

# Lineární algebra — 10. přednáška: Ortogonalita II



Dalibor Lukáš

Katedra aplikované matematiky  
FEI VŠB–Technická univerzita Ostrava

email: dalibor.lukas@vsb.cz

<http://www.am.vsb.cz/lukas/LA1>



Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století* (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni



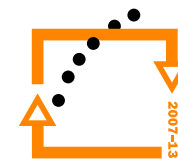
evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

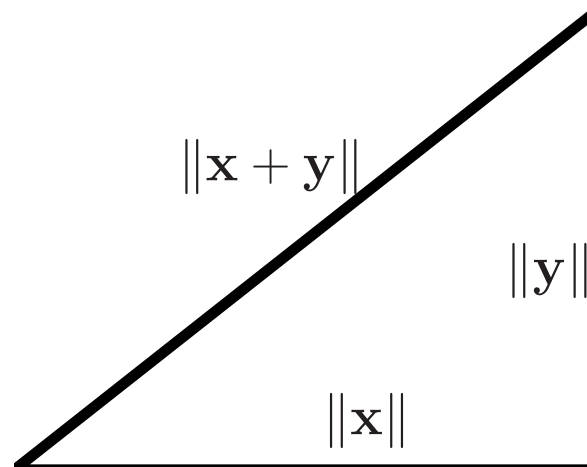


OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

## Ortogonalita = kolmost

Pythagorova věta:  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} \perp \mathbf{y} \Leftrightarrow \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2$



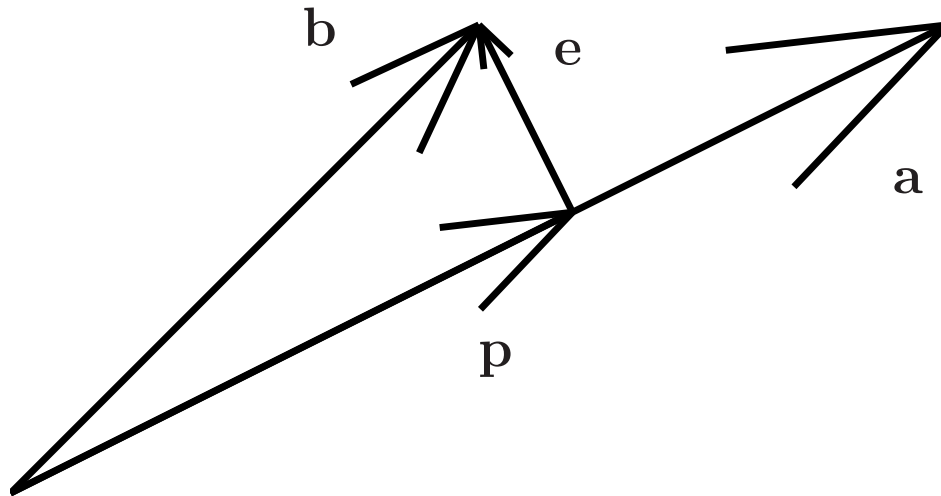
$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{y} + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$$

Vektory  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{y}$  jsou **ortogonální** (kolmé), pokud

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0.$$

# Projekce na podprostor

1D



Projekce  $\mathbf{b}$  na poprostor  $\langle \mathbf{a} \rangle$

Najdi  $\mathbf{p} := x\mathbf{a} : (\mathbf{b} - \mathbf{p}) \perp \mathbf{a}$

2D

Projekce  $\mathbf{b}$  na poprostor  $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$

Najdi  $\mathbf{p} := x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 : (\mathbf{b} - \mathbf{p}) \perp \mathbf{a}_1$  a  $(\mathbf{b} - \mathbf{p}) \perp \mathbf{a}_2$

