

Lineární algebra — 9. přednáška: Ortogonalita



Dalibor Lukáš

Katedra aplikované matematiky
FEI VŠB–Technická univerzita Ostrava

email: dalibor.lukas@vsb.cz

<http://www.am.vsb.cz/lukas/LA1>



Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století* (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni



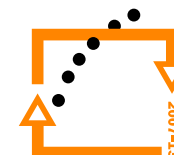
evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

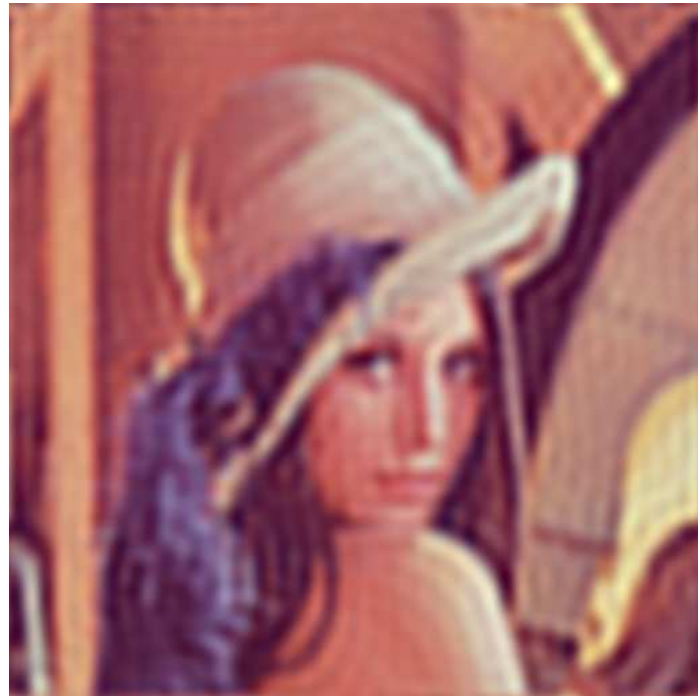
Motivace

JPEG komprese Leny

původní bitmapa



1% komprese Fourierovou bází



Motivace

JPEG komprese Leny

původní bitmapa



5% komprese Fourierovou bází



Motivace

JPEG komprese Leny

původní bitmapa



10% komprese Fourierovou bází



Motivace

JPEG komprese Leny

původní bitmapa



15% komprese Fourierovou bází



Motivace

JPEG komprese Leny

původní bitmapa



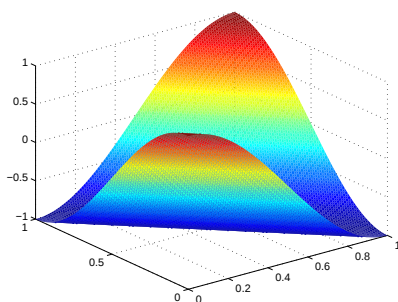
20% komprese Fourierovou bází



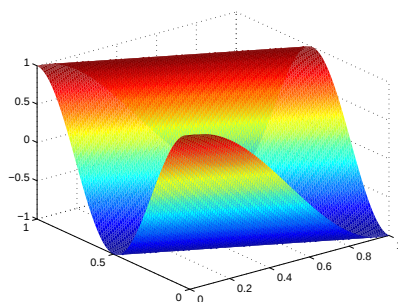
Motivace

JPEG: Fourierova L2–ortogonální báze $f_{jk}(x, y) := e^{i\omega(jx+ky)}$

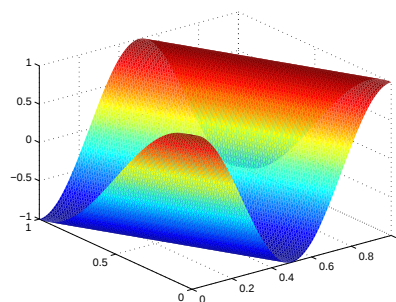
$\text{Re } f_{11}(x, y)$



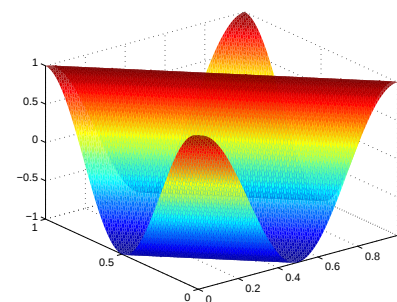
$\text{Re } f_{12}(x, y)$



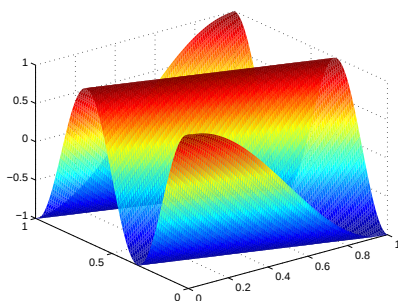
$\text{Re } f_{21}(x, y)$



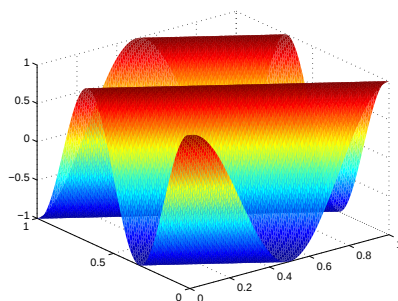
$\text{Re } f_{22}(x, y)$



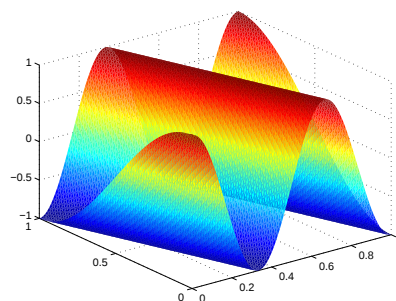
$\text{Re } f_{13}(x, y)$



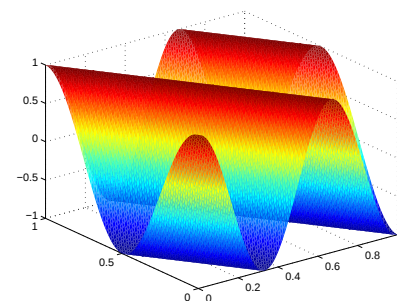
$\text{Re } f_{23}(x, y)$



$\text{Re } f_{31}(x, y)$



$\text{Re } f_{32}(x, y)$



