Funkce komplexní proměnné a integrální transformace

Laplaceova transformace I.
Autotest

Marek Lampart

Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století* (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Nápověda

- Test zahájíte kliknutím na tlačítko "Zacatek testu".
- U každého příkladu je správná pouze jediná odpověď, správně zodpovězená otázka je hodnocena jedním bodem.
- Test ukončíme kliknutím na tlačítko "Konec testu". Ve vedlejším rámečku se zobrazí počet získaných bodů v daném testu.
- Kliknutím na tlačítko "Oprava" se provede opravení testu. Správně zodpovězené otázky budou označeny zeleně, chybné odpovědi budou vyznačeny červeně.

Zacatek testu

1. Laplaceův integrál komplexní funkce f reálné proměnné t je dán vzorcem

- ☐ $\int_0^\infty f(t)pe^t \, \mathrm{d}\, t, \quad p \in \mathbb{C}.$
- ☐ $\int_0^\infty f(t)pe^{-t} \, \mathrm{d}\, t, \quad p \in \mathbb{C}.$
- ☐ $\int_0^\infty f(t)e^{pt} \, \mathrm{d}\, t, \quad p \in \mathbb{C}.$
- ☐ $\int_0^\infty f(t)e^{-pt} \, \mathrm{d}\, t, \quad p \in \mathbb{C}.$

2. Pro které $p \in \mathbb{C}$ Laplaceův integrál funkce $f(t) = e^{-3\mathrm{i}t}$ konverguje?

- ☐ $\mathrm{Re}\, p < 0.$
- ☐ $\mathrm{Re}\, p = 0.$
- ☐ $\mathrm{Re}\, p > 0.$
- ☐ Diverguje pro všechna $p \in \mathbb{C}.$

Konec testu | | Oprava

Zacatek testu

1. Laplaceův obraz komplexní funkce f reálné proměnné t je funkce definovaná vztahem

- [ ] $F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}\,t.$
- [ ] $F(t) = \int_0^\infty f(p)e^{-pt}\,\mathrm{d}\,t.$
- [ ] $F(p) = \int_0^1 f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}\,t.$
- [ ] $F(t) = \int_0^1 f(p)e^{-pt}\,\mathrm{d}\,t.$

2. Funkci f nazýváme předmět, jsou-li splněny tři podmínky. Z nabízených možností vyberte tu podmínku, která mezi ně nepatří.

- [ ] Funkce f je na intervalu $[0, \infty)$ po částech spojitá.
- [ ] Funkce f je diferencovatelná pro každé $t > 0$.
- [ ] Platí $f(t) = 0$ pro každé $t < 0$.
- [ ] Existuje reálné číslo $M > 0$ a α takové, že pro každé $t \in [0, \infty)$ platí $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$.

Konec testu | Oprava

Zacatek testu

1. Heavisideova funkce je definovaná vztahem

☐ $\eta(t) = \begin{cases} 0 \text{ pro } t < 0, \\ 1 \text{ pro } t \geq 0. \end{cases}$

☐ $\eta(t) = \begin{cases} -1 \text{ pro } t < 0, \\ 1 \text{ pro } t \geq 0. \end{cases}$

☐ $\eta(t) = \begin{cases} -1 \text{ pro } t \leq 0, \\ 1 \text{ pro } t > 0. \end{cases}$

☐ $\eta(t) = \begin{cases} -1 \text{ pro } t < 0, \\ 0 \text{ pro } t = 0, \\ 1, \text{pro } t > 0. \end{cases}$

Konec testu | Oprava

Zacatek testu

1. Nechť f_k jsou předměty a $\mathcal{L}(f_k(t)) = F_k(p)$ jejich Laplaceovy obrazy, $c_k \in \mathbb{C}$ pro $k = 1, 2, \dots n$. Která z nabízených možností nepatří mezi vlastnosti Laplaceovy transformace?

- ☐ $\mathcal{L}(\sum_{k=1}^{n} c_k f_k(t)) = \sum_{k=1}^{n} c_k F_k(p)$
- ☐ $\mathcal{L}(e^{at} f(t)) = aF(p)$
- ☐ $\mathcal{L}(\sum_{k=1}^{n} c_k f_k(t)) = \sum_{k=1}^{n} c_k F_k(p)$
- ☐ $\mathcal{L}(-tf(t)) = F'(p)$

2. Konvolucí funkcí f a g nazýváme funkci h definovanou předpisem

- ☐ $h(t) = \int_0^\infty f(t+\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \;\; t \in \mathbb{R}.$
- ☐ $h(t) = \int_0^\infty f(t\tau)g(t+\tau)\,\mathrm{d}\tau, \;\; t \in \mathbb{R}.$
- ☐ $h(t) = \int_{-\infty}^\infty f(t-\tau)g(t\tau)\,\mathrm{d}\tau, \;\; t \in \mathbb{R}.$
- ☐ $h(t) = \int_{-\infty}^\infty f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau, \;\; t \in \mathbb{R}.$

Konec testu

Oprava

Zacatek testu

1. Z následujících možností vyberte tu, která nepatří mezi vlastnosti konvoluce.

☐ $f * g = g * f$.
☐ $(f * g) * h = f * (g * h)$.
☐ $f * (h + g) = (f + h) * (f + g)$.
☐ $(cf) * g = f * (cg) = c(f * g)$, kde c je konstanta.

