr. 3.1: Ilustrativní příklad.

Při nenulovém posunutí w neupevněného pravého konce vzniká v tyči napětí $\tau(w) = E\frac{w}{l}$, které koná práci $W = \int_0^w \tau(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{E}{l}w^2$.

Pro určení $\bar{u}$ můžeme využít jednu z následujících podmínek:

(F1) $\tau(\bar{u}) = E\frac{\bar{u}}{l} = \hat{\tau}$

(F2) $\tau(\bar{u})v = E\frac{\bar{u}}{l}v = \hat{\tau}v$ pro libovolné v,

(F3) $J(\bar{u})$ =min, kde $J(v) = \int_0^v (\tau(w) - \hat{\tau})\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2}\frac{E}{l}v^2 - \hat{\tau}v$.

Matematicky se snadno dokáže, že výše uvedené podmínky jsou ekvivalentní. Tyto podmínky však mají i fyzikální interpretaci. Podmínka (F1) je bilanční a vyjadřuje rovnováhu sil (napětí). Podmínka (F2) dá pro malá v přibližně rovnost

$$\int_0^v \tau(\bar{u} + w)\,\mathrm{d}w = \int_0^v E\frac{\bar{u} + w}{l}\,\mathrm{d}w = \frac{E}{l}\left(\bar{u}v + \frac{v^2}{2}\right) \sim \hat{\tau}v$$

vyjadřující rovnost prací vnitřních a vnějších sil pro velmi malé v (tzv. virtuální posunutí). Podmínka (F3) zase vyjadřuje minimum potenciální energie zatížené tyče.

3.2 Variační formulace okrajové úlohy

Nechť $C\langle 0, l\rangle = C^0\langle 0, l\rangle$ značí množinu spojitých funkcí definovaných na $\langle 0, l\rangle$, a obdobně $C^k\langle 0, l\rangle$ značí množinu spojitých funkcí na intervalu $\langle 0, l\rangle$s derivacemi až do řádu k, které jsou rovněž spojité na $\langle 0, l\rangle$.

Nyní uvažujme obecnější úlohu najít $u \in C^2\langle 0, l\rangle$ tak, aby

$$-(ku')' = f \qquad \text{v} \quad \Omega = (0, l), \tag{3.1}$$

$$u(0) = u_0 \tag{3.2}$$

$$-ku'(l) = \hat{\tau}, \tag{3.3}$$

která reprezentuje úlohu pružnosti s nenulovou objemovou silou (pak $k = E$ a $-\hat{\tau}$ je zadané napětí) nebo úlohu vedení tepla. Diferenciální rovnice vyjadřuje podmínku rovnováhy tak jako podmínka (F1) v předchozí části. Pro převedení na novou formulaci odpovídající podmínce (F2) definujme množinu V testovacích funkcí,

$$V = \left\{v \in C^1\langle 0, l\rangle : \quad v(0) = 0\right\}. \tag{3.4}$$

Funkcím z V se v mechanice říká virtuální (možná) posunutí protože nenarušují předepsané kinematické vazby, což znamená, že pokud u je řešením okrajové úlohy, potom $u + v$ taky splňuje zadanou okrajovou podmínku Dirichletova typu.

Pokud $v \in V$, potom platí

$$\int_\Omega -(ku')'v\,\mathrm{d}x = \int_\Omega fv\,\mathrm{d}x.$$

Integrací per partes pak dostaneme

$$-\left[ku'v\right]_0^l + \int\limits_\Omega ku'v'\,\mathrm{d}x = \int\limits_\Omega fv\,\mathrm{d}x,$$

tedy

$$\int\limits_\Omega ku'v'\,\mathrm{d}x = \int\limits_\Omega fv\,\mathrm{d}x - \hat{\tau}v(l) \quad \forall v \in V. \tag{3.5}$$

Poslední rovnost budeme nazývat variační identitou.

Poznámka 3.1. V případě 1D úlohy lineární pružnosti variační identita představuje princip virtuálních prací formulovaný pro tuhá tělesa J.-L. Lagrangem (1736–1813) a přenesený na deformovatelná tělesa v 19. století. Odvození ovšem neplatí jen pro úlohu pružnosti, ale pro libovolný model reprezentovaný okrajovou úlohou typu (3.1)–(3.3). Pro tuto okrajovou úlohu lze také najít obdobu energetické formulace reprezentované podmínkou (F3) v části 3.1. K energetické formulaci se dostaneme později po vyjasnění obecných vlastností variační identity.

3.3 Obecný tvar a vlastnosti variační identity

Ve variační formulaci (3.5) se již nevyskytuje derivace druhého řádu, což je dobře s ohledem na možný charakter fyzikálních řešení, viz 2.6. Vzhledem k této skutečnosti a charakteru fyzikálních řešení uvažujeme prostor

$$U = U(\Omega): \quad C^1(\Omega) \subset U(\Omega) \subset C^0(\Omega)$$

po částech hladkých funkcí definovaných na $\Omega = \langle 0, l\rangle$, tedy přesněji množinu funkcí, které mají následující vlastnosti:

(U1) jsou spojité na $\langle 0, l\rangle$, tj. $u \in C^0\langle 0, l\rangle$,

(U2) ke každé funkci $u \in U$ lze najít body $\xi_i(u)$, $i = 0, 1, \ldots, m$ tak, že $0 = \xi_0(u) < \xi_1(u) < \ldots < \xi_m(u) = l$, $u \in C^1\left(\xi_{i-1}(u), \xi_i(u)\right)$ pro všechna $i = 1, \ldots, m < \infty$.

(U3) ke každé funkci $u \in U$ lze najít konstantu $K = K(u)$ takovou, že $\mid u'(x) \mid \leqq K$ pro všechna $x \in (\xi_{i-1}(u), \xi_i(u))$, $i = 1, \ldots, m$.

Množina U je lineárním prostorem, protože je uzavřená vzhledem k lineárním operacím sčítání funkcí a násobení funkce číslem. Jak jsme viděli v části 2.6, řešení okrajových úloh patří do prostoru U i v případě nespojitých vstupních dat úlohy.

Prostorem testovacích funkcí pak budeme rozumět množinu

$$V = \{v \in U: \ v(x) = 0 \quad \forall x \in \Gamma_D\}, \tag{3.6}$$

kde Γ_D je množina bodů, ve kterých jsou zadány okrajové podmínky Dirichletova typu.

I v případě testovacích funkcí z širšího prostoru (3.6) odvodíme variační identitu (3.5), kterou lze zapsat ve tvaru

$$a(u,v) = b(v) \qquad \forall v \in V, \tag{3.7}$$

kde v případě naší modelové úlohy bude

$$a(u,v) = \int_\Omega k u' v' \,\mathrm{d}x, \qquad b(v) = \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x - \hat{\tau} v(l). \tag{3.8}$$

Pokud k, f jsou po částech spojité a omezené funkce, potom vlastnosti funkcí z U zaručí možnost integrace a definici zobrazení a a b na celém U,

$$a : U \times U \to \mathbb{R}^1, \qquad b : U \to \mathbb{R}^1.$$

Vlastnost 1: Množina U je lineární prostor a zobrazení a, b jsou lineární v každém argumentu, t.j.

$$\begin{aligned} a\left(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v\right) &= \alpha_1 a(u_1, v) + \alpha_2 a(u_2, v), \\ a\left(u, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2\right) &= \alpha_1 a(u, v_1) + \alpha_2 a(u, v_2), \\ b\left(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2\right) &= \alpha_1 b(u_1) + \alpha_2 b(u_2). \end{aligned}$$

pro libovolné $u_1, u_2 \in U$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Budeme říkat, že

a je bilineární forma na U,
b je lineární funkcionál na U.

Vlastnost 2: Další vlastností bilineární formy a z (3.8) je symetrie, t.j. platnost vztahu

$$a(u,v) = a(v,u) \qquad \forall u, v \in U.$$

Vlastnost 3: Za předpokladu $k(x) \geqq k_0 > 0$ je bilineární forma a nezáporná (positivně semidefinitní),

$$a(u,u) \geqq 0 \qquad \forall u \in U.$$

Bilineární forma a je kladná (pozitivně definitní, V-eliptická) pokud se omezíme na prostor V, $u \neq 0$ a $\Gamma_D \neq \emptyset$:

$$u \in V, \quad u \neq 0 \Rightarrow a(u,u) = \int_\Omega k(u')^2 \,\mathrm{d}x > 0. \tag{3.9}$$

Pokud $u \in V$ a $a(u,u) = 0$, potom $u' = 0$ na všech intervalech, kde je u' spojitá. Na těchto intervalech je tedy u konstantní. Z podmínky spojitosti u na $\Omega = \langle 0, l \rangle$ pak plyne, že u je konstantní na celé oblasti Ω. Vzhledem k $u \in V$ a $\Gamma_D \neq \emptyset$, pak musí být u nulová funkce. Podmínku pozitivnosti (3.9) ještě zesílíme v části 3.8.

3.4 Zobecněné (slabé) řešení

Nechť U a V jsou prostory po částech hladkých a testovacích funkcí, které jsou definované v předchozí části. Nechť U_D je množina těch funkcí z U, které splňují zadané okrajové podmínky Dirichletova typu. Znovu poznamenejme, že U_D obsahuje všechny funkce vznikající jako řešení okrajové úlohy s po částech spojitými koeficienty nebo pravou stranou. Pro tato řešení navíc platí variační identita, což nás přivádí k následující definici.

Definice 3.2. Nechť k, f jsou po částech spojité a omezené. Potom zobecněným (slabým) řešením okrajové úlohy 3.1 - 3.3 nazveme funkci u, pro kterou platí
(V1) $u \in U_D$
(V1) $a(u, v) = b(v) \qquad \forall v \in V.$

V definici zobecněného řešení je předepsaná jen okrajová podmínka Dirichletova typu, okrajová podmínka Neumannova typu je obsažena ve variační identitě (3.5). Proto se v souvislosti se zobecněným řešením používá pro okrajové podmínky Dirichletova a Neumannova typu též terminologie hlavní a přirozená okrajová podmínka.

Poznámka 3.3. Neumannova okrajová podmínka (NOP) a orientace toku. Pro NOP tvaru $-ku'(l) = \hat{\tau}$ zadanou na pravém konci $x = l$ se ve funkcionálu b objeví člen $-\hat{\tau}v(l)$ zatímco pro NOP $-ku'(0) = \hat{\tau}$ zadanou na levém $x = 0$ se ve funkcionálu b objeví člen $+\hat{\tau}v(0)$. Tato změna znaménka vzniká tím, že výrazem $-ku'(x)$ je dán tok ve směru osy x a hodnota $\hat{\tau}$ na levém konci znamená přítok $(+)$ zatímco na levém konci znamená odtok $(-)$. Této změně znaménka se vyhneme, pokud budeme na obou koncích zadávat tok stejným směrem vzhledem k oblasti Ω. Pokud např. τ_Ω značí tok směrem do Ω, pak $-ku'(0) = \tau_\Omega$ nebo $ku'(l) = \tau_\Omega$. Potom se ve funkcionálu b objeví člen $+\tau_\Omega v(x)$ se znaménkem nezávisejícím na tom zda Neumannova okrajová podmínka je zadána v bodě $x = 0$ nebo $x = l$.

O zobecněném řešení hovoříme proto, že v případě hladkých vstupních dat existuje také hladké (klasické) řešení $u \in C^2(\Omega)$ okrajové úlohy 3.1 - 3.3, které je pak zároveň zobecněným řešením ve smyslu uvedené definice. Na druhé straně formulace s variační identitou (3.5) umožňuje zeslabit požadavky na hladkost vstupních dat a obsáhnout řešení pro širší okruh fyzikálně zajímavých situací. Lze dokázat, že pokud je zobecněné řešení z $C^2(\Omega)$, potom je řešením klasickým, t.j. splňuje podmínky 3.1 - 3.3. Pokud je $C^2(\Omega)$ až na konečný počet bodů nespojitosti, pak splňuje okrajové podmínky a diferenciální rovnici mimo body nespojitosti; v těchto bodech splňuje podmínky přechodu.

3.5 Energetická formulace okrajové úlohy

Na základě jednoduchých vlastností popsaných v části 3.3 (linearita, symetrie a nezápornost) nyní odvodíme i energetickou formulaci okrajové úlohy.

Definujme nejdříve tzv. energetický functionál

$$J : U \to R^1, \quad J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - b(v), \tag{3.10}$$

kde a a b je bilineární forma a lineární funkcionál z definice zobecněného řešení.

Energetická formulace okrajové úlohy je pak založena na následujícím tvrzení:

Věta 3.4. *Předpokládejme, že bilineární forma a je symetrická a nezáporná. Potom u je zobecněným řešením okrajové úlohy, t.j. platí*

(V1) $\quad u \in U_D,$
(V2) $\quad a(u,v) = b(v) \quad \forall v \in V$

právě tehdy, když platí

(E1) $\quad u \in U_D,$
(E2) $\quad J(u) = \min\left\{J(w) : \ w \in U_D\right\}.$

Definice 3.5. Energetická formulace okrajové úlohy je daná podmínkami (E1), (E2).

Důkaz. Nyní se podívejme na důkaz ekvivalence podmínek (E2) a (V2) .

1. Ukážeme, že z (V2) plyne (E2). Nechť u je zobecněné řešení a $w \in U_D$. Potom $w - u = v \in V$ a platí

$$\begin{aligned} J(w) = J(u+v) &= \frac{1}{2}a(u+v,u+v) - b(u+v) \\ &= \frac{1}{2}a(u,u) + \frac{1}{2}a(u,v) + \frac{1}{2}a(v,u) + \frac{1}{2}a(v,v) - b(u) - b(v) \\ &= \frac{1}{2}a(u,u) - b(u) + a(u,v) - b(v) + \frac{1}{2}a(v,v) = \\ &= J(u) + \frac{1}{2}a(v,v). \end{aligned}$$

Z uvedeného plyne podmínka (E2), protože $a(v,v) \geqq 0$.

2. Nyní naopak ukážeme, že z (E2) plyne podmínka (V2). Nechť u splňuje (E2), $v \in V$ je libovolné a $t \in \mathbb{R}$ je reálný parametr. Potom

$$\varphi : t \longmapsto J(u + tv)$$

je funkce jedné reálné proměnné, která má v $t = 0$ své minimum. Funkce φ je dokonce velmi elementární (kvadratická), protože platí

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \frac{1}{2}a(u + tv,\, u + tv) - b(u + tv) \\ &= \frac{1}{2}a(u, u) + a(u, v)t + \frac{1}{2}a(v, v)t^2 - b(u) - b(v)t\end{aligned}$$

Protože má φ v 0 minimum musí být $\varphi'(0) = 0$. To znamená, že

$$\varphi'(0) = a(u, v) - b(v) = 0$$

pro $v \in V$ libovolné. Tím jsme ukázali, že je splněna podmínka (V2).

□

Poznamenejme, že hodnota $\varphi'(0)$ vyjadřuje derivaci funkcionálu J v bodě u a ve směru v. Vyšetřování funkcionálů na základě jejich derivací je předmětem klasického variačního počtu.

3.6 Variační formulace dalších úloh

Stejnými prostředky jako v části 3.2, tedy volba prostorů, násobení testovací funkcí a integrace, úprava integrací per partes, dostaneme i variační formulaci dalších úloh s nimiž jsme se setkali v předchozí kapitole, viz následující příklady.

1. Úloha s reaktivním členem

$$\begin{aligned}-(ku')' + qu &= f \qquad \text{v } \Omega = (0, l) \\ u(0) = u(l) &= 0\end{aligned}$$

vede k variační identitě s bilineární formou $a(u, v) = \int_0^l (ku'v' + quv)\,\mathrm{d}x$, která je symetrická a kladná pokud k, $q > 0$.

2. Úloha s okrajovou podmínkou Newtonova typu (přestup tepla)

$$\begin{aligned}-(ku')' &= f \qquad \text{v } \Omega = (0, l) \\ u(0) &= 0 \\ -ku'(l) &= \alpha(u(l) - \hat{U})\end{aligned}$$

vede k variační identitě s bilineární formou

$$a(u,v) = \int_0^l ku'v'\,\mathrm{d}x + \alpha u(l)v(l),$$

která je opět symetrická a nezáporná. Lineární funkcionál má tvar

$$b(v) = \int_0^l fv\,\mathrm{d}x - \alpha\hat{U}v(l).$$

3. Úloha s konvektivním členem

$$\begin{aligned} -(ku')' + pu' &= f \qquad \text{v } \Omega = (0,l) \\ u(0) = u(l) &= 0 \end{aligned}$$

vede k variační identitě s bilineární formou

$$a(u,v) = \int_0^l (ku'v' + pu'v)\,\mathrm{d}x,$$

která není symetrická. Tato forma je nezáporná, protože

$$\int_0^l pv'v = [pv^2]_0^l - \int_0^l pv'v \;\Rightarrow\; \int_0^l pv'v = \frac{1}{2}[pv^2]_0^l = 0.$$

Forma bude nezáporná i v dalších případech, kdy bude Dirichletova okrajová podmínka pouze na jednom z krajních bodů Ω

$$\begin{aligned} v(0) &= 0, \quad p > 0, \\ v(l) &= 0, \quad p < 0. \end{aligned}$$

4. Úloha na vlastní čísla a vlastní funkce

$$\begin{aligned} -(ku')' &= \lambda u \qquad \text{v } \Omega = (0,l) \\ u(0) = u(l) &= 0 \end{aligned}$$

vede k variační identitě

$$a(u,v) = \lambda c(u,v), \text{ kde } a(u,v) = \int_0^l ku'v'\,\mathrm{d}x \text{ a } c(u,v) = \int_0^l uv\,\mathrm{d}x.$$

5. Úloha s nelineárním koeficientem $k = k(u)$

$$\begin{aligned} -(k(u)u')' &= f \qquad \text{v } \Omega = (0,l) \\ u(0) = u(l) &= 0 \end{aligned}$$

vede k variační identitě s formou $a(w,u,v) = \int\limits_0^l k(w)u'v'\,\mathrm{d}x$, která je nelineární vzhledem k w. Variační identita má v tomto případě tvar

$$a(u,u,v) = b(v) \qquad \forall v \in V.$$

3.7 Prostory funkcí, funkcionální analýza

Již jsme se setkali s prostory funkcí $C^k(\Omega)$ a $U(\Omega)$. Obecně lineárním prostorem X nazveme libovolnou množinu (např. množina geometrických či algebraických vektorů, množina funkcí apod.), na které jsou definovány operace sčítání a násobení reálným číslem (skalárem) s vlastnostmi

$$\begin{aligned} x + y = y + x \qquad & (\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x \\ (x+y)+z = x+(y+z) \qquad & \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x \\ \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y \qquad & 1 \cdot x = x, \\ \exists \mathbf{0}\; x + \mathbf{0} = x \qquad & 0 \cdot x = \mathbf{0} \\ \forall x\, \exists -x:\ x + (-x) = \mathbf{0}. \qquad & \end{aligned}$$

Uvažujme, že na lineárním prostoru můžeme zavést normu , která bude analogií absolutní hodnoty pro reálná čísla a velikosti geometrického vektoru. Norma je nezáporná funkce $x \to \|x\|$ s vlastnostmi :

1. $\|x\| \geqq 0,\ \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$
2. $\|\alpha x\| = \mid \alpha \mid\ \|x\|$
3. $\|x+y\| \leqq \|x\| + \|y\|$

pro $x, y \in X$ a $\alpha \in R$. Pomocí normy lze zavést vzdálenost dvou prvků x, y jako $\|x-y\|$. Lineární prostor s normou se nazývá normovaným lineárním prostorem .

Uveďme příklad norem na prostoru spojitých funkcí definovaných na kompaktní (uzavřené a omezené) množině $\bar{\Omega}$. Pro $u \in C(\bar{\Omega})$ definujeme

$$\| u \|_\infty = \max_{x \in \bar{\Omega}} | u(x) | \tag{3.11}$$

$$\| u \|_1 = \int_\Omega | u(x) | \, \mathrm{d}x \tag{3.12}$$

$$\| u \|_p = \left\{ \int_\Omega | u(x) |^p \, \mathrm{d}x \right\}^{1/p} \tag{3.13}$$

Z posledních norem závislých na p je zvláště důležitá norma $\| u \|_2$, která souvisí se skalárním součinem

$$(u, v)_2 = \int_\Omega uv \, \mathrm{d}x, \qquad \| u \|_2 = \sqrt{(u, u)_2}.$$

Poznamenejme, že uvedené normy bychom mohli definovat i v případě funkcí definovaných a spojitých na otevřené oblasti Ω, pokud bychom dodali požadavek na omezenost funkcí.

Skalární součin (u, v) na lineárním prostoru X je obecně symetrická bilineární forma, pro kterou musí platit $(u, u) \geqq 0$ a $(u, u) = 0 \Rightarrow u = 0$. Pokud je definován skalární součin, potom lze definovat normu jako $\| u \| = \sqrt{(u, u)}$. V případě skalárního součinu můžeme definovat ortogonalitu, vyjádření typu Fourierových řad apod.

Pokud je norma definovaná pomocí skalárního součinu, pak platí Cauchyova-Schwarzova nerovnost

$$| (u, v) | \leqq \| u \| \, \| v \|,$$

kterou budeme mnohokrát používat. Uveďme důkaz této nerovnosti, který využívá jen nezápornost a linearitu skalárního součinu

$$(u + tv, u + tv) \geqq 0 \quad \forall t \in R \qquad \text{odtud} \qquad (u, u) + 2t(u, v) + t^2(v, v) \geqq 0.$$

Kvadratická rovnice $(u, u) + 2t(u, v) + t^2(v, v) = 0$ má tedy nejvýše jeden reálný kořen a diskriminant $4(u, v)^2 - 4(u, u)(v, v)$ musí být nekladný. To ale přímo dává Cachyovu-Schwarzovu nerovnost. Z důkazu je také vidět, že rovnost nastane jen pokud $u + tv = 0$.

Cauchyovu-Schwarzovu nerovnost můžeme hned využít pro srovnání integrálních norem

$$\begin{aligned} | u |_1 = \int_\Omega 1 \cdot | u | &\leqq \left\{ \int_\Omega 1^2 \, \mathrm{d}x \right\}^{1/2} \left\{ \int_\Omega | u |^2 \, \mathrm{d}x \right\}^{1/2} \\ &\leqq \sqrt{| \Omega |} \sqrt{| \Omega |} \max_{\bar{\Omega}} | u |, \end{aligned}$$

tedy

$$| u |_1 \leqq \sqrt{| \Omega |} \, | u |_2 \leqq | \Omega | \, | u |_\infty,$$

kde $| \Omega | = \int\limits_\Omega 1 \, \mathrm{d}x$ je délka nebo obsah nebo objem Ω.

Uvedené normy můžeme definovat i na množině funkcí po částech spojitých a omezených.

Na množině $C^1(\bar{\Omega})$ funkcí spojitých se spojitou první derivací na $\bar{\Omega}$ nebo na množině $U(\Omega)$ funkcí, které jsou spojité a mají po částech spojitou a omezenou první derivaci $C^1(\bar{\Omega}) \subset U(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$ můžeme zavést další normy, v nichž figurují hodnoty funkcí i derivací. Pro $u \in U(\Omega)$ tedy definujeme

$$\| u \|_2 = \| u \|_{2,0} = \left\{ \int\limits_\Omega u^2 \, \mathrm{d}x \right\}^{1/2}, \tag{3.14}$$

$$\| u \|_{2,1} = \left\{ \int\limits_\Omega \left[u^2 + (u')^2 \right] \mathrm{d}x \right\}^{1/2} = \left\{ \| u \|_2^2 + \| u' \|_2^2 \right\}^{1/2}, \tag{3.15}$$

$$|u|_{2,1} = \left\{ \int\limits_\Omega (u')^2 \, \mathrm{d}x \right\}^{1/2}. \tag{3.16}$$

Symbol $|u|_{2,1}$ ve vztahu (3.16) definuje pouze tzv. seminormu, která nesplňuje vztah $|u|_1 = 0 \Rightarrow u = 0$ z definice normy.

Normu $\| u \|_{2,1}$ budeme dále často využívat, neboť blízkost v této normě znamená blízkost funkce i derivace, teploty i toků, posunutí i deformací či napětí apod.

Cvičení 3.6. Ukažte, že definované normy mají požadované vlastnosti.

Nakonec zdůrazněme, že v této části jsme zobecnili pojmy známé již z geometrie, jako jsou součet vektorů, skalární součin, ortogonalita, velikost, délka apod, do prostorů funkcí. Toto zobecnění vytváří disciplinu zvanou funkcionální analýza, a my budeme její základy v dalším využívat. Více lze najít v literatuře, viz [6, 10, 2].

Pomocí normy můžeme definovat velikost, vzdálenost, chybu i třeba konvergenci posloupnosti funkcí

$$u_n \to u \;\Leftrightarrow\; (\forall \varepsilon > 0) \, (\exists n_0) \, (\forall n \geqq n_0) : \| u_n - u \| \leqq \varepsilon.$$

Nutnou podmínkou konvergence je opět Bolzanova-Cauchyova podmínka známá z klasické analýzy. Posloupnost $\{u_n\}$ splňuje tuto podmínku, jestliže

$$(\forall \varepsilon > 0) \, (\exists n) \, (\forall i, j \geqq n) : \| u_i - u_j \| \leqq \varepsilon.$$

Prostor, ve kterém je každá posloupnost splňující Bolzanovu-Cauchyovu konvergentní, se nazývé úplný. Úplný normovaný lineární prostor se nazývá Banachovým prostorem, úplný lineární prostor se skalárním součinem se nazývá Hilbertovým prostorem.

Cvičení 3.7. Ukažte, že prostor $C(\Omega)$ s normou $\|\ \|_\infty$ je úplný, tentýž prostor s integrální normou však úplný není. Poznamenejme, že konvergence funkcí v max. normě (tzv. stejnoměrná konvergence) je silnější, konvergence v integrální normě z ní vyplývá.

3.8 V-elipticita a omezenost

Již jsme ukázovali, že bilineární forma a je nezáporná. Nyní nám půjde o to ukázat silnější vlastnost, chceme ukázat, že existuje kladná konstanta $m > 0$ taková, že

$$m \parallel v \parallel_{1,2}^2 \leqq a(v,v) \quad \forall v \in V, \tag{3.17}$$

kde V je prostor testovacích funkcí. Tuto vlastnost nazveme <u>V-elipticitou</u> či také <u>pozitivní definitností</u> bilineární formy.

1. Nejsnáze se V-elipticita ukáže pro úlohu s reaktivním členem

$$\begin{aligned} -(ku')' + qu &= f \qquad \text{v } \Omega = (0,l) \\ u(0) &= \hat{u} \\ -ku'(l) &= \hat{\tau} \end{aligned}$$

   kde $\min\{k,\ q\} > 0$ se uvedené ukazuje snadno. Platí totiž

$$a(v,v) = \int_0^l \left[k(v')^2 + qv^2\right]\,\mathrm{d}x \geqq \min(k,q) \parallel v \parallel_{2,1}^2 .$$

2. O něco obtížnější důkaz V-elipticity bude potřeba pro úlohu

$$\begin{aligned} -(ku')' &= f \qquad \text{v } \Omega = (0,l) \\ u(0) &= \hat{u} \\ -ku'(l) &= \hat{\tau} \end{aligned}$$

   kde $k \geqq k_0 > 0$. Nejdříve

$$a(v,v) = \int_0^l k(v')^2\,\mathrm{d}x \geqq k_0 \int_0^l (v')^2\,\mathrm{d}x.$$

Dále využijeme skutečnost, že $v(0) = 0$ pro $v \in V$

$$v(x) = v(0) + \int_0^x v'(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^x v'(z)\,\mathrm{d}z \tag{3.18}$$

$$v(x)^2 \leqq (\int_0^x 1 \cdot v'(z)\,\mathrm{d}z)^2 \leqq \int_0^x 1^2\,\mathrm{d}z \int_0^x (v')^2\,\mathrm{d}z.$$

Pro $v \in V$ tedy platí tzv. Friedrichsova nerovnost (viz [21])

$$\int_0^l v^2(x)\,\mathrm{d}x \leqq \int_0^l x\,\mathrm{d}x \left(\int_0^l (v')^2\,\mathrm{d}z\right) = \frac{l^2}{2}\int_0^l (v')^2\,\mathrm{d}z. \tag{3.19}$$

Pak dostaneme

$$\begin{aligned} a(v,v) \geqq k_0 \int_0^l (v')^2\,\mathrm{d}x &= \alpha k_0 \int_0^l (v')^2\,\mathrm{d}x + (1-\alpha)k_0 \int_0^l (v')^2\,\mathrm{d}x \\ &\geqq \alpha k_0 \frac{2}{l^2} \int_0^l v^2\,\mathrm{d}x + (1-\alpha)k_0 \int_0^l (v')^2\,\mathrm{d}x \\ &\geqq m \parallel v \parallel_{2,1}^2, \end{aligned}$$

kde pro $\alpha = \frac{l^2}{2+l^2}$ dostaneme vyvážený odhad, tj.

$$\alpha k_0 \frac{2}{l^2} = (1-\alpha)k_0 = \frac{2k_0}{2+l^2} = m.$$

Poznamenejme, že totéž lze dokázat pro Dirichletovu podmínku $v(l) = 0$. V-elipticitu snadno dokážeme i pro rovnici s konvektivním členem, pokud je jeho příspěvek nezáporný, viz část 3.6.

V případě funkcí s nenulovou hraniční hodnotou, lze vyjít z rovností typu (3.18) a dokázat následující tvar Friedrichsovy nerovnosti.

Věta 3.8. *Friedrichsova nerovnost. Nechť $v \in U(0, l)$, potom*

$$\int_0^l v^2(x)\,\mathrm{d}x \leqq l\left[v(0)^2 + v(l)^2\right] + 2l^2 \int_0^l \left[v'(x)\right]^2\,\mathrm{d}x. \tag{3.20}$$

U úloh s čistě Neumannovou okrajovou pomínkou lze využít následující Poincarého nerovnost k důkazu pozitivní definitnosti bilineární formy pro funkce s nulovým integrálním průměrem.

Věta 3.9. *Poincarého nerovnost.* *Nechť $v \in U(0,l)$, potom*

$$\int_0^l v^2(x)\,\mathrm{d}x \leqq \frac{1}{l}\left[\int_0^l v(x)\,\mathrm{d}x\right]^2 + \frac{l^2}{2}\int_0^l [v'(x)]^2\,\mathrm{d}x. \tag{3.21}$$

Důkaz. Vyjdeme z rovnosti

$$v(x_2) - v(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} v'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Odtud umocněním a použitím Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti dostaneme

$$v(x_2)^2 + v(x_1)^2 - 2v(x_1)v(x_2) \leqq l\int_0^l [v'(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$

Integrace přes $(0,l)$ nejdříve podle x_1 a potom podle x_2 dá

$$l\int_0^l v^2(x)\,\mathrm{d}x + l\int_0^l v^2(x)\,\mathrm{d}x - 2\left[\int_0^l v(x)\,\mathrm{d}x\right]^2 \leqq +l^3\int_0^l [v'(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$

Odtud pak plyne (3.21). □

Další vlastností je omezenost bilineární formy, tj. existence konstanty M, pro kterou platí

$$|\ a(u,v)\ | \leqq M \parallel u \parallel_{2,1} \parallel v \parallel_{2,1}\ . \tag{3.22}$$

Důkaz této nerovnosti je snadný, např.

$$|\int_0^l ku'v'| \leqq \max(k)|\int_0^l ku'v'\,\mathrm{d}x| \leqq$$

$$\leqq \max(k) \parallel u' \parallel_{2,0} \parallel v' \parallel_{2,0} \leqq \max(k) \parallel u' \parallel_{2,1} \parallel v' \parallel_{2,1}\ .$$

Ukažme ještě omezenost lineárního funkcionálu b vzhledem k normě $\|\ \|_{2,1}$, tj. existenci konstanty $B > 0$ takové, že $|b(v)| \leqq B\,\|v\|_{2,1}$, kde

$$b(v) = \int_0^l fv\,\mathrm{d}x - \hat{\tau}v(l),$$

když f je funkce integrovatelná s kvadrátem. Pro první člen dostaneme

$$\left|\int_0^l fv\,\mathrm{d}x\right| \leqq \| f \|_{2,0} \| v \|_{2,0} \leqq \| f \|_{2,0} \| v \|_{2,1} = B_1 \| v \|_{2,1},$$

pro druhý člen opět využijeme vyjádření $v(l) = v(0) + \int_0^l v'(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^l v'(z)\,\mathrm{d}z$. Díky němu dostaneme

$$|-\hat{\tau}v(l)| \leqq |\hat{\tau}| \, \left| \int_0^l v'\,\mathrm{d}z \right| \leqq |\hat{\tau}| \sqrt{\int_0^l 1^2\,\mathrm{d}z} \, \| v' \|_{2,0} \leqq |\hat{\tau}| \sqrt{l} \, \| v \|_{2,1} \, .$$

Celkově tedy platí

$$| \, b(v) \, | \leqq B \, \| v \|_{2,1}, \quad \text{kde } B = \| f \|_{2,0} + |\hat{\tau}| \sqrt{l}. \tag{3.23}$$

Poznámka 3.10. Uvedeným postupem jsme schopni ukázat, že tzv. Diracův delta funkcionál $\delta_x : v \to v(x)$ je spojitý na $V(0, l)$, případně i na $U(0, l)$ vzhledem k normě $\| \, \|_{2,1}$. Toto tvrzení ale neplatí u funkcí na vícerozměrných oblastech.

Poznamenejme ještě, že v případě bilineární formy a, která je symetrická a pozitivně definitní na V, definuje a skalární součin na V. Pak ovšem máme na V i normu

$$\|v\|_E = \|v\|_a = \sqrt{a(v, v)},$$

kterou nazveme energetickou normou. Navíc pro všechny $v \in V$ platí

$$\sqrt{m} \, \| v \|_{2,1} \leqq \|v\|_a \leqq \sqrt{M} \, \| v \|_{2,1},$$

jinými slovy normy $\|v\|_a$ a $\| v \|_{2,1}$ jsou na V ekvivalentní.

Vlastnosti popsané v této části nyní využijeme k důkazu jednoznačnosti slabého řešení, ke studiu závislosti slabého řešení na vstupních datech úlohy a naposled i k diskuzi otázky existence řešení. Stejné vlastnosti využijeme i při studiu diskretizační chyby metody konečných prvků.

