



MKP a MHP

Martin Fusek, Radim Halama

Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století* (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Martin Fusek, Radim Halama
MKP a MHP

© Martin Fusek, Radim Halama 2011
ISBN

Předmluva

Vážený čtenáři, text, který právě čtete, vznikl v rámci řešení projektu „Matematika pro inženýry 21. století - inovace výuky matematiky na technických školách v nových podmínkách rychle se vyvíjející informační a technické společnosti“. Projekt je řešen na Vysoké škole báňské - Technické univerzitě v Ostravě a Západočeské univerzitě v Plzni v období 2009 - 2012. Hlavní motivací projektu je potřeba reagovat na změny významu jednotlivých partií matematiky při řešení praktických problémů, způsobenou zejména velkým pokrokem v matematickém modelování, dramatickým zlepšováním software a rychlým zvyšováním výpočetních kapacit moderních počítačů. Inženýři nyní běžně využívají stále se vyvíjející komplikované softwarové produkty založené na matematických pojmech, se kterými se v kurzech matematiky buďto nesetkají vůbec nebo v nevhodné formě. Na druhé straně prezentace některých pojmů v základních kurzech neodráží z nejrozumnějších důvodů potřeby odborných kateder. Bohužel tento stav ztěžuje studentům aktivní používání získaných vědomostí v odborných předmětech i orientaci v rychle se vyvíjejících metodách inženýrské praxe. Cílem projektu je inovace matematických a některých odborných kurzů na technických vysokých školách s cílem získat zájem studentů, zvýšit efektivnost výuky, zpřístupnit prakticky aplikovatelné výsledky moderní matematiky a vytvořit předpoklady pro efektivní výuku inženýrských předmětů. Zkvalitnění výuky matematiky budoucích inženýrů chceme dosáhnout po stránce formální využitím nových informačních technologií přípravy elektronických studijních materiálů a po stránce věcné pečlivým výběrem vyučované látky s důsledným využíváním zavedených pojmů v celém kurzu matematiky s promyšlenou integrací moderního matematického aparátu do vybraných inženýrských předmětů. Metodiku výuky matematiky a její atraktivnost pro studenty chceme zlepšit důrazem na motivaci a důsledným používáním postupu „od problému k řešení“. V rámci projektu vytváříme 40 nových výukových materiálů z oblastí matematické analýzy, lineární algebry, numerických metod, metod optimalizace, diskrétní matematiky, teorie grafů, statistiky a několika odborných kurzů. Všechny hotové výukové materiály budou volně k dispozici na webových stránkách projektu <http://mi21.vsb.cz>.

Tento materiál je koncipován jako stručný úvod do metody konečných prvků v oblasti nelineárních úloh mechaniky pružného tělesa. V úvodu jsou zopakovány základní poznatky o modelování, lineární teorii pružnosti a metodě konečných prvků. Následně jsou uvedeny základní nelineární problémy mechaniky pružného tělesa. Jedná se o geometrické nelinearity, problematiku nelineárního chování materiálů a je zde stručně nastíněna problematika kontaktu těles. Dále je v textu představena problematika odhadu chyb a adaptivních technik v MKP. V závěrečné kapitole, věnující se metodě konečných prvků, jsou představeny postupy pro řešení nestacionárních úloh.

Druhá část skript je úvodem do metody hraničních prvků. V této části jsou na začátku shrnuty základní poznatky nutné pro odvození základních vztahů, které jsou následně použity pro vlastní aplikaci.

Text byl vysázen pomocí sázecího systému $\text{\TeX}$ ve formátu pdf $\text{\LaTeX}$.

V Ostravě 31. 8. 2011

Martin Fusek

Orientace v textu

Každá kapitola má svou pevnou strukturu, která by vám měla pomoci k rychlejší orientaci v textu.

Průvodce studiem

Prostřednictvím průvodce studiem vás chceme seznámit s tím, co vás v dané kapitole čeká, které části by měly být pro vás opakováním, na co je třeba se obzvláště zaměřit atd.



Cíle

V části cíle se dozvíte, co všechno zvládnete a budete umět po prostudování dané kapitoly.



Pojmy k zapamatování

Pojmy zde uvedené jsou většinou nové a zcela zásadní. To znamená tyto pojmy nejen pochopit a umět ilustrovat na příkladech, ale také umět vyslovit jejich přesné definice.



Kontrolní otázky

Odpovězením na tyto otázky si ověříte, zda jste daným pojmům porozuměli, zda si uvědomujete rozdíly mezi zdánlivě podobnými pojmy, zda dovedete uvést příklad ilustrující danou situaci atd.



Příklady k procvičení

Tyto příklady slouží k tomu, abyste si důkladně procvičili probranou látku. Výsledky uvedených příkladů jsou zařazeny na konci každé kapitoly.



Klíč k příkladům k procvičení

Na konci každé kapitoly je uveden klíč ke cvičením, který obsahuje výsledky příkladů k procvičení.



Literatura



Jedná se o literaturu použitou autory při vytváření tohoto studijního materiálu, nikoliv jen o literaturu doporučenou k dalšímu studiu. Pokud některou z uvedených publikací doporučujeme zájemcům, pak je to v textu spolu s odkazem na daný titul jasně uvedeno.



Rejstřík

Rejstřík, uvedený na konci skript, poslouží ke snadné orientaci v textu.

Obsah

Předmluva	iii
1 Modelování v pružnosti a pevnosti	1
1.1 Modelování v technické praxi	1
1.1.1 Chyby při modelování	2
1.2 Postup při vytváření modelu a realizace řešení	3
1.3 Klasifikace modelů těles	3
1.3.1 Třídění z hlediska vztahu k času	4
1.3.2 Třídění z hlediska linearit y rovnic	4
1.4 Teorie pružnosti	5
1.4.1 Základní pojmy	5
1.4.2 Základní úlohy řešené teorií pružnosti	8
1.4.3 Formy matematické formulace	9
1.4.4 Diferenciální formulace	9
1.4.5 Princip virtuálních prací a variační principy	11
1.5 Volba metody řešení	13
1.5.1 Analytické řešení	13
1.5.2 Numerické řešení	14
Příklady k procvičení	16
Klíč k příkladům k procvičení	16
2 Opakování základních poznatků MKP	17
2.1 Metoda konečných prvků v lineární mechanice kontinua	17
2.1.1 Základní předpoklady	17
2.1.2 Odvození základních vztahů MKP	18
Příklady k procvičení	22
Klíč k příkladům k procvičení	23
3 Nelineární úlohy mechaniky	24
3.1 Lineární versus nelineární analýzy	24
3.2 Řešení základní rovnice	26
3.2.1 Newton-Raphsonova metoda	26
3.2.2 Metoda délky oblouku (Arc-Length method)	29

4	Geometrické nelinearity	31
4.1	Základní dělení geometrických nelinearit	31
4.1.1	Velké posuvy	32
4.1.2	Velká přetvoření	32
4.2	Popis pohybu kontinua	32
4.2.1	Lagrangeův popis	33
4.2.2	Eulerův popis	33
4.3	Tenzory přetvoření	34
4.4	Tenzory napětí	34
	Příklady k procvičení	36
	Klíč k příkladům k procvičení	36
5	Materiálové nelinearity	37
5.1	Elastické materiálové modely	37
5.1.1	Lineární elastické modely	37
5.1.2	Nelineární elastické materiálové modely (hyperelastické) . . .	38
5.1.3	Viskoelastické materiály	41
5.2	Elasticko-plastické chování materiálů	42
5.2.1	Časově nezávislé elasticko-plastické chování	42
5.2.2	Časově závislé elasticko-plastické chování	44
5.3	Další materiálové modely	45
	Příklady k procvičení	46
	Klíč k příkladům k procvičení	46
6	Kontakt	47
6.1	Úvod	47
6.2	Kontakt a metoda konečných prvků	48
6.3	Základní algoritmy řešení kontaktního problému	49
6.3.1	Metoda Lagrangeových multiplikátorů	49
6.3.2	Pokutový přístup	50
	Příklady k procvičení	51
	Klíč k příkladům k procvičení	51
7	Chyby a adaptivní techniky	52
7.1	Chyby v MKP	52
7.2	Podmínka konvergence	53
7.3	Míry a odhady chyb řešení	54
7.3.1	Normy chyb	55
7.3.2	Odhad chyby	55
7.4	Adaptivní techniky	56
7.4.1	h-verze MKP	57
7.4.2	p-verze MKP	58
7.4.3	hp-verze MKP	59

7.5	Adaptivní technika dle Zienkiewicze a Zhua	60
	Příklady k procvičení	62
	Klíč k příkladům k procvičení	62
8	Nestacionární analýzy v MKP	63
8.1	Základní rovnice	63
8.2	Implicitní versus explicitní algoritmus	64
8.2.1	Implicitní algoritmus	65
8.2.2	Explicitní algoritmus	67
8.2.3	Srovnání implicitního a explicitního algoritmu	68
	Příklady k procvičení	69
	Klíč k příkladům k procvičení	70
9	Úvod do Metody hraničních prvků	71
9.1	Přímá varianta MHP	71
9.1.1	Bettiho věta	72
9.1.2	Kelvinova úloha	73
9.1.3	Rovnice hraničních integrálů pro rovinnou pružnost	76
9.1.4	Diskretizace hranice	78
9.1.5	Sestavení soustavy rovnic a aplikace okrajových podmínek	80
9.1.6	Výpočet napětí na povrchu	86
9.1.7	Výpočet složek posuvů a napětí v bodě uvnitř tělesa	88
9.2	Shrnutí	90
	Příklady k procvičení	91
	Klíč k příkladům k procvičení	91
	Literatura	92
	Rejstřík	94

Kapitola 1

Modelování v pružnosti a pevnosti

Průvodce studiem



Na začátku kapitoly budou uvedeny informace o modelování v technické praxi. Budou zde probrány jednotlivé postupy při modelování, informace o chybách a probrány jednotlivé typy modelů.

V další části kapitoly budou shrnuty informace a poznatky ohledně chování pružných těles. Budou stručně shrnuty základní poznatky lineární teorie pružnosti o napjatosti a deformaci.

Na konci kapitoly budou srovnány výhody a nevýhody analytického a numerického řešení problémů.

Cíle



Po prostudování této kapitoly budete znát:

- Co je to modelování.
- Rozdělení modelů dle různých kritérií.
- Jaké můžou při modelování vzniknout chyby.
- Rozdíly mezi silnou a slabou formulací teorie pružnosti.
- Výhody a nevýhody mezi analytickým a numerickým řešením.

1.1 Modelování v technické praxi

Při řešení problémů se může postupovat dvěma odlišnými přístupy:

- přímé řešení,
- nepřímé řešení.

Přímé řešení - formulovaný problém se řeší zvoleným postupem - odhad, intuice, cit, zkušenost - a ten buď vede, nebo nevede k cíli, tedy k řešení. Nedovede-li

daný postup k cíli, začne se řešit jinou metodou. Jedná se vlastně o *metodu pokus-omyl*.

Nepřímé řešení - místo formulovaného problému se řeší jiný, který je snadněji zvládnutelný. Prostřednictvím jeho řešení se získá řešení primárně formulovaného problému. Je to řešení „oklikou“ - tj. řešení, při němž řešitel využívá svých schopností přemýšlet, hodnotit, posuzovat a srovnávat různé varianty a především jednat účelově, snažit se dosáhnout cíle s minimálním úsilím. Hovoříme o modelování.

Modelování neboli simulace představuje experimentální proces, při němž se zkoumanému objektu (originálu, modelovému systému) jednoznačně dle určitých kritérií přiřazuje model (modelový objekt). Model může být:

- fyzický model,
- abstraktní model,
- kombinovaný model.

Fyzický model umožňuje provádět experimenty s modelem a zkoumat tak vlastnosti originálu (na modelu) pomocí dějů stejné fyzikální podstaty. Příkladem může být zkoumání obtékání vzduchu kolem modelu auta, letadla, aj. v aerodynamickém tunelu.

Kromě fyzického modelu můžeme originálu přiřadit **model abstraktní**. Je výsledkem některé obecné vědy. Tento model již neumožňuje provádět experimenty stejné fyzikální podstaty. Umožňuje zkoumat jevy probíhající na originále pomocí matematického popisu jejich průběhů.

Kombinovaný model je takový, kdy část modelu je fyzická a část abstraktní. V tomto textu se zaměříme pouze na modely abstraktní a to pouze na **modely výpočtové**.

1.1.1 Chyby při modelování

Každý člověk chybuje. Chyba je realita, se kterou se musí počítat. Nejzávažnější chyba je tzv. **chyba kvalitativní**, kdy daný model neobsahuje všechny důležité vlastnosti, podstatné z hlediska řešení daného problému. Takováto chyba je nejzávažnější, protože je těžko odhalitelná. Model se chová správně, ale neřeší námi hledaný problém.

Opakem předchozí chyby je **chyba složitosti**, kdy model obsahuje kromě podstatných vlastností i vlastnosti nepodstatné. V lepším případě se prodlouží doba řešení problému, v horším případě se nemusí získat řešení úlohy vůbec.

Dalším typem chyby je **chyba kvantitativní**, kdy model obsahuje všechny podstatné vlastnosti z hlediska řešení problému, ale jejich kvantitativní vyjádření je na dané rozlišovací úrovni pro řešení problému nedostatečné.

Častá chyba která se vyskytuje při realizaci řešení je **chyba konkretizační**. Model

je vytvořen správně, obsahuje všechny podstatné vlastnosti, ale při jeho vlastním řešení vznikne chyba, např. chybné zadání vstupních údajů, chyba v nevhodné volbě použitého programu, aj. Tento typ chyb je snadno odhalitelný kontrolou získaných výsledků.

Kromě toho se může v modelu objevit i tzv. **chyba formální**.

1.2 Postup při vytváření modelu a realizace řešení

Řešení úlohy je posloupnost činností, které se mohou překrývat, s následujícími kroky:

- Zadání úlohy (zadavatel, vedoucí, vyučující).
- Rozbor zadání a smysl úlohy.
- Výběr teorie, která bude použita při řešení úlohy (pruty, skořepiny, rovinná napjatost, atd.).
- Volba metody řešení (analyticky, numericky).
- Sestavení úplného souboru vstupních dat.
- Sestavení výpočtového modelu (zjednosušení vůči reálu).
- Vlastní řešení.
- Zpracování výsledků a jejich interpretace.
- Rozhodnutí o dalším postupu (konec, nebo pokračování).

Proto, aby úloha mohla být vyřešena správně, musí mít řešitel potřebné **znalosti**, získané jednak ve škole, jednak praxí či samostudiem. Pro řešení vlastní úlohy musí mít k dispozici **výpočetní prostředek**, což je v současnosti nejčastěji počítač s vhodným programovým vybavením. Asi nejdůležitější vlastnostmi při tvorbě výpočetních modelů, nejen poddajných těles, jsou v první řadě **tvůrčí schopnosti, zkušenost, cit a intuice**.

1.3 Klasifikace modelů těles

Abstraktní výpočtové modely v mechanice pružného tělesa lze rozdělit z různých hledisek - dle vztahu k času, jedná-li se o lineární nebo nelineární modely, dle účelu, atd.

1.3.1 Třídění z hlediska vztahu k času

Dělení dle vztahu k času:

- stacionární analýzy,
- nestacionární analýzy.

Řada systémů se chová tak, že při změně okolních podmínek proběhne přechodový proces, během kterého se stavové parametry systému mění v čase. Po určité době dojde k ustálení stavu, kdy je časová změna parametrů systému nulová. Systém se dostal do stacionárního stavu. **Stacionární analýza** řeší právě tento výsledný stav, aniž by byl řešen (brán v úvahu) přechodový proces. Řešení je nezávislé na čase.

Naproti tomu cílem **nestacionární analýzy** je získat stavové parametry systému jako funkce času. Volba typu analýzy souvisí s cílem řešení a rozhoduje o něm řešitel problému.

Pojmy **statická** a **dynamická analýza** jsou zavedeny v oblasti mechaniky. Rozlišují se případy, kdy jsou a nejsou uvažovány setrvačné síly ve výpočtu. Někdy jsou pojmy statický a stacionární zaměňovány. Obdobně tak nestacionární s pojmem dynamická. Ve většině případu to platí, ne však vždy.

1.3.2 Třídění z hlediska linearit rovníc

Dělení z hlediska linearit rovníc:

- lineární modely,
- nelineární modely.

K řešení praktických úloh často vystačíme s lineárními modely. Jsou však i oblasti mechaniky těles, které vyžadují znalost řešení nelineárních úloh. V nelineární mechanice deformovatelného tělesa jde například o případy těles s nelineární deformační charakteristikou a o případy s velkými deformacemi, při nichž se podstatně mění geometrie a tvar tělesa.

Pro **lineární modely** je typická vysoká míra idealizace řešeného problému. Je zaručena existence a jednoznačnost řešení lineárních modelů. Lineární modely jsou konzervativní, nedochází k žádné disipaci energie. Konečný stav modelu závisí na konečných hodnotách zadaných posuvů a zatížení a nikoliv na způsobu, kterým ho bylo dosaženo. Při řešení lze využít zákona superpozice a výsledné řešení složit z dílčích úloh.

Nelineární modely se na rozdíl od lineárních vyznačují závislostí na posloupnosti stavů, kterými systém prošel od počátku do konce děje. U nelineárních úloh máme k dispozici jen omezené výpočetní možnosti a jsme často odkázáni na numerické postupy. K řešení nelineárních úloh je třeba mnohem větší zkušenosti a intuice než k řešení úloh lineárních.

1.4 Teorie pružnosti

V této kapitole budou shrnuty základní poznatky mechaniky kontinua pružného tělesa. Předmětem matematické teorie pružnosti, je vyšetřování stavů napjatosti a deformace obecného pružného tělesa. Napěťová analýza je východiskem k hodnocení mezních stavů zkoumaného systému. Úlohou teorie pružnosti je určit v tělese vyplňujícím objem V a ohraničené povrchem S tři pole:

- vektorové pole posunutí,
- tenzorové pole deformace,
- tenzorové pole napětí.

Řešení obecných prostorových úloh je velice obtížné. V mnoha případech můžeme úlohu zjednodušit na dvojrozměrnou, popřípadě na jednorozměrnou. Tímto dosáhneme značného zjednodušení popisu a řešení úlohy. Typicky můžeme zjednodušit úlohu pružnosti tělesa na:

- jednodimenzionální úlohu,
- dvojdimenzionální úlohu,
 - rovinná deformace,
 - rovinná napjatost,
 - zobecněná rovinná napjatost,
 - axisimetrická úloha.

Do oblasti zjednodušení spadá i zjednodušení úloh spadající do oblastí nosníků a skořepin.

1.4.1 Základní pojmy

Vektor posuvů

V trojrozměrném kartézském souřadném systému můžeme posuvy zapsat pomocí tří funkcí souřadnic $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$, $w = w(x, y, z)$. Zapsáno ve vektorové formě:

$$\{u\} = \{u, v, w\}. \quad (1.1)$$

Posuvy u, v, w jsou spojitými funkcemi souřadnic. Požadavek na spojitost funkcí vychází z předpokladu, že spojitost tělesa nebude během deformace porušena.

Komponenty vektoru posunutí jsou označeny u, v, w tak jak je zvykem v teorii pružnosti. Pro jednodušší zápis zavedme, že: $u = u_x = u_1$, $v = u_y = u_2$, $w = u_z = u_3$. Pak lze, v tenzorové notaci, zapsat pole posuvů jednoduše jako u_i , kde za i lze dosadit souřadnice x, y, z , popř. 1, 2, 3. Číslovaný zápis bude v dalším textu preferován.

Tenzor napětí

Napětí lze zjednodušeně definovat jako „síla na jednotku plochy“. Napjatost elementárního objemu zatíženého tělesa je obecně popsána devíti složkami tenzoru napětí σ_{ij} . Tyto složky lze zapsat pomocí matice tenzoru napětí:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \quad (1.2)$$

Z důvodu platnosti zákona o sdruženosti smykových napětí lze uvažovat pouze šest složek napětí. Tenzorově zapsáno $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Často se použít vektorový (inženýrský) zápis napjatosti:

$$\sigma = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^T. \quad (1.3)$$

Tenzor deformace a Cauchyho geometrické rovnice

Geometrické změny jsou popsány kromě posuvů i deformacemi (přetvořeními). Pro tenzor deformace platí analogická pravidla jako u tenzoru napětí. Maticově můžeme tenzor deformace zapsat:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{yx}/2 & \varepsilon_y & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{zx}/2 & \gamma_{zy}/2 & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}. \quad (1.4)$$

V tenzorové notaci lze předchozí rovnice zapsat ve tvaru:

$$\epsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2. \quad (1.5)$$

Vektorově (inženýrská podoba) lze složky tenzoru deformace zapsat:

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}^T. \quad (1.6)$$

Geometrické rovnice jsou vztahy vytvářející vazbu mezi složkami posuvů a přetvoření (deformací), tedy složky tenzoru deformace. Chceme-li popsat deformaci celého tělesa, musíme pro každý bod tělesa popsat polohu též po deformaci. Tyto rovnice se pro případ malých deformací nazývají **Cauchyho rovnice**. Připomeňme, že platí pouze pro malé deformace (velice orientačně cca do 1%) a mají následující tvar:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\
\varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\
\gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Jednodušeji lze opět rovnice zapsat v tenzorové notaci:

$$\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2. \tag{1.8}$$

Šest složek deformace (přetvoření) je vyjádřeno pomocí tří složek posuvů u, v, w . Složky přetvoření tedy nejsou zcela nezávislými funkcemi souřadnic. Mají-li popisovat deformace spojitého tělesa, musí pro ně platit deformační podmínky, které získáme tak, že vyloučíme posuvy z Cauchyho rovnic. Získají se tzv. *rovnice kompatibility*.

Fyzikální rovnice

Představují vztah mezi deformací a napjatostí. Složky napětí, vstupující do rovnic rovnováhy a složky přetvoření v geometrických rovnicích jsou navzájem vázány Hookeovým zákonem. Připomeňme však, že tento vztah platí pouze, je-li materiál pružný, izotropní a homogenní. Obecně lze Hookeův zákon zapsat ve tvaru:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)], \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)], \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)], \\
\gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}, \\
\gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G}, \\
\gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G},
\end{aligned} \tag{1.9}$$

kde E je modul pružnosti v tahu, μ je Poissonovo číslo a G je modul pružnosti ve smyku. Mezi veličinami platí následující vztah:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (1.10)$$

Při některých aplikacích v pružnosti se využívá tzv. objemový modul:

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}. \quad (1.11)$$

Zavedením Lámeho konstanty:

$$\lambda = \frac{\mu E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}. \quad (1.12)$$

lze fyzikální rovnice zapsat v tenzorové notaci následně:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2G \varepsilon_{ij}, \quad (1.13)$$

kde δ_{ij} je tzv. Kroneckerovo delta. Obecněji lze rovnici 1.13 přepsat do tvaru:

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl}^e \varepsilon_{kl}, \quad (1.14)$$

kde D_{ijkl}^e je *elastický konstitutivní tenzor* definovaný rovnicí:

$$D_{ijkl}^e = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + G(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (1.15)$$

Složitější chování materiálů bude diskutováno v následujících kapitolách.

1.4.2 Základní úlohy řešené teorií pružnosti

Existují tři základní úlohy řešené teorií pružnosti:

- **Přímá úloha** - Pro těleso se známou geometrií, materiálem, zatížením a vazbami k okolí je potřeba stanovit jeho deformaci a napjatost, tj. pole posunutí, pole deformací a pole napětí.
- **Inverzní úloha** - Pro těleso je předepsáno pole napětí nebo posuvů. Úlohou je stanovit vnější zatížení případně zjistit okrajové podmínky, kterým dané funkce pole napětí vyhovují (Airyho funkce napětí, apod.).
- **Poloinverzní úloha** - Pro těleso jsou částečně zadány silové veličiny a částečně zadány posuvy. Uvnitř tělesa jsou známy pouze některé složky tenzoru napětí. Příkladem je např. vyšetřování kroucení prutů nekruhového průřezu.

Nejčastější úlohou, která se vyskytuje při řešení problémů je přímá úloha pružnosti. Pokud nebude řečeno jinak, bude předpokládáno řešení přímé úlohy pružnosti. Při řešení konkrétních úloh se nikdy neřeší současně všech patnáct funkcí pružnosti, ale vzájemným dosazováním a úpravami základních rovnic pružnosti se postupně vylučují jednotlivé skupiny neznámých. Nakonec zůstanou vztahy obsahující jen jeden typ neznámých funkcí. Tyto jsou pak označovány, jako nezávislé neznáme funkce. Podle výběru neznámých funkcí pak rozlišujeme následné přístupy:

- **Deformační** - neznáme jsou složky posuvů.
- **Silový** - neznáme jsou složky napětí.
- **Smíšený** - neznáme jsou jak složky napětí, tak i posuvů.

1.4.3 Formy matematické formulace

Při matematické formulaci problému můžeme postupovat dvěma základními postupy:

- diferenciální formulace,
- variační formulace.

Diferenciální formulace. Tento postup formuluje náš problém v podobě soustavy diferenciálních rovnic. Pro řešení konkrétní úlohy rovněž je potřeba znát okrajové (či počáteční) podmínky. Diferenciální formulace je též nazývána jako tzv. silná formulace úlohy.

Variační formulace. Řešení problému se hledá jako stav, v němž energie analyzovaného tělesa dosahuje extrémní (stacionární) hodnoty. Tato problematika spadá do oblasti variačních principů mechaniky, které specifikují, o jakou formu energie analyzovaného systému se jedná a co musí apriorně splňovat hledané funkce pružnosti. Energetické přístupy jsou aktuální především v souvislosti s numerickými metodami. Přístup energetický, popř. variační, je také označován jako tzv. slabá formulace. Existují postupy, jak silnou formulaci lze převést přímo na formulaci slabou, např. metoda vážených reziduí.

V některých numerických metodách pro řešení parciálních diferenciálních rovnic, může být řídicí rovnice diskretizována přímo - tj. přepsána jako soustava lineárních algebraických rovnic, vhodná pro řešení na počítači. Jako příklad může být metoda konečných diferencí (metoda sítí). Jiné metody, třeba například MKP, aj. však potřebují jiný přístup - řídicí diferenciální rovnice musí být převedena na integrální formu zvanou slabá formulace. Slabá formulace je ekvivalentní se silnou formulací. V mnoha odvětvích má slabá formulace problému specifický název, např. v mechanice pružného tělesa je nazývána jako princip virtuálních prací. Slabou formulaci problému lze tedy získat aplikací principu virtuálních prací známého z mechaniky pružných těles, nebo lze vycházet z variačního principu ve smyslu minimalizace funkcionálu vhodně voleného se zřetelem k fyzikálnímu charakteru řešeného problému. Další možností je aplikace principu vážených reziduí.

1.4.4 Diferenciální formulace

Tato kapitola je věnována základním diferenciálním rovnicím lineární teorie pružnosti pro řešení okrajových úloh, a to soustavám Lámeových rovnic. Kromě těchto

rovníc existují i tzv. Beltram-Michelových rovnic se kterými se v tomto textu nebude pracovat.

V obecné prostorové úloze existuje 15 neznámých funkcí proměnných x, y, z . Rovnice musí být splněny uvnitř řešené oblasti a na hranici řešené oblasti musí být splněny předepsané okrajové podmínky. K určení patnácti neznámých funkcí máme soustavu základních rovnic matematické teorie pružnosti. Můžeme jí rozdělit na tři hlavní skupiny:

- tři **rovnice rovnováhy**, budou uvedeny níže, viz. 1.17,
- šest **rovnic geometrických**, viz 1.8,
- šest **fyzikálních (konstitutivních) rovnic**, viz 1.13.

Rovnice rovnováhy

Statické rovnice rovnováhy patří mezi základní rovnice teorie pružnosti. Vyjadřují podmínky rovnováhy infinitezimálního objemového elementu tělesa. V tomto případě jsou sestaveny na nedeformovaném tělese, jedná se o teorii prvního řádu. Mohou rovněž vyjadřovat podmínku rovnováhy podle d'Alembertova principu v případě řešení dynamického děje. Pro kartézský souřadný systém platí:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0.\end{aligned}\tag{1.16}$$

Jednodušeji lze rovnice zapsat v tenzorové notaci:

$$\sigma_{ij,i} + b_j = 0.\tag{1.17}$$

Okrajové podmínky

Rovnice 1.8, 1.13 a 1.17 jsou soustavou 15 rovnic (9 parciálních diferenciálních rovnic a 6 algebraických rovnic), kterým musí vyhovovat napjatost a deformace pružného tělesa. Soustava poskytuje obecně nekonečně mnoho řešení. Je nutno najít to, které vyhovuje okrajovým podmínkám. Rozeznáváme tři druhy okrajových podmínek:

- geometrické,
- statické,
- smíšené.

