

Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava
Západočeská univerzita v Plzni

Vybrané kapitoly z pravděpodobnosti (interaktivní učební text)

Martina Litschmannová



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Obsah

1. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



Martina Litschmannová
Vybrané kapitoly z pravděpodobnosti

© Martina Litschmannová, 2012
ISBN

Obsah

2. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Předmluva

Milí čtenáři,

skripta „Vybrané kapitoly z pravděpodobnosti“ a „Úvod do statistiky“ jsou určena pro studenty technických oborů vysoké školy. První díl těchto skript - „Vybrané kapitoly z pravděpodobnosti“ je koncipován tak, abyste si mohli učinit výchozí představu o základních pojmech a úlohách spadajících do oblasti pravděpodobnosti. Obtížnější části výkladu jsou prezentovány jen s nejnútnejší mírou formálních prvků, mnohá odvození a důkazy jsou zařazeny pouze do kapitol určených pro zájemce o pozadí předkládaných vztahů. Přesto není předkládaný text lehké čtení. Prosím, počítejte s tím, že budete často muset usilovně přemýšlet, látku si postupně vyjasňovat a k mnoha tématům se opakovaně vracet. Při studiu Vám může pomoci řada animací (flash), appletů (java) a výpočetních programů (MS Excel), které budou v rámci pilotování výukových materiálů používány při výuce předmětů Statistika I., Biostatistika a Speciální analýza dat vyučovaných na VŠB-TU Ostrava a později se stanou součástí obrazkové verze těchto materiálů.

V úvodu každé kapitoly jsou uvedeny cíle (konkrétní dovednosti a znalosti), kterých máte po prostudování této kapitoly dosáhnout. Nálehuje vlastní výklad studované látky, zavedení nových pojmů a jejich vysvětlení, vše doprovázeno řešenými příklady. Množství řešených příkladů by Vám mělo umožnit aplikovat nabyté vědomosti při úlohách řešených v technické praxi. Hlavní pojmy, které si máte osvojit jsou na závěr kapitoly zopakovány v části Shrnutí. Pro ověření, zda jste dobře a úplně látku kapitoly zvládli, máte za každou kapitolou k dispozici několik testových otázek. Protože většina teoretických pojmů tohoto předmětu má bezprostřední význam a využití v praxi, jsou Vám rovněž předkládány i praktické úlohy k řešení. Schopnost aplikovat čerstvě nabyté znalosti při řešení reálných situací je hlavním cílem tohoto skriptu. Výsledky testů a zadaných příkladů jsou uvedeny na konci každé kapitoly v Klíči k řešení. Používejte jej až po vlastním vyřešení testu a úloh, jen tak si samokontrolou ověříte, že jste obsah kapitoly skutečně úplně zvládli.

Úspěšné a příjemné studium s touto učebnicí Vám přeje,

V Ostravě 16. 1. 2011

Martina Litschmannová

Jak pracovat s testy?

Pro zahájení testu klikněte na tlačítko *Začátek testu*. Následně označte, resp. vyplňte, správné odpovědi. Za každou správnou odpověď obdržíte 1b, za chybnou Vám bude 1b odečten. (**POZOR!** Test může obsahovat i otázky s více správnými odpověďmi.) Pro ukončení testu klikněte na tlačítko *Konec testu*. Kliknete-li na tlačítko *Výsledky*, dojde k zobrazení správných výsledků testu. Správné číselné nebo slovní odpovědi se zobrazí tak, že u dané otázky kliknete na tlačítko *Odpověď*. Tato správná číselná, resp. slovní odpověď na danou otázku se zobrazí v rámečku v pravé šedé části obrazovky. Pro zobrazení správné číselné odpovědi u dalších otázek je potřeba u nich opět kliknout na tlačítko *Odpověď*.



Obsah

5. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Obsah

Předmluva	3
1 Kombinatorika – opakování učiva ze SŠ	13
1.1 Kombinatorika – co to je?	14
1.2 Základní kombinatorická pravidla	15
1.2.1 Kombinatorické pravidlo součinu	15
1.2.2 Kombinatorické pravidlo součtu	16
1.3 Uspořádané výběry (variace)	16
1.3.1 Variace k třídy bez opakování	16
1.3.2 Permutace bez opakování	17
1.3.3 Variace k třídy s opakováním	18
1.3.4 Permutace s opakováním	19
1.4 Neuspořádané výběry (kombinace)	20
1.4.1 Kombinace bez opakování	20
1.4.2 Kombinace s opakováním	21
Shrnutí	23
Kontrolní otázky	25
Příklady k procvičení	26



Obsah

6. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

2 Úvod do teorie pravděpodobnosti	30
2.1 Základní pojmy	31
2.1.1 Čím se zabývají teorie pravděpodobnosti a matematická statistika?	31
2.1.2 Základní pojmy teorie pravděpodobnosti	32
2.2 Označování jevů, relace a operace mezi jevy	33
2.2.1 Jaké jsou typy náhodných jevů?	34
2.2.2 Pravidla pro práci s náhodnými jevy	34
2.2.3 Množiny náhodných jevů	40
2.3 Pravděpodobnost a její vlastnosti	44
2.3.1 Pojem pravděpodobnosti	45
2.3.2 Klasická (Laplaceova) definice pravděpodobnosti	46
2.3.3 Statistická (empirická) „definice“ pravděpodobnosti	47
2.3.4 Geometrická pravděpodobnost	48
2.3.5 Kolmogorovova definice pravděpodobnosti	49
2.3.6 Vlastnosti pravděpodobnosti	50
2.3.7 Nezávislost jevů, podmíněná pravděpodobnost a pravděpodobnost průniku	51
2.3.8 Věta o úplné pravděpodobnosti	55
2.3.9 Bayesův vzorec	58
2.3.10 Rozhodovací stromy	58
Shrnutí	62
Test	65
Příklady k procvičení	69
3 Náhodná veličina	73
3.1 Základní pojmy	75



Obsah

7. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

3.2	Distribuční funkce	77
3.3	Diskrétní náhodná veličina	81
3.4	Spojité náhodná veličina	83
3.4.1	Geometrická interpretace vztahu mezi pravděpodobností a hustotou pravděpodobnosti	88
3.5	Funkce náhodné veličiny	92
3.6	Číselné charakteristiky náhodné veličiny	93
	Shrnutí	104
	Test	106
	Příklady k procvičení	112
4	Náhodný vektor	115
4.1	Sdružené rozdělení pravděpodobnosti	116
4.1.1	Diskrétní náhodný vektor a jeho sdružené rozdělení	119
4.1.2	Spojité náhodný vektor a jeho sdružené rozdělení	120
4.2	Marginální rozdělení pravděpodobnosti	121
4.2.1	Marginální rozdělení diskretního náhodného vektoru	122
4.2.2	Marginální rozdělení spojitého náhodného vektoru	124
4.3	Podmíněné rozdělení pravděpodobnosti	125
4.3.1	Podmíněné rozdělení diskretního náhodného vektoru	125
4.3.2	Podmíněné rozdělení spojitého náhodného vektoru	126
4.4	Nezávislost náhodných veličin	126
4.5	Číselné charakteristiky náhodného vektoru	128
4.5.1	Marginální číselné charakteristiky	128
4.5.2	Smíšené momenty	129
4.5.3	Kovariance a koeficient korelace	129

4.5.4	Podmíněné číselné charakteristiky	135
Shrnutí		139
Test		140
Příklady k procvičení		145
5	Diskrétní rozdělení pravděpodobnosti	147
5.1	Alternativní rozdělení	148
5.2	Binomické rozdělení	149
5.3	Hypergeometrické rozdělení	152
5.3.1	Aproximace hypergeometrického rozdělení	153
5.4	Geometrické rozdělení	154
5.5	Negativně binomické (Pascalovo) rozdělení	156
5.5.1	Porovnání binomického a negativně binomického rozdělení	159
5.6	Poissonovo rozdělení	160
5.6.1	Aproximace binomického rozdělení Poissonovým rozdělením	163
5.7	Odvození pravděpodobnostních funkcí, středních hodnot a rozptylů	164
5.7.1	Alternativní rozdělení	164
5.7.2	Binomické rozdělení	165
5.7.3	Hypergeometrické rozdělení	166
5.7.4	Geometrické rozdělení	167
5.7.5	Negativně binomické (Pascalovo) rozdělení	170
5.7.6	Poissonovo rozdělení	171
Shrnutí		174
Test		176
Příklady k procvičení		179

6	Spojité rozdělení pravděpodobnosti	184
6.1	Rovnoměrné rozdělení	185
6.2	Exponenciální rozdělení	186
6.2.1	Intenzita poruch	189
6.2.2	Exponenciální rozdělení = „rozdělení bez paměti“	191
6.3	Weibullovo rozdělení	193
6.4	Erlangovo rozdělení	196
6.5	Souvislost mezi rozděleními	199
6.6	Normální rozdělení	201
6.7	Normované (standardizované) normální rozdělení	207
6.7.1	Standardizace normálního rozdělení	209
6.7.2	Pravidlo 3σ	211
6.7.3	Nástroje ověření normality	212
6.7.4	Jak postupovat při porušení normality?	216
6.8	Logaritmicko-normální rozdělení	216
6.9	Trocha teorie	220
6.9.1	Rovnoměrné rozdělení	220
6.9.2	Exponenciální rozdělení	223
6.9.3	Erlangovo rozdělení	227
6.9.4	Logaritmicko-normální rozdělení	230
	Shrnutí	233
	Test	236
	Příklady k procvičení	238
Řešení úloh k procvičení		241
	Klíč k příkladům k procvičení	241

Klíč k příkladům k procvičení	245
Řešení kvízů	248

7 Statistické tabulky 249

Statistické tabulky 249

T1 Distribuční funkce normovaného normálního rozdělení $\Theta(x)$ pro $x > 0$. . .	250
T2 Vybrané kvantily normovaného normálního rozdělení	252
T3 Vybrané kvantily χ^2 rozdělení s v stupni volnosti	253
T3 Vybrané kvantily χ^2 rozdělení s v stupni volnosti (pokračování)	255
T4 Vybrané kvantily Studentova rozdělení s v stupni volnosti	257
T5 Vybrané kvantily Fisherova-Snedecorova rozdělení s m stupni volnosti v čitateli a n stupni volnosti ve jmenovateli	259
T5 Vybrané kvantily Fisherova-Snedecorova rozdělení s m stupni volnosti v čitateli a n stupni volnosti ve jmenovateli (pokračování)	261
T5 Vybrané kvantily Fisherova-Snedecorova rozdělení s m stupni volnosti v čitateli a n stupni volnosti ve jmenovateli (pokračování)	263
T5 Vybrané kvantily Fisherova-Snedecorova rozdělení s m stupni volnosti v čitateli a n stupni volnosti ve jmenovateli (pokračování)	265
T6 Kritické hodnoty jednovýběrového Wilcoxonova testu	267
T7 Kritické hodnoty Mannova-Whitneyova testu	269
T8 Kritické hodnoty $h_\alpha(k, v)$ Hartlyova testu	271
T8 Kritické hodnoty $h_\alpha(k, v)$ Hartlyova testu (pokračování)	272
T9 Kritické hodnoty $c_\alpha(k, v)$ Cochranova testu	273
T9 Kritické hodnoty $c_\alpha(k, v)$ Cochranova testu (pokračování)	274
T10 Kritické hodnoty $q_\alpha(k, v)$ studentizovaného testu	275

T10	Kritické hodnoty $q_{\alpha}(k, v)$ studentizovaného testu (pokračování)	277
T11	Kritické hodnoty vícenásobného porovnávání pomocí pořadí	279
T12	Kritické hodnoty Friedmanova testu	281
T13	Kritické hodnoty vícenásobného porovnávání u Friedmanova testu	283
T14	Kritické hodnoty jednovýběrového Kolmogorova-Smirnovova testu	285
T15	Kritické hodnoty Spearmanova korelačního koeficientu	287

Literatura	288
-------------------	------------

Rejstřík	291
-----------------	------------



Obsah

12. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno



Kapitola 1

Kombinatorika – opakování učiva ze SŠ

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete umět použít:

- základní pojmy kombinatoriky
- vztahy pro výpočet kombinatorických úloh

Obsah

13. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno



1.1. Kombinatorika – co to je?

Kombinatorika je vstupní branou do teorie pravděpodobnosti. Zabývá se různými způsoby výběru prvků z daného souboru. Už jste si vzpomněli? Jde přece o součást středoškolské matematiky. Ale protože opakování je matkou moudrosti, jdeme na to...

Nejdříve si ujasněme s jakými výběry se v praxi můžeme setkat. Prvním kritériem je uspořádanost výběru.

A. Uspořádaný výběr (= variace)

je takový výběr, při němž záleží na pořadí vybraných prvků.

Př.: Kolik trojciferných čísel lze sestavit z číslic 1; 3; 8; 9?
Číslo 139 a číslo 391 považujeme za dvě různé varianty výběru.

B. Neuspořádaný výběr (= kombinace)

je oproti tomu výběrem, při kterém na pořadí vybraných prvků nezáleží.

Př.: Kolik je možností jak vyplnit tiket Sportky?

7 čísel ze 49 – např. kombinace $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ je totožná s kombinací $\{2; 3; 1; 6; 7; 4; 5\}$ – nezáleží na tom, v jakém pořadí jsme čísla zaškrtnuli.

Druhým kritériem je skutečnost, zda prvky mohou být do výběru zařazeny opakovaně či nikoliv. Podle toho se výběry rozlišují na:

A. Výběry s opakováním

tj. prvky mohou být do výběru zařazeny opakovaně.

Obsah

14. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Př.: Z množiny $\{1; 3; 8; 9\}$ lze mimo jiné vytvořit trojčísí $\{131; 188; 888; 119; 139; \dots\}$

B. Výběry bez opakování

tj. prvky nemohou být do výběru zařazeny opakovaně.

Matematicky je většinou jednodušší popis výběrů s opakováním, avšak v praxi se častěji setkáte s výběry bez opakování.

1.2. Základní kombinatorická pravidla

1.2.1. Kombinatorické pravidlo součinu

Toto pravidlo používáme v běžném životě zcela automaticky. Než uvedeme jeho matematickou formulaci, ukážeme si jeho využití na příkladu.

Příklad 1.1. U stánku nabízejí čtyři druhy zmrzliny a tři polevy. Kolik různých zmrzlin s polevou lze vytvořit, jestliže nechceme míchat více druhů zmrzliny ani více polev?



Řešení 1.1.

Zobecněním předchozí úvahy dojdeme k následujícímu pravidlu nazývanému **kombinatorické pravidlo součinu**.



Obsah

15. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Počet všech uspořádaných k -tic, jejichž první člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen po výběru prvního členu n_2 způsoby atd. až k -tý člen po výběru všech předcházejících členů n_k způsoby, je roven $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$.

V úvodním příkladu jsme hledali uspořádané dvojice druh zmrzliny – typ polevy, jejichž první člen (druh zmrzliny) lze vybrat čtyřmi způsoby a druhý člen (typ polevy) lze vybrat třemi způsoby. Tedy $k = 2, n_1 = 4, n_2 = 3; n_1 \cdot n_2 = 12$.

1.2.2. Kombinatorické pravidlo součtu

Také toto pravidlo v životě často využíváme, aniž si to uvědomujeme. Jestliže máme např. tři žluté, dvě modré a čtyři zelené pastelky, umí každý snadno spočítat, že dohromady máme $3 + 2 + 4 = 9$ pastelek. Matematicky se toto pravidlo formuluje takto:

Jsou-li $A_1, A_2, \dots, A_n$ konečné množiny, které mají po řadě $p_1, p_2, \dots, p_n$ prvků, a jsou-li každé dvě disjunktní, pak počet prvků množiny $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ je roven $p_1 + p_2 + \dots + p_n$.

1.3. Uspořádané výběry (variace)

Znovu si připomeňme, že u variací záleží na pořadí vybíraných prvků.

1.3.1. Variace k třídy bez opakování

Nechť M je libovolná množina n prvků. Každá uspořádaná k -tice (skupina k prvků) navzájem různých prvků množiny M se nazývá variace k -té třídy množiny M bez opakování.

[Obsah](#)

16. strana ze 293

[Zavřít dokument](#)[Celá obrazovka / Okno](#)

Počet variací k -té třídy množiny M bez opakování nazýváme **variační číslo** a značíme jej $V(n, k)$.

Z kombinatorického pravidla součinu plyne, že počet variací $V(n, k)$ se určuje podle vztahu

$$V(n, k) = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1) = \frac{n!}{(n - k)!}.$$

Příklad 1.2. V první fotbalové lize je 16 mužstev. Kolika způsoby mohou být na konci soutěže obsazeny stupně vítězů?

Řešení 1.2.

V případě, že velikost uspořádaného výběru je totožná s rozsahem množiny M tj. $k = n$ používáme pro tento typ variací název **permutace**. U permutací tak jde v podstatě o různá uspořádání prvků téže množiny (přesmyčky).

1.3.2. Permutace bez opakování

Permutace množiny M (bez opakování) jsou každá navzájem různá uspořádání množiny M .

Počet permutací n prvkové množiny stanovíme na základě vztahu

$$P(n) = V(n, n) = \frac{n!}{(n - n)!} = n!$$



Obsah

17. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Příklad 1.3. Předsednictvo zastupitelstva města Bopamar je složeno z 5 osob – předsedy, 1. místopředsedy, 2. místopředsedy, ekonoma a řadového člena. Předpokládejme, že předsednictvo je už zvoleno a je pouze třeba rozdělit si funkce. Kolik je možností, jak si funkce rozdělit?

Řešení 1.3.

Označme opět M jako libovolnou n prvkovou množinu.

1.3.3. Variace k třídy s opakováním

Tak nazýváme každou uspořádanou k -tici prvků množiny M , v níž se jednotlivé prvky mohou opakovat.

Z kombinatorického pravidla součinu plyne, že počet variací k třídy s opakováním určuje výraz $V^*(n, k)$.

$$V^*(n, k) = n^k$$

Příklad 1.4. Určete kolik je možností jak sestavit 6 místné telefonní číslo.

Řešení 1.4.



Obsah

18. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

1.3.4. Permutace s opakováním

Mějme uspořádanou k -tici prvků $(a_1, \dots, a_k)$ a uspořádanou k -tici přirozených čísel $(n_1$ až $n_k)$.

Označme

$$\sum_{i=1}^n n_i = n.$$

Pak uspořádanou n -tici obsahující prvek a_1 n_1 -krát, prvek a_2 n_2 -krát, $\dots$, prvek a_k n_k -krát nazýváme permutací s opakováním.

Počet permutací s opakováním je dán vztahem

$$P^*(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{P(n)}{P(n_1) \cdot P(n_2) \cdot \dots \cdot P(n_k)} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

Příklad 1.5. Na plakátovací plochu o kapacitě 10 míst se mají vylepit reklamní plakáty 4 společností. Společnost ARMA si předplatila 3 plakáty, společnost BRUNO 2 plakáty, společnost CEKO 1 plakát a společnost DINA 4 plakáty. Určete, kolika různými způsoby lze plochu pokrýt.

Řešení 1.5.



Obsah

19. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



1.4. Neuspořádané výběry (kombinace)

Kombinace se používají v případech, kdy se z množiny prvků vybírá podmnožina, jejíž prvky nemají specifickou roli, tj. jsou vzájemně zaměnitelné (nezáleží na pořadí vybraných prvků).

Příkladem takovéto podskupiny je závodní družstvo mladších žáků pro běh na 1500 metrů (reprezentujících jistou ZŠ).

Označme si znovu M jako libovolnou n prvkovou množinu.

1.4.1. Kombinace bez opakování

Kombinaci k -té třídy z n prvků bez opakování nazveme každou k prvkovou podmnožinu n prvkové množiny M .

Počet různých kombinací k -té třídy z n prvků značíme $C(n, k)$ a určíme podle vzorce

$$C(n, k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n - k)! \cdot k!}.$$

Výraz $\binom{n}{k}$ nazýváme **kombinační číslo**.

Příklad 1.6. Ve čtvrtém ročníku ZŠ studuje 30 chlapců a 50 děvčat. Pro reprezentaci ročníku v lehké atletice je třeba sestavit smíšené 10 členné družstvo (5 chlapců, 5 dívek). Kolik je možností jak takovéto družstvo sestavit?

Obsah

20. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Řešení 1.6.

Příklad 1.7. Z dvacetičlenného zastupitelstva (8 z ODS, 6 z ČSSD, 4 z KDU-ČSL, 2 ze SZ) se musí zvolit pětičlenné předsednictvo (předseda, místopředseda, 3 členové). Kolika různými způsoby lze předsednictvo sestavit:

- (a) nejsou-li na výběr funkcí žádná další omezení
- (b) je-li stanoveno, že předseda a místopředseda musí být ze dvou nejsilnějších stran

Řešení 1.7.

1.4.2. Kombinace s opakováním

Kombinaci k -té třídy z n prvků s opakováním nazveme každou k -člennou skupinu sestavenou z prvků množiny M tak, že se prvky ve skupině mohou opakovat a přitom nezáleží na jejich pořadí.

Počet kombinací k -té třídy s opakováním je dán vztahem

$$C^*(n, k) = C(n + k - 1, k) = \binom{n + k - 1}{k} = \frac{(n + k - 1)!}{(n - 1)! \cdot k!}.$$

Příklad 1.8. Kvalita výrobku se rozlišuje třemi stupni jakosti: A, B, C.

- (a) Určete, kolik různých výsledků může mít výstupní kontrola výroby, testuje-li se kvalita 10 náhodně vybraných vzorků.



Obsah

21. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

(b) Kolik různých výsledků nebude obsahovat ani jeden výrobek kvality C?

Řešení 1.8.



Obsah

22. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Shrnutí:

Uspořádané výběry		
Bez opakování	Variace bez opakování	$V(n, k) = \frac{n!}{(n - k)!}$
	Permutace bez opakování	$P(n) = V(n, n) = n!$
S opakováním	Variace s opakováním	$V^*(n, k) = n^k$
	Permutace s opakováním	$P^*(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$

Neuspořádané výběry		
Bez opakování	Kombinace bez opakování	$C(n, k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n - k)! \cdot k!}$
S opakováním	Kombinace s opakováním	$C^*(n, k) = \binom{n + k - 1}{k} = \frac{(n + k - 1)!}{(n - 1)! \cdot k!}$



Obsah

23. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

- **Kombinatorické pravidlo o součinu**

Počet všech uspořádaných k -tic, jejichž první člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen po výběru prvního členu n_2 způsoby atd. až k -tý člen po výběru všech předcházejících členů n_k způsoby, je roven $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$.

- **Kombinatorické pravidlo o součtu**

Jsou-li $A_1, A_2, \dots, A_n$ konečné množiny, které mají po řadě $p_1, p_2, \dots, p_n$ prvků, a jsou-li každé dvě disjunktní, pak počet prvků množiny $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ je roven $p_1 + p_2 + \dots + p_n$.

[Obsah](#)[24. strana ze 293](#)[Zavřít dokument](#)[Celá obrazovka/Okno](#)

Kontrolní otázky

1. Co je to kombinatorika?
2. Jaká kritéria rozlišení výběru v kombinatorice znáte?
3. Definujte:
 - (a) variace bez opakování
 - (b) variace s opakováním
 - (c) permutace bez opakování
 - (d) permutace s opakováním
 - (e) kombinace bez opakování
 - (f) kombinace s opakováním



Obsah

25. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Příklady k procvičení

Jak pracovat s testy?

1. Z kolika prvků lze vytvořit 90 variací druhé třídy (bez opakování)?
2. Z kolika prvků lze vytvořit 55 kombinací druhé třídy (bez opakování)?
3. Zmenší-li se počet prvků o dva, zmenší se počet permutací (bez opakování) čtyřicetdvakrát. Určete počet prvků.
4. Z kolika prvků lze vytvořit padesátkrát více variací třetí třídy (bez opakování) než variací druhé třídy (bez opakování)?
5. V prodejně si můžete vybrat ze sedmi druhů pohlednic. Kolika způsoby lze koupit
 - (a) 10 pohlednic,
 - (b) 5 pohlednic,
 - (c) 5 různých pohlednic.
6. V knihkupectví prodávají 10 titulů knižních novinek. Kolika způsoby lze koupit

[Obsah](#)[26. strana ze 293](#)[Zavřít dokument](#)[Celá obrazovka / Okno](#)



- (a) 4 knižní novinky,
(b) 5 různých knižních novinek?
7. Na hokejovém turnaji, kterého se účastní 8 družstev, sehraje každý tým s ostatními právě 1 utkání. Kolik zápasů bude celkem sehráno?
8. Hokejový tým odjel na OH s 23 hráči, a to s 12 útočníky, 8 obránci a 3 brankáři. Kolik různých sestav může trenér teoreticky vytvořit?
9. Kolika přímkami lze spojit 7 bodů v rovině, jestliže:
(a) žádné tři z nich neleží v přímce,
(b) tři z nich leží v jedné přímce?
10. Kolik kružnic je určeno 10 body v rovině, jestliže žádné tři z nich neleží na přímce a žádné čtyři z nich neleží na kružnici?
11. Kolik různých hodů můžeme provést
(a) dvěma,
(b) třemi různobarevnými kostkami?
12. Kolik různých značek teoreticky existuje v Morseově abecedě, sestavují-li se tečky a čárky ve skupiny po jedné až pěti?

Obsah

27. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



13. Kolik prvků obsahuje množina všech pěticiferných přirozených čísel (v desítkové soustavě)?
14. Deset přátel si vzájemně poslalo pohlednice z prázdnin. Kolik pohlednic celkem rozeslali?
15. Kolikrát více je variací k -té třídy z n prvků než kombinací k -té třídy z těchto prvků (bez opakování)?
16. V plně obsazené lavici sedí 6 žáků a, b, c, d, e, f.
- (a) Kolika způsoby je lze přesadit?
 - (b) Kolika způsoby je lze přesadit tak, aby žáci a, b seděli vedle sebe?
 - (c) Kolika způsoby je lze přesadit tak, aby žák c seděl na kraji?
 - (d) Kolika způsoby je lze přesadit tak, aby žák c seděl na kraji a žáci a, b seděli vedle sebe?
17. Student má v knihovně 4 různé učebnice o pružnosti, 3 různé učebnice matematiky a 2 různé učebnice angličtiny. Kolika způsoby je lze seřadit, mají-li zůstat učebnice

Obsah

28. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

jednotlivých oborů vedle sebe?

18. Kolika způsoby lze rozdělit 8 účastníků finále v běhu na 100 m do 8 drah?
19. Kolik různých anagramů lze vytvořit použitím všech písmen slova
- (a) statistika,
 - (b) matematika?
20. Četa vojáků má vyslat na stráž 4 muže. Kolik mužů má četa, je-li možno úkol splnit 210 způsoby?

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:



Obsah

29. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno



Kapitola 2

Úvod do teorie pravděpodobnosti

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete umět:

- charakterizovat teorii pravděpodobnosti a matematickou statistiku,
- vysvětlit základní pojmy teorie pravděpodobnosti,
- popsat typy náhodných jevů,
- vysvětlit a umět používat základní relace mezi jevy,
- vysvětlit pojem pravděpodobnosti,
- popsat vlastnosti pravděpodobnostní funkce,
- pracovat s podmíněnou pravděpodobností,
- použít větu o úplné pravděpodobnosti a Bayesovu větu.

[Obsah](#)[30. strana ze 293](#)[Zavřít dokument](#)[Celá obrazovka/Okno](#)



2.1. Základní pojmy

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete umět:

- charakterizovat teorii pravděpodobnosti a matematickou statistiku,
- vysvětlit základní pojmy teorie pravděpodobnosti.

2.1.1. Čím se zabývají teorie pravděpodobnosti a matematická statistika?

Ve světě kolem nás, zejména v přírodních vědách, se vyskytují procesy (např. chemické reakce), které se vyznačují tím, že nastanou-li určité podmínky, pak nutně nastane určitý výsledek. Tyto procesy označujeme jako **deterministické**. Stejně tak okolo nás existuje spousta věcí, jevů a událostí, které nelze předvídat – jsou důsledkem náhody. Takové procesy označujeme jako **náhodné** neboli **stochastické**. Jejich výsledek (**náhodný jev**) nemůžeme předem určit, protože podléhá vlivu množství často drobných, ne zcela zjištěitelných vlivů, které jsou příčinou toho, že při opakované realizaci podobných podmínek dostaneme různé (náhodné) výsledky. Otázkami náhody a náhodných dějů se zabývají dvě matematické disciplíny: teorie pravděpodobnosti a matematická statistika.

Teorie pravděpodobnosti je matematická disciplína, jejíž logická struktura je budována axiomaticky. To znamená, že její základ tvoří několik tvrzení (takzvaných axiomů), která vyjadřují základní vlastnosti pravděpodobnosti a všechna další tvrzení jsou z nich odvozena deduktivně.

Obsah

31. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Matematická statistika je věda zahrnující studium dat vykazujících náhodná kolísání, ať už jde o data získaná pečlivě připraveným pokusem provedeným pod stálou kontrolou experimentálních podmínek v laboratoři, či o data provozní, případně o data získaná počítačovými simulacemi (tzv. metodou Monte-Carlo).

2.1.2. Základní pojmy teorie pravděpodobnosti

Teorie pravděpodobnosti se opírá o několik základních pojmů, mezi něž patří náhodný pokus, náhodný jev a jevové pole.

Náhodný pokus je každý děj, jehož výsledek není předem jednoznačně určen podmínkami, za kterých probíhá. Klasické pojetí teorie pravděpodobnosti předpokládá, že náhodný pokus je, alespoň teoreticky, neomezeně opakovatelný. Příkladem náhodného pokusu tak může být [hod kostkou](#), [zjištění výšky jedince](#), [zjištění životnosti žárovky](#) apod.

Nás nebude zajímat vlastní provádění náhodných pokusů, ale především výsledky takovýchto dějů. Pro přesný matematický popis pokusu stanovujeme množinu všech možných výsledků $\{\omega\}$ daného pokusu, tzv. **základní prostor** Ω . Tyto možné výsledky musí být zavedeny tak, aby žádné dva z nich nemohly nastat současně. Dále musí být množina možných výsledků vyčerpávající. To znamená, že při realizaci daného pokusu musí právě jeden z nich vždy nastat. Před ukončením pokusu ovšem nevíme, který výsledek to bude.

Příklady základních prostorů

- $\Omega = \text{rub, líc}$ – při hodu mincí



Obsah

32. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

- $\Omega = 1,2,3,4,5,6$ – při hodu kostkou

Za **náhodný jev** A budeme, v souladu s výše zavedenými pojmy, považovat každou podmnožinu A množiny Ω , zapisujeme $A \subset \Omega$.

Při hodu kostkou je náhodným jevem například **padnutí sudého čísla**, u zjištění výšky jedince může být náhodným jevem **výška jedince větší než 175 cm**. U termínu náhodný jev budeme v dalším textu většinou slovo náhodný vynechávat a budeme mluvit pouze o jevu.

Prvky množiny Ω , popřípadě jednoprvkové podmnožiny Ω , nazýváme **elementárními jevy** a označujeme je ω . Jevy, které nejsou elementární, označujeme jako **jevy složené**.

Příklad elementárního jevu

- $\omega = \{2\}$ – při hodu kostkou

Příklad složeného jevu

- $A = \{2,4,6\}$ – při hodu kostkou

2.2. Označování jevů, relace a operace mezi jevy

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete umět:



Obsah

33. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

- popsat typy náhodných jevů,
- vysvětlit vztahy (relace) mezi jevy,
- používat základní operace mezi jevy.

Náhodné jevy budeme obvykle označovat velkými písmeny latinské abecedy ($A, B, C, X, Y, Z, \dots$).

2.2.1. Jaké jsou typy náhodných jevů?

Budeme říkat, že při realizaci náhodného pokusu **nastal** (nastoupil) **jev** A , jestliže nastal elementární jev $\omega \in \Omega$, takový, že $\omega \in A$. Elementární jev $\omega \in A$ nazýváme také **výsledek příznivý jevu** A .

Jev, který nastane nutně při každé realizaci náhodného pokusu, nazýváme **jev jistý**. Jev, který nemůže v daném pokusu nikdy nastat, nazýváme **jev nemožný**. Jev jistý budeme značit Ω , jev nemožný $\emptyset$.

2.2.2. Pravidla pro práci s náhodnými jevy

Jednotlivé jevy mezi sebou vstupují do vzájemných vztahů. Vzhledem k tomu, že jev je jen jiné označení pro podmnožinu množiny Ω , můžeme zavést relace mezi jevy, které odpovídají množinovým relacím. Vztahy (relace) mezi jevy vyjadřujeme pomocí množinových inkluzí.



Obsah

34. strana ze 293



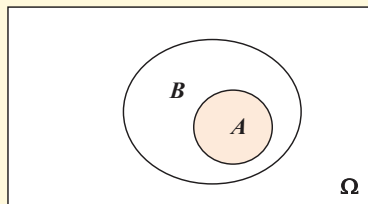
Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

- **Jev A je podjevem jevu B** , značíme $A \subset B$

Znamená to, že jev A má za následek jev B (tj. nastane-li jev A , nastane taktéž jev B).

$$A \subset B \Leftrightarrow (\omega \in A \Rightarrow \omega \in B)$$



Obr. 2.1: Vennův diagram – $A \subset B$

Příklad – házení kostkou: Necht jev A – padne číslo 2, jev B – padne sudé číslo. Jev A je pak podjevem jevu B .

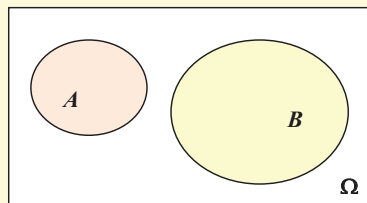
- **Rovnost jevů**, značíme $A = B$

Znamená to, že jev A má za následek jev B a naopak jev B má za následek jev A ($A \subset B \wedge B \subset A$).

Příklad – házení kostkou: Necht jev A – padne sudé číslo, jev B – padne číslo dělitelné 2. Jev A je pak roven jevu B .

- **Disjunktní jevy A, B**

Dva jevy A, B nemohou nastat současně, nemají-li společný žádný elementární jev (společný výsledek). Takoveto jevy budeme nazývat jevy disjunktní (někdy též **neslučitelné**).

Obr. 2.2: Vennův diagram – disjunktní jevy A, B

Příklad – házení kostkou: Definujme jev A – padne sudé číslo, jev B – padne liché číslo. Tyto jevy nemají žádný možný společný výsledek. Jestliže nastane jev A , nemůže zároveň nastat i jev B a naopak.

Obdobně lze říci, že náhodné **jevy** $A_i, i = 1, 2, \dots$ jsou **vzájemně** (říkáme také „po dvou“) disjunktní, jestliže jsou **disjunktní** všechny dvojice náhodných jevů A_i, A_j pro $i \neq j$.

Operace s náhodnými jevy vyjadřujeme pomocí množinových operací

- **Doplňek jevu A v Ω , opačný jev**, značíme $\bar{A}$

Opačným jevem (doplňkovým) k jevu A v Ω budeme rozumět jev $\bar{A}$, který nastane právě tehdy, když nenastane jev A .

Příklad – házení kostkou: Je A – padne sudé číslo, pak jev $\bar{A}$ – padne liché číslo.

- **Průnik jevů**, značíme $A \cap B$

Průnik jevů je jev, který nastane, když nastanou jevy A a B současně (čteme A průnik



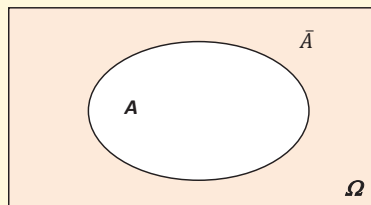
Obsah

36. strana ze 293

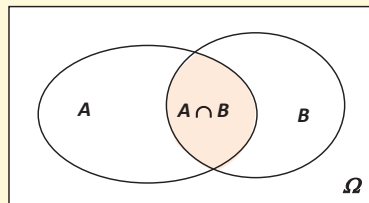


Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Obr. 2.3: Vennův diagram – doplněk jevu A

B nebo A a zároveň B – nastává totiž jak jev A tak i jev B současně).

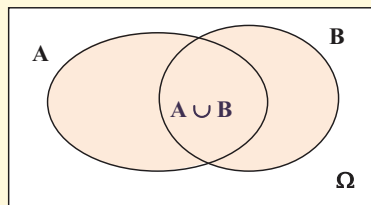
Obr. 2.4: Vennův diagram – $A \cap B$

Příklad – házení kostkou: jev A nechť značí – padne číslo 2 nebo 3 nebo 4, jev B – padne sudé číslo. Je zřejmé, že jev $A \cap B = \{2, 4\}$.

Obdobně lze říci, že náhodné jevy $\bigcap_{i=1}^n A_i$ a $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ nastanou, jestliže nastanou všechny jevy A_i .

- **Sjednocení jevů**, značíme $A \cup B$

O sjednocení jevů A a B hovoříme tehdy, jestliže nastává jev A nebo jev B . Slůvko „nebo“ znamená nejen to, že může nastat pouze jeden z těchto jevů, ale i to, že mohou nastat oba jevy zároveň. Jinými slovy, *nastane alespoň jeden z těchto jevů*.



Obr. 2.5: Vennův diagram – $A \cup B$

Příklad – házení kostkou: nechť jev $A = \{1, 3, 4\}$, nechť dále jev B je padnutí sudého čísla. Je zřejmé, že jev $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

Obdobně lze říci, že náhodné jevy $\bigcup_{i=1}^n A_i$ a $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ nastanou, jestliže nastane alespoň jeden jev A_i .

- **Rozdíl jevů**, značíme $A \setminus B$

Rozdílem jevů A a B budeme chápat jev, který nastává právě tehdy, nastane-li jev A a současně nenastane jev B .

$$A \setminus B = A \cap \bar{B}$$

$$A \setminus B = \{\omega | \omega \in A \wedge \omega \notin B\}$$

Příklad – házení kostkou: Jev A – padne číslo větší než dvě, jev B – padne sudé číslo. Rozdíl jevů A a B je pak jev $A \setminus B = \{3, 5\}$.



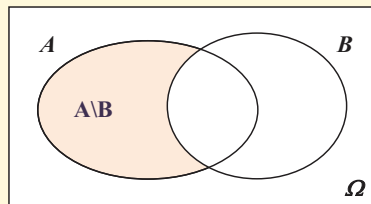
Obsah

38. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Obr. 2.6: Vennův diagram – $A \setminus B$

Rovněž vlastnosti operací s náhodnými jevy jsou totožné s vlastnostmi operací s množinami. Nechť $A, B, C \subset \Omega$, pak

1. $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A,$
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C, A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$
3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$
4. $A \cup A = A, A \cap A = A,$
5. $A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset,$
6. $A \cup \Omega = \Omega, A \cap \Omega = A,$
7. $\overline{(\bar{A})} = A,$
8. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B},$ (1. de Morganův zákon),
9. $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B},$ (2. de Morganův zákon)



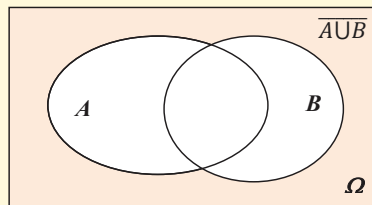
Obsah

39. strana ze 293

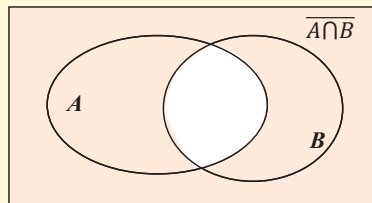


Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno



Obr. 2.7: Vennův diagram – 1. de Morganův zákon



Obr. 2.8: Vennův diagram – 2. de Morganův zákon

2.2.3. Množiny náhodných jevů

V teorii pravděpodobnosti se setkáváme se dvěma význačnými množinami náhodných jevů – úplnou množinou vzájemně disjunktních jevů a jevovým polem.

