



KŘIVKOVÝ A PLOŠNÝ INTEGRÁL

Jiří Bouchala, Oldřich Vlach

Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století* (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Jiří Bouchala, Oldřich Vlach
KŘIVKOVÝ A PLOŠNÝ INTEGRÁL

Předmluva

Tento i ostatní v rámci projektu *Matematika pro inženýry 21. století* připravované výukové materiály lze najít na stránkách <http://mi21.vsb.cz/>.

Budeme čtenářům velmi vděční za sdělení všech připomínek či komentářů. ¹

V Ostravě, a to ještě v lednu 2011

Jiří Bouchala a Oldřich Vlach

¹Všechny připomínky (výhrady, komentáře, doporučení, ...) zasílejte na naše e-mailové adresy: jiri.bouchala@vsb.cz, oldrich.vlach2@vsb.cz

Obsah

Předmluva	iii
1 Vektorové funkce	1
1.1 Vektorové funkce a operace s vektorovými funkcemi	1
1.2 Limita vektorové funkce	3
1.3 Spojitost vektorové funkce	4
1.4 Diferenciál vektorové funkce	6
2 Křivky v $\mathbb{R}^m$	9
3 Křivkový integrál	16
3.1 Křivkový integrál 1. druhu	16
3.2 Aplikace křivkového integrálu 1. druhu	23
3.3 Křivkový integrál 2. druhu	24
3.4 Greenova věta	31
3.5 Nezávislost křivkového integrálu 2. druhu na cestě	36
3.6 Aplikace křivkového integrálu 2. druhu	42
4 Plochy	44
5 Plošný integrál	46
5.1 Plošný integrál 1. druhu přes hladký list	46
5.2 Plošný integrál 1. druhu přes po částech hladkou plochu	49
5.3 Aplikace plošného integrálu 1. druhu	55
5.4 Plošný integrál 2. druhu přes hladký list	57
5.5 Plošný integrál 2. druhu přes po částech hladkou plochu	59
5.6 Gaussova – Ostrogradského věta	63
5.7 Stokesova věta	67
5.8 Aplikace plošného integrálu 2. druhu	71
Literatura	73
Rejstřík	74

Kapitola 1

Vektorové funkce

1.1 Vektorové funkce a operace s vektorovými funkcemi

Připomeňme si, že symbolem $\mathbb{R}^n$ rozumíme normovaný vektorový prostor, jehož prvky jsou uspořádané n -tice reálných čísel (obvykle píšeme $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n), \dots$) a (eukleidovská) norma je definována předpisem

$$\|x\| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Navíc budeme (pro $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$) používat následující označení:

$$U(x, \varepsilon) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < \varepsilon\} \quad \dots \varepsilon\text{-okolí bodu } x,$$

$$P(x, \varepsilon) := U(x, \varepsilon) \setminus \{x\} \quad \dots \text{prstencové } \varepsilon\text{-okolí bodu } x$$

(nebude-li nám záležet na velikosti okolí ε , budeme psát krátce $U(x)$ a $P(x)$).

Dále si připomeňme, jak je definovaná a co platí pro konvergenci posloupností v $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} a_k = (a_{k1}, \dots, a_{kn}) \rightarrow a = (a_1, \dots, a_n) &\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \|a_k - a\| \rightarrow 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow [\forall i \in \{1, \dots, n\} : a_{ki} \rightarrow a_i \text{ pro } k \rightarrow \infty]. \end{aligned}$$

1.1 Příklad. Rozhodněte, zda posloupnost (a_k) v $\mathbb{R}^n$ konverguje, a určete její případnou limitu, je-li

$$\text{a) } n = 2, a_k := \left(\frac{k^3 - k}{2k^3 + 1}, \frac{3^k + 2^k}{3^{k+1} + 2^{k+1}} \right);$$

$$\text{b) } n = 4, a_k := \left(\frac{2k}{k^2 + 1}, \frac{(-1)^k}{k^2}, 0, \frac{2^k}{k} \right).$$

Řešení. Úlohu lze redukovat na výpočet limit jednotlivých složek.

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim \left(\frac{k^3 - k}{2k^3 + 1}, \frac{3^k + 2^k}{3^{k+1} + 2^{k+1}} \right) &= \left(\lim \frac{k^3 - k}{2k^3 + 1}, \lim \frac{3^k + 2^k}{3^{k+1} + 2^{k+1}} \right) = \\ &= \left(\lim \frac{1 - \frac{1}{k^2}}{2 + \frac{1}{k^3}}, \lim \frac{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^k}{3 + 2\left(\frac{2}{3}\right)^k} \right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right), \text{ tj. } a_k \rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right). \end{aligned}$$

b) Jelikož (a to si rozmyslete podrobně) $\lim \frac{2^k}{k} = \infty \notin \mathbb{R}$, je (a_k) divergentní. ▲

1.2 Cvičení. Rozhodněte, zda posloupnost (a_k) v $\mathbb{R}^5$ konverguje, a určete její případnou limitu, je-li $a_k := \left(\left(\frac{k+2}{k} \right)^k, \sqrt[k]{k}, \frac{\sin k}{k}, \frac{k+1}{\sqrt{4k^2+1}}, (-1)^k(\sqrt{k} - \sqrt{k+1}) \right)$.

1.3 Definice. Vektorovou funkcí z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ (nebo podrobněji: reálnou m -rozměrnou vektorovou funkcí n reálných proměnných) rozumíme každé zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$.

Je-li f vektorovou funkcí z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ (píšeme $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$), je každému

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in Df \subset \mathbb{R}^n$$

přiřazena právě jedna hodnota

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)) \in Hf \subset \mathbb{R}^m$$

(Df ... definiční obor f , Hf ... obor hodnot f).

Funkce $f_1, \dots, f_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ nazýváme složkami vektorové funkce f a píšeme $f = (f_1, \dots, f_m)$.

1.4 Poznámka. Je-li $m = n$ (a nejčastěji $= 2$ nebo $= 3$), říkáme někdy, že f je vektorové pole; je-li $m = 1$, nazýváme f skalární pole.

1.5 Úmluva. Zadáme-li vektorovou funkci $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ pouze předpisem, tzn. když neuvedeme explicitně její definiční obor (například $f(u, v, w) := (\sin u, v\sqrt{w})$), rozumíme jejím definičním oborem množinu všech $x \in \mathbb{R}^n$, pro něž má daný předpis smysl (v našem příkladě: $Df = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : w \geq 0\}$).

1.6 Poznámka. Všimněme si, je-li $f = (f_1, \dots, f_m) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ zadána pouze svým předpisem, je

$$Df = Df_1 \cap Df_2 \cap \dots \cap Df_m.$$

1.7 Definice. Buď $c \in \mathbb{R}$ a buď $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Definujme vektorové funkce $f + g$, $f - g$, $c \cdot f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ předpisy:

$$(f \pm g)(x) := f(x) \pm g(x); \quad (c \cdot f)(x) := c \cdot f(x).$$

1.2 Limita vektorové funkce

1.8 Definice. Buď $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^m$. Řekneme, že f má v x_0 limitu a (a píšeme $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$), platí-li pro každou posloupnost (x_k) v $\mathbb{R}^n$ implikace

$$x_0 \neq x_k \rightarrow x_0 \implies f(x_k) \rightarrow a.$$

1.9 Věta. Necht' $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^m$. Potom platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \iff (\forall U(a)) (\exists P(x_0)) (\forall x \in P(x_0)) : f(x) \in U(a).$$

(Nepřehlédněme, že $U(a)$ je podmnožinou $\mathbb{R}^m$ a $P(x_0)$ podmnožinou $\mathbb{R}^n$.)

1.10 Pozorování (a důkaz následující věty). Buď $f = (f_1, \dots, f_m) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ a $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$. Pak

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow [x_0 \neq x_k \rightarrow x_0 \implies f(x_k) = (f_1(x_k), \dots, f_m(x_k)) \rightarrow a = (a_1, \dots, a_m)] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow [x_0 \neq x_k \rightarrow x_0 \implies \forall i \in \{1, \dots, m\} : f_i(x_k) \rightarrow a_i \text{ pro } k \rightarrow \infty]. \end{aligned}$$

1.11 Věta. Necht' $f = (f_1, \dots, f_m) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$. Potom platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \iff [\forall i \in \{1, \dots, m\} : \lim_{x \rightarrow x_0} f_i(x) = a_i].$$

Jinak řečeno

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f_1(x), \dots, f_m(x)) = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x), \dots, \lim_{x \rightarrow x_0} f_m(x) \right),$$

má-li alespoň jedna strana rovnosti smysl.

1.12 Cvičení. Rozhodněte, zda daná limita existuje, a pokud ano, spočítejte ji:

- a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2}, \frac{(x+y)^2}{\sin(x^4 + y^6)} \right);$
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\operatorname{tg} x}, \frac{\sqrt{5} - \sqrt{5 + x^6}}{x^3} \right);$
- c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x}{\operatorname{tg} x}, \frac{\sqrt{5} - \sqrt{5 + y^6}}{y^3} \right).$

1.3 Spojitost vektorové funkce

1.13 Definice. Buď $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ a $x_0 \in \mathbb{R}^n$.
Řekneme, že f je spojitá v bodě x_0 , platí-li $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

1.14 Věta. Necht' $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \mathbb{R}^n \cap Df$. Potom platí

$$\begin{aligned} f \text{ je spojitá v bodě } x_0 &\iff [x_k \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x_k) \rightarrow f(x_0)] \iff \\ &\iff (\forall U(f(x_0))) (\exists U(x_0)) (\forall x \in U(x_0)) : f(x) \in U(f(x_0)). \end{aligned}$$

1.15 Definice. Buď $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $M \subset \mathbb{R}^n$. Řekneme, že

- f je spojitá v bodě $x_0 \in M$ vzhledem k množině M , platí-li pro každou posloupnost (x_k) v $\mathbb{R}^n$ implikace

$$M \ni x_k \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x_k) \rightarrow f(x_0);$$

- f je spojitá na množině M , je-li spojitá vzhledem k M v každém bodě $x_0 \in M$;
- f je spojitá, je-li spojitá na Df .

1.16 Věta. Necht' $f = (f_1, \dots, f_m) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x_0 \in M \subset \mathbb{R}^n$. Pak f je spojitá v x_0 (resp. spojitá v x_0 vzhledem k M , resp. spojitá na M) právě tehdy, když pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$ je f_i spojitá v x_0 (resp. spojitá v x_0 vzhledem k M , resp. spojitá na M).

1.17 Příklad. Důležitým případem spojitých vektorových funkcí jsou lineární zobrazení, tj. vektorové funkce $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ dané předpisem

$$\mathcal{A}(x) := (\mathbb{A}x^T)^T,$$

kde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots, & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \dots, & a_{mn} \end{pmatrix}$$

je reálná matice typu $(m \times n)$.

Dokažme, že výše definované zobrazení $\mathcal{A}$ je skutečně spojitě. Předně si všimněme, že $D\mathcal{A} = \mathbb{R}^n$. Buď nyní $x_0 \in \mathbb{R}^n$ libovolný bod a (x_k) taková posloupnost v $\mathbb{R}^n$, že

$$x_k = (x_{k1}, \dots, x_{kn}) \rightarrow x_0 = (x_1, \dots, x_n).$$

Potom pro všechna $i \in \{1, \dots, n\}$ je $x_{ki} \rightarrow x_i$ (pro $k \rightarrow \infty$), a proto

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x_k) &= (\mathbb{A}x_k^T)^T = \left(\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots, & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \dots, & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k1} \\ x_{k2} \\ \vdots \\ x_{kn} \end{pmatrix} \right)^T = \\ &= (a_{11}x_{k1} + \dots + a_{1n}x_{kn}, \dots, a_{m1}x_{k1} + \dots + a_{mn}x_{kn}) \rightarrow \\ &\rightarrow (a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n, \dots, a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n) = (\mathbb{A}x_0^T)^T = \mathcal{A}(x_0). \end{aligned}$$

A to jsme měli dokázat (viz definici 1.15).

1.18 Cvičení. Pokud to lze, dodefinujte vektorovou funkci f v bodě c tak, aby byla v bodě c spojitá, je-li

a) $f(x) := \left(\frac{\operatorname{tg}(x - \pi)}{x - \pi}, x^2 + 6, \frac{\sin x}{x} \right), c = \pi;$

b) $f(x) := \left(\frac{1 - \cos(2x)}{x^2}, \frac{1}{x^2} \left(\sin\left(\frac{1}{x}\right) - 6 \right), \frac{\sin x}{x} \right), c = 0.$

1.4 Diferenciál vektorové funkce

1.19 Definice. Buď $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ a $c \in \mathbb{R}^n$. Existuje-li lineární zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ takové, že pro vektorovou funkci $\omega : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ definovanou předpisem

$$\omega(h) := f(c+h) - f(c) - \mathcal{A}(h)$$

platí

$$\lim_{h \rightarrow (0, \dots, 0)} \frac{\omega(h)}{\|h\|} = (0, \dots, 0),$$

říkáme, že vektorová funkce f je v bodě c diferencovatelná. Lineární zobrazení $\mathcal{A}$ pak označujeme df_c a nazýváme diferenciálem vektorové funkce f v bodě c .

1.20 Ilustrace následující věty. Mějme $f = (f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, kde f_1, f_2, f_3 jsou diferencovatelné v bodě $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$. Pak pro „malá“ $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ máme

$$\begin{aligned} (f(c+h) - f(c))^T &= \begin{pmatrix} f_1(c+h) - f_1(c) \\ f_2(c+h) - f_2(c) \\ f_3(c+h) - f_3(c) \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} d(f_1)_c(h) \\ d(f_2)_c(h) \\ d(f_3)_c(h) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(c)h_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y}(c)h_2 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(c)h_1 + \frac{\partial f_2}{\partial y}(c)h_2 \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(c)h_1 + \frac{\partial f_3}{\partial y}(c)h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(c), & \frac{\partial f_1}{\partial y}(c) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(c), & \frac{\partial f_2}{\partial y}(c) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(c), & \frac{\partial f_3}{\partial y}(c) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \\ &\stackrel{\text{ozn.}}{=} f'(c) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = f'(c)h^T. \end{aligned}$$

1.21 Věta. Je-li vektorová funkce $f = (f_1, \dots, f_m) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferencovatelná v bodě $c \in \mathbb{R}^n$, existují první parciální derivace všech funkcí $f_1, \dots, f_m$ v bodě c podle všech proměnných a platí

$$(df_c(h))^T = f'(c)h^T,$$

kde

$$f'(c) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(c), & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(c), & \dots, & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(c) \\ & & \dots & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(c), & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(c), & \dots, & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(c) \end{pmatrix} \quad \dots \text{ tzv. \underline{Jacobiova matice},}$$

tj.

$$df_c(h) = (d(f_1)_c(h), \dots, d(f_m)_c(h)).$$

1.22 Věta. Vektorová funkce $f = (f_1, \dots, f_m) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je diferencovatelná v bodě $c \in \mathbb{R}^n$ tehdy a jen tehdy, je-li pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$ funkce $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferencovatelná v bodě $c \in \mathbb{R}^n$.

1.23 Příklad. Určeme df_c , je-li

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(u, v) := (\cos u, \sin u, v), \quad Df = \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \times \langle 0, 2 \rangle; \quad c = \left(\frac{\pi}{4}, 1\right).$$

Řešení. Všimněme si, že

$$f'((u, v)) \stackrel{\text{ozn.}}{=} f'(u, v) = \begin{pmatrix} -\sin u & 0 \\ \cos u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad f'(c) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

a proto

$$\begin{aligned} df_c : h = (h_1, h_2) &\mapsto (f'(c)h^T)^T = \left(\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \right)^T = \\ &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}h_1, \frac{\sqrt{2}}{2}h_1, h_2 \right) = h_1 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right) + h_2(0, 0, 1). \end{aligned}$$

Zjistili jsme, že pro body (u, v) „blízké“ bodu $c \stackrel{\text{ozn.}}{=} (c_1, c_2)$ je

$$\begin{aligned} f(u, v) &\doteq f(c_1, c_2) + df_c(u - c_1, v - c_2) = \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right) + \left(u - \frac{\pi}{4}\right) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) + (v - 1)(0, 0, 1). \end{aligned}$$

Rovina

$$\begin{aligned} \tau := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = &\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right) + \left(u - \frac{\pi}{4}\right) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) + \\ &+ (v - 1)(0, 0, 1), (u, v) \in \mathbb{R}^2 \} \end{aligned}$$

se nazývá tečná rovina k „ploše“ $f(Df)$ sestrojená v bodě $f(c) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$. ▲

1.24 Cvičení. Rozhodněte, zda je vektorová funkce f diferencovatelná v bodě c , a pokud ano, vypočtěte $f'(c)$ a $df_c(h)$, je-li

a) $f(x, y, z) := \left(x^3 y^2 z, \frac{x-y}{z}\right), \quad c = (1, 2, 3), \quad h = (h_1, h_2, h_3);$

b) $f(x) := (\cos x, \sin x), \quad c = \frac{\pi}{4}, \quad h = -\sqrt{2};$

c) $f(x, y, z) := (xy, \sin(xy), \arcsin x), \quad c = (1, 1, 6), \quad h = (h_1, h_2, h_3).$

1.25 Cvičení. Buď

$$f = (f_1, \dots, f_m) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ a } g = (g_1, \dots, g_k) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$$

takové vektorové funkce, že pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$ a pro každé $j \in \{1, \dots, k\}$ je

$$f_i \in C^1(\mathbb{R}^n) \text{ a } g_j \in C^1(\mathbb{R}^m).$$

Dokažte, že potom pro každé $c \in \mathbb{R}^n$ platí

$$(g \circ f)'(c) = g'(f(c)) f'(c).$$

1.26 Příklad. Vypočtěte $f'(c)$, $g'(f(c))$ a $(g \circ f)'(c)$, je-li $c = (1, 1)$,

$$f(x, y) := \left(x^2 + y^2, \ln x + \ln y, \frac{x}{y} \right), \quad g(u, v, w) := (uv + 1, u^2 - v^2 + w, w - u).$$

Řešení.

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}, & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}, & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}, & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x, & 2y \\ \frac{1}{x}, & \frac{1}{y} \\ \frac{1}{y}, & -\frac{x}{y^2} \end{pmatrix} \Rightarrow f'(c) = \begin{pmatrix} 2, & 2 \\ 1, & 1 \\ 1, & -1 \end{pmatrix},$$

$$f(c) = (2, 0, 1), \quad g'(u, v, w) = \begin{pmatrix} v, & u, & 0 \\ 2u, & -2v, & 1 \\ -1, & 0, & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow g'(f(c)) = \begin{pmatrix} 0, & 2, & 0 \\ 4, & 0, & 1 \\ -1, & 0, & 1 \end{pmatrix},$$

a proto

$$(g \circ f)'(c) = g'(f(c)) f'(c) = \begin{pmatrix} 2, & 2 \\ 9, & 7 \\ -1, & -3 \end{pmatrix}.$$

▲

Kapitola 2

Křivky v $\mathbb{R}^m$

2.1 Definice. Křivkou v $\mathbb{R}^m$ rozumíme každou spojitou vektorovou funkci

$$\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^m, \text{ kde } I = D\varphi \subset \mathbb{R} \text{ je interval.}$$

Množinu

$$\langle \varphi \rangle := \varphi(I) = \{\varphi(t) : t \in I\} \subset \mathbb{R}^m$$

pak nazýváme geometrickým obrazem křivky φ . Je-li $M = \langle \varphi \rangle$, říkáme, že φ je parametrizací množiny M .

Křivku φ nazýváme:

- jednoduchou, je-li φ prosté;
- uzavřenou, je-li $I = \langle a, b \rangle$ ($a, b \in \mathbb{R}; a < b$) a navíc $\varphi(a) = \varphi(b)$;
- jednoduchou uzavřenou, je-li φ uzavřená a platí $\forall t_1, t_2 \in \langle a, b \rangle : [0 < |t_1 - t_2| < b - a \Rightarrow \varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)]$.

Je-li $I = \langle a, b \rangle$, nazýváme bod $\varphi(a)$ (resp. $\varphi(b)$) počátečním (resp. koncovým) bodem křivky φ .

Křivkou opačně orientovanou ke křivce $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ rozumíme křivku

$$-\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^m, \text{ kde } J = \{t \in \mathbb{R} : -t \in I\} \text{ a } (-\varphi)(t) := \varphi(-t).$$

2.2 Příklad. Křivkou opačně orientovanou ke křivce

$$\varphi : \langle -1, 3 \rangle \rightarrow \mathbb{R}^2, \varphi(t) := (t, 1 + t),$$

je křivka

$$-\varphi : \langle -3, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}^2, (-\varphi)(t) := (-t, 1 - t).$$

2.3 Definice. Křivku $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m) : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^m$ nazýváme hladkým obloukem v $\mathbb{R}^m$, platí-li současně:

- i) φ je prosté zobrazení (tzn. že φ je jednoduchá křivka);
- ii) φ je třídy C^1 na $\langle a, b \rangle$ (tzn. že pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$ je funkce φ_i spojitě diferencovatelná na $\langle a, b \rangle$);
- iii) $\varphi'(t) = (\varphi'_1(t), \dots, \varphi'_m(t)) \neq (0, \dots, 0)$ pro každé $t \in (a, b)$,^a
 $\varphi'(a) := ((\varphi_1)'_+(a), \dots, (\varphi_m)'_+(a)) \neq (0, \dots, 0)$,
 $\varphi'(b) := ((\varphi_1)'_-(b), \dots, (\varphi_m)'_-(b)) \neq (0, \dots, 0)$.