## Motivace

JPEG komprese je projekce na podprostor

původní bitmapa



10% komprese Fourierovou bází



## Metoda nejmenších čtverců = projekce na podprostor

**Příklad: Opakovaným měřením pulzu jsme naměřili hodnoty: 72, 75, 69, 73. Kolik je správná hodnota?**

Chceme najít  $\hat{x}$ , které nejvíce vyhovuje soustavě následujících 4 rovnic o 1 neznámé:

$$\underbrace{(1, 1, 1, 1)^T}_{=: \mathbf{A}} x = \underbrace{(72, 75, 69, 73)^T}_{=: \mathbf{b}}.$$

Řešením je  $\hat{x}$ , které minimalizuje následující eukleidovskou normu chyby řešení

$$\|\mathbf{A} \hat{x} - \mathbf{b}\|^2 = (\hat{x} - 72)^2 + (\hat{x} - 75)^2 + (\hat{x} - 69)^2 + (\hat{x} - 73)^2.$$

Ukáže se, že výsledek splňuje normálovou rovnici

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \hat{x} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b}$$

a v tomto případě se jedná o aritmetický průměr (ve statistice „střední hodnota“)

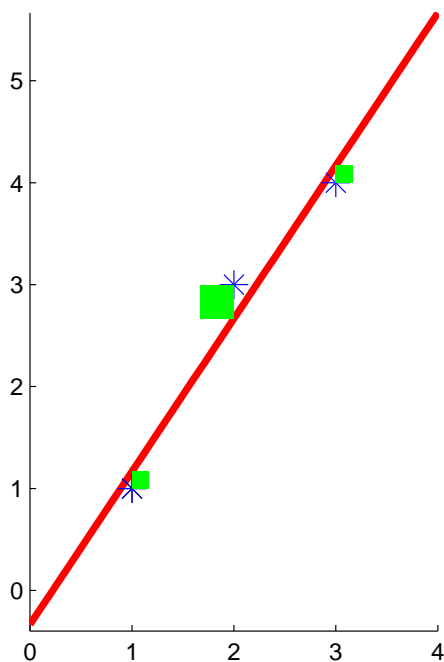
$$\hat{x} = \frac{1}{4}(72 + 75 + 69 + 73) = 72,25.$$

# Metoda nejmenších čtverců = projekce na podprostor

**Příklad: Proložte body (1, 1), (2, 3) a (3, 4) nejlepší přímkou.**

Hledáme parametry  $a, b \in \mathbb{R}$  přímky  $P := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y(x) := ax + b\}$  tak, že následující chyba je minimalizována (ve statistice „lineární regrese“)

$$\|(y(1), y(2), y(3)) - (1, 3, 4)\|^2 = (a \cdot 1 + b - 1)^2 + (a \cdot 2 + b - 3)^2 + (a \cdot 3 + b - 4)^2.$$



Ukáže se, že výsledek  $y(x) := (3/2)x - 1/3$  splňuje normálovou rovnici

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b}, \quad \text{kde } \mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

