Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava
Západočeská univerzita v Plzni

MATEMATICKÉ POZADÍ MKP V ŘEŠENÍ INŽENÝRSKÝCH ÚLOH

Jan SZWEDA,
Zdeněk PORUBA,
Roman SIKORA,
Ondřej FRANTIŠEK

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Szweda J., Poruba Z., Sikora R., František O.
Matematické pozadí MKP v řešení inženýrských úloh

ISBN

Předmluva

Při řešení inženýrských úloh jsou velmi často zmiňovány a rovněž užívány postupy založené na metodě konečných prvků. Principy metody konečných prvků byly popsány inženýry a matematiky již ve 40. letech 20. století, avšak skutečné rozšíření a praktické využití této metody bylo podmíněno nástupem výpočetní techniky. V tomto období byli inženýři nuceni, pro správné zadání úlohy počítači v podobě programu, proniknout až na samou podstatu metody konečných prvků, tedy užít principy a rovnice od základu popisující tuto metodu, tzn. postupovat stejně, jak je ukázáno v předkládaném studijním textu. S dalším rozmachem výpočetní techniky se cesty matematiků a inženýrů začaly pomalu rozdělovat. Přicházely komerční výpočetní programy pracující sice s metodou konečných prvků, ale které také stále méně dovolovaly a dovolují uživateli "vidět"užitý matematický aparát. Úlohou matematiků, na druhé straně, bylo a je vytvářet algoritmy, které stále rychleji a efektivněji řeší požadovaný matematický problém, který je vlastně přepisem technického problému, řešeného inženýry, do řeči čísel. Současný, stále prudší rozvoj výpočetní technicky a numerických metod vzniklou propast mezi inženýrským a matematickým pohledem stále prohlubuje. Cílem autorů této publikace je inženýrskému oku poodhalit matematické pozadí metody konečných prvků s důrazem na provázanost mezi skutečným inženýrským problémem a matematickým aparátem užitým k jeho řešení. Naopak matematikům odhaluje "zhmotnění"jimi řešených matematických úloh.

Velkým problémem z pohledu inženýrského vnímání je rovněž způsob zápisu a čtení celé řady matematických nástrojů a operací. Autoři se tedy snažili o co nejjednodušší způsob zápisu matematických statí tak, aby za nimi bylo možno rozeznat fyzikální pozadí řešeného problému.

Skriptum vzniklo v rámci projektu Matematika pro inženýry 21. století a svým obsahem doplňuje soubor materiálů pro studium matematiky, které je již od počátku směrováno na uplatnění v soudobém prostředí numerického řešení úloh.

Text byl vysázen pomocí sázecího systému TEX ve formátu pdf LATEX 2_ε.

V Ostravě 30. července 2012 Autoři

Orientace v textu

Každá kapitola má svou pevnou strukturu, která by vám měla pomoci k rychlejší orientaci v textu. Při psaná můžete využít následující „stavební kameny“:

Průvodce studiem

Prostřednictvím průvodce studiem vás chceme seznámit s tím, co vás v dané kapitole čeká, které části by měly být pro vás opakováním, na co je třeba se obzvláště zaměřit atd.

Cíle

V části cíle se dozvíte, co všechno zvládnete a budete umět po prostudování dané kapitoly.

Příklad

Řešené příklady pomáhají k pochopení teoretických poznatků a slouží jako vzor pro řešení cvičení. Jejich konec je označen plným trojúhelníčkem (▲).

Pojmy k zapamatování

Pojmy zde uvedené jsou většinou nové a zcela zásadní. To znamená tyto pojmy nejen pochopit a umět ilustrovat na příkladech, ale také umět vyslovit jejich přesné definice.

Testové otázky - autotest

Odpovězením na tyto otázky si ověříte, zda jste daným pojmům porozuměli, zda si uvědomujete rozdíly mezi zdánlivě podobnými pojmy, zda dovedete uvést příklad ilustrující danou situaci atd.
Tyto otázky jsou zpracovány formou autotestu, čímž si otestujete své znalosti a početní dovednosti z celého objemu látky.

Literatura

Jedná se o literaturu použitou autory při vytváření tohoto studijního materiálu, nikoliv jen o literaturu doporučenou k dalšímu studiu. Pokud některou z uvedených publikací doporučujeme zájemcům, pak je to v textu spolu s odkazem na daný titul jasně uvedeno.

Rejstřík

Rejstřík, uvedený na konci skript, poslouží ke snadné orientaci v textu.

Vložená videa - komentované řešení vybraných příkladů

Studijní text je doplněn několika ukázkami řešení jednoduchých úloh ve vhodných MKP programech (viz Rejstřík: příklad řešení (video)), např. ukázka řešení odstupňovaného prutu. Tato videa jsou přiložena formou samostatných video souborů (formát wmv) a pro jejich spuštění přímo ze souboru pdf je potřeba dodržet podmínky instalace pdf prohlížeče uvedené na web stránkách projektu.

Obsah

Kapitola 1

Aproximační technika metodou vážených reziduí

Průvodce studiem

V této kapitole se seznámíte s metodou vážených reziduí pro přibližné řešení algebraických diferenciálních rovnic. Na příkladu algebraické diferenciální rovnice definujeme pojem vážená rezidua, aproximační a testovací funkce a dle typu zvolené testovací funkce rozlišíme dva přístupy k metodě vážených reziduí. Rovněž si vysvětlíme pojmy silná a slabá formulace pro případ metody vážených reziduí.

Cíle

Po prostudování této kapitoly budeme rozumět pojmům:

- metoda vážených reziduí a vážený průměr reziduálu,
- zkušební funkce, testovací funkce a její vliv na přesnost přibližného řešení,
- merita nejmenších čtverců v metodě vážených reziduí,
- Galerkinova metoda v metodě vážených reziduí,
- silná formulace v metodě vážených reziduí,
- slabá formulace v metodě vážených reziduí.

Nyní se seznámíme s metodou vážených reziduí pro přibližné řešení algebraických diferenciálních rovnic. V prvé řadě budeme uvažovat, že exaktní řešení diferenciální rovnice bude v celém intervalu řešení aproximováno spojitou funkcí.

1.1. Vážená rezidua pro silnou formulaci

Metoda vážených reziduí je užitečná při hledání aproximovaného (přibližně odhadovaného) řešení diferenciálních rovnic (dále také zkr. DR). Pro názornost výkladu předvedeme její princip na řešení konkrétní zvolené diferenciální rovnice. Pro tento účel budeme uvažovat DR[1] pro hledanou funkci $u(x)$ ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} - u = -x \tag{1.1}$$

a hledat její řešení na intervalu $0 \leqq x \leqq 1$ s nulovými okrajovými podmínkami na koncích $u(0) = 0, u(1) = 0$. Na tomto místě nutno podotknout, že zvolená DR má známé přesné exaktní řešení ve tvaru

$$u(x) = C_1 \mathrm{e}^{-x} + C_2 \mathrm{e}^{x} + x, \tag{1.2}$$

kde pro zadané okrajové podmínky nabývají integrační konstanty následující hodnoty:

$$C_1 = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^2 - 1}, \quad C_2 = -\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^2 - 1}.$$

Výsledný tvar řešení zadané okrajové úlohy zvolené DR můžeme tedy zapsat rovnicí

$$u(x) = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^2 - 1} \left(\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{x} \right) + x. \tag{1.3}$$

[1] Pro tento okamžik není fyzikální význam zvolené DR podstatný, a proto případné fyzikální konstanty nabývají v rovnici jednotkových hodnot a byly vynechány i přes to, že nejsou bezrozměrné.

Znalost přesného řešení DR není pro užití aproximačních metod nutná, ovšem je-li obecný tvar řešení znám, pak je často vhodným vodítkem pro volbu adekvátního tvaru přibližného řešení.

Prvním krokem při užití metody vážených reziduí je zavedení tzv. *aproximační funkce* (angl. trial function), kterou volíme tak, aby svým průběhem byla schopna vystihnout hledané řešení, a to včetně splnění požadovaných okrajových podmínek. Zvolená funkce obsahuje vždy neznámé koeficienty, jejichž velikosti budou určeny později. Pro zkušební, aproximační funkci můžeme např. použít

$$\tilde{u} = ax(1-x). \tag{1.4}$$

Funkce (1.4) představuje přibližné řešení uvedené DR. Toto přibližné (aproximační) řešení se obvykle liší od řešení přesného. *Aproximační*, nebo někdy také *zkušební funkce* musí být ovšem zvolena tak, aby splňovala okrajové podmínky dané DR, a tedy musí platit $\tilde{u}(0) = 0, \tilde{u}(1) = 0$. Funkce obsahuje jeden neznámý koeficient a, který je nutno dopočíst. Všeobecně lze říci, že přesnost aproximovaného řešení závisí na volbě zkušební funkce. Byla-li tedy zvolena nějaká aproximační funkce, lze pro ní vypočítat tzv. reziduál, a to zavedením aproximační funkce a jejich derivací do DR.

$$\begin{aligned}
\text{DR:} \quad & 0 = \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} - u + x & \text{aprox.:} \quad & \tilde{u} = ax(1-x) = ax - ax^2 \\
\text{reziduál:} \quad & R = \frac{\mathrm{d}^2 \tilde{u}}{\mathrm{d}x^2} - \tilde{u} + x & & \frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}x} = a - 2ax, \ \frac{\mathrm{d}^2 \tilde{u}}{\mathrm{d}x^2} = -2a \\
& R = \frac{\mathrm{d}^2 \tilde{u}}{\mathrm{d}x^2} - \tilde{u} + x = -2a - ax(1-x) + x & &
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Jelikož se zvolená aproximační funkce $\tilde{u}$ liší od přesného řešení, její reziduál není roven nule pro všechny hodnoty x v rámci intervalu řešení. V dalším kroku bude dopočtena neznámá konstanta a tak, aby zvolená aproximační funkce vyhovovala co nejlépe přesnému řešení. Pro tento účel je tedy zvolena *váhová funkce* w (někdy *testovací funkce*, angl. test/weight function) a je sestaven vážený průměr reziduálu I na intervalu, na kterém je hledáno řešení. Pro nejlepší odhad hledané konstanty a bude hodnota váženého reziduálu rovna nule, tedy

$$\begin{aligned} I = \int\limits_0^1 wR \,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 w \left\{ \frac{\mathrm{d}^2\tilde{u}}{\mathrm{d}x^2} - \tilde{u} + x \right\} \mathrm{d}x = \\ = \int\limits_0^1 w \left\{ -2a - ax(1-x) + x \right\} \mathrm{d}x = 0 \end{aligned} \tag{1.6}$$

V dalším kroku zkoumáme testovací funkci, jelikož výsledná přibližná řešení se budou lišit v závislosti na volbě tzv. testovací funkce, pro kterou je používáno také označení váhová funkce. Metoda vážených reziduí bývá proto klasifikována podle způsobu volby testovací funkce a pro demonstraci budou v následující kapitole uvedeny dva ze způsobů volby testovací funkce (někdy říkáme také metoda vážení reziduí).

1.1.1. Metoda nejmenších čtverců

U metody nejmenších čtverců je jako váhová funkce užita derivace reziduálu podle neznámých koeficientů a dle vztahu

$$w = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}a}. \tag{1.7}$$

Pro naší DR a zvolenou aproximační funkci dosazením obdržíme

$$w = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}a} = \frac{\mathrm{d}(-2a - ax + ax^2 + x)}{\mathrm{d}a} = -2 - x + x^2. \tag{1.8}$$

Dosadíme-li výsledek do rovnice integrálu váženého reziduálu (1.6) získáme vztah pro určení hodnoty konstanty a

$$\begin{aligned}\int_0^1 wR\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(-2 - x + x^2\right)\left(-2a - ax + ax^2 + x\right)\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_0^1 \left(4a + 4ax - 3ax^2 - 2ax^3 + ax^4 - 2x - x^2 + x^3\right)\,\mathrm{d}x = \\ &= \left(4a + 2a - a - \frac{a}{2} + \frac{a}{5} - 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) - 0 = 0, \end{aligned} \tag{1.9}$$

odkud vyčíslením získáme $a = 65/282 \approx 0,2305$ a pro zvolené přibližné řešení můžeme psát

$$\tilde{u} = \frac{65}{282}\,x\,(1 - x). \tag{1.10}$$

1.1.2. Galerkinova metoda

U Galerkinovy metody je váhová funkce odvozena od tvaru zvolené aproximační funkce, a to její derivací dle vztahu

$$w = \frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}a}. \tag{1.11}$$

Pro naší DR a zvolenou aproximační funkci dosazením obdržíme

$$w = \frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}a} = \frac{\mathrm{d}(ax(1-x))}{\mathrm{d}a} = x(1-x) = x - x^2. \tag{1.12}$$

Dosadíme-li výsledek opět do rovnice integrálu váženého reziduálu (1.6) získáme vztah pro určení hodnoty konstanty a:

$$\begin{aligned}\int_0^1 wR\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(x - x^2\right)\left(-2a - ax + ax^2 + x\right)\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_0^1 \left(-2ax + ax^2 + 2ax^3 - ax^4 + x^2 - x^3\right)\,\mathrm{d}x = \\ &= \left(-a + \frac{a}{3} + \frac{a}{2} - \frac{a}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) - 0 = 0,\end{aligned} \tag{1.13}$$

odkud vyčíslením získáme $a = 5/22 \approx 0,2272$ a pro zvolené přibližné řešení můžeme psát

$$\tilde{u} = \frac{5}{22}\,x\,(1-x). \tag{1.14}$$

Získané aproximační výsledky můžeme srovnat jednak vzájemně, ale také s přesným řešením DR, např. na základě hodnoty u pro $x = 0,5$, kdy obdržíme:

Přesné řešení	Aprox. nejmenší čtverce	Aprox. Galerkin
0,0566	0,0576	0,0568

Obsah
16. strana ze 131
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka/Okno

1.1.3. Zpřesnění aproximačního řešení

Za účelem zpřesnění přibližného řešení lze aproximační funkci rozšířit o další členy, např. $\tilde{u} = a_1 x(1-x) + a_2 x^2(1-x)$. Tato aproximační funkce obsahuje dvě neznámé konstanty, jejichž hodnoty je nutno dopočítat. Při výpočtu opět uplatníme vážená rezidua a budeme postupovat stejně jako u první aproximační funkce, tedy nejdříve sestavíme reziduum

$$R = \frac{\mathrm{d}^2\tilde{u}}{\mathrm{d}x^2} - \tilde{u} + x \quad \text{a aprox.: } \tilde{u} = a_1 x(1-x) + a_2 x^2(1-x),$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\tilde{u}}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}^2(a_1 x(1-x) + a_2 x^2(1-x))}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}(a_1 - 2a_1 x + 2a_2 x - 3a_2 x^2)}{\mathrm{d}x} = \\ = (-2a_1 + 2a_2 - 6a_2 x)$$

$$R = (-2a_1 + 2a_2 - 6a_2 x) - (a_1 x(1-x) + a_2 x^2(1-x)) + x = \\ = a_1(-2 - x + x^2) + a_2(2 - 6x - x^2 + x^3) + x. \quad (1.15)$$

Pro výpočet dvou konstant a_1, a_2 potřebujeme stejný počet testovacích funkcí, tedy dvě, které získáme dle příslušných metod parciálními derivacemi podle hledaných konstant. V případě metody nejmenších čtverců obecně platí:

$$w_i = \frac{\partial R}{\partial a_i}, \quad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, n\,, \quad (1.16)$$

kde R je reziduum a a_i jsou neznámé konstanty v aproximační funkci $\tilde{u}$. V uvedeném případě lze psát

$$
\begin{aligned}
w_1 &= \frac{\partial R}{\partial a_1} = -2 - x + x^2, \\
w_2 &= \frac{\partial R}{\partial a_2} = 2 - 6x - x^2 + x^3.
\end{aligned}
$$

V případě Galerkinovy metody je obecný předpis pro testovací funkci následující:

$$
w_i = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial a_i}, \quad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, n\,, \tag{1.17}
$$

kde R je reziduum a a_i jsou neznámé konstanty ve zvolené aproximační funkci $\tilde{u}$. V uvedeném případě lze psát

$$
\begin{aligned}
w_1 &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial a_1} = x(1 - x), \\
w_2 &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial a_2} = x^2(1 - x).
\end{aligned}
$$

Následným dosazením obou váhových funkcí do vztahu pro vážené reziduály bychom obdrželi

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int\limits_0^1 w_1 R \,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 w_1 \left\{ \frac{\mathrm{d}^2 \tilde{u}}{\mathrm{d}x^2} - \tilde{u} + x \right\} \mathrm{d}x = 0, \\
I_2 &= \int\limits_0^1 w_2 R \,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 w_2 \left\{ \frac{\mathrm{d}^2 \tilde{u}}{\mathrm{d}x^2} - \tilde{u} + x \right\} \mathrm{d}x = 0.
\end{aligned} \tag{1.18}
$$

Integrací obou vztahů získáme dvě rovnice pro dvě hledané konstanty a_1 a a_2, které lze z těchto rovnic vypočítat.

1.2. Vážená rezidua pro slabou formulaci

Uvažujeme opět stejnou diferenciální rovnici (1.1), včetně intervalu řešení a okrajových podmínek:

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} - u = -x, \quad 0 \leqq x \leqq 1, \quad u(0) = 0, u(1) = 0.$$

Definování problému, jak bylo uvedeno doposud se nazývá silná formulace metody vážených reziduí. Z předcházejících postupů je patrné, že silná formulace vyžaduje výpočet integrálu $\int w(\frac{\mathrm{d}^n \tilde{u}}{\mathrm{d}x^n})\mathrm{d}x$ obsahující člen s nejvyšším řádem derivace v DR. Aby bylo možno získat smysluplné přibližné řešení takové DR, je nutné, aby výsledkem integrace byla nenulová, konečná hodnota. Pro naší dříve zvolenou DR to vyžaduje, aby aproximační funkce byla dvakrát diferencovatelná a 2. derivace měla nenulovou hodnotu.

Za účelem snížení požadavku na diferencovatelnost aproximační funkce, aplikujeme na silnou formulaci (1.6) integrační metodu per-partes:

$$I = \int_0^1 w \left\{ \frac{\mathrm{d}^2 \tilde{u}}{\mathrm{d}x^2} - \tilde{u} + x \right\} \mathrm{d}x = \int_0^1 \left\{ w \frac{\mathrm{d}^2 \tilde{u}}{\mathrm{d}x^2} - w\tilde{u} + wx \right\} \mathrm{d}x, \tag{1.19}$$

kdy aplikací per-partes na první člen integrálu

$$\int_0^1 w \frac{\mathrm{d}^2\tilde{u}}{\mathrm{d}x^2}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ccc} u = w & & v' = \dfrac{\mathrm{d}^2\tilde{u}}{\mathrm{d}x^2} \\ & \searrow & \\ u' = \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} & \rightarrow & v = \dfrac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}x} \end{array} \right| = \left[w \frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}x} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x \tag{1.20}$$

můžeme rovnici (1.19) zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} I &= \left[w \frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}x} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 w\tilde{u}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 wx\,\mathrm{d}x = 0 \\ I &= \int_0^1 \left(-\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}x} - w\tilde{u} + wx \right) \mathrm{d}x + \left[w \frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}x} \right]_0^1 \end{aligned} \tag{1.21}$$

Jak je patrné z poslední rovnice, toto vyjádření integrálu vážených reziduí vyžaduje, aby aproximační funkce byla pouze jedenkrát diferencovatelná . Takový způsob formulace váženého průměru reziduí se nazývá slabá formulace, a to právě proto, že požadavky na vlastnosti aproximační funkce jsou slabší. Ve vztazích slabé formulace, např. (1.21), se nově objevuje člen v hranatých závorkách, který má význam von Neumannovy podmínky na vnější hranici uvažované oblasti.

Na tomto místě je vhodné zdůraznit, že matematické úpravy, jenž byly provedeny pro získání slabé formulace byly úpravami ekvivalentními, a to znamená, že obě formy téhož problému, tj. silná a slabá formulace jsou formami ekvivalentními a ani jedna není vůči té druhé zatížená žádným zjednodušením ve smyslu snížení přesnosti řešení a obě formy tak

jsou vzájemně zaměnitelné. Obě formulace jsou v inženýrské praxi běžně používány, např. pohlédneme-li na úlohy z oblasti dynamiky tuhých těles, pak silná formulace představuje dobře známé pohybové rovnice, kdežto slabá formulace představuje zákon o změně kinetické energie a podobné analogie bychom našli v každé z fyzikálních oblastí.
Vlastnosti slabé formulace:

- slabá formulace klade nižší nároky na nutný řád diferencovatelnosti aproximační funkce pro odhad řešení; přímým důsledkem této vlastnosti je fakt, že tím klesá i počet neznámých konstant, jejichž nalezení je předmětem konečného řešení.
- řešení získané slabou formulací nesplňuje nutně rovnici silné formulace ve vyšších derivacích (které aproximační funkce slabé formulace obvykle neobsahuje); u napěťově-deformačních úloh se tato vlastnost projevuje faktem, že při aproximaci pole posuvů není pole napětí na přechodu mezi elementy nutně spojité (pole posuvů přitom spojité je).

První jmenovaná vlastnost spolu s dalšími přednostmi plynoucími z aproximace po částech spojitými funkcemi jsou po praktické stránce natolik přínosné, že slabá formulace je dnes s výhodou využívána pro řešení širokého spektra problémů, a to i s vědomím jistých úskalí souvisejících s jejím nasazením.

Obsah
21. strana ze 131
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka/Okno

1.3. Testové otázky

Spustit test

1. V rovnici (1.1) je u funkcí:

   (a) casu,
   (b) proměnné x,
   (c) jedná se o konstantu.

2. Rešením rovnice (1.1) je:

   (a) pouze hodnota funkce u v místě $x = 0$,
   (b) pouze hodnota funkce u v místech $x = 0$ a $x = 1$,
   (c) funkce $u(x)$ popisující řešení v celém intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

3. Je v určitých případech možné, aby byla aproximační funkce totožná s přesným řešením dané diferenciální rovnice?

   (a) Ano.
   (b) Ne.
   (c) Ano, v případě, že se jedná o úlohu v lineární oblasti zatěžování.

