

Funkce komplexní proměnné a integrální transformace

Laplaceova transformace I.

Marek Lampart

Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století* (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Laplaceova transformace

Laplaceova transformace

Budeme uvažovat komplexní funkce f reálné proměnné $t \in (-\infty, \infty)$, tj. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, a komplexní proměnnou $p = x + iy \in \mathbb{C}$.

Laplaceova transformace

Budeme uvažovat komplexní funkce f reálné proměnné $t \in (-\infty, \infty)$, tj. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, a komplexní proměnnou $p = x + iy \in \mathbb{C}$.

Předpokládejme, že nevlastní integrál

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad (1)$$

existuje a má konečnou hodnotu pro alespoň jedno p .

Laplaceova transformace

Budeme uvažovat komplexní funkce f reálné proměnné $t \in (-\infty, \infty)$, tj. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, a komplexní proměnnou $p = x + iy \in \mathbb{C}$.

Předpokládejme, že nevlastní integrál

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad (1)$$

existuje a má konečnou hodnotu pro alespoň jedno p .

Pak integrál (1) nazýváme *Laplaceův integrál funkce f* .

Laplaceova transformace

Laplaceova transformace

Příklad 1

Laplaceova transformace

Příklad 1

Spočtěme Laplaceův integrál funkce $f(t) = 1$.

Laplaceova transformace

Příklad 1

Spočtěme Laplaceův integrál funkce $f(t) = 1$.

Podle (1) máme

Laplaceova transformace

Příklad 1

Spočtěme Laplaceův integrál funkce $f(t) = 1$.

Podle (1) máme

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt =$$

Laplaceova transformace

Příklad 1

Spočtěme Laplaceův integrál funkce $f(t) = 1$.

Podle (1) máme

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt$$

Laplaceova transformace

Příklad 1

Spočtěme Laplaceův integrál funkce $f(t) = 1$.

Podle (1) máme

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^{\alpha} e^{-pt} dt$$

Laplaceova transformace

Příklad 1

Spočtěme Laplaceův integrál funkce $f(t) = 1$.

Podle (1) máme

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^{\alpha} e^{-pt} dt = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-p\alpha} \right).$$

Laplaceova transformace

Příklad 1

Spočtěme Laplaceův integrál funkce $f(t) = 1$.

Podle (1) máme

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^{\alpha} e^{-pt} dt = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-p\alpha} \right).$$

Jelikož $\alpha \in \mathbb{R}$, pro $p = x + iy$ platí

Laplaceova transformace

Příklad 1

Spočtěme Laplaceův integrál funkce $f(t) = 1$.

Podle (1) máme

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^{\alpha} e^{-pt} dt = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-p\alpha} \right).$$

Jelikož $\alpha \in \mathbb{R}$, pro $p = x + iy$ platí $|e^{-p\alpha}| = e^{-x\alpha}$.

Laplaceova transformace

Příklad 1

Spočtěme Laplaceův integrál funkce $f(t) = 1$.

Podle (1) máme

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^{\alpha} e^{-pt} dt = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-p\alpha} \right).$$

Jelikož $\alpha \in \mathbb{R}$, pro $p = x + iy$ platí $|e^{-p\alpha}| = e^{-x\alpha}$.

Tedy pro $\text{Re } p > 0$ platí

Laplaceova transformace

Příklad 1

Spočtěme Laplaceův integrál funkce $f(t) = 1$.

Podle (1) máme

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^{\alpha} e^{-pt} dt = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-p\alpha} \right).$$

Jelikož $\alpha \in \mathbb{R}$, pro $p = x + iy$ platí $|e^{-p\alpha}| = e^{-x\alpha}$.

Tedy pro $\text{Re } p > 0$ platí $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} e^{-p\alpha} = 0$.

Laplaceova transformace

Příklad 1

Spočtěme Laplaceův integrál funkce $f(t) = 1$.

Podle (1) máme

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^{\alpha} e^{-pt} dt = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-p\alpha} \right).$$

Jelikož $\alpha \in \mathbb{R}$, pro $p = x + iy$ platí $|e^{-p\alpha}| = e^{-x\alpha}$.

Tedy pro $\operatorname{Re} p > 0$ platí $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} e^{-p\alpha} = 0$.

*Laplaceův integrál funkce $f(t) = 1$ pro $\operatorname{Re} p > 0$ **konverguje***

Laplaceova transformace

Příklad 1

Spočtěme Laplaceův integrál funkce $f(t) = 1$.

Podle (1) máme

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^{\alpha} e^{-pt} dt = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-p\alpha} \right).$$

Jelikož $\alpha \in \mathbb{R}$, pro $p = x + iy$ platí $|e^{-p\alpha}| = e^{-x\alpha}$.

Tedy pro $\operatorname{Re} p > 0$ platí $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} e^{-p\alpha} = 0$.

*Laplaceův integrál funkce $f(t) = 1$ pro $\operatorname{Re} p > 0$ **konverguje** a je roven funkci $1/p$.*

Laplaceova transformace

Příklad 1

Spočtěme Laplaceův integrál funkce $f(t) = 1$.

Podle (1) máme

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^{\alpha} e^{-pt} dt = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-p\alpha} \right).$$

Jelikož $\alpha \in \mathbb{R}$, pro $p = x + iy$ platí $|e^{-p\alpha}| = e^{-x\alpha}$.

Tedy pro $\operatorname{Re} p > 0$ platí $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} e^{-p\alpha} = 0$.

Laplaceův integrál funkce $f(t) = 1$ pro $\operatorname{Re} p > 0$ **konverguje** a je roven funkci $1/p$.

Pro $\operatorname{Re} p \leq 0$ Laplaceův integrál **neexistuje**.

Laplaceova transformace

Laplaceova transformace

Příklad 2

Laplaceova transformace

Příklad 2

Spočtěme Laplaceův integrál funkce $f(t) = e^{at}$, kde $a \in \mathbb{C}$.

Laplaceova transformace

Příklad 2

Spočtěme Laplaceův integrál funkce $f(t) = e^{at}$, kde $a \in \mathbb{C}$.

Podle (1) máme

Laplaceova transformace

Příklad 2

Spočtěme Laplaceův integrál funkce $f(t) = e^{at}$, kde $a \in \mathbb{C}$.

Podle (1) máme

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt =$$

Laplaceova transformace

Příklad 2

Spočtěme Laplaceův integrál funkce $f(t) = e^{at}$, kde $a \in \mathbb{C}$.

Podle (1) máme

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{at}e^{-pt} dt$$

Laplaceova transformace

Příklad 2

Spočtěme Laplaceův integrál funkce $f(t) = e^{at}$, kde $a \in \mathbb{C}$.

Podle (1) máme

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-pt} dt = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^{\alpha} e^{(a-p)t} dt$$

Laplaceova transformace

Příklad 2

Spočtěme Laplaceův integrál funkce $f(t) = e^{at}$, kde $a \in \mathbb{C}$.

Podle (1) máme

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt &= \int_0^\infty e^{at}e^{-pt} dt = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^\alpha e^{(a-p)t} dt \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a-p} e^{(a-p)\alpha} - \frac{1}{a-p} \right)\end{aligned}$$

Laplaceova transformace

Příklad 2

Spočtěme Laplaceův integrál funkce $f(t) = e^{at}$, kde $a \in \mathbb{C}$.

Podle (1) máme

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt &= \int_0^\infty e^{at}e^{-pt} dt = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^\alpha e^{(a-p)t} dt \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a-p} e^{(a-p)\alpha} - \frac{1}{a-p} \right) \\ &= \frac{1}{p-a}\end{aligned}$$

pro $\operatorname{Re}(p-a) > 0$.

Laplaceova transformace

Příklad 2

Spočtěme Laplaceův integrál funkce $f(t) = e^{at}$, kde $a \in \mathbb{C}$.

Podle (1) máme

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt &= \int_0^\infty e^{at}e^{-pt} dt = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^\alpha e^{(a-p)t} dt \\&= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a-p} e^{(a-p)\alpha} - \frac{1}{a-p} \right) \\&= \frac{1}{p-a}\end{aligned}$$

pro $\operatorname{Re}(p-a) > 0$.

Tedy Laplaceův integrál funkce $f(t) = e^{at}$ *konverguje* pro $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a$ k funkci $1/(p-a)$.

Laplaceova transformace

Příklad 2

Spočtěme Laplaceův integrál funkce $f(t) = e^{at}$, kde $a \in \mathbb{C}$.

Podle (1) máme

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt &= \int_0^\infty e^{at}e^{-pt} dt = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^\alpha e^{(a-p)t} dt \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a-p} e^{(a-p)\alpha} - \frac{1}{a-p} \right) \\ &= \frac{1}{p-a}\end{aligned}$$

pro $\operatorname{Re}(p-a) > 0$.

Tedy Laplaceův integrál funkce $f(t) = e^{at}$ **konverguje** pro $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a$ k funkci $1/(p-a)$. V ostatních případech **diverguje**.

Laplaceova transformace

Laplaceova transformace

Definice 1

Laplaceova transformace

Definice 1

Bud' f komplexní funkce reálné proměnné $t \in (-\infty, \infty)$.

Laplaceova transformace

Definice 1

Bud' f komplexní funkce reálné proměnné $t \in (-\infty, \infty)$.

Bud' $M \subset \mathbb{C}$ množina všech p , pro než je Laplaceův integrál (1) konvergentní.

Laplaceova transformace

Definice 1

Bud' f komplexní funkce reálné proměnné $t \in (-\infty, \infty)$.

Bud' $M \subset \mathbb{C}$ množina všech p , pro než je Laplaceův integrál (1) konvergentní.

Pak komplexní funkci F definovanou vztahem

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt \quad (p \in M) \quad (2)$$

*nazýváme **Laplaceův obraz funkce f** .*

Laplaceova transformace

Definice 1

Bud' f komplexní funkce reálné proměnné $t \in (-\infty, \infty)$.

Bud' $M \subset \mathbb{C}$ množina všech p , pro než je Laplaceův integrál (1) konvergentní.

Pak komplexní funkci F definovanou vztahem

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt \quad (p \in M) \quad (2)$$

*nazýváme **Laplaceův obraz funkce f** .*

*Dané zobrazení, které přiřazuje funkci f její Laplaceův obraz F , nazýváme **Laplaceova transformace**.*

Laplaceova transformace

Definice 1

Bud' f komplexní funkce reálné proměnné $t \in (-\infty, \infty)$.

Bud' $M \subset \mathbb{C}$ množina všech p , pro než je Laplaceův integrál (1) konvergentní.

Pak komplexní funkci F definovanou vztahem

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt \quad (p \in M) \quad (2)$$

*nazýváme **Laplaceův obraz funkce f** .*

*Dané zobrazení, které přiřazuje funkci f její Laplaceův obraz F , nazýváme **Laplaceova transformace**.*

Značíme

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(p).$$

Laplaceova transformace

Laplaceova transformace

Definice 2

Laplaceova transformace

Definice 2

Funkci f nazýváme *předmět* (někdy také vzor, originál), jsou-li splněny následující podmínky:

Laplaceova transformace

Definice 2

Funkci f nazýváme *předmět* (někdy také vzor, originál), jsou-li splněny následující podmínky:

1. f je na $[0, \infty)$ po částech spojitá,

Laplaceova transformace

Definice 2

Funkci f nazýváme *předmět* (někdy také vzor, originál), jsou-li splněny následující podmínky:

1. f je na $[0, \infty)$ po částech spojitá,
2. $f(t) = 0$ pro každé $t < 0$,

Laplaceova transformace

Definice 2

Funkci f nazýváme *předmět* (někdy také vzor, originál), jsou-li splněny následující podmínky:

1. f je na $[0, \infty)$ po částech spojitá,
2. $f(t) = 0$ pro každé $t < 0$,
3. existuje reálné číslo $M > 0$ a α takové, že pro každé $t \in [0, \infty)$ platí

Laplaceova transformace

Definice 2

Funkci f nazýváme *předmět* (někdy také vzor, originál), jsou-li splněny následující podmínky:

1. f je na $[0, \infty)$ po částech spojitá,
2. $f(t) = 0$ pro každé $t < 0$,
3. existuje reálné číslo $M > 0$ a α takové, že pro každé $t \in [0, \infty)$ platí

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}. \quad (3)$$

Laplaceova transformace

Definice 2

Funkci f nazýváme *předmět* (někdy také vzor, originál), jsou-li splněny následující podmínky:

1. f je na $[0, \infty)$ po částech spojitá,
2. $f(t) = 0$ pro každé $t < 0$,
3. existuje reálné číslo $M > 0$ a α takové, že pro každé $t \in [0, \infty)$ platí

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}. \quad (3)$$

Definice 3

Laplaceova transformace

Definice 2

Funkci f nazýváme *předmět* (někdy také vzor, originál), jsou-li splněny následující podmínky:

1. f je na $[0, \infty)$ po částech spojitá,
2. $f(t) = 0$ pro každé $t < 0$,
3. existuje reálné číslo $M > 0$ a α takové, že pro každé $t \in [0, \infty)$ platí

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}. \quad (3)$$

Definice 3

Bud' $\alpha_0 = \inf\{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \text{ vyhovuje (3)}\}$.

Laplaceova transformace

Definice 2

Funkci f nazýváme *předmět* (někdy také vzor, originál), jsou-li splněny následující podmínky:

1. f je na $[0, \infty)$ po částech spojitá,
2. $f(t) = 0$ pro každé $t < 0$,
3. existuje reálné číslo $M > 0$ a α takové, že pro každé $t \in [0, \infty)$ platí

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}. \quad (3)$$

Definice 3

Bud' $\alpha_0 = \inf\{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \text{ vyhovuje (3)}\}$.

Číslo α_0 nazýváme *index růstu předmětu* f .

Laplaceova transformace

Laplaceova transformace

Důležitým příkladem předmětu je Heavisideova funkce definovaná vztahem

Laplaceova transformace

Důležitým příkladem předmětu je Heavisideova funkce definovaná vztahem

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t < 0, \\ 1, & \text{pro } t \geq 0. \end{cases} \quad (4)$$

Laplaceova transformace

Důležitým příkladem předmětu je Heavisideova funkce definovaná vztahem

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t < 0, \\ 1, & \text{pro } t \geq 0. \end{cases} \quad (4)$$

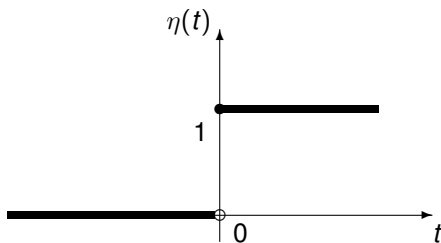
Heavisideova funkce má graf

Laplaceova transformace

Důležitým příkladem předmětu je Heavisideova funkce definovaná vztahem

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t < 0, \\ 1, & \text{pro } t \geq 0. \end{cases} \quad (4)$$

Heavisideova funkce má graf



Laplaceova transformace

Laplaceova transformace

Věta 1 (o existenci Laplaceova obrazu)

Laplaceova transformace

Věta 1 (o existenci Laplaceova obrazu)

Bud' f předmět s indexem růstu α_0 .