3.9 Závislost slabého řešení na vstupních datech

Základními vlastnostmi okrajové úlohy či jinak matematického modelu je existence řešení, jeho jednoznačnost a citlivost řešení na změny ve vstupních datech. Začneme studiem jednoznačnosti řešení a spojité závislosti na vstupních datech. Existenci řešení si necháme na konec této části.

Věta 3.11. *Nechť a je V-eliptická. Potom existuje nejvýše jedno slabé řešení, tj.*

$$u \in U_D: \quad a(u,v) = b(v) \quad \forall v \in V.$$

Důkaz.

$$\begin{aligned} u_1, u_2 \text{ jsou řešení} &\Rightarrow u_1 - u_2 \in V \\ \Rightarrow \quad a(u_1, u_1 - u_2) &= b(u_1 - u_2) \\ a(u_2, u_1 - u_2) &= b(u_1 - u_2) \\ \Rightarrow \quad a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0 &\Rightarrow \| u_1 - u_2 \|_{2,1} = 0 \Rightarrow u_1 = u_2 \end{aligned}$$

□

Věta 3.12. *Nechť a je V-eliptická a uvažujme slabé řešení úlohy*

$$\begin{aligned} -(ku')' &= f \qquad v\ \Omega = (0,l) \\ u(0) &= \hat{u} \\ -ku'(l) &= \hat{\tau} \end{aligned}$$

se vstupními daty f, $\hat{\tau}$, $\hat{u}$. Pokud u_1 je řešení odpovídající f, $\hat{\tau}$, $\hat{u}$ a u_2 odpovídá f_2, $\hat{\tau}_2$, $\hat{u}$ potom existuje konstanta C taková, že

$$\| u_1 - u_2 \|_{1,2} \leqq C\,[\, \| f_1 - f_2 \|_{0,2} + |\, \tau_1 - \tau_2 \,|\,]\,.$$

Uvedený odhad ukazuje spojitou závislost řešení na vstupních datech.

Důkaz. Platí

$$u_1 \in U_D: \quad a(u_1, v) = \int_0^l f_1 v \,\mathrm{d}x - \tau_1 v(l) \qquad \forall v \in V$$

$$u_2 \in U_D: \quad a(u_2, v) = \int_0^l f_2 v \,\mathrm{d}x - \tau_2 v(l) \qquad \forall v \in V$$

$$\Rightarrow a(u_1 - u_2, v) = \int_0^l (f_1 - f_2) v \,\mathrm{d}x - (\tau_1 - \tau_2) v(l)$$

$$u_1 - u_2 \in V \Rightarrow a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = \int_0^l (f_1 - f_2)(u_1 - u_2) \,\mathrm{d}x - (\tau_1 - \tau_2)(u_1(l) - u_2(l)).$$

Nyní použijeme pozitivní definitnost a a stejné odhady jako pro omezenost b. Dostaneme

$$\begin{aligned} m \parallel u_1 - u_2 \parallel_{2,1}^2 \leqq & \parallel f_1 - f_2 \parallel_{2,0} \parallel u_1 - u_2 \parallel_{2,1} \\ & + \mid \tau_1 - \tau_2 \mid \sqrt{l} \parallel u_1 - u_2 \parallel_{2,1} \\ m \parallel u_1 - u_2 \parallel_{2,1} \leqq & \parallel f_1 - f_2 \parallel_{2,0} + \sqrt{l} \mid \tau_1 - \tau_2 \mid \end{aligned}$$

□

Abychom ukázali spojitou závislost na Dirichletově okrajové podmínce, uvažujme pro danou podmínku $\hat{u}$ funkci $\tilde{u} \in U_D$, která zadanou Dirichletovu okrajovou podmínku splňuje. Slabé řešení pak můžeme hledat ve tvaru

$$u = \tilde{u} + u_0,\ u_0 \in V : \quad a(\tilde{u} + u_0, v) = b(v) \qquad \forall v \in V,$$

tedy hledáme

$$u_0 \in V : \quad a(u_0, v) = b(v) - a(\tilde{u}, v) = b_D(v) \qquad \forall v \in V. \tag{3.24}$$

Poznamenejme, že taková formulace Dirichletovy okrajové podmínky a převod hledání zobecněného řešení plně do prostoru V bude užitečné i v dalším.

Věta 3.13. *Nechť a je V-eliptická a uvažujme slabé řešení úlohy*

$$\begin{aligned} -(ku')' &= f \qquad v\ \Omega = (0, l) \\ u(0) &= \hat{u} \\ -ku'(l) &= \hat{\tau} \end{aligned}$$

se vstupními daty f, $\hat{\tau}$, $\hat{u}$. Pokud u_1 je řešení odpovídající f, $\hat{\tau}$, $\hat{u}_1$ a u_2 odpovídá f, $\hat{\tau}$, $\hat{u}_2$ a $\tilde{u}_1 \in U$, $\tilde{u}_1(0) = \hat{u}_1$, $\tilde{u}_2 \in U$, $\tilde{u}_2(0) = \hat{u}_2$, potom existuje konstanta C taková, že

$$\parallel u_1 - u_2 \parallel_{2,1} \leqq C\, inf\{\parallel \tilde{u}_1 - \tilde{u}_2 \parallel_{2,1} :\ \tilde{u}_1, \tilde{u}_2 \in U,\ \tilde{u}_1(0) = \hat{u}_1,\ \tilde{u}_2(0) = \hat{u}_2\}\,.$$

Uvedený odhad ukazuje opět spojitou závislost řešení na vstupních datech.

Důkaz. Platí

$$\begin{aligned} u_1 = \tilde{u}_1 + w_1,\ w_1 \in V :\ a(w_1, v) = b(v) - a(\tilde{u}_1, v) \qquad \forall v \in V \\ u_2 = \tilde{u}_2 + w_2,\ w_1 \in V :\ a(w_2, v) = b(v) - a(\tilde{u}_2, v) \qquad \forall v \in V, \end{aligned}$$

tedy $a(w_1 - w_2, v) = a(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2, v)\ \forall v \in V$. Dále $w_1 - w_2 \in V$, a proto

$$\begin{aligned} m \parallel w_1 - w_2 \parallel_{2,1}^2 \leqq a(w_1 - w_2, w_1 - w_2) = a(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2, w_1 - w_2) \leqq \\ \leqq M \parallel \tilde{u}_1 - \tilde{u}_2 \parallel_{2,1} \parallel w_1 - w_2 \parallel_{2,1}\,. \end{aligned}$$

Odhad
$$m \parallel w_1 - w_2 \parallel_{2,1} \leqq M \parallel \tilde{u}_1 - \tilde{u}_2 \parallel_{2,1}$$
implikuje, že
$$\begin{aligned} \parallel u_1 - u_2 \parallel_{2,1} &\leqq \parallel \tilde{u}_1 - \tilde{u}_2 \parallel_{2,1} + \parallel w_1 - w_2 \parallel_{2,1} \\ &\leqq \left(1 + \frac{M}{m}\right) \parallel \tilde{u}_1 - \tilde{u}_2 \parallel_{2,1} . \end{aligned}$$

□

3.10 Existence řešení a úplnost

Využijme nyní vlastnosti omezenosti a elipticity pro vyjasnění existence a charakteru zobecněného řešení okrajové úlohy. Uvažujme úlohu formulovanou v prostoru V, tedy úlohu najít $u \in V$:
$$a(u, v) = b_D(v) \qquad \forall v \in V.$$
Předpokládejme, že a je symetrická, V-eliptická a omezená, takže můžeme použít i ekvivalentní formulaci najít $u \in V$:
$$J_D(u) = \min_{v \in V} J_D(v) \quad \text{kde} \quad J_D(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - b_D(v).$$
Existenci minima pak můžeme zkoumat následovně:

1. Ukážeme, že J_D je zdola omezený funkcionál, takže existuje
$$\inf_{v \in V} J_D(v) = \mu > -\infty.$$
Využijeme omezenost a V-elipticitu,
$$\begin{aligned} J_D(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - b_D(v) &\geqq \frac{1}{2} m \parallel v \parallel_{2,1}^2 - B_D \parallel v \parallel_{2,1} \geqq \\ &\geqq \min_t \left(\frac{1}{2} m t^2 - B_D t\right) = -\frac{1}{2} \frac{B_D^2}{m} = \mu > -\infty. \end{aligned}$$

2. Definujeme mimimalizující posloupnost $\{v_i\} \subset V$ tak, že $J(v_i) \leqq \mu + 1/i$. Existence takové posloupnosti je zaručena existencí konečného infima. Ukážeme, že taková posloupnost splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku
$$\begin{aligned} m \left\| v_i - v_j \right\|_{2,1}^2 &\leqq a(v_i - v_j, v_i - v_j) \\ &= 2a(v_i, v_i) + 2a(v_j, v_j) - a(v_i + v_j, v_i + v_j) \\ &= 4J(v_i) + 4J(v_j) - 8J\left(\frac{v_i + v_j}{2}\right) \\ &\leqq 4J(v_i) + 4J(v_j) - 8\mu. \end{aligned}$$

Tedy pro $i, j \geqq n$ bude $\| v_i - v_j \|_{2,1}^2 \leqq \frac{2}{m}\frac{1}{n}$, takže pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje n takové, že $\| v_i - v_j \|_{2,1} \leqq \varepsilon$ pro $i, j \geqq n$.

3. Funkcionál J_D je spojitý. Nejprve s využitím Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti ukážeme

$$a(u-v, u-v) \geqq a(u,u) + a(v,v) - 2\sqrt{a}(u,u)\sqrt{a}(v,v) = \left(\sqrt{a}(u,u) - \sqrt{a}(v,v)\right)^2,$$

potom už snadno dokážeme spojitost J_D, protože platí

$$\begin{aligned}
\left|J_D(u) - J_D(v)\right| &\leqq \frac{1}{2}\left|a(u,u) - a(v,v)\right| + B_D\left\|u - v\right\|_{2,1} \\
&\leqq \frac{1}{2} \mid \sqrt{a(u,u)} + \sqrt{a(v,v)} \mid \cdot \mid \sqrt{a(u,u)} - \sqrt{a(v,v)} \mid + B_D \| u - v \|_{2,1} \\
&\leqq \frac{1}{2} M \left(\| u \|_{2,1} + \| v \|_{2,1}\right) \| u - v \|_{2,1} + B_D \| u - v \|_{2,1} .
\end{aligned}$$

4. Pokud cauchyovskost mimimalizující posloupnosti $\{v_i\}$, zaručí konvergenci k nějakému prvku $u \in V$, ($v_i \to u$ ve smyslu $\| v_i - u \|_{2,1} \to 0$), potom vzhledem ke spojitosti J_D bude $J_D(u) = \lim\limits_{i \to \infty} J_D(v_i) = \mu$, takže $u \in V$ bude řešením.

Cauchyovskost ale zaručí konvergenci jen pokud V je úplný vzhledem k normě $\| \cdot \|_{2,1}$. To však neplatí! (viz Cvičení 3.24) Co s tím?

Začneme ve starověkém Řecku s jednoduchou algebraickou rovnicí

$$x^2 = 2.$$

Ve starověku znali zlomky, tedy racionální čísla. Ale řešení této rovnice nelze vyjádřit podílem dvou celých čísel, tj. rovnice nemá řešení v oboru racionálních čísel. U Aristotela (t.j. 384–322 před začátkem našeho letopočtu) můžeme najít následující jednoduchý důkaz sporem. Předpokládejme, že existuje racionální číslo $x = \frac{p}{q}$, pro které $x^2 = 2$. Můžeme předpokládat, že p, q jsou nesoudělná celá čísla. Potom $p^2 = 2q^2$ takže p musí být sudé, $p = 2k$. Ale potom $4k^2 = 2q^2$, takže q musí být také sudé. Ale to dává spor s předpokladem, že p, q jsou nesoudělná čísla.

Co tedy s uvedenou rovnicí? Řešení by mít měla, geometricky by mělo jít o délku přepony pravoúhlého trojúhelníka s odvěsnami jednotkové délky. Řešení lze libovolně přesně aproximovat racionálními čísly (měření přepony). Rovnici také můžeme přibližně řešit, například Newtonovou metodou. Vyjdeme z určitého přiblížení x_i a aproximujeme $f(x) = x^2$ lineárním polynomem $f(x) \sim f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i)$ a spočteme x_{i+1}, řešením rovnice

$$f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) = x_i^2 + 2x_i(x_{i+1} - x_i) = 2.$$

Tak dostaneme
$$x_{i+1} = \frac{1}{x_i} + \frac{x_i}{2} = x_i + \frac{1}{x_i} - \frac{x_i}{2}. \tag{3.25}$$
Pokud vyjdeme z $x_1 = 1$ dostáváme posloupnost racionálních čísel, která splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku[1] a zdá se, že rychle konverguje (používá se k výpočtu $\sqrt{2}$ i v mnoha počítačových implementacích).

Uvedené lze shrnout následovně.

- řešení rovnice $x^2 = 2$ není racionální číslo,
- ale zdá se, že v nějakém smyslu by řešení mělo existovat - uvažujme je zatím jako abstraktní symbol - reálné číslo $\sqrt{2}$,
- numericky lze $\sqrt{2}$ libovolně přesně přiblížit čísly racionálními, v případě $\sqrt{2}$ můžeme aproximaci konstruovat např. s využitím posloupnosti (3.25).

Obecněji množinu racionálních čísel lze zúplnit a tímto zúplněním dostaneme množinu reálných čísel. Reálná čísla zahrnují jak původní racionální čísla tak i čísla iracionální, která symbolizují limity těch posloupností racionálních čísel $\{u_i\}$, které splňují Bolzanovu-Cauchyovu podmínku
$$\left(\forall \varepsilon > 0\right) \left(\exists i_\varepsilon\right) \left(\forall i, j \geqq i_\varepsilon\right) : \ |u_i - u_j| < \varepsilon, \tag{3.26}$$
ale nemají limitu mezi racionálními čísly. Ještě přesněji reálná čísla symbolizují třídy posloupností $\{u_i\}$ podle ekvivalence
$$\{u_i\} \sim \{v_i\} \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0\right) \left(\exists i_\varepsilon\right) \left(\forall i, j \geqq i_\varepsilon\right) : \ |u_i - v_i| < \varepsilon.$$
Tato ekvivalence spojuje do jedné třídy ty posloupnosti, které mají potenciálně stejnou limitu.

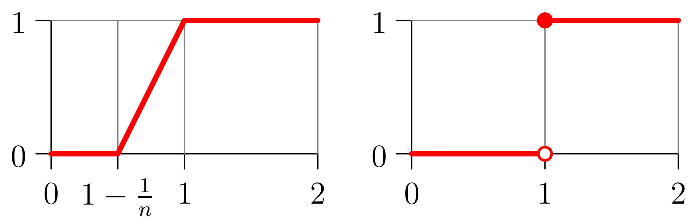
Řešení rovnice $x^2 = 2$ je pak prvkem množiny reálných čísel.

Připomeňme, že Bolzanova-Cauchyova podmínka je obecně nutnou podmínkou konvergence, za předpokladu úplnosti je nutnou a postačující.

Nyní přejděme k otázkám úplnosti u množin či prostorů funkcí.

---

[1] $x_{i+1} - x_i = \frac{1}{x_i} - \frac{x_i}{2} + x_i - x_{i-1} + \frac{1}{x_{i-1}} - \frac{x_{i-1}}{2} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x_i x_{i-1}}\right)(x_i - x_{i-1})$
$x_i \in \langle 1,\, 2\rangle \Rightarrow x_{i+1} \in \langle 1,\, 2\rangle$, tedy $|x_{i+1} - x_i| \leqq \frac{1}{2}\,|x_i - x_{i-1}|$
$|x_{p+q} - x_p| \leqq \sum\limits_{r=1}^{q} |x_{p+r} - x_{p+r-1}| \leqq \sum\limits_{r=1}^{q} \left(\frac{1}{2}\right)^{r-1} |x_{p+1} - x_p|$
$\leqq 2\,|x_{p+1} - x_p| \leqq 2\left(\frac{1}{2}\right)^p |x_1 - x_0|$. Pro $i,\, j \geqq n$ bude $|x_i - x_j| \leqq 2\left(\frac{1}{2}\right)^n |x_1 - x_0|$.
Odtud plyne cauchyovskost posloupnosti $\{x_i\}$.



Obr. 3.2: Posloupnost spojitých funkcí (vlevo) a její limita (vpravo).

Prostor spojitých funkcí $C(\Omega)$, kde $\Omega = \langle 0, l \rangle$, s normou $\|u\|_\infty$ je úplný, viz např. [21]. Stejný prostor s integrální normou $\|u\|_1$ nebo $\|u\|_2$ však úplný není. Snadno se o tom přesvědčíme, když uvažujeme např. posloupnost funkcí znázorněnou na obr. 3.2 (vlevo). Uvedená posloupnost nesplňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku a tedy nekonverguje v normě $\|u\|_\infty$, ale konverguje v integrálních normách k nespojité funkci znázorněné na obr. 3.2 (vpravo).

Definice 3.14. Zúplněním $C(\Omega)$ v integrální normě $\|u\|_p$, viz (3.13), dostaneme prostor, který se značí symbolem $L_p(\Omega)$.

Tento prostor lze charakterizovat jako množinu těch funkcí u, pro které existuje konečný integrál

$$\|u\|^p_{L_p(\Omega)} = \int\limits_\Omega |u(x)|^p \, \mathrm{d}x.$$

Integrálem ovšem musíme rozumět integrál ve smyslu, který poprvé zavedl H. Lebesgue (ve své dizertaci!) v roce 1902. Tento integrál je zobecněním klasického (Riemannova) integrálu, více viz [21].

Všimněme si ještě problému s rovností funkcí v $L_p(\Omega)$. Aby $\|u\|_{L_p(\Omega)}$ definovalo normu na $L_p(\Omega)$, musí platit $\|u\|_{L_p(\Omega)} = 0 \ \Rightarrow\ u = 0$. Ale $\|u\|_{L_p(\Omega)} = 0$ např. pro funkce nulové všude mimo konečného počtu bodů a tyto funkce nejsou nulové v klasickém smyslu. Na $L_p(\Omega)$ proto definujeme rovnost funkcí f a g tak, že $f = g$ znamená, že $f(x) = g(x)$ pro $x \in \Omega \setminus M$, kde M je konečná či obecněji je množinou míry nula.[1] V tomto smyslu se hovoří o <u>rovnosti funkcí skoro všude</u>.

Definice 3.15. Obdobně můžeme uvažovat zúplnění prostoru $C^1(\Omega)$ nebo $U(\Omega)$ v normě $\|u\|_{2,1}$, viz (3.15), která zahrnuje i první derivace. Toto zúplnění se značí $H^1(\Omega)$ a nazývá se <u>Sobolevovým prostorem</u>.

Pro charakterizaci prostoru $H^1(\Omega)$, $\Omega = (0, l)$, je důležité následující lemma.

[1] M je množinou míry nula, pokud pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje konečná nebo spočetná množina intervalů (a_i, b_i) taková, že $M \subset \bigcup_i (a_i, b_i)$ a $\sum\limits_i (b_i - a_i) < \varepsilon$.

Lemma 3.16. *Nechť $u \in U(\Omega)$, potom existuje kladná konstanta C tak, že*

$$\|u\|_\infty \leqq C \|u\|_{2,1}\,. \tag{3.27}$$

Důkaz. V lemmatu jde o srovnání norem (3.11) a (3.15). Funkce $|u| \in U(\Omega)$ je spojitá na $\langle 0, l\rangle$, tedy nabývá svého minima v $\xi \in \langle 0, l\rangle$. Potom platí

$$u(x) = u(\xi) + \int_\xi^x u'(z)\,\mathrm{d}z,$$

$$|u(x)| \leqq |u(\xi)| + \int_\xi^x |u'(z)|\,\mathrm{d}z \leqq \frac{1}{l}\int_0^l |u(z)|\,\mathrm{d}z + \int_0^l |u'(z)|\,\mathrm{d}z.$$

S použitím Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti pak dostaneme

$$\|u\|_\infty \leqq \frac{1}{l}\sqrt{l\int_0^l |u(z)|^2\,\mathrm{d}z} + \sqrt{l\int_0^l |u'(z)|^2\,\mathrm{d}z} \leqq C\|u\|_{2,1}\,.$$

□

Limitnim přechodem se (3.27) rozšíří na $H^1(\Omega)$ a ukáže se, že v případě jednorozměrné oblasti $\Omega = (0, l)$ je $H^1(\Omega) \subset C(\bar{\Omega}) \subset L_2(\Omega)$. To zaručuje, že pro $u \in H^1(\Omega)$ má smysl hovořit o klasické rovnosti funkcí, o hodnotě funkce u v bodě x a tedy i o zadání okrajových podmínek Dirichletova typu či o Newtonově-Leibnizově formuli

$$u(l) - u(0) = \int_0^l u'\,\mathrm{d}x,$$

z níž je odvozena integrace per partes, kterou jsme použili pro odvození variační identity.

Lze také hovořit o podmnožinách $H^1_D(\Omega)$ a $H^1_V(\Omega)$ prostoru $H^1(\Omega)$, které vzniknou zúplněním U_D a V v normě $\|\,.\,\|_{2,1}$a lze je charakterizovat jako podmnožiny $H^1(\Omega)$, ve kterých platí příslušná Dirichletova okrajová podmínka.

Pro vícerozměrnou oblast Ω je situace složitější, a lze hovořit o tzv. stopě funkce na hranici Ω a opět zaručit vše potřebné pro variační formulaci, viz kapitola 5.

Prostor $H^1(\Omega)$ je také možno charakterizovat tak, že jej tvoří funkce z $L_2(\Omega)$, které mají zobecněné derivace rovněž z $L_2(\Omega)$,

$$H^1(\Omega) = \{v \in L_2(\Omega) :\; v' \in L_2(\Omega)\}\,.$$

Definice 3.17. Zobecněnou derivací $v' = w$ přitom rozumíme funkci pro kterou platí

$$\int_\Omega w\varphi \, \mathrm{d}x = -\int_\Omega v\varphi' \, \mathrm{d}x \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \tag{3.28}$$

kde $C_0^\infty(\Omega)$ je prostor všech nekonečně diferencovatelných funkcí na $\langle 0, l\rangle$, které mají nulové funkční hodnoty na hranici.

Poznamenejme, že vztah (3.28) platí pro klasickou derivaci, jak plyne z integrace per partes

$$\int_\Omega v'\varphi \, \mathrm{d}x = [v\varphi]_0^l - \int_\Omega v\varphi' \, \mathrm{d}x \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Zobecněná derivace není definována bodově (lokálně), ale nelokálně variační identitou.

Příklad 3.18. Když uvažujeme dělení intervalu $\langle 0, l\rangle$ dané body $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = l$ a funkce v spojité a po částech lineární (po částech spojitě derivovatelné) na $\langle 0, l\rangle$, pak w, která je nespojitá a je rovna v' na každém z intervalů (x_i, x_{i+1}), bude zobecněnou derivací v, protože

$$\begin{aligned} -\int_\Omega v\varphi' \, \mathrm{d}x &= -\sum \int_{x_i}^{x_{i+1}} v\varphi' \, \mathrm{d}x = -\sum [v\varphi]_{x_i}^{x_{i+1}} + \sum \int_{x_i}^{x_{i+1}} w\varphi \, \mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega w\varphi \, \mathrm{d}x \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \end{aligned}$$

Lze také definovat zobecněné derivace vyšších řádů $w = D^k v$ rovností

$$\int_\Omega w\varphi \, \mathrm{d}x = (-1)^k \int_\Omega v D^k\varphi \, \mathrm{d}x \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Nyní přejdeme k otázce existence slabého řešení okrajové úlohy, kterou jsme začínali tuto část kapitoly. Předpokládejme nejprve symetrickou bilineární formu.

Definice 3.19. Slabým řešením nazveme $u \in H_D^1(\Omega)$ resp. $w \in H_V^1(\Omega)$ takové, že

$$u = u_D + w, \text{ kde } u_D \in H_D^1(\Omega) \text{ je předem zvolená funkce}, \tag{3.29}$$

$$a(w, v) = b_D(v) = b(v) - a(u_D, v) \quad \forall v \in H_V^1(\Omega), \tag{3.30}$$

Pokud uvažujeme slabé řešení ve smyslu předchozí definice, potom z úvah provedených na začátku této části plyne věta.

Věta 3.20. *Pokud je a V-eliptická a omezená bilineární forma a b je omezený lineární funkcionál na $H_V^1(\Omega)$, potom existuje právě jedno slabé řešení vyhovující podmínkám (3.29) a (3.30).*

Poznamenejme, že pokud je a V-eliptická bilineární forma a b je omezený lineární funkcionál na V, potom lze otázku existence řešení formulovat jako vyjádření omezeného lineárního funkcionálu pomocí skalárního součinu definovaného pomocí a.

V prostoru X se skalárním součinem $(\,,\,)_X$ je tato otázka snadno řešitelná, pokud v prostoru existuje konečná ortonormální báze $\phi_1, \ldots, \phi_n$, $(\phi_i, \phi_j)_X = 0$ pro $i \neq j$, $(\phi_i, \phi_j)_X = 1$ pro $i = j$. Pomocí uvedené báze $\phi_1, \ldots, \phi_n$ totiž můžeme vyjádřit libovolný bod $x \in X$ jako $x = \sum x_i \phi_i$, kde $x_i = (x, \phi_i)_X$. Pro lineární funkci b pak máme

$$b(x) = b\left(\sum x_i \phi_i\right) = \sum (x, \phi_i)_X b\left(\phi_i\right) = (x, y)_X,$$

kde $y = \sum b\left(\phi_i\right) \phi_i$.

V případě omezeného lineárního funkcionálu lze obdobnou větu dokázat i v prostorech nekonečné dimenze, příslušnému tvrzení se říká Rieszova věta o representaci funkcionálu viz například [21]. Tato věta však platí pouze tehdy, pokud pracujeme v prostoru, který je úplný, opět tedy musíme přejít k Sobolevovým prostorům.

Zatím jsme hovořili o existenci řešení v případě symetrické bilineární formy. Pro variační formulaci s nesymetrickou bilineární formou však existuje obdobné tvrzení o existenci slabého řešení okrajové úlohy. Tomuto řešení se říká Laxova-Milgramova věta, podrobnosti najdeme opět v [21], [20]. Zde uvedeme jen její znění. Připomeňme ještě, že obdobné věty lze dokázat i pro některé třídy nelineárních úloh.

Věta 3.21. *<u>Laxova-Milgramova.</u> Nechť a je bilineární forma, b je lineární funkcionál na prostoru $H_V^1(\Omega)$ (obecněji libovolném Hilbertově prostoru) a nechť existují kladné konstanty m, M a B tak, že platí elipticita a omezenost a a omezenost b, tj.*

$$a(v,v) \geqq m \parallel v \parallel_{2,1}^2 \qquad \forall v \in H_V^1(\Omega) \tag{3.31}$$

$$\mid a(u,v) \mid \leqq M \parallel u \parallel_{2,1} \parallel v \parallel_{2,1} \qquad \forall u, v \in H_V^1(\Omega) \tag{3.32}$$

$$\mid b(v) \mid \leqq B \parallel v \parallel_{2,1} \qquad \forall v \in H_V^1(\Omega). \tag{3.33}$$

Potom má úloha: najít funkci $u \in H_D^1(\Omega)$, pro kterou platí

$$a(u,v) = b(v) \qquad \forall v \in H_V^1(\Omega),$$

právě jedno řešení. Navíc $\parallel u \parallel_{2,1} \leqq \frac{1}{m} \|b\| \leqq \frac{1}{m} B$, where $\|b\| = \sup\limits_{v \neq 0} \frac{|b(v)|}{\|v\|_{2,1}}$.

Připomeňme ještě analogii s rovnicí $x^2 = 2$. I v případě okrajové úlohy s obecnými daty víme, že řešení je v příslušném abstraktním Sobolevově prostoru, přičemž ale lze toto řešení libovolně dobře aproximovat dobře názornými funkcemi z $U(\Omega)$. Dále uvidíme, že aproximující posloupnost lze sestrojit např. s využitím metody konečných prvků.

3.11 Poznámky k regularitě řešení

Uveďme nejdříve následující lemma

Lemma 3.22. *Lemma du Bois Reymondovo. Nechť $u \in L(\Omega)$ a platí*

$$\int_\Omega u\varphi \,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Potom $u = 0$ skoro všude (s.v.) na Ω. Pokud je navíc $u \in C(\Omega)$, potom $u = 0$ ve všech bodech Ω.

V případě, kdy u je slabé řešení, pro které

$$\int_\Omega ku'v' \,\mathrm{d}x = \int_\Omega fv \,\mathrm{d}x - \hat{\tau}v(l) \quad \forall v \in H_V^1(\Omega)$$

pak s využitím lemma du Bois Reymondova dostaneme - pokud je navíc (ku')' $+ f$ spojitá funkce, potom platí (ku')' $+ f = 0$.

Slabé řešení tedy bude za předpokladu spojitosti f, k' a u'' řešením klasickým (silným). Poznamenejme, že testování fukcemi $v \in H_V^1(\Omega)$ nulovými na celé hranici odvodí diferenciální rovnici, testování funkcemi nenulovými v l, pak dodá Neumannovu okrajovou podmínku.

U spojitých diferencovatelných funkcí můžeme zavést celou škálu prostorů

$$C^\infty(\Omega) \subset \ldots \subset C^1(\Omega) \subset U(\Omega) \subset C^0(\Omega) = C(\Omega).$$

Obdobně lze zavést škálu Sobolevových prostorů

$$H^k(\Omega) \subset \ldots \subset H^2(\Omega) \subset H^1(\Omega) \subset L_2(\Omega).$$

K definici $H^k(\Omega)$ lze použít zúplnění $C^k(\Omega)$ v normě $\|\cdot\|_{2,k}$, nebo uvažovat funkce s L_2 integrovatelnými zobecněnými derivacemi do řádu k.

Logicky, pokud $u \in H^k(\Omega)$, potom $u' \in H^{k-1}(\Omega)$. Díky tomu, spojité, po částech lineární funkce patří sice do $H^1(\Omega)$ (ukazovali jsme, že zobecněnou derivací je po částech konstantní L_2 integrovatelná funkce), ale nepatří do $H^2(\Omega)$, protože zobecněnou derivací je nespojitá po částech konstantní funkce, která nepatří do $H^1(\Omega)$.

Příklad 3.23. Zamysleme se nad otázkou zobecněné derivace funkce u, která je po částech hladká v $\langle 0, l\rangle$ se skokem v bodě ξ. Pokud existuje zobecněná derivace $w \in L_2(\Omega)$, potom

$$\int_\Omega w\varphi \,\mathrm{d}x = \int_\Omega u\varphi' \,\mathrm{d}x = [u\varphi]_0^\xi + [u\varphi]_\xi^l - \int_0^\xi u'\varphi \,\mathrm{d}x - \int_\xi^l u'\varphi \,\mathrm{d}x$$
$$= [u\varphi]_0^\xi + [u\varphi]_\xi^l = c\varphi(\xi) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

Podle du Bois Reymondova lemma je potom $w = u'$ s.v. v Ω (uvažujeme nejdříve $\varphi \in C_0^\infty(0,\xi)$ a následně $\varphi \in C_0^\infty(\xi, l)$) a tudíž

$$0 = [u\varphi]_0^\xi + [u\varphi]_\xi^l = [u(\xi_+) - u(\xi_-)]\,\varphi(\xi) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Tedy skok v ξ musí být nulový.

Existuje také vzájemný vztah Sobolevových prostorů a prostorů $C^k(\Omega)$. Již jsme uvedli, že v případě $\Omega = (0,l)$ je $H^1(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$. Obecněji $H^k(\Omega) \subset C^{k-1}(\bar{\Omega})$. V případě vícerozměrné oblasti $\Omega \subset R^d$ později uvidíme, že platí tzv. Sobolevovy věty vnoření tj. $H^k(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$ (přesněji, ke každé funkci $u \in H^k(\Omega)$ existuje $\tilde{u} \in C(\bar{\Omega})$, $u = \tilde{u}$ skoro všude), ale jen pokud $k > \frac{d}{2}$, pro $\Omega \subset R^d$, viz [21, 20, 6].

V případě uvažovaných okrajových úloh na jednorozměrných oblastech bude řešení z $H^2(\Omega)$ v případě, že neexistují nespojitosti v materiálových koeficientech. Nespojitosti v pravé straně přitom nevadí, stačí když $f \in L_2(\Omega)$. V případě nespojitosti v materiálovém koeficientu však podmínky přechodu implikují skok v první derivaci řešení, a proto řešení nebude v $H^2(\Omega)$.

Slabé řešení tedy patří do vyššího Sobolevova prostoru $H^k(\Omega)$, kde $k > 1$, v závislosti na koeficientech, u vícerozměrných úloh také v závislosti na tvaru oblasti. V případě $u \in H^k(\Omega)$, kde $k > 1$, hovoříme o vyšší regularitě řešení. Předpoklady o vyšší regularitě dále využijeme při zkoumání aproximace řešení metodou konečných prvků.

3.12 Shrnutí a cvičení

V této kapitole jsme ukázali variační formulaci okrajových úloh. Ukázali jsme také, že k této formulaci patří studium prostorů funkcí, bilineárních forem a funkcionálů. Získané výsledky nám poslouží k odvození metody konečných prvků a ke studiu diskretizační chyby této metody.

Cvičení 3.24. Ukažte, že pro posloupnost spojitých, po částech lineárních funkcí

$$v_n(0) = 0,\ v_n'(x) = \begin{cases} 1/i & \text{pro } x \in (1 - \frac{1}{i},\, 1 - \frac{1}{i+1}\rangle,\ i = 1, \dots, n-1, \\ 1/n & \text{pro } x \in (1 - \frac{1}{n},\, 1\rangle, \end{cases}$$

platí $v_n \in V$, posloupnost je cauchyovská v $\|\cdot\|_{2,1}$ ale nemá limitu ve V (derivace má nekonečně mnoho bodů nespojitosti).

