Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava
Západočeská univerzita v Plzni

ZÁKLADY MATEMATICKÉ TEORIE PRUŽNOSTI

Pomůcka pro stavební inženýry

Jiří Brožovský, Lenka Lausová,
Vladimíra Michalcová

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Jiří Brožovský, Lenka Lausová, Vladimíra Michalcová
ZÁKLADY MATEMATICKÉ TEORIE PRUŽNOSTI
Pomůcka pro stavební inženýry

ISBN

Předmluva

Předkládané skriptum je určeno zejména studentům Fakulty stavební v prezenční a kombinované formy studia. Forma výkladu navazuje na zvyklosti zažité na stavebních oborech. Svým obsahem by mělo vyplňovat mezeru mezi základními předměty („Stavební statika“, „Pružnost a plasticita“) a navazujícím předmětem „Metoda konečných prvků“.

Je milou povinností autorů poděkovat panu profesoru Aloisi Maternovi za pomoc při tvorbě tohoto materiálu.

V Ostravě 11. září 2012 autoři

Orientace v textu

Každá kapitola má svou pevnou strukturu, která by vám měla pomoci k rychlejší orientaci v textu. Při psaná můžete využít následující „stavební kameny“:

Příklad

Řešené příklady pomáhají k pochopení teoretických poznatků a slouží jako vzor pro řešení cvičení. Jejich konec je označen plným trojúhelníčkem (▲).

Kvíz

Pomocí autotestu (kvízu) si otestujete své znalosti a početní dovednosti z celého objemu učiva.

Literatura

Jedná se o literaturu použitou autory při vytváření tohoto studijního materiálu, nikoliv jen o literaturu doporučenou k dalšímu studiu. Pokud některou z uvedených publikací doporučujeme zájemcům, pak je to v textu spolu s odkazem na daný titul jasně uvedeno.

Rejstřík

Rejstřík, uvedený na konci skript, poslouží ke snadné orientaci v textu.

Obsah

Kapitola 1

Úvod

1.1. Výchozí předpoklady

Úlohou stavebního inženýra je řešit (modelovat, posuzovat) chování skutečných stavebních konstrukcí. Skutečné stavební konstrukce jsou zatíženy proměnlivými účinky (vítr, sníh, pohyb osob, předmětů a dopravních prostředků). Také jejich tvar může být proveden jen s omezenou a ne vždy předem odhadnutelnou přesností (vzpomeňme známe rčení „pro zedníka není centimetr žádná míra“) a vlastnosti řady použitých materiálů (beton, zdivo, zeminy a horniny) jsou poměrně obtížně popsatelné (jsou nehomogenní, anizotropní a jen v některých případech lze pozorovat lineární odezvu na zatížení) a tyto vlastnosti jsou i dosti proměnlivé.

Vzhledem k složitosti této úlohy se při statických a pružnostních výpočtech obvykle přistupuje k podstatným zjednodušením. Je samozřejmé, že při modelování a posuzování reálných konstrukcí je nutné mít tuto okolnost na paměti. Platné technické normy pro navrhování stavebních konstrukcí proto obsahují řadu opatření, která mají překlednout rozpor mezi ‚výsledky „pružnostních" řešení a skutečností, ve formě konstrukčních zásad nebo opravných koeficientů.

Nebude-li výslovně uvedeno jinak, bude se v dalším textu předpokládat, že:

- řešenou konstrukci je možné popsat jako spojité těleso,
- materiál konstrukce je:
  - homogenní (má ve všech místech stejné fyzikální vlastnosti),
  - izotropní,[1]
  - lineárně pružný (závislost mezi zatížením a deformací je možné popsat lineární funkcí).[2]
- zatížení konstrukcí je statické nebo jen velmi pomalu měnící velikost nebo směr.[3]

[1] Materiál nazýváme:

∗ izotropní, pokud má ve všech směrech stejné vlastnosti,

∗ anizotropní, pokud má v různých směrech různé vlastnosti,

∗ ortotropní, pokud má různé vlastnosti ve vzájemně kolmých směrech,

∗ transverzálně izotropní, pokud má různé vlastnosti ve vzájemně kolmých směrech tak, že vlastnosti ve dvou ze tří směrů jsou stejné.

[2] Taková závislost je často označuje jako Hookeův zákon. Pro jednorozněrné problémy platí vztahy známé ze základních kurzů pružnosti: $F = E \times u$ nebo $\sigma = E \times \varepsilon$, kde konstanta úměrnosti E se nazývá modul pružnosti

[3] Předpokládá se tedy, že na konstrukci nevyvolává dynamické účinky (kmitání, vibrace).

- deformace konstrukcí jsou v porovnání s rozměry konstrukcí velmi malé.[1]
- vliv deformace na vnitřní síly a napětí se neuvažuje.

Od některých z výše uvedených předpokladů bude možné ustoupit u nelineárních úloh.

1.2. Základní veličiny a vztahy teorie pružnosti

1.2.1. Přehled základních veličin

1.2.1.1. Vektor posunutí

Posunutí libovolného bodu pružného tělesa v prostoru můžeme rozložit do tří vzájemně kolmých složek, které je možné zapsat ve formě *vektoru posunutí* **u**:[2]

$$\mathbf{u} = \{u, v, w\}^T \tag{1.1}$$

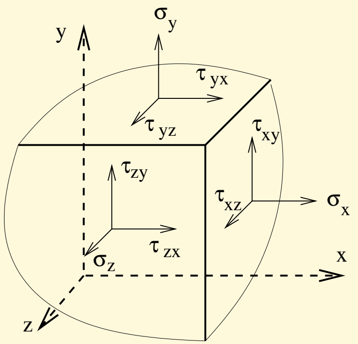
1.2.1.2. Vektor napětí

Na obrázku 6.6 jsou zobrazena napětí v bodě tělesa[3] v kartézském systému souřadnic. Tři normálová normálová napětí σ_x, σ_y a $sigma_z$ působí ve směrech jednotlivých os systému souřadnic. Šest smykových napětí působí rovnoběžně s osami systému souřadnic v rovinách xy, yz, zx.

[1] Deformace jsou nejméně o 2 řády menší než největší rozměr konstrukce.

[2] Pootočení bodu v teorii pružnosti zanedbáváme, důvod bude objasněn v souvislosti s tzv. vzájemností smykových napětí.

[3] Pro lepší představu je bod nakreslen „hranatý“.



Obr. 1.1 Napětí v bodě

Po uplatnění **předpokladu o vzájemnosti smykových napětí**, popsaného rovnicí (1.2) který se využívá i v základních kurzech pružnosti, je možné považovat jen tři smyková napětí $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ za nezávislá.

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx}, \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy}, \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Nadále proto budeme předpokládat existenci jen tří normálových a tří nezávislých smykových napětí, která mohou být zapsána v podobě *vektoru napětí* $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^T. \tag{1.3}$$

Obsah
13. strana ze 197
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

1.2.1.3. Vektor deformací

Každé z uvedených napětí pracuje na jemu odpovídající poměrné deformaci: normálovému napětí σ_i odpovídá poměrná deformace (prodloužení nebo zkrácení) ε_i a smykovému napětí τ_{ij} odpovídá zkosení γ_{ij}.[1] Poměrné deformace tedy možné zapsat v podobě *vektoru poměrných deformací* $\boldsymbol{\varepsilon}$:[2]

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}^T. \tag{1.4}$$

1.2.2. Geometricko–deformační vztahy

Geometricko–deformační vztahy[3] vyjadřují závislosti mezi posunutími a poměrnými deformacemi. Postup jejich odvození si ukážeme na vztahu pro ε_x, který je využíván v elementárních kurzech pružnosti. Z pružného tělesa vytkneme diferenciální objem o rozměrech dx, dy, dz a poměrnou deformaci ε_x ve směru x zavedeme získáme podobně jako v elementární pružnosti jako poměr prodloužení ΔL_x k původnímu rozměru L_x:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta L_x}{L_x} \tag{1.5}$$

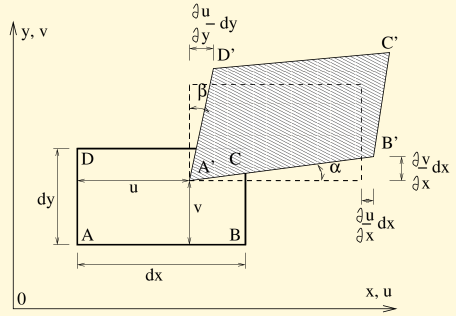
Pro větší názornost je na obrázku 1.2 nakreslen pouze průmět tělesa do roviny xy, což je však pro naše potřeby dostatečné a není to na úkor obecnosti odvození.[4] Pokud se budeme

[1] Mezi zkoseními tedy předpokládáme vztahy analogické vzájemnosti smykových napětí.

[2] V literatuře je možné najít i pojem *vektor deformací* nebo *vektor přetvoření*.

[3] Používá se i zkrácený termín *geometrické vztahy* nebo *geometrické rovnice*.

[4] Vnímavý čtenář jistě váhá, zda zjednodušení na $\frac{\Delta L_x}{L_x}$ není příliš hrubé a zda nepovede k velkým rozporům mezi terorií a skutečných chováním stavebních objektů. V případě, že konstrukce vykazuje malé deformace, je tento postup zcela dostatečný. V geometricky nelineárních úlohách je ovšem nezbytné tento předpoklad opustit a odvodit přesnější geometricko–deformační vztahy.



Obr. 1.2 Deformace diferenciálního výseku tělesa

držet označení podle obrázku 1.2, a prodloužení budeme sledovat vzhledem je hraně AB, pak můžeme rovnici (1.5) zapsat v následujícím tvaru a postupně upravovat:

$$\varepsilon_x = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{(x + dx + u + \frac{\partial u}{\partial x}dx) - (x + u) - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{1.6}$$

Analogicky by bylo možné získat rovnice pro ε_y a ε_z, které jsou uvedeny v 1.7.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Smykové deformace (*zkosení*) je možné stanovit na základě určení velikostí úhlů α a β na obrázku 1.2, pokud budeme předpokládat, že $\tan\alpha = \alpha$, $\tan\beta = \beta$ a $dx' = dx$:

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta \approx \frac{v + \frac{\partial v}{\partial x}dx}{\partial x} + \frac{\frac{\partial u}{\partial y}dy}{dy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{1.7}$$

Obsah
15. strana ze 197
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Analogicky k rovnici (1.7) je možné napsat vztahy pro zbývající zkosení:

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \tag{1.8}$$

$$\gamma_{zx} = \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \tag{1.9}$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1.10}$$

1.2.3. Podmínky rovnováhy

V klasické stavební mechanice [42] se zpravidla využívají silové součtové podmínky rovnováhy:

$$\begin{aligned} \sum F_{x,i} &= 0, \\ \sum F_{y,i} &= 0, \\ \sum F_{z,i} &= 0. \end{aligned} \tag{1.11}$$

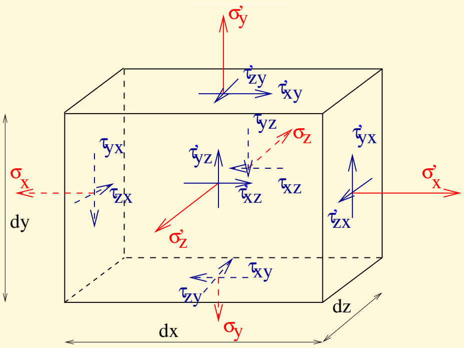
(1.12)

V případě pružného tělesa je vhodné napsat silové podmínky rovnováhy na vyjmutém diferenciálním objemu o rozměrech dx, dy, dz, který je zobrazen na obrázku 1.3.

Pro lepší přehlednost jsou jako σ' a τ' označena napětí změněná o přírůstek na diferenciálním rozměru objemu, tedy například:

$$\sigma_x` = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx, \quad \tau_{xy}` = \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy, ... \tag{1.13}$$

Obsah
16. strana ze 197
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obr. 1.3 Napětí na diferenciálním výseku tělesa

Je zřejmé, že výslednice napětí σ_x se získá vynásobením tohoto napětí a plochy, na které působí:

$$F_{\sigma,x} = \sigma_x \; dy \; dz \tag{1.14}$$

Potom je možné zapsat silovou podmínku ve směru osy x takto:

$$\sum F_{i,y} = (\sigma_x' - \sigma_x) \; dy \; dz + (\tau_{xy} - \tau_{xy}') \; dx \; dz + (\tau_{xz} - \tau_{xz}`) \; dx \; dy = 0 \tag{1.15}$$

Rozepišme rovnici (1.15) s využitím vztahů (1.13):

$$(\sigma_x - \sigma_x - \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx) \; dy \; dz + (\tau_{xy} - \tau_{xy} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy) \; dx \; dz + (\tau_{xz} - \tau_{xz} - \frac{\partial \tau_{xz} z}{d} z) \; dx \; dy = 0 \tag{1.16}$$

Je patrné, že některé členy rovnice (1.16) je možné zkrátit a získat zjednodušený vztah:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \tag{1.17}$$

Stejným způsobem je možné napsat podmínky rovnováhy i pro směry y a z. Pokud takto sestavené rovnice doplníme o objemové síly[1] X, Y a Z, působící ve směrech jednotlivých os systému souřadnic, získáme výsledný tvar *diferenciálních podmínek rovnováhy*:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0, \\
\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0, \\
\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0.
\end{aligned} \tag{1.18}$$

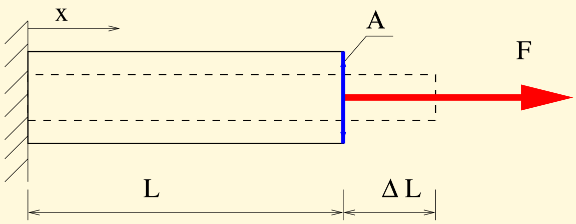
1.2.4. Fyzikální rovnice

Jako fyzikální vztahy se označují vztahy mezi napětími a poměrnými deformacemi. V lineární teorii pružnosti se předpokládá závislost mezi těmito veličinami vyjádřená *Hookeovým zákonem*:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

Vztah (1.19) ovšem platí jen pro jednorozměrné úlohy (tažený nebo tlačený prut). Na obrázku 1.4 je ilustrace takové úlohy. Vztah (1.19) ovšem nepočítá se změnou průřezu deformovaného prutu (plocha A se během deformace nemění).

[1] Objemovou silou je například gravitační síla.



Obr. 1.4 Fyzikální podmínky v 1D úloze

Ve skutečnosti však ke změně průřezu nepochybně dojde (ideální tvar zdeformovaného prvku je na obrázku 1.4 zakreslen čárkovaně). Jak je známo ze základních kurzů pružnosti [43], poměr mezi podélnou a příčnou změnou délky tělesa je konstantní a je popsán *Poissonovým součinitelem* ν. Potom je na místě předpokládat, že velikost poměrné prodloužení ε_x bude ovlivněna nejen napětím σ_x, ale v závislosti na hodnotě ν také napětími ve směrech y a z :

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right].$$

U smyku lze předpokládat, že vztah mezi smykovým napětím τ_{ij} a zkosením γ_{ij} bude lineární:

$$\gamma_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{2\,G}, \tag{1.19}$$

kde G je modul pružnosti ve smyku.[1]

[1] Důvodem pro násobitel 2 je skutečnost, že platí $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_{xy} + \varepsilon_{yx} = 2\varepsilon_{xy}$.

Fyzikální vztahy pro pružné těleso v prostoru pak můžeme zapsat ve tvaru:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right], \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{2\,G} \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right], \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{2\,G} \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right], \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{2\,G}
\end{aligned} \tag{1.20}
$$

V případě, že chování materiálu nebude lineárně pružné, není možné výše uvedené vztahy použít bez úprav a je potřebné je nahradit vztahy pružno–plastickými nebo jinými.

1.2.5. Podmínky kompatibility

Jednotlivé poměrné deformace vyjádřené nejsou vzájemně zcela nezávislé. Jejich vzájemné vztahy vyjadřují *podmínky kompatibility*, které je možné získat úpravami vedoucími k vyloučení u, v a w z rovnic (1.7) až (1.10). Název vyplývá z fyzikálního významu rovnic – pokud jsou splněny, tak je zajištěna vzájemné kompatibilita deformací, a tělese tedy zůstává spojité.

Rovnice kompatibility se v úlohách pružnosti vázaných na stavební praxi využívají již jen omezeně. V dalším textu jich využijeme pouze při odvození *stenové rovnice* pro úlohu rovinné napjatosti , a proto je zde uvádíme:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}, \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2}, \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_{zx}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2}, \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial_x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial_y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial_z}\right), \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} &= \frac{1}{2}\left(+\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial_x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial_y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial_z}\right), \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{2}\left(+\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial_x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial_y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial_z}\right).
\end{aligned}
\tag{1.21}
$$

Pro úlohu rovinné napjatosti[1] v rovině xy se rovnice (1.21) redukují na tvar:

$$
\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \tag{1.22}
$$

který bude použit v dalším textu.

[1]Případ, kdy se úloha zjednoduší na dvojrozměrný problém s nenulovými pouze napětími $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$. Podrobnější popis je předmětem další kapitoly.

Obsah
21. strana ze 197
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

1.2.6. Shrnutí

Pro úplný popis chování pružného tělesa je v každém jeho bodě potřeba získat hodnoty 15 neznámých veličin: 3 složek posunutí $\mathbf{u}$, 6 složek deformací $\boldsymbol{\varepsilon}$, 6 složek napětí $\boldsymbol{\sigma}$.

K jejich vypočtení je k dispozici 15 rovnic: 6 geometrických rovnic, 6 fyzikálních rovnic, 3 podmínky rovnováhy.

Problémem při řešení praktických úloh je, že uvedená soustava rovnic je v obecném případě velmi obtížně řešitelná. Proto se, vyjma některých jednoduchých úloh, zpravidla přistupuje k numerickým metodám řešení (metoda sítí, metoda konečných prvků) a také se využívá zjednodušení prostorového (3D) problému na 2D[1] nebo 1D úlohy. [2]

Kvíz.

1. Kolik podmínek rovnováhy je k dispozici v teorii pružnosti v prostoru?
   - ☐ $\psi = sin(\frac{\pi x}{L})$
   - ☐ Tři silové.
   - ☐ Tři silové, tři momentové.
   - ☐ Šest silových.
2. Co vyjadřují geometrické rovnice?
   - ☐ Vztahy mezi zatížením a deformacemi tělesa.
   - ☐ Vztahy mezi poměrnými deformacemi a posunutími.

[1] Stěny, desky, skořepiny, rotařne–symetrické úlohy.
[2] Pruty.

Obsah
22. strana ze 197
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

☐ Kompatibilitu tělesa.

3. Fyzikální rovnice vyjadřují

☐ Vztahy mezi poměrnými deformacemi a posunutími.

☐ Vztahy mezi napětími a poměrnými deformacemi v bodě tělesa.

☐ Vztahy mezi napětími a poměrnými deformacemi v zadaném objemu tělěsa.

4. Izotropní materiál je možné popsat:

☐ Třemi fyzikálními konstantami (E, ν, σ).

☐ Dvěmi fyzikálními konstantami (E, G).

☐ Dvěmi fyzikálními konstantami (E, ν).

5. Materiál má v jednom směru odlišné vlastntosti než ve všech ostatních. Je tedy:

☐ Izotropní.

☐ Nehomogenní.

☐ Ortotropní.

6. Kolika materiálovými konstantami je jednoznačně definováno izotropní pružné těleso:

☐ Dvěmi: E, ν.

☐ Jednou: E.

☐ Třemi: E, ν, I.

7. Zatížení v teorii pružnost musí být:

☐ Malé.

☐ Kolmé na povrch prostoru.

☐ Statické.

8. Kolika rovnicemi můžeme popsat problém teorie pružnosti (v prostoru)?

- ☐ 15.
- ☐ 12.
- ☐ 24.

9. Kolik napětí je v prostoru?

- ☐ 6 normálových a 6 smykových.
- ☐ 3 normálová a 3 smyková.
- ☐ 6 normálových.

10. Podmínky kompatibility vyjadřují:

- ☐ Vztahy mezi napětími a poměrnými deformacemi.
- ☐ Vztahy mezi posunutími a poměrnými deformacemi.
- ☐ Vztahy mezi poměrnými deformacemi.

11. Který z uvedených typů zatížení je možné zadat na pružném tělese v prostoru?

- ☐ Moment otáčející kolem osy z.
- ☐ Síla ve směru osy y.
- ☐ Pootočení kolem osy x.

12. Anizotropní materiál:

- ☐ Má v každém místě jiné vlastnosti.
- ☐ Má v každém směru jiné vlastnosti.
- ☐ Obsahuje nehomogenity nebo nespojitosti.

13. Pružný materiál podle teorie pružnosti musí být:

☐ Nespojitý.
☐ Spojitý.
☐ Osově symetrický.

14. Deformace v teorii pružnosti musí být:

☐ Mnohem menší než jsou rozměry řešeného tělesa („malé“).
☐ Srovnatelné s rozměry řešeného tělesa.
☐ Nejvýše dvakrát větší než je nejmenší rozměr řešeného tělesa.

15. Transverzálně izotropní materiál:

☐ Má v každém směru jiné vlastnosti.
☐ Má různé vlastnosti ve vzájemně kolmých směrech tak, že dva ze tří směrů jsou stejné.
☐ Má v každém směru stejné vlastnosti.

Kapitola 2

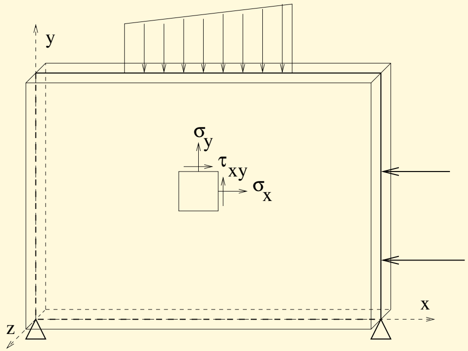
Rovinný problém

2.1. Typy rovinného problému

Jako *rovinný problém* se zpravidla označují tři úlohy:

- rovinná napjatost,
- rovinná deformace,
- rotační symetrie těles.

V dalším textu se budeme věnovat prvním dvěma uvedeným úlohám, které jsou prakticky podstatně významnější. Pro tyto úlohy je možné formulovat řadu vztahů zcela stejně, a proto budou nejprve představeny jejich charakteristické znaky a až poté budou uvedeny jednotlivé vztahy, s upozorněním na rozdíly ve fyzikálních rovnicích.



Obr. 2.1 Rovinná napjatost – stěna.

2.2. Rovinná napjatost

V některých praktických úlohách se setkáváme s konstrukcemi, které mají jeden rozměr podstatně (10 a více krát) menší než oba rozměry zbývající a navíc u nich jak samotná konstrukce, tak její zatížení a okrajové podmínky leží přibližně v jedné rovině.[1] Typickým případem jsou nosné (smykové) stěny.[2]

V takovém případě je možné úlohu řešit jen jako dvojrozměrnou, na obrázku 2.1 je stěna zobrazena v rovině xy. V této rovině pak leží *střednicová plocha* stěny. Jednotlivé body střednicové plochy stěny se, s ohledem na to, že zatížení mohou působit jen v její

[1] Konstrukce může být zatížena i v jiném směru, ale tyto účinky musí být tak malé, abychom je mohli zanedbat (ne větší než $\frac{1}{100}$ zatížení v rovině konstkruce).

[2] Proto je tato úloha v literatuře někdy označována jako *stěna*.

rovině, mohou pohybovat jen ve směrech u a v:

$$\mathbf{u} = \{u, v\}^T \tag{2.1}$$

U takto idealizované konstrukce mohou být nenulovými pouze ta napětí, která působí v její rovině $(x - y)$:

$$\sigma = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T. \tag{2.2}$$

Budeme předpokládat, že po tloušťce stěny je napětí rozděleno přibližně rovnoměrně.

Protože posunutí v ve směru osy z, tedy ve směru nejmenšího rozměru není nijak zabráněno, poměrná deformace ε_z bude obecně nenulová, Nenulové budou ovšem i ty složny vektoru deformací, které odpovídají nenulovým napětím:

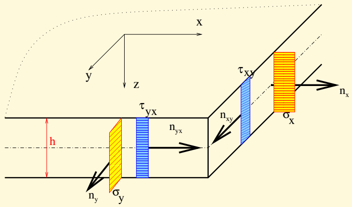
$$\varepsilon = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}\}^T \tag{2.3}$$

V souvislosti s napětími ve stěně se někdy používá pojem *měrné stěnové síly*. Tyto veličiny se získají vynásobením hodnoty napětí napětí tloušťkou konstrukce v příslušném místě.[1].

Měrné stěnové síly se využívají zejména při dimenzování železobetonových konstrukcí[2] a zpravidla se označují n_x, n_y, n_{xy}:

$$\begin{aligned} n_x &= \sigma_x \; h \quad [\frac{N}{m}], \\ n_y &= \sigma_y \; h \quad [\frac{N}{m}], \\ n_{xy} &= \tau_{xy} \; h \quad [\frac{N}{m}]. \end{aligned}$$

Obsah
28. strana ze 197
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obr. 2.2 Měrné stěnové síly

Pro ilustraci je na obrázku 2.3 rozdíl mezi průběhem napětí vypočteným podle nosníkové teorie [42], který je označen N a průběhem vypočteným na stěne podle dále uvedených rovnic, který je označen S.

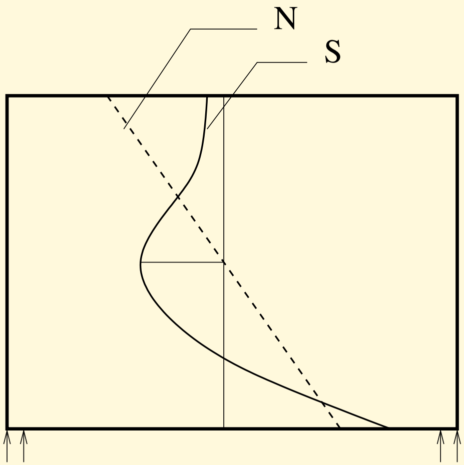
2.3. Rovinná deformace

Rovinné napjatosti je v některých ohledech podobná úloha *rovinné deformace*. Jde však o podstatně odlišnou konstrukci. Jako úlohy rovinné deformace řešíme dlouhá přímá tělesa zatížená a podepřená po délce neměnným způsobem. Příkladem mohou být některé liniové stavby (konstrukce silničních a železničních těles) a zejména podzemní a hornické stavby (konstrukce a okolí tunelů, kolektorů a štol).

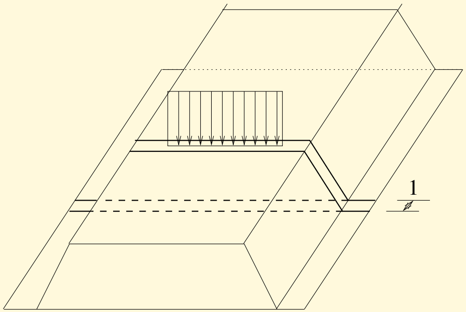
[1] Pro tuto operaci se využívá předpokladu, že průběh napětí po tloušťce konstrukce je konstantní

[2] Důvodem je optimalizace návrhových a posudkových postupů na prutové konstrukce a jejich vnitřní síly.

Obsah
29. strana ze 197
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obr. 2.3 Průběh napětí na nosníku a na stěně.



Obr. 2.4 Rovinná deformace – řez tělesem liniové stavby

Problém idealizujeme tak, že předpokládáme, že těleso je nekonečně dlouhé a po celé délce stejně zatížené a podepřené. Pak je možné řešit jednotkovou tloušťku tohoto tělesa a pohlížet na ně jako na dvojrozměrnou úlohu a při výpočtu posunutí bodů tělesa pracovat jen se posunutími v rovině xy:

$$\mathbf{u} = \{u, v\}^T. \tag{2.4}$$

Lze předpokládat, že studovaná oblast jednotkové tloušťky se ve směru této tloušťky (tedy ve směru osy z) nebude moci deformovat[1], a proto nenulové budou pouze složky deformace v rovině xy:

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}^T. \tag{2.5}$$

V souladu s výše uvedeným předpokladem, že je zabráněno deformacím ve směru osy z je nutné uvažovat s obecně nenulovým napětím σ_z a vektor napětí proto bude mít čtyři

[1] Úseky před a za studovanou oblastí mají nekonečnou tloušťku a tím i tuhost.

složky:

$$\sigma = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}\}^T. \tag{2.6}$$

2.4. Základní vztahy pro rovinný problém

2.4.1. Vztahy společné pro rovinnou napjatost i deformaci

Vztahy pro rovinný problém získáme ze základních vztahů teorie pružnosti, že v nich jako nenulové ponecháme jen ty veličiny, které působí v rovině xy.

2.4.1.1. Podmínky rovnováhy v rovině

V rovině je možné napsat nejvýše 2 nezávislé silové *podmínky rovnováhy*, například:

$$\sum F_{x,i} = 0, \quad \sum F_{y,i} = 0. \tag{2.7}$$

Po dosazení vztahů (1.19) do rovnice (2.7) získáme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Pokud bychom chtěli použít třetí podmínky rovnováhy ($\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0$), pak po dosazení $\tau_{yz} = 0$ a $\tau_{zx} = 0$ získáme rovnici:

$$0 + 0 + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0, \tag{2.9}$$

kde je ovšem $Z = 0$, protože jedním v rovinném problému předpokládáme, že zatížení může působit jen v rovině xy, a tedy $\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$.

2.4.1.2. Geometricko–deformační vztahy v rovině

Geometricko–deformační vztahy pro rovinný problém získáme z rovnic pro prostor (1.7) až (1.10) tak, že v nich ponecháme jen posunutí u, v, která jsou v rovině xy nenulová. Získáme tak vztahy pro ε_x, ε_y a γ_{xy}:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2.10}$$

Protože předpokládáme, že ve střednicové rovině řešené oblasti je posunutí w rovno nule, nemůžeme pro výpočet ε_z, které je v úloze rovinné napjatosti obecně nenulové, použít rovnic (1.7).

2.4.2. Fyzikální rovnice pro rovinný problém

V souladu se zavedenými předpoklady budeme vycházet ze vztahů (1.21) pro lineárně pružný izotropní materiál. Budeme postupovat stejným způsobem jako u předchozích vztahů, ale pro jednotlivé problémy získáme odlišné výsledky.