Laplaceova transformace

Věta 1 (o existenci Laplaceova obrazu)

Bud' f předmět s indexem růstu α_0 . Pak Laplaceův integrál

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

konverguje v polorovině $\operatorname{Re} p > \alpha_0$ absolutně

Laplaceova transformace

Věta 1 (o existenci Laplaceova obrazu)

Bud' f předmět s indexem růstu α_0 . Pak Laplaceův integrál

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

konverguje v polorovině $\operatorname{Re} p > \alpha_0$ absolutně a definuje Laplaceův obraz $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$, který je v té polorovině analytickou funkcí.

Laplaceova transformace

Věta 1 (o existenci Laplaceova obrazu)

Bud' f předmět s indexem růstu α_0 . Pak Laplaceův integrál

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

konverguje v polorovině $\operatorname{Re} p > \alpha_0$ absolutně a definuje Laplaceův obraz $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$, který je v té polorovině analytickou funkcí.

Důsledek 1

Laplaceova transformace

Věta 1 (o existenci Laplaceova obrazu)

Bud' f předmět s indexem růstu α_0 . Pak Laplaceův integrál

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$$

konverguje v polorovině $\operatorname{Re} p > \alpha_0$ absolutně a definuje Laplaceův obraz $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$, který je v té polorovině analytickou funkcí.

Důsledek 1

Bud' $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ a $x = \operatorname{Re} p$.

Laplaceova transformace

Věta 1 (o existenci Laplaceova obrazu)

Bud' f předmět s indexem růstu α_0 . Pak Laplaceův integrál

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$$

konverguje v polorovině $\operatorname{Re} p > \alpha_0$ absolutně a definuje Laplaceův obraz $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$, který je v té polorovině analytickou funkcí.

Důsledek 1

Bud' $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ a $x = \operatorname{Re} p$. Pak $\lim_{x \rightarrow \infty} F(p) = 0$.

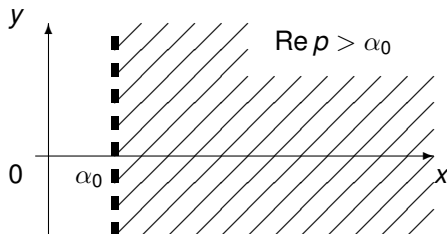
Laplaceova transformace

Laplaceova transformace

Polokrovina $\operatorname{Re} p > \alpha_0$ je znázorněna

Laplaceova transformace

Polov rovina $\operatorname{Re} p > \alpha_0$ je znázorněna



Laplaceova transformace

Laplaceova transformace

Příklad 3

Laplaceova transformace

Příklad 3

Nalezněme funkci $f(t)$ tak, aby její Laplaceův obraz byl roven funkci $\sqrt{p}$.

Laplaceova transformace

Příklad 3

Nalezněme funkci $f(t)$ tak, aby její Laplaceův obraz byl roven funkci $\sqrt{p}$.

Prvně $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x + iy} \neq 0$.

Laplaceova transformace

Příklad 3

Nalezněme funkci $f(t)$ tak, aby její Laplaceův obraz byl roven funkci $\sqrt{p}$.

Prvně $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x + iy} \neq 0$.

Tedy podle předchozího Důsledku 1 funkce $\sqrt{p}$ nemůže být Laplaceovým obrazem žádné funkce $f(t)$.

Laplaceova transformace

Příklad 3

Nalezněme funkci $f(t)$ tak, aby její Laplaceův obraz byl roven funkci $\sqrt{p}$.

Prvně $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x + iy} \neq 0$.

Tedy podle předchozího Důsledku 1 funkce $\sqrt{p}$ nemůže být Laplaceovým obrazem žádné funkce $f(t)$.

Věta 2 (první limitní)

Laplaceova transformace

Příklad 3

Nalezněme funkci $f(t)$ tak, aby její Laplaceův obraz byl roven funkci $\sqrt{p}$.

Prvně $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x + iy} \neq 0$.

Tedy podle předchozího Důsledku 1 funkce $\sqrt{p}$ nemůže být Laplaceovým obrazem žádné funkce $f(t)$.

Věta 2 (první limitní)

Bud' f předmět s indexem růstu α_0 a $\alpha > \alpha_0$.

Laplaceova transformace

Příklad 3

Nalezněme funkci $f(t)$ tak, aby její Laplaceův obraz byl roven funkci $\sqrt{p}$.

Prvně $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x + iy} \neq 0$.

Tedy podle předchozího Důsledku 1 funkce $\sqrt{p}$ nemůže být Laplaceovým obrazem žádné funkce $f(t)$.

Věta 2 (první limitní)

Buď f předmět s indexem růstu α_0 a $\alpha > \alpha_0$.

Pak pro Laplaceův obraz F funkce f platí

Laplaceova transformace

Příklad 3

Nalezněme funkci $f(t)$ tak, aby její Laplaceův obraz byl roven funkci $\sqrt{p}$.

Prvně $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x + iy} \neq 0$.

Tedy podle předchozího Důsledku 1 funkce $\sqrt{p}$ nemůže být Laplaceovým obrazem žádné funkce $f(t)$.

Věta 2 (první limitní)

Buď f předmět s indexem růstu α_0 a $\alpha > \alpha_0$.

Pak pro Laplaceův obraz F funkce f platí

$$\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0.$$

$$p \rightarrow \infty$$

$$\operatorname{Re} p \geq \alpha$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 3 (pravidla operátorového počtu)

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 3 (pravidla operátorového počtu)

Nechť f_k jsou předměty, $\mathcal{L}(f_k(t)) = F_k(p)$ a $c_k \in \mathbb{C}$ pro $k = 1, 2, \dots, n$.

Pak

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 3 (pravidla operátorového počtu)

Nechť f_k jsou předměty, $\mathcal{L}(f_k(t)) = F_k(p)$ a $c_k \in \mathbb{C}$ pro $k = 1, 2, \dots, n$.

Pak

I. linearita

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 3 (pravidla operátorového počtu)

Nechť f_k jsou předměty, $\mathcal{L}(f_k(t)) = F_k(p)$ a $c_k \in \mathbb{C}$ pro $k = 1, 2, \dots, n$.

Pak

I. linearita

$$\mathcal{L}\left(\sum_{k=1}^n c_k f_k(t)\right) = \sum_{k=1}^n c_k F_k(p),$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 3 (pravidla operátorového počtu)

Nechť f_k jsou předměty, $\mathcal{L}(f_k(t)) = F_k(p)$ a $c_k \in \mathbb{C}$ pro $k = 1, 2, \dots, n$.

Pak

I. linearita

$$\mathcal{L}\left(\sum_{k=1}^n c_k f_k(t)\right) = \sum_{k=1}^n c_k F_k(p),$$

II. podobnost

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 3 (pravidla operátorového počtu)

Nechť f_k jsou předměty, $\mathcal{L}(f_k(t)) = F_k(p)$ a $c_k \in \mathbb{C}$ pro $k = 1, 2, \dots, n$.

Pak

I. linearita

$$\mathcal{L}\left(\sum_{k=1}^n c_k f_k(t)\right) = \sum_{k=1}^n c_k F_k(p),$$

II. podobnost

$$\mathcal{L}(f(\lambda t)) = \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right), \quad \lambda > 0,$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 3 (pravidla operátorového počtu)

Nechť f_k jsou předměty, $\mathcal{L}(f_k(t)) = F_k(p)$ a $c_k \in \mathbb{C}$ pro $k = 1, 2, \dots, n$.

Pak

I. linearita

$$\mathcal{L}\left(\sum_{k=1}^n c_k f_k(t)\right) = \sum_{k=1}^n c_k F_k(p),$$

II. podobnost

$$\mathcal{L}(f(\lambda t)) = \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right), \quad \lambda > 0,$$

III. substituce v obrazu

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 3 (pravidla operátorového počtu)

Nechť f_k jsou předměty, $\mathcal{L}(f_k(t)) = F_k(p)$ a $c_k \in \mathbb{C}$ pro $k = 1, 2, \dots, n$.

Pak

I. linearita

$$\mathcal{L}\left(\sum_{k=1}^n c_k f_k(t)\right) = \sum_{k=1}^n c_k F_k(p),$$

II. podobnost

$$\mathcal{L}(f(\lambda t)) = \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right), \quad \lambda > 0,$$

III. substituce v obrazu

$$\mathcal{L}(e^{at} f(t)) = F(p - a),$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 3

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 3

IV. derivace podle parametru

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 3

IV. derivace podle parametru

$$\frac{\partial f(t, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{\partial F(p, \lambda)}{\partial \lambda}, \text{ kde } \mathcal{L}(f(t, \lambda)) = F(p, \lambda),$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 3

IV. derivace podle parametru

$$\frac{\partial f(t, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{\partial F(p, \lambda)}{\partial \lambda}, \text{ kde } \mathcal{L}(f(t, \lambda)) = F(p, \lambda),$$

V. posunutí

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 3

IV. derivace podle parametru

$$\frac{\partial f(t, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{\partial F(p, \lambda)}{\partial \lambda}, \text{ kde } \mathcal{L}(f(t, \lambda)) = F(p, \lambda),$$

V. posunutí

$$\mathcal{L}(f(t - \tau)\eta(t - \tau)) = e^{-\tau p}F(p),$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 3

IV. derivace podle parametru

$$\frac{\partial f(t, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{\partial F(p, \lambda)}{\partial \lambda}, \text{ kde } \mathcal{L}(f(t, \lambda)) = F(p, \lambda),$$

V. posunutí

$$\mathcal{L}(f(t - \tau)\eta(t - \tau)) = e^{-\tau p} F(p),$$

VI. derivace předmětu

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 3

IV. derivace podle parametru

$$\frac{\partial f(t, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{\partial F(p, \lambda)}{\partial \lambda}, \text{ kde } \mathcal{L}(f(t, \lambda)) = F(p, \lambda),$$

V. posunutí

$$\mathcal{L}(f(t - \tau)\eta(t - \tau)) = e^{-\tau p} F(p),$$

VI. derivace předmětu

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = p^n F(p) - p^{n-1} f(0_+) - \dots - f^{(n-1)}(0_+),$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 3

IV. derivace podle parametru

$$\frac{\partial f(t, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{\partial F(p, \lambda)}{\partial \lambda}, \text{ kde } \mathcal{L}(f(t, \lambda)) = F(p, \lambda),$$

V. posunutí

$$\mathcal{L}(f(t - \tau)\eta(t - \tau)) = e^{-\tau p} F(p),$$

VI. derivace předmětu

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = p^n F(p) - p^{n-1} f(0_+) - \dots - f^{(n-1)}(0_+),$$

kde f a její derivace až do řádu $n - 1$ jsou spojitě a

$$f^{(i)}(0_+) = \lim_{t \rightarrow 0_+} f^{(i)}(t).$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 3

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 3

VII. derivace obrazu

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 3

VII. derivace obrazu

$$\mathcal{L}(-tf(t)) = F'(p),$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 3

VII. derivace obrazu

$$\mathcal{L}(-tf(t)) = F'(p),$$

VIII. integrace předmětu

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 3

VII. derivace obrazu

$$\mathcal{L}(-tf(t)) = F'(p),$$

VIII. integrace předmětu

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau) \mathrm{d}\tau\right) = \frac{F(p)}{p},$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 3

VII. derivace obrazu

$$\mathcal{L}(-tf(t)) = F'(p),$$

VIII. integrace předmětu

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau) \mathrm{d}\tau\right) = \frac{F(p)}{p},$$

IX. integrace obrazu

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 3

VII. derivace obrazu

$$\mathcal{L}(-tf(t)) = F'(p),$$

VIII. integrace předmětu

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau) \mathrm{d}\tau\right) = \frac{F(p)}{p},$$

IX. integrace obrazu

$$\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_p^\infty F(z) \mathrm{d}z = \lim_{\operatorname{Re} q \rightarrow \infty} \int_p^q F(z) \mathrm{d}z,$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 3

VII. derivace obrazu

$$\mathcal{L}(-tf(t)) = F'(p),$$

VIII. integrace předmětu

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau) \mathrm{d}\tau\right) = \frac{F(p)}{p},$$

IX. integrace obrazu

$$\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_p^\infty F(z) \mathrm{d}z = \lim_{\operatorname{Re} q \rightarrow \infty} \int_p^q F(z) \mathrm{d}z,$$

kde $f(t)/t$ je předmět s indexem růstu α_0 ,

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 3

VII. derivace obrazu

$$\mathcal{L}(-tf(t)) = F'(p),$$

VIII. integrace předmětu

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau) \mathrm{d}\tau\right) = \frac{F(p)}{p},$$

IX. integrace obrazu

$$\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_p^\infty F(z) \mathrm{d}z = \lim_{\operatorname{Re} q \rightarrow \infty} \int_p^q F(z) \mathrm{d}z,$$

kde $f(t)/t$ je předmět s indexem růstu α_0 , $\int_p^\infty F(z) \mathrm{d}z$ existuje

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 3

VII. derivace obrazu

$$\mathcal{L}(-tf(t)) = F'(p),$$

VIII. integrace předmětu

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau) d\tau\right) = \frac{F(p)}{p},$$

IX. integrace obrazu

$$\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_p^\infty F(z) dz = \lim_{\operatorname{Re} q \rightarrow \infty} \int_p^q F(z) dz,$$

kde $f(t)/t$ je předmět s indexem růstu α_0 , $\int_p^\infty F(z) dz$ existuje a graf integrační křivky $\int_p^\infty F(z) dz$ leží v $\operatorname{Re} p > \alpha_0$.

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 4

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 4

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \sin(\omega t)$.

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 4

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \sin(\omega t)$.

Podle Eulerových vzorců platí

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 4

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \sin(\omega t)$.

Podle Eulerových vzorců platí

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}.$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 4

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \sin(\omega t)$.

Podle Eulerových vzorců platí

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}.$$

Položíme-li v předchozím příkladu parametr $a = \pm i\omega$ a navíc užijeme linearity Věty 3,

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 4

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \sin(\omega t)$.

Podle Eulerových vzorců platí

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}.$$

Položíme-li v předchozím příkladu parametr $a = \pm i\omega$ a navíc užijeme linearity Věty 3, pak pro $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re}(\pm i\omega) = |\operatorname{Im} \omega|$ dostáváme

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 4

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \sin(\omega t)$.

Podle Eulerových vzorců platí

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}.$$

Položíme-li v předchozím příkladu parametr $a = \pm i\omega$ a navíc užijeme linearity Věty 3, pak pro $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re}(\pm i\omega) = |\operatorname{Im} \omega|$ dostáváme

$$\mathcal{L}(\sin(\omega t)) =$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 4

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \sin(\omega t)$.

Podle Eulerových vzorců platí

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}.$$

Položíme-li v předchozím příkladu parametr $a = \pm i\omega$ a navíc užijeme linearity Věty 3, pak pro $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re}(\pm i\omega) = |\operatorname{Im} \omega|$ dostáváme

$$\mathcal{L}(\sin(\omega t)) = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{p + i\omega} \right)$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 4

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \sin(\omega t)$.

Podle Eulerových vzorců platí

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}.$$

Položíme-li v předchozím příkladu parametr $a = \pm i\omega$ a navíc užijeme linearity Věty 3, pak pro $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re}(\pm i\omega) = |\operatorname{Im} \omega|$ dostáváme

$$\mathcal{L}(\sin(\omega t)) = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{p + i\omega} \right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 5

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 5

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = e^{at} \sin(\omega t)$.