Na hranici tělesa mohou být předepsány hodnoty složek posuvů u, v, w . Takovéto okrajové podmínky předepisují geometrickou vazbu tělesa s jeho okolím. Proto se tyto okrajové podmínky nazývají **geometrické okrajové podmínky**. Někdy se též nazývají **kinematické okrajové podmínky**.

$$u_i = \bar{u}_i. \quad (1.18)$$

Druhou skupinou okrajových podmínek jsou **statické nebo taky silové okrajové podmínky**. Okrajové podmínky vyjadřují statickou vazbu tělesa s jeho vnějším okolím. V tomto případě jsou předepsány hodnoty složek vektoru vnějšího zatížení.

$$\sigma_{ij}n_j - \bar{p}_i = 0. \quad (1.19)$$

Může se však stát, že na části povrchu jsou předepsány zároveň statické a geometrické okrajové podmínky. Takové okrajové podmínky se pak nazývají **smíšené okrajové podmínky**.

Lámeovy rovnice

Jak bylo uvedeno výše, při řešení konkrétních úloh se nikdy neřeší současně všech patnáct funkcí pružnosti, ale vzájemným dosazováním a úpravami základních rovnic pružnosti se postupně vylučují jednotlivé skupiny neznámých. Při deformační variantě se získa následující vztah, tzv. Lámeho rovnice (Navier-Cauchy):

$$Gu_{i,jj} + (\lambda + G)u_{j,ji} + b_i = 0. \quad (1.20)$$

1.4.5 Princip virtuálních prací a variační principy

V předchozí kapitole byly uvedeny diferenciální rovnice rovnováhy. Tyto rovnice jsou odvozeny z bilance sil pro infinitesimální těleso (krychli). Tyto rovnice platí v každém bodě tělesa, tzn. mají lokální charakter. Rovnováha však může být vyjádřena i jiným způsobem, který je často nejen užitečnější, ale má i hlubší fyzikální význam. Princip virtuálních prací a variační principy mechaniky poddajného tělesa jsou základem většiny přibližných metod. Jak bylo zmíněno výše, jedná se o tzv. slabou formulaci problému.

Princip virtuálních prací

Princip virtuálních prací má dvě základní varianty:

- princip virtuálních posuvů,
- princip virtuálních sil.

Zde bude podrobně zopakován pouze princip virtuálních posuvů. Tento lze zapsat následující rovnicí:

$$\int_V \delta\{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \int_V \delta\{u\}^T \{X\} dV + \int_{S_p} \delta\{u\}^T \{\bar{p}\} dS_p. \quad (1.21)$$

Levá strana rovnice představuje virtuální práci vnitřních sil. Pravá strana rovnice vyjadřuje virtuální práci vnějších sil (objemových a plošných). Virtuální pole posunutí a přetvoření nesmějí narušovat vazby v tělese. Virtuální posuvy $\delta\{u\}$ musí splňovat geometrické okrajové podmínky (tam kde jsou předepsány):

$$\delta\{u\} = 0. \quad (1.22)$$

Virtuální deformace $\delta\varepsilon$ musí být svázány s virtuálními posuvy rovnicí 1.8. Pomocí Clapeyronova teorému můžeme rovnici převést na rovnici:

$$\int_V \delta\{u\}^T (\partial\{\sigma\} + \{X\}) dV + \int_{S_p} \delta\{u\}^T \{-\{n\}\{\sigma\} + \bar{p}\} dS = 0. \quad (1.23)$$

Tato rovnice může být splněna při libovolných virtuálních posuvech jedině v tom případě, že budou současně splněny podmínky rovnováhy, jednak uvnitř zkoumaného tělesa (tedy rovnice rovnováhy), jednak silové okrajové podmínky na hranici kde jsou předepsány. Rovnice jsou tedy důsledkem principu virtuálních posuvů, a proto je tento princip nazýván obecným principem rovnováhy.

Princip virtuálních prací lze jednoduše rozšířit o dynamické chování využitím d'Alembertova principu.

Variační principy

Variační principy jsou přímým důsledkem principu virtuálních prací.

- **Lagrangeův variační princip** - odvozuje se z principu virtuálních posuvů.
- **Castigliánův variační princip** - se odvozuje z principu virtuálních sil.

Zde bude podrobně probrán pouze Lagrangeův variační princip.

Lagrangeův princip. Lagrangeův princip lze vyjádřit větou o minimu potenciální energie systému (celkové potencionální energie): *Ze všech kinematicky přípustných stavů pružného tělesa nastává takový stav, který dává potenciální energii systému minimální hodnotu.* Matematicky lze tuto větu vyjádřit následovně:

$$\Pi = E_i + E_e, \quad (1.24)$$

kde E_i je potenciální energie deformace, E_e je potenciální energie vnějších sil. Kinematicky přípustný stav přetvoření tělesa lze definovat následovně:

- Přípustné posuvy musí být spojité, musí mít po částech spojitě derivace v celé řešené oblasti a musí splňovat geometrické okrajové podmínky předepsané na příslušné hranici tělesa.
- Přípustné deformace jsou s přípustnými posuvy svázány geometrickými rovnicemi.

Nalezneme-li stacionární hodnotu funkcionálu Π , tj. položíme variaci funkcionálu rovnou nule 1.25 získá se rovnice 1.21.

$$\delta\Pi = 0. \quad (1.25)$$

Z toho plyne důležitý závěr: *Aplikaci principu virtuálních prací i Lagrangeova principu minima potenciální energie systému se obdrží tytéž rovnice. V obou případech to jsou rovnice rovnováhy a silové okrajové podmínky.*

Doplní-li se předcházející rovnice o virtuální práci setrvačných sil, získá se tzv. Hamiltonův princip. Hamiltonův princip se dá vyjádřit rovnicí:

$$\delta \int (\Pi - K) dt = 0, \quad (1.26)$$

kde K je kinetická energie tělesa.

Hamiltonův princip lze slovně formulovat takto: *Ze všech možných historií posuvů mezi dvěma okamžiky t_1 a t_2 nastane ta z nich, pro kterou integrál rozdílu potenciální a kinetické energie od času t_1 do času t_2 je stacionární.*

Existují i další variační principy, pro jejich studium autor odkazuje na speciální literaturu.

1.5 Volba metody řešení

Pro volbu metody řešení existují dvě základní možnosti. První možností je řešení analytické, druhou možností je sáhnout po řešení numerickém.

1.5.1 Analytické řešení

Při analytickém řešení hledáme výsledek ve tvaru spojitých funkcí. Využívají se přitom postupy matematické analýzy, využitím diferenciálního a integrálního počtu. Výhodou tohoto, historicky staršího postupu je, že v případě nalezení analytického řešení v uzavřeném tvaru máme k dispozici obecnou funkční závislost mezi vstupními veličinami (proměnnými) a výstupními veličinami řešeného problému. S takto získaným předpisem pak lze jednoduše pracovat a je použitelný pro obdobný typ problémů. Základním problémem však je, že nalezení analytického řešení v uzavřeném tvaru je možné pouze pro velmi omezenou škálu úloh. Zpravidla se jedná o úlohy s jednoduchou geometrií a při odvození je použito mnoho zjednodušení.

1.5.2 Numerické řešení

Řešení numerické je řešení přibližné. Při tomto postupu se převádí problém hledání spojitých funkcí na problém hledání konečného počtu neznámých parametrů, pomocí nichž se hledané funkce přibližně aproximují. Tento přechod se označuje jako diskretizace spojitého problému. Diskretizovaný problém je řešen algebraickými prostředky v konečném počtu kroků. Bez použití výpočetní techniky je tento proces velice obtížně zvládnutelný a to je hlavním důvodem, proč se numerické metody začaly bouřlivě rozvíjet až v druhé polovině dvacátého století.

Numerické řešení je v zásadě dostupné pro každou matematicky popsanou úlohu, jakékoliv geometrie a jakkoliv komplikovanou. Není to tak úplně pravda, protože při praktických aplikacích je složitost úlohy omezena kapacitou dostupného hardware a časovými nároky na výpočet. Výsledky numerického řešení se však vztahují jen ke konkrétní úloze. Jakékoliv úpravy a optimalizace vyžadují opakování celého procesu tvorby a řešení modelu.

Existuje mnoho metod pro numerické řešení. V současnosti je bezesporu nejrozšířenější metodou metoda konečných prvků. Před příchodem MKP se v hojné míře používala tzv. metoda sítí. Další v současné době využívanou metodou, ale ne tak jako MKP, je metoda hraničních prvků (MHP). Budoucností by mohly být například tzv. bezsíťové metody (Mesh Free Method). Numerické metody se bouřlivě rozvíjejí a jen čas ukáže, které postupy jsou nejvýhodnější pro řešení konkrétních typů úloh.

Další informace ohledně problematiky kapitoly lze nalézt v [15], [10] a [13].



Pojmy k zapamatování

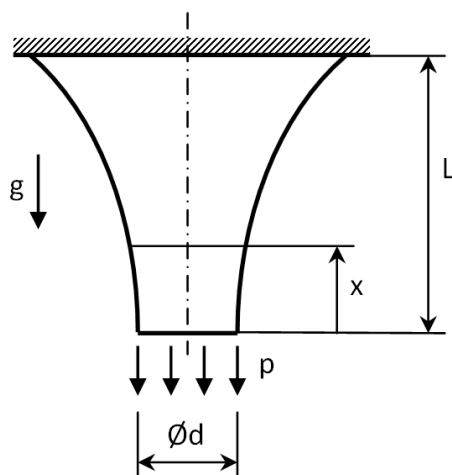
- Model fyzický, abstraktní a kombinovaný.
- Chyby při modelování - kvalitativní, složitosti, kvantitativní, konkrétní a forulační chyba.
- Modely stacionární, nestacionární.
- Lineární, nelineární modely.
- Diferenciální (silná), variační (slabá) formulace
- Analytické, numerické řešení problémů.



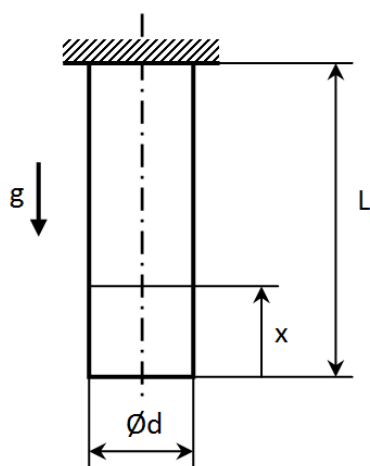
Kontrolní otázky

1. Co je to model a jaké typy modelů znáte? Definujte jednotlivé typy modelů.
2. Jaké typy chyb mohou při modelování vzniknout?
3. Jaký je obecný postup při vytváření modelu?
4. Rozdělte typy modelů těles vzhledem k času.
5. Rozdělte typy modelů těles vzhledem k linearitě.
6. Zopakujte základní pojmy z matematické teorie pružnosti.

7. Co znamenají pojmy silná a slabá formulace úlohy?
8. Napište základní rovnice matematické teorie pružnosti.
9. Co vyjadřuje princip virtuálních prací?
10. Porovnejte analytické a numerické metody řešení. Jaké jsou výhody a nevýhody jednotlivých postupů?



Obr. 1.1 Zadání k příkladu č. 1



Obr. 1.2 Zadání k příkladu č. 2



Příklady k procvičení

1. Sestavte rovnici pro řešení jednorozměrné úlohy (deformační varianta) zobrazené na obrázku 1.1. Délka tyče je L , průřez se mění s výškou tyče a v obecném místě má průřez S . Chování materiálu se předpokládá izotropní a homogenní. Modul pružnosti materiálu je E a hustota ρ . Odvoďte základní diferenciální rovnici a запиšte okrajové podmínky.
2. Řešte analyticky problém zobrazený na obrázku 1.2. Zadání je stejné jako v předchozím příkladu, ale průřez je konstantní. Při řešení využijte vztahy odvozené v příkladu číslo jedna.



Klíč k příkladům k procvičení

1. Diferenciální rovnice má tvar:

$$\frac{d}{dx}(ES\frac{du}{dx}) + g = 0, 0 < x < L.$$

Okrajové podmínky:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(ES\frac{du}{dx}) + g &= 0, 0 < x < L, \\ \sigma(x=0) &= (E\frac{du}{dx})_{x=0} = \frac{p(0)}{S(0)} = -p, \\ u(x=L) &= 0. \end{aligned}$$

2. Výsledné vztahy jsou:

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{\rho g}{E}(Lx - \frac{x^2}{2}), \\ \varepsilon(x) &= \frac{\rho g}{E}(L - x), \\ \sigma(x) &= \frac{\rho g}{E}(L - x). \end{aligned}$$

Kapitola 2

Opakování základních poznatků MKP

Průvodce studiem

V následujících kapitolách bude uvedena problematika nelineárních úloh mechaniky kontinua pevného tělesa a jejich aplikace v metodě konečných prvků. V této kapitole budou zopakovány základní poznatky lineárních úloh řešených metodou konečných prvků. O lineární mechanice kontinua pružného tělesa bylo pojednáno v první kapitole této práce.



Cíle

Po prostudování této kapitoly budete znát:

- Základní předpoklady pro aplikaci metody konečných prvků v lineární teorii pružnosti.
- Postup odvození algoritmu MKP pro lineární teorii pružnosti.
- Základní matice pro stacionární a nestacionární analýzu.



2.1 Metoda konečných prvků v lineární mechanice kontinua

2.1.1 Základní předpoklady

Lineární teorie pružnosti, která je základem lineárního řešení, vychází z předpokladu malých posuvů, malých přetvoření a z platnosti Hookeova zákona. Pod pojmem posuvy se zde i v následujícím textu myslí tzv. zobecněné posuvy, tedy posuvy nebo natočení.

Malé posuvy jsou takové, že těleso po zatížení nezmění znatelně svou polohu. Zobecněné posuvy jsou vzhledem k rozměrům tělesa tak malé, že podmínky rovnováhy mohou být psány pro původní, nedeformovanou konfiguraci a výpočet napětí může

být vztažen rovněž k původním rozměrům a to se zanedbatelnou chybou. Malá přetvoření znamenají, že rozměry každého objemového elementu tělesa se v důsledku zatížení znatelně nemění. Pokud platí předchozí věta, lze pro vyjádření vztahů mezi přetvořeními a posuvy použít Cauchyho geometrické rovnice. Vztah mezi napětím a přetvořením jsou dány Hookeovým zákonem. Materiál je tedy předpokládán izotropní a homogenní.

2.1.2 Odvození základních vztahů MKP

Základní myšlenkou metody konečných prvků je rozložení tělesa na menší části - elementy, konečné prvky - na kterých je analýza chování poměrně jednoduchá. V deformační variantě, která je nejrozšířenější, se vychází z nahrazení posuvů náhradními funkcemi. Tyto funkce se berou ve tvaru polynomů prostorových souřadnic. Celý postup metody konečných prvků se dá vyjádřit v několika krocích:

- Rozdělení řešené oblasti (tělesa, soustavy) na podoblasti, tzv. konečné prvky či elementy.
- Formulace chování jednotlivých elementů.
- Opětné složení a získání výsledné soustavy rovnic popisujících chování celého systému využitím rovnic získaných při analýze elementů.
- Aplikace okrajových či počátečních podmínek.
- Vlastní řešení systému rovnic. Získání primárních neznámých. V případě deformační varianty MKP se jedná o posuvy.
- Získání dodatečných (odvozených) výsledků. V případě pružného tělesa se jedná např. o přetvoření a napětí, popř. další veličiny.

Rozdělení řešené oblasti - elementy

Prvním krokem metody konečných prvků je rozdělení řešené oblasti na menší části, tzv. konečné prvky nebo také na elementy, jejichž chování lze poměrně jednoduše popsat. Existuje velké množství elementů, které lze rozdělit z různých hledisek.

Formulace chování elementu

Při matematickém popisu jednotlivých kroků metody konečných prvků je obvyklé používat maticový zápis. Proto zde bude také použit.

Diskretizace posuvů. Spojitě rozložené posuvy prvku $\{u\}$ jsou vyjádřeny pomocí tzv. matice tvarových funkcí $[A]$. Tato je funkcí polohových souřadnic $\{r\} = \{x_1, x_2, x_3\}^T$. Matematicky lze tento vztah vyjádřit pomocí následujícího vztahu:

$$\{u\} = [A]\{q\}, \quad (2.1)$$

kde $\{q\}$ jsou zobecněné posuvy v uzlech elementu.

Diskretizace přetvoření. Spojitě rozložená přetvoření $\{\varepsilon\}$ jsou vyjádřena pomocí matice $[B]$ konečným počtem zobecněných posuvů $\{q\}$ v jednotlivých uzlech elementu. Matice $[B]$ vychází z přijatých předpokladů o náhradě posuvů nad prvkem, viz vztah 2.1, a ze vztahů mezi posuvy a přetvořeními daných teorií pružnosti. Matematicky lze tento vztah vyjádřit pomocí následujícího vztahu:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{q\}. \quad (2.2)$$

Aplikace konstitutivního vztahu a výpočet napětí. Pro výpočet napětí nad daným prvkem lze v lineárním případě uvažovat pro izotropní a homogenní materiál platnost Hookeova zákona. Matematicky lze tento vztah vyjádřit pomocí následujícího vztahu:

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}. \quad (2.3)$$

Matice $[C]$ je konstantní a do vztahu se za přetvoření dosadí diskretizovaný vztah 2.2. Výsledný tvar rovnice je:

$$\{\sigma\} = [C][B]\{q\}. \quad (2.4)$$

Při odvození základní rovnice metody konečných prvků lze postupovat různým způsobem. Zde využijeme princip virtuálních prací, tak jak byl použit v předcházejícím kurzu. Vzhledem k tomu, že matice $[B]$ a $[C]$ nejsou funkcí vektoru zobecněných posunutí $\{q\}$, lze virtuální posuvy a virtuální přetvoření, vzhledem k přijaté diskretizaci, vyjádřit v následujících tvarech. Pro virtuální posuvy platí:

$$\{\delta u\} = [A]\{\delta q\}. \quad (2.5)$$

Pro virtuální přetvoření lze napsat vztah ve tvaru:

$$\{\delta \varepsilon\} = [B]\{\delta q\}. \quad (2.6)$$

Budou zanedbány objemové síly, např. tíha. Pro další odvození však budou uvažovány setrvačné objemové síly ve smyslu d'Alambertova principu. Lze napsat:

$$\{X\} = -\rho\{\ddot{u}\}, \quad (2.7)$$

kde ρ je hustota. Hustota obecně nezávisí na prostorových souřadnicích ani čase. Protože matice tvarových funkcí $[A]$ není funkcí času, lze vyjádřit zrychlení obdobně jako posuvy a to jako lineární kombinaci zobecněných zrychlení v uzlech, a to ve tvaru:

$$\{\ddot{u}\} = [A]\{\ddot{q}\}. \quad (2.8)$$

Aplikací vztahů vyjadřujících princip virtuálních prací a s využitím rovnic 2.3 až 2.8 se dostane pro každý prvek rovnice následujícího tvaru:

$$\{\delta q\}^T \int_V [B]^T \{\sigma\} dV = \{\delta q\}^T \int_V \rho [A]^T [A] dV \{\ddot{q}\} + \{\delta q\}^T \int_S [A]^T \{p\} dS + \{\delta q\}^T \{F_{os}\}. \quad (2.9)$$

Rovnice 2.9 musí platit pro libovolné virtuální posunutí $\{\delta q\}$ a může být přepsána do následujícího tvaru:

$$\{f_i\} = \{f_e\}, \quad (2.10)$$

kde

$$\{f_i\} = \int_V [B]^T \{\sigma\} dV, \quad (2.11)$$

jsou síly v uzlech, které odpovídají deformační energii prvku, tj. vnitřním silám.

$$\{f_e\} = \{f_V\} + \{f_S\} + \{f_{os}\}, \quad (2.12)$$

jsou síly v uzlech, odpovídající silám objemovým, plošným a osamělým (které působí v uzlech), tj. vnějším silám.

$$\{f_V\} = \int_V \rho [A]^T [A] dV \{\ddot{q}\}, \quad (2.13)$$

$$\{f_S\} = \int_S [A]^T \{p\} dS, \quad (2.14)$$

$$(2.15)$$

kde $\{f_V\}$ představuje objemové síly, $\{f_S\}$ síly plošné a symbolem $\{f_{os}\}$ jsou označeny osamělé síly.

Vztah 2.10 vyjadřuje rovnováhu vnitřních a vnějších sil. Tento vztah musí platit jak pro lineární tak i pro nelineární případy pružnosti. Platí-li Hookeův zákon 2.3 a vztahy 2.2, lze vztah 2.10 přepsat do tvaru:

$$[k]\{q\} = \{f_e\}, \quad (2.16)$$

symbol $[k]$ představuje matici tuhosti prvku, definovaný následně:

$$[k]\{q\} = \int_V [B]^T [C] [B] dV. \quad (2.17)$$

Pro nestacionární úlohy lze postupovat následovně. Objemové síly se dají upravit do tvaru:

$$\{f_V\} = [m]\{\ddot{q}\}, \quad (2.18)$$

kde

$$[m] = \int_V \rho[A]_T[A]dV, \quad (2.19)$$

je tzv. matice hmotnosti prvku. Pohybová rovnice prvku má pak tvar:

$$[m]\{\ddot{q}\} + [k]\{q\} = \{f\}, \quad (2.20)$$

kde:

$$\{f\} = \{f_S\} + \{f_{os}\}. \quad (2.21)$$

Opětovné složení, získání výsledné soustavy rovnic

Dalším krokem je složení jednotlivých elementů zpět do celkové konstrukce.

Při modelování konkrétního tělesa (soustavy) jsou k dispozici informace, jak jsou jednotlivé prvky vůči sobě umístěny. Lze tedy matice tuhosti a hmotnosti jednotlivých prvků sestavit do výsledných globálních matic tuhosti a hmotnosti. V případě lineárních úloh mechaniky pružného tělesa, jak již bylo řečeno výše, se vychází z předpokladu malých posuvů, malých přetvoření a z předpokladu lineárního chování materiálu. Současně se předpokládá neměnnost okrajových vazebních podmínek. Výsledný vztah pro metodu konečných prvků za tohoto předpokladu má tvar:

$$[M]\{\ddot{Q}\} + [K]\{Q\} = \{F\}, \quad (2.22)$$

popřípadě tvar

$$[K]\{Q\} = \{F\}, \quad (2.23)$$

pro stacionární úlohy.

Aplikace okrajových podmínek, vlastní řešení výsledné soustavy rovnic, získání dodatečných výsledků

Z rovnic 2.22 a 2.23 lze vypočítat odezvu soustavy $\{q\}$. Tato odezva je lineární funkcí zatížení $\{F\}$. To znamená, že pro jiné zatížení $k\{F\}$ je odezva $k\{q\}$, kde k je libovolná konstanta. Platí tedy princip superpozice.

Předpoklady o malých posuvech a malých přetvořeních vstoupil již do odvození matic tuhosti a hmotnosti, dále pak do odvození vektoru zatížení, protože všechny

integrace prováděné ve vztazích jsou prováděny přes původní objem a povrch nepřetvořeného prvku. Matice $[B]$ vychází z Cauchyho geometrických rovnic platných pro malá přetvoření a nezávisí na posuvech uzlů $\{q\}$. Předpoklad lineárního chování materiálu je vyjádřen vztahem 2.3, kde matice $[C]$ je také nezávislá na posuvech $\{q\}$.

Řešením rovnice 2.22 se získá odezva mechanické soustavy na zatížení $\{F\}$, které je obecnou funkcí času. Je-li změna zatížení v čase tak malá, že setrvačné účinky lze zanedbat, platí rovnice 2.23, což je lineární algebraická rovnice. Rovnice 2.23 a 2.22 jsou v praktických případech řešitelné pouze numerickými postupy. Při řešení stacionárních úloh, daných rovnicí 2.23, se používá jiných numerických postupů než při řešení nestacionárních úloh 2.22.

Při výpočtu odvozených veličin, které jsou zde přetvoření a napětí, se musí vrátit na úroveň jednotlivých prvků a pro výpočet lze využít vztahů 2.2 a 2.4.

Další informace ohledně problematiky kapitoly lze nalézt v [1], [10] a [13].



Pojmy k zapamatování

- matice tvarových funkcí
- matice tuhosti
- matice hmotnosti
- objemové, plošné a osamělé síly
- základní rovnice MKP



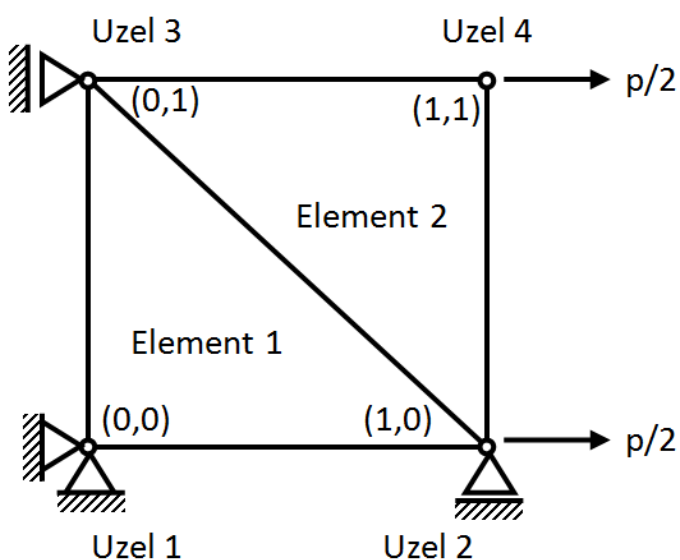
Kontrolní otázky

1. Uveďte základní předpoklady nutné pro odvození algoritmu metody konečných prvků pro případ lineárně-elastického chování pružného tělesa.
2. Vyjmenujte postup/kroky při aplikaci metody konečných prvků.
3. Odvoďte základní vztahy pro stacionární i nestacionární analýzu.



Příklady k procvičení

1. Řešte numericky, pro Vámi zvolené rozměry, pomocí MKP příklad číslo 2 z předchozí kapitoly. Vyzkoušejte různé způsoby diskretizace. Porovnejte získané výsledky a diskutujte případné rozdíly.
2. Řešte problém na obrázku 2.1. Pro jednoduchost jsou uvažovány jednotkové délkové rozměry. Tloušťka je rovněž uvažována jednotková. Materiál je předpokládán homogenní a izotropní s konstantami E a μ . Pro jednoduchost volte nejjednodušší trojúhelníkový prvek. Sestavte základní rovnici metody konečných prvků v deformační



Obr. 2.1 Zadání k příkladu č. 2

variantě pro řešení primárních neznámých (posuvů) a proveďte její řešení. Určete reakce, přetvoření (deformace) a napětí v soustavě.

Klíč k příkladům k procvičení



1. Numerické výsledky porovnejte z výsledky získanými z analytického řešení, viz předchozí kapitola.
2. Posuvy uzlů 2 a 4 ve směru osy x:

$$u_{2x} = u_{4x} = \frac{p}{E^*},$$

kde E^* je modul pružnosti. Pro případ rovinné napjatosti platí $E^* = E$ a pro případ rovinné deformace $E^* = \frac{E}{1-\mu}$.

Posuvy uzlů 3 a 4 ve směru osy y:

$$u_{3y} = u_{4y} = \frac{-\mu^* p}{E^*},$$

kde μ^* je modul pružnosti. Pro případ rovinné napjatosti platí $\mu^* = \mu$ a pro případ rovinné deformace $\mu^* = \frac{\mu}{1-\mu}$.