^aPíšeme nepřesně

$$\varphi'(t) = (\varphi'_1(t), \dots, \varphi'_m(t))$$

místo správného

$$(\varphi'(t))^T = (\varphi'_1(t), \dots, \varphi'_m(t)).$$

2.4 Poznámka (ke geometrickému významu $\varphi'(t)$).

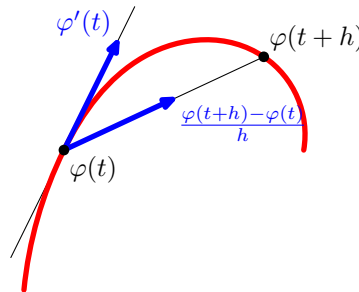
Nechť je křivka $\varphi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^m$ hladkým obloukem. Pak

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi_1(t+h) - \varphi_1(t)}{h}, \dots, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi_m(t+h) - \varphi_m(t)}{h} \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\varphi_1(t+h) - \varphi_1(t)}{h}, \dots, \frac{\varphi_m(t+h) - \varphi_m(t)}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h}. \end{aligned}$$

Přímku

$$\{\varphi(t) + h\varphi'(t) : h \in \mathbb{R}\}$$

nazýváme tečnou křivky φ v bodě t ; vektor $\varphi'(t)$ nazývejme tečným vektorem křivky φ v bodě t .



Obr. 2.1: ke geometrickému významu $\varphi'(t)$

2.5 Definice. Říkáme, že křivka $\varphi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^m$ je po částech hladká, existuje-li dělení

$$D : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

intervalu $\langle a, b \rangle$ takové, že pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ je křivka

$$\psi_i := \varphi|_{\langle t_{i-1}, t_i \rangle}$$

$$(\text{tzn. } D\psi_i = \langle t_{i-1}, t_i \rangle, \psi_i(t) := \varphi(t))$$

hladkým obloukem.

2.6 Příklad. Nakreslete geometrické obrazy daných křivek a rozhodněte, které z nich jsou

- jednoduchými křivkami;
- uzavřenými křivkami;
- jednoduchými uzavřenými křivkami;
- hladkými oblouky;
- po částech hladkými křivkami:

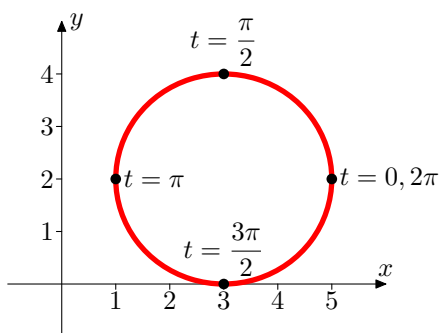
a) $\varphi_a(t) := (3 + 2 \cos t, 2 + 2 \sin t), D_{\varphi_a} = \langle 0, 2\pi \rangle;$

b) $\varphi_b(t) := (3 + 2 \cos(2t), 2 + 2 \sin(2t)), D_{\varphi_b} = \langle 0, 2\pi \rangle;$

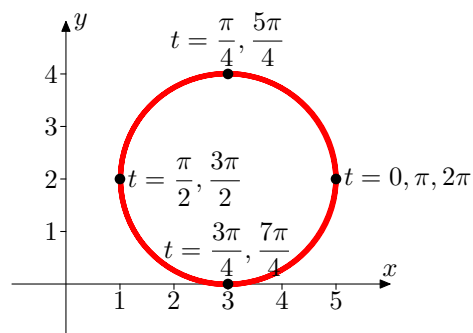
c) $\varphi_c(t) := \left(\frac{2000}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{2000t}{\sqrt{1+t^2}} \right), D_{\varphi_c} = \mathbb{R};$

d) $\varphi_d(t) := (t, |t|), D_{\varphi_d} = \langle -2, 2 \rangle.$

Řešení.

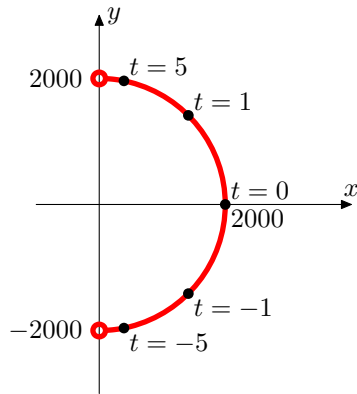
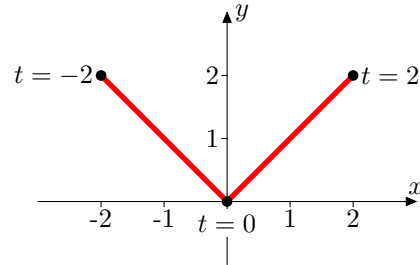


Obr. 2.2: $\langle \varphi_a \rangle$ z př. 2.6a)



Obr. 2.3: $\langle \varphi_b \rangle$ z př. 2.6b)

Není těžké si rozmyslet (a přitom nám pomohou i geometrické obrazy daných křivek znázorněné na obrázcích 2.2–2.5), že

Obr. 2.4: $\langle \varphi_c \rangle$ z př. 2.6c)Obr. 2.5: $\langle \varphi_d \rangle$ z př. 2.6d)

- jednoduchými křivkami jsou φ_c a φ_d ;
- uzavřenými křivkami jsou φ_a a φ_b ;
- jednoduchou uzavřenou křivkou je pouze křivka φ_a ;
- hladkým obloukem není žádná z daných křivek;
- po částech hladkými křivkami jsou φ_a , φ_b a φ_d .



2.7 Několik poznámek (k příkladu 2.6).

- pro křivku $\varphi(t) := (3 + 2 \cos t, 2 + 2 \sin t)$, $D_\varphi = \langle 0, 3\pi \rangle$, platí $\langle \varphi \rangle = \langle \varphi_a \rangle = \langle \varphi_b \rangle$, ale φ není uzavřenou křivkou;
- neexistuje hladký oblouk, který by byl parametrizací $\langle \varphi_d \rangle$;
- pro křivku $\varphi(t) = (t^3, |t^3|)$, $t \in \langle -\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2} \rangle$, platí $\langle \varphi \rangle = \langle \varphi_d \rangle$, ale φ není po částech hladkou křivkou.

2.8 Cvičení. Nakreslete geometrický obraz dané křivky φ definované na intervalu I a rozhodněte, zda se jedná o jednoduchou křivku, uzavřenou křivku, hladký oblouk a po částech hladkou křivku:

- $\varphi(t) := (\cos t, 2 + \arcsin(\cos t))$, $I = \langle -\pi, \pi \rangle$;
- $\varphi(t) := (2 \sin^2 t, 4 \cos^2 t)$, $I = \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$;
- $\varphi(t) := (t^2 - 2t + 3, t^2 - 2t + 1)$, $I = (1, +\infty)$.

2.9 Příklad. Parametrizujte množinu Ω , je-li

- $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x + 2y = 1 \wedge x \in \langle 1, 3 \rangle\}$;

- b) $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\}$;
 c) $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 9 \wedge 2x + y - 3z = 0\}$;
 d) $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4 \wedge x^2 + y^2 = 2x \wedge z \geq 0\}$.

Řešení.

- a) $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{1-3x}{2} \wedge x \in \langle 1, 3 \rangle\} = \langle \varphi \rangle$, kde

$$\varphi(t) := \left(t, \frac{1-3t}{2} \right), \quad t \in \langle 1, 3 \rangle.$$

- b) Daná množina je elipsou s poloosami 2 a 3. Při její parametrizaci nám dobře poslouží tzv. zobecněné polární souřadnice:

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(2r \cos t, 3r \sin t) : \frac{(2r \cos t)^2}{4} + \frac{(3r \sin t)^2}{9} = 1 \wedge r \geq 0 \wedge t \in \langle 0, 2\pi \rangle\} = \\ &= \{(2 \cos t, 3 \sin t) : t \in \langle 0, 2\pi \rangle\}, \end{aligned}$$

a proto

$$\Omega = \langle \varphi \rangle, \text{ kde } \varphi(t) := (2 \cos t, 3 \sin t), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

- c) Množina Ω je zřejmě kružnicí v prostoru (se středem v bodě $s = (0, 0, 0)$, poloměrem $r = 3$ a ležící v rovině $2x + y - 3z = 0$). V příkladu 2.6a) jsme si ukázali, že množina

$$\begin{aligned} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) &= (3 + 2 \cos t, 2 + 2 \sin t) = \\ &= (3, 2) + 2 \cos t (1, 0) + 2 \sin t (0, 1), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle\} \end{aligned}$$

je kružnicí (v $\mathbb{R}^2$) se středem v bodě $(3, 2)$ a poloměrem 2. Podobně lze ověřit (a rozmysleme si to podrobně), že množina

$$\begin{aligned} \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) &= (s_1, s_2, s_3) + r \cos t (u_1, u_2, u_3) + r \sin t (v_1, v_2, v_3), \\ &t \in \langle 0, 2\pi \rangle\} \end{aligned}$$

je kružnicí (v $\mathbb{R}^3$) se středem v bodě $s = (s_1, s_2, s_3)$ a poloměrem r , která „leží“ v rovině, jejímiž jednotkovými navzájem kolmými směrovými vektory jsou

$$u = (u_1, u_2, u_3) \text{ a } v = (v_1, v_2, v_3).$$

Nyní se vraťme k našemu úkolu. Střed s a poloměr r už známe. Stačí najít (libovolné) dva vektory u a v výše uvedených kvalit. K tomu stačí zvolit v rovině $2x + y - 3z = 0$ dva (libovolné) lineárně nezávislé vektory, např. $\tilde{u} = (1, -2, 0)$ a $\tilde{v} = (3, 0, 2)$ a zortonormalizovat je:

$$u = \frac{\tilde{u}}{\|\tilde{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2, 0), \quad v = \frac{\tilde{v} - (\tilde{v} \cdot u)u}{\|\tilde{v} - (\tilde{v} \cdot u)u\|} = \frac{1}{\sqrt{70}}(6, 3, 5),$$

kde $\tilde{v} \cdot u = (3, 0, 2) \cdot (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}, 0) = \frac{3}{\sqrt{5}}$ je skalárním součinem vektorů $\tilde{v}$ a u .

Máme i jinou možnost, jak najít vektory u a v : zvolíme libovolný jednotkový vektor ležící v rovině $2x + y - 3z = 0$, například $u = \frac{\tilde{u}}{\|\tilde{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2, 0)$, a vypočteme v jako vektorový součin vektoru u a jednotkového normálového vektoru roviny $2x + y - 3z = 0$, tj. vektoru $n = \frac{1}{\sqrt{14}}(2, 1, -3)$.

Závěr – jednou (z nekonečně mnoha) parametrizací množiny Ω je křivka

$$\begin{aligned} \varphi(t) &:= (0, 0, 0) + 3 \cos t \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2, 0) + 3 \sin t \frac{1}{\sqrt{70}}(6, 3, 5) = \\ &= \left(\frac{3}{\sqrt{5}} \cos t + \frac{18}{\sqrt{70}} \sin t, -\frac{6}{\sqrt{5}} \cos t + \frac{9}{\sqrt{70}} \sin t, \frac{15}{\sqrt{70}} \sin t \right), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle. \end{aligned}$$

- d) Ukažme si dvě z možností, jak lze postupovat. První, využívající cylindrických souřadnic, vede k vyjádření

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(r \cos t, r \sin t, z) \in \mathbb{R}^3 : r^2 + z^2 = 4 \wedge r^2 = 2r \cos t \wedge z \geq 0 \wedge \\ &\quad \wedge r \geq 0 \wedge t \in \langle -\pi, \pi \rangle\} = \\ &= \{(r \cos t, r \sin t, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{4 - r^2} \wedge r = 2 \cos t \wedge r \geq 0 \wedge t \in \langle -\pi, \pi \rangle\} = \\ &= \{(2 \cos^2 t, \sin(2t), 2|\sin t|) \in \mathbb{R}^3 : t \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle\} \end{aligned}$$

a k parametrizaci

$$\varphi_1(t) := (2 \cos^2 t, \sin(2t), 2|\sin t|), \quad D\varphi_1 = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle.$$

Druhý přístup je založen na pozorování, že

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - 1)^2 + y^2 = 1 \wedge z = \sqrt{4 - 2x}\} = \\ &= \{(\cos t + 1, \sin t, \sqrt{4 - 2(\cos t + 1)}) \in \mathbb{R}^3 : t \in \langle 0, 2\pi \rangle\}, \end{aligned}$$

a proto $\Omega = \langle \varphi_2 \rangle$, kde

$$\varphi_2(t) := (\cos t + 1, \sin t, \sqrt{2 - 2 \cos t}) = (\cos t + 1, \sin t, 2 \sin \frac{t}{2}), \quad D\varphi_2 = \langle 0, 2\pi \rangle.$$

▲

2.10 Cvičení. Parametrizujte množinu Ω , je-li

a) $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1 \wedge x \geq 0\};$

b) $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x \wedge x \leq 2\};$

c) $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 9 \wedge x^2 + y^2 - z^2 = 0 \wedge z \geq 0\};$

d) $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 - y^2 \wedge x^2 + y^2 = 6\};$

e) $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 = x \wedge z^2 = y\}.$

Kapitola 3

Křivkový integrál

3.1 Křivkový integrál 1. druhu

3.1 Motivace. Buď $\varphi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^2$ hladký oblouk a buď funkce $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kladná a spojitá na $\langle \varphi \rangle$. Zadejme si úkol spočítat „obsah plochy“

$$\tau = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \langle \varphi \rangle \wedge 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

Uvažujme dělení

$$D : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

intervalu $\langle a, b \rangle$. Je přirozené aproximovat počítaný obsah číslem

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi(t_k)) \cdot \|\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)\| &\doteq \sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi(t_k)) \cdot \|\varphi'(t_k) \cdot (t_{k+1} - t_k)\| = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi(t_k)) \cdot \|\varphi'(t_k)\| \cdot (t_{k+1} - t_k) \approx \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \|\varphi'(t)\| dt. \end{aligned}$$

3.2 Poznámka. Nyní bychom mohli postupovat podobně jako v definici Riemannova integrálu, tzn. uvažovat funkci $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (pouze) omezenou na $\langle \varphi \rangle$, definovat pro každé dělení intervalu $\langle a, b \rangle$ horní a dolní součet příslušný tomuto dělení, ...

Usnadníme si práci: budeme definovat křivkový integrál 1. druhu pouze pro funkce spojitě.

3.3 Definice. Buď $\varphi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^m$ hladký oblouk a buď funkce $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá na $\langle \varphi \rangle = \varphi(\langle a, b \rangle)$. Křivkový integrál 1. druhu funkce f podél křivky φ definujeme rovností

$$\int_{\varphi} f(x) \, ds := \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \|\varphi'(t)\| \, dt. \quad (3.1)$$

Je-li $\varphi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^m$ po částech hladká křivka (tzn., že existuje dělení

$$D : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

intervalu $\langle a, b \rangle$ takové, že pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ je křivka

$$\psi_i := \varphi|_{\langle t_{i-1}, t_i \rangle}$$

hladkým obloukem) a funkce $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá na $\langle \varphi \rangle$, definujeme

$$\int_{\varphi} f(x) \, ds := \sum_{i=1}^n \int_{\psi_i} f(x) \, ds. \quad (3.2)$$

3.4 Poznámka. Je-li křivka $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m) : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^m$ hladkým obloukem a je-li funkce $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá na $\langle \varphi \rangle$, je funkce

$$t \mapsto f(\varphi(t)) \cdot \|\varphi'(t)\| = f(\varphi(t)) \cdot \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + \dots + (\varphi_m'(t))^2} \in \mathbb{R}$$

vyskytující se v (3.1) spojitá, a proto integrovatelná na $\langle a, b \rangle$.

3.5 Poznámka. Dá se ukázat, že definice $\int_{\varphi} f(x) \, ds$ (viz (3.2)) není závislá na konkrétním „rozkladu“ po částech hladké křivky φ na hladké oblouky ψ_i .

Vlastnosti křivkového integrálu (linearita, aditivita, ...) plynou z vlastností určitého (Riemannova) integrálu.

3.6 Příklad. Vypočtěte

- a) $\int_{\varphi} (x^2 + y^2) \, ds$, kde $\varphi : \langle 0, 2\pi \rangle \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) := (\cos(2t), \sin(2t))$;
- b) $\int_{\varphi} (x^2 + y^2 + z^2) \, ds$, kde $\varphi : \langle 0, 2\pi \rangle \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi(t) := (2 \cos t, 2 \sin t, t)$;
- c) $\int_{\varphi} (2z - \sqrt{x^2 + y^2}) \, ds$, kde $\varphi : \langle 0, 2\pi \rangle \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi(t) := (t \cos t, t \sin t, t)$.

Řešení.

$$\text{a) } \int_{\varphi} (x^2 + y^2) \, ds = \int_0^{2\pi} (\cos^2(2t) + \sin^2(2t)) \cdot \|(-2 \sin(2t), 2 \cos(2t))\| \, dt = \int_0^{2\pi} 2 \, dt = \underline{\underline{4\pi}}.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int_{\varphi} (x^2 + y^2 + z^2) \, ds &= \int_0^{2\pi} (4 \cos^2 t + 4 \sin^2 t + t^2) \cdot \|(-2 \sin t, 2 \cos t, 1)\| \, dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (4 + t^2) \sqrt{5} \, dt = \underline{\underline{\sqrt{5} \left(8\pi + \frac{8\pi^3}{3} \right)}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \int_{\varphi} f(x, y, z) \, ds &= \int_0^{2\pi} (2t - \sqrt{t^2}) \cdot \|(\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t, 1)\| \, dt = \\ &= \int_0^{2\pi} t \sqrt{t^2 + 2} \, dt \stackrel{(s1)}{=} \frac{1}{2} \int_2^{2+4\pi^2} \sqrt{u} \, du = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right]_2^{2+4\pi^2} = \underline{\underline{\frac{2\sqrt{2}}{3} ((1 + 2\pi^2)^{\frac{3}{2}} - 1)}}. \end{aligned}$$

((s1) : užili jsme substituci $t^2 + 2 = u$).

▲

3.7 Cvičení. Vypočtěte

- a) $\int_{\varphi} \sqrt{1 + 4x^2} \, ds$, kde $\varphi : \langle -1, 2 \rangle \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) := (t, t^2)$;
 b) $\int_{\varphi} \frac{z^2}{x^2 + y^2} \, ds$, kde $\varphi : \langle 0, 2\pi \rangle \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi(t) := (\cos t, \sin t, t)$.

3.8 Příklad. Vypočtěte

$$\int_{\varphi} x^3 y \, ds, \quad \int_{-\varphi} x^3 y \, ds,$$

je-li

$$\varphi : \langle -1, 3 \rangle \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi(t) := (t, 1 + t).$$

Řešení.

$$\int_{\varphi} x^3 y \, ds = \int_{-1}^3 t^3 (1 + t) \cdot \|(1, 1)\| \, dt = \int_{-1}^3 (t^3 + t^4) \sqrt{2} \, dt = \underline{\underline{\frac{344}{5} \sqrt{2}}};$$

$$\int_{-\varphi} x^3 y \, ds = \int_{-3}^1 (-t)^3 (1 - t) \cdot \|(-1, -1)\| \, dt = \int_{-3}^1 (t^4 - t^3) \sqrt{2} \, dt = \underline{\underline{\frac{344}{5} \sqrt{2}}}.$$

▲

3.9 Věta (o nezávislosti na parametrizaci). *Nechť φ a ψ jsou jednoduché nebo jednoduché uzavřené po částech hladké křivky v $\mathbb{R}^m$, nechť $\langle \varphi \rangle = \langle \psi \rangle$ a nechť funkce $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá na $\langle \varphi \rangle$. Pak platí*

$$\int_{\varphi} f(x) \, ds = \int_{\psi} f(x) \, ds.$$

3.10 Úmluva. Všimněme si, že za situace z věty 3.9 je hodnota $\int_{\varphi} f(x) ds$ jednoznačně určena pouze funkcí f , množinou $\langle \varphi \rangle$ a informací, že φ je jednoduchá (nebo jednoduchá uzavřená) po částech hladká křivka.

Budeme-li někdy psát (ve shodě s praxí)

$$\int_k f(x) ds, \text{ kde } k \subset \mathbb{R}^m,$$

a mluvit o křivkovém integrálu 1. druhu funkce f podél „křivky“ k , budeme tím rozumět, že $k = \langle \varphi \rangle$ pro nějakou jednoduchou (nebo jednoduchou uzavřenou) po částech hladkou křivku φ a že

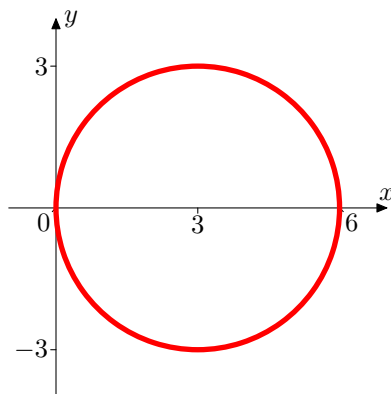
$$\int_k f(x) ds := \int_{\varphi} f(x) ds.$$

Pokud křivka φ požadovaných vlastností neexistuje, nemá symbol $\int_k f(x) ds$ žádný smysl!