Ortogonalita (v L2 skalárním součinu) $\implies$ rychlá komprese

Motivace

Lena — „první dáma internetu”

Lena Sjööblom, playmate 1972

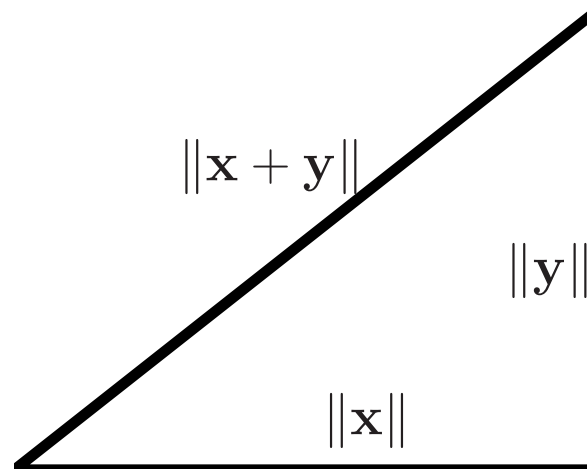


Lena Söderberg, 1997



Ortogonalita = kolmost

Pythagorova věta: $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} \perp \mathbf{y} \Leftrightarrow \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2$



$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{y} + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$$

Vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ jsou **ortogonální** (kolmé), pokud

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0.$$

Ortogonalita = kolmost

Eukleidovský skalární součin, norma, ortogonalita, ortonormalita

Bilineární forma $(., .) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$$

se nazývá **Eukleidovský skalární součin**. Ten indukuje **Eukleidovskou normu**

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}.$$

Vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ jsou **ortogonální** (v Eukl. skalárním součinu), pokud

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0,$$

a jsou **ortonormální** (v Eukl. skalárním součinu), pokud navíc

$$\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\| = 1.$$

Úhel mezi vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ zobecníme takto

$$\cos \alpha = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}$$

Ortogonalita = kolmost

Příklad: Najděte $\mathbf{x} \perp (1, 2)$.