4. Zadané okrajové podmínky diferenciální rovnice musí zvolená aproximační funkce splňovat:

   (a) pouze tehdy, vyžadujeme-li přesné řešení diferenciální rovnice,
   (b) beze zbytku,

(c) přesnost řešení nezávisí na splnění okrajových podmínek.

5. V případě, že je reziduál roven nule ve všech místech uvažovaného intervalu řešení, znamená to, že:

(a) zvolená aproximační funkce není schopna popsat danou diferenciální rovnici,
(b) zvolená aproximační funkce popisuje přesné řešení diferenciální rovnice,
(c) konstanta a ve zvolené aproximační funkci nemusí být počítána.

6. Je možné, aby se testovací funkce při použití metody nejmenších čtverců a Galerkinovy metody rovnaly?

(a) Ano, pouze v případě, že se jedná o lineární diferenciální rovnici prvního řádu.
(b) Ne, jedná se o jiné metody.
(c) Pouze v případě, že se nejedná o řešení diferenciální rovnice.

7. Je-li vyžadováno řešení, které se více přiblíží skutečnému řešení diferenciální rovnice, je nutné:

(a) zvýšit počet platných číslic ve výpočtech,
(b) zvýšit řád polynomu aproximační funkce,
(c) přesnost lze zvýšit pouze zavedením jiné metody pro výpočet váhové funkce.

8. Obsahuje-li aproximační funkce n neznámých konstant, kolik váhových funkcí je nutno odvodit?

(a) n,
(b) $2n$,

(c) 2^n.

9. Je možné získat přibližné řešení dané diferenciální rovnice pouze s využitím silné formulace?

(a) Ano.
(b) Ne.
(c) Pouze ve speciálních případech, kdy je diferenciální rovnice funkcí času.

10. Kterou metodu integrace využíváme při sestavování slabé formulace?

(a) Substituce.
(b) Per-partes.
(c) Záleží na typu zadané diferenciální rovnice.

11. Je možno na základě známé slabé formulace zpětně odvodit tvar silné formulace?

(a) Ano.
(b) Ne.
(c) Pouze ve speciálních případech, kdy se aproximované řešení úplně shoduje s řešením přesným.

12. Užití slabé formulace:

(a) nevykazuje žádné výhody oproti silné formulaci,
(b) snižuje minimální nutný řád aproximační funkce,
(c) zvyšuje přesnost řešení.

Konec testu Oprava testu

Počet správně zodpovězených otázek:

Získané body:

Procento úspěšnosti:

Kapitola 2

Aproximace po částech spojitou funkcí

Průvodce studiem

V této kapitole se budeme věnovat vlastnostem aproximační funkce, budeme diskutovat požadavky na tyto funkce, zavedeme po částech spojitou aproximační funkci, interval řešení rozdělíme na dílčí subintervaly - provedeme diskretizaci požadovaného intervalu. Dále se budeme věnovat Galerkinově formulaci pro metodu konečných prvků a navrhneme systematizovaný způsob výpočtu vážených reziduí s užitím po částech spojitých aproximačních funkcí. Následovat bude definování váhové funkce a v závěru kapitoly vše předvedeme názorně na příkladu.

Cíle

Po prostudování této kapitoly budeme rozumět pojmům:

- problematika výběru zkušební, tj. aproximační funkce,
- užití po částech spojité zkušební funkce,
- problematika rozdělení předmětného intervalu řešení na dílčí subintervaly - aproximace,
- užití po částech spojité zkušební funkce pro slabou formulaci,
- Galerkinova formulace metody konečných prvků,
- systematizovaný způsob výpočtu vážených reziduí,
- váhová funkce při Galerkinově přístupu k metodě konečných prvků.

2.1. Vlastnosti speciální aproximace

Bez ohledu na vyjádření slabou či silnou formulací je přesnost aproximačního řešení silně závislá na zvolené zkušební funkci. Avšak samotná volba vhodné zkušební funkce (nebo také aproximační funkce) pro neznámé řešení dané DR není jednoduchý úkol. Problém je tím obtížnější, čím více proměnlivé je přesné řešení na zkoumaném intervalu a čím komplikovanější jsou okrajové podmínky. Za účelem minimalizace zmíněných obtíží lze zkušební funkci zapsat jako po částech spojitou funkci. Abychom popsali řešení v celém hledaném intervalu musíme použít systém takto zavedených funkcí, které se vzájemně doplňují, obvykle takto:

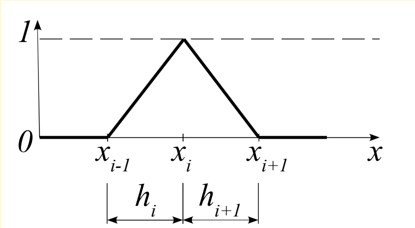
$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \phi_i(x), \tag{2.1}$$

kde n je celkový počet dílčích funkcí, kterými aproximujeme řešení. Současně $n+1$ udává počet úseků, na který je interval řešení rozdělen.
Uvažujme případ po částech spojité lineární funkce zvolené takto:

$$\phi_i(x) = \begin{cases} (x - x_{i-1})/h_i & \text{pro } x_{i-1} \leqq x \leqq x_i, \\ (x_{i+1} - x)/h_{i+1} & \text{pro } x_i \leqq x \leqq x_{i+1}, \\ 0 & \text{v ostatních případech}, \end{cases} \tag{2.2}$$

Graf uvedené funkce je na obrázku obr. 2.1, na kterém si současně můžeme vysvětlit smysl zavedení po částech spojité funkce. Jak si můžeme povšimnout, jednotlivé větve zavedené funkce mají nenulovou hodnotu pouze na omezené části intervalu řešení. Na všech ostatních místech intervalu řešení je tato funkce nulová.

Znamená to, že tato funkce bude popisovat řešení pouze v části, kde je nenulová. Při zvýšení počtu úseků požadujeme, aby se přesnost aproximovaného řešení zvyšovala.



Obr. 2.1 Po částech lineární funkce

Představa, že nejlepší aproximační řešení obdržíme rozdělením intervalu na abnormálně vysoký počet takových úseků je ovšem zavádějící, a to hned z několika důvodů, např.: každá nová podoblast intervalu řešení musí mít konečnou délku, tj. nemůže mít infinitezimálně malý rozměr dx ; pak při vysokém počtu podoblastí dostáváme pro řešení vysoký řád soustavy rovnic pro řešení koeficientů a_i; a v neposlední řadě pro malé podoblasti budeme narážet na numerické možnosti užitého HW a SW platformy a další.

Aplikaci zmíněné po částech spojité zkušební funkce předvedeme na již dříve uvedeném příkladu. Uvažujme okrajovou úlohu popsanou DR (1.1):

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} - u = -x, \quad 0 \leqq x \leqq 1, \quad u(0) = 0, u(1) = 0. \tag{2.3}$$

Pro tuto úlohu můžeme formulovat integrál pro vážená rezidua jednou z následujících forem

$$I = \underbrace{\int_0^1 w \left\{ \frac{\mathrm{d}^2 \tilde{u}}{\mathrm{d}x^2} - \tilde{u} + x \right\} \mathrm{d}x}_{\text{silná formulace}} = \underbrace{\int_0^1 \left(-\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}x} - w\tilde{u} + wx \right) \mathrm{d}x + \left[w \frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}x} \right]_0^1}_{\text{slabá formulace}}. \tag{2.4}$$

Obsah
29. strana ze 131
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka/Okno

2.2. Užití pro slabou formulaci

V dalším řešení využijeme jedné z hlavních předností slabé formulace, a to že klade menší nároky na třídu aproximační funkce, pro kterou zvolíme po částech lineární průběh ve smyslu (2.1). Pro jednoduchost předpokládejme aproximaci ve tvaru

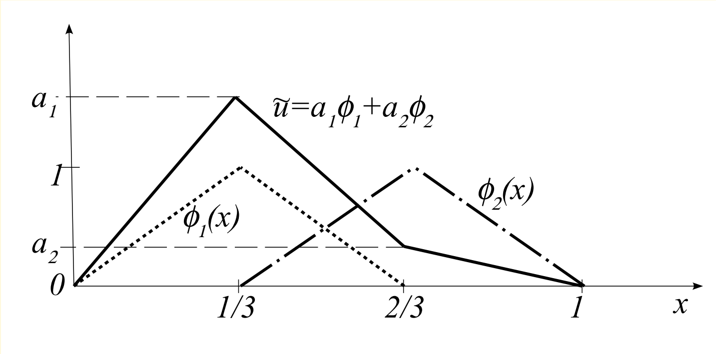
$$\tilde{u} = a_1 \cdot \phi_1(x) + a_2 \cdot \phi_2(x), \tag{2.5}$$

kde a_1, a_2 jsou neznámé koeficienty, které bude nutno v dalším určit tak, aby se zvolená aproximace co nejvíce přibližovala přesnému řešení. Funkce $\phi_1(x)$ a $\phi_2(x)$ definujeme takto:

$$\phi_1(x) = \begin{cases} 3x & 0 \leqq x \leqq \frac{1}{3} \\ 2 - 3x & \frac{1}{3} \leqq x \leqq \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} \leqq x \leqq 1 \end{cases} \qquad \phi_2(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leqq x \leqq \frac{1}{3} \\ 3x - 1 & \frac{1}{3} \leqq x \leqq \frac{2}{3} \\ 3 - 3x & \frac{2}{3} \leqq x \leqq 1 \end{cases} \tag{2.6}$$

a jejich graf na intervalu řešení $\langle 0, 1 \rangle$ znázorňuje obr. 2.2.
V rámci řešení dané DR je doména rozdělena na tři subdomény a jsou užity dvě po částech lineární funkce $\phi_1(x), \phi_2(x)$. Přibližné řešení $\tilde{u}(x)$ poté zapíšeme s využitím aproximačních funkcí jako

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} a_1\phi_1(x) + a_2 \cdot 0 = a_1(3x) & 0 \leqq x \leqq \frac{1}{3} \\ a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) = a_1(2 - 3x) + a_2(3x - 1) & \frac{1}{3} \leqq x \leqq \frac{2}{3} \\ a_1 \cdot 0 + a_2\phi_2(x) = a_2(3 - 3x) & \frac{2}{3} \leqq x \leqq 1 \end{cases} \tag{2.7}$$



Obr. 2.2 Přibližné řešení $\tilde{u}(x)$ pomocí funkcí $\phi_1(x)$ a $\phi_2(x)$

Pro případ Galerkinovy metody lze testovací funkci psát $w_i = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial a_i}$:

$$w_1(x) = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial a_1} = \begin{cases} 3x & 0 \leqq x \leqq \frac{1}{3} \\ 2-3x & \frac{1}{3} \leqq x \leqq \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} \leqq x \leqq 1 \end{cases}, \quad w_2(x) = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial a_2} = \begin{cases} 0 & 0 \leqq x \leqq \frac{1}{3} \\ 3x-1 & \frac{1}{3} \leqq x \leqq \frac{2}{3} \\ 3-3x & \frac{2}{3} \leqq x \leqq 1 \end{cases} \tag{2.8}$$

Po dokončení této přípravné fáze, ve které byl zvolen tvar aproximace $\tilde{u}$ hledaného výsledku u a následně byla zvolena metoda pro získání váhových funkcí w můžeme přistoupit k vyjádření konečné podoby integrálu vážených reziduí pro slabou formulaci, viz (2.4). Uvažujme nejprve člen pro von Neumannovu okrajovou podmínku, tj.

$$\left[w \frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}x} \right]_0^1 = w|_{x=1} \cdot \left. \frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}x} \right|_{x=1} - w|_{x=0} \cdot \left. \frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}x} \right|_{x=0}, \tag{2.9}$$

kde výrazy $w|_x$ označují hodnoty váhových funkcí pro příslušné souřadnice x a výrazy $\frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}x}\big|_x$ značí hodnoty von Neumannových podmínek v těchto místech, tj. pro $x = 0$ a $x = 1$; jsou to místa na okrajích vyšetřované oblasti. K vyčíslení výrazu (2.9) bude nezbytná znalost hodnot váhových funkcí, které zjistíme dle vztahů (2.8) nebo také z grafů těchto funkcí na obr. 2.2. V našem případě pro obě krajní místa ($x = 0$ a $x = 1$) nabývají váhové funkce nulovou hodnotu, a proto pro tuto úlohu máme

$$\left[w\frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}x}\right]_0^1 = 0 \cdot \frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=1} - 0 \cdot \frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=0} = 0. \tag{2.10}$$

Nyní, s uvážením výsledku (2.10), můžeme pokračovat v sestavení integrálu vážených reziduí slabé formulace. Postupným uplatněním váhové funkce w_1 a w_2 ve vztahu (2.4) můžeme psát:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int\limits_0^1 \left(-\frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}x} - w_1\tilde{u} + w_1 x\right) \mathrm{d}x = 0 \\ I_2 &= \int\limits_0^1 \left(-\frac{\mathrm{d}w_2}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}x} - w_2\tilde{u} + w_2 x\right) \mathrm{d}x = 0 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Jednotlivé členy v integrálech vážených reziduálů v tomto případě mají tvar:

$$\frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}x} = \begin{cases} 3 & 0 \leqq x \leqq \frac{1}{3} \\ -3 & \frac{1}{3} \leqq x \leqq \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} \leqq x \leqq 1 \end{cases} \qquad \frac{\mathrm{d}w_2}{\mathrm{d}x} = \begin{cases} 0 & 0 \leqq x \leqq \frac{1}{3} \\ 3 & \frac{1}{3} \leqq x \leqq \frac{2}{3} \\ -3 & \frac{2}{3} \leqq x \leqq 1 \end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}x} = \begin{cases} 3a_1 & 0 \leqq x \leqq \frac{1}{3} \\ -3a_1 + 3a_2 & \frac{1}{3} \leqq x \leqq \frac{2}{3} \\ -3a_2 & \frac{2}{3} \leqq x \leqq 1 \end{cases}$$

a jejich dosazením do rovnic pro vážená rezidua (2.11) tedy bude

$$\begin{aligned} I_1 = &\int_0^{1/3} [-(3)(3a_1) - 3x(3a_1x) + x(3x)]\,\mathrm{d}x + \\ &+ \int_{1/3}^{2/3} [-(-3)(-3a_1 + 3a_2) - (2-3x)(2a_1 - 3a_1x + 3a_2x - a_2) + x(2-3x)]\,\mathrm{d}x + \\ &+ \int_{2/3}^{1} [-(0)(-3a_2) - (0)(3a_2 - 3a_2x) + x(0)]\,\mathrm{d}x = 0. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Po integraci obdržíme pro I_1 a obdobně také pro I_2 vztahy:

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{56}{9}a_1 + \frac{53}{18}a_2 + \frac{1}{9} = 0, \\ I_2 &= \frac{53}{18}a_1 - \frac{56}{9}a_2 + \frac{2}{9} = 0. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Tímto jsme získali soustavu dvou lineárních rovnic pro dvě neznámé konstanty a_1, a_2. Řešením vzniklé soustavy najdeme hodnoty konstant $a_1 = \frac{436}{9735} \approx 0{,}0448$; $a_2 = \frac{554}{9735} \approx 0{,}0569$, jejich zpětným dosazením do aproximace řešení máme:

$$\tilde{u} = \frac{436}{9735}\,\phi_1(x) + \frac{554}{9735}\,\phi_2(x). \tag{2.14}$$

anebo uplatněním tvaru funkcí ϕ bude řešení ve tvaru (2.7) a po algebraické úpravě zlomků bude:

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} \frac{436}{9735}(3x) & = \frac{436}{3245}\,x & 0 \leqq x \leqq \frac{1}{3} \\ \frac{436}{9735}(2-3x) + \frac{554}{9735}(3x-1) & = \frac{118}{3245}\,x + \frac{318}{9735} & \frac{1}{3} \leqq x \leqq \frac{2}{3} \\ \frac{554}{9735}(3-3x) & = \frac{1}{3245}\,(1-x) & \frac{2}{3} \leqq x \leqq 1 \end{cases} \tag{2.15}$$

Pozn.: V případě užití stejné aproximační funkce aplikované na silnou formulaci, bychom neobdrželi „smysluplné“ řešení, jelikož $\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}$ je rovno nule v celém uvažovaném intervalu.

2.3. Galerkinova formulace metody konečných prvků

Jak bylo ukázáno výše, užití po částech spojité funkce jako zkušební funkce skýtá mnohé výhody. Zvýšením počtu úseků (subdomén) lze zachytit komplikovanou funkci užitím superpozice jednotlivých, po částech spojitých funkcí. Hovoříme-li o metodě konečných prvků, pak tyto subdomény nazýváme *konečnými prvky*, nebo z anglického názvosloví *elementy*.[1]

[1] Označení element bude v tomto textu používáno častěji, a to proto, že prvek je použit pro označení prvků matic.

2.3.1. Aproximační funkce nad celou oblastí

Tato část kapitoly popisuje systematizovaný způsob výpočtu vážených reziduí s užitím po částech spojitých lineárních aproximačních funkcí, které ale obecně nemusí být nutně lineární (lineární funkce jsou zde zvoleny zejména pro jednoduchost). V předešlé kapitole 1.1 bylo předvedeno řešení s aproximací ve tvaru polynomu, a to včetně náznaku možného zpřesňování přibližného řešení zvyšováním řádu polynomické aproximační funkce (kap. 1.1.3), která může mít obecně tvar

$$\tilde{u}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \ldots, a_n x^n. \tag{2.16}$$

Graf aproximačního řešení polynomickou funkcí je znázorněn v obr. 2.3 čerchovanou čárou a je nezbytné poznamenat, že je to graf funkce definované nad celou řešenou oblastí (výhody a nevýhody této varianty byly diskutovány v kap. 1.1). Současně je ve stejném grafu zobrazena i druhá, v praxi mnohem častěji používaná, aproximace po částech spojitou funkcí – plná lomená čára ukazuje výsledek aproximace po částech spojitou lineární funkcí zvolenou ve smyslu (2.1)

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \phi_i(x).$$

Tato aproximace, i přesto že je realizována lineárními funkcemi, může s jistou nepřesností aproximovat i nelineární průběh hledaného řešení[1], viz obr. 2.3.

V předcházejících pasážích byly po částech spojité funkce definovány jako funkce zobecněných koeficientů a_1, a_2, viz např. (2.5), ovšem tyto koeficienty nemají konkrétní fyzikální vazbu k samotnému problému a pro řešení jejich hodnot je nezbytné sestavení zcela individuální maticové rovnice pro každou úlohu samostatně, viz např. (2.13) (společný je pouze

[1] Přesnost aproximace lineární funkcí lze zvýšit jemnějším dělením oblasti na elementy.

obecný postup takového řešení). Pro systematický zápis budou po částech spojité funkce předefinovány jako funkce uzlových proměnných, kterými obvykle jsou hodnoty hledaného řešení v uzlech. Tento přístup k formulaci aproximační funkce se v minulosti ukázal jako mílový krok vpřed a s výhodou se využívá dodnes. Hlavní výhoda tohoto postupu je opět patrná z obr. 2.3, a to v jeho spodní části, která jednak ukazuje princip superpozice jednotkových funkcí při sestavení řešení v celé oblasti (sloupec vpravo), ale také zde v těchto grafech vidíme, že průběhy dílčích částí jednotkových funkcí $\phi_i(x)$ se v rámci každého elementu opakují. Tato skutečnost není náhodná a umožňuje najít maticové tvary rovnic integrálu vážených reziduí pro jeden element a ty pak superponovat do celkové, tzv. globální rovnice podle rozdělení oblasti na dílčí elementy.

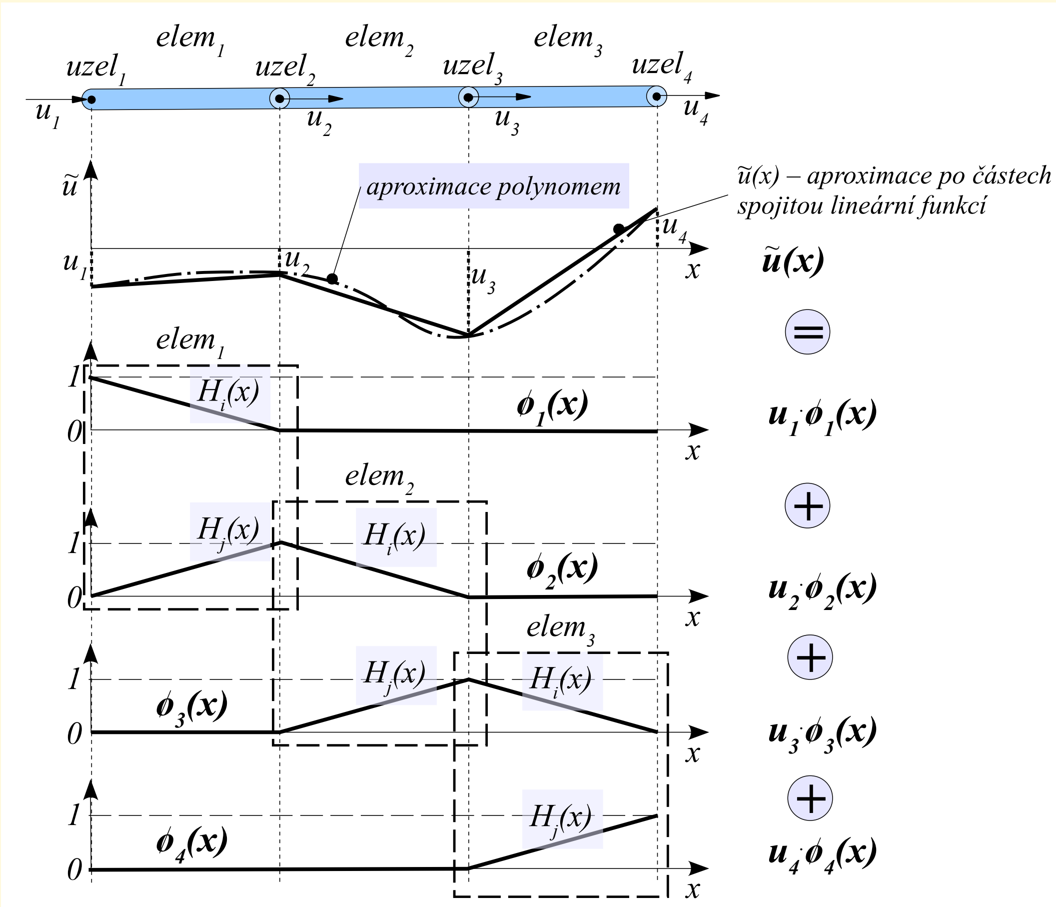
Obsah

36. strana ze 131

Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno



Obr. 2.3 Princip MKP aproximace řešení kombinací po částech spojitými funkcemi

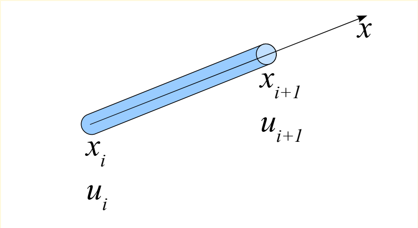
Obsah
37. strana ze 131
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka/Okno

2.3.2. Aproximační funkce a funkce tvaru elementu

Uvažujeme nyní subdoménu, tzn. element (nebo konečný prvek) dle obr. 2.4, který má dva uzly, a to na každém konci jeden. V každém uzlu jsou zavedeny následující parametry tohoto elementu:

a) souřadnice uzlu (pro 1D elementy postačí jedna souřadnice, tedy x_i nebo x_{i+1}),

b) *hodnota* aproximovaného hledaného řešení $\tilde{u}(x)$ v uzlu, zde tedy u_i nebo u_{i+1} (je důležité si uvědomit, že jsou to hodnoty, tj. čísla nikoliv proměnné).



