

# Lineární algebra — 3. přednáška: Maticový počet, inverzní matice



Dalibor Lukáš

Katedra aplikované matematiky  
FEI VŠB–Technická univerzita Ostrava

email: dalibor.lukas@vsb.cz

<http://www.am.vsb.cz/lukas/LA1>



Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století* (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni



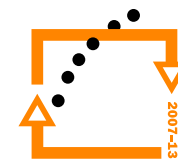
evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

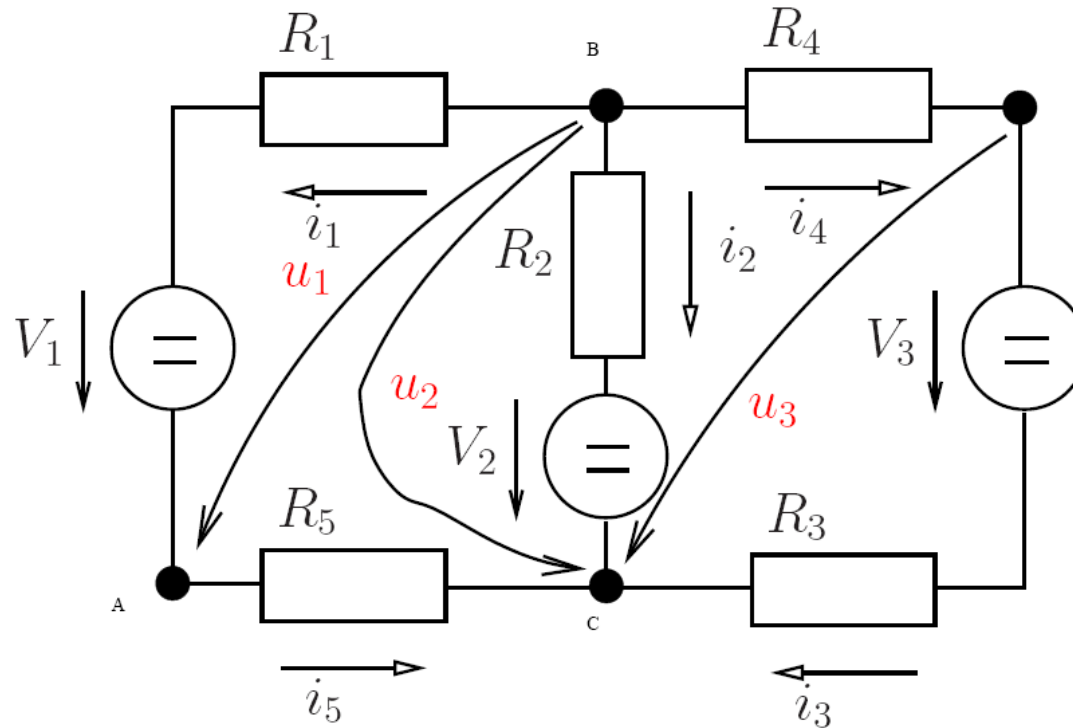


OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

# Soustavy lin. rovnic s více pravými stranami

## Steady-state circuit



## Ohm's and Kirchhoff's laws

$$i_1 = \frac{u_1 - V_1}{R_1}, \quad i_2 = \frac{u_2 - V_2}{R_2}, \quad i_3 = \frac{u_3 - V_3}{R_3}, \quad i_4 = \frac{u_2 - u_3}{R_4}, \quad i_5 = \frac{u_2 - u_1}{R_5},$$

uzel A:  $i_1 - i_5 = 0$ ,    uzel B:  $-i_1 - i_2 - i_4 = 0$ ,    uzel C:  $i_2 + i_3 + i_5 = 0$ .