Kapitola 4

Metoda konečných prvků

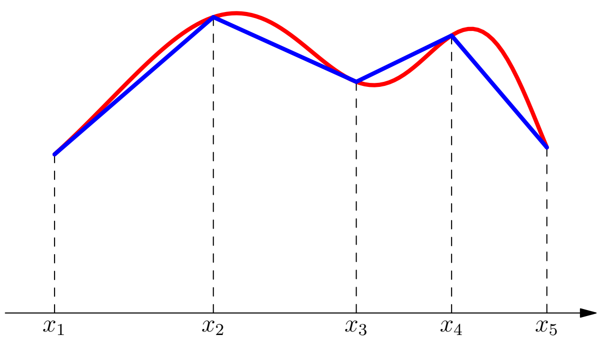
4.1 Jednoduchý příklad - MKP heuristicky

K metodě konečných prvků můžeme dojít následujícími úvahami. Zajímá nás přibližné řešení modelové úlohy

$$-(ku')' = f \qquad \text{v } \Omega = (0, l) \tag{4.1}$$
$$u(0) = \hat{u} \tag{4.2}$$
$$-k(l)u'(l) = \hat{\tau}, \tag{4.3}$$

která může představovat 1D úlohu úlohu vedení tepla, difuse, lineární pružnosti apod.

Nyní budeme hledat aproximaci (přesného) řešení u pomocí funkce $\tilde{u}$, která je určena hodnotami $\tilde{u}_i = \tilde{u}(x_i)$ v uzlech $0 = x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 = l$ a je lineární na každém intervalu $e_i = \langle x_i, x_{i+1} \rangle$, $i = 1, 2, 3, 4$, viz obr. 4.1. Dirichletova okrajová podmínka dává $u_1 = \hat{u}$, je ovšem otázkou jak určit hodnoty u_2, u_3, u_4 a u_5.



Obr. 4.1: Aproximace řešení funkcí spojitou po částech lineární.

Z kapitoly 3 víme, že funkce u realizuje minimum energetického funkcionálu

$$J(v) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} k(w')^2 \,\mathrm{d}x - \int\limits_{\Omega} f w \,\mathrm{d}x + \hat{\tau} w(l)$$

mezi všemi funkcemi $w \in U_D$. Je tedy logické vzít funkci $\tilde{u}$ tak, aby

$$J(\tilde{u}) = \min \left\{ J(\tilde{w}) : \ \tilde{w} \in \widetilde{U}_D \right\},$$

kde $\widetilde{U}_D \subset U_D$ je množina funkcí, které jsou spojité na $\langle 0, l \rangle$, lineární na intervalech e_1, e_2, e_3, e_4 a splňují Dirichletovu okrajovou podmínku tam, kde je zadaná.

Necht $\tilde{w} \in \widetilde{U}_D$, pak $\tilde{w}$ je určena svými hodnotami $\tilde{w}(x_i) = \tilde{w}_i$ $(i = 2, 3, 4, 5)$ a na prvku $e_i = \langle x_i, x_{i+1} \rangle$ je $\tilde{w}_i' \,|_{e_i} = \frac{\tilde{w}_{i+1} - \tilde{w}_i}{x_{i+1} - x_i}$. Bude tedy

$$J\left(\tilde{w}\right) = J(\tilde{w}_2, \tilde{w}_3, \tilde{w}_4, \tilde{w}_5) = \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{2} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} k \left(\frac{\tilde{w}_{i+1} - \tilde{w}_i}{x_{i+1} - x_i} \right)^2 \mathrm{d}x - \sum_{i=1}^{4} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f \tilde{w} \,\mathrm{d}x + \hat{\tau} \tilde{w}_5 =$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{4} k_i \frac{(\tilde{w}_{i+1} - \tilde{w}_i)^2}{x_{i+1} - x_i} - \sum_{i=1}^{4} f_i \frac{\tilde{w}_{i+1} + \tilde{w}_i}{2} (x_{i+1} - x_i) + \hat{\tau} \tilde{w}_5$$

pokud předpokládáme, že k, f jsou konstantní na jednotlivých intervalech e_1, e_2, e_3, e_4, $k_i = k\,|_{e_i}$, $f_i = f\,|_{e_i}$.

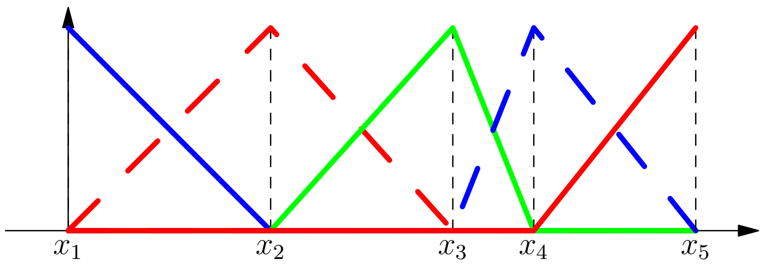
Pokud má být $J\left(\tilde{u}\right)$ minimální, potom musí platit

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \tilde{w}_2} (u_2, u_3, u_4, u_5) &= \frac{\partial J}{\partial \tilde{w}_3} (u_2, u_3, u_4, u_5) = \\ &= \frac{\partial J}{\partial \tilde{w}_4} (u_2, u_3, u_4, u_5) = \frac{\partial J}{\partial \tilde{w}_5} (u_2, u_3, u_4, u_5) = 0. \end{aligned}$$

To vede k soustavě

$$\begin{aligned} k_1 \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1} - k_2 \frac{u_3 - u_2}{x_3 - x_2} - \frac{1}{2} f_1 (x_2 - x_1) - \frac{1}{2} f_2 (x_3 - x_2) &= 0 \\ k_2 \frac{u_3 - u_2}{x_3 - x_2} - k_3 \frac{u_4 - u_3}{x_4 - x_3} - \frac{1}{2} f_2 (x_3 - x_2) - \frac{1}{2} f_3 (x_4 - x_3) &= 0 \\ k_3 \frac{u_4 - u_3}{x_4 - x_3} - k_4 \frac{u_5 - u_4}{x_5 - x_4} - \frac{1}{2} f_3 (x_4 - x_3) - \frac{1}{2} f_4 (x_5 - x_4) &= 0 \\ k_4 \frac{u_5 - u_4}{x_5 - x_4} - \frac{1}{2} f_4 (x_5 - x_4) - \hat{\tau} &= 0. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy získáme hodnoty u_2, u_3, u_4, u_5, které určují přibližné řešení $\tilde{u} \in \widetilde{U}_D$. Ukázaný postup je speciálním případem přibližného řešení okrajové úlohy, které dále rozpracujeme a nazveme metodou konečných prvků (MKP).



Obr. 4.2: Grafy bázových funkcí, graf ϕ_1, ϕ_3 , ϕ_5 je značen plně, ϕ_2, ϕ_4 čárkovaně.

4.2 MKP jako Ritzova-Galerkinova metoda

Pokusme se zobecnit metodu popsanou v předchozí části.

V prvé řadě budeme uvažovat obecné dělení $\mathcal{T}_h$ oblasti $\Omega = \langle 0,\, l\rangle$ na intervaly $e_i = \langle x_i,\, x_{i+1}\rangle$ délky nejvýše h, jejichž koncové body jsou tvořeny uzly

$$0 = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = l. \tag{4.4}$$

Na základě tohoto dělení můžeme definovat množiny funkcí

- $\widetilde{U} = U(\mathcal{T}_h) = U_h$ bude množina funkcí spojitých na $\langle 0,\, l\rangle$ a lineárních na každém z intervalů $e \in \mathcal{T}_h$. Tedy $\widetilde{U} \subset U$, kde U je množina funkcí definovaná v části 3.3,
- $\widetilde{U}_D = U_h^D$ bude množina těch funkcí z $\widetilde{U} = U_h$, které splňují zadané okrajové podmínky Dirichletova typu, $\widetilde{U}_D \subset U_D$, kde U_D je množina funkcí definovaná v části 3.4,
- $\widetilde{V} = V_h$ bude množina těch funkcí z $\widetilde{U} = U_h$, které jsou nulové v těch uzlech, ve kterých jsou zadané okrajové podmínky Dirichletova typu, $\widetilde{V} \subset V$, kde V je množina testovacích funkcí definovaná v části 3.3.

Funkce z $\widetilde{U} = U_h$ můžeme vyjádřit jako lineární kombinace základních bázových funkcí, kterými budou takové funkce z $\widetilde{U} = U_h$, které jsou rovny 1 v jednom z uzlů a 0 ve všech ostatních uzlech. Grafy takových funkcí vidíme na obrázku 4.2. Označme ϕ_i takovou bázovou funkci, pro kterou platí

$$\phi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j \\ 0 & \text{pro } i \neq j \end{cases}, \tag{4.5}$$

potom lze každou funkci $\tilde{u} \in \widetilde{U}$ vyjádřit ve tvaru

$$\tilde{u}(x) = \sum_{i=1}^{N} u_i \phi_i(x). \tag{4.6}$$

Dále budeme potřebovat vyjádření pro funkce $\tilde{u} \in \widetilde{U}_D$. K tomu označme Γ_D množinu uzlů, ve kterých jsou zadané okrajové podmínky Dirichletova typu a rozdělme množinu indexů $I = \{1, \dots, n\}$ na $I_D = \{i : \ x_i \in \Gamma_D\}$ a $I_V = I \setminus I_D$. Pokud $\hat{u}_k$ značí zadanou hodnotu Dirichletovy okrajové podmínky v $x_k \in \Gamma_D$ a $\phi_D = \sum_{k \in I_D} \hat{u}_k \phi_k$, potom můžeme každou funkci $\tilde{u} \in \widetilde{U}_D$ vyjádřit ve tvaru

$$\tilde{u}(x) = \phi_D(x) + \sum_{i \in I_V} u_i \phi_i(x). \tag{4.7}$$

Zbývá poznamenat, že každou funkci $\tilde{v} \in \widetilde{V}$ lze vyjádřit ve tvaru

$$\tilde{v}(x) = \sum_{i \in I_V} v_i \phi_i(x). \tag{4.8}$$

Ve vyjádření (4.6)–(4.8) musí být koeficient u ϕ_i roven funkční hodnotě reprezentované funkce v x_i. Všechna uvedená vyjádření jsou tedy jednoznačná, $\{\phi_i : \ i \in I_V\}$ tvoří bázi lineárního prostoru $\widetilde{V}$ a pojem bázová funkce má své oprávnění.

Ritzova-Galerkinova metoda

Vraťme se k řešení úlohy (4.1)–(4.3), které lze rovněž formulovat variačně nebo energeticky. Hledáme tedy řešení u, pro které platí

(E1) $\quad u \in U_D,$

(E2) $\quad J(u) = \min \{J(w) : \ w \in U_D\},$

nebo

(V1) $\quad u \in U_D,$

(V2) $\quad a(u, v) = b(v) \qquad \forall v \in V.$

Pokud nyní $\widetilde{U} = \mathrm{span}\{\phi_i : \ i = 1, \ldots, n\}$, $\widetilde{U}_D = \phi_D + \mathrm{span}\{\phi_i : \ i \in I_V\} \subset U_D$, $\widetilde{V} = \mathrm{span}\{\phi_i : \ i \in I_V\} \subset V$, potom lze přirozeně definovat přibližné řešení jako funkci splňující následující podmínky

(R1) $\quad \tilde{u} \in \widetilde{U}_D,$

(R2) $\quad J(\tilde{u}) = \min \left\{ J(\tilde{w}) : \ \tilde{w} \in \widetilde{U}_D \right\},$

nebo

(G1) $\quad \tilde{u} \in \widetilde{U}_D,$

(G2) $\quad a(\tilde{u}, \tilde{v}) = b(\tilde{v}) \qquad \forall \tilde{v} \in \widetilde{V}.$

Pokud určíme přibližné řešení podmínkami (R1), (R2), hovoříme o přibližném řešení Ritzovou metodou (W. Ritz, 1908). Při použití podmínek (G1), (G2) hovoříme o Galerkinově metodě (B.G. Galerkin, 1915).

Úplně stejně jako jsme ukázali ekvivalenci slabé a energetické formulace okrajové úlohy (Věta 3.4), lze ukázat ekvivalenci Ritzovy i Galerkinovy metody (obě dávají stejné přibližné řešení $\tilde{u}$) za předpokladu, že bilineární forma a je symetrická a nezáporná. Galerkinovu metodu lze ovšem použít i v případech, kdy a je nesymetrická.

Ritzovu-Galerkinovu metodu lze použít obecně s různými prostory funkcí, např. $\widetilde{U}$ by mohlo být jinak vytvořeno z polynomů do stupně n. Pokud ale použijeme prostory funkcí vytvořené na základě rozdělení oblasti a slepování lineárních funkcí (tak jak jsme to udělali v úvodu této části) pak dostáváme metodu konečných prvků (MKP). Tento postup má řadu významných výhod, o kterých se zmíníme později.

4.2.1 Numerická realizace Ritzovy-Galerkinovy metody

Vyjdeme z podmínek (G1), (G2), které jsou obecnější i vhodnější k našemu účelu. Je snadné ukázat, že podmínka (G2) je ekvivalentní následující podmínce:

$$a(\tilde{u}, \phi_i) = b(\phi_i), \qquad \forall i \in I_V. \tag{4.9}$$

Z vyjádření (4.7) pak pro $i \in I_V$ dostáváme

$$\sum_{j=1}^{n} u_j a\left(\phi_j, \phi_i\right) = b\left(\phi_i\right) - a\left(\phi_D, \phi_i\right) = b_D(\phi_i) \tag{4.10}$$

což je soustava lineárních algebraických rovnic. Pokud bázové funkce $\phi_i : \ i \in I_V$ znovu postupně očíslujeme jako $\phi_1, \ldots, \phi_n$, potom můžeme soustavu (4.10) zapsat maticově ve tvaru

$$A\mathbf{u} = \mathbf{b}, \tag{4.11}$$

kde

$$\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)^T, \quad \mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)^T, \; b_i = b_D(\phi_i), \tag{4.12}$$

$$A = (a_{ij}), \quad a_{ij} = a(\phi_j, \phi_i). \tag{4.13}$$

V úlohách vedení tepla se matice A nazývá matricí tepelné vodivosti a vektor $\mathbf{b}$ vektorem tepelných zdrojů, v úlohách pružnosti se matice A nazývá maticí tuhosti a vektor $\mathbf{b}$ vektorem zatížení. S posledním označením se ale setkáme i obecněji.

Pokud je a symetrická bilineární forma, která je kladná na V, potom je matice A symetrická a pozitivně definitní, neboť

$$\mathbf{v}^T A\mathbf{v} = \sum_{ij} v_i a_{ij} v_j = a\left(\sum v_j\phi_j, \sum v_i\phi_i\right) = a(v, v)$$

pro všechna $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)^T$, $v = \sum v_i\phi_i \in \widetilde{V}$. Kladnost a znamená, že $a(v, v) > 0$ pro $v \neq 0$ odkud vzhledem k jednoznačné korespondenci $v \in V$ a $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ plyne $\mathbf{v}^T A\mathbf{v} > 0$ pro $\mathbf{v} \neq 0$. Matice A je tedy také regulární a soustava (4.11) jednoznačně řešitelná.

Příklad 4.1. Řešme Ritzovou-Galerkinovou metodou úlohu

$$\begin{aligned} -u'' &= 1 - x \qquad \text{v } \Omega = (0,1) \\ u(0) &= 2 \\ -u'(1) &= -\frac{1}{4}, \end{aligned}$$

Uvažujme dělení na prvky $e_1 = \langle 0, 1/2\rangle$ a $e_2 = \langle 1/2, 1\rangle$. V tomto případě máme tři uzly $x_1 = 0$, $x_2 = 1/2$ a $x_3 = 1$, kterým přísluší bázové funkce ϕ_1, ϕ_2, a ϕ_3. Pro reprezentaci řešení použijeme $\phi_D = 2\phi_1$, ϕ_2, ϕ_3. Poznamenejme, že na intervalu (prvku) $\langle 0, 1/2\rangle$ je $\phi_1' = -2$, $\phi_2' = 2$, $\phi_3' = 0$ na intervalu (prvku) $\langle 1/2, 1\rangle$ je $\phi_1' = 0$, $\phi_2' = -2$, $\phi_3' = 2$.

Proto

$$a(\phi_2, \phi_2) = \int_0^{1/2} 2 \cdot 2 \,\mathrm{d}x + \int_{1/2}^{1} -2 \cdot (-2) \,\mathrm{d}x = 4$$

$$a(\phi_2, \phi_3) = \int_{1/2}^{1} -2 \cdot 2 \,\mathrm{d}x = -2 = a(\phi_3, \phi_2)$$

$$a(\phi_3, \phi_3) = \int_{1/2}^{1} 2 \cdot 2 \,\mathrm{d}x = 2,$$

$$
\begin{aligned}
b_D(\phi_2) &= \int\limits_0^{1/2} \phi_2(x)\,(1-x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{1/2}^{1} \phi_2(x)\,(1-x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\phi_2(1) - a(2\phi_1,\phi_2) \\
&= \int\limits_0^{1/2} 2x\,(1-x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{1/2}^{1} 2(1-x)(1-x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^{1/2} 2\cdot 2\,\mathrm{d}x \\
b_D(\phi_3) &= \int\limits_{1/2}^{1} 2(x-\frac{1}{2})\,(1-x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\phi_2(1) - a(2\phi_1,\phi_3).
\end{aligned}
$$

Integrály v $b_D(\phi_2)$, $b_D(\phi_3)$ jsme v našem případě schopni spočítat analyticky, ale obecně je budeme počítat numericky, zde použitím jednobodové (obdélníkové) integrační formule $\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = g\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$. Tak dostaneme

$$
\begin{aligned}
b_D(\phi_2) &= \frac{3}{16} + \frac{1}{16} + 4 = \frac{68}{16}, \\
b_D(\phi_3) &= \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{5}{16}.
\end{aligned}
$$

Dostáváme tedy soustavu

$$
\begin{aligned}
4u_2 - 2u_3 &= \frac{68}{16} \\
-2u_2 + 2u_3 &= \frac{5}{16},
\end{aligned}
$$

a řešení $u_2 = 73/32$ a $u_3 = 78/32$. Srovnejte toto řešení s přesným řešením úlohy. Proveďte také srovnání s řešením, které odpovídá přesné integraci při výpočtu $b_D(\phi_2)$ a $b_D(\phi_3)$.

Poznámka 4.2. Prvky matice tuhosti jsme počítali integrací „po jednotlivých elementech“. Tento postup je základem algoritmizace metody konečných prvků.

4.3 Algoritmizace MKP pro řešení 1D úlohy

Předpokládejme opět, že chceme řešit úlohu (4.1)–(4.3) s pouzitím diskretizace $\mathcal{T}_h = \{e_1, \ldots, e_{N-1}\}$, $e_i = \langle x_i, x_{i+1}\rangle$, kde x_i jsou uzly diskretizace $0 = x_1 < x_2 < \ldots < x_N = l$.

K přibližnému řešení použijeme metodu konečných prvků, ale budeme se zamýšlet nad její algoritmizací a programováním. Základem algoritmizace je specifikace vstupních a výstupních dat.

a) Definice dat pro popis úlohy

Vstupní data lze výhodně organizovat „po prvcích“ např. tak, že

pro každý element e_l zadáme:	$x_{(1)}, x_{(2)}$	souřadnice konc. bodů
	r, s	čísla konc. bodů
	k_l	hodnotu mater. koef. k na e_l
	f_l	hodnotu zdroje f ve středu e_l

Uvedenými daty plně popíšeme oblast i úlohu uvnitř oblasti. Zbývá přidat data o okrajových podmínkách např. tak, že

pro každý krajní bod zadáme	x	souřadnici bodu
	typ	Dirichletova=0/Neumannova=1
	r	číslo bodu
	ζ	zadanou hodnotu OP

b) Sestavení soustavy po „prvcích“

Tak jako jsme zorganizovali „po prvcích“ vstupní data, můžeme zorganizovat „po prvcích“ i velkou část setavení MKP soustavy. Výchozí ideou je skutečnost, že položky matice soustavy a vektoru pravé strany jsou definovány integrály, které lze počítat jako součet intgrálů přes jednotlivé konečné prvky, tedy

$$a_{ij} = \int_0^l k\phi_i'\phi_j' \,\mathrm{d}x = \sum_{l=1}^{N-1} \int_{e_l} k_l\phi_i'\phi_j' \,\mathrm{d}x$$

$$b_i = \int_0^l f\phi_i \,\mathrm{d}x = \sum_{l=1}^{N-1} \int_{e_l} f_l\phi_i \,\mathrm{d}x.$$

Další skutečností je, že průběh bázové funkce ϕ_i na prvku e_l je pouze jedním ze tří typů

$$\phi_i \mid_{e_l} = \begin{cases} \psi_{(1)} \\ \psi_{(2)} \\ 0 \end{cases},$$

kde $\psi_{(1)}$ je lineární funkce nabývající hodnoty 1 v $x_{(1)}$ a 0 v $x_{(2)}$, $\psi_{(2)}$ je lineární funkce s opačným průběhem (hovoří se též o lokálních bázových funkcích) a 0 je identicky nulová funkce. Zřejmě

$$\psi_{(1)}' = -\frac{1}{h_l}, \qquad \psi_{(2)}' = \frac{1}{h_l}, \qquad h_l = x_{(2)} - x_{(1)}$$

a následující hodnoty jsou jediné nenulové příspěvky prvku e_l do matice soustavy a vektoru pravé strany

$$\int_{e_l} k_l \phi_i' \phi_j' \,\mathrm{d}x = \begin{cases} a_{11}^l = \int_{e_l} k_l\, \psi_{(1)}' \psi_{(1)}' \,\mathrm{d}x = k_l/h_l \\ a_{12}^l = \int_{e_l} k_l\, \psi_{(1)}' \psi_{(2)}' \,\mathrm{d}x = -k_l/h_l = a_{21}^l \\ a_{22}^l = \int_{e_l} k_l\, \psi_{(2)}' \psi_{(2)}' \,\mathrm{d}x = k_l/h_l \\ 0 \end{cases},$$

$$\int_{e_l} f_l \phi_i \,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{2} f_l h_l \\ \frac{1}{2} f_l h_l \\ 0 \end{cases}.$$

Uvedené nenulové příspěvky můžeme zapsat do lokální matice a lokálního vektoru

$$A^{(l)} = \frac{k_l}{h_l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b^{(l)} = \frac{1}{2} f_l h_l \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

c) <u>Algoritmus sestavení MKP soustavy</u>
Nejprve vytvoříme matici a vektor dimenze $N \times N$ a N. Pak nulujeme všechny prvky matice i vektoru $A \equiv 0$, $b \equiv 0$. Pak provedeme
`cyklus přes elementy` e_l :

- pro element provedeme výpočet lokální matice tuhosti a lokálního vektoru zatížení:
$$A^{(l)} = \frac{k_l}{h_l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b^{(l)} = \frac{1}{2} f_l h_l \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
- provedeme přičtení lokálních příspěvků na odpovídající pozice globální soustavy:

$$\begin{aligned} a_{rr} &= a_{rr} + a_{11}^l \\ a_{rs} &= a_{rs} + a_{12}^l \qquad\qquad & b_r &= b_r + b_1^l \\ a_{sr} &= a_{sr} + a_{21}^l & b_s &= b_s + b_2^l \\ a_{ss} &= a_{ss} + a_{22}^l \end{aligned}$$

`konec cyklu`

d) <u>Úprava soustavy vzhledem k okrajovým podmínkám</u>
Získaná soustava $Au = b$ je vytvořena bez informace o okrajových podmínkách. Tuto informaci musíme nyní dodat a soustavu upravit.
Pokud je v uzlu x_r zadaná <u>Neumannova okrajová podmínka</u> s hodnotou „přítoku“ τ_Ω (viz diskuze v části 3.4) pak musíme k pravé straně dodat vektor

$$(\tau_\Omega \phi_1(x_r), \ldots, \tau_\Omega \phi_N(x_r))^T . \tag{4.14}$$

Tento vektor bude mít jedinou nenulovou položku a to $\tau_\Omega \phi_r(x_r) = \tau_\Omega$. Jinými slovy, k položce b_r přidáme τ_Ω.
Pokud je v uzlu x_r zadaná Dirichletova okrajová podmínka s hodnotou $\hat{u}$ pak musíme k pravé straně dodat vektor

$$(-a(\phi_D, \phi_1), \ldots, -a(\phi_D, \phi_N)), \tag{4.15}$$

kde $\phi_D = \hat{u}\phi_r$. To ale znamená vynásobit r-tý sloupec A hodnotou $\hat{u}$ a vzniklý vektor odečíst od sestaveného vektoru b. Pokud je $\hat{u} = 0$ pak uvedená úprava samozřejmě neznamená žádnou změnu pravé strany.
V případě Dirichletovy okrajové podmínky následuje ještě další úprava soustavy, která vychází ze skutečnosti, že hodnotu u_r, která je zadaná, nemáme vůbec počítat, a v soustavě je tudíž r-tý řádek a sloupec navíc. Můžeme tedy tento řádek i sloupec vyloučit. Pokud však nechceme rozměr matice měnit, můžeme např. řádek i sloupec nulovat a potom řádek upravit tak, aby odpovídal rovnici $u_r = \hat{u}$, jinými slovy položíme $a_{rr} = 1$ a $b_r = \hat{u}$.
Místo uvedených dvou kroků úpravy lze též položit $a_{rr} = p$ a $b_r = p\hat{u}$, kde p je vhodné „velké" číslo, např. $p = 10^{20}$. U této úpravy musíme ověřit, zda nebude vadit při numerickém řešení soustavy.

Příklad 4.3. Použijeme stejný příklad jako v předchozí části, tedy řešíme úlohu

$$\begin{aligned} -u'' &= x \quad \text{v } \Omega = (0,1) \\ u(0) &= 2 \\ -u'(1) &= -\frac{1}{4} = -\tau_\Omega, \end{aligned}$$

a uvažujme dělení na prvky $e_1 = \langle 0, 1/2 \rangle$ a $e_2 = \langle 1/2, 1 \rangle$.

Data pro e_1 : $x_{(1)} = 0.0$, $x_{(2)} = 0.5$;
$r = 1$, $s = 2$;
$k = 1$; $f = 3/4$
Data pro e_2 : $x_{(1)} = 0.5$, $x_{(2)} = 1.0$;
$r = 2$, $s = 3$;
$k = 1$; $f = 1/4$

Nulujeme: $A \equiv 0$, $b \equiv 0$

Pro e_1 : $A^{(1)} = \frac{1}{1/2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\qquad b^{(1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$$\text{tedy } A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3/16 \\ 3/16 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Pro } e_2: \quad A^{(2)} = \frac{1}{1/2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b^{(2)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{tedy } A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3/16 \\ 4/16 \\ 1/16 \end{bmatrix}$$

Zohlednění Neumannovy okrajové podmínky: k pravé straně přičteme vektor (4.14). Tedy

$$b = \begin{bmatrix} 3/16 \\ 4/16 \\ 1/16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/4 \end{bmatrix}.$$

Zohlednění Dirichletovy okrajové podmínky: k pravé straně přičteme vektor (4.15). Tedy

$$b = \begin{bmatrix} 3/16 \\ 4/16 \\ 1/16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/4 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -61/16 \\ 68/16 \\ 5/16 \end{bmatrix}.$$

Výsledná soustava má po zohlednění Dirichletovy okrajové podmínky tvar

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 68/16 \\ 5/16 \end{bmatrix}$$

nebo při vyloučení nadbytečného sloupce a řádku

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 68/16 \\ 5/16 \end{bmatrix}$$

a řešení $u_2 = 73/32 = 2.2812$ a $u_3 = 78/32 = 2.4375$.

MKP program v jazyce MATLAB

Nakonec se podívejme jak bychom mohli popsaný algoritmus zapsat ve formě příkazů prostředí MATLAB, viz Algoritmus 4.1. V uvedeném zápisu jsme přidali čísla řádek, která poslouží ke komentáři.

Program zahajuje zadání vstupních dat. Oproti popisu v části 4.3 zapíšeme data o něco efektivněji. Vektor `x` bude obsahovat souřadnice uzlů, matice `el` obsahuje v i–tém řádku čísla uzlů tvořících levý a pravý koncový bod i–tého elementu, vektor `k` obsahuje materiálové koeficienty elementů a vektor `f` obsahuje hodnoty zdroje v elementech.

Matice `op` obsahuje v i–tém řádku typ okrajové podmínky, číslo koncového uzlu a hodnotu okrajové podmínky. Typ Dirichletovy podmínky je zapsán jako 0, typ Neumannovy podmínky je zapsán jako 1.

Algoritmus 4.1 : MKP program pro řesení 1D úlohy

```
function MKP1D
%MKP 1D
% vstupni data
  x  = 0:1/2:1;      %0:1/4:1;
  el = [1,2; 2,3];  %[1,2; 2,3; 3,4; 4,5];
  k  = [1,1];        %[1,1,1,1];
  f  = [0.75, 0.25];
  op = [0, 1, 2;  1, 3, 0.25];
       %[0, 1, 2;, 1, 5, 0.25];
  n=length(x);
  nel=size(el,1);
% sestaveni MKP soustavy - priprava a cyklus pres prvky
  A=zeros(n,n);
  b=zeros(n,1);
  Ael=[1, -1; -1, 1];
  bel=[1; 1];
for i=1:nel
  A(el(i,:),el(i,:))=A(el(i,:),el(i,:))...
       +(k(i)/(x(el(i,2))-x(el(i,1))))*Ael;
  b(el(i,:))=b(el(i,:)) ...
       + (0.5*f(i)*(x(el(i,2))-x(el(i,1))))*bel;
end
% zohledneni okrajovych podminek
for i=1:2
  if op(i,1)==1
    b(op(i,2))=b(op(i,2)) + op(i,3);
  end
  if op(i,1)==0
    b=b-op(i,3)*A(:,op(i,2));
    A(:,op(i,2))=zeros(n,1);
    A(op(i,2),:)=zeros(1,n);
    A(op(i,2),op(i,2))=1;
    b(op(i,2))=op(i,3);
  end
end
% reseni soustavy
  u=A\b
% graficky vystup
  plot(x,u,'-ob','LineWidth',2,...
    'MarkerEdgeColor','k','MarkerFaceColor','g','MarkerSize',10);
  hold on; grid on;
  title(texlabel('MKP 1D '),'FontSize',14);
  xlabel(texlabel('x'),'FontSize',14);
  ylabel(texlabel('u(x)'),'FontSize',14);
  axis([0, 1, 2, 2.5]);
  print -dpdf -f1 graf1
```

Program pokračuje sestavením soustavy způsobem popsaným v části 4.3 a řešením soustavy standardní procedurou MATLABu. Nakonec následuje vykreslení grafu přibližného řešení.

Program lze snadno upravit tak, aby umožnil generování pravidelné sítě, různé zjemňování počáteční sítě, řešení obecnější úlohy (např. zahrnutí konvekce, Newtonovy okrajové podmínky apod.). Lze též počítat a vykreslit derivace řešení, toky tepla a další veličiny.

Poznamenejme ještě, že v programu pro stručnost využíváme provedení příkazu pro více indexů. Například přičtení `Ael` do `A`, které by bylo realizované operacemi

$$
\begin{aligned}
a_{rr} &= a_{rr} + a^l_{11} \\
a_{rs} &= a_{rs} + a^l_{12} \\
a_{sr} &= a_{sr} + a^l_{21} \\
a_{ss} &= a_{ss} + a^l_{22}
\end{aligned}
$$

lze zapsat jako `A([r,s],[r,s])=Ael`. Rovněž využíváme přístup k řádku či sloupci matice, např. `A(i, :)` nebo `A(:, j)`.

Aktivací příkazu print můžeme graf uložit ve zvoleném formátu (zde eps) do souboru a pak použít, viz Obr. 4.3. Tři tečky na konci řádků 18 a 20 indikují pokračování příkazu na další řádce.

Více se o MATLABu můžeme dovědět na http://www.mathworks.com nebo česky na stránkách http://www.humusoft.cz. Zde lze také nalézt informaci o vhodné literatuře popisující MATLAB, viz např. [**?**].

4.4 Řešení MKP soustav

V metodě konečných prvků samozřejmě nejen sestavíme soustavu lineárních algebraických rovnic

$$A_h \mathbf{u} = \mathbf{b}_h,$$

ale musíme ji také řešit. Již zmíněnými vlastnostmi jsou symetrie matice A_h a její pozitivní definitnost ve většině případů (vyjímkou je např. čistě Neumannova úloha pro rovnici vedení tepla). Důležitou vlastností je také řídkost a u jednorozměrných úloh třídiagonálnost matice. Proto lze soustavu řešit velmi efektivně Gaussovou eliminací. Pokud vynecháme operace s nulovými prvky mimo hlavní a vedlejší diagonály, dostaneme algoritmus, který řeší třídiagonální soustavu se složitostí $O(n)$.

4.5 Diskretizační chyba

Nechť u je řešení okrajové úlohy. Ritzova-Galerkinova metoda je přibližná metoda a musí nás proto zajímat chyba přibližného řešení $\tilde{u}$, tedy tzv. diskretizační chyba $e = u - \tilde{u}$, přesněji budeme uvažovat normu chyby, např.:

$$\begin{aligned}
\|u-\tilde{u}\|_\infty &: \quad \|v\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} |v(x)|\,, \\
\|u-\tilde{u}\|_2 &: \quad \|v\|_2 = \sqrt{\textstyle\int_\Omega (v(x))^2\,\mathrm{d}x}, \\
\|u-\tilde{u}\|_{2,1} &: \quad \|v\|_{2,1} = \sqrt{\textstyle\int_\Omega (v(x))^2\,\mathrm{d}x + \int_\Omega (v'(x))^2\,\mathrm{d}x}, \\
\|u-\tilde{u}\|_a &: \quad \|v\|_a = \sqrt{a(v,v)},
\end{aligned}$$

případně další normy.

Základní charakteristiku chyby dává následující Céovo lemma, které budeme dále využívat ke studiu metody konečných prvků.

Lemma 4.4. *Céa. Nechť okrajová úloha splňuje předpoklady Laxovy-Milgramovy věty (3.31) a (3.32), u je slabé řešení okrajové úlohy, $\tilde{u}$ je řešení získané Ritzovou--Galerkinovou metodou, t.j.*

$$u \in U_D = u_D + V: \quad a(u,v) = b(v) \qquad \forall v \in V, \tag{4.16}$$

$$\tilde{u} \in \tilde{U}_D = u_D + \tilde{V}: \quad a(\tilde{u},v) = b(v) \qquad \forall v \in \tilde{V}. \tag{4.17}$$

Potom platí

$$\| u - \tilde{u} \|_a \leqq \| u - w \|_a \qquad \forall w \in \tilde{U}_D \tag{4.18}$$

$$\| u - \tilde{u} \|_{2,1} \leqq \frac{M}{m} \| u - w \|_{2,1} \qquad \forall w \in \tilde{U}_D, \tag{4.19}$$

což můžeme chápat jako optimalitu a kvazioptimalitu MKP řešení získaného Ritzovou-Galerkinovou metodou.