2.4.2.1. Fyzikální rovnice pro rovinnou napjatost

Ve vztazích (1.21) ponecháme jen veličiny nenulové v úloze rovinné napjatosti (napětí σ_x, σ_y, τ_{xy} a deformace $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}$). Tak získáme rovnice popisující fyzikální vztahy při rovinné napjatosti:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y\right)\right] \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right] \\
\gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{2\ G}
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Vztah pro deformaci ε_z, získaný z (1.21) má tvar:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(-\nu\sigma_x - \nu\sigma_y\right). \tag{2.12}$$

V praktických úlohách (například při použití metody konečných prvků) jsou důležitější vztahy pro výpočet napětí pomocí deformací. Získáme je úpravou rovnic (2.12):

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}\ (\varepsilon_x + \nu\ \varepsilon_y), \\
\sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}\ (\varepsilon_y + \nu\ \varepsilon_x), \\
\tau_x &= \frac{E}{2(1-\nu)}\ \gamma_{xy}.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

2.4.2.2. Fyzikální rovnice pro rovinnou deformaci

Fyzikální vztahy pro případ rovinné deformace je možné získat stejným způsobem jako rovnice pro rovinnou deformaci. V tomto případě budou nenulová napětí $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z \tau_{xy}$ a jen tři složky vektoru deformace $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$. Praktický význam mají především vztahy pro vyjádření napětí:

$$
\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)\ \varepsilon_x + \nu\ \varepsilon_y\right], \\
\sigma_y &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\nu\ \varepsilon_x + (1-\nu)\ \varepsilon_y\right], \\
\tau_x &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\ \gamma_{xy}\ \frac{1}{2}(1-\nu).
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

2.5. Stěnová rovnice

2.5.0.3. Odvození stěnové rovnice

V praktických aplikacích teorie pružnosti se v minulosti při řešení často využívala *stěnová rovnice*, která byla řešena ve speciálních případech analyticky (často v mechanice hornin nebo v hornické mechanice) nebo numericky. S rostoucím významem metody konečných prvků se však takových řešení využívalo stále méně.

Při odvození stěnové rovnice se vychází z rovnice (1.22), což je rovnice kompatibility pro rovinnou napjatost:

$$
\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \tag{2.15}
$$

Budeme požadovat, aby výsledná rovnice obsahovala jako neznámé jednotlivé složky vektoru napětí (σ_x, σ_y a τ_{xy}), a proto do (2.15) dosadíme dříve odvozené fyzikální vztahy (2.14).

Po úpravě získáme vztah ve tvaru:

$$\frac{\partial^2\left[\sigma_x-\nu\sigma_y\right]}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\left[\sigma_y-\nu\sigma_x\right]}{\partial x^2}=\frac{2(1+\nu)\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y}. \tag{2.16}$$

Úpravou rovnice (2.16) získáme tvar:

$$\frac{\partial^2\sigma_x}{E\partial y^2}-\nu\frac{\partial^2\sigma_y}{E\partial y^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{E\partial x^2}-\nu\frac{\partial^2\sigma_x}{E\partial x^2}-\frac{2(1+\nu)\partial^2\tau_{xy}}{E\partial x\partial y}=0. \tag{2.17}$$

Pro další postup bude vhodné snížit počet neznámých složek vektoru napětí v rovnici. Napětí τ_{xy} je možné vyjádřit pomocí σ_x a σ_y z podmínek rovnováhy v rovině (2.9). Pokud budeme předpokládat nulové objemová síly, pak můžeme rovnice (2.9) zapsat ve tvaru:

$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}=-\frac{\partial\sigma_y}{\partial y},\quad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=-\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}, \tag{2.18}$$

a dosadit je do rovnice (2.17).

Po dosazení získáme vztah:

$$\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y^2}-\nu\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x^2}-\nu\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}+(1+\nu)\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}+(1+\nu)\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}=0, \tag{2.19}$$

který je možné dále upravovat do podoby *Lévyho podmínky*:

$$\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x^2}=0. \tag{2.20}$$

Rovnice 2.20 obsahuje dvě neznámé σ_x a σ_y. Pro zjednodušení řešení navrhl Airy[1] funkci F takovou, že platí:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \\ \tau_{xz} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Funkce vyhovující vztahům (2.22) se označuje jako *Airyho funkce*.
Po dosazení vztahů (2.22) do rovnice (2.20) získáme vztah pro F:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \tag{2.22}$$

Rovnice (2.22) se označuje jako *rovnice stěny* nebo *stěnová rovnice*. Pro vybrané jednoduché případy (kruhový či eliptický otvor v nekonečné stěně) je možné najít analytické řešení, čehož se využívá například i v některých úlohách lomové mechaniky. V ostatních případech je potřebné stanovovat hodnoty funkce F numericky, například *metodou sítí*.

2.5.1. Použití stěnové rovnice

Řešení praktických úloh pomocí stěnové rovnice (2.22) je do jisté míry komplikováno obtížností volby okrajových podmínek. V některých případech je jejich stanovení poměrně

[1]George Biddell Airy (1801-1892), britský matematik a astronom.

přímočaré (volný okraj, okraj zatížený kolmo působícím zatížením), v jiných případech (vetknutí okraje) je to naopak obtížné. Proto se někdy volí inverzní způsoby řešení, kdy se vhodně zvolí Airyho funkce a hledá se, zda vyhovuje zadaným podmínkách. V případě, že Airyho funkce je již známa, je možné pomocí vztahů (2.22) stanovit funkce pro jednotlivá napětí a vypočítat a vykreslit jejich hodnoty.

Při určování okrajových podmínek můžeme vycházet z těchto zásad:

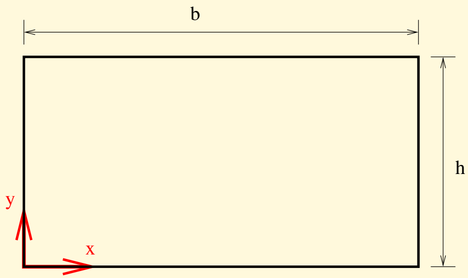
- normálové napětí kolmé k volnému, nezatíženému, okraji je rovno nule,
- smykové napětí na volném, nezatíženém, okraji je rovno nule,
- je-li okraj zatížen spojitým zatížením o velikosti p, které je na něj kolmé, pak pro normálové napětí σ kolmé k tomuto okraji platí

$$\sigma = p, \tag{2.23}$$

- působí-li podél okraje síla o velikosti F, pak pro smykové napětí τ podíl tohoto okraje platí

$$\int_0^L \tau dy = F. \tag{2.24}$$

Příklad 2.1. Na obdélníkové stěně o rozměrech b a h je dána Airyho funkce ve tvaru $F = 2 \times x^3 + 4 \times x^2 \times y^2$. Vykreslete průběhy napětí σ_x a σ_y na okrajích stěny a ve svislém řezu uprostřed.



Obr. 2.5 Geometrie stěny v příkladu 2.1.

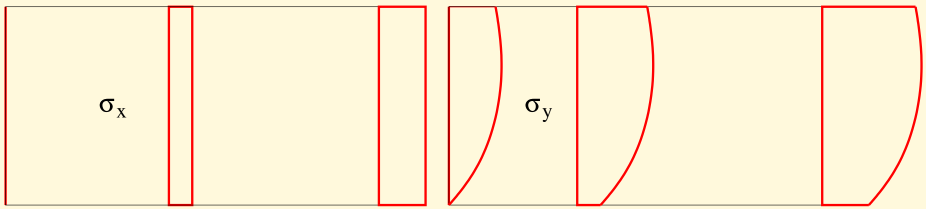
Řešení. Pomocí vztahů (2.22) nejprve stanovíme vztahy pro jednotlivá napětí:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 8 \times x,$$
$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 12 \times x + 2 \times y^2,$$
$$\tau_{xz} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -16 \times x \times y.$$

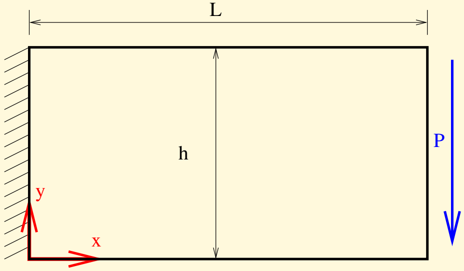
Do získaných vztahů dosazujeme $x = 0$, $x = \frac{b}{2}$ a $x = b$ a hodnoty b od 0 do h. Získané průběhy jednotlivých napětí jsou vykresleny na obrázku 2.6.

▲

Příklad 2.2. Stanovte tvar Airyho funkce na obdélníkové stěně o rozměrech L a h vlevo vetknuté a vpravo zatížené silou podle obrázku 2.7. Tloušťka stěny je 1.



Obr. 2.6 Průběhy napětí na stěně z obrázku 2.5.



Obr. 2.7 Stěna z příkladu 2.2 .

Řešení. Zvolíme Airyho funkci ve tvaru:

$$F = a \times x^2 \times y + b \times x \times y^2,$$

kde a, b jsou zatím neznámé konstanty, které budou muset být stanoveny z okrajových podmínek.

Nejprve ověříme, že zvolená funkce vyhovuje stěnové rovnici $\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0$:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} = 0, \quad \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0$$

Vyjádříme jednotlivá napětí pomocí zvolené funkce F:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2 \times a \times x^2 + 2 \times a \times x, \\
\sigma_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2 \times a \times y^2, \\
\tau_{xz} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -4 \times a \times x - 2 \times b \times y.
\end{aligned}$$

Nyní můžeme stanovit a, b z okrajových podmínek:

- Pro pravý svislý okraj stěny $(x = L)$ je normálové napětí $\sigma_x = 0$, a tedy: $2 \times a \times L^2 + 2 \times a \times x = 0 \Rightarrow a = -\frac{b}{3 \times L}$
- Pro pravý okraj stěny $(x = L)$ také musí platit, že výslednice smykového napětí je rovna zde působící síle P, tedy $\int_0^L \tau_{xy} dy = P$, a tedy: $\int_0^L (-4 \times a \times x - 2 \times b \times y) dy = -2 \times a \times L \times h^2 - b \times h^2 = P$, a po úpravě: $c \times h^3 - c \times h^3 = P \Rightarrow b = -\frac{3 \times P}{5 \times h^2}$

Obsah
41. strana ze 197
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Po dosazení stanovených a a b do zvolené funkce F získáme výslednou Airyho funkci pro zadanou stěnu:

$$F = \frac{P}{5 \times h^2 \times L} \times x^2 \times y^2 - \frac{3 \times P}{5 \times h^2} \times x \times y^2.$$

▲

2.5.2. Numerické řešení stěn metodou sítí

V praktických úlohách se v 50.-80. letech minulého století často využívalo numerického řešení rovnice (2.22) pomocí *diferenční metody*, označované často také jako *metoda sítí*. Například známá pomůcka pro určování statických veličin na stěnách a deskách [44] byla z podstatné části sestavena na základě hodnot vypočítaných metodou sítí.

Pro účely dalšího výkladu bude princip metody vysvětlen jen velmi stručně. Vyjdeme ze definice derivace funkce $F = y(x)$:

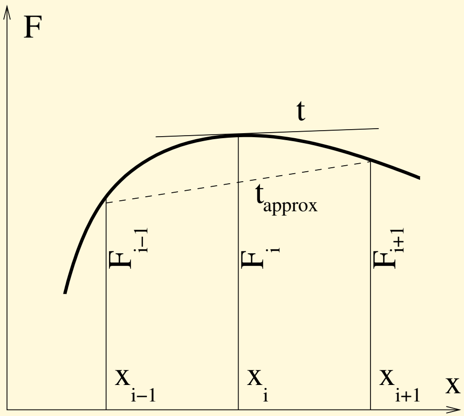
$$F' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{2.25}$$

Pro inženýrské potřeby můžeme předpokládat, že bude-li Δx ve vztahu (2.25) dostatečně malé, pak lze přibližně psát:

$$F'_{approx} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{F_{i+1} - F_i}{x_{i+1} - x_i}. \tag{2.26}$$

Přibližně tak vyjádříme derivaci funkce f pomocí rozdílu funkčních hodnot. Vhodnějším zápisem však bude tvar:

$$F'_{approx} = \frac{F_{i+1} - F_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} = \frac{F_{i+1} - F_{i-1}}{2\ \Delta x}, \tag{2.27}$$



Obr. 2.8 K výkladu principu metody sítí.

kde $\Delta x = x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1}$.

Pokud budeme pohlížet na derivaci F' jako na směrnici tečny t k funkci F, pak můžeme použité výrazy ilustrovat na obrázku 2.8. Tečna t odpovídá výrazu podle rovnice (2.25), zatímco tečna t_{approx} odpovídá rovnici (2.27).

Podobně je možné získat vztahy i pro funkce více proměnných, například:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial F_{i+1,j} - F_{i-1,j}}{2\ \Delta x}, \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial F_{i,j+1} - F_{i,j-1}}{2\ \Delta y}. \end{aligned}$$

Při odvození vztahů pro derivace vyšších řádů je možné postupovat tak, že v rovnici 2.27 se ze jednotlivé funkční hodnoty opět dosadí aproximace derivací. Druhé derivace funkce F pak nabudou tvaru:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= \frac{F_{i+1,j} - 2F_{i,j} + F_{i-1,j}}{\Delta x^2}, \\
\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} &= \frac{F_{i,j+1} - 2F_{i,j} + F_{i,j-1}}{\Delta y^2}, \\
\frac{\partial^2 F}{\partial x\ y} &= \frac{\partial F_{i+1,j+1} - F_{i+1,j-1} - F_{i-1,j+1} + F_{i-1,j-1}}{4\ \Delta x\ \Delta y}.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Pro řešení rovnice stěny (2.22) jsou potřebné aproximace čtvrtých derivací. Ty je možné odvodit analogickým postupem. Uvedeme jen výsledný tvar:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} &= \frac{F_{i+2,j} - 4\ F_{i+1,j} + 6\ F_{i,j} - 4F_{i-1,j} + F_{i-2,j}}{\Delta x^4} \\
\frac{\partial^4 F}{\partial y^4} &= \frac{F_{i,j+2} - 4\ F_{i,j+1} + 6\ F_{i,j} - 4F_{i,j-1} + F_{i,j-2}}{\Delta y^4} \\
\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\ y^2} &= \frac{4\ F_{i,j} - 2\ \ (F_{i+1,j} + F_{i,j+1} + F_{i,j-1} + F_{i-1,j})}{\Delta x^2\ y^2} + \\
&+ \frac{F_{i+1,j+1} + F_{i+1,j-1} + F_{i-1,j+1} + F_{i-1,j-1}}{\Delta x^2\ y^2}
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Pro další výklad označme:

$$\alpha^2 = \left(\frac{\Delta x}{\Delta F}\right)^2, \qquad (2.30)$$
$$\beta^2 = \left(\frac{\Delta F}{\Delta x}\right)^2.$$

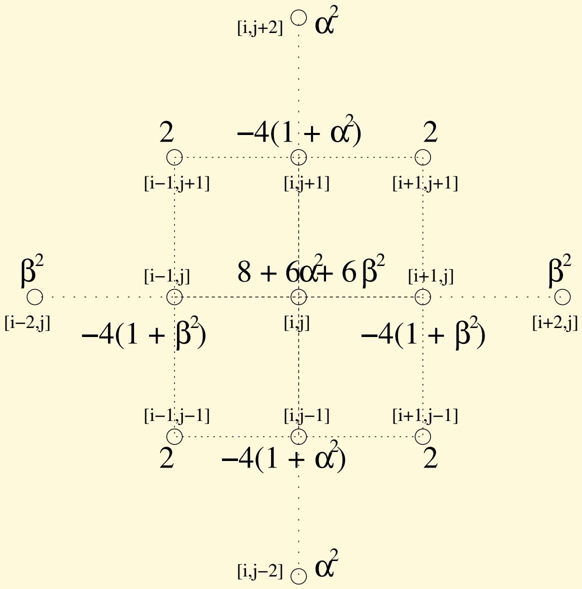
Potom dosazením vztahů (2.30) do stěnové rovnice (2.22) a využitím (2.31) získáme vztah:

$$\begin{aligned} & \frac{F_{i,j}\left(8+6\ \alpha^2+6\ \beta^2\right)}{\Delta x^2\ \Delta y^2} - \\ - & \frac{4\left[\left(F_{i+1,j}+F_{i-1,j}\right)\left(1+\beta^2\right)+\left(F_{i,j+1}+F_{i,j-1}\right)\left(1+\alpha^2\right)\right]}{\Delta x^2\ \Delta y^2} + \\ + & \frac{2\left(F_{i+1,j+1}+F_{i+1,j+1}+F_{i+1,j-1}+F_{i-1,j+1}+F_{i-1,j-1}\right)}{\Delta x^2\ \Delta y^2} + \\ + & \frac{\beta^2\ \left(F_{i+2,j}+F_{i-2,j}\right)+\alpha^2\ \left(F_{i,j+2}+F_{i,j-2}\right)}{\Delta x^2\ \Delta y^2} = \\ = & \ 0, \end{aligned} \qquad (2.31)$$

tedy stěnovou rovnici aproximovanou pomocí funkčních hodnot Airyho funkce F.

Pokud vyneseme koeficienty rovnice (2.31) v kartézském systému souřadnic s vodorovnou osou x svislou y, a předpokládali, že koeficienty i odpovídají ose x a koeficienty j odpovídají ose y, pak získáme schéma uvedené na obrázku 2.9.[1]

[1] Takové zobrazení není samoúčelné. Při sestavování rovnic pro metodu sítí se řešená kosntrukce v měřítku



Obr. 2.9 Grafické znázornění aproximace stěnové rovnice (2.31).

Je patrné, že namísto řešení jedné diferenciální rovnice (2.22) bude nutné sestavit a vyřešit soustavu rovnic (2.31), které budou sestavovány v řadě bodů řešené oblasti. Ovšem protože rovnice (2.31) obsahují pouze funkční hodnoty hledané Airyho funkce F, získaná soustava bude pouze soustavou lineárních rovnic. Výsledkem pak budou funkční hodnoty Airyho funkce ve zvolených bodech konstrukce, které mohou být dále použity k přibližnému určení složek vektoru napětí v těchto bodech.

2.5.3. Okrajové podmínky při řešení stěn metodou sítí

K určení okrajových podmínek, které jsou nezbytné k sestavení soustavy rovnic, může být použita například Hermiteova analogie.[1]

Hodnoty Airyho funkce na okrajích stěny je možné zapsat jako fukce vnitřních sil náhradního nosníku:

$$F = M, \quad \frac{\partial F}{\partial \eta} = N, \tag{2.32}$$

kde η je osa kolmá k okraji stěny, M je ohybový moment na náhradním nosníku a N je normálová síla na náhradním nosníku.

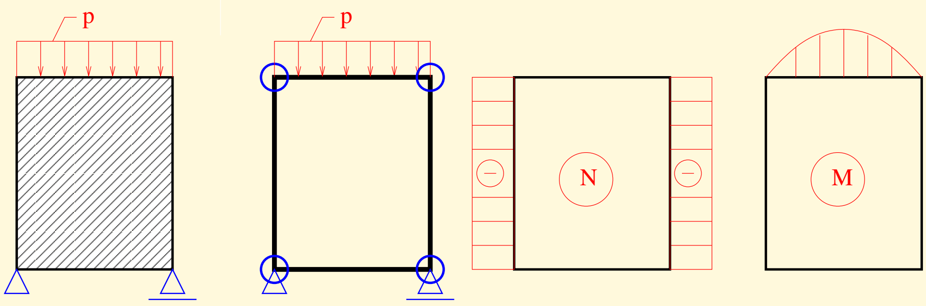
Pro výpočet mohou být potřebné nejen hodnoty na okraji řešené oblasti, ale i hodnoty mimo ni, které jsou na obrázku 2.11 označeny $F_{i,ext}$. Pro ty je možné psát:

$$F_{i,ext} = F_i + 2\Delta \, \frac{\partial F}{\partial \eta}, \tag{2.33}$$

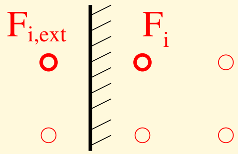
kde Δ je vzdálenost bodů ve směru kolmém k okraji (tedy Δx nebo Δy).

---

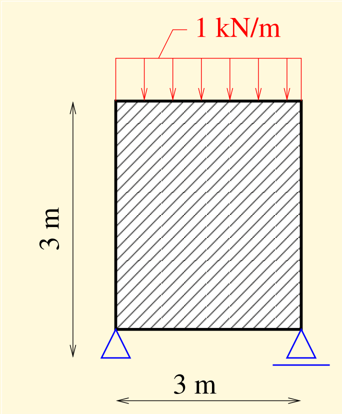
vykreslila a pokryla se pravoúhlou sítí s roztečemi Δx a Δy. Zobrazené schéma z obrázku 2.9 (vykreslené ve stejném měřítku na průhledném materiálu) se pak přikládalo na jednotlivé body, kde se sestavovala rovnice,



Obr. 2.10 Vnitřní síly na náhradním nosníku pro Hermiteovu analogii.



Obr. 2.11 Hodnoty v okolí okraje.



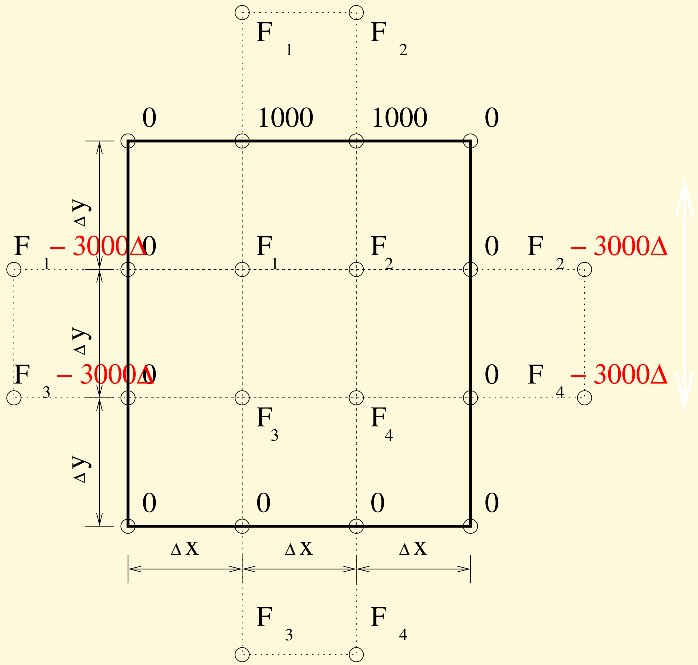
Obr. 2.12 Zadání příkladu 2.3.

Příklad 2.3. Určete hodnoty Airyho funkce napětí stěny podepřené a zatížené dle obrázku 2.12, která má rozměry $x = 3m$, $y = 3m$, $t = 0.1m$ a vlastnosti $E = 20\ GPa$, $\nu = 0{,}2$. Výsledky ve čtyřech bodech stěny.

Řešení. Na obrázku 2.13 jsou vyznačeny body F_1 až F_4, ve kterých se budou počítat funkční hodnoty Airyho funkce. Hodnoty na okraji jsou vypočítány podle Hermiteovy analogie podle vztahů (2.32) a (2.33) z vnitřních sil náhradního nosníku podle schématu na obrázku 2.14.

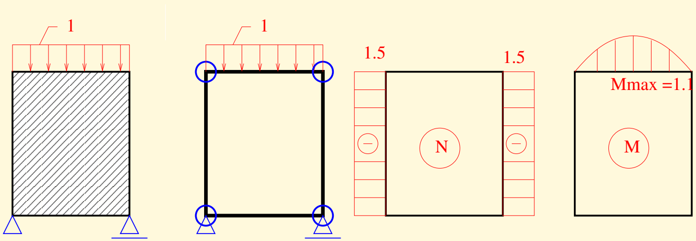
a používalo se k odečítání koeficientů příslušných jednotlivým bodům F_i.

[1]Charles Hermite (1822-1901), francouzský matematik.



Obr. 2.13 Výpočetní schéma stěny v příkladu 2.3.

Obsah
50. strana ze 197
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obr. 2.14 Hermieova analogie pro příklad 2.3.

Pro jednotlivé body napíšeme rovnice (2.31). Na pravou stranu budeme převádět členy neobsahující žádnou neznámou.[1]

Nejprve určíme pomocné hodnoty potřebné pro sestavení rovnic:

$$\begin{aligned}
\Delta x &= 1\ m, \\
\Delta y &= 1\ m, \\
\alpha^2 &= \left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2 = \left(\frac{1}{1}\right)^2 = 1, \\
\beta^2 &= \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 = \left(\frac{1}{1}\right)^2 = 1.
\end{aligned}$$

Rovnice v bodě F_1:

$$F_1(8+6+6) - 4\left[(F_2+0)(1+1) + (1000+F_3)(1+1)\right] +$$

[1]Povšimněte si, že pro zapsání rovnic jsou potřebné i hodnoty v bodech mimo konstrukci.

$$+2(0 + F_4 + 1000 + 0) + 1(0 + F_1) + 1(F_1 - 3000 + 0) = 0,$$

po úpravě a zjednodušení dostaneme:

$$22F_1 - 4F_2 - 4F_3 + 2F_4 = 5000.$$

Rovnice v bodě F_2:

$$F_2(8 + 6 + 6) - 4\left[(0 + F_1) + (1000 + F_4)\right] + 2(1000 + 0 + 0 + F_3)$$

$$+(0 + F_2 - 3000) + (F_2 + 0) = 0,$$

po úpravě a zjednodušení dostaneme:

$$-4F_1 + 22F_2 + 2F_3 - 4F_4 = 5000.$$

Rovnice v bodě F_3:

$$F_3(8 + 6 + 6) - 4\left[(F_4 + 0) + (F_1 + 0)\right] + 2(F_2 + 0 + 0 + 0)$$

$$+(1000 + F_3) + (0 + F_3 - 3000) = 0,$$

po úpravě a zjednodušení dostaneme:

$$-4F_1 + 2F_2 + 22F_3 - 4F_4 = 2000.$$

Rovnice v bodě F_4:

$$F_4(8 + 6 + 6) - 4\left[(0 + F_3) + (F_2 + 0)\right] + 2(0 + 0 + F_1 + 0)$$

Č.	F_1	F_2	F_3	F_4	P.S.
1.	22	-4	-4	2	5000
2.	-4	22	2	-4	5000
3.	-4	2	22	-4	2000
4.	2	-4	-4	22	2000

Tab. 2.1 Soustava lineárních rovnic pro příklad 2.3.

$$+(0 + F_4 - 3000) + (1000 + F_4) = 0,$$

po úpravě a zjednodušení dostaneme:

$$2F_1 - 4F_2 - 4F_3 + 22F_4 = 2000.$$

Sestavené rovnice je možné přepsat do maticové podoby, která je uvedena v tabulce 2.1. Po vyřešení soustavy 2.1 získáme výsledky:

$$\begin{aligned} F_1 &= F_2 = 293.75 \\ F_3 &= F_4 = 143.75 \end{aligned}$$

▲

2.6. Řešení stěn Ritzovou metodou

Kromě výše uvedených metod je možné použít k řešení stěn také například Ritzovu metodu [36, 37]. I v tomto případě budeme hledat podobu Airyho funkce.

Podle [36] platí, že dopňková potenciální energie konstrukce je minimální:

$$\Pi^* = min. \tag{2.34}$$

Potom její variace musí být rovna nule:

$$\frac{\partial \Pi^*(F_a)}{\partial a_i} = 0. \tag{2.35}$$

V Ritzově metodě se neznámá hledaná funkce nahrazuje aproximací s neznámými koeficienty a_i a rovnice (2.35) se využívá k výpočtu neznámých a_i.

Pro vyjádření Π^* volíme aproximaci Airiho funkce F_a ve tvaru:

$$F_a = \sum a_i \; \psi_i, \tag{2.36}$$

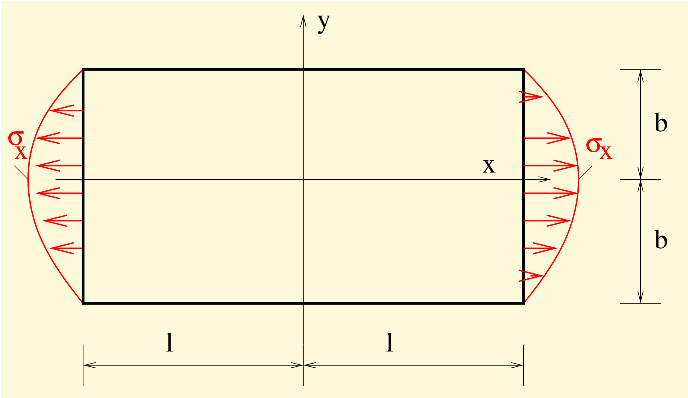
kde a_i jsou hledaní neznámé koeficienty a ψ_i jsou vhodně zvolené aproxiamční funkce.

Příklad 2.4. Pomocí Ritzovy metody stanovte rozložení napětí uvnitř stěny na obrázku 2.15. Zatížení na okrajích je popsáno rovnicí:

$$\sigma_x = p(1 - \frac{y^2}{b^2}).$$

Řešení. Aproximaci Airyho funkce zvolíme ve tvaru

$$F = F_o + F_1,$$



Obr. 2.15 Výpočetní schéma stěny v příkladu 2.4.

kde člen F_o bude přestavovat stav, kdy normálové napětí ve směru osy x bude rovno napětí σ_x v koncových řezech a kdy současně ostatní napětí budou nulová ($\sigma_y = \tau_{xy} = 0$). Zvolíme tedy:

$$F_o = \frac{p}{2} y^2 (1 - \frac{y^2}{6b^2}).$$

Můžeme snadno ověřit, že F_o splňuje okrajové podmínky, protože platí:

$$\sigma_{x,o} = \frac{\partial^2 F_o}{\partial y^2} = p(1 - \frac{y^2}{b^2}), \quad \sigma_{y,o} = \frac{\partial^2 F_o}{\partial x^2} = 0, \quad \tau_{xy,o} = -\frac{\partial^2 F_o}{\partial x \partial y} = 0$$

Druhý člen aproximace (F_1) zvolíme ve tvaru:

$$F_1 = a_1\ \psi(x, y) = a_1\ (l^2 - x^2)^2\ (b^2 - y^2)^2.$$

Aby byly splněny okrajové podmínky, měla by Airyho funkce vyjádřená tímto členem vyvolávat v krajních řezech nulová normálová napětí σ_x[1]. To je splněno, protože:

$$F_1(x = 0) = 0,$$

$$F_1(x = l) = 0.$$

S použitím zvolené aproximace můžeme připravit vztahy pro jednotlivá napětí:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 4\ a_1 l^2 b^4 (1 - \frac{x^2}{l^2})^2 (-1 + 3\frac{y^2}{b^2}), \\
\sigma_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 4\ a_1 b^2 l^4 (-1 + 3\frac{x^2}{l^2})(1 - \frac{y^2}{l^2})^2, \\
\tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -16\ a_1 l^3 b^3 \frac{x}{l} (1 - \frac{x^2}{l^2})(1 - \frac{y^2}{l^2}).
\end{aligned}$$

[1]Připomínáme, že podle rovnice (2.22) platí: $\sigma_x = \frac{\partial F}{\partial y}$.