- Úplná množina vzájemně disjunktních jevů¹

Úplná množina vzájemně disjunktních jevů je množina po dvou disjunktních

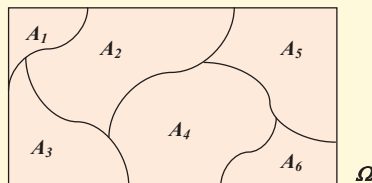
¹Úplná množina vzájemně disjunktních jevů je rozkladem množiny Ω



jevů $\{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n\}$ s nenulovou pravděpodobností výskytu (značíme $P(A_i) > 0$), jejichž sjednocení tvoří množinu Ω . Zapsáno symbolicky

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^n A_i, \text{ kde } P(A_i) > 0, A_i \cap A_j = \emptyset, \text{ pro } i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Říkáme, že základní prostor je složen z úplné množiny vzájemně disjunktních jevů.



Obr. 2.9: Vennův diagram – Úplná množina šesti vzájemně disjunktních jevů

• Jevové pole $\mathbb{A}$ (σ -algebra na Ω)

Jevové pole $\mathbb{A}$ (σ -algebra na Ω) je systém podmnožin základního prostoru Ω obsahující Ω a uzavřený vůči doplňku a vůči sjednocení.

Obsah

41. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Vzhledem k definici jevového pole $\mathbb{A}$ platí:

- a) $\Omega \in \mathbb{A}$, tzn. jev jistý je prvkem jevového pole (neprázdnost jevového pole),
- b) $\forall A \in \mathbb{A} : \bar{A} \in \mathbb{A}$, tzn. je-li jev A prvkem jevového pole, je prvkem jevového pole rovněž doplněk jevu A (uzavřenost jevového pole vůči doplňku),
- c) $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathbb{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathbb{A}$ tzn. jsou-li jevy prvky jevového pole, je prvkem jevového pole rovněž jejich sjednocení (uzavřenost jevového pole vůči sjednocení, tzv. σ – aditivita).

Lze si představit, že jevové pole představuje souhrn informací, které o výsledcích náhodného pokusu máme. Ne všechny jevy v Ω musí být totiž pozorovatelné.

Příklad 2.1. Náhodný pokus spočívá v jednom hodu klasickou hrací kostkou se stěnami očíslovanými od 1 do 6. Náhodný jev A nastane, jestliže padne liché číslo a náhodný jev B nastane, jestliže padne číslo menší než 4. Určete $\Omega, \mathbb{A}, \bar{A}, \bar{B}, A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A$.

Řešení 2.1.



Obsah

42. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Shrnutí:

Teorie pravděpodobnosti je matematická disciplína, jejíž logická struktura je budována axiomaticky. Její základ tvoří několik tvrzení (axiomů), která vyjadřují základní vlastnosti pravděpodobnosti, a všechna další tvrzení jsou z nich odvozena deduktivně.

Matematická statistika je věda zahrnující studium dat vykazujících náhodná kolísání.

Náhodný pokus je každý děj, jehož výsledek není předem jednoznačně určen.

Základní prostor Ω (elementárních jevů) je množinou všech výsledků pokusu.

Elementární jev $\{\omega\}$ je prvek, popřípadě jednoprvková podmnožina, základního prostoru Ω .

Náhodný jev A je libovolná podmnožina základního prostoru Ω . Pro náhodné jevy platí algebraické zákony a rovnosti stejné jako pro množiny.

Úplná množina vzájemně disjunktních jevů je množina po dvou disjunktních jevů $\{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n\}$, $P(A_i) > 0$, jejichž sjednocení tvoří množinu Ω .

Jevové pole $\mathbb{A}$ (σ -algebra na Ω) je neprázdný systém podmnožin základního prostoru Ω uzavřený vůči doplňku i sjednocení.



Obsah

43. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

2.3. Pravděpodobnost a její vlastnosti

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete:

- umět vysvětlit pojem pravděpodobnosti,
- umět definovat pravděpodobnost pomocí axiomů,
- znát vlastnosti pravděpodobnostní funkce,
- umět pracovat s podmíněnou pravděpodobností,
- umět používat větu o úplné pravděpodobnosti a Bayesovu větu.

Dříve než se pustíte do studia tohoto odstavce, doporučujeme vaší pozornosti příspěvek [Trocha pravděpodobnosti pro běžný život](#) uveřejněný na blogu MyEgo.cz (autor publikuje pod přezdívkou Drugstar).

Pokud jste si příspěvek přečetli, zkuste se zamyslet nad tím, co pro Vás samotné znamenají výrazy „pravděpodobnost“ a „pravděpodobný“. Určitě jste je už někdy slyšeli, zřejmě i sami použili! Při studiu této kapitoly, resp. při řešení pravděpodobnostních úloh, pak mějte na paměti, že

„Pravděpodobnost vám tedy nikdy neříká nic o tom, co se stane v jednom konkrétním případě! Říká jen, jaký bude výsledný poměr sledovaných jevů při dostatečně vysokém počtu jejich realizace, ale opět neříká nic o tom, jaké konkrétní prvky budou součástí oněch jevů. Příklad: ze zkušenosti víte, že pětina králíků vám každý rok uhynie. Pokud tedy vyberete jednoho králíka, pravděpodobnost, že vám letos uhynie,



Obsah

44. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

je 0,2. Tato informace však vůbec nic neříká o tom, zda to bude zrovna tento králík. Stejně tak pokud jste desetkrát hodili mincí a vždy vám padla panna, neznamená to, že po jedenácté vám spíše padne orel. **Pravděpodobnost (kromě oněch hraničních případů jistoty a nejistoty) nikdy nemůže přinést informaci o jednom konkrétním případě.**“

Drugstar, Trocha pravděpodobnosti pro běžný život, dostupné na:
<http://myego.cz/item/trocha-pravdepodobnosti-pro-bezny-zivot>

2.3.1. Pojem pravděpodobnosti

Výsledek náhodného pokusu nelze s jistotou předpovědět. Některé výsledky však nastávají častěji, některé méně často, některé velmi zřídka. Při větších sériích opakování však i náhodné pokusy (resp. jejich výsledky) vykazují určité zákonitosti a pravidelnosti. Studium těchto zákonitostí je obsahem teorie pravděpodobnosti.

Pravděpodobností označujeme míru očekávatelnosti výskytu náhodného jevu. S rostoucí pravděpodobností roste šance, že jev nastane. Pravděpodobnost se obecně označuje číslem z intervalu $\langle 0; 1 \rangle$. Jev nemožný, tj. jev, který nemůže nastat, má pravděpodobnost 0, naopak jev jistý má pravděpodobnost 1. Někdy se nekorektně, ale názorně, pravděpodobnosti násobí číslem 100 a uvádějí v procentech.

(Úmluva: *V některých případech budeme toto názorné uvádění pravděpodobnosti používat i my.*)



Obsah

45. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Matematizací pojmu pravděpodobnost se ve své korespondenci (1654) zabývali [Pierre de Fermat](#) a [Blaise Pascal](#), a to zejména v kontextu hazardních her a s tím spojených kombinatorických problémů. Zdaleka nejvýznamnějším klasikem teorie pravděpodobnosti však byl [Pierre-Simon Laplace](#). Laplace chápal pravděpodobnost jako nástroj pro popis všech problémů s neúplnou vstupní informací. Přínosů Laplace pro teorii pravděpodobnosti je tolik, že ani jejich základní výčet zde není možný. Mimo jiné (znovu) objevil jednu z klíčových formulí teorie pravděpodobnosti, známou dnes jako Bayesův teorém (Kap. 2.3.9).

Jako jednoduchý a názorný zvláštní případ pro výpočet hodnoty pravděpodobnosti uvedl Laplace¹ (1812) definici uvedenou v Kap. 2.3.2.

2.3.2. Klasická (Laplaceova) definice pravděpodobnosti

Je-li základní prostor konečná neprázdná množina elementárních jevů $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, které mají stejnou šanci, tj. stejnou pravděpodobnost výskytu $(\frac{1}{n})$, pak pravděpodobnost, že při realizaci náhodného pokusu jev A nastane je

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

kde: m ... počet výsledků (elementárních jevů) příznivých jevu A ,
 n ... počet všech možných výsledků

¹Laplace ve svém díle předkládá i nástroje pro řešení mnohem obecnější situace. Například takové, které nevyžadují předpoklad, že všechny výsledky jsou stejně možné, popř. pro situace, které neumožňují mnohonásobné opakování náhodného pokusu



Obsah

46. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Příklad 2.2. Ve třídě 20 chlapců a 12 dívek jsou losem určeni 2 mluvčí. Jaká je pravděpodobnost, že oba mluvčí budou různého pohlaví?

Řešení 2.2.

2.3.3. Statistická (empirická) „definice“ pravděpodobnosti

Na počátku 20. století pracovala většina učebnic s klasickou definicí pravděpodobnosti, přestože tato nebyla schopna popsat zdaleka všechny problémy, kterými se teorie pravděpodobnosti zabývala. V roce 1919 publikoval své první práce z teorie pravděpodobnosti [Richard von Mises](#). Misesův přístup k pravděpodobnosti je založen na empirickém zkoumání, jež vede k pozorování „stability relativních četností“. Umožňuje určit pravděpodobnost jevu v případě, že není známo jeho bližší chování (tj. elementární jevy, při kterých zkoumaný jev nastává, a jejich pravděpodobnosti). Jestliže je náhodný pokus libovolněkrát (alespoň teoreticky) opakovatelný za stejných statistických podmínek (např. hod kostkou či mincí, ...), pak lze pravděpodobnost jevu odhadnout na základě počtu jevů příznivých výsledku pokusů.

Provedeme-li n realizací náhodného pokusu, přičemž $n(A)$ realizací je příznivých jevu A , pak pravděpodobnost jevu A můžeme odhadnout poměrem

$$P(A) \approx \frac{n(A)}{n}$$

Tento odhad je tím přesnější, čím je počet realizací náhodného pokusu (n) vyšší. Statistická definice pravděpodobnosti nám například umožňuje odhadnout pravděpodobnost toho, že padne šestka na nepočetivé („cinknuté“) kostce.



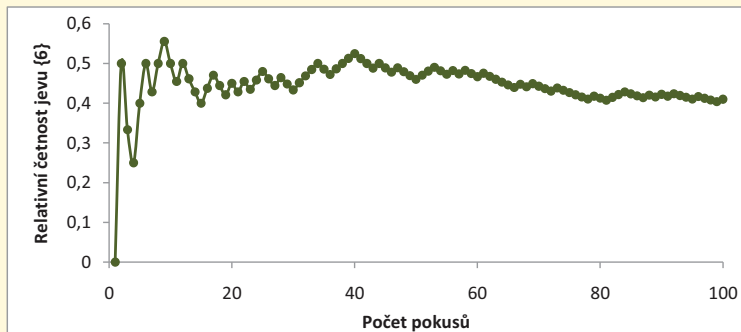
Obsah

47. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



Obr. 2.10: Závislost relativní četnosti „padnutí šestky“ na nepoctivé kostce na počtu pokusů

2.3.4. Geometrická pravděpodobnost

Dalším historickým příkladem definice pravděpodobnosti může být tzv. geometrická definice, která umožňuje určit pravděpodobnost v případech, kdy počet všech možných výsledků náhodného pokusu je nespočetný. Definice je založena na porovnání objemů, obsahů nebo délek geometrických útvarů. Používáme ji v případech, které lze převést na toto schéma:

V rovině (případně na přímce nebo v části prostoru) je dána určitá oblast Ω a v ní další oblast A . Pravděpodobnost jevu A , který spočívá v tom, že náhodně zvolený bod v oblasti Ω leží i v oblasti A je

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

kde $|A|, |\Omega|$ jsou vhodné míry oblastí A a Ω .



Obsah

48. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Příklad 2.3. Petr a Tereza, zapřísažlí odpůrci mobilních telefonů, se domluví, že se sejdou na určitém místě mezi 15. a 16. hodinou, přičemž doba čekání je 20 minut. Jaká je pravděpodobnost, že se po této dohodě setkají?

Řešení 2.3.

2.3.5. Kolmogorovova definice pravděpodobnosti

Geometrická definice pravděpodobnosti v uvedené zjednodušené podobě je přirozeným východiskem pro definici pravděpodobnosti jako určité normované míry, popsané axiomaticky¹ jazykem teorie množin. Dnes obecně uznávaná Kolmogorovova (axiomatická) definice pravděpodobnosti z roku 1933 popisuje přiřazení pravděpodobnosti náhodnému jevu. Kolmogorov pro svoji definici pravděpodobnosti použil abstraktní množinu Ω vybavenou σ – algebrou $\mathbb{A}$ (jevové pole), spolu s konečnou mírou P definovanou na $\mathbb{A}$.

Kolmogorovova definice pravděpodobnosti

Je-li $\mathcal{A}$ jevové pole, pak pravděpodobnost na jevovém poli $\mathbb{A}$ je reálná funkce, pro kterou platí tzv. **Kolmogorovovy axiomy pravděpodobnosti**.

1. Pravděpodobnost každého jevu $A \in \mathbb{A}$ je nezáporné reálné číslo ($P(A) \geq 0$).
2. Pravděpodobnost jistého jevu je rovna jedné ($P(\Omega)=1$).

¹Axióm (pocházející z řeckého slova axioma = to co se uznává) je tvrzení, které se předem (*a priori*) pokládá za platné a tudíž se nedokazuje



Obsah

49. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

3. Pravděpodobnost sjednocení spočetného počtu vzájemně disjunktních (neslučitelných) jevů je rovna součtu jejich pravděpodobností ($A_i \in \mathbb{A}, i \geq 1, \forall i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$).

Uspořádaná trojice $(\Omega, \mathbb{A}, P)$ tvoří takzvaný **pravděpodobnostní prostor**.

Kolmogorovova (axiomatická) definice pravděpodobnosti je dostatečně obecná, neboť funkce P může představovat míru na dané σ -algebře. Klasická, statistická a geometrická definice pravděpodobnosti pak představují pouze speciální, v praxi však často používané, případy axiomatické definice. Kolmogorovovy axiomy vyhovují nejen předchozím definicím pravděpodobnosti, ale i modernějšímu pojetí pravděpodobnosti jako šance na splnění určitého jevu, která je stanovena často pouze intuitivně a subjektivně.

Z Kolmogorových axiomů vyplývají následující vlastnosti pravděpodobnosti.

2.3.6. Vlastnosti pravděpodobnosti

Nechť jevy $A, B \in \mathbb{A}$, pak

1. $0 \leq P(A) \leq 1$,
2. $P(\emptyset) = 0$,
3. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$,
4. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$



Obsah

50. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

5. $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$, speciálně

- $A \subset B \Rightarrow P(B - A) = P(B) - P(A)$,

6. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, speciálně

- $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Všechny uvedené vlastnosti se dají snadno dokázat přímo z axiomatické definice pravděpodobnosti. Příмым důsledkem de Morganových zákonů jsou pak následující vlastnosti.

7. $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B})$

8. $P(A \cap B) = 1 - P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(\bar{A} \cup \bar{B})$

Všimněte si, že axiomatický systém definuje pojem pravděpodobnosti a vlastnosti pravděpodobnosti, neudává však žádný návod k jejímu stanovení.

2.3.7. Nezávislost jevů, podmíněná pravděpodobnost a pravděpodobnost průniku

Podmíněná pravděpodobnost $P(A|B)$ (čti „pravděpodobnost, že nastane jev A za podmínky, že nastal jev B “) je definována vztahem

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$



Obsah

51. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

kde $P(B) \neq 0$.

Z tohoto vztahu lze odvodit vztah pro **pravděpodobnost průniku dvou jevů**.

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

Je zřejmé, že pravděpodobnost průniku dvou jevů je rovna součinu podmíněné pravděpodobnosti a pravděpodobnosti podmínky.

Jestliže platí $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, řekneme, že **jevy** A, B jsou **nezávislé**.

Jsou-li jevy A a B nezávislé, pak $P(A|B) = P(A)$, čili nastoupení nebo nenastoupení jevu B nemá žádný vliv na nastoupení jevu A . Vzhledem k tomu, že ani výskyt jevu B nezávisí na výskytu jevu A , musí současně platit $P(B|A) = P(B)$.



Obsah

52. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



Klasická definice pravděpodobnosti

*Instrukce pro spuštění vložených animací naleznete na
<http://mi21.vsb.cz/adobe-reader-multimedia>.*

Obsah

53. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Příklad 2.4. Jaká je pravděpodobnost, že na poctivé hrací kostce padne dvakrát po sobě jednička?

Řešení 2.4.

Příklad 2.5. Neprůhledný pytlík obsahuje 10 černých a 5 bílých kuliček. Budeme provádět náhodný pokus – vytažení jedné kuličky, přičemž kuličku do pytlíku nevracíme. Určete pravděpodobnost, že v druhém tahu vytáhneme bílou kuličku.

Řešení 2.5.

Příklad 2.6. Pravděpodobnost, že selže hasicí systém továrny je 20 %, pravděpodobnost, že selže poplachové zařízení je 10 % a pravděpodobnost, že selžou jak hasicí systém, tak i poplachové zařízení jsou 4 %. Jaká je pravděpodobnost, že

- a) alespoň jeden systém bude fungovat,
- b) budou fungovat oba dva systémy.

Řešení 2.6.

Příklad 2.7. 120 studentů absolvovalo zkoušky z matematiky a z fyziky. 30 z nich nesložilo obě zkoušky, 8 nesložilo pouze zkoušku z matematiky a 5 nesložilo pouze zkoušku z fyziky. Určete pravděpodobnost, že náhodně vybraný student

- a) složil zkoušku z matematiky, víme-li, že nesložil zkoušku z fyziky,
- b) složil zkoušku z fyziky, víme-li, že nesložil zkoušku z matematiky,
- c) složil zkoušku z matematiky, víme-li, že složil zkoušku z fyziky.



Obsah

54. strana ze 293

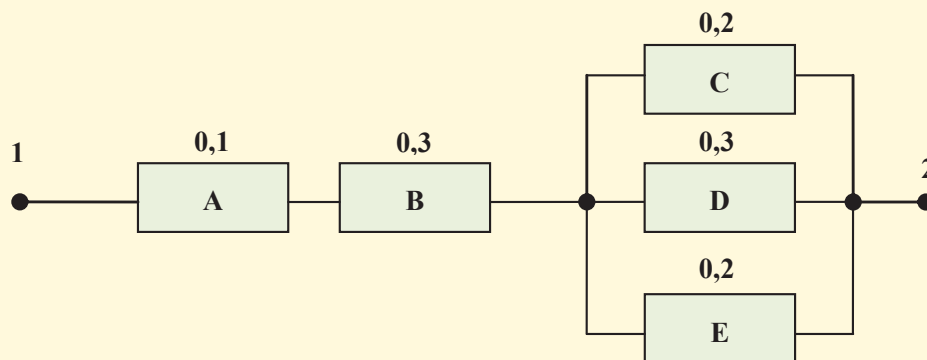


Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Řešení 2.7.

Příklad 2.8. Spočítejte pravděpodobnost toho, že části obvodu mezi body 1 a 2 bude protékat elektrický proud, je-li příslušná část elektrického obvodu včetně pravděpodobnosti poruch jednotlivých součástek vyznačena na následujícím obrázku. Poruchy jednotlivých součástek jsou na sobě nezávislé. (Dojde-li k poruše součástky, dojde k přerušení obvodu.)



Řešení 2.8.

2.3.8. Věta o úplné pravděpodobnosti

Podmíněnou pravděpodobnost používáme k výpočtu pravděpodobnosti jevů, které jsou podmíněny nastoupením množiny vzájemně disjunktivních jevů. Vztah pro pravděpodobnost nějakého jevu bez ohledu na podmiňující jevy udává věta o úplné pravděpodobnosti, kterou si nyní odvodíme.



Obsah

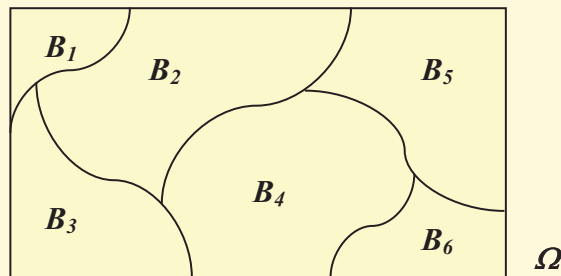
55. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Nechť je dána úplná množina vzájemně disjunktních jevů¹ $\{B_1, B_2, B_3, \dots, B_n\}$. (pro $n = 6$ viz Obr. 2.12).



Obr. 2.11: Úplná množina vzájemně disjunktních jevů

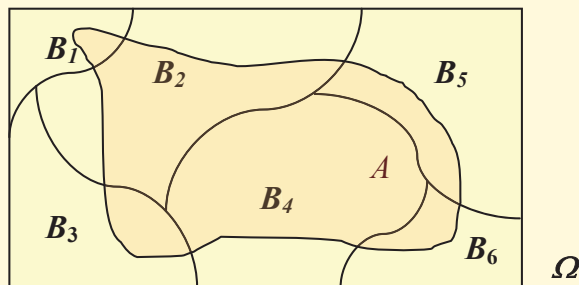
Je zřejmé, že libovolný jev A (Obr. 2.13), ($A \subset \Omega$) je sjednocením disjunktních jevů $(A \cap B_1), (A \cap B_2), \dots, (A \cap B_n)$.

Tedy

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_n) = \bigcup_{i=1}^n (A \cap B_i).$$

Jelikož jde o sjednocení disjunktních jevů, musí platit, že pravděpodobnost tohoto sjedno-

¹Připomeňme si, že pro úplnou množinu vzájemně disjunktních jevů platí, že $\forall i = 1, \dots, n, i \neq j : P(B_i) > 0, B_i \cap B_j = \emptyset, \sum_{i=1}^n P(B_i) = 1$

Obr. 2.12: Jev A (nad úplnou množinou disjunktních jevů)

cení je dána součtem jednotlivých pravděpodobností.

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A \cap B_i)$$

Z definice podmíněné pravděpodobnosti pak dostáváme

$$P(A \cap B_i) = P(A|B_i) \cdot P(B_i).$$

Z čehož již plyne věta o úplné pravděpodobnosti.

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i) \cdot P(B_i)$$

2.3.9. Bayesův vzorec

Při nastoupení jevu A ($P(A) \neq 0$) se naskytá přirozená otázka, který z jevů B_i vedl k nastoupení jevu A , tzn. jaká je pravděpodobnost $P(B_k|A)$. Z definice podmíněné pravděpodobnosti plyne, že

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k) \cdot P(B_k)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i) \cdot P(B_i)}$$

Bayesův vzorec udává, jakým způsobem vypočítáme **aposteriorní pravděpodobnosti**¹ $P(B_k|A)$ jevu B_k za podmínky, že nastal jev A , jestliže známe **apriorní pravděpodobnosti**² $P(B_i)$ a podmíněné pravděpodobnosti $P(A|B_i)$ pro všechny jevy $B_i, i = 1, 2, \dots, n$.

O paradoxech spojených s chápáním pravděpodobnosti se můžete dočíst například v krátkém článku uveřejněném na webu [ScienceWorld](#)

2.3.10. Rozhodovací stromy

Řešení úloh vedoucích na aplikaci věty o úplné pravděpodobnosti nebo Bayesovy věty mnohdy usnadní vhodný grafický záznam úlohy. Rozhodovací proces, který odpovídá řešení těchto úloh, lze graficky znázornit pomocí rozhodovacího stromu.

Rozhodovací strom zobrazuje okamžiky rozhodování jako uzly větvení, větve pak představují všechny jednotlivé varianty řešení. Každá větev v rozhodovacím stromu je ohodnocena

¹Z latiny – a posteriori = na základě zkušenosti.

²Z latiny – a priori = z předchozího, prvotní.



Obsah

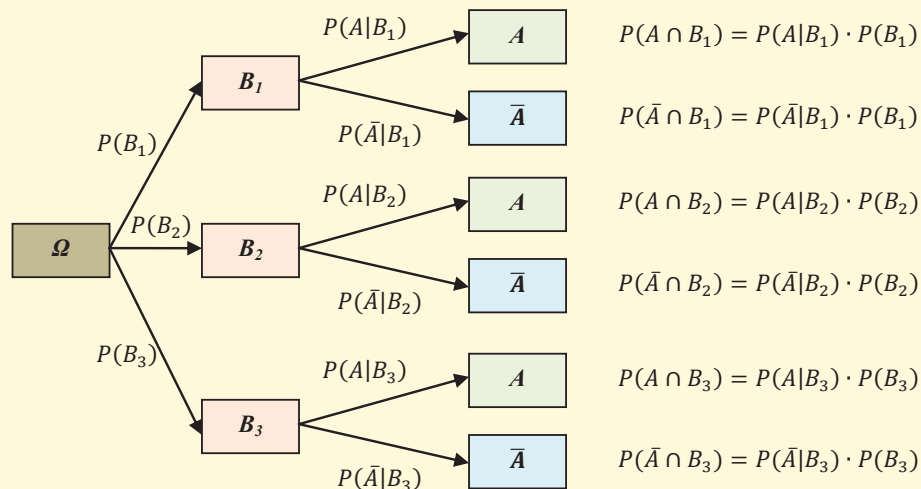
58. strana ze 293



Zavřít dokument

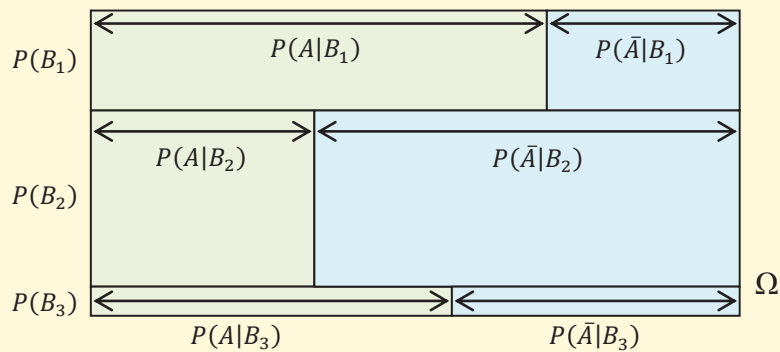
Celá obrazovka / Okno

pravděpodobností, že bude příslušná varianta vybrána. Vynásobíme-li všechny pravděpodobnosti na cestě mezi dvěma uzly, získáme pravděpodobnost, že se z počátečního uzlu dostaneme do uzlu koncového.



Obr. 2.13: Příklad rozhodovacího stromu

Alternativou k rozhodovacímu stromu je **pravoúhlý Vennův diagram**, v němž obsahy jednotlivých obdélníků odpovídají pravděpodobnostem $P(A \cap B_i) = P(A|B_i) \cdot P(B_i)$.



Obr. 2.14: Příklad pravoúhlého Vennova diagramu

Využití obou grafických záznamů úlohy si předvedeme v následujícím příkladu.



Aplikace Bayesovy věty v biomedicině

*Instrukce pro spuštění vložených animací naleznete na
<http://mi21.vsb.cz/adobe-reader-multimedia>.*

Obsah

61. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Shrnutí:

Náhodný pokus je každý konečný děj, jehož výsledek není předem jednoznačně určen podmínkami, za nichž probíhá, a který je, alespoň teoreticky, neomezeně opakovatelný.

Množinu všech možných výsledků $\{\omega\}$ daného pokusu označujeme pojmem **základní prostor** Ω .

Prvky, popř. jednoprvkové podmnožiny, základního prostoru jsou **elementární jevy**.

Jevem A je libovolná podmnožina základního prostoru. Pro náhodné jevy platí algebraické zákony a rovnosti stejné jako pro množiny.

Úplná množina vzájemně disjunktních jevů je množina po dvou disjunktních jevů $\{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n\}$, jejichž sjednocení tvoří množinu Ω .

Jevové pole $\mathcal{A}$ je neprázdný systém podmnožin základního prostoru Ω uzavřený vůči doplňku a vůči sjednocení (**σ -algebra** na Ω).

Vlastnosti pravděpodobnostního prostoru jsou dány Kolmogorovovým axiomatickým systémem.

Podmíněná pravděpodobnost je pravděpodobnost výskytu jevu za podmínky, že nastal určitý jev, který není nemožný.



Obsah

62. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Jesliže platí $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ nebo $P(B) = 0$, pak nazýváme **jevy** A, B **nezávislé**.

Věta o úplné pravděpodobnosti nám dává návod, jak určit pravděpodobnost jevu A , o kterém je známo, že může nastat pouze současně s některým z jevů $B_1, B_2, \dots, B_n$, které tvoří úplnou množinu disjunktních jevů.

Bayesova věta nám umožňuje spočítat podmíněné pravděpodobnosti jednotlivých jevů této úplné množiny za předpokladu, že nastal jev A .

Vlastnosti pravděpodobnosti

1. $0 \leq P(A) \leq 1$,
2. $P(\emptyset) = 0$,
3. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
4. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$,
5. $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$, speciálně
 - $A \subset B \Rightarrow P(B - A) = P(B) - P(A)$,
6. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, speciálně
 - $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A + B) = P(A) + P(B)$,
7. $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B})$,
8. $P(A \cap B) = 1 - P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(\bar{A} \cup \bar{B})$,
9. $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$, speciálně

[Obsah](#)[63. strana ze 293](#)[Zavřít dokument](#)[Celá obrazovka / Okno](#)

- A, B nezávislé ($P(A|B) = P(A)$) $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$,

10. $\{B_1, B_2, B_3, \dots, B_n\}$ je úplná množina vzájemně disjunktních jevů $\Rightarrow$
 $\Rightarrow P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i) \cdot P(B_i)$,

11. $\{B_1, B_2, B_3, \dots, B_n\}$ je úplná množina vzájemně disjunktních jevů $\Rightarrow$
 $\Rightarrow P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k) \cdot P(B_k)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i) \cdot P(B_i)}$.



Obsah

64. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Test

Jak pracovat s testy?

1. (2b.) Určete, která z následujících tvrzení jsou pravdivá.
- (a) Klasická definice pravděpodobnosti vychází ze stability relativních četností.
 - (b) Kolmogorovovy axiomy pravděpodobnosti udávají návod ke stanovení pravděpodobnosti elementárních jevů.
 - (c) Je-li pravděpodobnost jevu A rovna 0,75, pak pravděpodobnost podjevu jevu A je nejvýše 0,75.
 - (d) Jestliže pravděpodobnosti dvou jevů z jevového pole $\mathcal{A}$ jsou 0,7 a 0,5, pak tyto jevy nejsou disjunktní.
 - (e) Pravděpodobnost, že při deseti hodech mincí padne desetkrát po sobě „panna“ je menší než pravděpodobnost, že při deseti hodech klasickou kostkou padne desetkrát po sobě sudé číslo.
2. (1b.) Pravděpodobnost poruchy každé součástky je p . Předpokládejme, že součástky pracují nezávisle na sobě. Určete pravděpodobnost poruchy bloku složeného z 10 ti paralelně zapojených součástek. (Je-li funkční alespoň jedna součástka, blok funguje.)
- | | | |
|------------------------|------------------|--------------------|
| (a) $p/10$ | (b) $10p$ | (c) $10/p$ |
| (d) p^{10} | (e) $1 - p^{10}$ | (f) $(1 - p)^{10}$ |
| (g) $1 - (1 - p)^{10}$ | (h) $(1 - p)/10$ | |



Obsah

65. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



3. (1b.) Pravděpodobnost poruchy každé součástky je p . Předpokládejme, že součástky pracují nezávisle na sobě. Určete pravděpodobnost poruchy bloku složeného z 10 ti sériově zapojených součástek. (Je-li porouchaná alespoň jedna součástka, blok nefunguje.)

(a) $p/10$

(b) $10p$

(c) $10/p$

(d) p^{10}

(e) $1 - p^{10}$

(f) $(1 - p)^{10}$

(g) $1 - (1 - p)^{10}$

(h) $(1 - p)/10$

4. (1b.) Podmíněná pravděpodobnost $P(A|B)$ je rovna

(a) $P(A \cap B) \cdot P(B)$

(b) $\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

(c) $P(A \cap B) \cdot P(A)$

(d) $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

5. (1b.) Mějme jevy A a B . Pravděpodobnost jevu A je $P(A)$ a pravděpodobnost jevu B je $P(B)$. Pravděpodobnost sjednocení jevu A a B je rovna

(a) $P(A) + P(B)$

(b) $P(A) \cdot P(B)$

(c) $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(d) $P(A|B) \cdot P(B)$

6. (1b.) Mějme nezávislé jevy A a B . Pravděpodobnost jevu A je $P(A)$ a pravděpodobnost jevu B je $P(B)$. Pravděpodobnost sjednocení jevu A a B je rovna

(a) $P(A) + P(B)$

(b) $P(A) \cdot P(B)$

(c) $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(d) $P(A|B) \cdot P(B)$

Obsah

66. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



7. (1b.) Mějme disjunktní jevy A a B . Pravděpodobnost jevu A je $P(A)$ a pravděpodobnost jevu B je $P(B)$. Pravděpodobnost průniku jevu A a B je rovna
- (a) $P(A) + P(B)$ (b) $P(A) \cdot P(B)$
(c) $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (d) 0
8. (1b.) Mějme jevy A a B . Jev C je průnik jevů A a B . Pravděpodobnost jevu A je $P(A)$ a pravděpodobnost jevu B je $P(B)$. Pravděpodobnost sjednocení jevu B a C vyjádřena pomocí pravděpodobností jevů A a B je rovna
- (a) $P(A)$ (b) $P(B)$
(c) $P(B)(1 + P(A))$ (d) $P(B)(1 - P(A))$
(e) $P(B)(1 + P(A|B))$ (f) $P(B)(1 - P(A|B))$
9. (1b.) Mějme nezávislé jevy A a B . Jev C je doplněk jevu A . Pravděpodobnost jevu A je $P(A)$ a pravděpodobnost jevu B je $P(B)$. Pravděpodobnost průniku jevu B a C vyjádřena pomocí pravděpodobností jevů A a B je rovna
- (a) $P(A)$ (b) $P(B)$
(c) $P(B)(1 + P(A))$ (d) $P(B)(1 - P(A))$
(e) $P(B)(1 + P(A|B))$
10. (3b.) Vyberte 3 Kolmogorovovy axiomy pravděpodobnosti.
- (a) Pravděpodobnost každého jevu A je nezáporné reálné číslo.
(b) Pravděpodobnost každého jevu A je menší než 1.

Obsah

67. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

- (c) Pravděpodobnost jistého jevu Ω je rovna nule.
- (d) Pravděpodobnost jistého jevu Ω je rovna jedné.
- (e) Pravděpodobnost sjednocení konečného počtu vzájemně disjunktních jevů je rovna součtu jejich pravděpodobností.
- (f) Pravděpodobnost sjednocení jevů je rovna součtu jejich pravděpodobností.

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:



Obsah

68. strana ze 293



Zavřít dokument

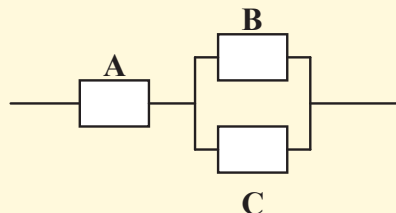
Celá obrazovka/Okno



Příklady k procvičení

Jak pracovat s testy?

1. Systém je funkční, pokud funguje součástka A a nejméně jedna ze součástek B a C . Pravděpodobnost, že po 1000 hodinách je funkční součástka A je 0,8, součástka B 0,9 a součástka C 0,7. Systém pracuje nezávisle na okolních podmínkách a na čase.



Jaká je pravděpodobnost, že systém bude po 1000 hodinách funkční?

2. Ve velkém množství písemek se vyskytují dva typy chyb, A a B . Pravděpodobnost, že v písemce bude chyba A je 0,1 a pravděpodobnost, že tam bude chyba B je 0,2. Pravděpodobnost, že v písemce budou obě chyby zároveň je 0,05. Určete pravděpodobnost, že v písemce bude pouze chyba A , nikoliv chyba B .
3. Sonda má dvě kamery, které mohou pracovat nezávisle na sobě. Každá z nich je vybavena pro případ poruchy opravným mechanismem. Pravděpodobnost poruchy kamery

Obsah

69. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

je 0,1, pravděpodobnost úspěšné opravy případné poruchy pomocí opravného mechanismu je 0,3. S jakou pravděpodobností se nepodaří ani jednou z kamer nic nafilmovat?

4. Tři absolventi střední školy – pan N , pan S a pan D skládají přijímací zkoušky na tři různé vysoké školy. Jejich šance na úspěch odhadujeme na 70% pro studenta N , na 40% pro studenta S a na 60% pro studenta D . Jaká je pravděpodobnost, že
- (a) všichni tři uspějí,
 - (b) ani jeden neuspěje,
 - (c) uspěje jen student N ,
 - (d) uspěje právě jeden z nich,
 - (e) neuspěje jen student S ,
 - (f) uspějí právě dva z nich,
 - (g) uspěje alespoň jeden z nich.
5. V osudí je 5 černých a 15 bílých koulí. Z osudí se náhodně vytáhne jedna koule. Poté se koule vrátí zpět a přidá se 20 koulí téže barvy, jakou měla vytažená koule. Následně realizujeme další tah. Jaká je pravděpodobnost, že druhá vytažená koule bude černá?

[Obsah](#)

70. strana ze 293

[Zavřít dokument](#)[Celá obrazovka / Okno](#)

6. Počáteční stadium rakoviny se vyskytuje u každých tří z jednoho tisíce Američanů. Pro včasné zjištění byl vyvinut velmi spolehlivý test. Pouze 5% zdravých pacientů má výsledky pozitivní (falešný poplach) a pouze 2% nemocných mají výsledek negativní. Pokud by se tento test použil pro vyšetření celé americké společnosti a všichni ti, kteří by měli pozitivní výsledky by byli hospitalizováni za účelem klinického vyšetření, kolik % z nich bude skutečně mít rakovinu?
7. Při výrobě 30% přístrojů byl použit zpřísněný technologický režim, zatímco při výrobě ostatních přístrojů standardní režim. Přitom pravděpodobnost bezporuchového chodu po dobu T je pro přístroj z první skupiny 0,97 a pro přístroj z druhé skupiny 0,82. Určete pravděpodobnost, že
- (a) náhodně vybraný přístroj bude po dobu T pracovat bezporuchově,
 - (b) přístroj, který po dobu T pracoval bezporuchově, byl vyroben ve zpřísněném režimu?
8. Zamýšlíte koupit v autobazaru vůz jisté značky. Je ovšem známo, že 30% takových vozů má vadnou převodovku. Abyste získali více informací, najmete si mechanika, který je po projíždce schopen odhadnout stav vozu a jen s pravděpodobností 0,1 se zmýlí. Jaká je pravděpodobnost, že vůz, který chcete koupit, má vadnou převodovku
- (a) předtím, než si najmete mechanika?
 - (b) jestliže mechanik odhadl, že vůz je dobrý?



Obsah

71. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

9. Monty Hallův problém: Veskrze poctivý moderátor umístil soutěžní cenu – auto – za jedny ze tří dveří. Za každými ze zbývajících dveří je cena útěchy – koza. Úkolem soutěžícího je zvolit si jedny dveře. Poté moderátor otevře jedny ze dvou zbývajících dveří, za nimiž je koza. Teď má soutěžící možnost buď ponechat svou původní volbu, nebo změnit volbu na zbývající dveře. Soutěžící vyhrává cenu, která je za dveřmi, které si zvolil. Soutěžící nemá žádné předchozí znalosti, které by mu umožnily odhalit co je za dveřmi.

Nechť soutěžící nejprve zvolí dveře číslo 1. Nechť moderátor otevře dveře číslo 3, za kterými je koza. Zvýší se šance na výhru auta, pokud soutěžící změní volbu na dveře číslo 2?