Důkaz. Nechť a je symetrická $w \in \tilde{U}_D \Rightarrow w = \tilde{u} + v$, $v \in \tilde{V}$. Potom

$$\begin{aligned}
\| u - w \|_a^2 &= \|u - \tilde{u} - v\|_a^2 \\
&= \|u-\tilde{u}\|_a^2 + \|v\|_a^2 - 2a(u-\tilde{u}, v) \\
&\geqq \| u - \tilde{u} \|_a^2 \,.
\end{aligned}$$

Pokud a je obecně nesymetrická, potom můžeme provést odhad následovně. Nechť opět $w \in \tilde{U}_D \Rightarrow w = \tilde{u} + v$, $v \in \tilde{V}$. Potom

$$\begin{aligned} \| u - \tilde{u} \|_{2,1}^2 &\leqq \frac{1}{m} a(u - \tilde{u}, u - \tilde{u}) \\ &= \frac{1}{m} a(u - \tilde{u}, u - \tilde{u} - v) \\ &\leqq \frac{M}{m} \|u - \tilde{u}\|_{2,1} \|u - w\|_{2,1}^2 . \end{aligned}$$

Po zkrácení $\|u - \tilde{u}\|_{2,1}$ dostaneme odhad (4.19). □

Poznámka 4.5. Pro přibližné řešení $\tilde{u}$ Ritzovou-Galerkinovou metodou platí podmínka (4.18). Naopak, pokud platí (4.18), pak $\tilde{u}$ je řešení Ritzovou-Galerkinovou metodou. Podobně jako při důkazu ekvivalence slabé a energetické formulace dokážeme, že pokud pro každé $\tilde{v} \in \tilde{V}$ kvadratická funkce $\varphi(t) = \| u - \tilde{u} - t\tilde{v} \|_a^2$ nabývá v $t = 0$ minima, pak platí (4.17).

Metodou konečných prvků počítáme přibližné řešení a je otázkou jaká je chyba tohoto řešení, tzv. diskretizační chyba. Intuitivně platí:

- chybu snížíme zjemněním dělení (zmenšením prvků),
- zjemnění nemusíme provádět tam, kde je průběh řešení lineární (derivace a toky konstantní),
- naopak zjemnění musí být tam, kde očekáváme velké změny derivace řešení, tedy velké zakřivení grafu řešení,
- porovnáním řešení na dané a zjemněné síti můžeme získat představu, zda je přesnost řešení vyhovující, či zda je třeba dělení dále zjemňovat.

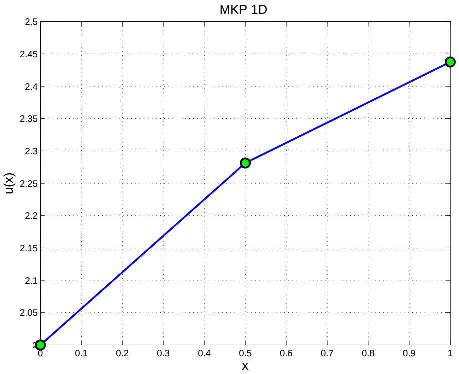
Označme $\mathcal{T}_h$ dělení intervalu Ω na menší intervaly s maximální délkou h, U_h prostor spojitých funkcí, které jsou lineární na každém intervalu z dělení $\mathcal{T}_h$, U_h^D podmnožinu těch funkcí z U_h, které splňují zadané Dirichletovy okrajové podmínky a V_h příslušný prostor testovacích funkcí.

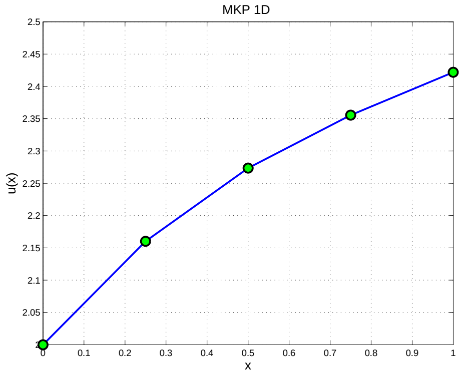
Z Céova lemma pak dostáváme: Nechť u je slabé řešení okrajové úlohy a $u_h \in U_h^D$ je řešení získané MKP , t.j.

$$\begin{aligned} u \in U: \quad & a(u, v) = b(v) \qquad \forall v \in V \\ u_h \in U_h^D: \quad & a(u_h, v) = b(v) \qquad \forall v \in V_h. \end{aligned}$$

Potom v případě symetrické bilineární formy platí

$$\| u - u_h \|_a \leqq \| u - w \|_a \qquad \forall w \in U_h^D$$





Obr. 4.3: Grafický výstup programu MKP1D pro pravidelné dělení s 2 prvky (vlevo) a 4 prvky (vpravo).

a obecně

$$\| u - u_h \|_{2,1} \leqq \frac{M}{m} \| u - w \|_{2,1} \qquad \forall w \in U_h^D .$$

Specielně, pokud je řešení u okrajové úlohy spojité a $I_h u = u_I$ značí lineární interpolaci u danou dělením $\mathcal{T}_h$ ($u_I(x) = u(x)$ v uzlech dělení $\mathcal{T}_h$), potom

$$\| u - u_h \|_a \leqq \| u - I_h u \|_{Ea} \quad \text{a} \quad \| u - u_h \|_{2,1} \leqq \frac{M}{m} \| u - I_h u \|_{2,1}$$

a zdá se, že bychom mohli odhady chyby diskretizace získat studiem interpolace řešení $I_h u$.

4.6 Interpolace na konečných prvcích

Předpokládejme vyšší regularitu řešení, přesněji že $u \in H^2(\Omega) \subset C^1(\Omega)$. Uvažujme prvek $E = \langle x_{(1)}, x_{(2)} \rangle$ z dělení $\mathcal{T}_h$. Na tomto prvku délky $h_E \leqq h$ nyní vyjasníme jak velká může být chyba interpolace v různých normách. Připomeňme, že nám jde o chybu $e = u - u_I$, kde u_I je lineární funkce na E a platí $e(x_{(1)}) = e(x_{(2)}) = 0$. Vzhledem k uvedenému podle Rollovy věty existuje $\xi \in (x_{(1)}, x_{(2)})$ tak, že $e'(\xi) = 0$. Tedy

$$e'(x) = e'(\xi) + \int_\xi^x e''(z)\,\mathrm{d}z = \int_\xi^x u''(z)\,\mathrm{d}z,$$

protože navíc $u_I'' = 0$. Použitím Cachyovy-Schwarzovy nerovnosti dostaneme

$$|e'(x)| \leqq \left\{ \int_\xi^x 1^2\,\mathrm{d}z \right\}^{1/2} \left\{ \int_\xi^x [u''(z)]^2\,\mathrm{d}z \right\}^{1/2} \leqq \sqrt{h_E}\, \|u''\|_{L_2(E)} . \tag{4.20}$$

Dále

$$e(x) = e(x_{(1)}) + \int_{x_{(1)}}^{x} e'(z)\,\mathrm{d}z, \tag{4.21}$$

takže použitím Cachyovy-Schwarzovy nerovnosti a (4.26) dostaneme

$$|e(x)| \leqq \left\{ \int_{x_{(1)}}^{x} 1^2\,\mathrm{d}z \right\}^{1/2} \left\{ \int_{x_{(1)}}^{x} [e'(z)]^2 dz \right\}^{1/2} \leqq \sqrt{h_E^3}\,\|u''\|_{L_2(E)}\,. \tag{4.22}$$

Sečtením příspěvků jednotlivých prvků pak dostaneme odhady na oblasti Ω,

$$\begin{aligned} \| u' - u_I' \|_{2,0}^2 &= \int_\Omega (e')^2\,\mathrm{d}z = \sum_{E\in\mathcal{T}_h} \int_E (e')^2\,\mathrm{d}z \\ &\leqq \sum_{E\in\mathcal{T}_h} h_E^2 \int_E |\, u'' \,|^2\ \mathrm{d}z \leqq h^2 \int_\Omega (u'')^2\,\mathrm{d}z = h^2 \,\|\, u'' \,\|_{L_2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \| u - u_I \|_{2,0}^2 &= \int_\Omega (e)^2\,\mathrm{d}z = \sum_{E\in\mathcal{T}_h} \int_E (e)^2\,\mathrm{d}z \\ &\leqq \sum_{E\in\mathcal{T}_h} h_E\, h_E^3 \int_E |\, u'' \,|^2\ \mathrm{d}z \leqq h^4 \int_\Omega (u'')^2\,\mathrm{d}z = h^4 \,\|\, u'' \,\|_{L_2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \| u - u_I \|_{2,1}^2 &= \| u - u_I \|_{2,0}^2 + \| u' - u_I' \|_{2,0}^2 \\ &\leqq (h^2 + h^4) \,\|\, u'' \,\|_{L_2(\Omega)}^2\,. \end{aligned}$$

Získané odhady můžeme sumarizovat v následující větě.

Věta 4.6. *Nechť $u \in H^2(\Omega)$, potom pro chybu interpolace $u_I = I_h u$ platí*

$$\| u - u_I \|_{L_2(\Omega)} \leqq h^2 \,\|\, u'' \,\|_{L_2(\Omega)} \tag{4.23}$$

$$\| u' - u_I' \|_{L_2(\Omega)} \leqq h \,\|\, u'' \,\|_{L_2(\Omega)} \tag{4.24}$$

$$\| u - u_I \|_{H^1(\Omega)} \leqq \sqrt{(h^2 + h^4)} \,\|\, u'' \,\|_{L_2(\Omega)}\,. \tag{4.25}$$

Pro analýzu aposteriorního odhadu v části 4.9 budeme potřebovat následující tvrzení.

Věta 4.7. *Nechť $u \in H^1(\Omega)$, potom pro chybu interpolace $u_I = I_h u$ platí*

$$\| u - u_I \|_{L_2(\Omega)} \leqq h \,\|\, u' \,\|_{L_2(\Omega)}\,. \tag{4.26}$$

Důkaz. Nechť $e = u - u_I$, potom pro $E \in \mathcal{T}_h$ platí

$$\|e'\|^2_{2,0,E} = \int_E (u' - u'_I)e' \,\mathrm{d}z = \int_E u'e' \,\mathrm{d}z \leqq \|e'\|_{2,0,E} \|u'\|_{2,0,E}\,, \tag{4.27}$$

tj. $\|e'\|_{2,0,E} \leqq \|u'\|_{2,0,E}$. Poznamenejme, že jsme využili skutečnosti, že u'_I je konstantní a integrál z e'_I je nulový. Odtud a z $e(x) = \int_{x_{(0)}}^{x} e'(z)\,\mathrm{d}z$ pak dostáváme $|e(x)| \leqq \sqrt{h_E}\,\|u'\|_{2,0,E}$ a $\|e\|_{2,0,E} \leqq h_E\,\|u'\|_{2,0,E}$. Součtem příspěvků elementů pak dostaneme žádaný odhad. □

4.7 Apriorní odhad chyby a konvergence MKP

Rychlost konvergence v H^1 normě pro $u \in H^2(\Omega)$

Použitím Céova lemma a odhadu chyby interpolace dojdeme k odhadu

$$\| u - u_h \|_{2,1} \leqq C \| u - u_I \|_{2,1} \leqq C\sqrt{(h^2 + h^4)}\, \| u'' \|_{L_2(\Omega)}\ .$$

Pro $h \leqq h_0$ tedy platí

$$\| u - u_h \|_{2,1} \leqq Kh \| u'' \|_{L_2(\Omega)}\ . \tag{4.28}$$

To znamená, že pro $h \to 0_+$ konverguje MKP řešení i jeho derivace v integrální L_2normě k přesnému řešení a jeho derivaci. Víme také, že při zjemnění dělení rozdělením prvků na polovinu by mělo dojít k zmenšení $\| u - u_h \|_{2,1}$ na polovinu. Říkáme, že rychlost konvergence je asymptoticky $O(h)$.

Rychlost konvergence v L_2 normě pro $u \in H^2(\Omega)$

Pokud má řešená okrajová úloha řešení $u \in H^2(\Omega)$, pak můžeme očekávat, že okrajová úloha má i vlastnost H^2-regularity, tj. pro $\varphi \in L_2(\Omega)$ bude existovat řešení $u_\varphi \in V$,

$$a(u_\varphi, v) = (\varphi, v)_{L_2(\Omega)} \quad \forall v \in V$$

a bude existovat konstanta C_r tak, že

$$u_\varphi \in H^2(\Omega), \quad \| u_\varphi \|_{2,2} \leqq C_r \| \varphi \|_{2,0}\ .$$

Vraťme se nyní k původní úloze s řešením $u \in H^2(\Omega)$, použitím MKP dostaneme přibližné řešení u_h s chybou $e_h = u - u_h$. Nyní využijeme H^2regularitu pro odhad chování L_2normy chyby (tzv. Aubinův-Nitschův trik). Použijeme chybu e_h jako pravou stranu φ , přičemž existuje w tak, že

$$w \in V: \quad a(w,v) = (e_h, v)_{L_2(\Omega)} \quad \forall v \in V$$

$$\| e_h \|_0^2 = (e_h, e_h)_{L_2(\Omega)} = a(w, e_h) = a(w - I_h w,\, e_h).$$

Poslední rovnost využívá Galerkinovské ortogonality $a(e_h, v) = 0$ pro všechna $v \in V_h$ a skutečnosti, že $I_h w \in V_h$. S využitím omezenosti bilineární formy a dříve získaného odhadu chyby interpolace a chyby e_h dostaneme

$$\begin{aligned} \| e_h \|_{2,0}^2 &\leqq M \| w - I_h w \|_{2,1} \| e_h \|_{2,1} \\ &\leqq Mch \| w'' \|_{2,0} \, ch \| u'' \|_{2,0} \\ &\leqq Ch^2 \| e_h \|_{2,0} \| u'' \|_{2,0} \, . \end{aligned}$$

Zde $\| w'' \|_{2,0} \leqq C_r \| e_h \|_{2,0}$ zaručuje regularita úlohy. Tedy

$$\| e_h \|_{2,0} \leqq Ch^2 \| u'' \|_{2,0}, \tag{4.29}$$

což značí, že rychlost konvergence v L_2-normě (konvergence jen funkčních hodnot, ne derivací) je řádově vyšší, a to $O(h^2)$.

Pro $u \in H^2(\Omega)$ celkově platí

$$\| u - u_h \|_{2,0} + h \| u - u_h \|_{2,1} \leqq Kh^2 \| u'' \|_{2,0} \, . \tag{4.30}$$

Aproximace řešení (teploty, posunutí, apod.) je tedy přesnější než aproximace jeho derivací (toků, napětí, apod.).

Aproximace řešení pro $u \in H^2$ má stejný řád, jaký lze ukázat u metody konečných diferencí, kde bychom ale museli předpokládat ještě vyšší regularitu $u \in C^3$.

Konvergence pro $u \in H^1(\Omega)$.

Bez předpokladu vyšší regularity lze pouze ukázat, že chyba MKP řešení konverguje k přesnému řešení ve smyslu následující podmínky:

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big) \, \big(\exists h_\varepsilon > 0\big) \, \big(\forall h < h_\varepsilon\big) \text{ bude } \; \| u - u_h \|_{2,1} < \varepsilon.$$

Dokažme, že tato podmínka platí. Zvolme $\varepsilon > 0$. Potom z hustoty H^2 v H^1 plyne, že existuje $\bar{u} \in H^2(\Omega)$ tak, že $\| u - \bar{u} \|_{2,1} < \varepsilon/2$. K $\bar{u}$ pak můžeme sestrojit interpolaci $I_h \bar{u}$, pro kterou $\| \bar{u} - I_h \bar{u} \|_{2,1} \leqq Kh \| \bar{u}'' \|_{L_2(\Omega)}$. Tedy $\| \bar{u} - I_h \bar{u} \|_{2,1} < \varepsilon/2$ pro $h < \varepsilon / \big(2K \| \bar{u}'' \|_{L_2(\Omega)}\big) = h_\varepsilon$. Pro $h < h_\varepsilon$ bude celkově

$$\| u - u_h \|_{2,1} \leqq \| u - \bar{u} \|_{2,1} + \| \bar{u} - I_h \bar{u} \|_{2,1} < \varepsilon.$$

Získaný výsledek je samozřejmě slabší než odhad (4.28), protože neříká nic o rychlosti konvergence, která může být menší než $O(h)$, viz Příklad 4.10.

4.8 Další studium diskretizační chyby

Položme si ještě otázku, zda použití interpolace nevedlo k příliš pesimistickým odhadům, zda interpolace není daleko od MKP řešení. V tomto ohledu je zajímavá věta:

Věta 4.8. *Nechť u je slabé řešení okrajové úlohy $-(ku')' = f$ v $\Omega = (0, l)$, $u(0) = 0$, $-k(l)u'(l) = \hat{\tau}$. Uvažujme MKP s dělením $\mathcal{T}_h$ a lineárními konečnými prvky a předpokládejme, že k je konstantní na jednotlivých prvcích $\mathcal{T}_h$.*
Potom je MKP řešení u_h rovno lineární interpolaci přesného řešení $I_h u$ s uzly v uzlech $\mathcal{T}_h$.

Důkaz. Pro MKP řešení platí

$$\begin{aligned} \| u_h - u \|_a^2 &= \int\limits_{\Omega} k\,(u_h' - u')^2 \,\mathrm{d}x = \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int\limits_E k_E\,(u_h' - u')^2 \,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{E \in \mathcal{T}_h} \int\limits_E k_E\,(a_E - u')^2 \,\mathrm{d}x = \sum_{E \in \mathcal{T}_h} k_E \varphi_E, \end{aligned}$$

když vzhledem k linearitě u_h na $E = \left\langle x_{(1)}, x_{(2)} \right\rangle$ označíme

$$u_h\,|_E = a_E x + b_E \quad \text{a} \quad \varphi_E(a_E) = \int\limits_E \left[a_E^2 - 2a_E u' + (u')^2\right] \mathrm{d}x.$$

Protože $\varphi_E'(a) = 0$ a φ_E bude minimální pro $a = a_E = \frac{u(x_{(2)}) - u(x_{(1)})}{x_{(2)} - x_{(1)}}$ a protože u_h minimalizuje $\| u_h - u \|_a$, musí být

$$a = a_E = \frac{u(x_{(2)}) - u(x_{(1)})}{x_{(2)} - x_{(1)}} = \frac{u_h(x_{(2)}) - u_h(x_{(1)})}{x_{(2)} - x_{(1)}}$$

na všech elementech. Pak ovšem u_h bude lineární interpolací u. □

Poznámka 4.9. Výše uvedená skutečnost je důsledkem speciálního tvaru bilineární formy. Pro rovnici $-(ku')' + u = f$ už rovnost v uzlech neplatí.

Obecněji, existují body, v nichž je aproximace lepší než v ostatních bodech (vlastnost superkonvergence).

Příklad 4.10. Nyní uvažujme funkci u, která je lineární na $\langle 0, 1/2 \rangle$ a $\langle 1/2, 1 \rangle$ a nabývá hodnot $u(0) = u(1) = 0$ a $u(1/2) = 1$. Taková funkce je z $H^1(\Omega)$, ale má skok v derivaci, a proto nepatří do $H^2(\Omega)$, $\Omega = \langle 0, 1 \rangle$. Přitom je řešením Dirichletovy úlohy pro $u'' = f$, i když s poněkud specielní pravou stranou. Pokud zvolíme například rovnoměrné MKP dělení $\mathcal{T}_h$ tak, že $1/2$ bude uzlem dělení, potom dostaneme přesné řešení $u_h = u$. Pokud $x = 1/2$ nebude uzlem, ale bude středem prostředního prvku délky h, potom lineární interpolace (a podle výše uvedené věty) i MKP řešení u_h bude totožné s přesným řešením mimo prostřední interval, kde bude konstantní. Potom

$$\| u_h - u \|_a^2 = \| u_h - u \|_{2,1}^2 = \int\limits_{1/2-h/2}^{1/2+h/2} (u_h' - u')^2 \, \mathrm{d}x = 4h$$

tedy $\| u_h - u \|_{2,1} \leqq 2\sqrt{h}$. Konvergence je tedy pomalejší než $O(h)$, zde $O(h^{1/2})$.

Z uvedeného příkladu si můžeme odnést ještě jedno poučení, je dobré se snažit, aby MKP dělení respektovalo nespojitosti ve vstupních datech.

4.9 Aposteriorní odhady chyby

Výše uvedené odhady (4.28) a (4.30) se hodí ke kvalitativnímu posouzení MKP, ne však přímo k odhadu chyby $e_h = u - u_h$, především protože obsahují faktor $\| u'' \|_{2,0}$, jehož velikost obecně neznáme. Tyto odhady nevyužívají znalost MKP řešení u_h získaného výpočtem, proto se také nazývají apriorními odhady.

Aposteriorní odhady jsou naopak takové, v nichž se přímo neobjevují veličiny svázané s neznámým řešením, ale mohou se zde vyskytnout veličiny odvozené z již provedeného výpočtu u_h. Přesněji, funkci η nazveme aposteriorním odhadem chyby (estimátorem), pokud $\eta = \eta(h, u_h, f, \hat{\tau})$ a platí

$$\|u - u_h\| \leqq \eta. \tag{4.31}$$

Pokud je navíc η tvořen z příspěvků jednotlivých elementů,

$$\eta = \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^2 \right\}^{1/2}$$

potom η_T nazveme lokálními indikátory diskretizační chyby.

Lokální indikátory jsou základem metod adaptivního zjemňování MKP sítě, které zjemňují síť dělením těch elementů $T \in \mathcal{T}_h$, kde je η_T velké. Cílem je získat MKP dělení, pro které

- lokální estimátory η_T jsou přibližně stejné ve všech $T \in \mathcal{T}_h$ (ekvidistribuce chyby),
- celkový estimátor η je menší než zadaná tolerance.

Existuje řada způsobů pro odvození estimátorů chyby (viz dále) a také řada výsledků, která provádí analýzu těchto estimátorů. Mimo spolehlivosti typu (4.31) se sleduje např.

- efektivita a spolehlivost $C_e\eta \leqq \|u-u_h\| \leqq C_s\eta$, dobré je mít malý rozdíl $C_s - C_e$,
- asymptotická přesnost $\lim\limits_{h\to 0} \eta / \|u-u_h\| \to 0$,
- cena výpočtu indikátorů, snažíme se, aby byla úměrná počtu neznámých (tedy $O(n)$).

a) Aposteriorní doplněk apriorního odhadu.
Aposteriorní odhad bychom mohli získat z apriorního odhadu pro $u \in H^2(\Omega)$ tak, že bychom aproximovali u'' pomocí spočteného u_h, přesněji pomocí diferencí (skoků) v derivacích $(u_h)'\ |_T$. Poznamenejme ještě, že odhady (4.28) a (4.30) obsahují i konstantu C z Céova lemmatu, $C = \frac{M}{m}$. Zde M přichází z odhadu omezenosti bilineární formy a tedy se určí jednoduše z koeficientů diferenciální rovnice. Pokud budeme uvažovat rovnici (4.1) bude $M = k$. Naopak odhad m je mnohem obtížnější. Proto se budeme spíše snažit o odhad energetické normy chyby, kde konstantu m nepotřebujeme.
Pro úlohu s konstatním koeficientem

$$-(ku')' = f \tag{4.32}$$

za předpokladu $u \in H^2(\Omega)$ s využitím odhadu chyby interpolace dostaneme

$$\| u - u_h \|_E \leqq \| u - u_I \|_E \leqq M \| u - u_I \|_{2,1} \leqq C\sqrt{(h^2 + h^4)} \| u'' \|_{L_2(\Omega)},$$

navíc z (4.32) plyne $\| u'' \|_{L_2(\Omega)} = \| \frac{1}{k} f \|_{L_2(\Omega)}$. Tedy

$$\| u - u_h \|_E \leqq M\sqrt{(h_0^2 + h_0^4)} \| \frac{1}{k} f \|_{L_2(\Omega)}$$

je odhad, ve kterém se objevuje estimátor $\eta = \| \frac{1}{k} f \|_{L_2(\Omega)}$, $\eta_T = \| \frac{1}{k} f \|_{L_2(T)}$. Připomeňme, že síť zjemňujeme v místech, kde je velká druhá derivace řešení. Problémem tohoto odvození je předpoklad $u \in H^2(\Omega)$, protože odhady a adaptivní techniky potřebujeme především u úloh bez dodatečné regularity.

b) Residuální odhad.
Residuální odhad pro $u \in H^1(\Omega)$, vede k podobnému výsledku bez využití regularity. Odhad provedeme následujícím postupem. Nechť u je řešení modelové okrajové úlohy a u_h je MKP řešení, $e = u - u_h$, $w \in V$ je testovací funkce, $I_h w \in V_h$ je interpolace w, která je pro jednorozměrné úlohy proveditelná. Potom

$$a(e, w) = a(u - u_h, w) = \int_0^l f w \,\mathrm{d}x - \hat{\tau} w(l) - \int_0^l k u_h' w' \,\mathrm{d}x$$
$$+ \int_0^l k u_h' (I_h w)' \,\mathrm{d}x - \int_0^l f(I_h w) \,\mathrm{d}x + \hat{\tau}(I_h w)(l).$$

Druhý řádek rovnosti je nulový, protože pracujeme s MKP řešením a testovací funkcí $I_h w \in V_h$. Přeuspořádání členů dává

$$
\begin{aligned}
a(e,w) &= \int_0^l f(w - I_h w)\,\mathrm{d}x - \hat{\tau}(w - I_h w)(l) - \int_0^l k u_h'(w - I_h w)'\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{E\in\mathcal{T}_h} \left\{ \int_E f(w - I_h w)\,\mathrm{d}x - \int_E k u_h'(w - I_h w)'\,\mathrm{d}x \right\} \\
&= \sum_{E\in\mathcal{T}_h} \int_E (f + (k u_h')')(w - I_h w)\,\mathrm{d}x - \sum_{E\in\mathcal{T}_h} [k u_h'(w - I_h w)]_{x_1(E)}^{x_2(E)} \\
&\leqq \sum_{E\in\mathcal{T}_h} \|R_E(u_h)\|_{2,0,E}\, \|(w - I_h w)\|_{2,0,E} \\
&\leqq \sum_{E\in\mathcal{T}_h} \|R_E(u_h)\|_{2,0,E}\, h_E \|w'\|_{2,0,E} \\
&\leqq \left\{ \sum_{E\in\mathcal{T}_h} \|h_E R_E(u_h)\|_{2,0,E}^2 \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{E\in\mathcal{T}_h} \|w'\|_{2,0,E}^2 \right\}^{1/2} \\
&\leqq \left\{ \sum_{E\in\mathcal{T}_h} \eta_E^2 \right\}^{1/2} \|w'\|_{2,0,\Omega}\,.
\end{aligned}
$$

V uvedeném odvození jsme využili, že $(w - I_h w)$ je nulové v uzlech dělení $\mathcal{T}_h$ a odhad $\|(w - I_h w)\|_{2,0,E} \leqq h_E \|w'\|_{2,0,E}$ platný pro libovolné $w \in H^1(\Omega)$, viz Věta 4.7. Můžeme tedy vzít $w = e$. Pro energetickou normu $\|e\|_a = \sqrt{a(e,e)}$ pak dostaneme

$$
\|e\|_a^2 \leqq \left\{ \sum_{E\in\mathcal{T}_h} \eta_E^2 \right\}^{1/2} \|e'\|_{2,0,\Omega} \leqq \left\{ \sum_{E\in\mathcal{T}_h} \eta_E^2 \right\}^{1/2} c\,\|e\|_a\,,
$$

kde $c = \frac{1}{k_{min}}$, $k_{min} \leqq k(x)$. Tedy

$$
\|e\|_a \leqq c \left\{ \sum_{E\in\mathcal{T}_h} \eta_E^2 \right\}^{1/2} = c\eta, \tag{4.33}
$$

kde

$$
\eta_E = \|h_E R_E(u_h)\|_{2,0,E} = \|h_E(f + (k u_h')')\|_{2,0,E}\,, \quad \eta = \eta_R = \left\{ \sum_{E\in\mathcal{T}_h} \eta_E^2 \right\}^{1/2} \tag{4.34}
$$

jsou indikátory chyby a estimátor chyby. $R(u_h) = [(k u_h')' + f]$ je tzv. residuum. Uvedenou metodiku odhadu lze zobecnit na další typy úloh i pro vícerozměrné úlohy, viz část 6.3. Získanému odhadu (4.33), (4.34) se říká residuální odhad a byl zaveden I. Babuškou a W. Rheinboldtem, viz např. [4].

c) Hierarchické odhady.
Uvažujme MKP řešení u_h a $u_{h/2}$ spočtené při použití MKP dělení $\mathcal{T}_h$ a $\mathcal{T}_{h/2}$, kde druhé dělení vznikne z prvního rozdělením prvků. Díky tomu bude $V_h \subset V_{h/2}$. Otázkou je zda

$$\eta = \| u_{h/2} - u_h \| \sim \| u - u_h \|$$

bude vhodným estimátorem chyby (pro integrální normu můžeme rozdělením normy na příspěvky prvků dostat i indikátory chyby η_E). Snadno se ukáže, že platí

$$\| u - u_h \| \leqq \| u - u_{h/2} \| + \| u_{h/2} - u_h \| \tag{4.35}$$

$$\| u - u_h \|_a^2 = \| u - u_{h/2} \|_a^2 + \| u_{h/2} - u_h \|_a^2 . \tag{4.36}$$

K důkazu první nerovnosti (4.35) stačí trojúhelníková nerovnost, v druhé nerovnosti (4.36) využíváme skutečnost, že $a(u - u_{h/2}, u_{h/2} - u_h) = 0$ vzhledem k $V_h \subset V_{h/2}$.
K důkazu spolehlivosti resp. budeme dále využívat tzv. saturační předpoklad

$$\| u - u_{h/2} \| \leqq \beta \| u - u_h \|, \text{ resp. } \| u - u_{h/2} \|_a \leqq \beta \| u - u_h \|_a, \ \beta < 1. \tag{4.37}$$

S využitím (4.35)–(4.37) bude

$$\begin{aligned} \| u - u_h \| &\leqq \beta \| u - u_h \| + \| u_{h/2} - u_h \|, \\ \| u - u_h \| &\leqq 1/(1-\beta) \| u_{h/2} - u_h \|, \\ \| u - u_h \|_a^2 &\leqq \beta^2 \| u - u_h \|_a^2 + \| u_{h/2} - u_h \|_a^2, \\ \| u - u_h \|_a^2 &\leqq 1/(1-\beta^2) \| u_{h/2} - u_h \|_a^2 . \end{aligned} \tag{4.38}$$

Za předpokladu (4.37) je tedy η spolehlivým estimátorem. Tento estimátor se nazývá hierarchickým, značíme $\eta = \eta_H$ protože využívá hierarchii dělení $\mathcal{T}_h$ a $\mathcal{T}_{h/2}$. Hierarchický odhad je také efektivní ve smyslu následujících nerovností,

$$\begin{aligned} \| u_{h/2} - u_h \| &\leqq \| u - u_h \| + \| u_{h/2} - u \|, \\ \| u_{h/2} - u_h \| &\leqq (1+\beta) \| u - u_h \|, \\ \| u_{h/2} - u_h \|_a &\leqq \| u - u_h \|_a . \end{aligned}$$

Při použití energetické normy bude $\eta_a = \| u_{h/2} - u_h \|_a$ efektivním odhadem, neboť $\eta_a \leqq \| u - u_h \|_a$.
Estimátor η_H je na první pohled neúnosně drahý - k odhadu chyby na U_h máme řešit ještě náročnější úlohu na $U_{h/2}$. Výpočet řešení na $U_{h/2}$ lze ale zvládnout levně s využitím tzv. hierachické báze. Nechť

$$\begin{aligned} U_h &= \operatorname{span}\{\phi_0^h, \dots, \phi_n^h\}, \\ U_{h/2} &= \operatorname{span}\{\phi_0^{h/2}, \dots, \phi_{2n}^{h/2}\} = \operatorname{span}\{\phi_0^H, \dots, \phi_{2n}^H\}, \end{aligned}$$

kde ϕ_i^h a $\phi_i^{h/2}$ jsou standardní uzlové bázové funkce na U_h a $U_{h/2}$ a ϕ_k^H jsou prvky hierachické báze,

$$\phi_k^H = \begin{cases} \phi_i^h & \text{pro } k = 2i \ (x_k \in \mathcal{N}_h) \\ \phi_i^{h/2} & \text{pro } k = 2i+1 \ (x_k \in \mathcal{N}_{h/2},\ x_k \notin \mathcal{N}_h). \end{cases}$$

Práce s hierarchickou bází odpovídá rozkladu $U_{h/2} = U_h \oplus W_{h/2}$, kde prostory U_h a $W_{h/2}$ jsou a-ortogonální (viz cvičení 7). Použití hierarchické báze vede k MKP soustavě

$$\begin{bmatrix} A_{h,h} & A_{h,h/2} \\ A_{h/2,h} & A_{h/2,h/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_h \\ \mathbf{u}_{h/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_h \\ \mathbf{b}_{h/2} \end{bmatrix},$$

kde $A_{h,h/2} = 0$, $A_{h/2,h} = 0$, $A_{h/2,h/2}$ je diagonální matice. To ale znamená, že lze levně (řešením soustavy s diagonální maticí) spočítat $\mathbf{u}_{h/2}$ a následně $w_{h/2}$ tak, že $u_{h/2} = u_h + w_{h/2}$, $\eta = \|w_{h/2}\|$.
Rozklady $U_{h/2} = U_h \oplus W_{h/2}$ a $U_{h/4} = U_{h/2} \oplus W_{h/4}$ také dávají jeden z příkladů, že saturační vlastnost nemusí vždy platit. Nechť chyba $e_h = u - u_h \in W_{h/4}$. Potom vzhledem k a-ortogonalitě $U_{h/2}$ a $W_{h/4}$ chybu e_h nelze zlepšit na $U_{h/2}$ a zůstane $u_{h/2} = u_h$ (takže saturační předpoklad nebude splněn).
Hierarchické odhady lze také vhodně propojit s adaptivním zjemňováním sítě a speciálními hierarchickými technikami řešení.

d) Odhad pomocí zhlazené (průměrované) derivace.
Hledejme estimátor chyby η_S ve tvaru

$$\eta_S^2 = \int_\Omega (g_h - u_h')^2 \,\mathrm{d}x \sim \int_\Omega (u' - u_h')^2 \,\mathrm{d}x = \| u - u_h \|_a^2,$$

kde g_h je aproximace derivace řešení u_h', která je lepší než u_h', ale není vytvořena novým výpočtem, ale úpravou (postprocessingem) u_h'.
Základní technikou určení g_h je průměrování (hlazení), např. g_h definujeme následovně: $g_h \in U_h$ a platí

$$g_h(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[u_h'(x_i^+) + u_h'(x_i^-)\right] & \text{pro } i = 1, \dots, n-1, \\ \frac{1}{2}\left[u_h'(x_0^+) - u_h'(x_1^+)\right] & \text{pro } i = 0, \\ \frac{1}{2}\left[u_h'(x_n^-) - u_h'(x_{n-1}^-)\right] & \text{pro } i = n,, \end{cases}$$

za předpokladu, že $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ jsou uzly dělení a $u_h'(x_i^+)$, $u_h'(x_i^-)$ značí hodnotu u_h' v elementu napravo a nalevo od x_i.
Funkci $g_h \in U_h$, $g_h = \sum g_i \phi_i^h$ lze také určit podmínkou $\| g_h - u_h' \|_{2,0} = \min$, tedy $(g_h - u_h', \phi_j)_{2,0} = 0 \ \forall \phi_j$. Koeficienty g_i lze pak určit řešením lineární soustavy $\sum g_i (\phi_i^h, \phi_j^h)_{2,0} = (u_h', \phi_j^h)_{2,0}$.