Reakce ve směru x v uzlech 1 a 3:

$$f_{1x} = u_{3x} = -\frac{p}{2}.$$

Kapitola 3

Nelineární úlohy mechaniky



Průvodce studiem

Doposud jsme se zabývali pouze úlohami z oblasti mechaniky těles, pro které nám stačila lineární teorie pružnosti. K řešení praktických úloh často vystačíme s takovýmito modely. Jsou však i oblasti mechaniky těles, které vyžadují znalost řešení nelineárních úloh. V nelineární mechanice deformovatelného tělesa jde například o případy těles s nelineární deformační charakteristikou a o případy s velkými deformacemi, při nichž se podstatně mění geometrická konfigurace a tvar tělesa nebo soustav těles. Do oblasti nelineárních problému spadá i problematika kontaktu těles.



Cíle

Po prostudování této kapitoly budete znát:

- Rozdíl mezi lineárními a nelineárními analýzami.
- Základní typy nelinearit v mechanice pružného tělesa.
- Způsob řešení nelineárních úloh, iterační a inkrementální schéma.
- Algoritmus Newton-Raphsonovy metody.
- Metodu délky oblouku (Arc-Length method).

3.1 Lineární versus nelineární analýzy

Na začátku této kapitoly srovnáme základní předpoklady pro platnost lineární analýzy. Pro lineární úlohy je typická vysoká míra idealizace řešeného problému. Je zaručena existence a jednoznačnost řešení lineárních modelů. Lineární modely jsou konzervativní. Nedochází k žádné disipaci energie. Konečný stav modelu závisí na konečných hodnotách zadaných posuvů a zatížení a nikoliv na způsobu, kterým ho bylo dosaženo. Při řešení lze využít zákona superpozice a výsledné řešení složit z dílčích úloh. Shrňme základní pravidla, která platí pro lineární modely v mechanice pružného tělesa:

- Rovnováha se vyjadřuje v nezdeformovaném referenčním stavu.
- Vztahy mezi posuvy a deformacemi jsou lineární (Cauchyho tenzor deformace).
- Materiál je lineárně elastický (platí Hookeův zákon).
- Vazby jsou reprezentovány pouze lineárními rovnicemi.

V případě nelineárních analýz si musíme uvědomit, že:

- Stav, ve kterém se dosahuje rovnováha mechanické soustavy, je ve zdeformovaném stavu, který předem neznáme.
- Vztahy mezi posuvy a deformacemi nejsou lineární (např. Green-Lagrangeův tenzor deformace).
- Chování materiálů je obecné, tzn., že vztah mezi napětím a deformací (konstituční rovnice) je nelineární.
- Vazby jsou reprezentovány obecnými vztahy (např. kontakt těles).

Nelineární úlohy se na rozdíl od lineárních vyznačují závislostí na posloupnosti stavů, kterými systém prošel od počátku do konce děje. Na rozdíl od lineárních úloh nám matematika neposkytuje věty o existenci řešení, konvergenci a stabilitě a tím pádem nám neumožňuje jednoznačně posoudit řešitelnost úlohy. U nelineárních úloh máme k dispozici jen omezené prostředky a jsme často odkázáni na numerické postupy. K řešení nelineárních úloh je třeba mnohem větší zkušenosti a intuice než k řešení lineárních úloh. Nelineární analýzy kladou větší nároky na odbornou kvalifikaci výpočtáře. To, zda budeme úspěšní při řešení nelineárního problému, často závisí na zvolené výpočetní strategii. To co se osvědčilo u jedné úlohy, může v jiném případě selhat. Zdroje nelinearity, se kterými se setkáváme v úlohách mechaniky pružného tělesa, lze rozdělit v zásadě do tří hlavních skupin:

- geometrické nelinearity,
- materiálové nelinearity,
- strukturální problémy (např. kontakt).

Jednotlivé případy nelinearity budou probrány detailněji v následujících kapitolách.

3.2 Řešení základní rovnice

Při řešení lineárních problémů existuje mnoho numerických postupů, jak danou soustavu rovnic vyřešit. Připomeňme si například Gausovou eliminační metodu, Frontální metodu, aj. Nelineární úlohy nemohou být řešeny pomocí přímých metod. Místo toho se používají iterační metody. Základním postupem je najít nějaký odhad řešení, pro neznáme hodnoty, a v dalším kroku provedení korekce (zpřesnění) předchozího řešení. Tento postup se opakuje do té doby, než chyba řešení v jednotlivé iteraci nepodstoupí předepsanou hodnotu chyby. Při řešení se kromě iteračního schématu využívá i inkrementálního postupu, tzn., že zatížení se neaplikuje celé najednou, ale po přírůstcích, přičemž v každém přírůstku se provádí iterace pro zpřesnění výsledku.

3.2.1 Newton-Raphsonova metoda

Základní metodou řešení nelineárních rovnic, kterou využívá i většina komerčních systémů, je metoda Newton-Raphsonova. V následujícím textu si přiblížíme jednotlivé kroky této metody. Metoda využívá tangentsní modul získaný z předchozího kroku (iterace) k získání výsledů. Řeší se rovnici:

$$[K(\{Q\})]\{Q\} = \{F\}, \quad (3.1)$$

kde $[K(\{Q\})]$ je matice tuhosti celého řešeného systému a zde se předpokládá, že je jen funkcí posuvů. Bude zavedena následující funkce:

$$[K(\{Q\})]\{Q\} = \{I\} = \{I(\{Q\})\}. \quad (3.2)$$

Rovnici 3.1 lze přepsat do následujícího tvaru:

$$\{I\} = \{F\}. \quad (3.3)$$

Provede se rozvoj funkce $\{I\}$ v Taylorovu řadu v okolí bodu $\{Q_0\}$, který se od hledaného řešení $\{Q_1\}$ liší o $\{\Delta Q\}$, platí:

$$\{Q_1\} = \{Q_0\} + \{\Delta Q\}, \quad (3.4)$$

získá se vztah:

$$\{I\{Q_1\}\} = \{I\{Q_0\}\} + [J_0]\{\Delta Q\} + \dots, \quad (3.5)$$

kde $[J_0]$ je tzv. Jacobiho matice definovaná takto:

$$[J_0] = \frac{\partial \{I\}}{\partial \{Q\}_T}. \quad (3.6)$$

Další členy Taylorovy řady (nelineární) se zpravidla zanedbávají. Prvky Jacobiho matice jsou funkce, které dokážeme určit dle 3.6, známe-li funkce 3.2. Pro i -tý řádek vztahu 3.3 lze psát:

$$F_i = I(Q_k) = K_{ij}Q_j. \quad (3.7)$$

Derivace obecného prvku vektoru $\{F\}$ podle j -té proměnné je:

$$\frac{\partial F_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial K_{il}}{\partial Q_j}Q_l + K_{ij}. \quad (3.8)$$

Obecný prvek v Jacobiho matici je tedy:

$$\frac{\partial F_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial K_{il}}{\partial Q_j}Q_l + K_{ij} = H_{ij} + K_{ij}. \quad (3.9)$$

Může se tedy psát:

$$[J_0] = [H(\{Q_0\})] + [K(\{Q_0\})]. \quad (3.10)$$

Při řešení úloh se s maticí $[H(\{Q_0\})]$ zpravidla nepočítá a to ze dvou důvodů. Zaprvé, její vyčíslení je náročné a za druhé, je to matice nesymetrická. Protože se však k výslednému řešení dochází iteračním postupem, může se toto zanedbání dovolit. Po zjednodušení lze napsat:

$$[J_0] \doteq [K(\{Q_0\})]. \quad (3.11)$$

Dosazením 3.11 do 3.5 se dostane vztah:

$$\{I\{Q_1\}\} = \{I\{Q_0\}\} + [K(\{Q\}_0)]\{\Delta Q\}. \quad (3.12)$$

Uvážili-li se, že

$$\{I\{Q_1\}\} = \{Q_1\}, \quad (3.13)$$

a

$$\{I\{Q_0\}\} = [K(\{Q\}_0)]\{Q_0\}, \quad (3.14)$$

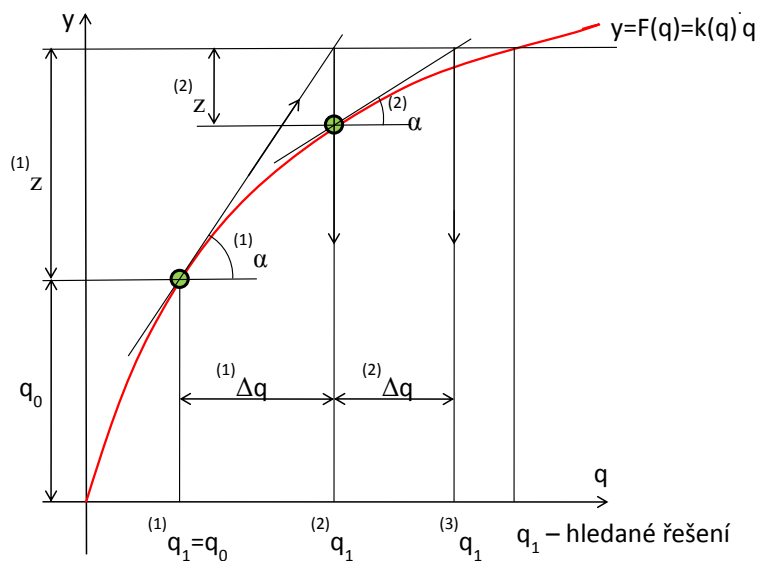
lze výraz 3.12 přepsat do tvaru:

$$[K(\{Q\}_0)]\{\Delta Q\} = \{R\}, \quad (3.15)$$

kde $\{R\}$ je tzv. zbytková nevyvážená (nerovnovážná) síla:

$$\{R\} = \{F_1\} - [K(\{Q\}_0)]\{Q_0\}. \quad (3.16)$$

Rovnice 3.15 s pravou stranou 3.16 je soustava lineárních algebraických rovnic, ze které se dá vypočítat přírůstek $\{\Delta Q\}$. Takto vypočtena hodnota $\{\Delta Q\}$ je přibližná a je třeba ji zpřesnit v iteračním procesu.



Obr. 3.1 Geometrická interpretace Newton-Raphsonovy

Jako příklad využití Newton-Raphsonovy metody bude uvedeno řešení rovnice $y = F(q)$ pro jeden stupeň volnosti. Hledá se takové řešení $q = q_1$, pro které platí $k(q_1)q_1 = f_1$. Počáteční stav je q_0, f_0 . Geometrická interpretace Newton-Raphsonovy iterační metody je na obrázku 3.1. Vezme-li se q_0 jako první aproximace řešení pak

$$q^{(1)} = q_0, \quad (3.17)$$

a dosadí se do řešené rovnice, je zřejmé, že

$$k(q_0)q_0 \neq f_1. \quad (3.18)$$

Existuje jistá zbytková veličina r (nevyvážená síla), pro kterou platí:

$$z^{(1)} = f_1 - k(q_0)q_0. \quad (3.19)$$

Pro další řešení je nutno zjistit směrnicí funkce $f(q)$ v bodě $q = q_0$, tedy:

$$\tan^{(1)} \alpha = \frac{dF(q)}{dq} \Big|_{q=q_0} = \dot{k}(q_0)q_0 + k(q_0) = j(q_0), \quad (3.20)$$

kde:

$$\dot{k}(q_0) = \frac{dk(q)}{dq} \Big|_{q=q_0}. \quad (3.21)$$

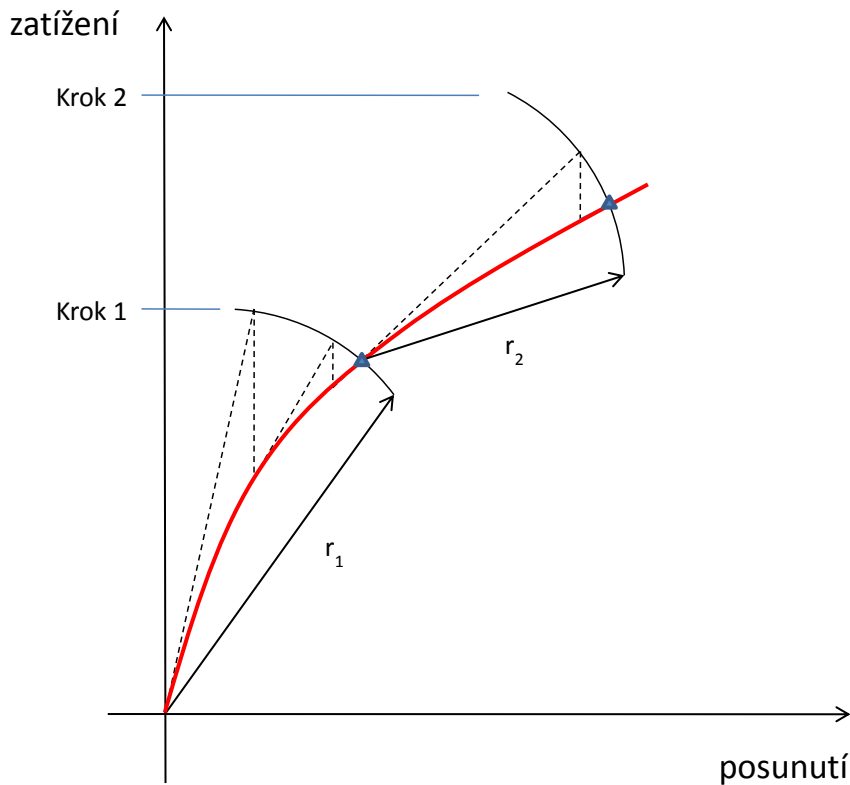
Druhá aproximace řešení se může vyjádřit pomocí přírůstku:

$$\Delta q^{(1)} = \frac{r}{[j(q_1^{(1)})]}, \quad (3.22)$$

$$q_1^{(2)} = q_1^{(1)} + \Delta q^{(1)}. \quad (3.23)$$

Další aproximace se získají obdobně. Jak bylo řečeno výše, lze nelineární člen ve výrazu $j(q^{(i)})$ zanedbat. Toto zanedbání ovlivní pouze cestu k řešení, nikoliv však řešení samo. Celý výpočetní postup se tím značně zjednoduší. Byla popsána základní varianta Newton-Raphsonovy metody. Existují i její modifikace.

3.2.2 Metoda délky oblouku (Arc-Length method)



Obr. 3.2 Metoda délky oblouku

Pro některé typy nelineárních analýz však může Newton-Raphsonova metoda selhat. Tečná matice tuhosti se může stát singulární a metoda diverguje. Při řešení nelineárních úloh se setkáváme s dráhami zatížení (síla vs. posuv), které nejsou monotónně rostoucí. Ukázkou takovéto dráhy zatížení je tzv. prolomení (snap-through). Dalším případem je (například u skořepinových konstrukcí) zvrát zatěžovací dráhy

(snap-back). Při vyšetřování nelineární stability se můžou na zatěžovací dráze objevit limitní nebo bifurkační body. V limitním bodě dosahuje zatížení lokálního extrému (maximum, minimum), v bifurkačním bodě dochází k rozdělení zatěžovací dráhy na dvě, nebo více větví, na nichž dochází k jevu zvanému výměna stability. V uvedených případech není řešení jakoukoliv Newton-Raphsonovou metodou nepoužitelné. Pro takovéto případy je vhodné použít metodu zvanou Metoda délky oblouku (Arc-Length method). Tuto metodu vytvořili, nezávisle na sobě, Wempner a Riks.

Další informace ohledně problematiky kapitoly lze nalézt v [10], [11], [14] a [13].



Pojmy k zapamatování

- iterační metoda
- inkrementální postup
- Newton-Raphsonova metoda
- metoda délky oblouku (Arc-Lenght method)



Kontrolní otázky

1. Popište rozdíly mezi lineárními a nelineárními mechanickými systémy.
2. Jaké existují postupy pro řešení lineárních úloh.
3. Popište algoritmus Newton-Raphsonovy metody.
4. Ve kterých případech je výhodné použít metodu délky oblouku.

Kapitola 4

Geometrické nelinearity

Průvodce studiem



Geometricky nelineární úlohy jsou takové, kdy se při sledování elementu tělesa musí brát v úvahu nejen tvarové změny, ale zároveň posunutí a rotace elementu (části tělesa) jako tuhého celku. Dále je nutno si uvědomit, že posunutí již nemusí být infinitesimální. Velké posuvy jednotlivých bodů elementu je možné si představit složené z posuvů a rotace tělesa jako tuhého celku a posuvů jednotlivých bodů tělesa v důsledku jeho deformace v nové poloze.

Další věcí, kterou je nutno si uvědomit je definice tenzoru napětí a tenzoru přetvoření. Otázka definice tenzoru napětí je složitá. Elementární vnitřní síly v přetvořené konfiguraci se mohou vztahovat k elementárním ploškám, buď v původní, nebo v deformované konfiguraci. Další otázkou je volba tenzoru přetvoření. K tenzoru napětí musí existovat vhodně definovaný tenzor přetvoření tak, aby byly splněny konstitutivní zákony. Příkladem je 2. Piola-Kirchhoffův tenzor napjatosti, který je energeticky konjugovaný s Greenovým tenzorem přetvoření.

Cíle



Po prostudování této kapitoly budete znát:

- Typy geometrických nelinearit.
- Popis pohybu kontinua.
- Tenzory přetvoření pro případy nelineárních úloh.
- Tenzory napětí pro případy nelineárních úloh.

4.1 Základní dělení geometrických nelinearit

Geometrická nelinearita je zapříčiněna velkými posuvy a natočeními, které mohou být doprovázeny velkými přetvořeními. Podle toho rozlišujeme dva rozdílné případy geometrické nelinearity:

- Velké posuvy (posuvy a rotace)
- Velká přetvoření (deformace), vždy zahrnují velké posuvy

V obou případech se může materiál chovat lineárně či nelineárně.

4.1.1 Velké posuvy

První typ geometrické nelinearity je zapříčiněn tím, že těleso v důsledku zatížení vykazuje velké posunutí popř. rotace, avšak přetvoření (deformace) zůstávají malá. V tomto případě je každý objemový element tělesa jako celek podstatně posunut a natočen, avšak jeho přetvoření jsou malá - infinitesimální. Při popisu se tedy dají použít Cauchyho geometrické rovnice. Při stanovení podmínek rovnováhy není možno použít původních rozměrů tělesa.

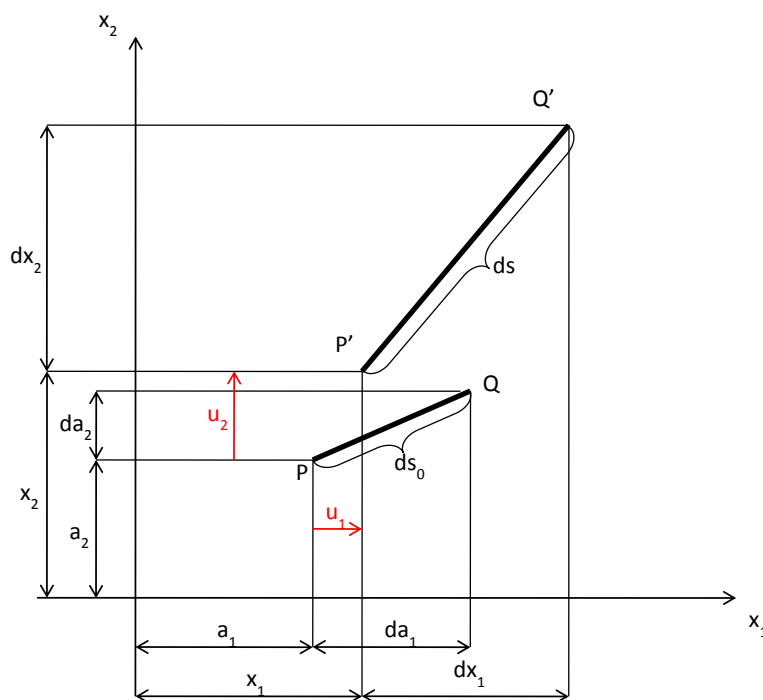
4.1.2 Velká přetvoření

V tomto případě k velkým posuvům a rotacím přistoupí i velké přetvoření (deformace). Při odvozování geometrických vztahů pro případ lineární teorie pružnosti se předpokládá, že složky tenzoru přetvoření jsou malé (řádově $1e-3$). Pak lze zanedbat kvadratické členy geometrických vztahů a používat inženýrský (infinitesimální) tenzor přetvoření (Cauchyho). Hranicí použitelnosti inženýrského tenzoru přetvoření bývá obvykle uváděna hodnota přetvoření 1%, (tedy přetvoření $1e-2$). Formulace vyhovuje pro inženýrskou analýzu součástí popř. konstrukcí. V případech simulace tváření, simulace deformace součástí z pryže, plastu, aj., mohou přetvoření dosáhnout i stovek procent. Nelineární členy pak nelze zanedbat a je nutno použít "složitější" tenzory přetvoření. Lze je definovat různým způsobem podle toho, kterou geometrickou konfiguraci tělesa považujeme za základní (vztažnou).

4.2 Popis pohybu kontinua

Při popisu kontinua, které je podrobeno velkým posuvům a velkým přetvořením, je třeba zkoumat pohyb každého bodu vůči nepohyblivému souřadnému systému, a to v závislosti na čase. Existují dva základní přístupy k popisu kinematiky kontinua:

- Lagrangeův (referenční) popis,
- Eulerův (prostorový) popis.



Obr. 4.1 K popisu pohybu kontinua

4.2.1 Lagrangeův popis

Lagrangeův popis sleduje jednotlivé materiálové částice při jejich pohybu prostorem:

$$x_i = x_i(a_j, t). \quad (4.1)$$

Při lagrangeovském popisu jsou nezávislé proměnnými veličinami počáteční poloha a čas. Referenční popis nabízí dvě varianty řešení a to totální Lagrangeovská formulace a aktualizovaná Lagrangeovská formulace. V **totální lagrangeovské formulaci** jsou všechny fyzikální veličiny vztaženy k výchozí konfiguraci. Prostorové souřadnice jsou funkcemi materiálových souřadnic. V **aktualizované lagrangeovské formulaci** je za referenční považována konfigurace na počátku zatěžovacího přírůstku.

4.2.2 Eulerův popis

Eulerův popis sleduje pohyb jednotlivých materiálových částic vytčeným bodem prostoru:

$$a_i = a_i(x_j, t). \quad (4.2)$$

Za nezávisle proměnné se berou souřadnice okamžitého stavu. Jinak řečeno, v eulerovském popisu jsou nezávislé proměnnými okamžitá poloha bodu (v čase t) a čas t . Převážně se používá v mechanice tekutin (pohyb materiálu přes pevně zadaný objem). V mechanice těles je dávana přednost popisu Lagrangeovskému. Eulerovský popis nabývá na významu při vyšetřování interakce konstrukce s prostředím (obtékání těles vzduchem, kapalinou, apod.).

4.3 Tenzory přetvoření

Nebude zde probíráno odvození vztahů pro jednotlivé druhy tenzorů přetvoření, to je záležitostí specializovaných předmětů, zde jsou uvedeny jen výsledky.

Greenův tenzor přetvoření v Lagrangeově popisu může být zapsán ve tvaru:

$$\varepsilon_{jk}^G = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial a_k} + \frac{\partial u_k}{\partial a_j} + \frac{\partial u_i}{\partial a_j} \frac{\partial u_i}{\partial a_k} \right). \quad (4.3)$$

Pro tento tenzor přetvoření se vyskytují i jiné názvy, např. Green-Lagrangeův, Green-St.Venantův, aj.

Dalším typem tenzoru přetvoření, se kterým se setkáváme v mechanice kontinua, je tzv. **Almasiho tenzor přetvoření**, odpovídajícím Eulerově popisu pohybu kontinua. Dá se zapsat v následujícím tvaru:

$$\varepsilon_{jk}^G = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right). \quad (4.4)$$

Jsou-li v deformovaném tělese malé posuvy a malá přetvoření, pak součiny parciálních derivací ve vztazích Greenova tenzoru přetvoření a ve vztazích pro Almasiho tenzor přetvoření, jsou o řád menší oproti prvním dvěma členům v závorkách, a dají se proto zanedbat. Oba vztahy tedy přejdou v dobře známý Cauchyho tenzor přetvoření pro malé posuvy a malá přetvoření.

Takže pro popis přetvoření existuje několik možností. Připomeňme ještě další možnosti a to popis pomocí inženýrských přetvoření a dále pak i tzv. **logaritmickou deformaci** (přirozené poměrné prodloužení definované výrazem (pro 1D):

$$\varepsilon_{ln} = \ln \frac{l}{l_0}, \quad (4.5)$$

kde l je aktuální délka vzorku, l_0 je původní délka vzorku.

4.4 Tenzory napětí

V lineární teorii pružnosti jsou napětí počítána ze vztahu, do kterého vstupuje síla působící v deformovaném tělese na plošku nedeformovaného tělesa. V teorii velkých posuvů a velkých přetvoření se musí změny geometrie tělesa při zatížení brát

v úvahu. Prvním typem tenzoru napětí je tzv. **Cauchyho tenzor napětí**, který je vztažen k okamžité síle a k okamžité geometrické konfiguraci tělesa. Cauchyho tenzor napětí se přidružuje k Almasiho tenzoru přetvoření, neboť ten se též vztahuje k okamžité konfiguraci tělesa. Cauchyho tenzor odpovídá skutečným napětím v tělese a pro malá přetvoření vychází, se zanedbatelnou chybou, stejný jako tenzor tzv. inženýrského napětí, zavedený v lineární pružnosti.

Ke Greenovu tenzoru přetvoření, viz rovnice 4.3, se dá obdobně přidružit vhodný napětový tenzor. V tomto případě se jedná o tzv. **Lagrangeův či 1. Piollův tenzor napětí**. Tento tenzor má však jednu nepříjemnou vlastnost a to, že je nesymetrický. Z tohoto důvodu se Lagrangeův (1. Piollův) tenzor napětí v praxi skoro nepoužívá. Namísto toho se používá symetrický **2. Piola - Kirchhoffův tenzor napětí**. Druhý Piola - Kirchhoffův tenzor napětí je pomocná veličina, která nemá přímý fyzikální význam. Při jeho definici se využívá fiktivní elementární síla, která je vztažena ke konfiguraci tělesa před deformací. Tento tenzor je však vhodný nástroj pro výpočty nelineárních úloh v mechanice kontinua s uvažováním velkých posuvů a přetvoření. Důležitou vlastností 2. Piolova - Kirchhoffova tenzoru napětí je, že jeho složky jsou invariantní vůči posuvům a rotacím tělesa jako tuhého celku.

Pro posouzení napjatosti a pevnosti ve sledovaném objemu je třeba pracovat s Cauchyho tenzorem napětí. Mezi jednotlivými tenzory napětí existují vztahy, pomocí kterých jdou jednotlivé tenzory mezi sebou přepočítat.

Další informace ohledně problematiky kapitoly lze nalézt v [12], [15], [10], [11], a [13].

Pojmy k zapamatování

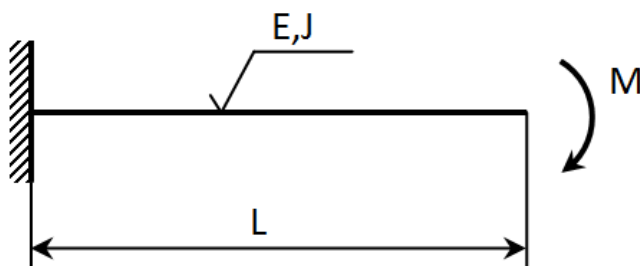


- geometrická nelinearita - velké posuvy, velká přetvoření
- Lagrangeův a Eulerův popis pohybu kontinua
- Cauchyho tenzor napětí, 1. Piollův tenzor napětí, 2. Piola-Kirchhoffův tenzor napětí
- Greenův tenzor přetvoření, Almasiho tenzor přetvoření

Kontrolní otázky



1. Charakterizujte pojem geometrická nelinearita - velké posuvy.
2. Charakterizujte pojem geometrická nelinearita - velká přetvoření.
3. Jaký je rozdíl mezi Lagrangeovým a Eulerovým popisem kontinua.
4. Jaké znáte tenzory napětí?
5. Jaké znáte tenzory přetvoření?



Obr. 4.2 Zadání k příkladům



Příklady k procvičení

1. Na 4.2 je zobrazen prizmatický vetknutý nosník, zatížený na konci osamělým momentem M . Geometrie nosníku je popsána jeho délkou L , momentem setrvačnosti J . Materiál je charakterizován hodnotou modulu pružnosti E . Určete průhyb nosníku (analyticky) při uvažování malých posuvů a přetvoření.
2. Řešte průhyb nosníku z předchozího příkladu, ale uvažujte vliv velkých posunutí. Předpokládejme, že materiál se chová lineárně.
3. Namodelujte ve vhodném konečno-prvkovém programu předchozí případ nelineárního chování nosníku a získané výsledky porovnejte s předchozím analytickým řešením.