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:



Obsah

72. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



Kapitola 3

Náhodná veličina

Cíle

V této kapitole budete pokračovat ve studiu teorie pravděpodobnosti. Seznámíte se s pojmem náhodné veličiny, dozvíte se, jak ji lze popsat. Po prostudování této kapitoly budete umět a znát

- co je to náhodná veličina,
- obecně popsat náhodnou veličinu,
- charakterizovat diskrétní i spojitou náhodnou veličinu,
- určovat číselné charakteristiky náhodné veličiny,
- transformovat náhodnou veličinu.

Obsah

73. strana ze 293

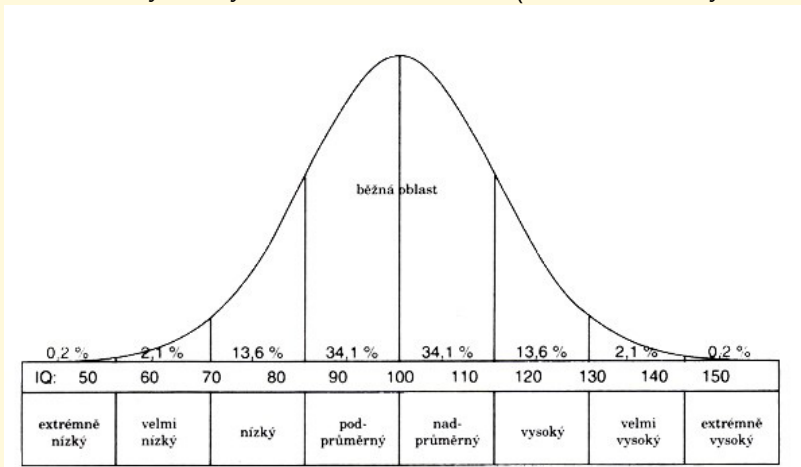


Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Průvodce studiem

„Rozdělení inteligence, stejně jako jiných lidských vlastností, v celkové populaci lze znázornit pomocí Gaussovy křivky normálního rozdělení (viz níže uvedený obrázek)“



Cejpek, Jak se lidé liší svými schopnostmi počínat si správně v různých situacích, dostupné na:

www.phil.muni.cz/grohmann/cejpekIQ1.doc

Asi jste se nesetkali poprvé s pojmem Gaussova křivka. Možná dokonce máte nějakou představu o tom, co by mohla vyjadřovat. Ale je tato představa správná? Opravdu víte, co představují hodnoty vynesené na vísrlou osu? Jak souvisí procentuální zastoupení jedinců s různými kategoriemi IQ s Gaussovou křivkou? Co to je vlastně **rozdělení** inteligence?

Odpovědi na tyto otázky a mnoho dalších informací o matematickém popisu výsledků náhodných pokusů by vám měla přinést tato kapitola. (Podrobnější informace konkrétně o Gaussově křivce



Obsah

74. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

pak najdete v kapitole 6.)

3.1. Základní pojmy

Jak již bylo zmíněno v Kap. 2, výsledek náhodného pokusu popisujeme pomocí základního prostoru Ω , tj. množiny všech elementárních jevů, a jejich pravděpodobnosti. Chceme-li zpracovávat výsledky náhodného pokusu, musíme vytvořit model popisující více či méně dobře realitu. Tímto modelem je tzv. **náhodná veličina**.

Výsledkem náhodného pokusu je v mnoha případech reálné číslo. I v případech náhodných pokusů, jejichž výsledek je kategoriální povahy (např. pohlaví narozeného dítěte, ukončené vzdělání apod.), se při popisu výsledků mnohdy snažíme přiřadit každému výsledku reálné číslo. Výsledek náhodného pokusu vyjádřený reálným číslem budeme považovat za **hodnotu náhodné veličiny**.

Příkladem náhodné veličiny může být

- počet vadných výrobků mezi tisíci výrobky,
- doba do poruchy zářivky,
- počet kazů na 1 m^2 lakované plochy,
- počet studentů, kteří v tomto zkouškovém období složí zkoušku ze Statistiky I.,
- počet chybně přenesených znaků Morseovy abecedy,
- odchylka rozměru výrobku od požadované hodnoty,
- roční spotřeba elektrické energie vaší domácnosti.



Obsah

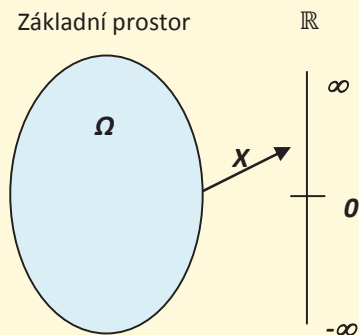
75. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Pro korektní definici náhodné veličiny by bylo třeba znát pojmy z teorie míry. My pojmy související s tématem náhodné veličiny zavedeme ve stejné podstatě, nicméně s mírnými odchylkami od přesných matematických formulací.



Obr. 3.1: Grafická ilustrace náhodné veličiny

Definice:

Náhodná veličina X (zkráceně NV X) je reálná funkce $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ taková, že pro každé reálné x je množina

$$\{\omega \in \Omega | X(\omega) < x\}$$

náhodným jevem.

Jednotlivé realizace náhodné veličiny, tj. $X(\omega)$, $\omega \in \Omega$, značíme malými písmeny $(a, b, x, y, \dots)$.

V dalším textu budeme používat zkrácené zápisy

$$\begin{aligned}(X < x) &= \{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\}, \\(a < X < b) &= \{\omega \in \Omega : a < X(\omega) < b\}, \\(X = x) &= \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}\end{aligned}$$

a podobně.

Jedním z úkolů teorie pravděpodobnosti je vybudovat matematický aparát, který přiřadí všem zajímavým podmnožinám množiny reálných čísel příslušné pravděpodobnosti. Pravidlo, které každé hodnotě (popř. každému intervalu hodnot) přiřazuje pravděpodobnost, že náhodná veličina nabude této hodnoty (popř. hodnoty z tohoto intervalu), nazýváme **rozdělením pravděpodobnosti náhodné veličiny** (zkráceně rozdělení náhodné veličiny). Náhodná veličina je tedy z pravděpodobnostního hlediska úplně popsána, jestliže známe všechny hodnoty (popř. intervaly hodnot), kterých může náhodná veličina nabýt a pravděpodobnosti těchto hodnot (popř. intervalů).

Rozdělení náhodné veličiny lze popsat různými způsoby. Nejčastěji užívanou možností popisu náhodné veličiny X je tzv. distribuční funkce.

3.2. Distribuční funkce

Definice:

Nechť X je náhodná veličina. Reálnou funkci $F(x)$ definovanou pro všechna reálná x vztahem

$$F(x) = P(X < x)$$



Obsah

77. strana ze 293

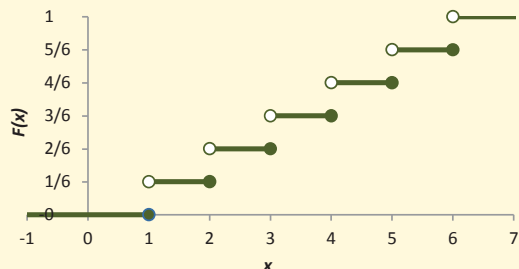


Zavřít dokument

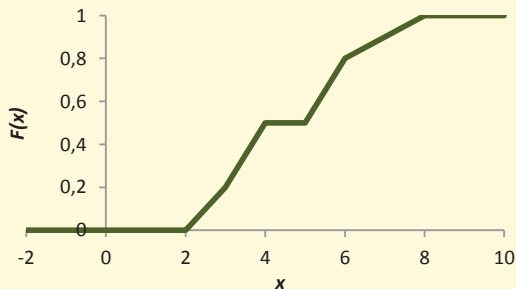
Celá obrazovka / Okno

nazýváme **distribuční funkci** náhodné veličiny X .

Distribuční funkce je tedy funkce, která každému reálnému číslu přiřazuje pravděpodobnost, že náhodná veličina nabude hodnoty menší než toto reálné číslo.



Obr. 3.2: Ukázka grafu distribuční funkce diskrétní náh. veličiny



Obr. 3.3: Ukázka grafu distribuční funkce spojité náhodné veličiny

Přímo z definice distribuční funkce vyplývá řada jejích vlastností.

- $0 \leq F(x) \leq 1$, tzn. distribuční funkce nabývá hodnot z intervalu $\langle 0; 1 \rangle$,
- $\forall x_1, x_2, x_1 < x_2 : F(x_1) < F(x_2)$, tzn. distribuční funkce je neklesající,
- $\forall a \in \mathbb{R} : \lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = F(a)$, tzn. $F(x)$ je zleva spojitá,
- $F(x)$ má nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti,
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, tzn. distribuční funkce „začíná“ v 0,

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$, tzn. distribuční funkce „končí“ v 1.

Z definice distribuční funkce lze rovněž snadno odvodit vztahy mezi pravděpodobnostmi a distribuční funkcí.

- $P(X < a) = F(a)$, pro všechna $a \in \mathbb{R}$,
- $P(X \geq a) = 1 - F(a)$, pro všechna $a \in \mathbb{R}$,
- $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$, pro všechna $a < b$; $a, b \in \mathbb{R}$,
- $P(X = a) = \lim_{x \rightarrow a^+} F(x) - F(a)$, pro všechna $a \in \mathbb{R}$.

Rozlišujeme dva základní druhy náhodné veličiny - **spojitou a diskrétní** (může nabývat pouze konečně nebo spočetně mnoha hodnot), přesněji řečeno náhodnou veličinu se spojitým a diskrétním rozdělením. Distribuční funkce je v případě spojitě náhodné veličiny spojitá funkce. v případě diskrétní náhodné veličiny je to „schodovitá“ funkce, která má nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti. Souvislost mezi pravděpodobnostmi a distribuční funkcí je pro tyto dva základní typy náhodných veličin prezentována na Obr. 3.4 a Obr. 3.5.



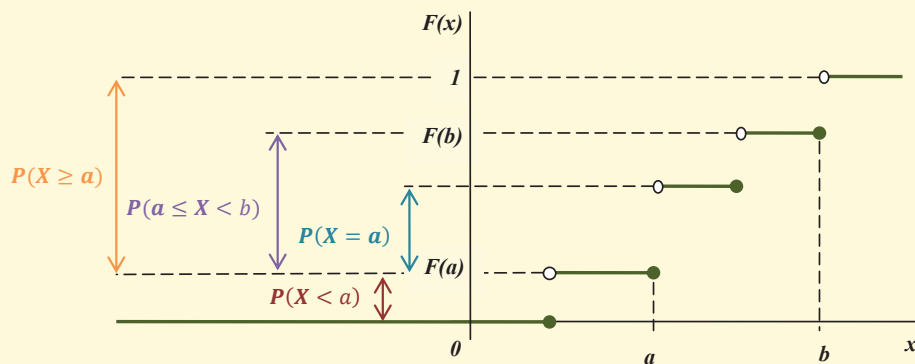
Obsah

79. strana ze 293

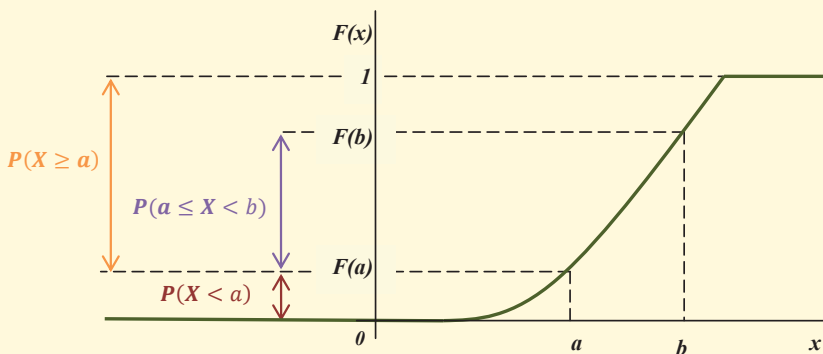


Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



Obr. 3.4: Interpretace vztahu mezi pravděpodobností a distribuční funkcí diskrétní náhodné veličiny



Obr. 3.5: Interpretace vztahu mezi pravděpodobností a distribuční funkcí spojitě náhodné veličiny

3.3. Diskrétní náhodná veličina

Jak již jsme se zmínili, o diskrétní náhodné veličině hovoříme tehdy, jestliže náhodná veličina nabývá pouze hodnot z nějaké konečné či spočetné množiny. Jedná se nejčastěji o celočíselné náhodné veličiny, např. počet studentů, kteří vstoupili do hlavní budovy VŠB-TUO během dopoledne $(0, 1, 2, \dots)$, počet členů domácnosti $(1, 2, 3, \dots)$, počet dopravních nehod za jeden den na dálnici z Prahy do Brna $(0, 1, \dots)$, součet ok při hodu třemi kostkami $(3, 4, \dots, 18)$ apod.

Definice:

Řekneme, že náhodná veličina X má **diskrétní rozdělení pravděpodobnosti** (zkráceně „je diskrétní“) právě tehdy, když nabývá nejvýše spočetně mnoha hodnot $\{x_1, x_2, \dots\}$ tak, že

- $P(X = x_i) \geq 0$;
- $\sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i) = 1$.

Funkci $P(X = x_i) = P(x_i)$ nazýváme **pravděpodobnostní funkcí** náhodné veličiny X . Pro popis diskrétní náhodné veličiny se tato funkce používá častěji než funkce distribuční.

Pravděpodobnostní funkce může být zadána

- předpisem (např. $\forall x \in \{0; 1; 2; 3\} : P(X = x) = \binom{3}{x} \cdot 0,1^x \cdot 0,9^{3-x}$),
- tabulkou (Tab. 3.1),

[Obsah](#)

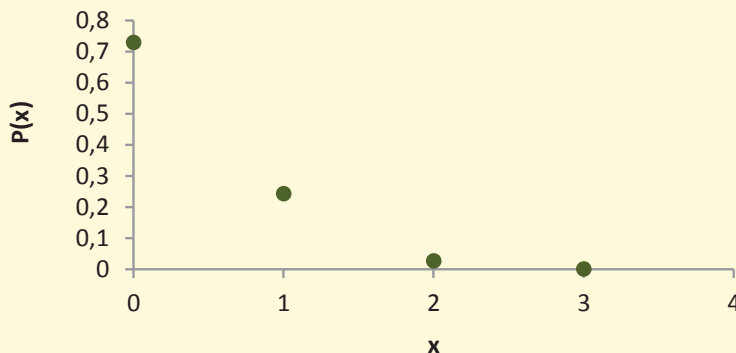
81. strana ze 293

[Zavřít dokument](#)[Celá obrazovka / Okno](#)

- grafem (Obr. 3.6).

Tab. 3.1: Příklad zadání pravděpodobnostní funkce tabulkou

x	0	1	2	3
$P(x)$	0,729	0,243	0,027	0,001



Obr. 3.6: Příklad zadání pravděpodobnostní funkce grafem

Distribuční funkci diskrétní náhodné veličiny můžeme vyjádřit pomocí pravděpodobnostní funkce jako

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(x_i),$$

tj. jako součet pravděpodobností těch x_i , která jsou menší než x .



Obsah

82. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Distribuční funkce diskrétní náhodné veličiny (Obr. 3.2) je „schodovitá“ funkce, která je nespojitá v bodech, v nichž je pravděpodobnostní funkce nenulová. Víme, že

$$P(X = a) = \lim_{x \rightarrow a^+} F(x) - F(a), \text{ pro všechna } a \in \mathbb{R}.$$

Je tedy zřejmé, že „velikosti skoků“ v bodech nespojitosti distribuční funkce udávají hodnotu pravděpodobnosti v těchto bodech.

Příklad 3.1. V dílně pracují dva stroje (nezávisle na sobě). První stroj se porouchá s pravděpodobností 20%. Pravděpodobnost poruchy druhého stroje je 30%. Náhodná veličina bude označovat počet porouchaných strojů v dílně. Určete pravděpodobnostní funkci a distribuční funkci této náhodné veličiny.

Řešení 3.1.

3.4. Spojitá náhodná veličina

Jestliže náhodná veličina může nabýt všech hodnot z určitého intervalu, hovoříme o náhodné veličině se spojitým rozdělením. Jako příklad spojité náhodné veličiny lze uvést [životnost výrobku](#), [délku novorozeněte](#), [náhodně vybrané reálné číslo](#) apod.

Definice:

Řekneme, že náhodná veličina X má **spojité rozdělení pravděpodobnosti** (zkráceně „je spojitá“) právě tehdy, má-li spojitou distribuční funkci.



Obsah

83. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Z definice vyplývá, že v případě spojitě náhodné veličiny nemá smysl jednotlivým realizacím náhodné veličiny přiřazovat hodnotu pravděpodobnosti, poněvadž **pravděpodobnostní funkce je nulová**.

Je-li X spojitá náhodná veličina, pak

$$P(X = a) = \lim_{x \rightarrow a^+} F(x) - F(a) = F(a) - F(a) = 0, \text{ pro všechna } a \in \mathbb{R}.$$

Pomocí jakých nástrojů tedy můžeme spojitou náhodnou veličinu popsat? u spojitě náhodné veličiny můžeme stanovit pravděpodobnost výskytu náhodné veličiny v libovolném intervalu. To znamená, že pro její popis můžeme použít distribuční funkci.

Jak již víme, chceme-li určit pravděpodobnost výskytu náhodné veličiny na nějakém intervalu, využíváme vztahy

- $P(X < a) = F(a)$, pro všechna $a \in \mathbb{R}$,
- $P(X \geq a) = 1 - F(a)$, pro všechna $a \in \mathbb{R}$,
- $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$, pro všechna $a < b$; $a, b \in \mathbb{R}$.

Jelikož pro spojitou náhodnou veličinu platí, že $P(X = a) = 0$, můžeme dále tvrdit, že pro spojitou náhodnou veličinu X a pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$ platí

- $P(X \leq a) = P(X < a)$,
- $P(X > a) = P(X \geq a)$,



Obsah

84. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

- $P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b).$

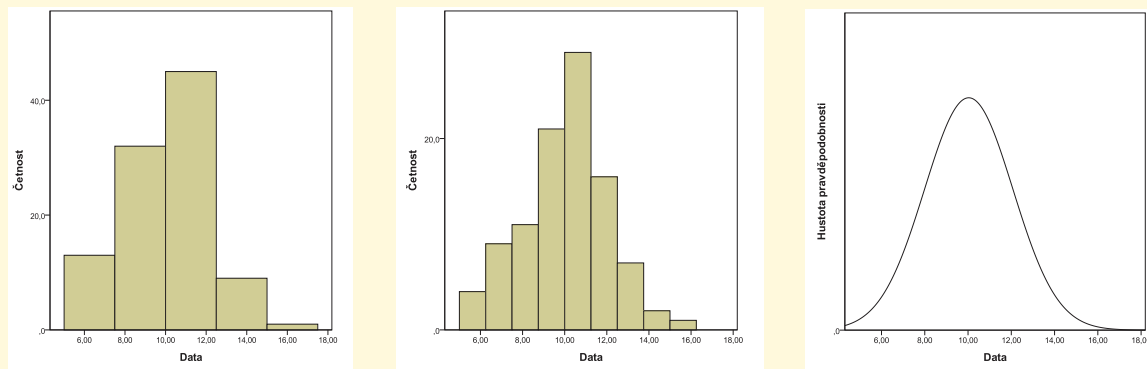
Místo pravděpodobnostní funkce se k popisu rozdělení spojitě náhodné veličiny používá tzv. **hustota pravděpodobnosti** $f(x)$.

Předpokládejme, že máme k dispozici rozsáhlý soubor realizací spojitě náhodné veličiny. Budeme-li třídit naměřené hodnoty do stále užších třídních intervalů, dostaneme histogramy, které se budou stále více blížit hladké křivce, výše zmíněné hustotě pravděpodobnosti. Té ovšem dosáhneme pouze v teoretickém limitním případě, kdy bychom třídili nekonečně velký soubor do nekonečně mnoha nekonečně úzkých třídních intervalů (Obr. 3.9). (Uvědomte si, že hodnota hustoty pravděpodobnosti $f(x)$ neudává pravděpodobnost toho, že náhodná veličina X má hodnotu x . Hustota pravděpodobnosti $f(x)$ neudává žádnou pravděpodobnost!!! Může nabývat i hodnot vyšších než 1.)

[Obsah](#)

85. strana ze 293

[Zavřít dokument](#)[Celá obrazovka / Okno](#)



Obr. 3.7: Přejchod od histogramu k hustotě pravděpodobnosti

Definice:

Souvislost mezi histogramem a grafem hustoty pravděpodobností můžete sledovat v java appletu [Přejchod mezi histogramem a hustotou pravděpodobností](#) (450 KB).

Hustota pravděpodobnosti $f(x)$ spojitě náhodné veličiny je reálná nezáporná funkce taková, že

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \text{ pro } -\infty < x < \infty.$$

Příkladem grafu hustoty pravděpodobnosti je již zmíněná Gaussova křivka.

Dá se ukázat, že ve všech bodech, kde existuje derivace distribuční funkce, platí

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}.$$



Obsah

86. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Známe-li distribuční funkci, můžeme lehce určit hustotu pravděpodobnosti a naopak, známe-li hustotu pravděpodobnosti, snadno určíme distribuční funkci.

Hustota pravděpodobnosti má tyto základní vlastnosti:

1. $f(x) \geq 0$, tzn. hustota pravděpodobnosti je nezáporná funkce,
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$, tzn. plocha pod křivkou hustoty pravděpodobnosti je rovna 1,
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, tzn. hustota pravděpodobnosti „začíná“ v 0,
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, tzn. hustota pravděpodobnosti „končí“ v 0.

Proto, aby byl základní popis spojitě náhodné veličiny dokončen, zbývá nám odpovědět na otázku, jaký je vztah mezi pravděpodobností výskytu spojitě náhodné veličiny v nějakém intervalu a hustotou pravděpodobnosti. Hledané vztahy snadno odvodíme.

$\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b$:

- $P(X = a) = 0$,
- $P(X < a) = F(a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx$,
- $P(X \geq a) = 1 - F(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx - \int_{-\infty}^a f(x) dx = \int_a^{\infty} f(x) dx$
- $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^b f(x) dx - \int_{-\infty}^a f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$.

Připomeňme, že vzhledem k nulovosti pravděpodobnostní funkce spojitě náhodné veličiny můžeme ve výše uvedených vztazích libovolně zaměňovat ostré a neostré nerovnosti.



Obsah

87. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

3.4.1. Geometrická interpretace vztahu mezi pravděpodobností a hustotou pravděpodobnosti

Je známo, že integrál z nezáporné funkce udává velikost plochy pod jejím grafem. Jedna z vlastností hustoty pravděpodobnosti říká, že plocha pod grafem funkce hustoty pravděpodobnosti je rovna 1, tzn. že

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

To je analogické situaci u diskrétní náhodné veličiny, kde součet pravděpodobností všech možných výsledků rovněž dává jedničku. Zároveň jsme si ukázali, že

$$P(a \leq X < b) = \int_a^b f(x) dx.$$

Můžeme tedy říci, že obsah plochy pod křivkou $f(x)$ pro $x \in \langle a, b \rangle$ je pravděpodobnost toho, že náhodná veličina X nabude hodnoty z tohoto intervalu ($\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b$).



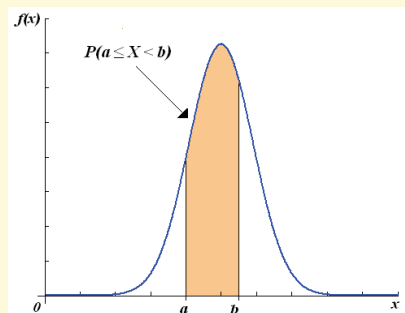
Obsah

88. strana ze 293



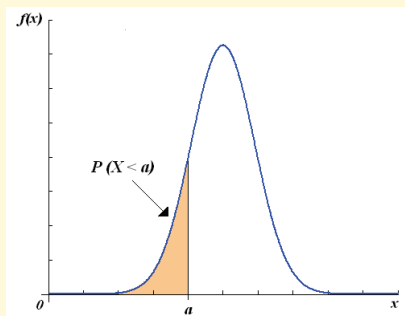
Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

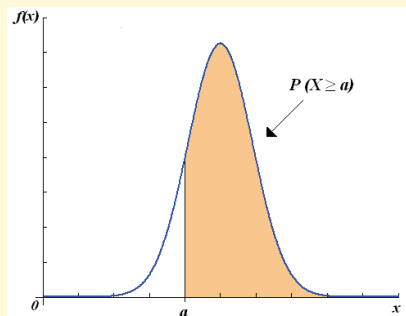
Obr. 3.8: Geometrická interpretace $P(a \leq X < b)$

Obdobně můžeme znázornit pravděpodobnosti

$$P(X < a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx \quad \text{a} \quad P(X \geq a) = \int_a^{\infty} f(x) dx.$$



Obr. 3.9: Geometrická interpretace $P(X < a)$



Obr. 3.10: Geometrická interpretace $P(X \geq a)$

To, zda jste správně pochopili geometrickou interpretaci vztahů mezi pravděpodobnostmi, hustotou pravděpodobnosti a distribuční funkcí spojitě náhodné veličiny, si můžete ověřit v následující animaci.



Vztah mezi pravděpodobností funkcí hustoty a distribuční funkcí

*Instrukce pro spuštění vložených animací naleznete na
<http://mi21.vsb.cz/adobe-reader-multimedia>.*

Obsah

91. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Příklad 3.2. Nechť X je spojitá náhodná veličina definována hustotou pravděpodobnosti $f(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x)(1+x) & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

- a) Nalezněte konstantu c tak, aby $f(x)$ byla korektně zadána,
- b) zakreslete hustotu pravděpodobnosti $f(x)$,
- c) nalezněte a zakreslete distribuční funkci $F(x)$,
- d) určete $P(X = 0,3)$, $P(0 < X < 11)$, $P(X > 0,5)$.

Řešení 3.2.

3.5. Funkce náhodné veličiny

V mnoha případech se setkáváme s tím, že známe rozdělení náhodné veličiny X a potřebujeme určit rozdělení náhodné veličiny Y , která je funkcí náhodné veličiny X , tj. $Y = g(X)$.

Mějme náhodnou veličinu Y danou předpisem $Y = g(X)$, kde $g(x)$ je nějaká prostá reálná funkce definovaná na základním souboru náhodné veličiny X . Odvodíme rozdělení náhodné veličiny Y .

$$\forall y \in \mathbb{R} : \quad F_Y(y) = P(Y < y) = P(g(X) < y)$$



Obsah

92. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Jestliže k funkci g existuje funkce inverzní g^{-1} , pak platí

$$F_Y(y) = \begin{cases} P(X < g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}(y)), & \text{je-li } g \text{ funkcí rostoucí} \\ 1 - P(X < g^{-1}(y)) = 1 - F_X(g^{-1}(y)), & \text{je-li } g \text{ funkcí klesající.} \end{cases}$$

Je-li X diskrétní náhodná veličina popsána pravděpodobnostní funkcí $P_X(x)$, pak pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny Y je rovna

$$P_Y(y) = P(Y = y) = P(g(X) = y) = P(X = g^{-1}(y)) = P_X(g^{-1}(y)).$$

Pro spojitou náhodnou veličinu X a spojitě diferencovatelnou funkci g je hustota $f_Y(y)$ náhodné veličiny Y rovna

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \right|.$$

Poznámka: Náhodná veličina Y může být dána rovněž funkcí několika náhodných veličin X_i , $i = 1, \dots, n$ definovaných na stejném základním prostoru ($Y = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$).

3.6. Číselné charakteristiky náhodné veličiny

Rozdělení pravděpodobnosti každé náhodné veličiny X je plně popsáno pomocí její distribuční funkce $F(x)$, popř. pomocí hustoty pravděpodobnosti $f(x)$ nebo pravděpodobnostní funkce $P(x)$. v mnoha případech je však výhodné shrnout celkovou informaci o náhodné veličině do několika čísel, které charakterizují některé vybrané vlastnosti této náhodné veličiny a rovněž umožňují srovnání různých náhodných veličin. Tato čísla se nazývají **číselné charakteristiky náhodné veličiny X** . Nyní se seznámíte s některými z nich.



Obsah

93. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Velkou skupinu číselných charakteristik náhodné veličiny tvoří tzv. **momenty rozdělení**. Ty dělíme na momenty obecné a momenty centrální.

- **Obecný moment r -tého řádu** (značí se μ_r nebo $E(X^r)$ pro $r = 1, 2, \dots$)

pro diskrétní NV:
$$\mu_r = \sum_{(i)} x_i^r \cdot P(x_i)$$

pro spojitou NV:
$$\mu_r = \int_{-\infty}^{\infty} x^r \cdot f(x) dx$$

(pokud uvedená řada nebo integrál konvergují absolutně)

Význačnou roli mezi obecnými momenty má zejména obecný moment 1. řádu. Tento moment je nazýván střední hodnotou.

- **Střední hodnota** (angl. „expected value“, někdy také „mean“; značí se $E(X)$ nebo μ)

pro diskrétní NV:
$$\mu = \sum_{(i)} x_i \cdot P(x_i)$$

pro spojitou NV:
$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

(pokud uvedená řada nebo integrál konvergují absolutně)

Střední hodnota je parametrem rozdělení náhodné veličiny. Často bývá označována jako **populační průměr**, tj. průměr všech realizací náhodné veličiny. Střední hodnota platů v ČR je průměrem platů všech občanů ČR pobírajících mzdu; střední hodnota doby do



Obsah

94. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

poruchy monitorů XY je průměrem doby do poruchy všech vyrobených monitorů XY , apod. Všimněte si, že nedokážete-li určit rozdělení náhodné veličiny (pravděpodobnostní funkci, resp. hustotu pravděpodobnosti), nedokážete určit ani její střední hodnotu.

Vlastnosti střední hodnoty:

$$1. \forall a, b \in \mathbb{R} : E(aX + b) = aE(X) + b$$

Násobíme-li X konstantou, násobí se jí i její střední hodnota; přičteme-li k X konstantu, změní se o tuto konstantu i její střední hodnota.

$$2. E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i)$$

Střední hodnota součtu náhodných veličin je rovna součtu jednotlivých středních hodnot.

$$3. \text{ Pro } X_1, \dots, X_n \text{ nezávislé platí } E\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) = \prod_{i=1}^n E(X_i)$$

Jsou-li NV $X_1, \dots, X_n$ nezávislé, pak střední hodnota jejich součinu je rovna součinu jednotlivých středních hodnot.

• **Centrální moment r -tého řádu μ_r'** (značíme $\mu_r' = E(X - E(X))^r$ pro $r = 1, 2, \dots$)

pro diskrétní NV:
$$\mu_r' = \sum_{(i)} (x_i - E(X))^r \cdot P(x_i)$$

pro spojitou NV:
$$\mu_r' = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^r \cdot f(x) dx$$

(pokud uvedená řada nebo integrál konvergují absolutně)



Obsah

95. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Podobně význačné postavení jako má střední hodnota mezi obecnými momenty, má mezi centrálními momenty druhý centrální moment – rozptyl.

- **Rozptyl** (angl. „dispersion“, „variance“; značí se μ_2' nebo σ^2 nebo $D(X)$)

pro diskrétní NV:
$$\mu_2' = \sum_{(i)} (x_i - E(X))^2 \cdot P(x_i)$$

pro spojitou NV:
$$\mu_2' = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 \cdot f(x) dx$$

(pokud uvedená řada nebo integrál konvergují absolutně)

Definiční vztahy pro rozptyl se při praktických výpočtech, bohužel, ukazují jako nevhodné (časově náročný výpočet). v praxi se proto mnohem častěji pro určení rozptylu využívá tvrzení, že

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

Důkaz tohoto tvrzení je založen na vlastnostech střední hodnoty a je ponechán k samostatnému cvičení.

Rozptyl je parametrem rozdělení vyjadřujícím variabilitu (rozptýlenost) realizací náhodné veličiny kolem její střední hodnoty. (Uvědomte si, že jednotka rozptylu je kvadrátem jednotky, v níž jsou zaznamenávány jednotlivé realizace NV. Například jednotkou rozptylu platů v ČR je Kč².)

Vlastnosti rozptylu:



Obsah

96. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

$$1. \forall a \in \mathbb{R} : D(aX + b) = a^2 D(X)$$

Násobíme-li náhodnou veličinu konstantou, hodnota jejího rozptylu se vynásobí druhou mocninou této konstanty; přičteme-li k náhodné veličině konstantu, její rozptyl se nezmění.

$$2. X_1, \dots, X_n \text{ nezávislé} \Rightarrow D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n D(X_i)$$

Jsou-li NV $X_1, \dots, X_n$ nezávislé, pak rozptyl jejich součiny je roven součiny jednotlivých rozptylů.

- **Směrodatná odchylka** (angl. „standard deviation“, značí se σ , popř. σ_x chceme-li zdůraznit příslušnost k určité náhodné veličině)

Směrodatná odchylka je definována jako odmocnina z rozptylu

$$\sigma = \sqrt{D(X)}.$$

Podobně jako rozptyl je také směrodatná odchylka mírou variability náhodné veličiny. Jednotka, v níž bývá uváděna směrodatná odchylka je stejná jako jednotka, v níž jsou zaznamenávány jednotlivé realizace NV. (Například směrodatná odchylka platů v ČR se uvádí v Kč.)

Momenty vyšších řádů se využívají nejčastěji k určení číselných charakteristik popisujících tvar rozdělení (šikmost, špičatost).



Obsah

97. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

• **Šikmost** (angl. „skewness“, značí se α_3)

Šikmost je mírou symetrie daného rozdělení pravděpodobnosti a je definována podílem třetího centrálního momentu a třetí mocniny směrodatné odchylky.

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

Symetrii rozdělení (vzhledem k symetrii normovaného normálního rozdělení (kap. 6) pak posuzujeme takto.

$\alpha_3 = 0$	Symetrické rozdělení
$\alpha_3 < 0$	Negativně zešikmené rozdělení
$\alpha_3 > 0$	Pozitivně zešikmené rozdělení

• **Špičatost** (angl. „kurtois“, značí se α_4)

Špičatost je mírou koncentrace hodnot náhodné veličiny kolem střední hodnoty a je definována podílem čtvrtého centrálního momentu a čtvrté mocniny směrodatné odchylky.

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

Špičatost rozdělení pak posuzujeme vzhledem ke špičatosti normovaného normálního rozdělení (Kap. 6) takto:

$\alpha_4 = 3$	Normální špičatost (tj. špičatost normálního rozdělení)
$\alpha_4 < 3$	Menší špičatost než u normálního rozdělení (plošší rozdělení)
$\alpha_4 > 3$	Větší špičatost než u normálního rozdělení (špičatější rozdělení)



Obsah

98. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Vzhledem k nepraktickému vyhodnocování špičatosti (vzhledem k hodnotě 3) se mnohdy používá tzv. **standardizovaná špičatost**, která je definována jako

$$\alpha_4 - 3$$

a špičatost rozdělení je pak posuzována vzhledem k hodnotě 0.

- **Kvantily** (angl. „quantiles, percentiles“; značí se x_p)

Kvantily diskrétní náhodné veličiny v praxi obvykle neurčujeme, neboť jejich stanovení většinou není jednoznačné. v případě spojité náhodné veličiny kvantily stanovujeme z podmínky

$$\forall p \in \langle 0; 1 \rangle : F(x_p) = p.$$

Je tedy možné říci, že vztah pro výpočet kvantilu (někdy hovoříme o **kvantilové funkci**) je inverzní funkcí k funkci distribuční.

Uvědomte si, že kvantil x_p udává takovou hodnotu, že pravděpodobnost, že náhodná veličina nabude hodnoty menší než x_p je $100p\%$. (Popisuje-li náhodná veličina X platy v ČR a $x_{0,3} = 12\,000$ Kč, pak víte, že 30% lidí v ČR má plat menší než 12 000,- Kč.)

- **Modus** (značí se $\hat{x}$)

U kategoriální proměnné byl modus roven nejčetnější kategorií proměnné. Obdobně jej můžeme chápat u náhodné veličiny. Modus maximalizuje pravděpodobnostní funkci, resp. hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny X .

$$\text{pro diskrétní NV:} \quad \forall i \in 1, 2, \dots, n : P(X = \hat{x}) \geq P(X = x_i)$$



Obsah

99. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

(Hodnota, které nabývá NV s největší pravděpodobností.)

pro spojitou NV: $\forall x \in \mathbb{R} : f(\hat{x}) \geq f(x)$

(Hodnota, v níž hustota pravděpodobnosti nabývá svého maxima.)

Příklad 3.3. Vraťme se k diskrétní náhodné veličině X (počet porouchaných strojů v dílně) z řešeného příkladu 3.1. Řešením příkladu 3.1 byl popis rozdělení této náhodné veličiny pomocí pravděpodobnostní i distribuční funkce. Nyní určete její

- a) střední hodnotu,
- b) rozptyl,
- c) směrodatnou odchylku,
- d) modus.

Řešení 3.3.

Příklad 3.4. Majitel autorizovaného servisu nabídl půjčovně automobilů své služby. Za každý automobil zapůjčený jeho prostřednictvím obdrží od půjčovny automobilů 500,- Kč. Zároveň se však zavázal, že každý den investuje do údržby zapůjčených automobilů 800,- Kč. Počet automobilů zapůjčených prostřednictvím autorizovaného servisu za 1 den je popsán pravděpodobnostní funkcí v Tab. 3.5.

- a) Pravděpodobnost, že majitel autoservisu zapůjčí v jednom dni 5 automobilů je špatně čitelná. Určete ji.



Obsah

100. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Tab. 3.2: Pravděpodobnostní funkce počtu zapůjčených automobilů za 1 den

x_i	0	1	2	3	4	5	6
$P(x_i)$	0,01	0,40	0,25	0,15	0,10	?	0,03

- b) Určete střední hodnotu, směrodatnou odchylku a modus počtu zapůjčených automobilů během jednoho dne.
- c) Určete pravděpodobnostní funkci, střední hodnotu, směrodatnou odchylku a modus zisku majitele servisu z automobilů zapůjčených během jednoho dne.

Řešení 3.4.

V následující animaci si můžete v krokovaném řešeném příkladu ověřit, zda jste zvládli základní práci s diskretní náhodnou veličinou. Následně si zkuste samostatně vyřešit příklad 3.5.

[Obsah](#)

101. strana ze 293

[Zavřít dokument](#)[Celá obrazovka/Okno](#)



Diskrétní náhodná veličina - řešený příklad

Instrukce pro spuštění vložených animací naleznete na
<http://mi21.vsb.cz/adobe-reader-multimedia>.

Obsah

102. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Příklad 3.5. V tomto příkladě budeme pracovat se spojitou náhodnou veličinou X , jejíž rozdělení (hustota pravděpodobnosti a distribuční funkce) bylo určeno v řešeném příkladu 3.2.

Pro náhodnou veličinu X určete

- a) střední hodnotu,
- b) rozptyl,
- c) směrodatnou odchylku,
- d) medián, $x_{0,5}$, tj. hodnotu, pro kterou platí: $P(X < x_{0,5}) = 0,5$
- e) modus.

Dále mějme náhodnou veličinu Y , která je dána jako funkce náhodné veličiny X .

$$Y = 5X + 6$$

Určete

- f) distribuční funkci $F_Y(y)$ náhodné veličiny Y ,
- g) hustotu pravděpodobnosti $f_Y(y)$ náhodné veličiny Y ,
- h) střední hodnotu $E(Y)$ náhodné veličiny Y ,
- i) rozptyl $D(Y)$ náhodné veličiny Y .

Řešení 3.5.



Obsah

103. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Shrnutí:

Náhodná veličina je veličina, jejíž hodnota je jednoznačně určena výsledkem náhodného pokusu (je-li tento výsledek dán reálným číslem). Jde o reálnou funkci definovanou na základním prostoru a popsanou distribuční funkcí.

Distribuční funkce je reálná funkce definována jako $F(x) = P(X < x)$. Jde tedy o funkci, která každému reálnému číslu přiřazuje pravděpodobnost, že náhodná veličina nabývá hodnot menších než toto reálné číslo.