Hledáme $\mathbf{x} := (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$(x_1, x_2) \cdot (1, 2) = 1x_1 + 2x_2 = 0.$$

Řešením je $x_2 := t \in \mathbb{R}$, $x_1 = -2t$, tj. vektory na přímce se směrnicí $(-2, 1)$

$$\mathbf{x} \in \langle (-2, 1) \rangle.$$

Příklad: Najděte $\mathbf{x} \perp (1, 2, 3)$.

Hledáme $\mathbf{x} := (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$:

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (1, 2, 3) = 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0.$$

Řešením je $x_3 := t \in \mathbb{R}$, $x_2 := s \in \mathbb{R}$, $x_1 = -2s - 3t$, tj. vektory v rovině

$$\mathbf{x} \in \{(-2s - 3t, s, t) : s, t \in \mathbb{R}\} = \{s(-2, 1, 0) + t(-3, 0, 1) : s, t \in \mathbb{R}\} = \langle (-2, 1, 0), (-3, 0, 1) \rangle.$$

Ortogonalita = kolmost

Příklad: Najděte $\mathbf{x}$: $\mathbf{x} \perp (1, 2, 3)$ a $\mathbf{x} \perp (1, 1, 1)$.

Hledáme $\mathbf{x} := (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$:

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (1, 2, 3) = 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \quad \text{a} \quad (x_1, x_2, x_3) \cdot (1, 1, 1) = 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 0,$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\mathbf{r}_2 := \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right) \implies x_3 := t \in \mathbb{R}, \quad x_2 = -2t, \quad x_1 = -5t.$$

Ortogonalní systémy

Ortogonalní/ortonormální systém

Vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \in \mathbf{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ tvoří **ortogonalní systém** (**bázi** pro $n = m$), pokud

$$(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = 0 \quad \text{pro } i \neq j.$$

Pokud navíc $\|\mathbf{v}_i\| = 1$, pak se jedná o **ortonormální systém** (**bázi**).

Příklad: Kanonická báze $\mathbb{R}^2$ tvoří ortonormální systém.

Uvažujme kanonickou bázi prostoru $\mathbb{R}^2$

$$E := (\mathbf{e}_1 := (1, 0), \mathbf{e}_2 := (0, 1)).$$

Pak

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 = (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1), \quad \|\mathbf{e}_1\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1, \quad \|\mathbf{e}_2\| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1.$$

Ortogonalní systémy

Příklad: Kanonická báze $\mathbb{R}^n$ tvoří ortonormální systém.

Uvažujme kanonickou bázi prostoru $\mathbb{R}^n$

$$E := (\mathbf{e}_1 := (1, 0, \dots, 0), \mathbf{e}_2 := (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n := (0, \dots, 0, 1)).$$

Pak pro libovolné $i, j \in \{1, \dots, n\}$ platí, že

$$\|\mathbf{e}_i\| = \sqrt{0^2 + \dots + 0^2 + 1^2 + 0^2 + \dots + 0^2} = 1, \text{ a pokud } i \neq j, \text{ pak } (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0.$$

Příklad: Najděte ortogonalní systém prostoru $\langle (1, 1, 0), (-1, 0, 1) \rangle$.