Získaná napětí dosadíme do vztahu pro doplňkovou potenciání energii [36, 37] $\Pi^* = = \Pi_i = \frac{h}{2E}\int_{-l}^{l}\int_{-b}^{b}(\sigma_x^2 + 2\tau_{xy}^2 + \sigma_y^2)dydx$ a výsledek variujeme podle a_i a položíme roven nule podle rovnice (2.35):

$$a_1\left(\frac{64}{7}\frac{256}{49}\frac{b^2}{l^2} + \frac{64}{7} + \frac{b^2}{l^2}\right) = \frac{p}{l^4b^2}.$$

Ze získané rovnice vypočítáme hledanou konstantu a_i:

$$a_1 = \frac{\frac{p}{l^4b^2}}{\left(\frac{64}{7} + \frac{256}{49}\frac{b^2}{l^2} + \frac{64}{7}\frac{b^2}{l^2}\right)}.$$

Nyní můžeme a_i dosadit do navržené aproximace F a získáme vztah pro Airyho funkci na zadané stěně:

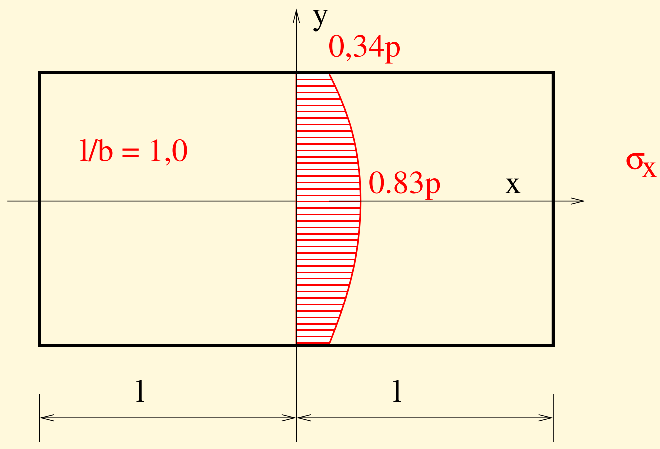
$$F = \frac{p}{2}y^2(1 - \frac{y^2}{6b^2}) + \frac{\frac{p}{l^4b^2}}{\left(\frac{64}{7} + \frac{256}{49}\frac{b^2}{l^2} + \frac{64}{7}\frac{b^2}{l^2}\right)}\,(l^2 - x^2)^2\,(b^2 - y^2)^2.$$

Tím je úloha vyřešena. Nalezenou aproximaci můžeme použít ke stanovení průběhů a hodnot napětí v libovolném místě stěny. Na obrázku 2.16 je pro ilustraci vynesen průběh normálového napětí σ_x uprostřed stěny pro poměr $\frac{l}{b} = 1$.

▲

Kvíz.

1. Napětí σ_z je obecně nenulové v problému:
   - ☐ Rovinné deformace.
   - ☐ Rovinné napjatosti.



Obr. 2.16 Napětí σ_x vynesené ve středu stěny v příkladu 2.4.

- [ ] Nelze jednoznačně stanovit.

2. Který vektor odpovídá úloze rovinné deformace? můžeme-li použít polynom jen se 3 členy.
   - [ ] ${\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}}^T$.
   - [ ] ${\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}}^T$.
   - [ ] ${\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}}^T$.
3. Který vektor odpovídá úloze rovinné napjatosti? můžeme-li použít polynom jen se 3 členy.
   - [ ] ${\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}}^T$.
   - [ ] ${\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}}^T$.
   - [ ] ${\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}}^T$.
4. Ve stěnové rovnici je neznámou:
   - [ ] Průhyb ve směru osy y.
   - [ ] Normálové napětí.
   - [ ] Airyho funkce napětí.
5. Který vzorec pro výpočet σ_x z Airyho funkce f je správný?
   - [ ] $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.
   - [ ] $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.
   - [ ] $-\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$.
6. Který vzorec pro výpočet σ_y z Airyho funkce f je správný?
   - [ ] $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.

- ☐ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.
- ☐ $-\frac{\partial^2 f}{\partial x\ \partial y}$.

7. Metoda sítí:
- ☐ Je metoda přibližná.
- ☐ Je metoda přesná.
- ☐ Nelze ji takto zařadit.

8. V metodě sítí se:
- ☐ Derivace nahrazují diferencemi.
- ☐ Integrace nahrazují deferencemi.
- ☐ Derivace nahrazují integracemi.

9. Přesnějších výsledků je možné v metodě sítí dosáhnout:
- ☐ Pomocí menšího kroku ΔX.
- ☐ Pomocí použítí derivací vyšších řádů.
- ☐ Přenásobením tzv. relaxačním koeficientem.

10. Ritzova metoda je metoda:
- ☐ Přesná.
- ☐ Přibližná.
- ☐ Pravděpodobnostní.

11. Který z uvedených typů zatížení je možné zadat na řezu dlouhým tělesem (úloha rovinné napjatosti)? Úloha se řeší v rovině xy.
- ☐ Posunutí v ose z.

- ☐ Moment otáčející kolem osy z.
- ☐ Spojité zatížení $\left[kN/m^2\right]$ ve směru osy y.

12. Který z uvedených typů zatížení je možné zadat na stěně (úloha rovinné napjatosti)? Úloha se řeší v rovině xy.

- ☐ Moment otáčející kolem osy z.
- ☐ Síla ve směru osy y.
- ☐ Posunutí v ose z.

13. Stanovte hlavní napětí pokud $\sigma_x = 20\ MPa, \sigma_y = -10\ MPa, \sigma_{xy} = 0\ MPa$

- ☐ $\sigma_1 = 20\ MPa, \sigma_2 = -10\ MPa$.
- ☐ $\sigma_1 = -20\ MPa, \sigma_2 = 10\ MPa$.
- ☐ $\sigma_1 = 20\ MPa, \sigma_2 = 20\ MPa$.

14. Jakou jednotku má normálové napětí ve stavu rovinné deformace?

- ☐ Pa.
- ☐ Pa/m.
- ☐ $Pa\ m$.

15. Poměrná deformace ε_z je obecně nenulová v problému:

- ☐ Rovinné deformace.
- ☐ Rovinné napjatosti.
- ☐ V obou výše uvedených problémech.

16. Zatížení nosné stěny je:

- ☐ V rovině stěny.

- [ ] Kolmo na rovinu stěny.
- [ ] V obou směrech.

17. Jednotka měrných stěnových sil je:

- [ ] N.
- [ ] N/m.
- [ ] Nm.

18. Splňuje funkce $F = 2x^3 + 4x^2y^2$ Airyho funkci napětí?

- [ ] Ano.
- [ ] Ano, ale řešení bude nepřesné.
- [ ] Ne.

19. Je dána Airyho funkce napětí $F = 2x^2 + 4x^2y$. Funkce napětí σ_x je:

- [ ] 0.
- [ ] 4(1+y).
- [ ] 4x.

Kapitola 3

Desky

3.1. Základní vlastnosti desek

V technické praxi se často vyskytují plošné konstrukce, které jsou převážně zatěžovány ohybovými účinky (podobně jako ohýbané nosníky). Jsou jimi například stropní desky a panely nebo mostovky. Jako *desky* počítáme plošné nosné konstrukce, které jsou zatíženy a podepřeny výhradně kolmo ke svojí střednicové rovině.[1]

U desek je jeden rozměr (*tloušťka*) podstatně (5 a více krát) menší než rozměry ostatní. Je-li tloušťka 10 a více krát menší, pak desky označujeme jako *tenké* a můžeme k jejich analýze použít *Kirchhoffovy* teorie pro tenké desky, v opačném případě desky označujeme

[1] Deska může být samozřejmě podepřena i proti pootočení, stejně jako nosník. V tomto případě je samozřejmě bráněno pootočení kolem přímky ležící v rovině desky.

jako *tlusté* a měli bychom používat výstižnější *Mindlinovy teorie.*[1]

V dalším výkladu se budeme věnovat převážně Kirchhoffově teorii.

3.2. Kirchhoffova teorie ohybu tenkých desek

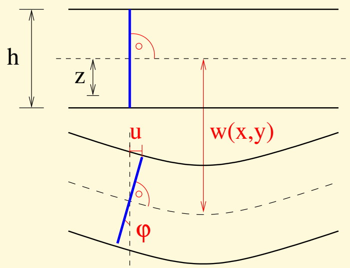
Teorie označovaná jako Kirchhoffova[2] vychází z podobných předpokladů jako Bernoulliova – Navierova teorie ohybu nosníků. Tato teorie tedy nevznikla prostou úpravou teorie pružnosti pro prostor, která byla vyložena v předchozím textu, a proto postupně narazíme na některé nesoulady.

Předpoklady je možné shrnout do několika bodů:

- jednotlivé vrstvy desky na sebe netlačí $\sigma_z = 0$,
- normálová napětí ve střednicové rovině jsou nulová,
- body ve střednicové rovině se mohou přemisťovat pouze ve směru osy z,
- normály střednicové roviny zůstávají i po deformaci přímé a kolmé k této rovině.

Předpoklad o kolmosti normál je ilustrován na obrázku 3.1. Stejně jako u ohýbaných nosníků způsobuje lineární změnu normálových poměrných deformací ε a normálových napětí σ po tloušťce desky. Tedy prodloužení u (ve druhém směru pak v) lineárně roste se zvětšující se vzdáleností z od střednicové roviny.

[1] Toto rozdělení je jen orientační a obecnější Mindlinovu teorii můžeme využít i pro tenké desky. Řada výpočetních produktů na bázi metody konečných prvků tak činí běžně. Naopak použití Kirchhoffovy teorie



Obr. 3.1 Deska – předpoklad o normálách.

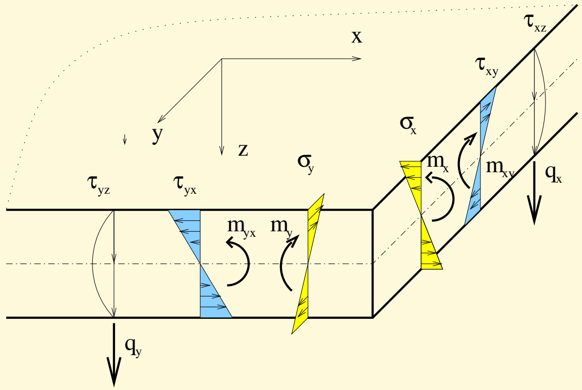
3.2.1. Neznámé veličiny na desce

Jak vyplývá z předpokladů Kirchhoffovy teorie, body ve střednicové rovině se mohou pohybovat jen ve svislém směru w (tedy směru kolmém k nezdeformované střednicové ploše). Obdobně jako na nosnících můžeme pracovat s pootočeními φ zdeformované střednicové plochy:

$$\begin{aligned} \varphi_x &= \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \varphi_y &= \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

pro tlusté desky vede k méně výstižným výsledkům, podobně jako aplikace nosníkové teorie na stěny.

[2]Její běžně používanou, a v dalším textu použitou, podobu zformuloval britský matematik Augustus Edward Hough Love(1863-1940), který vycházel ze starších prací německého fyzika Gustava Kirchhoffa (1824-1887). Původní autorkou je však francouzská matematička Marie–Sophie Germain (1776-1831).



Obr. 3.2 Napětí a vnitřní síly na desce.

Ve střednicové ploše desky je nenulové pouze posunutí w ve směru osy z systému souřadnic. Jak je ovšem vidět na obrázku 3.1, mimo střednicovou plochu jsou zbývající dvě (vodorovná) posunutí u a v obecně nenulová. Budeme-li předpokládat, že přibližně platí $\tan(\varphi) = \varphi$, pak můžeme v souladu s obrázkem 3.1 psát:

$$u = -z\,\varphi_x = -z\,\frac{\partial w}{\partial x}, \quad v = -z\,\varphi_y = -z\,\frac{\partial w}{\partial y}. \tag{3.2}$$

K získání výrazu pro poměrné deformace využijeme geometricko–deformačních vztahů teorie pružnosti (1.7) a dosadíme do nich za u a v výrazy podle rovnice (3.2):[1]

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -2\,z\,\frac{\partial x}{\partial y}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

3.2.2. Fyzikální rovnice na desce

Stejně jako u předchozích úloh budeme předpokládat, že i deska se skládá z izotropního a homogenního materiálu s lineárně pružným chováním, pro který platí Hookeův zákon. Můžeme tedy vyjít ze základních vztahů (1.21) platných pro pružné těleso a do nich dosadit

[1] Vztahy pro γ_{yz} a γ_{zx} zde neuvádíme – výsledky, které bychom získali ze vztahů (1.7), totiž nevyhovují předpokladům Kirchhoffovy teorie, a proto se pro výpočet s nimi svázaných napětí používá odlišného postupu, uvedeného v odstavci o fyzikálních vztazích.

výrazy pro poměrné deformace podle rovnic (3.4):

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\ \varepsilon_y) = -\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \tag{3.4}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\ \varepsilon_x) = -\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \tag{3.5}$$

$$\tau_{xy} = G\ \gamma = -\frac{E}{2\ (1+\nu)}\ 2\ z\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{3.6}$$

Určitým problémem je určení vztahů pro $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ a $\tau_{yz} = \tau zy$.[1] Na nosnících obdélníkového průřezu, které jsou do jisté míry analogické desce, má smykové napěí parabolický průběh po výšce nosníku. Pokud bychom využili podle (1.21) rovnice $\tau_{xz} = \gamma_{xz}\ G$, pak ve zřejmém případě, že ve střednicové ploše bude zkosení $\gamma_{xz} = 0$ nebude možné vyhovět předpokladu o parabolickém průběhu γ_{xz}, které musí mít v uvedeném místě nenulovou velikost. Tato okolnost je jedním z rozporů mezi předpoklady obecné teorie pružnosti a Kirchhoffovou teorií.

Například podle [37] je možné z podmínek rovnováhy na elementu desky odvodit, že platí:

$$\tau_{xz} = \frac{E}{2(1-\nu^2)}\left[(\frac{h}{2})^2 - z^2\right]\frac{\partial \Delta w}{\partial x}, \tag{3.7}$$

$$\tau_{xz} = \frac{E}{2(1-\nu^2)}\left[(\frac{h}{2})^2 - z^2\right]\frac{\partial \Delta w}{\partial y},$$

kde Δw představuje změnu svislé deformace po výšce průřezu a h je tloušťka desky, která je znázorněna na obrázku 3.1.

[1] I nadále budeme předpokládat platnost předpokladu o vzájemnosti smykových napětí.

Průběhy jednotlivých složek napětí jsou znázorněny na obrázku 3.2. Z tohoto obrázku je zřejmé, že napětí σ_x a σ_y odpovídají *ohybovým účinkům*, zatímco napětí τ_{yz} a τ_{xz} účinkům *smykovým*. Všechna tato napětí mají svoje přímé ekvivalenty u nosníků, samozřejmě s výhradou, že u nosníku jen napětí σ_x a τ_{xz}, zatímco u desky jsou napětí i ve druhém směru.

Veličina $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ odpovídá *krouticím účinkům*.

3.2.3. Vnitřní síly na desce

Pro praktické aplikace (posuzování a dimenzování deskových konstrukcí) není vyjádření výsledků ve formě jednotlivých složek vektoru napětí zpravidla vhodné. Stejně jako u nosníků by bylo výhodnější mít k dispozici integrální veličiny (u nosníků šlo o posouvající síly a o ohybové a krouticí momenty).

Na desce ovšem nebude možné získat v každém řezu jednu hodnotu příslušné veličiny tak, jak tomu bylo u nosníků, protože takové výsledky by byly příliš hrubé.[1] Je tedy nutné definovat vnitřní síly (posouvající síly a momenty) na jednotku šířky řezu desky. Půjde tedy o *měrné vnitřní síly* a měrné posouvající síly budou tedy mít jednotku $\frac{N}{n}$. Měrné momenty (ohybové i krouticí) budou mít jednotky $\frac{N\ m}{m}$ (někdy se zapisuje i jen jako N).

[1] U nosníků jsme předpokládali, že vnitřní síly se mění pouze ve směru nejdelšího rozměru nosníku, zatímco u desky je třeba pracovat ještě s druhým srovnatelným rozměrem – šířkou.

Na základě obrázku 3.2 můžeme zapsat vztahy pro výpočet měrných momentů:

$$
\begin{aligned}
m_x &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x \; z \; dx = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\
m_y &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y \; z \; dx = -D \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\
m_{xy} &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} \; z \; dx = -D \, (1-\nu) \, \frac{\partial^2 w}{\partial x \; \partial y},
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

kde D se označuje jako **desková tuhost**:

$$
D = \frac{E \; t^3}{12 \, (1 - \nu^2)} \tag{3.9}
$$

Stejným způsobem je možné získat také měrné posouvající síly:

$$
\begin{aligned}
q_x &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} dz = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \; \partial y^2} \right), \\
q_y &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} dz = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \; \partial y} \right).
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Poznámka 3.1. V souvislosti s uvedenými výslednými vztahy (3.9) až (3.11) je nutné mít na paměti, že byly odvozeny za předpokladu *lineárně pružného* a *izotropního* materiálu.

V případě, že by materiál desky byl ortotropní (může jít některé případy železobetonových desek, nebo desek z některých typů kompozitů), bylo by potřebné znovu odvodit vztahy (3.6) až (3.11). V takových případech nemá smysl definovat ani *deskovou tuhost*.

3.2.4. Hlavní a dimenzační momenty

V praktických úlohách navrhování železobetonových desek se setkáváme s problémem navrhování výztuže k přenesení krouticích účinků. U nosníků se zpravidla navrhují třmínky. To je v zásadě možné i u desky, nicméně realizace takové výztuže by narazila na problémy při realizaci. Možnosti řešení jsou v podstatě dvě.

První možností je podobně jako v úlohách rovinné napjatosti [43] byla definována hlavní normálové napětí, definovat hlavní ohybové momenty na desce, a betonářskou výztuž navrhovat ve směru těchto momentů. Hlavní momenty můžeme definovat jako největší a nejmenší ohybové momenty, které je možné určit ve studovaném místě desky. Tyto momenty působí ve směrech os, které jsou od os x, y pootořeny o úhel α. V souladu s [43] je možné je stanovit:

$$\begin{aligned} m_{1,2} &= \frac{1}{2}\left[(m_x + m_y) \pm \sqrt{(m_x + m_y)^2 + 4\ m_{xy}^2}\right], \qquad (3.11) \\ \alpha_1 &= \frac{1}{2}\ arctg\left(\frac{2\ m_{xy}}{m_x - m_y}\right) \end{aligned}$$

Hlavních momentů byl bylo možné využít k návrhu betonářské výztuže. Tento návrh by byl nejpřesnější a z hlediska spotřeby materiálu výztuže i teoreticky nejefektivnější. Problémem je však fakt, že směry hlavních momentů se budou po ploše desky zjevně měnit, a proto takto navržená výztuž by nemohla být provedena z přímých prutů, což je zásadním problémem při realizaci takovýchto konstrukcí.

Z výše uvedených důvodů se při návrhu železobetonových konstrukcí využívají *dimenzační momenty*. Ty vycházejí z poznatku, že pokud se pro účely návrhu konstrukce zvětší hodnota ohybvého momentu o celou hodnotu momentu krouticího, tak sice dojde k určité nepřesnosti, ale na stranu bezpečnou (skutečné namáhání konstrukce bude vždy nižší nebo

Obsah
71. strana ze 197
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

nejvýše rovno takto vypočtené hodnotě):

$$\begin{aligned} m_{x,dim} &= m_x + sgn(m_x)\ |m_{xy}| \\ m_{y,dim} &= m_y + sgn(m_y)\ |m_{xy}|. \end{aligned} \tag{3.12}$$

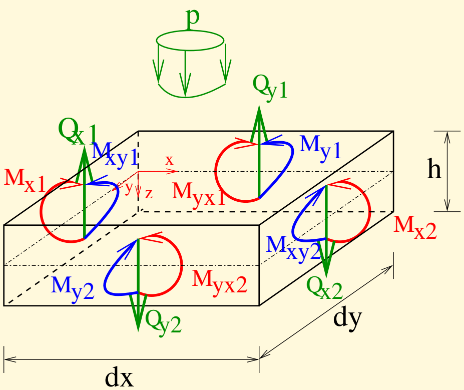
Potom stačí konstrukci nadimenzovat tak, jako by byla zatížena ohybovými momenty odpovídajícími hodnotám $m_{x,dim}$ a $m_{y,dim}$ a není třeba navrhovat další speciální výztuž pro zachycení krouticích účinků na desce.

3.2.5. Desková rovnice

V klasických postupech pro určování vnitřních sil a deformací desek se zpravidla vychází z řešení *deskové rovnice*. Je možné ji získat z podmínek rovnováhy na diferenciálním elementu desky, přičemž musíme mít stále na paměti, že dále uvedený výsledek bude platný jen pro desku z izotropního a lineárně pružného materiálu.

Z desky vyhovující výše uvedeným předpokladům vytkněme element o rozměrech dx, dy a tloušťce h podle obrázku 3.3. Na element působí vnější spojité zatížení p a na jeho okrajích působí měrné deskové síly.

Abychom mohli sestavit podmínky rovnováhy na uvedeném elementu, musíme získat



Obr. 3.3 Vnitřní síly na elementu desky.

výslednice jednotlivých měrných vnitřních sil:

$$
\begin{aligned}
M_{x1} &= m_x\ dy, \\
M_{x2} &= \left(m_x + \frac{\partial m_x}{\partial x} dx \right)\ dy, \\
M_{y1} &= m_y\ dx, \\
M_{y2} &= \left(m_y + \frac{\partial m_y}{\partial y} dy \right)\ dx, \\
M_{xy1} &= m_{xy}\ dx, \\
M_{xy2} &= \left(m_{xy} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} dx \right)\ dx, \\
M_{yx1} &= m_{yx}\ dy, \\
M_{yx2} &= \left(m_{yx} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial x} dy \right)\ dy, \\
Q_{x1} &= q_x\ dy, \\
Q_{x2} &= \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right)\ dy, \\
Q_{x1} &= q_y\ dx, \\
Q_{y2} &= \left(q_y + \frac{\partial q_x}{\partial y} dy \right)\ dx.
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

Podobně stanovíme i výslednici vnějšího zatížení:

$$F = p\ dx\ dy \tag{3.14}$$

Obsah

74. strana ze 197

Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Nyní můžeme sestavit podmínky rovnováhy k těžišti elementu:

$$\begin{aligned} \sum M_{i,x} &= 0 \\ \sum M_{i,y} &= 0 \\ \sum F_{i,z} &= 0 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Pokud do rovnic (3.16) dosadíme jednotlivé síly, získáme rovnice ve tvaru:

$$\begin{aligned} \sum M_{i,x} &= M_{x1} - M_{x2} + M_{xy1} - M_{xy2} + Q_{x1}\frac{dx}{2} + Q_{x2}\frac{dx}{2} = 0, \\ \sum M_{i,y} &= M_{y1} - M_{y2} + M_{yx1} - M_{yx2} + Q_{y1}\frac{dy}{2} + Q_{y2}\frac{dy}{2} = 0, \\ \sum F_{i,z} &= Q_{x1} - Q_{x2} + Q_{y1} - Q_{y2} - F = 0. \end{aligned}$$

Dále budeme upravovat jen první podmínku $\sum M_{i,x} = 0$, postup u ostatních je obdobný.

Do vztahu $\sum M_{i,x} = 0$ tedy můžeme dosadit výrazy pro jednotlivé výslednice vnitřních sil podle (3.14):

$$\begin{aligned} m_x dy - \left(m_x + \frac{\partial m_x}{\partial x}dx\right) dy + m_{xy}dx - \left(m_{xy} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y}dy\right) dx &+ \\ q_x\,\frac{dx}{2}dy + \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x}dx\right)\,\frac{dx}{2}dy &= 0. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Vztah (3.16) můžeme dále zjednodušit:

$$-\frac{\partial m_x}{\partial x}dxdy - \frac{\partial m_{xy}}{\partial y}dydx + \frac{\partial q_x}{\partial x}\frac{dx\ dy}{2} + q_x\ dxdy = 0 \tag{3.17}$$

Rovnici (3.17) můžeme dále zjednodušit vydělením $-dxdy$. Dále je možné předpokládat, že člen $\frac{\partial q_x}{\partial x}\frac{dx\ dy}{2}$ bude v porovnání s ostatními členy rovnice velmi malý, a proto je možné jej zanedbat. Tím se rovnice zjednoduší do tvaru:

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = q_x. \tag{3.18}$$

Zbývající podmínky rovnováhy je možné upravit stejným způsobem. Tím získáme jejich podobu ve tvaru:

$$\frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial x} = q_y, \tag{3.19}$$

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + p = 0. \tag{3.20}$$

Rovnice (3.17) a (3.20) můžeme dosadit do silové podmínky rovnováhy (3.20):

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial x^2} = -p. \tag{3.21}$$

Rovnice (3.21) obsahuje tři neznámé měrné momenty. Ty však nejsou vzájemně nezávislé a všechny jsou funkcí průhybu w podle vztahů (3.9). Pokud dosadíme rovnice (3.9) do (3.21), získáme *deskovou rovnici*:[1]

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D}. \tag{3.22}$$

[1] Používá se také název *rovnice desky*.

3.3. Metoda sítí při řešení deskové rovnice

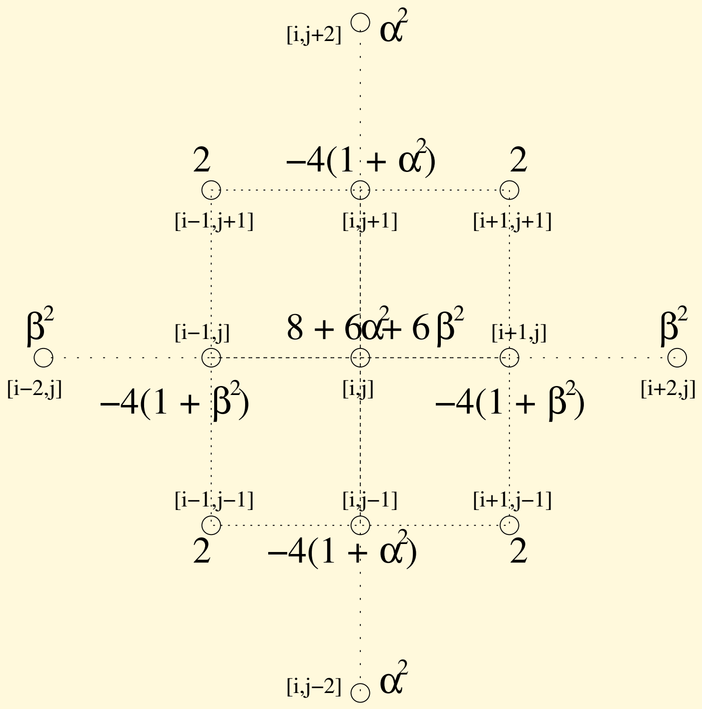
Deskovou rovnici (3.22) je možné vyřešit jen ve vybraných jednoduchých případech, zejména pro desky jednoduchého tvaru (čtvercové, obdélníkové) jednoduše zatížené a podepřené.

Ve složitějších případech je opět potřebné využít některou numerickou metodu, například *metodu konečných prvků* nebo *metodu sítí*[1] Základní princip tédo metody byl vyložen již u řešení stěn metodou sítí, proto v dalším textu uvedeme jen nezbytné podrobnosti.

Pro další řešení budou potřebné aproximace derivací funkce průhybu w:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{\Delta x^2}, \\
\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{\Delta y^2}, \\
\frac{\partial^2 w}{\partial x \; y} &= \frac{\partial w_{i+1,j+1} - w_{i+1,j-1} - w_{i-1,j+1} + w_{i-1,j-1}}{4 \; \Delta x \; \Delta y}, \\
\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} &= \frac{w_{i+2,j} - 4 \; w_{i+1,j} + 6 \; w_{i,j} - 4w_{i-1,j} + w_{i-2,j}}{\Delta x^4}, \\
\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} &= \frac{w_{i,j+2} - 4 \; w_{i,j+1} + 6 \; w_{i,j} - 4w_{i,j-1} + w_{i,j-2}}{\Delta y^4}, \\
\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \; y^2} &= \frac{4 \; w_{i,j} - 2 \; (w_{i+1,j} + w_{i,j+1} + w_{i,j-1} + w_{i-1,j})}{\Delta x^2 \; y^2} + \\
&+ \frac{w_{i+1,j+1} + w_{i+1,j-1} + w_{i-1,j+1} + w_{i-1,j-1}}{\Delta x^2 \; y^2}.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

[1] Pozorný čtenář si jistě povšimnul nápadné shody tvaru stěnové rovnice (2.22) a deskové rovnice (3.22).



Obr. 3.4 Grafické znázornění koeficientů rovnice (3.24).

Pomocí vztahů (3.24) je možné deskovou rovnici (3.22) přepsat do tvaru:

$$
\begin{aligned}
& \frac{w_{i,j}\left(8+6\ \alpha^2+6\ \beta^2\right)}{\Delta x^2\ \Delta y^2} - \\
- \quad & \frac{4\left[\left(w_{i+1,j+w_{i-1,j}}\right)\left(1+\beta^2\right)+\left(w_{i,j+1}+w_{i,j-1}\right)\left(1+\alpha^2\right)\right]}{\Delta x^2\ \Delta y^2} + \\
+ \quad & \frac{2\left(w_{i+1,j+1}+w_{i+1,j+1}+w_{i+1,j-1}+w_{i-1,j+1}+w_{i-1,j-1}\right)}{\Delta x^2\ \Delta y^2} + \\
+ \quad & \frac{\beta^2\ \left(w_{i+2,j}+w_{i-2,j}\right)+\alpha^2\ \left(w_{i,j+2}+w_{i,j-2}\right)}{\Delta x^2\ \Delta y^2} = \\
= \quad & \frac{P_{i,j}\ \Delta x\ \Delta y}{D},
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

kde, podobně jako u stěny, jsme označili:

$$
\alpha^2 = \left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2, \tag{3.25}
$$

$$
\beta^2 = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2.
$$

Potřebovat budeme i vztah pro výslednici rovnoměrného spojitého zatížení o velikosti q v bodě $[i, j]$:

$$
P_{i,j} = q\ \Delta x\ \Delta y. \tag{3.26}
$$

Další postup se od dříve popsaného řešení stěn metodou sítí formálně liší pouze způsobem zavedení okrajových podmínek a tím, že na pravé straně rovnic vystupuje obecně nenulové zatížení desky.

3.3.1. Okrajové podmínky na desce v metodě sítí

Při řešení desek můžeme využívat znalostí hodnot w a φ v místech okrajových podmínek (podpor) získaných při řešení nosníků:

- v případě vetknutí:

$$\begin{aligned} w &= 0, \\ \varphi_x &= 0, \\ \varphi_y &= 0. \end{aligned} \tag{3.27}$$

- v případě válcového kloubu kolem osy x:

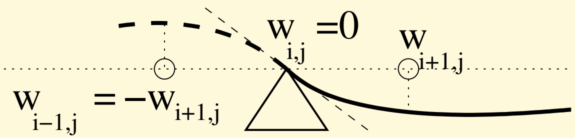
$$\begin{aligned} w &= 0, \\ \varphi_y &= 0. \end{aligned} \tag{3.28}$$

- v případě válcového kloubu kolem osy y:

$$\begin{aligned} w &= 0, \\ \varphi_x &= 0. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Pro potřeby dalšího výkladu se budeme zabývat jen případem *válcového kloubu*, který je ilustrován obrázkem 3.5. Přímo v místě kloubu je hodnota w rovna nule, pro bod mimo konstrukci budeme předpokládat, že se chová tak, jako by byl umístěn také na desce. Z tého úvahy a z obrázku 3.5 je tedy zřejmé, že:

$$\begin{aligned} w_{i,j} &= 0, \\ w_{i-1,j} &= -w_{i+1,j}. \end{aligned} \tag{3.30}$$



Obr. 3.5 Hodnoty funkce w v okolí válcového kloubu.