Ani uvedený výčet technik ještě není úplný. Existují např. také funkcionální odhady, které využívají duální variační principy.

4.10 Cvičení a poznámky

1. Udělejte modifikaci programu MKP1D s ohledem na různý způsob zohlednění Dirichletových okrajových podmínek.

2. Zkuste zjemnit síť a případně vytvořit program, který bude podporovat vytváření obecnějších sítí.

3. Lze zavést i další typy konečných prvků, např. prvky s kvadratickým polynomem určeným svými hodnotami v krajních bodech a středu prvku. Jaké pak budou bázové funkce, matice prvku atd?

4. Jak by se realizovala Newtonova okrajová podmínka?

5. Jaké jsou výhody MKP?

   - Lze bez problémů pracovat s nerovnoměrným dělením na prvky, které se zhustí tam, kde je potřeba vyšší přesnost.
   - Metoda vede k soustavám, které mají málo nenulových prvků, což je důležité pro uložení i řešení. Hovoří se o soustavách s řídkou maticí.
   - Metoda dovoluje přehlednou algoritmizaci.

6. Vylepšete odhad (4.34) tím, že vztah mezi energetickou a integrální chybou uvažujeme prvek po prvku. Pro lineární konečné prvky pak dostaneme
   $\eta_E = \left\| \frac{h_E}{k_E} f \right\|_{2,0,E}$.

7. Nechť ϕ_i^h a $\phi_j^{h/2}$ jsou prvky hierarchické báze. Ukažte, že platí ortogonalita $a(\phi_i^h, \phi_j^{h/2}) = 0$.

8. Vyzkoušejte různé estimátory a indikátory chyby na úlohách, které jsou převzaty z článku Babuška, Rheinboldt, Math. Computations 1979:

   (a) $-\frac{d}{dx}(x+\alpha)^p \frac{du}{dx} + (x+\alpha)^q u = f$ v $\Omega = (0, 1)$, $\alpha > 0$, $u(0) = u(1) = 0$.
   Funkce f je volena tak, aby řešením byla funkce
   $u(x) = (x+\alpha)^r - [\alpha^r(1-x) + (x+\alpha)^r x]$,

   (b) $-u'' + u = f$ v $\Omega = (0, 1)$, $u(0) = u(1) = 0$. Funkce f je volena tak, aby řešením byla funkce $u(x) = e^{\alpha x}(x-\beta) - [\beta(1-x) - e^{\alpha}(1-\beta)x]$, $\alpha \neq 0$, $\beta = 1/2 + 2/\alpha$.
   Volby parametrů dají různý průběh řešení.

Kapitola 5

Vícerozměrné modely vedení tepla apod.

5.1 Připomenutí analýzy funkcí více proměnných

V této části budeme uvažovat funkce $u : \Omega \to \mathbb{R}^1$ definované na množině $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$ tedy funkce dvou nebo tří nezávislých proměnných.

Množinu Ω nazveme oblastí pokud je otevřená a souvislá (neskládá se z oddělených komponent), symbolem $\partial\Omega$ budeme značit hranici oblasti Ω, symbolem $\bar{\Omega}$ uzávěr oblasti Ω, $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Body oblasti Ω budeme značit symboly $x, y, \ldots$, a budeme předpokládat, že těmto bodům lze jednoznačně přiřadit souřadnice ve zvoleném souřadném systému, tedy $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ apod.

Budeme také pracovat s vektory z $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$. Velikost vektoru $\mid s \mid$ bereme eukleidovsky $\mid s \mid = \sqrt{s_1^2 + \ldots}$. Pokud vektorem s určujeme směr, pak předpokládáme $\mid s \mid = 1$.

U oblasti Ω budeme předpokládat, že pro $x \in \partial\Omega$ existuje normálový směr daný jednotkovým vektorem n orientovaným vně Ω (jednotkový vektor vnější normály). Existenci směru však nemusíme předpokládat ve všech bodech hranice (jinak bychom např. nemohli uvažovat oblast tvaru obdélníka či kvádru), ale bodů v nichž normála není definovaná nesmí být zase příliš mnoho. Přesně míra množiny bodů, ve kterých normála není definovaná, musí být nulová. Předpokládáme také, že lokálně se oblast rozkládá vždy na jedné straně hranice. Oblasti splňující tyto požadavky lze zařadit mezi jako oblasti s lipschitzovskou hranicí (přesná definice např. v [21]) nebo oblasti s vlastností kužele. Budeme dále také hovořit o regulárních oblastech.

Pro funkce $u : \Omega \to \mathbb{R}^1$ lze definovat spojitost. $C(\Omega)$ bude značit množinu funkcí definovaných a spojitých na Ω.

Pokud $u : \Omega \to \mathbb{R}^1$, $x \in \Omega$, $s \in \mathbb{R}^d$, $\mid s \mid = 1$, potom derivací u ve směru s

a v bodě x rozumíme veličinu

$$\frac{\partial u}{\partial s}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+hs)-u(x)}{h}, \ h \in \mathbb{R}^1.$$

Pokud $s_1 = (1,0)$, $s_2 = (0,1)$, nebo $s_1 = (1,0,0)$, $s_2 = (0,1,0)$ a $s_3 = (0,0,1)$ značí souřadné směry potom

$$\frac{\partial u}{\partial s_i}(x) \equiv \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)$$

jsou parciální derivace u v bodě x.

Definice 5.1. Diferenciálem funkce $u : \Omega \subset R^d \to \mathbb{R}^1$ v bodě x rozumíme lineární zobrazení $\mathrm{d}u(x,.) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^1$ takové, že

$$\lim_{|y|\to 0} \frac{\mid u(x+y) - u(x) - \mathrm{d}u(x,y) \mid}{\mid y \mid} = 0.$$

Budeme používat následující tvrzení.

Věta 5.2. *Pokud $u : \Omega \to \mathbb{R}^1$ má v bodě $x \in \Omega$ všechny parciální derivace a ty jsou spojité v x, potom má u v bodě x diferenciál a platí*

$$\frac{\partial u}{\partial s}(x) = \sum_{i=i}^{d} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) s_i.$$

Diferenciál lze vyjádřit pomocí gradientu funkce a skalárního součinu $\langle x, y\rangle = \sum x_i y_i$,

$$\mathrm{d}u(x,y) = \langle grad\, u(x), y\rangle$$

$$grad\, u(x) = \nabla u(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_d}(x)\right)^T.$$

Jako $C^1(\Omega)$ označíme množinu funkcí, které patří do $C(\Omega)$ a mají spojité první parciální derivace patřící také do $C(\Omega)$. Zavedeme také množinu $C_{loc}(\Omega)$ takových funkcí, že pro každou z nich existuje rozdělení Ω na konečný počet vzájemně disjunktních podoblastí, na nichž už je daná funkce spojitá. Navíc požadujme, aby funkce z $C_{loc}(\Omega)$ byly omezené. Zavedeme také množinu $U(\Omega) = C^1_{loc}(\Omega)$ těch funkcí z $C(\bar{\Omega})$, jejichž všechny parciální derivace patří do $C_{loc}(\bar{\Omega})$. Poznamenejme, že na rozhraních mezi podoblastmi nemusí parciální derivace existovat.

Budeme rovněž používat objemový integrál

$$\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}V$$

a plošné integrály

$$\int_\Gamma f(x)\,\mathrm{d}s.$$

Integrál si můžeme představovat jako limitu integrálních součtů v běžném Riemanově pojetí. Takový integrál existuje pro rozumné oblasti, plochy a funkce z $C(\Omega)$ či $C(\Gamma)$. Protože však budeme potřebovat integrovat i obecnější funkce, budeme opět pracovat i s obecnějším Lebesgueovým integrálem.

Budeme také pracovat s prostory funkcí integrovatelných s mocninou $p \geqq 1$. Jako $L_p(\Omega)$ označíme množinu funkcí pro který existuje konečný Lebesgueův integrál

$$\|u\|^p = \int_\Omega |u|^p \,\mathrm{d}x < \infty.$$

Množina $L_p(\Omega)$ je lineárním normovaným prostorem s normou

$$\|u\| = \|u\|_p = \left[\int_\Omega |u|^p \,\mathrm{d}x\right]^{1/p}$$

pokud na $L_p(\Omega)$ uvažujeme rovnost funkcí v zobecněném smyslu

$$\begin{gathered} u, v \in L_p(\Omega),\ \text{pak } u = v \text{ znamená, že } u = v \text{ s.v.}, \\ \text{t.j. } u(x) = v(x) \text{ pro } x \in \Omega \setminus M, \quad \text{kde } M \text{ je míry nula,} \end{gathered}$$

s.v. je zkratkou skoro všude. S rovností s.v. souvisí také omezenost s.v. respektive norma $\|u\|_\infty$,

$$\|u\|_\infty = \inf\{C :\ |u(x)| \leqq C \text{ s.v. na } \Omega\}.$$

Důležité je, že prostor $L_p(\Omega)$ je úplný. Pokud Γ je křivka v $\mathbb{R}^2$ nebo plocha v $\mathbb{R}^3$ pak lze obdobně zavést $L_p(\Gamma)$.

Specielní roli má zde prostor $L_2(\Omega)$, ve kterém je definován skalární součin $(u,v)_2 = \int_\Omega uv\,\mathrm{d}x$ a norma $\|u\|_2 \equiv \|u\|_{2,0}$. Tento prostor je Hilbertovým prostorem, takže budeme používat i značení $H^0(\Omega)$.

Velmi důležitým nástrojem, který budeme dále používat je Gaussova-Ostrogradského věta. V té se pracuje s hranicí oblasti a vnější normálou a je důležité uvažovat jen rozumné, tedy regulární, oblasti.

Věta 5.3. Gaussova-Ostrogradského. *Nechť Ω je regulární oblast a nechť $u \in U(\Omega)$. Potom platí*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\,\mathrm{d}v = \int_{\partial\Omega} u(x) n_i(x)\,\mathrm{d}s,$$

kde n_i je i–tá složka jednotkového vektoru vnější normály n.

Uvedená věta je zobecněním Newtonovy-Leibnizovy formule

$$\int_a^b u'(x)ds = u(b) - u(a).$$

5.2 Základní veličiny pro 3D vedení tepla

Budeme postupovat analogicky s 1D úlohou, i když definice budou mírně složitější. Základními veličinami jsou opět

1. teplota u, která je nyní funkcí $\Omega \to \mathbb{R}$, $u = u(x) = u(x_1, x_2, x_3)$.

2. teplotní spád ε, který nyní závisí na výchozí pozici x, ale i na směru, který popíšeme jednotkovým vektorem $s \in \mathbb{R}^3$

$$\varepsilon(x, s) = \lim_{h \to 0} \frac{u(x + hs) - u(x)}{h} = \frac{\partial u}{\partial s}(x). \tag{5.1}$$

3. tepelný tok τ. K definici tepelného toku uvažujeme rovinnou plochu $S(x, s)$ určenou bodem x a normálovým směrem s a množství tepla $Q(x, s)$ procházející touto plochou za jednotku času ve směru s. Tepelným tokem pak rozumíme veličinu

$$\tau(x, s) = \lim_{|S(x,s)| \to 0} \frac{Q(x, s)}{\mid S(x, s) \mid}, \tag{5.2}$$

   kde $\mid S \mid$ značí obsah plochy S.

Pokud $s_1 = (1, 0, 0)$, $s_2 = (0, 1, 0)$ a $s_3 = (0, 0, 1)$ jsou základní směry, potom označíme

$$\varepsilon_i(x) = \varepsilon(x, s_i) = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \tag{5.3}$$

$$\tau_i(x) = \tau(x, s_i) \tag{5.4}$$

Mezi teplotním spádem a tepelným tokem existuje vztah popsaný Fourierovým zákonem. V případě izotropního materiálu platí

$$\tau(x, s) = -k\varepsilon(x, s), \quad k > 0. \tag{5.5}$$

Pro anizotropii s osami anizotropie rovnoběžnými s osami souřadného systému platí

$$\tau_i(x) = -k_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(x), \quad k_i > 0. \tag{5.6}$$

Obecnou anizotropii dostaneme transformací souřadného systému, tedy

$$\tau(x) = \begin{pmatrix} \tau_1(x) \\ \vdots \\ \tau_d(x) \end{pmatrix} = -K\mathrm{grad}(u(x)), \tag{5.7}$$

kde K je symetrická pozitivně definitní $d \times d$ matice. Symetrie K plyne z fyzikálních úvah, transformace souřadnic podle vlastních vektorů K nás přivádí do situace (5.6), kde k_i jsou vlastní čísla K. Vlastní čísla jsou tedy kladná a matice K je pozitivně definitní.

5.3 Odvození modelu vedení tepla

Uvažujme opět model stacionárního vedení tepla v třírozměrné oblasti Ω a postupujme ve shodě s jednorozměrným případem. Nechť $x \in \Omega$ a $h > 0$ je tak malé, že krychle

$$K(x, h) = \{z = (z_1, z_2, z_3) : | z_i - x_i |< h\}$$

leží opět v Ω. Potom nulová změna množství tepla v této krychli znamená, že

$$\int_{S_{1+}} -\tau_1 \,\mathrm{d}s + \int_{S_{1-}} \tau_1 \,\mathrm{d}s + \int_{S_{2+}} -\tau_2 \,\mathrm{d}s + \int_{S_{2-}} \tau_2 \,\mathrm{d}s + \int_{S_{3+}} -\tau_3 \,\mathrm{d}s + \int_{S_{3-}} \tau_3 \,\mathrm{d}s + \int_{K} f \,\mathrm{d}x = 0, \tag{5.8}$$

kde $S_{i\pm} = \{z = (z_1, z_2, z_3) \in \partial K : \; z_i = x_i \pm h\}$.

Pokud vyjádříme a seskupíme integrály přes stěny a násobíme vzniklou rovnici $\frac{1}{8h^3}$ dostaneme

$$\begin{aligned}
&- \frac{1}{4h^2} \int_{x_2-h}^{x_2+h} \int_{x_3-h}^{x_3+h} \frac{\tau_1(x_1+h, z_2, z_3) - \tau_1(x_1-h, z_2, z_3)}{2h} \,\mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_3 \\
&- \frac{1}{4h^2} \int_{x_1-h}^{x_1+h} \int_{x_3-h}^{x_3+h} \frac{\tau_2(z_1, x_2+h, z_3) - \tau_2(z_1, x_2-h, z_3)}{2h} \,\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_3 \\
&- \frac{1}{4h^2} \int_{x_1-h}^{x_1+h} \int_{x_2-h}^{x_2+h} \frac{\tau_3(z_1, z_2, x_3+h) - \tau_3(z_1, z_2, x_3-h)}{2h} \,\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2 \\
&+ \frac{1}{8h^3} \int_{x_1-h}^{x_1+h} \int_{x_2-h}^{x_2+h} \int_{x_3-h}^{x_3+h} f(z_1, z_2, z_3) \,\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_3 = 0.
\end{aligned}$$

Pokud lze provést limitní přechod $h \to 0_+$, dostaneme v případě spojité funkce f a spojitě diferencovatelného toku τ rovnici

$$-\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \tau_i}{\partial x_i}(x) + f(x) = 0, \tag{5.9}$$

která je analogická jednorozměrnému případu. S využitím věty o střední hodnotě integrálu a funkce a předpokladu $\tau \in C^1$:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4h^2}\int_{x_2-h}^{x_2+h}\int_{x_3-h}^{x_3+h}\frac{\tau_1(x_1+h,z_2,z_3)-\tau_1(x_1-h,z_2,z_3)}{2h}\,\mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_3\\
&=\frac{\tau_1(x_1+h,z_2^*,z_3^*)-\tau_1(x_1-h,z_2^*,z_3^*)}{2h}\\
&=\frac{\partial}{\partial x_1}\tau_1(\xi(z_2^*,z_3^*),z_2^*,z_3^*)\to\frac{\partial}{\partial x_1}\tau_1(x_1,x_2,x_3).
\end{aligned}$$

V rovnici (5.9) můžeme dále dosadit vyjádření toků pomocí Fourierova zákona, např. v izotropním případě $\tau_i(x) = -k\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)$, což dává rovnici vedení tepla ve tvaru

$$-\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f \qquad \text{v } \Omega. \tag{5.10}$$

5.4 Jiné odvození rovnice vedení tepla

Jiné odvození lze provést použitím Gaussovy-Ostrogradského věty. K tomu budeme potřebovat vyjádření lineární závislosti na směru s,

$$\varepsilon(x,s) = \sum_{i=1}^{3}\varepsilon_i(x)s_i = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)s_i \tag{5.11}$$

$$\tau(x,s) = \sum_{i=1}^{3}\tau_i(x)s_i, \tag{5.12}$$

nad nimiž se zamyslíme v první řadě.

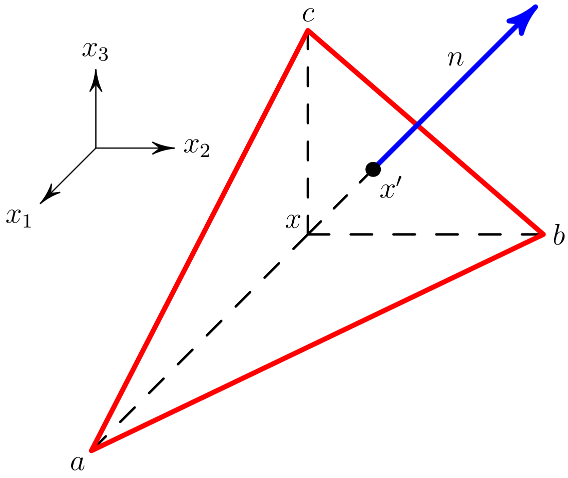
Rovnost (5.11) bude zaručena existencí a spojitostí parciálních derivací v bodě x. Pokud si pomůžeme Fourierovým zákonem (5.5) potom z (5.11) plyne (5.12).

Vztah (5.12) má ale obecnější platnost a lze jej odvodit i bez použití Fourierova zákona z bilance tepla. Pro tento účel uvažujme čtyřstěn $xabc$, viz obrázek 5.1.

Pokud p je obsah $\mid abc \mid$, potom $\mid xab \mid = s_3 p$, $\mid xac \mid = s_2 p$, $\mid xbc \mid = s_1 p$ a objem $\mid xabc \mid = \frac{1}{3}p \mid xx' \mid$.

Bilance tepla přicházejícího do čtyřstěnu $xabc$ nyní dává

$$-\int\limits_{abc}\tau(z,s)\,\mathrm{d}s + \int\limits_{xbc}\tau_1\,\mathrm{d}s + \int\limits_{xac}\tau_2\,\mathrm{d}s + \int\limits_{xab}\tau_3\,\mathrm{d}s + \int\limits_{xabc}f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$



Obr. 5.1: Bilance tepla v čtyřstěnu *xabc*.

Vynásobením $1/p$ pak dostaneme

$$-\frac{1}{p}\int\limits_{abc}\tau(z,s)\,\mathrm{d}s+\frac{s_1}{s_1 p}\int\limits_{xbc}\tau_1\,\mathrm{d}s+\frac{s_2}{s_2 p}\int\limits_{xac}\tau_2\,\mathrm{d}s$$

$$+\frac{s_3}{s_3 p}\int\limits_{xab}\tau_3\,\mathrm{d}s+\frac{\frac{1}{3}\mid xx'\mid}{\mid xabc\mid}\int\limits_{xabc}f(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

Za předpokladu spojitosti $\tau(x,s)$ a f můžeme použít známý důsledek věty o střední hodnotě. Pro $p\to 0$ tak dostaneme

$$-\tau(x,s)+s_1\tau_1(x)+s_2\tau_2(x)+s_3\tau_3(x)=0,$$

což dává vyjádření (5.12).

Dokázali jsme tedy lemma

Lemma 5.4. *Pokud $u\in C^1(\Omega)$ a $\tau\in C(\Omega)$ potom v Ω platí vztahy* (5.11) *a* (5.12).

Poznámka 5.5. Všimněte si rozdílu mezi limitním přechodem provedeným zde a dříve v odvození rovnice tepelné bilance. Zde jsme dělili obsahem plochy, dříve jsme potřebovali dělit objemem.

Věta 5.6. *Gaussova. Nechť $\Omega_0\subset\Omega$ je regulární oblast, n je jednotkový vektor vnější rovnováhy, $\tau\in C^1_{loc}(\Omega)$. Potom*

$$\int\limits_{\partial\Omega_0}\tau(x,n)\,\mathrm{d}s=\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\tau_i}{\partial x_i}(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{\Omega_0}\mathrm{div}(\tau)\,\mathrm{d}x. \qquad (5.13)$$

Důkaz. Pokud $\tau \in C^1(\bar{\Omega}_0)$, potom

$$\int\limits_{\partial\Omega_0} \tau(x,n)\,\mathrm{d}s = \int\limits_{\partial\Omega_0} \sum_{i=1}^{3} \tau_i(x) n_i\,\mathrm{d}s = \int\limits_{\Omega_0} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \tau_i}{\partial x_i}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Nechť $\tau \in C^0(\bar{\Omega}_0)$ a Ω_0 lze rozdělit na dvě části $\Omega_0 = \Omega_0^+ \cup \Omega_0^-$, $\Gamma = \Omega_0^+ \cap \Omega_0^-$ je vnitřní hranice, $\tau \in C^1(\bar{\Omega}_0^+)$ a $\tau \in C^1(\bar{\Omega}_0^-)$. Potom τ je spojitá na vnitřní hranici, a proto

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\partial\Omega_0} \tau(x,n)\,\mathrm{d}s &= \int\limits_{\partial\Omega_0^+} \sum_{i=1}^{3} \tau_i(x) n_i\,\mathrm{d}s + \int\limits_{\partial\Omega_0^-} \sum_{i=1}^{3} \tau_i(x) n_i\,\mathrm{d}s \\
&= \int\limits_{\Omega_0^+} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \tau_i}{\partial x_i}(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\Omega_0^-} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \tau_i}{\partial x_i}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_{\Omega_0} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \tau_i}{\partial x_i}(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\Omega_0} \mathrm{div}(\tau)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

V případě, že je potřeba rozdělit Ω_0 na více částí, je princip důkazu stejný. □

Nyní se vraťme k odvození rovnice tepelné bilance. Nechť $x \in \Omega$, $K(x,h) \subset \Omega$. Potom nulová změna množství tepla v krychli $K(x,h)$ znamená, že

$$-\int\limits_{\partial K} \tau(x,n)\,\mathrm{d}s + \int\limits_{K} f(x)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{5.14}$$

S využitím předchozí věty pak máme

$$\int\limits_{K} \left[-\sum \frac{\partial \tau_i}{\partial x_i}(x) + f(x) \right] \mathrm{d}x = \int\limits_{K} [\mathrm{div}(\tau) + f\,]\,\mathrm{d}x = 0. \tag{5.15}$$

Za předpokladu spojitosti f a $\frac{\partial \tau_i}{\partial x_i}$ odtud známým způsobem (dělením $\mid K(x,h) \mid$ a limitním přechodem $h \to 0_+$ dostaneme rovnici tepelné bilance (5.9).

S využitím Gaussovy věty 5.6 jsme tedy rovnici tepelné bilance odvodili za předpokladu, že $f \in C(\Omega)$, $\tau \in C^1_{loc}(\Omega)$. Navíc jsme schopni ukázat, že naopak z rovnice tepelné bilance (5.15) plyne nulová změna množství tepla v libovolné regulární podoblasti $\Omega_0 \subset \Omega$. Místo věty o střední hodnotě můžeme také použít tvrzení:

Lemma 5.7. *Nechť $f \in C(\Omega)$ a $\int_{\Omega_0} f\mathrm{d}x = 0$ pro všechny oblasti $\Omega_0 \subset \Omega$. Potom $f = 0$ v Ω.*

5.5 Okrajová úloha vedení tepla

Pokud vezmeme rovnici tepelné bilance, dosadíme použitím Fourierova zákona a uvažujeme okrajové podmínky, např. že na části $\Gamma_D \subset \partial\Omega$ je zadaná teplota a na jiné části $\Gamma_N \subset \partial\Omega$ je zadán tepelný tok $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \partial\Omega \setminus M_1$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = M_2$, kde M_1, M_2 jsou množina míry nula, dostaneme <u>okrajovou úlohu vedení tepla</u> na oblasti $\Omega \subset R^d$ ve tvaru

$$-\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f \qquad \text{v } \Omega \tag{5.16}$$

$$u = \hat{u} \qquad \text{na } \Gamma_D \tag{5.17}$$

$$k\frac{\partial u}{\partial n} = \hat{\tau} \qquad \text{na } \Gamma_N, \tag{5.18}$$

kde $\hat{u}$ je funkce definující zadanou teplotu, $\hat{\tau}$ je funkce určující tok tepla směrem do oblasti Ω.

V úloze nyní pracujeme s parciální diferenciální rovnicí 2. řádu. Okrajovou podmínku (5.17) opět nazveme Dirichletovou okrajovou podmínkou, podmínku (5.18) nazveme Neumannovou okrajovou podmínkou. Obdobně jako v jednorozměrném případě bychom mohli uvažovat i okrajovou podmínku Newtonova typu danou přestupem tepla nebo okrajovou podmínku sálání (radiace).

Poznamenejme, že speciální případ $k = 1$ dává okrajovou úlohu pro Poissonovu rovnici $-\Delta u = f$, kde Δ je tzv. Laplaceův operátor.

V případě anizotropie s maticí koeficientů $K = (k_{ij})$, dostaneme okrajovou úlohu

$$-\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f \qquad \text{v } \Omega \tag{5.19}$$

$$u = \hat{u} \qquad \text{na } \Gamma_D \tag{5.20}$$

$$\sum_{i,j=1}^{d} k_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j} n_i = \hat{\tau} \qquad \text{na } \Gamma_N. \tag{5.21}$$

Rovnici (5.16) lze rovněž zapsat vektorově ve tvaru

$$-\operatorname{div}(K \operatorname{grad} u) = f \qquad \text{v } \Omega \tag{5.22}$$

$$u = \hat{u} \qquad \text{na } \Gamma_D \tag{5.23}$$

$$K \operatorname{grad} u \cdot n = \frac{\partial u}{\partial n_K} = \hat{\tau} \qquad \text{na } \Gamma_N, \tag{5.24}$$

poznamenejme, že $\frac{\partial u}{\partial n_K}$ se nazývá derivací podle konormály.

5.6 Nespojitost u vícerozměrných úloh

U úloh na oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$ vyžaduje nespojitost pravé strany nebo nespojitost koeficientů opět zvláštní rozbor problému. Úlohu lze opět řešit pomocí podmínek přechodu. Například pro úlohu vedení tepla na oblasti Ω složené z částí Ω_1, Ω_2 tvořených materiály s koeficienty tepelné vodivosti k_1, $k_2$dostaneme podmínky přechodu ve tvaru

$$\begin{aligned} u(\xi_-) &= u(\xi_+), \\ k(\xi_-)\frac{\partial u}{\partial n}(\xi_-) &= k(\xi_+)\frac{\partial u}{\partial n}(\xi_+). \end{aligned}$$

Podmínky přechodu přitom musí platit ve všech bodech ξ, které patří vnitřní hranici Γ. Poznamenejme, že $n = n(\xi)$ je jednotkový vektor normály k Γ v bodě ξ, na orientaci nezáleží, limitní přechody bereme ve smyslu

$$u(\xi_-) = \lim_{\substack{x \to \xi \\ x \in \Omega_1}} u(x), \qquad u(\xi_-) = \lim_{\substack{x \to \xi \\ x \in \Omega_2}} u(x).$$

Podmínky přechodu opět vyjadřují stejnou teplotu a stejný tepelný tok. Je vidět, že v případě $k_1 \neq k_2$ dostaneme řešení, které nebude mít spojité ani všechny první derivace v Ω, $u \notin C^1(\Omega)$.

5.7 Hladkost řešení a tvar oblasti

U jednorozměrné úlohy $u'' = 1$ v $(0, 1)$ a $u(0) = u(1) = 0$ bude řešení $u(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^2$, které má všechny derivace spojité v $\bar{\Omega} = \langle 0, 1\rangle$. U vícerozměrných úloh je však situace složitější.

Uvažujme úlohu.

$$\begin{aligned} \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} &= -2 \qquad \text{v } \Omega \\ u &= 0 \qquad \text{na } \partial\Omega. \end{aligned}$$

a) Pokud Ω je kruhová oblast $\Omega = \{(x_1, x_2) : \ x_1^2 + x_2^2 < 1\}$, potom lze nalézt řešení obdobné uvedené 1D úloze

$$u\,(x_1, x_2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2,$$

které má opět všechny derivace spojité v $\bar{\Omega}$.

b) Pro oblast $\Omega = \{(x_1, x_2) : \ 0 < x_i < 1\}$, tedy např. průhyb čtvercové membrány, už jednoduché analytické řešení nenajdeme. Navíc lze snadno ukázat, že řešení musí být méně hladké, nebude $u \in C^2(\bar{\Omega})$, protože máme

$\Delta u = 1$ v libovolné blízkosti vrcholu Ω,

$\Delta u = 0$ ve vrcholu Ω.

c) Ještě komplikovanější bude chování řešení na nekonvexní oblasti, např. oblasti tvaru L. Ukážeme, že u vícerozměrných úloh je hladkost řešení ovlivněna hladkostí oblasti.
Uvažujme proto kruhovou výseč $\Omega = \Omega_\alpha$ definovanou v polárních souřadnicích jako

$$\Omega_\alpha = \{(r, \varphi):\ 0 < r < 1,\ 0 < \varphi < \alpha\}.$$

Uvažujme dále funkci

$$u = u_\alpha(r, \varphi) = r^{\pi/\alpha} \cdot \sin(\frac{\pi}{\alpha}\varphi).$$

V oblasti Ω_α platí

$$\begin{aligned}
\Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} \\
&= \frac{\pi}{\alpha}\left(\frac{\pi}{\alpha} - 1\right) r^{\frac{\pi}{\alpha}-2} \sin(\frac{\pi}{\alpha}\varphi) - \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2 r^{\frac{\pi}{\alpha}-2} \sin(\frac{\pi}{\alpha}\varphi) \\
&\quad + \frac{\pi}{\alpha} r^{\frac{\pi}{\alpha}-2} \sin(\frac{\pi}{\alpha}\varphi) = 0.
\end{aligned}$$

Na hranici $\partial\Omega_\alpha$ bude

$$\begin{aligned}
u &= 0 && \text{pro } \varphi = 0 \text{ a } \varphi = \alpha, \\
u &= \sin(\frac{\pi}{\alpha}\varphi) && \text{pro } r = 1.
\end{aligned}$$

To znamená, že $u = u_\alpha$ je řešením okrajové úlohy

$$\begin{aligned}
\Delta u &= f && \text{v } \Omega_\alpha \\
u &= g && \text{na } \partial\Omega_\alpha = \Gamma_1 \cup \Gamma_2
\end{aligned}$$

s hladkými vstupními daty $f \equiv 0$, $g = g(\varphi) = \sin(\frac{\pi}{\alpha}\varphi)$ na Γ_1a $g = 0$ na Γ_2.
Přitom pro $\frac{\pi}{\alpha} < 1$ (tj. $\alpha > \pi$) a pro $r \to 0+$ bude

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\pi}{\alpha} r^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \sin(\frac{\pi}{\alpha}\varphi) \to \infty$$

a pro $\frac{\pi}{\alpha} < 2$ (tj. $\alpha > \pi/2$) a pro $r \to 0+$ bude

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\pi}{\alpha}\left(\frac{\pi}{\alpha} - 1\right) r^{\frac{\pi}{\alpha}-2} \sin(\frac{\pi}{\alpha}\varphi) \to \infty.$$

Vidíme tedy, že pro $\alpha > \pi$ nebude u patřit ani do $C^1(\bar{\Omega})$. Uvedenou skutečnost (singularity v zářezech oblasti) musíme respektovat i při numerickém řešení okrajových úloh.

