METODA KONEČNÝCH PRVKŮ VE STAVEBNÍ MECHANICE

Jiří Brožovský, Alois Materna

Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století* (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Jiří Brožovský, Alois Materna
METODA KONEČNÝCH PRVKŮ VE STAVEBNÍ MECHANICE

ISBN

Předmluva

Předkládaný učební text je určen zejména pro studenty Fakulty stavební VŠB–TU Ostrava v oborech „Konstrukce staveb“, „Dopravní stavby“ a „Průmyslové a pozemní stavitelství“ a ostatních příbuzných oborů na stavebních fakultách v České republice. Snažili jsme se jej vytvořit tak, aby navazoval na předchozí kurzy stavební mechaniky, statiky a pružnosti.

Autoři jsou velmi zavázáni Ing. Petru Konečnému, Ph.D. za poskytnutí cenných připomínek.

Tento i ostatní v rámci projektu *Matematika pro inženýry 21. století* připravované výukové materiály lze najít na stránkách http://mi21.vsb.cz/. Podívejte se na ně!

V Ostravě 19. července 2012 autoři

Obsah

Seznam obrázků

Kapitola 1

Úvod

1.1 Typy problémů ve stavební mechanice

Řada nosných konstrukcí pozemních i inženýrských staveb má charakter rovinných nebo prostorových rámů (rámové skelety, nosné mostní konstrukce apod.). Plošné nosné konstrukce se užívají zejména v podobě stropních konstrukcí, skořepin (zásobníky, chladící věže, některé méně běžné typy zastřešení). Za masivní je možné považovat některé části zděných konstrukcí (zděné pilíře) nebo přehradní hráze ve vodním stavitelství.

1.2 Výpočtové modely

Nejčastějším typem výpočtového modelu ve stavební praxi byla a dosud je rámová konstrukce. Vyplývá to jak z charakteru většiny běžných staveb pozemního i inženýrského stavitelství, tak z obvyklých postupů při posuzování bezpečnosti stavebních konstrukcí, které jsou většinou optimalizovány pro prutové výpočetní modely[1]

Jako plošné se konstrukce modelují méně často. Modelů desek a stěnodesek se využívá například při výpočtech některých typů mostních konstrukcí nebo stropní desky v pozemním stavitelství. Také řada geotechnických problémů se často řeší jako dvojrozměrná úloha.

Skořepinové konstrukce jako chladící věže nebo zásobníky se zpravidla modelují s využitím skořepinových výpočtových modelů. V minulosti častěji využívaný způsob výpočtu s využitím rotační symetrie není zpravidla vhodný, protože umožňuje jen velmi obtížně postihnout zatížení nerotačního charakteru (která jsou obvykle pro posouzení bezpečnosti konstrukce rozhodující).

[1] Připomeňme například způsob dimenzování a posuzování dlouhých železobetonových desek, kdy se pro vnitřní síly stanovují na fiktivním nosníku jednotkové šířky položeném ve směru kratšího rozměru desky.

1.3 Metoda konečných prvků

Metoda konečných prvků je obecná numerická metoda, která může být využita k řešení celé řady úloh. Kromě problémů mechaniky (statiky a dynamiky pevných a poddajných těles) se běžně využívá pro modelování proudění tekutin, pro úlohy vedení tepla, k analýze elektromagnetických polí a podobně.

Atraktivita metody vyplývá z její poměrně velké univerzálnosti a schopnosti popsat i značně komplikované a rozsáhlé problémy. Metoda je také velmi snadno algoritmizovatelná. K určitým nevýhodám patří poměrně velká výpočetní náročnost – metodu nelze prakticky použít bez výpočetní techniky, a to ani pro úlohy, které by byly jinou metodou řešitelné ručním výpočtem.

V dalším textu budou principy metody vysvětlovány na příkladu její aplikace pro úlohy statiky stavebních konstrukcí formou, která by měla být bližší inženýrskému pojetí mechaniky. Formálněji matematicky pojatý výklad je možné najít například v textu [44].

1.4 Energetické principy ve stavební mechanice

Klasické výpočetní metody ve statice stavebních konstrukcí [1] zpravidla vystačí se znalostí základních zásad mechaniky a pružnosti[2] (statické podmínky rovnováhy, Hookeův zákon, základní vztahy mezi posunutími a poměrnými deformacemi). Například k odvození deformační metody nejsou žádné další předpoklady ani vztahy potřebné.

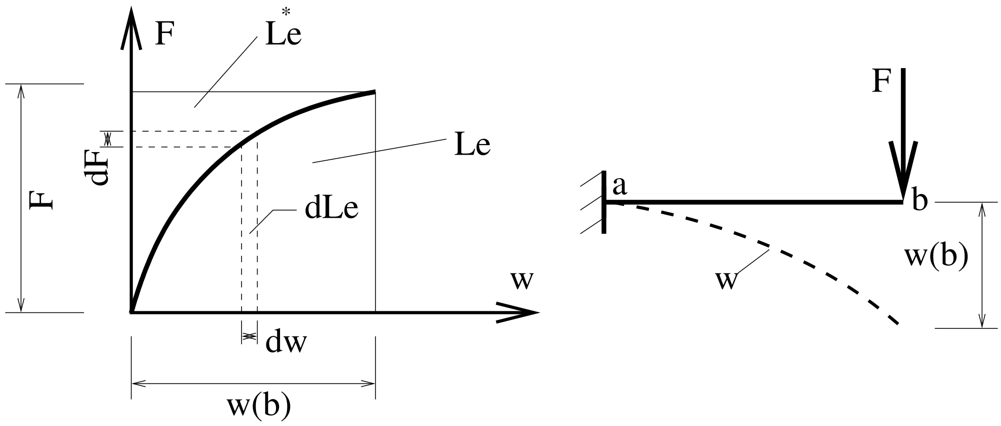
Uvedené postupy jsou velmi dobře použitelné pro prutové výpočtové modely (nosníky, rámy, rošty). U plošných a prostorových výpočetových modelů je ovšem není možné použít (například k odvození deformační metody je potřebné pracovat se vztahy teorie pružnosti, které lze snadno odvodit pro pruty, nikoli však už pro objekty vícerozměrné). Proto je nutné využít i jiných vztahů – v mechanice se jako výhodné její pracovat s potenciální energií konstrukce.

1.4.1 Potenciální energie vnějších sil

Uvažujme konzolu zatíženou staticky působící silou podle obrázku 1.1. Podle zásad statiky vyvolá zatížení silou $\mathbf{F}$ deformaci (průhyb) konstrukce. Označme velikost průhybu v místě pod silou $\mathbf{F}$ jako $\mathbf{w}$.

[1] Zejména deformační metoda [45]. Staticky určité prutové konstrukce je pak možné řešit pouze s využitím statických podmínek rovnováhy.

[2] Výjimkou jsou metoda jednotkových sil a tzv. silová metoda, které vyžadují práci s pojmy jako virtuální zatížení a deformace, virtuální práce.



Obr. 1.1 Vztah mezi zatížením a deformací

Můžeme předpokládat, že průhybu w bylo dosaženo postupně v důsledku působení síly F. Tato síla tedy působila na dráze w. Ze zásad elementární fyziky pak vyplyne, že síla F působící na dráze F vykonala práci L_e.

Na dílčí části dráhy dw musela síla F vykonat práci $d\ L_e$:

$$d\ L_e = F(w)\ d\ w. \tag{1.1}$$

Práci vykonanou na celé dráze je možné získat integrací:

$$L_e = \int_0^w F(w)\ d\ w. \tag{1.2}$$

Práci L_e odpovídá plocha pod křivkou na obrázku 1.1.

V dalším textu bude potřebná i *doplňková* práce L_e^*, která je na obrázku 1.1 zobrazena nad křivkou. Ta je na obrázku 1.1 zakreslena jako plocha nad křivkou.

Zřejmě platí:

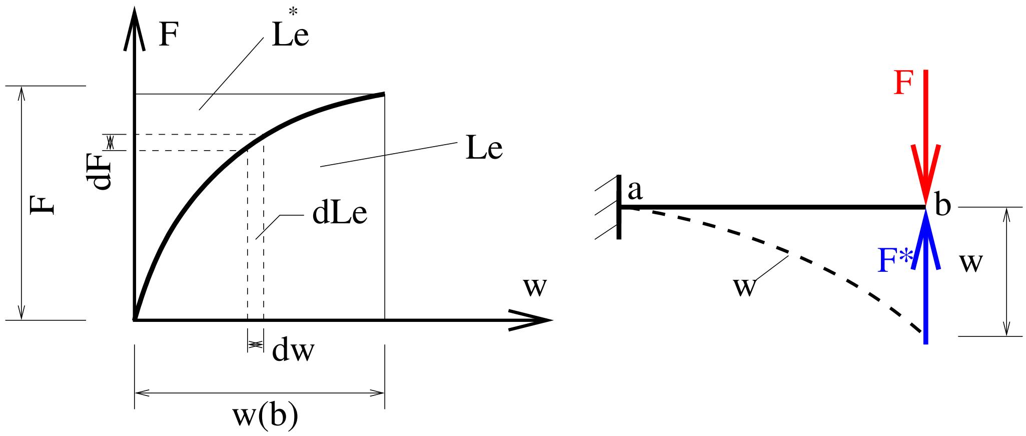
$$L_e + L_e^* = F\ w(b). \tag{1.3}$$

Poznámka 1.1. Pokud bychom dílu F považovali za výsledký účinek břemene o hmotnosti m,[1] mohli bychom součin $F\ w$ pokládat za změnu potenciální energie tohoto břemene, ke které došlo kvůli změně polohy břemene o výšku w.[2]

Toho můžeme využít k ilustraci smyslu doplňkové práce L_e^*. Uvažujme sílu F^* podle obrázku 1.2, která na počátku zatěžování působí proti stejně velké síle F. Bude-li se síla F^* v průběhu zatěžování zmenšovat, pak bude průhyb pod silou F narůstat až do konečné hodnoty $w(b)$. Síla F^* (kterou můžeme povazžovat za „brzdící sílu“) tedy zřejmě vykoná práci L_e^*.

[1] Tedy za tíhovou sílu $F = m\ g$, kde g je gravitační zrychlení a m je hmotnost břemene.

[2] Za předpokladu, že potenciální energie se stanoví $P_e = h\ m\ g$, kde h je výška od zemského povrchu.



Obr. 1.2 K výkladu doplňkové práce L_e^*

Pro úlohy stavební mechaniky je důležitější méně obecný případ, kdy vztah mezi zatížením a deformací konstrukce je lineární (obrázek 1.3). V tomto případě je možné vztah (1.2) přepsat do tvaru:

$$L_e = \frac{1}{2} F\ w, \tag{1.4}$$

který se někdy označuje jako Clapeyronova věta.

Dokonale pružné těleso akumuluje potenciální energii odpovídající vykonané (přetvárné) práci. Tuto energii je možné nazvat **potenciální energie vnějších sil** Π_e:

$$\Pi_e = -(L_e + L_e^*). \tag{1.5}$$

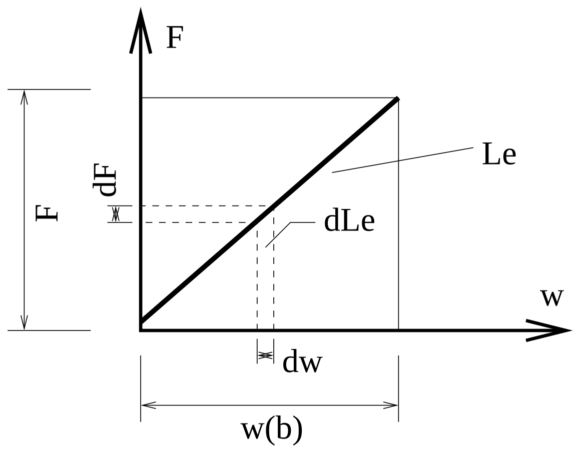
Poznámka 1.2. Znaménko mínus je v rovnici (1.5) kvůli konvenci – považujeme-li práci vnitřních sil za kladnou, pak práce proti nim působících vnějších sil musí být záporná.

Dosud byly úvahy omezeny na případ, kdy na konstrukci působí právě jedna vnější síla. Potenciální energie vnějších sil (Π_e) tedy byl definována jako:

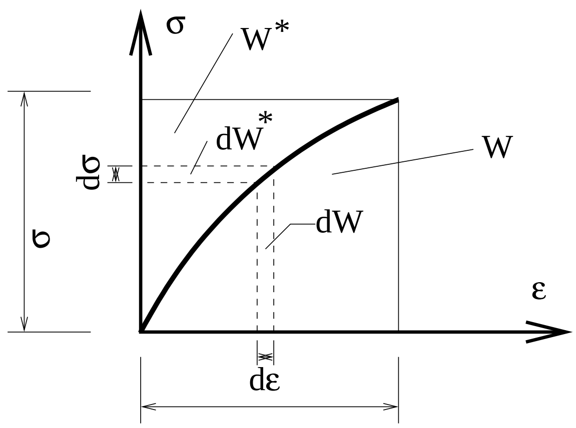
$$\Pi_e = -F\ w, \tag{1.6}$$

V případě obecného zatížení nosníku nebo rámu silami, momenty a spojitými zatíženími je možné vztah (1.6) přepsat:

$$\Pi_e = -\sum_{i=1}^{n} F_i\ u_i - \sum_{i=1}^{n} M_j\ \varphi_j - \int_c^d q(x)\ w(x)\ d\ x, \tag{1.7}$$



Obr. 1.3 Vztah mezi zatížením a deformací v případě lineárně pružného materiálu



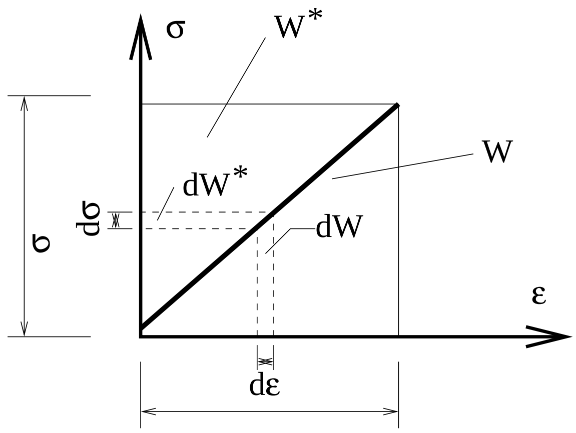
Obr. 1.4 Vztah mezi napětím a poměrnou deformací

kde F_i jsou osamělé síly, u_i jsou posunutí ve směru jejich působení, M_j jsou osamělé momenty, φ_j jsou pootočení na kterých pracují momenty M_j, $q(x)$ je spojité zatížení a $w(x)$ je průhyb odpovídající spojitému zatížení $q(x)$.

V dalším textu bude potřebný maticový zápis pro obecnou napjatost tělesa:

$$\Pi_e = -\int_V \mathbf{X}^T \ \mathbf{u} \ d \ V - \int_s \mathbf{p}^T \ \mathbf{u} \ d \ S, \tag{1.8}$$

kde $\mathbf{X}$ je vektor zatížení, $\mathbf{u}$ je vektor jim příslušných posunutí, V je objem a S je povrch studovaného tělesa.



Obr. 1.5 Vztah mezi napětím a poměrnou deformací v případě lineárně pružného materiálu

1.4.2 Potenciální energie vnitřních sil

V důsledku vnějšího zatížení v konstrukcích vznikají vnitřní síly.[1] Práci vnitřních sil je možné nejsnáze zapsat v podobě vztahu napětí a jim odpovídajících poměrných deformacích.[2]

Vyjádřeme práci W_σ normálových napětí:

$$W_\sigma \;=\; \int_0^\varepsilon \sigma(\varepsilon)\; d\;\varepsilon. \tag{1.9}$$

Práci smykových napětí je možné určit podobně:

$$W_\varepsilon \;=\; \int_0^\gamma \tau(\gamma)\; d\;\gamma. \tag{1.10}$$

Stejně jako u práce vnějších sil je možné přepsat vztahy pro případ lineárně pružného chování materiálu:

$$W_\sigma = \frac{1}{2}\,\sigma\;\varepsilon, \tag{1.11}$$

a:

$$W_\varepsilon = \frac{1}{2}\,\tau\;\gamma. \tag{1.12}$$

Prací vnitřních sil dojde ke změně *potenciální energie vnitřních sil* Π_i:[3]

[1]V dalším textu bude používán termín „vnitřní síly“ jak pro vnitřní síly nosníků (normálová síla, posouvající síly, ohybové a krouticí momenty), tak pro napětí, která jsou s nimi svázána (tj. normálová a smyková napětí).

[2]Poměrné deformace je možné chápat jako dráhy na kterých tato napětí pracují.

[3]Pokud byla konstrukce před přiložením zatížení jinak nezatížená a nedeformovaná, pak je tato změna rovna práce celkové energii vnitřních sil dané konstrukce.

$$L_i = W_\sigma + W_\varepsilon. \tag{1.13}$$

Tedy **potenciální energii vnitřních sil** je možné pro obecné těleso z lineárně pružného materiálu zapsat ve tvaru:

$$\Pi_i \;=\; \frac{1}{2}\int_V (\sigma_x\ \varepsilon_x + \sigma_y\ \varepsilon_y + \sigma_z\ \varepsilon_z + \tau_{xy}\ \gamma_{xy} + \tau_{yz}\ \gamma_{yz} + \tau_{zx}\ \gamma_{zx})\ d\ V. \tag{1.14}$$

V dalších kapitolách bude potřebný maticový zápis vztahu (1.14):

$$\Pi_i = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\sigma}^T\ \boldsymbol{\varepsilon}\ d\ V. \tag{1.15}$$

Poznámka 1.3. Obecný tvar rovnice (1.13) nebo (1.14) není vhodný pro výpočty na nosníkových modelech. Pomocí záhladních vztahů teorie pružnosti[1] je však možné vyjádřit tyto vztahy pomocí prutových vnitřních sil:

Normálové síly ($\sigma = \frac{N}{A}$):

$$\Pi_{i,N} = \frac{1}{2}\int_V \frac{1}{E}\ \sigma_x^2 dV = \cdots = \frac{1}{2}\int_l \frac{N^2}{E\ A} d\ x, \tag{1.16}$$

a

$$\Pi_{i,M} = \frac{1}{2}\int_V \frac{1}{E}\ \sigma_x^2 dV = \cdots = \frac{1}{2}\int_l \frac{M^2}{E\ I} d\ x. \tag{1.17}$$

Tedy je možné psát:

$$\Pi_i = \frac{1}{2}\int_l \frac{N^2}{E\ A}\ d\ x + \frac{1}{2}\int_l \frac{M^2}{E\ I}\ d\ x. \tag{1.18}$$

V rovnici (1.18) je možné vyjádřit vnitřní síly pomocí jim příslušných deformací (posunutí a pootočení).[2] Vztahy poté nabydou tvaru:

$$\Pi_i = \frac{1}{2}\int_0^L E\ A u'^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^L E\ I\ w''^2 dx \tag{1.19}$$

Uvážíme-li, že vnější a vnitřní síly musí být v rovnováze, pak lze předpokládat, že práce L_e vykonaná vnějšími silami k deformaci konstrukce bude co do velikosti rovna práci vnitřních sil L_i bránící této deformaci. Jejich smysl ovšem bude opačný:

$$L_i = -L_e. \tag{1.20}$$

[1] Normálové napětí odpovídající normálové síle: $\sigma = \frac{N}{A}$, normálové napětí odpovídající ohybovému momentu: $\sigma = \frac{M\ y}{I}$.

[2] Konkrétně $M = -EI\ w''$ a $N = EA\ u'$.

1.4.3 Celková potenciální energie systému

Jako *systém* budeme označovat těleso (stavební konstrukci) včetně zatížení (sil, momentů aj.) a okrajových podmínek („podpor“ konstrukce).

Celkovou potenciální energii systému pak zřejmě získáme součtem potenciální enerie vnějších sil Π_e a potenciální energie vnitřních sil Π_i:

$$\Pi = \Pi_e + \Pi_i. \tag{1.21}$$

Přestože by se to na první pohled mohlo zdát pravděpodobné, celková energie systému obecně nebude nulová.[1]

1.4.4 Princip minima celkové potenciální energie

V úlohách stavební mechaniky je možné využít **Lagrangeova principu minima celkové potenciální energie**:

Ze všech možných deformačních stavů tělesa, které neporušují jeho spojitost a respektují okrajové podmínky, nastane právě ten, při kterém je potenciální energie systému minimální.

Uvedený princip je možné zapsat vztahem:

$$\Pi = \Pi_e + \Pi_i = min. \tag{1.22}$$

Vztah (1.22) může být využit například při kontrole výsledků výpočtu – je-li k dispozici několik alternativních možností deformace konstrukce, pak nejsprávnější je ta, které odpovídá nejmenší celková potenciální energie.

1.4.5 Ritzova metoda

Rovnice (1.22) může být prakticky využita při aplikaci variačního počtu na úlohy stavební mechaniky. Prakticky to bude ukázáno v dalších odstavcích na *Ritzově metodě.*

Připomeňme podobný postup, který laskavý čtenář jistě využíval v prvních ročnících univerzitního studia při hledání polohy extrémů funkcí: ze znalosti faktu, že derivace $f'(x)$ funkce $f(x)$ vyjadřuje hodnotu směrnice tečny této funkce, a že tečna je v místě extrému vodorovná (tedy $f' = 0$) bylo možné sestavit rovnici $f'(x) = 0$ a z ní stanovit hledanou polohu extrému x.

V případě rovnice (1.22) je situace složitější, protože Π je funkcionálem a nikoli funkcí, a nehledá se číslo (x), ale funkce w (průhybová čára nebo průhybová plocha konstrukce).

[1] Protože $\Pi_i = L_i$, ale $\Pi_e = -(L_e + L_e^*)$.

Požadavek Lagrangeova principu je tedy možné využít ve tvaru:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial w} = \mathbf{0}. \tag{1.23}$$

Problémem je ovšem vyjádření hledané funkce průhybu w. Ritz navrhl její aproximaci ve tvaru:

$$w_n(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \psi_i, \tag{1.24}$$

kde a_i jsou neznámé konstanty, ψ_i jsou aproximační funkce.

Výchozí úvahou při tvorbě aproximační funkce je podobnost jejího průběhu (nikoli hodnot) s průběhem hledané funkce. Výpočtem konstant a_i se dosáhne blízkosti i funkčních hodnot.

Podobnost průběhů je možné zajistit splněním okrajových podmínek úlohy aproximační funkcí. U úloh stavební mechaniky vycházejících z Lagrangeova principu jde o deformační podmínky v místech podpor.[1]

1.4.6 Algoritmus Ritzovy metody

Postup výpočtu lze rozdělit do následujících kroků:

1. Volba aproximačních funkcí:

$$w_n(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \psi_i,$$

2. Vyjádření Π pomocí $w_n(x)$.

3. Sestavení a vyřešení n rovnic:

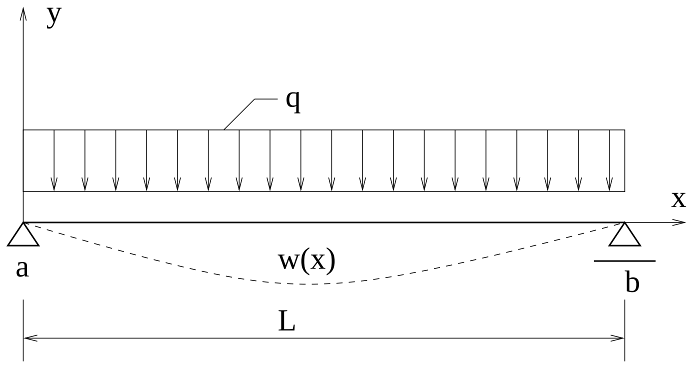
$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0. \tag{1.25}$$

4. Dosazení vypočtených hodnot a_i do aproximační funkce.

1.4.7 Příklad použití Ritzovy metody

Praktické použití Ritzovy metody je možné ilustrovat na příkladu prostého nosníku s rovnoměrným spojitým zatížením podle obrázku 1.6. Cílem řešení je stanovit funkci průhybu a funkci ohybových momentů nosníku.

[1] Například nulové posunutí a nulové pootočení ve vetknutí, tedy $w(a) = 0$ a $w'(a) = 0$.



Obr. 1.6 Ilustrace k příkladu Ritzovy metody.

Řešení této úlohy je známo – laskavý čtenář si jej jistě dokáže odvodit nebo najít v příslušné literatuře.[1]

Zvolme aproximaci ve tvaru:

$$w(x) = a_1\ \psi_1 = a_1\ sin(\frac{\pi\ x}{L}), \qquad tj.\ \psi_1 = sin(\frac{\pi\ x}{L}).$$

Ověřme, že navržená funkce plní okrajové podmínky (průhyb na obou koncích nosníku má být roven nule):

$$\begin{aligned} w(a) &= w(x=0) = 0 ... \psi_1(a) = sin(\frac{\pi\ 0}{L}) = 0 \\ w(b) &= w(x=L) = 0 ... \psi_1(b) = sin(\frac{\pi\ L}{L}) = 0 \end{aligned}$$

Pomocí rovnice (1.7) je možné vyjádřit Π_e:

$$\Pi_e = -\int_0^L q\ w(x) dx = -\int_0^L q\ a_1\ sin(\frac{\pi\ x}{L}) dx =$$

$$\Pi_e = \ -q\ a_1 \left[-\frac{L}{\pi} cos(\frac{\pi\ x}{L}) \right]_0^L = -\frac{2\ q\ L}{\pi}\ a_1$$

Pro další výpočet si připravíme derivace aproximační funkce:

$$\begin{aligned} w' &= \left[a_1\ sin(\frac{\pi\ x}{L}) \right]' = a_1 \frac{\pi}{L}\ cos(\frac{\pi\ x}{L}) \\ w'' &= -a_1 \frac{\pi^2}{L^2}\ sin(\frac{\pi\ x}{L}) \end{aligned}$$

[1] Pokud ne, pak jej nalezne na konci řešeného příkladu v této kapitole.

Pomocí rovnice (1.18) je potom možné vyjádřit Π_i:

$$\begin{aligned}\Pi_i &= \frac{1}{2}\int_0^L E\ I w''^2 dx = \frac{E\ I}{2}\int_0^L \left(-a_1\frac{\pi^2}{L^2}\ sin(\frac{\pi\ x}{L})\right)^2 dx = \ldots \\ \ldots &= \frac{\pi^4}{4}\frac{E\ I}{L^3}\ a_1^2\end{aligned}$$

Součtem potenciálních energií vnějších a vnitřních sil je možné získat potenciální energii systému Π:

$$\Pi = \Pi_e + \Pi_i = -\frac{2\ q\ L}{\pi}\ a_1 + \frac{\pi^4}{4}\frac{E\ I}{L^3}\ a_1^2$$

Sestavením rovnice $\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0$ a jejím vyřešením je možné získat hledaný neznámý koeficient a_1:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = -\frac{2}{\pi} q\ L + \frac{\pi^4}{4}\ \frac{E\ I}{L^3}\ 2\ a_1 &= 0 \\ a_1 = \frac{4\ q\ L^4}{\pi^5\ E\ I}\end{aligned}$$

Získanou hodnotu a_i je možné dosadit do aproximace $w(x)$ a tak získat hledaný výsledek:

$$w(x) = a_1\ \psi_1 = \frac{4\ q\ L^4}{\pi^5\ E\ I}\ sin(\frac{\pi\ x}{L})$$

Derivací podle zásad statiky je možné určit aproximaci ohybového momentu $M(x)$:

$$M(x) = -E\ I\ w'' = -E\ I\ \left(a_1\frac{\pi^2}{L^2} sin(\frac{\pi\ x}{L})\right) = -\frac{4\ q\ L^2}{\pi^3}\ sin(\frac{\pi\ x}{L})$$

Pro porovnání uveďme výsledky přesného řešení podle zásad statiky [45]:

$$\begin{aligned}w(x) &= \frac{q}{24\ E\ I} x(L^3 - 2\ L\ x + x^3) \\ w_{max} &= \frac{5}{384}\frac{q\ l^4}{E\ I}\end{aligned}$$

V tabulce 1.1 jsou uvedeny průhyby a momenty uprostřed délky nosníku pro délku $L = 4\ m$ a zatížení $q = 10\ kN/m$.

Příklady k procvičení

1. Síla o velikosti 10 kN pracuje na deformaci o velikosti 0.01 m. Vypočítejte práci, kterou vykoná.

Veličina	Přibližné řešení	Přesné řešení[1]
Průhyb EI $[m]$	33,462	33,333
Moment EI $[kNm]$	20,641	20,0

Tab. 1.1 Srovnání výsledků přesného řešení a aproximaxe Ritzovou metodou

2. Vyberte aproximaci pro Ritzovu metodu, která nejlépe vyhovuje úloze konzoly o délce L vlevo vetknuté, která je zatížena rovnoměrným spojitým zatížením:
   - $\psi = sin(\frac{\pi\ x}{L})$
   - $\psi = cos(\frac{x}{L})$
   - $\psi = L - x^2$
   - $\psi = x^4$
   - $\psi = x^2 - x$

Klíč k příkladům k procvičení

1. $L_e = 100\ J$
2. $\psi = x^4$

Kapitola 2

Základní vztahy metody konečných prvků

2.1 Základní princip metody

Nevýhodou klasických variačních metod, například popsané Ritzovy metody, je obtížná volba aproximačních funkcí ψ v případech, kdy je řešená konstrukce složitějšího tvaru nebo má komplikovanější okrajové podmínky či zatížení. U prutových konstrukcí může být takovou složitou úlohou například patrový rám, u plošných konstrukcí mohou být takovou komplikací třeba otvory nebo způsob uložení konstrukce.

Protože potenciální energie Π je skalární veličinou, nabízí se možnost rozdělit řešenou konstrukci na velký počet malých oblastí jednoduchého tvaru – **konečných prvků** – a volit aproximační funkce ψ_j a počítat potenciální energii Π_j na jednotlivých prvcích.

Celková potenciální energie Π se pak stanoví součtem jednotlivých potenciálních energií Π_j konečných prvků:

$$\Pi = \sum_{j=1}^{n} \Pi_j, \tag{2.1}$$

kde Π_j je potenciální energie j-tého konečného prvku.

Další postup může být analogický např. Ritzově metodě – řeší se soustava lineárních rovnic:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial w_i} = \mathbf{0}, \tag{2.2}$$

kde w_i hledaná veličina.

V praktických úlohách je ovšem vhodnější upravit řešení do tvaru známého na-

Varianta MKP	Neznámé veličiny[1]	Variační princip
Deformační	deformační	Lagrangeův
Silová	silové	Castigliánův
Smíšená	silové a deformační	např. Hellinger–Reissnerův

Tab. 2.1 Varianty metody konečných prvků.

příklad z deformační metody [45]:

$$\mathbf{K}\,\mathbf{r} = \mathbf{F}, \tag{2.3}$$

kde $\mathbf{K}$ je matice tuhosti konstrukce, $\mathbf{r}$ je vektor neznámých posunutí a $\mathbf{F}$ je vektor uzlových zatížení.

V dalším textu budeme, stejně jako u výkladu Ritzovy metody, pracovat s *deformační variantou* metody konečných prvků, ve které se ve vztahu (4.66) používá Lagrangeův variační princip. Tato varianta je ve stavební praxi zdaleka nejrozšířenější, ale u speciálních úloh a v jiných oblastech se můžeme setkat i s jinými postupy.

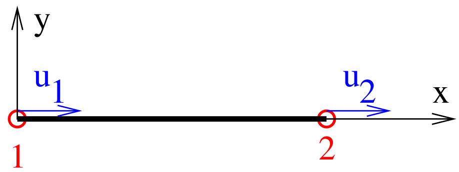
Podle užitého variačního principu a jeho uplatnění na funkcionál lze při uplatnění Lagrangeova principu odvodit deformační variantu metody konečných prvků, užití Castigliánova principu vede na silovou variantu, užití Hellinger – Reissnerova principu vede na variantu smíšenou. Tyto varianty metody jsou vypsány v tabulce 2.1.

2.2 Analýza konečného prvku

Analýzou konečného prvku bývá označován postup, při kterém je v závislosti na typu problému, geometrickém tvaru prvku a zvolených aproximačních funkcích odvozena matice tuhosti, případně vektory pro uvažovaná vnější zatížení a matice napětí. Matice tuhosti označována písmenem $\mathbf{K}$ je použita ve výrazu pro potenciální energii vnitřních sil, zatěžovací vektor $\mathbf{F}$ transformuje vnější zatížení konečného prvku do uzlů konečného prvku tak, aby zatížení konalo stejnou práci na přemístění uzlů, jako nahrazovaná zatížení na posunutích uvnitř konečného prvku. Matice napětí $\boldsymbol{\Sigma}$ transformuje vypočtená uzlová přemístění na napětí, případně vnitřní síly ve zvolených místech elementu.

Uveďme nyní postup odvození matice tuhosti $\mathbf{K}$, zatěžovacího vektoru $\mathbf{F}$ a matice $\boldsymbol{\Sigma}$ pro prutový prvek rovinné příhradové konstrukce s uzly 1 a 2, který je znázorněn na obrázku 2.1.

Poznámka 2.1. V dalším textu se budeme snažit dosáhnout vyjádření potenciální energie Π pomocí neznámých posunutí. Takto vyjádřená potenciální energie vnitřních sil Π_i nám poslouží k vyjádření výše uvedené matice tuhosti prvku a vektoru uzlových deformací a energie vnější sil Π_e poslouží k vyjádření vektoru uzlových



Obr. 2.1 Prvek rovinné příhradoviny.

zatížení (zatěžovacího vektoru). S takto získanou maticí a vektory bude možné dále pracovat zcela stejně jako v *deformační metodě*.

V základní poloze leží prvek v ose x (tak, jak je zobrazen na obrázku 2.1) a má dvě posunutí u_1 a u_2 ve směru této osy.

Uzlové parametry prvku (tedy posunutí v uzlech 1 a 2) v lokální soustavě souřadnic jsou:

$$\{u_1, u_2\}^T.$$

Prvek rovinné příhradoviny je namáhán jen čistým tahem nebo tlakem. Proto je možné předpokládat, že se všechny jeho části nachází ve stavu jednoosé napjatosti.

V takovém případě bude mít geometrická rovnice tvar:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{2.4}$$

Maticově ($\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\partial}^T\ \mathbf{u}$):

$$\left\{\ \varepsilon_x\ \right\} = \left[\ \tfrac{\partial}{\partial x}\ \right]\ \left\{\ u\ \right\} \tag{2.5}$$

Fyzikální rovnice můžeme zapsat v podobě Hookeova zákona pro jednoosou napjatost:[1]

$$\sigma_x \quad = \quad E\ \varepsilon_x \tag{2.6}$$

Maticově ($\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\ \boldsymbol{\varepsilon}$):

$$\left\{\ \sigma_x\ \right\} = \left[\ E\ \right]\ \left\{\ \varepsilon_x\ \right\} \tag{2.7}$$

Nyní můžeme přistoupit k aproximaci neznámých posunutí. Nejprve napíšeme obecný tvar platný pro libovolný bod konečného prvku:[2]

$$u(x) \quad = \quad a_1 + a_2\ x \tag{2.8}$$

[1] Předpokládáme tedy, že materiál je izotropní a lineárně pružný. Konstanta úměrnosti E je modul pružnosti materiálu.

[2] Na tomto místě nebudeme rozebírat důvody volby právě uvedené funkce. Toto téma bude probráno v dalším textu.

Maticově ($\mathbf{u} = \mathbf{U}\ \mathbf{a}$):

$$\left\{ \begin{array}{c} u \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} 1 & x \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \end{array} \right\} \tag{2.9}$$

Aproximace neznámých posunutí v uzlech 1, 2 ($\mathbf{r} = \mathbf{S}\ \mathbf{a}$) bude mít tvar:[1]

$$\left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \end{array} \right\} \tag{2.10}$$

Tedy do výrazu (2.8) jsme dosadili konkrétní souřadnice uzlů 1 a 2.