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 5

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = e^{at} \sin(\omega t)$.

K výpočtu použijeme výsledku předchozího příkladu a vlastnosti substituce v obrazu Věty 3.

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 5

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = e^{at} \sin(\omega t)$.

K výpočtu použijeme výsledku předchozího příkladu a vlastnosti substituce v obrazu Věty 3.

Tedy pro $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a + |\operatorname{Im} \omega|$ máme

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 5

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = e^{at} \sin(\omega t)$.

K výpočtu použijeme výsledku předchozího příkladu a vlastnosti substituce v obrazu Věty 3.

Tedy pro $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a + |\operatorname{Im} \omega|$ máme

$$\mathcal{L}(e^{at} \sin(\omega t)) =$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 5

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = e^{at} \sin(\omega t)$.

K výpočtu použijeme výsledku předchozího příkladu a vlastnosti substituce v obrazu Věty 3.

Tedy pro $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a + |\operatorname{Im} \omega|$ máme

$$\mathcal{L}(e^{at} \sin(\omega t)) = \frac{\omega}{(p - a)^2 + \omega^2}.$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 6

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 6

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = t^n e^{at}$.

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 6

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = t^n e^{at}$.

Z Příkladu 2 víme, že

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 6

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = t^n e^{at}$.

Z Příkladu 2 víme, že

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{p - a}.$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 6

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = t^n e^{at}$.

Z Příkladu 2 víme, že

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{p-a}.$$

Derivujme levou i pravou stranu podle parametru a

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 6

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = t^n e^{at}$.

Z Příkladu 2 víme, že

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{p - a}.$$

Derivujme levou i pravou stranu podle parametru a

$$\mathcal{L}(te^{at}) =$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 6

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = t^n e^{at}$.

Z Příkladu 2 víme, že

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{p-a}.$$

Derivujme levou i pravou stranu podle parametru a

$$\mathcal{L}(te^{at}) = \frac{1}{(p-a)^2}.$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 6

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = t^n e^{at}$.

Z Příkladu 2 víme, že

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{p-a}.$$

Derivujme levou i pravou stranu podle parametru a

$$\mathcal{L}(te^{at}) = \frac{1}{(p-a)^2}.$$

Další derivace mají tvar

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 6

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = t^n e^{at}$.

Z Příkladu 2 víme, že

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{p - a}.$$

Derivujme levou i pravou stranu podle parametru a

$$\mathcal{L}(te^{at}) = \frac{1}{(p - a)^2}.$$

Další derivace mají tvar

$$\mathcal{L}(t^2 e^{at}) =$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 6

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = t^n e^{at}$.

Z Příkladu 2 víme, že

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{p-a}.$$

Derivujme levou i pravou stranu podle parametru a

$$\mathcal{L}(te^{at}) = \frac{1}{(p-a)^2}.$$

Další derivace mají tvar

$$\mathcal{L}(t^2 e^{at}) = \frac{2}{(p-a)^3},$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 6

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = t^n e^{at}$.

Z Příkladu 2 víme, že

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{p-a}.$$

Derivujme levou i pravou stranu podle parametru a

$$\mathcal{L}(te^{at}) = \frac{1}{(p-a)^2}.$$

Další derivace mají tvar

$$\mathcal{L}(t^2 e^{at}) = \frac{2}{(p-a)^3},$$

$$\mathcal{L}(t^3 e^{at}) =$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 6

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = t^n e^{at}$.

Z Příkladu 2 víme, že

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{p-a}.$$

Derivujme levou i pravou stranu podle parametru a

$$\mathcal{L}(te^{at}) = \frac{1}{(p-a)^2}.$$

Další derivace mají tvar

$$\mathcal{L}(t^2 e^{at}) = \frac{2}{(p-a)^3},$$

$$\mathcal{L}(t^3 e^{at}) = \frac{3!}{(p-a)^4},$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 6

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = t^n e^{at}$.

Z Příkladu 2 víme, že

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{p-a}.$$

Derivujme levou i pravou stranu podle parametru a

$$\mathcal{L}(te^{at}) = \frac{1}{(p-a)^2}.$$

Další derivace mají tvar

$$\mathcal{L}(t^2 e^{at}) = \frac{2}{(p-a)^3},$$

$$\mathcal{L}(t^3 e^{at}) = \frac{3!}{(p-a)^4},$$

$$\mathcal{L}(t^n e^{at}) =$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 6

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = t^n e^{at}$.

Z Příkladu 2 víme, že

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{p-a}.$$

Derivujme levou i pravou stranu podle parametru a

$$\mathcal{L}(te^{at}) = \frac{1}{(p-a)^2}.$$

Další derivace mají tvar

$$\mathcal{L}(t^2 e^{at}) = \frac{2}{(p-a)^3},$$

$$\mathcal{L}(t^3 e^{at}) = \frac{3!}{(p-a)^4},$$

$$\mathcal{L}(t^n e^{at}) = \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}.$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 7

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 7

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \eta(t - \tau)$.

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 7

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \eta(t - \tau)$.

Poznamenejme, že funkce f je posunutá Heavisideova funkce o τ , tedy

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 7

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \eta(t - \tau)$.

Poznamenejme, že funkce f je posunutá Heavisideova funkce o τ , tedy

$$\eta(t - \tau) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t < \tau, \\ 1, & \text{pro } t \geq \tau. \end{cases}$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 7

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \eta(t - \tau)$.

Poznamenejme, že funkce f je posunutá Heavisideova funkce o τ , tedy

$$\eta(t - \tau) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t < \tau, \\ 1, & \text{pro } t \geq \tau. \end{cases}$$

Z Příkladu 1 víme, že

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 7

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \eta(t - \tau)$.

Poznamenejme, že funkce f je posunutá Heavisideova funkce o τ , tedy

$$\eta(t - \tau) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t < \tau, \\ 1, & \text{pro } t \geq \tau. \end{cases}$$

Z Příkladu 1 víme, že $\mathcal{L}(\eta(t)) = 1/p$.

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 7

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \eta(t - \tau)$.

Poznamenejme, že funkce f je posunutá Heavisideova funkce o τ , tedy

$$\eta(t - \tau) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t < \tau, \\ 1, & \text{pro } t \geq \tau. \end{cases}$$

Z Příkladu 1 víme, že $\mathcal{L}(\eta(t)) = 1/p$.
Nyní z vlastnosti posunutí Věty 3 plyne

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 7

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \eta(t - \tau)$.

Poznamenejme, že funkce f je posunutá Heavisideova funkce o τ , tedy

$$\eta(t - \tau) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t < \tau, \\ 1, & \text{pro } t \geq \tau. \end{cases}$$

Z Příkladu 1 víme, že $\mathcal{L}(\eta(t)) = 1/p$.
Nyní z vlastnosti posunutí Věty 3 plyne

$$\mathcal{L}(\eta(t - \tau)) =$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 7

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \eta(t - \tau)$.

Poznamenejme, že funkce f je posunutá Heavisideova funkce o τ , tedy

$$\eta(t - \tau) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t < \tau, \\ 1, & \text{pro } t \geq \tau. \end{cases}$$

Z Příkladu 1 víme, že $\mathcal{L}(\eta(t)) = 1/p$.
Nyní z vlastnosti posunutí Věty 3 plyne

$$\mathcal{L}(\eta(t - \tau)) = \frac{e^{-\tau p}}{p}.$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 8

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 8

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \sin(\omega t - \varphi)\eta(\omega t - \varphi)$, kde $\varphi > 0$ a $\omega > 0$.

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 8

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \sin(\omega t - \varphi)\eta(\omega t - \varphi)$, kde $\varphi > 0$ a $\omega > 0$. Z vlastnosti podobnosti Věty 3 platí

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 8

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \sin(\omega t - \varphi)\eta(\omega t - \varphi)$, kde $\varphi > 0$ a $\omega > 0$. Z vlastnosti podobnosti Věty 3 platí

$$\mathcal{L}(\sin(\omega t - \varphi)\eta(\omega t - \varphi)) =$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 8

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \sin(\omega t - \varphi)\eta(\omega t - \varphi)$, kde $\varphi > 0$ a $\omega > 0$. Z vlastnosti podobnosti Věty 3 platí

$$\mathcal{L}(\sin(\omega t - \varphi)\eta(\omega t - \varphi)) = \frac{1}{\omega} F\left(\frac{p}{\omega}\right),$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 8

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \sin(\omega t - \varphi)\eta(\omega t - \varphi)$, kde $\varphi > 0$ a $\omega > 0$. Z vlastnosti podobnosti Věty 3 platí

$$\mathcal{L}(\sin(\omega t - \varphi)\eta(\omega t - \varphi)) = \frac{1}{\omega} F\left(\frac{p}{\omega}\right),$$

kde $\mathcal{L}(\sin(t - \varphi)\eta(t - \varphi)) = F(p)$.

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 8

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \sin(\omega t - \varphi)\eta(\omega t - \varphi)$, kde $\varphi > 0$ a $\omega > 0$. Z vlastnosti podobnosti Věty 3 platí

$$\mathcal{L}(\sin(\omega t - \varphi)\eta(\omega t - \varphi)) = \frac{1}{\omega} F\left(\frac{p}{\omega}\right),$$

kde $\mathcal{L}(\sin(t - \varphi)\eta(t - \varphi)) = F(p)$.
Z Příkladu 4 víme, že

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 8

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \sin(\omega t - \varphi)\eta(\omega t - \varphi)$, kde $\varphi > 0$ a $\omega > 0$. Z vlastnosti podobnosti Věty 3 platí

$$\mathcal{L}(\sin(\omega t - \varphi)\eta(\omega t - \varphi)) = \frac{1}{\omega} F\left(\frac{p}{\omega}\right),$$

kde $\mathcal{L}(\sin(t - \varphi)\eta(t - \varphi)) = F(p)$.

Z Příkladu 4 víme, že

$$\mathcal{L}(\sin(t)) = \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 8

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \sin(\omega t - \varphi)\eta(\omega t - \varphi)$, kde $\varphi > 0$ a $\omega > 0$. Z vlastnosti podobnosti Věty 3 platí

$$\mathcal{L}(\sin(\omega t - \varphi)\eta(\omega t - \varphi)) = \frac{1}{\omega} F\left(\frac{p}{\omega}\right),$$

kde $\mathcal{L}(\sin(t - \varphi)\eta(t - \varphi)) = F(p)$.

Z Příkladu 4 víme, že

$$\mathcal{L}(\sin(t)) = \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Z vlastnosti posunutí Věty 3 dostáváme

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 8

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \sin(\omega t - \varphi)\eta(\omega t - \varphi)$, kde $\varphi > 0$ a $\omega > 0$. Z vlastnosti podobnosti Věty 3 platí

$$\mathcal{L}(\sin(\omega t - \varphi)\eta(\omega t - \varphi)) = \frac{1}{\omega} F\left(\frac{p}{\omega}\right),$$

kde $\mathcal{L}(\sin(t - \varphi)\eta(t - \varphi)) = F(p)$.

Z Příkladu 4 víme, že

$$\mathcal{L}(\sin(t)) = \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Z vlastnosti posunutí Věty 3 dostáváme

$$F(p) =$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 8

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \sin(\omega t - \varphi)\eta(\omega t - \varphi)$, kde $\varphi > 0$ a $\omega > 0$. Z vlastnosti podobnosti Věty 3 platí

$$\mathcal{L}(\sin(\omega t - \varphi)\eta(\omega t - \varphi)) = \frac{1}{\omega} F\left(\frac{p}{\omega}\right),$$

kde $\mathcal{L}(\sin(t - \varphi)\eta(t - \varphi)) = F(p)$.

Z Příkladu 4 víme, že

$$\mathcal{L}(\sin(t)) = \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Z vlastnosti posunutí Věty 3 dostáváme

$$F(p) = \mathcal{L}(\sin(t - \varphi)\eta(t - \varphi))$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 8

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \sin(\omega t - \varphi)\eta(\omega t - \varphi)$, kde $\varphi > 0$ a $\omega > 0$. Z vlastnosti podobnosti Věty 3 platí

$$\mathcal{L}(\sin(\omega t - \varphi)\eta(\omega t - \varphi)) = \frac{1}{\omega} F\left(\frac{p}{\omega}\right),$$

kde $\mathcal{L}(\sin(t - \varphi)\eta(t - \varphi)) = F(p)$.

Z Příkladu 4 víme, že

$$\mathcal{L}(\sin(t)) = \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Z vlastnosti posunutí Věty 3 dostáváme

$$F(p) = \mathcal{L}(\sin(t - \varphi)\eta(t - \varphi)) = \frac{1}{p^2 + 1} e^{-\varphi p}.$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 8

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \sin(\omega t - \varphi)\eta(\omega t - \varphi)$, kde $\varphi > 0$ a $\omega > 0$. Z vlastnosti podobnosti Věty 3 platí

$$\mathcal{L}(\sin(\omega t - \varphi)\eta(\omega t - \varphi)) = \frac{1}{\omega} F\left(\frac{p}{\omega}\right),$$

kde $\mathcal{L}(\sin(t - \varphi)\eta(t - \varphi)) = F(p)$.

Z Příkladu 4 víme, že

$$\mathcal{L}(\sin(t)) = \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Z vlastnosti posunutí Věty 3 dostáváme

$$F(p) = \mathcal{L}(\sin(t - \varphi)\eta(t - \varphi)) = \frac{1}{p^2 + 1} e^{-\varphi p}.$$

Celkově tedy

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 8

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \sin(\omega t - \varphi)\eta(\omega t - \varphi)$, kde $\varphi > 0$ a $\omega > 0$. Z vlastnosti podobnosti Věty 3 platí

$$\mathcal{L}(\sin(\omega t - \varphi)\eta(\omega t - \varphi)) = \frac{1}{\omega} F\left(\frac{p}{\omega}\right),$$

kde $\mathcal{L}(\sin(t - \varphi)\eta(t - \varphi)) = F(p)$.

Z Příkladu 4 víme, že

$$\mathcal{L}(\sin(t)) = \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Z vlastnosti posunutí Věty 3 dostáváme

$$F(p) = \mathcal{L}(\sin(t - \varphi)\eta(t - \varphi)) = \frac{1}{p^2 + 1} e^{-\varphi p}.$$

Celkově tedy

$$\mathcal{L}(\sin(\omega t - \varphi)\eta(\omega t - \varphi)) =$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 8

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \sin(\omega t - \varphi)\eta(\omega t - \varphi)$, kde $\varphi > 0$ a $\omega > 0$. Z vlastnosti podobnosti Věty 3 platí

$$\mathcal{L}(\sin(\omega t - \varphi)\eta(\omega t - \varphi)) = \frac{1}{\omega} F\left(\frac{p}{\omega}\right),$$

kde $\mathcal{L}(\sin(t - \varphi)\eta(t - \varphi)) = F(p)$.