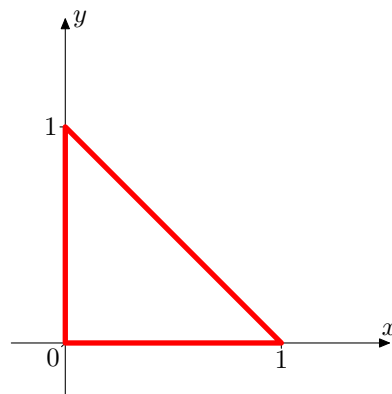
3.11 Příklad. Vypočtěme

- a) $\int_k \sqrt{x^2 + y^2} ds$, kde $k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 6x\}$;
- b) $\int_k (x + y) ds$, kde $k \subset \mathbb{R}^2$ je obvod trojúhelníku s vrcholy $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$;
- c) $\int_k x^2 y ds$, kde k je hranicí kruhové výseče ohraničené kružnicí $x^2 + y^2 = R^2$ ($R > 0$), kladnou částí osy x a polopřímku $y = x$, $x \geq 0$;
- d) $\int_{\langle \varphi \rangle} y^2 ds$, $\varphi(t) := (2(t - \sin t), 2(1 - \cos t))$, $D\varphi = \langle 0, 2\pi \rangle$.

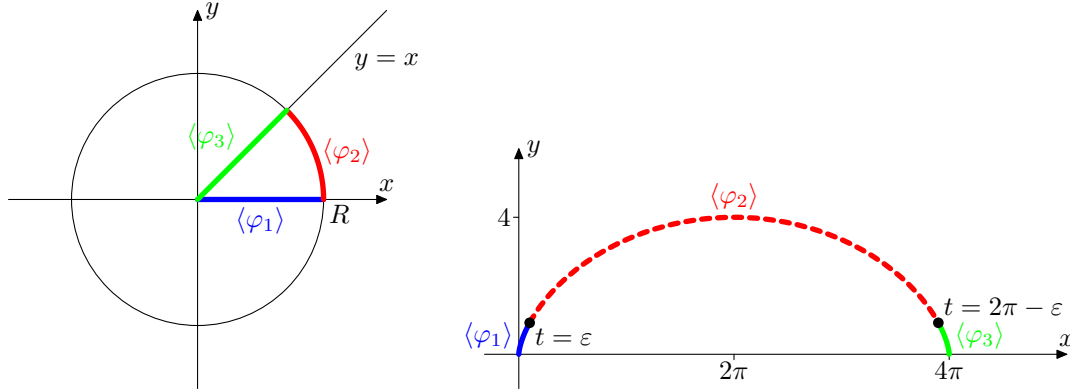
Řešení.



Obr. 3.1: k z příkladu 3.11a)



Obr. 3.2: k z příkladu 3.11b)



Obr. 3.3: $k = \langle \varphi_1 \rangle \cup \langle \varphi_2 \rangle \cup \langle \varphi_3 \rangle$ z příkladu 3.11c) Obr. 3.4 : $\langle \varphi \rangle = \langle \varphi_1 \rangle \cup \langle \varphi_2 \rangle \cup \langle \varphi_3 \rangle$ z příkladu 3.11d)

a) Nejprve je třeba najít křivku φ požadovaných vlastností. Jelikož

$$k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 3)^2 + y^2 = 3^2\},$$

je množina k kružnicí znázorněnou na obrázku 3.1 a k její parametrizaci lze použít (mimo jiné) „posunutých“ polárních souřadnic, tj. $k = \langle \varphi \rangle$, kde

$$\varphi : \langle 0, 2\pi \rangle \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi(t) := (3 \cos t + 3, 3 \sin t).$$

Pak

$$\begin{aligned} \int_k \sqrt{x^2 + y^2} \, ds &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(3 \cos t + 3)^2 + (3 \sin t)^2} \cdot \|(-3 \sin t, 3 \cos t)\| \, dt = \\ &= 9\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos t} \, dt = 9\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \cos^2 \left(\frac{t}{2}\right)} \, dt = \\ &= 18 \int_0^{2\pi} \left| \cos \frac{t}{2} \right| \, dt = 36 \int_0^{\pi} \cos \frac{t}{2} \, dt = \underline{\underline{72}}. \end{aligned}$$

b) Zadaný trojúhelník je na obrázku 3.2. Zvolme

$$\varphi(t) := \begin{cases} (t, 0), & t \in \langle 0, 1 \rangle, \\ (2 - t, t - 1), & t \in \langle 1, 2 \rangle, \\ (0, 3 - t), & t \in \langle 2, 3 \rangle. \end{cases}$$

Pak (viz výše uvedenou úmluvu):

$$\begin{aligned} \int_k (x + y) \, ds &= \int_{\varphi} (x + y) \, ds = \\ &= \int_0^1 t \cdot \|(1, 0)\| \, dt + \int_1^2 1 \cdot \|(-1, 1)\| \, dt + \int_2^3 (3 - t) \cdot \|(0, -1)\| \, dt = \underline{\underline{1 + \sqrt{2}}}. \end{aligned}$$

Lze však postupovat i šikovněji; rozdělíme k na jednotlivé úsečky, a ty pak parametrizujeme:

$$\int_k (x+y) \, ds = \int_{k_1} (x+y) \, ds + \int_{k_2} (x+y) \, ds + \int_{k_3} (x+y) \, ds,$$

kde

$$\begin{aligned} k_1 &= \langle \varphi_1 \rangle; \quad \varphi_1(t) := (t, 0), \quad t \in \langle 0, 1 \rangle; \\ k_2 &= \langle \varphi_2 \rangle; \quad \varphi_2(t) := (t, 1-t), \quad t \in \langle 0, 1 \rangle; \\ k_3 &= \langle \varphi_3 \rangle; \quad \varphi_3(t) := (0, t), \quad t \in \langle 0, 1 \rangle. \end{aligned}$$

Tímto způsobem získáme

$$\int_k (x+y) \, ds = \int_0^1 t \cdot \|(1, 0)\| \, dt + \int_0^1 1 \cdot \|(1, -1)\| \, dt + \int_0^1 t \cdot \|(0, 1)\| \, dt = \underline{\underline{1 + \sqrt{2}}}.$$

(Čtenáři se vyplatí, rozmyslí-li si korektnost tohoto postupu podrobně.)

c) Zřejmě

$$\int_k x^2 y \, ds = \int_{\varphi_1} x^2 y \, ds + \int_{\varphi_2} x^2 y \, ds + \int_{\varphi_3} x^2 y \, ds, \quad (3.3)$$

kde

$$\begin{aligned} \varphi_1 &:= (t, 0), \quad t \in \langle 0, R \rangle, \\ \varphi_2 &:= (R \cos t, R \sin t), \quad t \in \langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle, \\ \varphi_3 &:= (t, t), \quad t \in \langle 0, \frac{R}{\sqrt{2}} \rangle, \end{aligned}$$

(viz obrázek 3.3). Nyní stačí spočítat jednotlivé integrály:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_1} x^2 y \, ds &= \int_0^R t^2 \cdot 0 \cdot 1 \, dt = 0, \\ \int_{\varphi_2} x^2 y \, ds &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} R^3 \cos^2 t \sin t \sqrt{R^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} \, dt = \\ &\stackrel{(s1)}{=} -R^4 \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} u^2 \, du = -\frac{R^4}{3} [u^3]_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{R^4}{3} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \\ &\quad (\text{použili jsme substituci (s1): } \cos t = u), \\ \int_{\varphi_3} x^2 y \, ds &= \int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} t^3 \sqrt{2} \, dt = \sqrt{2} \left[\frac{t^4}{4} \right]_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{4} R^4 \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{2}}{16} R^4, \end{aligned}$$

a dosadit do (3.3):

$$\int_k x^2 y \, ds = \int_{\varphi_1} x^2 y \, ds + \int_{\varphi_2} x^2 y \, ds + \int_{\varphi_3} x^2 y \, ds = \underline{\underline{\frac{16 - \sqrt{2}}{48} R^4}}.$$

d) Obrázek cykloidy $\langle \varphi \rangle$ je znázorněn v 3.4. Mechanickým výpočtem dostaneme

$$\begin{aligned} \int_{\langle \varphi \rangle} y^2 \, ds &= \int_0^{2\pi} 4(1 - \cos t)^2 \sqrt{(2(1 - \cos t))^2 + (2 \sin t)^2} \, dt = \\ &= 4 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 \sqrt{8 - 8 \cos t} \, dt = 8\sqrt{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^{\frac{5}{2}} \, dt = \\ &= 8\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left(2 \sin^2 \frac{t}{2}\right)^{\frac{5}{2}} \, dt = 64 \int_0^{2\pi} \sin^5 \frac{t}{2} \, dt = 128 \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 u)^2 \sin u \, du = \\ &= 128 \int_1^{-1} (1 - z^2)^2 (-1) \, dz = \underline{\underline{\frac{2048}{15}}}. \end{aligned}$$

Rozmysleme si, že tento výpočet (byť vede ke správnému výsledku) není korektní. Nekorektnost spočívá v tom, že v krajních bodech je

$$\varphi'(0) = \varphi'(2\pi) = (0, 0),$$

což znamená, že φ není po částech hladkou křivkou. Zůstává otázkou, zda vůbec lze $\langle \varphi \rangle$ parametrizovat nějakou po částech hladkou křivkou, protože v opačném případě by bylo nekorektní i samotné zadání příkladu.

„Rozdělme“ (pro nějaké $\varepsilon \in (0, \pi)$ ¹) křivku φ na tři části:

$$\varphi_1 := \varphi|_{\langle 0, \varepsilon \rangle}, \quad \varphi_2 := \varphi|_{\langle \varepsilon, 2\pi - \varepsilon \rangle} \quad \text{a} \quad \varphi_3 := \varphi|_{\langle 2\pi - \varepsilon, 2\pi \rangle}.$$

Pak φ_2 je zřejmě hladkým obloukem a obrázek 3.4 správně napovídá, že množiny $\langle \varphi_1 \rangle$ a $\langle \varphi_3 \rangle$ jsou grafy hladkých funkcí g a h proměnné y ,² tj.

$$\begin{aligned} \langle \varphi_1 \rangle &= \{(g(y), y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \langle 0, 2(1 - \cos \varepsilon) \rangle\}, \\ \langle \varphi_3 \rangle &= \{(h(y), y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \langle 0, 2(1 - \underbrace{\cos(2\pi - \varepsilon)}_{=\cos \varepsilon}) \rangle\}. \end{aligned}$$

To nás vede k hladkým parametrizacím $\langle \varphi_1 \rangle = \langle \psi_1 \rangle$ a $\langle \varphi_3 \rangle = \langle \psi_3 \rangle$, kde

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &:= (g(t), t), \quad t \in \langle 0, 2(1 - \cos \varepsilon) \rangle, \\ \psi_3(t) &:= (h(t), t), \quad t \in \langle 0, 2(1 - \cos \varepsilon) \rangle, \end{aligned}$$

¹Obrázek 3.4 odpovídá volbě $\varepsilon = 1$.

²Čtenář se může pokusit využít svou znalost cyklometrických funkcí a nalézt explicitní vyjádření předpisů funkcí g a h .

a jistotě, že $\langle \varphi \rangle$ lze parametrizovat po částech hladkou křivkou. Případně ztracenou důvěru ve správnost výše získaného výsledku lze snadno znovu nalézt, rozmyslíme-li si, že

$$\int_{\langle \varphi \rangle} y^2 ds = \int_{\psi_1} y^2 ds + \int_{\varphi_2} y^2 ds + \int_{\psi_3} y^2 ds$$

a že pro $\varepsilon \rightarrow 0+$ platí

$$\begin{aligned} \int_{\psi_1} y^2 ds &\rightarrow 0, \quad \int_{\psi_3} y^2 ds \rightarrow 0, \\ \int_{\varphi_2} y^2 ds &= \int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \dots dt \rightarrow \int_0^{2\pi} \dots dt = \underline{\underline{\frac{2048}{15}}}. \end{aligned}$$

▲

3.2 Aplikace křivkového integrálu 1. druhu

a) Délka křivky.

Je-li φ po částech hladká křivka, rozumíme její délkou číslo

$$l(\varphi) := \int_{\varphi} 1 ds.$$

b) Obsah válcové plochy.

Buď dána „plocha“¹

$$\tau := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \langle \varphi \rangle \wedge 0 \leq z \leq f(x, y)\},$$

kde $\varphi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^2$ je po částech hladká jednoduchá (nebo jednoduchá uzavřená) křivka a funkce $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá a nezáporná na $\langle \varphi \rangle$. Obsah „plochy“ τ definujeme rovností

$$\sigma(\tau) := \int_{\varphi} f(x, y) ds.$$

c) Buď $k = \langle \varphi \rangle$, kde φ je jednoduchá (nebo jednoduchá uzavřená) po částech hladká křivka v $\mathbb{R}^2$, a nechť (délková) hustota „křivky“ k je popsána funkcí $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

¹Uvozovky zde mají zvýraznit skutečnost, že pojem **plocha** není v tuto chvíli definován. Při interpretaci je nutno se opřít o intuici a geometrickou představu.

která je spojitá a nezáporná na k . Pak je rozumné užívat (definovat) vztahy:

$$\begin{aligned} m(k) &= \int_{\varphi} h(x, y) \, ds \dots \text{hmotnost „křivky“ } k, \\ S_x(k) &= \int_{\varphi} y h(x, y) \, ds \dots \text{statický moment } k \text{ vzhledem k ose } x, \\ S_y(k) &= \int_{\varphi} x h(x, y) \, ds \dots \text{statický moment } k \text{ vzhledem k ose } y, \\ T(k) &= \left(\frac{S_y(k)}{m(k)}, \frac{S_x(k)}{m(k)} \right) \dots \text{těžiště } k, \\ I_x(k) &= \int_{\varphi} y^2 h(x, y) \, ds \dots \text{moment setrvačnosti } k \text{ vzhledem k ose } x, \\ I_y(k) &= \int_{\varphi} x^2 h(x, y) \, ds \dots \text{moment setrvačnosti } k \text{ vzhledem k ose } y. \end{aligned}$$

(Analogické vztahy lze napsat i pro prostorovou křivku.)

3.12 Cvičení. Vypočtěte

- délku křivky (jednoho závitu šroubovice) $\varphi(t) := (\cos t, \sin t, 2t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$;
- obsah válcové plochy

$$\tau := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \wedge 0 \leq z \leq xy \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\};$$

- souřadnice těžiště čtvrtiny kružnice $x^2 + y^2 = 4$ ležící v druhém kvadrantu, jejíž délková hustota v každém jejím bodě je rovna kvadrátu vzdálenosti tohoto bodu od bodu $(2, 0)$.

3.3 Křivkový integrál 2. druhu

3.13 Motivace.

- Buď $(k) = \langle \alpha; \beta \rangle$ orientovaná úsečka v $\mathbb{R}^2$ (tzn. že je určen její počáteční bod $\alpha \in \mathbb{R}^2$ a koncový bod $\beta \in \mathbb{R}^2$) a buď $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ konstantní vektorové pole (tzn. že $f(x, y) := f_0 \in \mathbb{R}^2$). Z fyziky je známo, že práce vektorového pole f podél orientované úsečky (k) je dána skalárním součinem

$$f_0 \cdot (\beta - \alpha).$$

- Buď $\varphi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^2$ hladký oblouk a buď $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ spojitě vektorové pole definované na $\langle \varphi \rangle$. Zadejme si úkol spočítat práci vektorového pole f podél „orientované křivky“ $\langle \varphi \rangle$. Uvažujme dělení $D : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ intervalu $\langle a, b \rangle$. Nahradíme-li „orientované křivky“ $\varphi(\langle t_k, t_{k+1} \rangle)$ orientovanými

úsečkami $\langle \varphi(t_k); \varphi(t_{k+1}) \rangle$ a na každé z nich vektorové pole f konstantním vektorovým polem s hodnotou $f(\varphi(t_k))$, získáme tuto aproximaci počítané práce:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi(t_k)) \cdot (\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)) &\doteq \sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi(t_k)) \cdot (\varphi'(t_k) (t_{k+1} - t_k)) \approx \\ &\approx \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt. \end{aligned}$$

3.14 Definice. Buď $\varphi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^m$ hladký oblouk a $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ vektorové pole spojitě na $\langle \varphi \rangle = \varphi(\langle a, b \rangle)$. Křivkový integrál 2. druhu vektorového pole f podél křivky φ definujeme rovností

$$\int_{(\varphi)} f(x) ds := \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt. \quad (3.4)$$

Je-li $\varphi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^m$ po částech hladká křivka a vektorové pole $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ je spojitě na $\langle \varphi \rangle$, definujeme

$$\int_{(\varphi)} f(x) ds := \sum_{i=1}^n \int_{(\psi_i)} f(x) ds, \quad (3.5)$$

kde hladké oblouky ψ_i vzniknou „rozkladem“ křivky φ (viz definici 2.5 po částech hladké křivky).

3.15 Poznámka ((podobná 3.4)). Mají-li hladký oblouk $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ a vektorové pole $f = (f_1, \dots, f_m)$ předpokládané vlastnosti, je

$$\begin{aligned} \int_{(\varphi)} f(x) ds &\stackrel{\text{ozn.}}{=} \int_{(\varphi)} f_1(x) dx_1 + \dots + f_m(x) dx_m = \\ &= \int_a^b f_1(\varphi(t)) \cdot \varphi'_1(t) + \dots + f_m(\varphi(t)) \cdot \varphi'_m(t) dt, \end{aligned}$$

přičemž funkce

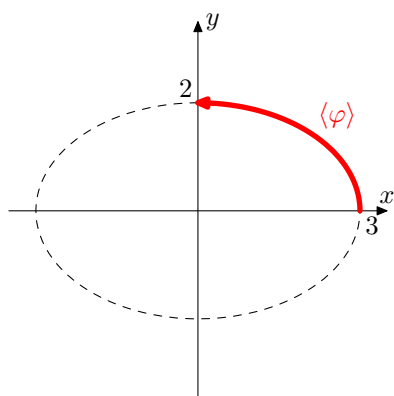
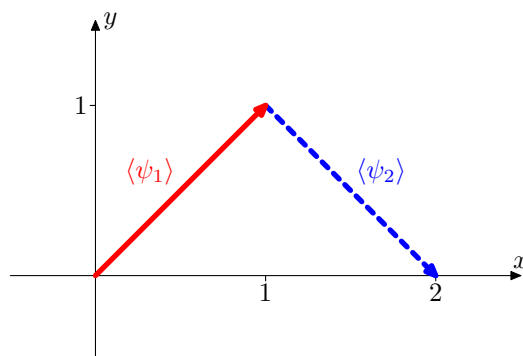
$$t \mapsto f_1(\varphi(t)) \cdot \varphi'_1(t) + \dots + f_m(\varphi(t)) \cdot \varphi'_m(t) \in \mathbb{R}$$

je spojitá (a proto integrovatelná) na $\langle a, b \rangle$.

3.16 Poznámka ((podobná 3.5)). Dá se i zde ukázat, že definice $\int_{(\varphi)} f(x) ds$ (viz (3.5)) je nezávislá na konkrétním rozkladu po částech hladké křivky φ na hladké oblouky ψ_i .

3.17 Příklad. Vypočtěme

- a) $I = \int_{(\varphi)} f(x, y) \, ds$, kde $f(x, y) := (y - 1, x)$, $\varphi(t) := (3 \cos t, 2 \sin t)$, $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$;
 b) $I = \int_{(\varphi)} (x^2 + y^2) \, dx + (x^2 - y^2) \, dy$, kde $\varphi(t) := (t, 1 - |1 - t|)$, $t \in \langle 0, 2 \rangle$;
 c) $I = \int_{(\varphi)} x \, dx + y \, dy + (xz - y) \, dz$, kde $\varphi(t) := (t^2, 2t, 4t^3)$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$.