2. Buďte f a g předměty, $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ a $\mathcal{L}(g(t)) = G(p)$. Z nabízených možností vyberte správný tvar Duhamelova vzorce.

☐ $pF(p)G(p) = \mathcal{L}(f(0_+)g(t) + (f' * g)(t))$
☐ $F(p)G(p) = \mathcal{L}(f(0_+)g(t) + (f * g')(t))$
☐ $pF(p)pG(p) = \mathcal{L}(f(0_+)g(t) + (f * g)(t))$
☐ $F(p)G(p) = \mathcal{L}(f(0_+)g(t) + (f' + g)(t))$

Konec testu | Oprava

Zacatek testu

1. Vyberte správný tvar Lerchovy věty.

- ☐ Buďte $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ a $\mathcal{L}(g(t)) = F(p)$. Pak $f = g$ až na izolované body, v nichž alespoň jedna z funkcí není spojitá.
- ☐ Buďte $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ a $\mathcal{L}(g(t)) = F(p)$. Pak $f \leq g$ až na izolované body, v nichž alespoň jedna z funkcí není spojitá.
- ☐ Buďte $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ a $\mathcal{L}(g(t)) = F(p)$. Pak $f \geq g$ až na izolované body, v nichž alespoň jedna z funkcí není spojitá.
- ☐ Buďte $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ a $\mathcal{L}(g(t)) = F(p)$. Pak $f < g$ až na izolované body, v nichž alespoň jedna z funkcí není spojitá.

Konec testu | | Oprava

Zacatek testu

1. K funkci $f(t) = 2e^t - 3e^{-2t} + 5e^{-t}$ nalezněte Laplaceův obraz $F(p)$.

☐ $F(p) = \dfrac{2}{p-1} - \dfrac{3}{p+2} + \dfrac{5}{p+1}$

☐ $F(p) = \dfrac{1}{p+1} - \dfrac{2}{p-2} + \dfrac{4}{p+1}$

☐ $F(p) = \dfrac{2}{p+1} - \dfrac{1}{p+3} + \dfrac{3}{p+1}$

☐ $F(p) = \dfrac{1}{p-1} - \dfrac{2}{p-2} + \dfrac{6}{p+1}$

2. K funkci $f(t) = 3\sin(2t) + 4\cos(2t)$ nalezněte Laplaceův obraz $F(p)$.

☐ $F(p) = \dfrac{3+5p}{p^2+4}$

☐ $F(p) = \dfrac{6-4p}{p^2+9}$

☐ $F(p) = \dfrac{6+4p}{p^2+4}$

☐ $F(p) = \dfrac{5+4p}{p^2-4}$

Konec testu

Oprava

Zacatek testu

1. K funkci $f(t) = (1-2t)e^{3t}\sin(t)$ nalezněte Laplaceův obraz $F(p)$.

- ☐ $F(p) = \dfrac{p^2 - 10p + 22}{(p^2 - 6p + 10)^2}$
- ☐ $F(p) = \dfrac{p^2 + 10p + 23}{(p^2 - 5p + 10)^2}$
- ☐ $F(p) = \dfrac{p^2 - 8p + 20}{(p^2 - 4p + 9)^2}$
- ☐ $F(p) = \dfrac{p^2 - 9p + 21}{(p^2 - 3p + 8)^2}$

2. K funkci $f(t) = 3\cos^2(2t)$ nalezněte Laplaceův obraz $F(p)$.

- ☐ $F(p) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{p}{p^2+9}\right)$
- ☐ $F(p) = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{2p}{p^2+25}\right)$
- ☐ $F(p) = \dfrac{5}{2}\left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{3p}{p^2+4}\right)$
- ☐ $F(p) = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{p}{p^2+16}\right)$

Konec testu Oprava

Zacatek testu

1. K funkci $f(t) = 4\cos(2t)\cos(3t)$ nalezněte Laplaceův obraz $F(p)$.

☐ $F(p) = \dfrac{3p(p^2+10)}{(p^2+1)(p^2+4)}$ ☐ $F(p) = \dfrac{4p(p^2+13)}{(p^2+1)(p^2+25)}$