Obr. 2.4 1D konečný prvek – zavedení souřadnic a uzlových hodnot

Aproximační funkci budeme předpokládat ve tvaru:

$$\tilde{u} = c_1 x + c_2 \tag{2.17}$$

Uvedenou rovnici vyjádříme jako funkci uzlových proměnných. Jinými slovy konstanty c_1 a c_2 nahradíme uzlovými proměnnými u_i nebo u_{i+1}, a to tak, že vyjádříme hodnotu $\tilde{u}(x)$ v každém uzlu. Tímto získáme

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x_i) &= c_1 x_i + c_2 = u_i \ ^{(\dagger)} \\ \tilde{u}(x_{i+1}) &= c_1 x_{i+1} + c_2 = u_{i+1} \ ^{(\ddagger)} \end{aligned} \tag{2.18}$$

a provedeme řešení této soustavy lineárních rovnic pro neznáme koeficienty $c_1,\ c_2$, tedy

$$\begin{aligned}
\text{z}\ ^{(\dagger)} \qquad & c_2 = u_i - c_1 x_i \\
\text{do}\ ^{(\ddagger)} \qquad c_1 x_{i+1} + u_i - {} & c_1 x_i = u_{i+1} \\
& c_1 = \frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i} \\
\text{zpět do}\ ^{(\dagger)} \qquad \frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i} x_i + {} & c_2 = u_i \\
& c_2 = \frac{u_i\, x_{i+1} - u_{i+1}\, x_i}{x_{i+1} - x_i}
\end{aligned}$$

Dosazením zpět do zvoleného tvaru aproximační funkce (2.17) bude

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(x) &= \frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i}\, x + \frac{u_i\, x_{i+1} - u_{i+1}\, x_i}{x_{i+1} - x_i} = \\
&= \frac{u_{i+1}\, x - u_i\, x + u_i\, x_{i+1} - u_{i+1}\, x_i}{x_{i+1} - x_i}
\end{aligned}$$

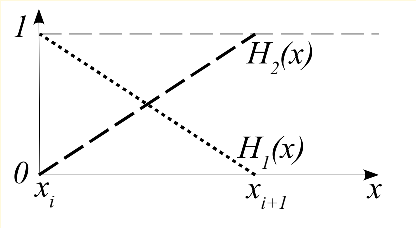
a následným přeuspořádáním pro vytknutí u_i, resp. u_{i+1} získáme:

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(x) &= \frac{(x_{i+1} - x)\, u_i + (x - x_i)\, u_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} = \\
&= \frac{(x_{i+1} - x)}{x_{i+1} - x_i}\, u_i + \frac{(x - x_i)}{x_{i+1} - x_i}\, u_{i+1} = H_1(x) \cdot u_i + H_2(x) \cdot u_{i+1}. \qquad (2.19)
\end{aligned}$$

Členy $H_i(x)$ jsou obecně nazývány funkcemi tvaru. V tomto případě můžeme hovořit o lineárních funkcích tvaru

$$\begin{aligned} H_1(x) &= \frac{(x_{i+1}-x)}{h_i} \\ H_2(x) &= \frac{(x-x_i)}{h_i} \end{aligned} \quad , \qquad \text{kde } h_i = x_{i+1} - x_i \tag{2.20}$$

a jejich graf je zachycen na obr. 2.5.



Obr. 2.5 Lineární funkce tvaru $H_1(x), H_2(x)$

Funkce tvaru mají následující vlastnosti:

- Funkce tvaru příslušná uzlu i má v tomto uzlu jednotkovou velikost a je nulová v ostatních uzlech, tedy dle obr. 2.5 je $H_1(x)$ funkce příslušející levému krajnímu uzlu (souřadnice tohoto uzlu je $x = x_i$) a je pro ní typické, že nabývá následujících hodnot: $H_1(x_i) = 1, H_1(x_{i+1}) = 0$; druhému uzlu přísluší funkce tvaru $H_2(x)$ a ta nabývá následujících hodnot $H_2(x_i) = 0, H_2(x_{i+1}) = 1$, tj.

$$H_i(x_j) = \delta_{i,j}, \tag{2.21}$$

kde $\delta_{i,j}$ je Kroneckerovo delta, které má hodnotu 1 pokud $i = j$, jinak má hodnotu 0.

- Suma hodnot všech funkcí tvaru pro libovolné místo elementu, tj. pro libovolnou hodnotu souřadnice x je rovna 1, zde tedy

$$\sum_{i=1}^{2} H_i(x) = 1. \tag{2.22}$$

2.3.3. Váhové funkce

Pro další postup řešení uvažovaného problému bude ještě nezbytné připravit tvary váhových funkcí. Pro tento účel použijeme opět Galerkinovu metodu, podle níž se váhové funkce odvodí z tvaru aproximace, a to derivacemi podle jednotlivých konstant. V tomto okamžiku jsou konstantami v aproximační funkci (2.19) hledané hodnoty řešení v uzlech u_i a u_{i+1}. Váhové funkce tedy získáme následujícím způsobem

$$w_j = \frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}u_j} : \quad w_1 = \frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}u_i} = H_1(x) \quad \text{a} \quad w_2 = \frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}u_{i+1}} = H_2(x). \tag{2.23}$$

2.3.4. Vážená rezidua

Řešme nyní původní problém (2.3), tj. hledejme řešení následující DR včetně daných okrajových podmínek

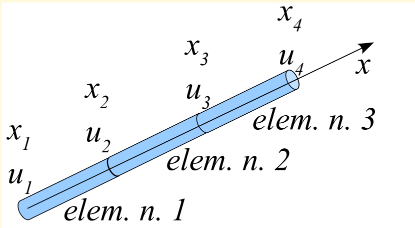
$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} - u = -x, \quad 0 \leqq x \leqq 1, \quad u(0) = 0, u(1) = 0.$$

Výslednou soustavu rovnic vážených reziduí ve smyslu slabé formulace (1.21) získáme postupným uplatněním všech váhových funkcí přes všechny elementy a superpozicí získaných výsledků pro jednotlivé váhové funkce. Formálně můžeme užít následující zápis

$$I_j = \bigcup_{i=1}^{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(-\frac{\mathrm{d}w_j}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}x} - w_j \tilde{u} + w_j x \right) \mathrm{d}x + \left[w_j \frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}x} \right]_0^1 = 0, \quad \text{pro } j = 1, \ldots, m, \tag{2.24}$$

kde n je počet elementů, m je celkový počet váhových funkcí definovaných nad celou řešenou doménou (tento počet je roven počtu nezávislých deformačních parametrů diskretizované domény, tj. počtu neznámých; zjednodušeně je to počet stupňů volnosti) a symbol $\bigcup$ je použit pro superpozici dílčích složek reziduí váhové funkce w_j přes jednotlivé elementy i.

V dalším uvažujme naší oblast řešení $\langle 0, 1 \rangle$ diskretizovanou na tři stejně velké (dlouhé) elementy $(n = 3)$ viz obr. 2.6.



Obr. 2.6 Rozdělení oblasti řešení $\langle 0, 1 \rangle$ na 3 prvky

Uvažujme i-tý element ($i = 1, 2$ nebo 3). Integrál dle (2.24) lze pro tento element psát ve tvaru

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(-\frac{\mathrm{d}w_j}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}x} - w_j \tilde{u} + w_j x \right) \mathrm{d}x \tag{2.25}$$

Obsah
42. strana ze 131
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka/Okno

Dále uvažujme pro tento integrál zvolenou lineární aproximační funkci (2.17) upravenou do tvaru (2.19) a tomu odpovídající diferenciál $\frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}x}$

$$\tilde{u}(x) = H_1(x)\, u_i + H_2(x)\, u_{i+1} \qquad \frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}x} = H_1'(x)\, u_i + H_2'(x)\, u_{i+1}. \tag{2.26}$$

Podle Galerkinovy metody byly pro zvolený tvar aproximace získány váhové funkce (2.23) a jejich derivace podle souřadnice polohy x tedy jsou

$$\frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}x} = H_1'(x) \qquad \frac{\mathrm{d}w_2}{\mathrm{d}x} = H_2'(x). \tag{2.27}$$

Následným uplatněním vztahů (2.26) a (2.27) v integrálu (2.25) obdržíme

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \left(-\frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}x}\,\frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}x} - w_1\tilde{u} + w_1 x \right) \mathrm{d}x$$

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \left(-\frac{\mathrm{d}w_2}{\mathrm{d}x}\,\frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}x} - w_2\tilde{u} + w_2 x \right) \mathrm{d}x$$

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \Big(- H_1' \left(H_1'\, u_i + H_2'\, u_{i+1}\right) - H_1 \left(H_1 u_i + H_2\, u_{i+1}\right) + H_1 x \Big) \mathrm{d}x$$

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \Big(- H_2' \left(H_1'\, u_i + H_2'\, u_{i+1}\right) - H_2 \left(H_1 u_i + H_2\, u_{i+1}\right) + H_2 x \Big) \mathrm{d}x$$

Obsah

43. strana ze 131

Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

po roznásobení a přeuspořádání bude:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \Big(- H_1' H_1' u_i - H_1' H_2' u_{i+1} - H_1 H_1 u_i - H_1 H_2 u_{i+1} + H_1 x \Big) \mathrm{d}x$$
$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \Big(- H_1' H_2' u_i - H_2' H_2' u_{i+1} - H_1 H_2 u_i - H_2 H_2 u_{i+1} + H_2 x \Big) \mathrm{d}x$$

pro což lze s výhodou uplatnit maticový zápis:

$$- \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\begin{bmatrix} H_1' H_1' & H_1' H_2' \\ H_1' H_2' & H_2' H_2' \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} H_1 H_1 & H_1 H_2 \\ H_1 H_2 & H_2 H_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{Bmatrix} \right) \mathrm{d}x + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{Bmatrix} x \, \mathrm{d}x.$$

Obě matice lze získat vhodným násobením vektoru funkcí tvarů a jejich derivací. Uplatněním této úpravy spolu s vytknutím vektoru uzlových hodnot $\{u_i \; u_{i+1}\}^{\mathrm{T}}$ dostáváme

$$- \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\begin{Bmatrix} H_1' \\ H_2' \end{Bmatrix} \{ H_1' \quad H_2' \} + \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{Bmatrix} \{ H_1 \quad H_2 \} \right) \begin{Bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{Bmatrix} \mathrm{d}x + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{Bmatrix} x \, \mathrm{d}x, \qquad (2.28)$$

kde vektor hledaných hodnot $\{u_i \; u_{i+1}\}^{\mathrm{T}}$ lze dále vyjmout z integrálu, neboť jejich hodnoty jsou vůči diferenciálu dx konstantní:

$$- \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\begin{Bmatrix} H_1' \\ H_2' \end{Bmatrix} \{ H_1' \quad H_2' \} + \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{Bmatrix} \{ H_1 \quad H_2 \} \right) \mathrm{d}x \begin{Bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{Bmatrix} + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{Bmatrix} x \, \mathrm{d}x. \qquad (2.29)$$

Naznačenou integraci (2.29) budeme pro přehlednost zápisu provádět postupně po jednotlivých součinech. První člen tedy bude:

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \begin{Bmatrix} H_1' \\ H_2' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} H_1' & H_2' \end{Bmatrix} \mathrm{d}x = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \begin{Bmatrix} -\dfrac{1}{h_i} \\ \dfrac{1}{h_i} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -\dfrac{1}{h_i} & \dfrac{1}{h_i} \end{Bmatrix} \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{h_i^2} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathrm{d}x = \frac{1}{h_i} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

kde např. pro prvek $1,1$ matice byl proveden integrál, kde s využitím (2.20) máme

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h_i^2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{h_i^2} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} 1 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{h_i^2} [x]_{x_i}^{x_{i+1}} = \frac{1}{h_i^2}\, h_i = \frac{1}{h_i}.$$

Druhý člen integrálu (2.29) provedeme následovně:

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} H_1 & H_2 \end{Bmatrix} \mathrm{d}x = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \begin{Bmatrix} \dfrac{x_{i+1} - x}{h_i} \\ \dfrac{x - x_i}{h_i} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{x_{i+1} - x}{h_i} & \dfrac{x - x_i}{h_i} \end{Bmatrix} \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{h_i^2} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \begin{bmatrix} (x_{i+1} - x)^2 & (x_{i+1} - x)(x - x_i) \\ (x - x_i)(x_{i+1} - x) & (x - x_i)^2 \end{bmatrix} \mathrm{d}x = h_i \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix},$$

kde např. pro prvek $1,1$ matice byl proveden integrál, kde s využitím (2.20) máme

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h_i^2}(x_{i+1}-x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{h_i^2}\left[\frac{(x_{i+1}-x)^3}{3\cdot(-1)}\right]_{x_i}^{x_{i+1}} =$$

$$= -\frac{1}{3h_i^2}\left[(x_{i+1}-x_{i+1})^3-(x_{i+1}-x_i)^3\right] = \frac{h_i^3}{3h_i^2} = \frac{h_i}{3}.$$

Poslední, třetí člen integrálu (2.29) provedeme následovně:

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{Bmatrix} x\,\mathrm{d}x = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \begin{Bmatrix} -\dfrac{x_{i+1}-x}{h_i} \\ \dfrac{x-x_i}{h_i} \end{Bmatrix} x\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{h_i}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \begin{bmatrix} (x_{i+1}-x) \\ (x-x_i) \end{bmatrix} x\,\mathrm{d}x = \frac{h_i}{6}\begin{bmatrix} (x_{i+1}+2x_i) \\ (2x_{i+1}+x_i) \end{bmatrix}.$$

Provedenou integrací byl integrál (2.25) pro jednotlivý element převeden do algebraického tvaru, který lze maticově zapsat výrazem

$$-\begin{bmatrix} \dfrac{1}{h_i}+\dfrac{h_i}{3} & -\dfrac{1}{h_i}+\dfrac{h_i}{6} \\ -\dfrac{1}{h_i}+\dfrac{h_i}{6} & \dfrac{1}{h_i}+\dfrac{h_i}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dfrac{h_i}{6}(x_{i+1}+2x_i) \\ \dfrac{h_i}{6}(2x_{i+1}+x_i) \end{Bmatrix}. \tag{2.30}$$

Obsah
46. strana ze 131
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka/Okno

Pro náš uvažovaný případ, kdy interval řešení $\langle 0,1\rangle$ je rozdělen na tři elementy stejné délky, dostáváme integrál (2.25) ve smyslu vztahu (2.29) pro jednotlivé elementy následující výrazy

$$\begin{bmatrix} -3{,}1111 & 2{,}9444 \\ 2{,}9444 & -3{,}1111 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0{,}0185 \\ 0{,}0370 \end{Bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -3{,}1111 & 2{,}9444 \\ 2{,}9444 & -3{,}1111 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0{,}0741 \\ 0{,}0926 \end{Bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -3{,}1111 & 2{,}9444 \\ 2{,}9444 & -3{,}1111 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0{,}1296 \\ 0{,}1481 \end{Bmatrix}.$$

Za účelem vyjádření celkového integrálu vážených reziduí je potřeba výše uvedené výrazy pro jednotlivé elementy superponovat, a to ve smyslu (2.24), čímž v tomto případě obdržíme následující rovnici

$$\begin{bmatrix} -3{,}1111 & 2{,}9444 & 0 & 0 \\ 2{,}9444 & -6{,}2222 & 2{,}9444 & 0 \\ 0 & 2{,}9444 & -6{,}2222 & 2{,}9444 \\ 0 & 0 & 2{,}9444 & -3{,}1111 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0{,}0185 - u'(0) \\ 0{,}1111 \\ 0{,}2222 \\ 0{,}1481 + u'(1) \end{Bmatrix} = 0, \tag{2.31}$$

resp. po obvyklé úpravě, která předchází řešení neznámých uzlových hodnot nabude rovnice vážených reziduálů následující tvar:

$$\begin{bmatrix} -3{,}1111 & 2{,}9444 & 0 & 0 \\ 2{,}9444 & -6{,}2222 & 2{,}9444 & 0 \\ 0 & 2{,}9444 & -6{,}2222 & 2{,}9444 \\ 0 & 0 & 2{,}9444 & -3{,}1111 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0{,}0185 + u'(0) \\ -0{,}1111 \\ -0{,}2222 \\ -0{,}1481 - u'(1) \end{Bmatrix}. \tag{2.32}$$

Obsah

47. strana ze 131

Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

2.3.5. Okrajové podmínky

Řešením integrálu vážených reziduí jsme obdrželi maticový zápis vzájemných poměrů hodnot aproximovaného řešení v uzlech, které bude splněno pro libovolné okrajové podmínky (doposud nebyly k integraci použity). Nicméně pro konkrétní okrajovou úlohu bude výsledná podoba rovnic (2.31) vypadat poněkud odlišně, a to v závislosti na definovaných okrajových podmínkách.

V uvažovaném příkladě jsou v koncových bodech definovány Dirichletovy okrajové podmínky ($u_{(x=0)} = u_1 = 0$, $u_{(x=1)} = u_4 = 0$), tzn. že v těchto bodech jsou předepsány hodnoty hledaného řešení $u(x)$ a současně to znamená, že v těchto bodech nejsou známy hodnoty Von Neumannových okrajových podmínek, tj. $u'_{(x=0)}$ *a* $u'_{(x=1)}$. Výsledná podoba rovnice vážených reziduálů ovšem je nástroj, který umožňuje zjištění jak hodnot hledaného řešení $\tilde{u}$, tak i hodnoty komplementárních okrajových podmínek, tj. těch doplňkových k zadaným. Při programování daného výpočtu řešíme nejprve neznámé uzlové hodnoty, tzv. primární neznámé obsažené ve sloupcovém vektoru na levé straně rovnice (2.32), zatímco sekundární neznámé, tj. doplňkové okrajové podmínky obsažené na pravé straně (2.32) jsou vyřešeny až následně. Zde při výpočtu primárních neznámých modifikujeme poslední rovnici (2.32) takto:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2{,}9444 & -6{,}2222 & 2{,}9444 & 0 \\ 0 & 2{,}9444 & -6{,}2222 & 2{,}9444 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0{,}1111 \\ -0{,}2222 \\ 0 \end{Bmatrix}, \tag{2.33}$$

tedy první a poslední rovnice je nahrazena zadanou Dirichletovou okrajovou podmínkou. Takový postup *lze uplatnit jen* v případě, že Dirichletovou podmínkou jsou předepsány *nulové hodnoty* v uzlech. Po této úpravě lze de facto v soustavě vynechat nahrazené řádky (neposkytují žádné nové informace) a také i sloupce, které by byly vynásobeny předepsanými nulovými hodnotami (tyto sloupce se tímto automaticky vynulují, zde je to 1. a 4. sloupec, protože $u_1 = 0, u_4 = 0$). Takto obdržíme maticový zápis rovnice (2.32), jejíž řád odpovídá skutečnému počtu hledaných hodnot řešení v uzlech, v tomto případě máme

$$\begin{bmatrix} -6{,}2222 & 2{,}9444 \\ 2{,}9444 & -6{,}2222 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0{,}1111 \\ -0{,}2222 \end{Bmatrix}. \tag{2.34}$$

Řešením soustavy rovnic (2.34) získáme hledané hodnoty primárních neznámých

$$u_2 = 0{,}0448,\ u_3 = 0{,}0569,$$

přičemž ostatní hodnoty řešení v uzlech jsou známy, jelikož byly předepsány okrajovými podmínkami: $u_1 = 0, u_4 = 0$. Výsledky lze zpět dosadit do původních (nahrazených) rovnic soustavy (2.32) a odtud můžeme dopočítat hodnoty sekundárních neznámých $u'(0)$ *a* $u'(1)$. Jakmile jsou vypočteny neznámé uzlové hodnoty, lze psát řešení pro každý element, a to z odpovídajících uzlových hodnot řešení a příslušných funkcí tvaru a získat tak hodnotu výsledku pro libovolnou souřadnici x.

2.4. Testové otázky

Spustit test

1. Zvýšení počtu podoblastí, na které rozdělíme interval řešení má za následek:

   (a) vždy zvýšení přesnosti řešení,
   (b) zvýšení přesnosti v případě, že počet dělení na podoblasti nezpůsobí příliš vysoké řády matic a numerické nestability,
   (c) vždy neúměrné zvýšení časových nároků, proto se zvýšené přesnosti dosahuje jinými metodami.

2. Velikost elementů musí být pro celý uvažovaný interval řešení

   (a) vždy stejná,
   (b) pro každý element různá, aby bylo dosaženo co nejvyšší přesnosti řešení,
   (c) každý element může mít obecně libovolnou velikost.

3. Hodnoty c_1 a c_2 v rovnici (2.17) jsou:

   (a) funkce,
   (b) konstanty,
   (c) konstanty, pouze v případech, že je velikost elementů stejná v celém intervalu řešení.

4. Funkce $H_1(x)$ v rovnici (2.20) je funkce:

   (a) rostoucí,
   (b) klesající,

(c) konstantní.

5. Závisí funkce tvaru $H_1(x)$ na vzdálenosti uzlů uvažovaného elementu?

   (a) Ano.
   (b) Ne.
   (c) Ano pouze v případě, že elementy nemají stejnou délku.