Vektory $\mathbf{u}_1 := (1, 1, 0)$, $\mathbf{u}_2 := (-1, 0, 1)$ tvoří bázi, ne však ortonormální, neboť

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = (1, 1, 0) \cdot (-1, 0, 1) = -1.$$

Ortogonalní bázi vytvoříme např. takto: $\mathbf{v}_1 := \mathbf{u}_1$ a $\mathbf{v}_2 := \mathbf{u}_2 + \alpha \mathbf{v}_1$ tak, že $\mathbf{v}_2 \perp \mathbf{v}_1$, tj.

$$0 = (\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) = (\mathbf{u}_2 + \alpha \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) = \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1 + \alpha \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1,$$

$$\alpha = -\frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} = -\frac{-1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0}{1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0} = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{v}_2 = (-1, 0, 1) + \frac{1}{2}(1, 1, 0) = (-1/2, 1/2, 1).$$

Ortogonalní systémy

„Ortogonalizujte” bázi $E := (\mathbf{e}_1 := (1, 1, 1), \mathbf{e}_2 := (1, -1, 1), \mathbf{e}_3 := (-1, 1, 1))$.

Termín „ortogonalizujte” znamená nalézt ortogonální bázi $F := (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ tak, že

$$1. \mathbf{f}_1 \in \langle \mathbf{e}_1 \rangle, \quad 2. \mathbf{f}_2 \in \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle, \quad 3. \mathbf{f}_3 \in \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle.$$

Ad 1. $\mathbf{f}_1 := \mathbf{e}_1 = (1, 1, 1)$.

Ad 2. $\mathbf{f}_2 := \mathbf{e}_2 + \alpha \mathbf{f}_1$: $\mathbf{f}_2 \perp \mathbf{f}_1$, tj.

$$0 = (\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_1) = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{f}_1 + \alpha \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1 \implies \alpha = -\frac{\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{f}_1}{\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1} = -\frac{(1, -1, 1) \cdot (1, 1, 1)}{(1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1)} = -\frac{1}{3},$$

a tedy $\mathbf{f}_2 = (1, -1, 1) - \frac{1}{3}(1, 1, 1) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Ad 3. $\mathbf{f}_3 := \mathbf{e}_3 + \beta \mathbf{f}_1 + \gamma \mathbf{f}_2$: $\mathbf{f}_3 \perp \mathbf{f}_1$ a $\mathbf{f}_3 \perp \mathbf{f}_2$, tj.

$$0 = (\mathbf{f}_3, \mathbf{f}_1) = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{f}_1 + \beta \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1 \implies \beta = -\frac{\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{f}_1}{\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1} = -\frac{(-1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1)}{(1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1)} = -\frac{1}{3},$$

$$0 = (\mathbf{f}_3, \mathbf{f}_2) = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{f}_2 + \gamma \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{f}_2 \implies \gamma = -\frac{\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{f}_2}{\mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{f}_2} = -\frac{(-1, 1, 1) \cdot \left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)} = \frac{1}{2},$$

a tedy $\mathbf{f}_3 = (-1, 1, 1) - \frac{1}{3}(1, 1, 1) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) = (-1, 0, 1)$.

Ortogonalní systémy

Gram–Schmidtův ortogonalizační/ortonormalizační algoritmus

Mějme bázi $E := (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ prostoru $\mathbb{R}^n$. Ortogonalizujme/ortonormalizujme ji.

$$\mathbf{f}_1 := \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{q}_1 := \frac{1}{\|\mathbf{f}_1\|} \mathbf{f}_1,$$

$$\mathbf{f}_i := \mathbf{e}_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} \mathbf{f}_j, \text{ kde } \alpha_{ij} = -\frac{(\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_j)}{\|\mathbf{f}_j\|^2}, \quad \mathbf{q}_i := \frac{1}{\|\mathbf{f}_i\|} \mathbf{f}_i, \text{ pro } i \in \{2, \dots, n\}.$$

Výsledkem je ortog. báze $F := (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$, resp. ortonorm. báze $Q := (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n)$.