Pravidlo, které každé hodnotě (popř. každému intervalu hodnot) přiřazuje pravděpodobnost, že náhodná veličina nabude této hodnoty (popř. hodnoty z tohoto intervalu), nazýváme **rozdělením pravděpodobnosti náhodné veličiny**.

Podle toho, jakých může náhodná veličina nabýt hodnot (resp. z jakého intervalu), rozlišujeme spojitou a diskrétní náhodnou veličinu, přesněji řečeno náhodnou veličinu se **spojitým a diskrétním rozdělením**.

Diskrétní náhodná veličina je náhodná veličina, která může nabývat pouze konečného (výsledek hodu kostkou) nebo spočetně nekonečného (počet zákazníků snažících se dovolat do call centra během dne) množství hodnot. Diskrétní náhodnou veličinu popisujeme prostřednictvím **pravděpodobnostní funkce**, popř. distribuční funkce.

Spojitá náhodná veličina je náhodnou veličinou, která má spojitou distribuční funkci. Pro popis spojité náhodné veličiny používáme distribuční funkci a **hustotu pravděpodobnosti**.



Obsah

104. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Pravděpodobnost výskytu náhodné veličiny na nějakém intervalu určujeme na základě následujících vztahů.

$$P(X < a) = F(a)$$

$$P(X \geq b) = 1 - F(b)$$

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$$

V případě, že $g(x)$ je nějaká prostá reálná funkce, definovaná na základním souboru náhodné veličiny X , můžeme snadno odvodit rozdělení **transformované náhodné veličiny** $Y = g(X)$.

V mnoha případech je výhodné shrnout celkovou informaci o náhodné veličině pomocí několika čísel, která charakterizují některé vlastnosti náhodné veličiny, případně umožňují srovnání různých náhodných veličin. Tato čísla se nazývají **číselné charakteristiky náhodné veličiny**. Mezi základní číselné charakteristiky řadíme **střední hodnotu, rozptyl, směrodatnou odchylku, kvantily, modus, šikmost a špičatost**.



Obsah

105. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Test

Jak pracovat s testy?

1. U následujících příkladů určete, zda jde o náhodný pokus, náhodný jev nebo náhodnou veličinu.

1. Doba přenosu testovacího datového souboru je delší než 30s.

(a) náhodný pokus (b) náhodná veličina (c) náhodný jev

2. Měření doby přenosu testovacího datového souboru.

(a) náhodný pokus (b) náhodná veličina (c) náhodný jev

3. Doba přenosu testovacího datového souboru.

(a) náhodný pokus (b) náhodná veličina (c) náhodný jev

2. (5b.) Zaškrtněte pravdivé z následujících výroků.

(a) Náhodnou veličinu chápeme jako výsledek náhodného pokusu.

(b) Diskrétní náhodná veličina může nabývat konečného nebo spočetného množství hodnot.

(c) Distribuční funkce náhodné veličiny X v bodě t udává pravděpodobnost, že náhodná veličina X nabývá hodnot menších než t .

(d) Má-li náhodná veličina spojitou distribuční funkci, je spojitá.

(e) Je-li X diskrétní náhodná veličina, pak $\sum_{(i)} P(X = x_i) = 1$.

(f) Oborem hodnot distribuční funkce jsou všechna reálná čísla.



Obsah

106. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



- (g) Medián je střední hodnota.
- (h) Nabývá-li funkce $f(x)$ hodnoty 1,3, nemůže jít o hustotu pravděpodobnosti.
- (i) Rozdělení spojitě náhodné veličiny můžeme popsat distribuční funkcí nebo hustotou pravděpodobnosti.
- (j) Střední hodnota součtu dvou náhodných veličin je rovna součtu jednotlivých středních hodnot.
- (k) Rozptyl součtu dvou náhodných veličin je roven součtu jednotlivých rozptylů.
- (l) Střední hodnota součinu dvou náhodných veličin je rovna součinu jednotlivých středních hodnot.
- (m) Rozptyl součinu dvou náhodných veličin je roven součinu jednotlivých rozptylů.

3. (1b.) Určete, která ze zadaných funkcí **nemůže** představovat pravděpodobnostní funkci.

(a)
$$P(X = k) = \begin{cases} \frac{1}{k} & k \in \{2; 3; 6\} \\ 0 & k \notin \{2; 3; 6\} \end{cases}$$

(b)

k	2	3	6
$P(X = k)$	0,2	0,4	0,4

(c)

Obsah

107. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



4. (1b.) Určete, zda by grafy znázorněných funkcí mohly představovat distribuční funkci.



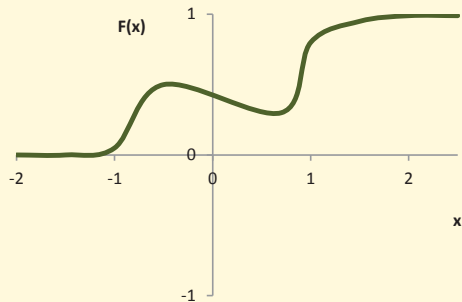
Obsah

108. strana ze 293

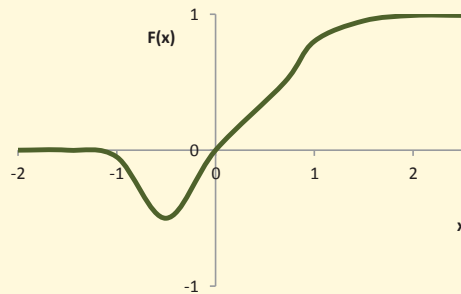


Zavřít dokument

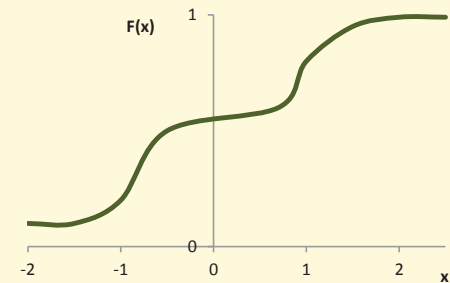
Celá obrazovka/Okno



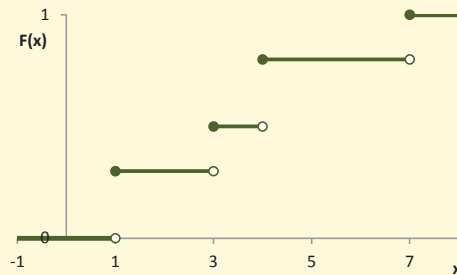
(a)



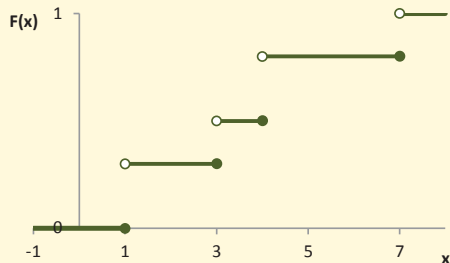
(b)



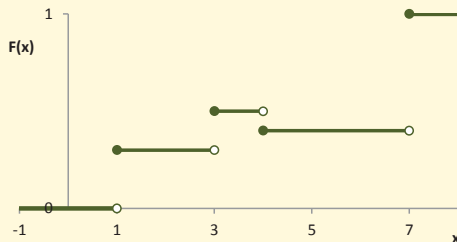
(c)



(d)

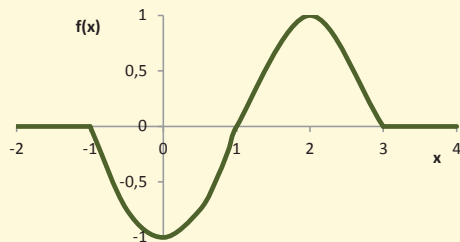


(e)

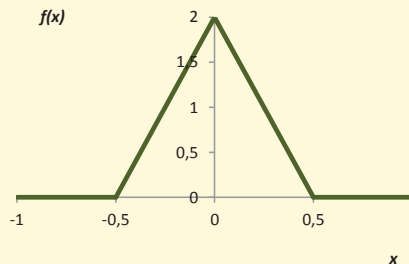


(f)

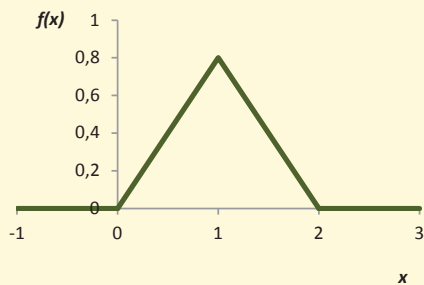
5. (1b.) Určete, zda by grafy znázorněných funkcí mohly představovat hustotu pravděpodobnosti.



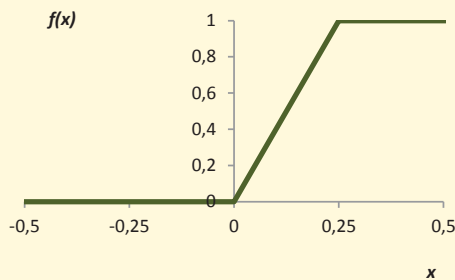
(a)



(b)



(c)



(d)

6. (1b.) Necht náhodná veličina X představuje životnost (dobu do poruchy) monitorů na počítačové učebně E320. Určete pravdivost následujících výroků.

- (a) X je spojitou náhodnou veličinou.
(b) Rozdělení X může být popsáno pravděpodobnostní funkcí.

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:



Obsah

111. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Příklady k procvičení

1. Náhodná veličina X je dána součtem počtu ok při dvou hodech klasickou hrací kostkou. Pro náhodnou veličinu X určete
- pravděpodobnostní funkci,
 - distribuční funkci,
 - střední hodnotu,
 - rozptyl.

Řešení příkladu

2. Ve městě byl po dobu 60 dnů evidován počet dopravních nehod v průběhu každého dne a podle počtu nehod v jednom dni vytvořena následující tabulka:

Počet nehod/ den	0	1	2	3	4	5	6
Počet dnů s uvedeným počtem nehod	4	28	10	7	6	4	1

Pro náhodnou veličinu počet nehod v jednom dni určete

- pravděpodobnostní funkci,
- distribuční funkci,
- střední hodnotu,
- směrodatnou odchylku,
- modus.

Řešení příkladu



Obsah

112. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

3. Známe distribuční funkci náhodné veličiny X :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 100 \\ 0,15 & 100 < x \leq 150 \\ 0,45 & 150 < x \leq 300 \\ 0,80 & 300 < x \leq 500 \\ 1 & x > 500 \end{cases}$$

Určete pravděpodobnostní funkci $P(x)$.

Řešení příkladu

4. Rozdělení náhodné veličiny X je dáno hustotou

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & x \in (-1; 0) \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

Určete

- a) $P(-2 \leq X \leq -0,5)$,
- b) $P(-2 \leq X \leq -1)$,
- c) $E(X)$, $D(X)$, σ_x
- d) modus
- e) medián $x_{0,5}$.

Řešení příkladu



Obsah

113. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

5. Náhodná veličina X má hustotu

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ ax^3 & 0 < x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

Určete

- a) parametr a ,
- b) hustotu pravděpodobnosti,
- c) střední hodnotu a směrodatnou odchylku,
- d) pravděpodobnost, že X se od své střední hodnoty neliší o více než 0,5,
- e) modus.

Řešení příkladu

6. X je spojitá veličina s hustotou pravděpodobnosti $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$. Určete $P(1 \leq |X| \leq 2)$.

Řešení příkladu

7. Nezávislé náhodné veličiny X a Y mají následující střední hodnotu a rozptyl: $E(X) = 1$, $E(Y) = 3$, $D(X) = 4$, $D(Y) = 9$. Definujme náhodné veličiny Z a Q jako $Z = 4X - 2Y + 12$ a $Q = -2X + Y - 7$. Určete střední hodnotu a rozptyl náhodných veličin Z a Q .

Řešení příkladu



Obsah

114. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno



Kapitola 4

Náhodný vektor

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete umět

- popsat náhodný vektor a jeho rozdělení,
- vysvětlit pojmy spojené se sdruženým, marginálním a podmíněným rozdělením pravděpodobnosti,
- určit marginální a podmíněné charakteristiky náhodného vektoru, stejně jako kovarianci a korelaci jeho složek.

Průvodce studiem

V předcházející kapitole jsme se seznámili s popisem náhodné veličiny, kterou chápeme jako vý-

Obsah

115. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

sledek náhodného pokusu, který je popsán reálným číslem. Výsledek náhodného pokusu je však mnohdy hodnocen nikoliv jedním reálným číslem, ale uspořádanou n -ticí čísel. Bude-li například meteorolog chtít popsat počasí na určitém místě, nebude sledovat pouze teplotu, bude sledovat celý soubor náhodných veličin – nadmořskou výšku, tlak, teplotu, rosný bod... Soubor takovýchto náhodných veličin nazýváme náhodným vektorem. Jednotlivé náhodné veličiny v rámci náhodného vektoru mohou být naprosto nezávislé, mohou však také mít silnou vazbu. V této kapitole byste se měli naučit náhodný vektor popisovat pomocí vhodných funkcí a číselných charakteristik.

Náhodným vektorem rozumíme vektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, jehož složky $X_1, X_2, \dots, X_n$ jsou náhodné veličiny definované na stejném pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$.

Pro ilustraci se omezíme na studium vztahu mezi dvěma náhodnými veličinami (tj. budeme se zabývat dvourozměrným náhodným vektorem) s tím, že učiněné závěry lze jednoduše zobecnit na n -rozměrný náhodný vektor.

4.1. Sdružené rozdělení pravděpodobnosti

Rozdělení náhodného vektoru lze, obdobně jako rozdělení náhodné veličiny, popsat pomocí distribuční funkce.

Sdružená (simultánní) distribuční funkce dvourozměrného vektoru $\mathbf{X} = (X, Y)$ je definována předpisem

$$F(x, y) = P((X < x) \wedge (Y < y)).$$



Obsah

116. strana ze 293

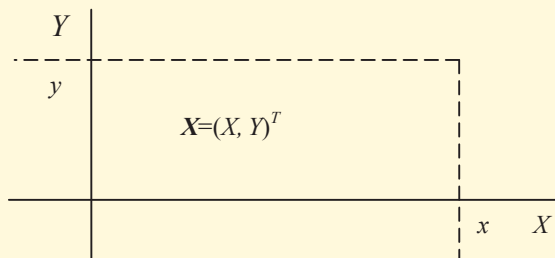


Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Pro $P((X < x) \wedge (Y < y))$ budeme nadále používat zkrácený zápis $P(X < x, Y < y)$

Hodnota sdružené distribuční funkce $F(x, y)$ je rovna pravděpodobnosti, s jakou se hodnota náhodného vektoru $\mathbf{X} = (X, Y)^T$ vyskytne ve vyšrafované části roviny z Obr. 4.1.



Obr. 4.1: Ilustrace významu sdružené distribuční funkce $F(x, y)$

Sdružená distribuční funkce má podobné vlastnosti jako distribuční funkce jedné proměnné.

Vlastnosti sdružené distribuční funkce:

1. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq F(x, y) \leq 1$,
2. $\forall y \in \mathbb{R} : \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0, \forall x \in \mathbb{R} : \lim_{y \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0$,
3. je-li $x \rightarrow \infty$ a současně $y \rightarrow \infty$, pak $F(x, y) = 1$,
4. $F(x, y)$ je neklesající v každé proměnné,



Obsah

117. strana ze 293



Zavřít dokument

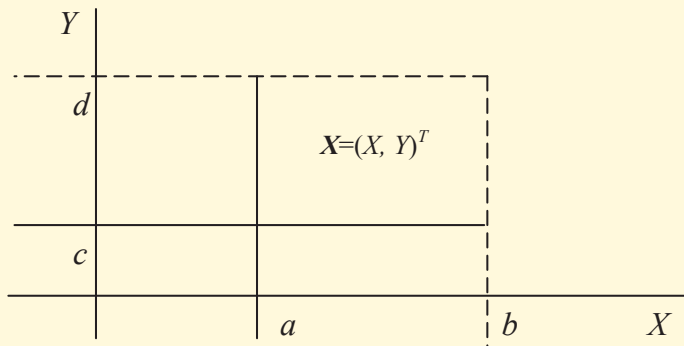
Celá obrazovka / Okno

5. $F(x, y)$ je zleva spojitá v každé proměnné.

Pravděpodobnost, že náhodný vektor je z obdélníkové oblasti, lze vyjádřit pomocí distribuční funkce.

$$P(a \leq X < b, c \leq Y < d) = F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c)$$

Hodnota pravděpodobnosti $P(a \leq X < b, c \leq Y < d)$ je rovna pravděpodobnosti s jakou se hodnota náhodného vektoru $\mathbf{X} = (X, Y)$ vyskytne ve vyšrafované části roviny z Obr. 4. 2.



Obr. 4.2: Ilustrace významu $P(a \leq X < b, c \leq Y < d)$



Obsah

118. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

4.1.1. Diskrétní náhodný vektor a jeho sdružené rozdělení

Řekneme, že **náhodný vektor má diskrétní rozdělení** (je diskrétní), jestliže existuje nejméně spočetně mnoho hodnot náhodného vektoru tak, že

$$\sum_i \sum_j p(x_i, y_j) = 1.$$

Funkce $p(x_i, y_j) = P((X = x_i) \wedge (Y = y_j))$ se nazývá **sdružená (simultánní) pravděpodobnostní funkce**, popř. (dvojměrná) pravděpodobnostní funkce náhodného vektoru X .

Vlastnosti sdružené pravděpodobnostní funkce:

1. Existuje pouze konečná nebo spočetná množina hodnot (x_i, y_j) , pro které je $p(x_i, y_j) > 0$,
2. $\forall x_i, y_j : 0 \leq p(x_i, y_j) \leq 1$,
3. $\sum_i \sum_j p(x_i, y_j) = 1$.

Pro vyjádření sdružené distribuční funkce pomocí sdružené pravděpodobnostní funkce lze využít vztah

$$F(x, y) = \sum_{x_i < x} \sum_{y_j < y} p(x_i, y_j).$$

V případě diskrétního dvousložkového náhodného vektoru s konečným počtem hodnot se sdružená pravděpodobnostní funkce často reprezentuje prostřednictvím **tabulky sdružených pravděpodobností** (Tab. 4.1).

Příklad 4.1. Představme si, že budeme třikrát opakovat hod poctivou mincí. Za úspěch budeme považovat padnutí rubu mince. Nechť náhodné veličiny



Obsah

119. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



Tab. 4.1: Tabulka sdružených pravděpodobností

$X \backslash Y$	y_1	y_2	...	y_{n2}
x_1	$p(x_1, y_1)$	$p(x_1, y_2)$	...	$p(x_1, y_{n2})$
x_2	$p(x_2, y_1)$	$p(x_2, y_2)$	...	$p(x_2, y_{n2})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$
x_{n1}	$p(x_{n1}, y_1)$	$p(x_{n1}, y_2)$	...	$p(x_{n1}, y_{n2})$

Y ... počet pokusů do prvního úspěchu,

Z ... počet po sobě jdoucích úspěchů

tvoří složky náhodného vektoru $\mathbf{X} = (Y, Z)$.

Sestavte

- sdrúženou pravděpodobnostní funkci náhodného vektoru $\mathbf{X}$,
- sdrúženou distribuční funkci náhodného vektoru $\mathbf{X}$.

Řešení 4.1.

4.1.2. Spojitý náhodný vektor a jeho sdružené rozdělení

O **náhodném vektoru se spojitým rozdělením** (spojitém náhodném vektoru) mluvíme v případě, že náhodný vektor má spojitou distribuční funkci $F(x, y)$, tj. pokud existuje nezáporná funkce $f(x, y)$ taková, že

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(s, t) \, ds \, dt.$$

Obsah

120. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Funkci $f(x, y)$ nazýváme **sdrúženou (simultánní) hustotou** náhodného vektoru $\mathbf{X}$.

Vlastnosti sdrúžené hustoty

1. $f(x, y) \geq 0$,
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \, dx dy = 1$,
3. existuje-li $\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$, takové že $\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y \partial x}$, pak $f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$,
4. $P(a \leq X < b, c \leq Y < d) = \int_c^d \int_b^a f(x, y) \, dx dy$.

Příklad 4.2. Najděte konstantu c tak, aby funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} c(x + y), & (x, y) \in \langle 0; 1 \rangle \times \langle 0; 1 \rangle \\ 0, & (x, y) \notin \langle 0; 1 \rangle \times \langle 0; 1 \rangle \end{cases}$$

mohla být hustotou pravděpodobnosti nějakého náhodného vektoru (X, Y) .

Řešení 4.2.

4.2. Marginální rozdělení pravděpodobnosti

Kromě rozdělení náhodného vektoru nás často zajímá i rozdělení jeho složek, tj. náhodných veličin X a Y . Je-li (X, Y) náhodný vektor, pak rozdělení náhodných veličin X a Y se nazývá **marginální rozdělení**.

Je-li $F(x, y)$ sdrúžená distribuční funkce náhodného vektoru (X, Y) , pak jsou **marginální distribuční funkce** $F_x(x)$, resp. $F_y(y)$ náhodné veličiny X , resp. Y zřejmě určeny vztahy:

$$F_x(x) = P(X < x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F(x, y), \quad x \in \mathbb{R},$$



Obsah

121. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



$$F_y(y) = P(Y < y) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x, y), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Poznámka: Všimněte si, že pro rozlišení distribučních funkcí náhodných veličin X a Y jsme použili dolní index. V případě potřeby bude tento způsob rozlišení používán i u dalších funkčních a číselných charakteristik náhodných veličin X a Y .

4.2.1. Marginální rozdělení diskrétního náhodného vektoru

Je-li $p(x_i, y_j)$ sdružená pravděpodobnostní funkce diskrétního náhodného vektoru (X, Y) , pak jsou **marginální pravděpodobnostní funkce** $P_x(x)$, resp. $P_y(y)$ náhodné veličiny X , resp. Y určeny vztahy:

$$P_x(x_i) = \sum_{(y_j)} p(x_i, y_j), \quad i \geq 1,$$

$$P_y(y_j) = \sum_{(x_i)} p(x_i, y_j), \quad j \geq 1.$$

Poznámka: Všimněte si, že zadáme-li sdruženou pravděpodobnostní funkci tabulkou, pak hodnoty jedné marginální pravděpodobnostní funkce získáme sečtením čísel v jednotlivých řádcích tabulky. Hodnoty této marginální pravděpodobnostní funkce zapisujeme do sloupce na okraji tabulky (okraj = anglicky „margin“). Obdobně hodnoty druhé marginální pravděpodobnostní funkce dostaneme sečtením čísel v jednotlivých sloupcích tabulky. Hodnoty druhé marginální pravděpodobnostní funkce zapisujeme do řádku na okraji tabulky. (Tab. 4.5.) (Modře zvýrazněné pole je kontrolní. Součet marginálních pravděpodobností, stejně jako součet sdružených pravděpodobností, musí být roven jedné.)

Obsah

122. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



Tab. 4.2: Rozšířená tabulka sdružených pravděpodobností

$X \backslash Y$	y_1	y_2	...	y_{n2}	$P_X(x_i)$
x_1	$p(x_1, y_1)$	$p(x_1, y_2)$	...	$p(x_1, y_{n2})$	$P_X(x_1)$
x_2	$p(x_2, y_1)$	$p(x_2, y_2)$	...	$p(x_2, y_{n2})$	$P_X(x_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$
x_{n1}	$p(x_{n1}, y_1)$	$p(x_{n1}, y_2)$	...	$p(x_{n1}, y_{n2})$	$P_X(x_{n1})$
$P_Y(y_i)$	$P_Y(y_1)$	$P_Y(y_2)$	...	$P_Y(y_{n2})$	1

Příklad 4.3. Navážeme na řešení příklad 4.1. Náhodný vektor X je popsán sdruženou pravděpodobnostní funkcí uvedenou v tabulce.

Y/Z	0	1	2	3
0	0	0,250	0,125	0,125
1	0	0,125	0,125	0
2	0	0,125	0	0
3	0,125	0	0	0

Určete

- marginální pravděpodobnosti $P_y(y_i), P_z(z_j)$.
- marginální distribuční funkce $F_y(y), F_z(y)$.

Řešení 4.3.

Obsah

123. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

4.2.2. Marginální rozdělení spojitého náhodného vektoru

Jestliže má náhodný vektor (X, Y) spojitě rozdělení určené sdruženou hustotou $f(x, y)$, pak pro jeho **marginální distribuční funkce** platí:

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\infty} f(s, y) \, ds dy, x \in \mathbb{R},$$

$$F_y(y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) \, dt dx, y \in \mathbb{R}.$$

Marginálními hustotami spojitého náhodného vektoru rozumíme hustoty náhodných veličin X a Y , které lze vypočítat jako

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \, dy, x \in \mathbb{R}$$

Příklad 4.4. Tato úloha navazuje na příklad 4.2. Nechť je spojitý náhodný vektor $\mathbf{X} = (X, Y)$ popsán sdruženou hustotou $f(x, y)$.

$$f(x, y) = \begin{cases} (x + y), & (x, y) \in \langle 0; 1 \rangle \times \langle 0; 1 \rangle \\ 0, & (x, y) \notin \langle 0; 1 \rangle \times \langle 0; 1 \rangle \end{cases}$$

Určete

- marginální hustoty pravděpodobnosti $f_x(x)$ a $f_y(y)$,
- marginální distribuční funkce $F_x(x)$ a $F_y(y)$.

Řešení 4.4.



Obsah

124. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



4.3. Podmíněné rozdělení pravděpodobnosti

Rozdělení náhodné veličiny X za předpokladu, že náhodná veličina Y nabyla hodnoty y popisuje, **podmíněné rozdělení** X vzhledem k Y . Podmíněné rozdělení je chápáno jako podíl rozdělení sdruženého a příslušného marginálního (viz definice podmíněné pravděpodobnosti).

4.3.1. Podmíněné rozdělení diskrétního náhodného vektoru

Je-li $\mathbf{X} = (X, Y)$ **diskrétní náhodný vektor**, pak **podmíněné pravděpodobnostní funkce** jsou definovány vztahy:

$$P(x|y) = \frac{p(x, y)}{P_Y(y)}, \quad P_Y(y) \neq 0,$$

$$P(y|x) = \frac{p(x, y)}{P_x(x)}, \quad P_x(x) \neq 0.$$

a **podmíněné distribuční funkce** jsou definovány jako

$$F(x|y) = \frac{\sum_{x < x_i} p(x_i, y)}{P_Y(y)}, \quad i \geq 1, P_Y(y) \neq 0,$$

$$F(y|x) = \frac{\sum_{y < y_j} p(x, y_j)}{P_X(x)}, \quad j \geq 1, P_X(x) \neq 0.$$

Obsah

125. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

4.3.2. Podmíněné rozdělení spojitého náhodného vektoru

Je-li (X, Y) spojitý náhodný vektor, pak **podmíněné hustoty** jsou definovány vztahy

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}, f_Y(y) \neq 0,$$

$$f(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}, f_X(x) \neq 0.$$

a **podmíněné distribuční funkce** jsou definovány jako:

$$F(x|y) = \frac{\int_{-\infty}^x f(s, y) ds}{f_Y(y)}, f_Y(y) \neq 0,$$

$$F(y|x) = \frac{\int_{-\infty}^y f(x, t) dt}{f_X(x)}, f_X(x) \neq 0.$$

4.4. Nezávislost náhodných veličin

Nechť $\mathbf{X} = (X, Y)$ je náhodný vektor. Řekneme, že náhodné veličiny X, Y jsou nezávislé právě, když $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ platí:

$$F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y),$$

kde $F(x, y)$ je sdružená distribuční funkce náhodného vektoru (X, Y) a $F_X(x)$, resp. $F_Y(y)$ jsou marginální distribuční funkce náhodné veličiny X , resp. Y .



Obsah

126. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Lze ukázat, že je-li $\mathbf{X} = (X, Y)$ **diskrétní náhodný vektor**, pak náhodné veličiny X, Y jsou nezávislé právě, když $\forall i \geq 1, \forall j \geq 1$ platí:

$$p(x_i, y_j) = P_X(x_i) \cdot P_Y(y_j).$$

Analogicky pro spojitý náhodný vektor (X, Y) lze ukázat, že náhodné veličiny X, Y jsou nezávislé právě, když $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ platí:

$$f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

Příklad 4.5. Nechť $\mathbf{X}$ je náhodný vektor, s nímž jsme pracovali v příkladech 4.1 a 4.3. Připomeňme si, že náhodným pokusem je trojí opakování hodu poctivou mincí. Za úspěch považujeme padnutí rubu mince. Náhodné veličiny Y a Z jsou definovány jako

Y ... počet pokusů do prvního úspěchu,

Z ... počet po sobě jdoucích úspěchů.

Rozdělení tohoto náhodného vektoru (sdružená a marginální pravděpodobnostní funkce) jsou uvedeny v následující tabulce. Určete

Y/Z	0	1	2	3	$P_Y(y_i)$
0	0	0,250	0,125	0,125	0,500
1	0	0,125	0,125	0	0,250
2	0	0,125	0	0	0,125
3	0,125	0	0	0	0,125
$P_Z(z_j)$	0,125	0,500	0,250	0,125	1

a) $P(y|z)$,

b) zda jsou náhodné veličiny Y a Z nezávislé.



Obsah

127. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Řešení 4.5.

4.5. Číselné charakteristiky náhodného vektoru

Obdobně jako v případě náhodné veličiny, shrnuje číselná charakteristika náhodného vektoru celkovou informaci o náhodném vektoru do jednoho čísla, vektoru nebo matice.

4.5.1. Marginální číselné charakteristiky

Marginální charakteristiky shrnují informaci o jednotlivých složkách náhodného vektoru (X, Y) , tj. o náhodných veličinách X a Y . Připomeňme si, že popisují polohu (střední hodnota), variabilitu (rozptyl, směrodatná odchylka), šikmost a špičatost rozdělení. Definiční vztahy jednotlivých charakteristik jsou uvedeny v kapitole 3.7.

Marginální číselné charakteristiky náhodného vektoru často zapisujeme ve formě vektoru. Je-li $\mathbf{X} = (X, Y)$ náhodný vektor, pak

střední hodnota náhodného vektoru $\mathbf{X}$ je dána jako $E(\mathbf{X}) = (E(X), E(Y))$,

rozptyl náhodného vektoru $\mathbf{X}$ je dán jako $D(\mathbf{X}) = (D(X), D(Y))$, apod.

V dalších podkapitolách si ukážeme, jak lze popsat vztahy mezi jednotlivými složkami náhodného vektoru.



Obsah

128. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

4.5.2. Smíšené momenty

- **Sdružený obecný moment řádu** $(r+s)$ náhodného vektoru (X, Y) je definován následovně.

Pro diskrétní náhodný vektor: $E(X^r \cdot Y^s) = \sum_i \sum_j x_i^r \cdot y_j^s \cdot p(x_i, y_j),$

pro spojitý náhodný vektor: $E(X^r \cdot Y^s) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^r \cdot y^s \cdot f(x, y) \, dx dy.$

- **Sdružený centrální moment řádu** $(r+s)$ náhodného vektoru (X, Y) je definován následovně.

Pro diskrétní náhodný vektor:

$$E(X - E(X))^r \cdot (Y - E(Y))^s = \sum_i \sum_j (x_i - E(X))^r \cdot (y_j - E(Y))^s \cdot p(x_i, y_j),$$

pro spojitý náhodný vektor:

$$E(X - E(X))^r \cdot (Y - E(Y))^s = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (X - E(X))^r \cdot (Y - E(Y))^s \cdot f(x, y) \, dx dy,$$

4.5.3. Kovariance a koeficient korelace

Nejjednodušším ukazatelem vztahu mezi dvěma náhodnými veličinami je kovariance.



Obsah

129. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

- **Kovariance** $cov(X, Y)$

je definována jako smíšený centrální moment řádu $(1 + 1)$

$$cov(X, Y) = E((X - E(X)) \cdot (Y - E(Y)))$$

Kladná hodnota kovariance znamená, že se zvětšením hodnoty X se pravděpodobně zvýší i hodnota Y . Oproti tomu **záporná hodnota kovariance** informuje o tom, že se zvětšením hodnoty X se pravděpodobně sníží hodnota Y .

Vlastnosti kovariance

1. $cov(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$ (výpočetní vztah umožňující rychlejší výpočet než vztah definiční),
2. $cov(X, X) = D(X)$,
3. $cov(a_1X + b_1, a_2Y + b_2) = a_1a_2cov(X, Y)$,
4. jsou-li X, Y nezávislé náhodné veličiny, pak $cov(X, Y) = 0$

V praxi se často setkáváme s reprezentací centrálních momentů 2. řádu ve formě tzv. kovarianční matice.

- **Kovarianční matice**

$$var(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} cov(X, X) & cov(X, Y) \\ cov(Y, X) & cov(Y, Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D(X) & cov(X, Y) \\ cov(X, Y) & D(Y) \end{pmatrix}$$

Vlastnosti kovarianční matice



Obsah

130. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

1. Kovarianční matice je symetrická a pozitivně semidefinitní,
2. $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2\text{cov}(X, Y)$

• **Korelační koeficient** (korelace) $\rho(X, Y)$

Korelační koeficient je definován jako

$$\rho(X, Y) = \begin{cases} \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X) \cdot D(Y)}}, & D(X), D(Y) \neq 0, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

(Jednoduchý) **korelační koeficient je mírou lineární závislosti** dvou složek náhodného vektoru.

Vlastnosti korelačního koeficientu

1. $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$,
2. $\rho(X, Y) = \rho(Y, X)$,
3. $\rho(X, X) = 1$,
4. jsou-li X, Y nezávislé náhodné veličiny, pak $\rho(X, Y) = 0$,
5. je-li $\rho(X, Y) = 0$, říkáme, že X, Y jsou nekorelované náhodné veličiny
(**POZOR!** Jsou-li X, Y nekorelované náhodné veličiny, nemusí to znamenat, že jsou nezávislé!!! Jsou-li X, Y nekorelované náhodné veličiny, víme pouze to, že mezi X, Y neexistuje **lineární** závislost. (Obr. 4.3c)),
6. je-li $\rho(X, Y) = 1$, pak existuje $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$ takové, že $Y = aX + b$ s pravděpodobností 1 (Y je lineární funkcí X , s rostoucím X roste Y),



Obsah

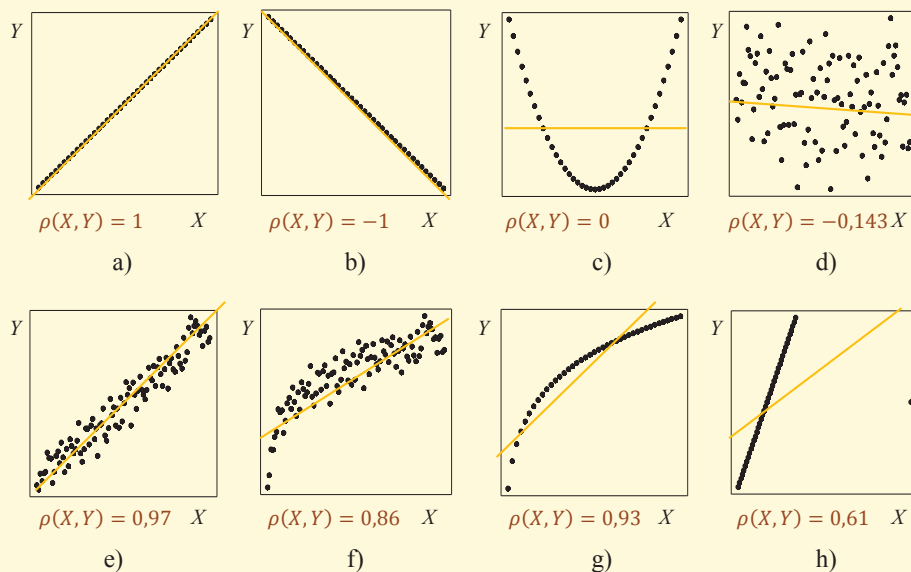
131. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

7. je-li $\rho(X, Y) = -1$, pak existuje $a, b \in \mathbb{R}$, $a < 0$ takové, že $Y = aX + b$ s pravděpodobností 1 (Y je lineární funkcí X , s rostoucím X klesá Y),
8. je-li $\rho(X, Y) > 0$, říkáme, že X, Y jsou **pozitivně korelované** (s rostoucím X roste Y),
9. je-li $\rho(X, Y) < 0$, říkáme, že X, Y jsou **negativně korelované** (s rostoucím X klesá Y).



Obr. 4.3: Grafická ilustrace souvislosti mezi $\rho(X, Y)$ a závislostí náhodných veličin X, Y

Obsah

132. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Jak přesně dokážete odhadnout hodnotu korelačního koeficientu na základě bodového grafu? Vyzkoušejte si to v java appletu [Korelační koeficient](#) (358 KB)

Korelace mezi složkami náhodného vektoru mnohdy zapisujeme do korelační matice.

- **Korelační matice**

$$\text{cor}(X) = \begin{pmatrix} \rho(X, X) & \rho(X, Y) \\ \rho(Y, X) & \rho(Y, Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \rho(X, Y) \\ \rho(X, Y) & 1 \end{pmatrix}$$

Zápis korelací, stejně jako zápis kovariancí, formou matice nabývá na významu v případě více než dvourozměrného náhodného vektoru, kdy přispívá k přehlednosti zápisu.

Průvodce studiem

Stále nemáte představu o významu korelačního koeficientu? Pokusíme se tedy o jeho méně formální přiblížení.

Výklad korelace

Několik autorů publikovalo doporučení pro výklad míry korelace. [Cohen](#), například, v roce 1988 navrhl, jak vykládat korelaci pro účely psychologického výzkumu (Tab. 4.8.). Výklad míry korelace však není jednoznačný, silně závisí na kontextu. Korelace 0,9 může být hodnocena jako velmi slabá v případě, že byla sledována závislost mezi proudem a napětím na odporu (Ohmův zákon – $U = RI$), zatímco v případě sledování souvislosti pocitu deprese a úspěšnosti v zaměstnání (psychologický výzkum) může stejná hodnota (0,9) ukazovat na silnou korelaci.



Obsah

133. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Tab. 4.3: Výklad míry korelace - Cohen (1988)

Typ korelace	$ \rho $
Velmi slabá	0,00 – 0,09
Slabá	0,09 – 0,29
Střední	0,30 – 0,49
Silná	0,50 – 1,00

A ještě jedna poznámka. Uvědomte si, že korelace neznamená nutně kauzalitu (příčinnou souvislost). Výzkumy prokázaly korelaci mezi věkem a výškou dětí. V tomto případě můžeme jednoznačně říci, že mezi věkem a výškou dětí existuje příčinná souvislost – čím starší dítě, tím větší dítě. Zároveň však bylo v jiné studii ukázáno, že existuje silná korelace mezi výskytem čápů a počtem narozených dětí. Znamená to snad, že děti nosí čáp? Samozřejmě, že ne! Jedno z možných vysvětlení je to, že v místech většího výskytu čápů je zdravější životní prostředí, které ovlivňuje také porodnost v dané oblasti. Obecně hovoříme v obdobných případech o **zdánlivé (falešné) korelaci**. Ta vzniká v případě, kdy jsou náhodné veličiny X a Y , které spolu nijak nesouvisí, ovlivňovány náhodnou veličinou W . (Kde všude lze najít zdánlivou korelaci naznačuje článek Frederika Velinského [Potrhlá astrologie](#).)

Při výkladu míry korelace proto mějte na paměti hlavně to, že:

- jsou-li náhodné veličiny nekorelované, neznamená to, že jsou nezávislé (Obr. 4.3c),
- míru korelace musíme hodnotit v kontextu s modelovanou realitou,



Obsah

134. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

- *korelace neznamená nutně kauzalitu (příčinnou souvislost).*

4.5.4. Podmíněné číselné charakteristiky

Vlastnosti podmíněných rozdělení pravděpodobnosti popisují podmíněné charakteristiky. Jde o charakteristiky náhodné veličiny X za podmínky, že náhodná veličina Y nabyla určité hodnoty, resp. o charakteristiky náhodné veličiny Y za podmínky, že náhodná veličina X nabyla určité hodnoty.