Obr. 3.5: $\langle \varphi \rangle$ z příkladu 3.17 a)Obr. 3.6: $\langle \varphi \rangle = \langle \psi_1 \rangle \cup \langle \psi_2 \rangle$ z příkladu 3.17 b)

Řešení.

a)

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin t - 1)(-3 \sin t) + (3 \cos t)(2 \cos t) \, dt = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -6 \sin^2 t + 3 \sin t + 6 \cos^2 t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 6 \cos(2t) + 3 \sin t \, dt = \\
&= 3 [\sin(2t) - \cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\underline{3}}.
\end{aligned}$$

(Geometrický obraz křivky φ , tj. čtvrtina elipsy $x^2/9 + y^2/4 = 1$ ležící v prvním kvadrantu, je znázorněn na obrázku 3.5.)

b) Zvolme (viz obrázek 3.6)

$$\psi_1 := \varphi|_{\langle 0,1 \rangle}, \quad \psi_2 := \varphi|_{\langle 1,2 \rangle}.$$

Pak (viz definici 3.14)

$$\begin{aligned}
I &= \int_{(\psi_1)} (x^2 + y^2) \, dx + (x^2 - y^2) \, dy + \int_{(\psi_2)} (x^2 + y^2) \, dx + (x^2 - y^2) \, dy = \\
&= \int_0^1 (t^2 + t^2) \cdot 1 + 0 \cdot 1 \, dt + \int_1^2 (t^2 + (2-t)^2) \cdot 1 + (t^2 - (2-t)^2)(-1) \, dt = \\
&= \left[2 \frac{t^3}{3} \right]_0^1 + \left[2 \frac{(2-t)^3}{-3} \right]_1^2 = \frac{2}{3} + 0 - \frac{2}{-3} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}.
\end{aligned}$$

c)

$$I = \int_0^1 t^2 \cdot 2t + 2t \cdot 2 + (4t^5 - 2t) \cdot 12t^2 \, dt = \left[2 \frac{t^4}{4} + 4 \frac{t^2}{2} + 48 \frac{t^8}{8} - 24 \frac{t^4}{4} \right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{5}{2}}}.$$

▲

3.18 Příklad. Buď

$$\begin{aligned}
f(x, y) &:= (x^2 + y, 2y); \\
\varphi(t) &: \langle -1, 3 \rangle \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi(t) := (t, 1 + t).
\end{aligned}$$

Potom

$$\begin{aligned}\int_{(\varphi)} f(x, y) \, ds &= \int_{(\varphi)} (x^2 + y) \, dx + 2y \, dy = \int_{-1}^3 (t^2 + (1+t), 2(1+t)) \cdot (1, 1) \, dt = \\ &= \int_{-1}^3 (t^2 + 3t + 3) \, dt = \underline{\underline{\frac{100}{3}}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{(-\varphi)} f(x, y) \, ds &= \int_{-3}^1 ((-t)^2 + (1-t), 2(1-t)) \cdot (-1, -1) \, dt = \\ &= \int_{-3}^1 (-t^2 + 3t - 3) \, dt = \underline{\underline{-\frac{100}{3}}}.\end{aligned}$$

3.19 Věta (o nezávislosti na parametrizaci). *Nechť $\varphi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^m$ a $\psi : \langle c, d \rangle \rightarrow \mathbb{R}^m$ jsou jednoduché nebo jednoduché uzavřené po částech hladké křivky v $\mathbb{R}^m$, nechť $\langle \varphi \rangle = \langle \psi \rangle$ a nechť vektorové pole $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ je spojitě na $\langle \varphi \rangle$. Pak platí*

$$\int_{(\varphi)} f(x) \, ds = \int_{(\psi)} f(x) \, ds,$$

jsou-li křivky φ a ψ souhlasně orientované (tzn. že existují reálná čísla $t \in (a, b)$, $t^ \in (c, d)$ a $\check{c} > 0$ taková, že $\varphi(t) = \psi(t^*)$ a že $\varphi'(t) = \check{c} \psi'(t^*)$).*

Jsou-li křivky φ a ψ nesouhlasně orientované (tzn. že existují reálná čísla $t \in (a, b)$, $t^ \in (c, d)$ a $\check{c} < 0$ taková, že $\varphi(t) = \psi(t^*)$ a že $\varphi'(t) = \check{c} \psi'(t^*)$), je*

$$\int_{(\varphi)} f(x) \, ds = - \int_{(\psi)} f(x) \, ds.$$

3.20 Úmluva ((podobná 3.10)). Je-li $(k) \subset \mathbb{R}^m$ taková množina, že existuje nějaká jednoduchá (nebo jednoduchá uzavřená) po částech hladká křivka φ , pro niž je $\langle \varphi \rangle = (k)$, budeme občas psát $\int_{(k)} f(x) \, ds$ místo správného $\int_{(\varphi)} f(x) \, ds$. Má-li být tato úmluva korektní, je třeba přidat ke „křivce“ (k) ještě její „orientaci“ (tj. „směr probíhání“) a křivku φ výše uvedených vlastností zvolit „souhlasně orientovanou“. Vše se vyjasní příkladem.

3.21 Příklad. Vypočtěme

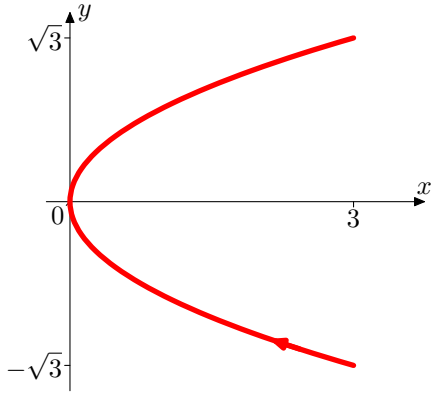
- $I = \int_{(k)} (e^x + y) \, dx + xy^2 \, dy$, kde $(k) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x \wedge x \leq 3\}$ a „orientace“ (k) je určena pořadím bodů $(3, -\sqrt{3})$, $(3, \sqrt{3})$;
- $\int_{(k)} f(x, y) \, ds$, je-li $f(x, y) := (x + 2y, y)$ a $(k) \subset \mathbb{R}^2$ je orientovaný obvod trojúhelníku s vrcholy $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, jehož orientace je dána uvedeným pořadím vrcholů;

c) $\int_{(k)} f(x, y, z) \, ds$, kde

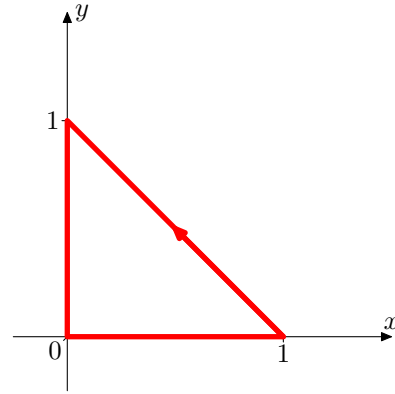
$$f(x, y, z) := (y^2 - z^2, z^2 - x^2, x^2 - y^2),$$

$$(k) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0 \wedge xyz = 0\}$$

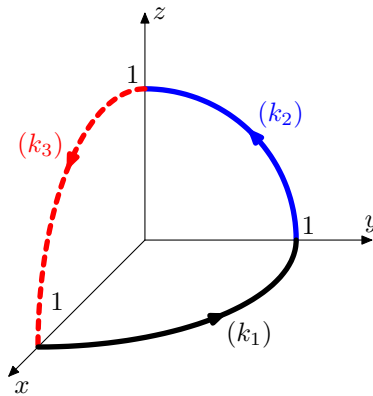
a orientace (k) je dána pořadím bodů: $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$.



Obr. 3.7: (k) z příkladu 3.21 a)



Obr. 3.8: (k) z příkladu 3.21 b)



Obr. 3.9: $(k) = (k_1) \cup (k_2) \cup (k_3)$ z příkladu 3.21 c)

Řešení.

a) Zřejmě lze psát (viz obrázek 3.7)

$$(k) = \{(t^2, t) : t \in \langle -\sqrt{3}, \sqrt{3} \rangle\},$$

a proto

$$I = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (e^{t^2} + t) 2t + t^4 \, dt = \left[e^{t^2} + \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \underline{\underline{\frac{38\sqrt{3}}{5}}}.$$

b) Zvolme

$$\varphi(t) := \begin{cases} (t, 0), & t \in \langle 0, 1 \rangle, \\ (2-t, t-1), & t \in \langle 1, 2 \rangle, \\ (0, 3-t), & t \in \langle 2, 3 \rangle, \end{cases}$$

a všimněme si, že při této parametrizaci „orientace souhlasí“. Je proto

$$\begin{aligned} \int_{(k)} f(x, y) \, ds &= \int_0^1 (t+0, 0) \cdot (1, 0) \, dt + \int_1^2 (2-t+2(t-1), t-1) \cdot (-1, 1) \, dt + \\ &+ \int_2^3 (0+2(3-t), 3-t) \cdot (0, -1) \, dt = \int_0^1 t \, dt + \int_1^2 (-1) \, dt + \int_2^3 (-3+t) \, dt = \underline{\underline{-1}}. \end{aligned}$$

Vypočtěme daný integrál ještě jednou, šikovněji (detailní rozmyšlení ponechme svědomitému čtenáři):

$$\int_{(k)} f(x, y) \, ds = \int_{(\varphi_1)} f(x, y) \, ds - \int_{(\varphi_2)} f(x, y) \, ds - \int_{(\varphi_3)} f(x, y) \, ds,$$

kde

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &:= (t, 0), \quad t \in \langle 0, 1 \rangle; \\ \varphi_2(t) &:= (t, 1-t), \quad t \in \langle 0, 1 \rangle; \\ \varphi_3(t) &:= (0, t), \quad t \in \langle 0, 1 \rangle; \end{aligned}$$

a proto

$$\begin{aligned} \int_{(k)} f(x, y) \, ds &= \int_0^1 (t, 0) \cdot (1, 0) \, dt - \int_0^1 (2-t, 1-t) \cdot (1, -1) \, dt - \\ &- \int_0^1 (2t, t) \cdot (0, 1) \, dt = \underline{\underline{-1}}. \end{aligned}$$

c) „Křivka“ (k) je zřejmě sjednocením čtvrtkružnic (k_1) , (k_2) a (k_3) (viz obrázek 3.9). Tyto čtvrtkružnice můžeme parametrizovat (například) takto:

(k1):	$\begin{aligned} x &= \cos t, \\ y &= \sin t, \\ z &= 0, \\ t &\in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle; \\ \text{orientace} \\ \text{souhlasí,} \end{aligned}$	(k2):	$\begin{aligned} x &= 0, \\ y &= \cos t, \\ z &= \sin t, \\ t &\in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle; \\ \text{orientace} \\ \text{souhlasí,} \end{aligned}$	(k3):	$\begin{aligned} x &= \sin t, \\ y &= 0, \\ z &= \cos t, \\ t &\in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle; \\ \text{orientace} \\ \text{souhlasí,} \end{aligned}$
-------	---	-------	---	-------	---

a proto

$$\begin{aligned}\int_{(k)} f \, ds &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t)(-\sin t) + (-\cos^2 t)(\cos t) \, dt + \\ &+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t)(-\sin t) + (-\cos^2 t)(\cos t) \, dt + \\ &+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos^2 t)(\cos t) + (\sin^2 t)(-\sin t) \, dt = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -3 \sin^3 t - 3 \cos^3 t \, dt = \underline{\underline{-4}}.\end{aligned}$$

▲

3.22 Cvičení. Vypočtěte

a)

$$\int_{(k)} \frac{1}{|x| + |y|} \, dx + \frac{1}{|x| + |y|} \, dy,$$

je-li (k) orientovaný obvod čtverce o vrcholech $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ a $(0, -1)$, jehož orientace je dána uvedeným pořadím vrcholů;

b) $\int_{(k)} y^2 \, dx + z^2 \, dy + x^2 \, dz$ kde orientace „křivky“

$$(k) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 9 \wedge x^2 + y^2 = 3x \wedge z \geq 0\}$$

je dána pořadím bodů: $(0, 0, 3)$, $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{\sqrt{2}})$, $(3, 0, 0)$.

3.4 Greenova věta

3.23 Definice. Množinu $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ nazýváme oblastí, je-li současně:

- Ω otevřená (tzn. $(\forall x \in \Omega)(\exists U(x)) : x \in U(x) \subset \Omega$);
- Ω souvislá (tzn. že každé dva body Ω lze spojit křivkou v Ω ; přesněji: pro každé dva body $\alpha, \beta \in \Omega$ existuje křivka $\varphi : \langle a, b \rangle \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^m$ taková, že $\varphi(a) = \alpha$ a $\varphi(b) = \beta$).

3.24 Věta ((Jordanova)). *Nechť φ je jednoduchá uzavřená křivka v $\mathbb{R}^2$. Pak existují oblasti $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^2$ takové, že*

- $\mathbb{R}^2 \setminus \langle \varphi \rangle = \Omega_1 \cup \Omega_2$,
- $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$,
- $\partial \Omega_1 = \partial \Omega_2 = \langle \varphi \rangle$,
- Ω_1 je omezená a Ω_2 je neomezená (v $\mathbb{R}^2$).

(Oblast $\Omega_1 \stackrel{\text{ozn.}}{=} \text{int } \varphi$ nazýváme vnitřkem křivky φ , oblast $\Omega_2 \stackrel{\text{ozn.}}{=} \text{ext } \varphi$ se nazývá vnějšek křivky φ .)

3.25 Definice. Buď $\varphi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^2$ jednoduchá uzavřená po částech hladká křivka a buď $t \in (a, b)$ takové reálné číslo, že existuje (nenulový) tečný vektor $\varphi'(t) \in \mathbb{R}^2$.

Nenulový vektor $n(t) \in \mathbb{R}^2$ nazveme vnějším normálovým vektorem křivky φ v bodě t , pokud současně platí:

- $n(t) \cdot \varphi'(t) = 0$,
- $(\exists \delta > 0)(\forall h \in (0, \delta)) : \varphi(t) + h n(t) \in \text{ext } \varphi$.

Řekneme, že křivka φ je kladně orientovaná, je-li uspořádaná dvojice $[n(t), \varphi'(t)]$ orientovaná stejně jako uspořádaná dvojice $[e_1, e_2]$; ^a řečeno přesněji, je-li

$$\begin{vmatrix} n_1 & n_2 \\ \tau_1 & \tau_2 \end{vmatrix} > 0,$$

kde

$$(n_1, n_2) := n(t), \quad (\tau_1, \tau_2) := \varphi'(t).$$

(„Při probíhání kladně orientované křivky φ máme int φ po levé ruce“.)

Je-li

$$\begin{vmatrix} n_1 & n_2 \\ \tau_1 & \tau_2 \end{vmatrix} < 0,$$

říkáme, že křivka φ je záporně orientovaná. ^b

^a $e_1 := (1, 0)$, $e_2 := (0, 1)$.

^b Uvědomme si, že číslo

$$\begin{vmatrix} n_1 & n_2 \\ \tau_1 & \tau_2 \end{vmatrix}$$

určuje třetí souřadnici vektorového součinu

$$(n_1, n_2, 0) \times (\tau_1, \tau_2, 0).$$

3.26 Poznámka. Výše uvedená definice kladně (resp. záporně) orientované křivky je korektní; je totiž nezávislá na bližší volbě bodu $t \in (a, b)$ takového, že existuje $\varphi'(t)$.

3.27 Příklady orientovaných křivek.

- a) Křivka $\varphi_1(t) := (\cos t, \sin t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, je kladně orientovaná.
- b) Křivka $\varphi_2(t) := (\sin t, \cos t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, je záporně orientovaná.

3.28 Věta ((Greenova)). *Nechť φ je jednoduchá uzavřená kladně orientovaná a po částech hladká křivka v $\mathbb{R}^2$, nechť $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a nechť funkce $f_1, f_2, \frac{\partial f_1}{\partial y}, \frac{\partial f_2}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jsou spojité na $\Omega := \text{int } \varphi \cup \langle \varphi \rangle$.*

Potom platí

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \right) dx dy = \int_{(\varphi)} f_1(x, y) dx + f_2(x, y) dy = \int_{(\varphi)} f(x, y) ds.$$

Důkaz. Větu dokážeme pouze pro speciální případ, kdy Ω je obdélník, tj.

$$\Omega = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle \\ (a, b, c, d \in \mathbb{R}; \quad a < b, \quad c < d).$$

Nejdříve upravme (pomocí Fubiniovy věty) dvojný integrál na levé straně dokazované rovnosti:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \right) dx dy &= \iint_{\Omega} \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) dx dy - \iint_{\Omega} \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) dx dy = \\ &= \int_c^d \left(\int_a^b \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) dx \right) dy - \int_a^b \left(\int_c^d \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) dy \right) dx = \\ &= \int_c^d [f_2(x, y)]_{x=a}^b dy - \int_a^b [f_1(x, y)]_{y=c}^d dx = \\ &= \underline{\int_c^d (f_2(b, y) - f_2(a, y)) dy - \int_a^b (f_1(x, d) - f_1(x, c)) dx}, \end{aligned}$$

a potom (pomocí parametrizací jednotlivých stran obdélníku Ω) křivkový integrál na pravé straně rovnosti:

$$\begin{aligned} \int_{(\varphi)} f(x, y) ds &= \int_a^b (f_1(t, c) \cdot 1 + f_2(t, c) \cdot 0) dt + \int_c^d (f_1(b, t) \cdot 0 + f_2(b, t) \cdot 1) dt - \\ &\quad - \int_a^b (f_1(t, d) \cdot 1 + f_2(t, d) \cdot 0) dt - \int_c^d (f_1(a, t) \cdot 0 + f_2(a, t) \cdot 1) dt = \\ &= \underline{\int_a^b (f_1(t, c) - f_1(t, d)) dt + \int_c^d (f_2(b, t) - f_2(a, t)) dt}. \end{aligned}$$

K dokončení důkazu si stačí všimnout, že podtržená čísla jsou stejná.

□

3.29 Příklad. Vypočtěte pomocí Greenovy věty

a)

$$\int_{(k)} (x+y) dx + (y-x) dy,$$

kde (k) je „kladně orientovaná“ elipsa

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\} \quad (a, b > 0);$$

b)

$$\int_{(k)} \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dx + \frac{2}{y} \operatorname{arctg} \frac{x}{y} dy,$$

kde (k) je „kladně orientovaná“ hranice oblasti

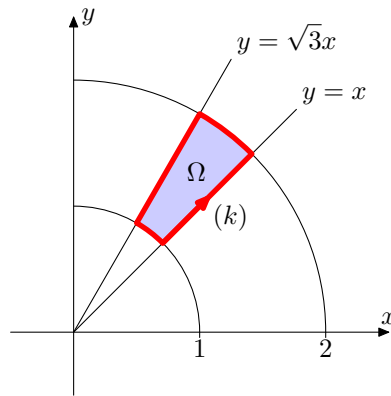
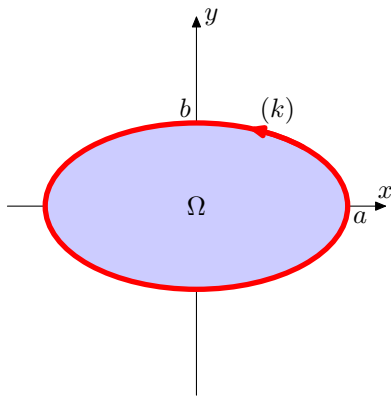
$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (1 < x^2 + y^2 < 4) \wedge (x < y < x\sqrt{3})\};$$

c)

$$\int_{(k)} yx^2 dx + xy dy,$$

kde (k) je obvod čtverce o vrcholech $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(1, 0)$, jehož orientace je dána uvedeným pořadím vrcholů;d) obsah kruhu (o poloměru $r > 0$)

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\}.$$

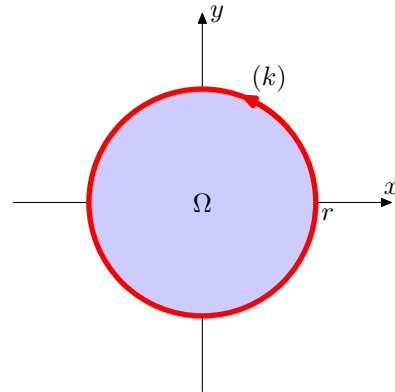
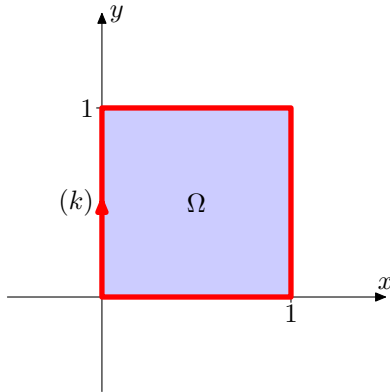
Řešení.

Obr. 3.10: Ilustrace k příkladu 3.29a)

Obr. 3.11: Ilustrace k příkladu 3.29b)

a) Integrál vypočtěme pomocí Greenovy věty

$$\left(\text{kde } \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\} \right),$$



Obr. 3.12: Ilustrace k příkladu 3.29c) Obr. 3.13: Ilustrace k příkladu 3.29d)

substituce do zobecněných polárních souřadnic

$$(x = ar \cos t, \quad y = br \sin t; \quad J(r, t) = abr)$$

a Fubiniovy věty:

$$\int_{(k)} (x+y) dx + (y-x) dy = \iint_{\Omega} (-1-1) dx dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (-2abr) dr \right) dt = \underline{\underline{-2\pi ab}}.$$

b) Oblast Ω i „křivka“ (k) jsou znázorněny na obrázku 3.11. Jelikož

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2}{y} \arctg \frac{x}{y} \right) &= \frac{2}{y} \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \frac{1}{y} = \frac{2}{x^2 + y^2}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{x} \arctg \frac{y}{x} \right) &= \frac{1}{x} \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2 + y^2}, \end{aligned}$$

je

$$\begin{aligned} \int_{(k)} \frac{1}{x} \arctg \frac{y}{x} dx + \frac{2}{y} \arctg \frac{x}{y} dy &= \iint_{\Omega} \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy \stackrel{*}{=} \\ &= \int_1^2 \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{r^2} r d\varphi \right) dr = \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) [\ln r]_1^2 = \underline{\underline{\frac{\pi}{12} \ln 2}} \end{aligned}$$

(v úpravě $(\star)$ je užito polárních souřadnic s Jacobiánem r a Fubiniovy věty).

c) Jelikož (k) je „záporně orientovaná“ hranice oblasti $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ (viz obrázek 3.12), je

$$\begin{aligned} \int_{(k)} yx^2 dx + xy dy &= - \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x}(xy) - \frac{\partial}{\partial y}(yx^2) \right) dx dy = \\ &= - \int_0^1 \left(\int_0^1 y - x^2 dx \right) dy = - \int_0^1 y - \frac{1}{3} dy = - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \underline{\underline{-\frac{1}{6}}}. \end{aligned}$$

d) Buď

$$\varphi : \langle 0, 2\pi \rangle \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi(t) := (r \cos t, r \sin t).$$

Potom pro obsah kruhu Ω (přesněji: pro míru množiny Ω) platí

$$\begin{aligned} \lambda(\Omega) &= \iint_{\Omega} 1 \, dx \, dy = \frac{1}{2} \int_{(\varphi)} (-y) \, dx + x \, dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ((-r \sin t)(-r \sin t) + (r \cos t)(r \cos t)) \, dt = \pi r^2. \end{aligned}$$

(Doufejme, že čtenář přijal výsledek bez překvapení.)