Klíč k příkladům k procvičení

1. Lineární teorie nosníků dává následující výsledky pro vodorovný posuv u a svislý posuv w volného konce prutu:

$$u = 0,$$

$$\frac{w}{L} = \frac{ML}{2EJ}.$$

2. Vodorovný posuv u a svislý posuv w volného konce prutu lze vyjádřit následujícími vztahy:

$$\frac{u}{L} = 1 - \frac{r}{L} \sin \frac{L}{r},$$

$$\frac{w}{L} = 1 - \frac{r}{L} \left[1 - \cos \frac{L}{r} \right],$$

$$\frac{L}{r} = \frac{ML}{EJ},$$

kde r představuje křivost.

Kapitola 5

Materiálové nelinearity

Průvodce studiem

Materiálová nelinearita je charakterizována skutečností, že chování materiálu je popsáno nelineárními vztahy napětí versus přetvoření. Jde-li přitom o malé posuvy a malá přetvoření, hovoříme o pouhé materiálové nelinearitě.



Cíle

Po prostudování této kapitoly budete znát:

- Základní typy materiálových modelů.
- Typy modelů pro elastické materiály.
- Popis vhodný pro nelineárně-elastické chování materiálů.
- Informace o viskoelastickém chování.
- Popis elasto-plastického chování materiálů, popis jak v časově nezávislé tak v časově závislé oblasti.
- Speciální typy materiálů.



5.1 Elastické materiálové modely

V této kapitole budou zopakovány a rozšířeny poznatky týkající se elastických materiálových modelů.

5.1.1 Lineární elastické modely

Lineární elastický izotropní model materiálu

Lineární elastický model materiálu je základní a nejjednodušší materiálový model při napětově deformační analýze pružných těles. Materiálový model se řídí Hookovým zákonem, tzn. napětí je lineárně proporcionální přetvoření (deformaci). Tako-

výto materiálový model je použitelný např. pro modelování kovů v oblasti elastického chování. Pro základní definici tohoto materiálového modelu je potřeba zadat dva základní materiálové parametry - modul pružnosti v tahu E a Poissonovo číslo μ . Nicméně pro vyhodnocení je nutno znát i hodnotu meze kluzu použitého materiálu.

Lineární elastický ortotropní model

Lineární elastický ortotropní model materiálu se také řídí Hookovým zákonem, dovozuje však zadat různé hodnoty materiálových vlastností ve dvou směrech. Pro popis lineárního isotropního modelu stačily k popisu dvě základní materiálové vlastnosti - modul pružnosti v tahu a Poissonovo číslo. Pro popis ortotropního modelu je potřeba zadat celkem 9 elastických konstant. Jedná se o moduly pružnosti ve třech směrech E_x, E_y, E_z , tři Poissonovy čísla $\mu_{xy}, \mu_{yz}, \mu_{zx}$ a tři smykové moduly G_{xy}, G_{yz}, G_{zx} . Při použití tohoto modelu je nutno navíc znát mez kluzu ve všech směrech, tak aby bylo možno posoudit, zda se pohybuje ve vymezené oblasti. Takovýto materiál je vhodný pro modelování materiálu typu dřevo, kosti, některých typů kompozitních materiálů. Dalším typickým případem je tenký válcovaný plech.

Lineárně elastický anizotropní model

Na rozdíl od předchozích dvou modelů (izotropního a ortotropního) anizotropní model nemá žádnou rovinu materiálové symetrie. Pro definici lineárního elastického anizotropního materiálového modelu potřebujeme 36 nezávislých materiálových konstant. Často však je matice symetrická, tzn. že stačí zadat pouze 21 materiálových konstant. Rozšíření předchozího materiálového modelu do tří směrů. Takovýto materiálový model je vhodný pro modelování vysoce anizotropních materiálů.

5.1.2 Nelineární elastické materiálové modely (hyperelastické)

Nelineární elastické materiálové modely jsou vhodné pro popis chování pryží, pěn, plastů a biomateriálů. Tyto materiály jsou schopny velkých vratných deformací. Vztah mezi napětím a deformací je velmi nelineární. Klasickým příkladem je pryž, která má obecně následující vlastnosti:

- velké deformace (až 500 %),
- vztah mezi napětím a deformací je silně nelineární,
- specifické tlumící vlastnosti,
- chování je časově a teplotně závislé,
- je nestlačitelná (tj. objem se nemění (významně) se vzrůstajícím napětím).

Při popisu materiálových modelů pro hyperelastické materiály se vychází z funkce hustoty deformační energie (strain energy density function) W . Derivací této funkce dle deformací se získá napětí. Většinou se při definici této funkce využívají deformační invarianty (strain invariants), které jsou definovány na základě třech protažení (stretch ratios) λ . Deformační invarianty jsou definovány následovně:

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \\ I_2 &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2, \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2. \quad (5.2)$$

Dále λ je definována následně:

$$\lambda = \frac{L}{L_0}, \quad (5.3)$$

kde L deformovaná délka vzorku, L_0 je originální délka vzorku.

Jestliže je materiál perfektně (úplně) nestlačitelný (všechny pryže jsou téměř nestlačitelné) platí, že $I_3 = 0$.

Chování hyperplastických materiálů je velice odlišné a komplikovanější než chování kovových materiálů. Hyperelastické materiály vykazují rozdílné chování při různých typech zatěžování jako je tah, tlak a smyk. Pro získání materiálových konstant by proto měly být dostupné data z různých materiálových testů. Standardně se jedná o tyto materiálové experimenty: jednoosý tah, smyk, dovojosá napjatost (tahová).

Neo-Hookeovský model

Nejjednodušší model pro hyperplastický materiál je Neo-Hookeovský model. Potenciálová funkce W je definována následně:

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + \frac{K}{2}(J - 1)^2, \quad (5.4)$$

kde C_{10} je konstanta, definována jako polovina počátečního smykového modulu, K je počáteční objemový modul, J je poměr mezi deformovaným objemem a původním objemem. Jestliže je materiál nestlačitelný pak $J = 1$ a můžeme rovnici 5.4 přepsat do tvaru:

$$W = C_{10}(I_1 - 3). \quad (5.5)$$

Tento model dává dobré výsledky s experimentem do 40% deformace v tahu a do 90% deformace při čistém smyku. Pokud se předpokládají (dosahují) deformace vyšší je tento model nepoužitelný a je nutno použít modely jiné.

Mooney-Rivlingův model

Mooney-Rivlingův model je rozšířením Neo-Hookeovského modelu a existuje několik forem tohoto modelu, lišících se počtem použitých parametrů. Volbou vhodného počtu parametrů lze dobře proložit získaná experimentální data a tím dokonale popsat chování materiálového modelu. Je dobrou praktikou začít s modelem využívajícím dva parametry a zvyšovat počet parametrů. Nejjednodušší forma Mooney-Rivlingova modelu je:

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + \frac{K}{2}(J - 1)^2, \quad (5.6)$$

kde konstanty C_{10} a C_{01} lze získat proložením dat z experimentálně získané křivky mezi napětím a deformací. Tento model vykazuje dobré výsledky do 100% deformace v případě tahového zatížení a 30% deformace v případě tlakového zatížení. Využitím modelů s vyšším stupněm polynomu vede k lepším výsledkům.

Yeohův model

Yeohův model se liší od předchozích polynomiálních modelů, protože je závislý pouze na I_1 . Z tohoto důvodu můžeme získat materiálové konstanty pouze z jednoosé tahové zkoušky a tím redukovat náklady na ostatních materiálové testy. Bohužel tento materiálový model nevykazuje dobré výsledky v oblasti malých deformací. Stejně tak jako předchozí Mooney-Rivlingův model se tento model vyskytuje v několika variacích. Obecně může být popsán následující rovnicí:

$$W = \sum_{i=1}^N C_{i0}(I_1 - 3)^i + \sum_{k=1}^N \frac{1}{d_k}(J - 1)^{2k}, \quad (5.7)$$

kde C_{i0} a d_k jsou materiálové konstanty. Parametr d_k lze získat z počátečního objemového modulu $K = 2/d_1$. Pozn.: Když $N = 1$ přejde tento model v Neo-Hookeovský model, viz výše.

Ogdenův model

Tento materiálový model vykazuje velmi dobrou schodu s experimentálně získanými daty v oblasti velkých deformací. Aplikovatelnost tohoto materiálového modelu je až do hodnoty 700% deformace. Rovnice má následující tvar:

$$W = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3) + \sum_{k=1}^N \frac{1}{d_k} (J - 1)^{2k}. \quad (5.8)$$

Parametr α umožňuje definovat zpevňování či změkčování materiálu v závislosti na deformaci. Jestliže je parametr menší než 2, materiál bude změkčovat při zvětšování deformace. Naopak při velikosti parametru α větší než 2 dojde ke zpevňování materiálu.

Další materiálové modely

Existují i další modely pro modelování hyperplastického chování materiálů. **Model Arruda-Boyce** je rozšířením Yeohova modelu tak, aby byl platný ve všech úrovních deformací, tedy i v oblasti malých deformací, kde předchází model selhává. Obdobně **Gentův model** (The Gent Model) je také vhodný jak pro modelování malých tak velkých deformací.

Pro modelování hyperplastických materiálů, které vykazují stlačitelné chování a dochází u nich k velkým objemovým změnám, např. pěny, je vhodné použít jiné materiálové modely. Jmenujme například **The Blatz-Ko model**, **The Ogden compressible Foam Model**, aj.

5.1.3 Viskoelastické materiály

Viskoelastické materiály jsou takové, které vykazují jak elastické, tj. vratné deformace, jednak viskozni, tj. nevratné, časově závislé deformace. V případě, že je aplikováno zatížení, elastická deformace zůstává konstantní a viskozni deformace se mění s časem. Rychlost deformace se mění s časem, toto chování je známo pod názvem **tečení (creep)**.

Jestliže je materiál zatížen konstantní deformací, napětí v tělese s časem klesá. Tento jev se nazývá **relaxace napětí**.

Při cyklickém zatěžování dochází ve viskoelastickém materiálu k disipaci energie, narozdíl od elastického materiálu. Vytváří se tedy hysterezní smyčka mezi přetvořením a napětím.

Z důvodu creepu, relaxace napětí a hystereze (vše je závislé na teplotě) je modelování takového chování poměrně komplexní problém.

Viskoelastické modely se hodí například k modelování některých pryží, plastů a syntetických polymerů. Další skupinou je modelování skla a skelných materiálů. Takovýto modely je také možno modelovat, s dostatečnou přesností, i některé živé tkáně, aj.

Existuje velké množství modelů pro popis výše zmíněného chování. Jmenujme například Maxwellův model, Kelvin - Voight, aj.

Maxwellův visko-elastický model

Z pohledů mechanické analogie je možno si chování materiálu, dle tohoto modelu, představit jako sériové zapojení pružiny (představuje elastické chování) a tlumiče (představuje viskozni část deformace). Maxwellův model může být matematicky reprezentován následující rovnicí:

$$\frac{d\varepsilon_t}{dt} = \frac{d\varepsilon_d}{dt} + \frac{d\varepsilon_s}{dt} = \frac{\sigma}{\eta} + \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt}, \quad (5.9)$$

kde ε_s představuje deformaci vztaženou k elastické části, tj. část představovaná

pružinou, ε_d představuje viskózní část, tj. tlumič, E je tuhost materiálu představovaná modulem pružnosti a η je viskozita materiálu.

Kelvin-Voight viskoelastický materiálový model

Z pohledů mechanické analogie je možno si chování materiálu, dle tohoto modelu, představit jako paralelní zapojení pružiny (představuje elastické chování) a tlumiče (představuje viskózní část deformace). Model může být matematicky reprezentován následující rovnicí:

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \eta \frac{d\varepsilon(t)}{dt}. \quad (5.10)$$

Kromě předchozích základních modelů existují i další, složitější a přesnější modely.

5.2 Elasticko-plastické chování materiálů

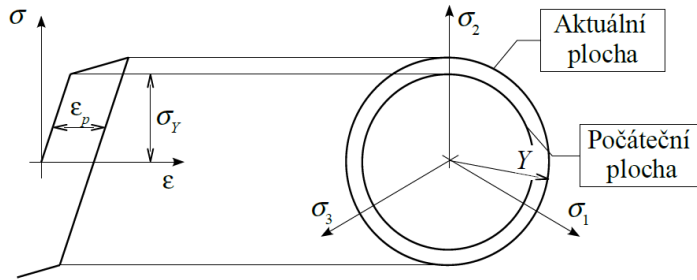
Překročí-li napětí hodnotu meze pružnosti (meze úměrnosti) v materiálu začne vznikat trvalá (nevratná) deformace, která nevymizí po odlehčení zatěžované součásti a projeví se jako trvalá změna tvaru tělesa. Vztah mezi napětím a deformací se stává nelineární.

Při řešení elasto-plastické úlohy je nutné uvažovat historii zatěžování. V některých případech lze zanedbat vliv rychlosti deformace. V tomto případě se uvažuje, že plastická deformace je nezávislá na rychlosti, při jaké dochází k deformaci. Naproti tomu časově závislé modely zahrnují v sobě vliv rychlosti deformace. Pokud je využit takovýto model materiálu a zatížení je pomalé, součást se zdeformuje jinak než při aplikaci stejného zatížení vyšší rychlostí. Proto je nutné před použitím jakéhokoliv modelu správně pochopit zkoumaný problém a správně zvolit, zda je nutno do výpočtu zavést model s uvažováním rychlosti deformace či ne.

5.2.1 Časově nezávislé elasticko-plastické chování

Pro numerické řešení v plasticitě se nejčastěji používá časově nezávislá inkrementální teorie (rate-independent plasticity). Vychází se z poznatků zjištěných u namáhání při jednoosém napětovém stavu, kdy se celková deformace skládá z elastické a plastické složky. Napjatost v bodě tělesa se převádí (stejně jako v pružné oblasti) na ekvivalentní napětí.

Napjatost v bodě tělesa lze znázornit v prostoru hlavních napětí jako vektor $\{\sigma\}$. S narůstajícím zatížením se pohybuje koncový bod tohoto vektoru po křivce zvaná **dráha zatěžování**. Hranice mezi pružným a plastickým stavem je v prostoru hlavních napětí vymezena **plochou plasticity**, popsána skalární funkcí - **podmínkou plasticity**. Zobrazení podmínky plasticity v souřadném systému se říká **plocha plasticity**.



Obr. 5.1 Izotropní zpevnění

Pro ideálně plastický materiál zůstává plocha plasticity neměnná. Kovové materiály při monotónním zatěžování vykazují zpevnění, proto se v podmínce plasticity zadávají další veličiny, tzv. vnitřní proměnné, které umožňují změnu velikosti a polohy plochy plasticity, čímž lze modelovat zpevnění. Rozlišují se tři druhy zpevnění:

- izotropní,
- kinematické,
- kombinované.

Izotropní zpevnění. Při izotropním zpevnění se mění pouze velikost plochy plasticity ("nafukování"). Velikost plochy plasticity je dána poloměrem Y . V podmínce plasticity:

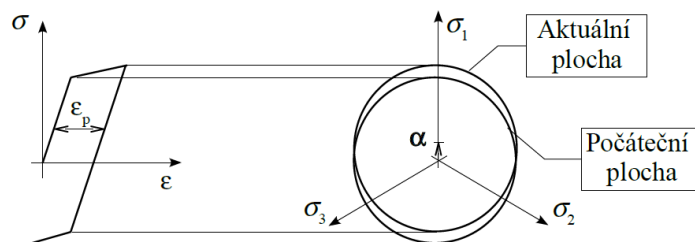
$$f = f(\sigma) - Y = 0. \quad (5.11)$$

Izotropní zpevnění je vhodné používat na modelování monotónních dějů např. kování, tažení, aj. Chování kovových materiálů při cyklickém namáhání nelze správně popsat izotropním zpevněním (nelze zachytit tzv. Bauschingerův efekt). **Kinematické zpevnění.** Při kinematickém zpevnění se mění pouze poloha plochy plasticity. Plocha plasticity:

$$f = f(\sigma - \alpha) - \sigma_Y = 0. \quad (5.12)$$

Kinematické zpevnění je vhodné pro modelování chování při zatížení a odtížení součásti, popřípadě pro modelování zatížení cyklického charakteru. Nicméně při cyklickém zatížení nezachytí tento model cyklické zpevnění či změkčení. Také ho není vhodné používat při simulaci velkých monotónních deformací jako např. již zmíněné tváření.

$$f = f(\sigma - \alpha) - Y = 0. \quad (5.13)$$



Obr. 5.2 Kinematické zpevnění

Kombinované zpevnění. Tento způsob zpevnění kombinuje oba předchozí postupy. Obsahuje jednak izotropní část zpevnění (plocha plasticity se "nafukuje"), jednak kinematickou složku zpevnění (plocha plasticity se posouvá). Kombinovaný model zpevnění zachytí cyklické zpevnění a změkčení při cyklickém zatížení. Kombinované modely zpevnění jsou taky schopny zachytit cyklické tečení (ratcheting).

Existuje mnoho modelů zpevnění. Jednotlivé teorie v inkrementální plasticitě se nejčastěji liší pouze v řídicí rovnici pro změnu kinematického tenzoru α a (nebo) izotropní proměnné Y . Takto získané speciální případy zpevnění se obvykle nazývají modely zpevnění. Obecně se modely zpevnění dělí na:

- Vícevrstvé modely (multilayer, overlay) - Besseling a další.
- Modely s více plochami plasticity (multisurface) - např. Mroz.
- Modely s dvěma plochami plasticity, např. Dafalias-Popov.
- Modely založené na diferenciálních rovnicích - Prager, Armstrong-Frederic, Chaboche, Ohno-Wang, Jiang-Sehitoglu, atd.

5.2.2 Časově závislé elasticko-plastické chování

Jak již bylo zmíněno výše, je možno v některých případech zanedbat rychlost deformace při aplikaci materiálového modelu. V případech kdy to není možno, je nutné zvolit správný materiálový model, který zahrnuje vliv rychlosti deformace.

Cowper-Symonds

Tento materiálový model umožňuje definovat mez kluzu pro izotropní deformační zpevnění v závislosti na rychlosti deformace. Výsledná mez kluzu je definována takto:

$$\sigma = \sigma_Y \left[1 + \left(\frac{\dot{\epsilon}}{C} \right)^{\frac{1}{P}} \right], \quad (5.14)$$

kde $\dot{\epsilon}$ je rychlost deformace, σ_Y je mez kluzu zjištěna při tahové zkoušce za normální rychlosti, C, P jsou Cowper-Symondsovy konstanty.

Johnson-Cook

Tento materiálový model plasticity je závislý jednak na rychlosti deformace a jednak na teplotě. Model se nejlépe hodí pro případy, kdy se velikost deformace liší ve velkém rozsahu a změny teploty způsobené plastickou deformací mohou způsobit změknutí materiálu. Je popsán rovnicí:

$$\sigma_Y = [A + B\varepsilon_p^n][1 + C \ln \varepsilon_p^*][1 - T_H^m], \quad (5.15)$$

kde ε_p je efektivní plastická deformace, ε_p^* je normalizovaná efektivní plastická rychlost deformace, T_H tzv. homogenní teplota. A, B, C, n a m jsou materiálové konstanty.

Existuje mnoho dalších materiálových modelů zahrnujících citlivost na rychlost deformace, např. Perzyna, Pierce, Steinberg aj.

5.3 Další materiálové modely

Existují i další materiálové modely určené pro speciální skupiny materiálů. Jmenujme alespoň některé: paměťové kovy, těsnění, creepové modely, pěny, airbagy, lamináty, aj.

Další informace ohledně problematiky kapitoly lze nalézt v [15], [10], [11], [14] a [13].

Pojmy k zapamatování

Σ

- lineárně elastické chování
- nelineárně elastické chování (hyperelastické)
- viskoelastické chování
- elasticko-plastické chování

Kontrolní otázky

?

1. Definujte lineárně elastické chování materiálů. Jaké znáte typy modelů?
2. Co znamená nelineárně elastické chování materiálů. Jaké znáte typy modelů?
3. Co znamená pojem viskoelastické chování? Jaké znáte materiálové modely pro tento typ chování?
4. Jaký je rozdíl mezi elasto-plastickým časově nezávislým chováním (plasticita) a časově závislým chováním?
5. Definujte pojmy izotropní, kinematické a kombinované zpevnění. Kdy jsou jednotlivé modely použitelné.
6. Jaké existují další modely materiálového chování?

Kapitola 6

Kontakt

Průvodce studiem



Důležitou částí mechaniky těles je problematika kontaktu těles. Ke kontaktu může dojít mezi více tělesy nebo může do kontaktu vstoupit pouze jedno těleso. V oblasti kontaktu dochází k tvorbě kontaktní plochy a velkým koncentracím napětí. Kontaktní plochou se přenáší síly a tyto jednak vytvářejí normálovou tlakovou složku napětí, jednak smykovou složku (v případě přítomnosti tření). Tento fakt může vést k inicializaci trhliny a k únavovému poškození.

Kontaktní problém se dá chápat jako časově proměnná okrajová podmínka. Velikost kontaktní plochy se během výpočtu mění, může vznikat nebo zanikat. Problém kontaktu je z tohoto důvodu silně nelineární.

Cíle



Po prostudování této kapitoly budete znát:

- Základní typy kontaktů.
- Základní algoritmy řešení kontaktního problému.
- Výhody a nevýhody pokutového přístupu k řešení problému.
- Výhody a nevýhody metody Lagrangeových multiplikátorů.

6.1 Úvod

V mnoha úlohách je možno najít případ, kdy část hranice jednoho tělesa vstupuje do kontaktu s jinou částí svojí hranice nebo dochází ke kontaktu s jiným nebo jinými tělesy. Takovýto případ se nazývá kontaktní úloha (kontaktní problém). Kontaktní problém je velmi nelineární problém, protože před kontaktem na hranici neexistuje žádná kinematická podmínka (pouze silová a ta je často nulová), ale během kontaktu zde existuje kinematická vazba, která zabrání penetraci (pronikání) kontaktních hranic (ploch) skrze sebe.

Heinrich Rudolf Hertz byl první, kdo formuloval a řešil problematiku kontaktu. Jeho práce publikovaná v roce 1882 se zabývala kontaktem elastických těles bez uvažování tření mezi tělesy v kontaktu. Byl následován dalšími autory, kteří rozšířili a doplnili danou problematiku. Jednalo se o analytické postupy řešení problematiky kontaktu. S rozvojem numerických metod mechaniky těles byly navrženy další numerické postupy pro řešení dané problematiky.

Rozdělit kontaktní problém můžeme z několika hledisek. Z pohledu studia kontaktu se nejčastěji kontakt dělí na dvě základní skupiny:

- kontakt bez tření,
- kontakt s třením.

Jestliže vstoupí do kontaktu dvě kontaktní plochy, v případě **kontaktu bez tření**, přenáší se mezi styčnými plochami pouze normálové složky síly. Kontaktní povrchy se mohou vzájemně oddělit, ale nemohou penetrovat. Smyková složka sil je nulová. Praktickým příkladem využití tohoto typu kontaktu je např. kontakt mezi dobře mazanými povrchy. **Kontakt se třením** naopak zahrnuje i přítomnost smykových složek napětí.

Jiný typ dělení kontaktu je dle typu kontaktních těles.

- deformovatelné a deformovatelné těleso,
- deformovatelné a tuhé těleso.

Kontakt mezi deformovatelným tělesem, které je v kontaktu s deformovatelným tělesem. Toto je obecný typ kontaktu mezi dvěma přibližně stejně tuhými tělesy. V některých případech, kdy jedno těleso má výraznější tuhost než druhé, je výhodnější definovat jedno těleso jako deformovatelné a druhé jako absolutně tuhé. Příkladem, kdy lze využít takovouto definici kontaktu, je například simulace tváření.

6.2 Kontakt a metoda konečných prvků

Při řešení kontaktního problému je nutné nejprve identifikovat, které body na hranici vcházejí v kontakt. Za druhé je nutno zajistit podmínku nepronikání hranic.

Na hranici kontaktních těles mohou vzniknout, jak bylo zmíněno výše, dva základní typy kontaktu, a to kontakt bez tření nebo kontakt se třením. Nejjednodušší model pro tření je model Coulombův, který je možno zapsat ve tvaru:

$$|p_s| \leq f|p_n|, \quad (6.1)$$

kde f je součinitel tření, p_n je hodnota normálové síly (tlaku) a p_s je tangenciální složka síly (tlaku). Při kontaktu se třením mohou nastat dva případy. Jestliže je velikost p_s menší než limitní hodnota, nedochází k žádnému tangenciálnímu posuvu,

povrchy jsou k sobě "slepeny" (angl. stick). V opačném případě dochází k posuvu ploch a generuje se třecí síla o velikosti zjistitelné ze vzorce 6.1.

Při modelování kontaktů pomocí metody konečných prvků vyvstávají určité problémy. První problém se vyskytuje z důvodu diskretizace hranice. Z tohoto důvodu není možno definovat pro všechny body hranice, protože diskretizovaná hranice není hladká.

Dalším problémem na hranici tvořené konečnými prvky je nepřesná reprezentace normál mezi jednotlivými kontaktními plochami. V konečno-prvkových programech se většinou lze setkat se dvěma základními formulacemi kontaktů. Jedná se o:

- Formulace kontaktu jako speciální kinematická podmínka (node-node contact, gap elementy)
- Obecný kontakt (master - slave)

6.3 Základní algoritmy řešení kontaktního problému

6.3.1 Metoda Lagrangeových multiplikátorů

Tato metoda řešení kontaktních algoritmů je založena na přesném splnění podmínky nepronikání kontaktních povrchů, ve tvaru:

$$[G]\{U\} - \{g_0\} = 0, \quad (6.2)$$

kteřá je zavedena do standardního funkcionálu právě pomocí tzv. Lagrangeových multiplikátorů $\{\lambda\}$. Rovnice tedy nabyde tvar:

$$\Pi = \frac{1}{2}\{U\}^T[K]\{U\} - \{U\}^T\{F\} + \{\lambda\}^T([G]\{U\} - \{g_0\}), \quad (6.3)$$

kde $\{g_0\}$ představuje počáteční kontaktní mezeru mezi odpovídajícími deformačními parametry definovanými maticí $[G]$ na protilehlých površích. Multiplikátory $\{\lambda\}$ tvoří vedle deformačních parametrů $\{U\}$ další nezávislé proměnné, vůči nimž je minimalizován funkcionál Π . Z podmínky stacionární hodnoty Π se získá výsledná soustava, jejíž řešení je řešením kontaktního problému. Fyzikální význam multiplikátorů λ je kontaktní tlak mezi tělesy.

Výhody metody jsou následující:

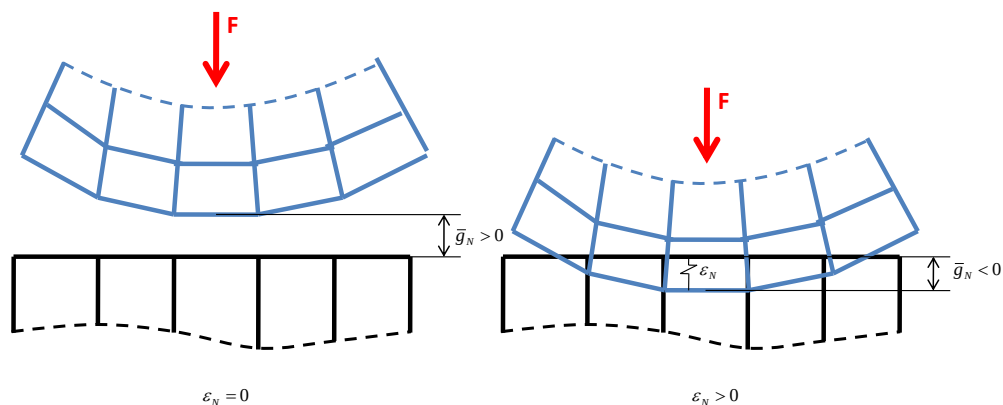
- Přesné splnění podmínky neprostupnosti povrchů.
- Není třeba definovat kontaktní tuhost (na rozdíl od penaltního algoritmu, viz níže).