Jsou-li složkami dvourozměrného náhodného vektoru například náhodné veličiny X (nadmořská výška) a Y (teplota), může nás zajímat střední teplota a rozptyl teploty v nadmořské výšce 600 m.n.m., tj. $E(Y|X = 600)$ a $D(Y|X = 600)$, apod.

- **Podmíněné střední hodnoty**

Je-li $\mathbf{X} = (X, Y)$ **diskrétní náhodný vektor**, pak:

$$E(X|Y = y) = E(X|Y) = \sum_i x_i P(X_i|y), i \geq 1,$$

$$E(Y|X = x) = E(Y|x) = \sum_j y_j P(Y_j|x), j \geq 1.$$

Je-li $\mathbf{X} = (X, Y)$ **spojitý náhodný vektor**, pak:

$$E(X|Y = y) = E(X|Y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x|y) dx,$$

$$E(Y|X = x) = E(Y|x) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f(y|x) dy.$$

- **Podmíněné rozptyly**



Obsah

135. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Je-li $\mathbf{X} = (X, Y)$ **diskrétní náhodný vektor**, pak:

$$D(X|Y = y) = D(X|y) = \sum_{(i)} (x_i - E(X|y))^2 \cdot P(x_i|y), i \geq 1,$$

$$D(Y|X = x) = D(Y|x) = \sum_{(i)} (y_i - E(Y|x))^2 \cdot P(y_j|x), j \geq 1.$$

Je-li $\mathbf{X} = (X, Y)$ **spojitý náhodný vektor**, pak:

$$D(X|Y = y) = D(X|y) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X|y))^2 \cdot f(x|y) dx,$$

$$D(Y|X = x) = D(Y|x) = \int_{-\infty}^{\infty} (y - E(Y|x))^2 \cdot f(y|x) dy.$$

Příklad 4.6. Vrátime se naposledy k řešenému příkladu 4.1. Náhodný vektor $\mathbf{X} = (Y, Z)$ je popsán sdruženou pravděpodobnostní funkcí, známe jeho marginální pravděpodobnosti (Tab. 4.6) a v řešeném příkladu 4.5 jsme určili podmíněnou pravděpodobnostní funkci $P(y|z)$ (Tab. 4.7). Nyní určete:

- a) $E(Y), E(Z), D(Y), D(Z),$
- b) $E(\mathbf{X}), D(\mathbf{X}),$
- c) $cov(Y, Z), var(\mathbf{X}), \rho(Y, Z), cor(\mathbf{X}),$
- d) $E(Y|Z = 2).$

Řešení 4.6.



Obsah

136. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Příklad 4.7. Poslední příklad v této kapitole bude věnován výpočtu číselných charakteristik popisujících spojitý náhodný vektor definovaný v příkladu 4.2.

Nechť $\mathbf{X} = (X, Y)$ je spojitý náhodný vektor popsáný hustotou

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, & (x, y) \in \langle 0; 1 \rangle \times \langle 0; 1 \rangle \\ 0, & (x, y) \notin \langle 0; 1 \rangle \times \langle 0; 1 \rangle \end{cases}$$

Určete:

- a) $E(X)$, $E(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$,
- b) $cov(X, Y)$, $var(\mathbf{X})$, $\rho(X, Y)$, $cor(\mathbf{X})$,
- c) $E(X|Y) = 0,3$.

Řešení 4.7.

V následující animaci si můžete v krokovaném řešeném příkladu ověřit, zda jst zvládli základní práci s dvourozměrným diskrétním náhodným vektorem.



Obsah

137. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



Dvourozměrný diskretní náhodný vektor - řešený příklad

*Instrukce pro spuštění vložených animací naleznete na
<http://mi21.vsb.cz/adobe-reader-multimedia>.*

Obsah

138. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Shrnutí:

Náhodným vektorem rozumíme vektor složený z náhodných veličin $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, který je charakterizován **sduženým rozdělením pravděpodobnosti**.

Ze sduženého rozdělení pravděpodobnosti můžeme snadno najít **marginální rozdělení pravděpodobnosti** charakterizující jednotlivé složky náhodného vektoru.

Podmíněné rozdělení pravděpodobnosti pak chápeme jako podíl sduženého a marginálního rozdělení pravděpodobnosti (má-li tento podíl smysl), v souladu s definicí podmíněné pravděpodobnosti.

Nezávislost složek náhodného vektoru se projevuje tím, že jeho sdužená distribuční funkce (sdužená pravděpodobnostní funkce, resp. sdužená hustota pravděpodobnosti) se dá matematicky vyjádřit jako součin marginálních distribučních funkcí (marginálních pravděpodobností, resp. marginálních hustot pravděpodobnosti) jednotlivých náhodných veličin.

Mezi nejvýznamnější smíšené momenty náhodného vektoru patří **kovariance**.

Mírou lineární závislosti dvojice složek náhodného vektoru je **korelační koeficient**.

[Obsah](#)[139. strana ze 293](#)[Zavřít dokument](#)[Celá obrazovka / Okno](#)

Test

Jak pracovat s testy?

1. (7b.) Určete, zda jsou pravdivé následující výroky.

- (a) Náhodný vektor je definován jako dvourozměrný vektor, jehož složky jsou náhodné veličiny.
- (b) Náhodný vektor lze popsat sdruženým rozdělením pravděpodobnosti.
- (c) Marginální rozdělení popisují rozdělení jednotlivých složek náhodného vektoru.
- (d) Je-li $\mathbf{X} = (X, Y)$, pak $E(\mathbf{X}) = E(XY)$.
- (e) $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$
- (f) Marginální charakteristiky náhodného vektoru popisují vztah mezi náhodnými veličinami, které tvoří jeho složky.
- (g) Kovariance je mírou závislosti náhodných veličin.
- (h) Je-li $\text{cov}(X, Y) = 0$, pak jsou náhodné veličiny X a Y nezávislé.
- (i) Je-li $\text{cov}(X, Y) = 0$, pak jsou náhodné veličiny X a Y nekorelované.
- (j) Je-li $\rho(X, Y) = 0$, pak jsou náhodné veličiny X a Y nekorelované.
- (k) Jsou-li náhodné veličiny X a Y nekorelované, jsou lineárně nezávislé.
- (l) $\text{cov}(X, X) = 1$
- (m) $\rho(X, X) = 1$
- (n) $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$



Obsah

140. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

2. Je-li kovariance $cov(X, Y)$ záporná, pak korelační koeficient $\rho(X, Y)$

- (a) je rovněž záporný.
- (b) je kladný.
- (c) je záporný nebo nulový.
- (d) nelze určit.

Náhodný vektor (X, Y) , k němuž se vztahují otázky 3 - 10 má pravděpodobnostní funkci zadanou tabulkou Tab. 4.4.

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	0,10	0,20	0,00
1	0,00	0,10	?
2	0,00	0,20	0,10

Tab. 4.4: Sdružená pravděpodobnostní funkce náhodného vektoru (X, Y)

3. Čemu je rovna hodnota $p(1; 1)$ sdružené distribuční funkce?

- (a) 0,00
- (b) 0,10
- (c) 0,20
- (d) 0,30



Obsah

141. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

4. Čemu je rovna hodnota $p(1; 2)$ sdružené pravděpodobnostní funkce?

- (a) 0,00
- (b) 0,10
- (c) 0,20
- (d) 0,30

5. Čemu je rovna hodnota $P(X < 2; Y < 1)$?

- (a) 0,10
- (b) 0,20
- (c) 0,30
- (d) 0,40

6. Čemu je rovna hodnota $F(1; 2)$ sdružené distribuční funkce?

- (a) 0,10
- (b) 0,20
- (c) 0,30
- (d) 0,40

7. Čemu je rovna střední hodnota $E(X)$?

- (a) 0,30
- (b) 0,60



Obsah

142. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



Obsah

143. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

(c) 0,41

(d) 1,00

8. Čemu je roven rozptyl $D(Y)$?

(a) 0,30

(b) 0,60

(c) 0,41

(d) 1,00

9. Čemu je rovna kovariance $cov(X; Y)$?

(a) 0,10

(b) 0,20

(c) 0,30

(d) 0,40

10. Čemu je roven korelační koeficient $\rho(X; Y)$? (Zaokrouhlete na 2 des. místa)

(a) 0,10

(b) 0,20

(c) 0,30

(d) 0,40

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:



Obsah

144. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



Příklady k procvičení

- Hodíme dvěma poctivými mincemi. Pro každou minci zaznamenáme výsledek „1“, když padne rub mince, „0“, když padne líc mince. Označme S součet výsledků na obou mincích, R rozdíl výsledků na obou mincích. Definujme dvousložkový náhodný vektor $\mathbf{X} = (S, R)$. Určete
 - typ náhodného vektoru (diskrétní, spojitý),
 - sduženou pravděpodobnostní funkci,
 - marginální pravděpodobnostní funkce,
 - střední hodnoty a rozptyly jednotlivých složek,
 - kovarianční matici,
 - korelační matici,
 - zda jsou náhodné veličiny S , R nezávislé.

Řešení příkladu

- Při průzkumu příčin dopravních nehod byl měřen systolický tlak řidičů autobusů v závislosti na teplotě ovzduší. Vypočtete korelační koeficient a pouze z jeho hodnoty odhadněte, zda se s rostoucí teplotou ovzduší spíše zvyšuje či spíše snižuje systolický tlak řidičů.

Teplota ovzduší [°C]	-10,5	-5,4	0,2	6,4	10,2	15,6	18,5	25,5	31,5	35,8
Systolický tlak [mm Hg]	76	78	81	81	74	72	76	81	82	83

Řešení příkladu

- Náhodný vektor $\mathbf{X} = (R, S)$ má sduženou hustotu

$$f_r(s) = \begin{cases} \frac{2}{3}(r + 2s), & (r, s) \in \langle 0; 1 \rangle \times \langle 0; 1 \rangle \\ 0, & (r, s) \notin \langle 0; 1 \rangle \times \langle 0; 1 \rangle \end{cases}$$

Obsah

145. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Určete:

- a) marginální hustoty pravděpodobnosti $f_R(r)$, $f_S(s)$,
- b) marginální distribuční funkce $F_R(r)$, $F_S(s)$,
- c) střední hodnoty a rozptyly náhodných veličin R a S ,
- d) korelaci mezi R a S .

Řešení příkladu



Obsah

146. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno



Kapitola 5

Diskrétní rozdělení pravděpodobnosti

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete umět

- charakterizovat hypergeometrické rozdělení,
- charakterizovat Bernoulliho pokusy a z nich odvozené jednotlivé typy diskretních rozdělení: binomické, geometrické, negativně binomické,
- charakterizovat Poissonův proces a z něj vycházející Poissonovo rozdělení,
- popsat vzájemné souvislosti mezi diskretními rozděleními.

Obsah

147. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Připomeňme, že rozdělení náhodné veličiny X je předpis, kterým charakterizujeme pravděpodobnost jevů, jež lze touto náhodnou veličinou popsat. u diskrétní náhodné veličiny je tímto předpisem (rozdělením) většinou pravděpodobnostní funkce, rozdělení spojitě náhodné veličiny je dáno distribuční funkcí, popř. hustotou pravděpodobnosti.

V této kapitole si shrneme základní poznatky o nejčastěji používaných typech rozdělení diskrétní náhodné veličiny. Odvození některých funkcí a číselných charakteristik popisujících zavedené náhodné veličiny je pak věnována Kap. 5.7, která je určena studentům majícím hlubší zájem o problematiku různých rozdělení.

5.1. Alternativní rozdělení

Uvažujme náhodnou veličinu X popisující výsledek náhodného pokusu takto: Nastane-li sledovaný náhodný jev A (budeme říkat, že došlo k výskytu události, resp. že došlo k úspěchu), bude mít náhodná veličina X hodnotu $x = 1$, nenastane-li jev A , bude mít náhodná veličina X hodnotu $x = 0$. Lze tedy říci, že X udává

počet výskytů daného náhodného jevu (úspěchů) v jednom pokusu.

Aby byla náhodná veličina s alternativním rozdělením definována, musíme znát pouze pravděpodobnost náhodného jevu (úspěchu) p . ($0 < p < 1$). Má-li náhodná veličina X alternativní rozdělení s pravděpodobností p , pak píšeme

$$X \rightarrow A(p).$$



Obsah

148. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Pravděpodobnostní funkce alternativní náhodné veličiny tedy stanovuje, jaká je pravděpodobnost, že dojde k úspěchu či neúspěchu.

$$\begin{aligned}P(X = 1) &= p \\P(X = 0) &= 1 - p\end{aligned}$$

Lze snadno vypočíst, že střední hodnota a rozptyl alternativní náhodné veličiny jsou dány vztahy

$$E(X) = p, D(X) = p \cdot (1 - p).$$

5.2. Binomické rozdělení

Při popisu náhodné veličiny s alternativním rozdělením jsme uvažovali pokus, v němž úspěch může nastat s pravděpodobností p a nenastat s pravděpodobností $(1 - p)$. Posloupnost takových nezávislých pokusů (tj. takových pokusů, kdy úspěch v libovolné skupině pokusů neovlivňuje pravděpodobnost úspěchu v pokusu, který do této skupiny nepatří) označujeme jako **Bernoulliho pokusy**. Pravděpodobnost úspěchu p v jednotlivých Bernoulliho pokusech je konstantní.

Náhodnou veličinu X , která udává

počet úspěchů v n Bernoulliho pokusech

za předpokladu, že pravděpodobnost úspěchu v jednom pokusu je p , nazýváme **binomickou náhodnou veličinou**.

Pomocí binomického rozdělení lze modelovat například



Obsah

149. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

- počet chlapců mezi 10 000 novorozenci,
- počet vadných výrobků mezi 30 testovanými,
- počet nevzrostlých rostlin ze 100 zasazených cibulek, apod.

Proto, aby byla binomická náhodná veličina definována, musíme znát dva její parametry - n (celkový počet Bernoulliho pokusů) a p (pravděpodobnost úspěchu v každém z pokusů). To, že náhodná veličina má binomické rozdělení zapisujeme

$$X \rightarrow Bi(n, p).$$

Pravděpodobnostní funkce binomické náhodné veličiny stanovuje jaká je pravděpodobnost, že v n Bernoulliho pokusech dojde ke k úspěchům.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Podotkněme, že při výpočtu hodnot pravděpodobnostních funkcí nejčastěji používaných diskrétních náhodných veličin se většinou v současnosti používá statistický software, v němž jsou tyto funkce implementovány.

Pro střední hodnotu a rozptyl binomické náhodné veličiny platí

$$E(X) = np,$$

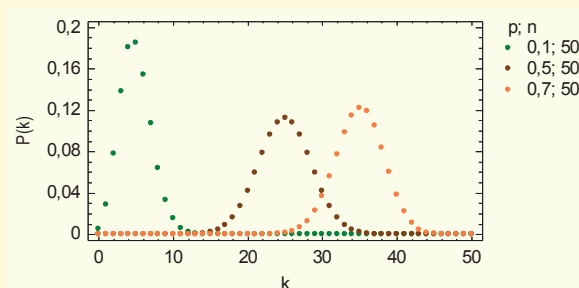
$$D(X) = np(1 - p).$$

Poznámka: Uvědomte si, že alternativní náhodná veličina je pouze speciálním případem binomické náhodné veličiny pro $n = 1$.

[Obsah](#)

150. strana ze 293

[Zavřít dokument](#)[Celá obrazovka/Okno](#)



Obr. 5.1: Vliv parametru p na tvar pravděpodobnostní funkce binomické náhodné veličiny

Příklad 5.1. Předpokládejme, že pravděpodobnost narození dívky je 0,49. Jaká je pravděpodobnost, že v rodině s 8 dětmi jsou

- a) právě 3 dívky,
- b) více než 2 dívky,
- c) méně než 3 dívky.

Pro řešení tohoto příkladu můžete použít excelovský soubor *Vybraná rozdělení pravděpodobnosti* (600 KB).

Řešení 5.1

5.3. Hypergeometrické rozdělení

Hypergeometrická náhodná veličina se, podobně jako binomická náhodná veličina, používá v situacích, kdy potřebujeme popsat počet úspěchů v n pokusech. Rozdíl mezi oběma náhodnými veličinami spočívá v tom, že zatímco binomická náhodná veličina popisuje počet úspěchů v n Bernoulliho pokusech, hypergeometrická náhodná veličina popisuje počet úspěchů v n **závislých** pokusech. (Jsou-li pokusy závislé, pravděpodobnost úspěchu v určitém pokusu může záviset na výsledcích v předcházejících pokusech.)

Předpokládejme, že v základním souboru N prvků je M prvků s danou vlastností a zbylých $N - M$ prvků tuto vlastnost nemá. Náhodně vybereme ze základního souboru n prvků, z nichž žádný nevracíme zpět. Je-li náhodná veličina X definována jako

X ... počet prvků se sledovanou vlastností ve výběru n z N prvků,

má tato náhodná veličina hypergeometrické rozdělení s parametry N, M, n , což značíme

$$X \rightarrow H(N, M, n).$$

Hypergeometrické rozdělení je základním pravděpodobnostním rozdělením při výběru bez vracení.

Hypergeometrické rozdělení lze využít k modelování

- počtu vadných výrobků mezi 10 vybranými z dodávky 30 výrobků, mezi nimiž bylo 7 vadných,



Obsah

152. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

- počtu dívek v náhodně vybrané skupině 4 dětí ze třídy, v níž je 6 chlapců a 8 dívek,
- počtu cibulí červených tulipánů v balíčku 10 cibulí vybraných ze směsi, která obsahuje 20 cibulí žlutých a 20 cibulí červených tulipánů, apod.

Pravděpodobnostní funkce hypergeometrické náhodné veličiny je dána

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Lze ukázat, že pro střední hodnotu a rozptyl hypergeometrické náhodné veličiny platí

$$E(X) = n \cdot \frac{M}{N},$$

$$D(X) = n \cdot \frac{M}{N} \left(1 - \frac{M}{N}\right) \left(\frac{N-n}{N-1}\right).$$

Hypergeometrické rozdělení hraje významnou roli při statistické kontrole jakosti v případech, kdy zkoumáme jakost malého počtu výrobků, nebo když kontrola má ráz destruktivní zkoušky (tj. výrobek je při zkoušce zničen).

5.3.1. Aproximace hypergeometrického rozdělení

Je-li n/N , tzv. **výběrový poměr**, menší než 0,05, lze hypergeometrické rozdělení nahradit binomickým s parametry n a (M/N) .

$$\left(\frac{n}{N} < 0,05\right) \Rightarrow \left[H(N; M; n) \sim Bi\left(n; \frac{M}{N}\right)\right]$$



Obsah

153. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Příklad 5.2. Mezi 200 vajíčky určenými pro prodej v jisté maloobchodní prodejně je 50 vajíček prasklých. Jaká je pravděpodobnost, že vybereme-li si náhodně 20 vajec, bude 8 z nich prasklých?

Pro řešení tohoto příkladu můžete použít excelovský soubor *Vybraná rozdělení pravděpodobnosti* (600 KB).

Řešení 5.2

5.4. Geometrické rozdělení

Geometrická náhodná veličina X je definována jako

počet Bernoulliho pokusů do prvního výskytu události (úspěchu), včetně něj.

Geometrické rozdělení má pouze jeden parametr a to pravděpodobnost výskytu události (úspěchu) v každém z pokusů – p . To, že má náhodná veličina X geometrické rozdělení zapisujeme

$$X \rightarrow G(p)$$

Pomocí geometrického rozdělení lze modelovat například

- počet volání nutných k tomu, abychom se dovolali do televizní soutěže,
- počet řidičů, kteří podstoupí test na obsah alkoholu v krvi do doby, než bude nalezen první podnapilý řidič, atd.



Obsah

154. strana ze 293

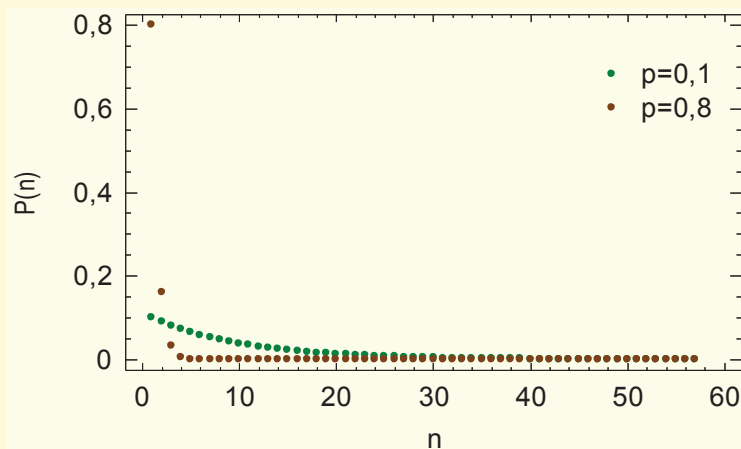


Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Pravděpodobnostní funkce geometrické náhodné veličiny stanovuje jaká je pravděpodobnost, že pro dosažení prvního úspěchu musíme provést n pokusů (včetně toho úspěšného).

$$P(X = n) = (1 - p)^{n-1} \cdot p$$



Obr. 5.2: Vliv parametru p na tvar pravděpodobnostní funkci geometrické náhodné veličiny

Snadno lze vypočítat, že pro střední hodnotu a rozptyl geometrické náhodné veličiny platí

$$E(X) = \frac{1}{p},$$



Obsah

155. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

$$D(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

POZOR!!!

*Definice geometrické náhodné veličiny není ustálená. v některých publikacích a statistických softwarech se můžeme setkat s tím, že geometrická náhodná veličina je definována jako **počet neúspěchů před prvním úspěchem**. Pak se samozřejmě liší i příslušné pravděpodobnostní funkce, střední hodnoty a rozptyly. Pokud určujeme konkrétní hodnotu pravděpodobnostní (distribuční) funkce za pomoci statistického softwaru, je nutné si ověřit, jaká definice byla použita a podle toho modifikovat vstupní parametr pro požadovaný výpočet.*

Příklad 5.3. Jaká je pravděpodobnost, že aby padla na klasické kostce šestka, musíme házet

- a) právě 5x,
- b) více než 3x.

Pro řešení tohoto příkladu můžete použít excelovský soubor [Vybraná rozdělení pravděpodobnosti](#) (600 KB).

Řešení 5.3

5.5. Negativně binomické (Pascalovo) rozdělení

Negativně binomická, někdy nazývaná také Pascalova, náhodná veličina X je definována jako

počet Bernoulliho pokusů do k -tého výskytu události (úspěchu), včetně k -tého výskytu.



Obsah

156. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Z definice je zřejmé, že se jedná o obecnější případ geometrické náhodné veličiny (geometrická náhodná veličina je speciálním případem negativně binomické náhodné veličiny pro $k = 1$).

POZOR!!!

Obdobně jako u geometrické náhodné veličiny, ani v případě negativně binomické náhodné veličiny není definice ustálená. Někteří statistici (popř. statistický software) ji definují jako počet neúspěchů před k -tým úspěchem. Důsledek této nejednoznačnosti je stejný jako v případě geometrické náhodné veličiny. v případě výpočtů je vždy nutné ověřit, kterou definici autoři použili a tomu přizpůsobit parametry v softwaru.

Negativně-binomické (Pascalovo) rozdělení lze využít k modelování

- počtu dárců neznajících svou krevní skupinu, které musíte testovat proto, abyste našli 4 dárce s krevní skupinou 0,
- počtu cestujících, které musí revizor zkontrolovat do chvíle, než najde 10 černých pasažérů,
- počtu výrobků testovaných při výstupní kontrole do chvíle, než bude nalezeno 5 vadných výrobků, atd.

Proto, aby byla negativně binomická náhodná veličina definována, musíme znát dva její parametry: požadovaný celkový počet výskytu události (úspěchů) – k a pravděpodobnost výskytu události (úspěchu) v každém z pokusů – p . Pak to, že má náhodná veličina negativně binomické rozdělení zapisujeme

$$X \rightarrow NB(k, p).$$

Pravděpodobnostní funkce negativně binomické náhodné veličiny stanovuje, jaká je pravděpodobnost, že pro dosažení k výskytů události (úspěchů) musíme uskutečnit n Bernoulliho



Obsah

157. strana ze 293

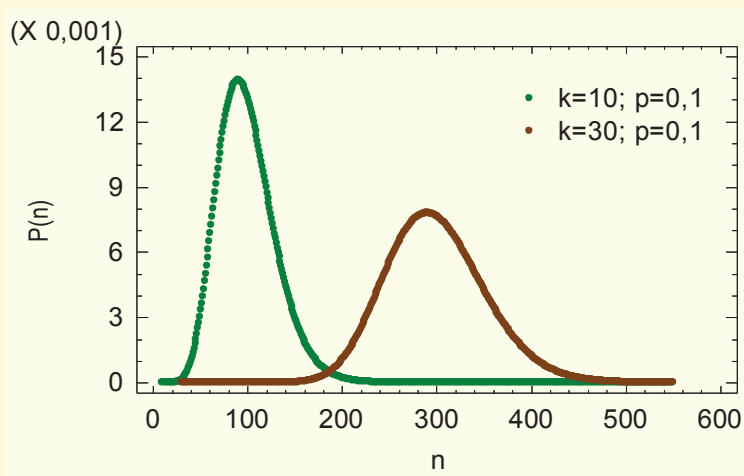


Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

pokusů.

$$P(X = n) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$$



Obr. 5.3: Vliv parametru k na pravděpodobnostní funkci negativně binomické náhodné veličiny

Pro střední hodnotu a rozptyl negativně binomické náhodné veličiny $NB(k, p)$ platí

$$E(X) = \frac{k}{p},$$



$$D(X) = \frac{k(1-p)}{p^2}.$$

5.5.1. Porovnání binomického a negativně binomického rozdělení

Ačkoliv se může na první pohled zdát, že obě rozdělení mají podobnou pravděpodobnostní funkci, existují významné rozdíly.

Binomické rozdělení

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, 0 \leq k \leq n$$

V tomto vztahu je k náhodné a n deterministické (předem známé).

Negativně binomické rozdělení

$$P(X = n) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}, k \leq n < \infty$$

V tomto vztahu je n náhodné a k deterministické (předem známé).

Příklad 5.4. Dle <http://ksicht.natur.cuni.cz/serialy/detektivni-chemie/3> je pravděpodobnost výskytu krevní skupiny A+ 35% . v polní nemocnici nutně potřebují najít 3 dárce krve s touto krevní skupinou. Potenciálních dárců je dostatek, nikdo z nich však nezná svou krevní skupinu. Jaká je pravděpodobnost, že pro nalezení 3 dárců krevní skupiny A+,

Obsah

159. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

budeme muset postupně vyšetřit

- a) právě 10 potenciálních dárců,
- b) více než 9 potenciálních dárců,
- c) více než 7 a méně než 12 potenciálních dárců.

Pro řešení tohoto příkladu můžete použít excelovský soubor *Vybraná rozdělení pravděpodobnosti* (600 KB).

Řešení 5.4

5.6. Poissonovo rozdělení

Dalším z obecných modelů schémat sběru dat, který má široké využití v praxi, je **Poissonův proces**. Lze ho chápat jako zobecnění Berhoulliho posloupnosti pokusů.

Poissonův proces popisuje počet náhodných událostí v nějakém pevném časovém intervalu. Obecným názvem pro takové procesy je bodový proces. Poissonův proces je speciálním případem bodového procesu.

U Poissonova procesu musí být, zjednodušeně řečeno, dodrženy následující tři předpoklady.

- **Ordinarita** – pravděpodobnost výskytu více než jedné události v limitně krátkém časovém intervalu ($t \rightarrow 0$) je nulová. Hovoříme o tzv. **řídkých jevech**.



Obsah

160. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

- **Stacionarita** – pravděpodobnost výskytu jevu závisí pouze na délce intervalu, nikoli na jeho umístění na časové ose, neboli rychlost výskytu událostí je konstantní v průběhu celého intervalu.
- **Nezávislé přírůstky** – počty události ve vzájemně disjunktních časových intervalech jsou nezávislé.

Z požadavku na nezávislé přírůstky vyplývá důležitá vlastnost Poissonova procesu a tou je beznáslednost.

- **Beznáslednost** – pravděpodobnost výskytu události není závislá na čase, který uplynul od minulé události.

Poissonův proces lze obdobně jako v časovém intervalu definovat na libovolné uzavřené prostorové oblasti (na ploše, v objemu).

Parametrem Poissonova procesu je **rychlost výskytu události** (hustota výskytu události na ploše, resp. v objemu), kterou značíme λ . Rychlost výskytu události je úměrná pravděpodobnosti výskytu jedné události za jednotku času (na jednotce plochy, resp. v jednotce objemu).

Definujme si náhodný pokus jako Poissonův proces (nezávislé události probíhající v čase t , s rychlostí výskytu λ ; popř. nezávislé události objevující se na ploše t , resp. v objemu t s hustotou výskytu λ). Pokud si náhodnou veličinu X za těchto předpokladů definujeme jako

[Obsah](#)

161. strana ze 293

[Zavřít dokument](#)[Celá obrazovka/Okno](#)

počet výskytu události v časovém intervalu délky t
nebo
počet výskytu události na ploše t (v objemu t),

pak můžeme X považovat za náhodnou veličinu s Poissonovým rozdělením, což značíme

$$X \rightarrow Po(\lambda t).$$

Pomocí Poissonova rozdělení lze modelovat například

- počet pacientů ošetřených během dopoledních ordinačních hodin,
- počet mikrodefektů na zadaném vzorku materiálu,
- počet mikroorganismů v 1 dl vody, atd.

Pravděpodobnostní funkce Poissonovy náhodné veličiny udává, jaká je pravděpodobnost, že v časovém intervalu délky t (na ploše t , v objemu t) dojde ke k událostem.

$$P(X = k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$$

Poissonovo rozdělení je charakteristické tím, že jeho střední hodnota a rozptyl se rovnají.

$$E(X) = D(X) = \lambda t$$

Protože střední hodnota je rovna λt , můžeme tvrdit, že parametr Poissonova rozdělení λt je roven střednímu počtu události, k nimž došlo během časového intervalu délky t (popř. na ploše t , resp. v objemu t).



Obsah

162. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

5.6.1. Aproximace binomického rozdělení Poissonovým rozdělením

Poissonovo rozdělení bývá označováno jako *rozdělení řídkých jevů*, neboť se podle něj řídí počet výskytů události (jevů), které mají velmi malou pravděpodobnost výskytu. Poissonovým rozdělením lze velmi dobře aproximovat binomické rozdělení pro případ, že počet pokusů n je dostatečně velký ($n > 30$) a pravděpodobnost výskytu události (úspěchu) je dostatečně malá ($p < 0,1$). v takovém případě je $\lambda t = np$.

$$(n > 30 \wedge p < 0,1) \Rightarrow Bi(n, p) \sim Po(np)$$

Příklad 5.5. V jisté nemocnici se průměrně 30 krát ročně vyskytne porucha srdeční činnosti po určité operaci. Předpokládejme, že se jednotlivé poruchy srdeční činnosti po dané operaci vyskytují nezávisle na sobě, s konstantní rychlostí výskytu. Určete

- pravděpodobnost, že se v této nemocnici vyskytne příští měsíc právě 5 těchto poruch,
- pravděpodobnost, že se v této nemocnici vyskytne příští měsíc 2 a více těchto poruch,
- střední hodnotu a směrodatnou odchylku počtu těchto poruch během jednoho měsíce.

Pro řešení tohoto příkladu můžete použít excelovský soubor [Vybraná rozdělení pravděpodobnosti](#) (600 KB).

Řešení 5.5



Obsah

163. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

5.7. Odvození pravděpodobnostních funkcí, středních hodnot a rozptylů

Pro zájemce o hlubší pochopení studované látky je určena tato část textu. Měla by vám ukázat, jak byly sestaveny jednotlivé pravděpodobnostní funkce a jak lze pomocí nich odvodit příslušné střední hodnoty a rozptyly.

5.7.1. Alternativní rozdělení

má náhodná veličina X popisující počet úspěchů v jednom pokusu majícím pouze dva možné výsledky označované jako úspěch ($X = 1$) a neúspěch ($X = 0$). Je-li pravděpodobnost úspěchu p , pak je zřejmé, že pravděpodobnostní funkce alternativní náhodné veličiny je dána vztahem

$$\begin{aligned}P(X = 1) &= p, \\P(X = 0) &= 1 - p.\end{aligned}$$

Dle známých vztahů lze odvodit střední hodnotu a rozptyl alternativní náhodné veličiny.

$$E(X) = \sum_{(i)} x_i \cdot P(x_i) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p,$$

$$E(X^2) = \sum_{(i)} x_i^2 \cdot P(x_i) = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1 - p) = p,$$

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = p - p^2 = p(1 - p).$$



Obsah

164. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

5.7.2. Binomické rozdělení

má náhodná veličina X popisující počet úspěchů v n Bernoulliho pokusech. Hledáme pravděpodobnost, že mezi n Bernoulliho pokusy bude k úspěchů. Je zřejmé, že každá „úspěšná posloupnost pokusů“ musí obsahovat právě k úspěchů (pravděpodobnost každého úspěchu je p) a $(n - k)$ neúspěchů (pravděpodobnost každého neúspěchu je $1 - p$). Vzhledem k nezávislosti jednotlivých Bernoulliho pokusů je pravděpodobnost výskytu každé takové „úspěšné posloupnosti pokusů“ rovna $p^k(1 - p)^{n-k}$. Uvážíme-li, že existuje $\binom{n}{k}$ takových úspěšných posloupností pokusů, tak je zřejmé, že

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Pro odvození střední hodnoty a rozptylu binomické náhodné veličiny využijeme toho, že binomická náhodná veličina je součtem n nezávislých náhodných veličin N_i s alternativním rozdělením se stejným parametrem p .

Nechť $\forall i = 1, 2, \dots, n : W_i \rightarrow A(p)$. Pak

$$X = \sum_{i=1}^n W_i \rightarrow Bi(n; p).$$

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^n W_i\right) = \sum_{i=1}^n E(W_i) = \sum_{i=1}^n p = np,$$

$$D(X) = D\left(\sum_{i=1}^n W_i\right) = \sum_{i=1}^n D(W_i) = \sum_{i=1}^n p(1 - p) = np(1 - p).$$



Obsah

165. strana ze 293

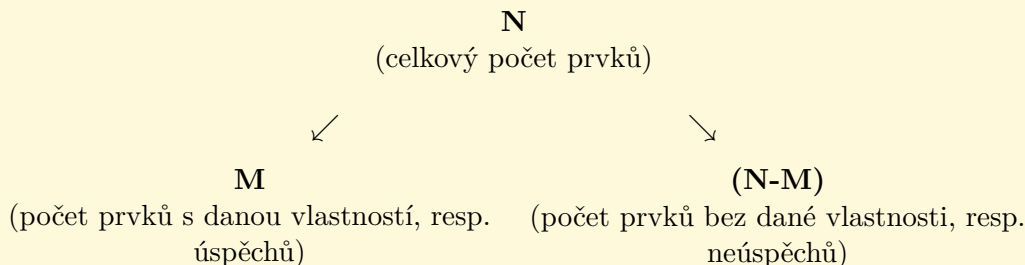


Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

5.7.3. Hypergeometrické rozdělení

má náhodná veličiny X popisující počet úspěchů v n závislých pokusech, kdy každý má pouze dva možné výsledky (úspěch a neúspěch). Hledáme pravděpodobnost, že ve výběru n prvků z N bude k prvků s danou vlastností. Definice pravděpodobnostní funkce hypergeometrického rozdělení vychází z klasické definice pravděpodobnosti: počet příznivých možností ku počtu všech možností.



Počet všech možností – vybíráme bez vracení n prvků z N prvkové množiny, bez ohledu na pořadí, tj. jde o kombinace bez opakování n -tého řádu z N prvků

$$C(N, n) = \binom{N}{n}.$$

Počet všech možností – vybíráme k z M prvků bez ohledu na pořadí (k prvků má mít danou vlastnost) a zároveň vybíráme $(n - k)$ prvků z $(N - M)$ prvků bez ohledu na pořadí (ostatní prvky z vybírané n -tice (tj, $(n - k)$ prvků) danou vlastnost (úspěch) mít nemají). Na



Obsah

166. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

základě kombinatorického pravidla o součinu nezávislých výběrů můžeme tvrdit, že počet příznivých možností je

$$C(M, k) \cdot C(N - M, n - k) = \binom{M}{k} \binom{N - M}{n - k}.$$

A proto na základě klasické definice pravděpodobnosti můžeme vyjádřit pravděpodobnostní funkci hypergeometrické náhodné veličiny jako

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N - M}{n - k}}{\binom{N}{n}}.$$

Střední hodnotu a rozptyl hypergeometrického rozdělení odvozovat nebudeme.

5.7.4. Geometrické rozdělení

má náhodná veličina X popisující počet Bernoulliho pokusů do prvního úspěchu. Hledáme pravděpodobnost, že do prvního úspěchu (včetně) musíme uskutečnit n pokusů. Je zřejmé, že úspěšná je pouze posloupnost $(n - 1)$ neúspěchů následována jedním úspěchem. Pravděpodobnost výskytu takového posloupnosti pokusů je dána vztahem

$$P(X = n) = p(1 - p)^{n-1}, \quad 1 \leq n < \infty.$$

Dále odvodíme střední hodnotu a rozptyl geometrického rozdělení.



Obsah

167. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot P(X = n) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot p(1-p)^{n-1} = p \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n(1-p)^{n-1} = \\ &= p \cdot \frac{\partial \left(\sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^n \right)}{\partial (1-p)} = p \cdot \frac{\partial \left(\frac{1-p}{p} \right)}{\partial (1-p)} = p \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}, \end{aligned}$$

Poznámka: $\sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^n$ upravujeme jako součet geometrické řady s kvocientem p a prvním členem $(1-p)$.



Obsah

168. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Pro výpočet rozptylu použijeme výpočetní vztah $D(X) = E(X^2) - (E(X))^2$, kde

$$\begin{aligned}
 E(X^2) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 p (1-p)^{n-1} = p \left[\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - n + n) (1-p)^{n-1} \right] = \\
 &= p \left[\sum_{n=2}^{\infty} (n^2 - n) (1-p)^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n (1-p)^{n-1} \right] = \\
 &= p \left[\sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) (1-p)^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n (1-p)^{n-1} \right] = \\
 &= p(1-p) \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) (1-p)^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n (1-p)^{n-1} = \\
 &= p(1-p) \frac{\partial^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^k \right)}{\partial^2 (1-p)} + p \frac{\partial \left(\sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^k \right)}{\partial (1-p)} = \\
 &= p(1-p) \frac{\partial^2 \left(\frac{1-p}{p} \right)}{\partial^2 (1-p)} + p \frac{\partial \left(\frac{1-p}{p} \right)}{\partial (1-p)} = \\
 &= p(1-p) \frac{2}{p^3} + p \frac{1}{p^2} = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p}.
 \end{aligned}$$

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \left[\frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} \right] - \left(\frac{1}{p} \right)^2 = \frac{2-2p+p-1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$



Obsah

169. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



5.7.5. Negativně binomické (Pascalovo) rozdělení

má náhodná veličina X popisující počet Bernoulliho pokusů nutných k uskutečnění k úspěchů. Hledáme pravděpodobnost toho, že do k -tého úspěchu musíme uskutečnit právě n pokusů. Úspěšnou je tedy posloupnost $(n - 1)$ pokusů obsahujících $(k - 1)$ úspěchů následována úspěchem.