5.8 Slabá formulace úlohy

Uvažujme 3D úlohu vedení tepla

$$
\begin{aligned}
-\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) &= f && \text{v } \Omega \subset R^3\\
u &= \hat{u} && \text{na } \Gamma_D \subset \partial\Omega\\
\frac{\partial u}{\partial n_K} = \sum_{i,j=1}^{3} k_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j} n_i &= \hat{\tau} && \text{na } \Gamma_N \subset \partial\Omega.
\end{aligned}
$$

Předpokládejme, že $k \in C^1(\bar{\Omega})$, $f \in C(\bar{\Omega})$ a že existuje klasické řešení $u \in C^2(\bar{\Omega})$. Zvolme množiny

$$
\begin{aligned}
U_D &= \left\{v \in C^1(\bar{\Omega}) :\ v = \hat{u} \quad \text{na } \Gamma_D\right\},\\
V &= \left\{v \in C^1(\bar{\Omega}) :\ v = 0 \quad \text{na } \Gamma_D\right\}.
\end{aligned}
$$

Potom pro $v \in V$ platí

$$
\int_\Omega -\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x. \tag{5.25}
$$

Použitím Gaussovy-Ostrogradského věty dostaneme analogii integrace per-partes

$$
\int_\Omega \frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \frac{\partial(\varphi)}{\partial x_i}\psi\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \varphi\frac{\partial(\psi)}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \varphi\psi\nu_i\,\mathrm{d}S
$$

jejíž aplikací dostaneme

$$
\int_\Omega -\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) v\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega}\left(-\sum_{i,j=1}^{3} k_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j} n_i\right)\mathrm{d}S + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} k_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x.
$$

Z (5.25), definice testovací funkce a Neumannovy okrajové podmínky pak dostaneme

$$
\int_\Omega \sum_{i=1}^{3} k_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f v\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_N} \hat{\tau} v\,\mathrm{d}s.
$$

S využitím okrajových podmínek dostáváme opět variační identitu tvaru

$$
a(u,v) = b(v) \qquad \forall v \in V, \tag{5.26}
$$

kde

$$a(u,v) = \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{3} k_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \, \mathrm{d}x, \tag{5.27}$$

$$b(v) = \int\limits_{\Omega} f v \, \mathrm{d}x + \int\limits_{\Gamma_{1N}} \hat{\tau} v \, \mathrm{d}s. \tag{5.28}$$

Pro izotropní případ bude

$$a(u,v) = \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{3} k \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x. \tag{5.29}$$

Definice 5.8. Opět můžeme definovat slabé řešení okrajové úlohy 3D vedení tepla jako funkci u splňující podmínky

$$u \in U_D : \quad a(u,v) = b(v) \qquad \forall v \in V.$$

S použitím lemma du Bois Reymondova dokážeme, podobně jako v jednorozměrném případě, že za předpokladů hladkosti je slabé řešení také řešením klasickým.

Opět podobně jako v jednorozměrném případě se snadno ukáže, že $a(u,v)$ je bilineární forma na $U \times U$ a $b(v)$ je lineární funkcionál na U, zřejmě také $a(u,u) \geqq \geqq 0$. Pro uvažovanou okrajovou úlohu je také a symetrická. Proto lze také zavést energetickou formulaci úlohy

$$u \in U_D : \quad J(u) \leqq J(w) \qquad \forall w \in U_D, \qquad J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - b(v).$$

Pro symetrickou nezápornou bilineární formu a na U se stejně jako v kapitole 3 ukáže, že slabá a energetická formulace jsou ekvivalentní. Pokud je a kladná na V, potom bude existovat nejvýše jedno řešení.

Pokud a je $V-$eliptická a omezená a b je omezený, potom můžeme studovat existenci řešení a stejně jako v části 3.10 ukázat, že řešení bude existovat v širším prostoru, který je zúplněním $C^1_{loc}(\Omega)$ v integrální normě

$$\|v\|_{2,1} = \left\{ \int\limits_{\Omega} v^2 \, \mathrm{d}x + \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 \mathrm{d}x \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Toto zúplnění opět nazveme Sobolevovým prostorem a značíme $H^1(\Omega)$. Řešení pak existuje v

$$U_D = \left\{ v \in H^1(\Omega) : \; v = \hat{u} \quad \text{na } \Gamma_D \right\},$$

ale definice podmínky $v = \hat{u}$ na Γ_D není v Sobolevově prostoru samozřejmá (viz diskuze v následující části). Hovoří se o splnění Dirichletovy podmínky ve smyslu stop funkcí, viz též například [21]. K otázkám existence a jednoznačnosti řešení a jeho spojité závislosti na vstupních datech se ještě vrátíme.

5.9 Sobolevovy prostory

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je regulární oblast (s lipchitzovskou hranicí), $k \geqq 1$. Potom lze definovat $H^k(\Omega)$ jako zúplnění $C^\infty(\bar{\Omega})$ v normě

$$\| v \|_{2,k} = \left\{ \sum_{|m| \leqq k} \| D^m v \|_{2,0}^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

kde $m = (m_1, \ldots, m_d)$ je multiindex, m_i jsou přirozená čísla, $|m| = m_1 + \ldots + m_d$ a

$$D^m v = \frac{\partial^{|m|} v}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_d^{m_d}}.$$

Stejný prostor dostaneme zúplněním rozsáhlejších množin funkcí, např. $H^k(\Omega)$ dostaneme zúplněním C^1_{loc}. Pak bychom dokázali, že $C^\infty(\bar{\Omega})$ je hustý v $H^k(\Omega)$. Poznamenejme, že budeme využívat i seminormu

$$|v|_{2,k} = \left\{ \sum_{|m| = k} \| D^m v \|_{2,0}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Připomeňme, že $|v|_{2,k} = 0$ neimplikuje $v = 0$, a proto $|v|_{2,k}$ není normou (ostatní vlastnosti normy však splňuje).

Sobolevův prostor lze také definovat s využitím zabecněných derivací, jako

$$H^k(\Omega) = \{ v \in L^2(\Omega) : \ D^m v \in L_2(\Omega) \quad \text{pro všechna } m, \ | m | \leqq k \}.$$

Zobecněnou derivací $D^m v$ přitom rozumíme takovou funkci, že platí

$$(D^m v, \phi)_{2,0} = (-1)^{|m|} \, (v, D^m \phi)_{2,0} \qquad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega),$$

kde $C_0^\infty(\Omega)$ je množina nekonečně derivovatelných funkcí s kompaktním nosičem uvnitř Ω. Druhá definice je za rozumných podmínek ekvivalentní dřívější a hodí se např. při studiu regularity řešení.

Nyní uvedeme několik důležitých tvrzení, která budeme dále potřebovat. Podrobnosti lze najít v [6, 8, 10, 20, 21].

Věta 5.9. Greenova. *Nechť $u, v \in H^1(\Omega)$, potom*

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v \,\mathrm{d}x = \int\limits_{\partial\Omega} uv\, n_i ds - \int\limits_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} \,\mathrm{d}x.$$

V jednorozměrném případě jsme dokázali, že $H^1(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$. Ve vícerozměrném případě je situace složitější.

Uvažujme např. funkce

$$f_\alpha(x) = r^\alpha(x), \quad \text{kde } r(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} x_i^2} \quad \text{na } B_d = \left\{x \in R^d :\ r(x) < 1\right\}.$$

Potom

$$\int\limits_{B_1} f_\alpha^2 \,\mathrm{d}x = \int\limits_{B_1} x^{2\alpha} \,\mathrm{d}x \quad < \infty \qquad \text{pro } 2\alpha > -1,$$

$$\int\limits_{B_2} f_\alpha^2 \,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} r^{2\alpha} r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r < \infty \qquad \text{pro } 2\alpha + 1 > -1,$$

$$\int\limits_{B_2} f_\alpha^2 \,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} r^{2\alpha} r^2 \sin(\psi) \,\mathrm{d}\psi \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r < \infty \qquad \text{pro } 2\alpha + 2 > -1.$$

Derivace $\frac{\partial}{\partial x_i} f_\alpha(x) = \alpha r^{\alpha-1}(x) \frac{x_i}{r}$, takže

$$\int\limits_{B_1} \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}\right)^2 \,\mathrm{d}x = \int\limits_{B_1} \alpha^2 x^{2(\alpha-1)} \quad \mathrm{d}x < \infty \qquad \text{pro } 2\alpha - 2 > -1,$$

$$\int\limits_{B_2} \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_1}\right)^2 \,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \alpha^2 r^{2(\alpha-1)} \cos^2(\varphi) r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r < \infty \quad \text{pro } 2\alpha - 1 > -1$$

$$\int\limits_{B_3} \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_1}\right)^2 \,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \alpha^2 r^{2(\alpha-1)} \cos^2(\varphi) \sin^3(\psi) r^2 \,\mathrm{d}\psi \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r < \infty \quad \text{pro } 2\alpha > -1.$$

Z uvedeného plyne, že $f_\alpha \in H^1(\Omega)$ pro $\alpha > 1/2$ a $d = 1$, nebo$\alpha > 0$ a $d = 2$, nebo$\alpha > -1/2$ a $d = 3$.

Vidíme, že pro $\Omega \subset R^3$ bude $H^1(\Omega)$ obsahovat nespojité funkce (funkce se singularitou). Obdobně pro $\Omega \subset R^2$ obsahuje $H^1(\Omega)$ nespojité funkce, např. logaritmickou singularitu $f(x) = \log(\log(2/r))$.

Věta 5.10. *Sobolevova věta o vnoření. Nechť $\Omega \subset R^d$, $k > \frac{d}{2}$. Potom*

(i) *existuje vnoření $H^k(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$, tj.*

$$\forall u \in H^k(\Omega)\, \exists \tilde{u} \in C(\bar{\Omega}) : \quad u = \tilde{u} \text{ s.v.},$$

(ii) *vnoření je spojité, tj. existuje konstanta c tak, že*

$$\|u\|_\infty \leqq \|\tilde{u}\|_{C(\bar{\Omega})} \leqq c \parallel u \parallel_{2,k} \quad \forall u \in H^k(\Omega).$$

Podrobnosti např. [21, 20, 6]. Viděli jsme, že funkce z $H^1(\Omega)$ nemusí být spojité a mohou mít singularity. Na druhé straně, následující věta vylučuje skokové nespojitosti mezi hladkými částmi funkcí.

Věta 5.11. *Nechť $k \geqq 1$. Po částech nekonečně diferencovatelná funkce v definovaná na $\bar{\Omega}$ patří do $H^k(\Omega)$ právě tehdy, když patří do $C^{k-1}(\Omega)$.*

Uvedená věta ukazuje, proč požadovat spojitost v prostorech konečných prvků. Důkaz např. [6], věta 5.2, viz také Příklad 3.23.

Věta 5.12. *Rellichova věta o kompaktním vnoření. Pro $k \geqq 0$ je $H^{k+1}(\Omega) \subset \subset H^k(\Omega)$, přičemž vnoření $H^{k+1}(\Omega) \hookrightarrow H^k(\Omega)$ je kompaktní, tj. z každé posloupnosti $\{v_i\}$ omezené v $H^{k+1}(\Omega)$ (ex. $C : \parallel v_i \parallel_{k+1} \leqq C$) lze vybrat posloupnost konvergentní v $H^k(\Omega)$.*

Skutečnost, že funkce $H^1(\Omega)$ může mít singularity má závažné důsledky. Ukazuje, že nemůžeme pracovat s bodovými hodnotami funkce $u \in H^1(\Omega)$ a např. standardní bodová interpolace u je korektně definována až na $H^2(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$, ale ne na $H^1(\Omega)$. Nutí nás také k zamyšlení, zda můžeme a v jakém smyslu používat hodnoty funkce na hranici, které se např. vyskytují v Dirichletově okrajové podmínce. Na poslední otázku odpovídá následující věta.

Věta 5.13. *O stopách. Existuje právě jeden spojitý lineární operátor $\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ takový, že*

(i) *stopa funkce γv je restrikcí na hranici v případě funkce spojité až do hranice,*

$$\gamma v = v \,|_{\partial\Omega} \qquad \forall v \in C^1(\bar{\Omega}), \tag{5.30}$$

(ii) *stopa funkce γv patří do $L_2(\partial\Omega)$, existuje konstanta C tak, že*

$$\| \gamma v \|_{2,0,\partial\Omega} \leqq C \| v \|_{2,1,\Omega} \qquad \forall v \in H^1(\Omega), \tag{5.31}$$

(iii) *existuje konstanta C tak, že platí*

$$\| \gamma v \|_{2,0,\partial\Omega} \leqq C \| v \|_{2,0,\Omega}^{1/2} \| v \|_{2,1,\Omega}^{1/2} \qquad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{5.32}$$

První dvě tvrzení jsou obsahem standardní věty o stopách, viz např. [6]. Poslední tvrzení (iii), viz [8] věta 1.1.6, je zesílením (ii), které je užitečné např. pro aplikaci nelokální interpolace v části 6.3

Pro analýzu okrajových úloh využijeme vícerozměrnou obdobu Friedrichsovy nerovnosti, v případě čistě Neumannovy úlohy Poincarého nerovnost.

Věta 5.14. *Friedrichsova nerovnost. Nechť Ω je regulární oblast, Γ je část hranice $\partial\Omega$, Γ má kladnou Lebesgueovskou míru. Pak existuje konstanta $c = c(\Omega, \Gamma)$ tak, že*

$$\| v \|_{2,1,\Omega} \leqq c \left\{ \sum_{i=1}^{d} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 \mathrm{d}x + \int_{\Gamma} v^2 \,\mathrm{d}s \right\} \qquad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{5.33}$$

Věta 5.15. *Poincarého nerovnost. Nechť Ω je regulární oblast. Pak existuje konstanta $c = c(\Omega)$ tak, že*

$$\| v \|_{2,1,\Omega} \leqq c \left\{ \sum_{i=1}^{d} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 \mathrm{d}x + \left(\int_{\Omega} v \,\mathrm{d}x \right)^2 \right\} \qquad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{5.34}$$

5.10 Analýza slabé formulace

Uvažujme modelovou úlohu

$$\text{najít } u \in U^D : \quad a(u,v) = b(v) \qquad \forall v \in V,$$

$$a(u,v) = \int_{\Omega} K\nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x,$$
$$b(v) = \int_{\Omega} fv \,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_N} \hat{\tau} v \,\mathrm{d}s,$$

$U^D = \{v \in H^1(\Omega) : \ v = \hat{u} \quad \text{na } \Gamma_D\}$, $V = \{v \in H^1(\Omega) : \ v = 0 \quad \text{na } \Gamma_D\}$ a Γ_D je část $\partial\Omega$ s kladnou mírou. Naše modelová úloha je variační formulací úlohy (5.19)–(5.21). Potom

a) Bilineární forma a je omezená,

$$|a(u,v)| \leqq k_1 \int_{\Omega} \|\nabla u\| \cdot \|\nabla v\| \,\mathrm{d}x \leqq k_1 \|\nabla u\|_{2,0} \cdot \|\nabla v\|_{2,0} \leqq k_1 \|\nabla u\|_{2,1} \cdot \|\nabla v\|_{2,1}$$

pro všechna u, $v \in H^1(\Omega)$. Když $k_1(x)$ je největší vlastní číslo matice $K(x)$, pak za k_1 lze vzít $\max\{k_1(x) : \ x \in \Omega\}$.

b) Bilineární forma a je V-eliptická, pro $v \in V$ platí

$$|a(v,v)| \geqq k_0 \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = k_0 |\nabla v|_{2,1}^2 \geqq k_0 c \|\nabla v\|_{2,1}^2 .$$

Když $k_0(x) > 0$ je nejmenší vlastní číslo matice $K(x)$, pak za k_0 lze vzít číslo $\min\{k_0(x) : \ x \in \Omega\}$. Existence kladné konstanty c plyne z Friedrichsovy nerovnosti (5.33).

c) Nechť $f \in L_2(\Omega)$, pak funkcionál b je omezený - pro $v \in H^1(\Omega)$ platí

$$\begin{aligned} |b(v)| &\leqq \left| \int_{\Omega} fv \,\mathrm{d}x \right| + \left| \int_{\Gamma_N} \hat{\tau} v \,\mathrm{d}s \right| \leqq \|f\|_{2,0} \|v\|_{2,0} + \|\hat{\tau}\|_{2,0,\Gamma_N} \|\gamma v\|_{2,0,\Gamma_N} \\ &\leqq \|f\|_{2,0} \|v\|_{2,1} + \|\hat{\tau}\|_{2,0,\Gamma_N} \|\gamma v\|_{2,0,\partial\Omega} \leqq (\|f\|_{2,0} + c \|\hat{\tau}\|_{2,0,\Gamma_N}) \|v\|_{2,1,\Omega} . \end{aligned}$$

Vidíme, že s hodnotou γv na Γ_N zde pracujeme ve smyslu stop a věta o stopách nám zaručuje existenci konstanty c.

Existenci řešení modelové okrajové úlohy lze nyní dokázat zkoumáním energetického funkcionálu tak, jako jsme učinili v části 3.10, nebo použitím Ritzovy věty o reprezentaci funkcionálu. V teorii parciálních diferenciálních rovnic se však většinou odkazujeme na Laxovu-Milgramovu větu 3.21, která nevyžaduje symetrii bilineární formy.

V případě, že $\Gamma_D = \emptyset$, tedy jde o čistě Neumannovu úlohu $\Gamma_N = \partial\Omega$, může řešení existovat jen pokud je splněna podmínka

$$0 = a(u,1) = \int_{\Omega} f \,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_N} \hat{\tau} \,\mathrm{d}s,$$

která vyjadřuje nulovou bilanci zdrojů. Poznamenejme, že $1 \equiv v\colon\ v(x) = 1\ \forall x \in \Omega$. Abychom důkaz existence řešení provedli s použitím Laxovy-Milgramovy věty potřebujeme V-elipticitu, která ale pro $V = H^1(\Omega)$ neplatí. Protipříkladem je právě zmiňovaná nenulová konstantní funkce.

K získání řešení (jednoho z nekonečně mnoha řešení lišících se o aditivní konstantu) potřebujeme zúžit prostor $V = H^1(\Omega)$ tak, aby právě jedno z řešení v zúženém prostoru zůstalo. Na takto zúženém prostoru V_0 bude existence a jednoznačnost řešení garantována elipticitou (potřebujeme zde vyloučit aditivní konstanty). U jednorozměrné úlohy lze zúžení provést předepsáním jedné hraniční hodnoty, u vícerozměrných úloh je však taková operace nepřípustná (viz diskuze v předchozí části). Předepsání hodnoty na množině kladné míry zase může změnit řešení (nevíme jaký průběh zde má řešení Neumannovy úlohy mít). Možnou cestou je předepsání nulového průměru na Ω, elipticita je potom zaručena Poincarého nerovností (5.34). Uvedený postup lze dále zobecnit uvažováním nulového průměru na libovolné množině kladné míry.

Při analýze metody konečných prvků budeme pracovat s interpolací za předpokladu, že řešení u okrajové úlohy patří do $H^2(\Omega)$. Víme již, že pro tuto regularitu je potřeba hladkost vstupních dat, ale i oblasti Ω. Uveďme nyní příklad vět zaručujících H^2 regularitu.

Věta 5.16. *Vnitřní regularita. Nechť $f \in L_2(\Omega)$, $k_{ij} \in W^1_\infty(\Omega)$, $u \in H^1_0(\Omega)$ je slabé řešení modelové okrajové úlohy* (5.26)-(5.28)*. Potom $u \in H^2(\Omega')$ pro libovolné $\overline{\Omega'} \subset \Omega$,*

$$\| u \|_{2,2,\Omega'} \leqq c\,(\| u \|_{2,1,\Omega} + \| f \|_{2,0,\Omega})\,.$$

Důkaz věty lze najít v [22], věta 8.51. Pro celkovou regularitu potřebujeme předpoklad o hranici oblasti, např.

Věta 5.17. *Celková regularita. Nechť $f \in L_2(\Omega)$, $k_{ij} \in W^1_\infty(\Omega)$, $u \in H^1_0(\Omega)$ je slabé řešení modelové okrajové úlohy, $\partial\Omega$ je třídy C^2. Potom $u \in H^2(\Omega)$ a platí,*

$$\| u \|_{2,2,\Omega} \leqq c\,(\| u \|_{2,1,\Omega} + \| f \|_{2,0,\Omega})\,.$$

Důkaz věty lze najít v [22], věta 8.53. Regularitu je možné také dokázat pro konvexní oblasti. Poznamenejme, že $W^1_\infty(\Omega)$ je množina funkcí z $L_\infty(\Omega)$, které mají skoro všude derivaci patřící také do $L_\infty(\Omega)$. Lze tak zeslabit požadavek $k_{ij} \in C^1(\Omega)$.

Věta 5.18. *o regularitě řešení. Řešení úlohy* (5.26)–(5.28) *patří do $H^2(\Omega)$ pokud k je konstantní nebo spojitě diferencovatelná na Ω, úloha má jenom Dirichletovy nebo jenom Neumannovy okrajové podmínky ($\Gamma_N = \emptyset$ nebo $\Gamma_D = \emptyset$), oblast Ω je hladká nebo je Ω konvexní mnohoúhelník či mnohostěn.*

Podrobnosti viz např. [20], diskuze k regularitě je také v knize [22].

Kapitola 6

MKP pro vícerozměrné úlohy

K numerickému řešení vícerozměrných okrajových úloh opět použijeme metodu konečných prvků. To znamená, že provedeme konstrukci prostoru konečných prvků $U_h \subset H^1(\Omega)$ a jeho částí U_h^D a V_h. V prostoru U_h vytvoříme uzlovou MKP bázi a použijeme Ritzovu-Galerkinovu metodu diskretizace variačně formulovaných okrajových úloh. Omezíme se na lineární trojúhelníkové prvky, ostatní možnosti pouze zmíníme na konci kapitoly.

6.1 MKP s lineárním trojúhelníkovým prvkem

6.1.1 Triangulace a vstupní data

Vycházíme z MKP triangulace $\mathcal{T}_h$ mnohoúhelníkové oblasti Ω, čímž rozumíme dělení oblasti Ω na trojúhelníky tak, že dva trojúhelníky, které nejsou shodné nebo disjunktní, mají společnou buď celou stranu, nebo jeden vrchol, viz obr. 6.1. Nechť dále N_h je množina uzlů (vrcholů) a elementy i uzly jsou očíslovány (indexovány),

$$N_h = \left\{x^{[i]}\right\}_{i=1}^{n} \text{ a } \mathcal{T}_h = \{T_i\}_{i=1}^{ne}.$$

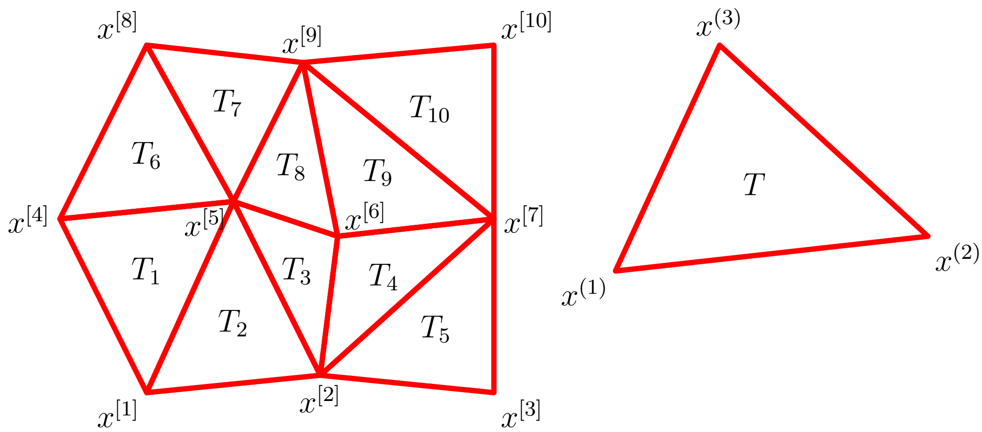
U mnohoúhelníkové oblasti Ω, bude $\Omega = \Omega_h = \bigcup\{T : T \in \mathcal{T}_h\}$. U obecné oblasti můžeme dosáhnout jenom aproximace $\Omega \sim \Omega_h$ a musíme uvažovat vzniklou chybu, viz Poznámka 6.5.

Definujeme nyní prostor lineárních konečných prvků U_h tak, že zavedeme uzlovou bázi $\{\phi_i\}_{i=1}^{n}$ tvořenou funkcemi

$$\phi_i\left(x^{[j]}\right) = \delta_{ij}, \quad \phi_i\,|_T \in P_1 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h,$$

kde P_1 značí množinu lineárních funkcí.

Pro MKP dělení oblasti Ω (na trojúhelníky, které navazují celými stranami a ne jenom částí strany) budou ϕ_i spojité a proto lineární kombinace ϕ_i vytvoří MKP prostor U_h, který bude podprostorem $H^1(\Omega)$.



Obr. 6.1: Triangulace oblasti a obecný element

Uvažujme následující vstupní data pro popis modelové úlohy (5.19) - (5.21) i triangulace

- Vstupní data pro uzly (`NX` - souřadnice):
  - souřadnice uzlů uložíme do pole `NX(1:n,1:2)`,
  - pomocí pole `NB(1:n)` určíme uzly vnitřní a patřící do Γ_D a Γ_N , `NB=0` pro vnitřní uzly, `NB=1` pro uzly na Γ_D, `NB=2` pro uzly na $\Gamma_N \setminus \Gamma_D$ a `NB=3` pro uzly na rozhraní $\Gamma_N \cap \Gamma_D$.

- Vstupní data pro elementy (`EV` - identifikace vrcholů, `EN` - materiálové konstanty):
  - pro lokálně určené uzly $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$ elementu T_k určíme jejich identitu s globálně číslovanými uzly $x^{[r]}$, $x^{[s]}$, $x^{[t]}$ pomocí pole `EV(1:ne,1:3)`, `EV(k,1)=r`, `EV(k,2)=s`, `EV(k,3)=t`.
  - v poli `ENI(1:ne,1:7)` uložíme pro každý element hodnoty k_{11}, k_{12}, k_{13}, k_{22}, k_{23}, k_{33} určující symetrickou matici K koeficientů anizotropního vedení tepla a hodnotu zdroje $f(x_T)$, kde x_T je těžiště trojúhelníkového elementu

- Vstupní data pro okrajové podmínky
  - vytvoříme seznam uzlů na části hranice s Dirichletovou okrajovou podmínkou `ND(1:nd,1:2)`. Pro i-tý uzel na hranici Γ_D je `r=ND(i,1)` číslo (index) uzlu na hranici, `ND(i,2)` je odpovídající zadaná hodnota $\widehat{u}(x^{[r]})$,
  - vytvoříme seznam stran trojúhelníkových prvků, které leží na části hranice s Neumannovou okrajovou podmínkou `SN(1:nn,1:3)`. Pro i–tou

úsečku budou `r=SN(i,1)` a `s=SN(i,2)` čísla (indexy) uzlů tvořících koncové body a `SN(i,3)` bude hodnota $\hat{r}(x_S)$ ve středu strany $x_S = \frac{1}{2}(x^{[r]} + x^{[s]})$.

Výše uvedená organizace dat umožňuje vytvoření počítačového programu, ale samozřejmě není jedinou možností jak organizovat vstupní data.

Poznámka 6.1. MKP dělení je možné provést přesně pro úlohy na oblastech tvaru mnohoúhelníka. Jiné oblasti s křivočarou hranicí je možné trojúhelníkovými prvky pouze aproximovat. Pro přesnou diskretizaci takových oblastí jsou vyvinuty křivočaré (izoparametrické) konečné prvky.

6.1.2 Matice lineárního trojúhelníkového (Courantova) elementu

Pro použití Ritzovy-Galerkinovy metody potřebujeme hodnoty $a_{ij} = a(\phi_j, \phi_i)$, kde ϕ_i jsou funkce uzlové MKP báze.

$$a(\phi_j, \phi_i) = \int_\Omega \langle K\mathrm{grad}(\phi_j), \mathrm{grad}(\phi_i)\rangle \,\mathrm{d}x = \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \int_T \sum_{pq} k_{pq} \frac{\partial\phi_i}{\partial x_p}\frac{\partial\phi_j}{\partial x_q}\,\mathrm{d}x.$$

Výpočet příspěvků prvku T_k s vrcholy $x^{(1)} \equiv x^{[r]}$, $x^{(2)} \equiv x^{[s]}$, $x^{(3)} \equiv x^{[t]}$ provedeme tak, že uvažujeme chování (restrikce) bázové funkce ϕ_i na T_k,

$$\phi_i\,|_{T_k} = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq r,\, s,\, t \\ \psi_j & \text{pro } EV(k,\, j) = i \end{cases}$$

kde ψ_j je lineární na T_k, $\psi_j(x^{(l)}) = \delta_{jl}$ jsou hodnoty ψ_j ve vrcholech. ψ_1, ψ_2, ψ_3 jsou lokální bázové funkce. Jediné nenulové příspěvky elementu T_k jsou pak hodnoty

$$a_{ij}^{(T_k)} = \int_{T_k} \sum_{pq} k_{pq} \frac{\partial\psi_i}{\partial x_p}\frac{\partial\psi_j}{\partial x_q}\,\mathrm{d}x.$$

Tyto hodnoty přičteme do tzv. rozšířené matice tuhosti $A^+ = (a_{rs})$,

$$a_{ij}^{(T_k)} \to a_{pq} = a_{pq} + a_{ij}^{(T_k)} \quad \text{pro } p = EV(k,i),\ q = EV(k,j)$$

Zatímco matice tuhosti $A = (a_{ij})$ obsahuje prvky odpovídající bázovým funkcím ϕ_i, $\phi_j \in V_h$, rozšířená matice tuhosti A^+ obsahuje prvky počítané pro všechny bázové funkce ϕ_i, $\phi_j \in U_h$.

Příspěvky obecného elementu $T \in \mathcal{T}_h$ tvoří 3×3 matici A_T, kterou lze vyjádřit ve tvaru

$$A_T = \int_T B^T K B \,\mathrm{d}x,$$

kde K je matice koeficientů a

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\psi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\psi_3}{\partial x_1} \\ \\ \frac{\partial\psi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial\psi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial\psi_3}{\partial x_2} \end{bmatrix}.$$

Pro výpočet B uvažujeme prvek T s vrcholy $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)})$, $x^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)})$, $x^{(3)} = (x_1^{(3)}, x_2^{(3)})$. Začneme s vyjádřením derivací lokální bázové funkce $\psi_1(x) = a + bx_1 + cx_2$. Podle definice platí

$$\begin{aligned} a + bx_1^{(1)} + cx_2^{(1)} &= 1 \\ a + bx_1^{(2)} + cx_2^{(2)} &= 0 \\ a + bx_1^{(3)} + cx_2^{(3)} &= 0 \end{aligned}$$

odtud lze pomocí Cramerova pravidla vyjádřit

$$b = \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & x_2^{(1)} \\ 1 & 0 & x_2^{(2)} \\ 1 & 0 & x_2^{(3)} \end{vmatrix} D_T^{-1} = (x_2^{(2)} - x_2^{(3)})\, D_T^{-1}$$

$$c = \frac{\partial\psi_1}{\partial x_2} = \begin{vmatrix} 1 & x_1^{(1)} & 1 \\ 1 & x_1^{(2)} & 0 \\ 1 & x_1^{(3)} & 0 \end{vmatrix} D_T^{-1} = (x_1^{(3)} - x_1^{(2)})\, D_T^{-1},$$

kde

$$D_T = \begin{vmatrix} 1 & x_1^{(1)} & x_2^{(1)} \\ 1 & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} \\ 1 & x_1^{(3)} & x_2^{(3)} \end{vmatrix}, \quad |D_T| = 2|\mathrm{T}| = 2\,\mathrm{obsah}(T).$$

Obdobně můžeme vyjádřit derivace dalších lokálních bázových funkcí a sestavit matici B,

$$B = \begin{bmatrix} x_2^{(2)} - x_2^{(3)} & x_2^{(3)} - x_2^{(1)} & x_2^{(1)} - x_2^{(2)} \\ x_1^{(3)} - x_1^{(2)} & x_1^{(1)} - x_1^{(3)} & x_1^{(2)} - x_1^{(1)} \end{bmatrix} D_T^{-1} = B_\star D_T^{-1}.$$

Pro matici tuhosti trojúhelníkového prvku T pak máme vyjádření

$$A_T = B^T K B \cdot |T| = \frac{1}{2} B_\star^T K B_\star \cdot |D_T|^{-1}.$$

6.1.3 Vektor zatížení Courantova elementu

Dále jde o výpočet rozšířeného vektoru zatížení $b^+ = (b_i)$, kde $b_i = b(\phi_i)$,

$$b_i = \int_\Omega f\phi_i \,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_N} \hat{\tau}\phi_i \,\mathrm{d}s = \sum_T \left\{ \int_T f\phi_i \,\mathrm{d}x + \sum_{strana(T)\subset\Gamma_N} \int_{strana(T)} \hat{\tau}\phi_i \,\mathrm{d}s \right\}.$$

Příspěvky elementu T_k tvoří vektor $b^{(T_k)} \in R^3$, kde v prvé řadě vypočteme

$$b_i^{(T_k)} = \int_{T_k} f\psi_i \,\mathrm{d}x \sim f(x_T)\psi_i(x_T)\,|T_k| = \frac{1}{6}f(x_T)\,|D_T| \quad \text{pro } i = 1,\, 2,\, 3,$$

x_T je těžiště T_k.

Tyto hodnoty přičteme do celkového vektoru pravé strany $b^+ = (b_r)$,

$$b_i^{(T_k)} \to b_r = b_r + b_i^{(T_k)} \quad \text{pro } r = EV(k,i).$$

6.1.4 Zohlednění Neumannových okrajových podmínek

Pokud strana $\overline{x^{[r]}x^{[s]}} = \overline{x^{(i)}x^{(j)}}$ trojúhelníka T_k patří do Γ_N, potom k prvkům vektoru b^+ ještě přičteme

$$\begin{aligned} b_r &= b_r + \textstyle\int_{x^{(i)}x^{(j)}} \hat{\tau}\psi_i \sim b_r + \text{délka}(\overline{x^{(i)}x^{(j)}})\,\tfrac{1}{2}\hat{\tau}(x_s),\\ b_s &= b_s + \textstyle\int_{x^{(i)}x^{(j)}} \hat{\tau}\psi_j \sim b_s + \text{délka}(\overline{x^{(i)}x^{(j)}})\,\tfrac{1}{2}\hat{\tau}(x_s), \end{aligned}$$

kde x_s je střed strany $\overline{x^{(i)}x^{(j)}}$.

Poznámka 6.2. Pro výpočet vektoru pravé strany jsme dvakrát použili numerickou integraci. To můžeme také interpretovat jako přesné řešení úlohy s upravenou pravou stranou f_h a upravenou Neumannovou podmínkou $\hat{\tau}_h$. Obě upravené funkce jsou po částech konstantní.