Nyní se můžeme pokusit vyjádřit vektor poměrných deformací pomocí $\boldsymbol{\varepsilon}$ pomocí sestavené aproximace posunutí $\mathbf{u}$ podle rovnice (2.9). Kombinací vztahů $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\partial}^T\ \mathbf{u}$ (2.5) a $\mathbf{u} = \mathbf{U}\ \mathbf{a}$ (2.9) vznikne rovnice $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\partial}^T\ \mathbf{U}\ \mathbf{a}$:

$$\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 1 & x \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \end{array} \right\} \tag{2.11}$$

Rovnici (2.11) můžeme zjednodušit operací $\mathbf{B} = \boldsymbol{\partial}^T\ \mathbf{U}\ \mathbf{a}$ a tak získat upravenou rovnici $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\ \mathbf{a}$:

$$\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \end{array} \right\} \tag{2.12}$$

Ve vztahu (2.12) vystupuje vektor neznámých koeficientů $\mathbf{a}$. Z praktického hlediska[2] by bylo vhodnější míto těchto neznámých koeficientů pracovat s neznámými posunutími v uzlech (vektor $\mathbf{r}$).

Vztah mezi posunutími v uzlech $\mathbf{r}$a neznámými koeficinenty $\mathbf{a}$ je popsán rovnicí (2.10) ve tvaru $\mathbf{r} = \mathbf{S}\ \mathbf{a}$ plyne. Vyjádříme-li z ní vektor $\mathbf{a}$, získáme:

$$\mathbf{a} = \mathbf{S}^{-1}\ \mathbf{r}. \tag{2.13}$$

Matice $\mathbf{S}$ a matice k ní inverzní $\mathbf{S}^{-\mathbf{1}}$ mají tvar:[3]

$$\mathbf{S} = \left[\begin{array}{cc} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{array} \right] \Rightarrow \mathbf{S}^{-\mathbf{1}} = \left[\begin{array}{cc} \frac{x_2}{x_2 - x_1} & \frac{-x_1}{x_2 - x_1} \\ \frac{-1}{x_2 - x_1} & \frac{1}{x_2 - x_1} \end{array} \right] \tag{2.14}$$

Pak místo $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{a}$ lze psát $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\ \mathbf{S}^{-1}\ \mathbf{r}$, což je možné podrobně rozepsat jako:

$$\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} \frac{x_2}{x_2 - x_1} & \frac{-x_1}{x_2 - x_1} \\ \frac{-1}{x_2 - x_1} & \frac{1}{x_2 - x_1} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \end{array} \right\}. \tag{2.15}$$

[1] Dále budeme používat i označení *uzlová posunutí*.
[2] Zejména pokud potřebujeme, aby výsledné vztahy odpovídaly těm z deformační metody.
[3] Inverze matice 2x2 se provádí takto:

1. otočíme znaménka na vedlejší diaginále,
2. zaměníme prvky hlavní diagonály,
3. vydělíme všechny prvky determinantem původní matice **S**.

Nyní můžeme zapsat výrazy pro potenciální energii – nejprve obecně a poté s dosazením výše připravených vztahů pro $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Potenciální energie vnitřních sil:

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \; d\,V = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \; \mathbf{D} \; \boldsymbol{\varepsilon} \; d\,V. \tag{2.16}$$

Potenciální energie vnějších sil:

$$\Pi_e = - \int_V \mathbf{X}^T \; \mathbf{r} \; d\,V. \tag{2.17}$$

Potenciální energie soustavy:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \; \mathbf{D} \; \boldsymbol{\varepsilon} \; d\,V - \int_V \mathbf{X}^T \; \mathbf{r} \; d\,V - \int_S \mathbf{p}^T \mathbf{r} \; d\,S. \tag{2.18}$$

Po dosazení za $\boldsymbol{\varepsilon}$ a vytknutí $\mathbf{r}$:

$$\Pi = \frac{1}{2} \; \mathbf{r}^T \int_V \mathbf{S}^{-1T} \; \mathbf{B}^T \; \mathbf{D}\mathbf{B} \; \mathbf{S}^{-1} \; d\,V \; \mathbf{r}^T - \int_V \mathbf{X}^T \; d\,V \; \mathbf{r} - \int_S \mathbf{p}^T \; d\,S \; \mathbf{r}. \tag{2.19}$$

Nebo ve stručném zápisu:

$$\Pi = \frac{1}{2} \; \mathbf{r}^T \; \mathbf{K} \; \mathbf{r} \; - \; \mathbf{F}^T \; \mathbf{r}. \tag{2.20}$$

Aplikací Lagrangeova variačního principu ($\partial\; \Pi = 0.$) na (2.20):[1]

$$\mathbf{K} \; \mathbf{r} \; - \; \mathbf{F} \; = \mathbf{0}, \tag{2.21}$$

nebo

$$\mathbf{K} \; \mathbf{r} \; = \; \mathbf{F}. \tag{2.22}$$

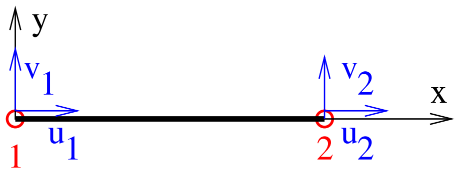
kde $\mathbf{K}$ je matice tuhosti konečného prvku:

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{S}^{-1T} \; \mathbf{B}^T \; \mathbf{D} \; \mathbf{B} \; \mathbf{S}^{-1} \; d\,V, \tag{2.23}$$

a $\mathbf{F}$ je zatěžovací vektor konečného prvku:

$$\mathbf{F} = - \int_V \mathbf{X}^T \; d\,V. \tag{2.24}$$

[1]Tento postup bychom měli aplikovat na kompletní soustavu (konstrukci se zatíženími a okrajovými podmínkami), ale pro potřeby odvození můžeme předpokládat obdobný proces i na jednotlivých konečných prvcích, ze kterých se soustava skládá.



Obr. 2.2 Prvek rovinné příhradoviny v rovině xy.

Pro studovaný konečný prvek:

$$\mathbf{F} = \mathbf{X} + \mathbf{p}. \tag{2.25}$$

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{S}^{-1T}\ \mathbf{B}^T\ \mathbf{D}\ \mathbf{B}\ \mathbf{S}^{-1} dV = A \int_0^L \mathbf{S}^{-1T}\ \mathbf{B}^T\ \mathbf{D}\ \mathbf{B}\ \mathbf{S}^{-1} dx, \tag{2.26}$$

podrobný zápis:

$$\mathbf{K} = A \int_0^L \begin{bmatrix} \frac{x_2}{x_2-x_1} & \frac{-1}{x_2-x_1} \\ \frac{-x_1}{x_2-x_1} & \frac{1}{x_2-x_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{x_2}{x_2-x_1} & \frac{-x_1}{x_2-x_1} \\ \frac{-1}{x_2-x_1} & \frac{1}{x_2-x_1} \end{bmatrix} dx \tag{2.27}$$

Podrobný zápis (vytknutí konstant před integrál):

$$\mathbf{K} = A \begin{bmatrix} \frac{x_2}{x_2-x_1} & \frac{-1}{x_2-x_1} \\ \frac{-x_1}{x_2-x_1} & \frac{-1}{x_2-x_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{x_2}{x_2-x_1} & \frac{-x_1}{x_2-x_1} \\ \frac{-1}{x_2-x_1} & \frac{-1}{x_2-x_1} \end{bmatrix} \int_0^L dx \tag{2.28}$$

Po úpravě (integrace $\int_0^L dx = L$ násobení matic):

$$\mathbf{K} = EAL \begin{bmatrix} \frac{1}{(x_2-x_1)^2} & \frac{-1}{(x_2-x_1)^2} \\ \frac{-1}{(x_2-x_1)^2} & \frac{1}{(x_2-x_1)^2} \end{bmatrix}, \quad x_2 - x_1 = L \Rightarrow \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & \frac{-EA}{L} \\ \frac{-EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}, \tag{2.29}$$

což je matice tuhosti známá i z deformační metody.

Soustava rovnic pro jeden konečný prvek má tedy tvar:

$$\mathbf{K_e r_e} = \mathbf{F_e}, \tag{2.30}$$

což je možné podrobněji rozepsat jako:

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & \frac{-EA}{L} \\ \frac{-EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

Rozšíření na proměnné u a v v každém uzlu:

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \\ F_2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.32}$$

Poznámka 2.2. Pokud matice tuhosti $\mathbf{K}$ a zatěžovací vektor $\mathbf{F}$ mají být použité pro výpočet rovinných příhradových konstrukcí (pruty jsou v uzlech spojeny dokonalými klouby), musí být matice $\mathbf{K}$ a vektor $\mathbf{F}$ z lokální soustavy souřadnic podle vztahu (2.32) transformovány do globálního systému souřadnic pomocí transformačních matic $\mathbf{T}$ pak $\mathbf{K_g}$ elementu v globálním systému souřadnic.

Pro úplnost a bez dalšího odvozování připomínáme tvar potřebné transformační matice $\mathbf{T}$ podle [45]:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.33}$$

Z $\mathbf{K}_e$ a $\mathbf{r}_e$ a $\mathbf{F}_e$ jednotlivých prvků (e je číslo prvku) sestavíme $\mathbf{K}$ a $\mathbf{r}$ a $\mathbf{F}$ celé konstrukce a neznámé určíme řešením soustavy rovnic:

$$\mathbf{K}\ \mathbf{r} = \mathbf{F}. \tag{2.34}$$

Poznámka 2.3. Sestavení matice tuhosti a zatěžovacího vektoru konstrukce je zcela shodné s postupem v obecné deformační metodě.

2.3 Obecný algoritmus metody konečných prvků

2.3.1 Popis algoritmu

Jednou z největších výhod metody konečných prvků je univerzální obecný postup při analýze konečného prvku, který je uvedený v tabulce 2.3.1.

V *kroku 1* jsou podle typu problému, požadavku na globální spojitost aproximačních funkcí a přesnost výpočtu zvoleny a do matice $\mathbf{U}$ typu d, n zapsány mononomy zvolených polynomů. Počet neznámých funkcí je označen d, n je počet mononomů všech funkcí, ale také počet parametrů deformace, počet sloupců a řádků matice tuhosti konečného prvku, počet prvků zatěžovacího vektoru.

V *kroku 2* lze pomocí matice $\mathbf{S}$ typu n, n a vektoru $\mathbf{a}$ o n prvcích lze jednoznačně vyjádřit parametry deformace uspořádané do vektoru $\mathbf{r}$.

V *kroku 3* lze ze vztahu $\mathbf{t} = \mathbf{S}\ \mathbf{a}$ vyjádřit vektor neznámých součinitelů polynomu či polynomů zvolených funkcí $\mathbf{U}$. Násobením zleva maticí $\mathbf{S^{-1}}$ a záměnou levé a pravé strany rovnice získáme vztah uvedený v *kroku 3*.

S využitím vztahu *kroku 4* je vektor neznámých funkcí zapsán ve tvaru $\mathbf{u} = \mathbf{U}\ \mathbf{r}$ a po úpravě $\mathbf{u} = \mathbf{U}\ \mathbf{S^{-1}}\ \mathbf{r}$ nebo

$$\mathbf{u} = \mathbf{V}\ \mathbf{r}. \tag{2.35}$$

1	Matice zvolených funkcí **U**	$\mathbf{U}$
2	Parametry deformace	$\mathbf{r} = \mathbf{Sa}$
3	Vektor neznámých součinitelů	$\mathbf{a} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{r}$
4	Průběh složek posunutí, rotací	$\mathbf{u} = \mathbf{Ua} = \mathbf{US}^{-1}\mathbf{r} = \mathbf{Vr}$
5	Matice souřadnic	$\mathbf{S}$
6	Průběh složek deformace	$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Ba} = \mathbf{BS}^{-1}\mathbf{r} = \mathbf{Hr}$
7	Matice odvozená derivacemi **U**	$\mathbf{B} = \boldsymbol{\partial}\mathbf{U}$
8	Fyzikální rovnice	$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\ \boldsymbol{\varepsilon}$
9	Matice tuhosti materiálu	$\mathbf{D}$
10	Matice tuhosti prvku e	$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{S}^{-1T}\mathbf{B}^T\mathbf{DBS}^{-1} d\Omega_e =$ $= \int_{\Omega_e} \mathbf{H}^T\mathbf{DH} d\Omega_e$
11	Globální parametry deformace	$\mathbf{r_{eg}} = \mathbf{T}^T\mathbf{r_e}$ $\mathbf{r_{er}} = \mathbf{L}^T\mathbf{r_{eg}}$
12	Matice tuhosti prvku v globálních parametrech	$\mathbf{K}_{eg} = \mathbf{T}^T\mathbf{K}_e\mathbf{T}$ $\mathbf{K}_{er} = \mathbf{L}^T\mathbf{K}_{eg}\mathbf{L}$
13	Matice tuhosti konstrukce Vektor deformací konstrukce	$\mathbf{K} = \sum \mathbf{K}_{er}$ $\mathbf{r} = \sum \mathbf{r}_{er}$
14	Vektor parametrů zatížení	$\mathbf{f}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{V}^T\mathbf{X} d\Omega_e +$ $\int_{\Omega_e} \mathbf{V}_p^T d\Omega_e +$ $+ \sum_i \mathbf{V}_{ui}\mathbf{P}_i + \sum_i \mathbf{V}_i\mathbf{M}_i$
15	Transformace vektorů zatížení	$\mathbf{f}_{eg} = \mathbf{T}^T\mathbf{f}_e$ $\mathbf{f}_{er} = \mathbf{L}^T\mathbf{f}_{eg}$
16	Vektor pravé strany	$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{f}_{er}$
17	Soustava lineárních rovnic	$\mathbf{Kr} = \mathbf{F}$
18	Matice fyzikálních konstant	$\mathbf{D}^*$
19	Výpočet průběhů složek napětí	$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^*\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}^*\mathbf{B}^*\mathbf{S}^{-1}\mathbf{r}$

Tab. 2.2 Obecný algoritmus metody konečných prvků.

Matice **V** bývá označována jako matice tvarových funkcí.

V *kroku 5* je uvedena tzv. matice souřadnic – ta závisí na tvaru prvku, počtu parametrů deformace a obsahuje kromě konstant souřadnice uzlových bodů, případě jejich násobky.

Ze *vztahu 6* lze určit souřadnice vektoru poměrných přetvoření s využitím matice **B**, jejíž odvození je popsáno v *kroku 7*, kdy pomocí operátorové matice ∂ je derivacemi získána matice **B**.

V kroku 8 jsou s pomocí již odvozených matic a matice tuhosti materiálu **D** zapsány fyzikální rovnice.

V *kroku 9* je uvedena matice tuhosti materiálu **D**, dříve často označovaná jakou *matice fyzikálních konstant*. V *kroku 10* je předepsána integrace vedoucí k výpočtu matice tuhosti $\mathbf{K_e}$ konečného prvku.

V *kroku 11* je prováděna transformace vektoru parametrů deformace do globálního systému souřadnic pomocí transformační matice **T** a jeho rozšíření na vektor parametrů deformace celé konstrukce pomocí vektoru **L**.[1]

V *kroku 12* je uvedena transformace matice tuhosti **K** mezi lokální a globální soustavou souřadnic, ve druhém vztahu rozšíření matice typu n/n na matici typu N,N pomocí tzv. lokalizačních matic **L**, které umožňují snadný matematický zápis sestavení globální matice tuhosti konstrukce.

Krok 13 představuje vytvoření matice tuhosti konstrukce sumací rozšířených matic konečných prvků na rozměr N, N.

Je třeba upozornit, že integrace je provedena přes celou oblast konečného prvku. Integraci lze jen u velmi jednoduchých prvků provést explicitně, problémem je i inverze matice **S** u prvků s vyšší hodnotou n, k výpočtu bývají užívány systémy pro formální operace s výrazy, numerická integrace a procedury pro inverze matic.

Kroky 14 a 15 provádějí podobné operace s vektorem parametrů zatížení.

Matice **L** umožňují sestavení výsledné soustavy rovnic – matice tuhosti konstrukce a zatěžovacího vektoru. Může být sestavena neredukovaná matice tuhosti konstrukce bez uplatnění okrajových podmínek, v literatuře [4] je popsána i možnost přímého uplatnění homogenních okrajových podmínek.

V *kroku 16* je provedena transformace vektoru zatížení do globální soustavy souřadnic a rozšíření zatěžovacího vektoru prvku na velikost N zatěžovacího vektoru konstrukce tak, aby mohl být pomocí *kroku 16* vytvořen zatěžovací vektor pro celou konstrukci.

V *kroku 17* je zapsána soustava lineárních rovnic, která po uplatnění okrajových podmínek umožní vyřešení vektorů parametrů deformace konstrukce.

[1] Tedy vektor $\mathbf{r_{eg}}$ se zvětší tak, aby byl stejně velký jako vektor deformací celé konstrukce. Pro algoritmizaci úlohy je tento postup neefektivní a že bývá realizován rozesíláním a přičítáním prvků vektoru deformací konečného prvku $\mathbf{r_{eg}}$ na globální pozice ve vektoru deformací konstrukce **r**.

V *kroku 18* je uvedena matice $\mathbf{D}^*$, která může být odlišná od matice tuhosti materiálu $\mathbf{D}$.[1] Matice $\mathbf{D}^*$ umožňuje výpočet napětí nebo vnitřních sil, jejichž vliv je zanedbáván při výpočtu potenciální energie vnitřních sil.

V *kroku 19* je uveden vztah pro výpočet složek napětí nebo vnitřních sil po získání kořenů soustavy rovnic (uzlových parametrů).

Uzlové parametry konstrukce je nutné sestavovat pro výpočet do vektoru pro jednotlivé konečné prvky. Upozorňujeme také na matici $\mathbf{B}^*$, která může obsahovat i další vyšší derivace aproximačních funkcí.

2.3.2 Volba aproximačních polynomů

Aproximační polynomy, které vystupují v matici zvolených funkcí $\mathbf{U}$ nemůžeme zvolit libovolně. Z praktického hlediska jsou nejvhodnější polynomy, které je možno (i automatizovaně) snadno derivovat i integrovat.

Ženíšek [23] dokázal, že je potřebné volit pokud možno *úplné polynomy n-tého stupně*. Vzhledem k tomu, že počet konstant polynomu musí být právě roven počtu neznámých (deformačních) veličin na prvku, jsou tím možnosti volby polynomu do jisté míry omezeny.

Může se stát, že počet neznámých deformačních veličin ne zcela odpovídá počtu parametrů úplného polynomu. V takovém případě je nutné zvolit polynom neúplný: důsledkem bude horší konvergence řešení poskytovaného takovýmito konečnými prvky k přesnému řešení.

Pro ilustraci uvedeme tvar polynomů prvního až čtvrtého stupně pro jednu neznámou x:

1. $a_1 + a_2\, x$,
2. $a_1 + a_2\, x + a_3\, x^2$,
3. $a_1 + a_2\, x + a_3\, x^2 + a_4\, x^3$,
4. $a_1 + a_2\, x + a_3\, x^2 + a_4\, x^3 + a_5\, x^4$.

Pro dvě neznámé x a y uvedeme polynomy prvního až třetího stupně:

1. $a_1 + a_2\, x + a_3\, y$,
2. $a_1 + a_2\, x + a_3\, y + a_4\, xy + a_5\, x^2 + a_6\, y^2$,

[1] Například u desek může být rovnice $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\ \boldsymbol{\varepsilon}$ sestavena tak, že ve vektoru $\boldsymbol{\sigma}$ jsou zahrnuty jen momenty $m_x, m_y a m_{xy}$, ale nikoli posouvající síly. Protože vektor $\boldsymbol{\varepsilon}$ bude zřejmě obsahovat tři složky (svislé posunutí w a dvě pootočení φ_y a φ_y), bude matice $\mathbf{D}$ čtvercová o rozměrech 3×3. Při výpočtu vnitřních sil zřejmě budeme požadovat i určení posouvajících sil q_{xz}, q_{yz}, a proto matice $\mathbf{D}$ bude muset být nahrazena maticí $\mathbf{D}^*$ o rozměrech 5×3.

3. $a_1 + a_2\ x + a_3\ y + a_4\ xy + a_5\ x^2 + a_6\ y^2 + a_7\ x^3 + a_8\ y^3 + a_9\ x\ y^2 + a_{10}\ x^2\ y.$

Poznámka 2.4. Při rozhodování o vhodnosti zvolené aproximace je také důležité si uvědomit, jaká veličina má být aproximována. K popisu prodloužení prutu rovinné příhradoviny je zcela dostatečný polynom prvního stupně,[1], ale použití lineární aproximace posunutí například u stěny povede k nižší přesnosti dosahovaných výsledků (a dále, a především, těch výsledků, které odpovídají derivacím posunutí, tedy napětí).

V praktických úlohách je možné rozdělit řešenou oblast na více konečných prvků, a tak omezit vliv méně přesné aproximace: s rostoucí hustotou dělení se řešení obecně blíží přesnému řešení podle teorie pružnosti.

Příklady k procvičení

1. Jaké stupně volnosti má prvek pro řešení rovinného problému?
2. Napište aproximaci posunutí u v rovině xy, víte-li, že můžete použít polynom se 3 členy.
3. Kolik neznámých parametrů deformace bude na čtyřuzlovém prvku desky?
4. Kolik konečných prvků tvaru čtyřstěnu je nejméně třeba k sestavení výpočtového modelu kvádru?
5. Posunutí stěny je popsáno funkcí $v = a_4 + a_5\ x + a_6\ y$. Jakého stupně bude polynom popisující napětí na stěně?[2]

Klíč k příkladům k procvičení

1. Dvě posunutí: u, v.
2. $u = a_1 + a_2\ x + a_3\ y$.
3. Celkem 12 (4 posunutí a 8 pootočení).
4. 5.
5. 0−tého stupně (konstanta).

[1] V tomto případě dokonce můžeme získat řešení přesně odpovídající teorii pružnosti.
[2] Nápověda (učivo z „pružnosti“): $\varepsilon_y = \frac{\partial\ v}{\partial y}$

Kapitola 3

Analýza konstrukce

3.1 Analýza konstrukce

Sestavení matice tuhosti konstrukce a zatěžovacího vektoru bylo popsáno v kapitole 2.3 v odstavci 2.3.1. Bylo tam užito takzvaných lokalizačních matic, jejichž použitím se dosáhne zvětšení typu matice prvku $\mathbf{K_e}$ z typu n, n na typ N, N, kde n je počet parametrů na prvku a N je celkový počet parametrů deformace celé konstrukce. Obdobně byla matice $\mathbf{L^T}$ užita pro zvětšení počtu prvků zatěžovacího vektoru $\mathbf{F_e}$ z n prvků na N.

Tento postup je velmi jednoduchý, umožňuje velmi snadný zápis algoritmu sestavení matice tuhosti a zatěžovacího vektoru konstrukce (levých stran a vektoru pravých stran systému rovnic), je však z hlediska počtu prováděných operací při násobení matic a vyžadovaném prostoru paměti počítače zcela neefektivní. Proto se se zápisem:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{K} &= \sum_{i=1}^{m} \mathbf{L_i}^T \mathbf{K}_{eg,i} \mathbf{L_i} \\
\mathbf{F} &= \sum_{i=1}^{m} \mathbf{L_i}^T \mathbf{f}_{eg,i},
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

kde m je počet konečných prvků, setkáváme nejčastěji v literatuře.

Ve vztazích (3.1) jsou užity lokalizační matice, které jsou typu n, N nebo po transpozici N, n a jsou sestaveny z hodnot 0 a 1 a rozmístí a na odpovídající pozice díky sumačnímu znaménku přičtou prvky do matice tuhosti konstrukce a jejího zatěžovacího vektoru. Tvorba matic $\mathbf{L}$ je jednoduchá a je podrobně popsána v [23, 39].

V teoretických manuálech i certifikovaných programových systémech pro MKP lze nalézt matematicky hrubě nesprávný zápis:

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{K_{eg,i}},$$

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{f_{eg,i}}, \tag{3.2}$$

$$\tag{3.3}$$

kdy sčítáním matic typu n, n nebo vektoru o n prvcích nelze v žádném případě získat matici typu N, N nebo vektor typu N, když téměř nikdy n není rovno N.

Popišme nyní sestavení matice tuhosti konstrukce $\mathbf{K}$ a zatěžovacího vektoru konstrukce pomocí takzvaných kódových čísel. Pro konečné prvky při jejich odvozování používáme lokální čísla uzlů. V řešené konstrukci se vyskytuje zpravidla velký počet konečných prvků. Při sestavování globální matice $\mathbf{K}$ a vektoru $\mathbf{F}$ je nutné všechny uzly zvoleného dělení konstrukce očíslovat přirozenými čísly od 1 do NU, kde NU je počet uzlů na konstrukci. Pak lze také ke každému lokálnímu číslu uzlu na prvku přiřadit globální číslo uzlu.

V tomto případě při počtu parametrů deformace v uzlu VA lze určit přímo z globálního čísla uzlu indexy pro přičítání prvků do matice tuhosti a zatěžovacího vektoru konstrukce.

Z lokálních pozic jsou postupně vyzvedávány všechny prvky matice tuhosti a zatěžovacího vektoru a jsou umisťovány přičítáním k příslušnému prvku s vypočtenými globálními indexy.

Vztah pro určení globálního indexu je jednoduchý:

$$i_g = (i_u - 1)\ VA + i_p, \quad i + p = 1...VA, \tag{3.4}$$

kde i_g je globální index stupně volnosti v uzlu, i_u je pořadové číslo uzlu, VA je počet parametrů v uzlu a i_p je pořadové číslo parametru v uzlu.

Příklad 3.1. Čtyřuzlový prvek s lokálními uzly 1, 2, 3 a 4 má 3 parametry v uzlu ($VA = 3$), pak typ matice $\mathbf{K}$ je $n = 12$ a vektor lokálních indexů je 1 až 12.

Prvek má globální čísla uzlů 4, 3, 15, 14, určete odpovídající vektor kódových čísel.

Řešení. Podle vztahu (3.4) musí mít vektor kódových čísel prvky:

$$10, 11, 12, 7, 8, 9, 43, 44, 45, 40, 41, 42. \tag{3.5}$$

▲

Pro další výklad využijeme vektor kódových čísel (3.5). Tyto indexy budou použity pro určení prvků v globální matici tuhosti a zatěžovacím vektoru, ke kterým budou přičítány. Je samozřejmé, že před zahájením procesu rozesílání a přičítání prvků musí být pozice v globální matici tuhosti a zatěžovacím vektoru rovny nule. Prvky vektoru kódových čísel jsou použity pro řádkové i sloupcové indexy matice tuhosti prvku, které mají být rozesílány a rovněž pro prvky zatěžovacího vektoru. Například prvek $k_{e,3,5}$ z lokální pozice $3,5$ je přičten k pozici $12,8$ v matici tuhosti konstrukce a 10. prvek zatěžovacího vektoru přičten k 40. pozici globálního zatěžovacího vektoru.

Lze tedy zrekapitulovat, že pomocí vektoru kódových čísel lze pro každý prvek určit řádkový a sloupcový index v globální matici tuhosti a index v globálním zatěžovacím vektoru.

Sestavování matice tuhosti konstrukce se provádí tak, že u všech konečných prvků (celkem jich je m) vybíráme z jejich matice tuhosti jednotlivé prvky, které přičítáme na pozice zjištěné pomocí odpovídajících prvků vektoru kódových čísel. Obdobně si počínáme u prvků zatěžovacího vektoru konečného prvku.

V úvodu tohoto odstavce bylo řečeno, že je sestavována neredukovaná matice, která je singulární.[1]

Uveďme nyní další vlastnosti matice tuhosti konstrukce:

- matice je symetrická podle hlavní diagonály,
- při vhodném číslování uzlů je matice pásová.

Tyto vlastnosti je možné po regularizaci matice uplatněním okrajových podmínek využít při řešení soustavy rovnic. V moderních programových systémech jsou čísla uzlů generována generátory dělení oblastí na konečné prvky, někdy pro usnadnění zadávání po podoblastech. Sestavování matice tuhosti a zatěžovacího vektoru konstrukce, tedy soustavy rovnic, je v programových systémech velmi často upravováno tak, že probíhá sestavování rovnic po částech. Ve většině systémů je považováno za černou skříňku, o které nepotřebují uživatelé, ale ani programátoři rozšiřující knihovny konečných prvků mít ani ponětí.

3.2 Uplatnění okrajových podmínek

V deformační variantě metody konečných prvků jde o respektování způsobu podepření, zadání popuštění podpor, zadání symetrie případně antisymetrie konstrukce.

Nejjednodušším případem je zadání předepsané nulové hodnoty parametru deformace (bývá někdy označován jako homogenní okrajová podmínka). V tomto případě

[1] V případě konstrukcí plošně podepřených, kdy konečné prvky mohou obsahovat matici tuhosti doplněnou o tuhosti podkladu, je matice regulární – to je ovšem zvláštní případ.

je možné vytvořit triviální rovnici, ve které je předepsána nulová hodnota parametru deformace. Na hlavní diagonálu této rovnice je umístěna hodnota 1 a do všech ostatních hodnot řádku nuly. Touto operací se stává ovšem matice soustavy nesymetrickou. Symetrie lze dosáhnout vynulováním i odpovídajících prvků sloupce, což je vlastně dosazení nulové hodnoty známého kořene soustavy.

Ve stavebnictví je často nutné předepsat nenulové hodnoty parametru deformace (popuštění podpor). Zde je možné opět vytvořit rovnici s hodnotou koeficientu u této neznámé 1 a do pravé strany systému rovnic dosadit předepsanou hodnotu (nehomogenní okrajová podmínka). Pokud však chceme uchovat symetrii matice tuhosti konstrukce, je nutné v ostatních rovnicích dosadit tuto hodnotu a převést vzniklý absolutní člen na pravou stranu rovnicového systému.[1]

Velmi jednoduchá je situace v případě pružných podpor. V tomto případě je vlastně připojena v daném uzlu pro odpovídající parametr deformace vnější vazba se známou tuhostí. Tato vazba je respektována přičtením své tuhosti k odpovídající tuhosti diagonálního členu matice tuhosti konstrukce.

Dalším případem jsou vazby, které nemají směr globálních směrů uzlových parametrů, v tomto případě je nejvýhodnější transformovat souřadnicový systém rovnic uzlů do lokálního, který má směr osy rovnoběžný s vazbou. Pak lze okrajovou podmínku realizovat. Samozřejmě, že pokud jsou předepsány nulové hodnoty více parametrů tak, že transformované veličiny jsou před i po případné transformaci nulové, lze je zadat i před transformací.

Složitější jsou případy uvolňování vnitřních vazeb, zadávání subkonstrukcí, spojování některých parametrů zdvojených uzlů se stejnou polohou, zadávání podmínek, které předepisují vzájemnou polohu uzlů (například na přímce, v rovině a podobně). I s těmito podmínkami se dokážou současné programové systémy vyrovnat.

3.3 Zadávání zatížení

Zatížení v programových systémech metody konečných prvků je zadáváno jako uzlové (pracující na příslušných parametrech v uzlech) nebo jako transformované vnější nebo objemové zatížení. Zatížení působící na prvku jsou v analýze konečných prvků převáděna staticky ekvivalentně do uzlů na základě požadavku vykonání práce stejné velikosti na uzlových posunutích jakou koná zatížení na konečném prvku na svých posunutích.

Programové systémy vzhledem k hustotě dělení na konečné prvky umožňují zpra-

[1] Prakticky je možné postupovat tak, že se vynuluje příslušný n-tý řádek matice tuhosti $\mathbf{K}$ a k jednotlivým členům pravé strany (vektoru uzlových sil) se přičte součin zadaného posunutí a hodnoty odpovídajícího členu n-tého sloupce. n-tý sloupec se poté vynuluje a na hlavní diagonálu se v n-tém řádku vloží hodnota 1, do n-tého řádku vektoru deformací i zatěžovacího vektoru je potom nutné uvést zadanou hodnotu posunutí.

vidla zadávání jen základních typů zatížení:

- objemové síly,
- rovnoměrné zatížení,
- zatížení změnou teploty.

Některé systémy umožňují připojení *fiktivních prvků s nulovou tuhostí*, které slouží jen k zadání určitých typů zatížení (zejména plošných) na prvky reálné, ke kterým jsou připojeny. Prvky fiktivní mohou mít i jinou dimenzi – tak lze například zadat plošné zatížení na prostorové prvky.

3.4 Způsoby zavedení zatížení do úlohy

Zatížení lze zadat do zatěžovacího vektoru konstrukce různým způsobem:

1. Uzlová zatížení se zadávají zpravidla samostatně s uvedením informace o uzlu, ve kterém působí, parametru, na kterém pracují, ten určí směr působení, a uvedením intenzity zatížení.

2. Spojitými zatíženími, která působí na prvku a jsou pro ně připraveny zatěžovací vektory s jednotkovou intenzitou nebo speciálními výše uvedenými fiktivní prvky, přenášejícími pouze zatížení.

3. Zatěžovacími vektory prvků získanými jinou analýzou, například teplotní. Tyto vektory mohou být přeneseny do výpočtu statického.

Poznámka 3.2. V některých programových systémech je možné řešit současně několik zatěžovacích stavů –- pro různé varianty zatěžovacího vektoru konstrukce. Tento způsob je neobvyklý pro systémy vzniklé v USA, kde je obvykle řešen samostatně každý zatěžovací stav. Tento přístup umožňuje měnit i předepsané okrajové podmínky, které jsou pak považovány za součást zatěžovacího stavu.

Příklady k procvičení

1. Rovnoměrné spojité zatížení o velikosti $1\frac{kN}{m}$ působí mezi uzly i a j na délce $0,1\ m$. Jakou uzlovou silou jej nahradíme v uzlu i?

2. Síla ve směru osy x o velikosti $100kN$ působí v uzlu, kde je zavedena okrajová podmínka bránící posunutí ve směru osy x. Jak se tato síla projeví ve výpočtu?

Klíč k příkladům k procvičení

1. $0,05\ kN$

2. Nijak neovlivní řešení soustavy rovnic, je třeba ji zahrnout jen do velikosti reakce v uvedeném bodě.

Kapitola 4

Typy konečných prvků

4.1 Rovinný problém

4.1.1 Vztahy teorie pružnosti pro rovinný problém

Rovinný problém je podrobněji popsán v [50, 39]. V dalším textu uvedeme vztahy nezbytné pro odvození matice trojuzlového tuhosti konečného prvku pro řešení problémů rovinné napjatosti, tedy pro řešení stěn. Pro využití tohoto prvku v úloze rovinné deformace by byla potřebná jediná změna, a to náhrada matice tuhosti materiálu **D** tvarem odpovídajícím rovinné deformaci. Tento prvek je znázorněn na obrázku 4.1.

V každém uzlu budou, v souladu s teorií pružnosti, dva neznámé parametry deformace u, v. Na konečném prvku tedy bude celkem šest neznámých uzlových parametrů:

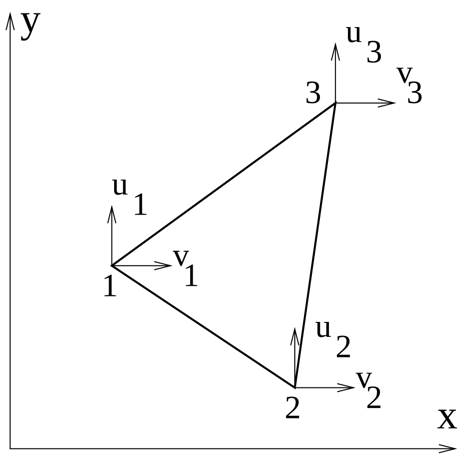
$$\{u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3\}^T.$$

Geometrické rovnice podle [39] budou mít tvar:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \tau_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \tag{4.1}$$

Který je možné zapsat maticově ($\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\partial}^T\ \mathbf{u}$):

$$\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u \\ v \end{array} \right\}. \tag{4.2}$$



Obr. 4.1 Trojuzlový konečný prvek pro rovinný problém.