Nechť náhodná veličina Y popisuje počet úspěchů v $(n - 1)$ Bernoulliho pokusech. Je zřejmé, že náhodná veličina Y má binomické rozdělení.

$$Y \rightarrow Bi(n - 1, p)$$

Pravděpodobnost, že v $(n - 1)$ Bernoulliho pokusech bude $(k - 1)$ úspěchů je pak dána vztahem

$$P(Y = k - 1) = \binom{n - 1}{k - 1} p^{k-1} (1 - p)^{(n-1)-(k-1)} = \binom{n - 1}{k - 1} p^{k-1} (1 - p)^{n-k}.$$

Vzhledem k nezávislosti Bernoulliho pokusů lze jednoduše ukázat, že

$$P(X = n) = P(Y = k - 1) \cdot p = \binom{n - 1}{k - 1} p^{k-1} (1 - p)^{n-k} \cdot p = \binom{n - 1}{k - 1} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Pro odvození střední hodnoty a rozptylu negativně binomické náhodné veličiny využijeme toho, že negativně binomickou náhodnou veličinu si můžeme představit jako součet k nezávislých náhodných veličin s geometrickým rozdělením.

Nechť $\forall i = 1, 2, \dots, k : W_i \rightarrow A(p)$. Pak

$$X = \sum_{i=1}^k W_i \rightarrow NB(k; p).$$

Obsah

170. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^k W_i\right) = \sum_{i=1}^k E(W_i) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{p} = \frac{k}{p},$$

$$D(X) = D\left(\sum_{i=1}^k W_i\right) = \sum_{i=1}^k D(W_i) = \sum_{i=1}^k \frac{(1-p)}{p^2} = \frac{k(1-p)}{p^2}.$$

5.7.6. Poissonovo rozdělení

má náhodná veličina X popisující počet výskytu události na uzavřené oblasti (v čase, na ploše, v objemu). Výskyt náhodných událostí musí podléhat podmínkám Poissonova procesu.

Uvažujme Poissonův proces, který je pozorován v průběhu času. Předpokládejme, že rychlost výskytu událostí je λ . Potom pravděpodobnost výskytu událostí během intervalu $(0; t)$ bude úměrná hodnotě λt .

Nyní rozdělíme interval délky t na n subintervalů stejné délky (t/n) . Výskyt událostí v každém z těchto subintervalů bude nezávislý a pravděpodobnost výskytu událostí během jednoho tohoto malého intervalu bude úměrná hodnotě $(\lambda \cdot (t/n))$. Volně řečeno - pokud n je dostatečně velké číslo, pak délka intervalu (t/n) bude natolik malá, že pravděpodobnost výskytu více než jedné události v tomto intervalu je téměř nulová a pravděpodobnost výskytu jedné události je rovna $(\lambda \cdot (t/n))$.

Potom pravděpodobnostní rozdělení počtu událostí, které nastanou během celého intervalu délky t , bude možno aproximovat binomickým rozdělením s parametry n a $(\lambda t/n)$ – za



Obsah

171. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

předpokladu, že $(n \rightarrow \infty)$. Tedy

$$P(X = k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\binom{n}{k} \left(\frac{\lambda t}{n} \right)^k \left(1 - \frac{\lambda t}{n} \right)^{n-k} \right].$$

Po úpravě dostáváme

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda t}{n} \right)^k \left(1 - \frac{\lambda t}{n} \right)^{n-k} = \\ &= \frac{(\lambda t)^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n-k)! n^k} \left(1 - \frac{\lambda t}{n} \right)^{n-k} = \\ &= \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n-k)! n^k} = \\ &= \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{n^k} = \\ &= \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k + k \cdot n^{k-1} + \dots}{k!} = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}. \end{aligned}$$

Pravděpodobnostní funkci Poissonova rozdělení tedy můžeme vyjádřit jako

$$P(X = k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}; \quad 0 \leq k < \infty.$$



Obsah

172. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Dosazením do známých definičních vztahů odvodíme střední hodnotu a rozptyl Poissonova rozdělení.

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} k P(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} = \lambda t \cdot e^{-\lambda t} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} = \\ &= \lambda t \cdot e^{-\lambda t} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^l}{l!} = \lambda t \cdot e^{-\lambda t} \cdot e^{\lambda t} = \lambda t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} (k^2 - k + k) P(X = k) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) P(X = k) + \sum_{k=0}^{\infty} k P(X = k) = \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} + EX = (\lambda t)^k e^{-\lambda t} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda t = \\ &= (\lambda t)^2 \cdot e^{-\lambda t} \cdot e^{\lambda t} + \lambda t = (\lambda t)^2 + \lambda t \end{aligned}$$

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = (\lambda t)^2 + \lambda t - (\lambda t)^2 = \lambda t$$



Obsah

173. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Shrnutí:

Rozdělení náhodné veličiny X je předpis, kterým charakterizujeme pravděpodobnost jevů, jež lze touto náhodnou veličinou popsat.

Základním rozdělením popisujícím výběry bez vracení je **hypergeometrické rozdělení**.

Název NV X	Popis	Pravděpodobnostní funkce
Hypergeometrická	Počet prvků se sledovanou vlastností ve výběru n prvků, který byl proveden ze základního souboru rozsahu N (v základním souboru má M prvků sledovanou vlastnost)	$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

Bernoulliho pokusy:

- posloupnost **nezávislých** pokusů majících pouze 2 možné výsledky (událost nastane–nenastane; úspěch–neúspěch; popřípadě 1–0)
- pravděpodobnost výskytu události (úspěchu) p je konstantní v každém pokuse

Rozdělení diskrétní náhodné veličiny založená na Bernoulliho pokusech

Poissonův proces popisuje výskyt řídkých náhodných událostí na nějakém pevném časovém intervalu.

U Poissonova procesu musí být, zjednodušeně řečeno, dodrženy následující tři předpoklady.



Obsah

174. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



Název NV X	Popis	Pravděpodobnostní funkce	$E(X)$	$D(X)$
Binomická	Počet úspěchů (k) v n pokusech	$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Alternativní	Počet úspěchů v jednom pokusu	$P(X = 1) = p$ $P(X = 0) = 1 - p$	p	$p(1-p)$
Geometrická	Počet pokusů (n) do 1. úspěchu	$P(X = n) = p(1-p)^{n-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{(1-p)}{p^2}$
Negativně binomická	Počet pokusů (n) do k -tého úspěchu	$P(X = n) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$	$\frac{k}{p}$	$\frac{k(1-p)}{p^2}$

- ordinarita,
- stacionarita,
- nezávislé přírůstky.

Poissonův proces lze obdobně jako v časovém intervalu definovat na libovolné uzavřené prostorové oblasti (na ploše, v objemu).

Rozdělení diskrétní náhodné veličiny založené na Poissonově procesu

Název NV X	Popis	Pravděpodobnostní funkce	$E(X)$	$D(X)$
Poissonova	Počet událostí (k) v časovém intervalu (na ploše, v objemu) (t)	$P(X = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$	λt	λt

Obsah

175. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Test

Jak pracovat s testy?

1. (3b.) Určete pravdivost následujících tvrzení.

- (a) Rozdělení pravděpodobnosti diskrétní náhodné veličiny může být dáno výhradně pravděpodobnostní funkcí.
- (b) Posloupnost nezávislých pokusů majících pouze dva možné výsledky se stejnou pravděpodobností úspěchu nazýváme Bernoulliho pokusy.
- (c) Počet úspěchů v n pokusech lze popsat binomickou náhodnou veličinou.
- (d) Geometrické rozdělení je speciálním případem negativně binomického rozdělení.
- (e) Pascalovo rozdělení je pouze jiný název pro negativně binomické rozdělení.
- (f) Jistý supermarket má otevřeno 24h denně. Počet zákazníků v supermarketu během otevírací doby lze popsat náhodnou veličinou s Poissonovým rozdělením.

2. (3b.) Charakterizujte rozdělení náhodné veličiny popisující

- (a) počet studentů, kteří úspěšně ukončí kurz STA1 v tomto semestru (z minulých let víme, že pravděpodobnost, že student úspěšně dokončí kurz STA1 je 0,63; do kurzu je v tomto semestru přihlášeno 248 studentů),
 - (a) binomické
 - (b) hypergeometrické
 - (c) negativně binomické
 - (d) Poissonovo



Obsah

176. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



- (b) počet vadných mikroprocesorů na chipu (na chipu je průměrně 1 vadný mikroprocesor),
- (a) binomické (b) hypergeometrické
(c) negativně binomické (d) Poissonovo
- (c) počet hodů poctivou kostkou nutných k padnutí šestky,
- (a) binomické (b) hypergeometrické
(c) negativně binomické (d) Poissonovo
- (d) počet řidičů obslužených na čerpací stanici za půl hodiny (během 1h je na čerpací stanici obsluženo průměrně 72 řidičů),
- (a) binomické (b) hypergeometrické
(c) negativně binomické (d) Poissonovo
- (e) počet řidičů obslužených do chvíle, kdy 1. řidič ujede bez placení (průměrně ujíždí bez placení 1 z 50 řidičů),
- (a) binomické (b) hypergeometrické
(c) negativně binomické (d) Poissonovo
- (f) počet týdnů v roce (52 týdnů), v nichž neujede žádný řidič z čerpací stanice bez placení (během týdne je na čerpací stanici obsluženo průměrně 4 000 řidičů, z nichž cca 2 % ujedou bez placení),
- (a) binomické (b) hypergeometrické
(c) negativně binomické (d) Poissonovo
- (g) počet dnů do chvíle, kdy 4. řidič ujede bez placení (průměrně ujíždí bez placení 1 z 50 řidičů).

Obsah

177. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

- (a) binomické
(c) negativně binomické

- (b) hypergeometrické
(d) Poissonovo

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:



Obsah

178. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Příklady k procvičení

Jak pracovat s testy?

1. Mějme Bernoulliho pokusy. Pravděpodobnost úspěchu je 0,1. Určete pravděpodobnost, že do prvního úspěchu provedeme *(zadávejte jako desetinná čísla)*
 - (a) méně než 5 pokusů,
 - (b) více než 10 pokusů,
 - (c) mezi 6 a 8 pokusy,
 - (d) právě 7 pokusů.
2. Víme, že pravděpodobnost vady výrobku je 17 %. Určete pravděpodobnost, že mezi 20 výrobky bude
 - (a) více než 5 vadných výrobků,
 - (b) méně než dva vadné výrobky,
 - (c) mezi 4 a 8 vadnými výrobky,
 - (d) právě 3 vadné výrobky.
3. Kolik (průměrně) potřebujeme hodů s poctivou mincí, aby nám 5x padl líc?
4. Továrna produkuje integrované obvody. Při jedné fázi výroby dochází často k závadě, proto je 25 % výrobků vadných. Jaká je pravděpodobnost, že mezi 12 integrovanými obvody budou



Obsah

179. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



- (a) 4 vadné,
(b) méně než 4 vadné?
(c) Jaká je střední hodnota a rozptyl počtu vadných IO, budeme-li testovat 15 vzorků?
 $E(X) =$
 $D(X) =$
(d) Nyní uvažme, že bylo vyrobeno pouze 48 IO a my vybereme 12 z nich. Jaká je pravděpodobnost, že mezi vybranými IO budou právě 4 vadné?

5. Distributor prodává knihu XY po telefonu. 12 % hovorů je úspěšných (tj. objednájí si knihu). Jaká je pravděpodobnost, že distributor předtím než bude úspěšný bude muset uskutečnit

- (a) 5 hovorů,
(b) méně než 5 hovorů,
(c) více než 8 hovorů.

Předpokládejme, že distributor musí splnit denní kvótu - prodat 10 knih.

- (d) Jaká je pravděpodobnost, že distributor bude pro splnění denní kvóty potřebovat méně než 30 telefonátů?
(e) Určete střední hodnotu a rozptyl počtu telefonátů potřebných pro splnění denní kvóty.
 $E(Y) =$
 $\sigma =$

Obsah

180. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



Obsah

181. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Uvažme nyní, že ne každý z těch, kdo si telefonicky objednájí danou knihu, ji skutečně odebere. Přesněji řečeno - 65 % osob objednanou knihu skutečně zaplatí. Distributor je podle této skutečnosti ohodnocen. Dostává 30,- Kč za každou objednávku a dalších 50,- Kč ve chvíli, kdy je objednávka převzata.

- (f) Jaká je pravděpodobnost, že výdělek distributora ve chvíli, kdy splní svou denní kvótu, bude vyšší než 500,- Kč?
- (g) Jaký je jeho průměrný výdělek (a směrodatná odchylka jeho výdělku) při splnění denní kvóty?

$$E(S) = \quad , -\text{Kč}$$

$$D(Y) = \quad , -\text{Kč}$$

6. Celník na hranici EU má za úkol kontrolovat nepřetržitě projíždějící vozidla. Víme, že 25 % vozidel veze kontraband a 40 % z nich celník odhalí. Jaká je pravděpodobnost, že celník, předtím než objeví první vozidlo s kontrabandem, bude muset prohlédnout

- (a) 5 aut,
- (b) více než 10 aut.
- (c) Určete střední hodnotu a rozptyl počtu aut, jež musí celník prohlédnout předtím než objeví první automobil s kontrabandem.

$$E(X) = \quad \text{aut}$$

$$D(X) = \quad \text{aut}^2$$

Nadřízený tohoto celníka vydal příkaz, že celník může jít domů poté, co nalezne 5 aut s kontrabandem. Předpokládejme, že prohlédnutí jednoho auta trvá celníkovi 10 minut.



(d) Jaká je pravděpodobnost, že tento příkaz prodlouží celníkovi pracovní den (8 hodin)?

(e) Jaká je nyní průměrná pracovní doba (a její směrodatná odchylka) celníka?

$$ED = \quad \text{min}$$

$$\sigma_D = \quad \text{min}$$

7. Bankovní úředník provádějící kontrolu návrhů půjček zjistil, že se v nich nachází 0,5 chyby na návrh. Jaká je pravděpodobnost, že úředník v deseti návrzích

(a) najde 6 chyb,

(b) najde více než 6 chyb,

(c) nenajde ani jednu chybu.

V 35 % chyb je nutno chybu přičíst úmyslné chybné prezentaci dat.

(d) Jaký je průměrný počet chyb způsobených chybnou prezentací v celkovém množství 100 návrhů?

$$E(Y) =$$

(e) Pokud všechny chybné návrhy vyřadíme, jaká je pravděpodobnost, že více než 2 návrhy z deseti budou vyřazeny vlivem úmyslné chybné prezentace dat?

8. Počet návštěvníků Fitness Centra VŠB je v průměru 10 na hodinu. Určete

(a) pravděpodobnost, že v určitou hodinu je ve fitcentru přesně 10 lidí,

Obsah

182. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



- (b) pravděpodobnost, že v určitou hodinu je ve fitcentru méně než 5 lidí,
- (c) pravděpodobnost, že v určitou hodinu je ve fitcentru mezi 8 a 15 osobami.

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:

Obsah

183. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



Kapitola 6

Spojité rozdělení pravděpodobnosti

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete umět

- charakterizovat jednotlivé typy spojitých rozdělení: rovnoměrné, exponenciální, Erlan-govo, Weibullovo, normální, normované normální, logaritmicko-normální,
- popsat vzájemnou souvislost mezi rozděleními v diskrétním procesu a v bodovém procesu ve spojitém čase.

Obsah

184. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

V předcházející kapitole jsme se věnovali vybraným rozdělením diskrétní náhodné veličiny, nyní přejdeme k popisu rozdělení náhodné veličiny spojité. Připomeňme si, že rozdělení spojité náhodné veličiny je dáno distribuční funkcí, popř. hustotou pravděpodobnosti. v této kapitole je uveden přehled vybraných rozdělení spojité náhodné veličiny, přičemž odvození některých funkcí, středních hodnot a rozptylů je věnována podkapitola 6.9, která je určena zájemcům o matematické pozadí uvedených vztahů.

6.1. Rovnoměrné rozdělení

Jde o rozdělení, jehož hustota pravděpodobnosti je konstantní na nějakém intervalu $(a; b)$ a všude jinde je nulová.

X ...náhodná veličina s rovnoměrným rozdělením na intervalu $(a; b)$

$$X \rightarrow R(a; b)$$

Hustota pravděpodobnosti:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in (a; b) \\ 0 & x \notin (a; b) \end{cases}$$

Distribuční funkce:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; a) \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in (a; b) \\ 1 & x \in (b; \infty) \end{cases}$$

Střední hodnota a rozptyl náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením jsou dány vztahy

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, D(X) = \frac{(a-b)^2}{12}$$



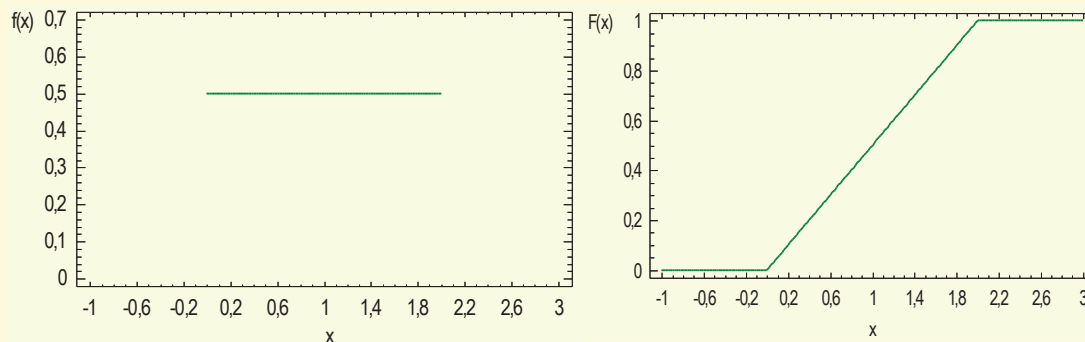
Obsah

185. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



Obr. 6.1: Grafy hustoty pravděpodobnosti a distribuční funkce náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením na $(0;2)$

Vliv parametrů rovnoměrného rozdělení na tvar křivek hustoty pravděpodobnosti a distribuční funkce můžete sledovat v excelovském souboru [Spojité rozdělení](#) (870 KB).

6.2. Exponenciální rozdělení

Mějme Poissonův proces, tj. v určitém časovém intervalu se s konstantní střední rychlostí výskytu λ objevují události, které jsou na sobě nezávislé (např. [dopravní nehody na Martinovské křižovatce](#) během jedné hodiny, [příchody zákazníku do supermarketu](#) mezi 15:00h a 16:00h, [poruchy elektronického systému](#) během dvou let, atd.).

Pak vhodným rozdělením pro popis **doby do výskytu první události, popř. doby mezi událostmi** je exponenciální rozdělení.

Toto rozdělení úzce souvisí s rozdělením Poissonovým. Jestliže Poissonovo rozdělení popisuje počet výskytů událostí v časovém intervalu, exponenciální rozdělení se používá k popisu doby do výskytu příslušné události. Např. [počet dopravních nehod na Martinovské křižovatce za určitý časový interval](#) se popisuje Poissonovým rozdělením, zatímco dobu od jedné nehody do druhé lze popsat rozdělením exponenciálním.

Obě tato rozdělení hrají důležitou roli v teorii spolehlivosti. Časté aplikace jsou též v teorii hromadné obsluhy (teorii front), kde se pomocí exponenciálního rozdělení modeluje [doba čekání ve frontě](#).

To, že náhodná veličina X má exponenciální rozdělení s parametrem λ ($\lambda > 0$), budeme zapisovat

$$X \rightarrow \text{Exp}(\lambda)$$

Funkce **hustoty pravděpodobnosti** exponenciálního rozdělení je dána vztahem

$$f(t) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Distribuční funkce náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením $\text{Exp}(\lambda)$ je dána vztahem

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$



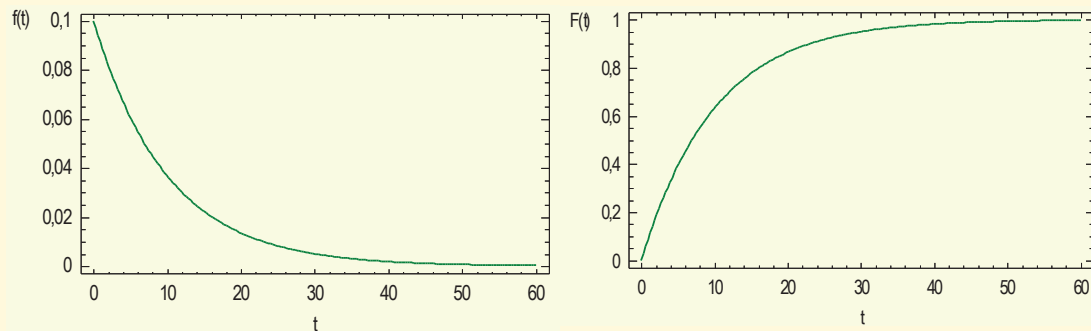
Obsah

187. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



Obr. 6.2: Hustota a distribuční funkce exponenciální náhodné veličiny

Střední hodnota a **rozptyl** náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením jsou dány vztahy

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, D(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Převrácená hodnota rychlosti výskytu události λ , tj. $1/\lambda$, bývá v literatuře označována také jako „**parametr měřítka**“.



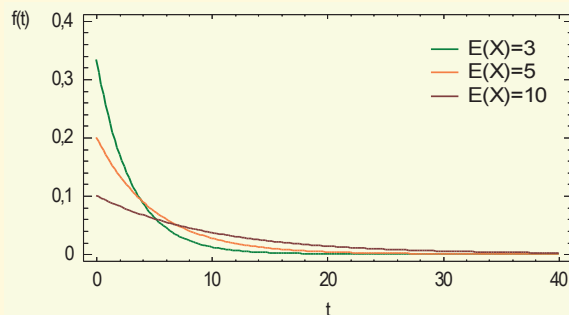
Obsah

188. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno



Obr. 6.3: Vliv parametru měřítka na tvar grafu hustoty exponenciálního rozdělení

6.2.1. Intenzita poruch

Modelujeme-li dobu do výskytu události ([životnost](#), [dobu do poruchy](#), [dobu do relapsu](#) ([návratu onemocnění](#)), apod.), používáme kromě hustoty pravděpodobnosti a distribuční funkce také funkci známou pod názvem intenzita poruch (hazardní funkce, angl. „hazard function“).

Pro nezápornou náhodnou veličinu X se spojitým rozdělením popsaným distribuční funkcí $F(t)$ definujeme pro $F(t) \neq 1$ (tj. $F(t) < 1$) **intenzitu poruch** $\lambda(t)$ jako

$$\frac{f(t)}{1 - F(t)}.$$

Představuje-li náhodná veličina X dobu do poruchy nějakého zařízení, pak pravděpodobnost, že pokud do času t nedošlo k žádné poruše, tak k ní dojde v následujícím krátkém



Obsah

189. strana ze 293



Zavřít dokument

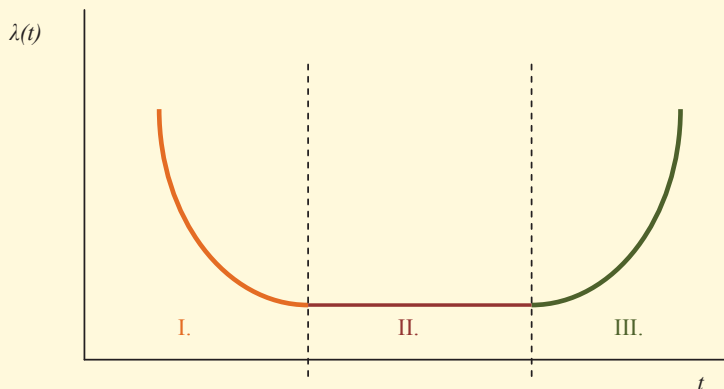
Celá obrazovka / Okno

úseku délky Δt , je přibližně $\lambda(t) \cdot \Delta t$.

$$P(t \leq X < t + \Delta t | X \geq t) \approx \frac{f(t)}{1 - F(t)} \Delta t = \lambda(t) \cdot \Delta t$$

Jak vypadá model intenzity poruch?

Pokud zůstaneme u představy, že náhodná veličina X popisuje dobu do poruchy nějakého systému, pak empirický model intenzity poruch je zobrazen na Obr. 6.4.



Obr. 6.4: Model intenzity poruch

Křivka na Obr. 6.4 se nazývá vanová křivka (angl. „bath tube“) a obvykle se dělí na tři úseky (I, II, III).

- I. v prvním úseku křivka intenzity poruch klesá. Odpovídající časový interval se nazývá **období časných poruch** (období záběhu, období počátečního provozu, období osvojování nebo období dětských nemocí podle analogie s úmrtnostní křivkou člověka). Příčinou zvýšené intenzity poruch v tomto období jsou poruchy v důsledku výrobních vad, nesprávné montáže, chyb při návrhu, nebo při výrobě apod.
- II. Ve druhém úseku dochází k běžnému využívání zaběhnutého výrobku, k poruchám dochází většinou z vnějších příčin, nedochází k opotřebení, které by změnilo funkční vlastnosti výrobku. Intenzita poruch je v tomto období přibližně konstantní. Příslušný časový interval se nazývá období normálního užití, či **období stabilního života**.
- III. Ve třetím úseku procesy stárnutí a opotřebení mění funkční vlastnosti výrobku, projevují se nashromážděné otřesy výrobku z období II, trhliny materiálu a intenzita poruch vzrůstá. Příslušný časový interval se nazývá **období poruch v důsledku stárnutí a opotřebení**.

Intenzitu poruch modelujeme v jednotlivých úsecích pomocí různých rozdělení.

Vliv parametrů exponenciálního rozdělení na tvar křivek hustoty pravděpodobnosti, distribuční funkce a intenzity poruch můžete sledovat v excelovském souboru [Spojité rozdělení](#) (870 KB).

6.2.2. Exponenciální rozdělení = „rozdělení bez paměti“

Dosazením lze jednoduše ukázat, že intenzita poruch náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením $Exp(\lambda)$ je dána vztahem

$$\lambda(t) = \lambda = \text{konstanta}, \quad t > 0.$$



Obsah

191. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Má-li doba do výskytu události exponenciální rozdělení, pak je intenzita poruch konstantní. Tzn., že není závislá na délce předcházejícího provozu sledovaného systému. Říkáme, že exponenciální rozdělení je „**rozdělení bez paměti**“. Zdá se jako by sledovaný systém „zapomněl“ na dříve odpracovanou dobu. (Považovali-li bychom dobu do poruchy monitoru za exponenciální náhodnou veličinu, pak pravděpodobnost, že se monitor porouchá za více než 200 hodin od této chvíle, by nijak nezávisela na jeho stáří (době jeho předcházejícího provozu)).

Modelujeme-li dobu do poruchy exponenciálním rozdělením, pak pravděpodobnost, že systém, který pracoval bez poruchy po dobu t_1 , bude pracovat bez poruchy ještě alespoň po dobu t_2 , je rovna pravděpodobnosti, že systém, který dosud nebyl v provozu, bude pracovat alespoň po dobu t_2 . (Má-li doba do výskytu události exponenciální rozdělení, pak informace o tom, že událost nenastala po dobu t_1 , nemění pravděpodobnost výskytu události v následujícím období délky t_2 .)

$$P(X > (t_1 + t_2) | X > t_1) = P(X > t_2); \quad t_1, t_2 \geq 0$$

Tato vlastnost vysvětluje použití exponenciálního rozdělení v teorii spolehlivosti. **Exponenciální rozdělení popisuje dobře rozdělení doby života systémů, u kterých dochází k poruše ze zcela náhodných příčin a nikoliv v důsledku opotřebení** (mechanické opotřebení, únava materiálu apod.), tj. u systémů nacházejících se v období stabilního života.

Příklad 6.1. Výrobce žárovek Edison ví, že průměrná životnost žárovek Edison je 10.000 h. v rámci své propagační kampaně chce garantovat dobu T , do níž se nespálí více než 3% žárovek. Určete tuto dobu. (Pro modelování doby života žárovek použijte exponenciální rozdělení.)



Obsah

192. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Pro řešení tohoto příkladu můžete použít excelovský soubor *Vybraná rozdělení pravděpodobnosti* (600 KB).

Řešení 6.1.

6.3. Weibullovo rozdělení

Weibullovo rozdělení, stejně jako rozdělení exponenciální, slouží k modelování doby do výskytu události (*doby do poruchy, doby bezporuchovosti, doby do relapsu (návratu onemocnění)*, apod.). Zatímco exponenciálním rozdělením lze modelovat pouze dobu do výskytu události u systémů, které se nacházejí v období stabilního života, Weibullovo rozdělení je mnohem flexibilnější a umožňuje tak modelovat dobu do výskytu události i u systému, které jsou **v období časných poruch nebo v období stárnutí** (tj. tam kde se projevuje mechanické opotřebení nebo únava materiálu).

Weibullovo rozdělení má dva parametry: Θ – parametr měřítka (angl. „scale“, $\Theta > 0$, závisí na materiálu, namáhání a podmínkách užívání) a β – parametr tvaru (angl. „shape“, $\beta > 0$ ovlivňuje tvar intenzity poruch a tím i vhodnost použití pro určité období doby života).

Má-li náhodná veličina X Weibullovo rozdělení, značíme to

$$X \rightarrow W(\Theta, \beta).$$

Distribuční funkce náhodné veličiny s Weibullovým rozdělením je dána vztahem

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-(\frac{t}{\Theta})^\beta}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$



Obsah

193. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Všimněte si, že exponenciální rozdělení je speciálním typem Weibullova rozdělení pro $\beta = 1$. (Je-li $\beta = 1$, pak $\Theta = \frac{1}{\lambda}$.)

Hustota pravděpodobnosti:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\beta}{\Theta^\beta} t^{\beta-1} e^{-(\frac{t}{\Theta})^\beta}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Vztahy pro **střední hodnotu** a **rozptyl** náhodné veličiny s Weibullovým rozdělením se vyjadřují pomocí gama funkce $\Gamma(X)$ ($\Gamma(X) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$).

$$E(X) = \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right)\Theta = \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right)\frac{1}{\lambda},$$

$$D(X) = [\Gamma\left(\frac{2}{\beta} + 1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{\beta} + 1\right)]\Theta^2 = [\Gamma\left(\frac{2}{\beta} + 1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{\beta} + 1\right)]\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2.$$

Intenzita poruch:

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\Theta^\beta} t^{\beta-1} = \beta \lambda^\beta t^{\beta-1}, t > 0, \Theta > 0, \beta > 0.$$

Ze vztahu pro intenzitu poruch Weibullova rozdělení je zřejmé, že

$$\lambda(t) = \textit{konstanta} \cdot t^{\beta-1},$$

a proto tvar intenzity poruch závisí pouze na volbě parametru β . Vliv parametru β na tvar intenzity poruch prezentují Tab. 6.1 a Obr. 6.5.



Obsah

194. strana ze 293

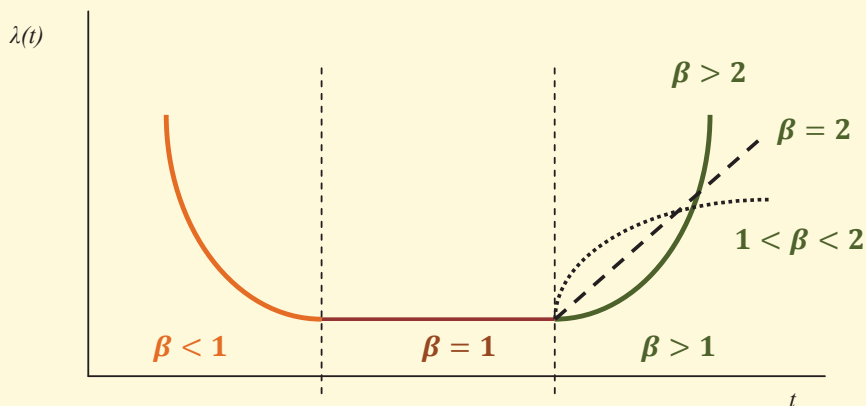


Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Tab. 6.1: Vliv parametru β na tvar intenzity poruch

$0 < \beta < 1$	období dětských nemocí		$\lambda(t)$... klesající funkce
$\beta = 1$	období stabilního života		$\lambda(t) = \lambda = \frac{1}{\theta} = \text{konst. (exp. rozdělení)}$
$\beta > 1$	období stárnutí	$1 < \beta < 2$	$\lambda(t)$... konkávní, rostoucí funkce
		$\beta = 2$	$\lambda(t)$... lineárně rostoucí funkce
		$\beta > 2$	$\lambda(t)$... konvexní, rostoucí funkce



Obr. 6.5: Vliv parametru β na tvar intenzity poruch

Vliv parametrů Weibullova rozdělení na tvar křivek hustoty pravděpodobnosti, distribuční

Obsah

195. strana ze 293

Navigation icons: back, forward, search, etc.

Navigation icons: back, forward, search, etc.

Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

funkce a intenzity poruch můžete sledovat v excelovském souboru *Spojité rozdělení* (870 KB).

Příklad 6.2. Předpokládejme, že doba do poruchy určitého systému je modelována Weibullovým rozdělením s lineární a rostoucí intenzitou poruch a parametrem měřítka $\Theta = 50$.

- Jaká je intenzita poruch systému po deseti hodinách bezporuchové funkce?
- Jaká je pravděpodobnost, že systém bude pracovat bez poruchy během počátečních 100 hodin?

Pro řešení tohoto příkladu můžete použít excelovský soubor *Vybraná rozdělení pravděpodobnosti* (600 KB).

Řešení 6.2.

6.4. Erlangovo rozdělení

Náhodná veličina s Erlangovým rozdělením popisuje dobu do výskytu k -té události v Poissonově procesu.

Erlangovo rozdělení má dva parametry: k – počet událostí (parametr tvaru, angl. „shape“), k nimž má dojít a rychlost výskytu těchto událostí λ (parametr měřítka, angl. „scale“).

Má-li náhodná veličina X_k Erlangovo rozdělení, značíme

$$X_k \rightarrow \text{Erlang}(k, \lambda).$$



Obsah

196. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



Obr. 6.6: Ilustrace náhodné veličiny s Erlangovým rozdělením

X_k =doba do výskytu k -té události (na obr. $k = 4$)

Pro Erlangovo rozdělení s parametry k a λ platí tyto vztahy:

Hustota pravděpodobnosti:

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

Distribuční funkce:

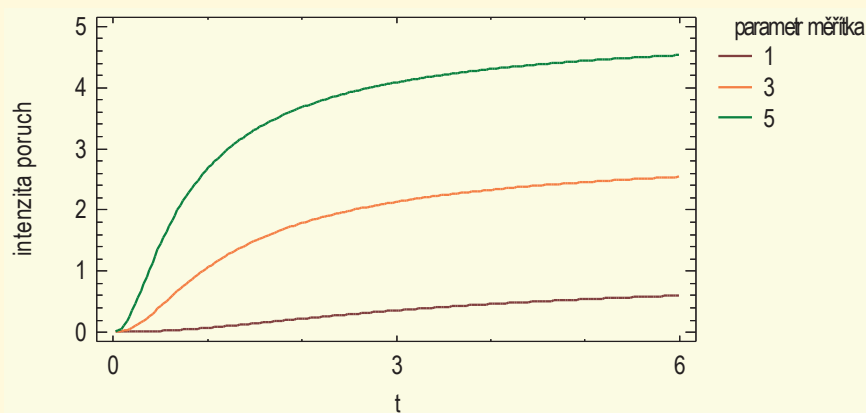
$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^j}{j!}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

Intenzita poruch:

$$\lambda(t) = \frac{\lambda}{(k-1)! \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{(k-1-j)! (\lambda t)^j}}$$

Střední hodnota: $E(X_k) = \frac{k}{\lambda}$

Rozptyl: $D(X_k) = \frac{k}{\lambda^2}$



Obr. 6.7: Vliv parametru měřítka na tvar intenzity poruch ($k = 4$)

Intenzita poruch $\lambda(t)$ je v případě Erlangova rozdělení rostoucí funkce, a proto je toto rozdělení vhodné pro modelování procesů stárnutí.

Erlangovo rozdělení je speciálním typem tzv. Gamma rozdělení pro parametr k z množiny celých čísel. (Tuto souvislost je vhodné znát, chceme-li k nalezení distribuční funkce, popř. hustoty pravděpodobnosti použít statistický software – některé statistické balíky mají implementováno pouze Gamma rozdělení a hodnoty Erlangova rozdělení pak získáme dosazením hodnoty parametru k).

Vliv parametrů Erlangova rozdělení na tvar křivek hustoty pravděpodobnosti, distribuční funkce a intenzity poruch můžete sledovat v excelovském souboru [Spojitá rozdělení](#) (870 KB).

6.5. Souvislost mezi rozděleními

Mezi mnohými dosud probranými rozděleními založenými na Bernoulliho pokusech a na Poissonově procesu lze najít logickou souvislost zobrazenou na následujícím obrázku 6.8.



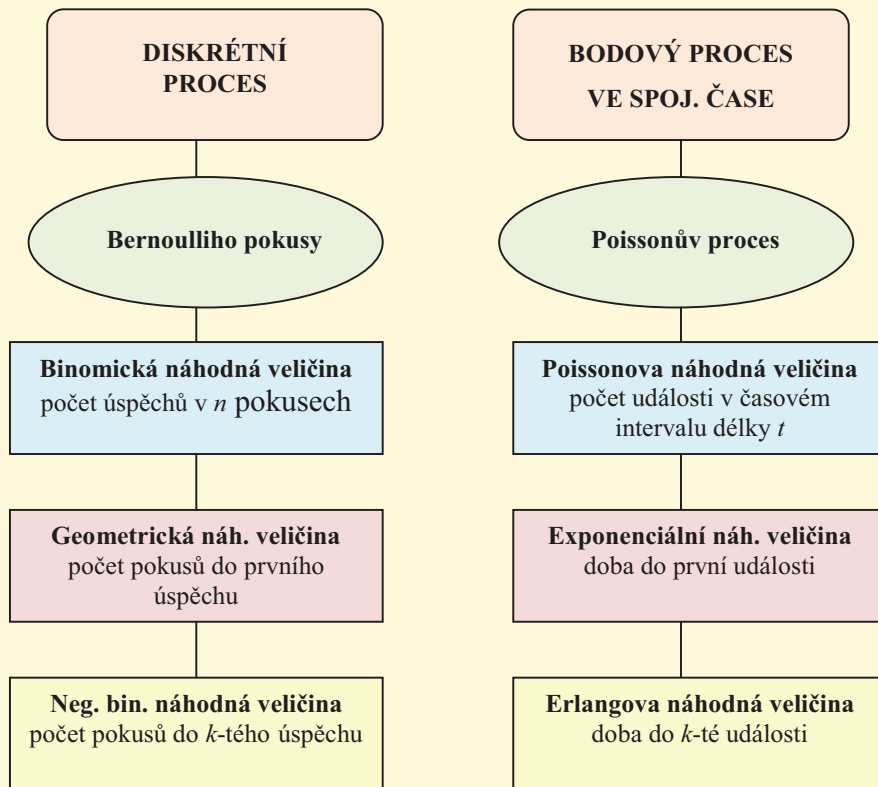
Obsah

199. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



Obr. 6.8: Souvislost mezi rozděleními v Bernoulliho pokusech a v Poissonově procesu

6.6. Normální rozdělení

Nejpoužívanějším pravděpodobnostním rozdělením modelujícím chování velkého množství náhodných jevů v technice, přírodních vědách i ekonomii je rozdělení normální. z hlediska aplikací bývá vhodné k popisu náhodných veličin, které lze interpretovat jako aditivní výsledek mnoha nepatrných a vzájemně nezávislých vlivů (např. [chyba měření](#), [odchylka rozměru výrobku od požadované hodnoty](#), ...). Proto bývá normální rozdělení také označováno jako **zákon chyb**. Značný význam normálního rozdělení spočívá rovněž v tom, že **za určitých podmínek lze pomocí něj aproximovat řadu jiných spojitých i nespojitých rozdělení**.

Normální rozdělení má dva parametry: μ – střední hodnotu, charakterizující polohu tohoto rozdělení a σ^2 – rozptyl, charakterizující rozptýlení hodnot náhodné veličiny kolem střední hodnoty.

POZOR!