▲

3.5 Nezávislost křivkového integrálu 2. druhu na cestě

3.30 Pozorování. Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ oblast, buď $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : \langle a, b \rangle \rightarrow \Omega$ hladký oblouk a buď $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ spojitě vektorové pole. Předpokládejme, že existuje funkce (za chvíli potenciál) $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ třídy C^1 na Ω taková, že pro každé $(x, y) \in \Omega$ je

$$\text{grad } V(x, y) = \left(\frac{\partial V(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} \right) = (f_1(x, y), f_2(x, y)).$$

Uvažujme funkci $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ danou předpisem

$$F(t) := V(\varphi(t)) = V(\varphi_1(t), \varphi_2(t)).$$

Protože

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{\partial V}{\partial x}(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \varphi_1'(t) + \frac{\partial V}{\partial y}(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \varphi_2'(t) = \\ &= f_1(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \varphi_1'(t) + f_2(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \varphi_2'(t), \end{aligned}$$

platí

$$\begin{aligned} \int_{(\varphi)} f(x, y) \, ds &= \int_a^b f_1(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \varphi_1'(t) + f_2(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \varphi_2'(t) \, dt = \\ &= [F(t)]_a^b = V(\varphi(b)) - V(\varphi(a)). \end{aligned}$$

Je-li φ po částech hladká křivka, je¹

$$\begin{aligned} \int_{(\varphi)} f(x, y) \, ds &= \sum_{k=1}^n \int_{(\psi_k)} f(x, y) \, ds = \sum_{k=1}^n (V(\varphi(t_k)) - V(\varphi(t_{k-1}))) = \\ &= V(\varphi(b)) - V(\varphi(a)). \end{aligned}$$

¹Uvažujeme stejný „rozklad“ křivky φ na hladké oblouky jako v definici 2.5 po částech hladké křivky.

3.31 Definice. Buď $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ spojitě na oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Říkáme, že vektorové pole f je potenciální na oblasti Ω , existuje-li funkce $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ (tzv. potenciál) taková, že

$$\text{grad } V(x) = f(x) \quad \text{pro každé } x \in \Omega.$$

3.32 Věta (o nezávislosti na cestě). *Nechť vektorové pole $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ je spojitě na oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

- (1) f je potenciální na Ω ,
- (2) pro každou uzavřenou po částech hladkou křivku $\varphi : \langle a, b \rangle \rightarrow \Omega$ platí

$$\int_{(\varphi)} f(x) \, ds = 0,$$

- (3) křivkový integrál 2. druhu vektorového pole f nezávisí v oblasti Ω na cestě; tzn., jsou-li $\varphi_1 : \langle a, b \rangle \rightarrow \Omega$ a $\varphi_2 : \langle c, d \rangle \rightarrow \Omega$ takové po částech hladké křivky, že $\varphi_1(a) = \varphi_2(c)$, $\varphi_1(b) = \varphi_2(d)$, je

$$\int_{(\varphi_1)} f(x) \, ds = \int_{(\varphi_2)} f(x) \, ds.$$

Navíc platí: je-li V potenciálem f na Ω , je

$$\int_{(\varphi)} f(x) \, ds = V(\varphi(b)) - V(\varphi(a)) \stackrel{\text{ozn.}}{=} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, ds$$

pro každou po částech hladkou křivku $\varphi : \langle a, b \rangle \rightarrow \Omega$.^a

^aPoužíváme-li symbolu

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \, ds,$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^m$ a $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, musí být buď f potenciální na celém $\mathbb{R}^m$, nebo musí být z kontextu jasné, že integrujeme přes křivku (s počátečním bodem α a s koncovým bodem β) ležící v oblasti Ω , na níž je vektorové pole f potenciální.

Na místě je otázka:

Jak zjistit, že dané vektorové pole je potenciální?

Částečnou odpověď skrývají následující dvě poznámky.

3.33 Poznámka. Uvažujme na chvíli, že $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je třídy C^1 a potenciální (s potenciálem V) na oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Pak (viz větu o záměnnosti parciálních derivací) pro každé $(x, y) \in \Omega$ platí

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y).$$

Našli jsme **nutnou podmínku** existence potenciálu. Dá se ukázat, že v případě, kdy $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je jednoduše souvislá oblast (tj. taková oblast Ω , že pro každou jednoduchou

uzavřenou křivku $\varphi : \langle a, b \rangle \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^2$ je $\text{int } \varphi \subset \Omega$), je (pro vektorovou funkci $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ třídy C^1 na Ω) rovnost

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y)$$

pro existenci potenciálu i podmínkou postačující.

3.34 Poznámka. Je-li $f = (f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ třídy C^1 na oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, lze podobně dospět k těmto **nutným podmínkám** existence potenciálu:

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial y} \quad \text{na } \Omega.$$

I zde platí, že v případě jednoduše souvislé oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ se jedná i o podmínku postačující.¹

Způsob nalezení potenciálu a jeho využití při výpočtu křivkového integrálu 2. druhu si ukažme na příkladech.

3.35 Příklad. Vypočtěme

$$\int_{(\varphi)} y \, dx + x \, dy, \quad \text{je-li } \varphi(t) := (\cos t, \sin t), \quad t \in \langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle.$$

Řešení. Protože $\mathbb{R}^2$ je jednoduše souvislá oblast, v níž platí

$$\frac{\partial y}{\partial y} = 1 = \frac{\partial x}{\partial x},$$

je vektorové pole $f(x, y) := (y, x)$ potenciální v $\mathbb{R}^2$.

Najdeme potenciál f , tj. takovou funkci $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, pro niž (v $\mathbb{R}^2$) platí

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x, y) = y \quad \text{a} \quad \frac{\partial V}{\partial y}(x, y) = x.$$

Integrací rovnosti

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x, y) = y$$

zjistíme, že

$$V(x, y) = xy + \psi(y)$$

pro nějakou (dosud neznámou) funkci $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a každé $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Po dosazení do druhé podmínky $(\frac{\partial V}{\partial y}(x, y) = x)$ dostaneme

$$x = \frac{\partial}{\partial y}(xy + \psi(y)) = x + \psi'(y),$$

¹Přesná definice jednoduše souvislé oblasti v $\mathbb{R}^3$ by pro nás v tuto chvíli byla příliš pracná, vystačíme s intuitivní představou, že to je oblast „bez děr“.

a proto $\psi'(y) = 0$. Odtud plyne, že $\psi(y) = c$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$. Rozmysleme si podrobně (!), že funkce definované předpisy

$$V(x, y) := xy + c, \quad \text{kde } c \in \mathbb{R},$$

tvoří právě všechny potenciály f na $\mathbb{R}^2$.

K výpočtu daného integrálu lze použít kteréhokoliv z nich (viz větu 3.32). Zvolíme-li pro jednoduchost $c = 0$, je

$$\int_{(\varphi)} y \, dx + x \, dy = V(\varphi(\frac{\pi}{4})) - V(\varphi(0)) = V(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) - V(1, 0) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$$

▲

3.36 Příklad. Vypočtěme

$$\text{a) } I = \int_{(2,1)}^{(-1,-2)} (9x^2y + 24xy^2 + 6 + 5y) \, dx + (3x^3 + 24x^2y + 8 + 5x) \, dy;$$

$$\text{b) } I = \int_{(0, \frac{\pi}{4})}^{(\frac{\pi}{4}, 2)} (2xy - y \sin(xy)) \, dx + (x^2 + 2 - x \sin(xy)) \, dy;$$

$$\text{c) } I = \int_{(1,0,0)}^{(2,-1,3)} 2xy \, dx + (x^2 - z) \, dy + (1 - y) \, dz;$$

$$\text{d) } I = \int_{(0,0,0)}^{(1,0,0)} (2x + 3y + \sin(z^2)) \, dx + (2x) \, dy + (2xz \cos(z^2)) \, dz.$$

Řešení.

$$\text{a) } V(x, y) = 3x^3y + 12x^2y^2 + 6x + 5xy + 8y \Rightarrow I = V(-1, -2) - V(2, 1) = \underline{\underline{-60}}.$$

$$\text{b) } V(x, y) = x^2y + \cos(xy) + 2y \Rightarrow I = V(\frac{\pi}{4}, 2) - V(0, \frac{\pi}{4}) = \underline{\underline{\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{2} + 3}}.$$

c) Uvědomme si, že příklad je korektně zadán, protože vektorové pole

$$f(x, y, z) := (2xy, x^2 - z, 1 - y)$$

je potenciální na (jednoduše souvislé oblasti) $\mathbb{R}^3$

$$\left(\frac{\partial(2xy)}{\partial y} = 2x = \frac{\partial(x^2 - z)}{\partial x}, \quad \frac{\partial(2xy)}{\partial z} = 0 = \frac{\partial(1 - y)}{\partial x}, \right.$$

$$\left. \frac{\partial(x^2 - z)}{\partial z} = -1 = \frac{\partial(1 - y)}{\partial y} \right).$$

Najdeme potenciál V :

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x, y, z) = 2xy \Rightarrow \underline{V(x, y, z) = x^2y + \psi(y, z)},$$

pro nějakou – zatím neznámou – funkci $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$;

$$\frac{\partial V}{\partial y}(x, y, z) = x^2 - z = \frac{\partial}{\partial y}(x^2y + \psi(y, z)) = x^2 + \frac{\partial \psi}{\partial y}(y, z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial y}(y, z) = -z \Rightarrow \underline{\psi(y, z) = -zy + \xi(z)},$$

pro nějakou – zatím neznámou – funkci $\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$;

$$\frac{\partial V}{\partial z}(x, y, z) = 1 - y = \frac{\partial}{\partial z}(x^2y - zy + \xi(z)) = -y + \xi'(z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \xi'(z) = 1 \Rightarrow \underline{\xi(z) = z + c},$$

pro nějaké $c \in \mathbb{R}$. Volíme-li opět $c = 0$, je

$$V(x, y, z) = x^2y - zy + z,$$

a proto

$$\int_{(1,0,0)}^{(2,-1,3)} 2xy \, dx + (x^2 - z) \, dy + (1 - y) \, dz = V(2, -1, 3) - V(1, 0, 0) = \underline{\underline{2}}.$$

d) Zadaný integrál nemá smysl, protože

$$\frac{\partial}{\partial x}(2x + 3y + \sin(z^2)) = 3 \neq 2 = \frac{\partial}{\partial x}(2x),$$

a tudíž integrované vektorové pole není potenciální. (Přečtěte si poznámku pod čarou ve větě 3.32.)



3.37 Cvičení. Vypočtěte I , když

a) $I = \int_{(\frac{\pi}{2}, 1)}^{(2, 0)} (3x^2y + y \cos(xy)) \, dx + (x^3 + 1 + x \cos(xy)) \, dy;$

b) $I = \int_{(2, 0)}^{(1, 1)} (2ye^{xy} + 2x + 2y^2) \, dx + (2xe^{xy} + 4xy + 2y) \, dy;$

$$\text{c) } I = \int_{(-1,3,0)}^{(0,1,2)} 3x^2y^2z \, dx + (2x^3yz - z^2) \, dy + (x^3y^2 - 2yz + 3z^2) \, dz;$$

$$\text{d) } I = \int_{(0,0,1)}^{(1,1,1)} (y^2z^2 + 2z) \, dx + (2xyz^2 + 2y) \, dy + (2xy^2z + 2x + 1) \, dz.$$

3.38 Cvičení. Dokažte, že vektorové pole

$$f(x, y) := \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

není na oblasti $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ potenciální, a to přesto, že v $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ platí

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

(Nepřehlédněte souvislost s poznámkou 3.33.)

3.6 Aplikace křivkového integrálu 2. druhu

a) **Práce vektorového pole podél orientované křivky.**

Buď vektorové pole $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ spojitě na „orientované křivce“ $(k) \subset \mathbb{R}^m$, kde $(k) = \langle \varphi \rangle$ pro nějakou jednoduchou (nebo jednoduchou uzavřenou) po částech hladkou křivku φ .

Práci vektorového pole f podél „orientované křivky“ (k) rozumíme číslo

$$\mathcal{A}(k) := \int_{(\varphi)} f(x) \, ds$$

(samozřejmě předpokládáme, že (k) je „orientována souhlasně“ s křivkou φ).

b) **Obsah (přesněji míra) roviných útvarů.**

Buď $\Omega = \text{int } \varphi \cup \langle \varphi \rangle$, kde φ je jednoduchá uzavřená kladně orientovaná po částech hladká křivka v $\mathbb{R}^2$. Potom platí (viz Greenovu větu 3.28)

$$\lambda(\Omega) = \frac{1}{2} \int_{(\varphi)} (-y) \, dx + x \, dy = \int_{(\varphi)} x \, dy = - \int_{(\varphi)} y \, dx.$$

3.39 Cvičení.

a) Vypočítejte práci vektorového pole $f(x, y, z) = -(0, 0, mg)$ podél pěti závitů šroubovice

$$\varphi(t) := \left(r \cos t, r \sin t, -\frac{h}{10\pi} t \right), \quad t \in \langle 0, 10\pi \rangle.$$

(Takovou energii získáte, máte-li hmotnost $m > 0$ a sjedete pět závitů toboganu, který má výšku $h > 0$ a poloměr zatačky $r > 0$; konstanta $g > 0$ je tíhové zrychlení.)

b) Pro $a, b > 0$ určete obsah (míru) elipsy

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

Kapitola 4

Plochy

4.1 Definice. Plochou (v $\mathbb{R}^3$) rozumíme každou spojitou vektorovou funkci

$$\psi : G \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

pro niž existuje neprázdná oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ taková, že $\Omega \subset G = D\psi \subset \overline{\Omega}$.

Množinu

$$\langle \psi \rangle := \psi(G) = \{\psi(u, v) : (u, v) \in G\} \subset \mathbb{R}^3$$

pak nazýváme geometrickým obrazem plochy ψ . Je-li $M = \langle \psi \rangle$, říkáme, že ψ je parametrizací množiny M .

4.2 Cvičení. Parametrizujte množinu M , je-li

a) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 100 \wedge -8 \leq z \leq 6\};$

b) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4 \wedge x^2 + y^2 \leq 2x \wedge z \geq 0\}.$

Podobně jako tomu bylo v případě křivek, je tato definice příliš obecná. Doplňme ji proto ještě jistými „diferenciálními“ podmínkami.

4.3 Definice. Omezenou oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ nazveme regulární oblastí, existuje-li jednoduchá uzavřená po částech hladká křivka (v $\mathbb{R}^2$) φ taková, že $\Omega = \text{int } \varphi$.

4.4 Definice. Plochu $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3) : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je regulární oblastí, nazýváme hladkým listem, platí-li:

- i) ψ je prosté zobrazení;
- ii) existuje vektorová funkce $h = (h_1, h_2, h_3) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, která je třídy C^1 na nějaké otevřené množině $M \supset \bar{\Omega}$,^a a pro níž platí: $\psi = h|_{\bar{\Omega}}$;
- iii) pro každé $(u, v) \in \bar{\Omega}$ jsou vektory

$$\frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) := \left(\frac{\partial h_1}{\partial u}(u, v), \frac{\partial h_2}{\partial u}(u, v), \frac{\partial h_3}{\partial u}(u, v) \right),$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v) := \left(\frac{\partial h_1}{\partial v}(u, v), \frac{\partial h_2}{\partial v}(u, v), \frac{\partial h_3}{\partial v}(u, v) \right)$$

lineárně nezávislé.^b

Množinu

$$\mathcal{O}\psi := \psi(\partial\Omega) = \{\psi(u, v) : (u, v) \in \partial\Omega\}$$

nazýváme okrajem hladkého listu ψ .

^aTzn. že všechny parciální derivace prvního řádu funkcí h_1 , h_2 a h_3 jsou spojité na M .

^bNepřehlédněme, že pro $(u, v) \in \Omega$ je

$$\frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) := \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \psi_2}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \psi_3}{\partial u}(u, v) \right),$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v) := \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial v}(u, v), \frac{\partial \psi_2}{\partial v}(u, v), \frac{\partial \psi_3}{\partial v}(u, v) \right).$$

4.5 Příklady hladkých listů.

- $\psi_1(u, v) := (\cos u, \sin u, v)$, $D\psi_1 = \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \times \langle 0, 2 \rangle$.
- $\psi_2(u, v) := (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v)$, $D\psi_2 = \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle$.

4.6 Poznámka (ke geometrickému významu vektorů $\frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v)$, $\frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v)$).

Všimněme si (a pozorný čtenář ví, že tak učiníme již podruhé – viz příklad 1.23), že

$$\frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) \text{ a } \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v)$$

jsou směrové vektory tečné roviny sestrojené k „ploše“ $\langle \psi \rangle$ v bodě $\psi(u, v)$.

Kapitola 5

Plošný integrál

5.1 Plošný integrál 1. druhu přes hladký list

5.1 Motivace. Buď $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3) : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ hladký list. Zadejme si úkol spočítat „hmotnost plochy“ $\langle \psi \rangle$, je-li na $\langle \psi \rangle$ (plošná) hustota popsána spojitou a nezápornou funkcí $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

Vezměme dvojrozměrný interval $\langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$ takový, že $\bar{\Omega} \subset \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$, a uvažujme jeho dělení $D = (D_u, D_v)$, tj. systém dvojrozměrných intervalů

$$J_{kl} = \langle u_k, u_{k+1} \rangle \times \langle v_l, v_{l+1} \rangle.$$

Je jistě přirozené aproximovat počítanou hmotnost $m(\langle \psi \rangle)$ součtem $\sum_{k,l} m(\psi(J_{kl}))$, kde sčítáme přes ta k a l , pro něž je $J_{kl} \subset \bar{\Omega}$.

Protože

$$\begin{aligned} \psi(u_{k+1}, v_l) - \psi(u_k, v_l) &\doteq d\psi_{(u_k, v_l)}(u_{k+1} - u_k, 0) = \left(\psi'(u_k, v_l) \cdot \begin{pmatrix} u_{k+1} - u_k \\ 0 \end{pmatrix} \right)^T = \\ &= \left(\begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial u}(u_k, v_l), & \frac{\partial \psi_1}{\partial v}(u_k, v_l) \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial u}(u_k, v_l), & \frac{\partial \psi_2}{\partial v}(u_k, v_l) \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial u}(u_k, v_l), & \frac{\partial \psi_3}{\partial v}(u_k, v_l) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{k+1} - u_k \\ 0 \end{pmatrix} \right)^T = (u_{k+1} - u_k) \frac{\partial \psi}{\partial u}(u_k, v_l) \end{aligned}$$

a (postupujeme-li analogicky)

$$\psi(u_k, v_{l+1}) - \psi(u_k, v_l) \doteq (v_{l+1} - v_l) \frac{\partial \psi}{\partial v}(u_k, v_l),$$

je jistě přirozené aproximovat „obsah plošky“ $\psi(J_{kl})$ číslem ¹

¹Zápisem „ $u \times v$ “, kde $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$, rozumíme vektorový součin vektorů u a v , tzn.

$$u \times v := (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1).$$

$$\begin{aligned} & \left\| (u_{k+1} - u_k) \frac{\partial \psi}{\partial u}(u_k, v_l) \times (v_{l+1} - v_l) \frac{\partial \psi}{\partial v}(u_k, v_l) \right\| = \\ & = \left\| \frac{\partial \psi}{\partial u}(u_k, v_l) \times \frac{\partial \psi}{\partial v}(u_k, v_l) \right\| (u_{k+1} - u_k)(v_{l+1} - v_l). \end{aligned}$$

Získáme tak – nahradíme-li hustotu f na každém $\psi(J_{kl})$ konstantou $f(\psi(u_k, v_l))$ – tuto aproximaci počítané hmotnosti:

$$\begin{aligned} m(\langle \psi \rangle) & \doteq \sum_{k,l} m(\psi(J_{kl})) \doteq \\ & \doteq \sum_{k,l} f(\psi(u_k, v_l)) \left\| \frac{\partial \psi}{\partial u}(u_k, v_l) \times \frac{\partial \psi}{\partial v}(u_k, v_l) \right\| (u_{k+1} - u_k)(v_{l+1} - v_l) \approx \\ & \approx \iint_{\bar{\Omega}} f(\psi(u, v)) \left\| \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v) \right\| du dv. \end{aligned}$$

(Jistě se vyplatí si všimnout, že při $f \equiv 1$ počítáme vlastně „obsah plochy“ $\langle \psi \rangle$.)

5.2 Definice. Buď $\psi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ hladký list a buď $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá na množině $\langle \psi \rangle = \psi(\bar{\Omega})$. Plošný integrál 1. druhu funkce f přes hladký list ψ definujeme rovností

$$\iint_{\psi} f(x, y, z) d\sigma := \iint_{\bar{\Omega}} f(\psi(u, v)) \left\| \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v) \right\| du dv.$$

5.3 Poznámka (k definici 5.2). Za výše uvedených předpokladů je funkce

$$(u, v) \mapsto f(\psi(u, v)) \left\| \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v) \right\|$$

spojitá na uzavřené měřitelné množině $\bar{\Omega}$, a proto integrovatelná na $\bar{\Omega}$.