Fyzikální rovnice pro úlohu rovinné napjatosti zapíšeme ve tvaru:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\,(\varepsilon_x + \nu\;\varepsilon_y), \tag{4.3}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\,(\varepsilon_y + \nu\;\varepsilon_x), \tag{4.4}$$

$$\tau_x = \frac{E}{2(1+\nu)}\,\gamma_{xy}, \tag{4.5}$$

a přepíšeme maticově ($\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\;\boldsymbol{\varepsilon}$):

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{array} \right\} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\begin{array}{ccc} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\}. \tag{4.6}$$

4.1.2 Odvození konečného prvku pro rovinný problém

Nyní zvolíme *aproximace neznámých posunutí*:[1]

$$\begin{aligned} u(x,y) &= a_1\;x + a_2\;y + a_3, \\ v(x,y) &= a_4\;x + a_5\;y + a_6. \end{aligned} \tag{4.7}$$

[1] Uvedená aproximace platí pro libovolný bod konečného prvku.

V dalším odvození budeme potřebovat i jejich maticový zápis ($\mathbf{u} = \mathbf{U}\ \mathbf{a}$):

$$\left\{ \begin{array}{c} u \\ v \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} x & y & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & y & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{array} \right\}. \tag{4.8}$$

Na základě vztahu (4.8) můžeme zapsat aproximace neznámých uzlových posunutí v uzlech 1, 2, 3: ($\mathbf{r} = \mathbf{S}\ \mathbf{a}$):

$$\left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & y_2 & 2 \\ x_3 & y_3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & y_3 & 3 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{array} \right\} \tag{4.9}$$

Nyní je potřebné vyjádřit poměrné deformace pomocí zvolených aproximací posunutí. Kombinací vztahů $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\partial}^T\ \mathbf{u}$ (4.2) a $\mathbf{u} = \mathbf{U}\ \mathbf{a}$ (4.8) vznikne $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\ \mathbf{a}$, kde $\mathbf{B} = \boldsymbol{\partial}^T\ \mathbf{U}$:

$$\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccccc} x & y & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & y & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{array} \right\}. \tag{4.10}$$

Po zjednodušení získáme tvar $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\ \mathbf{a}$:

$$\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{array} \right\}. \tag{4.11}$$

Z rovnice $\mathbf{r} = \mathbf{S}\ \mathbf{a}$ (4.9) můžeme vyjádřit $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{a} = \mathbf{S}^{-1}\ \mathbf{r}. \tag{4.12}$$

Potom můžeme zapsat vztah pro ε ve tvaru:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\ \mathbf{S}^{-1}\mathbf{r}. \tag{4.13}$$

Potenciální energie vnitřních sil má podobu:

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \; d \; V = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \; \mathbf{D} \; \boldsymbol{\varepsilon} \; d \; V = \tag{4.14}$$

Potenciální energie vnějších sil má tvar:

$$\Pi_e = - \int_V \mathbf{X}^T \; \mathbf{r} \; d \; V - \int_S \mathbf{p}^T \mathbf{r} \; d \; S. \tag{4.15}$$

Potenciální energie konečného prvku může být potom zapsána:

$$\Pi = \Pi_i + \Pi_e = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \; \mathbf{D} \; \boldsymbol{\varepsilon} \; d \; V - \int_V \mathbf{X}^T \; \mathbf{r} \; d \; V - \int_S \mathbf{p}^T \mathbf{r} \; d \; S. \tag{4.16}$$

Po dosazení za $\boldsymbol{\varepsilon}$ a vytknutí $\mathbf{r}$ získáme:

$$\Pi = \frac{1}{2} \; \mathbf{r}^T \int_V \mathbf{S}^{-1T} \; \mathbf{B}^T \; \mathbf{DB} \; \mathbf{S}^{-1} \; d \; V \; \mathbf{r}^T - \int_V \mathbf{X}^T \; d \; V \; \mathbf{r} - \int_S \mathbf{p}^T \; d \; S \; \mathbf{r}, \tag{4.17}$$

což je možné stručně přepsat jako:

$$\Pi = \frac{1}{2} \; \mathbf{r}^T \; \mathbf{K} \; \mathbf{r} \; - \; \mathbf{F}^T \; \mathbf{r}, \tag{4.18}$$

kde $\mathbf{K}$ je matice tuhosti konečného prvku:

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{S}^{-1T} \; \mathbf{B}^T \; \mathbf{D} \; \mathbf{B} \; \mathbf{S}^{-1} \; d \; V, \tag{4.19}$$

$\mathbf{F}$ je zatěžovací vektor konečného prvku:

$$\mathbf{F} = - \int_V \mathbf{X}^T \; d \; V \; - \int_S \mathbf{p}^T \; d \; S. \tag{4.20}$$

Pro studovaný konečný prvek:

$$\mathbf{K} = t \; A \; \mathbf{S}^{-1T} \; \mathbf{B}^T \; \mathbf{D} \; \mathbf{B} \; \mathbf{S}^{-1}, \tag{4.21}$$

kde t je tloušťka a A je plocha konečného prvku.

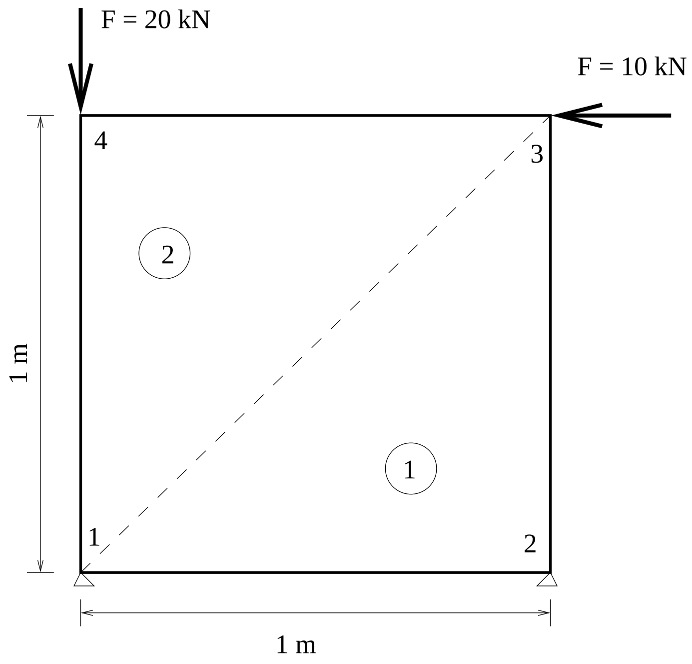
Zatěžovací vektor $\mathbf{F}$ potom je:

$$\mathbf{F} = \mathbf{X} + \mathbf{p}. \tag{4.22}$$

Z $\mathbf{K}_e$ a $\mathbf{r}_e$ a $\mathbf{F}_e$ jednotlivých prvků (e je číslo prvku) sestavíme postupem popsaným v kapitole 2 matici tuhosti $\mathbf{K}$ a zatěžovací vektor $\mathbf{F}$ celé konstrukce a neznámé $\mathbf{r}$ určíme řešením soustavy rovnic:

$$\mathbf{K} \; \mathbf{r} = \mathbf{F}. \tag{4.23}$$

Po vyřešení soustavy (4.23) můžeme na jednotlivých konečných prvcích stanovit výsledky (poměrné deformace a a napětí) následujícím postupem:



Obr. 4.2 Zadání příkladu 4.1.

1. z vektoru $\mathbf{r}$ celé konstrukce sestavíme vektory $\mathbf{r}_e$ jednotlivých konečných prvků

2. pro každý prvek stanovíme poměrné deformace:
   $\boldsymbol{\varepsilon}_e = \mathbf{B}\ \mathbf{S}^{-1}\ \mathbf{r}_e$,

3. pro každý prvek stanovíme napětí:
   $\boldsymbol{\sigma}_e = \mathbf{D}\ \boldsymbol{\varepsilon}_e$ nebo $\boldsymbol{\sigma}_e = \mathbf{D}\ \mathbf{B}\ \mathbf{S}^{-1}\ \mathbf{r}_e$.

V tomto případě budou vypočítaná napětí na prvcích konstantní.[1]

Příklad 4.1. Stanovte průběhy posunutí, napětí a poměrných deformací na stěně. Úlohu řešte metodou konečných prvků, použijte odvozený konečný prvek.

Geometrie, zatížení a dělení na konečné prvky jsou uvedeny na obrázku 4.1, tloušťka stěny je konstantní a má velikost $t = 0.1m$, modul pružnosti použitého materiálu je $E = 20GPa$, Poissonův součinitel má velikost 0.2.

Řešení. Matici tuhosti trojuzlového konečného prvku můžeme získat buď výpočtem podle rovnice (4.21) nebo ji převezmeme z literatury [22].[2]

Nejprve vypočítáme parametry pro *prvek 1.* Násobitel matice tuhosti: $1{,}042\ 10^9$.

[1] Pro nekonstatntní napětí by bylo nutné zvolit jako aproximace posunutí polynomy vyšších řádů. Pak by ovšem matice $\mathbf{B}$ nebyla maticí konstant a bylo by nutné přistoupit k numerické integraci.

[2] Výsledky budou identické.

Matice tuhosti *prvku 1* bez násobitele:

	u_1	v_1	u_2	v_2	u_4	v_4
u_1	1,4	0,6	1,0	-0,4	-0,4	-0,2
v_1	0,6	1,4	-0,2	-0,4	-0,4	-1,0
u_2	1,0	-0,2	1,0	0	0	0,2
v_2	-0,4	-0,4	0	0,4	0,4	0
u_4	-0,4	-0,4	0	0,4	0,4	0
v_4	-0,2	-1,0	0,2	0	0	1,0

Následně vypočítáme parametry pro *prvek 2*. Násobitel matice tuhosti *prvku 2*: 1,042 10^9.

Matice prvku 2 tuhosti (bez násobitele):

	u_2	v_2	u_3	v_3	u_4	v_4
u_2	0,4	0	-0,4	-0,4	0	0,4
v_2	0	1,0	-0,2	-1,4	0,2	0
u_3	-0,4	-0,2	1,4	0,2	-1,0	-0,4
v_3	-0,4	-1,0	0,2	1,4	-0,2	-0,4
u_4	0	0,2	-1,0	-0,2	1,0	0
v_4	0,4	0	-0,4	-0,4	0	0,4

Nyní můžeme přistoupit k sestavení matice tuhosti celé konstrukce.

Sestavíme ji z matic tuhostí jednotlivých prvků, její velikost je rovna počtu stupňů volnosti (u_i, v_i) konstrukce (tedy $4 \times 2 = 8$).

Postup sestavení:

1. připravíme tabulku s počtem řádků a sloupců rovným počtu stupňů volnosti v konstrukci,
2. řádky a sloupce vhodně označíme (např. $u_1 \ldots v_4$, stejným systémem jako u matic tuhosti prvků),
3. členy matic tuhostí prvků umísťujeme do matice tuhosti konstrukce podle indexů ($[u_1, v_4]$ do $[u_1, v_4]$ atd.) – pokud se někde setkají členy z více matic, tak je sečteme.

Matice tuhosti konstrukce (bez násobitele, který je pro obě matice shodný):

	u_1	v_1	u_2	v_2	u_3	v_3	u_4	v_4
u_1	1,4	0,6	1,0	-0,4	0	0	-0,4	-0,2
v_1	0,6	1,4	-0,2	-0,4	0	0	-0,4	-1,0
u_2	1,0	-0,2	1,4	0	-0,4	-0,4	0	0,6
v_2	-0,4	-0,4	0	1,4	-0,2	-1,0	0,6	0
u_3	0	0	-0,4	-0,2	1,4	0,2	-1,0	-0,4
v_3	0	0	-0,4	-1,0	0,2	1,4	-0,2	-0,4
u_4	-0,4	-0,4	0	0,6	-1,0	-0,2	1,4	0
v_4	-0,2	-1,0	0,6	0	-0,4	-0,4	0	1,4

Dále můžeme sestavit *vektor uzlových sil*. Vektor má stejnou velikost jako matice tuhosti, jednotlivé uzlové síly zapíšeme do řádků odpovídajících posunutím na kterých pracují.

Síla je kladná pokud působí ve směru kladné příslušné poloosy systému souřadnic (viz obrázek 4.1).

Tedy:

$$\begin{aligned} F1 &= F_{x,3} = -10\ 000 N \ldots na \quad u_3 \\ F2 &= F_{y,4} = -20\ 000 N \ldots na \quad v_4 \end{aligned}$$

Zatěžovací vektor pak bude mít tvar:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \{F_{x,1}, F_{y,1}, F_{x,2}, F_{y,2}, F_{x,3}, F_{y,3}, F_{x,4}, F_{y,4}\}^T \\ &= \{0, 0, 0, 0, -10000, 0, 0, -20000\}^T \end{aligned}$$

Výsledný tvar soustavy rovnic $\mathbf{K}\ \mathbf{u} = \mathbf{F}$:

$$\begin{bmatrix} 1,4 & 0,6 & 1,0 & -0,4 & 0 & 0 & -0,4 & -0,2 \\ 0,6 & 1,4 & -0,2 & -0,4 & 0 & 0 & -0,4 & -1,0 \\ 1,0 & -0,2 & 1,4 & 0 & -0,4 & -0,4 & 0 & 0,6 \\ -0,4 & -0,4 & 0 & 1,4 & -0,2 & -1,0 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & -0,4 & -0,2 & 1,4 & 0,2 & -1,0 & -0,4 \\ 0 & 0 & -0,4 & -1,0 & 0,2 & 1,4 & -0,2 & -0,4 \\ -0,4 & -0,4 & 0 & 0,6 & -1,0 & -0,2 & 1,4 & 0 \\ -0,2 & -1,0 & 0,6 & 0 & -0,4 & -0,4 & 0 & 1,4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10^4 \\ 0 \\ 0 \\ -20^4 \end{Bmatrix}$$

Matice tuhosti musí být ještě přenásobena hodnotou násobitele 1,042 10^9.

Zbývá zavést okrajové podmínky – podpory. V deformační variantě MKP zavádíme pevné podpory jako nulové hodnoty posunutí, kterým podpory brání. Soustavu tedy upravíme tak, že dosadíme známé (nulové) hodnoty posunutí v místech podpor.

V tomto příkladu tedy zavedeme:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= 0, \\
v_1 &= 0, \\
u_2 &= 0, \\
v_2 &= 0.
\end{aligned}
$$

Pro praktické použité (odpovídající rovnice není třeba a musíme ji převést na tvar 1x0 = 0) provedeme tyto úpravy soustavy rovnic:

- dosadíme hodnotu 0 na příslušné místo ve vektoru neznámých,
- vynulujeme příslušný řádek vektoru pravé strany,
- vynulujeme příslušný řádek a sloupec matice tuhosti a na diagonálu dosadíme 1.

$$
N \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1,4 & 0,2 & -1,0 & -0,4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0,2 & 1,4 & -0,2 & -0,4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1,0 & -0,2 & 1,4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -0,4 & -0,4 & 0 & 1,4
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10000 \\ 0 \\ 0 \\ -20000 \end{Bmatrix}
$$

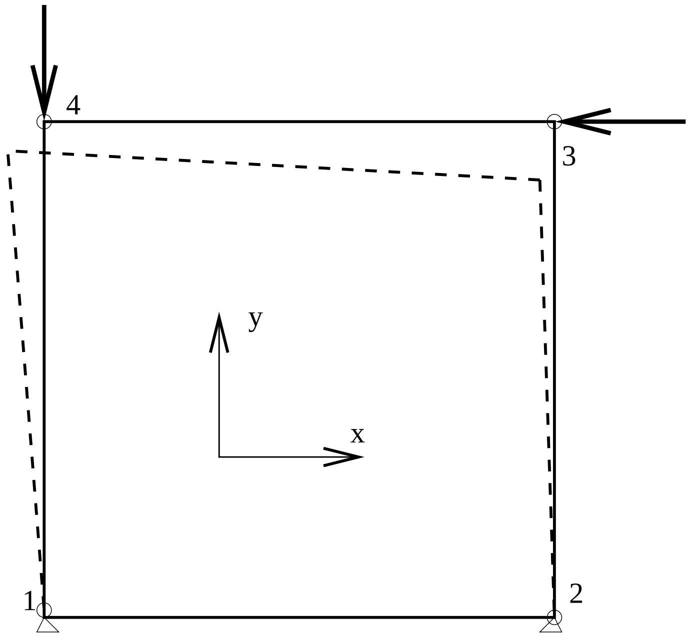
$$N = 1{,}042\ 10^9$$

Po vyřešení soustavy rovnic získáme hodnoty vektoru posunutí:

$$
\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}
= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3,87 \\ -0,39 \\ -2,82 \\ -1,91 \end{Bmatrix} 10^{-5}
$$

Pro výpočet poměrných deformací a napětí na prvcích musíme provést následujícící kroky:

1. z vektoru posunutí konstrukce vybereme hodnoty příslušné danému prvku,



Obr. 4.3 Vypočítané deformace.

2. z odvození použijeme výrazy pro $\boldsymbol{\varepsilon}$ a $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}^T = \mathbf{B}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{r}, \\ \boldsymbol{\sigma} &= \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Pro *prvek 1* tedy:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} x_i & y_i & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_j & y_j & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_k & y_k & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_i & y_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x_j & y_j & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x_k & y_k & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_1 = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2,82 \\ -1,91 \end{Bmatrix} 10^{-5}$$

$$\mathbf{D} = 20,83\ 10^9 \begin{bmatrix} 1 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Výsledné vektory budou mít tvar:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,00 \\ -1,91 \\ -2,82 \end{Bmatrix} 10^{-5}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -79,5 \\ -397,9 \\ -235,0 \end{Bmatrix} 10^{3}$$

Pro *prvek 2* použijeme stejný postup:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3,87 \\ -0,39 \\ -2,82 \\ -1,91 \end{Bmatrix} 10^{-5}$$

$$\mathbf{D} = 20,83\ 10^{9} \begin{bmatrix} 1 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Výsledné vektory budou mít tvar:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{r} 3,87 \\ -2,43 \\ -9,10 \end{array} \right\} 10^{-5}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_2 = \left\{ \begin{array}{c} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{r} 705,2 \\ -344,2 \\ -7583,3 \end{array} \right\} 10^{3}$$

▲

4.2 Desky

4.2.1 Vztahy teorie pružnosti pro desky

Teoretické vztahy pro tenké desky jsou uvedeny například v textu [50]. V dalším výkladu budeme uvádět jejich maticovou podobu, která je pro odvozování matice tuhosti konečného prvku vhodnější.

Deska má tři neznámé parametry deformace (průhyb w, pootočení φ_x a pootočení φ_y) v každém uzlu. Čtyřuzlový konečný prvek, uvedený na obrázku 4.4, tedy bude mít celkem dvanáct neznámých uzlových parametrů:

$$\mathbf{r} = \{w_1, \varphi_{x,1}, \varphi_{y,1}, w_2, \varphi_{x,2}, \varphi_{y,2}, w_3, \varphi_{x,3}, \varphi_{y,3}\}^T, \tag{4.24}$$

přičemž pootočení můžeme zapsat ve tvaru:

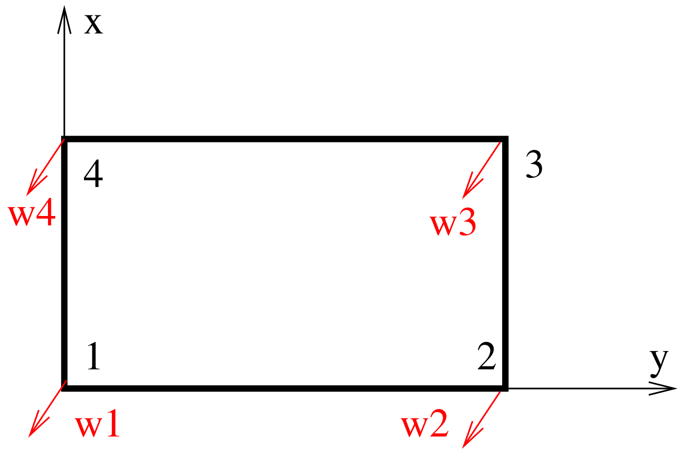
$$\varphi_{x,i} = \frac{\partial w_i}{\partial x}, \quad \varphi_{y,i} = \frac{\partial w_i}{\partial y}. \tag{4.25}$$

Geometrické rovnice:

$$\varepsilon_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \tau_{xy} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{4.26}$$

můžeme zapsat v maticové podobě ($\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\partial}^T \, \mathbf{u}$):

$$\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{c} -\frac{\partial^2}{\partial x} \\ -\frac{\partial^2}{\partial y} \\ -2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{array} \right] \left\{ \; w \; \right\} \tag{4.27}$$



Obr. 4.4 Čtyřuzlový deskový konečný prvek.

Fyzikální rovnice pro lineárně pružný a izotropní materiál mají tvar:

$$\begin{aligned} m_x &= \frac{E\ h^3}{12(1-\nu^2)}\ (\varepsilon_x + \nu\ \varepsilon_y), & (4.28)\\ m_y &= \frac{E\ h^3}{12(1-\nu^2)}\ (\varepsilon_y + \nu\ \varepsilon_x), & (4.29)\\ m_{xy} &= \frac{E\ h^3}{24(1+\nu^2)}\ \gamma_{xy}, & (4.30) \end{aligned}$$

který můžeme přepsat do maticové podoby ($\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\ \boldsymbol{\varepsilon}$):

$$\left\{ \begin{array}{c} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{array} \right\} = \frac{E\ h^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\}. \tag{4.31}$$

4.2.2 Odvození konečného prvku pro tenké desky

Protože konečný prvek má dvanáct neznámých parametrů (posunutí a pootočení), můžeme k aproximace neznámých uzlových posunutí použít polynom o dvanácti členech:

$$\begin{aligned} w &= a_1 \ + a_2\ x + a_3\ y + a_4\ x^2 + a_5\ xy + a_6\ y^2 \\ &+ \ a_7\ x^3 + a_8\ x^2 y + a_9\ xy^2 + a_{10} y^3 + a_{11} x^3 y + a_{12} x y^3. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Podle rovnice (4.25) můžeme pootočení zapsat jako derivace průhybu. S vyuzižím vztahu (4.32) dostaneme:

$$\begin{aligned} \varphi_x &= a_2 + 2a_4 x + a_5 y + 3a_y x^2 + 2a_8 xy + 3a_{11} x^2 y + a_{12} y^3, \\ \varphi_y &= a_3 + a_5 x + 2a_6 y + a_8 x^2 + 2a_9 xy + 3a_{10} y^2 + a_{11} x^3 + 3a_{12} xy^2. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Aproximaci posunutí a pootočení je možné přepsat maticově ($\mathbf{u} = \mathbf{U}\ \mathbf{a}$):
$\{w, \varphi_x, \varphi_y\}^T =$

$$\begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & x^3y & xy^3 \\ 0 & 1 & 0 & 2x & y & 0 & 3x^2 & 2xy & y^2 & 0 & 3x^2y & y^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & x^2 & 2xy & 3y^2 & x^3 & 3xy^2 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \end{array} \right\} \tag{4.34}$$

Nyní můžeme zapsat aproximace neznámých uzlových posunutí v jednotlivých uzlech konečného prvku ($\mathbf{r} = \mathbf{S}\ \mathbf{a}$):

$\{w_1, \varphi_{x,1}, \varphi_{y,1}, w_2, \varphi_{x,2}, \varphi_{y,2}, w_3, \varphi_{x,3}, \varphi_{y,3}, w_4, \varphi_{x,4}, \varphi_{y,4}\}^T =$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1^3 & x_1^2y_1 & x_1y_1^2 & y_1^3 & x_1^3y_1 & x_1y_1^3 \\ 0 & 1 & 0 & 2x_1 & y_1 & 0 & 3x_1^2 & 2x_1y_1 & y_1^2 & 0 & 3x_1^2y_1 & y_1^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_1 & 2y_1 & 0 & x_1^2 & 2x_1y_1 & 3y_1^2 & x_1^3 & 3x_1y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2^3 & x_2^2y_2 & x_2y_2^2 & y_2^3 & x_2^3y_2 & x_2y_2^3 \\ 0 & 1 & 0 & 2x_2 & y_2 & 0 & 3x_2^2 & 2x_2y_2 & y_2^2 & 0 & 3x_2^2y_2 & y_2^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_2 & 2y_2 & 0 & x_2^2 & 2x_2y_2 & 3y_2^2 & x_2^3 & 3x_2y_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3^3 & x_3^2y_3 & x_3y_3^2 & y_3^3 & x_3^3y_3 & x_3y_3^3 \\ 0 & 1 & 0 & 2x_3 & y_3 & 0 & 3x_3^2 & 2x_3y_3 & y_3^2 & 0 & 3x_3^2y_3 & y_3^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_3 & 2y_3 & 0 & x_3^2 & 2x_3y_3 & 3y_3^2 & x_3^3 & 3x_3y_3^2 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4^3 & x_4^2y_4 & x_4y_4^2 & y_4^3 & x_4^3y_4 & x_4y_4^3 \\ 0 & 1 & 0 & 2x_4 & y_4 & 0 & 3x_4^2 & 2x_4y_4 & y_4^2 & 0 & 3x_4^2y_4 & y_4^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_4 & 2y_4 & 0 & x_4^2 & 2x_4y_4 & 3y_4^2 & x_4^3 & 3x_4y_4^2 \end{bmatrix}$$

$$\times \{\ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12},\ \}^T \tag{4.35}$$

Další postup je formálně shodný s postupem uvedeným při odvozování matice tuhosti trojuzlového konečného prvku pro řešení rovinného problému.

Kombinací vztahů $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\partial}^T\ \mathbf{u}$ a $\mathbf{u} = \mathbf{U}\ \mathbf{a}$ získáme:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\ \mathbf{a}, \tag{4.36}$$

kde $\mathbf{B} = \boldsymbol{\partial}^T\ \mathbf{U}$. Protože vektor $\mathbf{a}$ obsahuje neznámé konstanty, které potřebujeme z řešení vyloučit, upravíme vztah $\mathbf{r} = \mathbf{S}\ \mathbf{a}$ (4.35) do tvaru:

$$\mathbf{a} = \mathbf{S}^{-1}\ \mathbf{r}. \tag{4.37}$$

Dosazením získaného vztahu do výrazu geometrických rovnic (4.27) získáme výsledný vztah pro poměrné deformace:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\ \mathbf{S}^{-1}\mathbf{r}. \tag{4.38}$$

Potenciální energie vnitřních sil má tvar:[1]

$$\Pi_i = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}\ d\ V = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T\ \mathbf{D}\ \boldsymbol{\varepsilon}\ d\ V \tag{4.39}$$

Potenciální energie vnějších sil:

$$\Pi_e = -\int_V \mathbf{X}^T\ \mathbf{r}\ d\ V - \int_S \mathbf{p}^T \mathbf{r}\ d\ S. \tag{4.40}$$

Potenciální energii soustavy potom můžeme zapsat:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T\ \mathbf{D}\ \boldsymbol{\varepsilon}\ d\ V - \int_V \mathbf{X}^T\ \mathbf{r}\ d\ V - \int_S \mathbf{p}^T \mathbf{r}\ d\ S. \tag{4.41}$$

Po dosazení za $\boldsymbol{\varepsilon}$ a vytknutí $\mathbf{r}$:

$$\Pi = \frac{1}{2}\,\mathbf{r}^T \int_V \mathbf{S}^{-1T}\ \mathbf{B}^T\ \mathbf{D}\mathbf{B}\ \mathbf{S}^{-1}\ d\ V\ \mathbf{r}^T - \int_V \mathbf{X}^T\ d\ V\ \mathbf{r} - \int_S \mathbf{p}^T\ d\ S\ \mathbf{r}. \tag{4.42}$$

Stručně:

$$\Pi = \frac{1}{2}\,\mathbf{r}^T\ \mathbf{K}\ \mathbf{r}\ -\ \mathbf{F}^T\ \mathbf{r}, \tag{4.43}$$

kde $\mathbf{K}$ je matice tuhosti konečného prvku:

$$\mathbf{K} = \int_V\ \mathbf{S}^{-1T}\ \mathbf{B}^T\ \mathbf{D}\ \mathbf{B}\ \mathbf{S}^{-1}\ d\ V \tag{4.44}$$

a $\mathbf{F}$ je zatěžovací vektor konečného prvku:

$$\mathbf{F} = -\int_V \mathbf{X}^T\ d\ V\ - \int_S \mathbf{p}^T\ d\ S. \tag{4.45}$$

Pro studovaný konečný prvek je vhodné použít numerickou integraci ve 2D, protože matice $\mathbf{B}$ obsahuje proměnné x, y a její obecné vyčíslení je pracné.

$$\mathbf{K} = \int_A\ \mathbf{S}^{-1T}\ \mathbf{B}^T\ \mathbf{D}\ \mathbf{B}\ \mathbf{S}^{-1}\ d\ A. \tag{4.46}$$

[1] Všimněme si, že zápis je formálně shodný s dříve uváděnými tvary pro příhradovinu i rovinný problém. Ovšem vektor σ neobsahuje napětí, ale měrné vnitřní síly, které jsou uvedeny v rovnici (4.31).

Z $\mathbf{K}_e$ a $\mathbf{r}_e$ a $\mathbf{F}_e$ jednotlivých prvků (e je číslo prvku) sestavíme pomocí vztahů uvedených v kapitole 2 matici tuhosti $\mathbf{K}$, vektor posunutí a pootočení $\mathbf{r}$ a zatěžovací vektor $\mathbf{F}$ celé konstrukce a neznámé určíme řešením soustavy rovnic:

$$\mathbf{K}\ \mathbf{r} = \mathbf{F}. \tag{4.47}$$

Po vyřešení soustavy (4.47) můžeme získat vnitřní síly postupem obdobným jako u rovinného problému:

1. z vektoru $\mathbf{r}$ celé konstrukce sestavíme vektory $\mathbf{r}_e$ jednotlivých konečných prvků,
2. pro vybrané body každého prvku[1] stanovíme poměrné deformace:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_e = \mathbf{B}\ \mathbf{S}^{-1}\ \mathbf{r}_e, \tag{4.48}$$

3. pro vybrané body každého prvku stanovíme měrné vnitřní síly:

$$\boldsymbol{\sigma}_e = \mathbf{D}\ \boldsymbol{\varepsilon}_e \tag{4.49}$$

nebo

$$\boldsymbol{\sigma}_e = \mathbf{D}\ \mathbf{B}\ \mathbf{S}^{-1}\ \mathbf{r}_e. \tag{4.50}$$

4.2.3 Vyhodnocování výsledků na deskách

Měrné vnitřní síly na deskách zpravidla stanovujeme za účelem jejich dimenzování a posuzování. Zejména v případě železobetonových konstrukcí se setkáváme s problémem stanovení takové podoby vnitřních sil, aby byly vhodné pro potřeby dimenzování. Problém činí zejména skutečnost, že standardní vztahy v normách pro navrhování betonových konstrukcí jsou navrřeny pro prutové prvky.

Jak již bylo uvedeno v [50] se z tohoto důvodu zavádí pojem *dimenzačních momentů*, které jsou definovány:

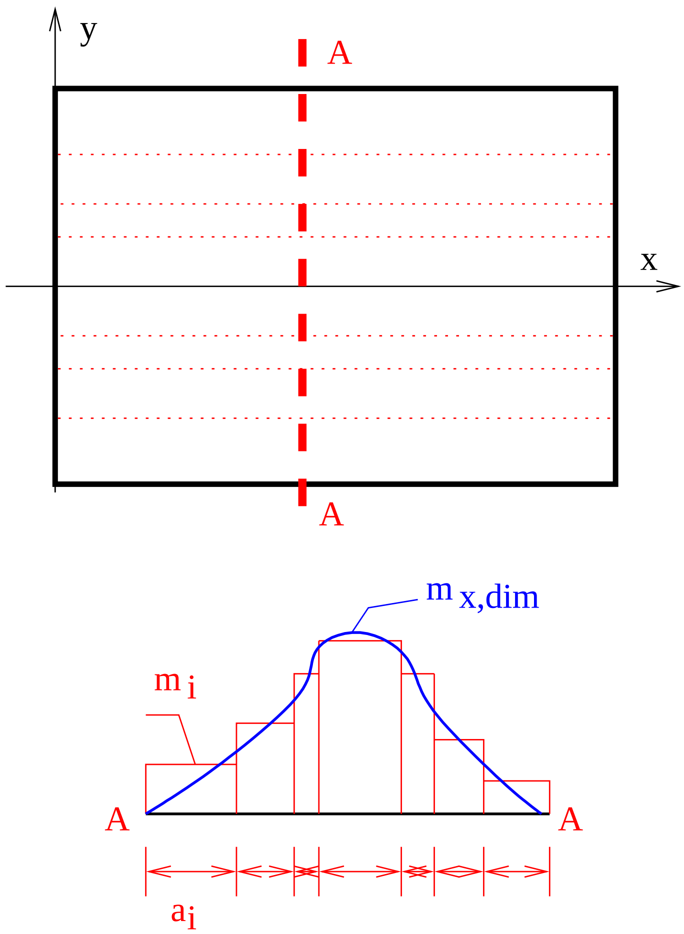
$$\begin{aligned} m_{x,dim} &= m_x + sgn(m_x)\ |m_{xy}| \\ m_{y,dim} &= m_y + sgn(m_y)\ |m_{xy}|. \end{aligned}$$

Je zřejmé, že dimenzační momenty poskytují o něco vyšší hodnoty vnitřních sil, než by odpovídalo skutečně vypočtenému stavu konstrukce, ale výrazně zjednodušují práci projektanta, který nemusí navrhovat speciální výztuž pro kroucení.

Pro využití dimenzačních vztahů pro pruty ovšem nemůžeme přímo použít měrné momenty $m_{x,dim}$ a $m_{y,dim}$, ale potřebujeme jejich výslednici na vhodně zvoleném pruhu desky.

Můžeme použít postupu, který je ilustrován na obrázku 4.5:

[1] Zpravidla se volí integrační body, které byly využity při numerické integraci potřebné k sestavení matice $\mathbf{K_e}$prvek .



Obr. 4.5 Postup při určování momentů pro dimenzování.

1. vedeme řez A-A ve sledovaném místě nosníku (polohu řezu A-A zvolíme z rozložení výsledků ve 2D zobrazení),
2. vykreslíme příslušný moment m_{dim} v řezu A-A,
3. vytvoříme po částech konstantní náhradu m_{dim},
4. dimenzujeme na moment $M_i = a_i\ m_i\ [kN\ m]$.

Uvedený postup použijeme pro oba směry x a y a jim odpovídající momenty.

4.3 Tělesa

4.3.1 Vztahy teorie pružnosti pro prostor

Modelování stavebních konstrukcí pomocí tělesa se ve stavební praxi používá poměrně málo často.[1] V této části proto uvedeme pouze nejjednodušší prostorový konečný prvek – čtyřuzlový čtyřstěn s lineárními aproximacemi posunutí. Je samozřejmě možné se setkat i s prvky osmiuzlovými, které jsou uvedeny na obrázku 4.6 nebo i s prvky dvacetiuzlovými.[2]

Odvozovaný prvek ve tvaru čtyřstěnu, který je uveden na obrázku 4.6 dole, je velmi podobný již popisovanému trojúhelníkovému prvku pro řešení rovinného problému, jeho odvození se bude lišit jen jiným počtem stupňů volnosti (tedy neznámých parametrů posunutí). V teorii pružnosti [50] jsou v prostoru tři neznámá posunutí u, vw v každém bodě.

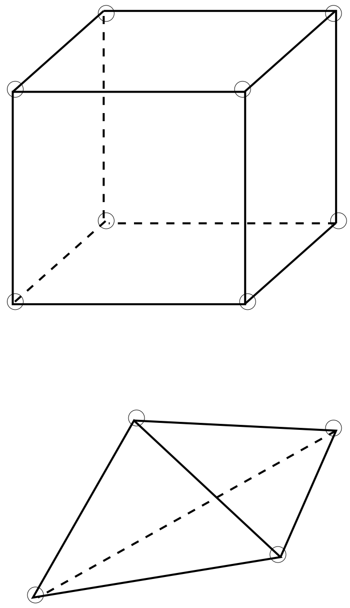
Pro další postup bude potřebné uvést vztahy teorie pružnosti, které uvedeme v maticové podobě.