6.1.5 Zohlednění Dirichletových okrajových podmínek

Nechť $I_0 = \left\{i : \; x^{[i]} \in \Gamma_D\right\} \subset \{1, \ldots, n\}$. Pak hledáme MKP řešení ve tvaru

$$u_h = \sum_{i\in I_0} \hat{u}(x^{[i]})\phi_i + \sum_{i\notin I} u_i\phi_i = \widehat{u}_h^D + w_h, \quad \text{kde } w_h \in V_h.$$

Pro neznámé hodnoty u_i získáme soustavu lineárních algebraických rovnic ze sestavené (rozšířené) matice A^+ a vektoru b^+. Nejprve upravíme vektor pravé strany na b_D,

$$b_{D,i} = b_i - \sum_{j\in I_0} \hat{u}(x^{[j]})a_{ij}$$

a potom vynecháme v soustavě $Au = b_D$ řádky r_i a sloupce s_i pro $i \in I_0$.

Tím získáme soustavu $Au = b$, která je algebraickou formou Ritzovy-Galerkinovy metody, tedy přesně úlohy

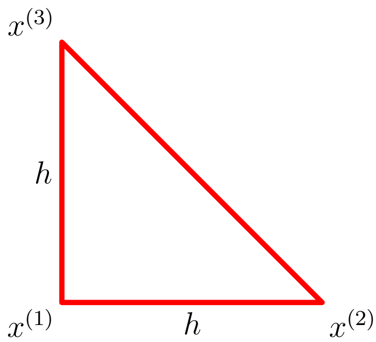
$$\text{najít } w_h \in V_h : \; a(w_h, v_h) = b(v_h) - a(\hat{u}_h^D, v_h) = b_D(v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

Poznámka 6.3. Poznamenejme, že může být výhodné neměnit dimenzi matice, ale řádky r_i a sloupce s_i pro $i \in I_0$ ponechat, ale nulovat, a následně dosadit $a_{ii} = 1$ a $b_{D,i} = \hat{u}(x^{[i]})$.

Je také možné vyjít z neupravené soustavy $Au = b$ a vynucovat splnění okrajových podmínek tak, že vezmeme $a_{ii} = \eta$ a $b_i = \eta\hat{u}(x^{[i]})$ pro $i \in I_0$ a vhodné η, $\eta \gg |a_{ij}|$.

Poznámka 6.4. $\hat{u}_h^D$ bude patřit do U_h^D, pokud je zadaná Dirichletova podmínka spojitou a po částech lineární funkcí na Γ_D a Γ_D je sjednocením stran trojúhelníků použitého dělení. Pokud tomu tak není, pak pracujeme pouze s aproximací Dirichletovy okrajové podmínky.

6.1.6 Příklad - pravoúhlé prvky

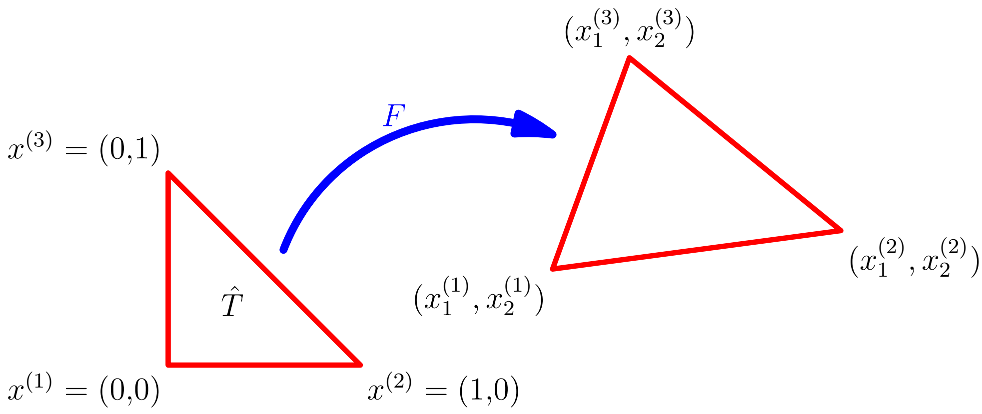


Obr. 6.2: Pravoúhlý trojúhelník

V případě pravoúhlých prvků s odvěsnami rovnoběžnými s osami souřadného systému lze snadno vyčíslit derivace lokálních bázových funkcí. Dostaneme

$$B = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ a pro } K = I \text{ bude } \quad A_T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Při obdélníkové oblasti Ω a dělení na pravoúhlé trojúhelníky uvedeného typu, proveďte srovnání vzniklé soustavy se soustavou získanou použitím metody konečných diferencí.



Obr. 6.3: Zobrazení referenčního trojúhelníka

6.1.7 Výpočet matice tuhosti technikou referenčního prvku

Obecněji, pro uvažovaný referenční trojúhelník $\hat{T}$, viz obr. 6.3, snadno dostaneme

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_1(\hat{x}) &= 1 - \hat{x}_1 - \hat{x}_2\\ \hat{\psi}_2(\hat{x}) &= \hat{x}_1\\ \hat{\psi}_3(\hat{x}) &= \hat{x}_2\end{aligned}, \quad B = \hat{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{\hat{T}} = \frac{1}{2}\hat{B}^T K \hat{B}.$$

Pokud $T \in \mathcal{T}_h$ je obecný trojúhelník tak uvažujme zobrazení $F : \hat{T} \longrightarrow T$ definované následovně

$$\begin{aligned} x_1 = \quad F_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \quad & x_1^{(1)} + \hat{x}_1(x_1^{(2)} - x_1^{(1)}) + \hat{x}_2(x_1^{(3)} - x_1^{(1)}) \\ x_2 = \quad F_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \quad & x_2^{(1)} + \hat{x}_1(x_2^{(2)} - x_2^{(1)}) + \hat{x}_2(x_2^{(3)} - x_2^{(1)}) \end{aligned}$$

Toto zobrazení zobrazuje vrcholy $\hat{T}$ na vrcholy T, úsečku na úsečku, a tedy $\hat{T}$ na T. Mimo to:

- $x = F(x) = x^{(1)} + G\hat{x}$, kde $G = DF = \begin{bmatrix} x_1^{(2)} - x_1^{(1)} & x_1^{(3)} - x_1^{(1)} \\ x_2^{(2)} - x_2^{(1)} & x_2^{(3)} - x_2^{(1)} \end{bmatrix}$
- $\det(G) = D_T = \begin{vmatrix} 1 & x_1^{(1)} & x_2^{(1)} \\ 1 & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} \\ 1 & x_1^{(3)} & x_2^{(3)} \end{vmatrix} = 2|\mathrm{T}| = 2\,\mathrm{obsah}(T)$,
- $\det(G)$ je nenulový pro nedegenerovaný T,
- pro nedegenerovaný T existuje inverzní zobrazení $\hat{x} = G^{-1}(x - x^{(1)})$.

Nyní jde o vyjádření derivací bázových funkcí. Uvažujeme jednak bázové funkce ψ_1, ψ_2, ψ_3 na T, jednak bázové funkce $\hat{\psi}_1$, $\hat{\psi}_2$, $\hat{\psi}_3$ na $\hat{T}$. Využijeme vztah

$$\widehat{\psi_i} = \psi_i \circ F,$$

z něhož podle věty o derivaci složené funkce plyne

$$\frac{\partial \widehat{\psi}_i}{\partial \hat{x}_1} = \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1}\frac{\partial F_1}{\partial \hat{x}_1} + \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2}\frac{\partial F_2}{\partial \hat{x}_1},$$
$$\frac{\partial \widehat{\psi}_i}{\partial \hat{x}_2} = \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1}\frac{\partial F_1}{\partial \hat{x}_2} + \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2}\frac{\partial F_2}{\partial \hat{x}_2},$$

t.j. maticově

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \widehat{\psi}_i}{\partial \hat{x}_1} \\ \frac{\partial \widehat{\psi}_i}{\partial \hat{x}_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial F_2}{\partial \hat{x}_1} \\ \frac{\partial F_1}{\partial \hat{x}_2} & \frac{\partial F_2}{\partial \hat{x}_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2} \end{bmatrix} = G^T \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2} \end{bmatrix}.$$

Pro referenční prvek známe matici $B_{\hat{T}} = \hat{B}$, pro obecný prvek pak dostaneme vzhledem k výše uvedené transformaci,

$$\hat{B} = G^T B, \quad B = G^{-T}\hat{B}.$$

Platí $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}(ad-bc)^{-1}$, tedy

$$G^{-T} = \begin{bmatrix} x_1^{(2)} - x_1^{(1)} & x_2^{(2)} - x_2^{(1)} \\ x_1^{(3)} - x_1^{(1)} & x_2^{(3)} - x_2^{(1)} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} x_2^{(3)} - x_2^{(1)} & x_2^{(1)} - x_2^{(2)} \\ x_1^{(1)} - x_1^{(3)} & x_1^{(2)} - x_1^{(1)} \end{bmatrix} |G|^{-1}$$

a tedy

$$B = \begin{bmatrix} x_2^{(3)} - x_2^{(1)} & x_2^{(1)} - x_2^{(2)} \\ x_1^{(1} - x_1^{(3)} & x_1^{(2)} - x_1^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} |G|^{-1}$$
$$= \begin{bmatrix} x_2^{(2)} - x_2^{(3)} & x_2^{(3)} - x_2^{(1)} & x_2^{(1)} - x_2^{(2)} \\ x_1^{(3)} - x_1^{(2)} & x_1^{(1)} - x_1^{(3)} & x_1^{(2)} - x_1^{(1)} \end{bmatrix} D_T^{-1},$$

což je vyjádření, které už známe. Pro matici tuhosti prvku máme

$$A_T = B^T K B \cdot |T| = \frac{1}{2} \cdot \hat{B}^T G^{-1} K G^{-T} \hat{B}\, |D_T|^{-1}.$$

Odtud vidíme, že matice transformovaného trojúhelníka je podobná jako matice referenčního trojúhelníka se změněnou maticí koeficienů $G^{-1}KG^{-T}$, tj. transformace tvaru daná G má vliv podobný anizotropii. Hovoří se také o numerické anizotropii.

Techniku referenčního prvku jsme zde ukázali protože má uplatnění nejen pro odvození lokální matice tuhosti (to jsme provedli 6.1.2 jednodušeji). Specifické uplatnění má technika referenčního prvku při odvození křivočarých (izoparametrických) prvků. Skvělé uplatnění také najde v další části při studiu diskretizační chyby.

6.2 Apriorní odhad chyby pro Courantovy prvky

Uvažujeme případ, kdy řešíme okrajovou úlohu

$$\text{Najdi } u \in U_D : \quad a(u,v) = b(v) \quad \forall v \in V$$

a kdy máme MKP prostory $U_h \subset U$, $U_h^D \subset U_D$, $V_h \subset V$ a používáme přesnou realizaci Ritzovy-Galerkinovy metody (přesnou integraci):

$$\text{Najdi } u_h \in U_h^D : \quad a(u_h, v_h) = b(v_h) \quad \forall v_h \in V_h .$$

Jak jsme již viděli v případě jednorozměrných úloh, je potom apriorní odhad chyby v H^1 normě otázkou Céova lemmatu

$$\| u - u_h \|_{2,1} \leqq C \| u - w_h \|_{2,1} \quad \forall w_h \in U_h^D$$

a analýzy chyby interpolace. Tuto analýzu dále provedeme.

Poznámka 6.5. Výše uvedená situace může být narušena variačními přestupky (variational crimes, viz [24]):

i) $\Omega_h \neq \Omega$ oblast je pouze aproximována sjednocením konečných prvků Ω_h ($U_h \notin U$), viz Poznámka 6.1,
ii) $f_h \neq f$ používáme numerickou integraci, což je ekvivalentní práci s f_h místo s f, viz Poznámka 6.2,
iii) $\widehat{\tau}_h \neq \widehat{\tau}$ používáme numerickou integraci, což je ekvivalentní práci s $\widehat{\tau}_h$ místo s $\widehat{\tau}$, nebo aproximajeme Γ_N, viz Poznámka 6.2,
iv) $\widehat{u}_h \neq \widehat{u}$ aproximujeme $\widehat{u}$ nebo Γ_D ($U_{Dh} \notin U_D$), viz Poznámka 6.4.

V případech (ii)–(iv) můžeme využít věty o spojité závislosti řešení na vstupních datech, viz část 3.9. Případ (i) je analyzován např. v knize [16] s využitím principu maxima. Pokud je nepřesně počítána i bilineární forma a lze místo Céova lemma použít Strangovo lemma, viz [24].

6.2.1 Interpolace na referenčním trojúhelníku

Věta 6.6. *Uvažujme referenční trojúhelník $\hat{T}$ a lineární interpolaci $\hat{\Pi} : H^2(\hat{T}) \to P_1$ s uzly ve vrcholech z_1, z_2, z_3 trojúhelníka $\hat{T}$, $\left(\hat{\Pi} v\right)(z_i) = v(z_i)$. Potom*

$$\| v - \hat{\Pi} v \|_{2,2,\hat{T}} \leqq c \, | \, v \, |_{2,2,\hat{T}} \quad \forall v \in H^2(\hat{T}) .$$

Důkaz. V důkazu využijeme dvou vět o vnoření - Sobolevovy věty o spojitém vnoření a Rellichovy věty o kompaktním vnoření, viz část 5.9.

i) $H^2(\hat{T}) \subset C(\hat{T})$, takže u funkcí z $H^2(\hat{T})$ lze pracovat s bodovými hodnotami a interpolace $\hat{\Pi}$ je dobře definována,

ii) zavedeme normu $|\|\, v \,\||=|\, v \,|_{2,2,\hat{T}} + \sum\limits_{i=1}^{3} |\, v(z_i) \,|$ pro $v \in H^2(T)$ a ukážeme, že tato norma je ekvivalentní s $\|\, v \,\|_{2,2,\hat{T}}$.

Jeden odhad je snadný. Podle Sobolevovy věty o vnoření existuje konstanta c tak, že

$$|\, v(z_i) \,| \leqq \|\, v \,\|_{C(\hat{T})} \leqq c \,\|\, v \,\|_{2,2,\hat{T}}$$

$$\text{tedy} \quad |\|\, v \,\|| \leqq (1+3c) \,\|\, v \,\|_{2,2,\hat{T}} \,.$$

Opačně provedeme důkaz sporem, viz [6]. Nechť $\|\, v \,\|_{2,2,\hat{T}} \leqq c\, |\|\, v \,\||\ \ \forall v \in H_2(\hat{T})$ neplatí pro žádné c. Potom pro libovolné i najdeme

$$v_i \in H^2(\hat{T}) : \|\, v_i \,\|_{2,2,\hat{T}} = 1,\ |\|\, v_i \,\|| \leqq \frac{1}{i}.$$

Vzhledem k hustotě $C^2(\hat{T})$ v $H^2(\hat{T})$ můžeme předpokládat i $\{v_i\} \subset C^2(\hat{T})$. Podle Relichovy věty o vnoření lze z posloupnosti v_i vybrat posloupnost konvergentní a tedy i Cauchyovskou v $H^1(\hat{T})$. Bez újmy na obecnosti ji značme opět $\{v_i\}$. Platí

$$\begin{aligned}
\|\, v_i - v_j \,\|^2_{2,2,\hat{T}} &= \|\, v_i - v_j \,\|^2_{2,1,\hat{T}} + |\, v_i - v_j \,|^2_{2,2,\hat{T}} \\
&\leqq \|\, v_i - v_j \,\|^2_{2,1,\hat{T}} + [|\, v_i \,|_{2,2,\hat{T}} + |\, v_j \,|_{2,2,\hat{T}}]^2 \\
&\leqq \|\, v_i - v_j \,\|^2_{2,1,\hat{T}} + 2\, |\|\, v_i \,\||^2 + 2\, |\|\, v_j \,\||^2 \\
&\leqq \|\, v_i - v_j \,\|^2_{2,1,\hat{T}} + \frac{2}{i^2} + \frac{2}{j^2}
\end{aligned}$$

odkud plyne, že $\{v_i\}$ je také cauchyovská v $H^2(\hat{T})$ a má tedy limitu $v^* \in H^2(\hat{T})$. Ze spojitosti normy plyne, že $\|\, v^* \,\|_{2,2,\hat{T}} = 1$. Dále

$$\begin{aligned}
|\|\, v^* \,\|| &\leqq |\|\, v^* - v_k \,\|| + |\|\, v_k \,\||, \\
&\leqq (1+3c) \,\|\, v - v_k \,\|_{2,2,\hat{T}} + \frac{1}{i} \quad \forall i,
\end{aligned}$$

takže $|\|\, v^* \,\|| = 0$ a následně $|\, v^* \,|_{2,2,\hat{T}} = 0$. Pro C^2 hladkou funkci odtud a z Taylorovy věty plyne, že $v^* \in P_1$. Pro funkci z H^2 lze dokázat, že $v^* \in P_1$ při použití techniky regularizace. Pro $v^* \in P_1$ ale $v(z_i) = 0$ ve všech vrcholech z_i dává $v^* = 0$, což je spor s $\|\, v^* \,\|_2 = 1$.
Nyní využijme ekvivalenci $\|\, v \,\|_2$ a $|\|\, v \,\||$ na $H^2(\hat{T})$.

$$
\begin{aligned}
\| u - \hat{\Pi} u \|_2 &\leqq c \, ||| \, u - \hat{\Pi} u \, ||| \\
&= c \mid u - \hat{\Pi} u \mid_2 + \sum_{i=1}^{3} \mid (u - \hat{\Pi} u)(z_i) \mid \\
&= c \mid u \mid_2
\end{aligned}
$$

□

Uvedené lemma lze snadno zobecnit na obecné oblasti Ω a na polynomy vyšších řádů, viz [6]. Také lze ukázat, že je ekvivalentní následujícímu lemma Bramble--Hilbertovu.

Lemma 6.7. *Nechť Ω je regulární oblast, $k \geqq 2$ a $L : H^1(\Omega) \to Y$ je omezené lineární zobrazení do normovaného lineárního prostoru s normou $\|\cdot\|$, množina polynomů P_{k-1} je podmnožinou $\ker(L)$. Potom existuje konstanta $c = c(\Omega)\,\|L\| > 0$ tak, že*

$$\|Lv\| \leqq c \, |v|_{2,k,\Omega} \quad \text{pro } v \in H^k(\Omega).$$

Důkaz. Uvažujme $k = 2$. Nechť Π je lineární operátor uvažovaný v předchozím lemma. S použitím předchozího výsledku a skutečnosti, že $\Pi v \in \ker(L)$ dostaneme

$$\|Lv\| = \|L(v - \Pi v)\| \leqq \|L\| \, \|v - \Pi v\|_{2,2} \leqq c \, \|L\| \, |v|_{2,2} \, .$$

Naopak $Lv = v - \Pi v : H^2(\Omega) \to H^2(\Omega)$ je zobrazení, pro které $P_1 \subset \ker(L)$ takže $\|v - \Pi v\|_{2,2} \leqq c \, |v|_{2,2,\Omega}$ pro $v \in H^2(\Omega)$.

Důkaz pro $k > 2$ najdeme v [6]. □

6.2.2 Interpolace na odvozených prvcích

Lemma 6.8. *Mějme referenční trojúhelník $\hat{T}$. Pro libovolný trojúhelník triangulace $T \in \mathcal{T}_h$ pak existuje zobrazení $F : \hat{T} \to T$, $F\hat{x} = x^{(1)} + G\hat{x}$, kde G je regulární matice, viz část 6.1.7. Platí*

$$v \in H^m(T) \quad \Rightarrow \quad \hat{v} = v \circ F \in H^m(\hat{T})$$

a navíc

$$\|v\|_{2,0,T} = \mid \det(G) \mid^{1/2} \|\hat{v}\|_{2,0,\hat{T}} \tag{6.1}$$

$$\mid v \mid_{2,1,T} \leqq \| \, G^{-1} \, \| \mid \det(G) \mid^{1/2} \mid \hat{v} \mid_{2,1,\hat{T}} \tag{6.2}$$

$$\mid \hat{v} \mid_{2,2,\hat{T}} \leqq 4 \, \| \, G \, \|^2 \mid \det(G) \mid^{-1/2} \mid v \mid_{2,2,T} \tag{6.3}$$

Důkaz. První nerovnost (6.1) plyne přímo z věty o substituci v integrálu,

$$\|v\|_{2,0,T}^2 = \int_T v^2 \mathrm{d}x = \int_{\hat{T}} (v \circ F)^2 \left|\det(G)\right| \mathrm{d}\hat{x} = \left|\det(G)\right| \int_{\hat{T}} (\hat{v})^2 \mathrm{d}\hat{x} = \left|\det(G)\right| \|\hat{v}\|_{2,0,\hat{T}}^2 .$$

Pro důkaz druhé nerovnosti použijeme derivaci složeného zobrazení, což dává

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \widehat{v}}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial \widehat{v}}{\partial \hat{x}_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x_1} & \frac{\partial v}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial F_1}{\partial \hat{x}_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial F_2}{\partial \hat{x}_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x_1} & \frac{\partial v}{\partial x_2} \end{bmatrix} G,$$

tedy $\operatorname{grad}(\widehat{v}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \widehat{v}}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial \widehat{v}}{\partial \hat{x}_2} \end{bmatrix}^T = G^T \operatorname{grad}(v)$. Tudíž

$$\begin{aligned} |\ v\ |_{2,1,T}^2 &= \int_T \|\operatorname{grad}(v)\|^2 \, dx = \int_{\hat{T}} \|\operatorname{grad}(v)\|^2 \left|\det(G)\right| dx \\ &= \left|\det(G)\right| \int_{\hat{T}} \left\|\mathrm{G}^{-\mathrm{T}} \operatorname{grad}(\widehat{v})\right\|^2 d\hat{x} \leqq \| \ G^{-T} \ \|^2 \left|\det(G)\right| |\widehat{v}|_{2,1,\hat{T}}^2 \\ &= \| \ G^{-1} \ \|^2 \left|\det(G)\right| |\ \hat{v}\ |_{2,1,\hat{T}}^2 . \end{aligned}$$

K důkazu třetí nerovnosti potřebujeme druhé derivace. Podle pravidla o derivaci složené funkce bude

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \widehat{v}}{\partial \hat{x}_1 \partial \hat{x}_1} &= \frac{\partial}{\partial \hat{x}_1} \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{\partial F_1}{\partial \hat{x}_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \frac{\partial F_2}{\partial \hat{x}_1} \right) \\ &= \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \frac{\partial F_1}{\partial \hat{x}_1} \frac{\partial F_1}{\partial \hat{x}_1} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial F_2}{\partial \hat{x}_1} \frac{\partial F_1}{\partial \hat{x}_1} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2 \partial x_1} \frac{\partial F_1}{\partial \hat{x}_1} \frac{\partial F_2}{\partial \hat{x}_1} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \frac{\partial F_2}{\partial \hat{x}_1} \frac{\partial F_2}{\partial \hat{x}_1} \\ &= G_{11} G_{11} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + G_{11} G_{21} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + G_{11} G_{21} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2 \partial x_1} + G_{21} G_{21} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}. \end{aligned}$$

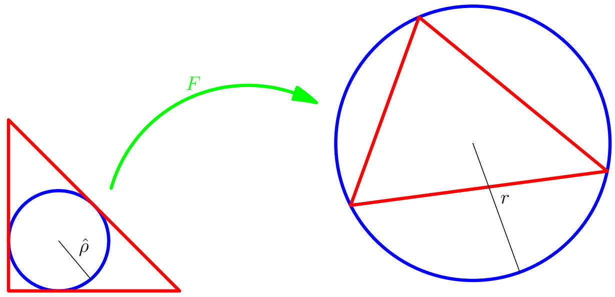
Obdobné vyjádření dostaneme pro další derivace 2. řádu. Vzhledem k tomu, že $|G_{ij}| \leqq \| \ G \ \|$ dostaneme sečtením a použitím Cauchyovy–Swarzovy nerovnosti, že

$$\left(\frac{\partial^2 \widehat{v}}{\partial \hat{x}_1^i \partial \hat{x}_1^j} \right)^2 \leqq 4 \ \| \ G \ \|^4 \sum_{i+j=2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^i \partial x_2^j} \right)^2 ,$$

$$\sum_{i+j=2} \left(\frac{\partial^2 \widehat{v}}{\partial \hat{x}_1^i \partial \hat{x}_2^j} \right)^2 \leqq 16 \ \| \ G \ \|^4 \sum_{i+j=2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^i \partial x_2^j} \right)^2 .$$

Dále

$$\begin{aligned} |\ \hat{v}\ |_{2,2,\hat{T}}^2 &= \int_{\hat{T}} \sum_{i+j=2} \left(\frac{\partial^2 \widehat{v}}{\partial \hat{x}_1^i \partial \hat{x}_1^j} \right)^2 d\hat{x} \\ &\leqq 16 \ \| \ G \ \|^4 \int_T \sum_{i+j=2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^i \partial x_1^j} \right)^2 \det(G^{-1}) dx \\ &= 16 \ \| \ G \ \|^4 | \det(G) \ |^{-1} | \ v \ |_{2,2,T}^2 . \end{aligned}$$



Obr. 6.4: Zobrazení z vepsané do opsané kružnice (viz lemma 6.9)

□

Lemma 6.9. *Nechť $\hat{\rho}, \hat{r}$ je poloměr vepsané a opsané kružnice referenčního konečného prvku $\hat{T}$. Nechť ρ, r, mají stejný význam pro T. Potom*

$$\| G \| \leqq \frac{r}{\hat{\rho}} \; a \; \| G^{-1} \| \leqq \frac{\hat{r}}{\rho}.$$

Důkaz. Nechť $x \in R^2$, $\| x \| \leqq 2\hat{\rho}$. Potom existují body p, q trojúhelníka $\hat{T}$ tak, že $x = p - q$. Potom Fp, Fq patří T, takže $\| Fp - Fq \| = \| Gp - Gq \| = \| Gx \| \leqq 2r$. Tedy $\| G \| \leqq \frac{r}{\hat{\rho}}$.

Obdobný výsledek získáme při uvažování inverzního zobrazení. □

Poznámka 6.10. Lze ukázat, že pro obecné $m \geqq 0$ existuje konstanta c tak, že platí

$$\begin{aligned} | \hat{v} |_{2,m,\hat{T}} &\leqq c \| G \|^m | \det(G) |^{-1/2} | v |_{2,m,T} \\ | v |_{2,m,T} &\leqq c \| G^{-1} \|^m | \det(G) |^{1/2} | \hat{v} |_{2,m,T} \end{aligned}$$

6.2.3 Diskretizační chyba pro regulární soubor triangulací

Pomocí transformace nyní převedeme aproximační výsledky z referenčního trojúhelníka na obecné trojúhelníky. Uvažujme soubor triangulací $\{\mathcal{T}_h\}$ tak, že pro každý trojúhelník $T \in \mathcal{T}_h$ je $r = r_T \leqq h$ poloměr kružnice opsané k T, $\rho = \rho_T$ je poloměr kružnice vepsané.

Soubor triangulací $\{\mathcal{T}_h\}$ pak nazveme regulárním, pokud existuje konstanta β tak, že

$$1 \leqq \frac{r}{\rho} \leqq \beta \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \text{ a } \forall \{\mathcal{T}_h\}.$$

Regulární soubor triangulací $\{\mathcal{T}_h\}$ vzniká postupným zjemňováním výchozí triangulace přičemž ale nesmí docházet k degeneraci tvaru trojúhelníků. Regularita systému bude garantována například podmínkou, že nejmenší úhel trojúhelníků T je stále větší než určitá mez $\alpha_0 > 0$[1]. Tato podmínka se objevila již v článku [30].

Uvažujme následující referenční trojúhelníkový prvek $\hat{T}$, pro který $\hat{r} = r_{\hat{T}}$ je poloměr kružnice opsané a $\hat{\rho} = \rho_{\hat{T}}$ je poloměr kružnice vepsané. Pro transformaci $F : \hat{T} \to T$ na libovolný trojúhelník $T \in \mathcal{T}_h \in \{\mathcal{T}_h\}$ pak bude

$$\| G \| \leqq \frac{h}{\hat{\rho}}, \quad \| G^{-1} \| \leqq \frac{\hat{r}}{\rho} \leqq \frac{\hat{r}}{\beta^{-1} h}.$$

Uvažujme soubor regulárních triangulací $\{\mathcal{T}_h\}$. Pro $T \in \mathcal{T}_h \in \{\mathcal{T}_h\}$ a $v \in H^2(T)$ pak můžeme uvažovat lineární interpolaci Π_T a bude

$$\begin{aligned} |v - \Pi_T v|_{2,1,T} &\leqq \| G^{-1} \| | \det(G) |^{1/2} | \hat{v} - \Pi_{\hat{T}} \hat{v} |_{2,1,\hat{T}} \\ &\leqq \| G^{-1} \| | \det(G) |^{1/2} c \, | \hat{v} |_{2,2,\hat{T}} \\ &\leqq c \, \| G^{-1} \| | \det(G) |^{1/2} \, 4 \, \| G \|^2 | \det(G) |^{-1/2} | v |_{2,2,T} \\ &\leqq 4c \, \| G^{-1} \| \| G \| \| G \| \, | v |_{2,2,T} \\ &\leqq 4c \frac{\hat{r}}{\hat{\rho}} \beta \frac{h}{\hat{\rho}} \, | v |_{2,2,T} = Ch \, | v |_{2,2,T}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|v - \Pi_T v\|_{2,0,T} &\leqq | \det(G) |^{1/2} \| \hat{v} - \Pi_{\hat{T}} \hat{v} \|_{2,0,\hat{T}} \\ &\leqq | \det(G) |^{1/2} c \, | \hat{u} |_{2,2,\hat{T}} \\ &\leqq | \det(G) |^{1/2} c \, \| G \|^2 | \det(G) |^{-1/2} | v |_{2,2,T} \\ &\leqq c \left(\frac{h}{\hat{\rho}} \right)^2 | v |_{2,2,T} = Ch^2 \, | v |_{2,2,T} \, . \end{aligned}$$

Pro $v \in H^2(\Omega)$, $h \leqq 1$ pak platí

$$\begin{aligned} \|v - \Pi_T v\|^2_{2,1,\Omega} &= \sum_T \left\{ \|v - \Pi_T v\|^2_{2,0,T} + |v - \Pi_T v|^2_{2,1,T} \right\} \\ &\leqq \sum_T C^2 h^4 \, | v |^2_{2,2,T} + C^2 h^2 \, | v |^2_{2,2,T} \leqq 2C^2 h^2 \, | v |^2_{2,2,\Omega} \, . \end{aligned}$$

Pro uzlovou interpolaci $\Pi_h : H^2(\Omega) \to U_h$ pak platí

$$\| v - \Pi_h v \|_{2,1,\Omega} \leqq ch \, | v |_{2,2,\Omega} \, .$$

To je výsledek, který potřebujeme pro použití Céova lemma k důkazu konvergence MKP. Céovo lemma dává výsledek, který je obdobou odhadu získaného pro jednorozměrné úlohy.

[1]Poloměr kružnice opsané je r, vepsané $\rho = 4r\sin(\frac{\alpha}{2})\sin(\frac{\beta}{2})\sin(\frac{\gamma}{2})$. Tedy $r/\rho \leqq \frac{1}{4}(\sin(\frac{\alpha_0}{2}))^{-3}$.

Věta 6.11. *Nechť $\{\mathcal{T}_h\}$ je regulární soubor triangulací, U_h je MKP prostor odpovídající $\mathcal{T}_h$, $u \in H^2(\Omega)$ je řešení okrajové úlohy a u_h je jeho aproximace z U_h, pak platí*

$$\| u - u_h \|_{1,\Omega} \leqq Ch \mid u \mid_{2,\Omega} .$$

Stejně jako v jednorozměrném případě můžeme dokázat, že pro H^2 regulární okrajovou úlohu bude konvergence v L_2 normě o řád vyšší,

$$\| u - u_h \|_{0,2,\Omega}^2 \leqq Ch^2 \mid u \mid_{2,2,\Omega} .$$

Celkově můžeme psát

$$\| u - u_h \|_{2,0} + h \| u - u_h \|_{2,1} \leqq ch^2 \mid u \mid_{2,2} \quad \text{pro } u \in H^2(\Omega). \tag{6.4}$$

Pokud je řešení okrajové úlohy pouze z $H^1(\Omega)$, pak opět dostaneme jen konvergenci $\| u - u_h \|_{2,0} \to 0$ pro $h \to 0$, nikoliv řád konvergence. Pro MKP s polynomy vyšších řádů můžeme získat vyšší řád konvergence za předpokladu příslušně zvýšené regularity řešení.

6.3 Aposteriorní odhad chyby

V analogii se situací pro jednorozměrné úlohy, se nyní budeme snažit odvodit o aposteriorní reziduální odhad pro energetickou normu chyby.