☐ $F(p) = \dfrac{2p(p^2+11)}{(p^2+1)(p^2+16)}$ ☐ $F(p) = \dfrac{4p(p^2+12)}{(p^2+1)(p^2+9)}$

2. K funkci $f(t) = 4e^{-2t}\sin^2(3t)$ nalezněte Laplaceův obraz $F(p)$.

☐ $F(p) = \dfrac{68}{(p+3)(p^2+5p+40)}$

☐ $F(p) = \dfrac{72}{(p+2)(p^2+4p+40)}$

☐ $F(p) = \dfrac{36}{(p+1)(p^2+2p+40)}$

☐ $F(p) = \dfrac{63}{(p+2)(p^2+3p+40)}$

Konec testu Oprava

Zacatek testu

1. Určete předmět $f(t)$ k funkci $F(p) = \dfrac{1}{p^2(p^2+1)}$.

- ☐ $f(t) = t + \cos(t), \quad t \geq 0.$
- ☐ $f(t) = t - \cos(t), \quad t \geq 0.$
- ☐ $f(t) = t - \sin(t), \quad t \geq 0.$
- ☐ $f(t) = t + \sin(t), \quad t \geq 0.$

2. Určete předmět $f(t)$ k funkci $F(p) = \dfrac{1}{p^2+4p+5}$.

- ☐ $f(t) = e^{-2t}\sin(t), \quad t \geq 0.$
- ☐ $f(t) = e^{2t}\sin(t), \quad t \geq 0.$
- ☐ $f(t) = e^{-2t}\cos(t), \quad t \geq 0.$
- ☐ $f(t) = e^{2t}\cos(t), \quad t \geq 0.$

Konec testu

Oprava

Zacatek testu

1. Určete předmět $f(t)$ k funkci $F(p) = \dfrac{6p+3}{p^3+5p^2+9p+5}$.

- [ ] $f(t) = \frac{1}{2}e^{t} + \frac{5}{2}e^{-2t}(\cos(t) + 5\sin(t)), \quad t \geq 0.$
- [ ] $f(t) = \frac{3}{2}e^{t} + \frac{5}{2}e^{2t}(\cos(t) + 5\sin(t)), \quad t \geq 0.$
- [ ] $f(t) = -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{2t}(\cos(t) + 5\sin(t)), \quad t \geq 0.$
- [ ] $f(t) = -\frac{3}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t}(\cos(t) + 5\sin(t)), \quad t \geq 0.$

2. Určete předmět $f(t)$ k funkci $F(p) = \dfrac{4p+5}{p^2+6p+13}$.

- [ ] $f(t) = e^{-3t}(2\cos(2t) - \frac{3}{2}\sin(2t)), \quad t \geq 0.$
- [ ] $f(t) = e^{3t}(4\cos(2t) - \frac{5}{2}\sin(2t)), \quad t \geq 0.$
- [ ] $f(t) = e^{-3t}(4\cos(2t) - \frac{7}{2}\sin(2t)), \quad t \geq 0.$
- [ ] $f(t) = e^{3t}(\cos(2t) - \frac{1}{2}\sin(2t)), \quad t \geq 0.$

Konec testu | | Oprava

Zacatek testu

1. Určete předmět $f(t)$ k funkci $F(p) = \dfrac{2p+3}{(p+1)^3}$.

☐ $(t) = \left(\frac{1}{2}t^2 + 3t\right) e^t, \, , t \geq 0.$ ☐ $(t) = \left(\frac{5}{2}t^2 + t\right) e^{-t}, \, t \geq 0.$

☐ $f(t) = \left(\frac{1}{2}t^2 + 2t\right) e^{-t}, \, t \geq 0.$ ☐ $(t) = \left(\frac{3}{2}t^2 + t\right) e^t, \, t \geq 0.$

2. Určete předmět $f(t)$ k funkci $F(p) = \dfrac{p^2+p-4}{(p+4)^4}$.

☐ $f(t) = \frac{1}{2} t \sin(2t) + t \cos(2t), \, t \geq 0.$

☐ $f(t) = \frac{3}{2} t \cos(2t) + t \sin(2t), \, t \geq 0.$

☐ $f(t) = \frac{1}{2} t \sin(2t) + t \cos(2t), \, t \geq 0.$

☐ $f(t) = \frac{5}{2} t \cos(2t) + t \sin(2t), \, t \geq 0.$

Konec testu

Oprava

Zacatek testu

1. Určete Laplaceův obraz $F(p)$ k impulsu $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1, \\ 1, & 1 < t \leq 3, \\ 0, & t > 3. \end{cases}$