# Soustavy lin. rovnic s více pravými stranami

## Soustava lineárních rovnic

$$\begin{aligned} \frac{u_1 - V_1}{R_1} - \frac{u_2 - u_1}{R_5} &= 0 & \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_5}\right) u_1 - \frac{1}{R_5} u_2 &= \frac{V_1}{R_1} \\ -\frac{u_1 - V_1}{R_1} - \frac{u_2 - V_2}{R_2} - \frac{u_2 - u_3}{R_4} &= 0 & -\frac{1}{R_1} u_1 - \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4}\right) u_2 + \frac{1}{R_4} u_3 &= -\frac{V_1}{R_1} - \frac{V_2}{R_2} \\ \frac{u_2 - V_2}{R_2} + \frac{u_3 - V_3}{R_3} + \frac{u_2 - u_1}{R_5} &= 0 & -\frac{1}{R_5} u_1 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5}\right) u_2 + \frac{1}{R_3} u_3 &= \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3} \end{aligned} \Leftrightarrow$$

## Řešení Gauss–Jordanovou metodou

Gaussova dopředá eliminace + Jordanova zpětná eliminace

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) \xrightarrow{\text{Gaussova metoda}} (\mathbf{U}|\mathbf{c}) \xrightarrow{\text{Jordanova metoda}} (\mathbf{I}|\mathbf{x}),$$

kde  $\mathbf{I}$  je jednotková matice (má pouze jedničky na diagonále) a  $\mathbf{x}$  je řešení  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ .

## Soustavy lin. rovnic s více pravými stranami

a)  $R_1 = \dots = R_5 = 1, V_1 = V_2 = V_3 = 1$

$$\begin{aligned} 2u_1 - u_2 &= 1 \\ -u_1 - 2u_2 + u_3 &= -2 \\ -u_1 + 2u_2 + u_3 &= 2 \end{aligned}$$

### Řešení Gauss–Jordanovou metodou

$$\begin{aligned} &\left( \begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[\mathbf{r}_3 := \mathbf{r}_1 + 2\mathbf{r}_3]{\mathbf{r}_2 := \mathbf{r}_1 + 2\mathbf{r}_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{-5} & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow[\mathbf{r}_3 := 3\mathbf{r}_2 + 5\mathbf{r}_3]{} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{16} & 16 \end{array} \right) \xrightarrow{\mathbf{r}_2 := -8\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3} \\ &\xrightarrow{\mathbf{r}_2 := -8\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{40} & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 16 & 16 \end{array} \right) \xrightarrow{\mathbf{r}_1 := 40\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 80 & 0 & 0 & 80 \\ 0 & 40 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 16 & 16 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ & \qquad \qquad \qquad u_1 = u_2 = u_3 = 1 \end{aligned}$$

## Soustavy lin. rovnic s více pravými stranami

b)  $R_1 = \dots = R_5 = 1, V_1 = 1, V_2 = V_3 = 0$

$$\begin{aligned} 2v_1 - v_2 &= 1 \\ -v_1 - 2v_2 + v_3 &= -1 \\ -v_1 + 2v_2 + v_3 &= 0 \end{aligned}$$

### Řešení Gauss–Jordanovou metodou

$$\begin{aligned} &\left( \begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\mathbf{r}_3 := \mathbf{r}_1 + 2\mathbf{r}_3]{\mathbf{r}_2 := \mathbf{r}_1 + 2\mathbf{r}_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{-5} & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\mathbf{r}_3 := 3\mathbf{r}_2 + 5\mathbf{r}_3} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{16} & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\mathbf{r}_2 := -8\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3} \\ &\xrightarrow{\mathbf{r}_2 := -8\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{40} & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 16 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\mathbf{r}_1 := 40\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 80 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 40 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 16 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5/8 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/8 \end{array} \right) \\ &v_1 = 5/8, v_2 = 1/4, v_3 = 1/8 \end{aligned}$$

## Soustavy lin. rovnic s více pravými stranami

a) + b)

$$\begin{array}{rcl} 2u_1 - u_2 & = & 1 \\ -u_1 - 2u_2 + u_3 & = & -2 \\ -u_1 + 2u_2 + u_3 & = & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 2v_1 - v_2 & = & 1 \\ -v_1 - 2v_2 + v_3 & = & -1 \\ -v_1 + 2v_2 + v_3 & = & 0 \end{array}$$