V anglosaské literatuře (a v některých statistických balících) jsou jako parametry normálního rozdělení uváděny střední hodnota μ a směrodatná odchylka σ .

To, že se náhodná veličina X řídí normálním rozdělením se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2 zapisujeme

$$X \rightarrow N(\mu; \sigma^2)$$

Hustota pravděpodobnosti:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}, -\infty < x < \infty$$



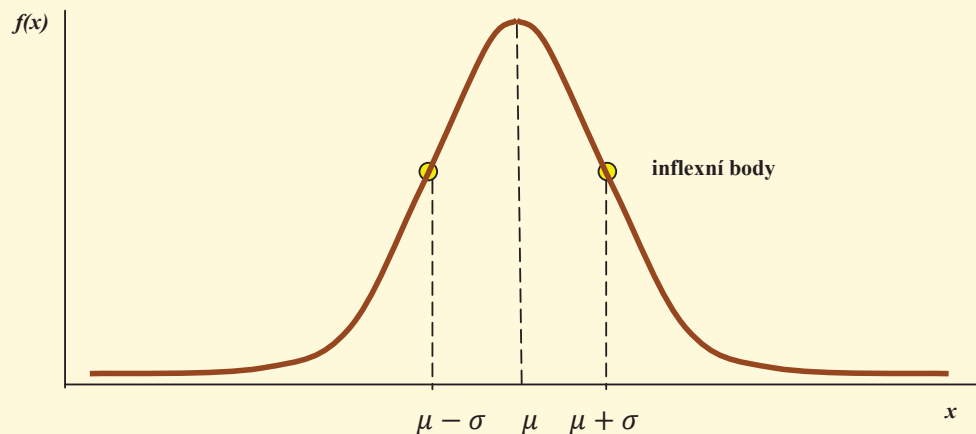
Obsah

201. strana ze 293



Zavřít dokument

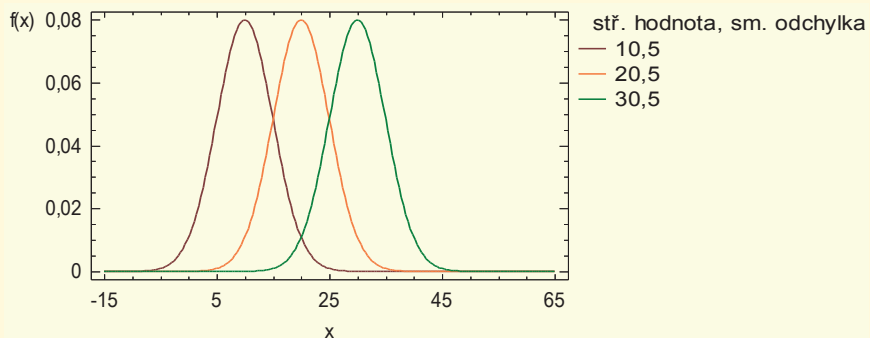
Celá obrazovka / Okno



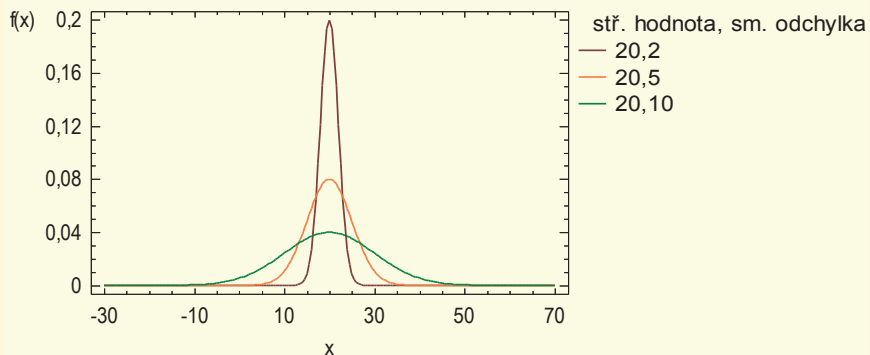
Obr. 6.9: Hustota pravděpodobnosti normálního rozdělení

Grafem hustoty pravděpodobnosti náhodné veličiny s normálním rozdělením je tzv. Gaussova křivka (Gaussův klobouk, zvonová funkce, angl. „bell curve“, Obr. 6.9). Jde o zvonovitou funkci dosahující maxima pro $x = \mu$. Parametr σ udává „horizontální“ vzdálenost inflexních bodů od μ a tím i šířku Gaussovy křivky.

Vliv parametrů μ a σ na tvar a pozici Gaussovy křivky v souřadnicovém systému ilustrují Obr. 6.10 a Obr. 6.11.



Obr. 6.10: Vliv parametru μ na polohu Gaussovy křivky



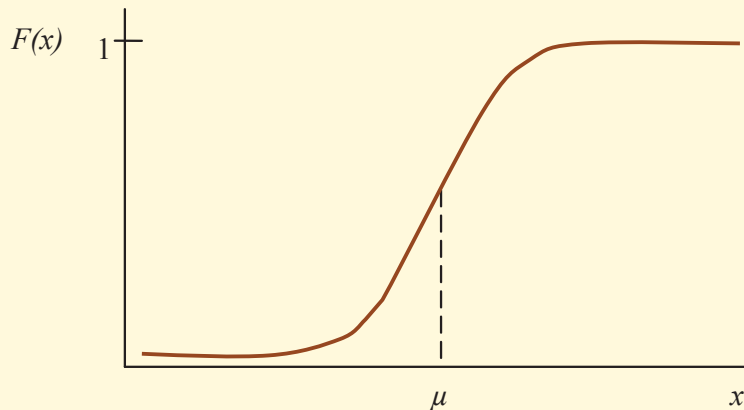
Obr. 6.11: Vliv parametru σ na polohu Gaussovy křivky

Distribuční funkce:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t-\mu}{\sqrt{2}\sigma}} dt$$

Střední hodnota: $EX = \mu$

Rozptyl: $DX = \sigma^2$



Obr. 6.12: Distribuční funkce náhodné veličiny s normálním rozdělením



Obsah

204. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Protože $\int e^{-x^2} dx$ nelze zapsat pomocí konečně mnoha elementárních funkcí, využívá se možnosti vyjádřit distribuční funkci normální náhodné veličiny pomocí distribuční funkce normované náhodné veličiny, tj. normální náhodné veličiny s parametry $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$. Distribuční funkce normované náhodné veličiny byla v mnoha bodech určena pomocí numerických metod a následně tabelována. (Viz odstavec 6.7.1).

Vliv parametrů normálního rozdělení na tvar křivky hustoty pravděpodobnosti můžete sledovat v následující animaci.



Obsah

205. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno



Graf Gaussovy křivky

*Instrukce pro spuštění vložených animací naleznete na
<http://mi21.vsb.cz/adobe-reader-multimedia>.*

Obsah

206. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

6.7. Normované (standardizované) normální rozdělení

Jak již jsme se zmínili, jde o speciální typ normálního rozdělení se střední hodnotou rovnou nule a jednotkovým rozptylem. To, že má náhodná veličina Z (obvyklé značení pro normovanou normální náhodnou veličinu) normované normální rozdělení, značíme

$$Z \rightarrow N(0; 1).$$

Na důležitost tohoto rozdělení ukazuje i speciální značení pro distribuční funkci ($\phi(x)$) a hustotu pravděpodobnosti $\varphi(z)$.

Hustota pravděpodobnosti:

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}; -\infty < z < \infty$$

Distribuční funkce:

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \cdot \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Střední hodnota: $E(Z) = 0$

Rozptyl: $D(Z) = 1$

Význam normovaného normálního rozdělení spočívá zejména v tom, že **jeho distribuční funkce je tabelována** (viz příloha Tabulky) a lze pomocí ní počítat distribuční funkce náhodných veličin s normálním rozdělením o libovolných parametrech μ a σ . v tabulkách



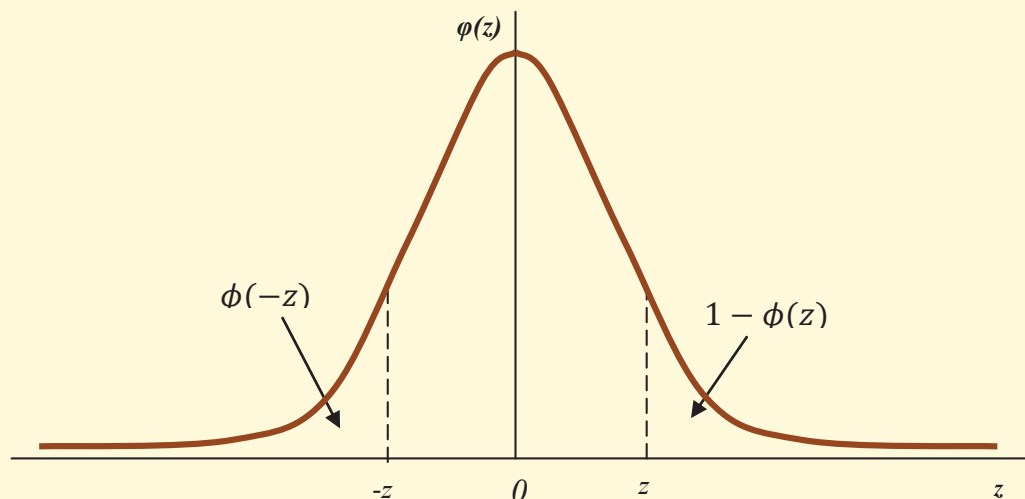
Obsah

207. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



Obr. 6.13: Hustota pravděpodobnosti normovaného normálního rozdělení

najdeme distribuční funkci normovaného normálního rozdělení pro $z \geq 0$. Pro $z < 0$ určíme distribuční funkci na základě převodního vztahu mezi $\phi(z)$ a $\phi(-z)$.

Hustota pravděpodobnosti normovaného normálního rozdělení je sudá funkce a platí pro ni proto

$$\varphi(z) = \varphi(-z); -\infty < z < \infty.$$

Zároveň lze ukázat (viz Obr. 6.13), že pro distribuční funkci normované normální náhodné veličiny platí

$$\phi(z) = 1 - \phi(-z); -\infty < z < \infty$$

Obsah

208. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Ze sudosti hustoty pravděpodobnosti $\phi(z)$ (Obr. 6.13) je taktéž zřejmé, že pro kvantily normovaného normálního rozdělení, pro které budeme používat speciální značení z_p platí

$$z_p = -z_{1-p}.$$

Příklad 6.3. Určete:

- a) $\phi(0, 54)$,
- b) $\phi(-2, 42)$,
- c) $z_{0,75}$,
- d) $z_{0,25}$.

Pro řešení tohoto příkladu můžete použít excelovský soubor *Vybraná rozdělení pravděpodobnosti* (600 KB).

Řešení 6.3.

6.7.1. Standardizace normálního rozdělení

Jelikož při lineární transformaci náhodné veličiny zůstává normalita rozdělení náhodné veličiny zachována, lze pro určení distribuční funkce libovolné normální náhodné veličiny použít distribuční funkci normované (standardní) normální náhodné veličiny. Proces transformace náhodné veličiny s normálním rozdělením na náhodnou veličinu s normovaným normálním rozdělením se označuje jako standardizace.

Nechť

$$X \rightarrow N(\mu; \sigma^2)$$



Obsah

209. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Definujme náhodnou veličinu Z , mnohdy nazývanou **z-skóre**, jako

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Náhodná veličina Z má normované normální rozdělení, $Z \rightarrow N(0; 1)$.

Mezi distribuční funkci normální náhodné veličiny X a distribuční funkcí normovanou normální náhodnou veličinou Z platí převodní vztah

$$F(X) = \phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

Důkaz:

$$F(x) = P(X < x) = P(Z \cdot \sigma + \mu < x) = P\left(Z < \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

Příklad 6.4. Nechť náhodná veličina X modelující odchylku šířky výrobku od požadované hodnoty má normální rozdělení se střední hodnotou 10 mm a směrodatnou odchylkou 5 mm.

Určete:

a) $F(7)$,

b) $x_{0,75}$,

a) $x_{0,30}$,

Vysvětlete praktický význam nalezených informací.



Obsah

210. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Pro řešení tohoto příkladu můžete použít excelovský soubor *Vybraná rozdělení pravděpodobnosti* (600 KB).

Řešení 6.4.

6.7.2. Pravidlo 3σ

Pravidlo 3σ je jedním ze základních principů, na nichž stojí kontrola kvality a jakosti (SPC – Statistics Process Control, ISO normy pro SPC). Toto pravidlo říká, že **máme-li data pocházející z normálního rozdělení o parametrech μ , σ^2 , pak téměř všechna (99,8% z nich) leží v intervalu $(\mu \pm 3\sigma)$.**

Důkaz:

$$X \rightarrow N(\mu, \sigma^2)$$

Chceme dokázat, že $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0,998$.

$$\begin{aligned} P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) &= F(\mu + 3\sigma) - F(\mu - 3\sigma) = \Phi\left(\frac{(\mu+3\sigma)-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{(\mu-3\sigma)-\mu}{\sigma}\right) = \\ &= \Phi(3) - \Phi(-3) = \Phi(3) - [1 - \Phi(3)] = 2 \cdot \Phi(3) - 1 = 2 \cdot 0,999 - 1 = 0,998 \end{aligned}$$

Poznámka:

Všimněte si, že

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = P(-3 < Z < 3) = 0,998$$

$\Rightarrow$

$$P(X \notin (\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma)) = P(Z \notin (-3; 3)) = 0,002$$



Obsah

211. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Jak lze tento výsledek interpretovat? Pravděpodobnost, že normální náhodná veličina X se střední hodnotou μ a směrodatnou odchylkou σ bude mít hodnotu mimo interval $(\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma)$ je stejná jako pravděpodobnost, že z -skóre bude mít hodnotu mimo interval $(-3; 3)$, tj. pouze 0,2%. Je tedy velmi nepravděpodobné, že z -skóre $Z \notin (-3; 3)$.

Uvědomte si, že tato skutečnost se využívá při identifikaci odlehlých pozorování pomocí z -souřadnice (z -skóre).

Příklad 6.5. Stanovme pravděpodobnost, že náhodná veličina X mající rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ bude mít hodnotu z intervalu $(\mu - k \cdot \sigma; \mu + k \cdot \sigma)$ pro dané kladné k .

Pro řešení tohoto příkladu můžete použít excelovský soubor [Vybraná rozdělení pravděpodobnosti](#) (600 KB).

Řešení 6.5.

6.7.3. Nástroje ověření normality

Normalita je v drtivé většině analýz a testů (parametrické testy, Shewhartovy regulační diagramy, indexy způsobilosti...) hlavním předpokladem o datech. Jde o předpoklad, že data pocházejí z procesu s normálním rozdělením. **Ověření normality je nezbytný krok před každou zodpovědnou analýzou jednorozměrných dat.**

a) Grafické znázornění a vizuální posouzení



Obsah

212. strana ze 293



Zavřít dokument

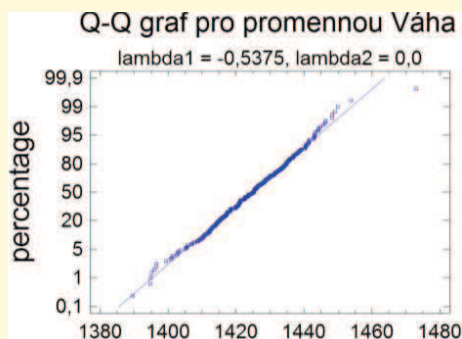
Celá obrazovka / Okno

Nejčastěji se používá Q-Q graf, jádrové odhady hustoty, popř. kruhový graf.

Q-Q graf

Jde o graf pro diagnostiku normality a odlehlých pozorování. Na ose x jsou vyneseny teoretické kvantily normálního rozdělení, na ose y jsou výběrové kvantily konstruované přímo z dat (viz Kap. 1). Pro normální data bez odlehlých pozorování má graf tvar přímky, pro normální data s odlehlými pozorováními má tvar přímky s koncovými body ležícími mimo tuto přímku, pro systematicky zešikmená data s kladnou šikmostí (např. rozdělení lognormální, exponenciální) má nelineární konvexní tvar.

Pro systematicky zešikmená data se zápornou šikmostí má nelineární konkávní tvar. Pro data s vyšší špičatostí než odpovídá normálnímu rozdělení, tedy s vysokou koncentrací dat kolem střední hodnoty (např. Laplaceovo rozdělení), má Q-Q graf tvar konkávně-konvexní. Pro data s nižší špičatostí než odpovídá normálnímu rozdělení, tedy s malou koncentrací dat kolem střední hodnoty (např. rovnoměrné rozdělení), má Q-Q graf tvar konvexně-konkávní. Proti číselným charakteristikám má Q-Q-graf výhodu v možnosti vizuálně posoudit, zda je případné porušení normality způsobeno jen několika body, nebo všemi daty.



Obsah

213. strana ze 293

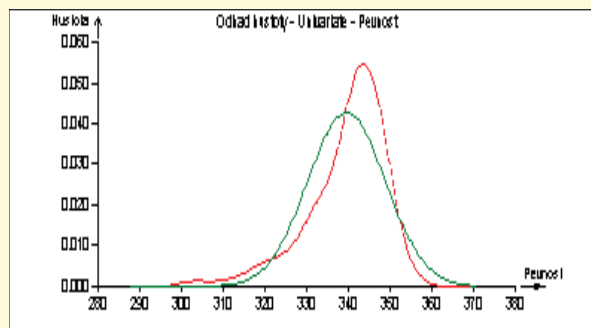


Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

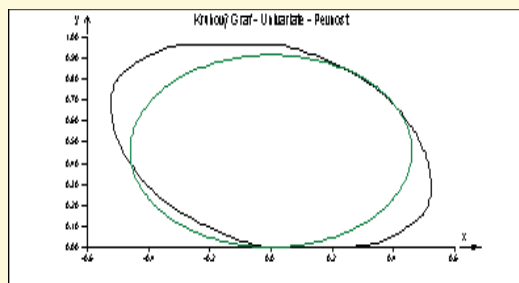
Odhad hustoty

Další možností ověření normality dat je porovnání průběhu hustoty pravděpodobnosti normálního rozdělení (plná čára) s odhadem hustoty vypočítaným na základě dat (přerušovaná čára). v případě normality a většího množství dat jsou si obě křivky blízké.



Kruhový graf

Slouží ke komplexnímu vizuálnímu posouzení normality na základě kombinace šikmosti a špičatosti. Zelený „kruh“ (elipsa) je optimální tvar pro normální rozdělení, černá křivka připomínající bramboru představuje data. v případě, že data lze považovat za realizace náhodné veličiny s normálním rozdělením, se obě křivky téměř kryjí.



Na obrázku 6.14 můžete porovnat grafické výstupy používané pro diagnostiku normality. První sloupec grafů odpovídá výběrům z normálního rozdělení, grafy ve druhém sloupci

Obsah

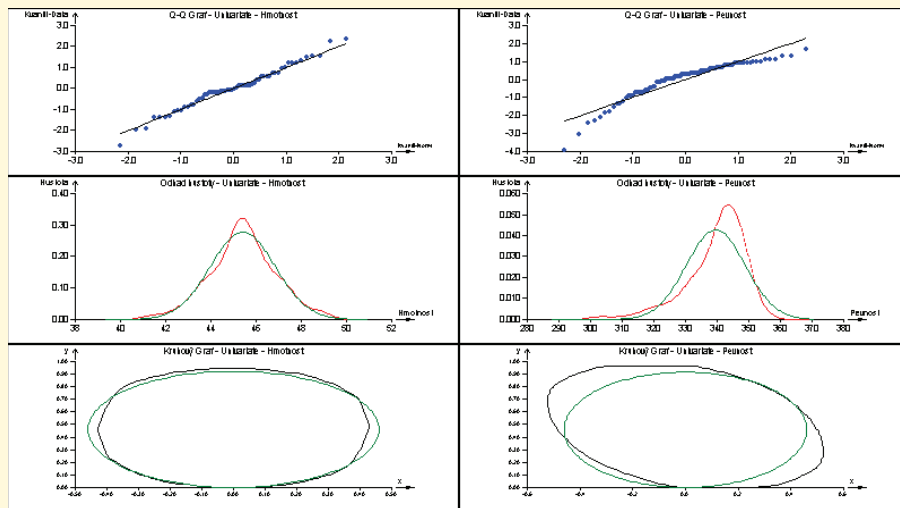
214. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

odpovídají datům, která normálnímu rozdělení neodpovídají.



Obr. 6.14: Ukázka diagnostických grafů pro posouzení normality (statistický software QC Expert 2.5)

Pro exaktní ověření toho, zda data lze považovat za výběr z normálního rozdělení, se používá mnoho druhů statistických testů (budeme se jimi zabývat později). Pro příklad uveďme test dobré shody (Goodness of Fit Test) a testy založené na hodnotě odhadu šikmosti a špičatosti.

6.7.4. Jak postupovat při porušení normality?

Již na základě posouzení diagnostických grafů můžeme usuzovat na to, zda není model normálního rozdělení pro analyzovaná data nevhodný. v praxi se často setkáváme s daty, která předpoklad normality nesplňují, jsou zešíkmena - buď kladně (dlouhý chvost napravo) nebo záporně (dlouhý chvost nalevo). Co s takovými daty dělat? v některých případech lze využít následujícího postupu.

1. Původní veličinu transformujeme (např. pomocí logaritmu, druhé odmocniny či převrácené hodnoty) na novou veličinu, pro kterou je model normálního rozdělení přijatelný.
2. Požadovanou analýzu potom provedeme na transformované veličině.
3. Výsledky analýzy (např. průměry či intervaly spolehlivosti) lze pro účely prezentace výsledků zpětně transformovat.

Pokud nenajdeme vhodnou transformaci na normální rozdělení, nabízí statistika jiné přístupy založené např. na tzv. neparametrických metodách.

6.8. Logaritmicko-normální rozdělení

Jak již bylo zmíněno, jednou z možností jak transformovat náhodnou veličinu na náhodnou veličinu s normálním rozdělením, je použití logaritmu. Jestliže má náhodná veličina Y ,



Obsah

216. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

$Y = \ln X$, normální rozdělení s parametry μ a σ^2 , pak řekneme, že náhodná veličina X má logaritmicko-normální rozdělení se stejnými parametry, což zapisujeme

$$X \rightarrow LN(\mu; \sigma^2)$$

Z definice je zřejmé, že náhodná veličina Y s logaritmicko-normálním rozdělením může nabývat pouze kladných hodnot (definiční obor $\ln x$). Proto nachází uplatnění při **popisu náhodných veličin nabývajících pouze kladných hodnot a to zejména v případech, kdy hustota pravděpodobnosti je asymetrická** (šikmost není nulová) s jedním vrcholem. Značný význam tohoto rozdělení tedy nacházíme v teorii spolehlivosti (**různé parametry součástek nabývají pouze kladných hodnot – životnost, rozměry, tažnost, ...**), v ekonomii při popisu příjmů (příjmová rozdělení), v medicíně při popisu tělesné výšky, doba přežití po jedné dávce ozáření, apod.

Hustota pravděpodobnosti:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sigma\sqrt{(2\pi)}} \cdot e^{-\frac{(\ln x - \mu)}{2\sigma^2}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Distribuční funkce:

Distribuční funkci logaritmicko-normálního rozdělení určujeme pomocí distribuční funkce normovaného normálního rozdělení.

$$F(X) = \begin{cases} \Phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right), & x > 0 \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$



Obsah

217. strana ze 293



Zavřít dokument

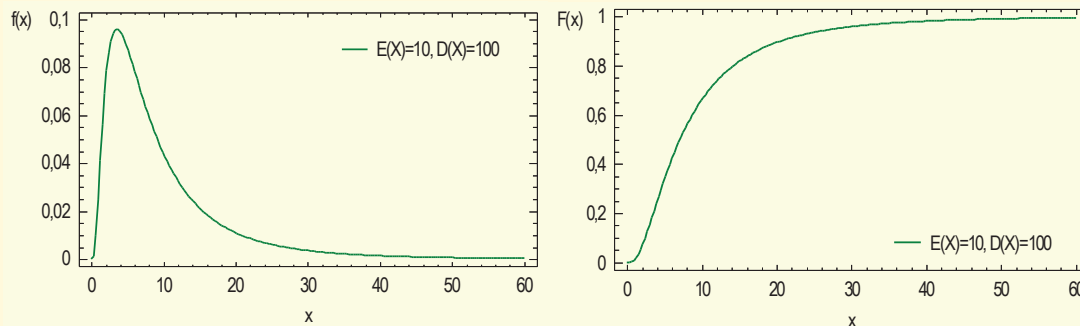
Celá obrazovka / Okno

Střední hodnota: $EX = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$

Rozptyl: $DX = e^{2\mu + \sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$

100p%-ní kvantil: $x_p = e^{\mu + \sigma \cdot x_p}$,

kde z_p je 100p%-ní kvantil normovaného normálního rozdělení



Obr. 6.15: Grafy hustoty pravděpodobnosti a distribuční funkce logaritmicko-normální NV

Vliv parametrů logaritmicko-normálního rozdělení na tvar křivek hustoty pravděpodobnosti a distribuční funkce můžete sledovat v excelovském souboru [Spojité rozdělení](#) (870 KB).

Jak již bylo uvedeno v Kap. 6.7.4, při praktickém používání tohoto rozdělení postupujeme tak, že náhodnou veličinu X nejdříve převedeme na $Y = \ln X$, požadovanou analýzu provedeme na náhodné veličině Y a výsledky zpětně transformujeme.



Obsah

218. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Příklad 6.6. Nechť X je náhodná veličina s logaritmicko-normálním rozdělením s parametry: $\mu=2$; $\sigma^2=9$.

Určete:

- a) pravděpodobnost, že náhodná veličina X je z intervalu $(0;30)$,
- b) medián dané náhodné veličiny,
- c) střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X .

Pro řešení tohoto příkladu můžete použít excelovský soubor *Vybraná rozdělení pravděpodobnosti* (600 KB).

Řešení 6.6.



Obsah

219. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno



6.9. Trocha teorie

Tato podkapitola je určena zájemcům o hlubší pochopení probírané látky. Najdete zde náznak odvození distribučních funkcí, hustot pravděpodobnosti, středních hodnot a rozptylů náhodných veličin popisovaných v této kapitole.

6.9.1. Rovnoměrné rozdělení

Proč je hustota pravděpodobnosti rovnoměrného rozdělení definována jako

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a; b) \\ 0, & x \notin (a; b) \end{cases} \quad ?$$

Odvození:

Uvedli jsme, že rovnoměrné rozdělení na intervalu $(a; b)$ je takové, jehož hustota pravděpodobnosti je konstantní na daném intervalu a všude jinde je nulová.

Z toho vyplývá, že vztah pro hustotu pravděpodobnosti můžeme zapsat ve tvaru

$$f(x) = \begin{cases} c, & x \in (a; b), c \in \mathbb{R} \\ 0, & x \notin (a; b). \end{cases}$$

Pro nalezení konstanty c využijeme, že obsah plochy „pod“ funkcí hustoty pravděpodobnosti musí být rovna 1.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

[Obsah](#)[220. strana ze 293](#)[Zavřít dokument](#)[Celá obrazovka/Okno](#)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_a^b c dx = [cx]_a^b = c(b-a)$$

$$c(b-a) = 1$$

$$c = \frac{1}{b-a}$$

A proto

$$f(x) = \begin{cases} c, & x \in (a; b), c \in \mathbb{R} \\ 0, & x \notin (a; b). \end{cases}$$

Odvození distribuční funkce rovnoměrného rozdělení

Distribuční funkce je obecně dána vztahem $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$. v případě rovnoměrného rozdělení, jehož hustota pravděpodobnosti je

$$f(x) = \begin{cases} c, & x \in (a; b), c \in \mathbb{R} \\ 0, & x \notin (a; b). \end{cases}$$

$$x \in (-\infty; a) : F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0,$$

$$x \in (a; b) : F(x) = \int_{-\infty}^a 0 dt + \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \left[\frac{t}{b-a} \right]_a^x = \frac{x-a}{b-a},$$

$$x \in (b; \infty) : F(x) = \int_{-\infty}^a 0 dt + \int_a^b \frac{1}{b-a} dt = 0 + \frac{b-a}{b-a} + 0 = 1$$



Obsah

221. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Distribuční funkce rovnoměrné náhodné veličiny je tedy dána vztahem

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty; a) \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in (a; b) \\ 1, & x \in (b; \infty). \end{cases}$$

Odvození střední hodnoty a rozptylu

Obecný vztah pro střední hodnotu spojitě NV je $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$. v případě rovnoměrné náhodné veličiny platí

$$E(X) = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$$

Rozptyl NV určujeme pomocí střední hodnoty a druhého obecného momentu NV. Střední hodnotu již známe, druhý obecný moment rovnoměrné NV určíme jako

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx$$

$$E(X^2) = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^3 - a^3}{3} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$$

Dle známého výpočetního vztahu pak můžeme určit rozptyl.

$$\begin{aligned} D(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{4a^2 + 4ab + 4b^2 - 3a^2 - 6ab - 3b^2}{12} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{12} = \\ &= \frac{(a-b)^2}{12} \end{aligned}$$



Obsah

222. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

6.9.2. Exponenciální rozdělení

Odvození distribuční funkce doby do poruchy zařízení nacházejícího se v období stabilního života

Exponenciální náhodná veličina se používá k modelování doby do výskytu události (poruchy), popřípadě doby mezi událostmi v Poissonově procesu (intenzita poruch musí být konstantní).

Definujme náhodnou veličinu X jako dobu do výskytu události a náhodnou veličinu N_t jako počet výskytu události v časovém intervalu $(0; t)$. Nechť $X \rightarrow \text{Exp}(\lambda)$ a $N_t \rightarrow \text{Po}(\lambda t)$.

Na základě logické úvahy, pak můžeme tvrdit, že jevy $N_t \geq 1$ (v časovém intervalu $(0; t)$ dojde k alespoň jednomu výskytu události) a $X < t$ (doba do události je menší než t) jsou ekvivalentní, což zapíšeme

$$(N \geq t) \Leftrightarrow (X < t).$$

Na základě výše uvedené ekvivalence jevů pak můžeme zapsat i příslušné vztahy pro jejich pravděpodobnosti a z nich odvodit distribuční funkci náhodné veličiny X (doby do výskytu události).

$$P(X < t) = P(N_t \geq 1)$$

$$F(t) = 1 - P(N_t < 1)$$

$$F(t) = 1 - P(N_t = 0)$$

$$F(t) = 1 - \frac{(\lambda t)^0 e^{-\lambda t}}{0!}$$

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}; t \geq 0; \lambda$$



Obsah

223. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



Odvození hustoty pravděpodobnosti exponenciálního rozdělení

Hustotu pravděpodobnosti odvodíme z převodního vztahu mezi hustotou a distribuční funkcí.

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$$
$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} t \geq 0; \lambda > 0$$

Odvození intenzity poruch exponenciálního rozdělení

Intenzita poruch je rovna podílu hustoty pravděpodobnosti a doplňku distribuční funkce.

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}; F(t) < 1, t > 0$$

$$\lambda(t) = \frac{\lambda \cdot e^{-\lambda t}}{1 - (1 - e^{-\lambda t})} = \lambda = \frac{1}{EX}$$

Odvození střední hodnoty a rozptylu

[Obsah](#)[224. strana ze 293](#)[Zavřít dokument](#)[Celá obrazovka/Okno](#)

$$\begin{aligned}
 E(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t) dt = \int_0^{\infty} t \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda t} dt = \left| \begin{array}{ll} u = \lambda t & v' = e^{-\lambda t} \\ u' = \lambda & v = \left(-\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda t} \end{array} \right| = \\
 &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left[-t \cdot e^{-\lambda t} \right]_0^a + \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt = (-1) \cdot \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a}{e^{\lambda a}} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt = \\
 &= (-1) \cdot \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda \cdot e^{\lambda a}} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt = 0 + \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt = \lim_{a \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda t} \right]_0^a = \\
 &= \frac{1}{\lambda}
 \end{aligned}$$

Rozptyl je roven rozdílu druhého obecného momentu a kvadrátu střední hodnoty. Střední hodnotu jsem již odvodili, musíme tedy určit ještě druhý obecný moment.



Obsah

225. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

$$\begin{aligned}
E(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot f(t) dt = \int_0^{\infty} t^2 \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda t} dt = \left| \begin{array}{ll} u = (\lambda t^2) & v' = e^{-\lambda t} \\ u' = (2\lambda t) & v = \left(-\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda t} \end{array} \right| = \\
&= \lim_{a \Rightarrow \infty} \left[-t^2 \cdot e^{-\lambda t} \right]_0^a + \int_0^{\infty} 2 \cdot t \cdot e^{-\lambda t} dt = (-1) \cdot \lim_{a \Rightarrow \infty} \frac{a^2}{e^{\lambda a}} + \int_0^{\infty} 2 \cdot t \cdot e^{-\lambda t} dt = \\
&= (-1) \cdot \lim_{a \Rightarrow \infty} \frac{2a}{\lambda \cdot e^{\lambda a}} + \int_0^{\infty} 2 \cdot t \cdot e^{-\lambda t} dt = (-1) \cdot \lim_{a \Rightarrow \infty} \frac{2}{\lambda^2 \cdot e^{\lambda a}} + \\
&+ \int_0^{\infty} 2 \cdot t \cdot e^{-\lambda t} dt = 0 + \int_0^{\infty} 2 \cdot t \cdot e^{-\lambda t} dt = \left| \begin{array}{ll} u = (2t) & v' = e^{-\lambda t} \\ u' = (2) & v = \left(-\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda t} \end{array} \right| = \\
&= \lim_{a \Rightarrow \infty} \left[\frac{-2t}{\lambda} \cdot e^{-\lambda t} \right]_0^a + \int_0^{\infty} \left(\frac{2}{\lambda} \right) \cdot e^{-\lambda t} dt = \left(\frac{-2}{\lambda} \right) \cdot \lim_{a \Rightarrow \infty} \frac{a}{e^{\lambda a}} - \\
&- \frac{2}{\lambda^2} \cdot \lim_{a \Rightarrow \infty} \left[e^{-\lambda t} \right]_0^a = \left(-\frac{2}{\lambda} \right) \cdot \lim_{a \Rightarrow \infty} \frac{0}{\lambda \cdot e^{\lambda a}} - \frac{2}{\lambda^2} \cdot (-1) = \frac{2}{\lambda^2}
\end{aligned}$$



Obsah

226. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Nyní můžeme určit rozptyl.

$$D(X) = E(X^2 - (E(X))^2) = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

6.9.3. Erlangovo rozdělení

Odvození distribuční funkce Erlangova rozdělení

Nechť

X_k je doba do výskytu k -té události v Poissonově procesu, $X_k \rightarrow \text{Erlang}(k; \lambda)$,
 N_t je počet výskytu události v časovém intervalu $N_t \rightarrow \text{Po}(\lambda t)$.

Platí, že v časovém intervalu $(0; t)$ nastane alespoň k událostí právě tehdy, když doba do výskytu k -té události je menší než t .

$$(N_t \geq k \Leftrightarrow (X_k < t))$$

Z této ekvivalence lze odvodit distribuční funkci Erlangova rozdělení.

$$F(t) = P(X_k < t) = P(N_t \geq k) = 1 - P(N_t < k) = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} (e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^j}{j!}) = 1 - e^{-\lambda t} \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^j}{j!}$$

Odvození hustoty pravděpodobnosti

Hustotu pravděpodobnosti získáme derivací distribuční funkce.



Obsah

227. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{dF(t)}{dt} = \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^j}{j!} + (-e^{-\lambda t}) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \frac{j \cdot (\lambda t)^{j-1} \cdot \lambda}{j!} = \\
 &= \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^j}{j!} - \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!} = \\
 &= \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot \left(\sum_{j=0}^{k-2} \frac{(\lambda t)^j}{j!} + \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} \right) - \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot \sum_{j=1}^{k-2} \frac{(\lambda t)^j}{j!} = \\
 &= \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot \sum_{j=0}^{k-2} \frac{(\lambda t)^j}{j!} + \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} - \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot \sum_{j=1}^{k-2} \frac{(\lambda t)^j}{j!} = \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}
 \end{aligned}$$



Obsah

228. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Odvození intenzity poruch

Intenzita poruch je dána podílem hustoty pravděpodobnosti a doplňku distribuční funkce.

$$\begin{aligned}
 \lambda(t) &= \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \\
 &= \frac{\lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}}{e^{-\lambda t} \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^j}{j!}} = \frac{\lambda}{(k-1)! \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^j}{(\lambda t)^{k-1} \cdot j!}} = \frac{\lambda}{(k-1)! \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^{j-k+1}}{j!}} = \\
 &= \frac{\lambda}{(k-1)! \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{(\lambda t)^{k-1-j} \cdot j!}} = \frac{\lambda}{(k-1)! \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{(\lambda t)^j \cdot (k-1-j)!}}
 \end{aligned}$$

Odvození střední hodnoty a rozptylu

Označme

X_k ... doba do výskytu k -té události v Poissonově procesu, $X_k \rightarrow Erlang(k; \lambda)$ X ... doba do výskytu události v Poissonově procesu, $X \rightarrow Exp(\lambda)$.

Je zřejmé, že Erlangova náhodná veličina (s parametry $k; \lambda$) je součtem k exponenciálních



Obsah

229. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

veličin (s parametrem λ).

$$X_k = \sum_{i=1}^k X$$

Z vlastností střední hodnoty víme, že střední hodnota součtu náhodných veličin je rovna součtu jejich středních hodnot.

$$E(X_k) = \sum_{i=1}^k E(X) = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} + \dots + \frac{1}{\lambda} = \frac{k}{\lambda}$$

Jednotlivé exponenciální náhodné veličiny jsou nezávislé, a proto také rozptyl součtu náhodných veličin je roven součtu jejich rozptylů.

$$D(X_k) = \sum_{i=1}^k D(X) = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} + \dots + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{k}{\lambda^2}$$

6.9.4. Logaritmicko-normální rozdělení

Odvození distribuční funkce logaritmicko-normálního rozdělení

Nechť

$$Y = \ln X$$

$$X \rightarrow LN(\mu; \sigma^2) \Leftrightarrow Y \rightarrow N(\mu; \sigma^2)$$



Obsah

230. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

$F_X(x)$, resp. $F_Y(y)$, jsou distribuční funkce náhodné veličiny X (resp. Y)

$$\forall x > 0 : F_X(x) = P(X < x) = P(e^Y < x) = P(Y < \ln x) = F_Y(\ln x) = \phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)$$

$$\forall x \leq 0 : F_X(x) = 0$$

Odvození hustoty pravděpodobnosti logaritmicko-normálního rozdělení

$f_X(x)$... hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny X

$$\begin{aligned} \forall x > 0 : f_X(x) &= \frac{dF_X(x)}{dx} = \frac{d\phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)}{dx} = \varphi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right) \cdot \frac{1}{x \cdot \sigma} = \frac{1}{x\sigma\sqrt{(2\pi)}} e^{-\frac{(\frac{\ln x - \mu}{\sigma})^2}{2}} \\ &= \frac{1}{x\sigma\sqrt{(2\pi)}} \cdot e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} \end{aligned}$$

$$\forall x \leq 0 : f_X(x) = 0$$

Odvození vztahu pro výpočet 100p% kvantilu

$$P(X < x_p) = p$$

$$F(x_p) = p$$

$$\phi\left(\frac{\ln x_p - \mu}{\sigma}\right) = p$$

$$\phi\left(\frac{\ln x_p - \mu}{\sigma}\right) = p$$

Vzhledem k tomu, že $\phi(z_p) = p$ (z_p je 100p% kvantil normované normální náhodné veličiny), platí:



Obsah

231. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

$$\frac{\ln x_p - \mu}{\sigma} = z_p.$$

Z toho plyne, že

$$\ln x_p = \sigma \cdot z_p + \mu$$

$$x_p = e(\mu + \sigma \cdot z_p)$$



Obsah

232. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Shrnutí:

Jedním ze základních spojitých rozdělení pravděpodobnosti je rozdělení rovnoměrné (rektangulární) na intervalu $(a; b)$. Následující dvě rozdělení jsou založena na Poissonovském

Název rozdělení	Popis	Hustota pravděpodobnosti	$E(X)$	$D(X)$
Rovnoměrné na $(a; b)$	$f(x)$ je na $(a; b)$ konstantní, jinde nulová	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in (a; b) \\ 0 & x \notin (a; b) \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(a-b)^2}{12}$

procesu, tj. na předpokladu, že jednotlivé události nastávají nezávisle na sobě, s konstantní střední rychlostí výskytu. Tato rozdělení se používají většinou pro popis náhodné veličiny definované jako doba **do k -té události** (poruchy), popř. doba mezi událostmi (poruchami).