☐ $F(p) = \dfrac{1}{p}(e^{p} - e^{3p})$

☐ $F(p) = \dfrac{1}{p}(e^{-p} - e^{-3p})$

☐ $F(p) = \dfrac{1}{p}(e^{-p} + e^{-3p})$

☐ $F(p) = \dfrac{1}{p}(e^{p} + e^{3p})$

Konec testu

Oprava

Zacatek testu

1. Určete Laplaceův obraz $F(p)$ k impulsu

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t}, & 0 \leq t \leq 2, \\ 0, & t > 2. \end{cases}$$

- ☐ $F(p) = \dfrac{2}{p+1}(1 + e^{2(p+1)})$
- ☐ $F(p) = \dfrac{1}{p+1}(1 - e^{-2(p+1)})$
- ☐ $F(p) = \dfrac{2}{p+1}(1 - e^{2(p+1)})$
- ☐ $F(p) = \dfrac{1}{p+1}(1 + e^{-2(p+1)})$

Konec testu | Oprava

Zacatek testu

1. Určete Laplaceův obraz $F(p)$ k impulsu

$$f(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \leq t \leq 1, \\ 2, & t > 1. \end{cases}$$

- [ ] $F(p) = \dfrac{1}{p^2}(1 + e^{-p})$
- [ ] $F(p) = \dfrac{1}{p^2}(1 - e^{-p})$
- [ ] $F(p) = \dfrac{2}{p^2}(1 + e^{-p})$
- [ ] $F(p) = \dfrac{2}{p^2}(1 - e^{-p})$

Konec testu

Oprava

Zacatek testu

1. Určete Laplaceův obraz $F(p)$ k impulsu

$$f(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \leq t \leq 1, \\ 3 - t, & 1 < t \leq 3, \\ 0, & t > 3. \end{cases}$$

- ☐ $F(p) = \dfrac{1}{p^2}(2 - 3e^{-p} + e^{-3p})$
- ☐ $F(p) = \dfrac{1}{p^2}(2 + 3e^{-p} + e^{-3p})$
- ☐ $F(p) = \dfrac{1}{p^2}(2 - 3e^{p} + e^{3p})$
- ☐ $F(p) = \dfrac{1}{p^2}(2 + 3e^{p} + e^{3p})$

Konec testu | | Oprava

Zacatek testu

1. Nalezněte předmět $f(t)$ k obrazu $F(p) = \dfrac{2}{p^2} e^{-p}$.

☐ $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le 2, \\ t + 1, & t > 2. \end{cases}$

☐ $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le 2, \\ t - 1, & t > 2. \end{cases}$

☐ $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le 1, \\ 2t - 2, & t > 1. \end{cases}$

☐ $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le 1, \\ 2t + 2, & t > 1. \end{cases}$

Konec testu

Oprava

Zacatek testu

1. Nalezněte předmět $f(t)$ k obrazu $F(p) = \dfrac{1}{p+1}(e^{-p-1} - e^{-2p-2})$.

□ $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le 1, \\ e^{-t}, & 1 < t \le 2, \\ 0, & t > 2. \end{cases}$

□ $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le 1, \\ e^{t}, & 1 < t \le 3, \\ 0, & t > 3. \end{cases}$

□ $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le 1, \\ e^{-2t}, & 1 < t \le 2, \\ 1, & t > 2. \end{cases}$

□ $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le 1, \\ e^{2t}, & 1 < t \le 3, \\ 1, & t > 3. \end{cases}$

Konec testu

Oprava

Zacatek testu

1. Nalezněte předmět k obrazu

$$F(p) = \frac{1}{p^2+9}(3 - 3e^{-\frac{\pi}{2}p} - (3+p)e^{-\frac{\pi}{6}p}).$$

- [ ] $f(t) = \begin{cases} \sin(2t), & 0 \le t \le \frac{\pi}{6}, \\ \cos(2t), & \frac{\pi}{6} < t \le \frac{\pi}{2}, \\ 0, & t > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$
- [ ] $f(t) = \begin{cases} \sin(3t), & 0 \le t \le \frac{\pi}{6}, \\ \cos(3t), & \frac{\pi}{6} < t \le \frac{\pi}{2}, \\ 0, & t > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$
- [ ] $f(t) = \begin{cases} \cos(2t), & 0 \le t \le \frac{\pi}{6}, \\ \sin(2t), & \frac{\pi}{6} < t \le \frac{\pi}{2}, \\ 0, & t > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$
- [ ] $f(t) = \begin{cases} \cos(3t), & 0 \le t \le \frac{\pi}{6}, \\ \sin(3t), & \frac{\pi}{6} < t \le \frac{\pi}{2}, \\ 0, & t > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

Konec testu Oprava