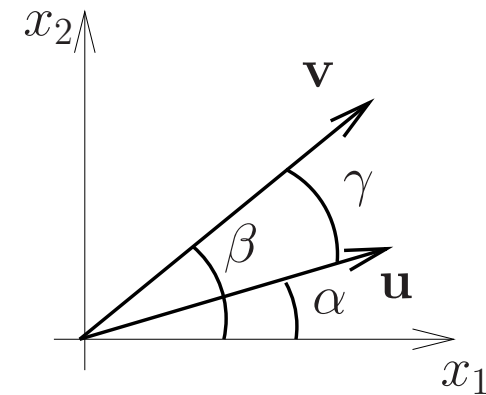
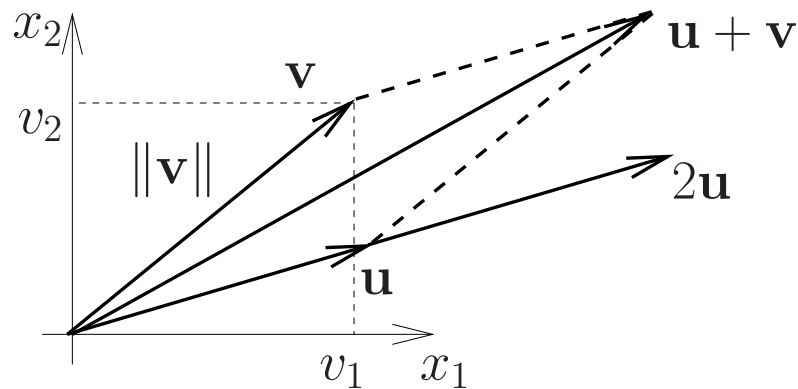
Řešení Gauss–Jordanovou metodou

$$\begin{array}{c} \left( \begin{array}{ccc|cc} \boxed{2} & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\mathbf{r}_3:=\mathbf{r}_1+2\mathbf{r}_3]{\mathbf{r}_2:=\mathbf{r}_1+2\mathbf{r}_2} \left( \begin{array}{ccc|cc} 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-5} & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\mathbf{r}_3:=3\mathbf{r}_2+5\mathbf{r}_3} \left( \begin{array}{ccc|cc} 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{16} & 16 & 2 \end{array} \right) \\ \xrightarrow{\mathbf{r}_2:=-8\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3} \left( \begin{array}{ccc|cc} 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{40} & 0 & 40 & 10 \\ 0 & 0 & 16 & 16 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\mathbf{r}_1:=40\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2} \left( \begin{array}{ccc|cc} 80 & 0 & 0 & 80 & 50 \\ 0 & 40 & 0 & 40 & 10 \\ 0 & 0 & 16 & 16 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 5/8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/8 \end{array} \right) \end{array}$$

$$u_1 = u_2 = u_3 = 1, \quad v_1 = 5/8, \quad v_2 = 1/4, \quad v_3 = 1/8$$

# Vektorový počet

## 2d geometrické vektory



### Sčítání vektorů

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) := (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

### Násobení vektoru skalárem

$$\alpha \mathbf{u} := (\alpha u_1, \alpha u_2)$$

### Velikost (norma) vektoru

$$\|\mathbf{v}\| := \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2}$$

### Úhel mezi dvěma vektory

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \cos(\beta - \alpha) = \\ &= \cos \beta \cos(-\alpha) - \sin \beta \sin(-\alpha) = \\ &= \frac{v_1}{\|\mathbf{v}\|} \frac{u_1}{\|\mathbf{u}\|} + \frac{v_2}{\|\mathbf{v}\|} \frac{u_2}{\|\mathbf{u}\|} \end{aligned}$$

### Skalární součin

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} := v_1 u_1 + v_2 u_2$$

# Vektorový počet

## Zobecnění 2d geometrických vektorů do $nd$

Mějme  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$  a  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$  a definujme: sčítání vektorů, násobení vektoru skalárem

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} := (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n), \quad \alpha \mathbf{u} := (\alpha u_1, \alpha u_2, \dots, \alpha u_n),$$

skalární součin vektorů

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} := u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n,$$

normu vektoru

$$\|\mathbf{v}\| := \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2 + \dots + (v_n)^2}$$

a kosinus úhlu mezi dvěma vektory

$$\cos \gamma := \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}.$$



# Vektorový počet

## Vlastnosti vektorových operací

Pro  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  platí např.