Geometrické vztahy ($\boldsymbol{\varepsilon} = \partial\ \mathbf{u}$) mají v prostoru tvar:

$$\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial}{\partial\ x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial\ y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial\ z} & \frac{\partial}{\partial\ y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial\ x} \\ \frac{\partial}{\partial\ y} & \frac{\partial}{\partial\ x} & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u \\ v \\ w \end{array} \right\}. \tag{4.51}$$

[1] Většina programů na bázi metody konečných prvků, které jsou určeny pro stavebnictví, tento typ prvků vůbec neobsahuje.

[2] Osmiuzlové a dvacetiuzlové prvky jsou, ale obvykle odvozovány jako prvky *izoparametrické*, typický postup odvození takových prvků bude popsán až v dalším textu.



Obr. 4.6 Tvary objemových konečných prvků.

Fyzikální vztahy pro lineárně pružný izotropní materiál ($\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\ \boldsymbol{\varepsilon}$) je možné maticově zapsat:

$$\left\{\begin{array}{c}\sigma_x\\\sigma_y\\\sigma_z\\\tau_{yz}\\\tau_{zx}\\\tau_{xy}\end{array}\right\} = A \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\ \nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\ \nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\ \nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \left\{\begin{array}{c}\varepsilon_x\\\varepsilon_y\\\varepsilon_z\\\gamma_{yz}\\\gamma_{zx}\\\gamma_{xy}\end{array}\right\},$$

kde

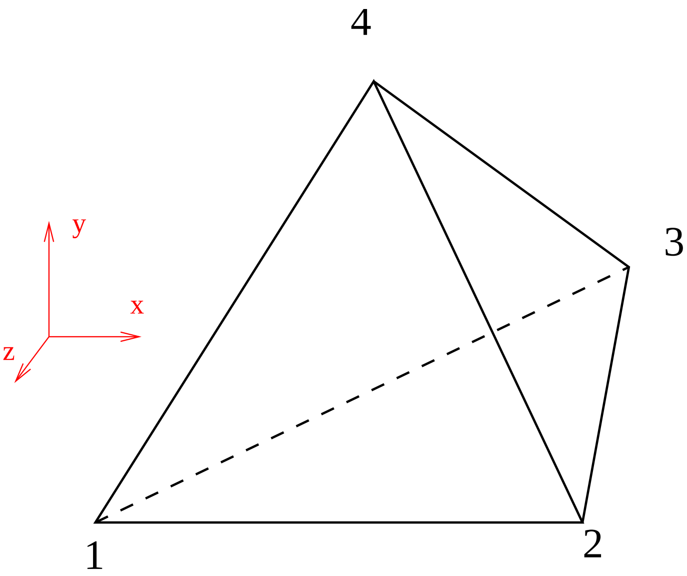
$$A = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)\ (1-2\ \nu)}. \tag{4.52}$$

4.3.2 Odvození konečného prvku pro prostorové úlohy

V každém bodě prvku (a tedy i v každém uzlu) budeme uvažovat tři neznámé parametry deformace u, v, w. U čtyřuzlového prvku podle obrázku 4.7 tedy budeme mít celkem dvanáct neznámých uzlových parametrů:

$$\mathbf{u} = \{u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, u_3, v_3, w_3, u_4, v_4, w_4\}^T. \tag{4.53}$$

Protože neznámých posunutí je dvanáct, můžeme použít i polynom s dvanácti parametry. Protože je potřebné aproximovat tři funkce posunutí (u, v, w), je možné



Obr. 4.7 Konečný prvek tvaru čtyřstěnu

pří respektování požadavku na úplnost použitých polynomů $n-$tého stupně použít nejvýše lineární aproximace posunutí:

$$u(x,y,z) = a_1\ x + a_2\ y + a_3\ z + a_4, \tag{4.54}$$

$$v(x,y,z) = a_5\ x + a_6\ y + a_7\ z + a_8, \tag{4.55}$$

$$w(x,y,z) = a_9\ x + a_{10}\ y + a_{11}\ z + a_{12}. \tag{4.56}$$

Maticově je možné vztah (4.56) zapsat ($\mathbf{u} = \mathbf{U}\ \mathbf{a}$):

$$\left\{ \begin{array}{c} u \\ v \\ w \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & y & z & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & y & z & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12}. \end{array} \right\} \tag{4.57}$$

Vztah (4.57) můžeme přepsat pro jednotlivé uzly prvku. Získáme tak aproximace neznámých uzlových posunutí v uzlech 1, 2, 3 a 4 ($\mathbf{r} = \mathbf{S}\ \mathbf{a}$):

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ w_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ w_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \end{Bmatrix} \tag{4.58}$$

Stejně jako u předchozích konečných prvků můžeme kombinací vztahů $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\partial}\ \mathbf{u}$ a $\mathbf{u} = \mathbf{U}\ \mathbf{a}$ získat výraz pro poměrné deformace $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\ \mathbf{a}$, kde $\mathbf{B} = \boldsymbol{\partial}^T\ \mathbf{U}$:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \end{Bmatrix} \tag{4.59}$$

Další postup je opět formálně shodný s postupem uvedeným při odvozování matic tuhosti dříve uvedených konečných prvků.

Kombinací vztahů $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\partial}^T\ \mathbf{u}$ a $\mathbf{u} = \mathbf{U}\ \mathbf{a}$ získáme:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\ \mathbf{a}, \tag{4.60}$$

kde $\mathbf{B} = \boldsymbol{\partial}^T\ \mathbf{U}$. Protože vektor $\mathbf{a}$ obsahuje neznámé konstanty, které potřebujeme z řešení vyloučit, upravíme vztah $\mathbf{r} = \mathbf{S}\ \mathbf{a}$ (4.35) do tvaru:

$$\mathbf{a} = \mathbf{S}^{-1}\ \mathbf{r}. \tag{4.61}$$

Dosazením získaného vztahu do výrazu geometrických rovnic (4.27) získáme výsledný vztah pro poměrné deformace:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\ \mathbf{S}^{-1}\mathbf{r}. \tag{4.62}$$

Potenciální energie vnějších sil:

$$\Pi_e = -\int_V \mathbf{X}^T \ \mathbf{r} \ d\,V - \int_S \mathbf{p}^T \mathbf{r} \ d\,S. \tag{4.63}$$

Potenciální energii soustavy potom můžeme zapsat:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \ \mathbf{D} \ \boldsymbol{\varepsilon} \ d\,V - \int_V \mathbf{X}^T \ \mathbf{r} \ d\,V - \int_S \mathbf{p}^T \mathbf{r} \ d\,S. \tag{4.64}$$

Po dosazení za $\boldsymbol{\varepsilon}$ a vytknutí $\mathbf{r}$:

$$\Pi = \frac{1}{2} \ \mathbf{r}^T \int_V \mathbf{S}^{-1T} \ \mathbf{B}^T \ \mathbf{DB} \ \mathbf{S}^{-1} \ d\,V \ \mathbf{r}^T - \int_V \mathbf{X}^T \ d\,V \ \mathbf{r} - \int_S \mathbf{p}^T \ d\,S \ \mathbf{r}. \tag{4.65}$$

Stručně:

$$\Pi = \frac{1}{2} \ \mathbf{r}^T \ \mathbf{K} \ \mathbf{r} \ - \ \mathbf{F}^T \ \mathbf{r}, \tag{4.66}$$

kde $\mathbf{K}$ je matice tuhosti konečného prvku:

$$\mathbf{K} = \int_V \ \mathbf{S}^{-1T} \ \mathbf{B}^T \ \mathbf{D} \ \mathbf{B} \ \mathbf{S}^{-1} \ d\,V \tag{4.67}$$

a $\mathbf{F}$ je zatěžovací vektor konečného prvku:

$$\mathbf{F} = -\int_V \mathbf{X}^T \ d\,V \ - \int_S \mathbf{p}^T \ d\,S. \tag{4.68}$$

Pro studovaný konečný prvek (matice $\mathbf{B}, \mathbf{D}, \mathbf{S^{-1}}$ obsahují jen konstanty, takže integrovat je třeba jen $\int_V \ d\,v$) můžeme napsat:

$$\mathbf{K} = V \ \mathbf{S}^{-1T} \ \mathbf{B}^T \ \mathbf{D} \ \mathbf{B} \ \mathbf{S}^{-1} \tag{4.69}$$

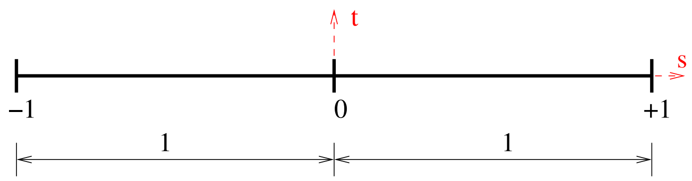
kde V je objem prvku a vektor uzlových sil má tvar:

$$\mathbf{F} = \mathbf{X}. \tag{4.70}$$

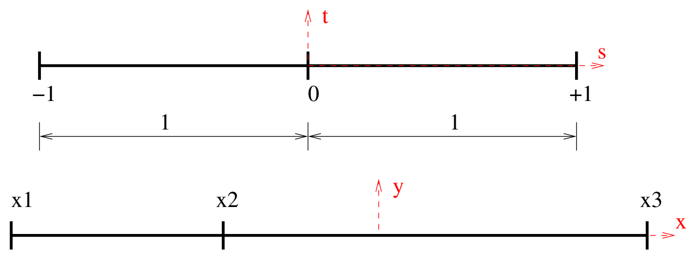
4.4 Izoparametrické konečné prvky

4.4.1 Jednotkový a skutečný konečný prvek

V některých praktických úlohách se ukazuje, že je vhodné používat konečné prvky, které mají posunutí aproximována polynomy vyšších řádů. Dalším problémem je skutečnost, že reálné konstrukce mohou mít zakřivené okraje (kruhové desky vodojemů nebo objektů na vysílačích a podobně) nebo mohou obsahovat například kruhové otvory. Tyto prvky je možné přibližně modelovat úsečkami tvořícími hrany dříve popsaných konečných prvků, ale zřejmě by bylo vhodnější modelovat tyto detaily přesněji. Proto bývají odvozovány prvky vyšších řádů se zakřivenými hranami.



Obr. 4.8 Jednotkové (s) souřadnice v 1D.



Obr. 4.9 Vztah mezi x a s.

Poznámka 4.2. Konečné prvky vyšších řádů je samozřejmě možné odvodit způsobem uvedeným v předchozím textu. Dále uvedený postup odvození *izoparametrických* konečných prvků je ovšem běžnější, proto jej zde uvádíme.

Proces tvorby matice tuhosti *izoparametrického* konečného prvku probíhá na jednotkovém obrazci (úsečka, čtverec, krychle) v jednotkových souřadnicích (ξ, η, ζ) nebo (s, t), které jsou pro jednorozměrný případ ilustrovány na obrázku 4.8. Pomocí zvolených funkcí se pak jednotkový obrazec (ξ, η, ζ) zobrazí na skutečný tvar prvku (x, y, z) tak, jak je to ukázáno na obrázku 4.9.

Funkce použité pro toto *zobrazení* se použijí i jako *aproximace* hledaných veličin (posunutí, případně pootočení).

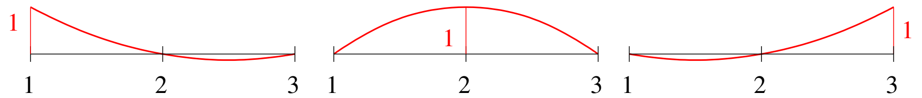
Aby bylo možno uvedené funkce takto použít, musí být splněno, že délka strany prvku je $1 + 1 = 2$. Dále je potřebné, aby tyto *tvarové funkce* N_i nabývaly hodnot:

- v bodě i hodnoty 1,
- ve všech ostatních uzlových bodech bodech hodnoty 0.

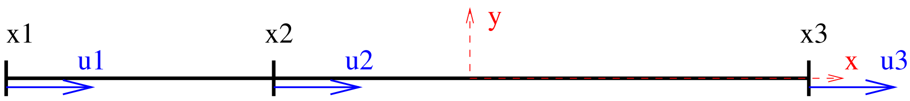
Potom je možné zapsat vztah mezi jednotkovými (*přirozenými*) souřadnicemi s a skutečnými souřadnicemi x:

$$x = \sum_i N_i(s)\; x_i, \tag{4.71}$$

kde N_i jsou **tvarové funkce** a x_i jsou souřadnice jednotlivých uzlů.



Obr. 4.10 Tvarové funkce pro 1D.



Obr. 4.11 Trojuzlový příhradový prvek.

Příklad tvarových funkcí pro jednorozměrnou úlohu je uveden na obrázku 4.10. Pro uvedený případ bychom tedy mohli rovnici (4.71) rozepsat do podoby:

$$x = N_1(s)\ x_1 + N_2(s)\ x_2 + N_3(s)\ x_3. \tag{4.72}$$

Pro aproximaci posunutí použijeme ty samé tvarové funkce N_i, a proto můžeme pro aproximaci posunutí $u(x)$ napsat:

$$u(x) = \sum_i N_i(s)\ u_i, \tag{4.73}$$

kde $u(x)$ je funkce posunutí a u_i jsou posunutí jednotlivých uzlů (tedy bodů, ve kterých mají aproximační funkce hodnotu 1).

4.4.2 Odvození trojuzlového prvku příhradoviny

Pro ilustraci ukážeme postup odvození trojuzlového konečného prvku, který má definována posunutí jen ve směru osy x. Takový prvek, který je zobrazen na obrázku 4.11, by bylo teoreticky možné použít jako prvek rovinné příhradoviny, praktický význam však nemá. Pro svoji jednoduchost je ovšem vhodný pro výklad problematiky.

Prvek bude mít jedno posunutí u_i v každém uzlu, celkem tedy tři neznámá uzlová posunutí:

$$u = u_1, u_2, u_3{}^T. \tag{4.74}$$

Podle zásad uvedených v předchozích odstavcích zvolíme tvarové funkce:

$$\begin{aligned} N_1 &= -\frac{s(1-s)}{2}, \\ N_2 &= (1-s^2), \\ N_3 &= \frac{s(1+s)}{2}, \end{aligned} \tag{4.75}$$

které odpovídají funkcím na obrázku 4.10.

Rovnice 4.71 tedy bude mít pro tento konkrétní prvek podobu:

$$x = N_1\ x_1 + N_2\ x_2 + N_3\ x_3 = -\frac{s(1-s)}{2}\ x_1 + (1-s^2)\ x_2 + \frac{s(1+s)}{2}\ x_3, \tag{4.76}$$

což můžeme přepsat maticově:

$$\{x\} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}, \tag{4.77}$$

nebo rozepsat:

$$\{x\} = \begin{bmatrix} -\frac{s(1-s)}{2} & (1-s^2) & \frac{s(1+s)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}. \tag{4.78}$$

Pro aproximaci posunutí u použijeme stejné funkce jako pro x, tedy:

$$u = N_1\ u_1 + N_2\ u_2 + N_3\ u_3 = -\frac{s(1-s)}{2}\ u_1 + (1-s^2)\ u_2 + \frac{s(1+s)}{2}\ u_3, \tag{4.79}$$

což můžeme přepsat maticově:

$$\{u\} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}, \tag{4.80}$$

případně rozepsat:

$$\{u\} = \begin{bmatrix} -\frac{s(1-s)}{2} & (1-s^2) & \frac{s(1+s)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}. \tag{4.81}$$

Uvážíme-li, že poměrné deformace je v jednorozměrné úloze možné stanovit:

$$\varepsilon = \boldsymbol{\partial}\mathbf{u} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}, \tag{4.82}$$

a tedy:

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = \{\frac{\partial}{\partial x}\} \begin{bmatrix} -\frac{s(1-s)}{2} & (1-s^2) & \frac{s(1+s)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \tag{4.83}$$

a po derivaci:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \frac{\partial(-\frac{s(1-s)}{2})}{\partial x} & \frac{\partial(1-s^2)}{\partial x} & \frac{\partial \frac{s(1+s)}{2}}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \tag{4.84}$$

Stručně je můžeme zapsat $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\ \mathbf{u}$:

$$\varepsilon = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} \right\} \tag{4.85}$$

Ve vztazích pro ε jsou výrazy $\frac{\partial N_i}{\partial x}$, ale N_i je funkcí s, výrazy tedy bude potřebné ještě upravit.

Pro derivaci složené funkce platí:

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} \tag{4.86}$$

Derivací vztahu (4.76) tedy získáme:

$$\frac{dx}{ds} = \sum_i \frac{\partial N_i}{\partial s} x_i = J. \tag{4.87}$$

Hodnota (obecně půjde o matici) J je nazývá *Jakobián tranformace*.

Ze vztahu

$$\frac{dx}{ds} = J \tag{4.88}$$

pak můžeme vyjádřit ds:

$$ds = \frac{1}{J} dx. \tag{4.89}$$

Poznámka 4.3. Obecně bude místo $\frac{1}{J}$ inverzní matice: $\mathbf{J^{-1}}$.

Ze vztahů (4.86) a (4.89) plyne:

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = J \frac{\partial N_i}{\partial s} \Rightarrow \frac{\partial N_i}{\partial s} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{1}{J}. \tag{4.90}$$

Pomocí vztahu (4.90) vyjádříme matici $\mathbf{B}$:

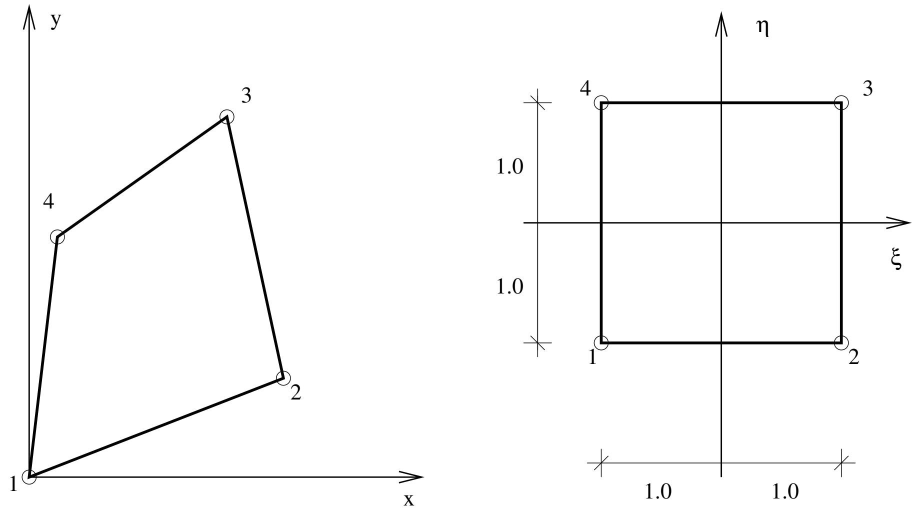
$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{array} \right] = \frac{1}{J} \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial N_1}{\partial s} & \frac{\partial N_2}{\partial s} & \frac{\partial N_3}{\partial s} \end{array} \right] \tag{4.91}$$

Potom můžeme psát:

$$\{\varepsilon\} = \frac{1}{J} \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial N_1}{\partial s} & \frac{\partial N_2}{\partial s} & \frac{\partial N_3}{\partial s} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} \right\} \tag{4.92}$$

Známe-li ε můžeme zapsat vztah pro výpočet potenciální energie vnitřních sil:

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV, \tag{4.93}$$



Obr. 4.12 Čtyřuzlový prvek pro rovinný problém.

a pro matici tuhosti prutového prvku:

$$\mathbf{K_e} = A\int_{x_1}^{x_3} \boldsymbol{\varepsilon}^t \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} dx. \tag{4.94}$$

Poznámka 4.4. Rovnici (4.95) je v daném případě možné zintegrovat analyticky, u složitějších konečných prvků to obvykle možné není, proto se využívá **numerická integrace**, nejčastěji Gaussova integrační formule:

$$\mathbf{K} = A\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{\varepsilon}(s)^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}(s) w_i, \tag{4.95}$$

kde w_i je váha integračního bodu, m je počet integračních bodů, s jsou souřadnice integračních bodů.

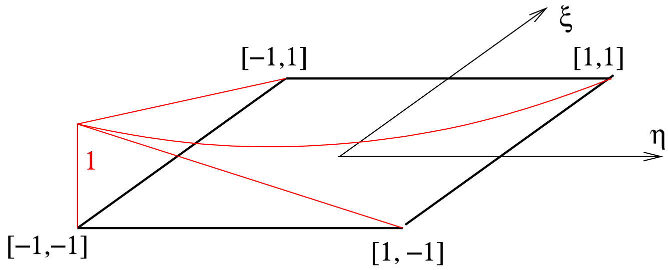
4.4.3 Izoparametrický konečný prvek pro rovinný problém

Podobným postupem jako u jednorozměrného prvku je možné sestavit matici tuhosti prvku pro řešení rovinného problému.

Proces tvorby matice tuhosti konečného prvku zde probíhá na jednotkovém čtverci v jednotkových (přirozených) souřadnicích ξ, η. Funkce použité pro zobrazení opět použijeme i jako aproximace hledané veličiny.

Tvarové funkce použijeme ve tvaru:

$$N_i(\eta, \xi) = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i), \tag{4.96}$$



Obr. 4.13 Tvarová funkce ve 2D.

kde η_i, ξ_i jsou souřadnice vrcholů (uzlů) jednotkového prvku, které nabývají hodnot -1 až 1:

$$x = \sum_i N_i(\xi,\eta)\ x_i, \qquad y = \sum_i N_i(\xi,\eta)\ y_i. \tag{4.97}$$

Tvarové funkce zvolíme ve tvaru:

$$N_i(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i).$$

Posunutí můžeme, stejně jako u jednorozměrného prvku vyjádřit pomocí tvarových funkcí (4.98):

$$\begin{aligned} u &= \sum_i N_i(\xi,\eta)\ u_i = N_1u_1 + N_2u_2 + N_3u_3 + N_4u_4, \\ v &= \sum_i N_i(\xi,\eta)\ v_i = N_1v_1 + N_2v_2 + N_3v_3 + N_4v_4. \end{aligned} \tag{4.98}$$

Přepsáním výrazů (4.98) do maticové podoby získáme:

$$\left\{ \begin{array}{c} u \\ v \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccccc} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{array} \right\}. \tag{4.99}$$

Nyní vyjádříme poměrné deformace pomocí geometrických rovnic: $\varepsilon = \boldsymbol{\partial}\mathbf{u}$:

$$\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u \\ v \end{array} \right\}. \tag{4.100}$$

Po dosazení za $\mathbf{u}$ získáme:

$$\left\{\begin{array}{c}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{array}\right\}=\left[\begin{array}{cc}\frac{\partial}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x}\end{array}\right]\left[\begin{array}{cccccccc}N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0\\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}u_1\\ v_1\\ u_2\\ v_2\\ u_3\\ v_3\\ u_4\\ v_4\end{array}\right\} \tag{4.101}$$

Po provedení derivací v rovnici (4.101) získáme $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\ \mathbf{r}$:

$$\left\{\begin{array}{c}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{array}\right\}=\left[\begin{array}{cccccccc}\frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y}\\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x}\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}u_1\\ v_1\\ u_2\\ v_2\\ u_3\\ v_3\\ u_4\\ v_4\end{array}\right\}. \tag{4.102}$$

Ve vztazích pro ε jsou členy $\frac{\partial N_i}{\partial x}$ a $\frac{\partial N_i}{\partial y}$, ale N_i jsou funkcí η, ξ.
Využijeme proto vztahy pro derivaci složené funkce:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \xi} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi},\\ \frac{\partial u}{\partial \eta} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta},\end{aligned} \tag{4.103}$$

což je možné zapsat v maticové podobě:

$$\left\{\begin{array}{c}\frac{\partial u}{\partial \xi}\\ \frac{\partial u}{\partial \eta}\end{array}\right\}=\left[\begin{array}{cc}\frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi}\\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta}\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\frac{\partial u}{\partial x}\\ \frac{\partial u}{\partial y}\end{array}\right\}=[J]\left\{\begin{array}{c}\frac{\partial u}{\partial x}\\ \frac{\partial u}{\partial y}\end{array}\right\} \tag{4.104}$$

Tedy například:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi}\, u_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi}\, u_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \xi}\, u_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \xi}\, u_4. \tag{4.105}$$

Ze vztahu (4.104) vyjádříme derivace podle x a y:

$$\left\{\begin{array}{c}\frac{\partial u}{\partial x}\\ \frac{\partial u}{\partial y}\end{array}\right\}=[J]^{-1}\left\{\begin{array}{c}\frac{\partial u}{\partial \xi}\\ \frac{\partial u}{\partial \eta}\end{array}\right\}. \tag{4.106}$$

Pak můžeme psát:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{1,1} & J_{1,2} \\ J_{2,1} & J_{2,2} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{det(\mathbf{J})} \begin{bmatrix} J_{2,2} & -J_{1,2} \\ -J_{2,1} & J_{1,1} \end{bmatrix}, \tag{4.107}$$

kde

$$det(\mathbf{J}) = J = J_{1,1} \times J_{2,2} - J_{1,2} \times J_{2,1}. \tag{4.108}$$

Geometrické rovnice (4.100) přepíšeme s využitím (4.99):

$$\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} u \\ v \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{array} \right\} \tag{4.109}$$

Ze vztahu (4.106) plyne:

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{array} \right\} = \mathbf{J}^{-1} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{array} \right\}, \qquad \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{array} \right\} = \mathbf{J}^{-1} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{array} \right\}. \tag{4.110}$$

Na základě předchozích vztahů tedy můžeme přepsat geometrické rovnice do tvaru:

$$\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{J}^{-1} \\ \mathbf{J}^{-1} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{array} \right\}, \tag{4.111}$$

kde:

$$\left\{ \frac{\partial u}{\xi} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\xi} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{array} \right\}. \tag{4.112}$$

Z posledních dvou vztahů můžeme získat:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \gamma_{xy} \end{array} \right\} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{J}^{-1} \\ \mathbf{J}^{-1} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\xi} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\eta} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\xi} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\eta} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \tag{4.113}$$

Matici tuhosti je tedy možné stanovit ze vztahu:

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, dV, \tag{4.114}$$

který můžeme přepsat do jednotkových souřadnic:

$$\mathbf{K} = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \; t \; \det(\mathbf{J}) \; d\xi \; d\eta. \tag{4.115}$$

Namísto rovnice (4.115) je v praktických úlohách vhodnější použít numerickou integraci například pomocí Gaussovy integrační formule:

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \; t \; w_{i,j} \; det(\mathbf{J}) d\xi \; d\eta. \tag{4.116}$$

Příklad 4.5. Pomocí trojuzlového prvku a izoparametrického čtyřuzlového prvku stanovte napětí a deformace ve stěně o rozměrech $1 \times 1 \times 0.1$ m, je-li $\rho = 1000 \frac{kg}{m^3}$, $E = 10 \; GPa$, $\nu = 0.2$, $g = 10 \frac{m}{s^{-2}}$. Levý okraj stěny je vetknutý.

Vypište hodnoty svislých deformací v pravém dolním rohu stěny. Sestavte dvě sítě konečných prvků s různou hustotou, například 1×1 a 10×10.

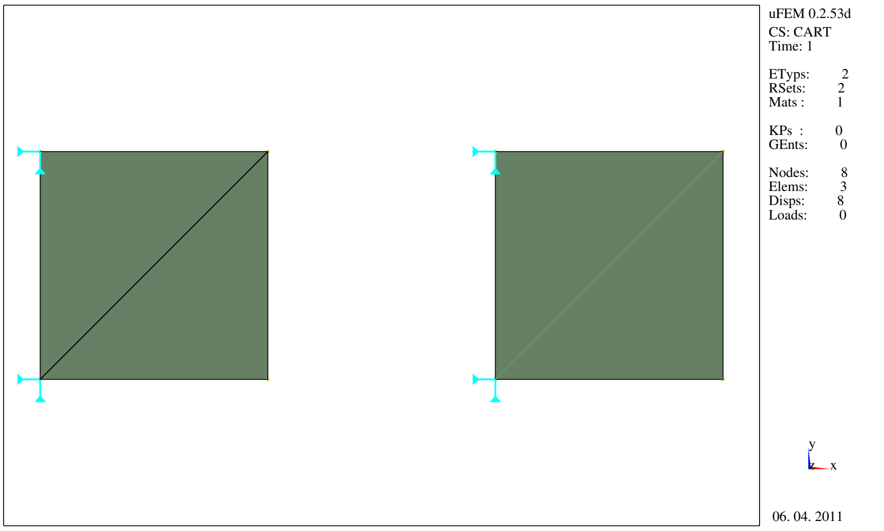
Řešení. K výpočtu použijeme například software uFEM. Nejprve rozdělíme stěnu na jeden izoparametrický čtyřuzlový konečný prvek. V případě trojúhelníkových prvků je nutné použít dělení na dva prvky tak, jak je ukázáno na obrázku 4.14.

Spočtené deformace jsou vykresleny na obrázku 4.15, přičemž byly stanove hodnoty -1.53×10^{-06} m pro trojuhelníkové prvky a -2.23×10^{-06} m pro izoparametrický prvek.

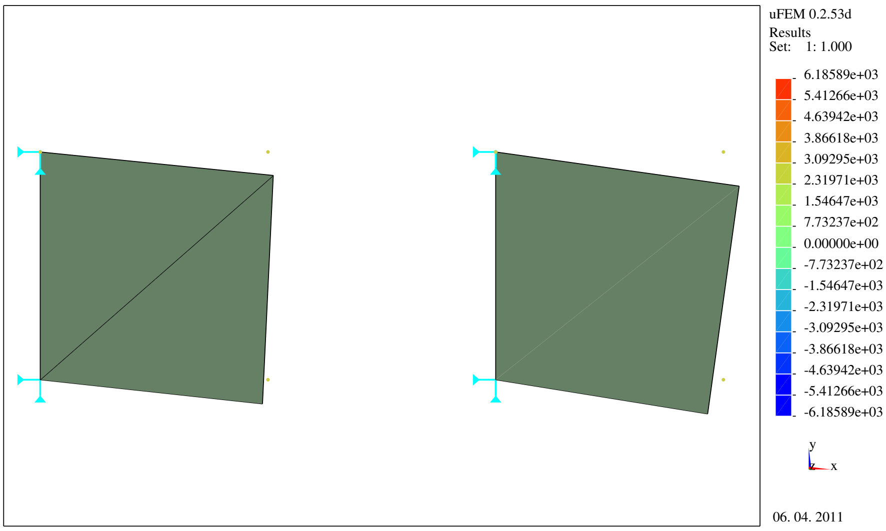
Normálové napětí σ_x je uvedeno na obrázku 4.16, normálové napětí σ_y je uvedeno na obrázku 4.17 a smykové napětí τ_{xy} je na obrázku 4.18.

Dále sestavíme podrobnější model s počtem 10×10 izoparametrických a $2 \times 10 \times$ $\times$ 10 trojúhelníkových konečných prvků.

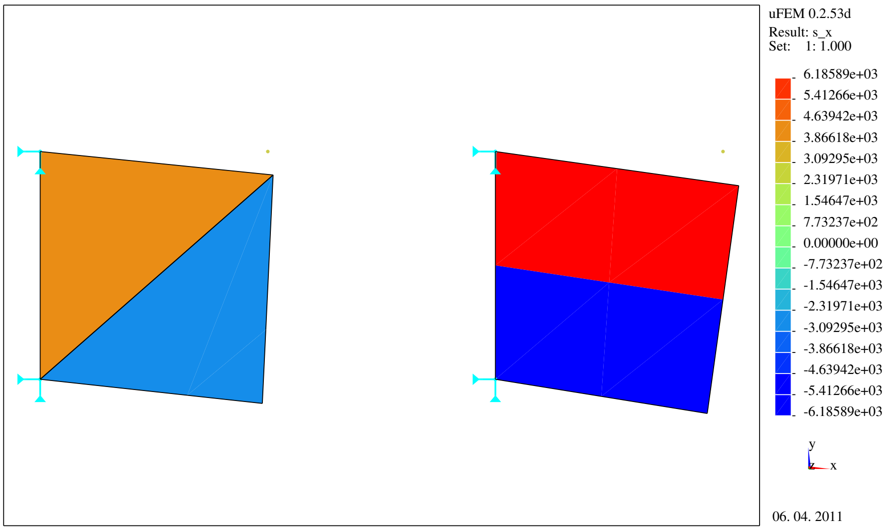
Spočtené deformace jsou vykresleny na obrázku 4.19, přičemž byly stanoveny hodnoty -2.83×10^{-06} m pro trojuhelníkové prvky a -2.89×10^{-06} m pro izoparametrické prvky.



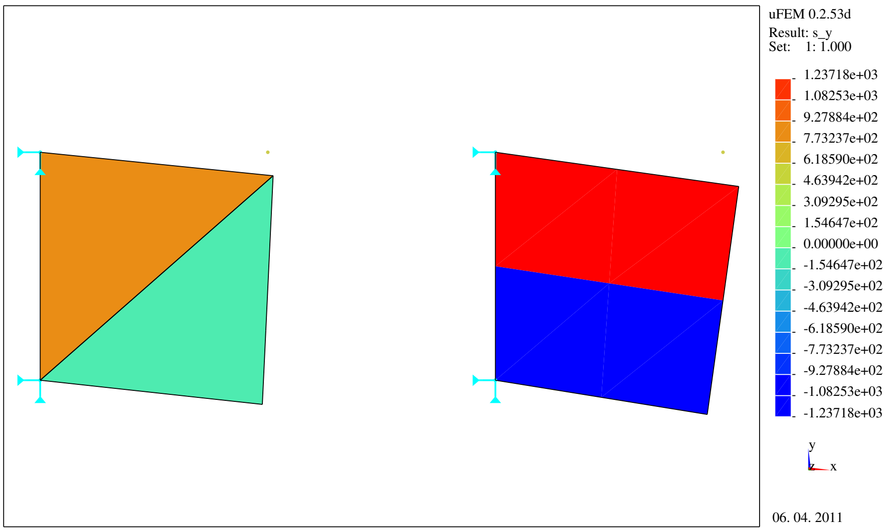
Obr. 4.14 Výpočetní model.



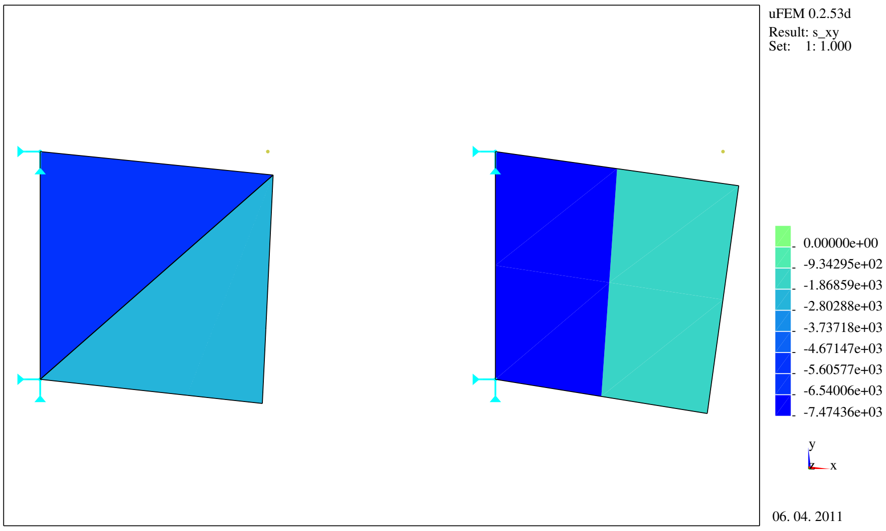
Obr. 4.15 Deformace.