Z Příkladu 4 víme, že

$$\mathcal{L}(\sin(t)) = \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Z vlastnosti posunutí Věty 3 dostáváme

$$F(p) = \mathcal{L}(\sin(t - \varphi)\eta(t - \varphi)) = \frac{1}{p^2 + 1} e^{-\varphi p}.$$

Celkově tedy

$$\mathcal{L}(\sin(\omega t - \varphi)\eta(\omega t - \varphi)) = \frac{1}{\omega} \frac{1}{(p/\omega)^2 + 1} e^{-\varphi p/\omega}$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 8

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \sin(\omega t - \varphi)\eta(\omega t - \varphi)$, kde $\varphi > 0$ a $\omega > 0$. Z vlastnosti podobnosti Věty 3 platí

$$\mathcal{L}(\sin(\omega t - \varphi)\eta(\omega t - \varphi)) = \frac{1}{\omega} F\left(\frac{p}{\omega}\right),$$

kde $\mathcal{L}(\sin(t - \varphi)\eta(t - \varphi)) = F(p)$.

Z Příkladu 4 víme, že

$$\mathcal{L}(\sin(t)) = \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Z vlastnosti posunutí Věty 3 dostáváme

$$F(p) = \mathcal{L}(\sin(t - \varphi)\eta(t - \varphi)) = \frac{1}{p^2 + 1} e^{-\varphi p}.$$

Celkově tedy

$$\mathcal{L}(\sin(\omega t - \varphi)\eta(\omega t - \varphi)) = \frac{1}{\omega} \frac{1}{(p/\omega)^2 + 1} e^{-\varphi p/\omega} = \frac{\omega e^{-\varphi p/\omega}}{p^2 + \omega^2}.$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 9

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 9

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \sin^3(t)$.

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 9

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \sin^3(t)$.

Nejprve označme $\mathcal{L}(\sin^3(t)) = F(p)$.

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 9

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \sin^3(t)$.

Nejprve označme $\mathcal{L}(\sin^3(t)) = F(p)$.

Dále

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 9

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \sin^3(t)$.

Nejprve označme $\mathcal{L}(\sin^3(t)) = F(p)$.

Dále

$$(\sin^3(t))' =$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 9

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \sin^3(t)$.

Nejprve označme $\mathcal{L}(\sin^3(t)) = F(p)$.

Dále

$$(\sin^3(t))' = 3 \sin^2(t) \cos(t)$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 9

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \sin^3(t)$.

Nejprve označme $\mathcal{L}(\sin^3(t)) = F(p)$.

Dále

$$(\sin^3(t))' = 3 \sin^2(t) \cos(t)$$

a

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 9

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \sin^3(t)$.

Nejprve označme $\mathcal{L}(\sin^3(t)) = F(p)$.

Dále

$$(\sin^3(t))' = 3 \sin^2(t) \cos(t)$$

a

$$(\sin^3(t))'' =$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 9

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \sin^3(t)$.

Nejprve označme $\mathcal{L}(\sin^3(t)) = F(p)$.

Dále

$$(\sin^3(t))' = 3 \sin^2(t) \cos(t)$$

a

$$(\sin^3(t))'' = 6 \sin(t) \cos^2(t) - 3 \sin^3(t) =$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 9

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \sin^3(t)$.

Nejprve označme $\mathcal{L}(\sin^3(t)) = F(p)$.

Dále

$$(\sin^3(t))' = 3 \sin^2(t) \cos(t)$$

a

$$(\sin^3(t))'' = 6 \sin(t) \cos^2(t) - 3 \sin^3(t) = 6 \sin(t) - 9 \sin^3(t).$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 9

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \sin^3(t)$.

Nejprve označme $\mathcal{L}(\sin^3(t)) = F(p)$.

Dále

$$(\sin^3(t))' = 3 \sin^2(t) \cos(t)$$

a

$$(\sin^3(t))'' = 6 \sin(t) \cos^2(t) - 3 \sin^3(t) = 6 \sin(t) - 9 \sin^3(t).$$

Podle Příkladu 4 máme

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 9

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \sin^3(t)$.

Nejprve označme $\mathcal{L}(\sin^3(t)) = F(p)$.

Dále

$$(\sin^3(t))' = 3 \sin^2(t) \cos(t)$$

a

$$(\sin^3(t))'' = 6 \sin(t) \cos^2(t) - 3 \sin^3(t) = 6 \sin(t) - 9 \sin^3(t).$$

Podle Příkladu 4 máme

$$\mathcal{L}((\sin^3(t))'') =$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 9

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \sin^3(t)$.

Nejprve označme $\mathcal{L}(\sin^3(t)) = F(p)$.

Dále

$$(\sin^3(t))' = 3 \sin^2(t) \cos(t)$$

a

$$(\sin^3(t))'' = 6 \sin(t) \cos^2(t) - 3 \sin^3(t) = 6 \sin(t) - 9 \sin^3(t).$$

Podle Příkladu 4 máme

$$\mathcal{L}((\sin^3(t))'') = \frac{6}{p^2 + 1} - 9 \mathcal{L}(\sin^3(t))$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 9

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \sin^3(t)$.

Nejprve označme $\mathcal{L}(\sin^3(t)) = F(p)$.

Dále

$$(\sin^3(t))' = 3 \sin^2(t) \cos(t)$$

a

$$(\sin^3(t))'' = 6 \sin(t) \cos^2(t) - 3 \sin^3(t) = 6 \sin(t) - 9 \sin^3(t).$$

Podle Příkladu 4 máme

$$\mathcal{L}((\sin^3(t))'') = \frac{6}{p^2 + 1} - 9 \mathcal{L}(\sin^3(t)) = \frac{6}{p^2 + 1} - 9F(p). \quad (5)$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 9

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 9

Navíc

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 9

Navíc

$$(\sin^3(t))|_{t=0_+} =$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 9

Navíc

$$(\sin^3(t))|_{t=0_+} = (\sin^3(t))'|_{t=0_+}$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 9

Navíc

$$(\sin^3(t))|_{t=0_+} = (\sin^3(t))'|_{t=0_+} = 0$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 9

Navíc

$$(\sin^3(t))|_{t=0_+} = (\sin^3(t))'|_{t=0_+} = 0$$

a podle vlastnosti derivace předmětu Věty 3 máme

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 9

Navíc

$$(\sin^3(t))|_{t=0_+} = (\sin^3(t))'|_{t=0_+} = 0$$

a podle vlastnosti derivace předmětu Věty 3 máme

$$\mathcal{L}(\sin^3(t))'' =$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 9

Navíc

$$(\sin^3(t))|_{t=0_+} = (\sin^3(t))'|_{t=0_+} = 0$$

a podle vlastnosti derivace předmětu Věty 3 máme

$$\mathcal{L}(\sin^3(t))'' = p^2 F(p) - p \cdot 0 - 0$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 9

Navíc

$$(\sin^3(t))|_{t=0_+} = (\sin^3(t))'|_{t=0_+} = 0$$

a podle vlastnosti derivace předmětu Věty 3 máme

$$\mathcal{L}(\sin^3(t))'' = p^2 F(p) - p \cdot 0 - 0 = p^2 F(p). \quad (6)$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 9

Navíc

$$(\sin^3(t))|_{t=0_+} = (\sin^3(t))'|_{t=0_+} = 0$$

a podle vlastnosti derivace předmětu Věty 3 máme

$$\mathcal{L}(\sin^3(t))'' = p^2 F(p) - p \cdot 0 - 0 = p^2 F(p). \quad (6)$$

Nyní porovnejme (5) a (6), dostáváme

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 9

Navíc

$$(\sin^3(t))|_{t=0_+} = (\sin^3(t))'|_{t=0_+} = 0$$

a podle vlastnosti derivace předmětu Věty 3 máme

$$\mathcal{L}(\sin^3(t))'' = p^2 F(p) - p \cdot 0 - 0 = p^2 F(p). \quad (6)$$

Nyní porovnejme (5) a (6), dostáváme

$$\frac{6}{p^2 + 1} - 9F(p) =$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 9

Navíc

$$(\sin^3(t))|_{t=0_+} = (\sin^3(t))'|_{t=0_+} = 0$$

a podle vlastnosti derivace předmětu Věty 3 máme

$$\mathcal{L}(\sin^3(t))'' = p^2 F(p) - p \cdot 0 - 0 = p^2 F(p). \quad (6)$$

Nyní porovnejme (5) a (6), dostáváme

$$\frac{6}{p^2 + 1} - 9F(p) = p^2 F(p),$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 9

Navíc

$$(\sin^3(t))|_{t=0_+} = (\sin^3(t))'|_{t=0_+} = 0$$

a podle vlastnosti derivace předmětu Věty 3 máme

$$\mathcal{L}(\sin^3(t))'' = p^2 F(p) - p \cdot 0 - 0 = p^2 F(p). \quad (6)$$

Nyní porovnejme (5) a (6), dostáváme

$$\frac{6}{p^2 + 1} - 9F(p) = p^2 F(p),$$

tedy

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 9

Navíc

$$(\sin^3(t))|_{t=0_+} = (\sin^3(t))'|_{t=0_+} = 0$$

a podle vlastnosti derivace předmětu Věty 3 máme

$$\mathcal{L}(\sin^3(t))'' = p^2 F(p) - p \cdot 0 - 0 = p^2 F(p). \quad (6)$$

Nyní porovnejme (5) a (6), dostáváme

$$\frac{6}{p^2 + 1} - 9F(p) = p^2 F(p),$$

tedy

$$F(p) =$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 9

Navíc

$$(\sin^3(t))|_{t=0_+} = (\sin^3(t))'|_{t=0_+} = 0$$

a podle vlastnosti derivace předmětu Věty 3 máme

$$\mathcal{L}(\sin^3(t))'' = p^2 F(p) - p \cdot 0 - 0 = p^2 F(p). \quad (6)$$

Nyní porovnejme (5) a (6), dostáváme

$$\frac{6}{p^2 + 1} - 9F(p) = p^2 F(p),$$

tedy

$$F(p) = \frac{6}{(p^2 + 1)(p^2 + 9)}.$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 10

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 10

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = t^n$.

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 10

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = t^n$.

Z Příkladu 1 víme, že

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 10

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = t^n$.

Z Příkladu 1 víme, že

$$\mathcal{L}(\eta(t)) = \frac{1}{p}.$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 10

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = t^n$.

Z Příkladu 1 víme, že

$$\mathcal{L}(\eta(t)) = \frac{1}{p}.$$

Pak z vlastnosti integrování předmětu dostáváme

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 10

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = t^n$.

Z Příkladu 1 víme, že

$$\mathcal{L}(\eta(t)) = \frac{1}{p}.$$

Pak z vlastnosti integrování předmětu dostáváme

$$\mathcal{L}(t) =$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 10

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = t^n$.

Z Příkladu 1 víme, že

$$\mathcal{L}(\eta(t)) = \frac{1}{p}.$$

Pak z vlastnosti integrování předmětu dostáváme

$$\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}\left(\int_0^t 1 \, d\tau\right)$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 10

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = t^n$.

Z Příkladu 1 víme, že

$$\mathcal{L}(\eta(t)) = \frac{1}{p}.$$

Pak z vlastnosti integrování předmětu dostáváme

$$\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}\left(\int_0^t 1 \, d\tau\right) = \frac{1}{p^2},$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 10

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = t^n$.

Z Příkladu 1 víme, že

$$\mathcal{L}(\eta(t)) = \frac{1}{p}.$$

Pak z vlastnosti integrování předmětu dostáváme

$$\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}\left(\int_0^t 1 \, d\tau\right) = \frac{1}{p^2},$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{t^2}{2}\right) =$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 10

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = t^n$.

Z Příkladu 1 víme, že

$$\mathcal{L}(\eta(t)) = \frac{1}{p}.$$

Pak z vlastnosti integrování předmětu dostáváme

$$\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}\left(\int_0^t 1 \, d\tau\right) = \frac{1}{p^2},$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{t^2}{2}\right) = \mathcal{L}\left(\int_0^t \tau \, d\tau\right)$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 10

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = t^n$.

Z Příkladu 1 víme, že

$$\mathcal{L}(\eta(t)) = \frac{1}{p}.$$

Pak z vlastnosti integrování předmětu dostáváme

$$\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}\left(\int_0^t 1 \, d\tau\right) = \frac{1}{p^2},$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{t^2}{2}\right) = \mathcal{L}\left(\int_0^t \tau \, d\tau\right) = \frac{1}{p^3},$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 10

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = t^n$.

Z Příkladu 1 víme, že

$$\mathcal{L}(\eta(t)) = \frac{1}{p}.$$

Pak z vlastnosti integrování předmětu dostáváme

$$\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}\left(\int_0^t 1 \, d\tau\right) = \frac{1}{p^2},$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{t^2}{2}\right) = \mathcal{L}\left(\int_0^t \tau \, d\tau\right) = \frac{1}{p^3}, \dots$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 10

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = t^n$.

Z Příkladu 1 víme, že

$$\mathcal{L}(\eta(t)) = \frac{1}{p}.$$

Pak z vlastnosti integrování předmětu dostáváme

$$\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}\left(\int_0^t 1 \, d\tau\right) = \frac{1}{p^2},$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{t^2}{2}\right) = \mathcal{L}\left(\int_0^t \tau \, d\tau\right) = \frac{1}{p^3}, \dots$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{t^n}{n!}\right) =$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 10

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = t^n$.

Z Příkladu 1 víme, že

$$\mathcal{L}(\eta(t)) = \frac{1}{p}.$$

Pak z vlastnosti integrování předmětu dostáváme

$$\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}\left(\int_0^t 1 \, d\tau\right) = \frac{1}{p^2},$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{t^2}{2}\right) = \mathcal{L}\left(\int_0^t \tau \, d\tau\right) = \frac{1}{p^3}, \dots$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{t^n}{n!}\right) = \mathcal{L}\left(\int_0^t \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!} \, d\tau\right)$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 10

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = t^n$.

Z Příkladu 1 víme, že

$$\mathcal{L}(\eta(t)) = \frac{1}{p}.$$

Pak z vlastnosti integrování předmětu dostáváme

$$\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}\left(\int_0^t 1 \, d\tau\right) = \frac{1}{p^2},$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{t^2}{2}\right) = \mathcal{L}\left(\int_0^t \tau \, d\tau\right) = \frac{1}{p^3}, \dots$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{t^n}{n!}\right) = \mathcal{L}\left(\int_0^t \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!} \, d\tau\right) = \frac{1}{p^{n+1}}.$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 10

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = t^n$.

Z Příkladu 1 víme, že

$$\mathcal{L}(\eta(t)) = \frac{1}{p}.$$

Pak z vlastnosti integrování předmětu dostáváme

$$\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}\left(\int_0^t 1 \, d\tau\right) = \frac{1}{p^2},$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{t^2}{2}\right) = \mathcal{L}\left(\int_0^t \tau \, d\tau\right) = \frac{1}{p^3}, \dots$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{t^n}{n!}\right) = \mathcal{L}\left(\int_0^t \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!} \, d\tau\right) = \frac{1}{p^{n+1}}.$$

Tedy

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 10

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = t^n$.