Nedostatky metody jsou následující:

- Multiplikátory $\{\lambda\}$ představují další neznámé parametry - úloha se zvětšuje.
- Nuly na diagonále matice soustavy a z toho plynoucí numerické problémy.
- Metoda je citlivá na změny stavu v kontaktu.
- Metoda je vhodná spíše pro 2D a menší 3D úlohy.

6.3.2 Pokutový přístup

Základní myšlenkou pokutového přístupu (Penalty Algorithm) řešení kontaktu je skoková změna tuhosti kontaktovaných prvků při penetraci povrchů.



Obr. 6.1 Pokutový přístup

Výsledný tvar základní rovnice MKP s kontakty, které jsou řešeny penaltním algoritmem je následující:

$$([K] + \{\varepsilon\}[G]^T[G])\{U\} = \{F\}, \quad (6.4)$$

kde $\{\varepsilon\}$ je sloupcová matice normálních a tečných tuhostí v diskretních bodech kontaktu, $[G]$ je matice definující odpovídající dvojice deformačních parametrů, které přicházejí při kontaktu do vzájemného styku.

Z předchozího vyplývají následující vlastnosti penaltního algoritmu. Kontakt se projevuje změnou tuhosti prvků matice tuhosti soustavy. Tuhost v kontaktu je nastavena tak, aby při malé penetraci bylo dosaženo rovnováhy $\varepsilon g = F$. Kde F je kontaktní síla přenášená mezi konkrétní dvojicí deformačních parametrů.

Výhody:

- Žádné změny v počtu stupňů volnosti.
- Spolehlivost při iteračním řešení velmi rozsáhlých soustav rovnic.

Nevýhody:

- Vždy je nutná určitá míra penetrace stykových povrchů. Toto je v rozporu s kinematikou skutečných kontaktů.
- Podmíněnost výsledné matice soustavy a tím i rychlost konvergence významně závisí na volbě kontaktní tuhosti.

Další informace ohledně problematiky kapitoly lze nalézt v literatuře [13] a [14].

Pojmy k zapamatování



- kontakt bez tření, s třením
- typy kontaktu deformovatelné - deformovatelné a deformovatelné - ne-deformovatelné těleso
- metoda Lagrangeových multiplikátorů
- pokutový přístup

Kontrolní otázky



1. Rozdělte typy kontaktů dle různých hledisek.
2. Popište problematiku kontaktu v případě MKP.
3. Jaký je algoritmus metody Lagrangeových multiplikátorů. Jaké jsou výhody a nevýhody tohoto přístupu.
4. Popište pokutový algoritmus. Jaké jsou výhody a nevýhody tohoto přístupu.

Příklady k procvičení



1. V odborné literatuře najděte vzorce pro řešení kontaktního problému, které formuloval H. R. Hertz. Ve Vámi zvoleném konečno-prvkovém programu proveďte analýzu kontaktních pnutí vzniklých dotykem hladkých částí povrchů dvou pružných těles. Pružná tělesa volte dle Vašeho uvážení.

Klíč k příkladům k procvičení



1. Získané výsledky (analytická a numerická řešení) srovnajte a vyjasněte případné rozdíly.

Kapitola 7

Chyby a adaptivní techniky



Průvodce studiem

Numerické metody, mezi které patří i metoda konečných prvků, jsou metody přibližné, tzn., musíme a priori předpokládat, že získané řešení není přesné a je zatížené chybami. V této kapitole se seznámíte s chybami a jejich odhadem, které se vyskytují při aplikaci metody konečných prvků. Chybami vznikajících při modelování obecně jsme se zabývali již v kapitole první. V další části textu této kapitoly budou probrány možnosti jak na základě odhadnuté chyby automaticky provést zpřesnění výsledků výpočtu. Dostáváme se k tzv. adaptivním technikám. Budou zde stručně vyloženy jednotlivé postupy a na konci kapitoly bude ukázán jeden z možných postupů odhadu chyby a její aplikaci na problematiku adaptivního síťování.



Cíle

Po prostudování této kapitoly budete znát:

- Jaké jsou chyby při aplikaci metody konečných prvků - tzn. chyby metody.
- Co je to konvergence a podmínky pro to, aby konvergence nastala.
- Míry a odhady chyb řešení.
- Co jsou to adaptivní techniky, jejich dělení, výhody a nevýhody.

7.1 Chyby v MKP

Metoda konečných prvků je přibližná metoda. Chyby, které se vyskytují při použití přibližných metod, můžeme rozdělit do dvou základních skupin:

- Chyby modelu - jaký je rozdíl mezi realitou a naší simulací.
- Chyby metody - rozdíl řešení diskrétního modelu a řešení v kontinuu.

Chybami vznikajícími při modelování jsme se zabývali obecně v první kapitole. Zde se zaměříme na chyby metody. Tyto chyby můžeme rozdělit do tří základních skupin: diskretizační chyba, formulační chyba a numerická chyba.

Diskretizační chyba vzniká nahrazením spojitě oblasti konečným počtem prvků. Záleží tedy na tom, jakým počtem uzlů a elementů nahradíme zkoumanou oblast. Můžeme říct, čím více elementů, tím více se blížíme spojitému řešení problému. Z toho vyplývá, že diskretizační chybu lze ovlivnit správně vytvořenou sítí. Existuje několik možných postupů, jak toho dosáhnou - viz níže v sekci o adaptivních technikách.

Formulační chyba souvisí s volbou typu elementu, přesněji s volbou aproximační funkce nad elementem, která popisuje jeho chování. Je možno volit z různých typů aproximací, prakticky se nejčastěji používá lineární a kvadratická aproximace. Velikost formulační chyby lze snížit správnou volbou elementu a vhodným návrhem sítě (zahuštění).

Numerická chyba souvisí jednak s tím, jak pracuje počítač s reálnými čísly (zaokrouhlování), jednak s tím, že jsou při výpočtů integrací a derivací použity přibližné numerické metody. Je nutné podotknout, že v dobře navrženém konečno-prvkovém programu je numerická chyba zanedbatelná vůči chybě formulační.

7.2 Podmínka konvergence

U všech numerických metod je zásadním požadavkem konvergence. Připomeňme, že u metody konečných prvků musí platit: Při zahušťování sítě konečných prvků se numerické řešení musí blížit k řešení odpovídajícího spojitěho problému. Víme, že přesnost řešení nejvíce ovlivňuje způsob dělení řešené oblasti a vhodná volba aproximačních funkcí prvku. Aby byla splněna podmínka konvergence, musí prvky (aproximační funkce) splňovat určitá kritéria. Jedná se o podmínky spojitosti a úplnosti. Formulujme tato kritéria, pro případ mechaniky, takto:

- **Spojitost** znamená, že funkce popisující chování elementu (v mechanice pružného tělesa posunutí, v teplotních úlohách teplota, atd.) musí být spojitá, jak uvnitř, tak na hranici mezi prvky. Spojitost zajišťuje, že v důsledku zatížení nevznikají mezery mezi prvky. V případě, že jsou v uzlových bodech neznámými pouze funkční hodnoty (posunutí), potom musí být ve všech bodech hranice mezi jednotlivými prvky zajištěna pouze spojitost těchto funkčních hodnot. Mluvíme o tzv. C^0 spojitosti. Pokud jsou v uzlových bodech neznámými i první derivace funkčních hodnot (např. úhel natočení u nosníkových prvků), potom aproximační funkce musí též zajišťovat spojitost v odpovídajících derivacích. Mluvíme o tzv. C^1 spojitosti. Obecně můžeme hovořit o C^n spojitosti. Stručně lze tuto podmínku vyjádřit tak, že na hranici mezi prvky i uvnitř prvku musí aproximované posuvy splňovat minimální požadavky spojitosti, závislé na typu úlohy.

Úplnost lze definovat tak, že chování prvku (aproximační funkce) splňuje následující požadavky:

- Při posuvu prvku jako tuhého tělesa musí zůstat přetvoření (deformace) a z nich plynoucí napětí nulové.
- Prvek musí být schopen přesně popsat stav konstantního přetvoření. Bude-li těleso děleno na neomezeně rostoucí počet elementů, stává se v limitě každý element neomezeně malým. Jestliže deformace na prvku bude konstantní, potom lze zřejmě aproximovat v konstrukci libovolný průběh deformace.

Pokud aproximační funkce splňuje obě dvě výše uvedené podmínky (spojitost a úplnost), říkáme, že prvek je komformní. Konvergence k přesnému řešení je v takovémto případě monotónní. Když není splněna podmínka spojitosti, úloha přesto konverguje k přesnému řešení. Tato konvergence však již není monotónní. V každém případě však prvek musí splňovat podmínku úplnosti. Pokud jsou aproximační funkce spojité, ale ne úplné, řešení konverguje (dokonce monotónně), avšak k chybnému výsledku. K ověření funkčnosti nekomformních prvků (které splňují podmínku úplnosti, avšak nesplňují podmínku spojitosti) se využívá tzv. Patch Test. Provádí se tak, že se z několika prvků vytvoří úloha, ta se zatíží buď posuvy, nebo silami, které odpovídají stavu konstantní deformace. Shoda předpokladu a výsledku výpočtu potvrzuje správnost.

7.3 Míry a odhady chyb řešení

Pokud jsou splněny podmínky spojitosti a úplnosti, úloha při řešení konverguje. Otázkou však zůstává, jaká je chyba výpočtu při daném typu prvku a hustotě sítě. Hovoříme tedy o diskretizační chybě, vzniklé diskretizací řešeného spojitého problému. Metody odhadu chyby můžeme rozdělit do dvou kategorií:

- Metody apriorní - Odhad se provádí před řešením úlohy.
- Metody aposteriorní - Odhad využívá výsledky řešení. Odhad je postaven až na analýze získaných výsledků výpočtu.

Při odhadech chyb v MKP se většinou pracuje s odhadem chyb, založeném na analýze výsledku, tedy s aposteriorním odhadem. Existuje mnoho metod jak odhadnout chybu řešení, založených na různých předpokladech. Je nutno zdůraznit, že pro lineární analýzy existují jiná kritéria než pro analýzy v nelineární oblasti. S odhadem chyb řešení úzce souvisí tzv. adaptivní techniky (algoritmy) pro získání přesnějších výsledků řešení. Této problematice se bude věnovat následující podkapitola.

7.3.1 Normy chyb

Obecně platí, že přibližná řešení pole posuvů, deformací a napětí získané metodou konečných prvků se liší od přesných hodnot. Rozdíl těchto hodnot je chyba řešení. Můžeme tedy definovat následující chyby:

$$\{e_u\} = \{u\} - \{\hat{u}\}. \quad (7.1)$$

V našem případě se jedná o definici chyby posuvů v daném bodě, obecně lze chybu definovat i pro přetvoření a napětí. Jde o definici chyby v jednom bodě. Takováto definice chyby je z praktického hlediska nevýhodná, proto se dává přednost integrálním měřítkům chyb. Existují různé normy chyb. V mechanice je typickým integrálním měřítkem energetická norma. Tu můžeme vyjádřit následujícím zápisem:

$$\|\{e_u\}\| = \sqrt{\int_V \{e_\varepsilon\}^T [D] \{e_\varepsilon\} dV} = \sqrt{\int_V \{e_\varepsilon\}^T [D] \{e_\varepsilon\} dV}. \quad (7.2)$$

Jednodušším integrálním měřítkem je tzv. L2 norma, kterou lze např. pro napětí napsat v následujícím tvaru:

$$\|\{e_u\}\|_{L_2} = \sqrt{\int_V \{e_\varepsilon\}^T \{e_\varepsilon\} dV}. \quad (7.3)$$

Integrální měřítka jsou vztažena na celou oblast řešení. Pro jakoukoliv výše uvedenou normu obecně platí, že čtverec normy lze vypočítat sumací příspěvků jednotlivých prvků:

$$\|\{e_u\}\|^2 = \sum_{i=1}^E \|\{e_u\}\|_i^2. \quad (7.4)$$

Pro srozumitelnější fyzikální interpretaci se lépe pracuje s relativní procentuální chybou. Relativní chyba se vyjadřuje jako podíl příslušné míry v chybách a v exaktních hodnotách:

$$\eta = \frac{\|\{e\}\|}{\|\{u\}\|} \times 100\%, \quad (7.5)$$

$$\|\{e_u\}\| = \sqrt{\int_V \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dV}. \quad (7.6)$$

7.3.2 Odhad chyby

Problém hledání chyby numerického řešení vůči exaktnímu řešení je ten, že v řadě praktických úloh řešení není známo. Logicky vzato pokud bychom takovéto řešení znali, nemuseli bychom vůbec pracovat s přibližnými metodami výpočtu. Na spojitě homogenní oblasti můžeme předpokládat, že pole napětí a deformací je spojitě.

Řešení numerická metodou konečných prvků jsou obecně spojitá pro primární proměnné, což jsou v deformační variantě posuvy, a nespojitá pro odvozené veličiny, tedy deformace a napětí. Předpokládejme, že se nám podaří zkonstruovat nad námi řešenou oblastí spojitá pole hledaných veličin (deformace, napětí). Dobrým odhadem chyby pak je, např. pro pole napětí:

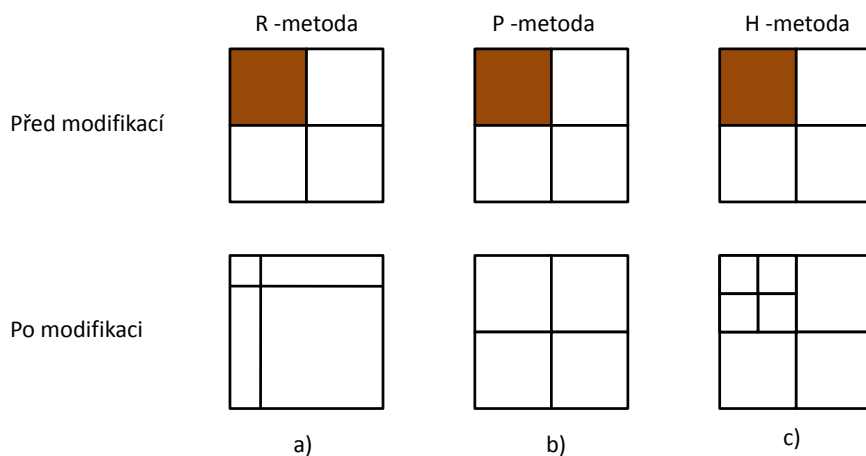
$$\{e_\sigma\} = \{\sigma^*\} - \{\hat{\sigma}\}, \quad (7.7)$$

kde $\{\sigma^*\}$ je právě spojitě pole napětí skonstruované nějakým postupem, viz níže a $\{\hat{\sigma}\}$ je přibližné řešení získané přímo MKP. Jednu z možných technik odhadu spojitěho pole napětí bude ukázaná v kapitole Adaptivní technika dle Zienkiewiczze a Zhua.

7.4 Adaptivní techniky

Kvalita získaných výsledků souvisí s kvalitou navržené sítě. Můžeme tedy postupovat tak, že se snažíme optimálně navrhnout síť konečných prvků a spokojit se s dosaženým výsledkem. Vhodnější je, pokud nám to úloha dovolí a máme dostatek prostředků a času, provést analýzu prvotních výsledků, navrhnout změny v síti a provést nový výpočet. Tento postup je doporučen. Pokud se výsledky nebudou velmi lišit, můžeme předpokládat, že navržená síť je v pořádku. Tento postup opakování výpočtu může být proveden manuálně, ale výhodnější je ho automatizovat - pak hovoříme o adaptivních algoritmech MKP. Výhodou je, že uživatel má možnost zadat vstupní síť hrubou, což šetří čas při přípravě modelu a na základě požadované přesnosti výsledků nechat výpočetní systém pracovat samostatně. Existuje několik postupů jak zpřesnit výsledky výpočtu. Rozdělme je do následujících skupin:

- Zvětšování počtu prvků a uzlů při zachování stejného typu prvků. Zvětšováním počtu prvků se zmenšuje charakteristický rozměr prvků. Pokud jsou splněny potřebné podmínky konvergence, výsledky konvergují k přesnému řešení. Tento postup je nazýván jako h-metoda (h-konvergence). V souvislosti s MKP se můžeme setkat také s pojmem h - verze MKP.
- Rozdělení na prvky zůstává stejné. Přesnost modelu se zvyšuje tím, že se zvyšuje stupeň polynomické aproximace na prvku. Takovýto proces se nazývá p-metoda (p-konvergence). V souvislosti s MKP se můžeme setkat také s pojmem p - verze MKP.
- Kombinací předchozích dvou metod se dostáváme k hp-metodě.
- Tzv. r - metoda. Spočívá v tom, že na primárně vytvořené síti dochází v průběhu adaptace pouze ke změně polohy uzlů tak, aby bylo dosaženo minimální chyby. Tento přístup se příliš neujal.



Obr. 7.1 Skupiny adaptivních technik

Díky aposteriorním odhadům chyb ve výpočtech MKP je možno formulovat adaptivní algoritmus, který představuje následující postup. Po výpočtu na zadané síti se pomocí zadaných a vypočtených veličin určí odhad chyby diskretizace řešení na každém jednotlivém prvku. Prvky, na nichž chyby přesahují předepsanou hodnotu chyby, rozdělíme (h - metoda), nebo na nich zvýšíme stupeň aproximačních funkcí. Proveďte se nové řešení na modifikované síti konečných prvků. Postup se iteračně opakuje až do doby, kdy chyba na všech prvcích neklesne pod předepsanou hodnotu. Tento postup by mohl vést k nekonečné smyčce (zacyklení), a proto může být adaptivní proces zastaven také po určitém, předem předepsaném, počtu iterací.

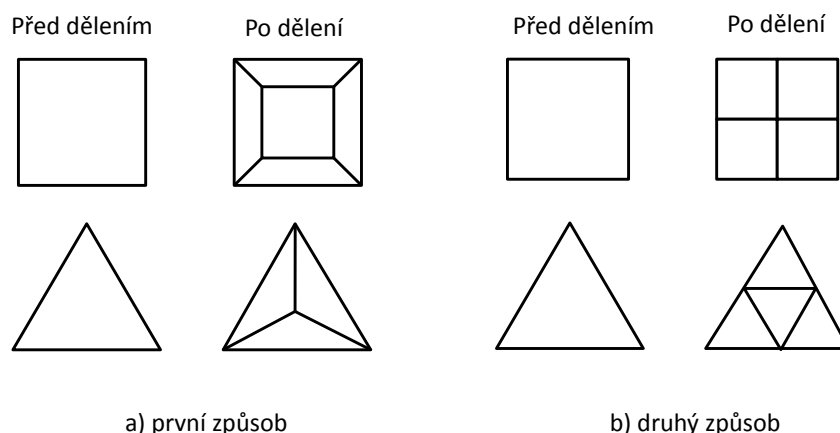
7.4.1 h-verze MKP

Přesítování probíhá změnou velikosti elementu, respektive jeho dělením v globálním nebo lokálním měřítku. Při lokálním dělení sítě elementů se musí respektovat kontinuita sítě a vzájemné působení elementů a uzlů. Při dělení sítě se může postupovat dvěma rozdílnými způsoby:

- Při dělení se nezachovává původní tvar elementů.
- Při dělení se zachovává původní tvar elementů.

Při prvním způsobu dělení se postupuje dle obrázku 7.2. Nezachovává se tedy tvar původních elementů. Při tomto postupu nevznikají konflikty mezi okolními elementy, jelikož hranice s nimi se nemění. Problémy nastávají se skreslením tvaru elementů, vzniká distorze.

Při druhém způsobu dělení se postupuje dle obrázku 7.2. Zachovávají se poměry a tvar původních elementů. Při tomto způsobu dělení je ovšem problém s konflikty



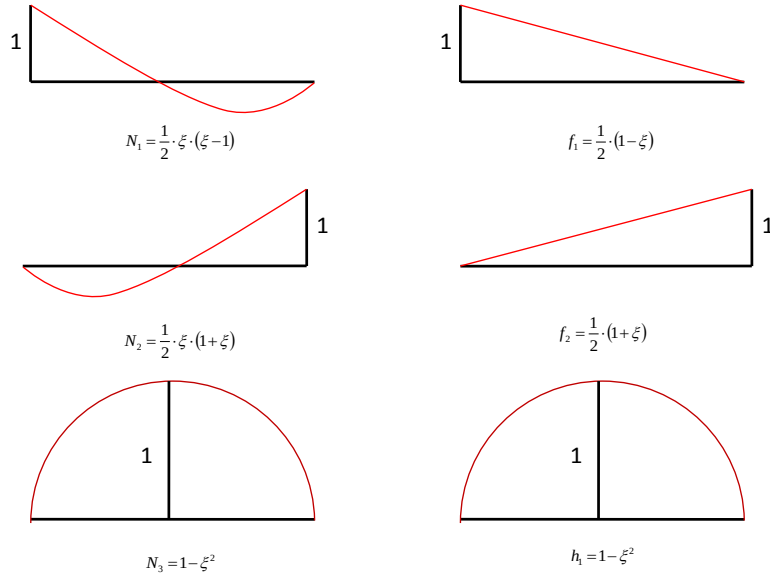
Obr. 7.2 První a druhý způsob dělení

na hranici mezi elementy a uzly. Musí se zajistit spojitost v místě vzniku nových uzlů s původní sítí.

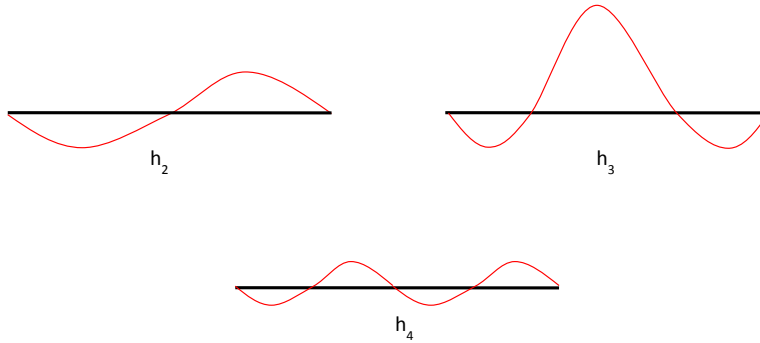
Při dělení elementů (při všech adaptivních technikách) se nesmí zapomenout na správný transfer okrajových podmínek (kinematické, silové, kontaktní, ...) na nově vytvořené elementy.

7.4.2 p-verze MKP

O h-verzi metody konečných prvků již má čtenář dostatek informací, proto se zde stručně zaměříme na informace o p-verzi. Dosud byla kompatibilita posuvů v síti zajišťována prostřednictvím ztotožněním uzlů na přiléhajících elementech. Předpokládá se existence tvarových funkcí, které jsou nenulové vždy jen v jediném uzlu. Lineární kombinací tvarových funkcí je získávána hodnota posuvů nad daným prvkem. Při užívání metody konečných prvků se ukázala možnost zlepšit kvalitu sítě nejen zvyšováním počtu elementů, ale také zvýšením násady elementu. Avšak přidávání dalších stupňů volnosti do jednotlivých uzlů elementu, abychom mohli zvýšit stupeň násady, není nejefektivnější. Jako rozumnější se ukázalo opustit koncept tvarových funkcí a přejít k tzv. funkcím hierarchickým. Funkce jsou navrženy tak, aby byl postup dostatečně efektivní. Navržené aproximační funkce umožňují sestavit matici tuhosti konstrukce příslušnou k vyšší polynomické aproximaci tak, že je přitom plně využita předchozí matice tuhosti. Předchozí matice tuhosti je tak v dalším kroku jen doplněna o další příspěvky. Toho se dosahuje tak, že vyšší aproximační funkce jsou nenulové jen uvnitř konečného prvku a na jeho hranicích, ale mají nulové hodnoty v uzlech. Těmito vyššími aproximačními funkcemi jsou pak doplněny základní lineární báze daného prvku. Rozdíl mezi hierarchickým a izoparametrickým prvkem je patrný z obrázku 7.3. Další hierarchické funkce jsou znázorněny na 7.4



Obr. 7.3 Tvarové funkce pro izoparametrický (kvadratický) a hierarchický prvek



Obr. 7.4 Tvarové funkce pro izoparametrický (kvadratický) a hierarchický prvek

7.4.3 hp-verze MKP

V současnosti se jeví hp-metoda jako nejefektivnější. Rychlost konvergence p-verze záleží na tom, zda přesné řešení úlohy je hladké nebo obsahuje singularity. V případě singularit se rychlejší konvergence dosáhne vhodnou kombinací h a p metody. Shrňme nyní základní fakta. Z předchozího textu vychází, že ve všech případech se jedná o iterační postup s postupným přibližováním k řešení odpovídajícímu spojitému problému. U h - metody jednotlivé iterační kroky odpovídají řešení na postupně modifikované (zahušťované) síti tvořené klasickými konečnými prvky v oblastech, kde byla překročena hodnota konvergenčního kritéria. Naproti tomu řešení

p - metodou představuje každá iterace řešení na neměnné (původní) síti s vyššími stupni aproximačních polynomů na prvcích, které nesplnily stanovené kritérium. Možnost použití relativně hrubé jednoduché sítě s sebou přináší výhodu p - metody z hlediska uživatelské přívětivosti. Topologie sítě nezávisí na charakteru zatížení, ani gradientech napětí. Při výpočtu odpadá opakované vytváření sítě, které je u velkých úloh limitujícím faktorem při praktickém používání automatizovaného adaptivního řešení ve spojení s h - metodou. Na druhou stranu je p - metoda omezena na třídu lineárních úloh, které jsou rozšířeny o kontaktní problémy. Úlohy spadající do oblasti geometricky nelineárních a materiálově nelineárních problémů nejsou dosud dotaženy do komerčně využitelného stavu a to je hlavní důvod, proč se komerční výpočetní systémy MKP opírají převážně o klasickou h - metodu.

7.5 Adaptivní technika dle Zienkiewicze a Zhua

Ukažme si zde jeden z možných postupů odhadu chyby a její aplikaci na problematiku adaptivního síťování. Použijeme již klasický postup dle Zienkiewicze a Zhua v napětích. Tato metoda je vhodná především pro h - verzi MKP. Předpokládejme, že platí vztah 7.7. Určeme nyní hodnotu σ^* . Zienkiewicz a Zhu zavedli předpoklad (intuitivně), že napětí σ^* je interpolováno na prvku stejným způsobem jako posuvy $\hat{u}$. Na izolovaném prvku platí:

$$\{\sigma^*\} = [N]\{r_\sigma\}, \quad (7.8)$$

kde $\{r_\sigma\}$ je vektor v uzlových bodech. Vektor v uzlových bodech zatím neznáme. Získáme ho aplikací váhové funkce:

$$\sum_{i=1}^{ne} \int_{V_i} [N]^T (\sigma^* - \hat{\sigma}) dV = [0]. \quad (7.9)$$

Po dosazení 7.8 do 7.9 a úpravě se získá:

$$r_\sigma = [A]^{-1} \left(\sum_{i=1}^{ne} \int_{V_i} [N]^T [D][B] dV \right) \{r\}, \quad (7.10)$$

kde

$$[A] = \left(\sum_{i=1}^{ne} \int_{V_i} [N]^T [N] dV \right), [\hat{\sigma}] = [D][B]\{r\} \quad (7.11)$$

Výpočet $\{r_\sigma\}$ a z něho $\{\sigma^*\}$ je snadný, pokud provedeme diagonalizaci matice $[A]$. Intuitivně můžeme očekávat, že $\{\sigma^*\}$ je lepší aproximací přesného řešení než $\{\hat{\sigma}\}$. Můžeme pak chybu řešení přibližně vyjádřit ve tvaru rovnice 7.7. Lze dokázat, že výraz 7.7 konverguje ke správné hodnotě. Užitečnost zavedení $\{\sigma^*\}$ se osvědčila jak pro jednorozměrné, dvourozměrné i trojrozměrné úlohy. Matematiky byla později

dokázána správnost daného postupu, který byl navržen intuitivně. Dále se ukázalo, že postup lze dále zobecnit tak, že aproximace $\{\sigma^*\}$ může být odlišná od $\{u\}$.