5.4 Příklad. Vypočtěme $\iint_{\psi} f(x, y, z) d\sigma$, je-li

a) $f(x, y, z) := x + y + z, \quad \psi(u, v) := (1, u, v), \quad \bar{\Omega} = D\psi = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle;$

b) $f(x, y, z) := z\sqrt{x^2 + y^2}, \quad \psi(u, v) := (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v),$
 $\bar{\Omega} = D\psi = \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle.$

Řešení.

a)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) &= (0, 1, 0), & \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v) &= (0, 0, 1), \\ \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v) &= (1, 0, 0), & \left\| \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v) \right\| &= 1, \end{aligned}$$

a proto

$$\iint_{\psi} f(x, y, z) \, d\sigma = \int_0^1 \left(\int_0^1 1 + u + v \, du \right) dv = \int_0^1 1 + \frac{1}{2} + v \, dv = \underline{\underline{2}}.$$

b) Protože pro $(u, v) \in \bar{\Omega}$ platí:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) &= (-\sin u \cos v, \cos u \cos v, 0), \\ \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v) &= (-\cos u \sin v, -\sin u \sin v, \cos v), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v) &= (\cos^2 v \cos u, \cos^2 v \sin u, \sin v \cos v), \\ \left\| \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v) \right\| &= \sqrt{\cos^2 v} = |\cos v| = \cos v, \end{aligned}$$

je

$$\begin{aligned} \iint_{\psi} z \sqrt{x^2 + y^2} \, d\sigma &= \iint_{\bar{\Omega}} \sin v \cos v \cos v \, du \, dv = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 v \sin v \, dv = \\ &= \frac{\pi}{2} \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} -w^2 \, dw = \underline{\underline{\frac{\pi}{24}(4 - \sqrt{2})}}. \end{aligned}$$

▲

5.5 Poznámka. Výpočet čísla $\|a \times b\|$, kde $a, b \in \mathbb{R}^3$, lze někdy zrychlit užitím vztahu

$$\|a \times b\| = \sqrt{\|a\|^2 \|b\|^2 - (a \cdot b)^2},$$

jehož důkaz ponechme čtenáři.

5.2 Plošný integrál 1. druhu přes po částech hladkou plochu

V praxi potřebujeme pracovat i se složitějšími plochami, než jsou hladké listy; například s parametrizacemi povrchu kvádrů, koule, jehlanu, Jedná se o tzv. „po částech hladké plochy“. Je jistě rozumné očekávat, že definice takovýchto ploch bude analogická definici po částech hladké křivky. Pro naše pohodlí však v následující definici budeme postupovat jinak: po částech hladkou plochou budeme rozumět množinu bodů jistých vlastností.

5.6 Definice. Množinu $S \subset \mathbb{R}^3$ nazveme po částech hladkou plochou, existují-li hladké listy $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ takové, že platí:

i)

$$S = \bigcup_{i=1}^n \langle \psi_i \rangle = \langle \psi_1 \rangle \cup \langle \psi_2 \rangle \cup \dots \cup \langle \psi_n \rangle;$$

ii)

$$i \neq j \Rightarrow \langle \psi_i \rangle \cap \langle \psi_j \rangle \subset \mathcal{O}\psi_i \cap \mathcal{O}\psi_j$$

a buď $\langle \psi_i \rangle \cap \langle \psi_j \rangle$ lze parametrizovat jednoduchou nebo jednoduchou uzavřenou po částech hladkou křivkou (pak ψ_i a ψ_j nazýváme přilehlými listy), nebo je $\langle \psi_i \rangle \cap \langle \psi_j \rangle$ množina jednobodová nebo prázdná;

iii) $i \neq j \neq k \neq i \Rightarrow \langle \psi_i \rangle \cap \langle \psi_j \rangle \cap \langle \psi_k \rangle$ je množina jednobodová nebo prázdná;

iv) $i \neq 1 \Rightarrow$ list ψ_i je přilehlý k některému z listů $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{i-1}$.

(Za výše uvedené situace nazýváme hladké listy $\psi_1, \dots, \psi_n$ rozkladem po částech hladké plochy S na hladké listy.)

5.7 Definice. Jednoduchou křivku $\varphi : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^3$ nazveme částí okraje S , existuje-li rozklad S na hladké listy $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ a **právě jedno** $i \in \{1, \dots, n\}$ takové, že $\emptyset \neq \varphi(a, b) \cap \langle \psi_i \rangle \subset \mathcal{O}\psi_i$.

5.8 Definice. Okraj plochy S definujeme rovností

$$\mathcal{O}S := \bigcup_{\substack{\varphi \text{ je částí} \\ \text{okraje } S}} \langle \varphi \rangle.$$

Je-li $\mathcal{O}S = \emptyset$, tzn. neexistuje-li křivka φ , která je částí okraje S , nazýváme plochu S uzavřenou.

5.9 Definice. Bod $p \in S$, pro nějž existuje takový rozklad S na hladké listy $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ a číslo $i \in \{1, \dots, n\}$, že $p \in \langle \psi_i \rangle \setminus \mathcal{O}\psi_i$, nazýváme regulárním bodem S .

5.10 Pozorování. Všimněme si, že v regulárním bodě $p = \psi_i(u, v)$ existuje tečná rovina k ploše S s jednotkovým normálovým vektorem

$$n(p) = \frac{\frac{\partial \psi_i}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \psi_i}{\partial v}(u, v)}{\left\| \frac{\partial \psi_i}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \psi_i}{\partial v}(u, v) \right\|}.$$

5.11 Definice. Buď $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ rozkladem po částech hladké plochy $S \subset \mathbb{R}^3$ na hladké listy a buď funkce $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá na S .

Plošný integrál 1. druhu funkce f přes po částech hladkou plochu S definujeme rovností

$$\iint_S f(x, y, z) \, d\sigma := \sum_{i=1}^n \iint_{\psi_i} f(x, y, z) \, d\sigma.$$

5.12 Poznámka (k definici 5.11). Dá se ukázat, že tato definice je nezávislá na konkrétním rozkladu po částech hladké plochy S na hladké listy ψ_i .

Speciálně: jsou-li ψ_1 a ψ_2 dva hladké listy takové, že $\langle \psi_1 \rangle = \langle \psi_2 \rangle$, a je-li funkce $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá na $\langle \psi_1 \rangle$, je

$$\iint_{\psi_1} f(x, y, z) \, d\sigma = \iint_{\psi_2} f(x, y, z) \, d\sigma.$$

(Porovnejte toto tvrzení s větou 3.9.)

5.13 Příklad. Vypočtěme $\iint_S f(x, y, z) \, d\sigma$, kde

a) $f(x, y, z) := \frac{1}{(1+x+y)^2}$ a S je povrchem čtyřstěnu s vrcholy $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$;

b) $f(x, y, z) := x^2 + y^2$ a S je hranicí tělesa

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 \wedge z \geq 1\};$$

c) $f(x, y, z) := z^2$, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy \wedge x^2 + y^2 \leq 1\}$;

d) $f(x, y, z) := xy$, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4z \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \leq 1\}$;

e) $f(x, y, z) := z$,
 $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 9 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0 \wedge x + y \leq 3\}.$

Řešení.

a) Čtyřlístek S rozložíme na hladké listy $S = \langle \psi_1 \rangle \cup \langle \psi_2 \rangle \cup \langle \psi_3 \rangle \cup \langle \psi_4 \rangle$, kde

$$\begin{aligned}\psi_1(x, y) &:= (x, y, 0), \quad (x, y) \in \Omega = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \in \langle 0, 1 \rangle \wedge v \in \langle 0, 1 - u \rangle\}, \\ \psi_2(x, z) &:= (x, 0, z), \quad (x, z) \in \Omega, \\ \psi_3(y, z) &:= (0, y, z), \quad (y, z) \in \Omega, \\ \psi_4(x, y) &:= (x, y, 1 - x - y), \quad (x, y) \in \Omega.\end{aligned}$$

Pak¹

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x} = (1, 0, 0), \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial y} = (0, 1, 0), \quad \dots, \quad \frac{\partial \psi_4}{\partial x} = (1, 0, -1), \quad \frac{\partial \psi_4}{\partial y} = (0, 1, -1),$$

a každý čtenář si jistě přepočítá, že

$$\begin{aligned}\left\| \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \times \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right\| &= \left\| \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \times \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \right\| = \left\| \frac{\partial \psi_3}{\partial y} \times \frac{\partial \psi_3}{\partial z} \right\| = 1, \\ \left\| \frac{\partial \psi_4}{\partial x} \times \frac{\partial \psi_4}{\partial y} \right\| &= \|(1, 1, 1)\| = \sqrt{3}.\end{aligned}$$

Odtud plyne (viz definice 5.11 a 5.2)

$$\begin{aligned}\iint_S f \, d\sigma &= \iint_{\Omega} \frac{1}{(1+x+y)^2} \cdot 1 \, dx \, dy + \iint_{\Omega} \frac{1}{(1+x)^2} \cdot 1 \, dx \, dz + \\ &\quad + \iint_{\Omega} \frac{1}{(1+y)^2} \cdot 1 \, dy \, dz + \iint_{\Omega} \frac{1}{(1+x+y)^2} \cdot \sqrt{3} \, dx \, dy = \\ &= \iint_{\Omega} (1 + \sqrt{3}) \frac{1}{(1+x+y)^2} + 2 \frac{1}{(1+x)^2} \, dx \, dy = \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \frac{1 + \sqrt{3}}{(1+x+y)^2} + \frac{2}{(1+x)^2} \, dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 \frac{2}{(1+x)^2} (1-x) - (1 + \sqrt{3}) \left[\frac{1}{1+x+y} \right]_{y=0}^{1-x} dx = \\ &= \int_0^1 \frac{2(1-x)}{(1+x)^2} - (1 + \sqrt{3}) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+x} \right) dx = \underline{\underline{(\sqrt{3} - 1) \ln 2 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}}}.\end{aligned}$$

¹Budeme zkráceně psát – a to i v dalším textu – „ $\frac{\partial \psi_1}{\partial x} = \dots$ “ místo správného „ $\frac{\partial \psi_1}{\partial x}(x, y) = \dots$ “

b) Protože

$$S = \langle \psi_1 \rangle \cup \langle \psi_2 \rangle \cup \langle \psi_3 \rangle,$$

kde

$$\begin{aligned}\psi_1(r, t) &:= (r \cos t, r \sin t, r), \quad (r, t) \in \langle 1, 2 \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle, \\ \psi_2(r, t) &:= (r \cos t, r \sin t, 1), \quad (r, t) \in \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle, \\ \psi_3(r, t) &:= (r \cos t, r \sin t, 2), \quad (r, t) \in \langle 0, 2 \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle,\end{aligned}$$

a navíc (jak lze snadno ověřit) platí

$$\begin{aligned}\left\| \frac{\partial \psi_1}{\partial r}(r, t) \times \frac{\partial \psi_1}{\partial t}(r, t) \right\| &= \sqrt{2}r, \\ \left\| \frac{\partial \psi_2}{\partial r}(r, t) \times \frac{\partial \psi_2}{\partial t}(r, t) \right\| &= \left\| \frac{\partial \psi_3}{\partial r}(r, t) \times \frac{\partial \psi_3}{\partial t}(r, t) \right\| = r,\end{aligned}$$

je

$$\begin{aligned}\iint_S (x^2 + y^2) d\sigma &= \iint_{\psi_1} (x^2 + y^2) d\sigma + \iint_{\psi_2} (x^2 + y^2) d\sigma + \iint_{\psi_3} (x^2 + y^2) d\sigma = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_1^2 (r^2 \sqrt{2}r) dr \right) dt + \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (r^2 r) dr \right) dt + \\ &\quad + \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 (r^2 r) dr \right) dt = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}(15\sqrt{2} + 17)}}.\end{aligned}$$

Pozorný čtenář je v tuto chvíli nutně otřesen, výše uvedený výpočet není korektní: plochy ψ_1 , ψ_2 a ψ_3 nejsou hladkými listy. Situace je podobná jako při výpočtu dvojných integrálů substitucí: k poruše (prostoty zobrazení ψ_i a lineární nezávislosti vektorů $\frac{\partial \psi_i}{\partial r}(r, t)$, $\frac{\partial \psi_i}{\partial t}(r, t)$) dochází na množině nulové míry (v $\mathbb{R}^2$), množině z hlediska dvojného integrálu „zanedbatelné“.

Doporučme čtenáři výborné a uklidňující cvičení:

vypočtěte daný integrál korektně;

tak si lze nejlépe rozmyslet, že (a proč) výše předvedený způsob výpočtu nevede k chybě.

c) Zřejmě $S = \langle \psi \rangle$, kde

$$\psi(r, t) := (r \cos t, r \sin t, r^2 \sin t \cos t), \quad (r, t) \in \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Platí

$$\frac{\partial \psi}{\partial r}(r, t) = (\cos t, \sin t, 2r \sin t \cos t), \quad \frac{\partial \psi}{\partial t}(r, t) = (-r \sin t, r \cos t, r^2 \cos 2t),$$

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial \psi}{\partial r} \times \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\| &= \left\| (r^2 \sin t \cos 2t - r^2 \cos t \sin 2t, -r^2 \cos t \cos 2t - r^2 \sin t \sin 2t, r) \right\| = \\
&= \sqrt{r^4(\sin^2 t \cos^2 2t + \cos^2 t \sin^2 2t + \cos^2 t \cos^2 2t + \sin^2 t \sin^2 2t) + r^2} = \\
&= \sqrt{r^4(\cos^2 2t + \sin^2 2t) + r^2} = r\sqrt{1 + r^2},
\end{aligned}$$

a proto

$$\begin{aligned}
\iint_S f(x, y, z) \, d\sigma &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \frac{r^4}{4} \sin^2(2t) r \sqrt{1 + r^2} \, dr \right) dt = \\
&= \left(\int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 4t}{8} \, dt \right) \left(\int_0^1 r^4 \sqrt{1 + r^2} r \, dr \right) = \frac{\pi}{4} \int_1^2 (w - 1)^2 \sqrt{w} \frac{1}{2} \, dw = \\
&= \frac{\pi}{8} \int_1^2 w^{\frac{5}{2}} - 2w^{\frac{3}{2}} + w^{\frac{1}{2}} \, dw = \underline{\underline{\pi \left(\frac{11\sqrt{2}}{210} - \frac{2}{105} \right)}}.
\end{aligned}$$

Uvedme ještě jiný způsob, jak zadaný plošný integrál spočítat. Definujme

$$\psi(u, v) := (u, v, uv), \text{ kde } (u, v) \in \Omega = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\}.$$

Pak $S = \langle \psi \rangle$ (S je vlastně grafem funkce dvou proměnných $(u, v) \mapsto uv$),

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = (1, 0, v), \quad \frac{\partial \psi}{\partial v} = (0, 1, u), \quad \left\| \frac{\partial \psi}{\partial u} \times \frac{\partial \psi}{\partial v} \right\| = \|(-v, -u, 1)\| = \sqrt{1 + u^2 + v^2},$$

a proto

$$\begin{aligned}
\iint_S f \, d\sigma &= \iint_{\Omega} u^2 v^2 \sqrt{1 + u^2 + v^2} \, du \, dv = \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r^4 \sin^2 t \cos^2 t \sqrt{1 + r^2} r \, dr \right) dt = \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \frac{r^4}{4} \sin^2(2t) \sqrt{1 + r^2} r \, dr \right) dt = \underline{\underline{\pi \left(\frac{11\sqrt{2}}{210} - \frac{2}{105} \right)}}.
\end{aligned}$$

(Ve výpočtu dvojného integrálu jsme použili substituci do polárních souřadnic

$$\Omega = \{(r \cos t, r \sin t) \in \mathbb{R}^2 : r \in \langle 0, 1 \rangle \wedge t \in \langle 0, 2\pi \rangle\}$$

a Fubiniovy věty. Získaný dvojnásobný integrál vypočetli již dříve.)

d) Zřejmě

$$\begin{aligned}
S &= \left\{ \left(r \cos t, r \sin t, \frac{r^2}{4} \right) \in \mathbb{R}^3 : r \in \langle 0, \infty \rangle \wedge t \in \langle 0, 2\pi \rangle \wedge \right. \\
&\quad \left. \wedge \cos t \geq 0 \wedge \sin t \geq 0 \wedge \frac{r^2}{4} \leq 1 \right\} = \langle \psi \rangle,
\end{aligned}$$

kde

$$\psi(r, t) := \left(r \cos t, r \sin t, \frac{r^2}{4} \right), \quad (r, t) \in \langle 0, 2 \rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle.$$

Odtud plyne

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial r} &= \left(\cos t, \sin t, \frac{r}{2} \right), \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-r \sin t, r \cos t, 0 \right), \\ \left\| \frac{\partial \psi}{\partial r} \times \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\| &= \left\| \left(-\frac{r^2}{2} \cos t, -\frac{r^2}{2} \sin t, r \right) \right\| = \sqrt{\frac{r^4}{4} + r^2} = r \sqrt{1 + \frac{r^2}{4}}. \end{aligned}$$

A teď už máme vše připraveno k dokončení výpočtu:

$$\begin{aligned} \iint_S f \, d\sigma &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^2 r^2 \cos t \sin t \sqrt{1 + \frac{r^2}{4}} \, r \, dr \right) dt = \\ &= \left(\int_0^1 u \, du \right) \left(\int_1^2 4(v-1) \sqrt{v} \, 2 \, dv \right) = 4 \left[\frac{v^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{v^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^2 = \underline{\underline{\frac{16}{15}(1 + \sqrt{2})}}. \end{aligned}$$

(V úpravě jsme využili substitucí $\sin t = u$ a $1 + \frac{r^2}{4} = v$.)

e) Parametrizujeme-li

$$S = \{ (x, y, \sqrt{9 - x^2 - y^2}) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x + y \leq 3 \} = \langle \psi \rangle,$$

kde

$$\begin{aligned} \psi(x, y) &:= (x, y, \sqrt{9 - x^2 - y^2}), \\ (x, y) \in \Omega &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \langle 0, 3 \rangle \wedge y \in \langle 0, 3 - x \rangle \}, \end{aligned}$$

je

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \left(1, 0, \frac{-x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} \right), \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \left(0, 1, \frac{-y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} \right), \\ \left\| \frac{\partial \psi}{\partial x} \times \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\| &= \left\| \left(\frac{x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}, 1 \right) \right\| = \frac{3}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}, \end{aligned}$$

a proto

$$\iint_S f \, d\sigma = \iint_{\Omega} \sqrt{9 - x^2 - y^2} \frac{3}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} \, dx \, dy = 3\lambda(\Omega) = \underline{\underline{\frac{27}{2}}}.$$

(Otázka čtenáři: Proč je předvedený výpočet nekorektní a proč přesto vede ke správnému výsledku?)



5.14 Cvičení. Vypočtěme $\iint_S f(x, y, z) d\sigma$, kde

- a) $f(x, y, z) := xy + yz + zx$, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2} \wedge x^2 + y^2 \leq 2x\}$;
 b) $f(x, y, z) := xyz$, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge 0 \leq z \leq 1\}$;
 c) $f(x, y, z) := x^2 + y^2 + z$ a S je hranicí množiny

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \wedge z \geq 0\}.$$

5.3 Aplikace plošného integrálu 1. druhu

a) **Obsah plochy.**

Je-li $P \subset \mathbb{R}^3$ po částech hladká plocha, rozumíme jejím obsahem číslo

$$\sigma(P) := \iint_P 1 d\sigma.$$

b) Necht $P \subset \mathbb{R}^3$ je po částech hladká plocha, jejíž (plošná) hustota je popsána funkcí $h : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$, která je spojitá a nezáporná na P . Pak je rozumné užívat (definovat) vztahy:

$$m(P) := \iint_P h(x, y, z) d\sigma \quad \dots \text{hmotnost plochy } P,$$

$$S_{yz}(P) := \iint_P x h(x, y, z) d\sigma \quad \dots \text{statický moment } P \text{ vzhledem k rovině } x = 0,$$

$$S_{zx}(P) := \iint_P y h(x, y, z) d\sigma \quad \dots \text{statický moment } P \text{ vzhledem k rovině } y = 0,$$

$$S_{xy}(P) := \iint_P z h(x, y, z) d\sigma \quad \dots \text{statický moment } P \text{ vzhledem k rovině } z = 0,$$

$$T(P) := \left(\frac{S_{yz}(P)}{m(P)}, \frac{S_{zx}(P)}{m(P)}, \frac{S_{xy}(P)}{m(P)} \right) \quad \dots \text{těžiště } P.$$

(Analogicky lze definovat momenty setrvačnosti plochy P vzhledem k souřadnicovým osám.)