Z Příkladu 1 víme, že

$$\mathcal{L}(\eta(t)) = \frac{1}{p}.$$

Pak z vlastnosti integrování předmětu dostáváme

$$\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}\left(\int_0^t 1 \, d\tau\right) = \frac{1}{p^2},$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{t^2}{2}\right) = \mathcal{L}\left(\int_0^t \tau \, d\tau\right) = \frac{1}{p^3}, \dots$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{t^n}{n!}\right) = \mathcal{L}\left(\int_0^t \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!} \, d\tau\right) = \frac{1}{p^{n+1}}.$$

Tedy

$$\mathcal{L}(t^n) =$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 10

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = t^n$.

Z Příkladu 1 víme, že

$$\mathcal{L}(\eta(t)) = \frac{1}{p}.$$

Pak z vlastnosti integrování předmětu dostáváme

$$\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}\left(\int_0^t 1 \, d\tau\right) = \frac{1}{p^2},$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{t^2}{2}\right) = \mathcal{L}\left(\int_0^t \tau \, d\tau\right) = \frac{1}{p^3}, \dots$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{t^n}{n!}\right) = \mathcal{L}\left(\int_0^t \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!} \, d\tau\right) = \frac{1}{p^{n+1}}.$$

Tedy

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 11

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 11

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \sin(t)/t$.

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 11

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \sin(t)/t$.

Z Příkladu 2 víme, že

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 11

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \sin(t)/t$.

Z Příkladu 2 víme, že

$$\mathcal{L}(\sin(t)) = \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 11

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \sin(t)/t$.

Z Příkladu 2 víme, že

$$\mathcal{L}(\sin(t)) = \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Pak z vlastnosti integrování obrazu máme

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 11

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \sin(t)/t$.

Z Příkladu 2 víme, že

$$\mathcal{L}(\sin(t)) = \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Pak z vlastnosti integrování obrazu máme

$$\mathcal{L}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) =$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 11

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \sin(t)/t$.

Z Příkladu 2 víme, že

$$\mathcal{L}(\sin(t)) = \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Pak z vlastnosti integrování obrazu máme

$$\mathcal{L}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) = \int_p^\infty \frac{1}{z^2 + 1} dz$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 11

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \sin(t)/t$.

Z Příkladu 2 víme, že

$$\mathcal{L}(\sin(t)) = \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Pak z vlastnosti integrování obrazu máme

$$\mathcal{L}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) = \int_p^\infty \frac{1}{z^2 + 1} \mathrm{d}z = [\operatorname{arctg}(z)]_p^\infty$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 11

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \sin(t)/t$.

Z Příkladu 2 víme, že

$$\mathcal{L}(\sin(t)) = \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Pak z vlastnosti integrování obrazu máme

$$\mathcal{L}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) = \int_p^\infty \frac{1}{z^2 + 1} \mathrm{d}z = [\arctg(z)]_p^\infty = \frac{\pi}{2} - \arctg(p)$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 11

Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \sin(t)/t$.

Z Příkladu 2 víme, že

$$\mathcal{L}(\sin(t)) = \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Pak z vlastnosti integrování obrazu máme

$$\mathcal{L}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) = \int_p^\infty \frac{1}{z^2 + 1} \mathrm{d}z = [\arctg(z)]_p^\infty = \frac{\pi}{2} - \arctg(p) = \operatorname{arccotg}(p).$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 4 (druhá limitní)

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 4 (druhá limitní)

Nechť f a f' jsou předměty a navíc f je na intervalu $(0, \infty)$ spojitá.

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 4 (druhá limitní)

*Nechť f a f' jsou předměty a navíc f je na intervalu $(0, \infty)$ spojitá.
Je-li $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ a α_0 je index růstu funkce f' , pak*

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 4 (druhá limitní)

*Nechť f a f' jsou předměty a navíc f je na intervalu $(0, \infty)$ spojitá.
Je-li $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ a α_0 je index růstu funkce f' , pak*

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = f(0_+).$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 4 (druhá limitní)

*Nechť f a f' jsou předměty a navíc f je na intervalu $(0, \infty)$ spojitá.
Je-li $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ a α_0 je index růstu funkce f' , pak*

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = f(0_+).$$

Věta 5 (třetí limitní)

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 4 (druhá limitní)

*Nechť f a f' jsou předměty a navíc f je na intervalu $(0, \infty)$ spojitá.
Je-li $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ a α_0 je index růstu funkce f' , pak*

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = f(0_+).$$

Věta 5 (třetí limitní)

Nechť f a f' jsou předměty a navíc f je na intervalu $(0, \infty)$ spojitá.

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 4 (druhá limitní)

*Nechť f a f' jsou předměty a navíc f je na intervalu $(0, \infty)$ spojitá.
Je-li $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ a α_0 je index růstu funkce f' , pak*

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = f(0_+).$$

Věta 5 (třetí limitní)

*Nechť f a f' jsou předměty a navíc f je na intervalu $(0, \infty)$ spojitá.
Je-li $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ a existuje $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \neq \infty$, pak*

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 4 (druhá limitní)

*Nechť f a f' jsou předměty a navíc f je na intervalu $(0, \infty)$ spojitá.
Je-li $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ a α_0 je index růstu funkce f' , pak*

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = f(0_+).$$

Věta 5 (třetí limitní)

*Nechť f a f' jsou předměty a navíc f je na intervalu $(0, \infty)$ spojitá.
Je-li $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ a existuje $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \neq \infty$, pak*

$$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t).$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Definice 4

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Definice 4

Konvolucí funkcí f a g nazýváme funkci h definovanou předpisem

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Definice 4

Konvolucí funkcí f a g nazýváme funkci h definovanou předpisem

$$h(t) =$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Definice 4

Konvolucí funkcí f a g nazýváme funkci h definovanou předpisem

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) \mathrm{d}\tau, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Definice 4

Konvolucí funkcí f a g nazýváme funkci h definovanou předpisem

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) \mathrm{d}\tau, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Značíme

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Definice 4

Konvolucí funkcí f a g nazýváme funkci h definovanou předpisem

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) \mathrm{d}\tau, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Značíme

$$h = f * g.$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Definice 4

Konvolucí funkcí f a g nazýváme funkci h definovanou předpisem

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) \mathrm{d}\tau, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Značíme

$$h = f * g.$$

Pokud jsou funkce f a g předměty, pak

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Definice 4

Konvolucí funkcí f a g nazýváme funkci h definovanou předpisem

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) \mathrm{d}\tau, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Značíme

$$h = f * g.$$

Pokud jsou funkce f a g předměty, pak

$$h(t) =$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Definice 4

Konvolucí funkcí f a g nazýváme funkci h definovanou předpisem

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) \mathrm{d}\tau, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Značíme

$$h = f * g.$$

Pokud jsou funkce f a g předměty, pak

$$h(t) = (f * g)(t)$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Definice 4

Konvolucí funkcí f a g nazýváme funkci h definovanou předpisem

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) \mathrm{d}\tau, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Značíme

$$h = f * g.$$

Pokud jsou funkce f a g předměty, pak

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) \mathrm{d}\tau,$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Definice 4

Konvolucí funkcí f a g nazýváme funkci h definovanou předpisem

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) \, d\tau, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Značíme

$$h = f * g.$$

Pokud jsou funkce f a g předměty, pak

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) \, d\tau,$$

což plyne z vlastnosti předmětu,

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Definice 4

Konvolucí funkcí f a g nazýváme funkci h definovanou předpisem

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) \mathrm{d}\tau, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Značíme

$$h = f * g.$$

Pokud jsou funkce f a g předměty, pak

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) \mathrm{d}\tau,$$

což plyne z vlastnosti předmětu, tj. $f(\tau) = 0$ pro $\tau < 0$ a $g(t - \tau) = 0$ pro $t < \tau$.

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 6

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 6

Konvoluce má následující vlastnosti:

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 6

Konvoluce má následující vlastnosti:

1. *komutativita:*

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 6

Konvoluce má následující vlastnosti:

1. *komutativita: $f * g = g * f$,*

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 6

Konvoluce má následující vlastnosti:

1. *komutativita: $f * g = g * f$,*
2. *asociativita:*

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 6

Konvoluce má následující vlastnosti:

1. *komutativita:* $f * g = g * f$,
2. *asociativita:* $(f * g) * h = f * (g * h)$,

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 6

Konvoluce má následující vlastnosti:

1. *komutativita: $f * g = g * f$,*
2. *asociativita: $(f * g) * h = f * (g * h)$,*
3. *distributivita na sčítání:*

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 6

Konvoluce má následující vlastnosti:

1. *komutativita:* $f * g = g * f$,
2. *asociativita:* $(f * g) * h = f * (g * h)$,
3. *distributivita na sčítání:* $f * (h + g) = (f * h) + (f * g)$,

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 6

Konvoluce má následující vlastnosti:

1. *komutativita:* $f * g = g * f$,
2. *asociativita:* $(f * g) * h = f * (g * h)$,
3. *distributivita na sčítání:* $f * (h + g) = (f * h) + (f * g)$,
4. $(cf) * g = f * (cg) = c(f * g)$,

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 6

Konvoluce má následující vlastnosti:

1. *komutativita:* $f * g = g * f$,
2. *asociativita:* $(f * g) * h = f * (g * h)$,
3. *distributivita na sčítání:* $f * (h + g) = (f * h) + (f * g)$,
4. $(cf) * g = f * (cg) = c(f * g)$, kde c je konstanta.

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 6

Konvoluce má následující vlastnosti:

1. *komutativita: $f * g = g * f$,*
2. *asociativita: $(f * g) * h = f * (g * h)$,*
3. *distributivita na sčítání: $f * (h + g) = (f * h) + (f * g)$,*
4. *$(cf) * g = f * (cg) = c(f * g)$, kde c je konstanta.*

Příklad 12

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 6

Konvoluce má následující vlastnosti:

1. *komutativita:* $f * g = g * f$,
2. *asociativita:* $(f * g) * h = f * (g * h)$,
3. *distributivita na sčítání:* $f * (h + g) = (f * h) + (f * g)$,
4. $(cf) * g = f * (cg) = c(f * g)$, kde c je konstanta.

Příklad 12

Najděte konvoluci předmětů $f(t) = t$ a $g(t) = \sin(t)$.

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 6

Konvoluce má následující vlastnosti:

1. *komutativita: $f * g = g * f$,*
2. *asociativita: $(f * g) * h = f * (g * h)$,*
3. *distributivita na sčítání: $f * (h + g) = (f * h) + (f * g)$,*
4. *$(cf) * g = f * (cg) = c(f * g)$, kde c je konstanta.*

Příklad 12

Najděte konvoluci předmětů $f(t) = t$ a $g(t) = \sin(t)$.

Postupujme podle definice, tedy

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 6

Konvoluce má následující vlastnosti:

1. *komutativita: $f * g = g * f$,*
2. *asociativita: $(f * g) * h = f * (g * h)$,*
3. *distributivita na sčítání: $f * (h + g) = (f * h) + (f * g)$,*
4. *$(cf) * g = f * (cg) = c(f * g)$, kde c je konstanta.*

Příklad 12

Najděte konvoluci předmětů $f(t) = t$ a $g(t) = \sin(t)$.

Postupujme podle definice, tedy

$$(f * g)(t) =$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 6

Konvoluce má následující vlastnosti:

1. *komutativita:* $f * g = g * f$,
2. *asociativita:* $(f * g) * h = f * (g * h)$,
3. *distributivita na sčítání:* $f * (h + g) = (f * h) + (f * g)$,
4. $(cf) * g = f * (cg) = c(f * g)$, kde c je konstanta.

Příklad 12

Najděte konvoluci předmětů $f(t) = t$ a $g(t) = \sin(t)$.

Postupujme podle definice, tedy

$$(f * g)(t) = \sin(t) * t$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 6

Konvoluce má následující vlastnosti:

1. *komutativita: $f * g = g * f$,*
2. *asociativita: $(f * g) * h = f * (g * h)$,*
3. *distributivita na sčítání: $f * (h + g) = (f * h) + (f * g)$,*
4. *$(cf) * g = f * (cg) = c(f * g)$, kde c je konstanta.*

Příklad 12

Najděte konvoluci předmětů $f(t) = t$ a $g(t) = \sin(t)$.

Postupujme podle definice, tedy

$$(f * g)(t) = \sin(t) * t = \int_0^t \sin(\tau)(t - \tau) d\tau$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 6

Konvoluce má následující vlastnosti:

1. *komutativita: $f * g = g * f$,*
2. *asociativita: $(f * g) * h = f * (g * h)$,*
3. *distributivita na sčítání: $f * (h + g) = (f * h) + (f * g)$,*
4. *$(cf) * g = f * (cg) = c(f * g)$, kde c je konstanta.*

Příklad 12

Najděte konvoluci předmětů $f(t) = t$ a $g(t) = \sin(t)$.

Postupujme podle definice, tedy

$$(f * g)(t) = \sin(t) * t = \int_0^t \sin(\tau)(t - \tau) \, d\tau = t - \sin(t).$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 6

Konvoluce má následující vlastnosti:

1. *komutativita: $f * g = g * f$,*
2. *asociativita: $(f * g) * h = f * (g * h)$,*
3. *distributivita na sčítání: $f * (h + g) = (f * h) + (f * g)$,*
4. *$(cf) * g = f * (cg) = c(f * g)$, kde c je konstanta.*

Příklad 12

Najděte konvoluci předmětů $f(t) = t$ a $g(t) = \sin(t)$.

Postupujme podle definice, tedy

$$(f * g)(t) = \sin(t) * t = \int_0^t \sin(\tau)(t - \tau) d\tau = t - \sin(t).$$

Poznamenejme, že druhá rovnost platí díky předpokladu, že obě funkce jsou předměty,

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 6

Konvoluce má následující vlastnosti:

1. *komutativita: $f * g = g * f$,*
2. *asociativita: $(f * g) * h = f * (g * h)$,*
3. *distributivita na sčítání: $f * (h + g) = (f * h) + (f * g)$,*
4. *$(cf) * g = f * (cg) = c(f * g)$, kde c je konstanta.*

Příklad 12

Najděte konvoluci předmětů $f(t) = t$ a $g(t) = \sin(t)$.

Postupujme podle definice, tedy

$$(f * g)(t) = \sin(t) * t = \int_0^t \sin(\tau)(t - \tau) d\tau = t - \sin(t).$$

Poznamenejme, že druhá rovnost platí díky předpokladu, že obě funkce jsou předměty, tj. $f(\tau) = 0$ pro $\tau < 0$ a $g(t - \tau) = 0$ pro $t < \tau$.

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 7 (násobení obrazů)

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 7 (násobení obrazů)

Bud'te f a g předměty s indexy růstu α_0^f a α_0^g , $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ a $\mathcal{L}(g(t)) = G(p)$.

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 7 (násobení obrazů)

Bud'te f a g předměty s indexy růstu α_0^f a α_0^g , $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ a $\mathcal{L}(g(t)) = G(p)$.

*Pak $\alpha_0 = \max\{\alpha_0^f, \alpha_0^g\}$ je index růstu funkce $h = f * g$.*

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 7 (násobení obrazů)

Bud'te f a g předměty s indexy růstu α_0^f a α_0^g , $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ a $\mathcal{L}(g(t)) = G(p)$.

*Pak $\alpha_0 = \max\{\alpha_0^f, \alpha_0^g\}$ je index růstu funkce $h = f * g$.*

Navíc platí

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 7 (násobení obrazů)

Bud'te f a g předměty s indexy růstu α_0^f a α_0^g , $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ a $\mathcal{L}(g(t)) = G(p)$.