Uvažujeme bilineární formu (5.29), u a u_h značí přesné a MKP řešení okrajové úlohy s uvedenou bilineární formou. Zajímá nás norma chyby $e = u - u_h \in H_D^1(\Omega)$, uvažovat budeme energetickou normu $\|e\|_a = \sqrt{a(e,e)} \leqq \sqrt{1/m}\,\|e\|_{2,1}$. Pro testovací funkce $w \in V \subset H^1(\Omega)$ a $I_h w \in V_h \subset H^1(\Omega)$ dostaneme (obdobně jako v části 4.9).

$$
\begin{aligned}
a(e,w) = a(u-u_h,w) &= \int\limits_\Omega f w\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\Gamma_N} \hat\tau w\,\mathrm{d}s - \int\limits_\Omega \sum_{ij} k_{ij}\frac{\partial u_h}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \overbrace{\int\limits_\Omega \sum_{ij} k_{ij}\frac{\partial u_h}{\partial x_i}\frac{\partial I_h w}{\partial x_j}\mathrm{d}x - \int\limits_\Omega f(I_h w)\mathrm{d}x - \int\limits_{\Gamma_N}\hat\tau(I_h w)\mathrm{d}s}^{=0} \\
&= -\int\limits_\Omega \sum_{ij} k_{ij}\frac{\partial u_h}{\partial x_i}\frac{\partial (w-I_h w)}{\partial x_j}\mathrm{d}x + \int\limits_\Omega f(w-I_h w)\mathrm{d}x + \int\limits_{\Gamma_N}\hat\tau(w-I_h w)\mathrm{d}s \\
&= \sum_{E\in\mathcal{T}_h} -\int\limits_E \sum_{ij} k_{ij}\frac{\partial u_h}{\partial x_i}\frac{\partial (w-I_h w)}{\partial x_j}\mathrm{d}x + \sum_E \int\limits_E f(w-I_h w)\mathrm{d}x \\
&\qquad + \int\limits_{\Gamma_N}\hat\tau(w-I_h w)\mathrm{d}s \\
&= \sum_{E\in\mathcal{T}_h}\int\limits_E \left[\sum_{ij} k_{ij}\frac{\partial^2 u_h}{\partial x_i\partial x_j} + f\right](w-I_h w)\mathrm{d}x \\
&\quad - \sum_{E\in\mathcal{T}_h}\int\limits_{\partial E}\sum_{ij} k_{ij}\frac{\partial u_h}{\partial x_i}(w-I_h w)\cdot n_j\mathrm{d}s + \sum_{e\in\mathcal{E}_h,\,e\subset\Gamma_N}\int\limits_e \hat\tau(w-I_h w)\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

Poznamenejme, že součet členů ve druhém řádku je nulový, protože $I_h w \in V_h$ je testovací funkce pro MKP řešení u_h. Symbolem $\mathcal{E}_h$ značíme množinu všech stran trojúhelníků z $\mathcal{T}_h$ a integrály přes strany se objevují v posledních dvou členech nerovnosti. V případě jednorozměrných úloh vyšly tyto členy nulové, vzhledem k jednobodové hranici mezi elementy a použití uzlové interpolace I_h. U vícerozměrných úloh je situace odlišná, a proto definujeme residua jak uvnitř elementů tak i na jejich stranách:

$$
\begin{aligned}
R_E &= \left(\sum_{ij} k_{ij}\frac{\partial^2 u_h}{\partial x_i\partial x_j} + f\right)_E && \text{pro } E\in\mathcal{T}_h, \\
r_e &= \left(\hat\tau - \frac{\partial u_h}{\partial n_K}\right)_e && \text{pro } e\in\mathcal{E}_h,\ e\subset\Gamma_N, \\
r_e &= \left[\frac{\partial u_h}{\partial n_K}\right]_e && \text{pro } e\in\mathcal{E}_h,\ e\not\subseteq\Gamma_N.
\end{aligned}
$$

V definici r_e se objevuje skok v toku (derivaci podle konormály). V případě $K = I$ zde uvažujeme skoky v derivaci podle normály. Pokud $e\in\mathcal{E}_h$, $e\not\subseteq\Gamma_N$, $e\subset T_1\cap T_2$

a n_{T_1} a n_{T_2} je vnější normála k T_1 resp. T_2, potom

$$\left[\frac{\partial u_h}{\partial n_K}\right]_e = \frac{\partial u_h}{\partial n_K}|_{T_1} - \frac{\partial u_h}{\partial n_K}|_{T_2} = (K\nabla u_h|_{T_1} - K\nabla u_h|_{T_2})\, n_{T_1}$$
$$= (K\nabla u_h|_{T_2} - K\nabla u_h|_{T_1})\, n_{T_2}.$$

Poznamenejme, že pokud zaměníme pořadí T_1 a T_2 a v definici skoku bereme opět normálu k prvnímu trojúhelníku, potom se skok nezmění. Pomocí rezidují zapíšeme

$$a(e,w) = \sum_{E\in\mathcal{T}_h} \int_E R_E\,(w - I_h w)\;\mathrm{d}x + \sum_{e\in\mathcal{E}_h} \int_e r_e\,(w - I_h w)\;\mathrm{d}s,$$

takže

$$\begin{aligned} |\ a(e,w)\ | \ &\leqq \sum_{E\in\mathcal{T}_h} \|\ R_E\ \|_{2,0,E} \cdot \|\ w - I_h w\ \|_{2,0,E} \\ &+ \sum_{e\in\mathcal{E}_h} \|\ r_e\ \|_{2,0,e} \cdot \|\ w - I_h w\ \|_{2,0,e} \end{aligned}$$

Nyní potřebujeme odhad $\|\ w - I_h w\ \|_{2,0,E}$ a $\|\ w - I_h w\ \|_{2,0,e}$. V případě jednorozměrné úlohy je $H^1 \subset C^0$, takže jsme mohli vzít $I_h w$ jako uzlovou interpolaci w a použít odhad $\|\ w - I_h w\ \|_{2,0,E} \leqq h\,\|w\|_{2,1}$ viz (4.25). U vícerozměrných úloh bychom mohli předpokládat $w \in H^2$ a použít lokální interpolaci, pokud bychom uměli dokázat obdobný odhad.

Je však také možno zůstat u $w \in H^1$ a uvažovat I_h jako nelokální operátor, tedy operátor nevyužívající bodové hodnoty w. Možností volby takového operátoru je více, např. Clemensova interpolace funkce z H^1 nebo L_2-projekce $H^1 \to V_h$, viz např. [6]. Pro Clemensovu interpolaci I_h^C, je

$$I_h^C v = \sum_{x_i\in\mathcal{T}_h} v_i \phi_i, \quad \text{kde } v_i = \frac{1}{|\omega_i|}\int_{\omega_i} v\,\mathrm{d}x \text{ pro } x_i \notin \Gamma_D,\ \ v_i = 0 \text{ pro } x_i \in \Gamma_D, \tag{6.5}$$

kde $v \in H^1(E)$, ϕ_i jsou uzlové bázové funkce U_h, $\omega_i = \cup\{E \in \mathcal{T}_h :\ x_i \in E\}$. Pro $E \in \mathcal{T}_h$ označme $\tilde{E} = \cup\{\omega_i :\ x_i \in E\}$ označující sjednocení všech trojúhelníků z $\mathcal{T}_h$, které mají s E společný alespoň jeden bod, pak platí

$$\|\ v - I_h v\ \|_{2,0,E} \ \leqq\ C h_E \ \|\ v\ \|_{2,1,\tilde{E}} \tag{6.6}$$
$$\|\ v - I_h v\ \|_{2,1,E} \ \leqq\ C\ \|\ v\ \|_{2,1,\tilde{E}} \tag{6.7}$$
$$\|\ v - I_h v\ \|_{2,0,e} \ \leqq\ C h_E^{1/2}\ \|\ v\ \|_{2,1,\tilde{E}} \quad \text{kde } e \in \mathcal{E}_h \text{ je strana } E. \tag{6.8}$$

Podrobnosti k (6.6), (6.7) lze najít v [6]. Nerovnost (6.8) lze pak snadno dostat z předchozích dvou odhadů pomocí věty o stopách (5.32).

S využitím uvedených odhadů dostaneme

$$
\begin{aligned}
\mid a(e,w) \mid &\leqq C \left\{ \sum_{E\in\mathcal{T}_h} h_E \parallel R_E \parallel_{2,0,E} \parallel w \parallel_{2,1,\widetilde{E}} + \sum_{e\in\mathcal{E}_h} h_E^{1/2} \parallel r_e \parallel_{2,0,e} \parallel w \parallel_{2,1,\widetilde{E}} \right\}^{1/2} \\
&\leqq C \left\{ \sum_{E\in\mathcal{T}_h} h_E^2 \parallel R_E \parallel_{2,0,E}^2 + \sum_{e\in\mathcal{E}_h} h_E \parallel r_e \parallel_{2,0,e}^2 \right\}^{1/2} \\
&\qquad \times \left\{ \sum_{E\in\mathcal{T}_h} \parallel w \parallel + \sum_{e\in\mathcal{E}_h} \parallel w \parallel_{2,1,\widetilde{E}}^2 \right\}^{1/2} \\
&\leqq C \left\{ \sum_{E\in\mathcal{T}_h} \left[h_E^2 \parallel R_E \parallel_{2,0,E}^2 + h_E \parallel r_e \parallel_{2,0,\partial E}^2 \right] \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{E\in\mathcal{T}_h} 4 \parallel w \parallel_{2,1,\widetilde{E}}^2 \right\}^{1/2} \\
&\leqq c \left\{ \sum_{E\in\mathcal{T}_h} \eta_E^2 \right\}^{1/2} \parallel w \parallel_a = \eta \parallel w \parallel_a ,
\end{aligned}
$$

kde

$$
\eta = \left\{ \sum_{E\in\mathcal{T}_h} \eta_E^2 \right\}^{1/2}, \quad \eta_E = \left\{ h_E^2 \parallel R_E \parallel_{2,0,E}^2 + h_E \parallel r_e \parallel_{2,0,\partial E}^2 \right\}^{1/2}.
$$

Platí

$$
\|e\|_a = \sup\nolimits_{w\neq 0} \frac{a(e,w)}{\parallel w \parallel_a} \leqq \eta,
$$

takže η je celkový estimátor chyby, η_E jsou lokální indikátory chyby. Tyto indikátory obsahují skoky v normálových derivacích na stranách elementů. Tyto skoky se objevují i v řadě dalších estimátorů.

Mimo residuální odhad můžeme obdobně jako v jednorozměrném případě použít i odhady založené na průměrování derivací, hierarchické odhady založené na zjemňování sítě či odhady využívající duální principy.

Hierarchické odhady

Uvažujme opět MKP řešení u_ha $u_{h/2}$ spočtené při použití MKP dělení $\mathcal{T}_h$ a $\mathcal{T}_{h/2}$, kde druhé dělení vznikne z prvního rozdělením prvků. Díky tomu bude $V_h \subset V_{h/2}$. Je opět otázkou zda

$$
\eta_H = \parallel u_{h/2} - u_h \parallel \sim \parallel u - u_h \parallel
$$

bude vhodným hierarchickým estimátorem chyby (pro integrální normu můžeme rozdělením normy na příspěvky prvků dostat i indikátory chyby η_E). Obdobně jako v jednorozměrném případě se ukáže, že pokud platí saturační podmínka

$$
\parallel u - u_{h/2} \parallel \leqq \beta \parallel u - u_h \parallel, \text{ resp. } \parallel u - u_{h/2} \parallel_a \leqq \beta \parallel u - u_h \parallel_a, \ \beta < 1,
$$

potom bude $\eta_H = \| u_{h/2} - u_h \|$ resp. $\eta_H = \| u_{h/2} - u_h \|_a$ spolehlivý a efektivní estimátor.

Problémem je ale cena estimátoru η_H. Obdobně jako v jednorozměrném případě lze vytvořit hierarchický rozklad $U_{h/2} = U_h \oplus W_{h/2}$, ale prostory U_h a $W_{h/2}$ budou sice tvořit direktní součet $U_{h/2}$, ale již nebudou a-ortogonální. Bude tedy opět $u_{h/2}$ korekcí u_h, ale výpočet korekce již nebude možné provést izolovaně jen na $W_{h/2}$ a navíc řešením soustavy s diagonální maticí. Použití hierarchické báze tedy vede k MKP soustavě

$$\begin{bmatrix} A_{h,h} & A_{h,h/2} \\ A_{h/2,h} & A_{h/2,h/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_h \\ \mathbf{u}_{h/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_h \\ \mathbf{b}_{h/2} \end{bmatrix},$$

ale $A_{h,h/2} \neq 0$, $A_{h/2,h} \neq 0$, $A_{h/2,h/2}$ není diagonální matice, i když je stále maticí dobrých vlastností.

Z uvedených důvodů, lze navrhnout použití zjednodušeného výpočtu $w_{h/2}$ i pro vícerozměrné úlohy. To znamená že

$$w_{h/2} \in W_{h/2}: \; a(u_h + w_{h/2}, v) = b(v) \quad \forall v \in W_{h/2} \quad \text{a } \bar{\eta} = \left\| w_{h/2} \right\|_a . \tag{6.9}$$

Máme tedy $\bar{u}_{h/2} = u_h + w_{h/2}$, s korekcí počítanou jen s pomocí $W_{h/2}$ (řešením soustavy s maticí $A_{h/2,h/2}$) jako aproximaci přesného řešení $u_{h/2} = \hat{u}_h + \hat{w}_{h/2}$. Platí

Věta 6.12.

$$\| u - u_h \|_a \leqq \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)(1-\gamma^2)}} \| w_{h/2} \|_a,$$

kde $w_{h/2}$ *je počítáno podle* (6.9), $\beta < 1$ *je konstanta ze saturačního předpokladu,* $\gamma < 1$ *je konstanta ze zesílené Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti,*

$$\gamma = inf \left\{ c : \; |a(u, v)| \leqq c \, \|u\|_a \, \|v\|_a \;\; \forall u \in U_h, \;\; v \in W_{h/2} \right\}.$$

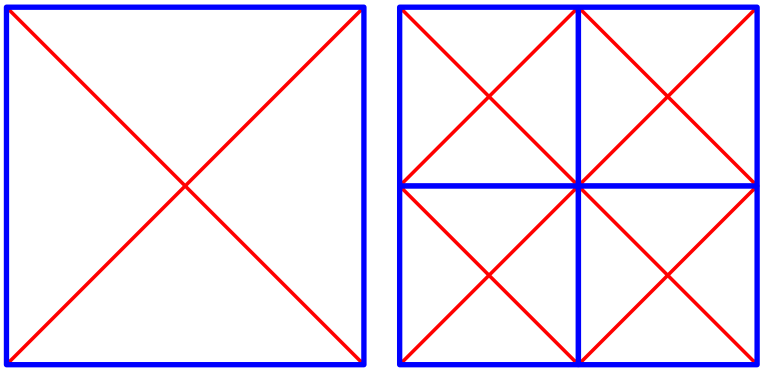
Důkaz. Tak jako v jednorozměrném případě

$$\| u - u_h \|_a^2 = \| u - u_{h/2} \|_a^2 + \| u_{h/2} - u_h \|_a^2 \leqq \beta^2 \| u - u_h \|_a^2 + \| u_{h/2} - u_h \|_a^2 . \tag{6.10}$$

Potřebujeme však ještě odhadnout $\| u_{h/2} - u_h \|_a$ pomocí $\| \bar{u}_{h/2} - u_h \|_a = \| w_{h/2} \|_a$.

Máme

$$\begin{aligned} \| u_{h/2} - u_h \|_a^2 &= a(u_{h/2} - u_h, \, u_{h/2} - u_h) = a(u_{h/2} - u_h, \, \hat{u}_h + \hat{w}_{h/2} - u_h) \\ &= a(u_{h/2} - u_h, \, \hat{w}_{h/2}) = a(u_{h/2} - u_h - w_{h/2}, \, \hat{w}_{h/2}) = a(w_{h/2}, \, \hat{w}_{h/2}), \end{aligned}$$



Obr. 6.5: Výchozí sít $\mathcal{T}_h$ (vlevo) a zjemnění $\mathcal{T}_{h/2}$ (vpravo) k příkladu 6.13.

protože $a(u_{h/2}, \hat{w}_{h/2}) = b(\hat{w}_{h/2}) = a(u_h + w_{h/2}, \hat{w}_{h/2})$. Dále,

$$\begin{aligned} a(w_{h/2}, \hat{w}_{h/2}) &= \| u_{h/2} - u_h \|_a^2 = \| \hat{u}_h + \hat{w}_{h/2} - u_h \|_a^2 \\ &= \| \hat{w}_{h/2} \|_a^2 + 2a(\hat{w}_{h/2}, \hat{u}_h - u_h) + \| \hat{u}_h - u_h \|_a^2 \\ &\geqq \| \hat{w}_{h/2} \|_a^2 - 2\gamma \| \hat{w}_{h/2} \|_a \| \hat{u}_h - u_h \|_a + \| \hat{u}_h - u_h \|_a^2 \\ &= (1-\gamma^2) \| \hat{w}_{h/2} \|_a^2 + \big(\gamma \| \hat{w}_{h/2} \|_a - \| \hat{u}_h - u_h \|_a\big)^2 \\ &\geqq (1-\gamma^2) \| \hat{w}_{h/2} \|_a^2, \end{aligned}$$

$$(1-\gamma^2) \| \hat{w}_{h/2} \|_a^2 \leqq a(w_{h/2}, \hat{w}_{h/2}) \leqq \| \hat{w}_{h/2} \|_a \| w_{h/2} \|_a$$

a tedy

$$(1-\gamma^2) \| \hat{w}_{h/2} \|_a \leqq \| w_{h/2} \|_a \,.$$

Tím dostáváme

$$\| u_{h/2} - u_h \|_a^2 = a(w_{h/2}, \hat{w}_{h/2}) \leqq \frac{1}{1-\gamma^2} \| w_{h/2} \|_a^2 \tag{6.11}$$

a celkově z (6.10) a (6.11) plyne tvrzení věty. □

Poznamenejme ještě, že v případě lineárních trojúhelníkových prvků lze dokázat odhad $\gamma \leqq \sqrt{3/4}$ pro případ, že $\mathcal{T}_{h/2}$ vznikne rovnoměrným dělením $\mathcal{T}_h$ (každý prvek na čtyři shodné trojúhelníky). Přitom můžeme uvažovat libovolný tvar trojúhelníků z $\mathcal{T}_h$ a libovolnou anizotropii K, pouze předpokládáme, že K je konstantní na trojúhelnících z $\mathcal{T}_h$, viz [3]. Hierarchické rozklady také vedou k efektivním iteračním metodám řešení.

Příklad 6.13. Saturační vlastnost opět nemusí vždy platit, viz diskuze v jednorozměrném případě. Zajímavý protipříklad lze najít v [7]. Uvažujme úlohu $-\triangle u = 1$ v $\Omega = (0,1)^2$ a $u = 0$ na $\delta\Omega$ a diskretizaci znázorněnou na obr. 6.5. Platí $u_{h/2} = u_h$.

Hierarchické odhady lze vhodně propojit s adaptivním zjemňováním sítě a speciálními hierarchickými technikami řešení, viz [2, 3, 4].

Zhlazení (průměrování) derivací

Použijeme estimátor chyby η_S ve tvaru

$$\eta_S^2 = \int\limits_\Omega \|g_h - \nabla u_h\|^2 \,\mathrm{d}x \sim \int\limits_\Omega K(\nabla u - \nabla u_h) \cdot (g_h - \nabla u_h)\,\mathrm{d}x = \| u - u_h \|_a^2,$$

kde g_h je aproximace derivace řešení získaná zhlazením ∇u_h. Např. technika zavedená Zienkiewiczem a Zhu, používá

$$g_h = A_h^{ZZ} u_h = \sum_{x_i \in \mathcal{T}_h} \mathbf{g}_i \phi_i, \quad \text{kde } \mathbf{g}_i = \frac{1}{|\omega_i|} \int\limits_{\omega_i} \nabla u_h \,\mathrm{d}x$$

a ϕ_i jsou uzlové bázové funkce U_h, $\omega_i = \cup\{E \in \mathcal{T}_h : \ x_i \in E\}$. Poznamenejme, že hlazenou derivaci lze rovněž využít jako zlepšený výstup výpočtu (postprocessing). Použití L_2-projekce je opět možnou, ale poněkud drahou alternativou.

Uvedený text by měl sloužit k upozornění na základní myšlenky zavedení a využití aposteriorních odhadů. Analýza jejich spolehlivosti a efektivity je obsahem desítek článků i speciálních knih, viz např. [7, 9, 23, 1, 4].

6.4 Jiné typy konečných prvků

Zatím jsme popisovali použití lineárních trojúhelníkových prvků, jejichž použití lze prvně nalézt v pionýrském článku R. Couranta z roku 1943 [13]. Pro trojúhelníkové prvky však lze použít i polynomy vyšších řádů, případně se snažit o konstrukci prvků s vyšší C^1 spojitostí. Lze také uvažovat prvky obdélníkové s polynomy vznikajícími součinem jednorozměrných lineárních či kvadratických polynomů. Tyto prvky lze technikou referenčního prvku zobecnit na obecné čtyřúhelníkové prvky. Tuto techniku lze také využít k zavedení křivočarých (izoparametrických) prvků. Lze také uvažovat kombinace obdélníkových a trojúhelníkových prvků a podobně. Obdobné konstrukce lze také provádět u úloh na třírozměrných oblastech. Pro detaily odkazujeme na bohatou literaturu o MKP.

6.5 Řešení MKP soustav

Jde o řešení soustavy lineárních algebraických rovnic

$$A_h \mathbf{u} = \mathbf{b}_h,$$

kde pro úlohy vedení tepla (ale také např. elasticity) je matice symetrická a většinou pozitivně definitní (vyjímkou je např. čistě Neumannova úloha pro rovnici vedení tepla, kdy je soustava singulární a pozitivně semidefinitní).

Důležitou vlastností je také řídkost matice. Oproti jednorozměrným úlohám není matice třídiagonální, ale při vhodném uspořádání pásová.

Definice 6.14. Matice $A_h = (a_{ij})$ dimenze $n \times n$ je pásová, tedy existuje parametr $m < n$ tak, že

$$a_{ij} = 0 \quad \text{pro} \quad |j - i| > m.$$

Pásovost matice lze využít při řešení Gaussovou eliminací, protože při eliminaci není potřeba měnit nulové prvky mimo pás matice. Tak dostaneme algoritmus, který řeší soustavu se složitostí $O(nm^2)$ operací. V případě pravidelné pravoúhlé sítě bude $m = \sqrt{n}$ a výpočetní složitost bude $O(n^2)$.

Pro jemnou diskretizaci bude výpočetní složitost velká (což platí ještě mnohem více pro úlohy na třírozněrných oblastech). To vede k zájmu o iterační metody, např. [2, 6, 14], kterým je také věnován navazující přednáškový kurz.

Kapitola 7

Nekonformní metoda konečných prvků

Standardní konformní MKP používá funkce po částech polynomiální a spojité. Tato spojitost je nutná a postačující k tomu, aby MKP prostor patřil do příslušného Sobolevova prostoru, který se vyskytuje ve variační formulaci. Pokud podmínku spojitosti narušíme, dopouštíme se jednoho z variačních přestupků popsaných Strangem [24].

Přesto je, jak dále ukážeme, možné používat i nespojité MKP prostory. Navíc, tyto prostory mohou mít i lepší aproximační vlastnosti. Nejjednodušší Crouzeixovy--Raviartovy nekonformní konečné prvky jsou trojúhelníkové a používají lineární polynom na trojúhelnících. Jejich výhoda se projeví např. při řešení úloh pružnosti s objemově skoro nestlačitelným materiálem (Poissonovo číslo blízké 1/2), kdy Courantovy prvky nemusí aproximovat dobře vzhledem k tzv. uzamčení (locking efect).

7.1 Nekonformní MKP

Pro jednoduchost řešme okrajovou úlohu na Ω s homogenní Dirichletovou podmínkou na celé hranici $\partial\Omega$, tj.

$$u \in U = V: \ a(u,v) = b(v) \quad \forall v \in V,$$

$$a(u,v) = \int_\Omega \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} dx, \quad b(v) = \int_\Omega f v dx, \quad f \in L_2(\Omega), \quad U = V = H_0^1(\Omega).$$

Pro použití MKP definujme triangulaci $\mathcal{T}_h$ oblasti Ω stejným způsobem jako pro Courantovy prvky. Uvažujme ale odlišný MKP prostor, a to

$$S_h = \{v \in L_2(\Omega): \ v\,|_T \in P_1, \ v \ \text{ je spojitá ve středech stran } T \in \mathcal{T}_h\},$$

$$V_h = \{v \in S_h: \ v \text{ je nulová ve středech stran na } \partial\Omega\}.$$

Protože jsme nedodrželi podmínku spojitosti funkce na rozhraní mezi elementy, nebude splněna podmínka konformiy $S_h \not\subseteq H^1(\Omega)$. Na S_h také není definována bilineární forma a a pro definici nekonformní MKP metody musíme použít bilineární formu definovanou po elementech (rozbitou na elementy), tedy

$$a_h(u,v) = \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \int_T \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} dx.$$

Jde o bilineární formu definovanou na $H^1(\Omega)+S_h$. MKP řešením výše uvedené úlohy nyní nazveme

$$u_h \in V_h: \;\; a_h(u_h, v_h) = b(v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

Na rozdíl od konformní MKP jsme nuceni pracovat s rozbitou (broken) bilineární formou a_h.

7.2 Konvergence, Strangovo lemma

V důkazu konvergence můžeme opět využívat regularitu řešení, tedy předpokládáme $u \in H^2(\Omega)$. Vzhledem k variačnímu přestupku nahrazení bilineární formy a pomocí a_h nemůžeme použít Céovo lemma, ale použijeme obecnější Strangovo lemma.

Lemma 7.1. *<u>Strangovo lemma</u>. Nechť okrajová úloha splňuje předpoklady Laxovy--Milgramovy věty (3.31) a (3.32) a navíc existují kladné konstanty m_0, M_0 (nezávislé na h) tak, že pro rozbitou bilineární formu a_h a rozbitou H^1-normu*

$$\| u \|_{\check{e},1,h} = \{\sum_{T\in\mathcal{T}_h} \| u \|^2_{2,1,T}\}^{1/2}$$

platí

$$\begin{aligned} m_0 \| v \|_{2,1,h} &\leqq a_h(u,v) && \forall v \in V_h, \\ | a_h(u,v) | &\leqq M_0 \| u \|_{2,1,h} \| v \|_{2,1,h} && \forall u,v \in V_h. \end{aligned}$$

Nechť u je slabé řešení okrajové úlohy, u_h je nekonformní MKP řešení, t.j.

$$\begin{aligned} u \in V: &\quad a(u,v) = b(v) && \forall v \in V, \\ u_h \in V_h: &\quad a_h(u_h,v_h) = b(v_h) && \forall v_h \in V_h. \end{aligned}$$

Potom platí

$$\| u - u_h \|_{2,1,h} \leqq c \left\{ \inf_{w_h\in V_h} \| u - w_h \|_{2,1,h} + \sup_{v_h \in V_h} \frac{| a_h(u,v_h) - b(v_h) |}{\| v_h \|_{2,1,h}} \right\}.$$

Poznámka 7.2. Ve výše uvedeném odhadu se vyskytuje aproximační člen (jako u Céova lemma) a člen vyjadřující konsistentnost rozbité bilineární formy s řešenou úlohou.

S využitím operátoru interpolace a průměrování na stranách trojúhelníků lze dokázat obdobu (6.4).

$$\| u - u_h \|_{2,0} + h \| u - u_h \|_{2,1,h} \leqq ch^2 \mid u \mid_{2,2} \quad \text{pro } u \in H^2(\Omega).$$

Podrobnosti lze nalézt např. v [6].

Kapitola 8

Závěr

V textu a příslušném kurzu ukazujeme příklady matematických modelů fyzikálních procesů i numerických metod, které jsou nutné pro využití těchto modelů k porozumění technickým problémům, k posouzení a optimalizaci návrhů technických zařízení apod. Předpokládáme, že čtenářem může být uživatel metody konečných prvků pracující se specifickým software, ale i matematik navrhující použití metody v nových oblastech aplikací a snažící se porozumět třeba nečekanému chování metody.

V učebním textu se nesnažíme postihnout co nejvíce materiálu, ale ukázat hlavní myšlenky. V popisu a analýze MKP jsme se kvůli rozsahu omezili jen na skalární symetrické eliptické problémy, stranou zůstaly úlohy s konvekcí, problémy vlastních čísel, úlohy nelineární a další. Mnoho informací k těmto úlohám čtenář najde v citované literatuře. Také jsme nerozvíjeli otázku řešení vznikajících algebraických soustav, což je obsahem dalšího navazujícího kurzu s názvem Iterační metody (a možná i budoucí další části tohoto učebního textu).

K realizaci matematického modelování s použitím metody konečných prvků existuje řada software, který lze provozovat na různých typech počítačů. Může jít o běžně dostupné osobní počítače, ale také o speciální výpočetní systémy obsahující mnoho tisíc procesorů, což je nyní velmi aktuální vzhledem k superpočítačovému projektu IT4Innovations (http://www.it4i.cz). Výběr software závisí na složitosti a náročnosti řešené úlohy. Ve cvičení, které patří k našemu kurzu, ale i k výzkumu chování metody se používá výpočetní prostředí MATLAB. V tomto prostředí také realizujeme jednoduché programy, které nám dají představu o struktuře složitějších softwarových produktů.

Použití software pro matematické modelování může být poměrně snadné a uživatel může snadno získat řadu působivých výstupů často v názorné grafické formě. Stavět na těchto výstupech důležitá rozhodnutí a řešení náročných inženýrských problémů však může být velmi nebezpečné, pokud si uživatel neuvědomuje zjednodušení přijatá při formulaci matematického modelu a možnost různých zdrojů chyby v přibližném řešení (idealizace přijatá při formulaci modelu, diskretizační chyba, přibližné řešení algebraických rovnic, počítačová aritmetika, důvěryhodnost software).

Náš kurz má za úkol připravit uživatele, pro něhož nebude MKP software černou skříňkou, ale který si bude uvědomovat možná úskalí, ale na druhé straně i možnosti modelování. Tyto možnosti jsou dnes opravdu široké. Použití matematického modelování je pružnější a levnější než fyzikální experimenty a postupné sbírání zkušeností. Umožňuje výrazně zkracovat vývoj nových výrobků, konstrukcí a zařízení, optimalizovat návrhy a modelovat děje, které jinými prostředky předpovědět nelze.

Závěrem ještě připomeňme, že naše modely předpokládají děje ve spojitém prostředí (kontinuu). Skutečnost je ovšem nespojitá a v poslední době se začínají ve větší míře využívat i modely, které se týkají nespojitého prostředí. Tyto modely jsou schopné zodpovědět některé specifické otázky, které pak lze využít při modelování ve větších měřítcích, kdy je spojitá idealizace prostředí přípustná. Nové trendy modelování zahrnují rozsáhlé úlohy, možnost uvažovat i složité nelineární chování ve fyzikálních vztazích, uvažovat vzájemné ovlivnění různých procesů (multifyziku) a respektovat vzájemné ovlivnění mezi více škálami měřítek (multiscale).

K hlubšímu studiu pak může sloužit níže uvedená literatura i mnohé zdroje dostupné na internetu.

Rejstřík

Literatura

[1] M. Ainsworth and J.T. Oden, A posteriori error estimation in finite element analysis, Wiley and Sons, New York, 2000

[2] O. Axelsson, V.A. Barker: Finite Element Solution of Boundary Value Problems. Orlando, FLorida, Academic Press 1984, 432 pp.; Nové vydání v sérii Clasics in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, 2001

[3] O. Axelsson, R. Blaheta: Two simple derivations of universal bounds for the C.B.S. inequality constant. Applications of Mathematics. Vol. 49, No. 1, 2004, pp. 57-72.

[4] I. Babuška, W.C. Rheinboldt, Error Estimates for Adaptive Finite Element Computations,. SIAM J Numer. Anal 15, (1978),736- 754

[5] R.E. Bank, Hierarchical bases and the finite element method. Acta Numerica, 5 , pp 1-43, Cambridge University Press 1996.

[6] D. Braess, Finite Elements. Theory, Fast Solvers and Applications in Solid Mechanics. Cambridge University Press 2001.

[7] S.C. Brenner, C. Carstensen, Finite Element Method. In: E. Stein, R. de Borst and T.J.R. Hughes eds., Encyclopedia of Computational Mechanics, J. Wiley, 2004, pp. 73–118.

[8] S.C. Brenner, L.R. Scott: The Mathematical Theory of Finite Element Methods. Berlin, Springer 2002.

[9] C. Carstensen and S. Bartels, Each averaging technique yields reliable a posteriori error control in FEM on unstructured grids. I: Low order conforming, nonconforming, and mixed FEM, Math. Comput. 71 (2002), pp. 945–969.

[10] P.G. Ciarlet, The Finite Element Method for Elliptic Problems, North--Holland, Amsterdam, 1978, 1979, 530 pp., Classics in Applied Mathematics, Vol 40, SIAM, Philadelphia, 2002

[11] R.D. Cook, Concepts and Applications of Finite Element Analysis, J. Wiley & Sons, New York, 1974, 1981, 1989, 2001, 537 pp.

[12] R.D. Cook, Finite Element Modeling for Stress Analysis J. Wiley & Sons, New York, 1995, 336 pp.

[13] R. Courant, Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations, Bull. Amer. Math. Soc., 49 (1943)

[14] H.C. Elman, D.J. Silvester and A.J. Wathen, Finite Elements and Fast Iterative Solvers with Applications in Incompressible Fluid Dynamics, Oxford University Press, Oxford 2005

[15] J. Franců, Miloš Zlámal - Zakladatel matematické teorie metody konečných prvků, VUTIUM Brno, 2006

[16] W. Hackbusch, Elliptic Differential Equations: Theory and Numerical Treatment. Springer, Berlin 1992

[17] J. Haslinger, Metoda konečných prvků pro řešení eliptických rovnic a nerovnic. Praha, Státní pedagogické nakladatelství 1980.

[18] C. Johnson, Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method, Cambridge University Press, New York, 1988, 276 pp.

[19] D. Lukáš, Matematické modelování elektromagnetických polí. Projekt Matematika pro inženýry 21 století, http://mi21.vsb.cz

[20] J. Nečas: Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques. Academia, Praha, 1967 and Masson et Cie, Editeurs, Paris, 1967. Anglický překlad Direct Methods in the Theory of Elliptic Equations Direct Methods in the Theory of Elliptic Equations, Springer Monographs in Mathematics 2012

[21] K. Rektorys, Variační metody v inženýrských problémech a problémech matematické fyziky. SNTL Praha 1974, Academia Praha, 1999.

[22] M. Renardy, R.C. Rogers, An Introduction to Partial Differential Equations. Springer NY 1993

[23] S. Repin, A Posteriori Estimates for Partial Differential Equations. Walter de Gruyter, Berlin 2008

[24] G. Strang, G.J. Fix, An Analysis of the Finite Element Method Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1973, 306 pp.

[25] E. Suli, Finite Element Methods for Partial Differential Equations http://users.comlab.ox.ac.uk/endre.suli/indexnew.html

[26] R.E. White, An Introduction to the Finite Element Method With Applications to Nonlinear Problems, J. Wiley & Sons, New York, 1985, 354 pp.

[27] O.C. Zienkiewicz, H. Cheung, The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics, McGraw Hill, New York, 1967, 1968, 1970

[28] O.C. Zienkiewicz, The Finite Element Method in Engineering Science, Book, McGraw-Hill (January 1971)

[29] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, Finite Element Method, Vol. 1, The Basis, Vol. 2, Solid Mechanics, Vol. 3, Fluid Dynamics, Butterworth Heinemann, London, 2000, 712 + 480 + 352 pp.

[30] M. Zlámal, On the finite element method, Numer. Math. 12(1968). 394-409