Strategie zjemňování sítě je závislá na použitém kritériu přesnosti. Obvykle se požaduje, aby bylo dosaženo předepsané procentuální chyby v nějaké normě (energetická, L2 norma, aj.). Požaduje se tedy, aby platil následující vztah:

$$\eta < \bar{\eta}, \quad (7.12)$$

kde $\bar{\eta}$ je maximální přípustná procentuální chyba. Obecně pro většinu inženýrských aplikací lze volit hodnotu okolo 5%. Tento výraz musí platit pro celou řešenou oblast. V optimálně navržené síti můžeme předpokládat, že chyba je rozložena rovnoměrně po všech prvcích. Lze stanovit mez pro normu chyby na každém prvku:

$$\|\{e\}\|_i = \hat{\eta} \sqrt{\frac{\|\{\hat{u}\}\|^2 + \|\{e\}\|^2}{ne}} = \bar{e}_m. \quad (7.13)$$

Hodnota $\|\{e\}\|_i$ se vyčísľuje během výpočtu pro každý prvek. Na jejím základě lze snadno zjistit, kde je třeba zjemnit, popř. kde udělat síť řidší. Pokud platí vztah:

$$\xi_i = \frac{\|\{e\}\|_i}{\bar{e}_m} > 1, \quad (7.14)$$

musí být síť v daném místě zjemněna. Hodnota ξ_i může poskytnout informaci o tom jak prvek zmenšit. Rozměr prvku by neměl být větší než:

$$h = \frac{h_i}{\xi_i^{1/p}}, \quad (7.15)$$

kde h_i je charakteristický rozměr prvku a p je stupeň polynomicke aproximace. Kritéria, která jsou založena na globální energetické normě chyby, však poskytují chabé informace o napětích. Je třeba zvolit i mez pro chybu v napětích $\Delta\sigma$ a požadovat lokálně na každém prvku splnění podmínky:

$$\Delta\sigma_i \leq \Delta\bar{\sigma}. \quad (7.16)$$

Obdobně na základě uvedených veličin lze stanovit:

$$\xi_i = \frac{\Delta\sigma_i}{\Delta\bar{\sigma}}, \quad (7.17)$$

a využít vztahu 7.15. Předností popsaného postupu je jeho jednoduchost a účinnost. Zpravidla již první nebo druhá predikce vede k řešení s předepsanou přesností.

Další informace ohledně problematiky kapitoly lze nalézt v [11] a [13].



Pojmy k zapamatování

- chyby v mkp - diskretizační, formulační a numerická.
- podmínka konvergence - spojitost, úplnost
- odhad apriorní, aposteriorní
- adaptivní techniky - h-verze, p-verze, hp-verze, r-verze.



Kontrolní otázky

1. Jaké typy metody konečných prvků znáte? Definujte je.
2. Co znamená pojem konvergence? Jaké vlastnosti musí mít aproximační funkce, aby byla konvergence zajištěna?
3. Popište jednotlivé adaptivní přístupy v MKP? Jaké jsou výhody a nevýhody?
4. Popište algoritmus adaptivní techniky dle Zienkiewicze a Zhua v napěťové variantě.



Příklady k procvičení

1. Řešte případ koncentrace napětí v okolí kruhového otvoru v "nekonečné" desce. Materiál je předpokládán homogenní a izotropní řídící se Hookeovým zákonem s elastickými konstantami E a μ . Řešení proveďte analyticky.
2. Řešení proveďte numericky, ve Vámi zvoleném konečno-prvkovém software. Při výpočtu využijte jednak h-metodu, jednak využijte p-metodu MKP. Získané výsledky (analytická a numerická řešení) srovnajte a vyjasněte případné rozdíly. Srovnajte nároky (čas, počet iterací, tvar sítě, aj.) na řešení při použití h-metody a p-metody.



Klíč k příkladům k procvičení

1. Řešení lze nalézt v jakékoliv literatuře zabývající se problematikou výpočtů napětí v okolí koncentrátorů.
2. Jedné se o poměrně jednoduchou úlohu a proto se přesnost řešení dá vztáhnout k analytickým výsledkům. Pokuste se dostat s chybou pod „technickou“ přesnost 5%.

Kapitola 8

Nestacionární analýzy v MKP

Průvodce studiem

V této kapitole budou rozšířeny poznatky z oblasti řešení dynamických dějů. Budou zde vysvětleny rozdíly mezi tzv. implicitním a explicitním algoritmem metody konečných prvků. Na konci kapitoly bude provedeno porovnání jednotlivých přístupů a jejich vhodnost při aplikaci na určité typy úloh.



Cíle

Po prostudování této kapitoly budete znát:

- Problematiku modelování nestacionárních dějů.
- Základní rovnice pro nestacionární úlohy.
- Implicitní algoritmus MKP.
- Explicitní algoritmus MKP.
- Výhody a nevýhody jednotlivých postupů.
- Použitelnost jednotlivých algoritmů.



8.1 Základní rovnice

V druhé kapitole bylo zopakováno odvození základní rovnice metody konečných prvků jednak pro stacionární a jednak pro nestacionární úlohu. Zopakujme, že pro nestacionární analýzu má rovnice následující tvar:

$$[M]\{\ddot{Q}\} + [K]\{Q\} = \{F\}, \quad (8.1)$$

kde $[K]$ je matice hmotnosti a $[M]$ je matice hmotnosti. Při sestavení matice hmotnosti se postupuje dvěma možnými směry. Konzistentní matice hmotnosti je "plně" zaplněna. Naproti tomu se v metodě konečných prvků často pracuje s maticí hmotností, jež obsahuje pouze diagonální prvky - diagonální matice hmotnosti.

Tento typ matice se používá s některými algoritmy řešení nestacionárních dynamických úloh, kde bývá výhodnější. Diagonální matice je nejčastěji vytvořena přičtením hodnot mimo diagonálních prvků každého řádku konzistentní matice na diagonálu. Fyzikálně to lze interpretovat jako soustředění hmotnosti přilehlé části prvku do uzlu. Rovnice 8.1 popisuje děj, při kterém nedochází k žádnému útlumu. V mnoha případech je nutno do pohybové rovnice zahrnout i vliv tlumení prostřednictvím matice tlumení $[C]$. Základní rovnice nabývá pak následujícího tvaru:

$$[M]\{\ddot{Q}\} + [C]\{\dot{Q}\} + [K]\{Q\} = \{F\}. \quad (8.2)$$

Matice tuhosti a matice hmotnosti jsou odvozeny exaktně z dobře známých a snadno zjistitelných materiálových vlastností. Připomeňme, že pro případ lineárních úloh stačí znát pouze modul pružnosti E , poissonovo číslo μ a hustota ρ . Podobné odvození matice tlumení je problematické. Na efektu tlumení se podílejí společně, ale různou mírou, následující odlišné vlivy:

- **Materiálové tlumení** je nevratná přeměna části deformační energie v teplo.
- **Konstrukční tlumení** vznikající v důsledku prokluzů a tření mezi jednotlivými částmi soustavy, které jsou spojeny pomocí spojovacích dílů, jako jsou šrouby, čepy, nýty, aj.
- **Tlumení vlivem prostředí**. Tento typ souvisí s rychlostí děje a s viskozitou okolí.

Vyjádření matice tlumení jednoduchým a spolehlivým způsobem z elementárních fyzikálních veličin, popisujících výše uvedené vlivy, je prakticky nemožné. Nejčastěji se proto matice tlumení formuluje jako proporcionálně úměrná maticím tuhosti a hmotnosti, tzv. proporcionálním tlumením. Matice tlumení se dá v případě proporcionálního tlumení zapsat následujícím tvarem:

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K], \quad (8.3)$$

kde konstanty α a β musí být stanoveny experimentálně.

8.2 Implicitní versus explicitní algoritmus

Nestacionární dynamické analýzy lze, podle způsobu integrace pohybových rovnic, rozdělit na:

- analýzy s přímou integrací pohybových rovnic,
- analýzy využívající modální transformaci.

Rovnice 8.1, popř. 8.3, je z matematického hlediska soustavou obecně nelineárních obyčejných diferenciálních rovnic s nekonstantními koeficienty. Dovolí-li charakter modelu soustavu linearizovat, lze ji takzvanou **modální transformací** převést na soustavu navzájem neprovázaných rovnic, které lze řešit samostatně. Modální transformace je při řešení nestacionární dynamiky lineárních systémů téměř vždy efektivnější než metoda přímé integrace. Zde nebude tato technika detailněji rozebírána. Aplikace diferenční metody vede k tzv. **přímému řešení pohybových rovnic**. Přibližné řešení se hledá ve tvaru posloupnosti vektorů posuvů $\{Q\}_n$ na posloupnosti časových okamžiků $t_0, t_1, \dots, t_n$. Nahrazením derivací vektoru posuvů diferenciemi přejde základní pohybová rovnice na soustavu, obecně nelineárních, obyčejných algebraických rovnic s nekonstantními koeficienty. Podle užitého diferenčního schématu se přímá integrace pohybových rovnic dělí na:

- implicitní,
- explicitní.

8.2.1 Implicitní algoritmus

Pro ilustraci je uvažována nestacionární dynamická úloha a pro jednoduchost je zanedbáno tlumení. Pohybová rovnice má tedy tvar 8.1. Předpokládá se znalost řešení v časových okamžicích $t_0, t_1, \dots, t_n$. Úkolem je určit odezvu soustavy v čase t_{n+1} . Časový krok je $\Delta t = t_{n+1} - t_n$. Pohybová rovnice v čase t_{n+1} má tvar:

$$[M]\{\ddot{Q}\}_{n+1} + [K]\{Q\}_{n+1} = \{F\}_{n+1}. \quad (8.4)$$

Z diferenčních formulí lze vyjádřit vztahy pro rychlost:

$$\{\dot{Q}\}_{n+1} = \frac{\{Q\}_{n+1} - \{Q\}_n}{\Delta t}, \quad (8.5)$$

a zrychlení:

$$\{\ddot{Q}\}_{n+1} = \frac{\{\dot{Q}\}_{n+1} - \{\dot{Q}\}_n}{\Delta t}. \quad (8.6)$$

Využitím předchozích rovnic lze vyjádřit zrychlení prostřednictvím posuvů:

$$\{\ddot{Q}\}_{n+1} = \frac{\{\dot{Q}\}_{n+1} - 2\{\dot{Q}\}_n + \{\dot{Q}\}_{n-1}}{\Delta t^2}. \quad (8.7)$$

Dosazením do 8.4 a po provedení úprav se získá rovnice pro určení neznámých posuvů v čase t_{n+1} :

$$([K] + \frac{[M]}{\Delta t^2})\{Q\}_{n+1} = \{F\}_{n+1} + \frac{[M](2\{Q\}_n - \{Q\}_{n-1})}{\Delta t^2}. \quad (8.8)$$

Pokud bude jako dynamická matice tuhosti definován vztah:

$$[\hat{K}] = [K] + \frac{[M]}{\Delta t^2}, \quad (8.9)$$

a pro dynamickou matici zatížení bude definován vztah:

$$\{\hat{F}\} = \{F\}_{n+1} + \frac{[M](2\{Q\}_n - \{Q\}_{n-1})}{\Delta t^2}, \quad (8.10)$$

lze posuvy v čase t_{n+1} získat řešením soustavy:

$$[\hat{K}]\{Q\}_{n+1} = \{\hat{F}\}. \quad (8.11)$$

Formálně je získána rovnice 8.11 podobná rovnici pro řešení stacionárního problému.

V praktických aplikacích se častěji, než ilustrativně použita metoda dopředných diferencí, používají jiné metody. Známa je například Newmarkova metoda. Z implicitních schémat se dnes prakticky používá schéma navržené Hilberem, Hughesem a Taylorem.

Základní rysy implicitního algoritmu jsou následující:

- Využívá diferenční schéma, které vyjadřuje posuvy, rychlosti a zrychlení v čase t_{n+1} pomocí hodnot v čase t_n i v čase t_{n+1} . Odtud se odvozuje název algoritmu, tj. implicitní.
- Schéma je nepodmíněně stabilní, to znamená, že stabilita řešení nezávisí na délce kroku Δt . Stabilitou se míní schopnost udržet malé odchylky dvou řešení, jejichž počáteční podmínky se liší pouze o malou hodnotu. Nutno si uvědomit, že při nevhodné volbě délky časového kroku může být výsledek odlišný od chování reálného systému, který je modelován příslušným výpočetním modelem. Z pohledu výpočtu se však model chová stabilně tzn., nezačne divergovat. Pro nestabilní chování je typické naprosté zhroucení výpočtu během několika časových kroků.
- Při zanedbatelných setrvačných silách je možno ze soustavy 8.11 vypustit matici hmotnosti a problém přejde v řešení úlohy statické. Z tohoto hlediska je možno tedy stacionární statickou úlohu chápat jako limitní případ nestacionárního dynamického problému.
- Při řešení každého časového kroku je třeba opakovaně řešit soustavu 8.11, včetně časově náročné triangularizace dynamické matice tuhosti. Pouze v případě lineární úlohy a konstantním časového kroku je možno triangularizaci dynamické matice tuhosti uskutečnit jen jedenkrát v prvním kroku a v následných krocích opakovat pouze rychlou redukci pravé strany a zpětný chod.

Při použití implicitního algoritmu je snahou aplikovat co nejdelší časové kroky. Velké kroky pak vyžadují použití tenzorů velkých deformací při popisu kinematiky pohybu

a vedou na nutnost uskutečnit v rámci jednotlivých kroků iterace tak, aby byla dostatečně přesně splněna pohybová rovnice 8.10 v každém časovém okamžiku. Využívá se přírůstkově-iteračním algoritmus Newton-Raphsonovy metody.

8.2.2 Explicitní algoritmus

Bude řešena stejná pohybová rovnice jako v předešlé podkapitole a to rovnice 8.1. K aproximaci zrychlení se nyní použije metoda centrálních diferencí, které vyjadřuje posuvy, rychlosti a zrychlení uzlů v čase t_{n+1} pouze pomocí hodnot v čase t_n . Lze tedy napsat následující vztah:

$$\{\ddot{Q}\}_n = \frac{(\{Q\}_{n+1} - 2\{Q\}_n + \{Q\}_{n-1})}{\Delta t^2}. \quad (8.12)$$

Po dosazení toho vztahu do pohybové rovnice v čase t_n se získá následující vztah:

$$[M]\{\ddot{Q}\}_n + [K]\{Q\}_n = \{F\}_n. \quad (8.13)$$

Po provedení úprav se získá rovnice pro posuvy v čase t_{n+1} v následujícím tvaru:

$$\left(\frac{[M]}{\Delta t^2}\right)\{Q\}_{n+1} = \{F\}_n - [K]\{U\}_n + [M]\frac{2\{U\}_n - \{U\}_{n-1}}{\Delta t^2}. \quad (8.14)$$

Základní rysy explicitního algoritmu jsou následující:

- Posuvy v čase t_{n+1} získáváme z pohybové rovnice 8.13, psané pro předchozí časový okamžik t_n , odtud název algoritmu tj. explicitní.
- Nevýhodou explicitní formulace je skutečnost, že explicitní algoritmus je podmíněně stabilní. Stabilního výsledku se dosáhne pouze při dodržení dostatečně malé časové délky časového kroku. Matematicky zapsáno je tuto podmínku možno vyjádřit následující rovnicí:

$$\Delta t < \Delta t_c, \quad (8.15)$$

kde Δt_c je kritická délka časového kroku. Závisí na velikosti elementů v dané síti a rychlosti šíření zvuku (napětových vln) ve vyšetřovaném prostředí. Velikost kritické délky časového kroku je možno určit z rovnice (Courantovo kritérium), která má následující tvar:

$$\Delta t_c = \frac{h}{\sqrt{\frac{E}{\rho}}}, \quad (8.16)$$

kde h je charakteristický rozměr nejmenšího prvku sítě, E je modul pružnosti v tahu a ρ je hustota materiálu. Fyzikálně lze kritickou hodnotu časového kroku definovat jako dobu průchodu napětové vlny nejmenším prvkem sítě.

Proto je nutno při tvorbě sítě vhodně volit její rozměry. Časový krok při aplikaci explicitní metody je asi 100 až 1000 krát menší než časový krok používaný u implicitního algoritmu. Při použití explicitního algoritmu je analyzovaný časový interval rozdělen na mnohem více krátkých časových kroků, jejichž řešení je ale mnohem rychlejší, než v implicitním případě. Vzhledem k malé délce kroku odpadají iterace uvnitř kroku a rovněž popis kinematiky pohybu při velkých deformacích je jednodušší. Explicitní řešení tedy vyžaduje extrémně velký počet kroků při extrémně nízké výpočtové náročnosti kroku.

- Nelze zanedbat matici hmotnosti, algoritmus se stane nepoužitelný. Z této poznámky vyplývá, že na rozdíl od implicitního algoritmu, nelze explicitní algoritmus použít přímo na řešení statických úloh. Toto omezení se však dá obejít. Jednou z možností je, že se uměle zvýší hustota. To vede k poklesu vlastní frekvence a tím ke zvýšení stabilního přírůstku času. Řešení pak sice probíhá s nerealistickými setrvačnými silami, ale jsou zachovány všechny výhody algoritmu. Setrvačné síly (tedy kinetická energie) jsou řádově zanedbatelné vůči přetvárným silám (deformační energie) řešené soustavy. Problém je pak formálně řešen jako dynamický, fakticky se však jedná o statické řešení. Další možností jak obejít toto omezení je, že se statická rovnováha dosahuje jako asymptotický stav přechodového procesu s kritickým tlumením.
- Výhoda explicitního formulace se projeví při použití diagonální matice hmotnosti. V tomto případě se totiž soustava 8.14 rozpadne na samostatné nezávislé rovnice. Z každé z nich lze přímo vyjádřit neznámou už na úrovni prvků bez nutnosti sestavování a následné triangularizace globálních matic tuhosti a hmotnosti. Jeden časový krok explicitního algoritmu je tak o několik řádů rychlejší, než odpovídající krok implicitního řešení. Navíc při zvyšování velikosti úloh narůstá počet operací explicitního řešiče pouze lineárně s počtem neznámých, zatímco u implicitního se navíc projevuje kvadratická závislost na šířce pásu/fronty matice soustavy. To je zvláště u prostorových problémů se složitou topologií sítě výrazné omezení implicitního algoritmu.

8.2.3 Srovnání implicitního a explicitního algoritmu

Shrme-li poznatky uvedené v předchozích odstavcích o implicitním a explicitním algoritmu zjistíme, že explicitní algoritmus je nejvýhodnější použít v případech analýz velmi rychlých dějů na topologicky složitých prostorových sítích. Důležité aplikace, ve kterých se právě uplatňuje explicitní algoritmus metody konečných prvků, jsou například simulace crash testů automobilů, letadel, simulování chování konstrukci při rázech, explozích či průstřelech. Explicitní řešení je tak vhodné použít na simulaci některých technologických postupů jako je např. tažení, protahování, válcování za studena, aj. (i jako kvazistatický děj). Prakticky vždy jsou tyto procesy spojeny s velkými materiálovými i geometrickými nelinearitami. Přetvoření je

dosaženo v obrovském množství inkrementů, což snižuje nároky na integraci konstitutivních rovnic, na kontaktní algoritmus a další výpočtové procedury.

V každém případě může pro některé třídy úloh přechod z implicitní na explicitní řešení znamenat velmi významné, i řádové urychlení času výpočtu. Kromě již vyjmenovaných příčin i existují i další opatření explicitních algoritmů, jako je speciálně ošetřená redukováná integrace prvkových matic. Použití jednobodové integrace oproti plné integraci u prostorových prvků vede k osminásobnému urychlení procesu sestavování prvkových matic, což opět výrazně zkrátí dobu řešení jednoho časového kroku.

Další informace ohledně problematiky kapitoly lze nalézt v [10], [11], [14] a [13].

Pojmy k zapamatování



- stacionární a nestacionární úlohy
- základní rovnice MKP pro nestacionární analýzy
- konzistentní matice hmotnosti
- diagonální matice hmotnosti
- tlumení - materiálové, konstrukční a vlivem prostředí.
- implicitní algoritmus
- explicitní algoritmus

Kontrolní otázky



1. Definujte rozdíly mezi stacionární a nestacionární úlohou.
2. Jaké znáte typy tlumení? Jakým způsobem se dají zavést do výpočtu MKP?
3. Popište implicitní algoritmus.
4. Popište explicitní algoritmus.
5. Porovnejte implicitní a explicitní algoritmus. Kdy je výhodné použít jeden a kdy druhý?

Příklady k procvičení



1. Řešte rozložení plastické deformace při rázovém zatížení při tzv. Taylorově testu. Předpokládá se, že tyč kruhového průřezu narazí rychlostí v na tuhou stěnu. V článku "Johnson, G.R. and Hook, W.H. *A constitutive model and data for metals subjected to large strains, high strain rates and high temperatures*, April 1983, 7th Ballistic Symposium, The Hague, The Netherlands" naleznete potřebné informace o tomto testu. Ve stejném článku jsou rovněž dostupná experimentálně zjištěná data.
2. Řešení proveďte analyticky. Zaveďte potřebná zjednodušení při vytváření modelu.

3. Řešení provedte numericky (ve Vámi zvoleném konečno-prvkovém software).
4. Získané výsledky (analytická a numerická řešení) srovnajte s experimentálními údaji a vyjasněte případné rozdíly.



Klíč k příkladům k procvičení

1. Experimentální data pro porovnání lze nalézt ve výše zmiňovaném článku.

Kapitola 9

Úvod do Metody hraničních prvků

Průvodce studiem



V současné době je v technické praxi jednoznačně nepoužívanější pro řešení inženýrských úloh metoda konečných prvků (MKP). Tato numerická metoda má největší výhodu ve své univerzálnosti. Dostupné výpočtové konečnoprvkové programy jsou již velmi robustními softwarovými balíky. Zejména lineární úlohy mechaniky však lze často efektivněji řešit s využitím metody hraničních prvků (MHP), druhé nejrozšířenější numerické metody mechaniky, případně kombinací obou metod. Cílem této kapitoly je vysvětlení základních principů použití MHP při řešení úloh pružnosti a zdůraznění společných kroků při aplikaci MKP a MHP. Při aplikaci metody hraničních prvků se diskretizuje pouze hranice (povrch) zkoumaného tělesa. Mají-li primární neznámé v metodě hraničních prvků fyzikální význam, mluví se o přímé metodě hraničních prvků, v opačném případě o nepřímé metodě hraničních prvků. V této stati budou vysvětleny základní principy použití přímé varianty MHP pro řešení úloh pružnosti. Vše bude vysvětlováno na rovinné úloze.

Cíle

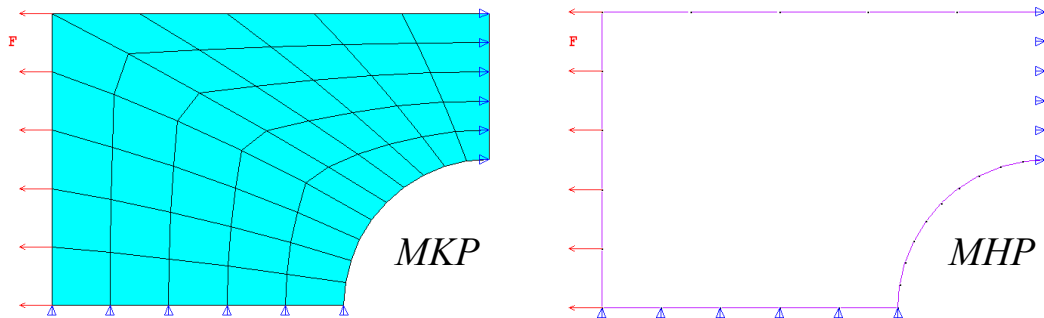


Po prostudování této kapitoly budete znát:

- Základní pojmy v oblasti MHP.
- Bettiho větu.
- Fundamentální řešení, tzv. Kelvinovu úlohu.
- Odvození vztahů MHP pro rovinnou úlohu pružnosti.
- Diskretizace a typy prvků.

9.1 Přímá varianta MHP

Konkrétní fyzikální děje lze popsat diferenciálními rovnicemi, případně soustavou diferenciálních rovnic, spolu s okrajovými podmínkami, odpovídajícími fyzikální realitě. Numerické metody jsou přibližným řešením a v konečném důsledku je cílem



Obr. 9.1 Rozdělení na prvky u MKP a MHP

převedení řešeného problému na řešení soustavy algebraických rovnic [4]. K základní rovnici MHP lze dojít různými přístupy, například metodou vážených reziduí [2], variačním přístupem a Bettiho větou. Pro potřeby řešení úloh pružnosti je elegantním řešením poslední jmenovaná možnost.

9.1.1 Bettiho věta

Uvažujme homogenní elastické isotropní těleso, zatížené vnějšími silami či momenty, které vyvolají pole posuvů (přemístění). Lze předpokládat, že deformace a přemístění tělesa jsou jednoznačně dány veličinami $q_k (k = 1, 2, \dots, N)$, což mohou být posuvy či natočení v některých bodech tělesa. Ke každému z těchto zobecněných posuvů je možné přiřadit zobecněnou sílu Q_k . Připomeňme, že jestliže jsou zobecněné posuvy lineární funkcí zobecněných sil, tedy

$$q_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} Q_j, \quad (9.1)$$

pak platí princip superpozice [5]. Výsledná deformace je součtem dílčích deformací od jednotlivých sil (α_{ij} jsou konstanty). Je vhodné připomenout, že princip superpozice neplatí v případě materiálové i geometrické nelinearity. Když platí princip superpozice, výsledné deformace nezávisí na pořadí, v kterém bylo těleso zatěžováno. Síly lze tedy libovolně rozdělit do dvou skupin:

$$\{Q_I\} = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_k\}^T, \{Q_{II}\} = \{Q_{k+1}, Q_{k+2}, \dots, Q_n\}^T \quad (9.2)$$

Podobně se rozdělí i posuvy. Dolním indexem se u posuvů bude značit skupina posuvů, horním indexem potom skupina sil, která je vyvolala. Např. q_{II}^I zahrnuje posuvy $q_{k+1}, q_{k+2}, \dots, q_n$ vyvolané silami $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$. Nechť je těleso zatížené nejprve skupinou sil I. Pak, za předpokladu, že posuvy jsou lineární funkcí sil (např. $\{Q_I\} = c\{q_{II}^I\}$), skupina sil I vykoná práci

$$\int \{Q_I\}^T \{dq_I^I\} = c \int \{q_I\}^T \{dq_I^I\} = \frac{1}{2} c \{q_I^I\}^T \{q_I^I\} = \frac{1}{2} \{Q^I\}^T \{q_I^I\}, \quad (9.3)$$

Jestliže nyní zatížíme těleso také skupinou sil II , vykonají síly skupiny I práci na posuvech vyvolaných skupinou sil II o velikosti $\{Q^I\}^T \{q_{II}^I\}$. Celková práce je potom

$$W_{I,II} = \frac{1}{2} \{Q^I\}^T \{q_I^I\} + \{Q^I\}^T \{q_{II}^I\} + \frac{1}{2} \{Q^{II}\}^T \{q_{II}^{II}\}, \quad (9.4)$$

Obrátíme-li pořadí zatížení $II \rightarrow I$, analogicky platí

$$W_{II,I} = \frac{1}{2} \{Q^{II}\}^T \{q_{II}^{II}\} + \{Q^{II}\}^T \{q_I^{II}\} + \frac{1}{2} \{Q^I\}^T \{q_I^I\}, \quad (9.5)$$

Za předpokladu platnosti principu superpozice je $W_{I,II} = W_{II,I}$, což vede k matematické formulaci Bettiho věty

$$\{Q^I\}^T \{q_{II}^I\} = \{Q^{II}\}^T \{q_I^{II}\}, \quad (9.6)$$

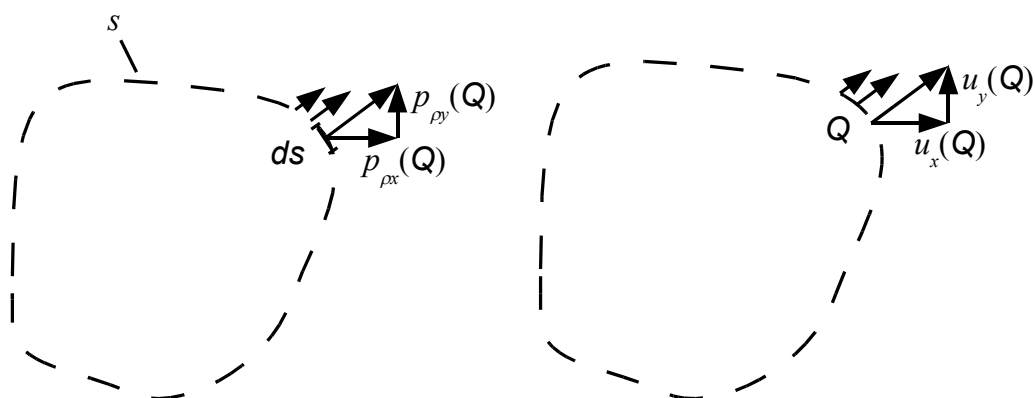
Jestliže jsou známy veličiny související se zatížením I , tj. vektor zobecněných posuvů $\{q_{II}^I\}$ a velikost sil $\{Q_I\}$, které je vyvolaly, pak lze pro danou skupinu sil $\{Q_{II}\}$ určit příslušné posuvy $\{q_I^{II}\}$. Toho se využívá v MHP, kde veličiny skupiny I tvoří pomocnou skupinu pro řešení dané úlohy.