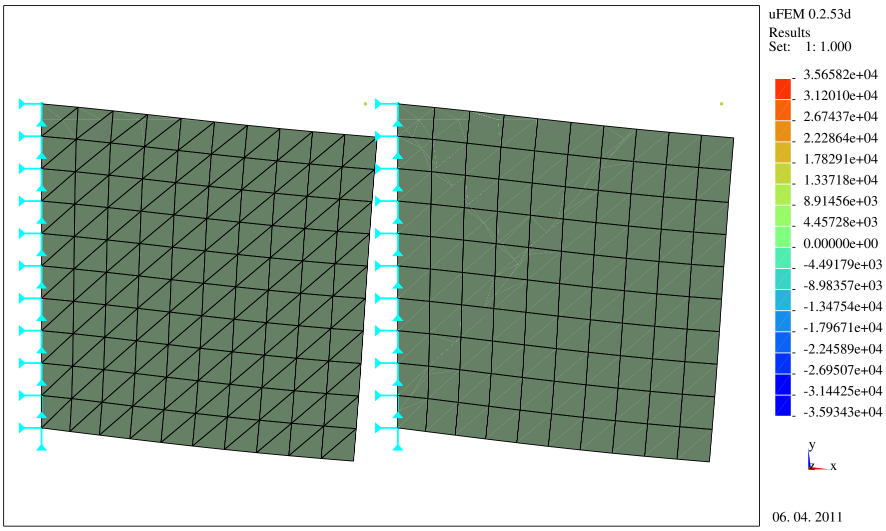
Obr. 4.16 Napětí σ_x.



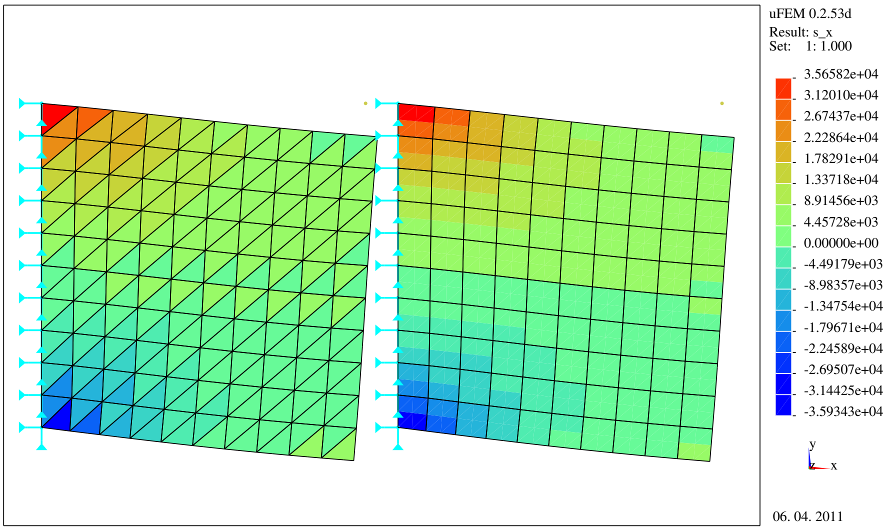
Obr. 4.17 Napětí σ_y.



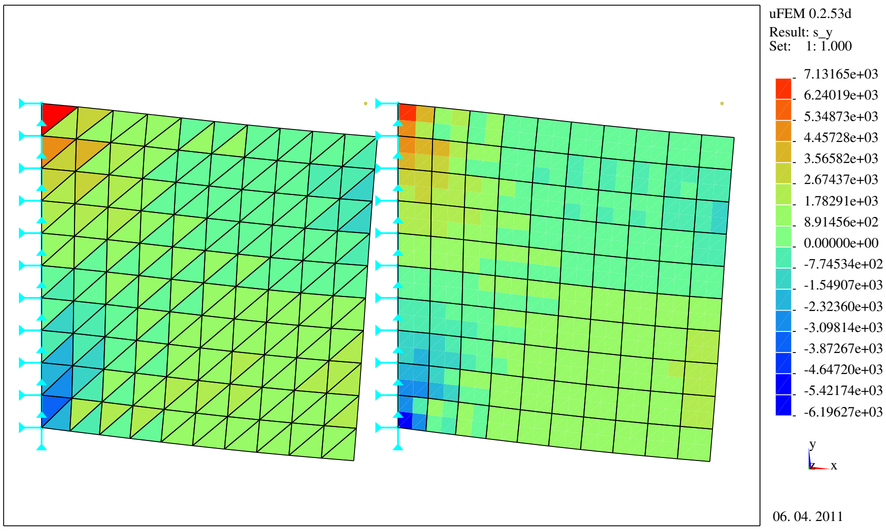
Obr. 4.18 Napětí τ_{xy}.



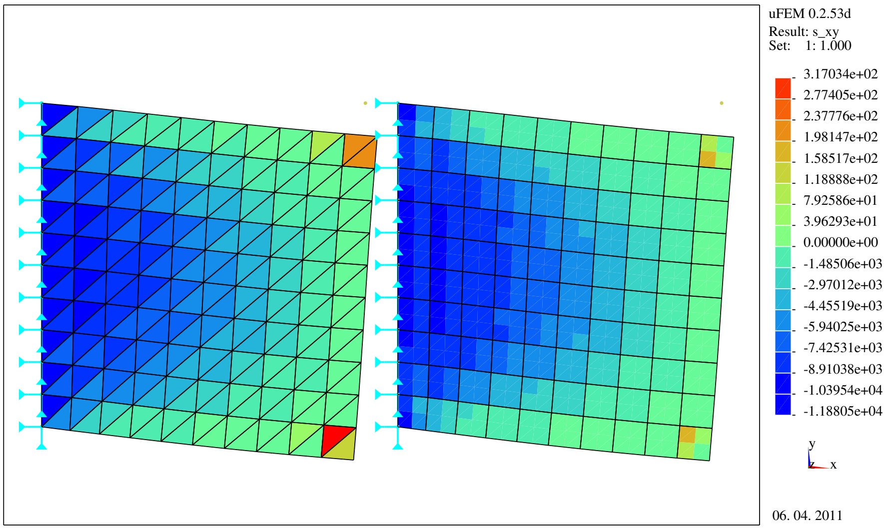
Obr. 4.19 Svislé deformace.



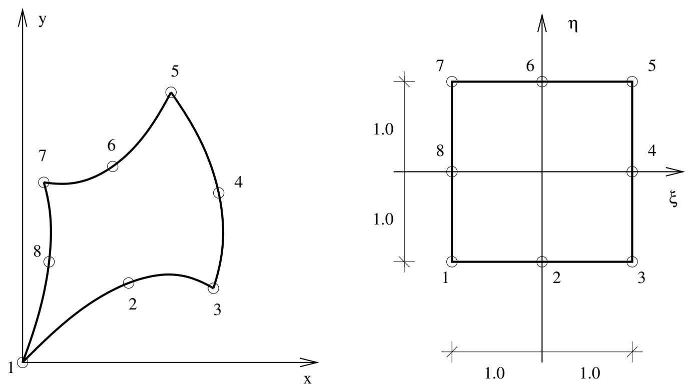
Obr. 4.20 Napětí σ_x.



Obr. 4.21 Napětí σ_y.



Obr. 4.22 Napětí τ_{xy}.



Obr. 4.23 Osmiuzlový prvek pro rovinný problém.

Normálové napětí σ_x je uvedeno na obrázku 4.20, normálové napětí σ_y je uvedeno na obrázku 4.21 a smykové napětí τ_{xy} je na obrázku 4.22.

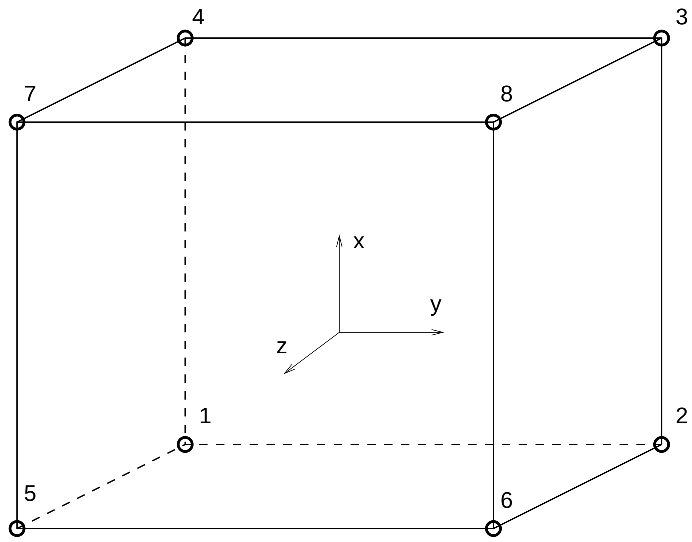
▲

4.4.4 Další typy konečných prvků

Pro rovinný problém je možné sestavit také například osmiuzlový konečný prvek, který je ukázán na obrázku 4.23.

Tvarové funkce pro středy stran mají podobu:

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(\xi\ \xi_i + \eta\ \eta_i - 1). \tag{4.117}$$



Obr. 4.24 Osmiuzlový izoparametrický konečný prvek

Tvarové funkce pro vrcholy jsou shodné jako u čtyřuzlového konečného prvku:

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i). \tag{4.118}$$

Další postup odvození se neliší od postupu pro čtyřuzlový konečný orvek.

Pro řešení těles je možné odvodit například *osmiuzlový prostorový konečný prvek* ve tvaru krychke. Postup odvození je podobný jako u předchozích konečných prvků, a proto uvedeme pouze podobu tvarových (aproximačních) funkcí pro vrcholy krychle:

$$N_i(\eta, \xi, \zeta) = \frac{1}{8}(1 + \eta\ \eta_i)\ (1 + \xi\xi_i)\ (1 + \zeta\ \zeta_i). \tag{4.119}$$

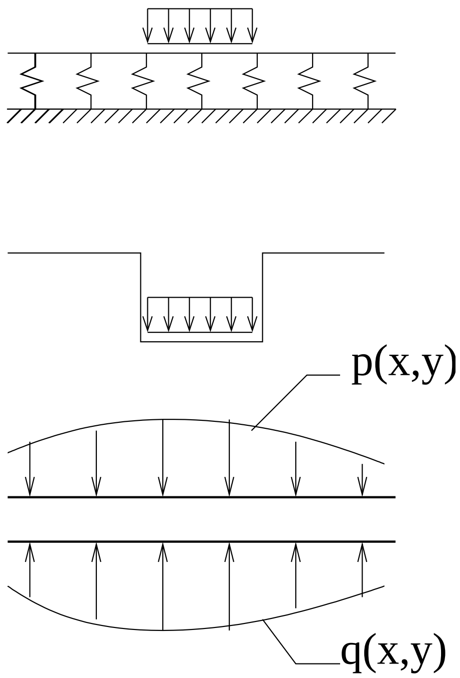
Kromě uvedeného konečného prvku je možné sestavit například dvacetiuzlový prvek s uzly také ve středech stran. Jeho tvarové funkce a podrobnosti odvození je možné najít v monografii [23].

4.5 Konečné prvky na pružném podloží

Stavební konstrukce jsou vždy umístěny na podloží. To obvykle zjednodušeně nahrazujeme dokonalými vazbami (pevné a posuvné klouby, vetknutí), v řadě případů je ovšem nutné vliv podloží zavést do výpočtu přesněji.

Nejjednodušším je Winklerův kontaktní model podloží [50]:

$$q(x, y) = C\ w(x, y) \tag{4.120}$$



Obr. 4.25 Winklerův model podloží.

kde C je modul stlačitelnosti podkladu $[\frac{N}{m^3}]$. Schematické znázornění tohoto modelu je na obrázku 4.25.

V metodě konečných prvů se obvykle tuhost podloží rozloží do uzlů. Na dříve uvedeném obdélníkovém deskovém prvku by do každého uzlu byla přidána tuhost podloží o velikosti:

$$K = \frac{1}{4}\, C_1\, b\, h, \tag{4.121}$$

kde C_1 je modul stlačitelnosti podkladu, b a h jsou rozměry prvku.

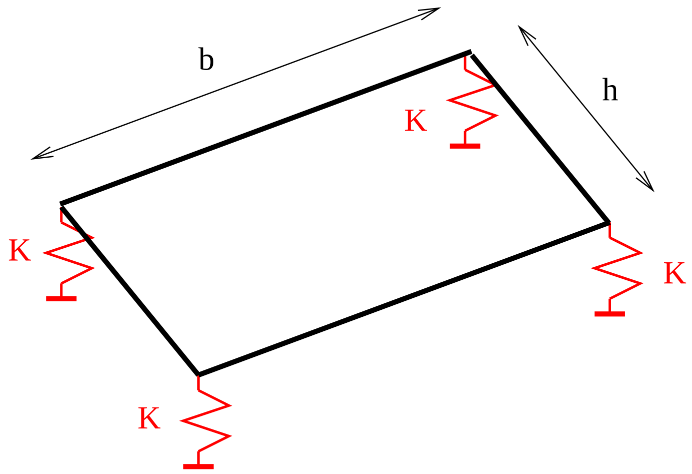
V případě izoparametrických prvků bycho mohli s pomocí tvarových funkcí stanovit *matici tuhosti podloží*:

$$\mathbf{K_e} = C_1 \int_A \mathbf{N^T}\ \mathbf{N}\ dA, \tag{4.122}$$

kde A je plocha prvku.

Pro čtyřuzlový izoparametrický prvek ovšem získáme opět tuhost v jednotlivých uzlech o velikosti $K = \frac{1}{4}\, C_1\, b\, h$.

Poznámka 4.6. Postup uvedený v tomto odstavci neplatí jen pro desky, ale je možné jej aplikovat na libovolný konečný prvek. Je například možné uložit jednu stěnu izoparametrického kvádru na Winklerovo podloží. Tato možnost je k dispozici například v programu uFEM [43].



Obr. 4.26 Tuhosti Winklerova modelu na čtyřuzlovém prvku.

Příklady k procvičení

1. Konečný prvek příhradoviny má délku 4 m, čtvercový průřez o rozměrech 1×1 m a modul pružnosti 10 MPa. Napište jeho matici tuhosti.

2. Napište aproximaci posunutí u víte-li, že můžete použít polynom se 3 členy.

3. Konstrukce v prostoru má 128 uzlů po 3 stupních volnosti. Kolik okrajových podmínek je potřebné použít a jak velkou soustavu rovnic bude třeba řešit po jejich vyřazení?

Klíč k příkladům k procvičení

1.
$$\mathbf{K} = 25\ 10^4 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. $u = a_1 + a_2\ x + a_3\ x^2$

3. Bude potřebné použít 6 okrajových podmínek, soustava tedy bude mít 387 rovnic.

Kapitola 5

Řešení nelineárních úloh metodou konečných prvků

5.1 Nelineární problémy ve stavební mechanice

Podrobnější rozbor jednotlivých typů nelineárních úloh a jejich metod řešení je uveden v učebním textu „Základy matematické teorie pružnosti“. V dalším textu se proto budeme věnovat jen těm problémům, které jsou potřebné pro řešení úloh metodou konečných prvků.

Jako nelineární označujeme ty úlohy, jejichž některé vlastnosti způsobují, že je není možné přímo vyřešit pomocí obvyklých vztahů lineární pružnosti (a tedy ani zatím uvedenými postupy metody konečných prvků). Současně je vhodné připomenout, že celou řadu problémů, které jsou zjevně nelineární (například posuzování nebo výpočet deformací betonových prvků) v praktických úlohách vědomě řešíme velmi zjednodušeně jako lineární a následně uplatňujeme různá *konstrukční opatření* (přídavná výztuž a podobně) zajišťující, že rozdíl mezi výpočtem a skutečností bude akceptovatelný.

Nelineární úlohy, se kterými se můžeme setkat ve stavební praxi, můžeme rozdělit do tří skupin:

- *konstrukční nelinearita*: jednostranné vazby (podloží, zejména zeminy, má na kontaktu se základovou konstrukcí velmi prakticky nulovou únosnost v tahu), prvky které mají minimální tuhost v tlaku (lana, táhla, ztužidla),
- *fyzikální nelinearita*: vlastnosti materiálu nejsou lineárně pružné (beton, zdivo, dřevo, ocel při vyšších úrovních namáhání), takový materiál se může chovat nelineárně pružně nebo nepružně (při výpočtech se nejčastěji předpokládá pružnoplastické chování),
- *geometrická nelinearita*: vliv deformací na vnitřní síly konstrukce je nezane-

dbatelný i při malých deformacích (*teorie druhého řádu*) nebo deformace konstrukce nejsou (ve srovnání s rozměry konstrukce) malé.

Řešení nelineárních úloh se pro potřeby výpočtů metodou konečných prvků obvykle převádí na posloupnost lineárních výpočtů. Nelineární chování pak do výpočtu zahrnujeme příslušnými změnami matice tuhosti nebo vektoru zatížení mezi jednotlivými výpočetními kroky, případně iteracemi.

5.2 Konstrukční nelinearita

Úlohy konstrukční nelinearity zpravidla řešíme prostou iterací. Protože nejčastěji jde o případy, kdy některý prvek působí jen při určitém způsobu namáhání (lano, táhlo, vazba), je obvyklým obratem, že při „vyřazení“ takového prvku z konstrukce s pouze podstatně (například 1000×) sníží jeho tuhost. Tím dojde k tomu, že prvek ovlivňuje jen velmi málo napjatost a deformace zbytku konstrukce, ale na základě jeho vnitřních sil můžeme určovat, zda je stále namáhán způsobem opravňujícím jeho „vyřazení“ nebo zda má být navrácen zpět do konstrukce.

Postup výpočtu může být tedy následující:

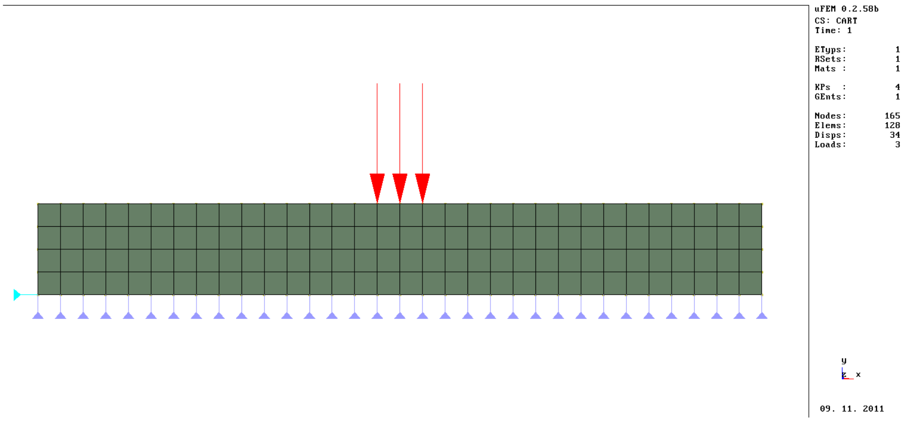
1. výpočet konstrukce se všemi prvky a vazbami,
2. vyhodnocení výsledků – snížení tuhosti u „vyřazených prvků“,
3. nový výpočet konstrukce,
4. vyhodnocení výsledků – pokud u „vyřazených prvků“ nedojde ke změně, je možné výpočet ukončit, pokud dochází k vyřazování dalších prvků nebo k navrácení

Příklad 5.1. S použitím vhodného software stanovte maximální vodorovné normálové napětí σ_x nosníku na podloží, který je zatížena silami o velikosti 10 kN podle obrázku 5.1. Srovnejte výpočet pro případ, kdy všechny svislé vazby působí v tahu i v tlaku s případem, kdy vazby působí jen v tlaku. Rozměry nosníku jsou $8 \times 1 \times 0.2\ m$, modul pružnosti materiálu je $E = 20\ GPa$, Poissonův součinitel je $\nu = 0,2$.

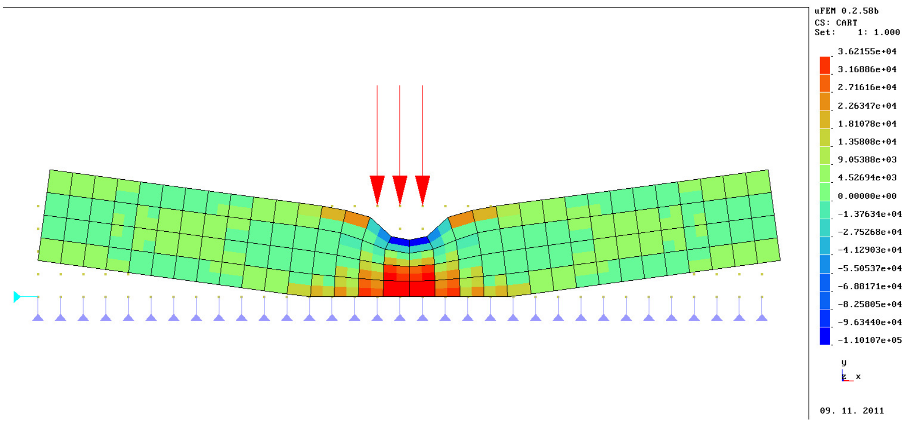
Řešení. Použijeme například software uFEM [43], který umožňuje použít vazby působící jen pokud jsou tlačené.[1]

Použijeme výpočetní model podle obrázku 5.1 a provedeme iterační výpočet. K dosažení výsledku vykresleného na obrázku 5.2 bylo nutné provést 4 iterace. Maximální hodnota napětí σ_x je $36,24\ MPa$.

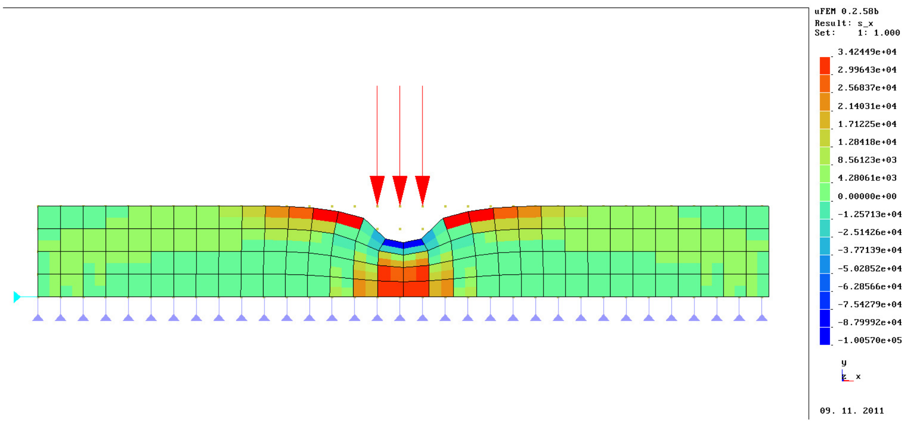
[1]uFEM ověřuje zda je podpora tlačená nebo tažená pomocí hodnoty reakce. V případě, že je podpora „vyřazena“ z výpočtu, kontroluje její stav na základě deformace v místě podpory.



Obr. 5.1 Výpočetní model nosníku pro příklad 5.1.



Obr. 5.2 Napětí σ_x na nosníku s jednostrannými vazbami.



Obr. 5.3 Napětí σ_x na nosníku bez jednostranných vazeb.

Na obrázku 5.3 jsou vykreslena napětí σ_x pro případ vazeb působících v tahu i v tlaku. Maximální hodnota napětí σ_x je $34,24\ MPa$.

V případě, že respektujeme jednostranný charakter vazeb, získáme o 5% vyšší tahové napětí. Důležitější je však skutečnost, že rozložení výrazných tahových napětí (sytě červená barva na obrázcích) je pro obě řešení odlišné (všimněme si především výraznějších tahových oblastí v okolí sil na obrázku 5.3).

▲

5.3 Materiálová nelinearita v metodě konečných prvků

5.3.1 Pružnoplastické chování materiálu

Jak již bylo uvedeno, materiály stavebních konstrukcí se nejčastěji modelují jako pružnoplastické. Tento předpoklad je zcela na místě u oceli a dalších kovů. U materiálů jako je beton, zdivo nebo zeminy a horniny, je předpoklad o pružnoplastickém chování využíván jako vhodné zjednodušení, protože skutečné chování těchto materiálů je velmi složité.

Pro výpočty je nejvhodnější *pružnoplastický materiál se zpevněním*, který po přechodu do plastického stavu vykazuje stále určitou tuhost (*zpevnění*), která je ovšem podstatně nižší než tuhost v pružném stavu. Na obrázku 5.4 je uveden pracovní diagram (závislost mezi napětím a poměrnou deformací)[1] pružnoplastického materiálu se zpevněním.[2]

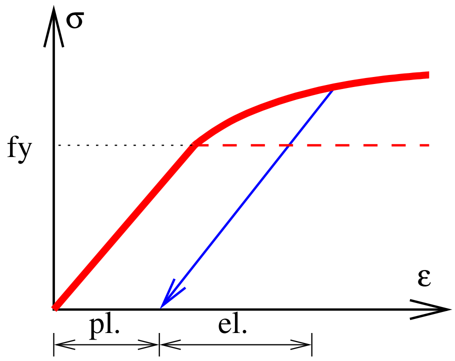
Zpevnění může být buď lineární, multilineární, nebo může mít charakter křivky, tak jak je tomu na obrázku 5.4.

Připomeňme si vlastnosti pružnoplastického materiálu se zpevněním:

- materiál je z na začátku zatěžování *pružný* (řídí se Hookeovým zákonem),
- poté, co napjatost v materiálu dosáhne *podmínku plastitity*, materiál přejde do plastického stavu,
- v plastickém stavu se při nárůstu napětí dále zvětšují deformace materiálu,
- dojde-li v plastickém stavu k odlehčení (snížení napjatosti materiálu obvykle

[1] Tento diagram má plastnost pouze pro případy jednoosé napjatosti, například pro úlohu taženého prutu.

[2] Označení *zpevnění* vychází z úvahy, že tuhost takového materiálu je plastickém stavu vyšší než tuhost ideálně pružnoplastického materiálu (plastická část pracovního diagramu pro ideálně pružnoplastický materiál je na obrázku 5.4 vyznačena tenkou čárkovanou čarou).



Obr. 5.4 Pružnoplastický materiál se zpevněním.

v důsledku zmenšení nebo odebrání zatížení), pak se materiál *odlehčuje lineárně pružně*,

- i po úplném odlehčení materiálu (po odebrání zatížení) v materiálu zůstávají *trvalé* neboli *plastické deformace*. Ty jsou na obrázku 5.4 okótovány jako „*pl.*“.

5.3.2 Podmínka plasticity

Podmínka plasticity je na obrázku 5.4 znázorněna jako hodnota napětí f_y, po jejímž překročení se materiál stává plastickým. Tato hodnota obvykle odpovídá napětí na *mezi úměrnosti* nebo *mezi pružnosti* příslušného materiálu.

V případě jiné než jednoosé napjatosti ovšem bude nutné definovat *podmínku plasticity* jako funkci několika napětí, kterou bude možné například pro dvojosou napjatost zobrazit jako křivku v rovině hlavních napětí.

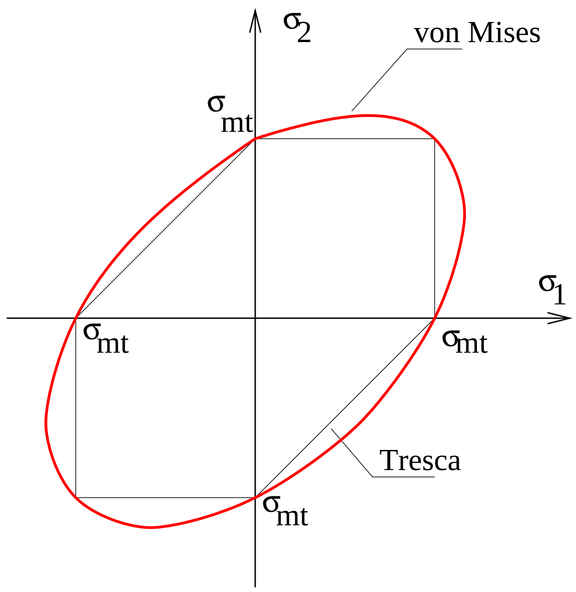
Tvar podmínky plasticity závisí na charakteru materiálu, který má být podmínkou popsán. Pro ocel a další materiály, které mají podobné vlastnosti v tahu i v tlaku, je vhodná zejména von Misesova podmínka plasticity. Pro beton se používají například podmínky Willama–Warnkeho nebo Chen–Chenova.

5.3.2.1 Misesova podmínka plasticity

Misesova (von Misesova) podmínka plasticity, nazývaná také *podmínka měrné energie změny tvaru* nebo podmínka *von Mises, Huber, Hencky* byla nezávisle odvozena uvedenými autory pro ocel. Na obrázku 5.5 je zobrazena v *rovině hlavních napětí* pro úlohu rovinné napjatosti.

Podmínku je možné zapsat jako funkci hlavních napětí σ_1, σ_2 a σ_3:

$$f = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 - 2f_y^2 = 0, \tag{5.1}$$



Obr. 5.5 Misesova podmínka plasticity.

kde $f_y = \sigma_{mt}$ je napětí na mezi pružnosti materiálu.

V případě, že materiál konstrukce musí být namáhán pouze v pružné oblasti, můžeme podmínku přepsat do tvaru:

$$\sigma_{vmis} = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}{2}}, \tag{5.2}$$

kde σ_{vmis} se obvykle označuje jako *von Misesovo napětí*. Materiál bude v pružném stavu tehdy, bude-li platit:

$$\sigma_{vmis} < f_y. \tag{5.3}$$

Z hlediska algoritmizace pro metodu konečných prvků není rovnice (5.1) nejvhodnější a je potřebné ji přepsat tak, aby v ní vystupovala napětí k osám x, y, z:

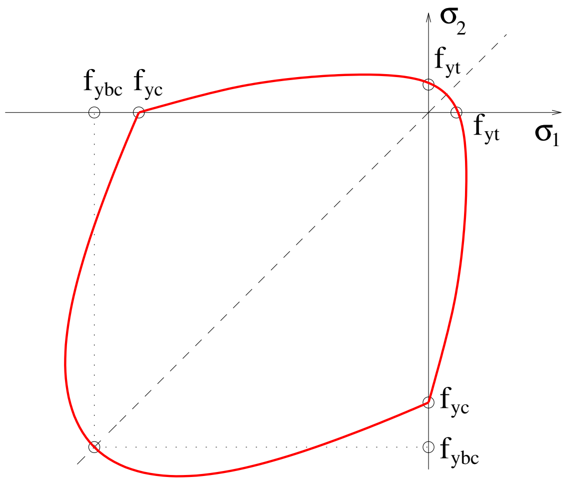
$$f = \frac{1}{2}\left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\left(\tau_{yz} + \tau_{xz} + \tau_{xy}\right)\right] - f_y^2 = 0. \tag{5.4}$$

Pro úlohu rovinné napjatosti by pak rovnice (5.4) přešla do tvaru:

$$f = \frac{1}{2}\left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 6\ \tau_{xy}\right] - f_y^2 = 0. \tag{5.5}$$

5.3.2.2 Chen–Chenova podmínka plasticity

Chen–Chenova podmínka plasticity byla vyvinuta pro modelování betonových konstrukcí. Dále uváděné vztahy vychází z původních prací Chena [13, 14]. Skládá se



Obr. 5.6 Chen–Chenova podmínka plasticity.

ze dvou funkcí z nichž jedna popisuje chování materiálu v tlaku (v oblasti *tlak–tlak*) a druhá při všech ostatních případech namáhání (oblast *tah–tlak*).

Pro oblast tlak–tlak ($\sigma_1 < 0$ a $\sigma_2 < 0$, $\sigma_3 < 0$): platí rovnice:

$$J_2 + \frac{A_{yc}}{3} I_1 - \tau_{yc}^2 = 0. \tag{5.6}$$

Pro ostatní oblasti pak platí rovnice:

$$J_2 - \frac{1}{6} I_1^2 + \frac{A_{yt}}{3} I_1 - \tau_{yt}^2 = 0 \tag{5.7}$$

kde

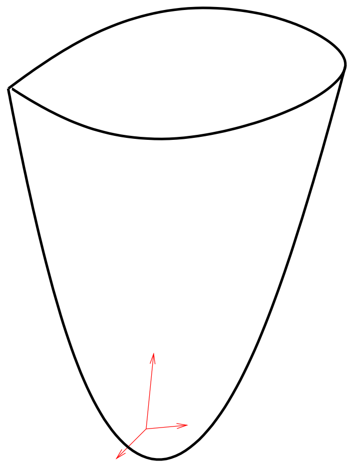
$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \tag{5.8}$$

a

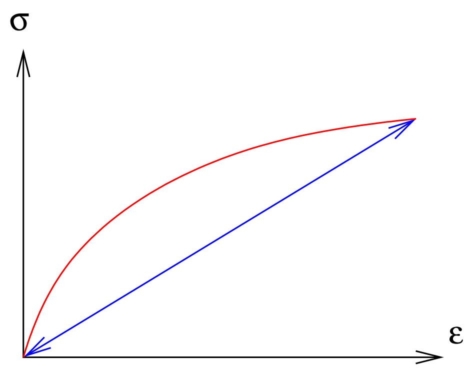
$$J_2 = \frac{1}{2} \left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 \right). \tag{5.9}$$

Chen–Chenova podmínka je definována pomocí meze pružnosti materiálu v jednoosém tlaku f_{yc}, v dvojosém tlaku f_{ybc} a v jednoosém tahu f_{yt}. Tyto veličiny jsou zahrnuty ve výrazech pro A_{yc}, A_{yt}, τ_{yc}^2 a τ_{ut}^2:

$$\begin{aligned} A_{yc} &= \frac{f_{ybc}^2 - f_{yc}^2}{2 f_{ybc} - f_{yc}}, \\ \tau_{yc}^2 &= \frac{f_{ybc} f_{yc} (2 f_{yc} - f_{ybc})}{3 (2 f_{ybc} - f_{yc})}, \\ A_{yt} &= \frac{f_{yc} - f_{yt}}{2}, \\ \tau_{ut}^2 &= \frac{f_{yc} f_{yt}}{6}. \end{aligned} \tag{5.10}$$



Obr. 5.7 Chen–Chenova podmínka plasticity zobrazená ve 3D.



Obr. 5.8 Teorie plastických deformací.

5.3.3 Teorie plastických deformací

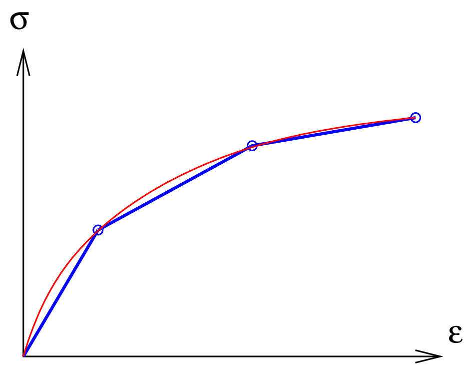
Po sestavení podmínky plasticity můžeme přistoupit k popisu chování materiálu v plastickém stavu. K tomuto účelu byla vytvořena řada teorií a postupů. Zmíníme se tedy o *teorii plastických deformací* a podrobněji se budeme věnovat *teorii plastického tečení.*

Jako *teorii plastických deformací* označujeme postup, který využívá vztahů popisující vztahy mezi konečnými hodnotami složek vektorů napětí a deformace:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^{\mathbf{EP}} \;\; \boldsymbol{\varepsilon} \tag{5.11}$$

Pokud se takové vztahy podaří sestavit, pak řešení nezávisí na zatěžovací dráze.

V praktických úlohách je ovšem velmi obtížné formulovat takové vztahy, proto se postup podle teorie plastických deformací využívá spíše v akademických úlohách.



Obr. 5.9 Teorie plastického tečení.

5.3.4 Teorie plastického tečení

Teorie plastického tečení popisuje vztahy mezi přírůstky napětí a deformace:[1]

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D_{ep}} \ \ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}. \tag{5.12}$$

Uvedené přírůstky napětí a deformace odpovídají přírůstku zatížení $\dot{F} = dF$ v konkrétní části zatěžovací dráhy, v jiné části dráhy mohou být i při stejném přírůstku zatížení hodnoty $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ a $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ i podstatně odlišné.