$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w},$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u},$$

$$\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}, \quad (\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u},$$

$$\alpha(\beta\mathbf{u}) = (\alpha\beta)\mathbf{u}$$

$$0\mathbf{u} = \mathbf{o} := (0, 0, \dots, 0), \quad 1\mathbf{u} = \mathbf{u}.$$

Pro skalární součin platí

$$(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \alpha\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \beta\mathbf{v} \cdot \mathbf{w},$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}.$$

# Maticový počet

## Zobecnění vektorů na matice

Mějme  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Prvek matice označme  $(\mathbf{A})_{ij}$ .

Definujme sčítání matic

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n} : (\mathbf{A} + \mathbf{B})_{ij} := (\mathbf{A})_{ij} + (\mathbf{B})_{ij}$$

a násobení matice skalárem

$$\alpha \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n} : (\alpha \mathbf{A})_{ij} := \alpha (\mathbf{A})_{ij}.$$

Řádkový vektor (řádek) je matice typu  $n \times 1$ .

Sloupcový vektor (sloupec) je matice typu  $1 \times n$ .

# Maticový počet

## Vlastnosti sčítání a násobení skalárem

Pro  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  platí např.

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C},$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A},$$

$$\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}, \quad (\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A},$$

$$\alpha(\beta\mathbf{A}) = (\alpha\beta)\mathbf{A},$$

$$0\mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad 1\mathbf{A} = \mathbf{A}.$$

# Maticový počet

## Násobení řádek krát matice

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} &= (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_m) \cdot \begin{pmatrix} (a_{1,1} \ a_{1,2} \ \dots \ a_{1,n}) \\ (a_{2,1} \ a_{2,2} \ \dots \ a_{2,n}) \\ \vdots \\ (a_{m,1} \ a_{m,2} \ \dots \ a_{m,n}) \end{pmatrix} = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_m) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^r \\ \mathbf{a}_2^r \\ \dots \\ \mathbf{a}_m^r \end{pmatrix} := \\ &:= \underbrace{v_1 (a_{1,1} \ a_{1,2} \ \dots \ a_{1,n}) + v_2 (a_{2,1} \ a_{2,2} \ \dots \ a_{2,n}) + \dots + v_m (a_{m,1} \ a_{m,2} \ \dots \ a_{m,n})}_{\text{lineární kombinace řádků}} \end{aligned}$$

# Maticový kalkul

## Násobení řádek krát matice

se hodí ke zkrácenému zápisu elementárních úprav.

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) := \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\mathbf{r}_2 := \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1]{\mathbf{r}_1 := \mathbf{r}_1} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{array} \right) =: (\tilde{\mathbf{A}}|\tilde{\mathbf{b}})$$

$$\mathbf{r}_1 := 1 \mathbf{r}_1 + 0 \mathbf{r}_2 : \quad (1 \ 0) \cdot \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right) = 1 (1 \ 1 | 1) + 0 (1 \ -1 | 0) = (1 \ 1 | 1)$$

$$\mathbf{r}_2 := -1 \mathbf{r}_1 + 1 \mathbf{r}_2 : \quad (-1 \ 1) \cdot \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right) = -1 (1 \ 1 | 1) + 1 (1 \ -1 | 0) = (0 \ -2 | -1)$$

Což lze (zatím pouze formálně) zapsat do matice

$$\mathbf{E}_{21} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \dots \quad \text{Nuluje prvek } a_{21}.$$

# Maticový počet

## Násobení matic — lineární kombinace řádků pravé matice

Násobení matic motivujeme Gaussovou eliminací

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{E}_{21}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix}}_{=(\mathbf{A}|\mathbf{b})} = \begin{pmatrix} 1(1 \ 1 | 1) + 0(1 \ -1 | 0) \\ -1(1 \ 1 | 1) + 1(1 \ -1 | 0) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -2 & | & -1 \end{pmatrix}}_{=(\tilde{\mathbf{A}}|\tilde{\mathbf{b}})}$$

Násobení  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  a  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  lze tedy definovat takto:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1^r \\ \mathbf{b}_2^r \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n^r \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11}\mathbf{b}_1^r + a_{12}\mathbf{b}_2^r + \dots + a_{1n}\mathbf{b}_n^r \\ a_{21}\mathbf{b}_1^r + a_{22}\mathbf{b}_2^r + \dots + a_{2n}\mathbf{b}_n^r \\ \vdots \\ a_{m1}\mathbf{b}_1^r + a_{m2}\mathbf{b}_2^r + \dots + a_{mn}\mathbf{b}_n^r \end{pmatrix}$$