Diskusi k dalším případům je možné najít v [44], například pro vetknutí by bylo možné odvodit vztahy:

$$
\begin{aligned}
w_{i,j} &= 0, \\
w_{i-1,j} &= 3\, w_{i+1,j} - w_{i+2,j}.
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

3.3.2. Výpočet vnitřních sil metodou sítí

Vztahy pro měrné vnitřní síly na desce je možné získat po dosazení vztahů pro diference do rovnic (3.9) a (3.11):

$$
\begin{aligned}
m_x &= -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\
&= -D\left[\frac{w_{i+1,j} - 2\;w_{i,j} + w_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \nu\,\frac{w_{i,j+1} - 2\;w_{i,j} + w_{i,j-1}}{\Delta y^2}\right], \\
m_y &= -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \\
&= -D\left[\frac{w_{i,j+1} - 2\;w_{i,j} + w_{i,j-1}}{\Delta y^2} + \nu\,\frac{w_{i+1,j} - 2\;w_{i,j} + w_{i-1,j}}{\Delta x^2}\right], \\
m_{xy} &= -D\,(1-\nu\,)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) \qquad (3.32) \\
&= -D\,(1-\nu\,)\left[\frac{w_{i+1,j+1} - w_{i+1,j-1} + w_{i-1,j+1} + w_{i-1,j-1}}{4\;\Delta x \Delta y}\right] \qquad (3.33)
\end{aligned}
$$

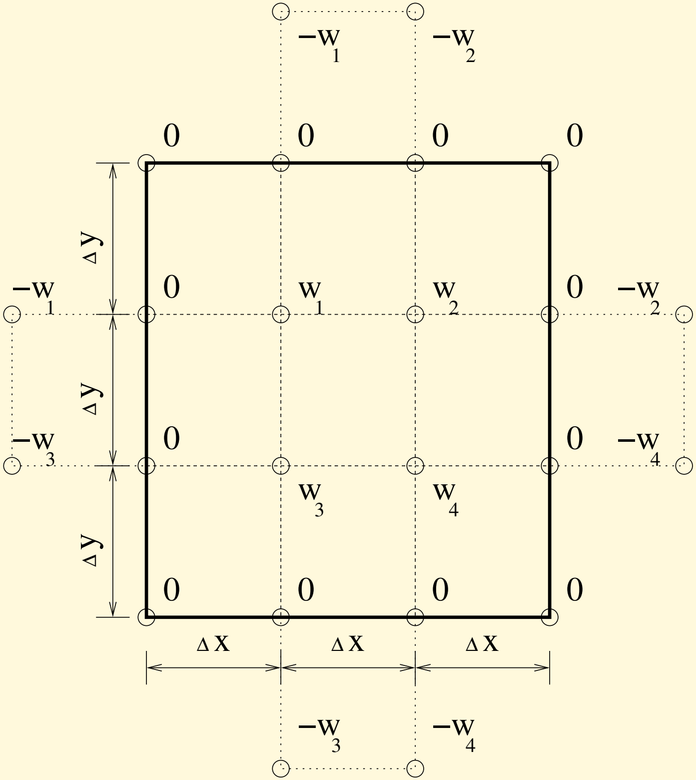
$$
\begin{aligned}
q_{xz} &= -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2}\right)= \\
&= \frac{(w_{i+2,j}-2\ w_{i+1,j}+2\ w_{i-1,j}-w_{i-2,j})}{2\ \Delta x^3}- \\
-\quad D &\ \frac{w_{i+1,j+1}-w_{i-1,j+1}-2\ w_{i+1,j}+2\ w_{i-1,j}+w_{i+1,j-1}-w_{i-1,j-1}}{2\ \Delta y^2 \Delta x}, \\
q_{yz} &= -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2}\right)= \\
&= \frac{(w_{i,j+2}-2\ w_{i,j+1}+2\ w_{i,j-1}-w_{i,j-2})}{2\ \Delta y^3}- \\
-\quad D &\ \frac{w_{i+1,j+1}-w_{i+1,j-1}-2\ w_{i,j+1}+2\ w_{i,j-1}+w_{i-1,j+1}-w_{i-1,j-1}}{2\ \Delta x^2 \Delta y}.
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

Příklad 3.2. Určete průhyb obdélníkové desky kloubově podepřené po všech okrajích, která má rozměry:

$$
\begin{aligned}
x &= 3\ m, \\
y &= 3\ m, \\
t &= 0.1\ m.
\end{aligned}
$$

Použitý materiál má vlastnosti: $E = 20GPa$, $\nu = 0{,}2$. Deska je zatížena rovnoměrným spojitým zatížením $q = 10\frac{kN}{m^2}$ po celé ploše.

Stanovte průhyb ve čtyřech bodech desky a dimenzační momenty v jednom bodě desky.



Obr. 3.6 Tvar a poloha bodů sítě v příkladu 3.2.

Řešení. Nejprve stanovíme pomocné hodnoty potřebné pro výpočet:

$$
\begin{aligned}
D &= \frac{E\ t^3}{12\,(1-\nu^2)} = \frac{20.10^9\ 0{,}1^3}{12\,(1-0{,}2^2)} = 1{,}736 MPa.m^3, \\
\Delta x &= 1m, \\
\Delta y &= 1m, \\
\alpha^2 &= \left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2 = \left(\frac{1}{1}\right)^2 = 1, \\
\beta^2 &= \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 = \left(\frac{1}{1}\right)^2 = 1
\end{aligned}
$$

Následně můžeme sestavit rovnice (3.24) ve čtyřech sledovaných bodech, při jejich sestavování uvedeme na pravé straně člen odpovídající zatížení desky.

Sestavení rovnice (3.24) v bodě w_1:

$$
w_1(8+6+6) - 4\left[(w_2+0)(1+1) + (0+w_3)(1+1)\right] + 2(0+w_4+0+0)
$$

$$
+1(0+(-w_1)) + 1(-w_1+0) = \frac{10000\ 1\ 1}{1763111}
$$

Po úpravě získáme:

$$
18w_1 - 4w_2 - 4w_3 + 2w_4 = 0{,}00576
$$

Sestavení rovnice (3.24) v bodě w_2:

$$
w_2(8+6+6) - 4\left[(0+w_1) + (0+w_4)\right] + 2(0+0+0+w_3)
$$

$$
+(-w_2+0) + (-w_2+0) = 0{,}00576
$$

Po úpravě získáme:

$$-4w_1 + 18w_2 + 2w_3 - 4w_4 = 0{,}00576$$

Sestavení rovnice (3.24) v bodě w_3:

$$w_3(8+6+6) - 4\left[(w_4+0)+(w_1+0)\right] + 2(w_2+0+0+0)$$

$$+(0-w_3)+(0-w_3) = 0{,}00576$$

Po úpravě získáme:

$$-4w_1 + 2w_2 + 18w_3 - 4w_4 = 0{,}00576$$

Sestavení rovnice (3.24) v bodě w_4:

$$w_4(8+6+6) - 4\left[(0+w_3)+(w_2+0)\right] + 2(0+0+w_1+0)$$

$$+(-w_4+0)+(-w_4+0) = 0{,}00576$$

Po úpravě získáme:

$$2w_1 - 4w_2 - 4w_3 + 18w_4 = 0{,}00576$$

Sestavené rovnice pro přehlednost zapíšeme do tabulky 3.1.
Vyřešením soustavy rovnice zapsané v tabulce 3.1 získáme:

$$w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = 0{,}00048\ m.$$

Rovnost průhybů desky w ve všech sledovaných bodech je v tomto případě v pořádku. Je důsledkem symetrie desky.

Č.	w_1	w_2	w_3	w_4	P.S.
1.	18	-4	-4	2	0,00576
2.	-4	18	2	-4	0,00576
3.	-4	2	18	-4	0,00576
4.	2	-4	-4	18	0,00576

Tab. 3.1 Soustava lineárních rovnic pro příklad 2.3.

Vnitřní síly vypočítáme pouze pro bod w_1:

$$\begin{aligned}
m_{x,1} &= -1736111\,[0{,}00048 - 2\ 0{,}00048 + 0 + 0{,}2\ 0 - 2\ 0{,}00048 + 0{,}00048] \\
&= 1000{,}0\ N \\
m_{y,1} &= -1736111\,[0{,}00048 - 2\ 0{,}00048 + 0 + 0{,}2\ 0 - 2\ 0{,}00048 + 0{,}00048] \\
&= 1000{,}0\ N \\
m_{xy,1} &= -1736111(1 - 0{,}2)\left[\frac{0 - 0{,}00048 - 0 + 0}{4}\right] = 166,7\ N \\
m_{x,dim} &= m_x + sgn(m_x)\ m_{xy} = 1000{,}0 + 166{,}7 = 1166{,}7\ N \\
m_{y,dim} &= m_y + sgn(m_y)\ m_{xy} = 1000{,}0 + 166{,}7 = 1166{,}7\ N
\end{aligned}$$

▲

3.4. Rozdíly mezi předpoklady Kirchhoffovy a Mindlinovy teorie ohybu desek

Kirchoffova teorie poskytuje inženýrsky přijatelně přesné výsledky zejména pro velmi tenké a tenké desky, tedy takové, jejichž tloušťka je nejméně desetkrát menší než zvývající rozměry. Ve stavební praxi se však vyskytují i desky tlusté, příkladem mohou být základové desky nebo mostovky u některých typů mostů. Dochází zde k podobným rozporům mezi výsledky a skutečností, jako tomu bylo při řešení stěn pomocí nosníkové teorie.[1]

Mindlin[2] proto při odvozování upravené teorie vyšel z předpokladu, že normály střednicové plochy sice zůstanou po deformaci stále přímé, avšak nemusí již být kolmé k této ploše [45]. Tento rozdíl je ilustrován na obrázku 3.7. Pro teorii odvozenou z Mindlina předpokladu se používá název *Mindlinova teorie* nebo *Mindlinova – Reissnerova teorie*[3] [46].

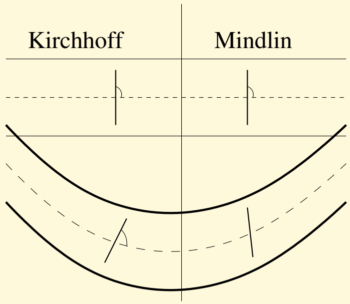
V Mindlinově teorii se proto pracuje s pootočeními ϕ_x a ϕ_y ve tvaru [37]:

$$\begin{aligned} \phi_x &= \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x, \\ \phi_x &= \frac{\partial w}{\partial y} + \varphi_y, \end{aligned} \tag{3.35}$$

kde φ_x a φ_y jsou definovány stejně jako v Kirchhoffově teorii pomocí vztahů (3.1).

---

[1] Viz obrázek 2.3.
[2] Raymond David Mindlin (1906–1987), americký inženýr a mechanik.
[3] Erich Reissner (1913-1996), německo–americký inženýr a matematik.



Obr. 3.7 Rozdíl mezi předpoklady Kirchhoffovy a Mindlinovy teorie.

Vztahy pro měrné momenty potom podle [45] získají tvar:

$$\begin{aligned} m_x &= -D\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \phi_y}{\partial y}\right), \\ m_y &= -D\left(\nu\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y}\right), \\ m_{xy} &= -\frac{1-\nu}{2} D\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y}\right). \end{aligned} \tag{3.36}$$

3.4.1. Řešení tenkých desek Ritzovou metodou

Stejně jako v případě stěn je možné i desky řešit Ritzovou metodou [36, 37]. Potenciální energie vnitřních sil tenké desky bude má tvar:

$$\Pi_i = \frac{1}{2}\int_a^b \int_c^d D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 dxdy \tag{3.37}$$

Potenciální energie vnějších sil má tvar:

$$\Pi_\mathrm{e} = -\int_a^b \int_c^d p(x,y)\; w(x,z)dxdy \tag{3.38}$$

Při řešení budeme postupovat stejným způsobem jako u stěn:

1. Pro řešení zvolíme vhodnou aproximaci:

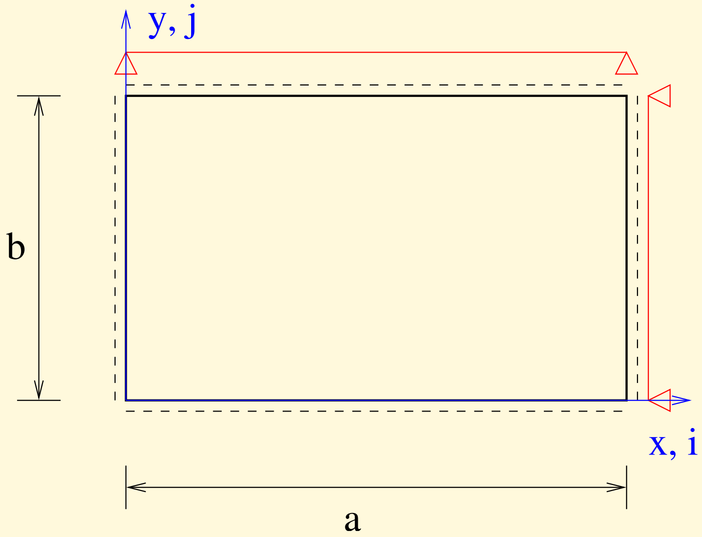
$$w_n(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{i,j}\psi_{i,j}(x,z) \tag{3.39}$$

   kde $a_{i,j}$ …neznámé konstanty, ψ_i …aproximační funkce vyhovující okrajovým podmínkám úlohy.

2. Vyjádříme Π pomocí $w_n(x,z)$.

3. Sestavíme a vyřešíme n rovnic pro n neznámých koeficientů a_i:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0. \tag{3.40}$$



Obr. 3.8 Schéma příkladu 3.3.

4. Dosadíme vypočtené a_i do rovnice (3.39). Tím získáme aproximaci průhybu w, ze které můžeme získat vnitřní síly.

Příklad 3.3. Stanovte rovnici průhybové plochy desky po obvodě prostě podepřené a rozměrech $a \times b$ a tloušťce t. Schéma úlohy je uvedeno na obrázku 3.8. Deska je zatížena zatížením $p(x, y) = p$.

Řešení. Nejprve zvolíme aproximaci neznámé funkce průhybu $w_n(x, y)$:[1]

$$w_n(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{1,1} \sin \frac{i\ \pi\ x}{a}\ \sin \frac{j\ \pi\ y}{b}.$$

Dále si připravíme derivace zvolené aproximace:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial x} &= a_{1,1} \frac{\pi}{a} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \\
\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= -a_{1,1} (\frac{\pi}{a})^2 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \\
\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= -a_{1,1} (\frac{\pi}{b})^2 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}
\end{aligned}$$

[1] Měli bychom také ověřit, že zvolené aproximační funkce splňují okrajové podmínky, tedy, že na okrajích desky nabývají hodnoty 0. To však ponecháváme k ověření laskavému čtenáři.

Nyní můžeme stanovit potenciální energii vnitřních a vnějších sil:

$$
\begin{aligned}
\Pi_i &= \frac{1}{2} D\, a_{1,1}^2 \left(\frac{\pi^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{b^2}\right) \int_0^a \int_0^b \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{b} dx dy \\
&= \frac{1}{8} D\, a_{1,1}^2 \left(\frac{\pi^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{b^2}\right)\ a\ b, \\
\Pi_{\mathrm{e}} &= -\int_0^a \int_0^b p(x,y) w_n(x,y) dx dy \\
&= -a_{1,1}\ p \int_0^a \int_0^b \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy \\
&= -p\ a_{1,1} \frac{4\ a\ b}{\pi^2}.
\end{aligned} \tag{3.41}
$$

Z výrazů pro Π_i a Π_{e} získáme celkovou potenciální energii:

$$\Pi = \frac{1}{8} D\, a_{1,1}^2 \left(\frac{\pi^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{b^2}\right)\ a\ b - p\ a_{1,1} \frac{4\ a\ b}{\pi^2}.$$

Budemě řešit soustavu rovnic $\frac{\partial \Pi}{\partial a_{1,1}} = 0$:

$$\frac{1}{4} a_{1,1} \left(\frac{\pi^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{b^2}\right)\ a\ b - p \frac{4\ a\ b}{\pi^2} = 0.$$

Řešením získáme neznámou konstantu $a_{1,1}$:

$$a_{1,1} = \frac{16p}{\pi^2 D} \frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}.$$

Po dosazení $a_{1,1}$ do zvolené aproximace získáme hledanou aproximaci rovnice průhybové plochy:

$$w_n(x,y) = \frac{10\,p}{\pi^6 D\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)} \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b}.$$

▲

Kvíz.

1. Pro tenkou desku v rovině xy platí:
   - ☐ Normálová napětí ve směru osy x jsou po výšce desky konstatntní.
   - ☐ Normály ke střednicové ploše zůstávají i po deformaci normálami.
   - ☐ Příčná vlákna (vrstvy) na sebe netlačí.
2. Pro tenkou desku v rovině xy platí:
   - ☐ Normálová napětí ve směru osy y jsou po výšce desky konstatntní.
   - ☐ Smyková napětí jsou po výšce konstantní.
   - ☐ Podélná vlákna (vrstvy) na sebe netlačí.
3. Jakou jednotku mají měrné ohybové momenty m_x, m_y?
   - ☐ kN/m .
   - ☐ $kN\ m$.
   - ☐ kN .
4. Jakou jednotku mají měrné krouticí momenty m_x, m_y?
   - ☐ kN/m .
   - ☐ $kN\ m$.

☐ kN .

5. Jaká posunutí a pootočení počítáme na tenké desce ležící v rovině xy?

   ☐ Posunutí ve směru z, pootočení kolem os x, y.

   ☐ Posunutí ve směrech x, y, pootočení kolem osy z.

   ☐ Posunutí ve směrech x, y, pootočení kolem os x, y.

6. Kolik neznámých momentů předpokládáme na tenké desce?

   ☐ Jeden (kroutící).

   ☐ Dva kroutící, jeden ohybový.

   ☐ Dva ohybové, jeden kroutící.

7. Jaká bude hodnota m_x, je-li v krajních vláknech $\sigma_x = 1MPa$ a tloušťka desky je 0.06 m?

   ☐ 300 Pa.

   ☐ 600 Pa.

   ☐ 1000 Pa.

8. Který z uvedených typů zatížení je možné zadat na tlusté (Mindlinově) desce? Úloha se řeší v rovině xy.

   ☐ Posunutí v ose z.

   ☐ Moment otáčející kolem osy z.

   ☐ Síla ve směru osy y.

9. Který z uvedených typů zatížení je možné zadat na tenké desce? Úloha se řeší v rovině xy.

   ☐ Posunutí v ose z.

- [ ] Posunutí v ose x.
- [ ] Moment otáčející kolem osy z.
- [ ] Síla ve směru osy y.

10. Stanovte dimenzační moment $m_{x,dim}$ víte-li, že $m_x = 32\ kN, m_y = -23\ kN, m_{xy} = -$ $-16\ kN$:

- [ ] $48\ N$.
- [ ] $16\ N$.
- [ ] $39\ N$.

11. Neznámou v deskové rovnici je funkce:

- [ ] Napětí.
- [ ] Průhybu.
- [ ] Měrných momentů.

12. Měrné posouvající síly mají jednotku:

- [ ] N.
- [ ] N/m.
- [ ] $N\ m$.

13. Který z výrazů vyjadřuje deskovou tuhost?

- [ ] $\frac{5\ q\ l^4}{384\ EI}$.
- [ ] $\frac{E\ t^3}{12(1-\nu^2)}$.
- [ ] $E\ t$.

14. Stanovte hlavní momenty pokud $m_x = 20\ kN, m_y = -20\ kN, m_{xy} = 0\ kN$

- ☐ $m_1 = -20\ kN, m_2 = 20\ kN$.
- ☐ $m_1 = 20\ kN, m_2 = -20\ kN$.
- ☐ $m_1 = 40\ kN, m_2 = 10\ kN$.

15. Při analýze tenké desky použijeme teorii:
- ☐ Mindlinovu.
- ☐ Kirchhoffovu.
- ☐ Obě.

16. Při analýze tlusté desky použijeme teorii:
- ☐ Mindlinovu.
- ☐ Kirchhoffovu.
- ☐ Obě.

17. Tenká deska je uvažována s tloušťkou:
- ☐ 5 a více krát menší než ostatní rozměry.
- ☐ 5 až 10 krát menší než ostatní rozměry.
- ☐ 10 a více krát menší než ostatní rozměry.

18. Měrný moment m_x otáčí kolem osy:
- ☐ x.
- ☐ y.
- ☐ z.

Kapitola 4

Skořepiny

4.1. Stěnodesky a skořepiny

V řadě případů je plošná konstrukce zatížena v obecném směru. Lze-li střednicovou plochou proložit rovinu, pak je možné zatížení rozdělit na část působící kolmo ke střednicové ploše a na část působící ve střednicové ploše a stejně tak rozdělit odpovídající okrajové podmínky. Takovou konstrukci nazýváme *stěnodeska*.

V takovém případě je možné samostatně vyřešit konstrukci nejprve jako stěnu a poté jako desku a vypočítané výsledky sečíst. Je ovšem třeba dát pozor na okolnost, že například normálová napětí σ_x nebo σ_y působí ve stejném směru jak na stěně, tak na desce a při posuzování vnitřích sil je tedy nutné zahrnout obě složky:

$$\begin{aligned} \sigma_{x,sd} &= \sigma_{x,s} + \sigma_{x,d}, \\ \sigma_{y,sd} &= \sigma_{y,s} + \sigma_{y,d}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

kde index s značí stěnu a index d desku.[1]

V případě, že konstrukce má tvar zakřivené plochy, nazývá se *skořepina*. Ze stavebně–mechanického hlediska je hlavní předností skořepin je, že díky vhodnému tvaru je možné při působení některých zatížení dosáhnout velmi malých hodnot měrných ohybových momentů a posouvajících sil.[2] Pokud se podaří docílit stavu, kdy nenulové jsou pouze vnitřní síly působící v ploše skořepiny (tedy síly n_x, n_y, n_xy, které svým charakterem odpovídají vnitřním silám stěny), nazýváme tento stav *membránový* nebo *bezmomentový*. Cílem projektanta by mělo být dosáhnout na skořepině membránového stavu, který obvykle umožní dosáhnout velmi malých tlouštěk skořepin.[3] V blízkosti okrajů, otvorů, koncentrovaných zatížení nebo prudkých změn tloušťky zpravidla membránového stavu dosáhnout nejde a nenulových hodnot nabývají i měrné momenty a posouvající síly. Taková místa nazýváme *poruchy membránového stavu*.

Stav, kdy jsou ve skořenině obecně nenulové složky měrných momentů a posouvajících sil, je obvykle označuje jako *ohybový stav*.

Ve většině úloh tedy se setkáváme s *tenkými skořepinami*, pro jejichž tloušťku platí stejné podmínky jako pro desky počítané pomocí Kirchhoffovy teorie.[4] Při výpočtu takovýchto tenkých skořepin můžeme využívat všech předpokladů Kirchhoffovy teorie pro desky.

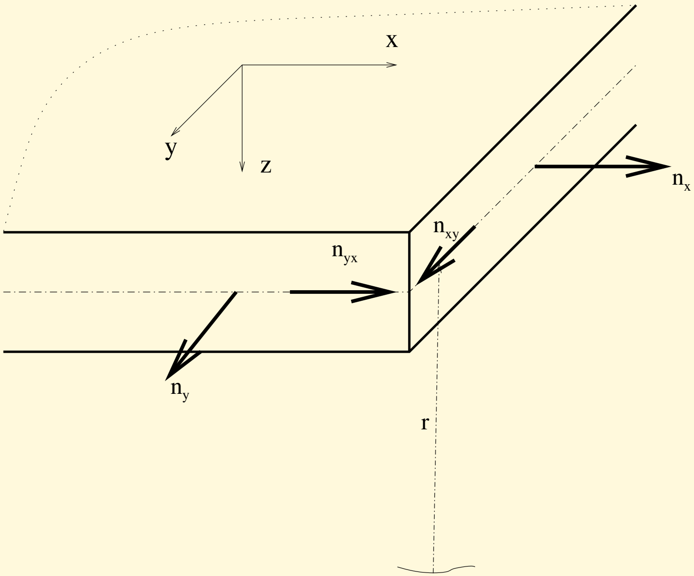
Vzhledem k tomu, že v praktických úlohách stavební praxe se vzhledem k obtížnosti analytického řešení složitější skořepiny prakticky vždy řeší numericky (metodou konečných prvků), zaměříme se v dalším textu výhradně na řešení skořepin rotačně symetrických, které

[1] Také je třeba mít na paměti, že normálové napětí je po tloušťce stěny konstantní, zatímco na desce se ve stejném směru mění lineárně.

[2] Jde o stejnou vlastnost, která byla zdůrazňována u oblouků v základních kurzech stavenbí mechaniky [42].

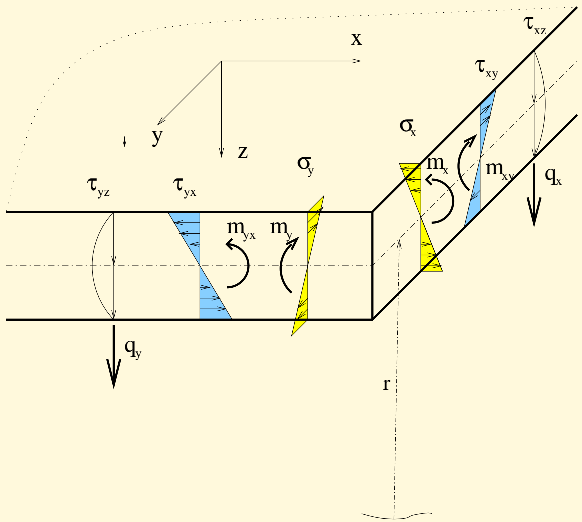
[3] Příkladem konstrukcí na kterých je dosaženo membránového stavu, jsou pneumatické haly, nebo i dětské nafukovací míče a balónky.

[4] Tloušťka má být nejvýše desetinou ostatních rozměrů.



Obr. 4.1 Membránový stav skořepiny.

Obsah
100. strana ze 197
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obr. 4.2 Ohybový stav skořepiny (normálové síly nejsou zobrazeny).

lze i pro některé praktické problémy dostatečně postihnout ručním výpočtem.

Poznámka 4.1. Při praktické realizaci skořepin se vliv poruch membránové napjatosti v blízkosti podpor zpravidla omezuje vložením nosníku do okrajů skořepiny.

4.2. Rotačně symetrické skořepiny v membránovém stavu

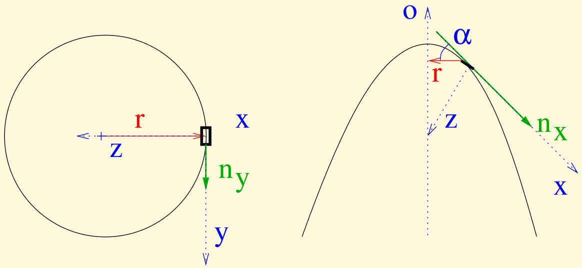
Řada praktických konstrukcí (zásobníky, chladící věže, některé střechy) má rotačně symetrický tvar. V případě, že také okrajové podmínky (tedy rozmístění a tvar podpor) i zatížení je možné považovat za rotačně symetrické, lze tyto konstrukce počítat zjednodušeně jako rotačně symetrické.

Budeme-li předpokládat, že konstrukce je uložena tak, aby její podepření nevyvolávalo poruch membránového stavu napjatosti, pak můžeme při řešení pracovat jen s normálovými silami. Z předpokladu o rotační symetrii také vyplývá, že smyková složka x_{xy} musí být rovna 0, a proto nenulové jsou jen vnitřní síly n_x, n_y. Jejich poloha vůči skořepině je spolu s ostatními potřebnými označeními uvedena na obrázku 4.3.

Vyznačíme-li na konstrukci diverenciální element podle obrázku 4.4, můžeme napsat diferenciální podmínky rovnováhy pro skořepinu.

Podmínka součtu sil ve směru osy x bude mít tvar:

$$\begin{aligned} \sum F_{i,x} &= 0: \\ (n_x + \frac{dn_x}{d\alpha})(r+dr)d\varphi - n_c r d\varphi - n_y r_x d\alpha d\varphi \cos\alpha + p_x r d\varphi r_x d\alpha &= 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$



Obr. 4.3 Označení a konvence veličin pro membránovou napjatost.

Podmínka součtu sil ve směru osy y bude mít tvar:

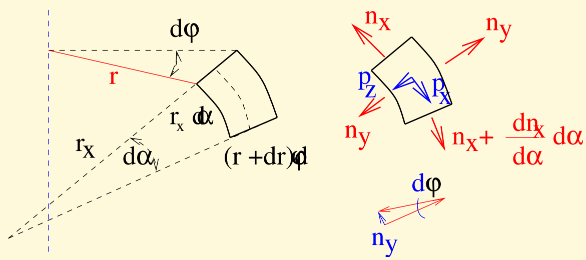
$$\begin{aligned} \sum F_{i,y} &= 0: \\ n_x r\ d\varphi d\alpha + n_y r_x d\alpha d\varphi \sin\alpha + p_z r d\varphi r_x d\alpha &= 0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Úpravou rovnic (4.2) a (4.3) je možné získat vztahy:

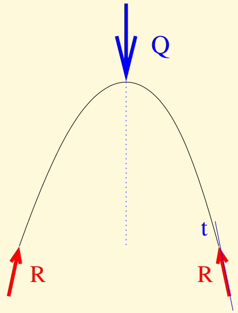
$$\begin{aligned} \frac{d n_x r}{d\alpha} - n_y r_y \cos\alpha + p_x r\ r_x &= 0 \\ \frac{n_x}{r_x} + \frac{n_y}{r_y} + p_z &= 0, \end{aligned} \tag{4.4}$$

kde $r_y = \frac{r}{\sin\alpha}$.

Pokud bychom zatížení zjednodušili na sílu Q ve vrcholu (může jít i o výslednici zatížení), pak je možno získané vztahy dále upravit.



Obr. 4.4 Diferenciální element rotačně symetrické skořepiny.



Obr. 4.5 Rotačně symetrická skořepina se sílou ve vrcholu.

Podmínka $\sum F_{i,y} = 0$ by pak nabyla tvaru:

$$2\pi r n_x \sin\alpha + Q = 0 \tag{4.5}$$

Z rovnice (4.5) a (4.4) je potom možné získat vztahy pro jednotlivé vnitřní síly:

$$\begin{aligned} n_x &= -\frac{Q}{2\pi r \sin\alpha}, \\ n_y &= \frac{Q}{2\pi r \sin^2\alpha} - \frac{p_z r}{\sin\alpha}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Výše uvedené řešení je možné aplikovat na různé tvary rotačnch skořepin. V dalším textu uvedeme vztahy pro konkrétní tvary a zatížení některých skořepin.