Princip přímé varianty MHP bude vysvětlen na případě rovinné napjatosti později. Nyní si jen uvědomme, že v Bettiho větě vystupují pouze zatížení a posuvy na hranici zkoumané oblasti. Pro rovinnou napjatost jsou to dvojice veličin u_x, u_y (posuvy ve směru osy x a y) a $p_{\rho x}, p_{\rho y}$ (složky povrchových napětí), viz 9.2. Pro pomocné řešení lze označit tyto veličiny jinak, např. U_x, U_y a T_x, T_y . Nutnou podmínkou aplikace Bettiho věty je znalost fundamentálního řešení. V případě úlohy rovinné napjatosti lze použít známé analytické řešení elastické napjatosti na polorovině či v nekonečně velké desce zatížené osamělou silou (Flamantova, Kelvinova úloha [6]).

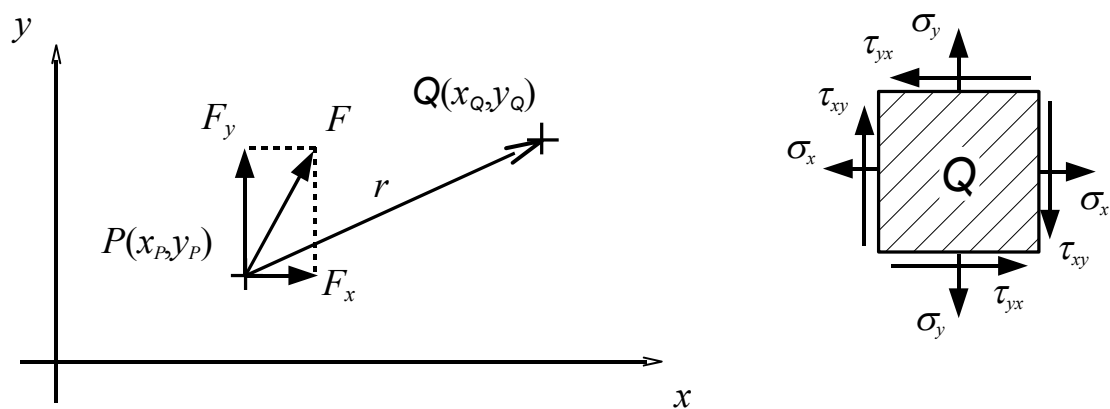
9.1.2 Kelvinova úloha

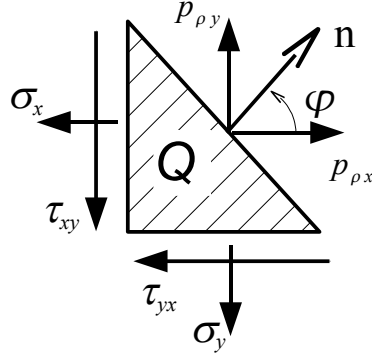
Kelvinovu úlohu pro podmínky rovinné napjatosti představuje nekonečně velké těleso konstantní tloušťky zatížené silou F , která vyvolá v jeho okolí posuvy u_x, u_y a napětí $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$. Kelvinova úloha byla vyřešena analyticky.

Zdrojový bod $P(x_P, y_P)$ a bod $Q(x_Q, y_Q)$, ve kterém určujeme posuvy u_x, u_y a napětí $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ jsou pro MHP voleny na povrchu. Protože absolutní velikost síly F při dosazování do Bettiho věty výsledné rovnice neovlivňuje, lze volit složky F_x, F_y libovolně. Například pro $F_x = 0, 5N/m$ lze vyhledat (např. v literatuře [5]) následující rovnice pro posuvy v bodě Q



Obr. 9.2 Složky povrchových napětí a přemístění u 2D úlohy

Obr. 9.3 Znázornění zdrojového bodu P a bodu Q , kde chceme stanovit napjatost



Obr. 9.4 Složky napětí na povrchu

$$U_{xx} = u_x = \frac{1}{8\pi G(1 - \mu^*)} \left[(3 - 4\mu^*) \ln \frac{1}{r} + \left(\frac{x_Q - x_P}{r} \right)^2 \right], \quad (9.7)$$

$$U_{xy} = u_y = \frac{1}{8\pi G(1 - \mu^*)} \frac{(x_Q - x_P)(y_Q - y_P)}{r^2}, \quad (9.8)$$

kde r je vzdálenost bodů P a Q , viz 9.3, G je modul pružnosti ve smyku, dále $\mu^* = \frac{\mu}{1+\mu}$ pro rovinnou napjatost a pro rovinnou deformaci. Pro přepočet napětí $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ na povrchové složky napětí $p_{\rho x}, p_{\rho y}$ v bodě Q je nutné odvodit z podmínek rovnováhy v ose x a y vztahy

$$p_{\rho x} = \sigma_x \cos \varphi + \tau_{xy} \sin \varphi, \quad (9.9)$$

$$p_{\rho y} = \sigma_y \sin \varphi + \tau_{xy} \cos \varphi, \quad (9.10)$$

kde úhel φ je dán směrem vnější normály dle 9.4.

Následně lze získat pro povrchové složky výrazy

$$T_{xx} = p_{\rho x} = \frac{-1}{4\pi(1 - \mu^*)r^2} \left\{ 2(1 - 2\mu^*)(x_Q - x_P) + [(x_Q - x_P) \cos \varphi + (y_Q - y_P) \sin \varphi] \left[1 - 2\mu^* + \frac{2(x_Q - x_P)^2}{r^2} \right] \right\}, \quad (9.11)$$

$$T_{xy} = p_{\rho y} = \frac{-1}{4\pi(1 - \mu^*)r^2} \left\{ (1 - 2\mu^*)[(y_Q - y_P) \cos \varphi - (x_Q - x_P) \sin \varphi] + (x_Q - x_P) \cos \varphi + (y_Q - y_P) \sin \varphi \right\} \frac{2(x_Q - x_P)(y_Q - y_P)}{r^2}. \quad (9.12)$$

Podobně lze vyjádřit posuvy a napětí při uvažování síly $Fy = 1N/m$, tedy

$$U_{yx} = u_x = \frac{1}{8\pi G(1 - \mu^*)} \frac{(y_Q - y_P)(x_Q - x_P)}{r^2}, \quad (9.13)$$

$$U_{yy} = u_y = \frac{1}{8\pi G(1 - \mu^*)} \left[(3 - 4\mu^*) \ln \frac{1}{r} + \left(\frac{y_Q - y_P}{r} \right)^2 \right], \quad (9.14)$$

$$T_{yx} = p_{\rho x} = \frac{-1}{4\pi(1 - \mu^*)r^2} \{ (1 - 2\mu^*) [(x_Q - x_P) \cos \varphi - (y_Q - y_P) \sin \varphi] + \\ + (x_Q - x_P) \cos \varphi + (y_Q - y_P) \sin \varphi \} \frac{2(x_Q - x_P)(y_Q - y_P)}{r^2}, \quad (9.15)$$

$$T_{yy} = p_{\rho y} = \frac{-1}{4\pi(1 - \mu^*)r^2} \{ 2(1 - 2\mu^*)(y_Q - y_P) + [(x_Q - x_P) \cos \varphi + \\ + (y_Q - y_P) \sin \varphi] [1 - 2\mu^* + \frac{2(y_Q - y_P)^2}{r^2}] \}. \quad (9.16)$$

9.1.3 Rovnice hraničních integrálů pro rovinnou pružnost

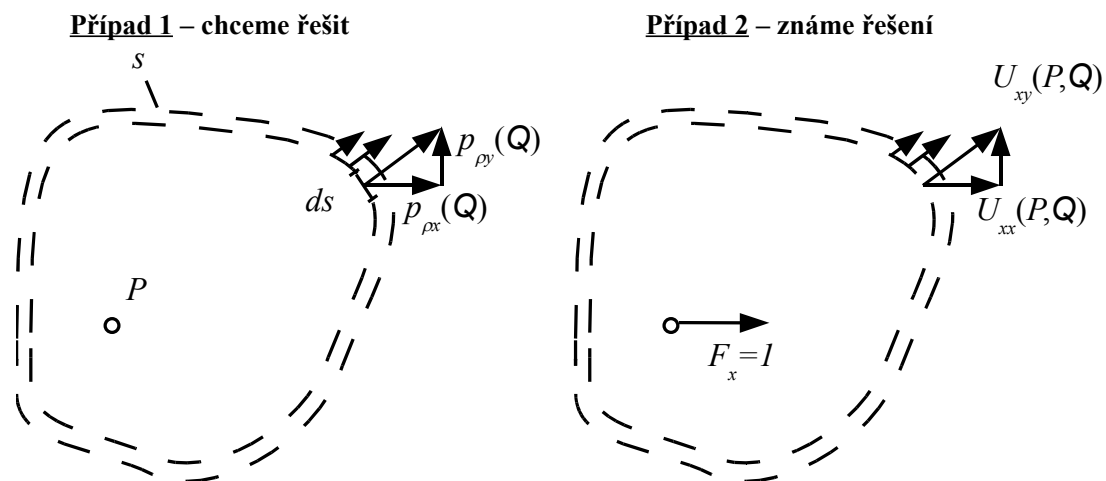
Uvažujme nyní, že chceme řešit úlohu rovinné pružnosti pro těleso konečných rozměrů bez zahrnutí objemových sil. Na jeho povrchu jsou aplikovány okrajové podmínky, přesněji silové ve formě povrchových napětí $p_{\rho x}, p_{\rho y}$ a deformační (kinematické) v podobě známých posuvů u_x, u_y . V každém bodě hranice známe v jednom směru (x či y) buď hodnotu posuvu, nebo odpovídající složku povrchového napětí. Druhá veličina je pro nás neznámá. Chceme-li nyní aplikovat Bettiho větu, potřebujeme fundamentální řešení. Získáme jej z řešení Kelvinovy úlohy, jestliže dvakrát aplikujeme metodu řezu (9.5), viz [7]. Ze vztahů 9.7, 9.8 a 9.11 až 9.16 lze získat posuvy a povrchová napětí na hranici uvažovaného tělesa pro zvolenou polohu zdrojového bodu P , tedy pomocné řešení. Označme úlohu, kterou chceme řešit jako případ 1 a pomocnou úlohu jako případ 2. Při aplikaci Bettiho věty nyní můžeme uvažovat, že k zatížení z případu 1 přidáme zatížení z případu 2. Pak lze dle 9.6 vyjádřit práci povrchových sil případu 1, konanou na posuvech vyvolaných zátěžnými účinky případu 2 (pořadí 1→2), následovně

$$W_{12} = \int_s [p_{\rho x}(Q)U_{xx}(P, Q) + p_{\rho y}(Q)U_{xy}(P, Q)] ds. \quad (9.17)$$

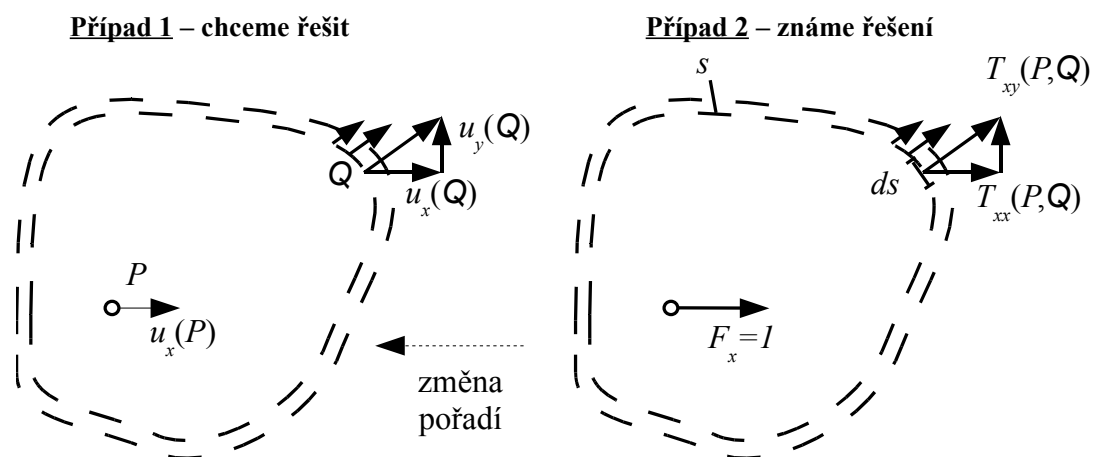
Obdobně můžeme při záměně pořadí případů (pořadí 2 → 1, viz 9.6) vyjádřit práci

$$W_{21} = \int_s [u_x(Q)T_{xx}(P, Q) + u_y(Q)T_{xy}(P, Q)] ds + 1u_x(P). \quad (9.18)$$

Bettiho teorém pak říká, že platí $W_{21} = W_{12}$, což po dosazení 9.17 a 9.18 vede k výrazu



Obr. 9.5 Schéma pro vyjádření Bettiho věty u rovinné úlohy pružnosti



Obr. 9.6 Schéma pro vyjádření Bettiho věty u rovinné úlohy pružnosti

$$u_x(P) = \int_s [p_{\rho x}(Q)U_{xx}(P, Q) + p_{\rho y}(Q)U_{xy}(P, Q)]ds - \int_s [u_x(Q)T_{xx}(P, Q) + u_y(Q)T_{xy}(P, Q)]ds. \quad (9.19)$$

V každém bodě hranice s jsou 2 známé a 2 neznámé z dvojic veličin u_x, u_y , je tedy zapotřebí použít pomocné řešení dvakrát. V dalším textu bude první index i u veličin T_{ij}, U_{ij} odpovídat vždy směru, ve kterém bude síla F_i aplikována v Kelvinově pomocném řešení. Stejným postupem jako byla vyjádřena složka posuvu zdrojového bodu P ve směru osy x lze odvodit výraz pro složku posuvu ve směru osy y , tedy

$$u_y(P) = \int_s [p_{\rho x}(Q)U_{yx}(P, Q) + p_{\rho y}(Q)U_{yy}(P, Q)]ds - \int_s [u_x(Q)T_{yx}(P, Q) + u_y(Q)T_{yy}(P, Q)]ds. \quad (9.20)$$

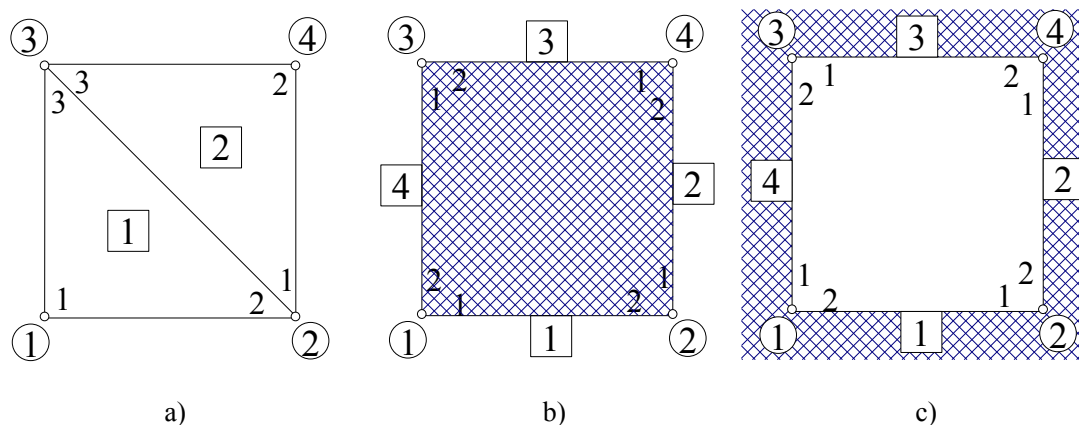
Poslední dvě rovnice lze zapsat tenzorově

$$C_{ij}u_j(P) = - \int_s \sum T_{ij}(P, Q)u_j(Q)ds + \int_s \sum U_{ij}(P, Q)p_{\rho j}(Q)ds, \quad i, j = x, y, \quad (9.21)$$

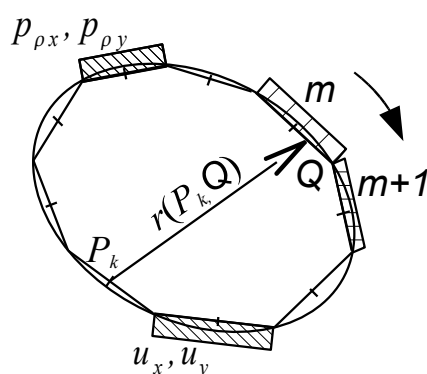
kde konstanta C_{ij} : je rovna 1 pro $i = j$ a 0 pro $i \neq j$, jestliže bod P leží uvnitř řešeného tělesa, je rovna 0, jestliže je bod P vně řešeného tělesa (lze volit nekonečně blízko hranice) může nabývat různých hodnot, jestliže bod P leží na hranici [7]. Rovnici 9.21 budeme nazývat rovnice hraničních integrálů. Zbývá specifikovat způsob jejího využití. Stejně jako u MKP je snahou řešit úlohu jen v konečném počtu bodů (v uzlech), přičemž se aproximuje průběh veličin pomocí jednoduchých interpolačních funkcí.

9.1.4 Diskretizace hranice

Pro numerické řešení křivkových integrálů v rovnici 9.21 je nutné rozdělit hranici na prvky. Srovnání MHP a MKP sítě u čtvercové oblasti je uvedeno na 9.7. V případě MKP tvoří síť dva trojúhelníkové prvky bez meziuzlů 9.7a. Je vhodné zdůraznit, že v případě řešení trojrozměrné úlohy pomocí MHP se použijí při diskretizaci dvojrozměrné prvky a v případě dvojrozměrné úlohy prvky jednorozměrné. U čtvercové oblasti tedy stačí čtyři hraniční prvky 9.7b. Každý prvek je definován dvěma uzly. Zavádí se globální i lokální číslování uzlů a prvky jsou definovány pomocí koincidencí podobně jako u MKP. Na rozdíl od MKP však lokální číslování uzlů definuje také směr vnější normály (směřující ven z materiálu), což je velmi důležité. Pro případ dvojrozměrné úlohy je při lokálním číslování uzlů proti smyslu otáčení hodinových ručiček řešené těleso konečných rozměrů, viz 9.7b, a při číslování ve směru otáčení hodinových ručiček těleso nekonečných rozměrů 9.7c.



Obr. 9.7 Diskretizace 2D oblasti u MKP a MHP

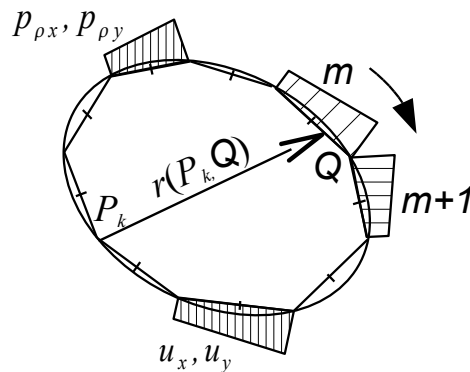


Obr. 9.8 Diskretizace konstantními prvky

Konstantní prvky

Z geometrického hlediska nahrazují konstantní prvky hranici po částech úsečkami, přičemž je uvažována konstantní hodnota aproximovaných veličin na každém prvku. Výsledkem je nespojitý průběh aproximovaných veličin na hranici, jak je zřejmé z obr.8.

Hraniční integrální rovnice 9.21 by měla být splněna ve všech bodech hranice. Jak bude později ukázáno, vystačíme si se splněním Bettiho věty pouze v konečném počtu bodů. Zdrojový bod P se u konstantních prvků postupně umístí vždy do středu k -tého prvku. Křivkové integrály v rovnici 9.21 lze pak přibližně řešit jako součet křivkových integrálů přes všechny prvky hranice. Konstantní prvky se přímo pojí se vznikem MHP (vyskytovaly se např. u předchůdce MHP tzv. Treffzovy metody [3]), na rozdíl od MKP, kde se nepoužívají.



Obr. 9.9 Diskretizace lineárními prvky

Isoparametrické prvky

Jsou to prvky se stejnými aproximačními funkcemi pro aproximaci veličin i popis geometrie. Používají se zejména lineární nebo kvadratické prvky jako u MKP. Pro 2D úlohu je průběh veličin a síť znázorněna na obr.9. Zdrojový bod P se pak obvykle umísťuje do uzlů [7].

9.1.5 Sestavení soustavy rovnic a aplikace okrajových podmínek

Výsledný systém rovnic se získá tzv. *kolokační metodou*. Jelikož je postup sestavení soustavy rovnic a aplikace okrajových podmínek v MHP odlišný pro případ konstantních a isoparametrických prvků, bude vysvětlen pro oba případy odděleně.

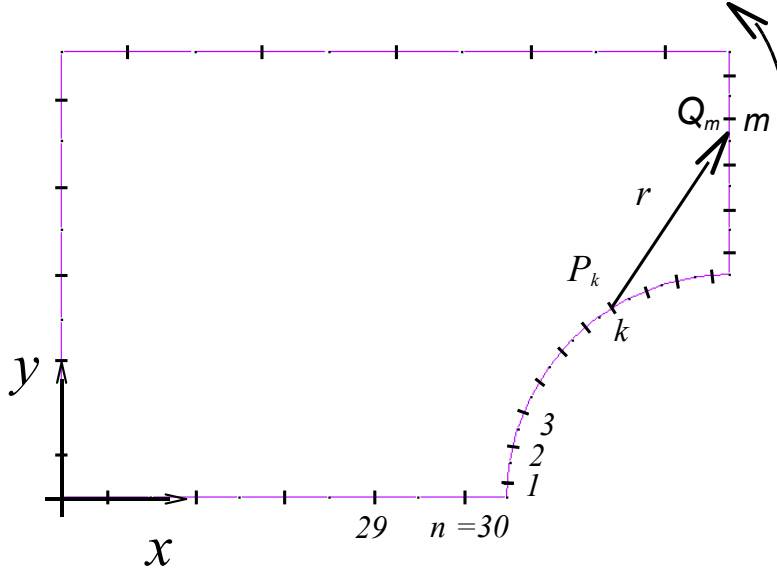
Konstantní prvky

Při diskretizaci konstantními prvky se tradičně uvažuje, že zdrojový bod P je vždy umísťován nekonečně blízko hranice, ale vně řešeného tělesa. Konstanta C_{ij} v rovnici 9.21 je rovna 0 pro všechna i . Po diskretizaci již lze řešit soustavu rovnic získanou z Bettiho věty

$$\int_s \sum T_{ij}(P, Q) u_j(Q) ds = \int_s \sum U_{ij}(P, Q) p_{\rho j}(Q) ds, i, j = x, y, \quad (9.22)$$

pomocí úvahy, že zdrojový bod P je umístěn v konkrétním středu prvku k [5]. Výsledkem jsou dvě hraniční integrální rovnice

$$\sum_{m=1}^n \int_{s_m} \sum T_{ij}(P, Q) ds u_j(Q_m) = \sum_{m=1}^n \int_{s_m} \sum U_{ij}(P, Q) p_{\rho j}(Q) ds, i, j = x, y, \quad (9.23)$$



Obr. 9.10 Znáznornění kolokační metody při použití konstantních prvků

Integrace se realizuje numericky. Bod Q se přemísťuje v každém hraničním prvku po jeho délce s_m a bod P je možné umístit celkem do n bodů (9.10). Získá se tedy soustava $2n$ rovnic pro $2n$ neznámých.

$$[A]\{u\} = [B]\{p_\rho\}. \quad (9.24)$$

Ve výsledné soustavě lineárních rovnic 9.24 jsou $[A], [B]$ maticemi koeficientů (vlivu), $\{u\}$ je vektor posuvů v uzlových bodech a $\{p_\rho\}$ je vektor zatížení v uzlech, přesněji $\{u\} = \{u_{x1}, u_{y1}, \dots, u_{xn}, u_{yn}\}^T$, $\{p_\rho\} = \{p_{\rho x1}, p_{\rho y1}, \dots, p_{\rho xn}, p_{\rho yn}\}^T$.

Matice koeficientů (vlivu) $[A], [B]$ jsou složeny z n submatic

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \dots & A_{n,n} \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & \dots & B_{1,n} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & \dots & B_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n,1} & B_{n,2} & \dots & B_{n,n} \end{bmatrix} \quad (9.25)$$

kde submatice

$$[A_{i,j}] = \begin{bmatrix} \int_{s_j} T_{xx}(P_i, Q) ds & \int_{s_j} T_{xy}(P_i, Q) ds \\ \int_{s_j} T_{yx}(P_i, Q) ds & \int_{s_j} T_{yy}(P_i, Q) ds \end{bmatrix}, i, j = 1 \dots n, \quad (9.26)$$

$$[B_{i,j}] = \begin{bmatrix} \int_{s_j} U_{xx}(P_i, Q) ds & \int_{s_j} U_{xy}(P_i, Q) ds \\ \int_{s_j} U_{yx}(P_i, Q) ds & \int_{s_j} U_{yy}(P_i, Q) ds \end{bmatrix}, i, j = 1 \dots n. \quad (9.27)$$

Před aplikací okrajových podmínek je nutné určit koeficienty matic $[A]$, $[B]$. Křivkové integrály lze při použití konstantních elementů řešit analyticky nebo numericky (např. Gaussovou integrací [7]). Jestliže jsou však body P a Q totožné, je vzdálenost $r = 0$ a výrazy pro U_{ij} mají singularitu (viz Kelvinova úloha). Vztah pro výpočet U_{ij} s naznačenou singularitou lze vždy rozdělit na logaritmickou a nelogaritmickou část. Po převedení na přirozené souřadnice lze pro nelogaritmickou část použít standardní Gaussovu integraci

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^G w_i f(\xi_i), \quad (9.28)$$

kde G je počet integračních bodů, w_i jsou váhové faktory závislé na počtu integračních bodů [8]. Pro logaritmickou část je pak vhodná logaritmická varianta Gaussovy integrační metody

$$\int_0^1 g(\xi) \ln\left(\frac{1}{\xi}\right) d\xi \approx \sum_{i=1}^{\bar{G}} \bar{w}_i g(\xi_i), \quad (9.29)$$

kde $\bar{G}$ je počet integračních bodů a $\bar{w}_i$ jsou váhové faktory obecně odlišné od w_i pro i -tý integrační bod. Podrobnosti lze nalézt např. v [6] a [7]. Koeficienty matice $[B]$ lze tedy získat numericky, u matice $[A]$ je situace složitější vzhledem k vyšší singularitě členů. V tomto případě je výhodné uvažovat, že rovnice 9.24 musí platit i pro jednotkový posuv nezatíženého tělesa (hodnoty jsou pak nulové). Posune-li se tedy těleso o $u_x = 1$, potom musí platit

$$\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & A_{2k-1,2k-1} & A_{2k-1,2k} & \dots \\ \dots & A_{2k1,2k-1} & A_{2k,2k} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{Bmatrix}. \quad (9.30)$$

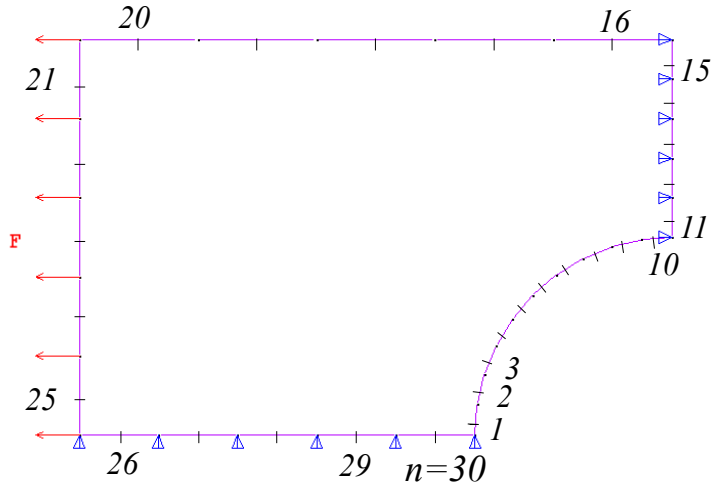
Po roznásobení a úpravě řádku $2k - 1$ a $2k$ se získají výrazy

$$A_{2k-1,2k-1} = - \sum_{m=1, m \neq k}^n A_{2k-1,2m-1}, A_{2k,2k-1} = - \sum_{m=1, m \neq k}^n A_{2k,2m}. \quad (9.31)$$

Podobně lze stanovit i zbývající dva diagonální koeficienty vlivu uvažováním jednotkového posuvu $u_y = 1$ ve všech střezech prvků, tj.

$$A_{2k-1,2k} = - \sum_{m=1, m \neq k}^n A_{2k-1,2m}, A_{2k,2k} = - \sum_{m=1, m \neq k}^n A_{2k,2m}. \quad (9.32)$$

Koeficienty vlivu náležející k diagonálním submaticím $[A_{k,k}]$ pro $k = 1, \dots, n$ je tedy možné jednoduše určit z ostatních koeficientů vlivu, odpovídajících zdrojovému

Obr. 9.11 Aplikace okrajových podmínek $\hat{U}$ ukázkový případ

uzlu P_k . V základní soustavě rovnic 9.24 je zapotřebí určit, které veličiny jsou známy a které jsou neznámy. Postupuje se podobně jako u MKP. Pro každý stupeň volnosti v uzlu prvku známe buď složku posuvu nebo složku povrchového napětí. V ukázkovém příkladě tenké obdélníkové desky s otvorem namáhané tahem dle 9.11 jsou známé veličiny dány okrajovými podmínkami, tzn. posuvy $u_{x11}, \dots, u_{x15}, u_{y26}, \dots, u_{y30}$ a složkami napětí $p_{\rho x1}, p_{\rho y1}, \dots, p_{\rho x10}, p_{\rho y10}, p_{\rho y11}, \dots, p_{\rho y15}, p_{\rho x16}, p_{\rho y16}, \dots, p_{\rho x25}, p_{\rho y25}, p_{\rho x26}, \dots, p_{\rho x30}$. Zbývající protějšky představují hledané neznámé.