Příklad: Ortonormalizujte $E := (\mathbf{e}_1 := (1, 2), \mathbf{e}_2 := (1, 1))$.

$$\mathbf{f}_1 := \mathbf{e}_1 = (1, 2), \quad \mathbf{q}_1 = \frac{1}{\|(1, 2)\|} (1, 2) = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2}} (1, 2) = \frac{1}{\sqrt{5}} (1, 2),$$

$$\alpha_{21} = -\frac{(\mathbf{e}_2, \mathbf{f}_1)}{\|\mathbf{f}_1\|^2} = -\frac{(1, 1) \cdot (1, 2)}{5} = -\frac{3}{5}, \quad \mathbf{f}_2 := \mathbf{e}_2 + \alpha_{21} \mathbf{f}_1 = (1, 1) - \frac{3}{5} (1, 2) = \frac{1}{5} (2, -1),$$

$$\mathbf{q}_2 := \frac{1}{\frac{1}{5} \|(2, -1)\|} (2, -1) = \frac{1}{\sqrt{5}} (2, -1).$$

Ortogonalní transformace

Ortogonalní matice

Čtvercová **matice** $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, která splňuje

$$\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{I}, \quad \text{a tedy } \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T,$$

se nazývá **ortogonalní**. Její sloupce tvoří ortonormální systém.

Příklad: Ověřte, že matice $\mathbf{Q} := (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$ z předchozího příkladu je ortogonalní.

$$\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \mathbf{I}.$$

Ortogonalní transformace

Soustavy s ortogonální maticí

Soustava s ortogonální maticí $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a pravou stranu $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ je snadno řešitelná

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \iff \mathbf{x} = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{b}.$$

Příklad: Vypočtěte souřadnice $\mathbf{v} := (1, 1)$ v ortonormální bázi $\mathbf{Q} := (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$, kde $\mathbf{q}_1 := \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)$, $\mathbf{q}_2 := \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1)$.

Hledáme $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$\alpha_1 \mathbf{q}_1 + \alpha_2 \mathbf{q}_2 = \mathbf{v} \iff \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{v}, \text{ kde } \mathbf{Q} := \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

je ortogonální matice. Řešením je

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{v}, \quad \text{t.j. } \alpha_1 = \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{v} = \frac{3}{\sqrt{5}}, \quad \alpha_2 = \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Fourierova (JPEG) báze je ortonormální $\Rightarrow$ rychlý výpočet souřadnic (komprese).

Ortogonalní transformace

Ortogonalní transformace zachovává velikosti vektorů i úhly

Uvažujme lineární zobrazení s ortogonální maticí $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Pro lib. $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ platí:

- normy (velikosti) vektorů jsou zachovány

$$\|\mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{x}} = \|\mathbf{x}\|,$$

- hodnota skalárního součinu vektorů je zachována

$$(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{y} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Připomeňme, že úhel α mezi vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ jsme definovali pomocí $\cos \alpha = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}$, tedy ortogonální transformace zachovává úhly mezi vektory.

Důsledek: „Ortogonalní transformace = rotace + zrcadlení“

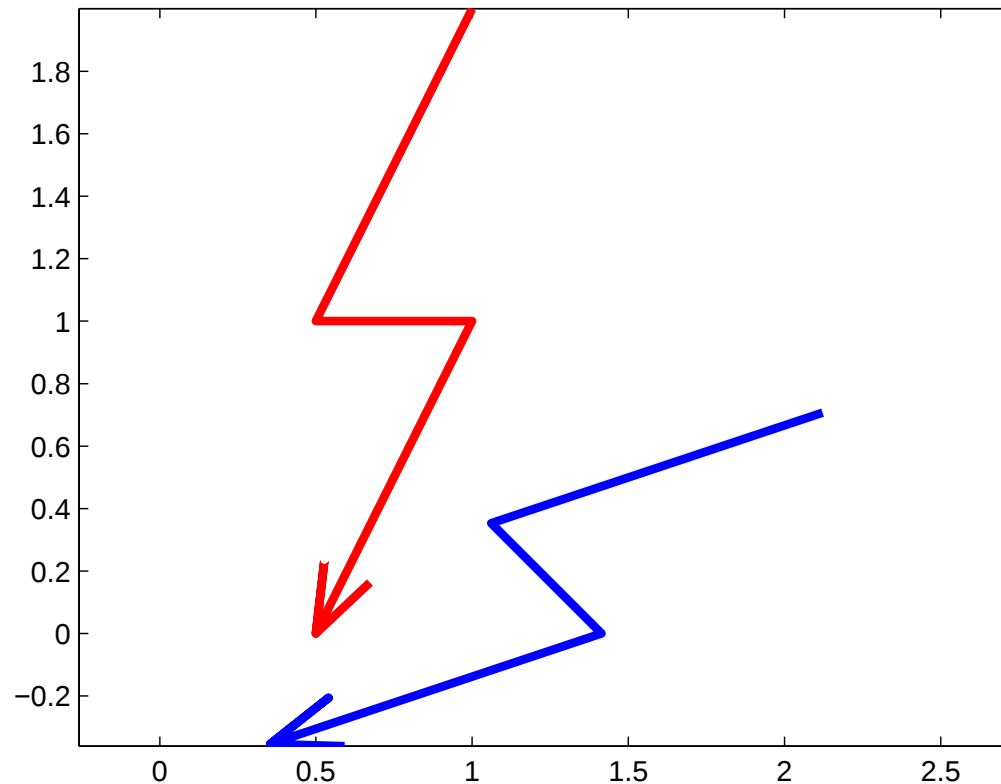
Každou ortogonální matici lze rozložit na konečný součin