4.2.1. Kulová báň

V případě kulové báně zatížené po celé ploše konstantním spojitým zatížením na průmět můžeme podle obrázku 4.6 psát:

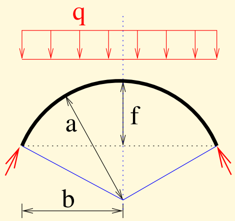
$$a = \frac{f^2 + b^2}{2f} \tag{4.7}$$

Výslednice zatížení má v tomto případě tvar:

$$Q = q\pi r^2 = q\pi a^2 \sin^2\alpha \tag{4.8}$$

Dosazením (4.8) do vztahů (4.6) můžeme získat výrazy pro vnitřní síly:

$$\begin{aligned} n_x &= -\frac{q\pi a^2 \sin^2 a}{2\pi a \sin^2\alpha} = -\frac{1}{2} qa, \\ n_y &= \frac{q\pi a^2 \sin^2 a}{2\pi\alpha \sin^2\alpha} = \left(\frac{1}{2} - \sin^2\alpha\right) qa. \end{aligned} \tag{4.9}$$



Obr. 4.6 Kulová báň zatížená konstantním zatížením na průmět.

V případě kulové báně zatížené po celé ploše konstantním spojitým zatížením na plochu bude mít výslednice zatížení velikost:

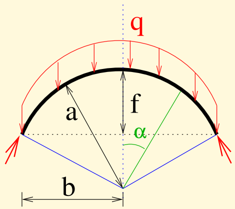
$$Q = q2\pi a^2(1 - \cos\alpha) \tag{4.10}$$

Podobně jako v předchozím případě můžeme dosazením (4.10) do vztahů (4.6) získat výrazy pro výpočet vnitřních sil:

$$\begin{aligned} n_x &= = -\frac{1}{1+\cos\alpha} qa, \\ n_y &= = \left(\frac{1}{1+\cos\alpha} - \cos\alpha\right) qa. \end{aligned} \tag{4.11}$$

4.2.2. Kuželová báň

Stejně jako v případě kulové báně můžeme i u kuželové báně odvodit výrazy pro vnitřní síly. V případě kuželové báně zatížené konstantním zatížením na průmět můžeme poble



Obr. 4.7 Kulová báň zatížená konstantním zatížením na plochu.

obrázku 4.8 napsat výraz pro výslednici zatížení:

$$Q = q2\pi a^2 \tag{4.12}$$

Dosazením (4.12) do vztahů (4.6) získáme opět výrazy pro výpočet vnitřních sil:

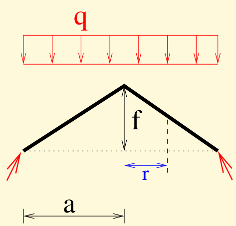
$$\begin{aligned} n_x &= = -\frac{1}{2\sin\alpha} qa \\ n_y &= = -q\ a\ \cos\alpha \operatorname{cotg}\alpha \end{aligned}$$

Pro kuželovou báň zatíženou konstantním zatížením na průmět určíme výslednici zatížení ze vztahu:

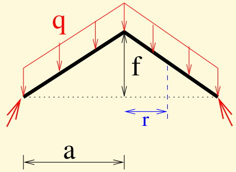
$$Q = \frac{q\pi\ a}{\cos\alpha} \tag{4.13}$$

Dosazením (4.13) do vztahů (4.6) získáme stejně jako v předchozích případech výrazy pro výpočet vnitřních sil:

$$\begin{aligned} n_x &= = -\frac{1}{2\sin 2\alpha} qa \\ n_y &= = -q\ a\ \operatorname{cotg}\alpha \end{aligned}$$



Obr. 4.8 Kuželová báň zatížená konstantním zatížením na průmět.



Obr. 4.9 Kuželová báň zatížená konstantním zatížením na plochu.

4.2.3. Rotační válec

Velmi častou aplikací skořepin ve stavební praxi jsou rotační válcove (sila, zásobníky, nádrže). I v tomto případě by bylo možné odvodit vztahy pro vnitřní síly. Například pro svislý válec o poloměru a naplněný po celé výšce kapalinou zatížený vodním tlakem γ je podle [37] možné získat výrazy:[1]

$$
\begin{aligned}
n_x &= 0,\\
n_y &= \gamma\, a\, x.
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

V praktických úlohách ovšem není vhodné vztah (4.14) používat, protože na válci prakticky není možné dosáhnout stavu membránové napjatosti (podpory by musely být posuvné ve vodorovném směru, což prakticky nelze připustit).

4.3. Rotačně symetrické skořepiny v ohybovém stavu

4.3.1. Přehled nejdůležitějších vztahů

V případech, kdy obecně není možné dosáhnout splnění předpokladů pro dosažení membránového stavu napjatosti, je nutno zahrnout do výpočtů nejen síly n_x, n_y, n_{xy}, ale také ty vnitřní síly, které odpovídají ohybovému stavu $(m_x, m_y, m_{xy}, q_{xz}, q_{yz})$.

V dalším textu uvedeme pouze stručný přehled potřebných vztahů a v příkladu upozorníme na rozdíly mezi výsledky výpočtu rotačně symetrické válcové skořepiny řešené za předpokladu membránového a ohybového stavu. Podrobnější odvození je možné najít například v publikaci [37].

[1] Uvědomme si, že x směřuje podle obrázku 4.3 v případě válce svisle dolů.

Podmínky rovnováhy potom můžeme zapsat ve tvaru:

$$\begin{aligned} \sum F_{i,x} &= 0: \quad \left(n_x + \frac{dn_x}{dx}dx\right) ad\varphi - n_x ad\varphi + p_x ad\varphi dx = 0 \\ \sum F_{i,y} &= 0: \quad \left(q_x + \frac{dq_x}{dx}dx\right) ad\varphi - q_x ad\varphi + n_y d\varphi dx + p_z ad\varphi dx = 0 \\ \sum M_{i,y} &= 0: \quad \left(m_x + \frac{dm_x}{dx}dx\right) ad\varphi - m_x ad\varphi + q_x ad\varphi dx = 0 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Vztahy (4.16) je možné zjednodušit na tvar:

$$\begin{aligned} \frac{dn_x}{dx} + p_x &= 0, \\ \frac{dq_x}{dx} + \frac{n_y}{a} &= 0, \\ \frac{dm_x}{dx} - q_x &= 0. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Geometricko–deformační vztahy můžeme v případě rotačně–symetrické s využitím vztahů (1.7) skořepiny zapsat ve tvaru:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{du}{dx} \\ \varepsilon_y &= -\frac{w}{a} \end{aligned}$$

Fyzikální rovnice za předpokladu izotropního lineárně pružného materiálu budou mít podobu:

$$
\begin{aligned}
n_x &= \frac{E\ h}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x+\nu\varepsilon_y\right)=\frac{E\ h}{1-\nu^2}\left(\frac{du}{dx}-\nu\frac{w}{a}\right)\\
n_y &= \frac{E\ h}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_y+\nu\varepsilon_x\right)=\frac{E\ h}{1-\nu^2}\left(-\frac{w}{a}+\nu\frac{du}{dx}\right)
\end{aligned}
$$

Je také možné, podobně jako pro stěny a pro desky, odvodit diferenciální rovnici úlohy. Tato rovnice má podle [37] tvar:

$$
D\frac{d^4w}{dx^4}+\frac{Eh}{a^2}w=p_z \tag{4.17}
$$

Rovnici (4.17) je možné vyřešit buď přímo, nebo použít některou z numerických metod.[1]

Vztahy pro vnitřní síly uvedeme jen s ohledem na případ válcové skořepiny. Protože ve válcové skořepině bude $n_x = 0$, je možné napsat vztah pro normálovou sílu n_y ve tvaru:

$$
n_y = -\frac{Eh}{a}w. \tag{4.18}
$$

Vztahy pro měrné momenty mají podobu:

$$
\begin{aligned}
m_x &= -D\frac{d^2w}{dx^2},\\
m_y &= \nu m_x.
\end{aligned} \tag{4.19}
$$

[1] Je možné použít například metodu sítí, ovšem vzhledem ke složitějšímu tvaru řešené oblasti je její použití méně snadné než u stěn a desek.

Kvíz.

1. Která z veličin nepatří do membránového stavu napjatosti?
   - ☐ σ_x.
   - ☐ n_{xy}.
   - ☐ m_y.
2. Skořepinu můžeme řešit jako rotačně symetrickou pokud:
   - ☐ Zatížení je rotačně symetrické.
   - ☐ Okrajové podmínky jsou rotačně symetrické.
   - ☐ Tvar konstrukce je rotačně symetrický.
   - ☐ Zatížení, okrajové podmínky i tvar konstrukce jsou rotačně symetrický.
3. Je-li skořepina v ohybovém stavu:
   - ☐ Membránové vnitřní síly v ní musí být nulové.
   - ☐ Všechny vnitřní síly jsou nulové.
   - ☐ Mohou v ní být nenulové i membránové vnitřní síly.
4. Tenká skořepina je uvažována s tloušťkou:
   - ☐ 5 a více krát menší než ostatní rozměry.
   - ☐ 5 až 10 krát menší než ostatní rozměry.
   - ☐ 10 a více krát menší než ostatní rozměry.
5. Při membránovém stavu napjatosti skořepiny se na přenesení zatížení podílejí především tyto vnitřní síly:
   - ☐ n_x, n_y, n_{xy}.

- ☐ m_x, m_y, m_{xy}.
- ☐ $n_x, n_y, n_{xy}, m_x, m_y, m_{xy}$.

6. Při ohybovém stavu napjatosti skořepiny se na přenesení zatížení podílejí především tyto vnitřní síly:

- ☐ n_x, n_y, n_{xy}.
- ☐ m_x, m_y, m_{xy}.
- ☐ $n_x, n_y, n_{xy}, m_x, m_y, m_{xy}$.

Kapitola 5

Modely podloží

5.1. Přehled nejběžnějších modelů podloží

Při návrhu a posuzování stavební kostrukce hraje důležitou úlohu také podloží, na kterém je umístěna, a interakce mezi konstrukcí a tímto podložím. Proto byla vyvinuta řada modelů podloží.

Podloží je možné modelovat několika způsoby. Nejpřirozenějším z nich, nikoli však nejsnáze použitelným, je *pružný poloprostor*. Ten můžeme chápat jako poloprostor z homogenního a izotropního materiálu splňujícího všechny dříve uvedené vztahy teorie pružnosti, na jehož povrchu je umístěna stavební konstrukce.

Na základě homogenního pružného poloprostoru můžeme odvodit pružný *vrstevnatý poloprostor*. To je však úkol poměrně obtížný a prakticky se nepoužívá (běžnější je jeho náhrada vrstevnatým tělesem konečných rozměrů, které je modelováno s použitím metody konečných prvků).

Na jiném přístupu modelování podloží jsou založeny *kontaktní modely*. Ty koncentrují vlastnosti podloží do *kontaktní spáry* mezi konstrukcí a podložím. Do této skupiny patří model *Winklerův*, *Pastěrnakův* a modely z nich odvozené, například takzvaný *efektivní model podloží* profesora Koláře.

Obecnou nevýhodou všech uvedených modelů je, že předpokládají pružné vlastnosti materiálů podloží. To u hornin a zejména zemin není splněno, a proto výsledky, které s použitím těchto výpočetních modelů získáme, mohou být značně nepřesné.[1] Jde zejména o vypočítané deformace podloží, které jsou zpravidla podstatně vyšší než ve skutečnosti, zatímco vnitřní síly, vypočítané v související konstrukci, jsou zpravidla technicky přijatelně přesné.[2]

5.2. Pružný poloprostor

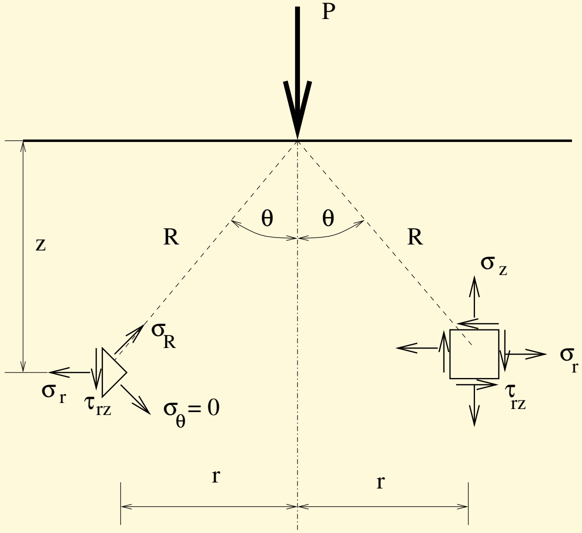
Pružný poloprostor je, jak již bylo uvedeno, poloprostor tvořený homogenní izotropní látkou, která splňuje všechny základní rovnice teorie pružnosti. Můžeme jej tedy popsat dvěmi materiálovými konstantami, modulem pružnosti E a poissonovým součinitelem ν.

Na takto definovaném poloprostor je možné odvodit analytické vztahy pro výpočet napětí a deformací od jednoduchých případů zatížení. Dále uvedeme základní vztahy pro výpočet napětí v poloprostoru vyvolaných osamělou silou působící na jeho povrchu a upozorníme na některé jejich důsledky. Tuto úlohu poprvé vyřešil Boussinesq.[3] Při popisu vztahů

[1] Normy pro posuzová ní základových konstrukcí s tím obvykle počítají, a proto zavádí různé opravy – viz například *strukturní pevnost* zemin známá v geotechnice.

[2] Chyba do 30% je v případě modelování podloží, s ohledem na možnosti získání vstupních dat, považována za akceptovatelnou.

[3] Joseph Valentin Boussinesq (1842-1924), francouzský matematik a fyzik.



Obr. 5.1 Pružný poloprostor zatížený silou.

budeme využívat obrázku 5.1.

Pro sestavení vztahů je účelné zavést válcový souřadný systém (r, φ, z):

$$cos(\theta) = \frac{z}{R}, \tag{5.1}$$

$$sin(\theta) = \frac{r}{R}, \tag{5.2}$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \tag{5.3}$$

$$R^2 = r^2 + z^2, \tag{5.4}$$

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2. \tag{5.5}$$

Pro jednotlivá napětí je možné získat vztahy:

$$\sigma_z = -\frac{2}{3}\,\frac{P}{\pi}\,\frac{z^3}{R^5}, \tag{5.6}$$

$$\sigma_r = \frac{P}{2\,\pi}\left[\frac{1-2\,\mu}{R(R+z)} - \frac{3\,z\,r^2}{R^5}\right], \tag{5.7}$$

$$\sigma_\theta = \frac{P}{2\,\pi}(1-1\,\mu)\left[\frac{z}{R^3} - \frac{1}{R(R+z)}\right], \tag{5.8}$$

$$\tau_{rz} = -\frac{3\,P\,z^2\,r}{2\,\pi\,R^5}. \tag{5.9}$$

Poznámka 5.1. Všimněme si zajímavého důsledku: pokud je $R = 0$, tedy pokud počítáme napětí přímo pod zatížením, pak vyjde například:

$$\sigma_z = \infty \tag{5.10}$$

a podobně můžeme vypočítat hodnoty ostatních napětí. Nejde o chybu, ale o důsledek použitých zjednodušení – síla je bodová, tedy působí na ploše $A = 0$. Svislé napětí na kontaktu mezi silou a poloprostorem potom musí být:

$$\sigma_z = \frac{F}{A} = \frac{F}{0} = \infty. \tag{5.11}$$

Podobně jako pro napětí můžeme získat vztahy i pro vodorovný posun u a svislý průhyb w pružného poloprostoru:

$$u = \frac{P(1+\mu)}{2\ \pi\ E}\left[\frac{r\ z}{R^3} - (1-2\ \mu)\frac{r}{R(R+z)}\right], \tag{5.12}$$

$$w = \frac{P(1+\mu)}{2\ \pi\ E}\left[\frac{2(1-\mu)}{R} + \frac{z^2}{R^3}\right]. \tag{5.13}$$

$$\tag{5.14}$$

S využitím vztahu (5.14) můžeme stanovit například průhyb na povrchu poloprostoru (tedy pro $z = 0$):

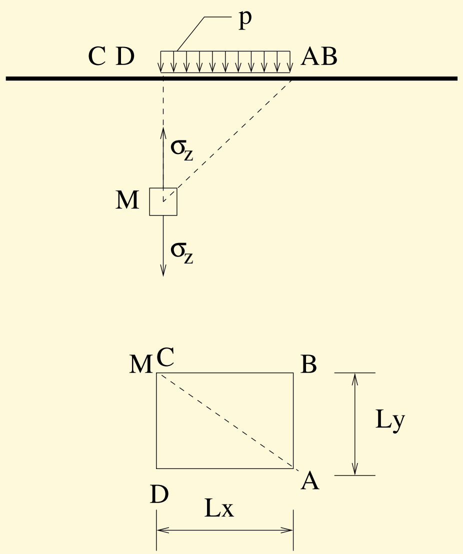
$$w_{pp} = \frac{R\ (1-\mu)^2}{\pi\ E\ r}. \tag{5.15}$$

Podobně je možné odvodit i vztahy pro napětí od konstatntního spojitého zatížení na ploše obdélníka [37].

Označíme-li:

$$s = \sqrt{L_x^2 + L_y^2},$$

$$L = \sqrt{s^2 + z^2}, \tag{5.16}$$



Obr. 5.2 Pružný poloprostor zatížený na ploše obdélníka.

můžeme získat vzorce pro napětí ve svislém směru σ_z a pro svislý průhyb w pod libovolným rohem obdélníka představujícího zatížení:

$$\sigma_z = -\frac{p}{2\,\pi}\left[\frac{L_x\,L_y\,z}{L}\left(\frac{1}{L_x^2+z^2}+\frac{1}{L_y^2+z^2}\right)+arctan\left(\frac{L_x+L_y}{z\,L}\right)\right]$$

$$w = \frac{(1-\mu^2)p}{\pi\,E}\left(L_x\,ln\left(\frac{L_y+s}{L_x}\right)+L_y\,ln\left(\frac{L_x+s}{L_y}\right)\right). \tag{5.17}$$

5.3. Kontaktní modely podloží

5.3.1. Winklerův model podloží

Nejjednodušším kontaktním modelem podloží je *Winklerův model*. Byl autorem navržen pro řešení problémů železničních staveb.

Princip modelu je jednoduchý, předpokládá se, že vztah mezi deformací základové spáry w a reakcí podloží q je lineární závislost:

$$q(x,y) = C\;w(x,y), \tag{5.18}$$

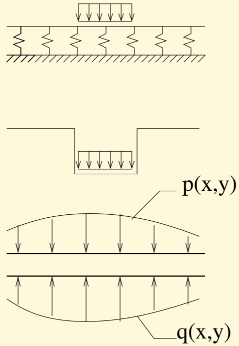
kde C je konstanta úměrnosti zvaná *součinitel stlačitelnosti podkladu.*[1]

Přes slovo „součinitel“ v názvu nejde o bezrozměrnou veličinu, jednotka má rozměr $[\frac{N}{m^3}]$.[2]

Model tedy nahrazuje účinek zemin a hornin v podloží sadou pružnin s tuhostí o velikosti C, které působí ve svilsmém směru. Z toho plynou výhody i nevýhody tohoto modelu. K výhodám patří jeho relativní jednoduchost, díky které je všeobecně používán.

[1]Používají se i další názvy jako například *součinitel ložnosti*, *modul podloží*, *Winklerova konstanta*.

[2]Hodnotu C můžeme interpretovat jako sílu potřebnou k zatlačení plochy 1 m^2 do hloubky 1 m.

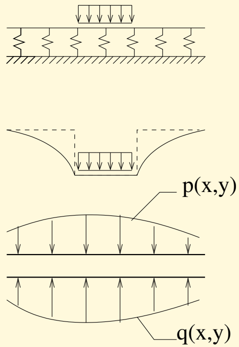


Obr. 5.3 Winklerův model podloží.

Podstatnou nevýhodou je to, že nijak nerespektuje smykovou soudržnost materiálů podloží – podloží, které není přímo ovlivněno zatížením, se nedeformuje, jak je znázorněno na obrázku 5.3.[1] V důsledku toho nejen není možné pomocí tohoto modelu určovat vliv na okolní objekty (kolem konstrukce nevzniká *poklesová kotlina*), ale i vypočítané deformace podloží jsou větší než by ve skutečnosti měly být.

Velkým problémem je samotná podstata modelu, kdy vlastnosti podloží jsou popsány jednou konstantou. Určování konstanty C je možné provádět například pomocí zkoušky se zatěžovací deskou. Tato zkouška ovšem určí jen odezvu vrstev podloží do relativně malé hloubky, zatímco skutečná stavba, které je obvykled podstatně těžší, ovlivní svými účinky i vrstvy ležící podstatně hlouběji, které mohou vykazovat i podstatně jiné deformační vlast-

[1] Winkler jako železničář tento problém nepociťoval - spojitost deformací v jeho úlohách zajišťovala tuhost kolejnic, které byly na podloží umístěny.



Obr. 5.4 Pastěrnakův model podloží.

nosti, kterým konstanta C určená zatěžovací zkouškou vůbec nemusí odpovídat.

5.3.2. Pastěrnakův model podloží

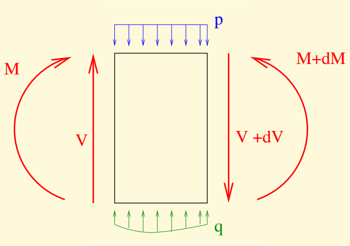
Některé nedostatky Winklerova modelu, především chybějící smykové spolupůsobení materiálu podloží, se snaží odstraňovat *Pastěrnakův model*. Ten proto zavádí další konstantu C_2:[1]

$$q(x,y) = C_1\ w(x,y) - C_2\ \left(\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2}\ \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} \right). \tag{5.19}$$

Díky tomuto opatření je možné pomocí Pastěrnakova modelu stanovit *poklesovou kotlinu* v okolí studované konstrukce. Jistou nevýhodou je nutnost získávat další fyzikální

[1] Winklerovu konstantu C zde označíme C_1.

Obsah
122. strana ze 197
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obr. 5.5 Element prutu na Winklerově podloži.

konstantu C_2.

Příklad 5.2. Sestavte rovnici průhybové čáry nosníku na Winklerově podloží.

Řešení. Vyjdeme ze znalostí ze základního kurzu stavební mechaniky. Podle obrázku 5.5 můžeme napsat podmínku rovnováhy na na elementu prutu doplněného o účinek Winklerova podloží:

$$V - (V + dV) + p\ dx - q\ dx = 0,$$

po zjednodušení získáme:

$$V = \frac{dV}{dx} = p - q.$$

Podle Winklera platí:

$$p = K\ w.$$

Ze Schwedlerovy věty plyne:

$$V = \frac{dM}{dx},$$

Obsah
123. strana ze 197
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

kombinací předchozích vztahů získáme:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dM}{dx}\right) = p - q,$$

a tedy:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = p - q.$$

Nyní zapišme vztah mezi momentem a průhybem:

$$M = -EI\frac{d^2w}{dx^2},$$

a dosaďme do něj předchozí vztah:

$$-\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)EI = p - q,$$

a po úpravě a uvážení, že $p = K\ w$ (5.3) získáme:

$$EI\frac{d^4w}{dx^4} + K\ w = q,$$

což je hledaná *rovnice ohybové čáry nosníku* na Winklerově podkladu.

▲

Kvíz.

1. Jakou jednotku má konstanta Winklerova modelu podloží?
- ☐ N.
- ☐ N/m^2.
- ☐ N/m^3.

2. Který uvedených modelů neuvažuje s vlivem smyku?
- ☐ Winklerův model.
- ☐ Pastěrnakův model.
- ☐ Pružný poloprostor.

3. Akceptovatelná chyba v případě modelování podloží s ohledem na možnosti získání vstupních parametrů je:
- ☐ do 10%.
- ☐ do 20%.
- ☐ do 30%.

4. Konstanta úměrnosti C (součinitel stlačitelnosti podkladu) možno definovat jako:
- ☐ sílu potřebnou k zatlačení plochy $1m^2$ do hloubky 1m.
- ☐ sílu potřebnou k zatlačení plochy $1m^2$ do hloubky 0,1m.
- ☐ sílu potřebnou k zatlačení plochy $0,1m^2$ do hloubky 1m.

Kapitola 6

Nelineární úlohy ve stavební mechanice

6.1. Typy nelineárních problémů

Snahou projektanta je navrhnout stavební konstrukci tak, aby se její chování co nejvíce blížilo lineárně pružnému stavu. To je do jisté míry ztěžováno skutečností, že mnohé obvyklé stavební materiály (beton, zdivo, horniny a zeminy) se přibližně lineárně chovají jen při velmi nízkých úrovních zatížení.

Některé konstrukce navíc mohou vykazovat deformace, které již nevyhovují předpokladu o malých deformacích, které byly zavedeny na začátku. Dalšími zdroji rozporů s předpoklady o lineárním chování jsou prvky a konstrukce, které vykazují různé chování při různých způsobech namáhání. Příkladem mohou být lanové prvky – lano má vysokou únosnost i tuhost, je-li namáháno tahem. Ale v případě, že je namáháno tlakem, má tuhost téměř nulovou.

Případy nelineárního chování stavebních konstrukcí proto můžeme rozdělit na nelinearitu:

- *konstrukční*: vlastnosti konstrukčních prvků nebo okrajových podmínek a zatížení se mění v závislosti na charakteru a úrovni zatížení a deformací,
- *fyzikální*: vlastnosti materiálů závisí na úrovni zatížení a deformací (neplatí Hookeův zákon),
- *geometrickou*, kterou je možné dále rozdělit na:
  - *teorii 2. řádu*: charakter konstrukce nebo zatížení vyžaduje, aby při výpočtu byly splněny podmínky rovnováhy i na deformované konstrukci, přestože deformace jsou malé,[1]
  - *velké deformace*: deformace (posunutí, pootočení, poměrné deformace, případně jen některé z nich) jsou tak velké, že je nutné používat přesnější (nelineární) geometricko–deformační vztahy.

Velmi často se ovšem stává, že se jednotlivé uvedené případy nelineárního chování vyskytují současně. Fyzikálně nelineární chování zpravidla nastává při větších úrovních namáhání, které mohou být vyvolány velkými deformacemi konstrukce a naopak důsledkem fyzikálně nelineárního chování některého z použitých materiálů může být nárůst deformací konstrukce do té míry, že její deformace nebudou malé.

[1] Řesení s využitím teorie 2. řádu je nezbytné například v úlohách stability (vzpěru) prutů a je velmi důležité při výpočtech předpjatých železobetonových prvků.

Všechny uvedené okolnosti vedou k tomu, že není možné využívat výhody lineárního řešení, zejména princip superpozice a princip úměrnosti. Výpočet se také stává nelineárním a obvykle není možné použít přímé řešení, jak tomu bylo v lineární stavební mechanice a v pružnosti.

Protože řešení nelineárních diferenciálních rovnic je v praktických úlohách často neschůdné,[1] je potřebné nelineární problém převést na posloupnost lineárních řešení a při výpočtu postupovat iteračním nebo přírůstkovým postupem.

6.2. Konstrukční nelinearita

V některých úlohách stavební praxe dochází k případům, že chování některých prvků, například podporových vazeb se za určitých podmínek mění. Takové chování nazýváme *konstrukční nelinearita.*

Ve stavební praxi se konstrukční nelinearita vyskytuje v těchto případech:

- jednostranné vazby: vazba působí jen v určitých situacích:
  - prvky volně položené na jiných (vazba působí jen v tlaku),
  - základové konstrukce (pevnost zeminy v tahu je zanedbatelná, vazba tedy také působí jen v tlaku)
  - vazby, které se aktivují až po dosažení určité deformace,
- prvky působící jen při určitém způsobu namáhání, zejména prvky působící jen v tahu: lana, ztužidla halových systémů.

[1] Už u problémů lineární pružnosti jsme často preferovali přibližná řešení pomocí numerických metod, například metodou sítí.

Zejména příklad prvků aktivovaných až po dosažení určité deformace je velmi častý a může být způsoben i neúmyslně (u rekonstrukcí nebo adaptací stávajících konstrukcí) – například strop pod dosažení určité deformace „dosedne“ na stěnu nebo příčku, zpravidla doplněnou dodatečně, které se původně nedotýkal. Tím může dojít ke změně statického schématu (například z prostého nosníku na spojitý) s následným přerozdělením momentů a tím zejména u železobetonových konstrukcí i k možné poruše (v místě příčky dojde ke změně znaménka ohybových momentů).

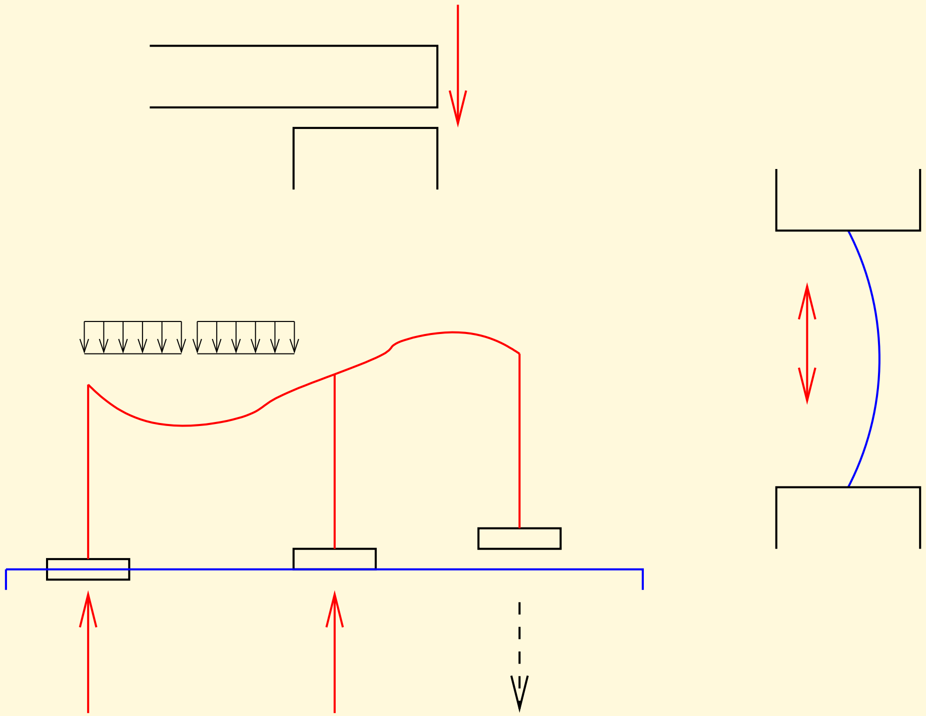
Některé možné případy konstrukční nelinearity jsou uvedeny na obrázku 6.1

Při řešení problémů konstrukční nelinearity je možné v jednoduchých případech (v konstrukci je například jen jeden prvek působící jen v tahu) postupovat iteračně: v prvním kroku počítáme se všemi prvky. Pokud na základě takto stanovených výsledků stanovíme, že jednostranně působící prvek má být vyloučen (v našem případě, protože je namáhán tahem), vyloučíme jej z řešení a výpočet opakujeme.