6. Je obecně nutné, aby součet funkcí tvaru $H_1(x)$ a $H_2(x)$ byl v libovolném místě elementu roven číslu 1?

   (a) Ano, aby $\tilde{u}$ popisovalo i případné konstantní řešení DR.
   (b) Ne, postačí, aby byl roven libovolné konstantě (potom by ovšem u_i a u_{i+1} nenabývaly přímo hodnot řešení v uzlech).
   (c) Ne, součet nemusí být konstantní.

7. V případě, že by interval řešení dle obr. 2.6 byl rozdělen na 4 elementy, byl by počet funkcí tvaru:

   (a) stále zachován, tj. 2: $H_1(x)$ a $H_2(x)$,
   (b) zvýšen na 3, tj. $H_1(x)$, $H_2(x)$ a $H_3(x)$,
   (c) snížen na 1, tj. $H_1(x)$.

8. Dirichletova okrajová podmínka předepisuje:

   (a) hodnotu hledané proměnné v určitém uzlu,
   (b) hodnotu derivace hledané proměnné v určitém uzlu,
   (c) nemá návaznost na hledanou proměnnou.

9. V případě, že je známá derivace hledané proměnné v určitém bodě, potom:

(a) je známá i Dirichletova okrajová podmínka v témže bodě,
(b) lze předepsat von Neumannovu okrajovou podmínku v tomto bodě,
(c) není možné určit ani Dirichletovu ani von Neumannovu okrajovou podmínku pro tento bod.

10. V rovnici (2.31) je záporné znaménko u členu $u'(0)$ dáno:

(a) zápornou hodnotou prvku (1;1) matice soustavy,
(b) zápornou hodnotou prvku (4;4) matice soustavy,,
(c) způsobem dosazení horní a dolní integrační meze určitého integrálu.

Konec testu | Oprava testu

Počet správně zodpovězených otázek:

Získané body:

Procento úspěšnosti:

Kapitola 3

Prutové konstrukce

Průvodce studiem

V této kapitole aplikujeme veskrze teoretické poznatky ze dvou předcházejících kapitol na případ prutové konstrukce. Zopakujeme způsob odvození integrálu vážených reziduí pro element prutové konstrukce a budeme prezentovat řešení jak pro silnou, tak slabou formulaci. Aproximační funkci budeme definovat jako aproximační polynom a vše budeme řešit v maticové formě. Opět pohovoříme o váhových funkcích a jejích derivacích pro řešený případ prutové konstrukce, následně pohovoříme o setrvačném členu a deformačním členu rovnice odvozené pro prutový element v úvodu kapitoly. Oba členy vyjádříme pomocí uzlových parametrů, geometrických vlastností prvku a funkce tvaru. V závěru kapitoly pohovoříme o okrajových podmínkách.

Cíle

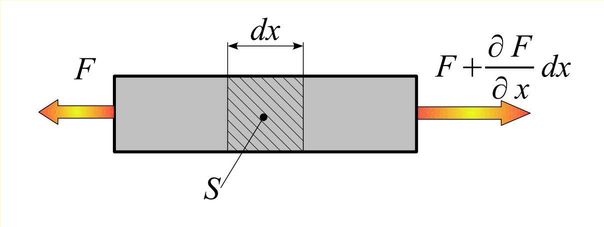
Po prostudování této kapitoly budeme rozumět pojmům:

- prutový element[1],
- silná formulace pro prutový element,
- slabá formulace pro prutový element,
- aproximační polynom pro řešení prutového elementu,
- funkce tvaru pro řešení prutového elementu,
- váhová funkce a její derivace pro řešení prutové elementu,
- setrvačný člen - matice hmotnosti,
- deformační člen - matice tuhosti,
- Dirichletova okrajová podmínka,
- von Neumannova okrajová podmínka.

3.1. Prutový element - slabá formulace

Uvažujme vybranou část jednoho členu prutové konstrukce[2], pro níž provedeme uvolnění a sestavení tzv. pohybové rovnice, tj. aplikujeme Newtonův zákon síly

[1] V českém jazyce užíváme obvykle pojem prvek, např. metoda konečných prvků. Nicméně z důvodu odlišení významu prvek matice a prvek MKP je snahou autorů užívat pro druhý význam pojmu *element*.
[2] Prut zde označuje člen konstrukce, který přenáší pouze osové síly a deformuje se tedy pouze ve směru své délky.



Obr. 3.1 Uvolnění elementu dx prutového prvku

$$
\begin{aligned}
m \cdot a &= \sum F, \\
\varrho\, S\, \mathrm{d}x \cdot \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} &= F + \frac{\partial F}{\partial x}\,\mathrm{d}x - F,
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

kde dále uplatníme konstitutivní vztah materiálu prutu vyplývající z Hookeova zákona $\frac{F}{S} = E\,\varepsilon$ a lineární člen geometrického vztahu pro poměrnou deformaci $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$. Jejich užitím obdržíme

$$
\begin{aligned}
F = SE\,\frac{\partial u}{\partial x} \quad &\text{a} \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(SE\,\frac{\partial u}{\partial x}\right), \\
\varrho\, S \cdot \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(SE\,\frac{\partial u}{\partial x}\right).
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

V rovnici (3.2) se obecně předpokládá, že jak plocha příčného řezu S, tak i Youngův modul pružnosti v tahu E jsou funkcemi souřadnice x, tj. můžou být po délce prvku proměnné.

Slabou formulaci rovnice (3.2) definujeme pro celý uvažovaný prut délky L následovně

$$\begin{aligned} R &= \varrho\, S \cdot \frac{\mathrm{d}^2 \tilde{u}}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(SE\,\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}\right), \\ I &= \int\limits_0^L w R \,\mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{3.3}$$

takže integrál vážených reziudií má v tomto případě podobu

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^L w \left\{\varrho\, S \cdot \frac{\mathrm{d}^2 \tilde{u}}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(SE\,\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}\right)\right\} \mathrm{d}x = \\ &= \underbrace{\int\limits_0^L w\, \varrho\, S \cdot \frac{\mathrm{d}^2 \tilde{u}}{\mathrm{d}t^2}\,\mathrm{d}x}_{\text{setrvačný člen}} - \underbrace{\int\limits_0^L w\, \frac{\partial}{\partial x}\left(SE\,\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}\right) \mathrm{d}x.}_{\text{deformační člen}} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Pro přehlednost nyní připusťme, že konstrukce je v klidu a tedy na základě Newtonových zákonů bude setrvačný člen nulový a věnujme proto pozornost pouze členu deformačnímu.

Slabou formulaci zde obdržíme analogicky k (1.20) aplikací integrace metodou per-partes:

$$\int_0^L w\,\frac{\partial}{\partial x}\left(SE\,\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}\right)\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{ccc} u = w & & v' = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(SE\,\dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial x}\right) \\ & \searrow & \\ u' = \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} & \rightarrow & v = SE\,\dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \end{array}\right| =$$

$$= \left[wSE\,\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}\right]_0^L - \int_0^L \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\cdot SE\,\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}\,\mathrm{d}x. \qquad (3.5)$$

Zpětným dosazením do integrálu vážených residuí (3.4) nabude tento podobu

$$\begin{aligned} I &= \int_0^L w\,\varrho\,S\cdot\frac{\mathrm{d}^2\tilde{u}}{\mathrm{d}t^2}\,\mathrm{d}x - \left(\left[wSE\,\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}\right]_0^L - \int_0^L \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\cdot SE\,\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}\,\mathrm{d}x\right) = \\ &= \int_0^L w\,\varrho\,S\cdot\frac{\mathrm{d}^2\tilde{u}}{\mathrm{d}t^2}\,\mathrm{d}x + \int_0^L \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\cdot SE\,\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}\,\mathrm{d}x - \left[wSE\,\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}\right]_0^L, \end{aligned} \qquad (3.6)$$

kde první integrál představuje setrvačnost a druhý integrál představuje tuhost uvažovaného prutu.

Podobně jako u ostatních aplikací slabé formulace bude i zde je další řešení závislé na dvou faktorech:

a) na volbě tvaru aproximační funkce pro $\tilde{u}$,

b) na volbě váhové funkce w, tj. na volbě způsobu vážení residuálů (např. metoda nejmenších čtverců, nebo Galerkinova metoda, aj.).

3.2. Aproximační polynom

Tvar aproximace pro deformaci prutů obvykle volíme polynom prvního stupně, tzn. že deformace prutů je aproximována lineární funkcí[1]. Zvolme tedy pro $\tilde{u}$ aproximaci ve tvaru (2.17), kterou pro jednoduchost zapíšeme maticově takto

$$\tilde{u}(x) = c_0 + c_1 x = \begin{Bmatrix} c_0 & c_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \end{Bmatrix} = \{\mathrm{c}\}^{\mathrm{T}} \{\mathrm{x}\} = \{\mathrm{x}\}^{\mathrm{T}} \{\mathrm{c}\} . \tag{3.7}$$

Jak bylo ukázáno již dříve (2.17), je vhodné transformovat tvar aproximace (3.7) do podoby, ve které mají hledané koeficienty c_i soustavy (3.7) přímou vazbu na hledané řešení $\tilde{u}$. Toho docílíme aplikací okrajových podmínek pro obecně zvolený element, tj. vyjádřením (3.7) pro oba jeho konce

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x = 0) &= c_0 + c_1 \cdot 0 = u_i, \\ \tilde{u}(x = L) &= c_0 + c_1 \cdot L = u_j. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Vzniklou soustavu rovnic (3.8) opět obvykle zapisujeme v maticové formě, tj.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}, \\ [\mathrm{A}] \{\mathrm{c}\} &= \{\mathrm{u_{uzl}}\} . \end{aligned} \tag{3.9}$$

[1] Pro prut namáhaný v oblasti elestických deformací, z materiálu s lineárním konstitutivním vztahem je lineární aproximace totožná s přesným řešením, tzn. že výsledky numerického řešení nebudou zatíženy aproximační chybou.

a provedeme její řešení pro vektor neznámých koeficientů aproximačního polynomu $\{\mathrm{c}\}$, tak že

$$\{\mathrm{c}\} = [\mathrm{A}]^{-1}\{\mathrm{u}_{\mathrm{uzl}}\} \tag{3.10}$$

pro tento případ nabude vyjádření konstant $\{\mathrm{c}\}$ následující podobu:

$$\begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/L & 1/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}.$$

Tento výsledek uplatníme zpátky ve vyjádření aproximačního polynomu (3.7), kdy po dosazení obdržíme

$$\tilde{u}(x) = \{\mathrm{x}\}^{\mathrm{T}}\{\mathrm{c}\} = \{\mathrm{x}\}^{\mathrm{T}}[\mathrm{A}]^{-1}\{\mathrm{u}_{\mathrm{uzl}}\} = \{1 \quad x\} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/L & 1/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}. \tag{3.11}$$

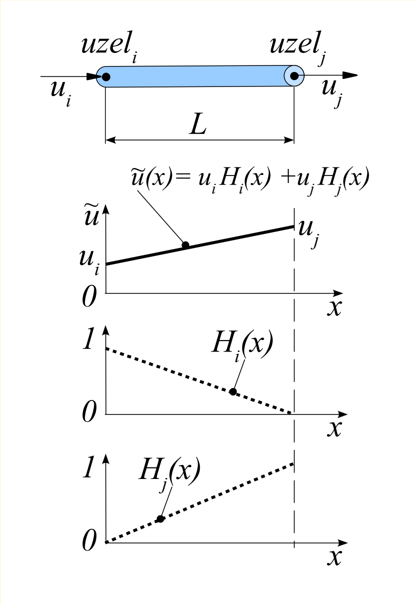
Roznásobením prvních dvou členů rovnice (3.11) docílíme původního záměru, tj. vyjádřit přibližné řešení $\tilde{u}$ pomocí konstant, které přímo souvisejí se samotným hledaným řešením (zde a v MKP obecně jsou těmito konstantami přímo hodnoty řešení v uzlech u_i, u_j, symbolicky $\{\mathrm{u}_{\mathrm{uzl}}\}$). Provedením zmíněného roznásobení bude

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x) = \left\{ \frac{L-x}{L} \quad \frac{x}{L} \right\} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} &= \{H_i(x) \quad H_j(x)\} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \\ &= \frac{L-x}{L} u_i + \frac{x}{L} u_j, \end{aligned} \tag{3.12}$$

což symbolicky zapisujeme opět maticovou formou

$$\tilde{u}(x) = \{H(x)\}^{\mathrm{T}}\{\mathrm{u}_{\mathrm{uzl}}\}, \tag{3.13}$$

kde první člen na pravé straně rovnice značí vektor funkcí tvaru.



Obr. 3.2 Grafické znázornění funkcí tvaru $H(x)$ a jejich významu ve vztahu (3.13)

V závislosti na úloze, kterou se chystáme řešit může nastat nutnost vyjádřit pomocí zvolené aproximace deformace struktury také její derivace. Může se jednat o derivace podle souřadnic (v tomto případě podle x), které např. u nosníků používáme k vyjádření úhlu natočení řezu, nebo jde o derivace podle času, kterými vyjadřujeme rychlosti a zrychlení příslušného místa struktury. Jak je možné nahlédnout výše, bude nutné pro první integrál (3.6) vyjádřit časovou derivaci $\frac{\mathrm{d}^2\tilde{u}}{\mathrm{d}t^2}$, kdy s využitím (3.13) obdržíme

$$\frac{\mathrm{d}^2\tilde{u}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\left\{H(x)\right\}^{\mathrm{T}}\left\{\mathrm{u}_{\mathrm{uzl}}\right\}\right).$$

Při uvážení, vztahu pro funkce tvaru, které jsou závislé pouze na souřadnicích v rámci elementu, a tudíž jsou na čase nezávislé a lze je vytknout před diferenciál, obdržíme následující vztah pro $\frac{\mathrm{d}^2\tilde{u}}{\mathrm{d}t^2}$

$$\frac{\mathrm{d}^2\tilde{u}}{\mathrm{d}t^2} = \left\{H(x)\right\}^{\mathrm{T}}\frac{\mathrm{d}^2\left\{\mathrm{u}_{\mathrm{uzl}}\right\}}{\mathrm{d}t^2}. \tag{3.14}$$

3.3. Váhové funkce a její derivace

V další řadě musíme zvolit metodu vážení residuí, kdy pro MKP se osvědčila Galerkinova metoda, podle které jsou váhové funkce odvozeny od tvaru samotné aproximace řešení

$$w_i = \frac{\partial\tilde{u}}{\partial u_i}, \qquad \text{kde } i = 1, 2, \ldots, \text{ velikost vektoru } \left\{\mathrm{u}_{\mathrm{uzl}}\right\} \tag{3.15}$$

označuje pořadové číslo jednotlivých složek vektoru aproximačních konstant, v tomto případě vektoru hodnot řešení v uzlech $\left\{\mathrm{u}_{\mathrm{uzl}}\right\}$.
Pro případ prutového elementu máme dvě váhové funkce w_i, protože vektor uzlových hodnot $\left\{\mathrm{u}_{\mathrm{uzl}}\right\}$ má pouze dvě složky, a to u_i a u_j. Tyto váhové fukce jsou pro Galerkinovu metodu

typické tím, že mají tvar jednotlivých funkcí tvaru, protože

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{\partial}{\partial u_i}\left(H_i(x)u_i + H_j(x)u_j\right) = H_i(x) = \frac{L-x}{L}, \\ w_2 &= \frac{\partial}{\partial u_j}\left(H_i(x)u_i + H_j(x)u_j\right) = H_j(x) = \frac{x}{L}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Letmým pohledem na tvary integrálů pro vážená rezidua (3.6) opět zjišťujeme, že i pro funkce tvaru budeme muset najít jejich derivace. V tomto případě budeme funkce tvaru diferencovat podle jediné souřadnice x a výsledky můžeme psát ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}H_i(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{L-x}{L}\right) = -\frac{1}{L}, \\ \frac{\mathrm{d}w_2}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}H_j(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{L}\right) = \frac{1}{L}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Tímto je uzavřená příprava k samotné aplikaci metody vážených reziduálů, takže nyní můžeme přistoupit k odvození dílčích matic a následně k sestavení výsledné rovnici slabé formulace.

3.4. Setrvačný člen - matice hmotnosti

Pro výše zvolený tvar aproximace $\tilde{u}$ a k němu odvozené funkce tvaru můžeme pokračovat vyčíslením jednotlivých částí integrálu vážených reziduí. Tento proces provádíme ve smyslu (2.24) pro každý element, kde u jednotlivého elementu máme tolik složkových rovnic integrálu vážených reziduí, kolik je váhových funkcí w pro tento element, tzn. tento počet odpovídá počtu funkcí tvaru $H(x)$ definovaných pro příslušný element.

Pro první integrál (3.6) budeme pro náš element a s využitím (3.14) postupovat následovně

$$\int_0^L w\,\varrho\,S\cdot\frac{\mathrm{d}^2\tilde{u}}{\mathrm{d}t^2}\,\mathrm{d}x=\int_{(\ell)} w\,\varrho\,S\cdot\{H(x)\}^{\mathrm{T}}\,\frac{\mathrm{d}^2\{\mathrm{u}_{\mathrm{uzl}}\}}{\mathrm{d}t^2}\,\mathrm{d}x=$$

$$=\int_{(\ell)} w\,\varrho\,S\,\{H(x)\}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{d}x\cdot\frac{\mathrm{d}^2\{\mathrm{u}_{\mathrm{uzl}}\}}{\mathrm{d}t^2}. \qquad (3.18)$$

Uplatněním dříve zvolených váhových funkcí (pro zvolený aproximační polynom (3.7) máme dvě váhové funkce) se integrál (3.18) rozpadne na následující dva integrály

$$\int_{(\ell)} w_1\,\varrho\,S\,\{H(x)\}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{d}x\cdot\frac{\mathrm{d}^2\{\mathrm{u}_{\mathrm{uzl}}\}}{\mathrm{d}t^2}=\int_{(\ell)} H_i(x)\,\varrho\,S\,\{H(x)\}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{d}x\cdot\frac{\mathrm{d}^2\{\mathrm{u}_{\mathrm{uzl}}\}}{\mathrm{d}t^2},$$

$$\int_{(\ell)} w_2\,\varrho\,S\,\{H(x)\}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{d}x\cdot\frac{\mathrm{d}^2\{\mathrm{u}_{\mathrm{uzl}}\}}{\mathrm{d}t^2}=\int_{(\ell)} H_j(x)\,\varrho\,S\,\{H(x)\}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{d}x\cdot\frac{\mathrm{d}^2\{\mathrm{u}_{\mathrm{uzl}}\}}{\mathrm{d}t^2},$$

a protože váhových funkcí je přesně tolik, kolik je funkcí tvaru, zobecňujeme posledně zapsané vztahy v maticové podobě takto:

$$\int_{(\ell)} w\,\varrho\,S\cdot\frac{\mathrm{d}^2\tilde{u}}{\mathrm{d}t^2}\,\mathrm{d}x=\int_{(\ell)} \varrho\,S\,\{H(x)\}\,\{H(x)\}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{d}x\cdot\frac{\mathrm{d}^2\{\mathrm{u}_{\mathrm{uzl}}\}}{\mathrm{d}t^2}. \qquad (3.19)$$

Samotný integrál v rovnici (3.19) řešíme následovně:

$$\int\limits_{(\ell)} \varrho\, S \left\{ H(x) \right\} \left\{ H(x) \right\}^{\mathrm{T}} \mathrm{d}x = \int\limits_{(\ell)} \varrho\, S \begin{Bmatrix} H_i(x) \\ H_j(x) \end{Bmatrix} \left\{ H_i(x) \quad H_j(x) \right\} \mathrm{d}x = [\mathrm{M_e}]. \tag{3.20}$$

Tento vztah (3.20) definuje rozložení a kvantifikaci setrvačných účinků pro (3.19), které se děje tzv. maticí hmotnosti. Typické pro vztah (3.20), podle kterého sestavíme matici hmotnosti je, že tato vznikne součinem vektorů tvarových funkcí. Pro náš případ nabude vztah pro matici hmotnosti, s funkcemi tvaru dle (3.12), následující podobu:

$$[\mathrm{M_e}] = \int\limits_{(\ell)} \varrho\, S \left\{ H(x) \right\} \left\{ H(x) \right\}^{\mathrm{T}} \mathrm{d}x = \int\limits_0^L \varrho\, S \begin{Bmatrix} \dfrac{L-x}{L} \\ \dfrac{x}{L} \end{Bmatrix} \left\{ \dfrac{L-x}{L} \quad \dfrac{x}{L} \right\} \mathrm{d}x =$$

kde pokud hustota ϱ a plocha příčného řezu S budou po celou délku prvku konstatní, vytkneme je před integrál

$$= \varrho\, S \int\limits_0^L \begin{bmatrix} \left(\dfrac{L-x}{L}\right)^2 & \dfrac{L-x}{L} \cdot \dfrac{x}{L} \\ \dfrac{L-x}{L} \cdot \dfrac{x}{L} & \left(\dfrac{x}{L}\right)^2 \end{bmatrix} \mathrm{d}x = \frac{\varrho\, S}{L^2} \int\limits_0^L \begin{bmatrix} (L-x)^2 & x(L-x) \\ x(L-x) & (x)^2 \end{bmatrix} \mathrm{d}x$$

odkud po integraci každého členu zvlášť obdržíme výslednou podobu matice hmotnosti

$$[\mathrm{M_e}] = m_{\mathrm{e}} \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix}, \text{ přičemž} \quad m_{\mathrm{e}} = \varrho S L \tag{3.21}$$

označuje celkovou hmotnost elementu.

Na posledním vztahu (3.21), tj. vztahu pro matici hmotnosti prutového elementu, vidíme, že po diskretizaci kontinua na elementy se celková hmotnost nezmění, protože součet koeficientů v matici je roven jedné. Koeficienty v matici hmotnosti pouze přiřazují jednotlivým stupňům volnosti patřičné podíly setrvačné hmoty. Hlavní užití matice hmotnosti tedy bude v dynamických úlohách, kde jejím prostřednictvím budeme schopni do výpočtu adekvátně zahrnout setrvačné účinky vlastní struktury, tj. konstrukce či strojního dílu. Nicméně tato matice najde uplatnění i v úlohách statických, u kterých požadujeme zahrnout do výpočtu vlastní tíhu struktury. Tuto podmínku můžeme realizovat D'Alambertovým principem, pro který budeme uvažovat umístění struktury do prostředí beztíže a vliv vlastní tíhy simulujeme konstantním zrychlením struktury proti smyslu uvažovaného tíhového zrychlení. Tento postup je obvykle interně uplatňován při zatěžování řešené struktury vlastní tíhou.