*Pak $\alpha_0 = \max\{\alpha_0^f, \alpha_0^g\}$ je index růstu funkce $h = f * g$.*

Navíc platí

$$\mathcal{L}((f * g)(t)) = F(p)G(p).$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 7 (násobení obrazů)

Bud'te f a g předměty s indexy růstu α_0^f a α_0^g , $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ a $\mathcal{L}(g(t)) = G(p)$.

*Pak $\alpha_0 = \max\{\alpha_0^f, \alpha_0^g\}$ je index růstu funkce $h = f * g$.*

Navíc platí

$$\mathcal{L}((f * g)(t)) = F(p)G(p).$$

Důsledek 2 (Duhamelův vzorec)

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 7 (násobení obrazů)

Bud'te f a g předměty s indexy růstu α_0^f a α_0^g , $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ a $\mathcal{L}(g(t)) = G(p)$.

*Pak $\alpha_0 = \max\{\alpha_0^f, \alpha_0^g\}$ je index růstu funkce $h = f * g$.*

Navíc platí

$$\mathcal{L}((f * g)(t)) = F(p)G(p).$$

Důsledek 2 (Duhamelův vzorec)

Bud'te f a g předměty, $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ a $\mathcal{L}(g(t)) = G(p)$.

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 7 (násobení obrazů)

Bud'te f a g předměty s indexy růstu α_0^f a α_0^g , $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ a $\mathcal{L}(g(t)) = G(p)$.

*Pak $\alpha_0 = \max\{\alpha_0^f, \alpha_0^g\}$ je index růstu funkce $h = f * g$.*

Navíc platí

$$\mathcal{L}((f * g)(t)) = F(p)G(p).$$

Důsledek 2 (Duhamelův vzorec)

Bud'te f a g předměty, $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ a $\mathcal{L}(g(t)) = G(p)$.

Bud' f' předmět a f je spojitá funkce na intervalu $[0, \infty)$.

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 7 (násobení obrazů)

Bud'te f a g předměty s indexy růstu α_0^f a α_0^g , $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ a $\mathcal{L}(g(t)) = G(p)$.

*Pak $\alpha_0 = \max\{\alpha_0^f, \alpha_0^g\}$ je index růstu funkce $h = f * g$.*

Navíc platí

$$\mathcal{L}((f * g)(t)) = F(p)G(p).$$

Důsledek 2 (Duhamelův vzorec)

Bud'te f a g předměty, $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ a $\mathcal{L}(g(t)) = G(p)$.

Bud' f' předmět a f je spojitá funkce na intervalu $[0, \infty)$.

Pak

$$pF(p)G(p) = \mathcal{L}(f(0_+)g(t) + (f' * g)(t)).$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 13

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 13

Najděte předmět k Laplaceovu obrazu

$$\frac{1}{(p^2 + 1)^2}.$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 13

Najděte předmět k Laplaceovu obrazu

$$\frac{1}{(p^2 + 1)^2}.$$

Z Příkladu 4 víme, že

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 13

Najděte předmět k Laplaceovu obrazu

$$\frac{1}{(p^2 + 1)^2}.$$

Z Příkladu 4 víme, že

$$\mathcal{L}(\sin(t)) = \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 13

Najděte předmět k Laplaceovu obrazu

$$\frac{1}{(p^2 + 1)^2}.$$

Z Příkladu 4 víme, že

$$\mathcal{L}(\sin(t)) = \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Položme

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 13

Najděte předmět k Laplaceovu obrazu

$$\frac{1}{(p^2 + 1)^2}.$$

Z Příkladu 4 víme, že

$$\mathcal{L}(\sin(t)) = \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Položme

$$F(p) = G(p) = \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 13

Najděte předmět k Laplaceovu obrazu

$$\frac{1}{(p^2 + 1)^2}.$$

Z Příkladu 4 víme, že

$$\mathcal{L}(\sin(t)) = \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Položme

$$F(p) = G(p) = \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Nyní použijeme Větu 7:

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 13

Najděte předmět k Laplaceovu obrazu

$$\frac{1}{(p^2 + 1)^2}.$$

Z Příkladu 4 víme, že

$$\mathcal{L}(\sin(t)) = \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Položme

$$F(p) = G(p) = \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Nyní použijeme Větu 7:

$$\frac{1}{(p^2 + 1)^2} =$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 13

Najděte předmět k Laplaceovu obrazu

$$\frac{1}{(p^2 + 1)^2}.$$

Z Příkladu 4 víme, že

$$\mathcal{L}(\sin(t)) = \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Položme

$$F(p) = G(p) = \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Nyní použijeme Větu 7:

$$\frac{1}{(p^2 + 1)^2} = F(p)G(p)$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 13

Najděte předmět k Laplaceovu obrazu

$$\frac{1}{(p^2 + 1)^2}.$$

Z Příkladu 4 víme, že

$$\mathcal{L}(\sin(t)) = \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Položme

$$F(p) = G(p) = \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Nyní použijeme Větu 7:

$$\frac{1}{(p^2 + 1)^2} = F(p)G(p) = \mathcal{L}(\sin(t) * \sin(t))$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 13

Najděte předmět k Laplaceovu obrazu

$$\frac{1}{(p^2 + 1)^2}.$$

Z Příkladu 4 víme, že

$$\mathcal{L}(\sin(t)) = \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Položme

$$F(p) = G(p) = \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Nyní použijeme Větu 7:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p^2 + 1)^2} &= F(p)G(p) = \mathcal{L}(\sin(t) * \sin(t)) \\ &= \int_0^t \sin(\tau) \sin(t - \tau) \, d\tau \end{aligned}$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 13

Najděte předmět k Laplaceovu obrazu

$$\frac{1}{(p^2 + 1)^2}.$$

Z Příkladu 4 víme, že

$$\mathcal{L}(\sin(t)) = \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Položme

$$F(p) = G(p) = \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Nyní použijeme Větu 7:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p^2 + 1)^2} &= F(p)G(p) = \mathcal{L}(\sin(t) * \sin(t)) \\ &= \int_0^t \sin(\tau) \sin(t - \tau) \, d\tau = 1/2 \sin(t) - 1/2 t \cos(t). \end{aligned}$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 8

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 8

Bud'te f a g předměty s indexy růstu α_0^f a α_0^g ,

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 8

Bud'te f a g předměty s indexy růstu α_0^f a α_0^g , $\alpha_0 = \max\{\alpha_0^f, \alpha_0^g\}$,

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 8

*Bud'te f a g předměty s indexy růstu α_0^f a α_0^g , $\alpha_0 = \max\{\alpha_0^f, \alpha_0^g\}$,
 $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ a $\mathcal{L}(g(t)) = G(p)$.*

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 8

*Bud'te f a g předměty s indexy růstu α_0^f a α_0^g , $\alpha_0 = \max\{\alpha_0^f, \alpha_0^g\}$,
 $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ a $\mathcal{L}(g(t)) = G(p)$.*

Pak

$$\mathcal{L}(f(t)g(t)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(z)G(p-z) \, dz,$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 8

*Bud'te f a g předměty s indexy růstu α_0^f a α_0^g , $\alpha_0 = \max\{\alpha_0^f, \alpha_0^g\}$,
 $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ a $\mathcal{L}(g(t)) = G(p)$.*

Pak

$$\mathcal{L}(f(t)g(t)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(z)G(p-z) \, dz,$$

kde $p \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} p > a + \alpha_0$ a $\alpha_0 < a$.

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 8

*Bud'te f a g předměty s indexy růstu α_0^f a α_0^g , $\alpha_0 = \max\{\alpha_0^f, \alpha_0^g\}$,
 $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ a $\mathcal{L}(g(t)) = G(p)$.*

Pak

$$\mathcal{L}(f(t)g(t)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(z)G(p-z) dz,$$

kde $p \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} p > a + \alpha_0$ a $\alpha_0 < a$.

Symbolem $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}$ rozumíme limitu

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 8

*Bud'te f a g předměty s indexy růstu α_0^f a α_0^g , $\alpha_0 = \max\{\alpha_0^f, \alpha_0^g\}$,
 $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ a $\mathcal{L}(g(t)) = G(p)$.*

Pak

$$\mathcal{L}(f(t)g(t)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(z)G(p-z) dz,$$

kde $p \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} p > a + \alpha_0$ a $\alpha_0 < a$.

Symbolem $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}$ rozumíme limitu

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{a-ib}^{a+ib};$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 8

*Bud'te f a g předměty s indexy růstu α_0^f a α_0^g , $\alpha_0 = \max\{\alpha_0^f, \alpha_0^g\}$,
 $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ a $\mathcal{L}(g(t)) = G(p)$.*

Pak

$$\mathcal{L}(f(t)g(t)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(z)G(p-z) dz,$$

kde $p \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} p > a + \alpha_0$ a $\alpha_0 < a$.

Symbolem $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}$ rozumíme limitu

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{a-ib}^{a+ib};$$

v integrálu $\int_{a-ib}^{a+ib}$ integrujeme po integrační křivce

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 8

*Bud'te f a g předměty s indexy růstu α_0^f a α_0^g , $\alpha_0 = \max\{\alpha_0^f, \alpha_0^g\}$,
 $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ a $\mathcal{L}(g(t)) = G(p)$.*

Pak

$$\mathcal{L}(f(t)g(t)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(z)G(p-z) dz,$$

kde $p \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} p > a + \alpha_0$ a $\alpha_0 < a$.

Symbolem $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}$ rozumíme limitu

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{a-ib}^{a+ib};$$

v integrálu $\int_{a-ib}^{a+ib}$ integrujeme po integrační křivce

$$z = a + it,$$

$t \in [-b, b]$, zde $0 < b \in \mathbb{R}$;

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Věta 8

Bud'te f a g předměty s indexy růstu α_0^f a α_0^g , $\alpha_0 = \max\{\alpha_0^f, \alpha_0^g\}$,
 $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ a $\mathcal{L}(g(t)) = G(p)$.

Pak

$$\mathcal{L}(f(t)g(t)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(z)G(p-z) dz,$$

kde $p \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} p > a + \alpha_0$ a $\alpha_0 < a$.

Symbolem $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}$ rozumíme limitu

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{a-ib}^{a+ib};$$

v integrálu $\int_{a-ib}^{a+ib}$ integrujeme po integrační křivce

$$z = a + it,$$

$t \in [-b, b]$, zde $0 < b \in \mathbb{R}$; koeficient $a \in \mathbb{R}$ volíme tak, aby $\alpha_0 < a$.

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 14

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 14

Pomocí Věty 8 najděte Laplaceův obraz funkce $e^t \sin(t)$.

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 14

Pomocí Věty 8 najděte Laplaceův obraz funkce $e^t \sin(t)$.

Z příkladů 4 a 2 víme, že

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 14

Pomocí Věty 8 najděte Laplaceův obraz funkce $e^t \sin(t)$.

Z příkladů 4 a 2 víme, že

$$\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(\sin(t)) = \frac{1}{p^2 + 1}$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 14

Pomocí Věty 8 najděte Laplaceův obraz funkce $e^t \sin(t)$.

Z příkladů 4 a 2 víme, že

$$\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(\sin(t)) = \frac{1}{p^2 + 1}$$

$$\mathcal{L}(g(t)) = \mathcal{L}(e^t) = \frac{1}{p - 1}.$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 14

*Pomocí Věty 8 najděte Laplaceův obraz funkce $e^t \sin(t)$.
Z příkladů 4 a 2 víme, že*

$$\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(\sin(t)) = \frac{1}{p^2 + 1}$$

$$\mathcal{L}(g(t)) = \mathcal{L}(e^t) = \frac{1}{p - 1}.$$

Navíc $\alpha_0^f = 0$, $\alpha_0^g = 1$ a $\alpha_0 = \max\{0, 1\} = 1$.

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 14

*Pomocí Věty 8 najděte Laplaceův obraz funkce $e^t \sin(t)$.
Z příkladů 4 a 2 víme, že*

$$\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(\sin(t)) = \frac{1}{p^2 + 1}$$

$$\mathcal{L}(g(t)) = \mathcal{L}(e^t) = \frac{1}{p - 1}.$$

*Navíc $\alpha_0^f = 0$, $\alpha_0^g = 1$ a $\alpha_0 = \max\{0, 1\} = 1$.
Pak dle Věty 8*

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 14

*Pomocí Věty 8 najděte Laplaceův obraz funkce $e^t \sin(t)$.
Z příkladů 4 a 2 víme, že*

$$\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(\sin(t)) = \frac{1}{p^2 + 1}$$

$$\mathcal{L}(g(t)) = \mathcal{L}(e^t) = \frac{1}{p - 1}.$$

*Navíc $\alpha_0^f = 0$, $\alpha_0^g = 1$ a $\alpha_0 = \max\{0, 1\} = 1$.
Pak dle Věty 8*

$$\mathcal{L}(\sin(t)e^t) =$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 14

Pomocí Věty 8 najděte Laplaceův obraz funkce $e^t \sin(t)$.

Z příkladů 4 a 2 víme, že

$$\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(\sin(t)) = \frac{1}{p^2 + 1}$$

$$\mathcal{L}(g(t)) = \mathcal{L}(e^t) = \frac{1}{p - 1}.$$

Navíc $\alpha_0^f = 0$, $\alpha_0^g = 1$ a $\alpha_0 = \max\{0, 1\} = 1$.

Pak dle Věty 8

$$\mathcal{L}(\sin(t)e^t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{1}{z^2 + 1} \frac{1}{(p - z) - 1} dz,$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 14

Pomocí Věty 8 najděte Laplaceův obraz funkce $e^t \sin(t)$.

Z příkladů 4 a 2 víme, že

$$\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(\sin(t)) = \frac{1}{p^2 + 1}$$

$$\mathcal{L}(g(t)) = \mathcal{L}(e^t) = \frac{1}{p - 1}.$$

Navíc $\alpha_0^f = 0$, $\alpha_0^g = 1$ a $\alpha_0 = \max\{0, 1\} = 1$.

Pak dle Věty 8

$$\mathcal{L}(\sin(t)e^t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{1}{z^2 + 1} \frac{1}{(p - z) - 1} dz,$$

kde $a > 1$ a $\operatorname{Re} p > a + 1$.

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 14

Pomocí Věty 8 najděte Laplaceův obraz funkce $e^t \sin(t)$.

Z příkladů 4 a 2 víme, že

$$\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(\sin(t)) = \frac{1}{p^2 + 1}$$

$$\mathcal{L}(g(t)) = \mathcal{L}(e^t) = \frac{1}{p - 1}.$$

Navíc $\alpha_0^f = 0$, $\alpha_0^g = 1$ a $\alpha_0 = \max\{0, 1\} = 1$.

Pak dle Věty 8

$$\mathcal{L}(\sin(t)e^t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{1}{z^2 + 1} \frac{1}{(p - z) - 1} dz,$$

kde $a > 1$ a $\operatorname{Re} p > a + 1$.

Pak dle základní věty o reziduích integrál dopočítáme

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 14

Pomocí Věty 8 najděte Laplaceův obraz funkce $e^t \sin(t)$.