5.15 Příklad. Vypočítejte pomocí plošného integrálu obsah plochy S , je-li

- a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-8)^2 + (y-7)^2 + (6-z)^2 = 25\}$;
 b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \wedge x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Řešení.

a) Kulovou plochu S parametrizujeme pomocí

$$\psi(u, v) := (8, 7, 6) + (5 \cos u \cos v, 5 \sin u \cos v, 5 \sin v), \quad (u, v) \in \langle 0, 2\pi \rangle \times \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle.$$

Pro zvolenou parametrizaci platí

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = 5(-\sin u \cos v, \cos u \cos v, 0), \quad \frac{\partial \psi}{\partial v} = 5(-\cos u \sin v, -\sin u \sin v, \cos v),$$

$$\left\| \frac{\partial \psi}{\partial u} \times \frac{\partial \psi}{\partial v} \right\| = \left\| 25(\cos u \cos^2 v, \sin u \cos^2 v, \sin v \cos v) \right\| = 25|\cos v| = 25 \cos v$$

(jelikož $v \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$). Obsah plochy S je tedy

$$\sigma(S) = \iint_S 1 \, d\sigma = \int_0^{2\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 25 \cos v \, dv \right) du = 25 \cdot 2\pi \cdot [\sin v]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\underline{100\pi}}.$$

b) Plochu S , která je částí rotačního paraboloidu, parametrizujeme pomocí vektorové funkce

$$\psi(r, t) := \left(r \cos t, r \sin t, \frac{r^2}{2} \right), \quad (r, t) \in \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle,$$

pro niž platí

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = (\cos t, \sin t, r), \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = (-r \sin t, r \cos t, 0),$$

$$\left\| \frac{\partial \psi}{\partial r} \times \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\| = \left\| (-r^2 \cos t, -r^2 \sin t, r) \right\| = \sqrt{r^4 + r^2} = r\sqrt{r^2 + 1}.$$

Obsahem zadané plochy je číslo

$$\sigma(S) = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} r \sqrt{1+r^2} \, dt \right) dr = 2\pi \int_1^2 \sqrt{u} \frac{1}{2} du = \pi \left[\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right]_1^2 = \underline{\underline{\frac{2\pi}{3}(\sqrt{8}-1)}}.$$

(Ve výpočtu jsme užili substituci $u = 1 + r^2$.)

▲

5.16 Cvičení. Určete souřadnice těžiště plochy S , je-li

- a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 36 \wedge z \geq 0\}$, je-li její (plošná) hustota popsána funkcí $h(x, y, z) := \sqrt{x^2 + y^2}$;
 b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2 \wedge 1 \leq z \leq 2\}$, je-li její (plošná) hustota v každém jejím bodě rovna vzdálenosti tohoto bodu od osy z .

5.4 Plošný integrál 2. druhu přes hladký list

5.17 Motivace.

- 1) Mějme rovinnou plochu τ , přes kterou protéká – ve směru jejího normálového vektoru n – nestlačitelná kapalina konstantní rychlostí (nezávislou na čase a poloze) danou vektorem $f_0 \in \mathbb{R}^3$. Množství kapaliny, které za jednotku času „proteče“ plochou τ o obsahu (= míře) $\lambda(\tau)$, odpovídá číslu

$$\left(f_0 \cdot \frac{n}{\|n\|}\right) \lambda(\tau).$$

- 2) Buď $\psi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ hladký list a buď $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ spojitě vektorové pole na $\langle \psi \rangle$ (opět: f udává – na čase nezávislou – rychlost proudění nestlačitelné kapaliny). Počítejme, kolik kapaliny proteče (za jednotku času) plochou $\langle \psi \rangle$ ve směru určeném normálovými vektory $\frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v)$. Postupujeme-li podobně, jako na začátku kapitoly 5.1, získáme tyto odhady¹ počítaného objemu

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\langle \psi \rangle) &\doteq \sum_{k,l} \mathcal{K}(\psi(J_{kl})) \doteq \\ &\doteq \sum_{k,l} \left(f(\psi(u_k, v_l)) \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}(u_k, v_l) \times \frac{\partial \psi}{\partial v}(u_k, v_l) \right) \right) (u_{k+1} - u_k)(v_{l+1} - v_l) \approx \\ &\approx \iint_{\bar{\Omega}} f(\psi(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v) \right) du dv. \end{aligned}$$

5.18 Definice. Buď $\psi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ hladký list a buď vektorové pole $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ spojitě na $\langle \psi \rangle = \psi(\bar{\Omega})$. Plošný integrál 2. druhu vektorového pole f přes hladký list ψ definujeme rovností

$$\iint_{(\psi)} f(x, y, z) d\sigma := \iint_{\bar{\Omega}} f(\psi(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v) \right) du dv.$$

¹V uvedených odhadech využíváme těchto rovností:

$$\begin{aligned} &\left(f(\psi(u_k, v_l)) \cdot \frac{\frac{\partial \psi}{\partial u}(u_k, v_l) \times \frac{\partial \psi}{\partial v}(u_k, v_l)}{\left\| \frac{\partial \psi}{\partial u}(u_k, v_l) \times \frac{\partial \psi}{\partial v}(u_k, v_l) \right\|} \right) \left\| \frac{\partial \psi}{\partial u}(u_k, v_l) \times \frac{\partial \psi}{\partial v}(u_k, v_l) \right\| = \\ &= f(\psi(u_k, v_l)) \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}(u_k, v_l) \times \frac{\partial \psi}{\partial v}(u_k, v_l) \right) \end{aligned}$$

5.19 Poznámka. Je-li $f = (f_1, f_2, f_3)$, píše se někdy

$$\iint_{(\psi)} f(x, y, z) d\sigma \stackrel{\text{ozn.}}{=} \iint_{(\psi)} f_1(x, y, z) dy \wedge dz + f_2(x, y, z) dz \wedge dx + f_3(x, y, z) dx \wedge dy.$$

5.20 Příklad. Vypočtěme $\iint_{(\psi)} f(x, y, z) d\sigma$, je-li

- a) $f(x, y, z) := (0, 0, x^2 + y^2)$, $\psi(r, t) := (r \cos t, r \sin t, 0)$, $D\psi = \langle 1, 2 \rangle \times \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$;
 b) $f(x, y, z) := (x - y, y - z, z - x + 1)$, $\psi(u, v) := (u, v, 1 - u - v)$,
 $D\psi = \Omega = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u + v \leq 1 \wedge u \geq 0 \wedge v \geq 0\}$.

Řešení.

a) Protože platí

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = (\cos t, \sin t, 0), \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = (-r \sin t, r \cos t, 0), \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} \times \frac{\partial \psi}{\partial t} = (0, 0, r),$$

je

$$\iint_{(\psi)} f(x, y, z) d\sigma = \int_1^2 \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (0, 0, r^2) \cdot (0, 0, r) dt \right) dr = \pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_1^2 = \underline{\underline{\frac{15}{4}\pi}}.$$

b) Postupujeme podobně jako v předchozím příkladu:

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = (1, 0, -1), \quad \frac{\partial \psi}{\partial v} = (0, 1, -1), \quad \frac{\partial \psi}{\partial u} \times \frac{\partial \psi}{\partial v} = (1, 1, 1),$$

a proto

$$\begin{aligned} \iint_{(\psi)} f(x, y, z) d\sigma &= \iint_{\Omega} (u - v, u + 2v - 1, -2u - v + 2) \cdot (1, 1, 1) du dv = \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-u} 1 dv \right) du = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

▲

5.21 Cvičení. Vypočtěte $\iint_{(\psi)} f(x, y, z) d\sigma$, je-li

$$f(x, y, z) := (-x^2 z, y, 2xy),$$

$$\psi(u, v) := (\cos u \cos v, 2 \sin u \cos v, \sin v), \quad D\psi = \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle.$$

5.5 Plošný integrál 2. druhu přes po částech hladkou plochu

Následující definici ponechme nepřesnou (její přesná formulace je pracná; je podobná definici kladně orientované křivky).

5.22 „Definice“. Buď ψ hladký list a buď křivka φ částí okraje $\langle\psi\rangle$. Řekneme, že ψ a φ jsou souhlasně orientované, jestliže „při pohybu po $\langle\varphi\rangle$ ve směru orientace φ a s hlavou ve směru vektorového pole $\frac{\partial\psi}{\partial u} \times \frac{\partial\psi}{\partial v}$ máme plochu $\langle\psi\rangle$ po levé ruce“.

5.23 Definice. Buď ψ_1 a ψ_2 přilehlé listy a buď φ taková jednoduchá křivka, že

$$\langle\varphi\rangle \subset \langle\psi_1\rangle \cap \langle\psi_2\rangle.$$

Řekneme, že ψ_1 a ψ_2 jsou souhlasně orientované, platí-li

ψ_1 a φ jsou souhlasně orientované $\Leftrightarrow \psi_2$ a $(-\varphi)$ jsou souhlasně orientované.

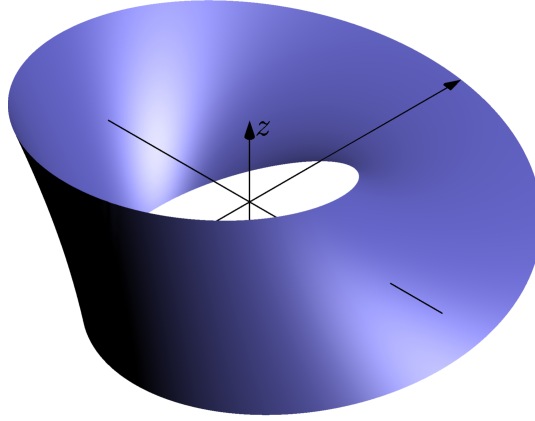
Řekneme, že po částech hladká plocha S je orientovatelná (nebo dvoustranná), existuje-li její rozklad na hladké listy $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ takový, že každé dva přilehlé listy ψ_i a ψ_j tohoto rozkladu jsou souhlasně orientované (mluvíme pak o orientovaném rozkladu S).

Orientovat orientovatelnou plochu S znamená zadat jednotkový normálový vektor $n(p) \in \mathbb{R}^3$ k ploše S v každém jejím regulárním bodě p tak, aby pro každý orientovaný rozklad $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ plochy S platila právě jedna z implikací:

$$\begin{aligned} \psi_i(u, v) = p \in \langle\psi_i\rangle \setminus \mathcal{O}\psi_i &\Rightarrow n(p) = \frac{\frac{\partial\psi_i}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial\psi_i}{\partial v}(u, v)}{\left\| \frac{\partial\psi_i}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial\psi_i}{\partial v}(u, v) \right\|}, \\ \psi_i(u, v) = p \in \langle\psi_i\rangle \setminus \mathcal{O}\psi_i &\Rightarrow n(p) = - \frac{\frac{\partial\psi_i}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial\psi_i}{\partial v}(u, v)}{\left\| \frac{\partial\psi_i}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial\psi_i}{\partial v}(u, v) \right\|}. \end{aligned}$$

5.24 Poznámka (k definici 5.23).

- i) Je-li plocha $S \subset \mathbb{R}^3$ orientovatelná, existují právě dvě různé vektorové funkce n a n^* určující orientaci S (protože zřejmě platí $n = -n^*$, mluvíme o opačných orientacích S); k orientaci S stačí proto určit jednotkový normálový vektor $n(p)$ v jediném (libovolném) regulárním bodě $p \in S$.
- ii) Existují neorientovatelné (zvané též jednostranné) po částech hladké plochy. Pří-



Obr. 5.1: Möbiův list

kladem takovéto plochy je Möbiův list (viz obrázek 5.1):

$$\left\{ \left(\cos v + u \cos\left(\frac{v}{2}\right) \cos v, \sin v + u \cos\left(\frac{v}{2}\right) \sin v, u \sin\left(\frac{v}{2}\right) \right) \in \mathbb{R}^3 : \right. \\ \left. (u, v) \in \langle -1, 1 \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle \right\}.$$

iii) Každá uzavřená po částech hladká plocha je orientovatelná.

5.25 Definice. Buď $S \subset \mathbb{R}^3$ po částech hladká plocha orientovaná svým orientovaným rozkladem $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ ^a a buď vektorové pole $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ spojitě na S .

Plošný integrál 2. druhu vektorového pole f přes orientovanou po částech hladkou plochu S ^b definujeme rovností

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) \, d\sigma := \sum_{i=1}^n \iint_{(\psi_i)} f(x, y, z) \, d\sigma.$$

^aTím myslíme, že vektorové pole $n : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ určující orientaci S je v každém regulárním bodě $p = \psi_i(u, v)$ definováno rovností

$$n(p) := \frac{\frac{\partial \psi_i}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \psi_i}{\partial v}(u, v)}{\left\| \frac{\partial \psi_i}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \psi_i}{\partial v}(u, v) \right\|}.$$

^bMluvíme někdy též o toku vektorového pole f orientovanou plochou S .

5.26 Poznámka. Dá se ukázat, že výše uvedená definice je korektní; je totiž nezávislá na konkrétním – v souladu s orientací S zvoleném – orientovaném rozkladu S .

Navíc platí: jsou-li $\psi_1, \dots, \psi_n$ a $\psi_1^*, \dots, \psi_m^*$ takové orientované rozklady S , že zadávají opačnou orientaci S , je

$$\sum_{i=1}^n \iint_{(\psi_i)} f(x, y, z) d\sigma = - \sum_{j=1}^m \iint_{(\psi_j^*)} f(x, y, z) d\sigma.$$

5.27 Příklad. Vypočtěme plošný integrál druhého druhu $\iint_{(S)} f(x, y, z) d\sigma$, je-li

a) $f(x, y, z) := (x^2, y^2, z^2)$ a S je „vnějšími“ normálovými vektory orientovaný povrch krychle $\langle 0, 6 \rangle \times \langle 0, 6 \rangle \times \langle 0, 6 \rangle$;

b) $f(x, y, z) := (2y - z, 6z - 2x, 3x - y)$ a plocha

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y + 2z = 6 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0\}$$

je orientovaná vektorovým polem $n(x, y, z) := \frac{1}{3}(2, 1, 2)$;

c) $f(x, y, z) := (x, y, xyz)$ a plocha

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy \wedge x^2 + y^2 \leq 5\}$$

je orientovaná pomocí normálových vektorů „svírajících“ s vektorem $(0, 0, 1)$ ostrý úhel.

Řešení.

a) Nejdříve parametrizujeme jednotlivé stěny dané krychle:

$$\begin{aligned} \psi_1(u, v) &:= (u, v, 0), & (u, v) &\in \langle 0, 6 \rangle \times \langle 0, 6 \rangle, \\ \psi_2(u, v) &:= (u, v, 6), & (u, v) &\in \langle 0, 6 \rangle \times \langle 0, 6 \rangle, \\ \psi_3(u, v) &:= (u, 0, v), & (u, v) &\in \langle 0, 6 \rangle \times \langle 0, 6 \rangle, \\ \psi_4(u, v) &:= (u, 6, v), & (u, v) &\in \langle 0, 6 \rangle \times \langle 0, 6 \rangle, \\ \psi_5(u, v) &:= (0, u, v), & (u, v) &\in \langle 0, 6 \rangle \times \langle 0, 6 \rangle, \\ \psi_6(u, v) &:= (6, u, v), & (u, v) &\in \langle 0, 6 \rangle \times \langle 0, 6 \rangle, \end{aligned}$$

a vypočtěme odpovídající normálové vektory:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \psi_1}{\partial v}(u, v) = (0, 0, 1),$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \psi_2}{\partial v}(u, v) = (0, 0, 1),$$

...

Nyní si všimněme (!!!), že zadaná orientace stěny $\langle 0, 6 \rangle \times \langle 0, 6 \rangle \times \{0\}$ je opačná než orientace zvolené parametrizace ψ_1 a že orientace ψ_2 a odpovídající stěny $\langle 0, 6 \rangle \times \langle 0, 6 \rangle \times \{6\}$ jsou stejné. Využijeme-li ještě symetrie vektorového pole

$$f(x, y, z) := (x^2, y^2, z^2)$$

a plochy S , plyne odtud, že

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} f(x, y, z) \, d\sigma &= -3 \iint_{(\psi_1)} f(x, y, z) \, d\sigma + 3 \iint_{(\psi_2)} f(x, y, z) \, d\sigma = \\ &= -3 \int_0^6 \left(\int_0^6 (u^2, v^2, 0) \cdot (0, 0, 1) \, du \right) dv + \\ &\quad + 3 \int_0^6 \left(\int_0^6 (u^2, v^2, 36) \cdot (0, 0, 1) \, du \right) dv = \underline{\underline{3888}}. \end{aligned}$$

b) Zřejmě

$$S = \left\{ (x, y, 3 - x - \frac{y}{2}) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge 3 - x - \frac{y}{2} \geq 0 \right\} = \langle \psi \rangle,$$

kde

$$\psi(u, v) := \left(u, v, 3 - u - \frac{v}{2} \right), \quad D\psi = \{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \in \langle 0, 3 \rangle \wedge v \in \langle 0, 6 - 2u \rangle \}.$$

Navíc platí

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = (1, 0, -1), \quad \frac{\partial \psi}{\partial v} = (0, 1, -\frac{1}{2}), \quad \frac{\partial \psi}{\partial u} \times \frac{\partial \psi}{\partial v} = (1, \frac{1}{2}, 1)$$

(tedy orientace souhlasí), a proto

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} f(x, y, z) \, d\sigma &= \\ &= \int_0^3 \left(\int_0^{6-2u} \left(-3 + u + \frac{5v}{2}, 18 - 8u - 3v, 3u - v \right) \cdot \left(1, \frac{1}{2}, 1 \right) \, dv \right) du = \\ &= \int_0^3 6(6 - 2u) \, du = \underline{\underline{54}}. \end{aligned}$$

c) Jednou z parametrizací $S = \langle \psi \rangle$ je například

$$\begin{aligned} \psi(r, t) &:= (r \cos t, r \sin t, r^2 \cos t \sin t) = \left(r \cos t, r \sin t, \frac{r^2}{2} \sin(2t) \right), \\ D\psi &= \{ (r, t) \in \mathbb{R}^2 : r \in \langle 0, \sqrt{5} \rangle \wedge t \in \langle -\pi, \pi \rangle \}, \end{aligned}$$

pro niž platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial r} &= (\cos t, \sin t, r \sin(2t)), \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = (-r \sin t, r \cos t, r^2 \cos(2t)), \\ \frac{\partial \psi}{\partial r} \times \frac{\partial \psi}{\partial t} &= (r^2(\cos^2 t - \sin^2 t) \sin t - 2r^2 \cos^2 t \sin t, \\ &\quad - r^2(\cos^2 t - \sin^2 t) \cos t - 2r^2 \cos t \sin^2 t, r) \end{aligned}$$

(orientace **souhlasí!**), a můžeme proto dokončit výpočet zadaného integrálu

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} f(x, y, z) \, d\sigma &= \int_0^{\sqrt{5}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} -2r^3(\cos^3 t \sin t + \sin^3 t \cos t) + r^5 \cos^2 t \sin^2 t \, dt \right) dr = \\ &= \left(\left[\frac{r^6}{6} \right]_0^{\sqrt{5}} \right) \left(\frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos(4t)}{2} \, dt \right) = \underline{\underline{\frac{125}{24}\pi}}. \end{aligned}$$

(Ve výpočtu jsme využili skutečnosti, že funkce $\cos^3 t \sin t$ a $\sin^3 t \cos t$ jsou liché.)

▲

5.6 Gaussova – Ostrogradského věta

5.28 Definice. Buď vektorové pole $f = (f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ třídy C^1 na otevřené množině $M \subset \mathbb{R}^3$.^a Divergencí vektorového pole f (na M) rozumíme funkci definovanou (na M) předpisem

$$\operatorname{div} f(x, y, z) := \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z).$$

^aTo znamená, že $f_1, f_2, f_3 \in C^1(M)$.

5.29 Definice. Omezenou oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ nazveme regulární oblastí, je-li její hranice $\partial\Omega$ uzavřenou po částech hladkou plochou.

5.30 Věta ((Gaussova – Ostrogradského)).

Nechť vektorové pole $f = (f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je třídy C^1 na otevřené množině $M \subset \mathbb{R}^3$, nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je regulární oblast taková, že

$$\Omega \subset \overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega \subset M,$$

a nechť $\partial\Omega$ je orientovaná „vnějšími“ normálovými vektory (mluvíme o tzv. kladné orientaci $\partial\Omega$). Potom platí

$$\iint_{(\partial\Omega)} f(x, y, z) d\sigma = \iiint_{\overline{\Omega}} \operatorname{div} f(x, y, z) dx dy dz.$$

Důkaz. Větu dokážeme pouze pro speciální případ, kdy $\overline{\Omega}$ je kvádr, tzn.

$$\overline{\Omega} = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle \times \langle e, g \rangle.$$

(Všimněme si analogie s důkazem Greenovy věty 3.28 na obdélníku.)