3.5. Deformační člen - matice tuhosti

Nyní se budeme věnovat řešení v pořadí druhého integrálu (3.6), kde budeme pro uvažovaný prutový element a zvolený aproximační polynom (3.13) postupovat následovně

$$
\begin{aligned}
\int_0^L \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\, SE\, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}\, \mathrm{d}x &= \int_{(\ell)} \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\, SE\, \frac{\partial}{\partial x} \left(\{H(x)\}^{\mathrm{T}} \{\mathrm{u}_{\mathrm{uzl}}\} \right) \mathrm{d}x = \\
&= \int_{(\ell)} \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\, SE\, \frac{\partial \{H(x)\}^{\mathrm{T}}}{\partial x}\, \mathrm{d}x\, \{\mathrm{u}_{\mathrm{uzl}}\}\,. \qquad (3.22)
\end{aligned}
$$

Obsah

65. strana ze 131

Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Podobně jako u členu setrvačného (první integrál (3.6)) pokračujeme i zde uplatněním váhových funkcí, a protože máme pro zvolený aproximační polynom (3.7) dvě váhové funkce, rozpadne se integrál (3.22) na následující dva integrály

$$\int_{(\ell)} \frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}x} SE \frac{\partial \{H(x)\}^{\mathrm{T}}}{\partial x} \mathrm{d}x \, \{\mathrm{u}_{\mathrm{uzl}}\} = \int_{(\ell)} \frac{\mathrm{d}H_i(x)}{\mathrm{d}x} SE \frac{\partial \{H(x)\}^{\mathrm{T}}}{\partial x} \mathrm{d}x \, \{\mathrm{u}_{\mathrm{uzl}}\},$$

$$\int_{(\ell)} \frac{\mathrm{d}w_2}{\mathrm{d}x} SE \frac{\partial \{H(x)\}^{\mathrm{T}}}{\partial x} \mathrm{d}x \, \{\mathrm{u}_{\mathrm{uzl}}\} = \int_{(\ell)} \frac{\mathrm{d}H_j(x)}{\mathrm{d}x} SE \frac{\partial \{H(x)\}^{\mathrm{T}}}{\partial x} \mathrm{d}x \, \{\mathrm{u}_{\mathrm{uzl}}\},$$

a protože váhových funkcí je přesně tolik, kolik je funkcí tvaru, zobecňujeme posledně zapsané vztahy v maticové podobě takto:

$$\int_{(\ell)} \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} SE \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \mathrm{d}x = \int_{(\ell)} SE \frac{\mathrm{d}\{H(x)\}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial \{H(x)\}^{\mathrm{T}}}{\partial x} \mathrm{d}x \, \{\mathrm{u}_{\mathrm{uzl}}\}. \tag{3.23}$$

Samotné řešení integrálu v rovnici (3.23) provádíme následovně:

$$\int_{(\ell)} SE \frac{\partial \{H(x)\}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial \{H(x)\}^{\mathrm{T}}}{\partial x} \mathrm{d}x =$$

$$= \int_{(\ell)} SE \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial H_i(x)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial H_j(x)}{\partial x} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial H_i(x)}{\partial x} & \dfrac{\partial H_j(x)}{\partial x} \end{Bmatrix} \mathrm{d}x = [\mathrm{K_e}]. \tag{3.24}$$

Roznásobením vektorů a následným řešením integrálů vzniklých ze vztahu (3.24) obdržíme čtvercovou matici, která kvantifikuje vzájemné ovlivňování, resp. provázanost uzlových deformačních parametrů daného elementu (tyto parametry jsou obsaženy ve vektoru uzlových hodnot $\{\mathrm{u_{uzl}}\}$, viz (3.23)). Toto ovlivňování deformačních parametrů se děje přenosem silových účinků skrz na skrz elementem a s tím související jeho vlastní deformací, a proto tato čtvercová matice bývá obvykle nazývána maticí tuhosti elementu, protože popisuje tuhost elementu vůči deformacím, které je možné vyjádřit kombinací hodnot vektoru uzlových deformačních parametrů. Pro náš případ nabude vztah pro matici tuhosti, s derivacemi funkcí tvaru dle (3.17), následující podobu:

$$[\mathrm{K_e}] = \int_{(\ell)} SE \, \frac{\partial \{H(x)\}}{\mathrm{d}x} \, \frac{\partial \{H(x)\}^{\mathrm{T}}}{\partial x} \, \mathrm{d}x = \int_0^L SE \begin{Bmatrix} \dfrac{-1}{L} \\ \dfrac{1}{L} \end{Bmatrix} \left\{ \dfrac{-1}{L} \quad \dfrac{1}{L} \right\} \mathrm{d}x =$$

kde pokud plocha příčného řezu S a Youngův modul pružnosti v tahu E budou po celou délku prvku konstatní, vytkneme je před integrál a současně roznásobením obou vektorů získáme

$$= SE \int_0^L \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L^2} & \dfrac{-1}{L^2} \\ \dfrac{-1}{L^2} & \dfrac{1}{L^2} \end{bmatrix} \mathrm{d}x = \frac{SE}{L^2} \int_0^L \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathrm{d}x$$

a odtud buď integraci každého členu matice samostatně, nebo v tomto případě vytknutím matice konstant před integrál a integraci $\int_0^L \mathrm{d}x = L$ obdržíme výslednou podobu matice tuhosti ve tvaru

$$[\mathrm{K_e}] = k_\mathrm{e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ přičemž} \quad k_\mathrm{e} = \frac{SE}{L} \tag{3.25}$$

značí podélnou tuhost uvažovaného prutového elementu délky L, plochy průřez S a materiálu s Youngovým modulem pružnosti E.

3.6. Okrajové podmínky

Předcházejícími dvěma kapitolami (3.4 a 3.5) bylo ukázáno, jak uplatněním slabé formulace a aproximace řešení lze získat popis setrvačných a deformačních vlastností části kontinua pro tzv. element řešené oblasti (elementu ve smyslu MKP). Takto získané vyjádření uplatňujeme potom v konečné rovnici integrálu vážených reziduí, přičemž jak již bylo poukázáno dříve, ani jeden z těchto členů není nijak ovlivněn okrajovými podmínkami, a proto je takto získaný popis mechanických vlastností řešení oblasti použitelný pro libovolné okrajové podmínky. Důsledkem této skutečnosti je fakt, že bez úpravy konečných rovnic vážených reziduálů podle předepsaných okrajových podmínek, mají tyto rovnice nekonečně mnoho řešení (musí být schopny popsat všechny varianty okrajových podmínek), což se ve finále projevuje tím, že matice soustavy je singulární. Tuto singularitu u napěťově–deformačních úloh (tzv. strukturálních úloh) odstraníme pouze zamezením pohybu struktury jako tuhého tělesa, tzn. vhodnými Dirichletovými okrajovými podmínkami, kterými předepisujeme hodnoty vybrané množiny hledaných primárních uzlových neznámých. (Dirichletovy okrajové podmínky proto bývají nazývány podmínkami kinematickými.) Uplatněním Dirichletových okrajových podmínek úpravou rovnice vážených reziduí se upraví konečný tvar matice soustavy (matice bude pozitivně definitní) a rovnice bude mít jedno řešení.[1]

Druhý druh okrajových podmínek, tzv. von Neumannovy podmínky jsou zahrnuty ve vyjádření integrálu vážených reziduí (3.6), neboť jsou obsaženy ve výsledném členu integrace per-partes: $\left[wSE\,\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\right]_0^L$. Tyto okrajové podmínky bývají často nazývány buď silovými nebo také deformačními podmínkami. Důvodem pojmenování je spojitost této podmínky s její významem ve strukturálních úlohách, kdy výrazem $\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}$ předepisujeme jako by hodnotu poměrné deformace, nebo vezmeme-li v úvahu celý součin mimo váhovou funkci w, tj. $SE\,\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}$ pak tento výraz má rozměr Newton a odpovídá velikosti síly působící na hranici ve směru uvažovaného $\tilde{u}$ (v tomto případě se bude jednat o normálové, resp. osové síly).

Deklarovaný význam síly na hranici oblasti lze pro von Neumannovu okrajovou podmínku odvodit postupem z dřívější kapitoly, viz (2.9). Uvažujme proto podrobně člen von Neumannovy podmínky dle (3.6) a proveďme jeho další řešení

$$\left[wSE\,\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\right]_0^L = w|_{x=L}\cdot\left(SE\,\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\right)_{x=L} - w|_{x=0}\cdot\left(SE\,\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\right)_{x=0}, \tag{3.26}$$

kde s uvážením (3.2) můžeme psát

$$\left[wSE\,\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\right]_0^L = w|_{x=L}\cdot F|_{x=L} - w|_{x=0}\cdot F|_{x=0}\,. \tag{3.27}$$

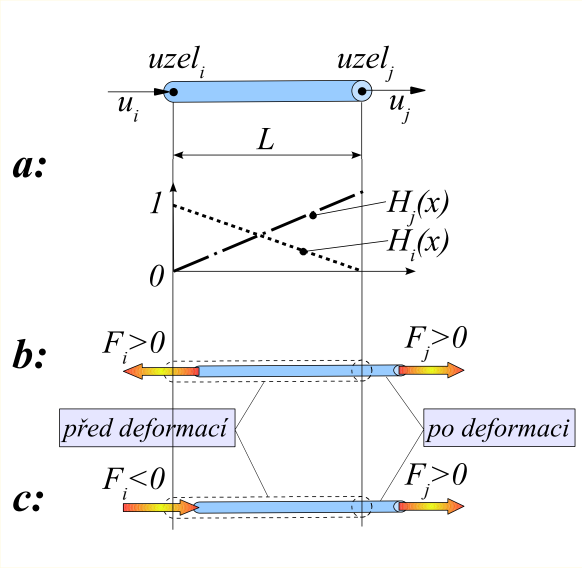
V rovnicích (3.26) a (3.27) označují výrazy $w|_x$ hodnoty váhových funkcí pro příslušné souřadnice x a výrazy $SE\,\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\big|_x$, resp. $F|_x$ značí hodnoty (absolutní velikosti) von Neumannových podmínek v místech $x = 0$ a $x = L$, viz obr. 3.3 a). Jsou to vždy místa na okrajích

[1]Pozitivně definitní vlastnost matice a jedno řešení rovnic vážených reziduí lze prokázat pro tzv. lineární úlohy, tj. úlohy, které vedou na soustavu lineárních algebraických rovnic.

vyšetřované oblasti, která jsme již dříve pojmenovali termínem *uzly* a zpravidla je indexujeme písmeny abecedy $i, j, \ldots, p$ pro 8 uzlové elementy bez meziuzlů. Z důvodů, že všechny veličiny v příslušném místě indexujeme stejně, píšeme obvykle

$$F|_{x=L} = F(x=L) = F_j, \qquad F|_{x=0} = F(x=0) = F_i,$$

jak je také patrné z obr. 3.3 b). K vyčíslení výrazu (3.27) bude opět nezbytná znalost hodnot váhových funkcí, pro které dle (2.22) platí, že jejich součet je v každém místě oblasti roven 1. Nicméně tato informace není pro správnou práci s von Neumannovou podmínkou postačující, protože jednotlivé váhové funkce určují, do které z rovnic integrálů vážených reziuí příslušná hodnota von Neumannovy podmínky patří. Ať už z obr. 3.2, nebo obdobných pro předchozí tvary aproximace (obr. 2.1 a obr. 2.2) můžeme zjistit, že přímo v uzlu je nenulová pouze jedna z dílčích složek aproximačních funkcí, a tedy pro Galerkinovu metodu pouze jedna z váhových funkcí. Tato váhová funkce je tomuto uzlu příslušná a ostatní váhové funkce, příslušné jiným uzlům, zde nabývají hodnotu nulovou, viz např. (2.21) nebo a (3.13), resp. (3.16). Tato vlastnost váhových funkcí způsobí, že se příslušná hodnota von Neumannovy podmínky projeví pouze ve vybrané rovnici integrálu vážených reziduí, a to vždy v rovnici příslušející patřičné váhové funkci w_k, kde k označuje index příslušné váhové funkce. Tento index je zároveň shodný s označením příslušné hledané hodnoty primární uzlové neznámé (obecně je to index příslušející patřičnému stupni volnosti uzlu).



Obr. 3.3 Grafické znázornění von Neumannových okrajových podmínek a jejich fyzikálního významu ve vztahu (3.28)

Rovnici von Neumannovy podmínky (3.27) můžeme proto symbolicky zapsat ve tvaru

$$\left[wSE\,\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right]_0^L = 1|_{w_2} \cdot F_j - 1|_{w_1} \cdot F_i = F_j|_{w_2} - F_i|_{w_1}\,, \tag{3.28}$$

kde index u svislé závorky $|_{w_1}$, resp. $|_{w_2}$ symbolicky značí příslušnost té které silové okrajové podmínky k odpovídající rovnici integrálu vážených reziduí.

Obsah
71. strana ze 131
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka/Okno

Na tomto místě je vhodné vysvětlit i další, souhrnný význam výrazu von Neumannovy okrajovy podmínky. Tento lze vyvodit rozborem rovnice integrálu vážených reziduí (3.6), ve která obsahuje tři členy: setrvačný člen, deformační člen a člen von Neumannovy okrajové podmínky. Uvažujme situaci, kdy těleso nebude měnit svůj pohybový stav, potom setrvačný člen rovnice (3.6) bude nulový (tzn. že změna kinetické energie bude nulová). Budeme-li dále navíc uvažovat těleso absolutně tuhé, pak i deformační člen bude nulový, protože energie na deformaci absolutně tuhého tělesa je nulová (těleso se nedeformuje). Pro takový případ zůstane v rovnici (3.6) pouze člen von Neumannovy okrajové podmínky, který v součtu musí být roven nule, viz (1.6), nebo (1.21), protože $I = 0$. Lze tedy konstatovat, že člen von Neumannovy podmínky představuje ve svém důsledku skalární složkovou rovnici statické rovnováhy vnějších sil. Pro uvažovaný prutový element, jak je znázorněn na obr. 3.3 b), bude na základě (3.28) platit, že kladnou hodnotu $\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon$ způsobí dvojice sil: akce F_j v uzlu j doprava a proti ní reakce[1] F_i v uzlu i doleva, přičemž obě hodnoty F_i, resp. F_j budou kladné.

3.7. MKP rovnice prutového elementu

Předcházející podkapitoly (3.2 až 3.6) se postupně věnuji přípravě aproximační funkce a následnému řešení jednotlivých členů rovnice integrálu vážených reziduí slabé formulace (3.6) pro prutový element. V každé z uvedených kapitol bylo dospěno k dílčím výsledkům, které nám zpětným dosazením do (3.6) umožní sestavit výslednou MKP rovnici popisující chování kontinua namáhaného pouze osovými silami.

Pro účel sestavení zmíněné MKP rovnice prutového elementu vyjděme z posledního

[1] Označení akce a reakce je zde jen orientační, neboť v tomto okamžiku není známo kde je předepsaná Dirichletova okrajová podmínka. V každém případě je toto označení libovolně zaměnitelné.

uvedeného tvaru slabé formulace (3.6), kam dosadíme za setrvačný člen ve smyslu (3.19) a (3.20), za deformační člen ve smyslu (3.23) a (3.23) a za von Neumannovu podmínku ve smyslu (3.28), čímž obdržíme

$$\begin{aligned} I &= \int_0^L w\,\varrho\,S \cdot \frac{\mathrm{d}^2\tilde{u}}{\mathrm{d}t^2}\,\mathrm{d}x + \int_0^L \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} \cdot SE\,\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\,\mathrm{d}x - \left[wSE\,\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\right]_0^L \\ &= \frac{m_\mathrm{e}}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} + k_\mathrm{e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -F_i \\ F_j \end{Bmatrix}, \end{aligned} \tag{3.29}$$

kde první řádek odpovídá integrálu váženému podle váhové funkce uzlu i, tj. $w|_{x=0}$ a druhý řádek integrálu váženému podle váhové funkce uzlu j, tj. $w|_{x=L}$. Konstanty m_e, k_e označují hmotnost, resp. podélnou tuhost uvažovaného elementu. Jelikož hledáme řešení, pro něž budou rovnice vážených reziduí rovny nule upravujeme rovnici (3.29) do podoby, ve které jsou členy obsahující neznámé na levé straně a ostatní členy na straně pravé. Pro náš případ nabude tedy rovnice (3.29) podobu

$$\frac{m_\mathrm{e}}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad + \quad k_\mathrm{e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad = \quad \begin{Bmatrix} -F_i \\ F_j \end{Bmatrix}. \tag{3.30}$$

Zde bude vhodné ještě chvíli věnovat pozornost vektoru pravé strany rovnice (3.30). Tento vektor je sám o sobě výsledkem zpracování von Neumennových okrajových podmínek, viz (3.28) a tomu odpovídají i znaménka jednotlivých sil vektoru pravé strany. Jak bylo na konci kap. 3.6 uvedeno, představují jednotlivé členy von Neumannovy okrajové podmínky vnější síly a jejich součet musí být pro statickou rovnováhu roven nule. Tedy vyjádření pravé strany dle (3.30) odpovídá orientaci sil na obr. 3.3 b). Hlavní nevýhodou tohoto zápisu je skutečnost, že jsou aplikovány dva systémy kladné orientace okrajových podmínek: jeden pro podmínky Dirichletovy obr. 3.3 a) a druhý pro podmínky von Neumannovy obr. 3.3 b). Pro praktické uplatnění je tento způsob práce s okrajovými podmínkami velmi nevhodný, a proto se oba systémy sjednocují, takže kladná orientace Dirichletových i von Neumanových (tj. např. uzlových posuvů a uzlových sil) jsou identické a jsou dány jednotným systémem pro směry a orientace hledaných řešení u, tj. orientace dle obr. 3.3 a) a obr. 3.3 c). Pro takto zvolený systém kladných orientací okrajových podmínek dojde v (3.30) ke změně znaménka u složky F_i a výsledná rovnice slabé formulace, tzn. výsledný tvar maticového zápisu MKP rovnice prutového elementu je

$$\frac{m_\mathrm{e}}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad + \quad k_\mathrm{e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad = \quad \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix}. \tag{3.31}$$

Sjednocením obou systémů orientace okrajových podmínek nedojde ale ke změně požadavku, aby součet sil vektoru pravé strany zůstal nulový, a proto ve výsledku bude jedna ze složek F_i, F_j záporná. O tom, která ze složek bude záporná ovšem rozhodnou až předepsané Dirichletovy okrajové podmínky.

Postup, kterým byla získána výsledná rovnice slabé formulace prutového elementu (3.31) je opakovatelný i pro ostatní způsoby diskretizace kontinua, a proto lze konstatovat, že obecně bude výsledek slabé formulace nabývat tvaru[1]

$$[\mathrm{M_e}] \cdot \frac{\mathrm{d}^2\left\{\mathrm{u_{uzl}}\right\}}{\mathrm{d}t^2} \quad + \quad [\mathrm{K_e}] \cdot \left\{\mathrm{u_{uzl}}\right\} \quad = \quad \left\{\mathrm{F_e}\right\}. \tag{3.32}$$

[1]Tento tvar vychází z Newtonova zákona síly pro elasticky deformovatelné 1D kontinuum, přičemž nebyly zahrnuty žádné členy popisující disipaci energie (tlumicí účinky). Případné distribuované zatížení bude integrací dle pravidel slabé formulace přičteno k jednotlivým prvkům vektoru pravé strany, která tím ale nezmění tvar sloupcového vektoru.

Pro tento uvažovaný případ vyjadřuji rovnice (3.30), resp.(3.32) pohybové rovnice kmitání koncových bodů lineární pružiny, jejíž hmotnost je rozložená rovnoměrně po délce pružiny. Pro statické úlohy bude vektor uzlových zrychlení roven nule (tímto zanedbáme vlastní tíhu pružiny), nebo dle D'Alambertova principu bude roven zrychlení tíhovému, se záporně uvažovanou orientací. Tímto ovšem změní setrvačný člen svůj charakter z neznámé na hodnotu známou, a proto může být převeden na pravou stranu rovnice (3.32), čímž bude do řešení zavedeno zatížení od vlastní tíhy. Bude-li např. vektor tíhového zrychlení orientován shodně s podélnými posuvy v uzlech, tj. shodně s posuvy u_i a u_j nabude rovnice (3.32) následující podobu

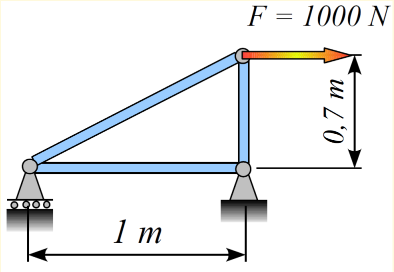
$$[\mathrm{K_e}] \cdot \{\mathrm{u_{uzl}}\} \quad = \quad \{\mathrm{F_e}\} \quad + \quad [\mathrm{M_e}] \cdot \begin{Bmatrix} g \\ g \end{Bmatrix}, \tag{3.33}$$

kde g značí hodnotu tíhového zrychlení.

3.8. Příklad řešení prutové soustavy

Popis úlohy

V tomto ukázkovém příkladě vyřešíme osové síly ve všech členech prutové soustavy dle obrázku. Řešení provedeme metodou konečných prvků v programu ANSYS, prostředí Mechanical APDL. Užitý program používá k řešení matematický aparát popsaný v této kapitole, matice tuhostí jsou určeny vztahem (3.25), výsledná maticová rovnice pro řešení je sestavena dle (3.33) (v tomto případě bez vlivu vlastní tíhy, poslední člen).



Videosoubor s ukázkou řešení soustavy tří prutů dle obrázku.

Poznámka

Zvláštností prezentované úlohy je fakt, že hledané osové síly nejsou závislé na fyzikálních vlastnostech prutů (průřezová plocha, materiálové vlastnosti), nicméně užitá metoda řešení je tzv. deformační, tj. osové síly jsou určeny na základě posunutí koncových bodů prutů. K jejich určení je ovšem nutné tyto fyzikální vlastnosti v MKP zadat. Toto je obecně platné pro staticky určité úlohy, kde se tuhostí těles nepodílí na poměru rozložení osových sil prutů, nebo reakcí obecně.