Z příkladů 4 a 2 víme, že

$$\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(\sin(t)) = \frac{1}{p^2 + 1}$$

$$\mathcal{L}(g(t)) = \mathcal{L}(e^t) = \frac{1}{p - 1}.$$

Navíc $\alpha_0^f = 0$, $\alpha_0^g = 1$ a $\alpha_0 = \max\{0, 1\} = 1$.

Pak dle Věty 8

$$\mathcal{L}(\sin(t)e^t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{1}{z^2 + 1} \frac{1}{(p - z) - 1} dz,$$

kde $a > 1$ a $\operatorname{Re} p > a + 1$.

Pak dle základní věty o reziduích integrál dopočítáme

$$\mathcal{L}(\sin(t)e^t) =$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 14

Pomocí Věty 8 najděte Laplaceův obraz funkce $e^t \sin(t)$.

Z příkladů 4 a 2 víme, že

$$\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(\sin(t)) = \frac{1}{p^2 + 1}$$

$$\mathcal{L}(g(t)) = \mathcal{L}(e^t) = \frac{1}{p - 1}.$$

Navíc $\alpha_0^f = 0$, $\alpha_0^g = 1$ a $\alpha_0 = \max\{0, 1\} = 1$.

Pak dle Věty 8

$$\mathcal{L}(\sin(t)e^t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{1}{z^2 + 1} \frac{1}{(p - z) - 1} dz,$$

kde $a > 1$ a $\operatorname{Re} p > a + 1$.

Pak dle základní věty o reziduích integrál dopočítáme

$$\mathcal{L}(\sin(t)e^t) = -\operatorname{Res} \left[\frac{1}{z^2 + 1} \frac{1}{(p - z) - 1} \right]_{z=p-1}$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace

Příklad 14

Pomocí Věty 8 najděte Laplaceův obraz funkce $e^t \sin(t)$.

Z příkladů 4 a 2 víme, že

$$\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(\sin(t)) = \frac{1}{p^2 + 1}$$

$$\mathcal{L}(g(t)) = \mathcal{L}(e^t) = \frac{1}{p - 1}.$$

Navíc $\alpha_0^f = 0$, $\alpha_0^g = 1$ a $\alpha_0 = \max\{0, 1\} = 1$.

Pak dle Věty 8

$$\mathcal{L}(\sin(t)e^t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{1}{z^2 + 1} \frac{1}{(p - z) - 1} dz,$$

kde $a > 1$ a $\operatorname{Re} p > a + 1$.

Pak dle základní věty o reziduích integrál dopočítáme

$$\mathcal{L}(\sin(t)e^t) = -\operatorname{Res} \left[\frac{1}{z^2 + 1} \frac{1}{(p - z) - 1} \right]_{z=p-1} = \frac{1}{(p-1)^2 + 1}.$$

Zpětná Laplaceova transformace

Zpětná Laplaceova transformace

Laplaceova transformace je definovaná jako zobrazení

$$\mathcal{L} : P \rightarrow O,$$

které přiřadí předmětu množiny P jeho obraz množiny O .

Zpětná Laplaceova transformace

Laplaceova transformace je definovaná jako zobrazení

$$\mathcal{L} : P \rightarrow O,$$

které přiřadí předmětu množiny P jeho obraz množiny O .

Zkoumejme nyní inverzní zobrazení *zpětnou Laplaceovu transformaci*

$$\mathcal{L}^{-1} : O \rightarrow P.$$

Zpětná Laplaceova transformace

Laplaceova transformace je definovaná jako zobrazení

$$\mathcal{L} : P \rightarrow O,$$

které přiřadí předmětu množiny P jeho obraz množiny O .

Zkoumejme nyní inverzní zobrazení *zpětnou Laplaceovu transformaci*

$$\mathcal{L}^{-1} : O \rightarrow P.$$

Tato operace přiřadí dané komplexní funkci komplexní proměnné F předmět f , pro který platí $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$.

Zpětná Laplaceova transformace

Laplaceova transformace je definovaná jako zobrazení

$$\mathcal{L} : P \rightarrow O,$$

které přiřadí předmětu množiny P jeho obraz množiny O .

Zkoumejme nyní inverzní zobrazení *zpětnou Laplaceovu transformaci*

$$\mathcal{L}^{-1} : O \rightarrow P.$$

Tato operace přiřadí dané komplexní funkci komplexní proměnné F předmět f , pro který platí $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$.

K tomu je zapotřebí zodpovědět otázky:

Zpětná Laplaceova transformace

Laplaceova transformace je definovaná jako zobrazení

$$\mathcal{L} : P \rightarrow O,$$

které přiřadí předmětu množiny P jeho obraz množiny O .

Zkoumejme nyní inverzní zobrazení *zpětnou Laplaceovu transformaci*

$$\mathcal{L}^{-1} : O \rightarrow P.$$

Tato operace přiřadí dané komplexní funkci komplexní proměnné F předmět f , pro který platí $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$.

K tomu je zapotřebí zodpovědět otázky:

OT1: existence zpětné Laplaceovy transformace,

Zpětná Laplaceova transformace

Laplaceova transformace je definovaná jako zobrazení

$$\mathcal{L} : P \rightarrow O,$$

které přiřadí předmětu množiny P jeho obraz množiny O .

Zkoumejme nyní inverzní zobrazení *zpětnou Laplaceovu transformaci*

$$\mathcal{L}^{-1} : O \rightarrow P.$$

Tato operace přiřadí dané komplexní funkci komplexní proměnné F předmět f , pro který platí $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$.

K tomu je zapotřebí zodpovědět otázky:

OT1: existence zpětné Laplaceovy transformace,

OT2: *identifikovat definiční obor $\mathcal{L}^{-1}$.*

Zpětná Laplaceova transformace

Zpětná Laplaceova transformace

Věta 9 (Lerch)

Zpětná Laplaceova transformace

Věta 9 (Lerch)

Bud'ťe $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ a $\mathcal{L}(g(t)) = F(p)$.

Zpětná Laplaceova transformace

Věta 9 (Lerch)

Bud'ťe $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ a $\mathcal{L}(g(t)) = F(p)$. Pak $f = g$ až na izolované body, v nichž alespoň jedna z funkcí není spojitá.

Zpětná Laplaceova transformace

Věta 9 (Lerch)

Bud'ťe $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ a $\mathcal{L}(g(t)) = F(p)$. Pak $f = g$ až na izolované body, v nichž alespoň jedna z funkcí není spojitá.

Poznamenejme, že podmínka na izolované body z Lerchovy věty není nikterak omezující, v praxi nám na hodnotách v izolovaných bodech nezáleží.

Zpětná Laplaceova transformace

Věta 9 (Lerch)

Bud'te $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ a $\mathcal{L}(g(t)) = F(p)$. Pak $f = g$ až na izolované body, v nichž alespoň jedna z funkcí není spojitá.

Poznamenejme, že podmínka na izolované body z Lerchovy věty není nikterak omezující, v praxi nám na hodnotách v izolovaných bodech nezáleží.

K řešení otázky OT2 je zřejmé, že F musí splňovat nutné podmínky Laplaceova obrazu F předmětu f .

Zpětná Laplaceova transformace

Věta 9 (Lerch)

Bud'ťe $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ a $\mathcal{L}(g(t)) = F(p)$. Pak $f = g$ až na izolované body, v nichž alespoň jedna z funkcí není spojitá.

Poznamenejme, že podmínka na izolované body z Lerchovy věty není nikterak omezující, v praxi nám na hodnotách v izolovaných bodech nezáleží.

K řešení otázky OT2 je zřejmé, že F musí splňovat nutné podmínky Laplaceova obrazu F předmětu f .

Tj.

Zpětná Laplaceova transformace

Věta 9 (Lerch)

Bud'ťe $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ a $\mathcal{L}(g(t)) = F(p)$. Pak $f = g$ až na izolované body, v nichž alespoň jedna z funkcí není spojitá.

Poznamenejme, že podmínka na izolované body z Lerchovy věty není nikterak omezující, v praxi nám na hodnotách v izolovaných bodech nezáleží.

K řešení otázky OT2 je zřejmé, že F musí splňovat nutné podmínky Laplaceova obrazu F předmětu f .

Tj.

1. existuje $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ takové, že F je v polorovině $\operatorname{Re} p > \alpha_0$ analytická,

Zpětná Laplaceova transformace

Věta 9 (Lerch)

Bud'ťe $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ a $\mathcal{L}(g(t)) = F(p)$. Pak $f = g$ až na izolované body, v nichž alespoň jedna z funkcí není spojitá.

Poznamenejme, že podmínka na izolované body z Lerchovy věty není nikterak omezující, v praxi nám na hodnotách v izolovaných bodech nezáleží.

K řešení otázky OT2 je zřejmé, že F musí splňovat nutné podmínky Laplaceova obrazu F předmětu f .

Tj.

1. existuje $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ takové, že F je v polorovině $\operatorname{Re} p > \alpha_0$ analytická,
2. v libovolné polorovině $\operatorname{Re} p \geq \alpha > \alpha_0$ platí $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0$.

Zpětná Laplaceova transformace

Zpětná Laplaceova transformace

Věta 10

Zpětná Laplaceova transformace

Věta 10

Bud' F analytická v $\mathbb{C}$ s výjimkou konečného počtu singulárních bodů $a_i \in \mathbb{C}$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Zpětná Laplaceova transformace

Věta 10

Bud' F analytická v $\mathbb{C}$ s výjimkou konečného počtu singulárních bodů $a_i \in \mathbb{C}$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Necht' pro každé $a \in \mathbb{R}$ takové, že $a > \max_{i=1,2,\dots,n} \{|a_i|\}$, platí:

Zpětná Laplaceova transformace

Věta 10

Bud' F analytická v $\mathbb{C}$ s výjimkou konečného počtu singulárních bodů $a_i \in \mathbb{C}$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Necht' pro každé $a \in \mathbb{R}$ takové, že $a > \max_{i=1,2,\dots,n} \{|a_i|\}$, platí:

- 1. existuje posloupnost kružnic k_i se středem v 0 a poloměry R_i , pro které platí $|a| < R_1 < \dots < R_n < \dots$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \infty$ tak, že*

Zpětná Laplaceova transformace

Věta 10

Bud' F analytická v $\mathbb{C}$ s výjimkou konečného počtu singulárních bodů $a_i \in \mathbb{C}$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Necht' pro každé $a \in \mathbb{R}$ takové, že $a > \max_{i=1,2,\dots,n} \{|a_i|\}$, platí:

- 1. existuje posloupnost kružnic k_i se středem v 0 a poloměry R_i , pro které platí $|a| < R_1 < \dots < R_n < \dots$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \infty$ tak, že*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{p \in k_n} \{|F(p)|\} = 0,$$

Zpětná Laplaceova transformace

Věta 10

Bud' F analytická v $\mathbb{C}$ s výjimkou konečného počtu singulárních bodů $a_i \in \mathbb{C}$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Necht' pro každé $a \in \mathbb{R}$ takové, že $a > \max_{i=1,2,\dots,n} \{|a_i|\}$, platí:

- 1. existuje posloupnost kružnic k_i se středem v 0 a poloměry R_i , pro které platí $|a| < R_1 < \dots < R_n < \dots$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \infty$ tak, že*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{p \in k_n} \{|F(p)|\} = 0,$$

- 2. integrál $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} |F(p)| \, dp$ má konečnou hodnotu.*

Zpětná Laplaceova transformace

Věta 10

Bud' F analytická v $\mathbb{C}$ s výjimkou konečného počtu singulárních bodů $a_i \in \mathbb{C}$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Necht' pro každé $a \in \mathbb{R}$ takové, že $a > \max_{i=1,2,\dots,n} \{|a_i|\}$, platí:

- 1. existuje posloupnost kružnic k_i se středem v 0 a poloměry R_i , pro které platí $|a| < R_1 < \dots < R_n < \dots$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \infty$ tak, že*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{p \in k_n} \{|F(p)|\} = 0,$$

- 2. integrál $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} |F(p)| dp$ má konečnou hodnotu.
Pak na $\mathbb{R}$ existuje spojitý předmět f , který je určen předpisem*

Zpětná Laplaceova transformace

Věta 10

Bud' F analytická v $\mathbb{C}$ s výjimkou konečného počtu singulárních bodů $a_i \in \mathbb{C}$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Nechť pro každé $a \in \mathbb{R}$ takové, že $a > \max_{i=1,2,\dots,n} \{|a_i|\}$, platí:

- 1. existuje posloupnost kružnic k_i se středem v 0 a poloměry R_i , pro které platí $|a| < R_1 < \dots < R_n < \dots$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \infty$ tak, že*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{p \in k_n} \{|F(p)|\} = 0,$$

- 2. integrál $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} |F(p)| dp$ má konečnou hodnotu.
Pak na $\mathbb{R}$ existuje spojitý předmět f , který je určen předpisem*

$$f(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n \text{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=a_i} & \text{pro } t > 0, \\ 0 & \text{pro } t \leq 0. \end{cases} \quad (7)$$

Zpětná Laplaceova transformace

Zpětná Laplaceova transformace

Poznámka 1

Zpětná Laplaceova transformace

Poznámka 1

Poznamenejme, že se rezidua ve vzorci (7) počítají v singularitách funkce $F(p)e^{pt}$.

Zpětná Laplaceova transformace

Poznámka 1

Poznamenejme, že se rezidua ve vzorci (7) počítají v singularitách funkce $F(p)e^{pt}$.

Funkce e^{pt} je však analytická v $\mathbb{C}$, tedy rozhodující jsou pro výpočet rezidua funkce $F(p)$.

Zpětná Laplaceova transformace

Poznámka 1

Poznamenejme, že se rezidua ve vzorci (7) počítají v singularitách funkce $F(p)e^{pt}$.

Funkce e^{pt} je však analytická v $\mathbb{C}$, tedy rozhodující jsou pro výpočet rezidua funkce $F(p)$.

Pokud je například a_i jednoduchý pól, pak podle pravidel pro počítání reziduí je

Zpětná Laplaceova transformace

Poznámka 1

Poznamenejme, že se rezidua ve vzorci (7) počítají v singularitách funkce $F(p)e^{pt}$.

Funkce e^{pt} je však analytická v $\mathbb{C}$, tedy rozhodující jsou pro výpočet rezidua funkce $F(p)$.

Pokud je například a_i jednoduchý pól, pak podle pravidel pro počítání reziduí je

$$\text{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=a_i} =$$

Zpětná Laplaceova transformace

Poznámka 1

Poznamenejme, že se rezidua ve vzorci (7) počítají v singularitách funkce $F(p)e^{pt}$.

Funkce e^{pt} je však analytická v $\mathbb{C}$, tedy rozhodující jsou pro výpočet rezidua funkce $F(p)$.

Pokud je například a_i jednoduchý pól, pak podle pravidel pro počítání reziduí je

$$\operatorname{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=a_i} = e^{a_i t} \operatorname{Res}[F(p)]_{p=a_i}.$$

Zpětná Laplaceova transformace

Poznámka 1

Poznamenejme, že se rezidua ve vzorci (7) počítají v singularitách funkce $F(p)e^{pt}$.

Funkce e^{pt} je však analytická v $\mathbb{C}$, tedy rozhodující jsou pro výpočet rezidua funkce $F(p)$.