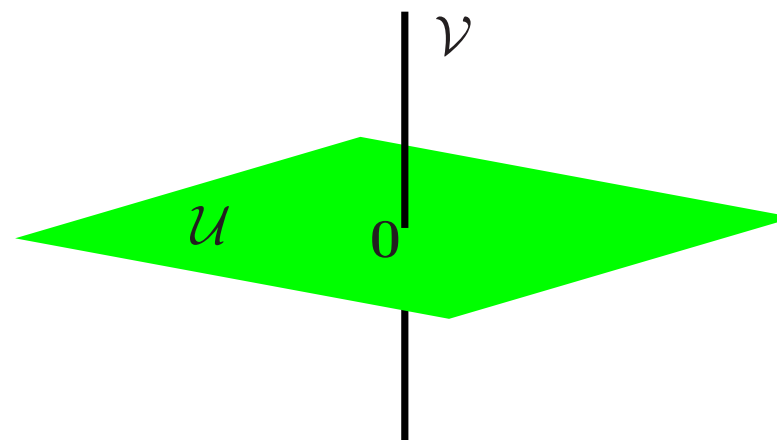
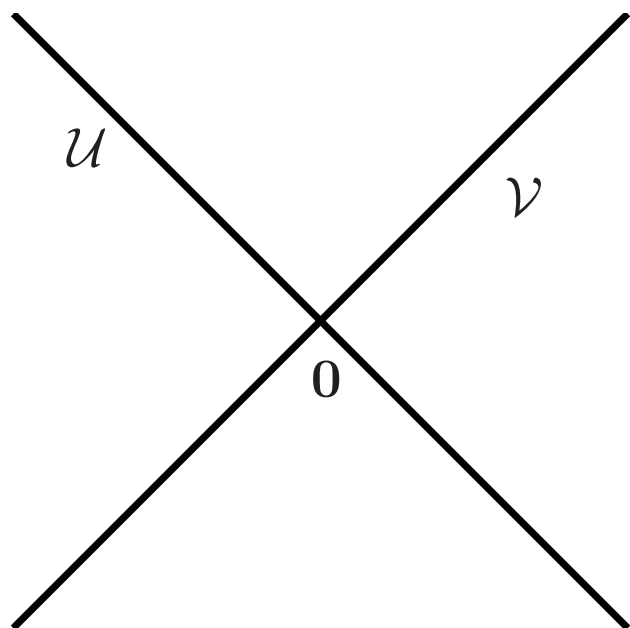
V tomto případě řešení minimalizuje obsahy čtverců, odtud název metody.

# Ortogonalní podprostory

## Definice

Podprostory  $\mathcal{U}$  a  $\mathcal{V}$  prostoru  $\mathbb{R}^n$  jsou **ortogonalní**, pokud

$$\forall \mathbf{u} \in \mathcal{U} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} : \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0.$$



## Ortogonalní podprostory

### $\mathcal{N}(\mathbf{A}) \perp \mathcal{R}(\mathbf{A})$

Mějme matici  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Připomeňme si její nulový prostor

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \forall i \in \{1, \dots, m\} : \mathbf{a}_i^r \cdot \mathbf{x} = 0\}.$$

Vidíme, že vektory  $\mathbf{x}$  z nulového prostoru jsou kolmé na všechny řádky matice  $\mathbf{A}$ , tedy i na jejich libovolnou lin. kombinaci, což jsou prvky z řádkového prostoru

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}) := \{\alpha_1 \mathbf{a}_1^r + \dots + \alpha_m \mathbf{a}_m^r : \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}\} = \mathcal{H}(\mathbf{A}^T).$$

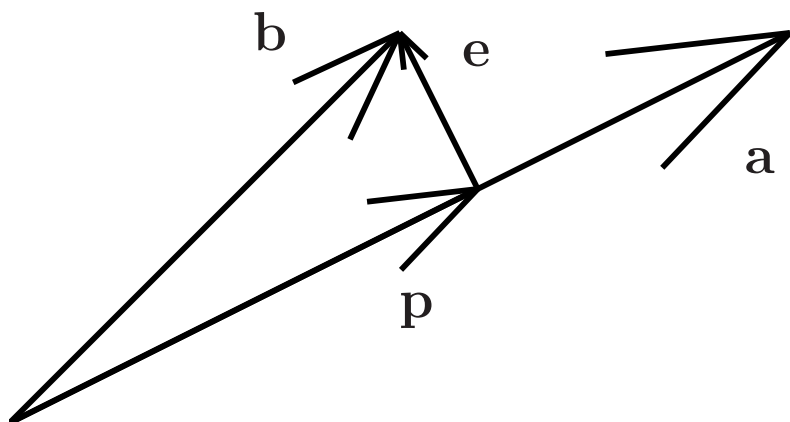
### Analogicky: $\mathcal{N}(\mathbf{A}^T) \perp \mathcal{H}(\mathbf{A})$

neboť  $\mathcal{H}(\mathbf{A}) = \mathcal{R}(\mathbf{A}^T)$ .