Zvolme

$$\begin{aligned} \psi_1(u, v) &:= (a, u, v), & (u, v) &\in \langle c, d \rangle \times \langle e, g \rangle, \\ \psi_2(u, v) &:= (b, u, v), & (u, v) &\in \langle c, d \rangle \times \langle e, g \rangle, \\ \psi_3(u, v) &:= (u, c, v), & (u, v) &\in \langle a, b \rangle \times \langle e, g \rangle, \\ \psi_4(u, v) &:= (u, d, v), & (u, v) &\in \langle a, b \rangle \times \langle e, g \rangle, \\ \psi_5(u, v) &:= (u, v, e), & (u, v) &\in \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle, \\ \psi_6(u, v) &:= (u, v, g), & (u, v) &\in \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle, \end{aligned}$$

a vypočteme příslušné normálové vektory

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \psi_1}{\partial v}(u, v) = (1, 0, 0) = \frac{\partial \psi_2}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \psi_2}{\partial v}(u, v), \dots$$

Podobně jako v příkladu 5.27 po „sladění“ orientací získáme rovnost

$$\begin{aligned}
 \iint_{(\partial\Omega)} f(x, y, z) \, d\sigma &= - \iint_{(\psi_1)} f(x, y, z) \, d\sigma + \iint_{(\psi_2)} f(x, y, z) \, d\sigma + \iint_{(\psi_3)} f(x, y, z) \, d\sigma - \\
 &\quad - \iint_{(\psi_4)} f(x, y, z) \, d\sigma - \iint_{(\psi_5)} f(x, y, z) \, d\sigma + \iint_{(\psi_6)} f(x, y, z) \, d\sigma = \\
 &= - \iint_{\langle c, d \rangle \times \langle e, g \rangle} f(\psi_1(u, v)) \cdot (1, 0, 0) \, du \, dv + \iint_{\langle c, d \rangle \times \langle e, g \rangle} f(\psi_2(u, v)) \cdot (1, 0, 0) \, du \, dv + \dots = \\
 &= \iint_{\langle c, d \rangle \times \langle e, g \rangle} (f_1(b, u, v) - f_1(a, u, v)) \, du \, dv + \dots .
 \end{aligned}$$

Nyní (pomocí Fubiniovy věty) upravme integrál na pravé straně dokazované rovnosti

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\bar{\Omega}} \operatorname{div} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz &= \\
 &= \iiint_{\bar{\Omega}} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z) \right) \, dx \, dy \, dz = \\
 &= \iint_{\langle c, d \rangle \times \langle e, g \rangle} \left(\int_a^b \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) \, dx \right) \, dy \, dz + \dots = \iint_{\langle c, d \rangle \times \langle e, g \rangle} [f_1(x, y, z)]_{x=a}^b \, dy \, dz + \dots = \\
 &= \iint_{\langle c, d \rangle \times \langle e, g \rangle} (f_1(b, y, z) - f_1(a, y, z)) \, dy \, dz + \dots .
 \end{aligned}$$

Čtenář, který si všimnul, že se podtržená čísla rovnají, jistě považuje důkaz za ukončený. □

5.31 Poznámka (k fyzikální interpretaci Gaussovy – Ostrogradského věty). Interpretujeme-li f jako (stacionární) rychlostní pole nestlačitelné kapaliny, určuje

$$\iint_{(\partial\Omega)} f(x, y, z) \, d\sigma$$

množství kapaliny, která proteče plochou $\partial\Omega$ ve směru vnější normály za jednotku času.

Je-li

$$\iint_{(\partial\Omega)} f(x, y, z) \, d\sigma = 0,$$

je množství vteké a vyteké kapaliny do $\overline{\Omega}$ stejné.

Je-li

$$\iint_{(\partial\Omega)} f(x, y, z) d\sigma \neq 0,$$

musí v $\overline{\Omega}$ existovat body, které mají zřídlový charakter; tj. body, v nichž kapalina vzniká (tzv. zdroje) nebo zaniká (tzv. nory).

Dá se ukázat, že pro $p \in \overline{\Omega}$ je

$$\operatorname{div} f(p) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\iint_{(\partial U(p, \varepsilon))} f(x, y, z) d\sigma}{\lambda(U(p, \varepsilon))},$$

kde $\partial U(p, \varepsilon)$ značí kladně orientovaný povrch koule se středem v bodě p a poloměrem ε . Číslo $\operatorname{div} f(p)$ tedy popisuje **vydatnost zřídla kapaliny** v bodě p ($\operatorname{div} f(p) > 0 \dots$ v p je zdroj; $\operatorname{div} f(p) < 0 \dots$ v p je nor).

Je-li $\operatorname{div} f$ nulová funkce (na M), nazývá se pole f nezřídlové (nebo solenoidální) (na M).

5.32 Příklad. Vypočtěte pomocí Gaussovy – Ostrogradského věty

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) d\sigma,$$

je-li

a) $f(x, y, z) := (x^2, y^2, z^2)$ a S je kladně orientovaný povrch koule

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \leq 1\};$$

b) $f(x, y, z) := (x - y + z, y - z + x, z - y + x)$ a S je záporně orientovaný povrch osmistěnu

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| + |y| + |z| \leq 3\}.$$

Řešení.

a) Díky Gaussově – Ostrogradského větě a následné substituci

$$x = \varrho \cos u \cos v + 1, \quad y = \varrho \sin u \cos v + 1, \quad z = \varrho \sin v + 1,$$

kde

$$\varrho \in \langle 0, 1 \rangle, \quad u \in \langle 0, 2\pi \rangle, \quad v \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle,$$

platí¹

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} f(x, y, z) \, d\sigma &= \iiint_{\Omega} (2x + 2y + 2z) \, dx \, dy \, dz = \\ &= 2 \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\varrho \cos u \cos v + \varrho \sin u \cos v + \varrho \sin v + 3) \varrho^2 \cos v \, dv \right) du \right) d\varrho = \\ &= \underline{\underline{8\pi}}. \end{aligned}$$

b) Užitím Gaussovy – Ostrogradského věty (pozor na zápornou orientaci S) získáme

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} f(x, y, z) \, d\sigma &= - \iiint_{\Omega} (1 + 1 + 1) \, dx \, dy \, dz = \left(-3\lambda(\Omega) \right) = \\ &= -24 \int_0^3 \left(\int_0^{3-x} \left(\int_0^{3-x-y} dz \right) dy \right) dx = -24 \int_0^3 \left(\int_0^{3-x} 3 - x - y \, dy \right) dx = \\ &= -24 \int_0^3 (3-x)^2 - \frac{(3-x)^2}{2} \, dx = -12 \left[\frac{(3-x)^3}{-3} \right]_0^3 = 4(0 - 27) = \underline{\underline{-108}}. \end{aligned}$$

▲

5.33 Cvičení. Vypočtěte pomocí Gaussovy – Ostrogradského věty

$$\iint_{(S)} (x^3 - yz, y^3 - xz, z^3 - xy) \, d\sigma,$$

kde S je kladně orientovaný povrch koule

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 18z\}.$$

5.7 Stokesova věta

5.34 Definice. Buď vektorové pole $f = (f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ třídy C^1 na otevřené množině $M \subset \mathbb{R}^3$. Rotací vektorového pole f (na M) rozumíme vektorové pole definované (na M) předpisem

$$\begin{aligned} \text{rot } f(x, y, z) &:= \\ &\left(\left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) (x, y, z), \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \right) (x, y, z), \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) (x, y, z) \right). \end{aligned}$$

¹Nezapomeneme na Jacobián!

5.35 Poznámka. Při výpočtu $\operatorname{rot} f$ nám dobře poslouží tato (formální) rovnost¹

$$\text{„rot } f = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} \text{“}.$$

5.36 „Definice“. Buď $S \subset \mathbb{R}^3$ taková orientovaná po částech hladká plocha, že její okraj $\mathcal{OS}$ je geometrickým obrazem jednoduché uzavřené po částech hladké křivky. Řekneme, že S a $\mathcal{OS}$ jsou souhlasně orientované, jestliže „při pohybu po $\mathcal{OS}$ ve směru orientace $\mathcal{OS}$ a s hlavou ve směru vektorového pole n , jímž je definovaná orientace S , máme plochu S po levé ruce“.

(Porovnejte tuto „definici“ s 5.22.)

5.37 Věta ((Stokesova)). Nechť vektorové pole $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je třídy C^1 na otevřené množině $M \subset \mathbb{R}^3$, nechť $S \subset M$ je po částech hladká plocha orientovaná souhlasně se svým okrajem $\mathcal{OS}$. Potom platí

$$\int_{(\partial S)} f(x, y, z) \, ds = \iint_{(S)} \operatorname{rot} f(x, y, z) \, d\sigma.$$

5.38 Poznámka (k fyzikální interpretaci $\operatorname{rot} f(x, y, z)$).

Interpretujme opět vektorové pole f jako rychlostní pole stacionárně proudící nestlačitelné kapaliny. Lze ukázat, že $\operatorname{rot} f(x, y, z)$ je (zhruba řečeno) směrovým vektorem přímky, která prochází bodem (x, y, z) a kolem které se kapalina v „malém“ okolí bodu (x, y, z) otáčí. Velikost vektoru $\operatorname{rot} f(x, y, z)$ odpovídá (v jistém smyslu) úhlové rychlosti tohoto otáčení.

Je-li $\operatorname{rot} f$ nulová vektorová funkce (na M), nazývá se pole f nevírové (na M).

5.39 Příklad. Vypočtěte pomocí Stokesovy věty $\int_{(k)} f(x, y, z) \, ds$, je-li

a) $f(x, y, z) := (y^2, z^2, x^2)$ a (k) je orientovaným obvodem trojúhelníku o vrcholech $(3, 0, 0)$, $(0, 0, 3)$ a $(0, 3, 0)$, jehož orientace je dána uvedeným pořadím vrcholů;

b) $f(x, y, z) := (z, x, y)$,

$$(k) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4 \wedge \frac{x}{2} + \frac{z}{3} = 1 \right\}$$

a orientace (k) je dána pořadím vrcholů $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 3)$ a $(-2, 0, 6)$;

¹ e_1, e_2 a e_3 značí „souřadnicové“ vektory $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ a $(0, 0, 1)$.

c) $f(x, y, z) := (-y, x, 0)$ a (k) je popsána (včetně orientace) parametrizací

$$\varphi(t) := (\sin t, \cos t, 0), \quad D\varphi = \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Řešení.

a) Zvolme

$$\psi(u, v) := (u, v, 3 - u - v), \\ D\psi = \Omega = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u + v \leq 3 \wedge u \geq 0 \wedge v \geq 0\}.$$

Potom, protože

$$\frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v) = (1, 1, 1),$$

je (viz Stokesovu větu)

$$\begin{aligned} \int_{(k)} y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz &= - \iint_{(\psi)} \operatorname{rot}(y^2, z^2, x^2) d\sigma = \\ &= - \iint_{(\psi)} (-2z, -2x, -2y) d\sigma = -(-2) \iint_{\Omega} (3 - u - v, u, v) \cdot (1, 1, 1) du dv = \\ &= 2 \int_0^3 \left(\int_0^{3-u} 3 dv \right) du = 6 \int_0^3 3 - u du = 6 \left[3u - \frac{u^2}{2} \right]_0^3 = \underline{\underline{27}}. \end{aligned}$$

Otázka čtenáři:

Proč je před výše uvedeným plošným integrálem znaménko „-“?

b) Jelikož $\operatorname{rot}(z, x, y) = (1, 1, 1)$, je (díky Stokesově větě)

$$\int_{(k)} f(x, y, z) ds = \iint_{(S)} (1, 1, 1) d\sigma$$

například pro plochu

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge \frac{x}{2} + \frac{z}{3} = 1\}$$

souhlasně orientovanou s (k) . Parametrizujme $S = \langle \psi \rangle$, kde

$$\psi(u, v) := (u, v, 3(1 - \frac{u}{2})), \quad D\psi = K = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 4\}.$$

Pak

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = (1, 0, -\frac{3}{2}), \quad \frac{\partial \psi}{\partial v} = (0, 1, 0), \quad \frac{\partial \psi}{\partial u} \times \frac{\partial \psi}{\partial v} = (\frac{3}{2}, 0, 1)$$

(tedy orientace souhlasí), a proto

$$\int_{(k)} f(x, y, z) ds = \iint_K (1, 1, 1) \cdot (\frac{3}{2}, 0, 1) du dv = \frac{5}{2} \lambda(K) = \frac{5}{2} \cdot \pi \cdot 4 = \underline{\underline{10\pi}}.$$

- c) Vypočtěte daný integrál dvěma způsoby. Nejdříve křivkový integrál nahradíme plošným integrálem druhého druhu přes kruh $K = \langle \psi \rangle$, kde

$$\psi(r, t) := (r \cos t, r \sin t, 0), \quad D\psi = \{(r, t) \in \mathbb{R}^2 : r \in \langle 0, 1 \rangle \wedge t \in \langle 0, 2\pi \rangle\}.$$

Pak

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = (\cos t, \sin t, 0), \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = (-r \sin t, r \cos t, 0), \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} \times \frac{\partial \psi}{\partial t} = (0, 0, r),$$

$$\operatorname{rot}(-y, x, 0) = (0, 0, 2),$$

a proto (pozor na „nesouhlasnou orientaci“ ψ a φ)

$$\int_{(k)} f(x, y, z) \, ds = - \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (0, 0, 2) \cdot (0, 0, r) \, dr \right) dt = \underline{\underline{-2\pi}}.$$

Nyní ukažme, jak lze daný integrál převést na integrál přes „horní polosféru“ $S = \langle \tilde{\psi} \rangle$, kde

$$\tilde{\psi}(u, v) := (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v), \quad D\tilde{\psi} = \langle 0, 2\pi \rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle.$$

Pro parametrizaci $\tilde{\psi}$ platí:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial u} &= (-\sin u \cos v, \cos u \cos v, 0), & \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial v} &= (-\cos u \sin v, -\sin u \sin v, \cos v), \\ \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial u} \times \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial v} &= (\dots, \dots, \sin v \cos v). \end{aligned}$$

Všimněme si, že

$$\left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial u} \times \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial v} \right) \left(0, \frac{\pi}{4} \right) = (\dots, \dots, \frac{1}{2}),$$

a proto i tentokrát dostáváme „nesouhlasnou orientaci“ $\tilde{\psi}$ a φ . A dál je to snadné

$$\int_{(k)} f(x, y, z) \, ds = - \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin v \cos v \, dv \right) du = -2\pi \left[-\frac{\cos(2v)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\underline{-2\pi}}.$$

▲

5.40 Cvičení. Vypočtěte pomocí Stokesovy věty

$$\int_{(\varphi)} x \, dx + (x + y) \, dy + (x + y + z) \, dz,$$

kde $\varphi(t) := (3 \cos t, 3 \sin t, 3(\cos t + \sin t))$, $D\varphi = \langle 0, 2\pi \rangle$.

5.41 Poznámka. Definice tzv. diferenciálních operátorů prvního řádu (tj. gradientu, divergence a rotace) se dobře pamatují pomocí „operátoru“ nabla

$$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

a formálních rovností

$$\begin{aligned} \text{„grad } f = \nabla f \text{“} & \quad (f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}), \\ \text{„div } f = \nabla \cdot f \text{“} & \quad (f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3), \\ \text{„rot } f = \nabla \times f \text{“} & \quad (f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3). \end{aligned}$$

5.42 Cvičení. Buď vektorové pole $f = (f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ třídy C^1 a potenciální na oblasti $M \subset \mathbb{R}^3$. Dokažte, že potom je f na M **nevírové**.

5.8 Aplikace plošného integrálu 2. druhu

a) **Tok vektorového pole orientovanou plochou.**

Buď vektorové pole $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ spojitě na orientované po částech hladké ploše S . Tokem vektorového pole f orientovanou plochou S rozumíme, jak již bylo dříve řečeno, číslo

$$T(S) := \iint_{(S)} f(x, y, z) \, d\sigma.$$

b) **Objem tělesa (přesněji míra množiny).**

Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ regulární oblast. Potom platí (viz Gaussovu – Ostrogradského větu)¹

$$\lambda(\overline{\Omega}) = \frac{1}{3} \iint_{(\partial\Omega)} (x, y, z) \, d\sigma = \iint_{(\partial\Omega)} (x, 0, 0) \, d\sigma = \dots \quad .$$

5.43 Příklad. Vypočítejte tok vektorového pole $f(x, y, z) := (x^2, y^2, z^2)$ kladně orientovanou kulovou plochou se středem v bodě $(1, 1, 1)$ a poloměrem 1.

Řešení. Označme

$$\begin{aligned} S &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1\}, \\ \Omega &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \leq 1\}. \end{aligned}$$

¹Samozřejmě předpokládáme, že uzavřená po částech hladká plocha $\partial\Omega$ je kladně orientovaná.

Pak přímo z Gaussovy – Ostrogradského věty plyne (S je kladně orientovaná)

$$\begin{aligned} T(S) &= \iint_{(S)} (x^2, y^2, z^2) d\sigma = \iiint_{\Omega} 2x + 2y + 2z dx dy dz = \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 (3 + r \cos u \cos v + r \sin u \cos v + r \sin v) r^2 \cos v dr \right) du \right) dv = \\ &= 6 \cdot 2\pi \left(\int_0^1 r^2 dr \right) \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos v dv \right) = 12\pi \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 = \underline{\underline{8\pi}}. \end{aligned}$$

(Ve výpočtu jsme použili substituci

$$\begin{aligned} x &= r \cos u \cos v, & y &= r \sin u \cos v, & z &= r \sin v, \\ r &\in \langle 0, 1 \rangle, & u &\in \langle 0, 2\pi \rangle, & v &\in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle, & J &= r^2 \cos v, \end{aligned}$$

a zřejmých rovností

$$\int_0^{2\pi} \cos u du = \int_0^{2\pi} \sin u du = 0, \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin v \cos v dv = 0.)$$

▲

5.44 Cvičení. Necht $a > b > 0$ jsou reálná čísla. Vypočtěte objem tělesa Ω (anuloidu) ohraničeného plochou ψ , je-li

$$\begin{aligned} \psi(u, v) &:= ((a + b \cos v) \cos u, (a + b \cos v) \sin u, b \sin v), \\ D\psi &= \langle 0, 2\pi \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle. \end{aligned}$$

Literatura

- [1] Bouchala, J. *Matematická analýza I*. VŠB-TU Ostrava, 2005. 81 s. Skriptum. ISBN 80-248-0933-8.
- [2] Brabec, J. – Hruza, B. *Matematická analýza II*. Praha Bratislava: SNTL, 1986. 579 s.
- [3] Brudinský, B. – Charvát, J. *Matematika II*. 2. vydání. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2002. 436 s. ISBN 80-01-01092-9.
- [4] Rektorys, K. *Přehled užití matematiky I*. Praha : Prometheus, 2009. 720 s. ISBN 978-80-7196-180-2.
- [5] Rektorys, K. *Přehled užití matematiky II*. 7. vydání. Praha : Prometheus, 2000. 874 s. ISBN 80-7196-181-7.
- [6] Vodstrčil, P. – Bouchala, J. *Integrální počet funkcí více proměnných* <http://mi21.vsb.cz/>, 2011

Rejstřík

bod

křivky

počáteční, koncový, 9

nor, 66

zdroj, 66

zřídlo, 66

diferenciál, 6

divergence vektorového pole, 63

funkce

vektorová, 1, 2

diferencovatelná, 6

konvergence posloupnosti, 1

křivka, 9, 59

délka, 23

geometrický obraz, 9

hladký oblouk, 10

hmotnost, 24

jednoduchá, 9

jednoduchá uzavřená, 9

moment setrvačnosti, 24

opačně orientovaná, 9

orientovaná úsečka, 24

po částech hladká, 11

souhlasná, nesouhlasná orientace,
28

statický moment, 24

tečna, 10

těžiště, 24

uzavřená, 9

kladně, záporně orientovaná, 32

vnější normálový vektor, 32

vnitřek, vnějšek, 32

křivkový integrál

1. druhu, 17

obsah válcové plochy, 23

2. druhu, 25

nezávislý na cestě, 38

obsah rovinného útvaru, 42

práce podél orient. křivky, 42

limita

vektorové funkce, 3

matice

Jacobiova, 6

množina

otevřená, 31

souvislá, 31

moment

setrvačnosti, 55

statický, 55

norma

eukleidovská, 1

objem tělesa, 71

oblast, 31

regulární, 44, 63

obsah rovinného útvaru, 42

okolí bodu, 1

prstencové, 1

operátor

diferenciální prvního řádu, 71

nabla, 71

parametrizace množiny, 9, 44

plocha, 44

geometrický obraz, 44

hladký list, 45, 59

okraj, 45

- hmotnost, 55
- Möbiův list, 60
- neorientovatelná (jednostranná), 59
- obsah, 55
- orientace, 59
 - kladná, 64
 - souhlasná s okrajem, 68
- orientovaný rozklad, 59
- orientovatelná (dvoustranná), 59
- po částech hladká, 49
 - část okraje, 49
 - okraj, 49
 - regulární bod, 50
 - rozklad, 49
 - uzavřená, 49
- statický moment, 55
- těžiště, 55
- plošný integrál
 - 1. druhu
 - přes hladký list, 47
 - přes po částech hl. plochu, 50
 - 2. druhu
 - přes hladký list, 57
 - přes po částech hl. plochu, 60
- pole
 - skalární, 2
 - vektorové, 2
 - divergence, 63
 - konstantní, 24
 - nevírové, 68
 - nezřídlové (solenoidární), 66
 - potenciální na oblasti, 37
 - rotace, 67
 - tok orientovanou plochou, 71
- potenciál
 - podmínky existence, 38
- přilehlé listy, 59
- prostor R^n , 1
- rotace vektorového pole, 67
- rozklad
 - po částech hladké křivky, 25
 - po částech hladké plochy, 49
- složky vektorové funkce, 2
- součin
 - vektorový, 14, 32, 46
- souhlasná orientace, 59
- spojitost funkce, 4
 - na množině, 4
 - v bodě, 4
 - vzhledem k množině, 4
- tečna křivky, 10
- tečná rovina, 7
- tečný vektor křivky, 10
- těleso
 - anuloid, 72
 - objem, 71
- tok vektorového pole, 71
- věta
 - Gaussova – Ostrogradského, 64
 - Greenova, 33
 - Jordanova, 31
 - o nezávislosti na cestě, 38
 - o nezávislosti na parametrizaci, 18, 28
 - Stokesova, 68