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_n \cdots \mathbf{Q}_1,$$

kde jednotlivé faktory jsou buď matice rovinné rotace, nebo matice zrcadlení.

Ortogonalní transformace

Příklad: Matice rovinné rotace je ortogonální.

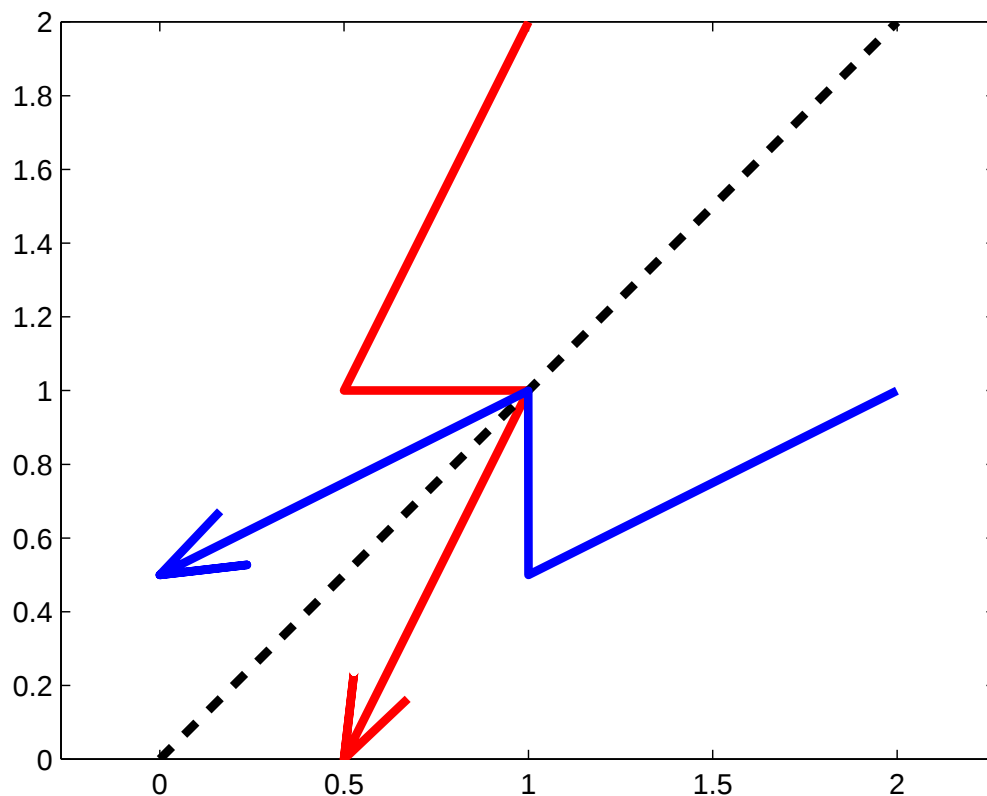


$$\mathbf{y} := \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x} := \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}$$

$$\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha & 0 \\ 0 & \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \end{pmatrix} = \mathbf{I}.$$