# Maticový počet

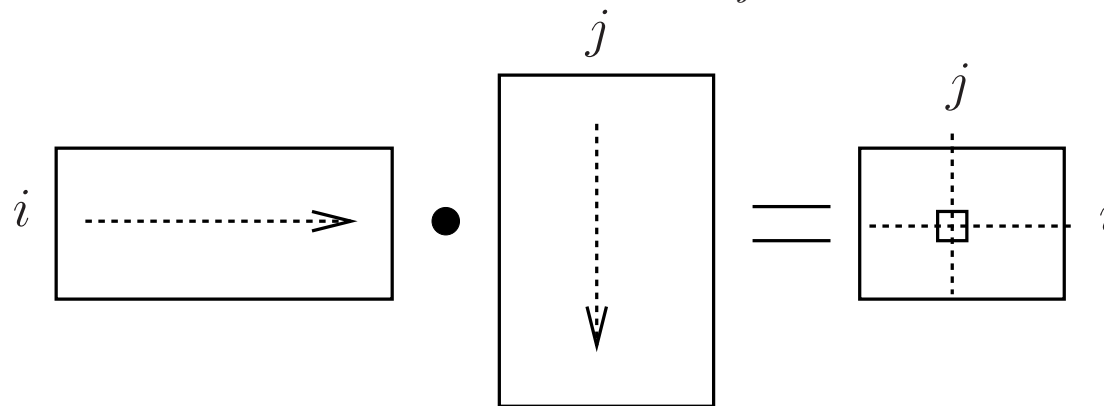
## Násobení matic — výpočet pomocí skalárního součinu

Násobení matic  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  a  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  počítáme takto:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^r \\ \mathbf{a}_2^r \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m^r \end{pmatrix} \cdot (\mathbf{b}_1^s \ \mathbf{b}_2^s \ \dots \ \mathbf{b}_p^s) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^r \cdot \mathbf{b}_1^s & \mathbf{a}_1^r \cdot \mathbf{b}_2^s & \dots & \mathbf{a}_1^r \cdot \mathbf{b}_p^s \\ \mathbf{a}_2^r \cdot \mathbf{b}_1^s & \mathbf{a}_2^r \cdot \mathbf{b}_2^s & \dots & \mathbf{a}_2^r \cdot \mathbf{b}_p^s \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a}_m^r \cdot \mathbf{b}_1^s & \mathbf{a}_m^r \cdot \mathbf{b}_2^s & \dots & \mathbf{a}_m^r \cdot \mathbf{b}_p^s \end{pmatrix}$$

Tedy

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})_{ij} = \mathbf{a}_i^r \cdot \mathbf{b}_j^s.$$



## Maticový počet

### Příklad násobení matic

Po řádcích

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1(1, 2, 3) + 2(4, 5, 6) \\ 3(1, 2, 3) + 4(4, 5, 6) \\ 5(1, 2, 3) + 6(4, 5, 6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1, 2, 3) + (8, 10, 12) \\ (3, 6, 9) + (16, 20, 24) \\ (5, 10, 15) + (24, 30, 36) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \\ 29 & 40 & 51 \end{pmatrix}$$

nebo po prvcích

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (1, 2) \cdot (1, 4) & (1, 2) \cdot (2, 5) & (1, 2) \cdot (3, 6) \\ (3, 4) \cdot (1, 4) & (3, 4) \cdot (2, 5) & (3, 4) \cdot (3, 6) \\ (5, 6) \cdot (1, 4) & (5, 6) \cdot (2, 5) & (5, 6) \cdot (3, 6) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 + 8 & 2 + 10 & 3 + 12 \\ 3 + 16 & 6 + 20 & 9 + 24 \\ 5 + 24 & 10 + 30 & 15 + 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \\ 29 & 40 & 51 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



## Maticový počet

### Asociativita násobení — nezáleží na uzávorkování

Pro  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  a  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times s}$ :

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}.$$

### Násobení není komutativní — na pořadí záleží

Pro matice  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ , kde  $m \neq p$ , není  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$  ani definováno.