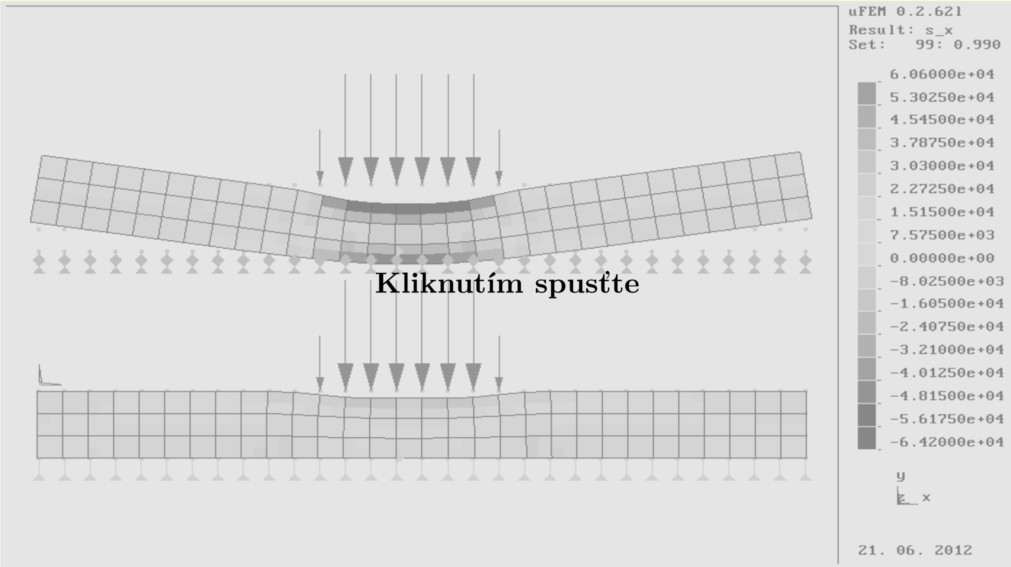
Je-li v konstrukci obsažen větší počet částí zapříčiňujících konstrukčně nelineární chování, pak je nutné použít větší počet iterací nebo kombinovat iterační a přírůstkový postup. Vhodné metody jsou popsány v dalším textu.

Poznámka 6.1. Při modelování podloží je někdy důležité zohlednit jak konečnou tuhost podloží (tedy jeho deformovatelnost), tak i to, že napětí v základové spáře nemůže být tahové. Úloha interakce podloží s konstrukcí je tedy i problémem konstrukční nelinearity

Na obrázku 6.2 je proto v animované formě ilustrován rozdíl mezi chováním základu dokonale připojeného k tuhému podloží a základu na Winklerově modelu podloží, který působí jen v tlaku (to je zajištěno jednostrannými vazbami s předepsanou tuhostí). Barevně jsou zobrazena vodorovná normálová napětí σ_x.



Obr. 6.1 Příklady konstrukční nelinearity.



Obr. 6.2 Deformace a napětí σ_x nosníku na podloží.

6.3. Metody pro řešení nelineárních úloh

Nelineární problémy teorie pružnosti a plasticity zpravidla řešíme tak, že je převedeme na posloupnost lineárních řešení. U výše diskutované konstrukční nelinearity je charakter těchto lineárních řešení zřejmý – jednotlivé výpočty se odlišují tím, že v nich na základě určitých kritérií vypouštíme ty části, které působí jen při určitém způsobu namáhání.

Metody, které se pro řešení nelineárních problémů stavební mechaniky používají nejčastěji, můžeme rozdělit na:

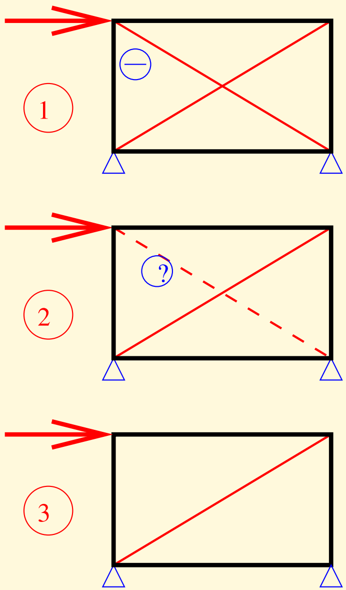
- iterační řešení,
- přírůstková řešení (Eulerova metoda),
- přírůstkově–iterační metody (Newtonova-Raphsonova metoda).

6.3.1. Iterační řešení (prostá iterace)

Použití prosté iterace je vhodné především v jednodušších případech konstrukční nelinearity a v jednoduchých geometricky nelineárních problémech. Naopak se vůbec nehodí pro řešení fyzikálně nelineárních, zejména pružno–plastických úloh.

Postup iteračního řešení je možné popsat těmito kroky:

1. Linární výpočet.
2. Provedení změn v závislost na napětích a deformacích (vyřazení tlačených prvků a podobně).
3. Lineární výpočet změněné konstrukce.



Obr. 6.3 Příklad použití prosté iterace

4. Pokud jsou změny (napětí, deformace) větší než stanovená mez, proces se vrací na krok 1, v opačném případě se výpočet ukončí.

Na obrázku 6.3 je znázorněn případ příhradové konstrukce se dvěma prvky působícími jen v tahu (červeně znázorněné diagonály). V prvním kroku je proveden lineární výpočet, ze kterého vyplyne, že diagonála označená znaménkem minus je namáhána tlakovou silou, zatímco druhá diagonála je namáhána tahem.[1] V druhém kroku je tlačená diagonála odstraněna z výpočetního modelu a ve třetím kroku je proveden konečný výpočet na upraveném modelu.

Poznámka 6.2. Zpravidla není vhodné „vyloučený“ prvek úplně vyřadit z konstrukce, protože v dalších iteracích by už bylo obtížné stanovovat, zda by neměl být opětovně zařazen zpět do konstrukce. Vhodnější je proto prvek v konstrukci ponechat, ale podstatně snížit jeho tuhost (u prutových konstrukcí zmenšit 1000 nebo více krát modul pružnosti). Takový prvek ovlivňuje výsledky řešení jen minimálně, ale na základě jeho vnitřních sil je možné rozhodovat o jeho případném zpětném „zařazení“ do výpočtu stejným postupem jako v prvním kroku výpočtu, tedy na základě jeho vnitřních sil.

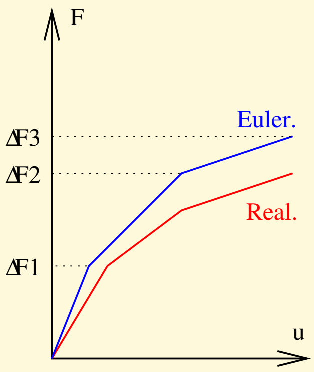
Při větším počtu jednostranně působících prvků může být iterační proces pomalý, potom je vhodnější použít některý přírůstkově–iterační postup.

6.3.2. Přírůstkové řešení – Eulerova metoda

Eulerova metoda není vzhledem ke svému principu vhodná pro řešení většiny praktických úloh. Je však základem pokročilejších metod přírůstkově–iteračních, a proto je vhodné ji zde uvést.

[1] Čtenář, který absolvoval základní kurzy stavební mechaniky, jistě stanovil tlačenou diagonálu i bez výpočtu.

Obsah
134. strana ze 197
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obr. 6.4 Eulerova metoda

Princip Eulerovy metody je velmi jednoduchý. Zatížení F se rozdělí na n dílčích přírůstků zatížení ΔF_i, které jsou aplikovány postupně. Pro každý přírůstek zatížení se provede výpočet a vyhodnocení změn v konstrukci. V Eulerově metodě se neprovádí žádné iterace.

Postup Eulerovy metody je tedy možné shrnou do následujících bodů:

1. Zatížení konstrukce zatížením ΔF_1
2. Vyhodnocení změn v konstrukci (vyloučení prutů,...).
3. Zatížení konstrukce zatížením ΔF_2
4. Přičtení výsledků od ΔF_2 k předchozím.
5. Vyhodnocení změn v konstrukci (vyloučení prutů,...).

6. Zatížení konstrukce zatížením ΔF_3.

7. Opakování pro další ΔF_i.

8. Po dosažení $F = \sum_{i=1}^{n} \Delta F_i$ se výpočet ukončí.

Pokud bychom sestavili pracovní diagram (tedy závislost mezi zadaným zatížením a vypočítanou deformací) pro jednorozměrný problém, získali bychom podobný výsledek jako na obrázku 6.4 (křivka označená „Euler.“).

Problémy přírůstkového řešení jsou zjevné. Protože není prováděno žádné iterační zpřesňování řešení, závisí přesnost dosažených výsledků na velikosti *kroků*, tedy na velikosti přírůstů zatížení ΔF_i. Na obrázku 6.4 je teoreticky přesné řešení vyznačeno modře a označeno jako „Real.“.

V dalším textu bude při výkladu dalších metod využíván matickový zápis vztahů. Uvedeme jej tedy i pro Eulerovu metodu.

Řešená úloha může být popsána soustavou obecně nelineárních rovnic:[1]

$$\mathbf{K}(\mathbf{u}) \times \mathbf{u} = \mathbf{F}, \tag{6.1}$$

kde matice tuhosti $\mathbf{K}$ je funkcí vektoru posunutí $\mathbf{u}$, případně vektoru zatížení $\mathbf{F}$.

Jednotlivý krok výpočtu (výše označený jako 1, 3, 5) je potom možné zapsat:

$$\mathbf{K_i}(\mathbf{u_{i-1}}) \times \Delta\mathbf{u_i} = \Delta\mathbf{F_i}, \tag{6.2}$$

kde $\mathbf{K_i}(\mathbf{u_{i-1}})$ se stanoví na základě součtu deformací od prvního až do $i-1$ kroku.

[1] Předpokládejme, že konstrukci řešíme deformační metodou [42]. Totéž by platilo i pro metodu konečných prvků.

Celková deformace od prvního po $i-1$-tý krok, která je potřebná pro vyhodnocení změn v konstrukci, se získá:

$$\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{i-1} \Delta \mathbf{u_j}. \tag{6.3}$$

6.3.3. Přírůstkově–iterační řešení – Newtonova–Raphsonova metoda

Metoda Newtonova–Raphsonova vychází z Eulerovy metody, kterou vylepšuje o iterační zpřesňování řešení pomocí minimalizace *vektoru nevyvážených sil.*[1]

Nevyvážené síly představují rozdíl mezi vypočtenými hodnotami vnitřních nebo uzlových sil (ty se získaly na základě $\mathbf{K_i}(\mathbf{u_{i-1}})$, tedy na základě předchozích výsledků) v konstrukci a hodnotami odpovídajícími aktuálně dosažené velikosti deformací $\mathbf{u_i}$.

Prakticky můžeme $\mathbf{g}$ vypočítat například na základě vyhodnocení podmínek rovnováhy ve styčnících prutové konstrukce.

Postup Newtonovy–Raphsonovy metody je možné popsat následujícími kroky:

1. Zatížení konstrukce zatížením ΔF_1

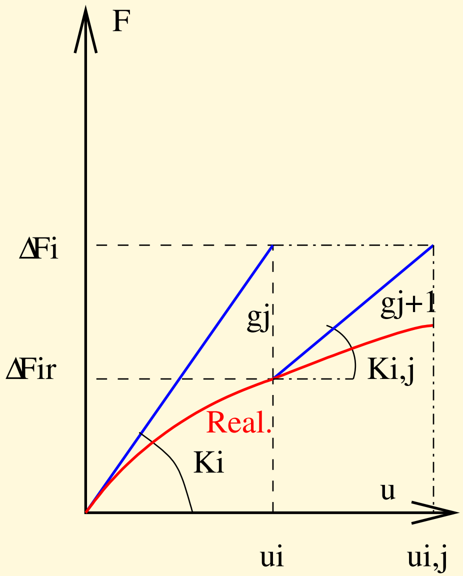
$$\mathbf{K_i}(\mathbf{u}) \times \Delta \mathbf{u_i} = \Delta \mathbf{F_i}$$

2. Vyhodnocení změn v konstrukci (vyloučení prutů,...)

3. Výpočet vektoru nevyvážených sil $\mathbf{g_j}$

---

[1] Používá se i termín *reziduální síly.*



Obr. 6.5 Newtonova–Raphsonova metoda

4. Výpočet změn deformace od $\mathbf{g_j}$

$$\mathbf{K_{i,j}}(\mathbf{u}) \times \Delta\mathbf{u_{i,j}} = \mathbf{g_j}$$

5. Vyhodnocení změn v konstrukci (vyloučení prutů,...)

6. Výpočet vektoru nevyvážených sil $\mathbf{g_{j+1}}$

7. Výpočet změn deformace od $\mathbf{g_{j+1}}$

8. Opakování dokud $\mathbf{g_{j+x}}$ není dostatečně malé

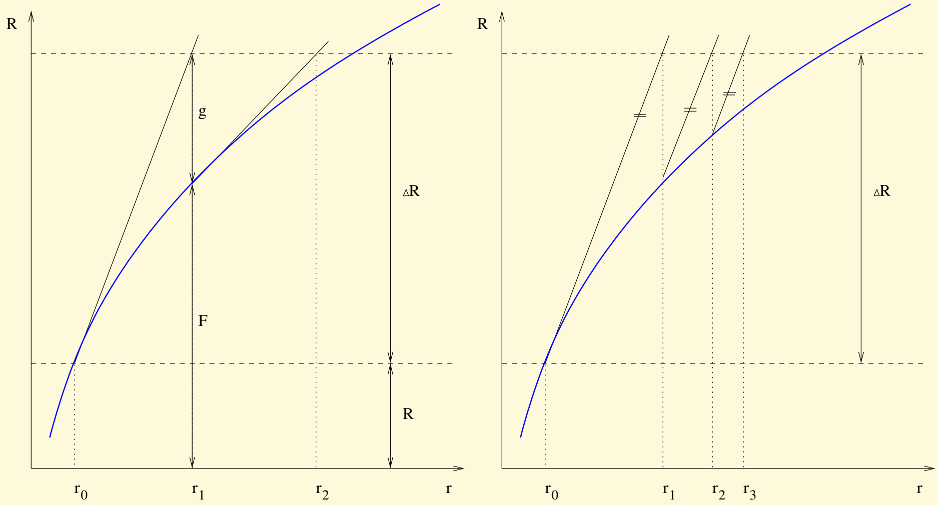
9. Další krok: zatížení konstrukce zatížením ΔF_2 ...

Konstrukci je kromě sil možné zatěžovat i předepsanými deformacemi, postup výpočtu je v zásadě shodný. Velikost kroků není nijak omezena, nicméně může uvlivnit rychlost konvergence a u některých typů problémů i stability výpočtu. U úloh stavební mechaniky se zpravidla doporučuje rozdělit zatížení na 40–100 kroků.

Ve fyzikálně nelineárních úlohách je možné sestavit matici tuhosti konstrukce jen na začátku výpočtu 6.6 a používat ji během celého výpočtu. Tento postup se označuje jako modifikovaná Newtonova–Raphsonova metoda. Jeho výhodou může být úspora času při sestavování matice **K**, tato výhoda je ovšem často znehodnocena nutností provedení většího počtu iterací [4].

6.3.4. Kritéria konvergence

Ke stanovení, zda bylo v Newtonově–Raphsonově metodě dosaženo dostatečné přesnosti, a je tedy možné iterační proces ukončit a přejít na další krok, je potřebné mít k dispozici vhodné *kritérium konvergence*.



Obr. 6.6 Newtonova–Raphsonova metoda a modifikovaná Newtonova–Raphsonova metoda (vpravo)

K posouzení konvergence je potřebné sledovat řešenou úlohu jako celek, nepostačí sledovat výsledky jen ve vybraném bodě nebo více bodech. Proto se zpravidla pracuje s normami vektorů.

Například Euklidovská norma vektoru **u**, která se pro uvedený účel používá nejčastěji, je definována:

$$||\mathbf{u}|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}. \tag{6.4}$$

Nejobvyklejším je *kritérium velikosti vektoru nevyvážených sil*, pomocí kterého porovnáváme velikost vektoru nevyvážených sil ve vztahu k velikosti zatížení v aktuálním kroku:

$$\frac{||\mathbf{g}||}{||\Delta \mathbf{F_i}||} < \varepsilon. \tag{6.5}$$

Další možností je *kritérium přírůstku deformací v iteraci*, ve kterém se porovnává velikost přírůstku deformace v aktuální iteraci s velikostí přírůstku deformace v daném kroku:

$$\frac{||\Delta \mathbf{u_{i,j}}||}{||\Delta \mathbf{u_i}||} < \varepsilon.$$

Hodnota ε v uvedených kritériích vyjadřuje požadovanou přesnost (často se používá $\varepsilon = 0,00001$).

Při výpočtech je vhodné nepoužívat pouze jedno kritérium, ale obě výše uvedená kritéria kombinovat.

Obsah
141. strana ze 197
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

6.3.5. Metoda délky oblouku

Metoda délky oblouku je přírůstkově–iterační metoda, která umožňuje vyšetřovat konstrukce po dosažení jejich únosnosti. Proto se využívá u některých geometricky nelineárních problémů nebo v problémech nelineární lomové mechaniky (například při vyšetřování výrazně porušených betonových konstrukcí). Výpočet je řízen na základě vztahu norem vektorů zatížení $\mathbf{F}$ a deformace $\mathbf{u}$. Na metodu délky oblouku je možné pohlížet jako na vylepšení Newtonovy–Raphsonovy metody.

Podobně jako Newtonova–Raphsonova metoda se používá pro silové zatížení $\mathbf{F}$, ale určování velikosti násobitele zatížení λ (a tedy velikost přírůstku zatížení ΔF_i) je automatické v závislosti na aktuální deformaci:

$$\Delta\mathbf{F_i} = \lambda \times \mathbf{F} \tag{6.6}$$

Pokud se λ automaticky zvyšuje, je výpočet řízen přírůstky zatížení, jde tedy vlastně o Newtonovu–Raphsonovu metodu. Pak ovšem může dojít k tomu, že při určité úrovni zatížení se hladina $\lambda\overline{\mathbf{F}}$ neprotne se zatěžovací dráhou.

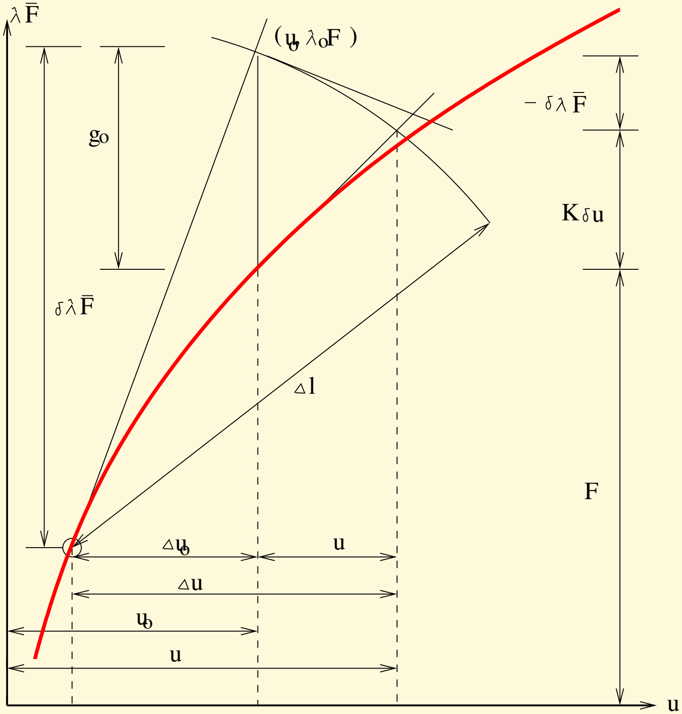
Wempner a Riks [33, 38] navrhli řízení výpočtu pomocí přírůstků délky oblouku zatěžovací dráhy $s = \int ds$. Diferenciál délky oblouku lze zapsat ve tvaru:

$$ds = \sqrt{d\mathbf{u}^T d\mathbf{u} + d\lambda^2\psi^2\overline{\mathbf{F}}^T\overline{\mathbf{F}}}, \tag{6.7}$$

kde ψ je parametr určující poměr vlivu vektoru deformací $\mathbf{u}$ a vektoru zatížení $\overline{\mathbf{F}}$ na řízení výpočtu.

Rovnici (6.7) je možno přepsat do přírůstkového tvaru:

$$a = \Delta\mathbf{u}^T\Delta\mathbf{u} + \Delta\lambda^2\psi^2\overline{\mathbf{F}}^T\overline{\mathbf{F}} - \Delta l^2 = 0. \tag{6.8}$$



Obr. 6.7 Metoda délky oblouku

Oproti Newtonově–Raphsonově metodě je třeba určovat navíc ještě neznámou λ. Je tedy třeba použít jak soustavy n rovnic ($\mathbf{K}\ \mathbf{u} = \lambda\ \mathbf{F}$), tak rovnice (6.8).

Vektor deformací $\mathbf{u}$ lze rozvinout do Taylorovy řady:

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &\approx \mathbf{g}_0 + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \lambda}\,\delta\lambda + \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}}\mathbf{g}^T\right)^T \delta\mathbf{u} \\ &= \mathbf{g}_0 + \overline{\mathbf{F}}\,\delta\lambda - \mathbf{K}\,(\mathbf{u}_0)\,\delta\mathbf{u} = \mathbf{O}. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Stejně lze rozvinout do Taylorovy řady a:

$$a \approx a_0 + 2\Delta\mathbf{u}_0^T\delta\mathbf{u} + 2\Delta\lambda_0\ \delta\lambda\psi_2\overline{\mathbf{F}}^T\overline{\mathbf{F}} = 0, \tag{6.10}$$

přičemž hodnotu a_0 lze stanovit z (6.8) dosazením $\Delta\mathbf{u} = \Delta\mathbf{u}_0$ a $\delta\lambda = \delta\lambda_0$:

$$a_0 = \Delta\mathbf{u}_0^T\Delta\mathbf{u}_0 + \Delta\lambda_0^2\psi^2\overline{\mathbf{F}}^T\overline{\mathbf{F}} - \Delta l^2. \tag{6.11}$$

Spojením rovnice (6.9) a (6.10) je možné po úpravě získat:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\overline{\mathbf{F}} \\ -2\Delta\mathbf{u}_0^T & -2\Delta\lambda_0\psi^2\overline{\mathbf{F}}^T\overline{\mathbf{F}} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \delta\mathbf{u} \\ \delta\lambda \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{g}_0 \\ a_0 \end{array} \right\}. \tag{6.12}$$

.

Matice soustavy však v uvedené podobě zjevně není pásová a je i nesymetrická. Proto se obvykle uvedený vztah pro řešení nelineárních úloh metodou délky oblouku nepoužívá a raději se přistupuje k různým dalším úpravám, které řešení soustav rovnic (6.12) převedou na řešení soustav rovnic se symetrickou maticí levých stran, i když to obvykle znamená složitější vícekrokový postup výpočtu.

Obvyklým obratem je rozdělení vektoru deformace $\delta\mathbf{u}$ na část reprezentující deformace vyvolané nevyváženými silami, a na deformace vyvolané vnitřními silami v konstrukci:

$$\delta\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{g_o} + \delta\lambda\mathbf{K}^{-1}\overline{\mathbf{F}} = \delta\overline{\mathbf{u}} + \delta\lambda\ \delta\mathbf{u_t}. \tag{6.13}$$

Násobitel zatížení může být vyjádřen z rovnice (6.14):

$$\lambda = \lambda_o + \delta\lambda. \tag{6.14}$$

Velikost změny deformace během kroku výpočtu je možné obdržet (6.15):

$$\Delta\mathbf{u} = \Delta\mathbf{u_o} + \delta\overline{\mathbf{u}} + \delta\lambda\delta\mathbf{u_t}. \tag{6.15}$$

Neznámá $\delta\lambda$ může být na základě předchozích vztahů stanovena:

$$a_1\delta\lambda^2 + a_2\delta\lambda + a_3 = 0, \tag{6.16}$$

kde:

$$\begin{aligned} a_1 &= \delta\mathbf{u}^{\mathbf{T}}\delta\mathbf{u_t} + \psi_2\overline{\mathbf{F}}^T\overline{\mathbf{F}}, \\ a_2 &= 2\delta\mathbf{u_t}(\Delta\mathbf{u_o} + \delta\overline{\mathbf{u}}) + 2\psi_2\overline{\mathbf{F}}^T\overline{\mathbf{F}}, \\ a_3 &= (\Delta\mathbf{u_o} + \delta\overline{\mathbf{u}})^T(\Delta\mathbf{u_o} + \delta\overline{\mathbf{u}}) - \Delta l^2 + \Delta\lambda_o^2\psi_2\overline{\mathbf{F}}^T\overline{\mathbf{F}}. \end{aligned} \tag{6.17}$$

Po získání dvou kořenů rovnice (6.16) je třeba ještě vybrat správný kořen. Podrobnosti je možné najít například v [4].

Uvedené vztahy popisují *sférickou metodu délky oblouku*. Metoda není v některých úlohách stabilní [11], a proto se často používá [17] odlišná varianta, takzvaná *linearizovaná metoda délky oblouku.*

Podle [10] se $\Delta\lambda$ stanoví:

$$\delta\lambda = -\frac{\frac{a_o}{2} + \Delta\mathbf{u_o}^T\delta\overline{\mathbf{u}}}{\Delta\mathbf{u_o}\delta\mathbf{u_t} + \Delta\lambda_o\psi^2\overline{\mathbf{F}}^T\overline{\mathbf{F}}}. \tag{6.18}$$

6.4. Pružnoplastické chování materiálu

6.4.1. Fyzikálně nelineární chování materiálu

Jako *fyzikálně nelineární* chování materiálu můžeme nazvat jakékoli chování, které se neřídí předpoklady a rovnicemi Hookeova zákona.

Do této oblasti patří jednak materiály *nelineárně pružné*, u kterých je vztah mezi zatížením a deformací nelineární, ale přitom nevykazují nevratné deformace, tedy odlehčení probíhá po stejné dráze jako zatěžování, jak je znázorněno na obrázku 6.8. Příkladem takového materiálu může být guma nebo některé plasty (využívané například v elastomerových mostních ložiscích).

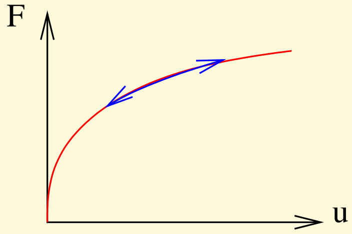
Dalším případem mohou být materiály *pružnoplastické*[1]. Takový materiál se chová nejprve pružně (lineárně nebo nelineárně), ale od určité úrovně zatížení začne při odlehčení vykazovat trvalé (plastické) deformace. Po odebrání zatížení probíhá odlehčení jinak, než probíhalo zatížení (odlehčení je na obrázku 6.9 znázorněno modrou čarou se šipkou).

Výše popsané typy chování materiálu byly *časově nezávislé*. U řady běžných stavebních materiálů (beton, dřevo) se však jejich chování mění také v závislosti na čase. Takové materiály pak popisujeme jako *viskoelastické* nebo *viskoplastické*.

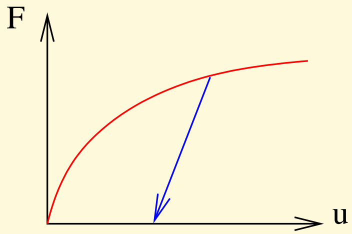
Ve stavební praxi se setkáváme i s dalším typem chování materiálů – s křehkým porušením (lomem). To nastává nejen u skla, ale za určitých nepříznivých podmínek například i u oceli.[2] Typické chování křehkého materiálu (skla) je ilustrováno na obrázku 6.10. Křeh-

[1] Běžně se používají i názvy *pružně–plastické*, *pružněplastické* a podobně.

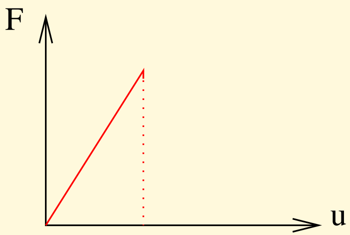
[2] Samozřejmě i beton, malta nebo stavební keramika se porušuje do jisté míry křehce. Nicméně chování těchto materiálů je velice složité a nelze na ně přímo aplikovat klasické vztahy lomové mechaniky. Proto je zpravidla výhodnější pro ně použít přibližnější řešení založené na předpokladu pružněplastického chování materiálu.



Obr. 6.8 Nelineárně pružný materiál.



Obr. 6.9 Pružnoplastický materiál.



Obr. 6.10 Křehký materiál.

kým porušováním materiálů se zabývá vědní obor *lomová mechanika*. Vzhledem ke složitosti tématu se mu zde nebudeme hlouběji věnovat.

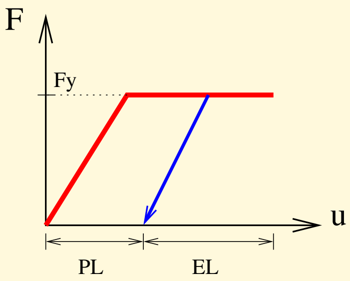
6.4.2. Ideálně pružnoplastický materiál

Při sledování dalšího výkladu je potřebné mít stále na paměti, že všechny ilustrace závislostí mezi silou F a deformací u a uvedené vztahy platí pro případ *jednoose namáhaného* prvku (například taženého prutu). V případě víceosé napjatosti budou vztahy podstatně složitější, jak bude ukázáno na příslušném místě dalšího textu.

Materiál, který se až do určité úrovně zatížení (na obrázku 6.11 označené F_y) chová lineárně pružně a po dosažení této úrovně u něj při nezměněném zatížení dále narůstají deformace, se nazývá *ideálně pružnoplastický*.[1] Z hlediska výpočetního to znamená, že v plastické fázi zatěžování je *modul přetvárnosti*[2] materiálu roven *nule*.

[1]Také pružný – ideálně plastický.

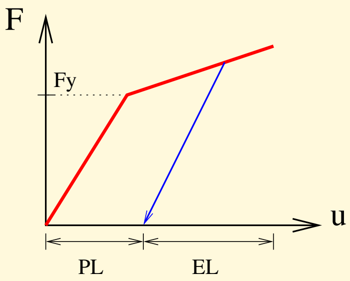
[2]Ze zjevných důvodů zde není vhodné používat název *modul pružnosti*, který se využívá pro popis chování



Obr. 6.11 Ideálně pružnoplastický materiál.

V případě, že působící zatížení je odebráno, dochází u materiálu k *lineárnímu odlehčení*, které je na obrázku 6.11 vyznačeno modrou čarou se šipkou a řídí se stejným zákonem jako lineární část chování materiálu (tedy čáry na obrázku 6.11, které zobrazují lineární zatěžování a odlehčení, jsou rovnoběžné). Je zřejmé, že i po odlehčení zůstane materiál deformován a tato deformace se označuje jako *trvalá* nebo *plastická*. Ta deformace je na obrázku 6.11 označena jako *PL*, zatímco *pružná složka deformace*, která při úplném odlehčení vymizí, je označena *EL*.

Maximální hodnota napětí v materiálu, které může materiál v pružném stavu přenést, ze obvykle označuje jako *mez pružnosti*, později také budeme používat termín *podmínka plasticity*.