Ortogonalní transformace

Příklad: Matice zrcadlení podle přímky (roviny) je ortogonální.



$$\mathbf{y} := \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x} := \left(\mathbf{I} - 2 \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}^T}{\|\mathbf{n}\|^2} \right) \cdot \mathbf{x},$$

kde $\mathbf{n}$ je normála k přímce (rovině).

$$\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \left(\mathbf{I} - 2 \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}^T}{\|\mathbf{n}\|^2} \right)^T \cdot \left(\mathbf{I} - 2 \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}^T}{\|\mathbf{n}\|^2} \right) = \mathbf{I} - 4 \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}^T}{\|\mathbf{n}\|^2} + 4 \frac{\overbrace{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{n}^T \cdot \mathbf{n})}^{\|\mathbf{n}\|^2} \cdot \mathbf{n}^T}{\|\mathbf{n}\|^4} = \mathbf{I}.$$

Ortogonalní transformace

„Exploze“ zaokrouhlovací chyby v Gaussově eliminaci

Proveďme Gaussovu eliminaci (LU rozklad) na následující matici

$$(\mathbf{A}|\mathbf{I}) := \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Nyní zaved'me chybu 0.1 do prvku $\mathbf{A}_{11}$. Chyba se při eliminaci takto zvětšuje:

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1.1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1.1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2 & -1.1 & 0 & 0 & 1 & 1.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.3 & -1.2 & 0 & 1 & 1.1 & 1.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.4 & -1.3 & 1 & 1.1 & 1.2 & 1.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.5 & 1 & 1.1 & 1.2 & 1.3 & 1.4 \end{array} \right).$$

Ortogonální transformace

Householderův eliminační krok

Pro vektor (část pivotovaného sloupce) $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ hledáme matici zrcadlení $\mathbf{Q}_{\mathbf{v}}$ tak, že

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \|\mathbf{v}\| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{např. } \mathbf{n}_{\mathbf{v}} := \begin{pmatrix} v_1 - \|\mathbf{v}\| \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{\mathbf{v}} := \mathbf{I} - 2 \frac{\mathbf{n}_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{v}}^T}{\|\mathbf{n}_{\mathbf{v}}\|^2}.$$

Stabilní Gauss–Householderova eliminace

Místo Gaussových eliminačních kroků, které (bez permutací) vedou na dolní trojúhelníkovou matici, provádíme Householderovy zrcadlení

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathbf{v} := (2, -1, 0)^T]{\mathbf{Q}_{\mathbf{v}}} \begin{pmatrix} 2.24 & -1.79 & 0.45 \\ 0 & -1.34 & 0.89 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathbf{v} := (-1.34, -1)^T]{\mathbf{Q}_{\mathbf{v}}} \begin{pmatrix} 2.24 & -1.79 & 0.45 \\ 0 & 1.67 & -1.91 \\ 0 & 0 & 1.07 \end{pmatrix}.$$

Dostáváme výpočetně náročnější, avšak stabilní variantu Gaussovy eliminace.

Ortogonalní transformace

Zaokrouhlovací chyba v Gauss–Householderově eliminaci „neexploduje“.

Proveďme Gauss–Householderovu eliminaci (QU rozklad) na následující matici

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1.41 & -2.12 & 0.71 & 0 & 0 \\ 0 & 1.22 & -2.04 & 0.82 & 0 \\ 0 & 0 & 1.15 & -2.02 & 0.87 \\ 0 & 0 & 0 & 1.12 & -2.01 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.45 \end{pmatrix}.$$

Nyní zaved'me chybu 0.1 do prvku $\mathbf{A}_{11}$. Chyba se při eliminaci nezvětšuje:

$$\begin{pmatrix} 1.1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1.49 & -2.09 & 0.67 & 0 & 0 \\ 0 & 1.29 & -2.02 & 0.78 & 0 \\ 0 & 0 & 1.21 & -2.01 & 0.83 \\ 0 & 0 & 0 & 1.17 & -2.00 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.56 \end{pmatrix}.$$