# Ortogonalní projektory

1D



Mějme  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ . Projekcí vektoru  $\mathbf{b}$  na podprostor  $\langle \mathbf{a} \rangle$  se rozumí úloha

$$\text{Najdi } \mathbf{p} := x\mathbf{a} : \underbrace{(\mathbf{b} - \mathbf{p})}_{=\mathbf{e}} \perp \mathbf{a}.$$

Uvažujme nyní  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  jako sloupcové vektory. Z definice ortogonality dostáváme

$$x = \frac{\mathbf{b}^T \cdot \mathbf{a}}{\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{a}}, \quad \mathbf{p} = \left( \frac{\mathbf{b}^T \cdot \mathbf{a}}{\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{a}} \right) \mathbf{a} = \underbrace{\frac{1}{\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{a}} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}^T)}_{=: \mathbf{P}} \cdot \mathbf{b}$$

Matice  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  se nazývá **ortogonalní projektor**.

# Ortogonalní projekce

## Ortogonalní projekce na lineární obal vektorů

Mějme  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$ . Ortogonalní projekcí vektoru  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  na podprostor  $\langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \rangle$  se rozumí úloha

$$\text{Najdi } \mathbf{p} := \underbrace{x_1 \mathbf{a}_1 + \dots + x_n \mathbf{a}_n}_{=\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}} : \underbrace{(\mathbf{b} - \mathbf{p})}_{=\mathbf{e}} \perp \mathbf{a}_i \text{ pro každé } i \in \{1, \dots, n\},$$

kde  $\mathbf{A} := (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Podmínka ortogonality

$$\mathbf{0} = \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x})^T \cdot \mathbf{A}$$

vede na **normálovou rovnici**

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b},$$

která má jednoznačné řešení, jsou-li vektory  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  lin. nezávislé. Výsledný vektor

$$\mathbf{p} = \underbrace{(\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T)}_{=: \mathbf{P}} \cdot \mathbf{b},$$

kde  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  je **ortogonalní projektor**.

# Ortogonalní projektory

## Vlastnosti

Uvažujme lineárně nezávislé sloupce matice  $\mathbf{A} := (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . **Ortogonalní projektor na  $\mathcal{H}(\mathbf{A})$**  je matice (lin. zobrazení)

$$\mathbf{P} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T$$

a má tyto vlastnosti

- $\mathbf{P}$  je symetrická, tj.  $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}$  (plyne ze symetrie  $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$ ),
- $\mathbf{P}$  je idempotentní (stačí aplikovat jednou), tj.

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \cdot \mathbf{P} &= \left( \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \right) \cdot \left( \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \right) = \\ &= \mathbf{A} \cdot \underbrace{(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})}_{=\mathbf{I}} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{P}. \end{aligned}$$

## Doplňkový projektor

Matice  $\mathbf{I} - \mathbf{P}$  je ortog. projektor na ortogonalní doplněk  $\mathcal{N}(\mathbf{A}^T)$ . Platí:  $\mathcal{N}(\mathbf{A}^T) \perp \mathcal{H}(\mathbf{A})$ .

## Ortogonalní projektory

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}^T) \oplus \mathcal{H}(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^n$$

Mějme matici  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  s lin. nezávislými sloupci. Už víme, že

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}^T) \perp \mathcal{H}(\mathbf{A}).$$

Z Frobeniovy věty plyne, že

$$\dim \mathcal{N}(\mathbf{A}^T) + \dim \mathcal{H}(\mathbf{A}) = n,$$

a tedy existuje rozklad libovolného vektoru  $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$ , kde  $\mathbf{y} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^T)$  a  $\mathbf{z} \in \mathcal{H}(\mathbf{A})$ .

Tento rozklad je jednoznačný

$$\mathbf{x} = \underbrace{(\mathbf{I} - \mathbf{P}) \cdot \mathbf{x}}_{\in \mathcal{N}(\mathbf{A}^T)} + \underbrace{\mathbf{P} \cdot \mathbf{x}}_{\in \mathcal{H}(\mathbf{A})},$$

kde  $\mathbf{P}$  je ortogonalní projektor na  $\mathcal{H}(\mathbf{A})$  a  $\mathbf{I} - \mathbf{P}$  je jeho ortogonalní doplněk.