Poznámka 5.2. Při praktickém řešení pružnoplastických úloh podle teorie plastického tečení budeme zpravidla využívat řešení Newtonowou – Raphsonovou metodou, a v jednotlivých přírůstcích zatížení budeme stanovovat pružnoplastickou matici materiálu $\mathbf{D_{ep}}$ a k výpočtu napětí využívat vztah (5.12). V jednotlivých přírůstkových krocích tedy budeme zjednodušeně řešit lineárně pružnou úlohu.

Při řešení podle teorie plastických tečení samozřejmě předpokládáme, že známe počáteční hodnoty znalost napětí $\boldsymbol{\sigma}$ a poměrných deformací $\boldsymbol{\varepsilon}$ (které mohou být nenulové), a stejně jako v lineárních úlohách také to, že všechny veličiny vyhovují okrajovým podmínkám úlohy.

5.3.5 Pružnoplastická matice tuhosti materiálu

Pro použití teorie plastických tečení je třeba definovat matici $\mathbf{D_{ep}}$, kterou nazveme *pružnoplastická matice tuhosti materiálu*.

Na podmínku plasticity, která nám dosud sloužila k popisu přechodu z pružného do plastického stavu můžeme také nahlížet jako na rovnici *plastického potenciálu*,

[1] V literatuře se často používá pojem *rychlosti napětí a deformace*, ze kterého vyplývá i obvykle používané označení veličin tečkou. Samozřejmě nejde o rychlosti ve smyslu fyzikálním (v problému nevystupují časově závislé veličiny), ale o přírůstky jednotlivých veličin během zatěžovacího kroku.

která je funkcí napětí $\boldsymbol{\sigma}$ a parametru k vyjadřujícího plastickou deformací:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{k}) = g(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{k}) = 0. \tag{5.13}$$

Plastický potenciál je funkce která popisuje *tečení*, tedy plastické přetváření materiálu. Mises dokázal, že v řadě případů může funkce podmínky plasticity f plnit podmínky kladené na funkci plastického potenciálu, proto ji tak budeme i nadále bezostyšně používat a místo g psát f. V případech, kdy platí:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{k}) = g(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{k}), \tag{5.14}$$

říkáme, že platí *asociovaný zákon plastického tečení*, což je případ podmínek plasticity uvedených v tomto textu.

V ostatních případech pak platí *neasociovaný zákon plastického tečení*, kdy platí

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{k}) \neq g(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{k}). \tag{5.15}$$

který se uplatní zejména pružnoplastických modelů zdiva a u některých modelů pro geotechnické materiály.

Nyní rozložíme přírůstku deformace na pružnou část $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{e}}$ a plastickou část $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{p}}$:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{e}} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{p}}. \tag{5.16}$$

Přírůstek plastické deformace, tedy *rychlost plastické deformace* popíšeme vztahem, který se obvykle označuje jako *zákon plastického přetváření*:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = d\lambda \left\{ \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}, \tag{5.17}$$

kde $d\lambda$ je zatím neznámý parameter.[1]

V dalším postupu bude výhodnější charakterizovat vektor plastické deformace $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{p}}$ jednou hodnotou. Proto zavedeme pojem *ekvivalentní plastická deformace*:

$$d\varepsilon_p = \sqrt{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{p}}^{T}\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{p}}} = d\lambda \sqrt{\left\{ \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \left\{ \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}}. \tag{5.18}$$

Rovnici pro plastický potenciál (a současně podmínku plasticity) potom můžeme přepsat jako funkci $d\varepsilon_p$:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, d\varepsilon_p) = 0. \tag{5.19}$$

[1] Ze vztahu (5.17) tedy vyplývá, že nárůst plastické deformace závisí na změně funkce plastického potenciálu podle napětí.

Dalším vztahem je potřebným k popisu úlohy *podmínka konzistence materiálu v plastickém stavu*, která obsahuje předpoklad, že celková změna plastického potenciálu je nulová:

$$df = \left\{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}^T \{d\boldsymbol{\sigma}\} + \left\{\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_p}\right\}^T \{d\varepsilon_p\} = 0. \tag{5.20}$$

Vektor přírůstků (rychlostí) napětí zřejmě závisí jen na pružné složce vektoru deformací, a proto můžeme napsat:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D_e}\left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p\right). \tag{5.21}$$

S využitím rovnice (5.17) můžeme předchozí vztah přepsat do tvaru:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D_e}\left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - d\lambda \left\{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}\right). \tag{5.22}$$

S využitím výrazu (5.22) můžeme upravit podmínku konzistence:

$$\left\{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}^T \mathbf{D_e} d\boldsymbol{\varepsilon} - d\lambda \left\{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}^T \mathbf{D_e} \left\{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\} + d\lambda \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_p}\sqrt{\left\{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}^T \left\{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}} = 0. \tag{5.23}$$

Nyní již můžeme vyjádření neznámý parametr $d\lambda$:

$$d\lambda = \frac{\left\{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}^T \mathbf{D_e}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\left\{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}^T \mathbf{D_e} \left\{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_p}\sqrt{\left\{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}^T \left\{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}}}. \tag{5.24}$$

Dosazení $d\lambda$ do vztahu pro přírůstky napětí (5.22) dostaneme:

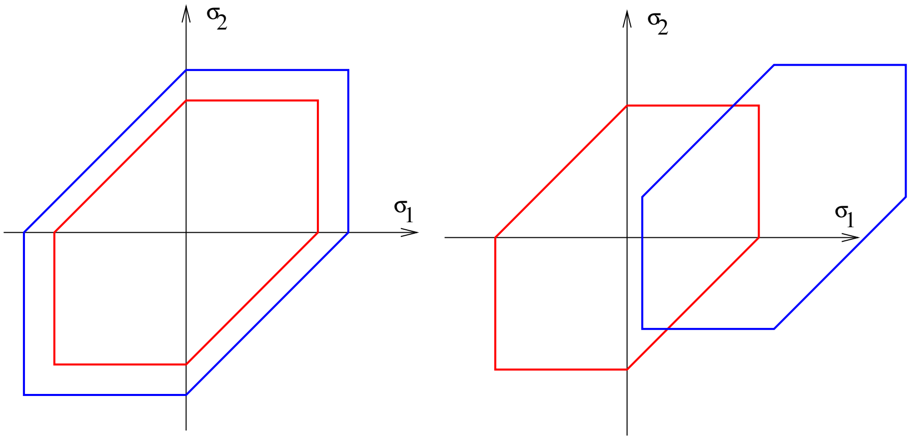
$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D_e}\left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{\left\{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}^T \mathbf{D_e}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\left\{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}^T \mathbf{D_e} \left\{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_p}\sqrt{\left\{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}^T \left\{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}}} \cdot \left\{\frac{df}{d\boldsymbol{\sigma}}\right\}\right) \tag{5.25}$$

Získaný vztah (5.25) pro $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ je možné upravit do tvaru shodného s (5.12):

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D_{ep}} \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ep}, \tag{5.26}$$

kde pružnoplastická matice tuhosti materiálu $\mathbf{D_{ep}}$ bude:

$$\mathbf{D_{ep}} = \mathbf{D_e} - \frac{\mathbf{D_e}\left\{\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}\left\{\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}^{\mathbf{T}} \mathbf{D_e}}{\left\{\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}^{\mathbf{T}} \mathbf{D_e} \left\{\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{p}}}\sqrt{\left\{\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}^{\mathbf{T}} \left\{\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}}}. \tag{5.27}$$



Obr. 5.10 Izotropní (vlevo) a kinematické zpevnění.

5.3.6 Zpevnění

Z rovnice (5.27) vyplývá, že vliv plastické deformace je vyjádřen členem:

$$\psi = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_p} \sqrt{\left\{ \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \left\{ \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}}, \tag{5.28}$$

který nazveme *parametr zpevnění*, který pro konkrétní materiál musí být získán experimentálně.[1]

V případě, že parametr zpevnění je roven nule, bude materiál popsaný rovnicí (5.27) vykazovat ideálně pružnoplastické chování. V případě, že bude nenulový[2] pak se materiál bude chovat jako pružnoplastický materiál se zpevněním. Pro konkrétní hodnotu parametru zpevnění můžeme konkrétní *konkrétní hladinu plastického potenciálu* nebo, jak budeme dále říkat, *následnou podmínku plasticity*, která poslouží k popisu chování materiál v plastickém stavu.

Můžeme rozlišit zpevnění *kinematické*, kdy následné podmínky plasticity nemění svoji velikost a tvar, ale v prostoru hlavních napětí mění polohu a zpevnění *izotropní*, při kterém následné podmínky plasticity nemění svoji polohu, ale proporcionálně se zvětšují.

Nejblíže chování skutečných materiálů je však zpevnění *kombinované*, které slučuje oba uvedené typy zpevnění.

Parametr zpevnění ψ podle rovnice (5.28) vyjadřuje změnu následné podmínky plasticity podle ekvivalentní plastické deformace. To je z praktického hlediska jistou obtíží, protože parametr zpevnění je potřebné zjišťovat experimentálně. Přepišme

[1] Jak je patrné, přes označení „parametr“ půjde o funkci veličiny ε_p.
[2] Je zřejmé, že parametr zpevnění musí nabývat kladných hodnot.

jej proto do tvaru:

$$\psi = \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma_e} \right\}^T \left\{ \frac{\partial \sigma_e}{\partial \varepsilon_p} \right\} \sqrt{\left\{ \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \left\{ \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}}, \tag{5.29}$$

nebo do zkráceného tvaru:

$$\psi = Q\ H. \tag{5.30}$$

Parametr H potom vyjadřuje derivaci funkce závislosti napětí na ekvivalentní plastické deformaci a je možné ho relativně snadno získat ze zkoušek příslušného materiálu. Veličina σ_e, kterou nazveme *ekvivalentní napětí* by měla být ve vztahu k ekvivalentní plastické deformaci ε_p.

Poznámka 5.3. V případě, že budeme pracovat s materiálem, který se řídí von Misesovými vztahy (tedy nejčastějí s ocelí), pak σ_e bude odpovídat von Misesovu napětí:

$$\sigma_e = \sigma_{vmis} = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}{2}}. \tag{5.31}$$

Tuto veličinu pak při výpočtu využijeme ve vztahu (5.40).

Při stanovování H pro ocel potom můžeme použít tahovou zkoušku na tyči, kde za ekvivalentní plastickou deformaci budeme pokládat plastickou deformaci ve směru osy tyče a za ekvivalentní napětí budeme brát normálové napětí v tomtéž směru.

Pro parametr zpevnění vhodný pro Chen–Chenovu podmínku bude nutné použít složitější postup, který bude vyložen v odstavci 5.3.6.2.

5.3.6.1 Aproximace H Rambergovou–Osgoodovou funkcí

V některých, ostatně dosti častých, případech není pro popis H dostatek experimentálních dat, a proto je třeba se uchýlit k jeho aproximaci vhodnou funkcí.[1] Dalším důvodem k použití aproximace může být fakt, že parametr H vyžaduje znalost plastické deformace, zatímco při zkouškách se měří deformace celková a oddělení plastické složky může být komplikované.

Je možné zvolit jakoukoli vhodnou funkci, v tomto odstavci si ukážeme použití *Rambergovy–Osgoodovy* funkce.

Aproximace vztahu mezi napětím a deformací pomocí Rambergovy – Osgoodovy funkce bude mít tvar:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_o} + k \left(\frac{\sigma}{E_o} \right)^n, \tag{5.32}$$

kde k a n jsou parametry funkce a E_o je počáteční modul pružnosti. Křivka popsaná rovnicí (5.32) je tedy parabola n-tého stupně.

[1] Jde zejména o případy, kdy žádáme, aby zpevnění ve výpočtu nebylo jen lineární.

Pro určení parametrů k, n v je potřebná znalost dvou bodů skutečného pracovního diagramu aproximovaného materiálu $A\,[\varepsilon_a, \sigma_a]$ a $B\,[\varepsilon_b, \sigma_b]$.

Dosazením jejich souřadnic do (5.32) vyplyne:

$$
\begin{aligned}
n &= \frac{ln\left(\frac{E_o\ \varepsilon_a - \sigma_a}{E_o\ \varepsilon_b - \sigma_b}\right)}{ln\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_b}\right)}, \\
k &= \left(\frac{\sigma_a}{E_o}\right)^{1-n}\left(\frac{E_o\varepsilon_a}{\sigma_a} - 1\right).
\end{aligned}
\tag{5.33}
$$

Pokusme se tedy z rovnice (5.32) vyjádřit parametr H. Nejprve rozložíme celkovou poměrnou deformaci ε na složku pružnou ε_e a plastickou ε_p:

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p. \tag{5.34}$$

Pružná složka deformace vyjádřená z rovnice (5.32) bude mít zřejmě tvar:

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E_o}. \tag{5.35}$$

Se zbývající části rovnice (5.32) sestavíme vztah pro plastickou deformaci:

$$\varepsilon_p = k\left(\frac{\sigma}{E_o}\right)^n. \tag{5.36}$$

Označme

$$H = \frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon_p} = \Phi'(\varepsilon_p). \tag{5.37}$$

Protože pružná složka deformace neovlivňuje parametr H, tak můžeme psát:

$$\varepsilon_p = k\left(\frac{\sigma}{E_o}\right)^n = \Phi^{-1}(\sigma). \tag{5.38}$$

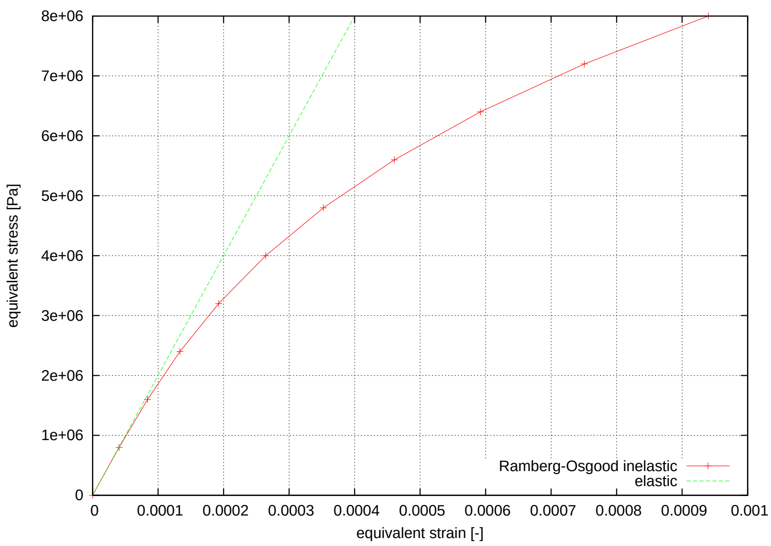
Využijeme-li znalosti vztahu pro derivaci inverzní funkce vyplyne, získáme výsledný výraz pro H:

$$H = \Phi' = \frac{1}{\Phi^{-1}} = \frac{E_o}{k\ n}\left(\frac{\sigma}{E_o}\right)^{1-n}. \tag{5.39}$$

Příklad 5.4. Graficky zobrazte Rambergovu–Osgoodovu funkci, je-li počáteční modul pružnosti materiálu $E_o = 20\ GPa$ a jsou-li dva body pracovního diagramu popsány hodnotami uvedenými v tabulce 5.1.

Bod	poměrná deformace $[-]$	napětí $[MPa]$
1	0.00094	8.0
2	0.01000	20.0

Tab. 5.1 Parametry Rambergovy – Osgoodovy funkce pro příklad 5.4.



Obr. 5.11 Aproximace Rambergovou–Osgoodovou funkcí.

Řešení. K řešení potřebujeme určit parametry k a n podle rovnice (5.33). Dosazením získáme:

$$k = 1.464017\ 10^7, \quad n = 3.070435.$$

Pro vykreslení funkce určíme hodnoty ε pro zvolená σ z rovnice (5.32). Získáme graf uvedený na obrázku 5.11.

▲

5.3.6.2 Zpevnění pro beton podle Ohtaniho a Chena

K popisu funkce zpevnění je u betonu třeba použít více parametrů tak, aby bylo vystiženo rozdílné chování betonu při různých způsobech namáhání.

V návaznosti na Chenovu podmínku plasticity navrhli Ohtani a Chen [28] funkci zpevnění, která je funkcí tří parametrů – ekvivalentních napětí při jednoosém tlaku, dvojosém tlaku a jednoosém tahu.

Funkci zpevnění ψ proto navrhli ve tvaru:

$$\psi = \alpha_1 \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma_c} \right\}^T \left\{ \frac{\partial \sigma_c}{\partial \varepsilon_{pc}} \right\} + \alpha_2 \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma_{bc}} \right\}^T \left\{ \frac{\partial \sigma_{bc}}{\partial \varepsilon_{pbc}} \right\} + \alpha_3 \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma_t} \right\}^T \left\{ \frac{\partial \sigma_t}{\partial \varepsilon_{pt}} \right\}, \tag{5.40}$$

ve zkráceném tvaru pak:

$$\psi = \alpha_1 Q_1 H_c + \alpha_2 Q_2 H_{bc} + \alpha_3 Q_3 H_t, \tag{5.41}$$

kde parametry zpevnění mají tvar:

$$H_c = \frac{\partial \sigma_c}{\partial \varepsilon_{pc}}, \tag{5.42}$$

$$H_{bc} = \frac{\partial \sigma_{bc}}{\partial \varepsilon_{pbc}}, \tag{5.43}$$

$$H_t = \frac{\partial \sigma_t}{\partial \varepsilon_{pt}}. \tag{5.44}$$

Jak již bylo uvedeno v předchozích odstavcích, hodnoty H je potřeba určovat ze zkoušek betonu při příslušných způsobech namáhání nebo je možné použít aproximace vhodnou funkcí. Můžeme využít například Rambergovy–Osgoodovy funkce tak, jak to bylo popsáno v předchozím textu.

Parametry α vyjadřují příspěvek jednotlivých členů rovnice (5.40) do výsledné funkce zpevnění a závisí na oblasti namáhání. Hodnoty α doporučené Ohtanim jsou uvedeny v tabulce 5.2.

Zóna	α_1	α_2	α_3
C-C	1	1	0
C-T, T-C	$\frac{\sigma_t - I_1}{\sigma_c + \sigma_t}$	$\frac{\sigma_t - I_1}{\sigma_c + \sigma_t}$	$\frac{\sigma_c + I_1}{\sigma_c + \sigma_t}$
T-T	0	0	1

Tab. 5.2 Hodnoty parametrů α v závislosti na oblasti namáhání.

Pro vyjádření Q_1, Q_2, Q_3 je třeba stanovit materiálové konstanty, které se uplatní i v rovnicích následných podmínek plasticity:[1]

$$A_c = \frac{\sigma_{bc}^2 - \sigma_c^2}{2\sigma_{bc} - \sigma_c}, \tag{5.45}$$

$$\tau_c^2 = \frac{\sigma_{bc}\sigma_c(2\sigma_c - \sigma_{bc})}{3(2\sigma_{bc} - \sigma_c)}, \tag{5.46}$$

$$A_t = \frac{\sigma_c - \sigma_t}{2}, \tag{5.47}$$

$$\tau_t^2 = \frac{\sigma_c\sigma_t}{6}, \tag{5.48}$$

$$\tag{5.49}$$

kde σ_c, σ_{bc} a σ_a jsou ekvivalentní napětí v jednoosém tlaku, dvojosém tlaku a jednoosém tahu.

Parametry Q_1, Q_2, Q_3 je pak možné zapsat pro oblast tlak–tlak:

$$Q_1 = \frac{\partial f}{\partial \sigma_c} = \frac{1}{3(2\sigma_{bc} - \sigma_c)^2}(\sigma_c^2 - 4\sigma_c\sigma_{bc} + \sigma_{bc}^2)(I_1 + 2\sigma_{bc}), \tag{5.50}$$

$$Q_2 = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{bc}} = \frac{2}{3(2\sigma_{bc} - \sigma_c)^2}(\sigma_c^2 - 4\sigma_c\sigma_{bc} + \sigma_{bc}^2)(I_1 + \sigma_{bc}), \tag{5.51}$$

$$Q_3 = \frac{\partial f}{\partial \sigma_t} = 0, \tag{5.52}$$

pro ostatní oblasti:

$$Q_1 = \frac{\partial f}{\partial \sigma_c} = \frac{1}{6}(I_1 - \sigma_t), \tag{5.53}$$

$$Q_2 = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{bc}} = 0, \tag{5.54}$$

$$Q_3 = \frac{\partial f}{\partial \sigma_t} = \frac{1}{6}(I_1 - \sigma_c). \tag{5.55}$$

[1] Povšimněte si, že napětí na mezi pružnosti materiálu (f_{yc}, f_{ybc}, f_{yt}) byly nahrazeny *ekvivalentními napětími*. Určení ekvivalentních napětí pro aktuální stav materiálu během zpevnění je trochu komplikovanějším problémem, a je třeba je iterativně stanovit tak, aby byla splněna příslušná následná podmínka plasticity. Podrobnější výklad je možné najít v [46].

5.3.7 Podmínka porušení

Skutečný materiál se po dosažení určité úrovně zatížení začne porušovat (trhat, drtit).[1] To je třeba zohlednit i při výpočtu, a proto se definuje *podmínka porušení*. Zpravidla má stejný tvar jako podmínka plasticity, ale místo napětí na mezi pružnosti se do ní dosazují napětí na mezi únosnosti (tedy *pevnosti*) materiálu.

U oceli a dalších kovů můžeme jako podmínku porušení použít von Misesovu podmínku:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 - 2f_u^2 = 0, \qquad (5.56)$$

kde f_u je napětí na napětí na mezi pevnosti („pevnost“) materiálu.

V případě betonu by podmínka porušení podle Chena a Chena měla tvar:

$$\begin{aligned} J_2 + \frac{A_{uc}}{3} I_1 - \tau_{uc}^2 &= 0, \\ J_2 - \frac{1}{6} I_1^2 + \frac{A_{ut}}{3} I_1 - \tau_{ut}^2 &= 0. \end{aligned} \qquad (5.57)$$

kde jednotlivé výrazy mají význam:

$$\begin{aligned} A_{uc} &= \frac{f_{ubc}^2 - f_{uc}^2}{2f_{ubc} - f_{uc}}, \\ \tau_{yc}^2 &= \frac{f_{ubc} f_{yc} (2f_{uc} - f_{ubc})}{3(2f_{ubc} - f_{uc})}, \\ A_{ut} &= \frac{f_{uc} - f_{ut}}{2}, \\ \tau_{ut}^2 &= \frac{f_{uc} f_{ut}}{6}. \end{aligned}$$

Hodnota f_{uc} je pevnost betonu v jednoosém tlaku, f_{ubc} je pevnost betonu v dvojosém tlaku a f_{ut} je pevnost betonu v jednoosém tahu.

Poznámka 5.5. Zejména u betonu se při praktickém využívání výše uvedených vztahů setkáváme s problémem určování hodnot jednotlivých parametrů materiálu. Okamžik, kdy v betonu dochází k přechodu z pružného do plastického stavu, a který by měla identifikovat podmínka plasticity, je do značné míry smluvní, protože k nepružnému porušování betonu (vzniku trhlinek, případně k drcení) dochází již prakticky od počátku jeho zatěžování.

V závislosti na typu a vlastnostech betonu se tedy volí parametry mezí plasticity jako 0,3-0,5 násobky parametrů na mezi pevnosti.

[1] U stavebních materiálů, zejména u betonu, ovšem k porušování materiálu (například ke vzniku trhlinek) dochází během celého procesu zatěžování. Podmínka porušení u nich proto popisuje stav, kdy trhliny svojí velikostí a množstvím ohrožují nosnou funkci a bezpečnost konstrukce.

Dalším problémem je vztah mezi parametry v jednoosém a dvojosém tlaku. Proto se zpravidla předpokládá, že mez pružnosti ve dvojosém tlaku je 1,2násobek hodnoty v jednoosém tlaku a stejný poměr se volí pro pevnosti.

Posledním podstatným problémem je samotné určení pevnosti betonu v jednoosém tlaku a tahu. Klasické zkoušky betonu neumožňují tyto hodnoty přímo určit, protože se při nich beton porušuje podstatně komplikovanějším způsobem (například při zkoušce krychle v lisu se beton neporušuje tlakem, ale příčným tahem). Specializované zkoušky, jako je tahová zkouška na válcovém vzorku, vyžadují speciální vybavení, které zpravidla není k dispozici.

Proto se potřebné veličiny obvykle určují ze výsledků laboratorních zkoušek přibližně podle vztahů dostupných pro různé typy betonů v literatuře (pro betony běžné v pozemním stavitelství dobře fungují například vztahy v [47]), a zpřesňují se pomocí kontrolních výpočtů.

5.3.8 Další podmínky porušení pro beton

Kromě uvedené Chen–Chenovy podmínky je možné použít i řadu dalších. Kupfer [48] na základě vlastního experimentálního výzkumu sestavil podmínku porušení pro stav rovinné napjatosti, která je navržena tak, aby přímo využívala některá data ze standardních zkoušek betonu (pracuje s válcovou pevností f_c).

Kupferova podmínka je v oblasti tah–tah ($\sigma_1 > 0$ a $\sigma_2 > 0$) definována vztahem

$$\sigma_1 = f_t, \tag{5.58}$$

kde f_t je pevnost betonu v tahu a σ_1 je hlavní tahové napětí.

V oblasti tah–tlak je použit vztah:

$$f_c^{ef} = \frac{1 + 3{,}65a}{(1+a)^2} f_c, \qquad a = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}, \tag{5.59}$$

kde σ_1 a σ_2 jsou hlavní napětí v betonu, f_c je válcová pevnost v jednoosém tlaku.

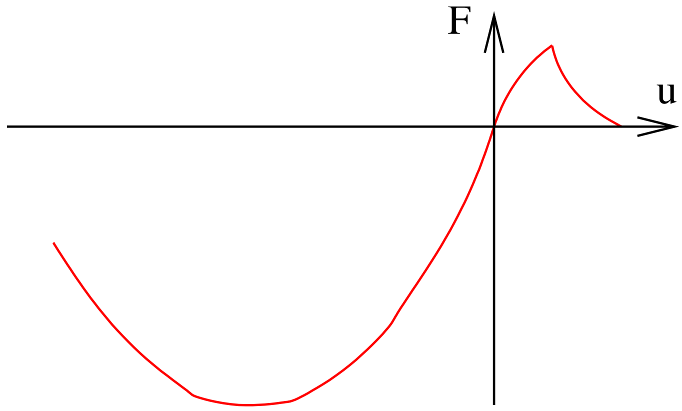
Willam a Warnke [41] sestavili převážně na základě těch samých experimentálních dat odlišnou podmínku porušení a plasticity, která má tvar:

$$f = \frac{1}{3z}\frac{I_1}{\sigma_c} + \sqrt{\frac{2}{5}}\frac{1}{r(\theta)}\frac{J_2}{\sigma_c} - 1 = 0. \tag{5.60}$$

Tato podmínka je definována pro 3D a je k dispozici v komerčním software [17]. Její tvar je, přes odlišnost vztahů, velice blízký Chen–Chenově podmínce.

5.3.9 Další materiálové modely pro beton

Beton, podobně jako zdivo nebo zeminy a horniny, se ve skutečnosti nechová pružnoplasticky. Dochází v něm k nevratnému porušování a vzniku trhlin, které má dosti



Obr. 5.12 Jednorozměrný pracovní diagram betonu.

odlišný charakter od plastického tečení.

Přestože výše popsaný pružnoplastický model poskytuje ve většině praktických úloh dostatečně přesné výsledky, jen obtížně může popsat stavy, kdy je beton porušen velkým množstvím trhlin a kdy jeho únosnost a tuhost podstatně klesá. To je potřebné v úlohách, kdy vyšetřujeme zbytkovou únosnost a životnost havarovaných nebo těžce poškozených konstrukcí, odolnost konstrukcí vystavených účinkům výbuchů nebo havárií nebezpečných technologií (v chemických provozech, jaderných zařízených) a podobně.

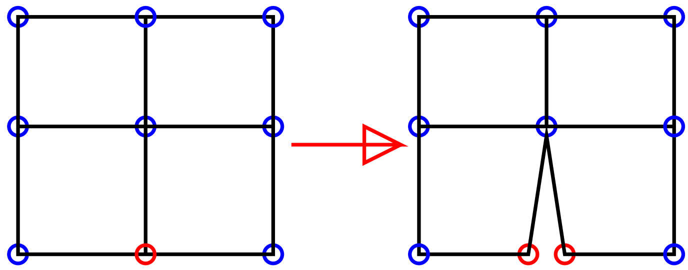
Pokud porovnáme pracovní diagram betonu, který je schematicky znázorněn na obrázku 5.12, s diagramy v předchozích kapitolách, je najít si všimnout, že pružnoplastický model neposkytuje možnost popsat chování materiálu pro vzniku trhliny. Je zřejmé, že vznikne-li v betonu trhlina, pak v tomto místě začne klesat únosnost materiálu, zatímco u pružnoplastického materiálu stále (byť omezeně) narůstá.[1]

5.3.10 Diskrétní modely betonu

Diskrétní modely jsou založeny na předpokladu, že je potřebné modelovat šíření jednotlivých trhlin, a to úpravami sítě konečných prvků.

Princip je tedy velmi jednoduchý a je znázorněn na obrázku 5.13: v případě, že je v některém uzlu sítě konečných prvků překročena tahová pevnost materiálu, dojde k oddělení prvků (dosud společný uzel je nahrazen dvěma samostatnými uzly patřícími různým konečným prvkům) a další výpočet probíhá na takto změněné síti konečných prvků.

[1]Uvedené zjednodušení je ovšem poněkud příkré, protože postupný rozvoj trhlin je v pružnoplastickém modelu simulován pomocí poklesu tuhosti během zpevnění, dále uvedené „přesnější“ modely ovšem obvykle předpokládají lineární chování až do vzniku tahové trhliny.



Obr. 5.13 Princip diskrétního modelu betonu.

Přestože uvedený princip je velice jednoduchý, přináší použití diskrétních modelů řadu obtíží. Kromě nutnosti upravovat síť konečných prvků během výpočtu jde především o nemožnost zachytit všechny trhliny (síť by musela být velmi podrobná). Dalším problémem je *závislost výsledků na velikosti sítě konečných prvků*, která je problémem i dále uvedených modelů.[1]

5.3.11 Koncept rozmazaných trhlin

Dále popisovaný model patří do skupiny *kontinuitních modelů* stejně jako modely pružnoplastické.

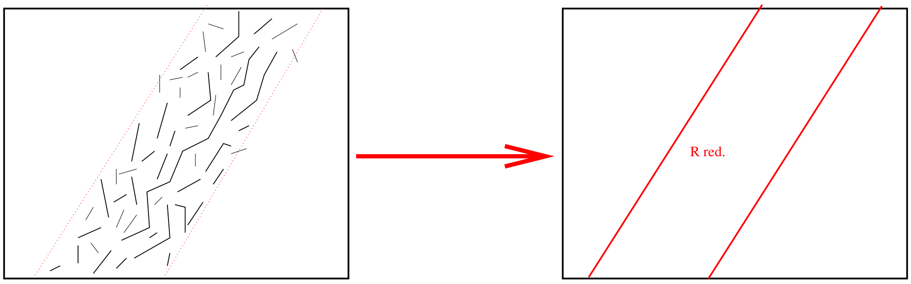
Další modely mohou být založeny na *nelineární lomové mechanice* (modely rozmazaných trhlin, modely nelokálního kontinua, mikroploškové modely a další).

V následujícím textu si přiblížíme jeden z možných modelů založených na *konceptu rozmazaných trhlin.*[2] Pro jednoduchost se omezíme jen na otázky modelování chování betonu v tahu a v úloze rovinné napjatosti. Vliv trhlin na mechanické vlastnosti materiálu je v takovém modelu simulován prostřednictvím úpravy hodnot materiálových parametrů, přičemž spojitost materiálu zůstává zachována. Popisovaný model vychází z prací Bažanta [1], Červenky [49] a dalších.

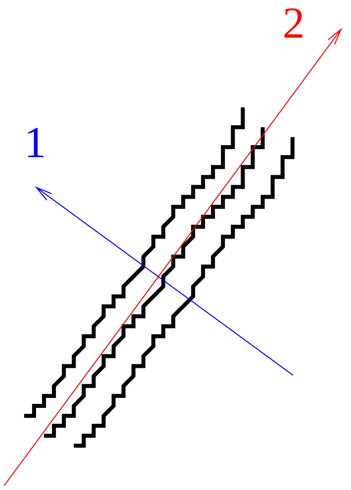
Koncept rozmazaných trhlin je velmi výhodný při použití metody konečných prvků, protože ani v průběhu simulace rozvoje trhlin v materiálu nevyžaduje žádné změny tvaru sítě konečných prvků. Má ovšem i určité nedostatky, o kterých bude pojednáno níže. Použitý předpoklad o poklesu hodnot mechanických vlastností (modulů přetvárnosti nebo „tuhostí“) oblasti s trhlinami je ovšem výstižný zejména v případě, kdy v materiálu vzniká sít drobných trhlinek (např. počáteční fáze porušování betonu nebo železobetonu vyztuženého sítěmi, případně některých vláknobetonů), v případě, že v materiálu vznikají jednotlivé trhliny velkých rozměrů samozřejmě nelze očekávat výstižné výsledky.

[1] V některých publikacích je možné najít starší údaje, že tento problém se u diskrétních modelů nevyskytuje. Bohužel novější práce ukazují, že tomu tak není, a tento problém zde nelze zanedbat.

[2] Často se používá i název *rozetřených.* V angličtině se pak obvykle používá termín „smeared cracks“.



Obr. 5.14 Ilustrace konceptu rozmazaných trhlin.



Obr. 5.15 Směry materiálové ortotropie pro materiál s trhlinami.

5.3.11.1 Materiálové parametry

U materiálu s trhlinami je zřejmé, že mechanické vlastnosti (především modul přetvárnosti – v dalším budeme používat označení „reziduální normálová tuhost“) ve směru kolmém na trhlinu budou odlišné (zpravidla nižší) oproti vlastnostem ve směru rovnoběžném se směrem trhliny. Jako oprávněný se zde proto jeví předpoklad o ortotropním chování materiálu.

Matice tuhosti materiálu může v takovém případě nabýt tvaru:

$$\mathbf{D_{cr}} = \frac{R_2}{R_2 - \nu^2\ R_1} \begin{bmatrix} R_1 & \nu R_1 & 0 \\ \nu R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta\ G}{R_2/(R_2-\nu^2\ R_1)} \end{bmatrix}, \tag{5.61}$$

kde R_1, R_2 jsou reziduální normálové tuhosti, ν je Poissonův součinitel, G je modul přetvárnosti ve smyku a β je redukční koeficient pro G.

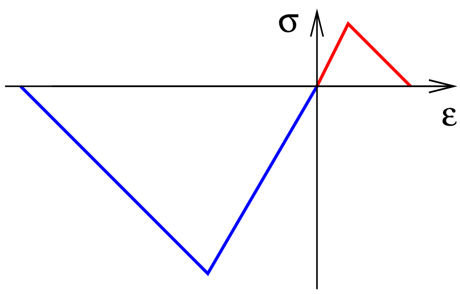
Vztah (5.61) byl získán úpravou klasické matice tuhosti ortotropního materiálu [4] tak, aby byl splněn požadavek její symetrie podle hlavní diagonály. Ortotropní materiál je ve 2D popsán také dvěma různými hodnotami Poissonova součinitele, což je u betonu obvykle problém, protože zjištění dostatečně přesné hodnoty této veličiny je v praxi nesnadné i u trhlinami neporušeného materiálu. Proto byl Poissonův součinitel ve směru kolmém na trhlinu ponechán stejný jako u neporušeného materiálu a druhý součinitel byl dopočten z předpokladu symetrie matice tuhosti.