3.9. Testové otázky

Spustit test

1. Rovnice (3.1) popisuje chování prutové konstrukce z hlediska:

   (a) pouze statického chování,
   (b) i statického chování,
   (c) dynamického chování, avšak pouze za předpokladu konstantní hustoty.

2. Setrvačný člen v rovnici (3.4) je možno neuvažovat za předpokladu:

   (a) malých zatěžujících sil,
   (b) není-li požadováno řešení v závislosti na čase,
   (c) konstantního průřezu prutu.

3. V případě, že délka elementu e_1 je poloviční vůči elementu e_2, potom tuhost elementu e_1 je oproti e_2:

   (a) poloviční,
   (b) dvojnásobná,
   (c) čtvrtinová, protože tuhost je úměrná čtverci délky.

4. Člen $\varrho\, S\, \mathrm{d}x$ v rovnici (3.1) vyjadřuje:

   (a) zrychlení příslušného elementu,
   (b) objem příslušného elementu,
   (c) hmotnost příslušného elementu.

5. Po sestavení vztahu pro integrál vážených reziduí bude výsledek závislý na:

(a) pouze tvaru aproximační funkce,
(b) pouze na volbě váhové funkce,
(c) jak na tvaru aproximační funkce, tak na užité volbě váhové funkce.

6. V případě užití pouze lineárního vztahu mezi napětím a poměrnou deformací lze v případě prutové konstrukce:

(a) dosáhnout pouze přibližných výsledku,
(b) dosáhnout vždy přesných výsledku,
(c) přesnost výsledku závisí na poctu elementu, na které je prut rozdělen.

7. Počet váhových funkcí a funkcí tvaru je v případě řešení prutových konstrukcí:

(a) stejný,
(b) funkcí tvaru je $2\times$ více,
(c) funkcí tvaru je $2\times$ méně.

8. Je možno tvar matice hmotnosti dle (3.21) užít i v případě, že se průřez prutu po délce mění?

(a) Ano.
(b) Ne.
(c) Ano, pouze v případě, že se s délkou nemění hustota.

9. Rozměr matice tuhosti elementu je obecně dán:

(a) počtem uzlů definujících element,

(b) počtem stupňů volnosti daného elementu,
(c) počtem konstant v aproximační funkci.

10. V případě, že po diskretizaci obsahuje úloha na intervalu řešení n stupňů volnosti, potom počet všech neznámých ve vzniklé soustavě rovnic:

(a) vždy menší než n,
(b) přesně roven n,
(c) není možné určit, protože závisí na zadaných okrajových podmínkách a zatížení.

11. Vypočteme-li hodnotu síly F_i v rovnici (3.30) jako zápornou, znamená to, že:

(a) se jedná o reakci,
(b) síla působí proti směru zavedení znaménkové konvence pro daný element,
(c) síla působí v tom směru, který způsobí zkrácení příslušného elementu.

12. Vypočteme-li hodnotu síly F_i v rovnici (3.31) jako zápornou, znamená to, že:

(a) se jedná o reakci,
(b) síla působí proti směru zavedení znaménkové konvence pro daný element,
(c) síla působí v tom směru, který způsobí zkrácení příslušného elementu.

13. Člen na pravé straně v rovnici (3.31) obsahuje:

(a) pouze zadané vnější síly,
(b) pouze neznámé reakce,
(c) muže obsahovat jak zadané vnější síly, tak i reakce.

14. Tuhost elementu k_e v rovnici (3.25) je veličina :

(a) skalární,
(b) vektorová,
(c) nelze předem říci, závisí na počtu členů v aproximační funkci.

15. Kladná hodnota poměrné deformace dle obr. 3.3 znamená, že se:

(a) prut natáhne,
(b) prut zkrátí,
(c) zvětší se průřez prutu.

16. Prodloužení prutu dle obr. 3.3 je dosaženo silami F_i a F_j. Jejich kladné hodnoty znamenají, že:

(a) obě síly působí ve směru kladného směru znaménkové konvence,
(b) obě síly způsobují kladnou hodnotu poměrné deformace prutu,
(c) se prut posune ve směru kladné znaménkové konvence.

Konec testu   Oprava testu

Počet správně zodpovězených otázek:

Získané body:

Procento úspěšnosti:

Kapitola 4

Intuitivně od inženýrského pohledu k MKP

Průvodce studiem

V této kapitole si představíme inženýrský způsob řešení problému soustavy lineárních pružin. Na takovouto soustavu lze převést velké množství úloh řešených v technické praxi. Na základě jednoduchých úvah a intuice odvodíme výsledky, které nám již jsou známy z předcházejících kapitol, kde byly využity povětšinou matematického přístupu. Vše prezentujeme na jednoduchém případu namáhaných osových členů.

Cíle

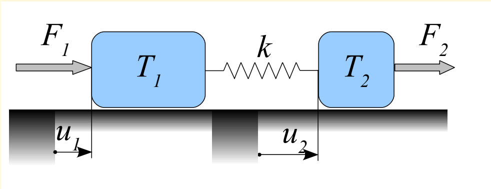
Po prostudování této kapitoly budeme rozumět pojmům:

- systém lineárních pružin,
- osový člen,
- inženýrský přístup k sestavení rovnic,
- rovnice rovnováhy MKP.

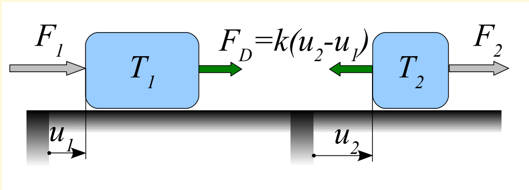
4.1. Inženýrský a matematický přístup

Nyní bude představeno intuitivní využití metody konečných prvků s použitím lineárních pružin. Soustava lineárních pružin popisuje celou řadu inženýrských aplikací jako např.: osově namáhané členy, členy namáhané krutem, ale formálně identický zápis mají i soustavy pro elektrické obvody, vedení tepla apod. V této kapitole si ukážeme inženýrský intuitivní postup analytického řešení lineárního systému sestaveného z 1D členů.

Uvažujeme v první fázi pouze dvě tělesa T_1 a T_2 spojené lineární pružinou tuhosti k, viz obr. 4.1, na kterém budeme demonstrovat princip inženýrkého přístupu sestavení MKP rovnic. Výchylky těles T_1 a T_2 označíme u_1, resp. u_2, přičemž na obě tělesa působí síly F_1 a F_2. V dalším budeme uvažovat, že výchylka tělesa T_2 je větší než výchylka tělesa T_1, tedy $u_2 > u_1$.



Obr. 4.1 Dvě tělesa spojená pružným členem



Obr. 4.2 Dvě tělesa spojená pružným členem

Provedeme uvolnění těles, kde pružný člen nahradíme silou úměrnou jeho deformaci.

Za předpokladu, že se nebude měnit pohybový stav těles, resp. jeho změna bude velmi malá a tudíž jí můžeme zanedbát, bude pro obě tělesa T_1 a T_2 platit rovnice statické rovnováhy sil, který může být zapsán např. následovně

$$\begin{array}{cc} \text{Těleso } T_1: & \text{Těleso } T_2: \\ F_1 + k(u_2 - u_1) = 0 & F_2 - k(u_2 - u_1) = 0, \end{array} \tag{4.1}$$

roznásobením závorek a přeuspořádáním bude

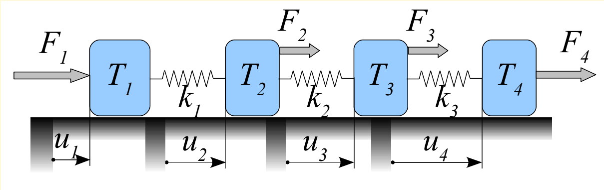
$$ku_1 - ku_2 = F_1 \qquad -ku_1 + ku_2 = F_2,$$

což lze přehledně zapsat maticovou formou:

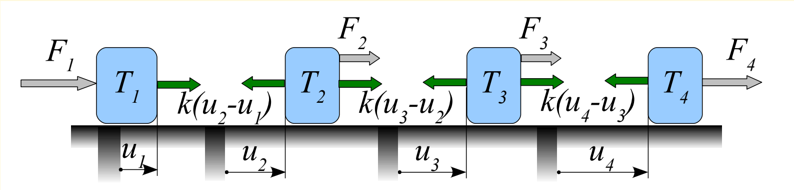
$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \tag{4.2}$$

Vznikl maticový zápis rovnic rovnováhy pro soustavu lineárních pružin. Pružinu lze chápat jako lineární konečnoprvkový element, který se deformuje podél své délky a pouze v tomto směru přenáší sílu, tzv. osovou sílu. Čtvercová matice na levé straně (4.2) se nazývá matice tuhosti, protože vyjadřuje deformační tuhost elastického systému. Bez další úpravy rovnice (4.2), tzn. bez aplikace Dirichletových okrajových podmínek, je tato matice singulární. Z inženýrského pohledu souvisí tato singularita se skutečností, že řešený systém (dle obr. 4.1) má možnost volného posuvu jako celek vlevo vpravo. Odstraněním této možností pohybu, tj. aplikací právě zmíněných okrajových podmínek bude singularita matice odstraněna. Vektor pravé strany (4.2) představuje vektor elementárních uzlových sil.

Ve druhé fázi uvažujme více realistický případ, a to systém skládající se ze 3 lineárních pružin dle obr. 4.3, pro který uvolněním (obr. 4.4) a sestavením rovnic rovnováhy, postupem



Obr. 4.3 Soustava čtyř těles spojených pružnými členy



Obr. 4.4 Uvolnění soustavy čtyř těles spojených pružnými členy

jako (4.1), vznikne po úpravě následující soustava

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix}. \tag{4.3}$$

Obdobně jako v případě (4.2) je i zde matice tuhosti na levé straně rovnice maticí singulární, i důvody jsou stejné. V závislosti na odebraných stupních volnosti, tj. předepsaných Dirichletových okrajových podmínkách, může být soustava staticky určitá či staticky neuurčitá. Bude-li např. předepsána pouze okrajová podmínka $u_1 = 0$ bude soustava staticky určitá, ale pokud budou okrajové podmínky v podobě např. $u_1 = 0$ a současně $u_4 = 0$ bude soustava staticky neurčitá.

Z hlediska metody konečných prvků není však rozdíl mezi staticky určitou a neurčitou soustavu, jelikož je kromě rovnic rovnováhy splněna kompatibilita deformací. Jako příklad lze uvést staticky neurčitou soustavu s parametry $k_1 = 20 \cdot 10^6\,\mathrm{N/m}$,
$k_2 = 30 \cdot 10^6\,\mathrm{N/m}$, $k_3 = 10 \cdot 10^6\,\mathrm{N/m}$, $F_2 = 1000\,\mathrm{N}$, $u_1 = 0$, $u_4 = 0$, kde maticová forma rovnic rovnováhy nabude podobu

$$10^6 \cdot \begin{bmatrix} 20 & -20 & 0 & 0 \\ -20 & 50 & -30 & 0 \\ 0 & -30 & 40 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 1000 \\ 0 \\ F_4 \end{Bmatrix}. \tag{4.4}$$

Zanesením $u_1 = u_4 = 0$ vznikne

$$10^6 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -20 & 50 & -30 & 0 \\ 0 & -30 & 40 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1000 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{4.5}$$

Řešením obdržíme následující hodnoty posunutí těles v uzlech u_i, tj. hodnoty primárních neznámých:

$$u_1 = 0\,\mathrm{m},\ u_2 = 36{,}36 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m},\ u_3 = 27{,}27 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m},\ u_4 = 0\,\mathrm{m}$$

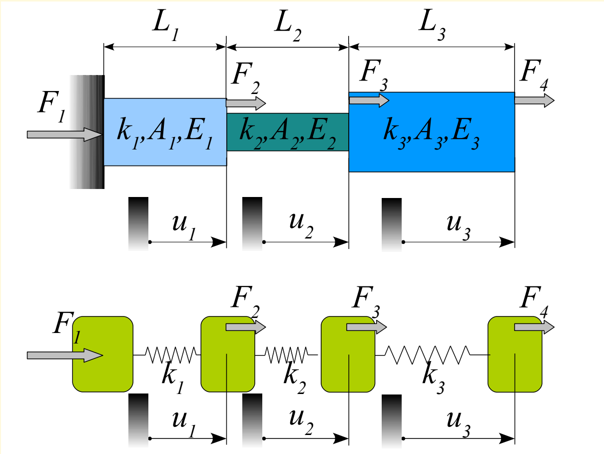
Dosazením získaných výsledků posunutí do rovnovážných rovnic (neboli maticové formulace vážených reziduí) získáme hodnoty sekundárních neznámých, v tomto případě reakčních sil

F_1 a F_4:

$$F_1 = -727{,}3\,\mathrm{N},\;\; F_4 = -272{,}7\,\mathrm{N}.$$

4.2. Členy namáhané osovými silami

Jak již bylo řečeno, soustava lineárních pružin může nahrazovat množství inženýrských aplikací jako např. osově namáhaný člen, torzí namáhaný člen, aj. Pro ukázku takové úlohy použijeme příklad dle obr. 4.5, kde je osazená tyč namáhána tahem osovou silou P a chceme zjistit celkové prodloužení tyče.



Obr. 4.5 Axiálně namáhaná osazená tyč

Obsah
87. strana ze 131
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka/Okno

Řešení úlohy inženýrským přístupem vychází ze známého řešení deformace homogenního tělesa konstantního průřezu od osové síly. Pro tuto základní úlohu známe řešení ve tvaru

$$\begin{gathered} \frac{F}{A} = \sigma = E\,\varepsilon = E\,\frac{\Delta\ell}{\ell}, \\ F = \frac{EA}{\ell}\,\Delta\ell, \end{gathered} \tag{4.6}$$

kde E značí Youngův modul pružnosti, A velikost plochy příčného průřezu tělesa, ℓ původní délku namáhané části tělesa a $\Delta\ell$ prodloužení namáhané části vlivem působící síly F. Toto prodloužení je totožné s deformačním posuvem konce, které je obvykle označováno u[1], a tedy platí $\Delta\ell = u$. Rovnici (4.6) můžeme potom zapsat následovně

$$F = k\,u, \quad \text{kde } k = \frac{EA}{\ell}. \tag{4.7}$$

Ve smyslu řešení (4.7) převedeme úlohu dle obr. 4.5 na systém sériově řazených osově namáhaných částí konstantích průřezů, pro které můžeme psát následující rovnice rovnováhy

$$\begin{aligned} F_1 + k_1(u_2 - u_1) &= 0 \\ F_2 - k_1(u_2 - u_1) + k_2(u_3 - u_2) &= 0 \\ F_3 - k_2(u_3 - u_2) + k_3(u_4 - u_3) &= 0 \\ F_4 - k_3(u_4 - u_3) &= 0 \end{aligned} \tag{4.8}$$

[1]Veškeré závislé proměnné v řešení obvykle označujeme u, i na většině míst této publikace.

převedením vnějších sil na pravou stranu a roznásobením závorek bude

$$\begin{aligned} +k_1u_1 - k_1u_2 &= F_1 \\ -k_1u_1 + k_1u_2 + k_2u_2 - k_2u_3 &= F_2 \\ -k_2u_2 + k_2u_3 + k_3u_3 - k_3u_4 &= F_3 \\ -k_3u_3 + k_3u_4 &= F_4 \end{aligned} \tag{4.9}$$

a uplatněním maticového zápisu dostaneme konečnou podobu závislosti deformace na působících vnějších silách ve tvaru

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix}, \tag{4.10}$$

kde pro tuhosti jednotlivých částí platí $k_i = \frac{E_i A_i}{\ell_i}$, kdy pro obecnost předpokládáme, že každá část může být vyrobena z materiálu s odlišným Youngovým modulem pružnosti E_i. Aplikací výsledného vztahu (4.10) na řešenou úlohu nabude pravá strana změněné podoby, neboť vnější silové zatížení působí pouze na koncích celého tělesa, tj.

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \\ 0 \\ P \end{Bmatrix}. \tag{4.11}$$

Řešení této rovnice provádíme obvyklým způsobem, kdy nejdříve aplikujeme Dirichletovy podmínky, zde máme $u_1 = 0$ a tedy uplatnění této podmínky vede na úpravu 1. řádku maticové rovnice (4.11)

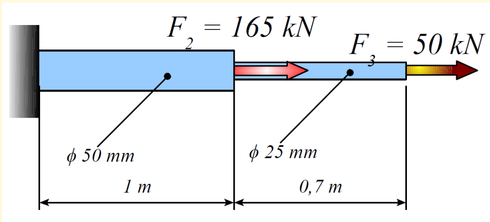
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P \end{Bmatrix},$$

po které lze vyřešit rovnici pro hledané hodnoty posunutí u_i. Zpětným dosazením získaných hodnot u_i do (4.11) pak můžeme vyčíslit hodnotu reakční vazbové síly F_1.

4.3. Příklad řešení odstupňovaného prutu

Popis úlohy - zadání

Cílem úlohy je vyřešit přemístění bodů v místech působení zátěžných sil a určit velikost reakce ve vetknutí odstupňovaného prutu dle obrázku.



Videosoubor s ukázkou řešení soustavy tří prutů dle obrázku.

Poznámka
Úloha je mj. řešitelná užitím matematického aparátu popsaného v této kapitole, výsledná maticová rovnice je 3., resp. pro řešení pouze 2. řádu.

Obsah
91. strana ze 131
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka/Okno

4.4. Testové otázky

Spustit test

1. Pomocí rovnic (4.1) jsme schopni popsat:

   (a) pouze statický stav soustavy těles,
   (b) i časově závislé chování,
   (c) dynamické chování.

2. Rovnice (4.1) byly odvozeny pro předpoklad, že výchylka $u_1 > u_2$. Budou tyto rovnice platit i pro opačný případ?

   (a) Ano.
   (b) Ne, je nutno provést nové odvození.
   (c) Ano, avšak pouze v případě, že výchylky u_1 a u_2 budou velmi malé.

3. Hodnota determinantu matice levé strany v rovnici (4.2) bude rovna:

   (a) 0,
   (b) 1,
   (c) záporné konstantě.

4. V případě předepsání dvou uzlových posunutí soustavě z obr. 4.3, bude tato soustava:

   (a) staticky určitá,
   (b) staticky neurčitá,
   (c) bude soustava charakterizována singulární maticí.

5. Statické řešení staticky neurčité prutové konstrukce je z pohledu metody konečných prvku:

   (a) náročnější než řešení geometricky stejné staticky určité úlohy,
   (b) méně náročné než řešení geometricky stejné staticky určité úlohy,
   (c) stejně náročné než řešení geometricky stejné staticky určité úlohy.

6. V případě zatížení prostředního tělesa na obr. 4.5 více silami, je řešení pomocí metod uvedených v kap. 4:

   (a) nemožné,
   (b) pouze přibližné,
   (c) možné, bez vlivu na přesnost řešení.

7. Síly F_1 a F_2 v rovnici (4.2) vyjadřují:

   (a) pouze zadané vnější síly,
   (b) pouze reakce,
   (c) jak vnější síly, tak i reakce.

8. Je možné, aby síly v rovnici (4.2) byly pouze hodnoty vnějších zadaných sil a matice levé strany byla regulární?

   (a) Ano.
   (b) Ne.
   (c) Záleží na charakteru soustavy.

9. Je možné, aby při užití nástrojů uvedených v kap. 4 měnil prut svůj průřez po délce?

(a) Ano.
(b) Ne.
(c) Ano, avšak pouze lineárně se vzrůstající jeho délkovou souřadnicí.

10. V rovnici (4.11) jsou neznámé parametry umístěny:

(a) na levé straně rovnice,
(b) na pravé straně rovnice,
(c) mohou být na levé i pravé straně rovnice.

Konec testu | Oprava testu

Počet správně zodpovězených otázek:

Získané body:

Procento úspěšnosti:

Kapitola 5

Laplaceova a Poissonova rovnice

Průvodce studiem

V této kapitole nahlédneme do problematiky řešení vícerozměrných problémů. Představíme dvě rovnice Laplaceovu a Poissonovu řešící celou řadu inženýrských aplikací. Opět pohovoříme o okrajových podmínkách, a dvě zmíněné rovnice budeme řešit pomocí metody konečných prvků. Pro úlohu diskretizace předmětné oblasti definujeme trojúhelníkové a obdélníkové elementy, aproximační funkci, testovací funkci, funkci tvaru a nakonec odvodíme matici tuhosti trojúhelníkového a obdélníkového elementu.

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete rozumět pojmům:

- vícerozměrná úloha,

- Laplaceova rovnice,
- Poissonova rovnice,
- fyzikální význam Laplaceovy a Poissonovy rovnice,
- trojúhelníkový element,
- obdélníkový element,
- diskretizace trojúhelníkovými elementy,
- diskretizace obdélníkovými elementy,
- hraniční integrál,
- matice tuhosti rovinného prvku.

Pomocí parciálních diferenciálních rovnic (PDR) lze popsat mnoho různých fyzikálních procesů. K jejich řešení lze použít více metod. V následující části odvodíme konečnoprvkovou formulaci těchto rovnic.

5.1. Odvození pro funkci dvou proměnných

Laplaceova rovnice má tvar:

$$\nabla^2 u(x,y) = 0, \tag{5.1}$$

zatímco Poissonova rovnice má tvar:

$$\nabla^2 u(x,y) = g(x,y). \tag{5.2}$$

Protože Poissonova rovnice je obecnější než Laplaceova, jak lze vidět výše, budeme v dalších úvahách pracovat s Poissonovou rovnicí. Poissonova rovnice v kartézském souřadném systému bude mít v n-rozměrném prostoru se souřadnicemi $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ tvar:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = g(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{5.3}$$

V klasické Euklidovské rovině popsané souřadnicemi x, y pak bude mít rovnice (5.2) tvar:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g(x,y),$$

kde $u(x,y)$ je hledaná funkce a $g(x,y)$ je funkce proměnných souřadnic x a y.
V případě rovnice vedení tepla v ustáleném stavu si $u(x,y)$ můžeme představit jako teplotu v místě x, y uvnitř oblasti a $g(x,y)$ jako funkci související s vnitřními zdroji, nebo hltiči

tepla.
Uzavřená oblast Ω má hranici Γ, na které jsou dány okrajové podmínky. Pro dvou-dimenzionální (rovinnou) oblast Ω jsou okrajové podmínky:

- *Dirichletova podmínka* , neboli hlavní okrajová podmínka

$$u = \bar{u}, \tag{5.4}$$

  kde $\bar{u}$ je známá hodnota proměnné $u(x, y)$ na části hranice Γ_u.