# Ortogonální projektory

## Normálová rovnice

Mějme matici  $\mathbf{A} := (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  s lin. nezávislými sloupci a  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ . Pokud  $\mathbf{b} \notin \mathcal{H}(\mathbf{A})$ , pak soustava

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

nemá řešení. Přesto může mít smysl řešit následující soustavu:

$$\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{b},$$

kde  $\mathbf{P} := \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T$  je ortogonální projektor na  $\mathcal{H}(\mathbf{A})$ . Jelikož  $\mathbf{A}$  má lin. nezávislé sloupce, soustava je ekvivalentní **normálové rovnici**

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b}.$$

Pokud  $\mathbf{b} \in \mathcal{H}(\mathbf{A})$ , pak  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b}$  a normálová rovnice je ekvivalentní s původní. Pokud je navíc  $\mathbf{A}$  (čtvercová) regulární, pak

$$\mathbf{P} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}) \cdot ((\mathbf{A}^T)^{-1} \cdot \mathbf{A}^T) = \mathbf{I}.$$

## Ortogonalní projekty

**Příklad: Opakovaným měřením pulzu jsme naměřili hodnoty: 72, 75, 69, 73. Kolik je správná hodnota?**

Chceme najít  $\hat{x}$ , které „nejvíce“ vyhovuje soustavě následujících 4 rovnic o 1 neznámé:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{A}} \cdot x = \underbrace{\begin{pmatrix} 72 \\ 75 \\ 69 \\ 73 \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{b}}.$$

Ortogonalní projekce pravé strany na  $\mathcal{H}(\mathbf{A})$  vede na normálovou rovnici

$$(1, 1, 1, 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \hat{x} = (1, 1, 1, 1) \cdot \begin{pmatrix} 72 \\ 75 \\ 69 \\ 73 \end{pmatrix},$$

což dává řešení jako aritmetický průměr naměřených hodnot

$$\hat{x} = \frac{1}{4}(72 + 75 + 69 + 73) = 72,25.$$

## Ortogonalní projekty

**Příklad: Proložte body  $(1, 1)$ ,  $(2, 3)$  a  $(3, 4)$  nejlepší přímkou.**

Hledáme parametry  $a, b \in \mathbb{R}$  přímky  $P := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y(x) := ax + b\}$ , tj. chceme řešit soustavu rovnic

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{b}}.$$

Ortogonalní projekce pravé strany na  $\mathcal{H}(\mathbf{A})$  vede na normálovou rovnici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

jehož řešení je

$$\hat{a} = 3/2, \quad \hat{b} = -1/3.$$

# Ortogonalní projektory

## Gram–Schmidtův ortogonalizační/ortonormalizační algoritmus

Mějme bázi  $E := (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  prostoru  $\mathbb{R}^n$ . Ortogonalizujme/ortonormalizujme ji.

$$\mathbf{f}_1 := \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{q}_1 := \frac{1}{\|\mathbf{f}_1\|} \mathbf{f}_1,$$

$$\mathbf{f}_i := \mathbf{e}_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} \mathbf{f}_j, \quad \text{kde } \alpha_{ij} = -\frac{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{f}_j}{\mathbf{f}_j \cdot \mathbf{f}_j}, \quad \mathbf{q}_i := \frac{1}{\|\mathbf{f}_i\|} \mathbf{f}_i, \quad \text{pro } i \in \{2, \dots, n\}.$$

Výsledkem je ortog. báze  $F := (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$ , resp. ortonorm. báze  $Q := (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n)$ .