Pokud je například a_i jednoduchý pól, pak podle pravidel pro počítání reziduí je

$$\operatorname{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=a_i} = e^{a_i t} \operatorname{Res}[F(p)]_{p=a_i}.$$

Pokud je a_i pól násobnosti 2, dostáváme

Zpětná Laplaceova transformace

Poznámka 1

Poznamenejme, že se rezidua ve vzorci (7) počítají v singularitách funkce $F(p)e^{pt}$.

Funkce e^{pt} je však analytická v $\mathbb{C}$, tedy rozhodující jsou pro výpočet rezidua funkce $F(p)$.

Pokud je například a_i jednoduchý pól, pak podle pravidel pro počítání reziduí je

$$\operatorname{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=a_i} = e^{a_i t} \operatorname{Res}[F(p)]_{p=a_i}.$$

Pokud je a_i pól násobnosti 2, dostáváme

$$\operatorname{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=a_i} =$$

Zpětná Laplaceova transformace

Poznámka 1

Poznamenejme, že se rezidua ve vzorci (7) počítají v singularitách funkce $F(p)e^{pt}$.

Funkce e^{pt} je však analytická v $\mathbb{C}$, tedy rozhodující jsou pro výpočet rezidua funkce $F(p)$.

Pokud je například a_i jednoduchý pól, pak podle pravidel pro počítání reziduí je

$$\operatorname{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=a_i} = e^{a_i t} \operatorname{Res}[F(p)]_{p=a_i}.$$

Pokud je a_i pól násobnosti 2, dostáváme

$$\operatorname{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=a_i} = \lim_{p \rightarrow a_i} \frac{d}{dp} [(p - a_i)^2 F(p)e^{pt}]$$

Zpětná Laplaceova transformace

Poznámka 1

Poznamenejme, že se rezidua ve vzorci (7) počítají v singularitách funkce $F(p)e^{pt}$.

Funkce e^{pt} je však analytická v $\mathbb{C}$, tedy rozhodující jsou pro výpočet rezidua funkce $F(p)$.

Pokud je například a_i jednoduchý pól, pak podle pravidel pro počítání reziduí je

$$\text{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=a_i} = e^{a_i t} \text{Res}[F(p)]_{p=a_i}.$$

Pokud je a_i pól násobnosti 2, dostáváme

$$\begin{aligned} \text{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=a_i} &= \lim_{p \rightarrow a_i} \frac{d}{dp} [(p - a_i)^2 F(p)e^{pt}] \\ &= \text{Res}[F(p)]_{p=a_i} e^{a_i t} + \lim_{p \rightarrow a_i} [(p - a_i)^2 F(p)] t e^{a_i t}. \end{aligned}$$

Zpětná Laplaceova transformace

Zpětná Laplaceova transformace

Všimli jsme si, že podstatnou roli hrají obrazy F , jež mají racionální tvar.

Zpětná Laplaceova transformace

Všimli jsme si, že podstatnou roli hrají obrazy F , jež mají racionální tvar.

Zabývejme se tedy nyní zpětnou Laplaceovou transformací funkcí tvaru

Zpětná Laplaceova transformace

Všimli jsme si, že podstatnou roli hrají obrazy F , jež mají racionální tvar.

Zabývejme se tedy nyní zpětnou Laplaceovou transformací funkcí tvaru

$$F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}, \quad (8)$$

Zpětná Laplaceova transformace

Všimli jsme si, že podstatnou roli hrají obrazy F , jež mají racionální tvar.

Zabývejme se tedy nyní zpětnou Laplaceovou transformací funkcí tvaru

$$F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}, \quad (8)$$

kde $P(p)$ a $Q(p)$ jsou polynomy nad oborem komplexních čísel.

Zpětná Laplaceova transformace

Všimli jsme si, že podstatnou roli hrají obrazy F , jež mají racionální tvar.

Zabývejme se tedy nyní zpětnou Laplaceovou transformací funkcí tvaru

$$F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}, \quad (8)$$

kde $P(p)$ a $Q(p)$ jsou polynomy nad oborem komplexních čísel.

Věta 11

Zpětná Laplaceova transformace

Všimli jsme si, že podstatnou roli hrají obrazy F , jež mají racionální tvar.

Zabývejme se tedy nyní zpětnou Laplaceovou transformací funkcí tvaru

$$F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}, \quad (8)$$

kde $P(p)$ a $Q(p)$ jsou polynomy nad oborem komplexních čísel.

Věta 11

Funkce

$$F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)},$$

je Laplaceův obraz nějakého předmětu právě tehdy, pokud $\text{st}(P(p)) < \text{st}(Q(p))$.

Zpětná Laplaceova transformace

Zpětná Laplaceova transformace

Věta 12 (druhá věta o rozkladu)

Zpětná Laplaceova transformace

Věta 12 (druhá věta o rozkladu)

Laplaceův obraz F funkce f je racionální funkce právě tehdy, když pro $t > 0$ můžeme předpis f vyjádřit jako lineární kombinaci funkcí tvaru $t^n e^{at}$, kde $n \in \mathbb{N}_0$ a $a \in \mathbb{C}$.

Zpětná Laplaceova transformace

Věta 12 (druhá věta o rozkladu)

Laplaceův obraz F funkce f je racionální funkce právě tehdy, když pro $t > 0$ můžeme předpis f vyjádřit jako lineární kombinaci funkcí tvaru $t^n e^{at}$, kde $n \in \mathbb{N}_0$ a $a \in \mathbb{C}$.

Příklad 15

Zpětná Laplaceova transformace

Věta 12 (druhá věta o rozkladu)

Laplaceův obraz F funkce f je racionální funkce právě tehdy, když pro $t > 0$ můžeme předpis f vyjádřit jako lineární kombinaci funkcí tvaru $t^n e^{at}$, kde $n \in \mathbb{N}_0$ a $a \in \mathbb{C}$.

Příklad 15

Určete předmět funkce $F(p) = \frac{p+1}{p^2-p}$.

Zpětná Laplaceova transformace

Věta 12 (druhá věta o rozkladu)

Laplaceův obraz F funkce f je racionální funkce právě tehdy, když pro $t > 0$ můžeme předpis f vyjádřit jako lineární kombinaci funkcí tvaru $t^n e^{at}$, kde $n \in \mathbb{N}_0$ a $a \in \mathbb{C}$.

Příklad 15

Určete předmět funkce $F(p) = \frac{p+1}{p^2-p}$.

Funkce F má dva jednoduché póly 0 a 1 .

Zpětná Laplaceova transformace

Věta 12 (druhá věta o rozkladu)

Laplaceův obraz F funkce f je racionální funkce právě tehdy, když pro $t > 0$ můžeme předpis f vyjádřit jako lineární kombinaci funkcí tvaru $t^n e^{at}$, kde $n \in \mathbb{N}_0$ a $a \in \mathbb{C}$.

Příklad 15

Určete předmět funkce $F(p) = \frac{p+1}{p^2-p}$.

Funkce F má dva jednoduché póly 0 a 1 .
Máme tedy

Zpětná Laplaceova transformace

Věta 12 (druhá věta o rozkladu)

Laplaceův obraz F funkce f je racionální funkce právě tehdy, když pro $t > 0$ můžeme předpis f vyjádřit jako lineární kombinaci funkcí tvaru $t^n e^{at}$, kde $n \in \mathbb{N}_0$ a $a \in \mathbb{C}$.

Příklad 15

Určete předmět funkce $F(p) = \frac{p+1}{p^2-p}$.

Funkce F má dva jednoduché póly 0 a 1.
Máme tedy

$$\operatorname{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=0} = -1,$$

Zpětná Laplaceova transformace

Věta 12 (druhá věta o rozkladu)

Laplaceův obraz F funkce f je racionální funkce právě tehdy, když pro $t > 0$ můžeme předpis f vyjádřit jako lineární kombinaci funkcí tvaru $t^n e^{at}$, kde $n \in \mathbb{N}_0$ a $a \in \mathbb{C}$.

Příklad 15

Určete předmět funkce $F(p) = \frac{p+1}{p^2-p}$.

Funkce F má dva jednoduché póly 0 a 1.

Máme tedy

$$\operatorname{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=0} = -1, \quad \operatorname{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=1} = 2e^t.$$

Zpětná Laplaceova transformace

Věta 12 (druhá věta o rozkladu)

Laplaceův obraz F funkce f je racionální funkce právě tehdy, když pro $t > 0$ můžeme předpis f vyjádřit jako lineární kombinaci funkcí tvaru $t^n e^{at}$, kde $n \in \mathbb{N}_0$ a $a \in \mathbb{C}$.

Příklad 15

Určete předmět funkce $F(p) = \frac{p+1}{p^2-p}$.

Funkce F má dva jednoduché póly 0 a 1.

Máme tedy

$$\operatorname{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=0} = -1, \quad \operatorname{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=1} = 2e^t.$$

Pak podle vzorce (7) Věty 10 máme pro $t > 0$

Zpětná Laplaceova transformace

Věta 12 (druhá věta o rozkladu)

Laplaceův obraz F funkce f je racionální funkce právě tehdy, když pro $t > 0$ můžeme předpis f vyjádřit jako lineární kombinaci funkcí tvaru $t^n e^{at}$, kde $n \in \mathbb{N}_0$ a $a \in \mathbb{C}$.

Příklad 15

Určete předmět funkce $F(p) = \frac{p+1}{p^2-p}$.

Funkce F má dva jednoduché póly 0 a 1.

Máme tedy

$$\operatorname{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=0} = -1, \quad \operatorname{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=1} = 2e^t.$$

Pak podle vzorce (7) Věty 10 máme pro $t > 0$

$$f(t) = -1 + 2e^t.$$

Zpětná Laplaceova transformace

Zpětná Laplaceova transformace

Příklad 16

Zpětná Laplaceova transformace

Příklad 16

Určete předmět funkce $F(p) = \frac{1}{(p+1)(p-1)^3(p^2+1)}$.

Zpětná Laplaceova transformace

Příklad 16

Určete předmět funkce $F(p) = \frac{1}{(p+1)(p-1)^3(p^2+1)}$.

Výpočet budeme provádět stejně jako u předešlého příkladu.

Zpětná Laplaceova transformace

Příklad 16

Určete předmět funkce $F(p) = \frac{1}{(p+1)(p-1)^3(p^2+1)}$.

Výpočet budeme provádět stejně jako u předešlého příkladu.
Funkce F má tři jednoduché póly -1 , $\pm i$ a pól třetího řádu 1 .

Zpětná Laplaceova transformace

Příklad 16

Určete předmět funkce $F(p) = \frac{1}{(p+1)(p-1)^3(p^2+1)}$.

Výpočet budeme provádět stejně jako u předešlého příkladu.
Funkce F má tři jednoduché póly -1 , $\pm i$ a pól třetího řádu 1 .
Máme tedy

Zpětná Laplaceova transformace

Příklad 16

Určete předmět funkce $F(p) = \frac{1}{(p+1)(p-1)^3(p^2+1)}$.

Výpočet budeme provádět stejně jako u předešlého příkladu. Funkce F má tři jednoduché póly -1 , $\pm i$ a pól třetího řádu 1 . Máme tedy

$$\text{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=-1} = -1/16 e^{-t},$$

Zpětná Laplaceova transformace

Příklad 16

Určete předmět funkce $F(p) = \frac{1}{(p+1)(p-1)^3(p^2+1)}$.

Výpočet budeme provádět stejně jako u předešlého příkladu.
Funkce F má tři jednoduché póly -1 , $\pm i$ a pól třetího řádu 1 .
Máme tedy

$$\text{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=-1} = -1/16 e^{-t}, \quad \text{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=i} = 1/8 e^{it}$$

Zpětná Laplaceova transformace

Příklad 16

Určete předmět funkce $F(p) = \frac{1}{(p+1)(p-1)^3(p^2+1)}$.

Výpočet budeme provádět stejně jako u předešlého příkladu.
Funkce F má tři jednoduché póly -1 , $\pm i$ a pól třetího řádu 1 .
Máme tedy

$$\operatorname{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=-1} = -1/16 e^{-t}, \quad \operatorname{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=i} = 1/8 e^{it}$$

$$\operatorname{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=-i} = -1/8 e^{-it},$$

Zpětná Laplaceova transformace

Příklad 16

Určete předmět funkce $F(p) = \frac{1}{(p+1)(p-1)^3(p^2+1)}$.

Výpočet budeme provádět stejně jako u předešlého příkladu.
Funkce F má tři jednoduché póly -1 , $\pm i$ a pól třetího řádu 1 .
Máme tedy

$$\operatorname{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=-1} = -1/16 e^{-t}, \quad \operatorname{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=i} = 1/8 e^{it}$$

$$\operatorname{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=-i} = -1/8 e^{-it}, \quad \operatorname{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=1} = \frac{2t^2 - 6t + 5}{2} e^t.$$

Zpětná Laplaceova transformace

Příklad 16

Určete předmět funkce $F(p) = \frac{1}{(p+1)(p-1)^3(p^2+1)}$.

Výpočet budeme provádět stejně jako u předešlého příkladu.
Funkce F má tři jednoduché póly -1 , $\pm i$ a pól třetího řádu 1 .
Máme tedy

$$\operatorname{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=-1} = -1/16 e^{-t}, \quad \operatorname{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=i} = 1/8 e^{it}$$

$$\operatorname{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=-i} = -1/8 e^{-it}, \quad \operatorname{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=1} = \frac{2t^2 - 6t + 5}{2} e^t.$$

Pak podle vzorce (7) Věty 10 máme pro $t > 0$

Zpětná Laplaceova transformace

Příklad 16

Určete předmět funkce $F(p) = \frac{1}{(p+1)(p-1)^3(p^2+1)}$.

Výpočet budeme provádět stejně jako u předešlého příkladu.
Funkce F má tři jednoduché póly -1 , $\pm i$ a pól třetího řádu 1 .
Máme tedy

$$\operatorname{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=-1} = -1/16 e^{-t}, \quad \operatorname{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=i} = 1/8 e^{it}$$

$$\operatorname{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=-i} = -1/8 e^{-it}, \quad \operatorname{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=1} = \frac{2t^2 - 6t + 5}{2} e^t.$$

Pak podle vzorce (7) Věty 10 máme pro $t > 0$

$$f(t) = -1/16 e^{-t} + 1/8 e^{it} - 1/8 e^{-it} + \frac{2t^2 - 6t + 5}{2} e^t.$$

Zpětná Laplaceova transformace

Zpětná Laplaceova transformace

Tabulka 1: Laplaceovy transformace některých funkcí

Předmět	Obráz
1	$\frac{1}{p}$
e^{at}	$\frac{1}{p - a}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$\sinh(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$
$\cosh(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$

Zpětná Laplaceova transformace

Zpětná Laplaceova transformace

Tabulka 1: Laplaceovy transformace některých funkcí

Předmět	Obráz
$e^{at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p-a)^2 + \omega^2}$
$e^{at} \cos(\omega t)$	$\frac{p-a}{(p-a)^2 + \omega^2}$
$t^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$t^n e^{at}, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
$t \sin(\omega t)$	$\frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$
$t \cos(\omega t)$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$