- *von Neumannova podmínka*, neboli přirozená okrajová podmínka

$$\frac{\partial u}{\partial \mathrm{n}} = \bar{q}, \tag{5.5}$$

  kde $\bar{q}$ je známá hodnota proměnné $q(x, y)$ na části hranice Γ_q.

V případě představy rovnice vedení tepla si můžeme představit u jako teplotu, $\bar{u}$ jako předepsanou teplotu na hranici Γ_u oblasti Ω a $\bar{q}$ jako předepsaný tepelný tok hranicí Γ_q do nebo ven z oblasti Ω. Při správné volbě jednotek není ani nutno psát žádné koeficienty. Γ_u, Γ_q jsou hranice pro hlavní a přirozené okrajové podmínky a n je jednotkový vektor ve směru vnější normály. Pro dobře zadaný problém hraničních hodnot platí, že na celé hranici je zadaná nějaká okrajová podmínka, tzn.:

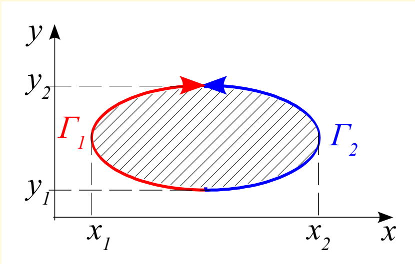
$$\begin{aligned} &\Gamma_u \cup \Gamma_q = \Gamma \text{ a zároveň} \\ &\Gamma_u \cap \Gamma_q = 0, \end{aligned} \tag{5.6}$$

kde symbol $\cup$ znamená sjednocení, $\cap$ průnik a Γ je celá hranice oblasti Ω.
Integrace vážených reziduálů diferenciální rovnice a okrajových podmínek má tvar (viz

dříve):

$$I = \int\limits_{\Omega} w \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - g(x,y) \right) \mathrm{d}\Omega - \int\limits_{\Gamma_q} w \left(\frac{\partial u}{\partial \mathrm{n}} \right) \mathrm{d}\Gamma \tag{5.7}$$

Za účelem získání slabé formulace této rovnice je použito integrace po částech, jak ukazuje následující příklad. Uvažujte dvoudimenzionální (plošnou) oblast Ω s hranicí Γ.



Obr. 5.1 Symbolické grafické znázornění 2D oblasti Ω a její hranic Γ_1, Γ_2

Z předchozí rovnice (5.7) budeme nejdříve uvažovat první člen $\int_\Omega w \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \mathrm{d}\Omega$, a pomocí Fubiniovy věty získáme

$$\int\limits_{\Omega} w \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \mathrm{d}\Omega = \int\limits_{y_1}^{y_2} \left(\int\limits_{x_1}^{x_2} w \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y, \tag{5.8}$$

kde x_1, x_2, y_1 a y_2 jsou minimální a maximální hodnoty ve směrech x a y.

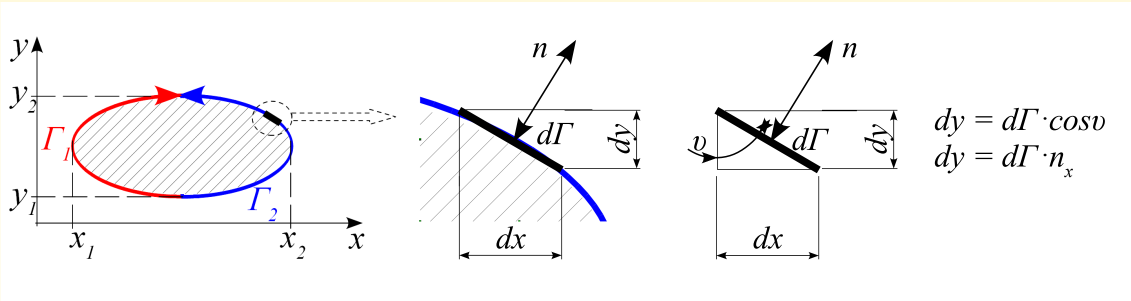
Poznámka 5.1. Fubiniova věta je matematická věta, která umožňuje za určitých požadavků na oblast vypočítat vícerozměrný integrál pomocí více po sobě jdoucích integrací. Získané integrály pak označujeme jako vícenásobné, tzn. dvojnásobný, trojnásobný atd.

Protože podle pravidel o derivaci součinu platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(w\frac{\partial u}{\partial x}) = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + w\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

lze integrál (5.8) upravit na tvar

$$\int\limits_{y_1}^{y_2}\left(\int\limits_{x_1}^{x_2} w\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = -\int\limits_{y_1}^{y_2}\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int\limits_{y_1}^{y_2}\left[w\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x_1}^{x_2} dy. \tag{5.9}$$



Obr. 5.2 Vyznačení elementu dΓ na hranici oblasti Ω; geometrie detailu v souřadnicích x, y

Obsah
100. strana ze 131
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka/Okno

Jako element oblasti můžeme napsat $\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ a při použití vztahu pro normálový vektor $\mathrm{d}y = \mathrm{n}_x \mathrm{d}\Gamma$ přejde rovnice (5.9) na tvar

$$\int_{y_1}^{y_2} \left(\int_{x_1}^{x_2} w \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = -\int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\, \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_2} w \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \mathrm{n}_x\, \mathrm{d}\Gamma - \int_{\Gamma_1} w \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \mathrm{n}_x\, \mathrm{d}\Gamma,$$

nebo kombinací obou křivkových integrálů dostaneme přehlednější zápis

$$\int_{y_1}^{y_2} \left(\int_{x_1}^{x_2} w \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = -\int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\, \mathrm{d}\Omega + \oint_{\Gamma} w \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \mathrm{n}_x\, \mathrm{d}\Gamma, \tag{5.10}$$

přičemž kladný směr křivky Γ je proti směru hodinových ručiček.
Podobně upravíme i druhý člen rovnice (5.7) $\int_\Omega w \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \mathrm{d}\Omega$ a můžeme tedy psát

$$\int_{\Omega} w \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \mathrm{d}\Omega = -\int_{\Omega} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathrm{d}\Omega + \oint_{\Gamma} w \left(\frac{\partial u}{\partial x} \mathrm{n}_x + \frac{\partial u}{\partial y} \mathrm{n}_y \right) \mathrm{d}\Gamma,$$

kde po uplatnění vztahu

$$\frac{\partial u}{\partial \mathrm{n}} = \frac{\partial u}{\partial x} \mathrm{n}_x + \frac{\partial u}{\partial y} \mathrm{n}_y$$

dostaneme Greenovu větu, která snižuje řád PDR

$$\int_{\Omega} w \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \mathrm{d}\Omega = -\int_{\Omega} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathrm{d}\Omega + \oint_{\Gamma} w \left(\frac{\partial u}{\partial \mathrm{n}} \right) \mathrm{d}\Gamma. \tag{5.11}$$

Tedy původní integrál (5.7), lze přepsat na tvar:

$$I = -\int_{\Omega} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathrm{d}\Omega - \int_{\Omega} w\, g(x,y)\, \mathrm{d}\Omega + \oint_{\Gamma} w \left(\frac{\partial u}{\partial \mathrm{n}} \right) \mathrm{d}\Gamma. \tag{5.12}$$

Při řešení pomocí metody konečných prvků bude mít první objemový integrál tvar matice a další dva (druhý objemový a křivkový) budou mít tvar vektoru. V případě rovnice vedení tepla má druhý objemový integrál význam vnitřních zdrojů tepla (či hltičů) uvnitř oblasti a křivkový integrál znamená tepelný tok skrz hranici.

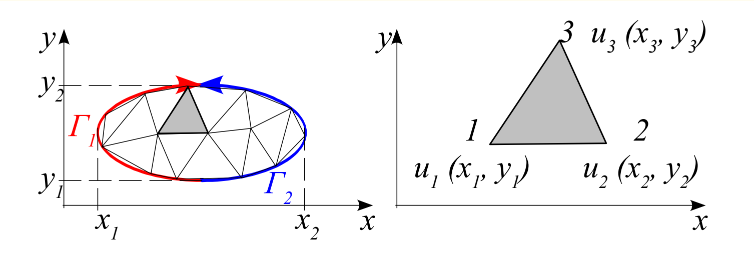
5.2. Vlastní metoda konečných prvků

5.2.1. Diskretizace trojúhelníkovými elementy

Diskretizace oblasti Ω j rovnici lze provést použitím 2D konečných prvků . Jedním z nejpoužívanějších je prvek ve tvaru trojúhelníku se třemi uzly (v každém vrcholu jeden).

Trojúhelník má tři uzly a hodnotu funkce u mezi nimi lze popsat nejjednodušeji lineární funkcí $u = a_1 + a_2 x + a_3 y$, což v maticovém tvaru zapsat

$$u(x,y) = \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & x & y \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \right\}, \tag{5.13}$$



Obr. 5.3 Diskretizace oblasti Ω na elementy; umístění elementu v souřadnicích x, y

kde hledáme hodnoty aproximačních koeficientů a_1, a_2, a_3 (obecně a_i). Pro uzlové body 1, 2 a 3 platí:

$$
\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}, \text{ zkráceně}
$$
$$
\{u\} = [x] \cdot \{a\}, \tag{5.14}
$$

kde x_i, y_i jsou souřadnice i-tého uzlu a u_i je hodnota proměnné u v i-tém uzlu. Řešíme-li koeficienty a_i pak lze podle Cramerova pravidla vypočíst

$$
\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\,\frac{\mathrm{D}}{2}} \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & x_3y_1 - x_1y_3 & x_1y_2 - x_2y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}, \tag{5.15}
$$

kde D je determinant matice $[x]$ jeho polovina je pak plocha A trojúhelníkového prvku. Jedná se o kladnou hodnotu jsou-li prvky číslovány proti směru hodinových ručiček. Pro výpočet pomocí metody konečných prvků musí být pořadí uzlů stejné pro každý prvek v celé oblasti. Dosazením rovnice (5.15) do (5.14) získáme pro výpočet proměnné u v libovolném místě daného prvku vztah

$$\begin{aligned} u(x,y) &= H_1(x,y)\,u_1 + H_2(x,y)\,u_2 + H_3(x,y)\,u_3 = \\ &= \left\{ \begin{array}{ccc} H_1(x,y) & H_2(x,y) & H_3(x,y) \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} \right\} = \quad , \\ &= \{H(x,y)\}^{\mathrm{T}} \cdot \{u\} \end{aligned} \tag{5.16}$$

kde je pro přehlednost užito následující substituce:

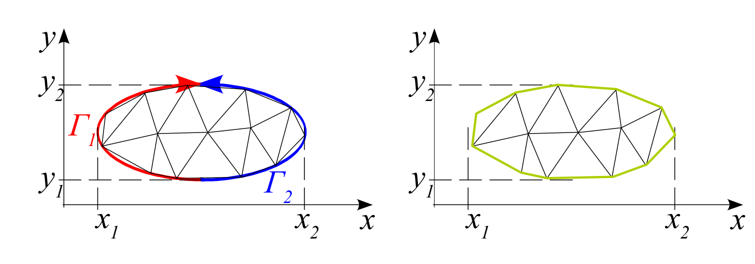
$$A = \frac{\mathrm{D}}{2} \qquad \begin{aligned} H_1(x,y) &= \frac{1}{2A}[(x_2y_3 - x_3y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] \\ H_2(x,y) &= \frac{1}{2A}[(x_3y_1 - x_1y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y] \\ H_3(x,y) &= \frac{1}{2A}[(x_1y_2 - x_2y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y] \end{aligned} \tag{5.17}$$

Ve vztazích (5.16) a (5.17) značí A plochu trojúhelníkového prvku, zatímco funkce $H_i(x,y)$ se obecně nazývají funkce tvaru a v uzlech pro ně platí

$$\sum_{i=1}^{3} H_i(x_j, y_j) = \delta_{i,j} \qquad \sum_{i=1}^{3} H_i = 1, \tag{5.18}$$

kde $\delta_{i,j}$ je Kroneckerovo delta, které má hodnotu 1 pokud $i = j$, jinak má hodnotu 0.

Řešená oblast je rozdělena na určitý počet konečných prvků pomocí lineárního trojúhelníkového elementu. Jak je vidět na obrázku skutečná hraniční křivka oblasti je aproximovaná pomocí po částech lineární hranice. Pro větší přesnost aproximace může být buď zjemněna síť při zachování lineárního typu elementu, nebo může být použit jiný typ elementu, pro který nebude aproximační funkce lineární, ale bude to polynom vyššího řádu, který bude lépe kopírovat hraniční křivku.



Obr. 5.4 Hranice Γ oblasti Ω v modelu diskretizovaném na elementy

Pro lineární trojúhelníkový element je matice prvku (tzv. matice tuhosti) vypočtena následujícím způsobem.

$$[\mathrm{K_e}] = \int\limits_{\Omega_e} \left(\left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\partial H_1}{\partial x} \\ \dfrac{\partial H_2}{\partial x} \\ \dfrac{\partial H_3}{\partial x} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} \dfrac{\partial H_1}{\partial x} & \dfrac{\partial H_2}{\partial x} & \dfrac{\partial H_3}{\partial x} \end{array} \right\} + \right.$$

$$\left. + \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\partial H_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial H_2}{\partial y} \\ \dfrac{\partial H_3}{\partial y} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} \dfrac{\partial H_1}{\partial y} & \dfrac{\partial H_2}{\partial y} & \dfrac{\partial H_3}{\partial y} \end{array} \right\} \right) \mathrm{d}\Omega =$$

$$= \int\limits_{\Omega_e} \left(\frac{\partial}{\partial x} \{H(x,y)\} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \{H(x,y)\}^{\mathrm{T}} + \frac{\partial}{\partial y} \{H(x,y)\} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \{H(x,y)\}^{\mathrm{T}} \right) \mathrm{d}\Omega. \qquad (5.19)$$

Po dosazení za H_1, H_2, H_3 a provedení parciálních derivací a integrace získáme matici tuhosti prvku

$$[\mathrm{K_e}] = \left\{ \begin{array}{ccc} k_{1,1} & k_{1,2} & k_{1,3} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & k_{2,3} \\ k_{3,1} & k_{3,2} & k_{3,3} \end{array} \right\}, \qquad (5.20)$$

Obsah
106. strana ze 131
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka/Okno

kde jednotlivé prvky matice $k_{i,j}$ mají tvar

$$
\begin{aligned}
k_{1,1} &= \frac{1}{4A}\left((x_3-x_2)^2+(y_2-y_3)^2\right) \quad k_{2,2} = \frac{1}{4A}\left((x_1-x_3)^2+(y_3-y_1)^2\right)\\
k_{3,3} &= \frac{1}{4A}\left((x_2-x_1)^2+(y_1-y_2)^2\right)\\
k_{1,2} &= \frac{1}{4A}\left((x_3-x_2)(x_1-x_3)+(y_2-y_3)(y_3-y_1)\right) \qquad k_{1,2}=k_{2,1}\\
k_{1,3} &= \frac{1}{4A}\left((x_3-x_2)(x_2-x_1)+(y_2-y_3)(y_1-y_2)\right) \qquad k_{1,3}=k_{3,1}\\
k_{2,3} &= \frac{1}{4A}\left((x_1-x_3)(x_2-x_1)+(y_3-y_1)(y_1-y_2)\right) \qquad k_{2,3}=k_{3,2}
\end{aligned}
\tag{5.21}
$$

Pro lineární prvek jsou parciální derivace uvnitř integrálu konstanty (matice), čili výsledek integrálu je jen integrand (matice) vynásobená plochou prvku.

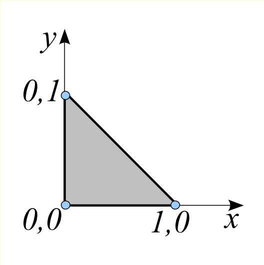
Příklad 5.2. 1 Pro prvek s uzly číslovanými proti směru hodinových ručiček o souřadnicích 1 (0,0), 2 (1,0) a 3(0,1) bude mít matice prvku s těmito uzly pro Poissonovu rovnici podobu

$$
[\mathrm{K_e}] = \begin{bmatrix} 1 & -0,5 & -0,5\\ -0,5 & 0,5 & 0\\ -0,5 & 0 & 0,5 \end{bmatrix},
$$

přičemž plocha tohoto trojúhelníkového prvku činí $A = 0,5$.

Druhá část v integrálu (5.12) tedy $\int_\Omega w\, g(x,y)\, \mathrm{d}\Omega$ vede pro daný lineární trojúhelníkový prvek na tvar

$$
\int_\Omega \left\{ \begin{array}{c} H_1(x,y)\\ H_2(x,y)\\ H_3(x,y) \end{array} \right\} g(x,y)\, \mathrm{d}\Omega. \tag{5.22}
$$



Obr. 5.5 Příklad trojúhelníkového prvku pro sestavení matice tuhosti $[\mathrm{K_e}]$

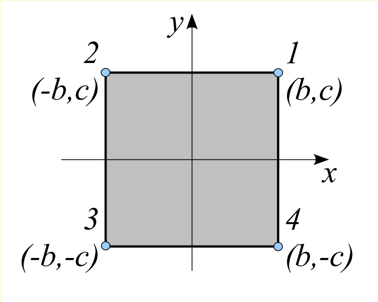
Analytická integrace této rovnice může být obtížná v závislosti na funkci $g(x, y)$ a proto je většinou použita nějaká metoda numerické integrace. Tím jsou vyřešeny první dvě části integrálu I (5.12).

5.2.2. Diskretizace bilineárními obdélníkovými elementy

Funkce tvaru pro tento prvek je odvozena z následující interpolační funkce $u = a_1 + a_2x + a_3y + a_3xy$, což obdobně jako (5.13) lze zapsat maticovou formou

$$u(x, y) = \left\{ \begin{matrix} 1 & x & y & xy \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} \right\} = \{x\}^{\mathrm{T}} \cdot \{a\}. \tag{5.23}$$

Aplikací předchozího postupu, tj. uplatněním vztahu (5.23) na hodnotu proměnné u v rohových uzlech elementu, následnou inverzí (obdobně jako (5.14, 5.15) a zpětným dosazením



Obr. 5.6 Bilineární obdélníkový prvek

vektoru koeficientů $\{a\}$ do (5.23)), a úpravou nabudou funkce tvaru pro tento typ elementu podobu

$$\begin{aligned} H_1(x,y) &= \frac{1}{4bc}[(b-x)(c-y)] & \quad H_3(x,y) &= \frac{1}{4bc}[(b+x)(c+y)] \\ H_2(x,y) &= \frac{1}{4bc}[(b+x)(c-y)] & \quad H_4(x,y) &= \frac{1}{4bc}[(b-x)(c+y)] \end{aligned}\;, \tag{5.24}$$

kde b je polovina šířky a c polovina výšky prvku, tedy obsah obdélníku je $A = 4bc$.
Funkce tvaru lze obdržet i jako dvě sady jedno-dimenzionálních funkcí ve směrech x a y v podobě

$$\begin{aligned} \Phi_1(x) &= \frac{1}{2b}(b-x) & \quad \Psi_3(y) &= \frac{1}{2c}(c-y) \\ \Phi_2(x) &= \frac{1}{2b}(b+x) & \quad \Psi_4(y) &= \frac{1}{2c}(c+y) \end{aligned}\;. \tag{5.25}$$

Funkce tvaru obdržené jak je ukázáno výše se nazývají Lagrangeovy funkce tvaru.

Příklad 5.3. 2 Chceme vypočítat matici tuhosti elementu pro Poissonovu rovnici při použití bilineární funkce tvaru, kterou obdobně jako u prvku trojúhelníkového (5.19) obdržíme takto

$$[\mathrm{K_e}] = \int\limits_{\Omega_\mathrm{e}} \left(\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial H_1}{\partial x} \\ \frac{\partial H_2}{\partial x} \\ \frac{\partial H_3}{\partial x} \\ \frac{\partial H_4}{\partial x} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{cccc} \frac{\partial H_1}{\partial x} & \frac{\partial H_2}{\partial x} & \frac{\partial H_3}{\partial x} & \frac{\partial H_4}{\partial x} \end{array} \right\} + \right.$$

$$\left. + \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial H_1}{\partial y} \\ \frac{\partial H_2}{\partial y} \\ \frac{\partial H_3}{\partial y} \\ \frac{\partial H_4}{\partial y} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{cccc} \frac{\partial H_1}{\partial y} & \frac{\partial H_2}{\partial y} & \frac{\partial H_3}{\partial y} & \frac{\partial H_4}{\partial y} \end{array} \right\} \right) \mathrm{d}\Omega =$$

$$= \int\limits_{\Omega_\mathrm{e}} \left(\frac{\partial}{\partial x}\{H(x,y)\} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\{H(x,y)\}^\mathrm{T} + \frac{\partial}{\partial y}\{H(x,y)\} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\{H(x,y)\}^\mathrm{T} \right) \mathrm{d}\Omega. \quad (5.26)$$

Uvnitř integrálu dostaneme matici 4×4. V matici nejsou jen konstanty, a proto je třeba převést dvojný integrál na dvojnásobný pomocí Fubiniovy věty. Pro obdélníkovou oblast to není obtížné a můžeme se o tom přesvědčit např. pro prvek matice $k_{1,1}$, pro který platí

$$k_{1,1} = \int\limits_{\Omega_e} \left(\frac{\partial H_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{\partial H_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}\Omega, \text{ kde } \quad H_1(x,y) = \frac{1}{4bc}[(b-x)(c-y)].$$

Po dosazení parciálních derivací a použití Fubiniovy věty bude

$$\begin{aligned} k_{1,1} &= \int\limits_{-b}^{b}\int\limits_{-c}^{c} \frac{1}{16\,b^2c^2}\left((y-c)^2 + (x-b)^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \frac{b^2+c^2}{3\,b\,c}. \end{aligned} \tag{5.27}$$

Stejnou proceduru provedeme pro všech 16 prvků, ovšem ve skutečnosti stačí mnohem méně, protože mnoho součinů se opakuje a matice tuhosti je ve výsledku symetrická. Pro jednotlivé prvky matice tuhosti $[\mathrm{K_e}]$ obdržíme integrací tyto výrazy:

$$[\mathrm{K_e}] = \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & k_{1,3} & k_{1,4} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & k_{2,3} & k_{2,4} \\ k_{3,1} & k_{3,2} & k_{3,3} & k_{3,4} \\ k_{4,1} & k_{4,2} & k_{4,3} & k_{4,4} \end{bmatrix}, \text{ kde } \quad \begin{aligned} k_{1,1} &= \frac{b^2+c^2}{3\,b\,c} = k_{2,2} = k_{3,3} = k_{4,4} \\ k_{1,2} &= \frac{b^2-2c^2}{6\,b\,c} = k_{2,1} = k_{3,4} = k_{4,3} \\ k_{1,3} &= \frac{b^2+c^2}{6\,b\,c} = k_{3,1} = k_{2,4} = k_{4,2} \\ k_{1,4} &= \frac{c^2-2b^2}{6\,b\,c} = k_{4,1} = k_{2,3} = k_{3,2} \end{aligned} \tag{5.28}$$

Druhá část v integrálu (5.12) tedy $\int_\Omega w\, g(x,y)\, \mathrm{d}\Omega$ bude mít pro obdélníkový prvek na oblasti Ω_e podobu

$$\int_{-b}^{b}\int_{-c}^{c} \left\{ \begin{array}{c} H_1(x,y) \\ H_2(x,y) \\ H_3(x,y) \\ H_4(x,y) \end{array} \right\} g(x,y)\, \mathrm{d}x \mathrm{d}y \tag{5.29}$$

a obtížnost jeho výpočtu zde závisí především na funkci $g(x,y)$, většinou se použije některá z metod numerické integrace.