## Gram–Schmidtův algoritmus pomocí ortogonálních projektorů

Uvažujme všechny vektory jako sloupcové, pak pro  $i \in \{2, \dots, n\}$

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{e}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\mathbf{e}_i^T \cdot \mathbf{f}_j}{\mathbf{f}_j^T \cdot \mathbf{f}_j} \cdot \mathbf{f}_j = \mathbf{e}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \underbrace{\frac{1}{\mathbf{f}_j^T \cdot \mathbf{f}_j} (\mathbf{f}_j \cdot \mathbf{f}_j^T)}_{=: \mathbf{P}_j} \cdot \mathbf{e}_i = \left( \mathbf{I} - \sum_{j=1}^{i-1} \mathbf{P}_j \right) \cdot \mathbf{e}_i.$$



# Metoda nejmenších čtverců = ortogonální projekce pravé strany

„Nejlepší“ kandidát na řešení minimalizuje normu chyby.

Mějme matici  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  a  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ . Pokud  $\mathbf{b} \notin \mathcal{H}(\mathbf{A})$ , pak soustava

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

nemá řešení. „Nejlepší“ kandidát  $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$  na řešení minimalizuje normu chyby, tj.

$$\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|^2 \leq \|\mathbf{A} \cdot (\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{y}) - \mathbf{b}\|^2.$$

Nerovnici lze přepsat takto:

$$0 \leq \underbrace{\mathbf{y}^T \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}}_{=\|\mathbf{A} \cdot \mathbf{y}\|^2} + 2\mathbf{y}^T \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} - 2\mathbf{y}^T \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b}.$$

Vezměme lib. vektor z kanonické báze  $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $\varepsilon > 0$  a zvolme dvě  $\mathbf{y} := \pm \varepsilon \mathbf{e}_i$ , pak

$$0 \leq \varepsilon \|\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}\|^2 \pm 2(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b})_i.$$

Jelikož obě nerovnosti platí pro lib. malé  $\varepsilon > 0$  a libovolný index  $i \in \{1, \dots, n\}$ , pak

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b},$$

tedy opět řešíme **normálovou rovnici**.

# Skalární součin

## Zobecnění pojmů

Mějme vektorový prostor  $\mathcal{V}$  a symetrickou bilineární formu  $B : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ , jejíž příslušná kvadratická forma  $Q(\mathbf{v}) := B(\mathbf{v}, \mathbf{v})$  je pozitivně definitní.

- $B$  je **skalární součin** na  $\mathcal{V}$ .
- Nenulové vektory  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$  jsou **ortogonální vzhledem k  $B$** , pokud

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_B := B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0.$$

- $B$  indukuje normu vektoru  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$

$$\|\mathbf{v}\|_B := \sqrt{B(\mathbf{v}, \mathbf{v})}.$$

**Příklad:**  $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2$  je skalární součin na  $\mathbb{R}^2$ .

$B$  je zjevně symetrická bilineární forma. Příslušná kvadr. forma

$$Q(\mathbf{x}) := B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 2(x_1)^2 - 2x_1x_2 + 2(x_2)^2 = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 > 0$$

pro  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , tedy  $Q$  je pozitivně definitní.

## Skalární součin

$B(p, q) := \int_0^1 p(x) q(x) dx$  je (L2) skalární součin na  $\mathcal{P}_1$ .

Zvolme kanonickou bázi  $E := (1, x)$  prostoru  $\mathcal{P}_1$ . Matice bilineární formy je

$$\mathbf{B}_E := \begin{pmatrix} B(1, 1) & B(1, x) \\ B(x, 1) & B(x, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^1 1 dx & \int_0^1 x dx \\ \int_0^1 x dx & \int_0^1 x^2 dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Bilineární forma je tedy symetrická. Klasifikujme její matici kongruencemi

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{r}_2 := -\mathbf{r}_1 + 2\mathbf{r}_2} \begin{pmatrix} \boxed{1} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{s}_2 := -\mathbf{s}_1 + 2\mathbf{s}_2} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 \\ 0 & \boxed{\frac{1}{3}} \end{pmatrix},$$

a jelikož  $1, \frac{1}{3} > 0$ , kvadratická forma je pozitivně definitní.

**Fourierova báze, viz jpeg, je ortonormální v tomto skalárním součinu.**