V práci [4] je navrhován i mírně odlišný způsob práce s Poissonovými součiniteli, jehož výsledkem je vztah:

$$\mathbf{D_{cr}} = \frac{1}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} R_1 & \nu\sqrt{R_1\ R_2} & 0 \\ \nu\sqrt{R_1\ R_2} & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta\ G}{1/(1-\nu^2)} \end{bmatrix}, \tag{5.62}$$

5.3.11.2 Určování reziduálních normálových tuhostí

Pro využití matice (5.61) je třeba zvolit vhodnou strategii výpočtu reziduální normálové tuhosti ve směru kolmém na směr trhlin. Je zřejmé, že v případě dvojosé napjatosti je třeba zvolit postup, který bude přihlížet k k tomu, že napjatost není jednoosá.



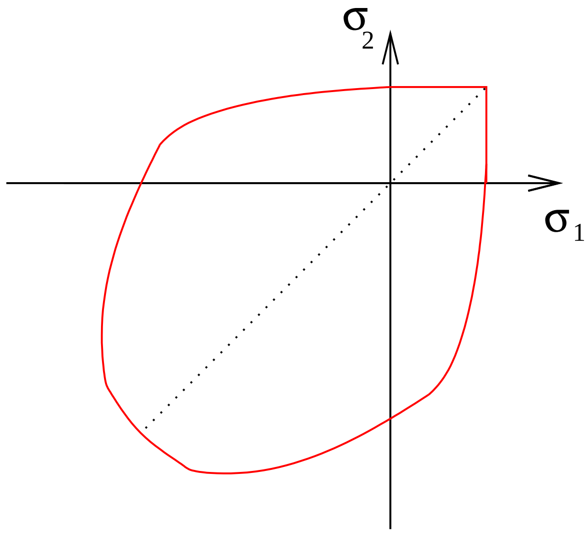
Obr. 5.16 Ekvivalentní jednoosý vztah mezi σ a ε.

Velmi často se proto uplatňuje „inženýrský“ přístup, ve kterém jsou normálové tuhosti stanovovány na základě ekvivalentní jednoosé závislosti mezi napětím a poměrnou deformací [49]. V takovém případě je třeba zvolit vhodné veličiny, například hlavní tahové napětí a jemu odpovídající poměrnou deformaci.

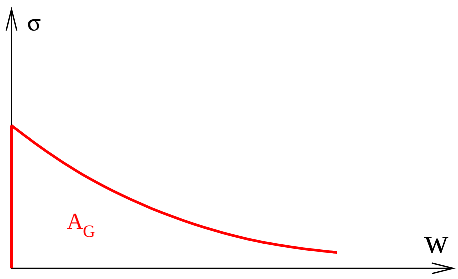
Zohlednění dvojosé napjatosti je pak možné zahrnout do výpočtu tak, že parametry jednoosé závislosti se určují z hodnot funkce porušení materiálu ve 2D, které odpovídají aktuální dvojosé napjatosti (viz například [14]).

Využívány bývají různé podmínky porušení, například dříve některé z výše popsaných (Chen–Chenova, Kupferova).

Obvyklým výpočetním postupem je určení okamžiku inicializace „trhlin“ (nebo



Obr. 5.17Schematické znázornění Kupferovy podmínky pro hlavní napětí σ_1, σ_2



Obr. 5.18 Závislost mezi otevřením trhliny a napětím.

počátku tlakového porušení) pomocí zvolené podmínky pro 2D napjatost a následnou aplikací jednoosého ekvivalentního vztahu.

Je možné buď směr trhlin (a tedy směr veličin vstupujících do ekvivalentního jednoosého vztahu) ztotožnit buď se směrem hlavních napětí v okamžiku počátku rozvoje „trhlin“[1] nebo provádět úpravu směru „trhlin“ v závislosti změn směru hlavních napětí v průběhu dalšího výpočtu.[2]

Je známo [1], že samotné používání jednoosého vztahu mezi napětím a deformací pro popis chování betonu v tahu vede k nevýstižným výsledkům (beton se obvykle porušuje v relativně úzkých oblastech, *zónách lokalizace*, což tímto vztahem není možné dostatečně vystihnout) a především v metodě konečných prvků dochází k závislosti výsledků výpočtu na tvaru a hustotě konečných prvků.

---

[1]Obvykle se v literatuře označuje jako „model pevných (fixovaných) trhlin“.

[2]Zpravidla se označuje jako „model rotujících trhlin“.

Pro dosažení výsledků, které jsou v lepší shodě s chováním skutečného materiálu, se používá řada postupů. Jedním z nich je *model pásu trhlin* navržený Bažantem [1], který předpokládal, že energii uvolněnou při úplném otevření trhliny[1] je možné považovat za vlastnost materiálu. Pro takovou energii se obvykle používá název *lomová energie*.

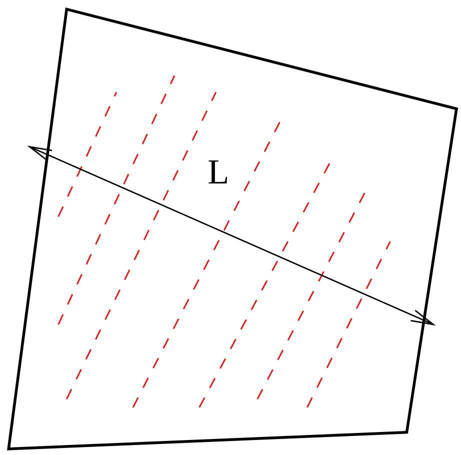
Při rozvoji trhlin se podle [1] předpokládá platnost vztahu:

$$G_F = A_G\ L = konst., \tag{5.63}$$

kde L je šířka oblasti porušované trhlinami (šířka pásu trhlin),[2] A_G je plocha oblasti pod sestupnou větví pracovního diagramu na obrázku 5.18 a G_F lomová energie. Lomovou energii je možné určovat experimentálně a odpovídá energii uvolňované při rozvoji trhlin. Je definována jako:

$$G_F = \int_0^\infty \sigma_n(w)\ dw, \tag{5.64}$$

kde $\sigma_n(w)$ je napětí a w je šířka trhliny[3] podle obrázku 5.19.



Obr. 5.19 Šířka pásu trhlin.

Lomovou energii je sice možné považovat za materiálovou vlastnost, zjišťuje se však nestandardními postupy (z pohledu evropských technických norem). Pokud tato hodnota není k dispozici, je možné ji přibližně stanovit z předpokladu, že šířka trhliny po úplném uvolnění napětí w_o je přibližně invariantní vůči vlastnostem betonu a je s lomovou energií v relaci:

$$w_o = \frac{2\ G_F}{f_t}, \tag{5.65}$$

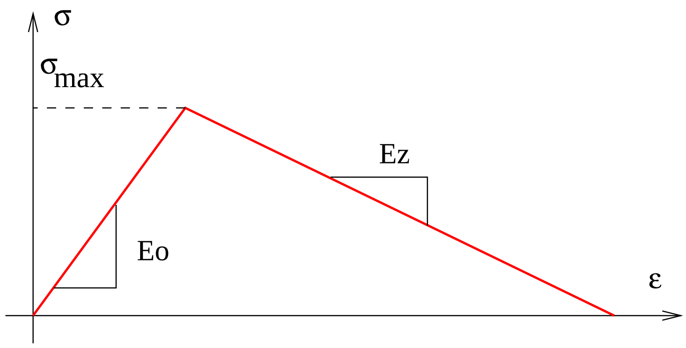
[1] V betonu jde samozřejmě o otevření všech trhlinek v jednotce materiálu.

[2] Obvykle jde o „šířku“ oblasti, na které je vztah uplatňován, v metodě konečných prvků je to rozměr konečného prvku nebo jeho části příslušející vyšetřovanému materiálovému bodu.

[3] Šířka plně otevřené trhliny je s poměrnou deformací svázána vztahem $w = \varepsilon_n\ L$

g [mm]	α_F [-]
8	4
16	6
32	10

Tab. 5.3 Hodnoty součinitele α_F.



Obr. 5.20 Vztah mezi napětím σ a poměrnou deformací ε.

kde f_t je pevnost betonu v jednoosém tahu.

Lomovou energii lze také stanovit empirickým vztahem podle Karihalooa [18]:

$$G_F = \alpha_F (f_c)^{0,7}, \tag{5.66}$$

kde f_c je pevnost betonu v tlaku a α_F je součinitel, závisející na maximální velikosti zrna kameniva g v betonu. Orientační hodnoty jeho velikosti jsou uvedeny v tabulce 5.3.

Je-li například závislost mezi napětím a deformací v materiálu s rozvíjejícími se trhlinami popsána jako lineární, je při aplikaci modelu pásu trhlin zřejmě nejvýhodnější upravovat hodnotu modulu E_z tak, aby byla splněna rovnice (5.63). Při uvážení, že šířku trhliny lze stanovit jako:

$$w = \varepsilon\ L, \tag{5.67}$$

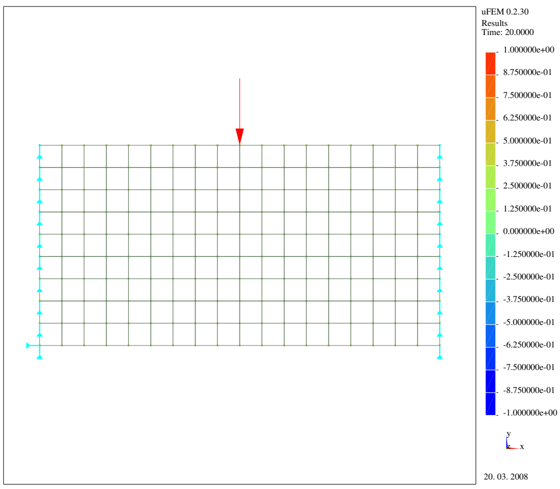
a z geometrických vztahů na obrázku 5.20 je možné E_z stanovit ve tvaru:

$$E_z = \frac{E_o}{1 - \frac{2 G_F E_o}{L\ \sigma_{max}^2}}. \tag{5.68}$$

Šířka pásu trhlin odpovídá rozměru konečného prvku ve směru kolmém na směr trhlin, zjednodušeně je tedy možné položit $L = \sqrt{A}$, kde A je plocha prvku příslušná vyšetřovanému integračnímu bodu konečného prvku.

Příklad 5.6. Pomocí vhodného software řešte obdélníkovou stěnu zatíženou uprostřed horního okraje zatížené bodovou silou. Stěna je prostě uložená a mí rozměry 2×1 m a tloušťku $0,1$ m. Vyneste pracovní diagramy (vztah mezi zatížeím a svislou deformací) pro dělení sítě konečných prvků 8×4, 16×8 a 18×9 pro bod uprostřed spodního okraje stěny.

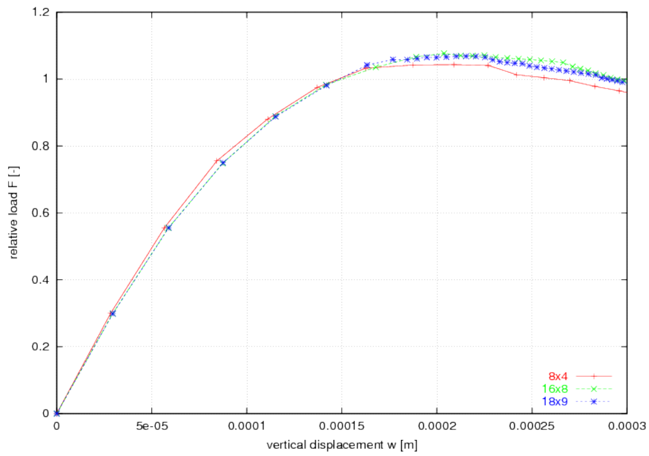
Řešení. Pro řešení použijeme konečněprvkový software uFEM. Na obrázku 5.21 je jedna z variant konečněprvkového modelu. Ve všech případech je možné sestavit sít se čtvercovými konečnými prvky, rozdíly jsou jen v jejich počtu a velikosti.



Obr. 5.21 Stěna zatížená silou – výpočetní model příkladu 5.6.

Na obrázku 5.22 jsou uvedeny pracovní diagramy (zde ve formě závislosti mezi velikostí zatížení a dosaženou deformací) pro varianty sítě konečných prvků.

▲



Obr. 5.22 Stěna zatížená silou – pracovní diagramy.

5.4 Geometrická nelinearita

5.4.1 Geometricko–deformační rovnice

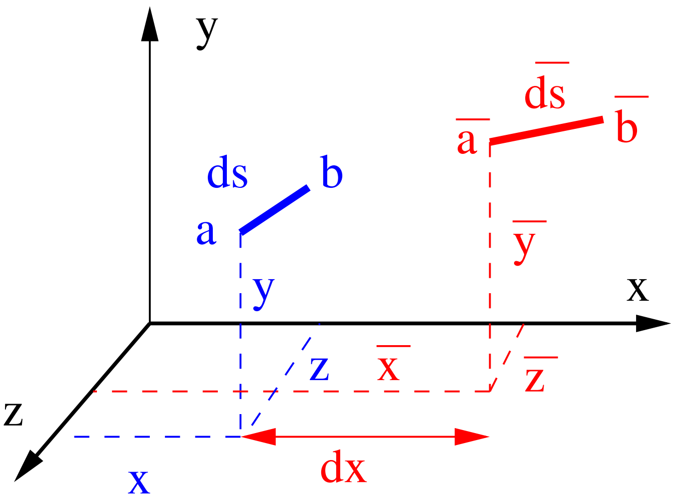
V teorii pružnosti [39] obvykle pracujeme se zjednodušenými geometrickými vztahy ve tvaru:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\
\varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\
\gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}.
\end{aligned}
\tag{5.69}
$$

Toto odvození je založeno na podstatných zjednodušeních, nicméně v případech, které odpovídají předpokladům o malých deformacích řešených konstrukcí, poskytuje dostatečně přesné výsledky.

V případě, že deformace konstrukce nejsou malé (například průhyb nosníku se blíží $\frac{1}{10}$ jeho rozpětí), vztahy (5.70) již nemusí vyhovovat. Pro takové úlohy je potřebné geometrické vztahy odvodit přesněji.

Uvažujme s soualdu s obrázkem 5.23 úsečku o délce ds, která je například hranou



Obr. 5.23 K odvození geometricko–deformačních vztahů.

krychle vyjmuté z pružného tělesa. Zřejmě můžeme délku ds vyjádřit pomocí jejích průmětů do os x, y a z:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{5.70}$$

Po deformaci dojde k posunu počátku úsečky (bodu a) o vzdálenosti du, dv, dw do bodu $\overline{a}$, ale také ke změně její délky z ds na $d\overline{s}$:

$$d\overline{s}^2 = d\overline{x}^2 + d\overline{y}^2 + d\overline{z}^2. \tag{5.71}$$

Složky posunu bodu a do $\overline{a}$ můžeme zapsat v obvyklém tvaru:

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx, \\ dv &= \frac{\partial v}{\partial y} dy, \\ dw &= \frac{\partial w}{\partial z} dz. \end{aligned} \tag{5.72}$$

Polohu konce úsečky po deformaci (bodu $\overline{b}$) můžeme stanovit na základě posunují bodu a do $\overline{a}$ a na základě délky $d\overline{s}$:

$$\begin{aligned} d\overline{x}^2 &= (du + dx)^2, \\ d\overline{y}^2 &= (dv + dy)^2, \\ d\overline{z}^2 &= (dw + dz)^2. \end{aligned} \tag{5.73}$$

Po dosazení rovnic (5.74) do vztahu (5.71) a úpravě získáme:

$$d\overline{s}^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2\,(du\ dx + dv\ dy + dw\ dz) + du^2 + dv^2 + dw^2. \tag{5.74}$$

Nyní z využitím vztahů (5.71) a (5.74) zapišme druhou mocninu změny délky úsečky z ds na $d\overline{s}$:

$$d\overline{s} - ds = du^2 + 2\ du\ dx + dv^2 + 2\ dv\ dy + dw^2 + 2\ dw\ dz. \tag{5.75}$$

Dosazením z (5.73) například pro výraz $du^2 + 2\ du\ dx$ získáme:

$$\begin{aligned} du^2 + 2\ du\ dx &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}dx\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial w}dw\right)^2 + \\ &+ 2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}dy\ dz + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x}dz\ dx + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}dx\ dy\right) + \\ &+ 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx^2 + \frac{\partial u}{\partial y}dy^2 + \frac{\partial u}{\partial z}dz^2\right). \end{aligned} \tag{5.76}$$

Analogické vztahy můžeme získat pro ostatní členy výrazu (5.75).

Protože uvedený výraz (5.75) by měl obsahovat složky vektoru poměrných deformací, je možné psát:

$$d\overline{s} - ds = 2\left(\varepsilon_x\ dx^2 + \varepsilon_y\ dy^2 + \varepsilon_z\ dz^2 + \gamma_{yz}dy\ dz + \gamma_{zx}dz\ dx + \gamma_{xy}dx\ dy\right). \tag{5.77}$$

Na základě (5.77) můžeme jednotlivé složky výrazu 5.77 tedy zapsat:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right], \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right], \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right], \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}. \end{aligned} \tag{5.78}$$

Vztahy (5.79) je možné vynecháním smíšených derivací a mocnin derivací upravit na vztahy (5.70), které se běžně využívají v lineární teorii pružnosti [36]. Nové uvedené výrazy (5.79) umožňují popsat deformace přesněji[1] a můžeme tedy odstoupit od požadavku malých deformací studované konstrukce.

Pokud budeme při výpočtech vztahy (5.79) používat, povede řešení na soustavy *nelineárních* rovnic. Takové úlohy budeme nazývat *geometricky nelineární.*

[1]Povšimněme si, že i zde pracujeme se zjednodušujícím předpokladem, že $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$.

5.4.2 Geometricky nelineární úlohy ve stavební mechanice

V případě, že deformace konstrukce jsou ve srovnání s jejími rozměry nezanedbatelné, říkáme, že konstrukce má *konečné deformace*. To je případ výjimečný a cílem projektanta je se mu u obvyklých konstrukcí vyhnout.

U stavebních konstrukcí proto můžeme očekávat tyto typické případy geometrických nelinearit:

- Velká posunutí $\mathbf{u}$, ale poměrné deformace $\boldsymbol{\varepsilon} << 1$:
  - v $\boldsymbol{\varepsilon}$ se uvažují jen lineární členy: takto řešíme ploché oblouky nebo lana,
  - rotace $\boldsymbol{\omega} < 1$, ale $\boldsymbol{\omega} >> \boldsymbol{\varepsilon}$, u normálových poměrných deformací uplatníme jen lineární členy, ale u zkosení i členy další. To je případ úloh lineární stability.

Případ, kdy jsou velká jak posunutí a pootočení, tak poměrné deformace je u stavebních konstrukcí velmi neobvyklý, vyskytuje se spíše v některých speciálních úlohách hornické mechaniky nebo ve strojírenství.

Poznámka 5.7. Při popisu úlohy záleží na volbě referenčního systému souřadnic: v dalším textu se bude předpokládat pevná soustava souřadnic (během řešení se neměnící) – *Lagrangeovská*.

5.4.3 Geometrická matice tuhosti prvku

Při řešení geometricky nelineárních úloh metodou konečných prvků budeme pracovat se soustavou rovnic ve tvaru:

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K_G})\ \mathbf{r} = \mathbf{F}, \tag{5.79}$$

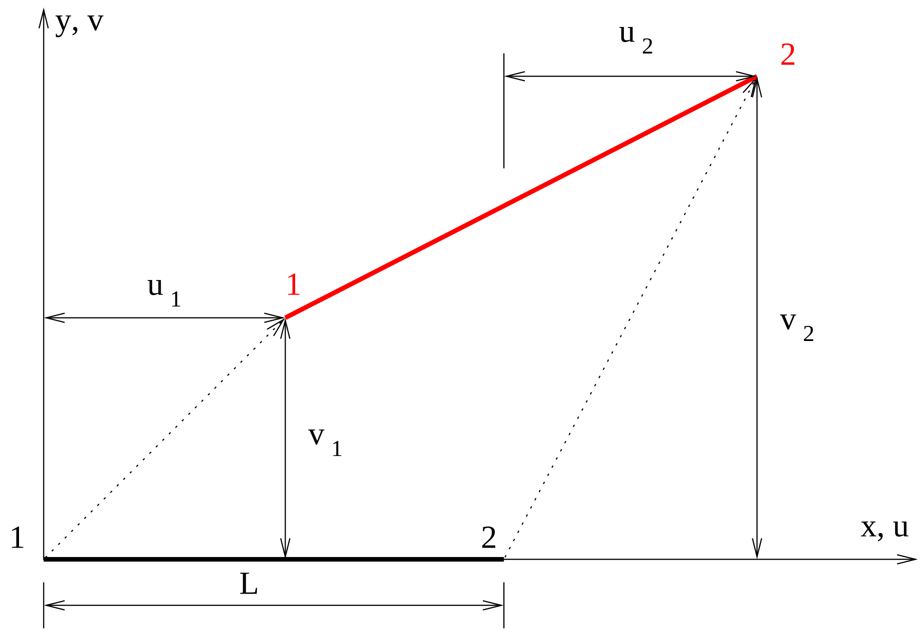
kde matice $\mathbf{K_G}$ obsahuje členy vzniklé z „nelineárních“ prvků v $\boldsymbol{\varepsilon}$ a označuje se jako „matice počátečních napětí“, „geometrická matice“ nebo „stabilitní matice“. Závisí na *aktuální* napjatosti a není ji tedy možné stanovit předem. Úlohu proto řešíme nejčastění Newtonovou–Rapsonovou metodou nebo metodou délky oblouku [50].

Rovnici (5.79) můžeme využít při řešení úloh lineární stability. Použitím matice $\mathbf{K_G}$ zajistíme zahrnutí vlivu deformace konstrukce do výpočtu (půjde tedy o obdobu Eulerova řešení na prutu). Cílem je najít kritické zatížení pro ztrátu stability:

$$(\mathbf{K} + \lambda\mathbf{K_G})\mathbf{r} = \mathbf{0} \tag{5.80}$$

což je jistá analogie „$M = F\ u$“ z Eulerova řešení.

Problém $(\mathbf{K}+\lambda\mathbf{K_G})\mathbf{r} = \mathbf{0}$ je *úloha o vlastních číslech matice*, λ je potom násobitel kritického zatížení.



Obr. 5.24 Prut rovinné příhradoviny v rovině xy.

5.4.4 Odvození geometrické matice tuhosti příhradového prutu

V dalším textu si ukážeme, jak získat geometrickou matici tuhosti příhradového prutu, který je na obrázku 5.24.

V tomto jednoduchém případě je možné přímo zapsat vztahy mezi funkcemi posunutí $\mathbf{u}$ a posunutími uzlů $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{r}, \tag{5.81}$$

které zapíšeme:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\frac{x}{L} & 0 & \frac{x}{L} & 0 \\ 0 & 1-\frac{x}{L} & 0 & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \tag{5.82}$$

Z rovnic (5.79) použijeme člen pro ε_x ve kterém ponecháme jen členy odpovídající rovině xy:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2. \tag{5.83}$$

Výraz pro potenciální energii má obvyklý tvar:

$$\Pi_i = \frac{1}{2}\int_0^L \varepsilon_x \sigma_x dx = \frac{E\ A\ L}{2}\ \varepsilon_x^2. \tag{5.84}$$

Dosadíme-li do (5.84) sestavený výraz pro ε, získáme:

$$\Pi_i = \frac{E\ A\ L}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right)^2 \approx \frac{E\ A\ L}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]. \tag{5.85}$$

Ve posledním výrazu jsme provedli některá zjednodušení (vynechání členů vyšších řádů, které pokládáme ze výrazně menší než ostatní členy). Tím získáme méně přesné, ale podstatně jednodušší výrazy.[1] Výraz (5.85) můžeme podrobněji rozepsat:

$$\Pi_i = \frac{1}{2}\left[(E\ A\ L)\left(u_1^2 - 2u_1u_2 + u_2^2\right) + \frac{A\ E}{L}\left(u_1-u_2\right)\left(v_1^2 - 2v_1v_2 + v_2^2\right)\right]. \tag{5.86}$$

Přepíšeme-li předchozí výraz do maticové formy $\frac{1}{2}\mathbf{r}^T(\mathbf{K}+\mathbf{K_G})\mathbf{r}$, můžeme z něj vyjádřit matici tuhosti:

$$\mathbf{K}+\mathbf{K_G} = \frac{E\ A}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{E\ A}{L^2}(u_2-u_1)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{5.87}$$

kde levá část výrazu je známá matice tuhosti příhradového prvku. Pravá část potom zřejmě bude hledanou geometrickou maticí tuhosti.

Rozdíl $u_2 - u_1$ odpovídá prodloužení prutu ΔL, a proto zřejmě platí:

$$N = E\ A\frac{\Delta L}{L} \;\Rightarrow\; N = \frac{E\ A}{L}(u_2-u_1), \tag{5.88}$$

kde N je normálová síla v příhradovém prutu.

Potom můžeme geometrickou matici tuhosti zapsat ve tvaru:

$$\mathbf{K_G} = \frac{N}{L}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{5.89}$$

Všimněme si, že v rovnici (5.89) vystupuje normálová síla. Tu ovšem není možné stanovit předem, a proto je zřejmé, že použití matice $\mathbf{K_G}$ opravdu vede na nelineání úlohu.

Takto odvozená matice tuhosti může být využita pro přešení příhradových nosníků s velkými průhyby nebo pro řešení nosných lan.

[1] Uvedené zjednodušení odpovídá případu řešení podle teorie 2. řádu v teorii pružnosti.

Příklady k procvičení

1. Zapište rovnici pro ε_y v prostoru.

2. Proč použití geometrické matice tuhosti vede na nelineární úlohu?

3. Která podmínka plasticity je vhodná pro beton?

Klíč k příkladům k procvičení

1. $\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$
2. Protože $\mathbf{K_G}$ závisí na vnitřních silách konstrukce.
3. Chen–Chenova nebo Willama–Warnkeho.

Kapitola 6

Řešení dalších stavebních problémů metodou konečných prvků

6.1 Úloha vedení tepla

Ve stavební praxi je často potřebné posoudit chování konstrukcí, nebo jejich částí, z hlediska vedení tepla, například pro nalezení „tepelných mostů“ nebo pro posouzení izolačních schopností konstrukce.

Tytéž formální vztahy je možné uplatnit i pro úlohy šíření vlhkosti v materiálu, což je důležité při studiu degradace a koroze stavebních konstrukcí.

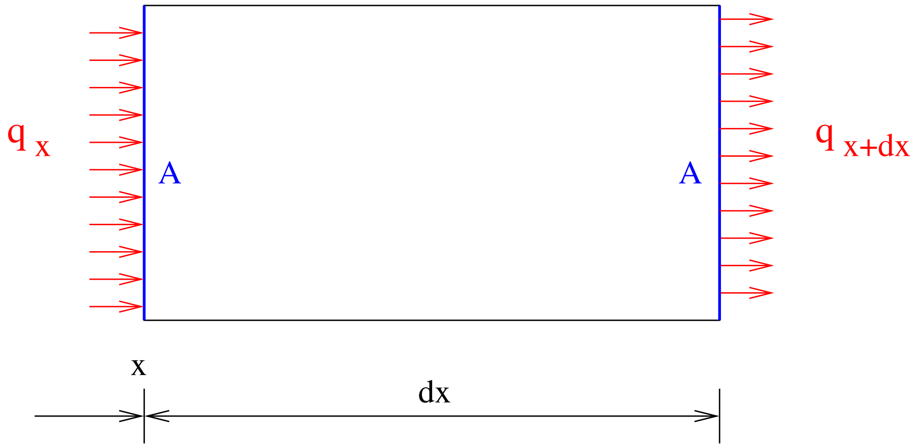
I pro tyto úlohy je možné s výhodou použít metodu konečných prvků, jen je potřebné nahradit vztahy a rovnice teorie pružnosti rovnicemi vedení tepla. Protože jde o úlohy, které mohou být pro čtenáře méně názorné než problémy mechaniky, budeme v dalším textu uvádět i fyzikální rozměry jednotlivých veličin a budeme se odkazovat na odpovídající vztahy z mechaniky a pružnosti.

Cílem tohoto odstavce není podat komplexní náhled na problematiku vedení tepla ani možností jejího řešení – omezíme se proto jen na stručný nástin úlohy stacionárního vedení tepla. Výklad provedeme na trojuzlovém prvku pro řešení 2D úloh, který je analogický trojuzlovému prvku pro řešení rovinného problému.

6.1.1 Přehled základních vztahů v 1D úloze

Základní rovnice vedení tepla má tvar:

$$E_{in} + E_{gen} = \Delta U + E_{out}, \tag{6.1}$$



Obr. 6.1 Vedení tepla tělesem.

kde E_{in} je teplo vstupující do úlohy ($[W\ h]$, $[J]$), E_{gen} je teplo generované vnitřním zdrojem ($[J]$), ΔU je změna energie ($[J]$) a E_{out} je vystupující teplo ($[J]$).

Tuto rovnici je možné rozepsat do tvaru:

$$q_x\ A\ dt + Q\ A\ dx\ dt = \Delta U + q_{x+dx}\ A\ dt, \tag{6.2}$$

kde q_x je teplo vstupující do úlohy na okraji x (*tepelný tok*), ($[W/m^2]$), $q_{x+dx} \ldots$ teplo vstupující do úlohy na okraji $x + dx$ ($[W/m^2]$), t je čas ($[s]$), Q je vnitřní zdroj ($[W/m^3]$) a A je plocha kolmá na tepelný tok ($[m^2]$).

Fourierův zákon má tvar:

$$q_x = -\lambda_x\ \frac{\partial T}{\partial x}, \tag{6.3}$$

kde q_x je tepelný tok (teplo vstupující do úlohy), ($[W/m^2]$), λ_x je tepelná vodivost $[W/(m\ K)]$, T je teplota, $\frac{\partial T}{\partial x} = g_x$ je tepelný gradient $[K\ m^{-1}]$.

Taylorův rozvoj (1. člen):

$$f_{x+dx} = f_x + \frac{df_x}{dx}dx, \tag{6.4}$$

tedy z (6.4) plyne:

$$q_{x+dx} = -\left[\lambda_x \frac{dT}{dx} + \frac{d}{dx}\left(\lambda_x \frac{dT}{dx}\right) dx\right]. \tag{6.5}$$

Změnu energie ΔU můžeme zapsat jako:

$$\Delta U = c\,(\rho\ A\ dx)\,dT. \tag{6.6}$$

kde c je měrná tepelná kapacita ($[(W\ h)/(kg\ K)]$) a ρ je objemová hmotnost (kg/m^3).

6.1.2 Rovnice nestacionárního vedení tepla

Dosazením výrazů (6.6) a (6.4) do základní rovnice (6.2) získáme *rovnici nestacionárního vedení tepla*:

$$\frac{d}{dx}\left(\lambda_x \frac{dT}{dx}\right) + Q = \frac{c\rho dT}{dt}. \tag{6.7}$$

6.1.3 Rovnice stacionárního vedení tepla

Úpravou předchozí rovnice (6.7) získáme *rovnici stacionárního vedení tepla*:

$$\frac{d}{dx}\left(\lambda_x \frac{dT}{dx}\right) + Q = 0. \tag{6.8}$$

V tomto případě musíme zavést omezující předpoklad, že tepelné toky se v čase nemění.

6.1.4 Maticový přepis vztahů pro úlohu stacionárního vedení tepla

Pro 2D úlohu můžeme napsat vztahy pro teplotní gradienty ve tvaru $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\partial}\mathbf{T}$:

$$\left\{ \begin{array}{c} g_x \\ g_y \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{array} \right] \left\{ \; T \; \right\}, \tag{6.9}$$

což lze chápat jako analogii *geometrických rovnic v mechanice*.

Dále můžeme Fourierův vztah přepsat ve tvaru: $\mathbf{q} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\left\{ \begin{array}{c} q_x \\ q_y \end{array} \right\} = -\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} g_x \\ g_y \end{array} \right\}, \tag{6.10}$$

což je analogií k *fyzikálním rovnicím* v mechanice.

Potenciální energie „vnitřních sil“ potom můžeme zapsat jako:

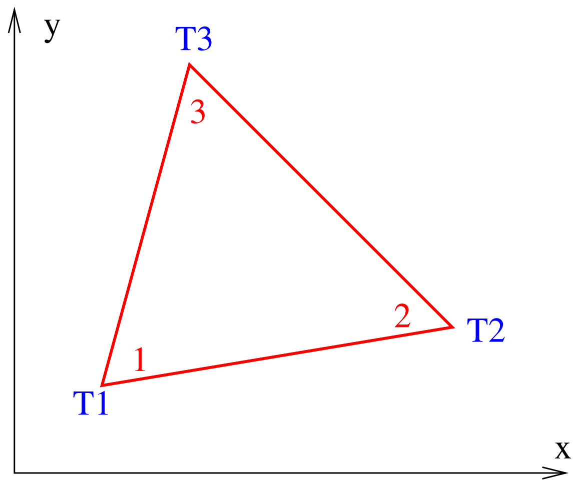
$$\Pi = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \; \mathbf{q} dV = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \; \mathbf{D} \; \boldsymbol{\varepsilon} dV. \tag{6.11}$$

6.1.5 Odvození konečného prvku pro stacionární problém

Uvažujme trojuzový konečný prvek uvedený na obrázku 6.2. Tento prvevek budem mít jednu neznámou teplotu T v každém bodě.

Je-li prvek trojuzlový, musí mít celkem tři neznámé uzlové parametry:

$$\mathbf{T} = \{T_1, T_2, T_3,\}^T. \tag{6.12}$$



Obr. 6.2 Trojuzlový prvek pro úlohy vedení tepla.

Aproximace neznámých teplot na prvku tedy bude mít vtar:

$$T(x, y) = a_1 x + a_2\, y + a_3, \tag{6.13}$$

což je možné zapsat maticově ($\mathbf{T} = \mathbf{U}\ \mathbf{a}$):

$$\left\{\ T\ \right\} = \left[\ x \quad y \quad 1\ \right] \left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \right\}. \tag{6.14}$$

V uzlech 1, 2, 3 můžeme napsat aproximace teplot ($\mathbf{r} = \mathbf{S}\ \mathbf{a}$):

$$\left\{ \begin{array}{c} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \right\} \tag{6.15}$$

Kombinací vztahů $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\partial}^T\ \mathbf{T}$ a $\mathbf{T} = \mathbf{U}\ \mathbf{a}$ vznikne $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\ \mathbf{a}$, kde $\mathbf{B} = \boldsymbol{\partial}^T\ \mathbf{U}$:

$$\left\{ \begin{array}{c} g_x \\ g_y \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \end{array} \right] \left[\ x \quad y \quad 1\ \right] \left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \right\}, \tag{6.16}$$

tedy:

$$\left\{ \begin{array}{c} g_x \\ g_y \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \right\} \tag{6.17}$$

.