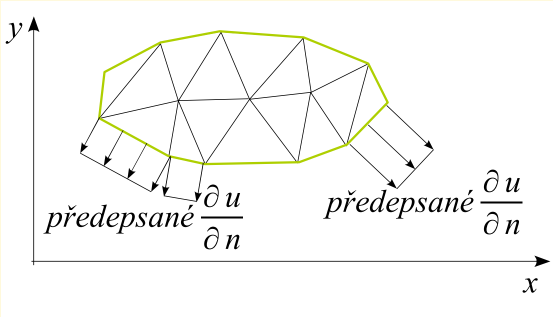
5.2.3. Hraniční integrál

V integrálu (5.12) řešíme třetí část, tedy člen $\oint_\Gamma w \left(\frac{\partial u}{\partial \mathrm{n}}\right) \mathrm{d}\Gamma$. Po rozdělení na prvky, lze hraniční integrál přepsat na integraci po hranici jednotlivých prvků prvků:

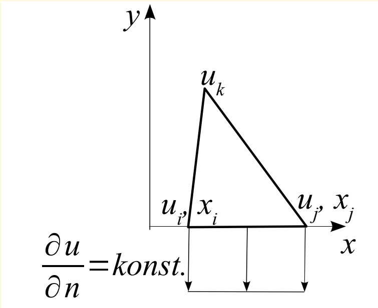
$$\oint\limits_{\Gamma_q} w \left(\frac{\partial u}{\partial \mathrm{n}}\right) \mathrm{d}\Gamma = \sum \int\limits_{\Gamma_{q\mathrm{e}}} w \left(\frac{\partial u}{\partial \mathrm{n}}\right) \mathrm{d}\Gamma \tag{5.30}$$

V tomto integrálu značí Γ_q oblast hranice s přirozenou okrajovou podmínkou a $\Gamma_{q\mathrm{e}}$ její část tvořenou vybraným prvkem. Suma tedy obsahuje všechny prvky na hranici oblasti Ω, na kterých je předepsána přirozená okrajová podmínka, tzv. (*von Neumannova podmínka*).

Pro zjednodušení můžeme u jednoho prvku uvažovat hranici rovnoběžnou s osou x. Na této hranici je dán konstantní tok, který je považován za kladný ve směru vnější normály. Zde je pro diskretizaci použit lineární trojúhelníkový prvek se dvěma uzly na hranici. Pro interpolaci jsou použity jednorozměrné lineární funkce tvaru. V tomto případě je hraniční integrál



Obr. 5.7 Okrajová podmínka pro hraniční integrál

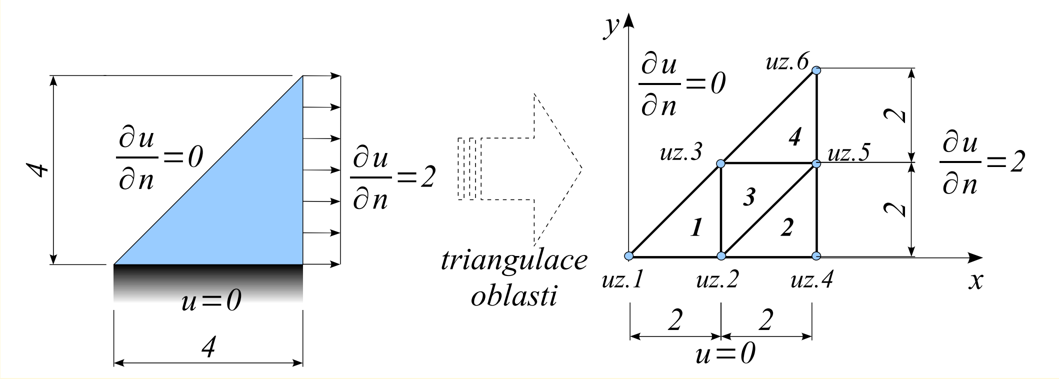


Obr. 5.8 Trojúhelníkový element : okrajová podmínka pro hraniční integrál

$$\int_{\Gamma_{q\mathrm{e}}} w \left(\frac{\partial u}{\partial \mathrm{n}} \right) \mathrm{d}\Gamma = \bar{q} \int_{x_i}^{x_j} \left\{ \begin{array}{c} \frac{x_j - x}{x_j - x_i} \\ \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \end{array} \right\} \mathrm{d}x = \bar{q}\, \frac{x_j - x_i}{2} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\} \tag{5.31}$$

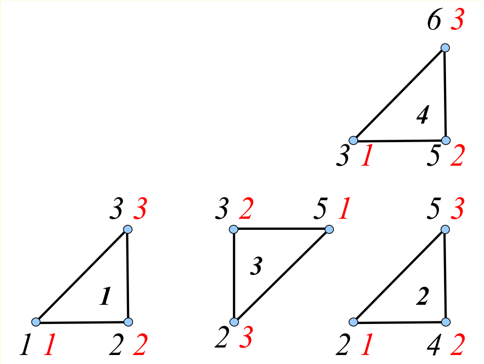
Tento sloupec je přidán do umístění asociovaných s uzly i a j. Podobně to bude platit i tehdy je-li hranice rovnoběžná s osou y jen délka příslušné hrany prvku bude $y_j - y_i$.

Příklad 5.4. 3 Uvažujme o vedení tepla ve dvoudimenzionální oblasti trojúhelníkového tvaru, která je rozdělena na čtyři lineární trojúhelníkové prvky, viz obr. 5.9. Na jedné části hranice je předepsán nulový tok (tepla), na druhé části je dán konstantní tepelný tok 2 a na třetí části hranice je předepsána teplota 0. Skutečné hodnoty je vždy možno přepočítat tak, aby odpovídaly rovnici, stačí jen vhodná volba jednotek.



Obr. 5.9 Diskretizace geometrie úlohy vedení tepla

V oblasti je šest uzlů. Každý prvek matice je možno obdržet ze dříve uvedených rovnic pro lineární trojúhelníkový prvek. Globální a lokální trojúhelníkový prvek je vidět na obrázcích. Globální číslování uzlů se používá pro identifikaci který uzel je přiřazen kterému prvku, zatímco lokální číslování souvisí s číslováním ve funkci tvaru. V lokálním číslování se bude vždy jednat o uzly 1, 2, 3 pro každý element. Matice je podobná elementu, pro který byla odvozena dříve (posunuté uzly).



Obr. 5.10 Lokální a globální číslování uzlů

$$[\mathrm{K_e}] = \begin{bmatrix} 1 & -0,5 & -0,5 \\ -0,5 & 0,5 & 0 \\ -0,5 & 0 & 0,5 \end{bmatrix},$$

Ke každému uzlu pak dáme do příslušného řádku a sloupce součet, který je v jednotlivých lokálních maticích (1;2;3); (5;3;2); (2;4;5); (3;5;6), čímž vytvoříme globální matici. Například prvek globální matice $[\mathrm{K_e}]$, jehož indexy jsou (3;3) je součtem hodnot: 0,5 (z elementu 1; 2; 3) + 1 (z elementu 5; 3; 2) + 0,5 (z elementu 3; 5; 6), zatímco např. prvek s indexy (3;4) má hodnotu nula, protože uzel 3 se nevyskytuje společně s uzlem 4 v ani jednom elementu, tj. v ani jedné z lokálních matic.

$$[\mathrm{K_e}] = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,5 & 2 & -1 & -0,5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & 1 & -0,5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -0.5 & 2 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \tag{5.32}$$

Systém sloupcových vektorů získáme z integrace (součtu) na hranici a předepsané teploty. Tok je dán na šikmé a na svislé hranici, kdežto na vodorovné hranici je předepsána teplota. Tok na hranici pak převedeme do uzlů. Tok na hranici mezi uzly 4-5 a 5-6 je 2; tok na hranic 1-3 a 3-6 je nulový a na zbývající části hranice je neznámý. Pokud tento tok rozdělíme na uzly pak v každém uzlu je dán součtem na hranici po obou stranách od uzlu. Tok v uzlu 1 je součtem neznámého toku a nulového a je tedy neznámý, tok v uzlu 5 je součtem 2+2 tedy 4 podobně v ostatních uzlech. Toky v uzlech 1, 2 a 4 jsou neznámé.

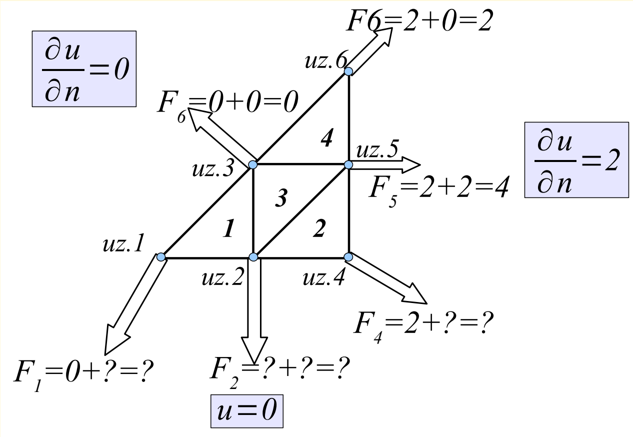
$$\{F\}^{\mathrm{T}} = \{F_1 \quad F_2 \quad 0 \quad F_4 \quad 4 \quad 2\} \tag{5.33}$$

Protože teplota v místech 1, 2 a 4 je známa můžeme sestavit podobně vektor teplot, kde teploty v místech 3, 5 a 6 jsou neznámé a právě tyto řešíme.

$$\{u\}^{\mathrm{T}} = \{0 \quad 0 \quad u_3 \quad 0 \quad u_5 \quad u_6\} \tag{5.34}$$

Určení neznámých teplot, tedy hodnot u_3, u_5 a u_6 je zapotřebí vyřešit maticovou rovnici

$$[\mathrm{K}] \cdot \{u\} = \{F\}, \tag{5.35}$$



Obr. 5.11 Grafické ztvárnění údajů MKP rovnice

V našem případě se jedná o rovnici (soustavu lineárních rovnic)

$$[\mathrm{K_e}] = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,5 & 2 & -1 & -0,5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & 1 & -0,5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -0.5 & 2 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_3 \\ 0 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \\ F_4 \\ 4 \\ 2 \end{Bmatrix} \tag{5.36}$$

V tomto případě lze rovnici řešit i klasicky, ale pro vyšší počty prvků je snadnější použít počítačové řešení.

Obsah
117. strana ze 131
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka/Okno

Výsledek pro náš řešený případ jsou teploty ve všech uzlech (ve třech uzlech byly dány). Ve skutečně řešených případech budou matice mnohem rozsáhlejší.

$$\{u\}^{\mathrm{T}} = \{0 \quad 0 \quad 3 \quad 0 \quad 6 \quad 10\} \tag{5.37}$$

Obvyklá podmínka na hranici je přestup tepla v závislosti na rozdílu teplot. Toto lze vyjádřit rovnicí pro tepelný tok

$$\frac{\partial u}{\partial \mathrm{n}} = \alpha \left(u - u_0\right) \tag{5.38}$$

kde α je součinitel přestupu tepla a u_0 je předepsaná teplota okolí. To znamená, že tepelný tok je úměrný rozdílu teplot mezi povrchem a okolím.

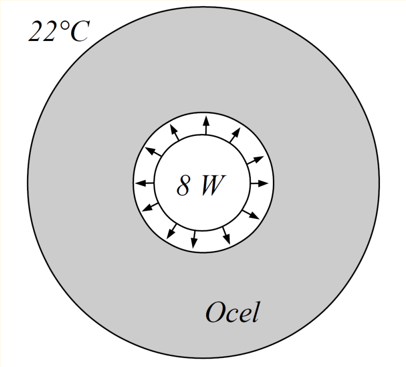
Pro Laplaceovu či Poissonovu rovnici platí *princip maxima*, což pro případ úlohy vedení tepla znamená, že nejvyšší teplota oblasti může být buď na počátku děje nebo na hranici oblasti (bez vnitřních zdrojů tepla). Pro ustálené vedení tepla bez vnitřních zdrojů tepla (Laplaceova rovnice) musí být nejvyšší teplota někde na hranici oblasti a nikdy ne uvnitř. Proto získáme-li řešení Laplaceovy rovnice, které dává maximum uvnitř oblasti, a ne na její hranici, je třeba hledat chybu v postupu řešení.
Důsledkem principu maxima je, že okrajová úloha má pro dobře zadané okrajové podmínky jen jediné řešení.

Obsah
118. strana ze 131
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka/Okno

5.3. Příklad řešení osově symetrické teplotní úlohy

Popis úlohy - zadání

Předmětem řešení je výpočet rozložení teplotního pole v řezu ocelové trubky dle obrázku. Vnější průměr činí 50 mm, vnitřní 25 mm. Na vnějším povrchu trubky je uvažována teplota 22 °C, na vnitřním povrchu působí tepelný tok o velikosti 8 W.



Videosoubor s ukázkou řešení soustavy tří prutů dle obrázku.

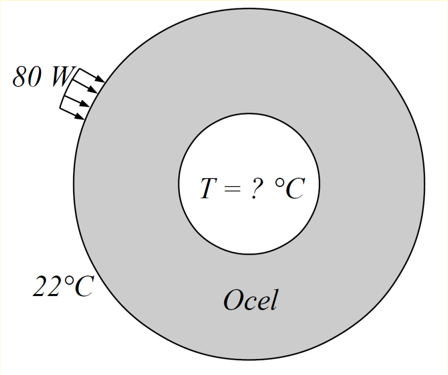
Poznámka

Úloha je mj. řešitelná užitím matematického aparátu popsaného v této kapitole, řád výsledné maticové rovnice konkrétně zvoleném způsobu síťování, tj. počtu uzlů resp. stupňů volnosti.

5.4. Příklad řešení nesymetrické teplotní úlohy

Popis úlohy - zadání

Předmětem řešení je výpočet rozložení teplotního pole v řezu ocelové trubky dle obrázku. Vnější průměr činí 50 mm, vnitřní 25 mm. Na vnějším povrchu trubky je zetížen kombinací okrajových podmínek: na většině obvodu je uvažována teplota 22 °C a na zbylé části působí tepelný tok o velikosti 80 W.



Videosoubor s ukázkou řešení soustavy tří prutů dle obrázku.

Poznámka
Úloha je mj. řešitelná užitím matematického aparátu popsaného v této kapitole, řád výsledné maticové rovnice konkrétně zvoleném způsobu síťování, tj. počtu uzlů resp. stupňů volnosti.

5.5. Testové otázky

Spustit test

1. V trojrozměrném Euklidovském prostoru lze Laplaceovu rovnici zapsat způsobem:

   (a) $\nabla^2 u(x,y,z) = 0$, resp. $\nabla^2 u = 0$

   (b) $\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y,z) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y,z) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y,z) = 0$,

   (c) oběma uvedenými způsoby.

2. Zjistěte, zda funkce $u(x,y) = x^2 - y^2$ je řešením Laplaceovy rovnice $\nabla^2 u(x,y) = 0$.

   (a) Ano.

   (b) Ne přímo, ale lze ji na takovou funkci převést.

   (c) Ne.

3. Pro funkci $u(x,y) = x^2 + x\cos(y)$ určete 2. parciální derivaci podle x, tj. $\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y)$.

   (a) $2x + \cos(y)$.

   (b) $2 - \sin(y)$.

   (c) 2.

4. Řešení Laplaceovy rovnice uvnitř oblasti je možné za předpokladu, že na hranici oblasti jsou předepsány okrajové podmínky. Pro dobře zadanou úlohu platí:

   (a) na celé hranici je zadaná Dirichletova podmínka, tzn. je známa hodnota řešení na hranici oblasti,

(b) na celé hranici je zadaná von Neumannova podmínka, tzn. je známa derivace řešení ve směru vnější normály,

(c) v každém bodě hranice je zadaná právě jedna z podmínek, buď Dirichletova nebo von Neumannova.

5. Převod dvojného integrálu na dvojnásobný:

(a) Není možný nikdy.

(b) Lze pro jakoukoliv oblast převést pomocí Fubiniovy věty.

(c) Lze převést pomocí Fubiniovy věty jen splňuje-li oblast určité požadavky.

6. Pro Kroneckerovo delta $\delta_{1,3}$ platí:

(a) $\delta_{1,3} = 0$,

(b) $\delta_{1,3} = 1$,

(c) $\delta_{1,3} = -1$.

7. Vztah mezi potenciálem $\varphi(x, y, z)$ elektrostatického pole a rozložením náboje $\varrho(x, y, z)$ pro stacionární stav určuje rovnice $\nabla^2\varphi = -\frac{\varrho(x,y,z)}{\varepsilon_0}$, kde ε_0 je permitivita vakua. O jakou rovnici se jedná:

(a) Laplaceovu,

(b) Poissonovu,

(c) Dirichletovu.

8. Trojúhelníkový prvek s uzly o souřadnicích 1 (0,0), 2 (1,0) a 3 (0,1) s aproximační funkcí $u(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y$ má plochu:

(a) 1,
(b) 2,
(c) 0,5.

9. Po částech spojitá funkce znamená, že funkce:

(a) má spojitou derivaci,
(b) má konečný počet bodů nespojitosti,
(c) je spojitá v intervalu $(-\infty, \infty)$ s vynecháním konečného počtu intervalů konečné délky.

10. Aproximujeme-li 2D oblast pomocí trojúhelníkových elementů, pak hranice oblasti bude:

(a) po částech lineární,
(b) po částech spojitá,
(c) nespojitá v každém svém bodě.

Konec testu Oprava testu

Počet správně zodpovězených otázek:

Získané body:

Procento úspěšnosti:

Literatura

[1] Rektorys, K. et al. *Přehled užité matematiky I*. Praha : SNTL, 1988. 607 s.

[2] Kolář, V. *Technical physical and mathematical principles of the finite element method*. Praha : Academia, 1971.

[3] Kolář, V.; Kratochvíl, J.; Leitner, F.; Ženíšek, A. *Výpočet plošných a prostorových konstrukcí metodou konečných prvků*. Praha: SNTL, 1979.

[4] Przemieneicki, J. S. *Theory of Matrix Structural Analysis*. New York: McGraw-Hill, 1968.

[5] Hughes, T. J. R. *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Engelwoods Cliffs: Prentice Hall, 1987.

[6] Bathe, K. J. *Finite Element Procedures*. Engelwoods Cliffs: Prentice Hall, 1996.

[7] Smith, I. M.; Griffiths, D. V. *Programming the Finite Element Method*. Chichester: John Willey & Sons, 1998.

[8] Crisfield, M. A. *Finite Elements and Solution Procedures for Structural Analysis.* Swanesa: Pineridge Press, 1986.

[9] Likeš, J.; Machek, J. *Matematická statistika.* Praha: SNTL, 1988.

[10] Björck, A. *Numerical Methods for Least Squares Problems.* Philadelphia: SIAM Publications, 1996 .

[11] Vitásek, E. *Numerické metody.* Praha : SNTL, 1987. 514 s.

[12] Babuška, I.; Práger, M.; Vitásek, M. *Numerické řešení diferenciálních rovnic.* Praha: SNTL, 1964.

[13] Bittnar, Y.; Řeřicha, P. *Metoda konečných prvků v dynamice konstrukcí.* Praha: SNTL, 1981.

[14] Kolář, V.; Němec, I.; Kanický, V. *FEM - principy a praxe metody konečných prvků.* Praha: Computer Press, 1997.

[15] Rektorys, K. *Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky.* Praha: Academia, 1999.

[16] Zienkiewicz, O. C. *The Finite Element Method in Engineering Science.* London: McGraw Hill, 1971.

[17] Huebner, K. H.; Dewhirst, D. L.; Smith, D. E.; Byrom T. G. *The Finite Element Method For Engineers*. John Wiley & Sons, 2001. ISBN 0-471-37078-9.

[18] Evans, L. C. *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, Providence, 1998. ISBN 0-8218-0772-2.

[19] Langhaar, H. L. *Energy Methods in Applied Mechanics*. New York: John Willey & Sons, 1962.

[20] Washizu, K. *Variational Methods Elasticity and Plasticity*. Oxford: Pergamon Press. 1982.

[21] Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L. *The Finite Element Method*. London: McGraw-Hill, 1989.

[22] Crandall, S. H. *Engineering Analysis*. New York: McGraw–Hill, 1956.

[23] Finlayson, B. A. *The method of Weighted Residuals and Variational Principles*. New York: Academic Press, 1972.

[24] Fletcher, C. A. J. *Computational Galerkin Methods*. Berlin: Springer–Verlag, 1984.

[25] Macneal, R. H. *Finite Elements: Their Design and Performance*. New York: Macel Dekker, 1994.

Rejstřík