Obr. 6.12 Pružnoplastický materiál se zpevněním.

6.4.3. Pružnoplastický materiál se zpevněním

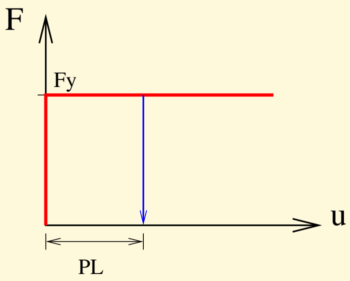
Ideálně pružnoplastický materiál je poměrně přísnou idealizací skutečnosti, protože prakticky používané materiály mají i v plastickém stavu nenulovou tuhost, tedy jejich modul přetvárnosti je nenulový. Nenulový modul přetvárnosti je samozřejmě vhodnější i z hlediska výpočetního.

Z uvedených důvodů se při praktických výpočtech (zejména metodou konečných prvků) používá *pružnoplastický materiál se zpevněním*, který je ilustrován na obrázku 6.12.[1]

Zpevnění materiálu samozřejmě nemusí být pouze lineární. Může být popsáno libovolnou funkcí (běžné je multilineární nebo křivkové).

pružného materiálu.

[1] Označení *zpevnění* se váže ke skutečnosti, že v tuhost (modul přetvárnosti) je v plastické oblasti nenulová, a materiál je tedy v plastickém stavu *tužší* než materiál ideálně pružnoplastický.



Obr. 6.13 Tuhoplastický materiál.

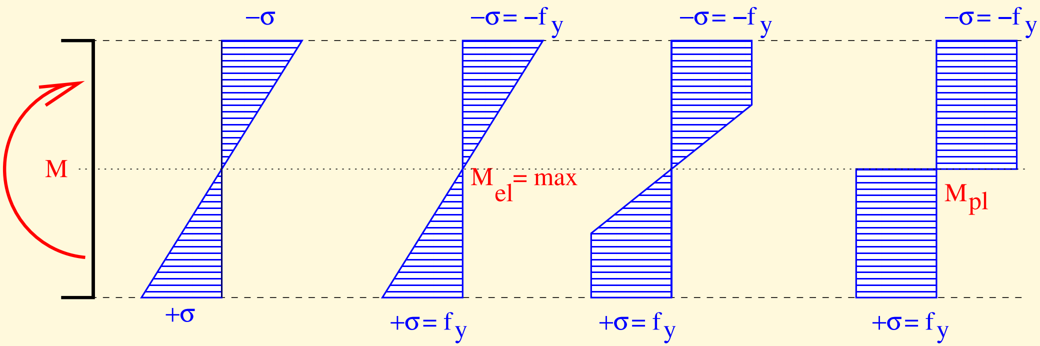
6.4.4. Tuhoplastický materiál

Pro některé starší výpočetní postupy využívající takzvané platické klouby je potřebné použít *tuhoplastický materiál*. U něj předpokládáme, že se chová od pořátku zatěžování ideálně plasticky, jak je ukázáno na obrázku 6.13.

6.4.5. Plastický kloub

U skutečných nosníkových konstrukcí zpravidla dochází k tomu, že plastická oblast vzniká na velmi krátké oblasti nosníku. Zjednodušeně můžeme předpokládat, že se tak děje v jednom průřezu.

Budeme předpokládat, že materiál je ideálně pružnoplastický. Uvažujme ohýbaný nosník obdélníkového průřezu. Průběh normálových napětí σ je v takovém nosníku lineární. Účinek vnějšího zatížení budeme uvažovat ve formě ohybového momentu působícího v tomto průřezu.



Obr. 6.14 Postupná plastizace průřezu ohýbaného nosníku.

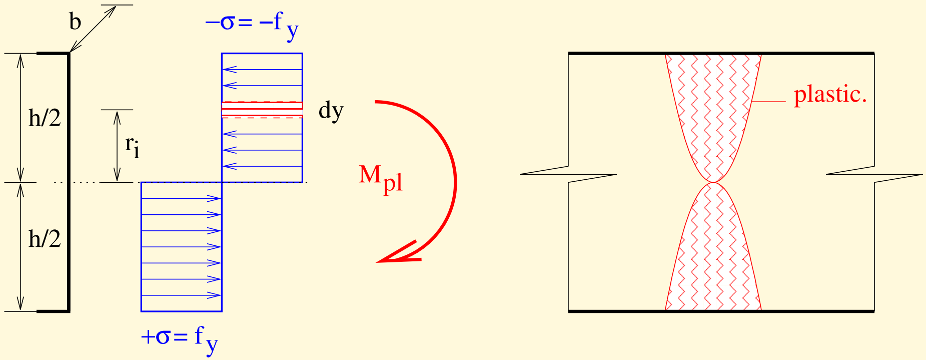
Budeme-li zatížení tohoto nosníku postupně zvětšovat, dosáhne napětí v krajních vláknech *meze pružnosti* f_y.

Napětí v krajních vláknech se u ideálně pružnoplastického již nemůže dále zvětšovat. Pokud se bude zatížení zvětšovat i nadále,[1] bude se průběh napětí σ měnit tak, že i v dalších vláknech nosníku je dosahováno napětí na mezi pružnosti f_y.

V okamžiku, kdy je v celém průřezu dosaženo napětí odpovídajícího f_y, tento průřez již nepřenese další zatížení (to musí být přeneseno jinými průřezy nosníku). Pro další zatížení se začne chovat jako prvek nepřenášející ohybové momenty – kloub. Takové místo v konstrukci se proto označuje jako *plastický kloub*.

Poznámka 6.3. Označení *plastický kloub* by mohlo svádět k dojmu, že uvedené místo

[1]Tento proces nazýváme *plastizace průřezu*.



Obr. 6.15 Plastický kloub.

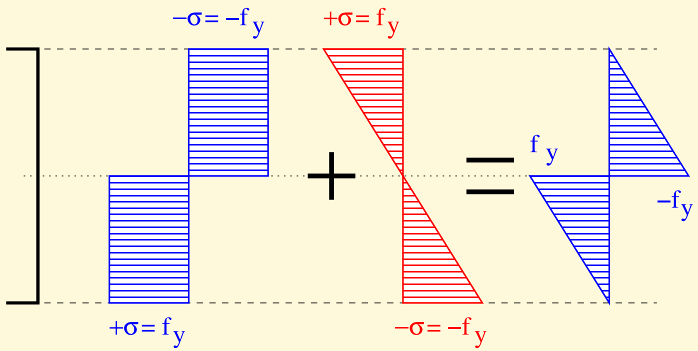
nepřenáší žádné ohybové momenty. Je ovšem nutné si uvědomit, že ke vzniku plastického kloubu muselo zatížení vyvodit moment o velikosti M_{pl}, který je v průřezu stále přítomen.

Ohybový moment, který je nezbytný ke vzniku plastického kloubu podle obrázku 6.15, je možné určit ze vztahu:

$$M_{pl} = \int_0^h \sigma_i \; r_i dy. \tag{6.19}$$

Tento moment označujeme jako *mezní plastický moment*. Poměr mezi mezním plastickým momentem a maximálním možným momentem v pružném stavu se nazývá *plastická rezerva průřezu*.

Uvažujme nyní případ, kdy dojde k úplnému odlehčení plně zplastizovaného průřezu. Předpokládáme, že odlehčení probíhá lineárně, ke stávajícího průběhu napětí tedy můžeme



Obr. 6.16 Odlehčení.

přičíst lineární průběh napětí v opačném směru . Na obrázku 6.16 odlehčení znázorněno graficky. Je zřejmé, že i po úplném odlehčení v průřezu zůstanou *zbytková napětí*. Všimněme si toho, že největší napětí zůstávají v blízkosti osy nosníku, tedy tam, kde při zatěžování jen v pružné oblasti jsou napětí malá. Můžeme tedy očekávat, že chování nosníků tvaru I, U nebo T (které mají v okolí osy mnohem menší tloušťku než na okrajích) bude v plastickém stavu daleko méně příznivé než chování nosníků obdélníkového průřezu.

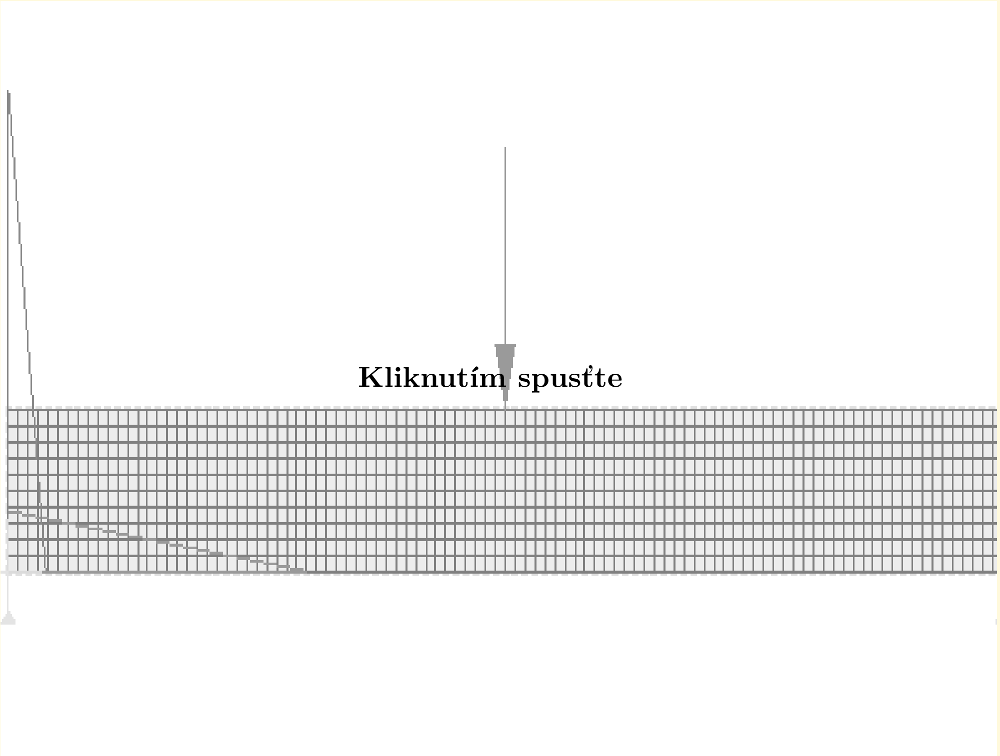
Existence zbytkových napětí po odlehčení zdůvodňuje jev *nízkocyklové únavy* konstrukcí. V případě, že je konstrukce opakovaně zatěžována až do plastické oblasti a opět odlehčována, dochází postupně ke kumulaci zbytkových napětí do té míry, než je únosnost některé části konstrukce zcela vyčerpána.[1]

[1]Příkladem nízkocyklové únavy může být zlomení drátu při jeho opakovaném ohýbání na jednu a na druhou stranu. Stavební konstrukce musí být navrhovány tak, aby k nízkocyklové únavě při běžném provozu

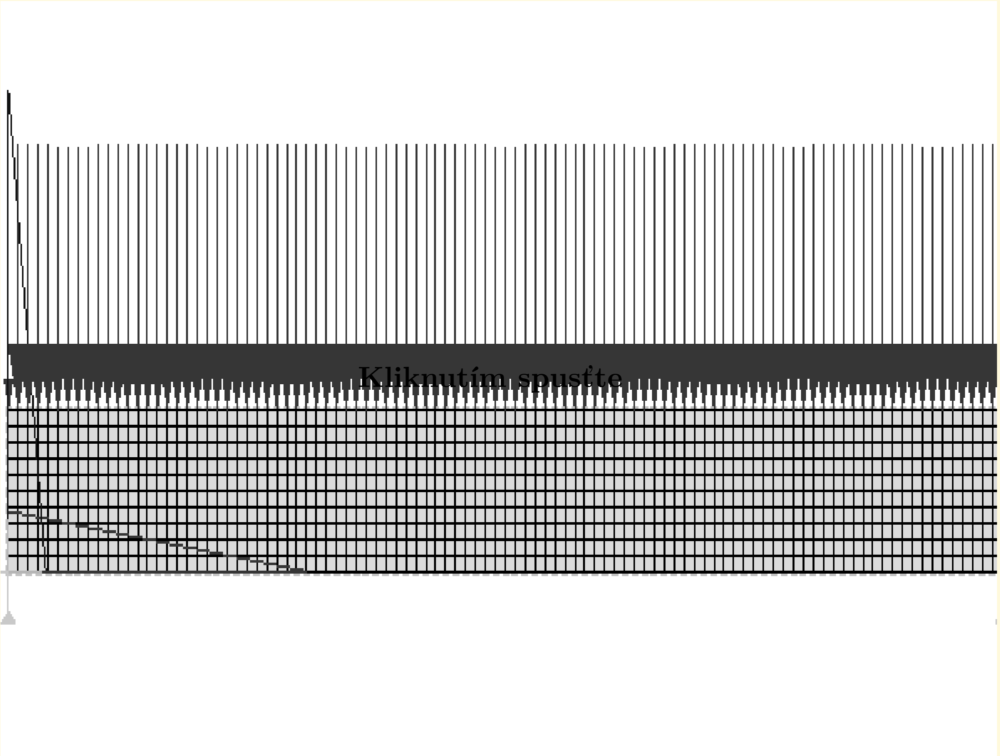
Naopak *vysokocyklová únava* nastává v případě, kdy je v materiálu konstrukce přítomen nějaký zdroj koncentrace napětí (trhlina, cizorodé těleso jiných mechanických vlastností, ostrý roh). I když je konstrukce jako celek zatěžována tak, aby v ní nedocházelo k rozvoji plastických oblastí, v místě zdroje koncentrace napětí může být plastického chování dosahováno. Pak probíhá stejný děj jako u nízkocyklové únavy, nicméně k vyčerpání únosnosti je potřebný mnohem větší počet zatěžovacích cyklů.

Poznámka 6.4. Plastické oblasti na nosnících („plastické klouby“) nemají dokonalý tvar odpovídající obrázku 6.15. Pro pro ilustraci uvádíme výsledky počítačové simulace tvorby plastických oblastí na nosnících zatížených silou 6.17 a rovnoměrným spojitým zatížením 6.18.

nemohlo dojít.



Obr. 6.17 Plastizace nosníku zatíženého silou.



Obr. 6.18 Plastizace nosníku zatíženého rovnoměrným spojitým zatížením.

6.4.6. Pružnoplastické řešení nosníků a rámů

K praktickému řešení rámů v pružnoplastickém stavu použijeme *metodu postupné plastizace*. Například v [37] je možné najít další metody a teoretický výklad *statické metody*, ze které dále popisovaný postup vychází.

Vyjdeme ze zjednodušujícího předpokladu, že materiál se chová *tuhoplasticky*. Potom, je možné předpokládat, že plastický kloub na rámu vznikne ihned, jakmile je v průřezu dosaženo mezního plastického momentu M_{pl}. Toto místo se pro další přírůstky zatížení chová jakou kloub a může docházet ke vzniku dalších plastických kloubů v jiných místech rámu. Výpočet se ukončí v okamžiku, kdy je v konstrukci již tolik kloubů, že by přestala být staticky určitá.

Postup při výpočtu metodou postupné plastizace je možné popsat takto:

- Provedeme lineární výpočet.
- Největší zjištěný moment položíme roven M_{pl} a podle něj určíme vnitřní síly.
- Pro přitížení v dalším kroku považujeme pro výpočet místo s M_{pl} (plastický kloub) za místo kloubu ($\Delta M = 0$).
- Určíme další plastický kloub a postup opakujeme **dokud je konstrukce s klouby staticky neurčitá**.

Příklad 6.5. Stanovte maximální konstantní spojité zatížení q oboustranně vetknutého nosníku.

Řešení. Postup výpočtu je ilustrován na obrázku 6.19. V prvním kroku vypočítáme ohybové momenty na nosníku. Je zřejmé, že největší hodnota M je ve vetnutích:

$$M_v = \frac{q\ l^2}{12}.$$

Budeme předpokládat, že v těchto místech vzniknou plastické klouby. Položme tedy $M_v = M_{pl}$ a stanovme velikost q:

$$M_v = M_{pl}\frac{q\ l^2}{12} \Rightarrow q = \frac{12M_{pl}}{l^2}.$$

Pro další zatížení q_1 se plastické klouby chovají jako běžné klouby. Statické schéma pro nosník zatížená q_1 se tedy změní na prostý nosník. Snadno zjistíme, že největší moment je uprostřed rozpětí:

$$M_u = \frac{q\ l_1^2}{8}.$$

I tento moment bude roven M_pl, ovšem až po připočtení velikosti momentu v tomto místě z předchozího kroku:

$$M_{u,q} = \frac{q\ l^2}{24}.$$

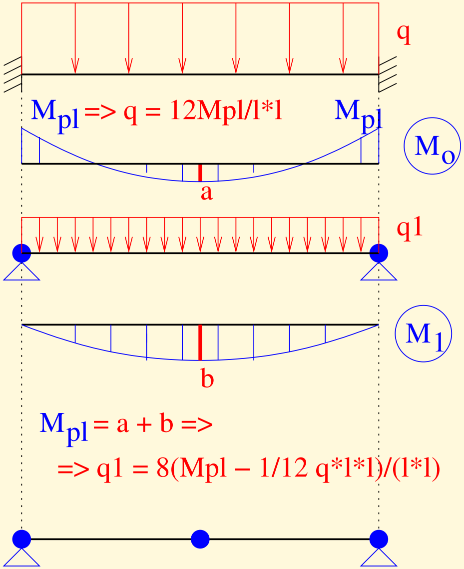
Z uvedených vztahů je možné vypočítat, že:

$$q_1 = \frac{(8\ M_{pl} - \frac{1}{12}\ q\ l^2)}{l^2}.$$

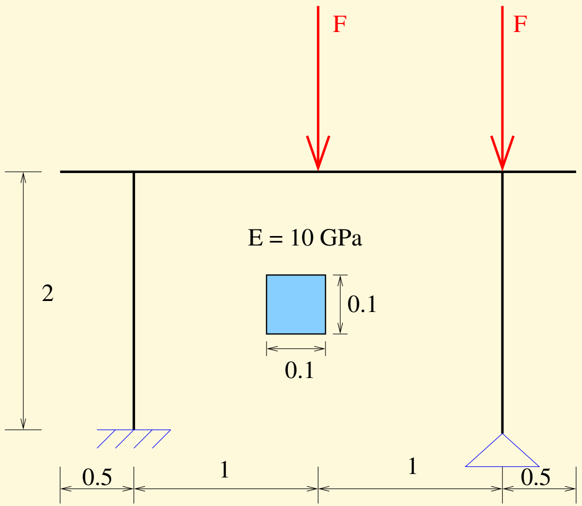
Protože v dalším kroku by už nosník nebyl staticky určitý, je možné výpočet ukončit, a konstatovat, že celkové zatížení q nosníku je:

$$q_{tot} = q + q_1 = \frac{12M_{pl}}{l^2} + \frac{(8\ M_{pl} - \frac{1}{12}\ q\ l^2)}{l^2}.$$

▲



Obr. 6.19 Příklad 6.5: výpočet metodou postupné plastizace.



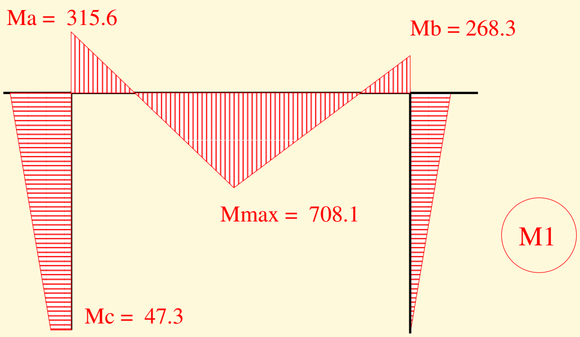
Obr. 6.20 Schéma příkladu 6.6.

Příklad 6.6. Stanovte maximální možnou velikost zatížení zadaného rámu, pokud $M_{pl} = 20\ kNm$. Rám se složen z prutů s konstantním průřezem (čtverec, $b = 0.1m$). Rozměry jsou v metrech. Schéma rámu je na obrázku 6.20.

Řešení. Budeme postupovat podobně jako v předchozím příkladu. Protože konstrukce je o něco složitější, bude ji zatěžovat zatížením o zvolené hodnotě „jednotkové“ hodnotě.

Nejprve provedeme výpočet pro zatížení $F = 2kN$. Získáme průběhy momentů, které jsou vykresleny na obrázku 6.21.

Obsah
162. strana ze 197
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obr. 6.21 Momenty vyvolané v konstrukci zatížením F1.

Určíme hodnotu zatížení z předpokladu, že v místě maximálního momentu bude dosažena hodnota M_{pl} a vznikne tam plastický kloub:

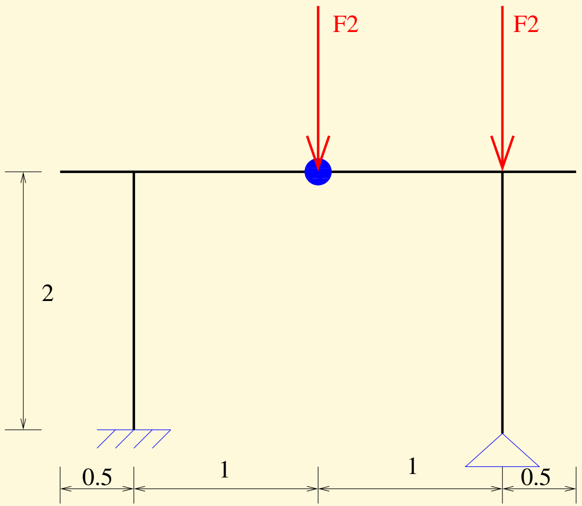
$$M^1_{max} = M_{pl} \Rightarrow F_{real} = \frac{M_{pl}}{M_{max}} F1 = \frac{20000}{708.1} \times 2000 \approx 56.5 \ kN$$

Nyní můžeme dopočítat ostatní momenty:

$$M^1_a = \frac{M_{pl}}{M_{max}} M_a = \frac{20000}{708.1} \times 315.6 \approx 8.91 \ kNm$$

$$M^1_b = \frac{M_{pl}}{M_{max}} M_b = \frac{20000}{708.1} \times 268.3 \approx 7.58 \ kNm$$

V dalším kroku konstrukci přitížíme dalším zatížením ovelikosti $F2 = 2kN$ a budeme



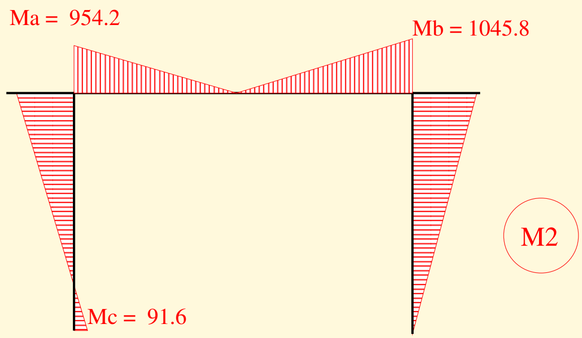
Obr. 6.22 Schema konstrukce se zatěžením F2.

předpokládat, že pro toto zatížení se uplatí plastický kloub, který jsme zavedli v předchozím kroku.

Nyní vypočítáme momenty pro předpoklad $M_a^1 + M_b^2 = M_{pl}$:

$$M_b^2 + M_b^1 = M_{pl} \Rightarrow n \times 954 + 8910 = 20000$$

$$n = \frac{20000 - 954}{8910} \approx 11.62 \Rightarrow M_b^1 + M_b^2 = 11.62 * 1045.8 + 7580 = 19.7kNm$$



Obr. 6.23 Momenty vyvolané v konstrukci zatížením F2.

Je zřejmé, že platí $M_a^1 + M_a^2 > M_b^1 + M_b^2$, a proto plastický kloub vznikne v místě M_a.
Velikost zatížení tedy bude: $F = F1 + n \times F2 = 56.5 + 11.62 \times 2 = 79.74kN$
Je zřejmé, že konstrukce je již staticky určitá, a proto ukončíme výpočet.[1]

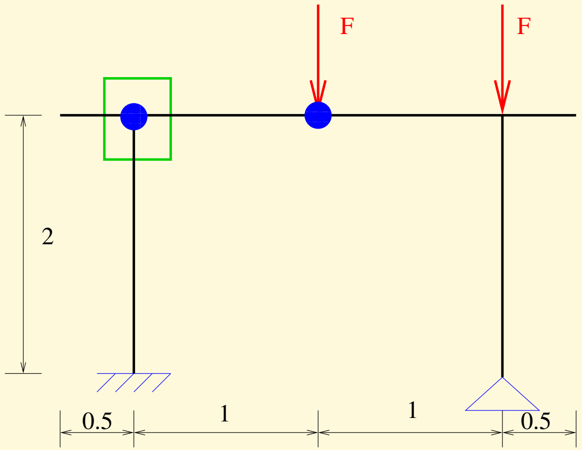
▲

6.4.7. Podmínky plasticity

V jednorozměrném případě jsme bez další diskuse předpokládali, že k přechodu z pružného do plastického stavu dojde po dosažení předem dané hodnoty *napětí na mezi pružnosti* $\sigma = f_y$. Tedy takzvanou *podmínkou plasticity* bylo dosažení určité hodnoty napětí.

V případě, že úloha není jednorozměrná a napětí působí ve více směrech, je situace

[1] V případě nutnosti by bylo možné provést ještě jeden krok výpočtu, který by byl obtížnější.



Obr. 6.24 Konečný stav konstrukce.

poněkud složitější. V případě dvojrozměrné úlohy (například v úloze rovinné napjatosti) přechod do plastického stavu zřejmě závisí na vzájemném vztahu jednotlivých složek vektoru napětí.

Protože napětí v rovině můžeme vyjádřit pomocí dvojice hlavních napětí σ_1, σ_2, zřejmě můžeme i *podmínku plasticity* definovat jako funkci těchto napětí. Pokud takový vzta zobrazíme v rovině hlavních napětí tak, jak je tomu na obrázku 6.25 vpravo, pak podmínka plasticity bude mít podobu křivky.[1]

V případě prostorové napjatosti bude situace podobná. Podmínka plasticity může být vyjádřena jako funkce hlavních napětí $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ a při zobrazení v prostoru hlavních napětí bude mít tvar prostorové plochy.

6.4.8. Přehled podmínek plasticity

V dalším textu uvedeme některé nejdůležitější podmínky plasticity, které je možné použít pro stavební materiály.

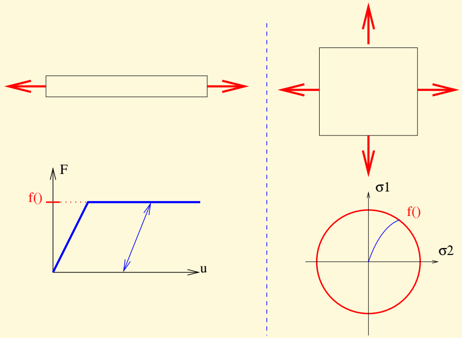
6.4.8.1. Trescova podmínka

Trescova podmínka plasticity[2] vychází z předpokladu, že materiál přejde do plastického stavu, když maximální smykové napětí dosáhne hodnoty meze pružnosti ve smyku:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \tau_m = 0, \tag{6.20}$$

[1]Na obrázku 6.25 je zobrazena uzavřená křivka, což je obvyklý případ, není to však podmínkou – lze sestavit i podmínky, které budou mít podobu otevřené křivky (tedy lze najít takovou kombinaci napětí, při které materiál zůstane v pružném stavu).

[2]Henri Tresca (1814 – 1885), francouzský strojní inženýr.



Obr. 6.25 Podmínka plasticity v 1D a ve 2D.

kde τ_m je mez pružnosti ve smyku.

Protože maximální smykové napětí je možné vyjádřit pomocí hlavních napětí, je možné rovnici (6.20) přepsat do tvaru:

$$\sigma_1 - \sigma_3 - \sigma_{mt} = 0, \tag{6.21}$$

za předpokladu, že

$$(\tau_m = \frac{\sigma_{mt}}{2}), \tag{6.22}$$

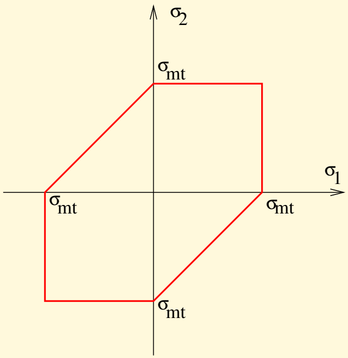
a že

$$\sigma_{md} = \sigma_{mt} = f_y. \tag{6.23}$$

.

Tato podmínka dobře vyhovuje materiálům, kterém mají přibližně stejnou mez pružnosti jak v tahu, tak v tlaku, tedy například oceli (konstrukční i betonářské) a dalším kovům.

Obsah
168. strana ze 197
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obr. 6.26 Trescova podmínka plasticity ve 2D.

6.4.8.2. Misesova podmínka

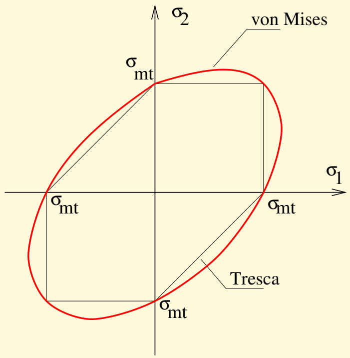
Misesova podmínka[1] byla nezávisle na sobě odvozena Misesem,[2] Huberem[3] a Henckym[4] na základě měrné energie změny tvaru a má podobu:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 = 2\sigma_{mt}^2, \tag{6.24}$$

kde

$$\sigma_{md} = \sigma_{mt} = f_y. \tag{6.25}$$

[1] V literatuře se často označuje jako *von Misesova* nebo *podmínka Mises Huber Hencky* podle autorů.
[2] Richard von Mises (1883-1954), rakouský vědec a matematik.
[3] Maksymilian Tytus Huber (1872-1950), polský vědec a inženýr.
[4] Heinrich Hencky (1885-1951), německý stavební inženýr.



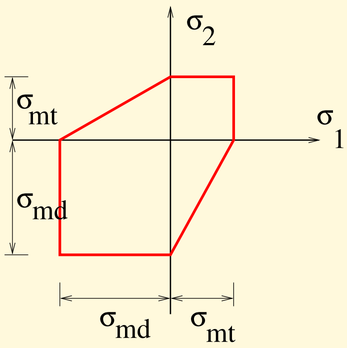
Obr. 6.27 Misesova podmínka plasticity (podmínka Mises–Huber–Hencky) ve 2D.

Podmínka je tedy opět vhodná především pro ocel a jiné kovy. Její hlavní předností je, že je popsána hladkou funkcí. To je významné především při její algoritmizaci v počítačových programech (pro výpočty pružnoplastického materiálu se zpevněním jsou potřebné také derivace podmínky plasticity).

Poznámka 6.7. Spíše ve strojní praxi se počítá takzvané „von Misesovo napětí“. Jde o levou stranu upravené podmínky

$$\sqrt{\frac{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2}{2}} \leqq \sigma_{mt} \tag{6.26}$$

Hodnotu takto spočítaného „von Misesova napětí“ tedy můžeme přímo porovnávat s mezí pružnosti $\sigma_{mt} = f_y$ a tak zjišťovat, zda se materiál nachází nebo nenachází v pružném



Obr. 6.28 Mohrova – Coulombova podmínka plasticity ve 2D.