Pro většinu ostatních matic:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A},$$

např.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 9 & 12 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 7 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

# Maticový počet

## Transponovaná matice

vznikne záměnou řádků a sloupců, tedy  $(\mathbf{A}^T)_{ij} := \mathbf{A}_{ji}$ , tedy

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}^T := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Platí

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T.$$

# Maticový počet

## Jednotková matice

je čtvercová matice  $\mathbf{I}_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$  definovaná jako  $(\mathbf{I}_n)_{ii} := 1$ , a pro  $i \neq j$ :  $(\mathbf{I}_n)_{ij} := 0$ , tedy

$$\mathbf{I}_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Jednotková matice je maticová analogie čísla 1, tedy pro  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$\mathbf{I}_m \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{I}_n = \mathbf{A}.$$

# Inverzní matice

## Matice Gaussových transformací

Gaussově úpravě

$$\mathbf{r}_i := \sum_{j=i}^n \alpha_j \mathbf{r}_j, \text{ kde } \alpha_j \neq 0,$$

odpovídá matice

$$\mathbf{E} := \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{i-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \alpha_i & (\alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-i} \end{pmatrix}$$

tak, že

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) \xrightarrow{\mathbf{r}_i := \sum_{j=i}^n \alpha_j \mathbf{r}_j} (\tilde{\mathbf{A}}|\tilde{\mathbf{b}})$$

lze zapsat pomocí maticového násobení takto:

$$\mathbf{E} \cdot (\mathbf{A}|\mathbf{b}) = (\tilde{\mathbf{A}}|\tilde{\mathbf{b}}).$$

# Inverzní matice

## Matice inverzní Gaussovy transformace

Ke Gaussově úpravě  $\mathbf{r}_i := \sum_{j=i}^n \alpha_j \mathbf{r}_j$  kde  $\alpha_j \neq 0$ , vytvořme inverzní úpravu

$$\mathbf{r}_i := \frac{1}{\alpha_i} \mathbf{r}_i - \sum_{j=i+1}^n \frac{\alpha_j}{\alpha_i} \mathbf{r}_j.$$

tak, že

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) \xleftarrow{\mathbf{r}_i := (1/\alpha_i)\mathbf{r}_i - \sum_{j=i+1}^n (\alpha_j/\alpha_i)\mathbf{r}_j} (\tilde{\mathbf{A}}|\tilde{\mathbf{b}}).$$

Tomu odpovídá matice

$$\mathbf{M} := \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{i-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{\alpha_i} & \left(-\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}, \dots, -\frac{\alpha_n}{\alpha_i}\right) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-i} \end{pmatrix}$$

tak, že

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \mathbf{M} \cdot (\tilde{\mathbf{A}}|\tilde{\mathbf{b}}).$$

# Inverzní matice

## Matice inverzní Gaussovy transformace

Platí tedy

$$\mathbf{E} \cdot (\mathbf{A}|\mathbf{b}) = (\tilde{\mathbf{A}}|\tilde{\mathbf{b}}) \quad \text{a} \quad (\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \mathbf{M} \cdot (\tilde{\mathbf{A}}|\tilde{\mathbf{b}}).$$

Vynásobme první rovnost zleva maticí  $\mathbf{M}$  a na pravé straně použijme druhou rovnost

$$\mathbf{M} \cdot (\mathbf{E} \cdot (\mathbf{A}|\mathbf{b})) = \mathbf{M} \cdot (\tilde{\mathbf{A}}|\tilde{\mathbf{b}}) = (\mathbf{A}|\mathbf{b}).$$

Použijme asociativitu násobení vlevo a vlastnost jednotkové matice vpravo

$$(\mathbf{M} \cdot \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \mathbf{I} \cdot (\mathbf{A}|\mathbf{b}).$$

Jelikož tato rovnost platí pro libovolnou volbu  $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ , musí též platit