Z *rovnice*(6.15) plyne:

$$\mathbf{a} = \mathbf{S}^{-1}\ \mathbf{r}, \tag{6.18}$$

kde $\mathbf{S^{-1}}$ má tvar:

$$\mathbf{S^{-1}} = \frac{\begin{bmatrix} y_2 - y_3 & y_3 - y_2 & y_1 - y_3 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \\ x_2y_3 - x_3y_2 & x_3y_1 - x_1y_3 & x_1y_2 - x_2y_1 \end{bmatrix}}{x_1 - (y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)}. \tag{6.19}$$

Na základě rovnice (6.19) můžeme napsat vztah pro gradienty teploty:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\ \mathbf{S}^{-1}\ \mathbf{r}, \tag{6.20}$$

který je možné rozepsat do podoby:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\begin{bmatrix} y_2 - y_3 & y_3 - y_2 & y_1 - y_3 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \\ x_2y_3 - x_3y_2 & x_3y_1 - x_1y_3 & x_1y_2 - x_2y_1 \end{bmatrix}}{x_1 - (y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)} \left\{ \begin{array}{c} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{array} \right\}. \tag{6.21}$$

Potenciální energie „vnitřních sil“ má tvar:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T\ \mathbf{q} dV = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T\ \mathbf{D}\ \boldsymbol{\varepsilon} dV. \tag{6.22}$$

Po dosazení do (6.22) za jednotlivé členy je možné psát:

$$\Pi_i = \frac{1}{2}\ \mathbf{r}^T \int_V \mathbf{S}^{-1T}\ \mathbf{B}^T\ \mathbf{DB}\ \mathbf{S}^{-1}\ d\ V\ \mathbf{r}^T \tag{6.23}$$

nebo stručně:

$$\Pi_i = \frac{1}{2}\ \mathbf{r}^T\ \mathbf{K}\ \mathbf{r}. \tag{6.24}$$

Potenciální energie „vnějších sil“ má tvar:

$$\Pi_e = \int_V \mathbf{Q}^T dV, \tag{6.25}$$

kde $\mathbf{Q}$ je vektor tepelných tokù:

$$\mathbf{Q} = \left\{ \begin{array}{c} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{array} \right\}. \tag{6.26}$$

Dále můžeme napsat známý vztah:

$$\mathbf{K}\ \mathbf{r}\ =\ \mathbf{F}, \tag{6.27}$$

kde $\mathbf{F}$ je vektor „zatížení“ (vektor tepelných toků) a $\mathbf{K}$ ... matice „tuhosti“ (vodivosti) konečného prvku:

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{S}^{-1T}\ \mathbf{B}^T\ \mathbf{D}\ \mathbf{B}\ \mathbf{S}^{-1}\ d\ V. \tag{6.28}$$

Protože všechny matice v integrálu obsahují jen konstanty, můžeme upravit do podoby:

$$\mathbf{K} = t\ A\ \mathbf{S}^{-1T}\ \mathbf{B}^T\ \mathbf{D}\ \mathbf{B}\ \mathbf{S}^{-1}, \tag{6.29}$$

kde t ... tloušťka konečného prvku.

6.1.6 Převod teplot na zatížení v úlohách statiky

Vypočítané rozložení teplot (změn teplot) můžeme využít jako teplotní zatížení ve statických výpočtech.

Zřejmě platí:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \alpha\ T \\ \alpha\ T \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{6.30}$$

kde T je změna teploty oproti výchozímu nenapjatému stavu a α je součinitel teplotní roztažnosti ($[m/K]$).

Potom napětí od změny teploty budou:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\ \boldsymbol{\varepsilon}, \tag{6.31}$$

a protože $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\ \mathbf{S_{-1}}\ \mathbf{r}$, tak uzlové síly prvku $\mathbf{F}$ můžeme získat:

$$\mathbf{F} = t\ A\ \mathbf{S^{-1T}B^TD}.\ \boldsymbol{\varepsilon} \tag{6.32}$$

Příklad 6.1. Stanovte průběhy napětí σ_x a σ_y na stěně. Úlohu řešte metodou konečných prvků, použijte konečný prvek odvozený na minulé přednášce.

Tloušťka stěny o rozměrech $1 \times 0,5$ m je konstantní a má velikost $t = 0.1m$, modul pružnosti použitého materiálu je $E = 20\ GPa$, Poissonův součinitel má velikost 0.2, součinitel teplotní roztažnosti je $\alpha = 1\ 10^{-6} m/K$.

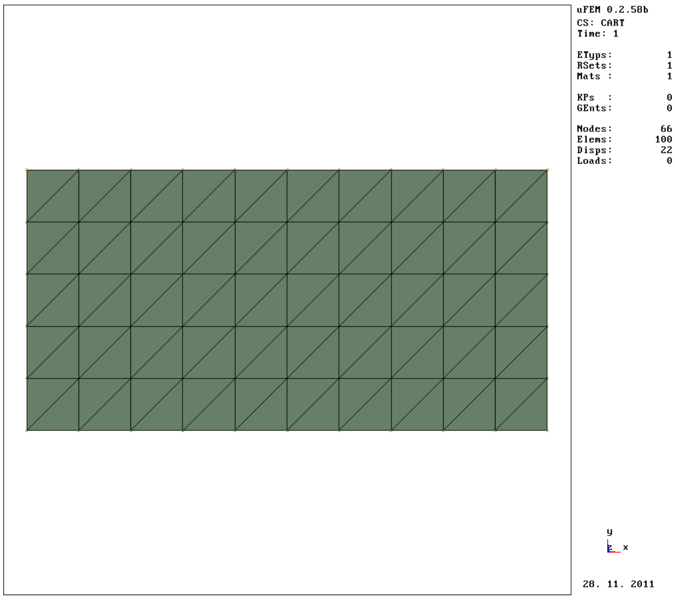
Stěna je zatížena teplotou $-5\ K$ na spodní okraji a $+10\ K$ na horním okraji.

Řešení. K řešení použijeme například konečněprvkový software uFEM [43]. Síť konečných prvků je uvedena na obrázku 6.3.

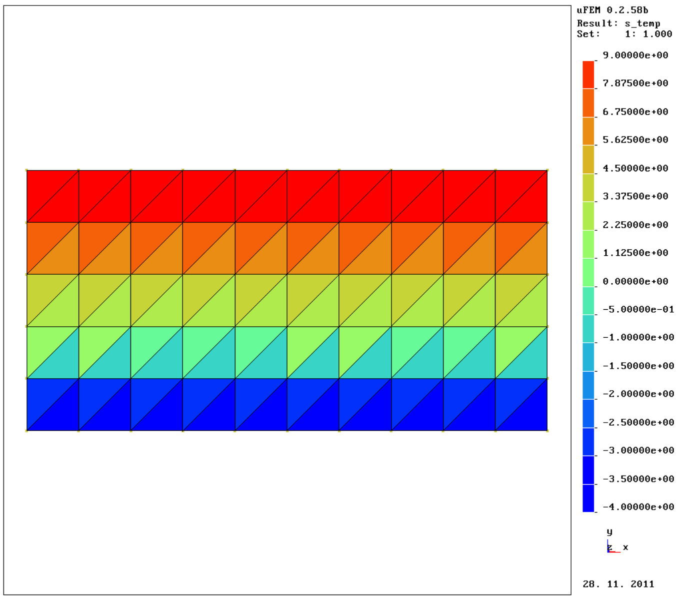
Rozložení vypočtených teplot je uvedeno na obrázku 6.4.[1]

▲

[1] Pozorný čtenář si jistě povšiml, že hodnoty na barevné škále přesně neodpovídají zadaným okrajovým podmínkám. Není to chybou software, ale okolností, že použitý grafický algoritmus průměruje hodnoty teplot ze všech tří uzlů prvku a až tento průměr zobrazuje.



Obr. 6.3 Síť konečných prvků pro příklad 6.1.



Obr. 6.4 Výsledné teploty v příkladu 6.1.

Příklady k procvičení

1. Na konečném prvku byl spočten průměrný přírůstek teploty $T = 10\ K$. Je-li koeficient teplotní roztažnosti $\alpha = 0,00001\ m/K$, určete vektor pořátečních poměrných deformací.

2. Jakou jednotku má teplotní gradient?

3. Jakou jednotku má tepelný tok?

Klíč k příkladům k procvičení

1. Vektor poměrných deformací má tvar:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left\{ \begin{array}{c} 0,0001 \\ 0,0001 \\ 0 \end{array} \right\}.$$

2. $g \ = \ K/m.$

3. $q \ = \ W/m^2.$

6.2 Úlohy stavební dynamiky

6.2.1 Základní předpoklady

Problematika stavební dynamiky je velmi komplikovaná,[1] proto v této části stručně uvedeme jen některé základní vztahy, a základní principy dynamických výpočtů pomocí metody konečných prvků.

Ve statice stavebních konstrukcí jsme předpokládali, že zatížení jsou buď *nepohyblivá* nebo jen *zvolna* se měnící nebo pohybující a že tedy nevyvolávají v konstrukcích *dynamické účinky* jako je chvění nebo kmitání. V těchto úlohách se proto pro potřeby výpočtů předpokládalo, že účinky zatížení a odezva konstrukce jsou *nezávislé na čase*.

V dynamice předpokládáme, že:

- zatížení jsou pohyblivá nebo měnící se,
- konstrukce se mohou pohybovat (např. během zemětřesení)
- účinky zatížení jsou závislé na čase.

U stavebních konstrukcí se jako účinek dynamického zatížení zpravidla vyšetřuje (a připouští) jen jejich *kmitání*, jiné druhy pohybu nejsou přípustné.[2]

Zatíženími vyvolávajícími na konstrukcích dynamické účinky mohou být:

- vozidla (zejména na mostech),
- rotující nebo pohyblivá zařízení (průmyslová zařízení, turbíny a generátory v elektrárnách, jeřáby),
- důlní a průmyslové otřesy (technická seismicita),
- účinky větru,
- účinky zemětřesení.

K nejdůležitějším rovnicím v dynamice patří *D'Alambertův princip*:

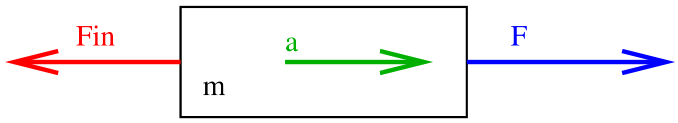
Součet všech setrvačných (inerciálních) sil F_{in} *and sil vyvolávající zrychlení* F *je nula.*

To je možné zapsat:

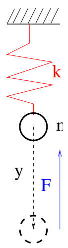
$$F_{in} + F = 0, \tag{6.33}$$

[1] Velkým problémem je zejména tlumení, ale i výstižný popis tuhostních charakteristik stavebních konstrukcí na podloží.

[2] Ani v dynamice stavebních konstrukcí nepřipouštíme mechanismy.



Obr. 6.5 Ilustrace D'Alambertova principu.



Obr. 6.6 Těleso na pružině.

Setrvačná síla ve vztahu (6.5) se stanoví:

$$F_{in} = m\ a, \tag{6.34}$$

kde m je hmotnost a a je zrychlení.

6.2.2 Kmitání tělesa na pružině

Uvažujme těleso o hmotnosti m zavěšené na pružině o tuhosti k podle obrázku 6.6.

Předpokládejme, že tuhost pružiny je $k = \frac{F_p}{y}$, síla v pružině je $F_p = k\ y$ a setrvačnou sílu můžeme stanovit podle vztahu (6.34).

D'Alambertův princip (6.5) je potom možné zapsat v podobě:

$$k\ y + m\ a = 0. \tag{6.35}$$

Zrychlení, které je možné rozepsat jako:

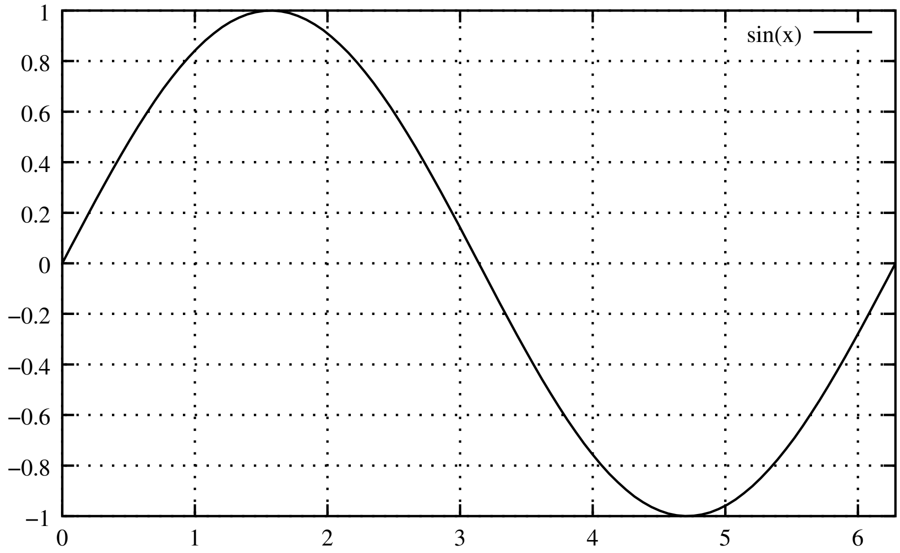
$$a = \frac{d^2\ y}{d\ t^2}, \tag{6.36}$$

může být dosazeno do (6.35). Tím vznikne vztah:

$$\frac{d^2\ y}{d\ t^2}\ m + k\ y = 0. \tag{6.37}$$

Po úpravě je možné získat *rovnici kmitání soustavy s jedním stupněm volnosti*:

$$\frac{k}{m}\ y + \frac{d^2\ y}{d\ t^2} = 0 \tag{6.38}$$



Obr. 6.7 Harmonické buzení.

6.2.3 Harmonické zatížení

Jako *harmonické* označujeme takové zatížení („buzení“), které je možné popsat goniometrickou funkcí *sinus* nebo *kosinus*.

To může být vyvoláno například stroji s rotujícími částmi (například soustruhy a jinými obráběcími stroji, turbínami a generátory a podobně).

Rovnice harmonického kmitání se od vztahu (6.38) bude lišit doplněním členu odpovídajícího harmonickému zatížení:

$$\frac{d^2\ y}{d\ t^2}\ m + k\ y = P \sin(\omega t), \tag{6.39}$$

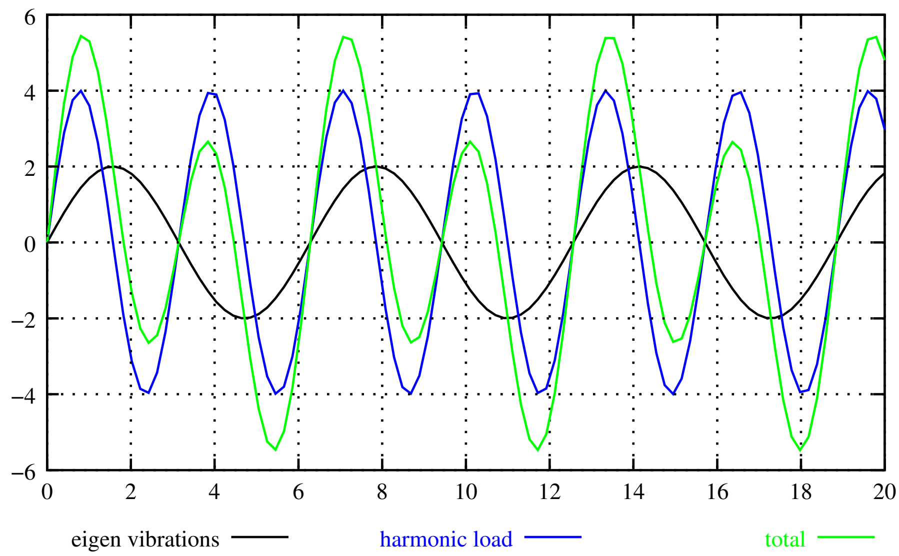
kde P je maximální hodnota harmonického zatížení a ω je frekvence zatížení (tedy úhlová frekvence rotujícího zařízení).

Pro rovnici (6.39) je možné získat řešení ve tvaru:

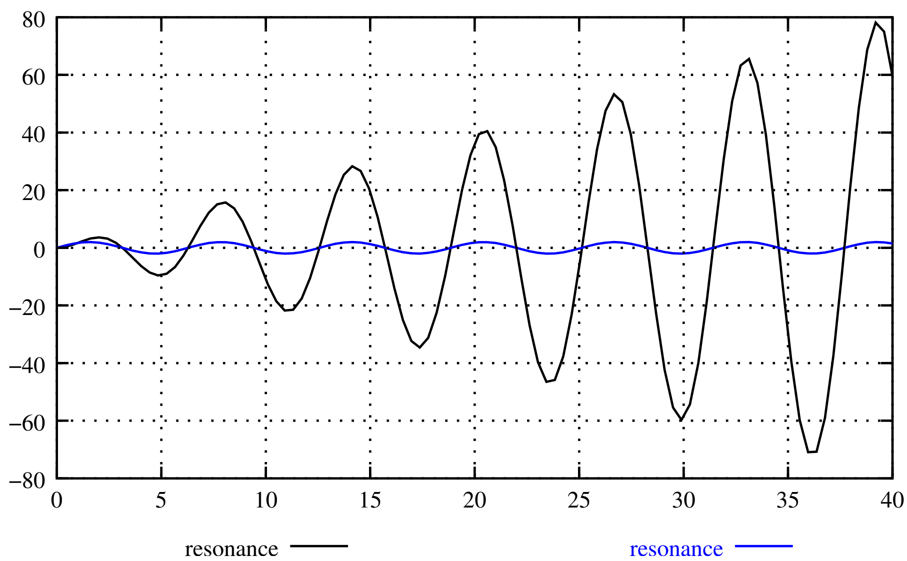
$$y(t) = P(\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_o} \sin(\omega_o t)). \tag{6.40}$$

Poznámka 6.2. Nejen u harmonického zatížení, ale i u dále uvedeného obecně proměnného zatížení se setkáváme s potřebou vyhnout se problému *rezonance* zatížení („buzení“) a kmitání konstrukce.

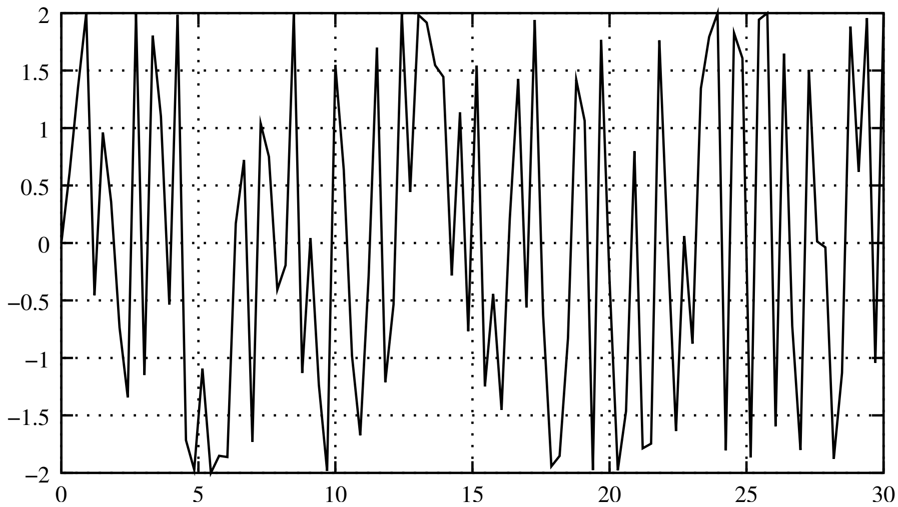
Pojem rezonance je vysvětlován už v základních kurzech fyziky. Jeho praktickým projevem u stavebních konstrukcí je růst výchylek rezonující konstrukce až do té míry, že může dojít k jejímu poškození nebo zřícení.



Obr. 6.8 Harmonické kmitání.



Obr. 6.9 Rezonance.



Obr. 6.10 Obecné časově proměnné zatížení.

Rezonance nastane pokud je frekvence kmitání konstrukce – *vlastní frekvence*, kterou je možné stanovit například z rovnice (6.38) – blízká frekvenci zatížení uvedeného na pravé straně rovnice (6.39).

Je zřejmé, že stavební konstrukce musí být navržena tak, aby k rezonanci se zatížením nedocházelo. To nemusí být nijak snadné, protože rovnice (6.38) bude sice mít jen jedno řešení (a kulička na pružině má tedy jen jednu vlastní frekvenci), ale u skutečných konstrukcí s mnoha stupni volnosti je počet vlastních frekvencí samozřejmě mnohem vyšší.

V praktických úlohách je samozřejmé, že zdroj harmonického buzení, kterým je strojní zařízení po spuštění svoji frekvenci zvyšuje postupně od nuly až po pracovní frekvenci. Jím ovlivňovaná stavební konstrukce musí tedy být navržena tak, aby nedocházelo k rezonanci při pracovní frekvenci strojního zařízení.

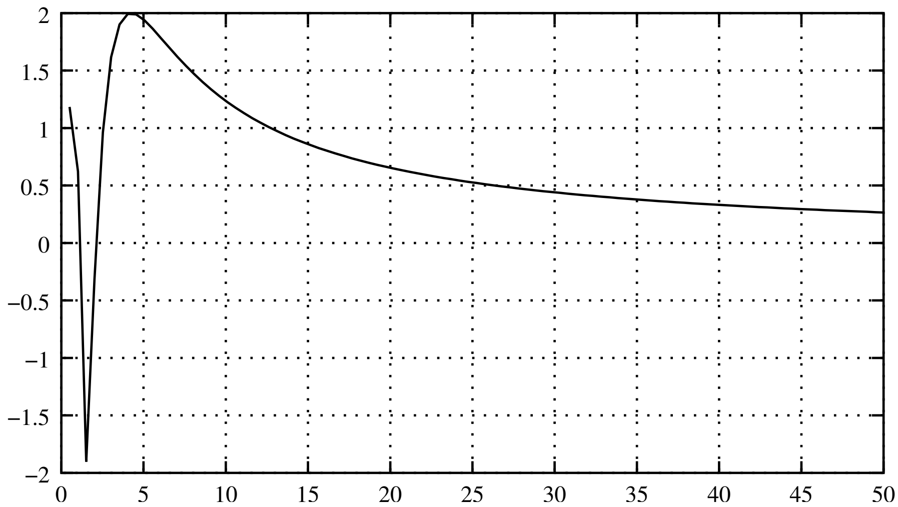
Protože při rozběhu stroje dochází ke stavům, kdy jeho aktuální frekvence je blízká některé vlastní frekvenci stavební konstrukce, je potřebné zkracovat tyto stavy na minimum.[1]

6.2.4 Obecné časově proměnné zatížení

m Obecné časově proměnné zatížení může být vyvoláno řadou jevů, například:

- zemětřeseními,

[1]Tyto údaje by měly být součástí provozní dokumentace objektu a musí být v souladu s provozními předpisy daného strojního zařízení.



Obr. 6.11 Účinek tlumení.

- technickou seismicitou (dopravou, průmyslovou výrobou, stavebními pracemi, důlními otřesy),
- nárazy těles (auta, letadla), poruchami, výbuchy,
- pohybem osob po stavebních konstrukcích (pohyb pěších účastníků dopravy na na mostech a lávkách, „mexické vlny“ diváků na stadionech, pohyb účastníků při hudebních produkcích, diskotékách a podobně),
- působením větru.

K řešení kmitání konstrukcí vystavených obecnému časově proměnnému zatížení je možné použít rovnici:

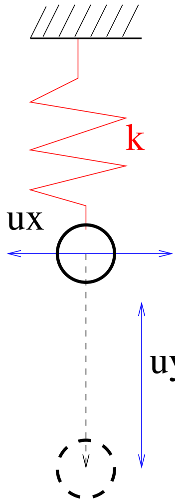
$$\frac{d^2\ y}{d\ t^2} m + k\ y = P(t), \tag{6.41}$$

kde $P(t)$ je v čase proměnné zatížení.

Řešení rovnice (6.41) zpravidla vyžaduje použití vhodné metody vyšetřující chování konstrukce v jednotlivých časových okamžicích (například Newmarkovy metody). Toto téma však již nepatří do náplně tohoto textu.

6.2.5 Tlumení

Podle rovnice (6.38) by měla konstrukce, která v důsledku účinků zatížení kmitá, i po odeznění zřejmě pokračovat v kmitání (a to na svojí *vlastní frekvenci*). U skutečných konstrukcí tomu tak není a dochází k postupnému zmenšování výchylek v důsledku *tlumení*.



Obr. 6.12 Soustava se 2 stupni volnosti.

Rovnici konstrukce zatížené obecně proměnným zatížením, ve které je zaveden i vliv tlumení, můžeme zapsat ve tvaru:

$$\frac{d^2\ y}{d\ t^2}\ m + \frac{d\ y}{d\ t}\ c + k\ y = P(t), \tag{6.42}$$

kde c vyjadřuje míru *tlumení*.

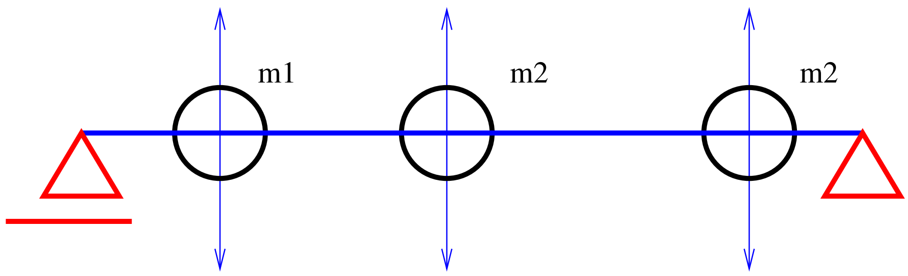
Tlumení může být vyvoláno mnoha faktory, zejména však *třením*. Tlumení se u stavebních konstrukcí stanovuje obtížně[1] nejpřesněji se určí měřeními na realizované konstrukci.

6.2.6 Soustavy s více stupni volnosti

V praktických úlohách je obvykle potřebné sestavovat výpočetní modely s více stupni volnosti. Například pružina na obrázku 6.12 kromě pohybu u_y ve svislém směru (který jsme jako jediný předpokládali v předchozích odstavcích) může pohybovat i ve směru vodorovném (u_x). [2]

Možnosti pohybu konstrukce, a tedy ani počet stupňů volnosti, se oproti úlohám stavební statiky nijak nemění. Zejména při předběžných zjednodušených výpočtech se však využívá možnosti pracovat jen s těmi stupni volnosti, které jsou pro danou úlohu významné, a ostatní stupně volnosti se zanedbávají, tak, jak je ukázáno na obrázku 6.13 na nosníku, u kterého se očekává kmitání především ve svislém směru. [3]

[1]Zejména kvůli charakteru řady použitých materiálů a konstrukčních prvků: zdivo, beton, množ-



Obr. 6.13 Soustava se 3 stupni volnosti.

Rovnici (6.42) je pro n stupňů volnosti možné přepsat do maticového tvaru:

$$\mathbf{M}\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \mathbf{C}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{K}\ \mathbf{u} = \mathbf{F}(t), \tag{6.43}$$

kde **M** je *matice hmotnosti* konstrukce, **C** je *matice útlumu* (tlumení) konstrukce, **M** je *matice tuhosti* konstrukce, která je identická s maticí tuhosti v úlohách statiky stavebních konstrukcí.

6.2.7 Metoda konečných prvků v dynamice konstrukcí

K řešení úloh stavební dynamiky je možné využít rovnici (6.43). Pro jednotlivé typy úloh je možné tuto rovnici zapsat:

- Pro konstrukce zatížené harmonickým zatížením:

  $$\mathbf{M}\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \mathbf{C}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{K}\ \mathbf{u} = \mathbf{F}sin(\omega\ t), \tag{6.44}$$

  kde **F** je vektor maximálních hodnot harmonických zatížení,

- Pro konstrukce vystavené účinkům obecného časově proměnného zatížení:

  $$\mathbf{M}\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \mathbf{C}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{K}\ \mathbf{u} = \mathbf{F}(t), \tag{6.45}$$

  kde $\mathbf{F}(t)$ je vektor časově proměnných zatížení.

- Pro výpočet vlastních frekvencí (kmitání konstrukce bez zatížení; vliv tlumení se zde neuvažuje):

  $$\mathbf{M}\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \mathbf{K}\ \mathbf{u} = \mathbf{0}. \tag{6.46}$$

---

ství otvorů, polotuhých spojů a podobně.

[2]A v prostoru bychom měli uvážit i pohyb ve třetím směru u_z.

[3]Tak jako u každého zjednodušení je i tady potřebné vždy uvážit, zda nemůže dojít k podstatnému zkreslení výsledků, například v důsledku vynechání některého významného stupně volnosti.

Pokud ω je frekvence kmitání, pak je zřejmě možné psát:

$$\mathbf{K\bar{u}} = \omega^2 \mathbf{M\bar{u}}, \tag{6.47}$$

nebo:

$$\left(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}\right) \mathbf{\bar{u}} = \mathbf{0}, \tag{6.48}$$

což je *zobecněný problém vlastních čísel* svazku matic a ω^2 jsou vlastní čísla a $\mathbf{\bar{u}}$ jsou jim příslušné *vlastní vektory*. Představují-li vlastní uvedená čísla ω^2 kvadráty vlastních frekvencí, pak z jim příslušných vlastních vektorů je možné získat *tvary kmitu* odpovídající těmto frekvencím.[1]

Rovnici (6.47) je možné řešit například metodou iterace podprostoru, Lanczosovou metodou [4] a dalšími.

Příklady k procvičení

1. Pružina se účinkem síly o velikosti 32 kN protáhne o 40 mm. Určete její tuhost.
2. Která rovnice popisuje vlastní netlumené kmitání soustavy o jednom stupni volnosti?
3. Jakým výrazem je možné popsat harmonické zatížení soustavy o 1 stupni volnosti.

Klíč k příkladům k procvičení

1. $k = 0,8\ \frac{kN}{m}$.
2. $\frac{d^2\ y}{d\ t^2}\ m + k\ y = 0$.
3. Například $P \sin(\omega t)$.

[1]Podobně jako u úloh lineární stability je možné takto získat *tvar* kmitu, ale ne už konkrétní hodnoty výchylek v jednotlivých uzlech konstrukce.

Literatura

[1] BAŽANT, Z. P., PLANAS J. Fracture and Size Effect in Concrete and Other Quasibrittle Materials, CRC Press, Boca Raton, 1998

[2] BECHYNĚ, S.: Betonové stavitelství I. – Technologie betonu – Svazek čtvrtý: Pružnost betonu, SNTL, Praha, 1959

[3] BELLINI, P. X., CHULYA, A. An Improved Automatic Incremental Algorithm for the Efficient Solution of Nonlinear Finite Element Equations, Computer and Structures, 29, str. 99–110, 1987

[4] BITTNAR, Z., ŠEJNOHA, J.: Numerické metody mechaniky I., II., Vydavatelství ČVUT, Praha, 1992

[5] CRISFIELD, M. A. Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, John Wiley and Sons, England, 1991

[6] CEB – FIP Model Code 90, Comitee Euro-International du Beton, Paris, 1990

[7] CERVIRA, M., HINTON, E., HASSAN, O. Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Plate and Shell Structures Using 20–noded Isoparametric Brick Element, Computers and Structures, Vol. 25 No 6., Pergamon Journals Ltd, Great Britain, 1987

[8] COOK, R. D. Malkus, D. S., Plesha, M. E., Witt R. J. Concepts and applications of finite element analysis, Fourth edition, Wiley, New York,USA, 2002

[9] DRESSLER, M. Programovací jazyky GNU, Computer Press, Brno, 1998

[10] FORDE, W. R. B., STIEMER, S. F. Improved Arc Length Orthogonality Methods for Nonlinear Finite Element Analysis, Computers and Structures. Vol. 27, číslo 5, str. 625–630, 1987

[11] HAN, D. J., CHEN, W. H. Constitutive Modeling in Analysis of Concrete Structures, Journal of Engineering Mechanics. Vol. 113, No. 4, April, ASCE, 1987

[12] HILL, R. A theory of the yiels and plastic flow of anisotropic materials, Proc. R. Soc. Vol. A193, 281-297.

[13] CHEN, A. C. T., CHEN, W. F. Constitutive Relations for Concrete, Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE, 1975

[14] CHEN, W. F., TING, E. C. Constitutive Models for Concrete Structures, Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE, 1980

[15] JIRÁSEK M., Z. P. BAŽANT "Inelastic Analysis of Structures", John Willey and Sons, Chichester, USA, 2002.

[16] Internetové stránky Engineering Fundamentals: `http://www.efunda.com`

[17] Internetové stránky výrobce programového programu ANSYS: `http://www.ansys.com`

[18] KARIHALOO, B. L. Fracture Mechanics and Structural Concrete, Longman Group Limited, Essex, 1995

[19] ISO/IEC 9899:1999

[20] ISO/IEC IS 9945-1:1990 (POSIX.1)

[21] ISO/IEC IS 9945-2:1993 (POSIX.2)

[22] KOLÁŘ, V. Metoda konečných prvků, skriptum, SNTL, Praha, 1971

[23] KOLÁŘ, V., KRATOCHVÍL, J., LEITNER, F., ŽENÍŠEK, A. Výpočet plošných a prostorových konstrukcí metodou konečných prvků, SNTL, Praha, 1979

[24] KOLÁŘ V., NĚMEC I., KANICKÝ V. FEM Principy a praxe metody konečných prvků, Computer Press, Praha, 1997

[25] LAPACK: Linear Algebra Subsystems `http://www.netlib.org/lapack`

[26] MAJEWSKI, S., SZOJDA, L., WANDZIK, G. MWW3 — modifikacja powierzchni granicznej trójparametrowego modelu Willama–Warnke, In Sborník konference New Trends in Statics and Dynamics of Buildings, STU, Bratislava, 2002

[27] MEMON BASHIR-AHMED, SU XIAUOU-ZU Arc-length technique for non--linear finite element analysis. Journal of Zhejiang University SCIENCE, 2004:5(5)

[28] OHTANI, Y., CHEN, W. F. Multiple Hardening Plasticity for Concrete Materials, Journal of the EDM ASCE, 1988

[29] OWEN, D. R. J., HINTON, E. Finite Elements in Plasticity, Pineridge Press Ltd., Swansea, 1980

[30] PANKAJ, ARIF, M., KAUSHIK, S. K. Convexity studies of two anisotropic yield criteria in principal stress space, Engineering Computations, Vol 16, 2 and 3, 1999

[31] RALSTON, A. Základy numerické matematiky, ACADEMIA, Praha, 1978

[32] RAVINGER, J., ŠIMONČIČ, M. Vybrané state zo statiky a dynamiky konštrukcií, Bratislava 1999

[33] REKTORYS, K. A KOL. Přehled užité matematiky, SNTL, Praha, 1963

[34] Rektorys, K. A KOL. Přehled užité matematiky I a II, 7. rozšířené a doplněné vydání, Prometheus, Praha, 2000

[35] RIKS, E. The application of Newton's method to the problem of elastic stability, Appl. Mech., 39, tr.ss 1060–1066, 1972

[36] SERVÍT, R., DOLEŽALOVÁ, E., CRHA, M. Teorie pružnosti a plasticity I, SNTL, Praha, 1981

[37] SERVÍT, R., DRAHOŇOVSKÝ, Z., ŠEJNOHA, J., KUFNER, V. Teorie pružnosti a plasticity II, SNTL, Praha, 1984

[38] ŠMIŘÁK, S. Energetické principy a variační metody v teorii pružnosti, FAST VUT, Brno, 1998

[39] TEPLÝ, B., ŠMIŘÁK, S. Pružnost a plasticita II., VUT, Brno, 1992

[40] WEMPNER, G. A. Discrete Approximations Related to Nonlinear Theories of Solids, Int. J. Solids and Structs., 7, str. 1581–1599, 1971

[41] WILLAM, K., J., WARNKE, E. P. Constitutive Models for Triaxial Behavior of Concrete Subjected to Triaxial Stresses, Int. Assoc. Bridge Struct. Eng. Proc., Vol.19, 1975, pp. 1–30.

[42] ZIENKIEWICZ, O. C. The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill, London, 1971

[43] uFEM – informace o programu v síti Internet: `http://fast10.vsb.cz/brozovsky/articles/ufem/index.html`

[44] FUSEK, M., HALAMA, R. Metoda konečných prvků a metoda hraničních prvků, VŠB-TU Ostrava, 2011

[45] KADLČÁK, J., KYTÝR, J. Statika stavebních kosntrukcí I, VUT v Brně, 2001

[46] SUCHARDA, O., BROŽOVSKÝ, J. Pružnoplastické modelování železobetonového nosníku: implementace a srovnání s experimentem, Sborník vysoké školy báňské – Technické univerzity Ostrava, Řada stavební, ročník XI, číslo 1, 2011

[47] PROCHÁZKA, J. a kol: Navrhování betonových kosntrukcí 1, 2. vydání, Praha, ČVUT v Praze, 2006.

[48] KUPFER H., HILSDORF H.,K., RÜSCH H. Behaviour of Concrete Under Biaxial Stress, Journal ACI, Proc. V.66, č. 8, 1969

[49] CERVENKA, V. Inelastic Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Panels Under In-Plane Loads, University of Colorado, Colorado, 1970

[50] BROŽOVSKÝ, J., MATERNA, A.: Základy matematické teorie pružnosti, VŠB-TU Ostrava, 2012

Rejstřík