Po aplikaci okrajových podmínek se přeskupí veličiny v rovnici 9.24 tak, aby neznámé veličiny byly ve vektoru $\{u'\}$ a aby známé veličiny byly ve vektoru $\{p'_\rho\}$ na pravé straně rovnice. Tím se samozřejmě změní také matice $[A]$ i matice $[B]$ a soustava rovnic bude mít tvar

$$[A']\{u'\} = [B']\{p'_\rho\}. \quad (9.33)$$

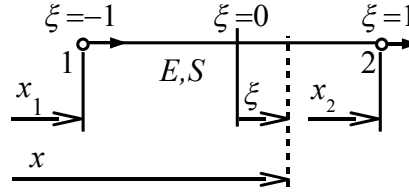
Na pravé straně jsou všechny veličiny známy a tak lze po roznásobení získat konečný tvar

$$[A']\{u'\} = \{b\}. \quad (9.34)$$

Tuto soustavu algebraických rovnic lze řešit například Gaussovou eliminační metodou [7]. Po jejím vyřešení budou známy posuvy i povrchová napětí (v globálním souřadnicovém systému) ve všech uzlech na hranici.

Isoparametrické prvky

U isoparametrických prvků se volí aproximační funkce pro popis geometrie a popis zkoumaných veličin stejné, např. pro lineární jednodimenzionální prvek uvedený na



Obr. 9.12 Lineární 1D prvek

9.12 je geometrická transformace dána relacemi

$$\begin{aligned} x(\xi) &= N_1(\xi)x_1 + N_2(\xi)x_2, \\ y(\xi) &= N_1(\xi)y_1 + N_2(\xi)y_2, \end{aligned} \quad (9.35)$$

a aproximace veličin pak výrazy

$$\begin{aligned} p_{\rho x}(\xi) &= N_1(\xi)p_{\rho x1} + N_2(\xi)p_{\rho x2}, \\ p_{\rho y}(\xi) &= N_1(\xi)p_{\rho y1} + N_2(\xi)p_{\rho y2}, \\ u_x(\xi) &= N_1(\xi)u_{x1} + N_2(\xi)u_{x2}, \\ u_y(\xi) &= N_1(\xi)u_{y1} + N_2(\xi)u_{y2}, \end{aligned} \quad (9.36)$$

kde indexy 1 a 2 odpovídají číslu uzlu, pro které jsou jednotlivé veličiny uvažovány. Připomeňme dále, že tvarové funkce mohou být stejně jako u MKP uspořádány do matice tvarových funkcí

$$[N] = [N_1(\xi), N_2(\xi)] = \left[\frac{1}{2}(1 - \xi), \frac{1}{2}(1 + \xi) \right], \quad (9.37)$$

a jestliže vektory posuvů a povrchových napětí pro c -tý uzel m -tého prvku označíme

$$\{u_c^m\} = \{u_{xc}^m, u_{yc}^m\}^T, \{p_{\rho c}^m\} = \{p_{\rho xc}^m, p_{\rho yc}^m\}^T \quad (9.38)$$

lze rovnice 9.36 následně vyjádřit takto

$$\{p_{\rho}(\xi)\} = \sum_{c=1}^{\nu} N_c(\xi) \{p_{\rho c}^m\}, \quad (9.39)$$

kde ν je počet uzlů na prvek.

Připomeňme obecný tvar Bettiho věty (při umístění bodu P do k -tého uzlu a bodu Q na hranici), tedy

$$[C]\{u(P_k)\} + \int_s [T(P_k, Q)]\{u(Q)\}ds = \int_s [U(P_k, Q)]\{p_\rho(Q)\}ds. \quad (9.40)$$

Po diskretizaci isoparametrickými prvky je možno psát

$$\begin{aligned} [C]\{u(P_k)\} + \sum_{m=1}^n \sum_{c=1}^\nu \int_{-1}^{+1} [T(P_k, \xi)] N_c(\xi) J(\xi) d\xi \{u_c^m\} = \\ = \sum_{m=1}^n \sum_{c=1}^\nu \int_{-1}^{+1} [U(P_k, \xi)] N_c(\xi) J(\xi) d\xi \{p_{\rho c}^m\}, \end{aligned} \quad (9.41)$$

kde n je počet prvků a $J(\xi)$ Jakobián transformace, definovaný stejně jako u konečných prvků. Zkráceně lze zapsat rovnici 9.41 také takto

$$[C]\{u(P_k)\} + \sum_{m=1}^n \sum_{c=1}^\nu [\Delta T_{ck}^m] \{u_c^m\} = \sum_{m=1}^n \sum_{c=1}^\nu [\Delta U_{ck}^m] \{p_{\rho c}^m\}, \quad (9.42)$$

kde submatice

$$[\Delta T_{ck}^m] = \int_{-1}^{+1} [T(P_k, \xi)] N_c(\xi) J(\xi) d\xi, \quad x \quad (9.43)$$

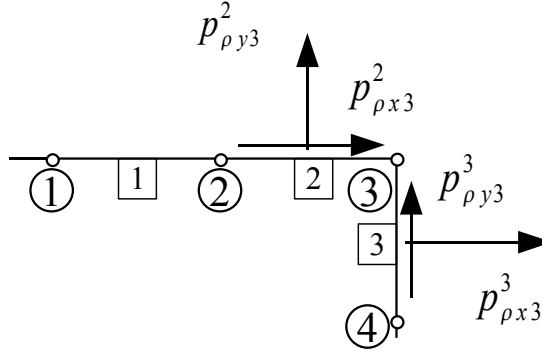
Pakliže se bod P umístí do N uzlů, získá se soustava $2N$ rovnic, viz 9.24 u konstantních prvků, tedy

$$[A]\{u\} = [B]\{p_\rho\}, \quad (9.44)$$

kde

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,N} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N,1} & A_{N,2} & \dots & A_{N,N} \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & \dots & B_{1,N} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & \dots & B_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{N,1} & B_{N,2} & \dots & B_{N,N} \end{bmatrix} \quad (9.45)$$

Prvky submatic $[A_{ij}]$ a $[B_{ij}]$ budeme opět nazývat koeficienty vlivu. Koeficienty matice $[C]$ se objeví pouze na diagonále matice $[A]$, přičemž submatice $[A_{ij}]$ na diagonále (pro $i = j$) se stanoví opět pomocí úvahy jednotkového posuvu celého tělesa, která byla prezentována u konstantních prvků. Nediagonální prvky submatic $[A_{ij}]$ a $[B_{ij}]$ lze opět získat klasickou a logaritmickou variantou Gaussovy integrační metody.



Obr. 9.13 Problém s neurčitostí okrajové podmínky v rohu

Proces sestavení soustavy rovnic 9.44 je odlišný než u konstantních prvků a je svázán s aplikací okrajových podmínek [7]. Jestliže se chceme vyhnout problémům s nejednoznačností u silové okrajové podmínky v rozích oblasti, musíme postupovat podle prvků, nikoliv uzlů. Například pro situaci na 9.13 pro uzel 3 obecně platí, že $p_{\rho x3}^3 \neq p_{\rho x3}^2$, resp. $p_{\rho y3}^3 \neq p_{\rho y3}^2$. Nelze tedy postupovat stejně jako u konstantních prvků.

9.1.6 Výpočet napětí na povrchu

Po právě popsaném výpočtu složek posuvů a složek povrchových napětí v uzlech na hranici je nutné dopočítat složky tenzoru napětí. Zavedme nyní lokální souřadný systém $\bar{x} - \bar{y}$ s osami odpovídajícími tečně a normále k povrchu ve zkoumaném bodě (9.14). Nejprve lze jednoduchou transformací vektoru povrchového napětí z globálního souřadného systému $x - y$ do lokálního souřadného systému získat $\bar{x} - \bar{y}$ dvě složky napětí

$$\sigma_{\bar{y}} = p_{\rho\bar{y}} = p_{\rho x} \cos \alpha + p_{\rho y} \sin \alpha, \quad (9.46)$$

$$\tau_{\bar{x}\bar{y}} = p_{\rho\bar{x}} = -p_{\rho x} \sin \alpha + p_{\rho y} \cos \alpha, \quad (9.47)$$

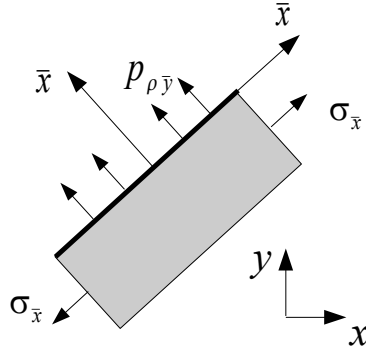
kde úhel α je vyznačen na 9.15.

K stanovení zbývajících složek napětí (u rovinné napjatosti nám vystačí jen tři složky napětí) vyjdeme z Hookeova zákona

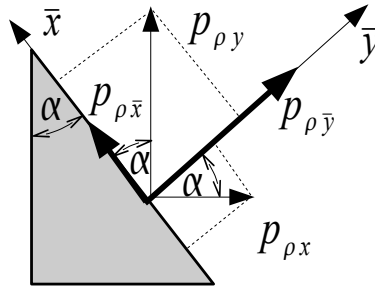
$$\varepsilon_{\bar{x}} = \frac{1}{E}(\sigma_{\bar{x}} - \mu\sigma_{\bar{y}}), \quad (9.48)$$

kde E je modul pružnosti v tahu a μ je Poissonovo číslo. Po úpravě

$$\sigma_{\bar{x}} = E\varepsilon_{\bar{x}} + \mu\sigma_{\bar{y}}. \quad (9.49)$$



Obr. 9.14 Zobrazení složek normálových napětí



Obr. 9.15 Transformace vektoru povrchového napětí

Nejprve je však zapotřebí určit odpovídající přetvoření $\varepsilon_{\bar{x}}$. Opět se tento krok mírně liší při použití konstantních a ěklasických isoparametrických prvků.

Konstantní prvky

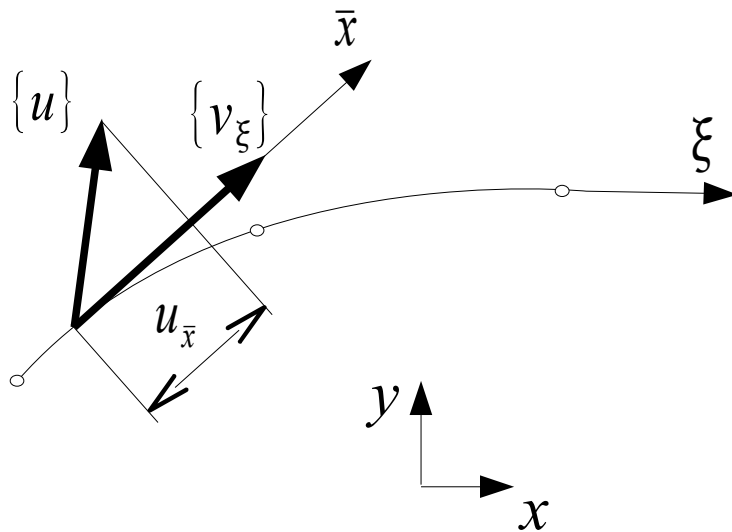
Při uvažování malých deformací lze použít u konstantních prvků jednoduchou diferenční metodu [5], přesněji vyjádřit složku přetvoření pomocí tečných složek posuvů v sousedních prvcích m a $m+1$ (9.8), tedy

$$\varepsilon_{\bar{x}} = \frac{\partial u_{\bar{x}}}{\partial s} = \frac{u_{\bar{x},m+1} - u_{\bar{x},m}}{s_m}, \quad (9.50)$$

kde s_m je vzdálenost středů prvků m a $m+1$.

Isoparametrické prvky

Způsob stanovení je podobný jako u MKP [7]. Připomeňme, že posuvy jsou na m -tém prvku aproximovány vztahem



Obr. 9.16 Zobrazení vektoru posuvů na hranici

$$\{u\} = \sum_{c=1}^{\nu} N_c \{u_c^m\}, \quad (9.51)$$

který byl prezentován v jiné formě rovnicemi 9.36. Pak lze vyjádřit poměrnou deformaci v tečném směru k prvku takto

$$\varepsilon_{\bar{x}} = \frac{\partial u_{\bar{x}}}{\partial \bar{x}} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \{u\}^T \{v_{\xi}\} \right) \frac{\partial \xi}{\partial \bar{x}}, \quad (9.52)$$

kde $\{v_{\xi}\}$ je jednotkový vektor, tečný k prvku, a parciální derivaci

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \{u\} = \left\{ \frac{\partial u_x}{\partial \xi}, \frac{\partial u_y}{\partial \xi} \right\}^T, \quad (9.53)$$

je možno získat pomocí derivací tvarových funkcí

$$\frac{\partial u_x}{\partial \xi} = \sum_{c=1}^{\nu} \frac{\partial N_c}{\partial \xi} \{u_{xc}^m\}, \quad \frac{\partial u_y}{\partial \xi} = \sum_{c=1}^{\nu} \frac{\partial N_c}{\partial \xi} \{u_{yc}^m\}. \quad (9.54)$$

9.1.7 Výpočet složek posuvů a napětí v bodě uvnitř tělesa

Pro stanovení posuvů v bodě umístěném uvnitř tělesa je vhodné ztotožnit zdrojový bod P s tímto zkoumaným vnitřním bodem P_a . Pro nalezení posuvů lze tedy použít přímo rovnice 9.19 a 9.20. Maticově je lze zapsat také takto

$$\{u(P_a)\} = \int_s [U(P_a, Q)] \{p_\rho(Q)\} ds - \int_s [T(P_a, Q)] \{u(Q)\} ds. \quad (9.55)$$

Získané dvě rovnice pro určení posuvů u_x, u_y v bodě tělesa lze řešit numericky, protože všechny veličiny na pravé straně jsou známy. Dokonce jsou částečně eliminovány problémy se singularitami, protože zdrojový bod $P_a(x_P, y_P)$ je uvnitř tělesa, kdežto bod $Q(x_Q, y_Q)$ na jeho hranici. Problém může vzniknout, jestliže je zkoumaný bod velmi blízko hranice. Ze stanovených posuvů u_x, u_y je možné vypočítat napětí $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ a přetvoření $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$. V případě konstantních prvků lze například získat hledané veličiny výpočtem složek posuvů ve třech blízkých bodech a aplikací diferenčního přístupu.

U isoparametrických prvků se pro výpočet přetvoření použijí geometricko deformační vztahy

$$\{\varepsilon\} = [\partial]^T \{u(P_a)\} = \int_s [\partial]^T [U(P_a, Q)] \{p_\rho(Q)\} ds - \int_s [\partial]^T [T(P_a, Q)] \{u(Q)\} ds, \quad (9.56)$$

a nakonec se určí napětí z Hookeova zákona

$$\{\sigma\} = [C] \{\varepsilon\} = \int_s [C] [\partial]^T [U(P_a, Q)] \{p_\rho(Q)\} ds - \int_s [C] [\partial]^T [T(P_a, Q)] \{u(Q)\} ds, \quad (9.57)$$

kde $[C]$ je matice elastických konstant. Zkráceně lze rovnici zapsat ve tvaru

$$\{\sigma\} = \int_s [S(P_a, Q)] \{p_\rho(Q)\} ds - \int_s [R(P_a, Q)] \{u(Q)\} ds. \quad (9.58)$$

Po diskretizaci

$$\{\sigma\} = \sum_{m=1}^n \sum_{c=1}^u [\Delta S_c^m] \{p_{\rho c}^m\} - \sum_{m=1}^n \sum_{c=1}^u [\Delta R_c^m] \{u_c^m\}, \quad (9.59)$$

lze určit koeficienty pro m -tý prvek

$$[\Delta S_c^m] = \int_{s_c} [S(P_a, Q)] N_c ds(Q), [\Delta R_c^m] = \int_{s_c} [R(P_a, Q)] N_c ds(Q), \quad (9.60)$$

opět Gaussovou integrací

$$\begin{aligned} [\Delta S_c^m] &= \sum_{k=1}^K [S(P_a, \xi_k)] N_c(\xi_k) J(\xi_k) w_k, \\ [\Delta R_c^m] &= \sum_{k=1}^K [R(P_a, \xi_k)] N_c(\xi_k) J(\xi_k) w_k, \end{aligned} \quad (9.61)$$

kde K je řád Gaussovy integrace (počet integračních bodů). Problém se singularitou nastává až v případě, kdy je bod P_a umístěn blízko hranice. Přesnost výsledku lze ovlivnit buď zvyšováním řádu Gaussovy integrace nebo dělením prvků, které jsou nejbližší bodu P_a na více subelementů [9].

9.2 Shrnutí

Nyní se již můžeme dostat ke srovnání obou metod. Z aplikačního hlediska lze popsat postup řešení úloh mechaniky u obou numerických metod následovně: U všech

č.	MHP	MKP
1.	Vytvoření geomerie modelu	Vytvoření geomerie modelu
2.	Volba typu prvku	Volba typu prvku
3.	Vytvoření sítě na povrchu	Vytvoření FE sítě (celá oblast)
4.	Stanovení koeficientů vlivu	Sestavení globální mat. tuhosti
5.	Sestavení rovnic, aplikace okrajových podmínek	Sestavení rovnic, aplikace okrajových podmínek
6.	Řešení	Řešení
7.	Výpočet napětí a přetvoření (povrch, uvnitř)	Výpočet napětí a přetvoření

Tab. 9.1 Jednotlivé kroky metod MKP a MHP

kroků, s výjimkou čtvrtého, jsou dílčí cíle u obou metod (MKP a MHP) shodné, jejich způsob naplnění se však mnohdy výrazně liší. Například při řešení 3D úloh si vystačíme u MHP s plochami, u MKP je zapotřebí definice objemů. Vzhledem k tomu, že u MHP je vždy o řád nižší dimenze použitých prvků, je krok tvorby sítě výrazně jednodušší než u MKP. Jestliže u MKP je velmi podstatné sestavení globální matice tuhosti (příp. hmotnosti), u MHP je zcela zásadní stanovení koeficientů vlivu. Předposlední krok je pro obě metody stejný, mohou být aplikovány shodné algoritmy pro řešení získané soustavy algebraických rovnic, avšak je zapotřebí zdůraznit, že matice soustavy je v případě MHP obecně nesymetrická, na rozdíl od MKP, kde je matice tuhosti symetrická s pásovou strukturou. Poslední krok MKP a MHP se již dosti liší. Nejpodstatnější výhody a nevýhody obou metod jsou shrnuty v 9.2. Z dosud uvedeného o obou nejpobulárnějších numerických metodách je zřejmé, že MHP i MKP mají svá specifická úskalí. Matematická náročnost MHP a obtížná implementace je vynahrazena jejími bonusy při aplikaci v praxi. Zejména jednodušší tvorba sítě a nižší počet řešených algebraických rovnic než u MKP jsou lákadly pro její další rozšíření mezi odbornou veřejnost. MHP je vhodná spíše pro řešení úloh mechaniky, kdy je poměr objemu a plochy povrchu řešené oblasti velký.

MHP	MKP
+ o řád nižší dimenze úlohy	+ rozšířenost
+ diskretizuje se pouze hranice	+ i komplikované geometrie těles
+ zkrácení výpočetního času	+ snadnější řešení nelineárních problémů
- obtížnější řešení některých nelineárních úloh	+ mnoho SW produktů
- matematická náročnost	+ symetrická matice tuhosti
- nutná znalost fundamentálního řešení	- diskretizace celého tělesa
- nesymetrická matice tuhosti	- časová náročnost
- okrajové podmínky jen na hranici	

Tab. 9.2 Výhody a nevýhody MKP a MHP

Pojmy k zapamatování



- přímá varianta MHP
- Bettiho věta
- fundamentální řešení
- Kelvinova úloha
- konstatní a izoparametrické prvky

Kontrolní otázky



1. Vysvětlíte Bettiho větu.
2. Co znamená pojem fundamentální řešení a jakou roli hraje v MHP?
3. Co se skrývá pod pojmem Kelvinova úloha?
4. Popište základní kroky metody hraničních prvků.
5. Jaké jsou rozdíly MHP oproti MKP?

Příklady k procvičení



1. Řešte metodou hraničních prvků příklad číslo 2 z kapitoly 2.

Klíč k příkladům k procvičení



1. Výsledky řešení jsou uvedeny v kapitole 2.



Literatura

- [1] LENERT, J. *Úvod do metody konečných prvků*. skriptu VŠB-TU Ostrava, 1999.
- [2] VALCHÁŘOVÁ, J. *Soudobé numerické metody v mechanice kontinua*. SNTL. Praha. 1986.
- [3] BEER, G., WATSON, J.O. *Introduction to Finite and Boundary Element Methods for Engineers*. New York. 1992.
- [4] BROŽ, P., PROCHÁZKA, P. *Metoda okrajových prvků v inženýrské praxi*. SNTL. Praha. 1987.
- [5] TREBUŇA, F., ŠIMČÁK, F. *Odolnosť prvkov mechanických sústav*. Technická univerzita Košice. Košice, Slovensko. 2004.
- [6] BECKER, A.A. *Boundary Element Method in Engineering*. McGraw-Hill. London. 1992.
- [7] BEER, G. *Programming the Boundary Element Method: An Introduction for Engineers*. Wiley, 2001.
- [8] PARÍS, F., CAÑAS, J. *Boundary Element Method - Fundamentals and Applications*. Oxford University Press. New York. 1997.
- [9] GAO, X.W., DAVIES, T.G. *Boundary Element Programming in Mechanics*. Cambridge University Press, 2002.
- [10] BITTNAR, Z., ŠEJNOHA, J. *Numerické metody mechaniky 1*. Vydavatelství ČVUT. Praha. 1992. ISBN 80-01-00855-X.
- [11] BITTNAR, Z., ŠEJNOHA, J. *Numerické metody mechaniky 2*. Vydavatelství ČVUT. Praha. 1992. ISBN 80-01-00901-7.
- [12] OKROUHLÍK, M. *Aplikovaná mechanika kontinua III*. Vydavatelství ČVUT. Praha. 1993. ISBN 80-01-00330-2.
- [13] ZIENKIEWICZ, O., C., TAYLOR, R., L. *The Finite Element Method, Fifth edition*. Butterworth-Heinemann. Oxford. 2000. ISBN 0-7506-5049-4.

-
- [14] BRYAN, J. MAC DONALD, *Practical Stress Analysis wit Finite Elements*. Glasnevin Fublishing. Dublin, Ireland. 2007. ISBN 0-7506-5049-4.
- [15] NEČAS, J., HLAVÁČEK, I. *Úvod do matematické teorii pružných a pružně plastických těles*. SNTL. Praha. 1983.



Rejstřík

- adaptivní techniky, 52, 56
 - dle Zienkiewicze a Zhua, 60
 - h-verze, 57
 - hp-verze, 59
 - p-verze, 58
 - r-verze, 56
- chyba, 52
 - diskretizační, 53
 - formulační, 53
 - norma, 55
 - energetická, 55
 - L2 norma, 55
 - numerická, 53
 - odhad, 54, 55
- creep, 41
- Explicitní algoritmus MKP, 67
 - kritická délka časového kroku, 67
- Implicitní algoritmus MKP, 65
- inkrementální postup, 26
- iterační metoda, 26
- kontakt, 47
 - bez tření, 48
 - metoda lagrangeových multiplikátorů, 49
 - pokutový přístup, 50
 - se třením, 48
- kontinuum
 - popis pohybu, 32
 - Eulerův popis, 33
 - Lagrangeův popis, 33
- konvergence, 53
- spojitost, 53
- úplnost, 54
- matematická formulace, 9
 - diferenciální, 9
 - Beltram-Michelových rovnic, 10
 - Lámeovy rovnice, 9, 11
 - variační, 9
- materiálové modely
 - elasto-plastické, 42
 - časově nezávislé, 42
 - časově závislé, 44
 - hyperelastické, 38
 - Mooney-Rivlingův, 40
 - Neo-Hookovský, 39
 - Ogden model, 40
 - Yeoh model, 40
 - lineárně elastické, 37
 - anizotropní, 38
 - izotropní, 37
 - ortotropní, 38
 - viskoelastické, 41
 - Kelvin-Voight, 42
 - Maxwellův, 41
- matice
 - hmotnosti, 21
 - diagonální, 63
 - konzistentní, 63
 - tlumení, 64
 - tuhosti, 20
 - tvarových funkcí, 18
- metody délky oblouku, 29
- modelování, 1
 - chyby, 2
 - formální, 3
 - konkretizační, 2

- kvalitativní, 2
- složitosti, 2
- model, 2
 - abstraktní, 2
 - fyziký, 2
 - kombinovaný, 2
 - lineární, 4
 - nelineární, 4
- nepřímé řešení, 2
- přímé řešení, 1
- nonlinearity
 - náterové, 37
- nelineární úloha, 24
 - geometrická nelinearita, 31
 - velká přetvoření, 32
 - velké posuvy, 32
- Newton-Raphsonova metoda, 26
- princip virtuálních prací, 11
- relaxace napětí, 41
- rovnice rovnováhy, 10
- silná formulace, 9
- slabá formulace, 9
- tenzor
 - konstitutivní, 8
 - napětí, 34
 - 1. Piollův, 35
 - 2. Piola - Kirchhoffův, 31, 35
 - Cauchyho, 35
 - Lagrangeův, 35
- přetvoření, 34
 - Almasiho, 34
 - Cauchyho, 34
 - Greenův, 34
- teorie pružnosti, 5
- tlumení
 - konstrukční, 64
 - mateiálové, 64
 - proporcionální, 64
 - vlivem prostředí, 64
- variační principy mechaniky, 12