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{I}.$$

Takovou matici  $\mathbf{M}$  nazveme inverzní maticí k  $\mathbf{E}$  a budeme značit

$$\mathbf{E}^{-1} := \mathbf{M}.$$

# Inverzní matice

## Jiná motivace

Trojčlenka

$$\begin{aligned}ax &= b, \quad a \neq 0 \\x &= a^{-1}b\end{aligned}$$

Soustava lineárních rovnic

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} &= \mathbf{b}, \quad \mathbf{A} \text{ regulární} \\ \mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}\end{aligned}$$

## Definice

Mějme  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Existuje-li matice  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  taková, že

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n,$$

pak  $\mathbf{X}$  nazýváme maticí inverzní k  $\mathbf{A}$ , značíme ji  $\mathbf{A}^{-1} := \mathbf{X}$  a říkáme, že  $\mathbf{A}$  je regulární. Jinak je  $\mathbf{A}$  singulární.

## Inverzní matice

Výpočet Gauss–Jordanovou metodou — složitost  $O(n^4)$

Je-li  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  regulární, pak platí

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_n.$$

Hledáme matici  $\mathbf{X} := (\mathbf{x}_1^s, \mathbf{x}_2^s, \dots, \mathbf{x}_n^s) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tak, že

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x}_1^s, \mathbf{x}_2^s, \dots, \mathbf{x}_n^s) = (\mathbf{i}_1^s, \mathbf{i}_2^s, \dots, \mathbf{i}_n^s) = \mathbf{I}_n.$$

To je ale soustava s  $n$  pravými stranami

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_1^s = \mathbf{i}_1^s, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_2^s = \mathbf{i}_2^s, \quad \dots, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_n^s = \mathbf{i}_n^s.$$

Soustavu vyřešíme Gauss–Jordanovou metodou

$$(\mathbf{A} | \mathbf{i}_1^s, \mathbf{i}_2^s, \dots, \mathbf{i}_n^s) = (\mathbf{A} | \mathbf{I}_n) \xrightarrow{\text{Gaussova metoda}} (\mathbf{U} | \tilde{\mathbf{X}}) \xrightarrow{\text{Jordanova metoda}} (\mathbf{I}_n | \mathbf{X}).$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{X}$$



# Inverzní matice

## Příklad inverze matice elektrického obvodu

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}|\mathbf{I}_3) &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} \boxed{2} & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\mathbf{r}_3:=\mathbf{r}_1+2\mathbf{r}_3]{\mathbf{r}_2:=\mathbf{r}_1+2\mathbf{r}_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-5} & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\mathbf{r}_3:=3\mathbf{r}_2+5\mathbf{r}_3} \\ &\xrightarrow[\mathbf{r}_3:=3\mathbf{r}_2+5\mathbf{r}_3]{\mathbf{r}_3:=3\mathbf{r}_2+5\mathbf{r}_3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{16} & 8 & 6 & 10 \end{array} \right) \xrightarrow{\mathbf{r}_2:=-8\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{40} & 0 & 0 & -10 & 10 \\ 0 & 0 & 16 & 8 & 6 & 10 \end{array} \right) \xrightarrow{\mathbf{r}_1:=40\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2} \\ &\xrightarrow{\mathbf{r}_1:=40\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 80 & 0 & 0 & 40 & -10 & 10 \\ 0 & 40 & 0 & 0 & -10 & 10 \\ 0 & 0 & 16 & 8 & 6 & 10 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 3/8 & 5/8 \end{array} \right) \\ &\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/8 & 1/8 \\ 0 & -1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 3/8 & 5/8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

# Inverzní matice

## Příklad inverze matice elektrického obvodu

$$\begin{array}{rcl} 2u_1 - u_2 & = & 1 \\ -u_1 - 2u_2 + u_3 & = & -2 \\ -u_1 + 2u_2 + u_3 & = & 2 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} 2v_1 - v_2 & = & 1 \\ -v_1 - 2v_2 + v_3 & = & -1 \\ -v_1 + 2v_2 + v_3 & = & 0 \end{array}$$

Při znalosti inverzní matice lze řešení soustavy lin. rovnic spočítat

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b},$$

Obě řešení lze tedy spočítat součinem dvou matic

$$\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/8 & 1/8 \\ 0 & -1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 3/8 & 5/8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5/8 \\ 1 & 1/4 \\ 1 & 1/8 \end{pmatrix}.$$