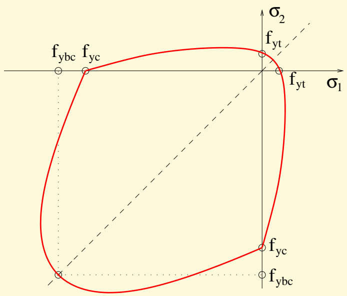
stavu.

Tento postup je možné ve stavební praxi využít spíše výjimečně – je vhodnější pro prostorové modely (tedy tělesa), které se používají jen ve výjimečných případech (detailní analýzy komplikovaných ocelových spojů a podobně).

6.4.8.3. Mohrova – Coulombova podmínka plasticity

Řada běžných materiálů, se kterými se setkáváme ve stavební praxi (beton, zdivo, zeminy a horniny), má vlastnosti podstatně odlišné od předpokladů, na kterých jsou založeny výše uvedené podmínky plasticity. Jde zejména o předpoklad, že mez pružnosti v tahu a v tlaku je stejná.

Z těchto důvodů byly odvozeny další podmínky. Pro zeminy se často využívá *Mohrova*



Obr. 6.29 Chen – Chenova podmínka plasticity ve 2D.

– *Coulombova podmínka*, kterou lze chápat jako zobecnění Trescovy podmínky pro případ, že $\sigma_{md} \neq \sigma_{mt}$:

$$\sigma_1 - \frac{\sigma_{mt}}{\sigma_{md}}\sigma_3 - \sigma_{mt} = 0, \tag{6.27}$$

kde $\sigma_{mt} = f_{y,t}$ je mez pružnosti materiálu v tahu a kde $\sigma_{md} = f_{y,c}$ je mez pružnosti materiálu v tlaku.

6.4.8.4. Chen – Chenova podmínka plasticity

Výše uvedenou Mohrovu – Coulombovu podmínku je možné využít také pro beton a železobeton. Zkoušky betonových vzorků prováděné například Kupferem‘[47] však ukázaly, že pro tyto materiály by bylo vhodnější použít podmínky poněkud odlišného tvaru. Na Kupferovy zkoušky navázala řada autorů, kteří se pokusili sestavit rovnice co nejlépe experimentálním výsledkům.

Uveďme jako příklad *Chen–Chenovu*[1] podmínku plasticity. Tato podmínka je popsána dvěma funkcemi.

Tvar podmínky pro oblast tlak–tlak ($\sigma_1 < 0$ a $\sigma_2 < 0$, $\sigma_3 < 0$):

$$J_2 + \frac{A_{yc}}{3} I_1 - \tau_{yc}^2 = 0. \tag{6.28}$$

Podmínka pro ostatní oblasti:

$$J_2 - \frac{1}{6} I_1^2 + \frac{A_{yt}}{3} I_1 - \tau_{yt}^2 = 0, \tag{6.29}$$

kde

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \tag{6.30}$$

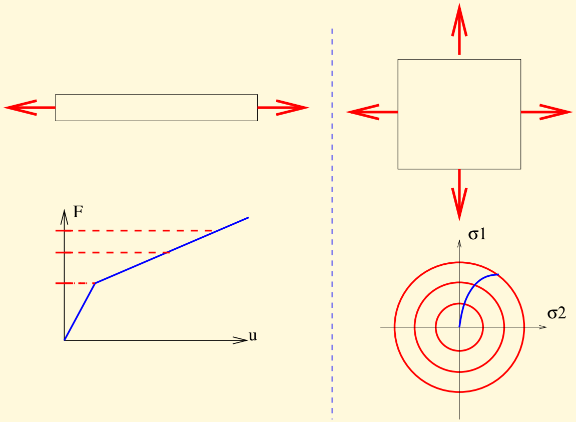
a

$$J_2 = \frac{1}{2} \left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 \right). \tag{6.31}$$

Význam ostatních výrazů v rovnicích je:

$$\begin{aligned} A_{yc} &= \frac{f_{ybc}^2 - f_{yc}^2}{2 f_{ybc} - f_{yc}}, \\ \tau_{yc}^2 &= \frac{f_{ybc} f_{yc} (2 f_{yc} - f_{ybc})}{3 (2 f_{ybc} - f_{yc})}, \\ A_{yt} &= \frac{f_{yc} - f_{yt}}{2}, \\ \tau_{ut}^2 &= \frac{f_{yc} f_{yt}}{6}, \end{aligned} \tag{6.32}$$

[1] Někdy se označuje jen jako *Chenova* podmínka plasticity.



Obr. 6.30 Zpevnění a podmínka porušení v 1D a ve 2D.

kde f_{yt} je mez pružnosti materiálu v jednoosém tahu, f_{yc} je mez pružnosti materiálu v jednoosém tlaku a f_{ybc} je mez pružnosti materiálu v dvojosém tlaku.

6.4.9. Zpevnění

U pružnoplastického materiálu se zpevněním je potřebné definovat jednak charakter zpevnění a obvykle také podmínku, která proces zpevňování ukončí, *podmínku porušení materiálu*.

Podmínka porušení materiálu je často popsána stejnými vztahy jako příslušná podmínka plasticity, namísto napětí na mezi plasticity se však do ní dosazují napětí odpovídající pevnosti materiálu.

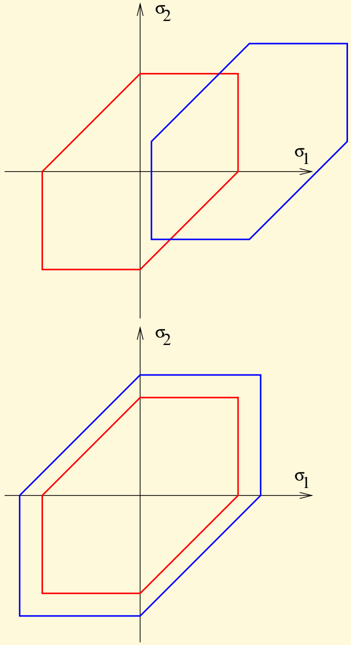
Dále je potřeba zavést pojem *následné podmínky plasticity*: v jednorozměrném problému jde o bod na pracovním diagramu mezi napětím na mezi pružnosti a napětím při porušení. Tomu ve 2D odpovídá křivka ležící mezi podmínkou plasticity a podmínkou porušení (ve 3D jde opět o plochu).

Potom můžeme definovat tři základní typy zpevnění:

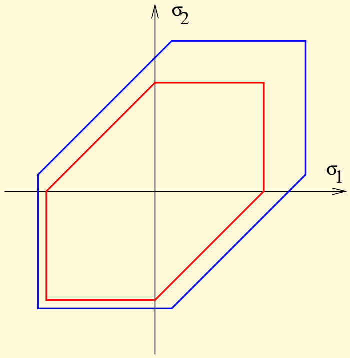
- *kinematické*: následné podmínky plasticity mění polohu, ale jejich tvar a velikost jsou shodné s (počáteční) podmínkou plasticity,
- *izotropní*: velikost následných podmínek se proporcionálně zvětšuje, tyto následné podmínky plasticity nemění svoji polohu,
- *kombinované*: následné podmínky plasticity mění polohu a současně se proporcionálně zvětšují. Takové chování nejvíce odpovídá skutečným látkám, někdy se označuje jako Bauschingerův efekt.

Poznámka 6.8. V případě modelování specifických materiálů, jako je beton, je potřebné uvažovat s rozvojem trhlin a poklesem tuhosti v jejich okolí. V případě kontinuálních modelů (například pružnoplastických) ovšem není možné popsat každou jednotlivou trhlinu a je potřebné se uchýlit ke zjednoušením.

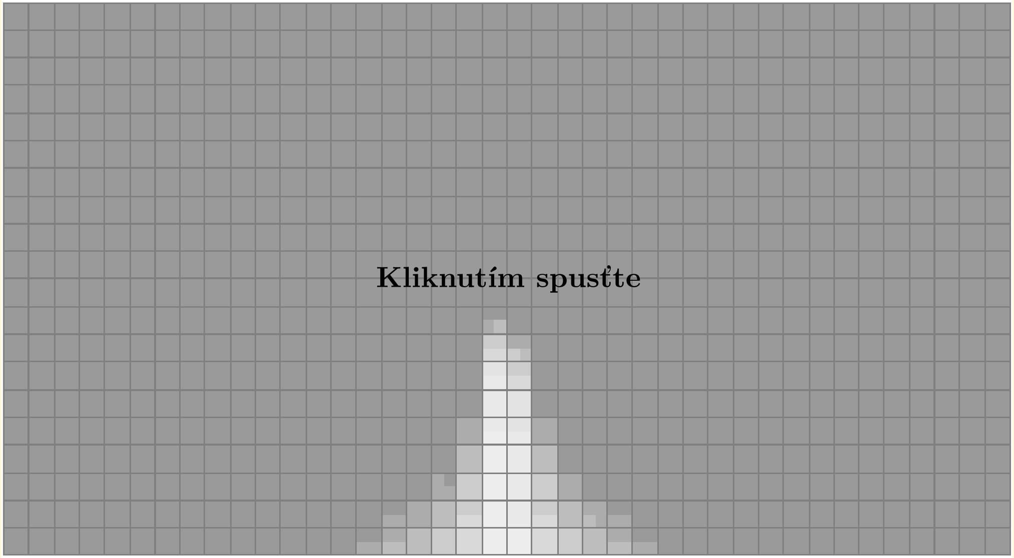
Na obrázcích 6.33 a 6.34 je na příkladu výřezu stěny ukázáno jak klesá tuhost a jak se rozvíjí oblast s trhlinami v místě namáhaném podílným tahem. Výsledky byly získány numerickou imulací metodou konečných prvků, kromě platicity zde bylo nutno použít i další vztahy, opírající se o llomovou mechaniku.



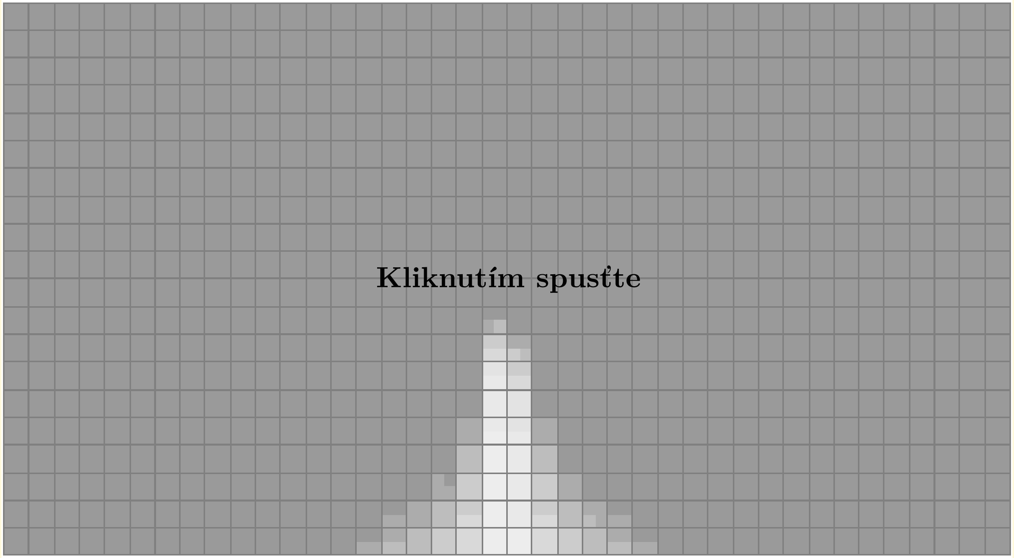
Obr. 6.31 Kinematické (nahoře) a izotropní zpevnění ve 2D.



Obr. 6.32 Kombinované zpevnění ve 2D.



Obr. 6.33 Pokles tuhosti v betonu.



Obr. 6.34 Rozvoj trhlin v betonu.

Obsah
179. strana ze 197
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

6.5. Teorie druhého řádu

6.5.1. Úvod

Ve většině úloh stavební mechaniky a pružnosti předpokládáme, že deformace konstrukcí jsou malé, a proto obvykle stanovujeme napětí a vnitřní síly na nezdeformované konstrukci. Ve většině úloh je chyba vyvolaná tímto postupem zanedbatelná, přitom zjednodušení výpočtů je velmi podstatné.

V některých úlohách však tento postup vede, i při malých deformacích konstrukce nebo konstrukčního prvku, k nesprávným výsledkům. Nejběžnějším příkladem je posuzování stability tlačených prutů, stejně tak se ovšem týká například předepjatých železobetonových nosníků zatížených ohybem.

V takových úlohách musíme pracovat i s účinky, které vyvolají zatížení na zdeformovaném tvaru konstrukce a žádat splnění podmínek rovnováhy na zdeformované konstrukci.[1] Takový postup se nazývá *výpočet podle teorie druhého řádu*. Jako příklad použití teorie druhého řádu využijeme klasické Eulerovo řešení stability nosníku.

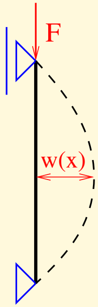
6.5.2. Eulerovo řešení stability nosníku

Z praxe je známo, že tlačené nosníky (podle obrázku 6.35) kolabují podstatně dříve, než napětí v nich dosáhne hodnoty pevnosti v tlaku:

$$\frac{F}{A} \leqq \sigma_u, \tag{6.33}$$

kde F je zatížení, A je plocha nosníku, σ_u je pevnost v tlaku.

[1] Jak čtenáře jistě napadlo, v obecném případě to může znamenat iterační výpočet. Bohužel má pravdu.



Obr. 6.35 Osově zatížený tlačený nosník.

Je také známo, že nosníky obvykle před poruchou vybočí. Euler proto do úlohy doplnil ohybový moment, který vůči bodům zdeformované střednice (osy) nosníku vyvolává zatížení F.

Moment v bodě x nosníku tedy můžeme zapsat:

$$M = F\ w. \tag{6.34}$$

Ze základních kurzů stavební pružnosti je znám vztah průhybové čáry a ohybového momentu na nosníku:

$$w'' = -\frac{M}{EI} = -\frac{F\ w}{EI} w, \tag{6.35}$$

kde I je moment setrvačnosti a E je modul pružnosti.

Po úpravě a označení $\alpha^2 = \frac{F}{EI}$ můžeme napsat:

$$w = {}'' + \alpha^2 w = 0. \tag{6.36}$$

Obsah
181. strana ze 197
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Řešení rovnice (6.36) by mělo vést k nalezení takového průhybu, při kterém je konstrukce v rovnováze.

Obecné řešení rovnice (6.36) má tvar:

$$w = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x. \tag{6.37}$$

Uplatníme okrajové podmínky. Pro $x = 0$ je $w(x = 0) = 0$ a tedy:

$$0 = C_1 \sin \alpha\ 0 + C_2 \cos \alpha\ 0 \Rightarrow C_2 = 0. \tag{6.38}$$

Pro $x = L$ je $w(x = L) = 0$ a tedy:

$$0 = C_1 \sin \alpha\ L + 0 \Rightarrow 0 = C_1 \sin \alpha\ L \tag{6.39}$$

Pro $C_1 \neq 0$ zřejmě musí být $\sin \alpha L = 0$:

$$\alpha L = k\ \pi \ldots k = 1, 2, 3, ... \tag{6.40}$$

Po dosazení okrajových podmínek získáme výraz pro průhyb w:

$$w = C_1 \sin \frac{k\pi\ x}{L}, \tag{6.41}$$

který bohužel závisí na konstantě C_1, kterou nejsme schopni stanovit.

Dosaďme tedy za α^2:

$$\alpha^2 = \frac{F}{E\ I} \Rightarrow F = \alpha^2 EI, \tag{6.42}$$

a tedy:

$$\alpha\ L = 1\ \pi. \tag{6.43}$$

Po úpravě a označení $F_{cr} = F$ získáme vztah:

$$F_{cr} = \pi^2 \frac{EI}{L^2}, \tag{6.44}$$

což je známý výraz pro **Eulerovu kritickou sílu**, tedy sílu, při které je konstrukce ve stavu labilní rovnováhy (bude-li síla větší, bude se průhyb konstrukce zmenšovat až do nuly, bude-li větší, pak se průhyb bude nekontrolovatelně zvětšovat).

6.5.3. Řešení stability nosníku Ritzovou metodou

V tomto odstavci ukážeme, že ke vztahu (6.44) je možné dojít také pomocí Ritzovy metody.

Zvolme aproximaci průhybu v následujícím tvaru:

$$w = a_1 \sin \frac{\pi x}{L}. \tag{6.45}$$

Potenciální energii můžeme rozdělit na dvě části:

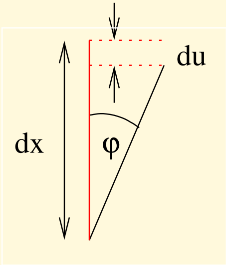
1. $\Pi_N = -F\ u_a = -F\frac{FL}{EA}$, kde u_a je zkrácení prutu dle lineární teorie, které nezávisí na w (a v dalším výpočtu se neprojeví),
2. $\Pi_M = -Fu_b$, kde u_b je zkrácení v důsledku pootočení prutu podle obrázku 6.36.

Zkrácení elementu prutu v důsledku pootočení prutu můžeme zapsat:

$$du = dx - dx \cos \varphi \tag{6.46}$$

Pro praktický výpočet bude vhodné použít rozvoj do Taylorovy řady:

$$du \approx dx - dx(1 - \frac{1}{2}\varphi^2) = \frac{1}{2}\varphi^2 dx \approx \frac{1}{2}(w^{'})^2 dx. \tag{6.47}$$



Obr. 6.36 Zkrácení prutu v důsledku pootočení.

Pro celý prut můžeme napsat:

$$u_b = \frac{1}{2}\int_0^L (w^{'})^2 dx \tag{6.48}$$

Derivujeme-li zvolenou aproximaci podle x, získáme:

$$w^{'} = a_1 \frac{\pi}{L}\cos\frac{\pi x}{L}, \quad w^{''} = -a_1\frac{\pi^2}{L^2}\sin \pi x L. \tag{6.49}$$

Získaný výsledek dosadíme do $u_b = \frac{1}{2}\int_0^L (w^{'})^2 dx$:

$$u_b = \frac{\pi^2}{2L^2}\, a_1^2 \int_0^L \cos^2\frac{\pi x}{l} dx = \frac{\pi^2}{4L} a_1^2. \tag{6.50}$$

Vztah (6.50) můžeme dosadit do výrazu pro potenciální energii vnitřních sil nosníku:

$$\Pi_i = \frac{1}{2}\int_0^L EI(w^{''})^2 dx = \frac{1}{2} EI A_1^2 \frac{\pi^4}{L^4}\int_0^L \sin^2\frac{\pi x}{L} dx = \frac{\pi^4}{4}\frac{EI}{L^3} a_1^2. \tag{6.51}$$

Potenciální energie vnějších sil má tvar:

$$\Pi_{\mathrm{e}} = -F\ u_b = -\frac{\pi^2}{4L} F a_1^2 \tag{6.52}$$

Celkovou potenciální energie systému získáme součtem potenciální energie vnějších a vnitčních sil:

$$\Pi = \Pi_{\mathrm{e}} + \Pi_i = \left(-\frac{\pi^2}{4L} F + \frac{\pi^4}{4} \frac{EI}{L^3} \right) a_1^2 \quad (+\Pi_N). \tag{6.53}$$

Z výrazu pro extrém potenciální energie $\frac{\Pi}{a_1} = 0$ získáme:

$$\frac{\Pi}{a_1} = \left(-\frac{\pi^2}{4L} F + \frac{\pi^4 EI}{4L^3} \right) 2a_1 = 0. \tag{6.54}$$

Z předpokladu, že $a_1 \neq 0$ můžeme napsat:

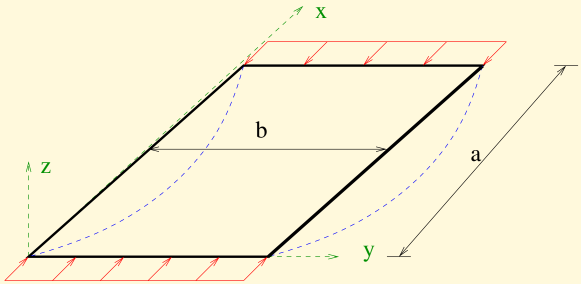
$$-\frac{\pi^2}{4L} F + \frac{\pi^4 EI}{4L^3} = 0 \tag{6.55}$$

Z výrazu (6.55) získáme výsledek, který je shodný s Eulerovým řešením:

$$F = \frac{\pi^2 EI}{L^2}. \tag{6.56}$$

6.5.4. Stabilita stěn

Podobným způsobem jako u nosníků je možné hledat hodnotu kritického zatížení i u stěn. Vzhledem k tomu, že stěna musí vybočit ze svojí roviny, jde vlastně o řešení stěnodesky,



Obr. 6.37 Vybočení stěnodesky.

jak je patrné z obrázku. Pro stěnodesky je ve většině případů poměrně obtížné najít řešení analogické Eulerově kritické síle, ukážeme si proto řešení jen pro jednoduchý případ stěny po všech okrajích prostě uložené.

Podle [4] má rovnice úlohy tvar:

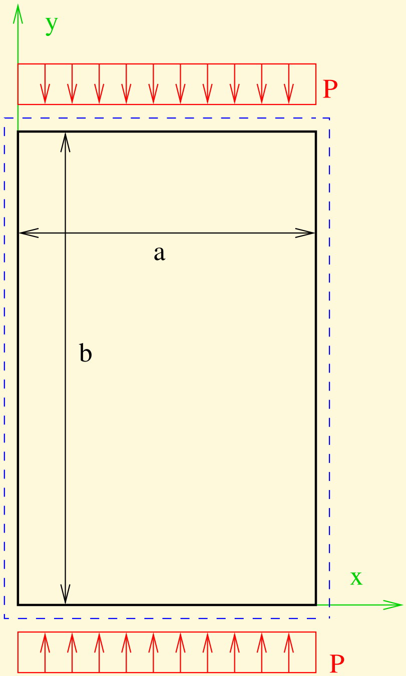
$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\frac{N_x}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \tag{6.57}$$

Řešení rovnice (6.57) má tvar:

$$w(x, y) = \delta \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}, \quad m, n = 1, 2, 3, \ldots \tag{6.58}$$

Po dosazení rozměrů podle obrázku 6.38 a po úpravě dostaneme:

$$P = \frac{D\pi^2 b^2}{n^2}\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2. \tag{6.59}$$



Obr. 6.38 Stěna po všech okrajích prostě uložená.

Zbývá určit vhodná m, n. Zvolíme $m = 1$ podle doporučení v [4]. Protože P má být minimální, musí platit:

$$\frac{\partial P}{\partial N} = 0, \tag{6.60}$$

a tedy:

$$D\pi^2 b^2 \left(\frac{1}{na^2} + \frac{n}{b^2}\right)\left(-\frac{1}{n^2 a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = 0. \tag{6.61}$$

Z rovnice (6.61) získáme:

$$n = \frac{b}{a}, \tag{6.62}$$

a využijeme ke stanovení P:

$$P = \frac{4D\pi^2}{a^2} = \frac{Eh^3\pi^2}{3(1-\nu^2)a^2}, \tag{6.63}$$

což je hodnota hledaného kritického zatížení.[1]

[1] Podle výchozích předpokladů musí být n celé číslo.

Kvíz.

1. Newtonova–Raphsonova metoda je:
- ☐ Přírůstkové iterační.
- ☐ Iterační.
- ☐ Přírůstková.

2. Jak velký je ohybový moment v tzv. plastickém kloubu?
- ☐ Nulový, stejně jako v běžných kloubech.
- ☐ Je roven meznímu plastickému momentu v daném průřezu.
- ☐ Je roven meznímu pružnímu momentu.

3. Která podmínka plasticity je vhodná pro zeminy?
- ☐ Mohrova–Coulombova.
- ☐ Trescova.
- ☐ Von Misesova.

4. Která podmínka plasticity je nejvhodnější pro ocel?
- ☐ Chen–Chenova.
- ☐ Mohrova–Coulombova.
- ☐ Von Misesova.

5. Při pružnoplastických výpočtech nejčastěji používáme:
- ☐ Teorii plastických deformací.
- ☐ Teorii plastického tečení.
- ☐ Teorii izotropního poškození.

6. Jako „teorii 2. řádu“ označujeme výpočet ve kterém:

- [ ] Uvažujeme s tuhoplastickým materiálem.
- [ ] Uvažujeme s vlivem deformace konstrukce na její vnitřní síly.
- [ ] Zanedbáváme vzájemnost smykových napětí.

Literatura

[1] BAŽANT, Z. P., PLANAS J. Fracture and Size Effect in Concrete and Other Quasibrittle Materials, CRC Press, Boca Raton, 1998

[2] BECHYNĚ, S.: Betonové stavitelství I. – Technologie betonu – Svazek čtvrtý: Pruľnost betonu, SNTL, Praha, 1959

[3] BELLINI, P. X., CHULYA, A. An Improved Automatic Incremental Algorithm for the Efficient Solution of Nonlinear Finite Element Equations, Computer and Structures, 29, str. 99–110, 1987

[4] BITTNAR, Z., ŠEJNOHA, J.: Numerické metody mechaniky I., II., Vydavatelství ČVUT, Praha, 1992

[5] CRISFIELD, M. A. Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, John Wiley and Sons, England, 1991

[6] CEB – FIP Model Code 90, Comitee Euro-International du Beton, Paris, 1990

[7] CERVIRA, M., HINTON, E., HASSAN, O. Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Plate and Shell Structures Using 20–noded Isoparametric Brick Element, Computers and Structures, Vol. 25 No 6., Pergamon Journals Ltd, Great Britain, 1987

[8] COOK, R. D. Malkus, D. S., Plesha, M. E., Witt R. J. Concepts and applications of finite element analysis, Fourth edition, Wiley, New York,USA, 2002

[9] DRESSLER, M. Programovací jazyky GNU, Computer Press, Brno, 1998

[10] FORDE, W. R. B., STIEMER, S. F. Improved Arc Length Orthogonality Methods for Nonlinear Finite Element Analysis, Computers and Structures. Vol. 27, číslo 5, str. 625–630, 1987

[11] HAN, D. J., CHEN, W. H. Constitutive Modeling in Analysis of Concrete Structures, Journal of Engineering Mechanics. Vol. 113, No. 4, April, ASCE, 1987

[12] HILL, R. A theory of the yiels and plastic flow of anisotropic materials, Proc. R. Soc. Vol. A193, 281-297.

[13] CHEN, A. C. T., CHEN, W. F. Constitutive Relations for Concrete, Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE, 1975

[14] CHEN, W. F., TING, E. C. Constitutive Models for Concrete Structures, Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE, 1980

[15] JIRÁSEK M., Z. P. BAŽANT "Inelastic Analysis of Structures", John Willey and Sons, Chichester, USA, 2002.

[16] Internetové stránky Engineering Fundamentals: `http://www.efunda.com`

[17] Internetové stránky výrobce programového programu ANSYS: `http://www.ansys.com`

[18] ISO/IEC 9899:1999

[19] ISO/IEC IS 9945-1:1990 (POSIX.1)

[20] ISO/IEC IS 9945-2:1993 (POSIX.2)

[21] KOLÁŘ, V. Metoda konečných prvků, skriptum, SNTL, Praha, 1971

[22] KOLÁŘ, V., KRATOCHVÍL, J., LEITNER, F., ®ENÍ©EK, A. Výpočet ploąných a prostorových konstrukcí metodou konečných prvků, SNTL, Praha, 1979

[23] KOLÁŘ V., NĚMEC I., KANICKÝ V. FEM Principy a praxe metody konečných prvků, Computer Press, Praha, 1997

[24] LAPACK: Linear Algebra Subsystems `http://www.netlib.org/lapack`

[25] MEMON BASHIR-AHMED, SU XIAUOU-ZU Arc-length technique for non-linear finite element analysis. Journal of Zhejiang University SCIENCE, 2004:5(5)

[26] OHTANI, Y., CHEN, W. F. Multiple Hardening Plasticity for Concrete Materials, Journal of the EDM ASCE, 1988

[27] OWEN, D. R. J., HINTON, E. Finite Elements in Plasticity, Pineridge Press Ltd., Swansea, 1980

Obsah
193. strana ze 197
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

[28] PANKAJ, ARIF, M., KAUSHIK, S. K. Convexity studies of two anisotropic yield criteria in principal stress space, Engineering Computations, Vol 16, 2 and 3, 1999

[29] RALSTON, A. Základy numerické matematiky, ACADEMIA, Praha, 1978

[30] RAVINGER, J., ©IMONČIČ, M. Vybrané state zo statiky a dynamiky konątrukcií, Bratislava 1999

[31] REKTORYS, K. A KOL. Přehled uľité matematiky, SNTL, Praha, 1963

[32] Rektorys, K. A KOL. Přehled užité matematiky I a II, 7. rozšířené a doplněné vydání, Prometheus, Praha, 2000

[33] RIKS, E. The application of Newton's method to the problem of elastic stability, Appl. Mech., 39, tr.ss 1060–1066, 1972

[34] SERVÍT, R., DOLE®ALOVÁ, E., CRHA, M. Teorie pružnosti a plasticity I, SNTL, Praha, 1981

[35] SERVÍT, R., DRAHOŇOVSKÝ, Z., ©EJNOHA, J., KUFNER, V. Teorie pružnosti a plasticity II, SNTL, Praha, 1984

[36] ŠMIŘÁK, S. Energetické principy a variační metody v teorii pružnosti, FAST VUT, Brno, 1998

[37] TEPLÝ, B., ŠMIŘÁK, S. Pružnost a plasticita II., VUT, Brno, 1992

[38] WEMPNER, G. A. Discrete Approximations Related to Nonlinear Theories of Solids, Int. J. Solids and Structs., 7, str. 1581–1599, 1971

[39] WILLAM, K., J., WARNKE, E. P. Constitutive Models for Triaxial Behavior of Concrete Subjected to Triaxial Stresses, Int. Assoc. Bridge Struct. Eng. Proc., Vol.19, 1975, pp. 1–30.

[40] ZIENKIEWICZ, O. C. The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw--Hill, London, 1971

[41] uFEM – informace o programu v síti Internet:
`http://fast10.vsb.cz/brozovsky/articles/ufem/index.html`

[42] KADLČÁK, J., KYTÝR, J. Statika stavebních kosntrukcí I, VUT v Brně, 2001

[43] ŠMIŘÁK, S. Pružnost a plasticita, PC-DIR, Brno, 1995

[44] BAREŠ, R. A. Tabulky pro výpočet desek a stěn, SNTL, 1989

[45] MINDLIN, R. D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 18 pp. 31–38, 1951

[46] REISSNER, E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 12, pp. A68-77, 1945

[47] KUPFER H., HILSDORF H.,K., RÜSCH H. Behaviour of Concrete Under Biaxial Stress, Journal ACI, Proc. V.66, č. 8, 1969

Rejstřík