Název rozdělení	Popis	Hustota pravděpodobnosti, distribuční funkce, intenzita poruch	$E(X)$	$D(X)$
Exponenciální	doba do první události, doba mezi událostmi (popisuje pouze období stabilního života)	$f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}; \quad t > 0; \lambda > 0$ $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}; \quad t > 0; \lambda > 0$ $\lambda(t) = \lambda = konst.; \quad t > 0; \lambda > 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Erlangovo	doba do k -té události	$f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}; \quad t > 0$ $F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^j}{j!}$ $\lambda(t) = \frac{\lambda}{(k-1)! \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{(k-1-j)! (\lambda t)^j}}$	$\frac{k}{\lambda}$	$\frac{k}{\lambda^2}$



Obsah

233. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Pro modelování doby do výskytu první události zařízení, která se nacházejí v období dětských nemocí nebo v období stárnutí, používáme rozdělení Weibullovo.

Název rozdělení	Popis	Hustota pravděpodobnosti, distribuční funkce, intenzita poruch	$E(X)$	$D(X)$
Weibullovo	doba do první události (poruchy) (vhodná volba β umožňuje použití v libovolném období intenzity poruch)	$f(t) = \beta \lambda^\beta t^{\beta-1} e^{-(\lambda t)^\beta},$ $F(t) = 1 - e^{-(\lambda t)^\beta},$ $\lambda(t) = \beta \lambda^\beta t^{\beta-1},$ $t > 0; \lambda > 0; \beta > 0.$		

Při popisu náhodných veličin nabývajících pouze kladných hodnot a to zejména v případech, kdy hustota pravděpodobnosti je asymetrická, používáme logaritmicko-normální rozdělení.

Název rozdělení	Vlastnosti	Hustota pravděpodobnosti	$E(X)$	$D(X)$
Logaritmicko-normální	distribuční funkci určíme převodem na distribuční funkci normovaného normálního rozdělení $F(x) = \begin{cases} \Phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right); & x > 0 \\ 0; & x \leq 0. \end{cases}$	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}; & x > 0 \\ 0; & x \leq 0. \end{cases}$	$e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$	$e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$



Obsah

234. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Nejdůležitějším pravděpodobnostním rozdělením popisujícím chování velkého množství náhodných jevů v technice, přírodních vědách i v ekonomii je rozdělení normální, jehož parametry jsou střední hodnota μ a rozptyl σ^2 , a jeho speciální typ rozdělení normované normální s parametry $\mu = 0$ a $\sigma^2 = 1$. Podobně jako u jiných rozdělení jde pouze o model, kterému se reálná data více či méně přibližují.

Název rozdělení	Vlastnosti	Hustota pravděpodobnosti, distribuční funkce	$E(X)$	$D(X)$
Normované normální	distribuční funkce $\Phi(x)$ je tabelovaná, hustota pravděpodobnosti je sudá funkce známá pod názvem „Gaussův klobouk“	$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}; \quad -\infty < x < \infty$ $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$	0	1
Normální	distribuční funkci určujeme pomocí standardizace normální náhodné veličiny $F(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\left(\frac{x - \mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}; \quad -\infty < x < \infty$ $F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\left(\frac{t - \mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2} dt$	μ	σ^2

V SPC (spolehlivost a jakost, statistická kontrola jakosti) se velmi často používá pravidlo 3 sigma. Podléhají-li data normálnímu rozdělení se střední hodnotou μ a směrodatnou odchylkou σ , pak se většina z nich (99,8%) nachází v intervalu $\langle \mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma \rangle$.



Obsah

235. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Test

Jak pracovat s testy?

1. (4b.) Rozhodněte o pravdivosti následujících výroků.

- (a) Intenzita poruch (hazardní funkce) je neklesající funkce.
- (b) Exponenciální rozdělení používáme k modelování životnosti výrobků nacházejících se v období stárnutí.
- (c) Exponenciální rozdělení je speciálním případem Erlangova rozdělení.
- (d) Exponenciální rozdělení je speciálním případem Weibullova rozdělení.
- (e) Weibullovo rozdělení lze použít k modelování životnosti výrobků nacházejících se v libovolném období života.
- (f) Normální rozdělení má právě jeden parametr.
- (g) Hustota pravděpodobnosti normální náhodné veličiny je sudá funkce.
- (h) Distribuční funkce normální náhodné veličiny je tabelována.
- (i) Má-li náhodná veličina normální rozdělení, pak (střední hodnota = medián = modus).
- (j) Má-li náhodná veličina normální rozdělení se střední hodnotou μ a sm. odchylkou σ , pak přibližně 5% hodnot náhodné veličiny leží mimo interval $(\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma)$.
- (k) Logaritmicko-normální náhodná veličina má zápornou šikmost.
- (l) Necht má náhodná veličina X normální rozdělení a náhodná veličina $Y = \ln X$. Náhodná veličina Y má logaritmicko-normální rozdělení.



Obsah

236. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

2. (3b.) Doplňte:

- (a) Intenzitu poruch lze použít k popisu spojitých náhodných veličin.
- (b) Exponenciální rozdělení používáme k modelování životnosti výrobků nacházejících se v období .
- (c) Pro modelování životnosti výrobku, který má lineárně rostoucí intenzitu poruch lze použít Weibullovo rozdělení s parametrem tvaru $\beta =$.
- (d) Gaussova křivka je grafem normálního rozdělení.
- (e) Identifikace odlehklých pozorování pomocí z-souřadnice je založena na pravidle .
- (f) Logaritmicko-normální NV má šikmost.

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:



Obsah

237. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Příklady k procvičení

Jak pracovat s testy?

1. Náhodná veličina popisující dobu vypracování testu má normální rozdělení se střední hodnotou 60 minut a směrodatnou odchylkou 10 minut.
 - (a) Kolik % studentů dokončí test do hodiny a čtvrt? %
 - (b) Jaká doba (v hodinách) by měla být stanovena, aby test dokončilo průměrně 95% studentů?
2. Výrobní zařízení má poruchu v průměru jednou za 2 000 hodin. Jaká je pravděpodobnost, že přístroj bude pracovat déle než 550 hodin?
3. Životnost žárovky má exponenciální rozdělení se střední hodnotou 400 h. s jakou pravděpodobností bude žárovka svítit dalších 100 hodin, jestliže již svítila 600 hodin?
4. Odhadujeme, že střední životnost určitého přístroje je 110 dnů. s jakou pravděpodobností bude životnost náhodně vybraného přístroje mezi 100 a 150 dnů?
5. Při kontrole jakosti přebíráme součástku pouze tehdy, jestliže se její rozměr pohybuje v mezích 26 až 27 mm. Rozměry součástek mají normální rozdělení se střední hodnotou 26,4 mm a směrodatnou odchylkou 0,2 mm. Jaká je pravděpodobnost, že rozměr součástky náhodně vybrané ke kontrole bude v požadovaných mezích?



Obsah

238. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



6. Průměrná doba mezi příjezdy nákladních automobilů s betonovou směsí je 10 minut. Jaká je pravděpodobnost, že doba mezi příjezdy dvou vozidel bude kratší než 7 minut?
7. Firma získá z každého prodaného výrobku 100,-Kč. Za výměnu během záruční lhůty zaplatí 300,-Kč. Životnost výrobku v letech má normální rozdělení $N(3;1)$. Jakou záruční dobu v měsících má firma stanovit, aby střední (průměrný) zisk byl alespoň 60,-Kč/výrobek?
8. Doba do vybití knoflíkové baterie se řídí exponenciálním rozdělením.
 - (a) Jaká je střední doba (v hodinách) do vybití, víme-li, že 4000 hodin přežije 1% těchto baterií?
 - (b) Je-li střední doba do vybití 3 150 hodin, kolik procent těchto baterií přežije 4000 hodin? %
9. Chybu při měření určité veličiny modelujeme normálním rozdělením s nulovou střední hodnotou a s rozptylem 1,5. Určete interval (souměrný podle počátku), ve kterém se bude nacházet chyba v 90% měření.
 $P(-? < X < +?) = 0,9$? =
10. Obsah nečistot v odpadních vodách je popsán normálním rozdělením se střední hodnotou 0,18 a směrodatnou odchylkou 0,03. Vypočtěte:
 - (a) procento zkoušek, při kterých obsah nečistot překročí hodnotu 0,24. %
 - (b) hodnotu obsahu nečistot, která bude překročena přibližně v 1% zkoušek.

Obsah

239. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:



Obsah

240. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

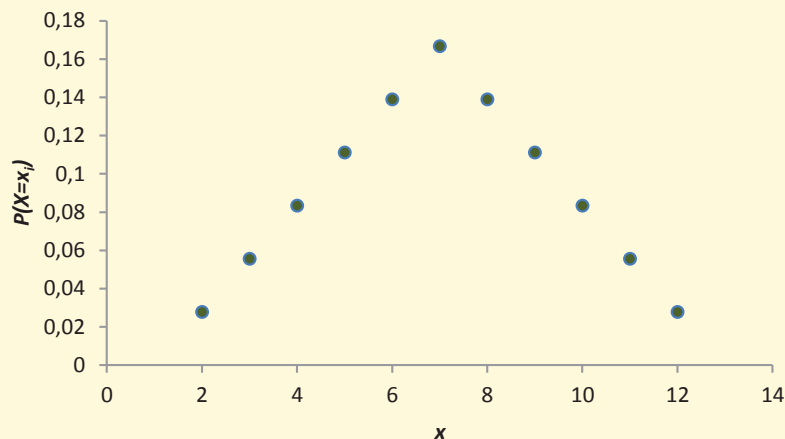
Klíč k příkladům k procvičení

Úlohy k řešení

1. X ... diskrétní NV

a)

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x_i)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36



b)

x_i	$(-\infty; 2>$	$(2; 3>$	$(3; 4>$	$(4; 5>$	$(5; 6>$	$(6; 7>$
$F(x_i)$	0	1/36	3/36	6/36	10/36	15/36



Obsah

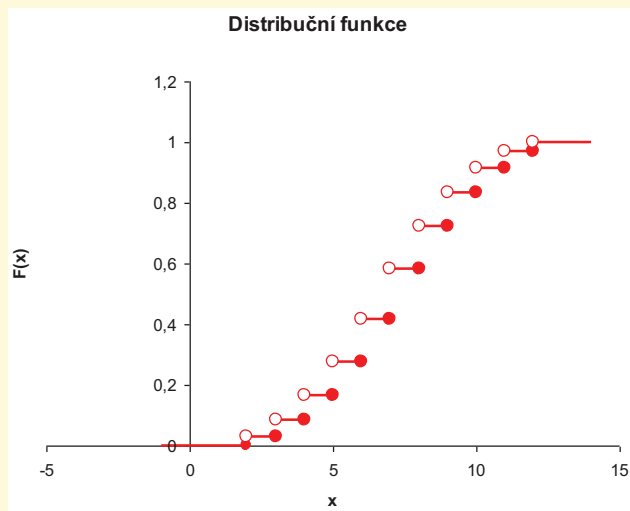
241. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

x_i	(7;8>	(8;9>	(9;10>	(10;11>	(11;12>	(12;∞)
$F(x_i)$	21/36	26/36	30/36	33/36	35/36	1



c) $E(X) = 7$

d) $D(X) = 210/39 \doteq 5,83$

[Zpět na příklad](#)



Obsah

242. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

2. a)

x	0	1	2	3	4	5	6
$P(x)$	4/60	28/60	10/60	7/60	6/60	4/60	1/60

b)

x	$(-\infty; 0)$	$(0; 1)$	$(1; 2)$	$(2; 3)$	$(3; 4)$	$(4; 5)$	$(5; 6)$	$(6; \infty)$
$P(x)$	0	4/60	32/60	42/60	49/60	55/60	59/60	1

c) $E(X) = 2,0$

d) $\sigma = 1,5$

e) $\hat{x} = 1$

[Zpět na příklad](#)

3.

x	100	150	300	500
$P(x)$	0,15	0,30	0,35	0,20

[Zpět na příklad](#)

4. a) 0,25

b) 0

c) $E(X) = -1/3$, $D(X) = 1/18$, $\sigma = 0,236$

d) $\hat{x} = 0$



Obsah

243. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

e) $x_{0,5} = -0,293$

[Zpět na příklad](#)

5. a) $1/8$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2 & x \in (0; 2) \\ 0 & x \notin (0; 2) \end{cases}$

c) $E(X) = 1,50, \sigma = 0,39$

d) $0,875$

e) $\hat{x} = 2$

[Zpět na příklad](#)

6. $P(1 \leq |X| \leq 2) = e^{-1} - e^{-2}$

[Zpět na příklad](#)

7. $E(Z) = 10, E(Q) = -6, D(Z) = 100, D(Q) = 25$

[Zpět na příklad](#)



Obsah

244. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



Klíč k příkladům k procvičení

Úlohy k řešení

1. S ...součet výsledků na obou mincích

R ... rozdíl výsledků na obou mincích

a) Diskrétní náhodný vektor

b) Korelační tabulka (sdružené pravděpodobnosti, marginální pravděpodobnosti)

R/S	0	1	2	$P_R(r)$
-1	0	0,25	0	0,25
0	0,25	0	0,25	0,5
1	0	0,25	0	0,25
$P_S(s)$	0,25	0,5	0,25	1

c) Marginální pravděpodobnosti najdete ve výše uvedené korelační tabulce.

d) $E(S) = 1,0, D(S) = 0,5, E(R) = 0,0, D(R) = 0,5,$

e) $cov(S, R) = 0,0,$

$$var(X) = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,0 \\ 0,0 & 0,5 \end{pmatrix}$$

f) $\rho(S, R) = 0,0,$

$$var(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0,0 \\ 0,0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obsah

245. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

g) S, R nejsou nezávislé náhodné veličiny.

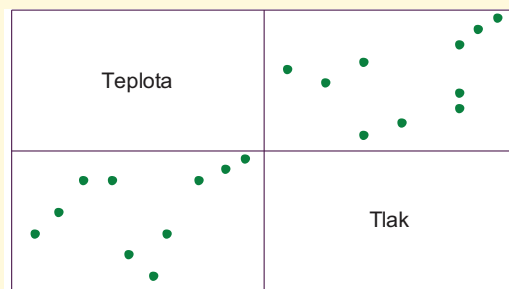
[Zpět na příklad](#)

2. Následující výsledky byly získány pomocí programu Statgraphics.

Correlations

	Teplota	Tlak
Teplota		0,3823
Tlak	0,3823	

$\rho(\text{Teplota}, \text{Tlak}) = 0,382 \Rightarrow$ středně silná pozitivní korelace, tj. pravděpodobně s rostoucí teplotou roste i systolický tlak řidičů autobusu. To potvrzuje i grafický záznam naměřených hodnot uvedený níže (graf vpravo nahoře). *(Otázkou je, zda lze tvrdit, že rostoucí teplota působí na růst tlaku – tuto kauzalitu by bylo vhodné konzultovat s lékaři. Zrovna v tomto případě by mohlo jít pouze o zdánlivou korelaci.)*



[Zpět na příklad](#)



Obsah

246. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

3. $\mathbf{X}$ je spojitý náhodný vektor.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad f_R(r) &= \begin{cases} \frac{2}{3}(r+1), & r \in \langle 0; 1 \rangle \\ 0, & r \notin \langle 0; 1 \rangle \end{cases} \\ f_S(s) &= \begin{cases} \frac{1}{3}(4s+1), & s \in \langle 0; 1 \rangle \\ 0, & s \notin \langle 0; 1 \rangle \end{cases} \end{aligned}$$

b)

$$F_R(r) = \begin{cases} 0 & r \in (-\infty; 0) \\ \frac{1}{3}r(r+2), & r \in \langle 0; 1 \rangle \\ 1 & r \in (1; \infty) \end{cases}$$

$$F_S(s) = \begin{cases} 0 & s \in (-\infty; 0) \\ \frac{1}{3}s(2s+1) & s \in \langle 0; 1 \rangle \\ 1 & s \in (1; \infty) \end{cases}$$

$$\text{c) } E(R) = \frac{5}{9}, D(R) = \frac{13}{162}, E(S) = \frac{11}{18}, D(S) = \frac{23}{324},$$

$$\text{d) } \text{cov}(R, S) = -\frac{8}{81}, \rho(R, S) = -\frac{24\sqrt{598}}{598} \doteq -0,98 \Rightarrow \text{silná negativní korelace, tj. s vysokou pravděpodobností s rostoucím } R \text{ lineárně klesá } S.$$

[Zpět na příklad](#)



Obsah

247. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Řešení kvízů

Řešení kvízu: Pravděpodobnost výhry s původní volbou je $1/3$. Změní-li soutěžící svou volbu, zvýší se pravděpodobnost jeho výhry na $2/3$.

(Podrobný rozbor [Monty Hallova problému](#) najdete například na Wikipedii.)

[Zpět na otázky](#)



Obsah

248. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno



Kapitola 7

Statistické tabulky

Obsah

249. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

T1. Distribuční funkce normovaného normálního rozdělení $\Theta(x)$ pro $x > 0$

$$\Theta(-x) = 1 - \Theta(x)$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,500	0,504	0,508	0,512	0,516	0,520	0,524	0,528	0,532	0,536
0,1	0,540	0,544	0,548	0,552	0,556	0,560	0,564	0,567	0,571	0,575
0,2	0,579	0,583	0,587	0,591	0,595	0,599	0,603	0,606	0,610	0,614
0,3	0,618	0,622	0,626	0,629	0,633	0,637	0,641	0,644	0,648	0,652
0,4	0,655	0,659	0,663	0,666	0,670	0,674	0,677	0,681	0,684	0,688
0,5	0,691	0,695	0,698	0,702	0,705	0,709	0,712	0,716	0,719	0,722
0,6	0,726	0,729	0,732	0,736	0,739	0,742	0,745	0,749	0,752	0,755
0,7	0,758	0,761	0,764	0,767	0,770	0,773	0,776	0,779	0,782	0,785
0,8	0,788	0,791	0,794	0,797	0,800	0,802	0,805	0,808	0,811	0,813
0,9	0,816	0,819	0,821	0,824	0,826	0,829	0,831	0,834	0,836	0,839
1,0	0,841	0,844	0,846	0,848	0,851	0,853	0,855	0,858	0,860	0,862
1,1	0,864	0,867	0,869	0,871	0,873	0,875	0,877	0,879	0,881	0,883
1,2	0,885	0,887	0,889	0,891	0,893	0,894	0,896	0,898	0,900	0,901
1,3	0,903	0,905	0,907	0,908	0,910	0,911	0,913	0,915	0,916	0,918
1,4	0,919	0,921	0,922	0,924	0,925	0,926	0,928	0,929	0,931	0,932
1,5	0,933	0,934	0,936	0,937	0,938	0,939	0,941	0,942	0,943	0,944



Obsah

250. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,6	0,945	0,946	0,947	0,948	0,949	0,951	0,952	0,953	0,954	0,954
1,7	0,955	0,956	0,957	0,958	0,959	0,960	0,961	0,962	0,962	0,963
1,8	0,964	0,965	0,966	0,966	0,967	0,968	0,969	0,969	0,970	0,971
1,9	0,971	0,972	0,973	0,973	0,974	0,974	0,975	0,976	0,976	0,977
2,0	0,977	0,978	0,978	0,979	0,979	0,980	0,980	0,981	0,981	0,982
2,1	0,982	0,983	0,983	0,983	0,984	0,984	0,985	0,985	0,985	0,986
2,2	0,986	0,986	0,987	0,987	0,987	0,988	0,988	0,988	0,989	0,989
2,3	0,989	0,990	0,990	0,990	0,990	0,991	0,991	0,991	0,991	0,992
2,4	0,992	0,992	0,992	0,992	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,994
2,5	0,994	0,994	0,994	0,994	0,994	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995
2,6	0,995	0,995	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996
2,7	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997
2,8	0,997	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998
2,9	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,999	0,999	0,999
3,0	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999
3,1	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999
3,2	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999
3,3	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Obsah

251. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

T2. Vybrané kvantily normovaného normálního rozdělení

$$z_{1-\alpha} = -z_{\alpha}$$

α	0,1000	0,0500	0,0250	0,0100	0,0050	0,0010	0,0005	0,0001
z_{α}	1,2816	1,6449	1,9600	2,3263	2,5758	3,0902	3,2905	3,7190



Obsah

252. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

T3. Vybrané kvantily χ^2 rozdělení s ν stupni volnosti

stupně volnosti ν	α							
	0,0001	0,0005	0,01	0,025	0,05	0,1	0,25	0,5
1	0,000	0,000	0,000	0,001	0,004	0,016	0,102	0,455
2	0,000	0,001	0,020	0,051	0,103	0,211	0,575	1,386
3	0,005	0,015	0,115	0,216	0,352	0,584	1,213	2,366
4	0,028	0,064	0,297	0,484	0,711	1,064	1,923	3,357
5	0,082	0,158	0,554	0,831	1,145	1,610	2,675	4,351
6	0,172	0,299	0,872	1,237	1,635	2,204	3,455	5,348
7	0,300	0,485	1,239	1,690	2,167	2,833	4,255	6,346
8	0,464	0,710	1,646	2,180	2,733	3,490	5,071	7,344
9	0,661	0,972	2,088	2,700	3,325	4,168	5,899	8,343
10	0,889	1,265	2,558	3,247	3,940	4,865	6,737	9,342
11	1,145	1,587	3,053	3,816	4,575	5,578	7,584	10,341
12	1,427	1,934	3,571	4,404	5,226	6,304	8,438	11,340
13	1,733	2,305	4,107	5,009	5,892	7,042	9,299	12,340
14	2,061	2,697	4,660	5,629	6,571	7,790	10,165	13,339
15	2,408	3,108	5,229	6,262	7,261	8,547	11,037	14,339
16	2,774	3,536	5,812	6,908	7,962	9,312	11,912	15,338
17	3,157	3,980	6,408	7,564	8,672	10,085	12,792	16,338
18	3,555	4,439	7,015	8,231	9,390	10,865	13,675	17,338



Obsah

253. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

19	3,968	4,912	7,633	8,907	10,117	11,651	14,562	18,338
20	4,395	5,398	8,260	9,591	10,851	12,443	15,452	19,337
21	4,835	5,896	8,897	10,283	11,591	13,240	16,344	20,337
22	5,286	6,404	9,542	10,982	12,338	14,041	17,240	21,337
23	5,749	6,924	10,196	11,689	13,091	14,848	18,137	22,337
24	6,223	7,453	10,856	12,401	13,848	15,659	19,037	23,337
25	6,707	7,991	11,524	13,120	14,611	16,473	19,939	24,337
26	7,200	8,538	12,198	13,844	15,379	17,292	20,843	25,336
27	7,702	9,093	12,879	14,573	16,151	18,114	21,749	26,336
28	8,213	9,656	13,565	15,308	16,928	18,939	22,657	27,336
29	8,731	10,227	14,256	16,047	17,708	19,768	23,567	28,336
30	9,258	10,804	14,953	16,791	18,493	20,599	24,478	29,336
40	14,883	16,906	22,164	24,433	26,509	29,051	33,660	39,335
50	21,009	23,461	29,707	32,357	34,764	37,689	42,942	49,335
60	27,497	30,340	37,485	40,482	43,188	46,459	52,294	59,335
70	34,261	37,467	45,442	48,758	51,739	55,329	61,698	69,334
80	41,244	44,791	53,540	57,153	60,391	64,278	71,145	79,334
100	55,725	59,896	70,065	74,222	77,929	82,358	90,133	99,334
120	70,728	75,467	86,923	91,573	95,705	100,624	109,220	119,334



Obsah

254. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

T3. Vybrané kvantily χ^2 rozdělení s ν stupni volnosti (pokračování)

stupně volnosti ν	α						
	0,75	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999
1	1,323	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879	10,828
2	2,773	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597	13,816
3	4,108	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838	16,266
4	5,385	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860	18,467
5	6,626	9,236	11,070	12,833	15,086	16,750	20,515
6	7,841	10,645	12,592	14,449	16,812	18,548	22,458
7	9,037	12,017	14,067	16,013	18,475	20,278	24,322
8	10,219	13,362	15,507	17,535	20,090	21,955	26,124
9	11,389	14,684	16,919	19,023	21,666	23,589	27,877
10	12,549	15,987	18,307	20,483	23,209	25,188	29,588
11	13,701	17,275	19,675	21,920	24,725	26,757	31,264
12	14,845	18,549	21,026	23,337	26,217	28,300	32,909
13	15,984	19,812	22,362	24,736	27,688	29,819	34,528
14	17,117	21,064	23,685	26,119	29,141	31,319	36,123
15	18,245	22,307	24,996	27,488	30,578	32,801	37,697
16	19,369	23,542	26,296	28,845	32,000	34,267	39,252
17	20,489	24,769	27,587	30,191	33,409	35,718	40,790
18	21,605	25,989	28,869	31,526	34,805	37,156	42,312



Obsah

255. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno



19	22,718	27,204	30,144	32,852	36,191	38,582	43,820
20	23,828	28,412	31,410	34,170	37,566	39,997	45,315
21	24,935	29,615	32,671	35,479	38,932	41,401	46,797
22	26,039	30,813	33,924	36,781	40,289	42,796	48,268
23	27,141	32,007	35,172	38,076	41,638	44,181	49,728
24	28,241	33,196	36,415	39,364	42,980	45,559	51,179
25	29,339	34,382	37,652	40,646	44,314	46,928	52,620
26	30,435	35,563	38,885	41,923	45,642	48,290	54,052
27	31,528	36,741	40,113	43,195	46,963	49,645	55,476
28	32,620	37,916	41,337	44,461	48,278	50,993	56,892
29	33,711	39,087	42,557	45,722	49,588	52,336	58,301
30	34,800	40,256	43,773	46,979	50,892	53,672	59,703
40	45,616	51,805	55,758	59,342	63,691	66,766	73,402
50	56,334	63,167	67,505	71,420	76,154	79,490	86,661
60	66,981	74,397	79,082	83,298	88,379	91,952	99,607
70	77,577	85,527	90,531	95,023	100,425	104,215	112,317
80	88,130	96,578	101,879	106,629	112,329	116,321	124,839
100	109,141	118,498	124,342	129,561	135,807	140,169	149,449
120	130,055	140,233	146,567	152,211	158,950	163,648	173,617

Obsah

256. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

T4. Vybrané kvantily Studentova rozdělení s ν stupni volnosti

$$t_{1-\alpha} = -t_{\alpha}$$

stupně volnosti ν	α								
	0,75	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995	0,9975	0,999	0,9995
1	1,000	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	127,321	318,309	636,619
2	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	14,089	22,327	31,599
3	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	7,453	10,215	12,924
4	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	5,598	7,173	8,610
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	4,773	5,893	6,869
6	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	4,317	5,208	5,959
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,029	4,785	5,408
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	3,833	4,501	5,041
9	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	3,690	4,297	4,781
10	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	3,581	4,144	4,587
11	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	3,497	4,025	4,437
12	0,695	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,428	3,930	4,318
13	0,694	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,372	3,852	4,221
14	0,692	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,326	3,787	4,140
15	0,691	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,286	3,733	4,073
16	0,690	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,252	3,686	4,015
17	0,689	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,222	3,646	3,965
18	0,688	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,197	3,610	3,922



Obsah

257. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



19	0,688	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,174	3,579	3,883
20	0,687	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,153	3,552	3,850
21	0,686	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,135	3,527	3,819
22	0,686	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,119	3,505	3,792
23	0,685	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,104	3,485	3,768
24	0,685	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,091	3,467	3,745
25	0,684	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,078	3,450	3,725
26	0,684	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,067	3,435	3,707
27	0,684	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,057	3,421	3,690
28	0,683	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,047	3,408	3,674
29	0,683	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,038	3,396	3,659
30	0,683	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,030	3,385	3,646
40	0,681	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	2,971	3,307	3,551
50	0,679	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678	2,937	3,261	3,496
60	0,679	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	2,915	3,232	3,460
70	0,678	1,294	1,667	1,994	2,381	2,648	2,899	3,211	3,435
80	0,678	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	2,887	3,195	3,416
100	0,677	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626	2,871	3,174	3,390
120	0,677	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	2,860	3,160	3,373
∞	0,674	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	2,807	3,090	3,291

Obsah

258. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

T5. Vybrané kvantily Fisherova-Snedecorova rozdělení s m stupni volnosti v čitateli a n stupni volnosti ve jmenovateli

$$f_{\alpha}(m; n) = \frac{1}{f_{1-\alpha}(m; n)}$$

n	α	m								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0,95	161,45	199,50	215,71	224,58	230,16	233,99	236,77	238,88	240,54
	0,975	647,79	799,50	864,16	899,58	921,85	937,11	948,22	956,66	963,28
	0,99	4052,18	4999,50	5403,35	5624,58	5763,65	5858,99	5928,36	5981,07	6022,47
2	0,95	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38
	0,975	38,51	39,00	39,17	39,25	39,30	39,33	39,36	39,37	39,39
	0,99	98,50	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,37	99,39
3	0,95	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81
	0,975	17,44	16,04	15,44	15,10	14,88	14,73	14,62	14,54	14,47
	0,99	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,35
4	0,95	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00
	0,975	12,22	10,65	9,98	9,60	9,36	9,20	9,07	8,98	8,90
	0,99	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66
5	0,95	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77
	0,975	10,01	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,85	6,76	6,68
	0,99	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16



Obsah

259. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



6	0,95	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10
	0,975	8,81	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,70	5,60	5,52
	0,99	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98
7	0,95	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68
	0,975	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,99	4,90	4,82
	0,99	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72
8	0,95	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39
	0,975	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,53	4,43	4,36
	0,99	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91
9	0,95	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18
	0,975	7,21	5,71	5,08	4,72	4,48	4,32	4,20	4,10	4,03
	0,99	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35
10	0,95	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02
	0,975	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,95	3,85	3,78
	0,99	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94
11	0,95	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90
	0,975	6,72	5,26	4,63	4,28	4,04	3,88	3,76	3,66	3,59
	0,99	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63

Obsah

260. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

T5. Vybrané kvantily Fisherova-Snedecorova rozdělení s m stupni volnosti v čitateli a n stupni volnosti ve jmenovateli (pokračování)

$$f_{\alpha}(m; n) = \frac{1}{f_{1-\alpha}(m; n)}$$

n	α	m									
		10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	0,95	241,88	243,91	245,95	248,01	249,05	250,10	251,14	252,20	253,25	254,31
	0,975	968,63	976,71	984,87	993,10	997,25	1001,41	1005,60	1009,80	1014,02	1018,25
	0,99	6055,85	6106,32	6157,28	6208,73	6234,63	6260,65	6286,78	6313,03	6339,39	6365,83
2	0,95	19,40	19,41	19,43	19,45	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49	19,50
	0,975	39,40	39,41	39,43	39,45	39,46	39,46	39,47	39,48	39,49	39,50
	0,99	99,40	99,42	99,43	99,45	99,46	99,47	99,47	99,48	99,49	99,50
3	0,95	8,79	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55	8,53
	0,975	14,42	14,34	14,25	14,17	14,12	14,08	14,04	13,99	13,95	13,90
	0,99	27,23	27,05	26,87	26,69	26,60	26,50	26,41	26,32	26,22	26,13
4	0,95	5,96	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63
	0,975	8,84	8,75	8,66	8,56	8,51	8,46	8,41	8,36	8,31	8,26
	0,99	14,55	14,37	14,20	14,02	13,93	13,84	13,75	13,65	13,56	13,46
5	0,95	4,74	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40	4,37
	0,975	6,62	6,52	6,43	6,33	6,28	6,23	6,18	6,12	6,07	6,02
	0,99	10,05	9,89	9,72	9,55	9,47	9,38	9,29	9,20	9,11	9,02
6	0,95	4,06	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70	3,67
	0,975	5,46	5,37	5,27	5,17	5,12	5,07	5,01	4,96	4,90	4,85
	0,99	7,87	7,72	7,56	7,40	7,31	7,23	7,14	7,06	6,97	6,88



Obsah

261. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

7	0,95	3,64	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27	3,23
	0,975	4,76	4,67	4,57	4,47	4,41	4,36	4,31	4,25	4,20	4,14
	0,99	6,62	6,47	6,31	6,16	6,07	5,99	5,91	5,82	5,74	5,65
8	0,95	3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97	2,93
	0,975	4,30	4,20	4,10	4,00	3,95	3,89	3,84	3,78	3,73	3,67
	0,99	5,81	5,67	5,52	5,36	5,28	5,20	5,12	5,03	4,95	4,86
9	0,95	3,14	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75	2,71
	0,975	3,96	3,87	3,77	3,67	3,61	3,56	3,51	3,45	3,39	3,33
	0,99	5,26	5,11	4,96	4,81	4,73	4,65	4,57	4,48	4,40	4,31
10	0,95	2,98	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58	2,54
	0,975	3,72	3,62	3,52	3,42	3,37	3,31	3,26	3,20	3,14	3,08
	0,99	4,85	4,71	4,56	4,41	4,33	4,25	4,17	4,08	4,00	3,91
11	0,95	2,85	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45	2,40
	0,975	3,53	3,43	3,33	3,23	3,17	3,12	3,06	3,00	2,94	2,88
	0,99	4,54	4,40	4,25	4,10	4,02	3,94	3,86	3,78	3,69	3,60



Obsah

262. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

T5. Vybrané kvantily Fisherova-Snedecorova rozdělení s m stupni volnosti v čitateli a n stupni volnosti ve jmenovateli (pokračování)

$$f_{\alpha}(m; n) = \frac{1}{f_{1-\alpha}(m; n)}$$

n	α	m								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
12	0,95	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80
	0,975	6,55	5,10	4,47	4,12	3,89	3,73	3,61	3,51	3,44
	0,99	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39
14	0,95	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65
	0,975	6,30	4,86	4,24	3,89	3,66	3,50	3,38	3,29	3,21
	0,99	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03
16	0,95	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54
	0,975	6,12	4,69	4,08	3,73	3,50	3,34	3,22	3,12	3,05
	0,99	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78
18	0,95	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46
	0,975	5,98	4,56	3,95	3,61	3,38	3,22	3,10	3,01	2,93
	0,99	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60
20	0,95	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39
	0,975	5,87	4,46	3,86	3,51	3,29	3,13	3,01	2,91	2,84
	0,99	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46



Obsah

263. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

24	0,95	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30
	0,975	5,72	4,32	3,72	3,38	3,15	2,99	2,87	2,78	2,70
	0,99	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26
30	0,95	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21
	0,975	5,57	4,18	3,59	3,25	3,03	2,87	2,75	2,65	2,57
	0,99	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07
40	0,95	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12
	0,975	5,42	4,05	3,46	3,13	2,90	2,74	2,62	2,53	2,45
	0,99	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89
60	0,95	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04
	0,975	5,29	3,93	3,34	3,01	2,79	2,63	2,51	2,41	2,33
	0,99	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72
120	0,95	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,18	2,09	2,02	1,96
	0,975	5,15	3,80	3,23	2,89	2,67	2,52	2,39	2,30	2,22
	0,99	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56
∞	0,95	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88
	0,975	5,02	3,69	3,12	2,79	2,57	2,41	2,29	2,19	2,11
	0,99	6,64	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41



Obsah

264. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

T5. Vybrané kvantily Fisherova-Snedecorova rozdělení s m stupni volnosti v čitateli a n stupni volnosti ve jmenovateli (pokračování)

$$f_{\alpha}(m; n) = \frac{1}{f_{1-\alpha}(m; n)}$$

n	α	m									
		10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
12	0,95	2,75	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34	2,30
	0,975	3,37	3,28	3,18	3,07	3,02	2,96	2,91	2,85	2,79	2,73
	0,99	4,30	4,16	4,01	3,86	3,78	3,70	3,62	3,54	3,45	3,36
14	0,95	2,60	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18	2,13
	0,975	3,15	3,05	2,95	2,84	2,79	2,73	2,67	2,61	2,55	2,49
	0,99	3,94	3,80	3,66	3,51	3,43	3,35	3,27	3,18	3,09	3,00
16	0,95	2,49	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06	2,01
	0,975	2,99	2,89	2,79	2,68	2,63	2,57	2,51	2,45	2,38	2,32
	0,99	3,69	3,55	3,41	3,26	3,18	3,10	3,02	2,93	2,84	2,75
18	0,95	2,41	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97	1,92
	0,975	2,87	2,77	2,67	2,56	2,50	2,44	2,38	2,32	2,26	2,19
	0,99	3,51	3,37	3,23	3,08	3,00	2,92	2,84	2,75	2,66	2,57
20	0,95	2,35	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90	1,84
	0,975	2,77	2,68	2,57	2,46	2,41	2,35	2,29	2,22	2,16	2,09
	0,99	3,37	3,23	3,09	2,94	2,86	2,78	2,69	2,61	2,52	2,42



Obsah

265. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

24	0,95	2,25	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79	1,73
	0,975	2,64	2,54	2,44	2,33	2,27	2,21	2,15	2,08	2,01	1,94
	0,99	3,17	3,03	2,89	2,74	2,66	2,58	2,49	2,40	2,31	2,21
30	0,95	2,16	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68	1,62
	0,975	2,51	2,41	2,31	2,20	2,14	2,07	2,01	1,94	1,87	1,79
	0,99	2,98	2,84	2,70	2,55	2,47	2,39	2,30	2,21	2,11	2,01
40	0,95	2,08	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58	1,51
	0,975	2,39	2,29	2,18	2,07	2,01	1,94	1,88	1,80	1,72	1,64
	0,99	2,80	2,66	2,52	2,37	2,29	2,20	2,11	2,02	1,92	1,80
60	0,95	1,99	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47	1,39
	0,975	2,27	2,17	2,06	1,94	1,88	1,82	1,74	1,67	1,58	1,48
	0,99	2,63	2,50	2,35	2,20	2,12	2,03	1,94	1,84	1,73	1,60
120	0,95	1,91	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35	1,25
	0,975	2,16	2,05	1,94	1,82	1,76	1,69	1,61	1,53	1,43	1,31
	0,99	2,47	2,34	2,19	2,03	1,95	1,86	1,76	1,66	1,53	1,38
∞	0,95	1,83	1,75	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,22	1,01
	0,975	2,05	1,94	1,83	1,71	1,64	1,57	1,48	1,39	1,27	1,01
	0,99	2,32	2,18	2,04	1,88	1,79	1,70	1,59	1,47	1,32	1,01



Obsah

266. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

T6. Kritické hodnoty jednovýběrového Wilcoxonova testu

n	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,01$
6	0	-
7	2	-
8	3	0
9	5	1
10	8	3
11	10	5
12	13	7
13	17	9
14	21	12
15	25	15
16	29	19
17	34	23
18	40	27
19	46	3
20	52	37
21	58	42
22	65	48

n	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,01$
36	208	171
37	221	182
38	235	194
39	249	207
40	264	220
41	279	233
42	294	247
43	310	261
44	327	276
45	343	291
46	361	307
47	378	322
48	396	339
49	415	355
50	434	373
51	453	390
52	473	408



Obsah

267. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

23	73	54
24	81	61
25	89	68
26	98	75
27	107	83
28	116	91
29	126	100
30	137	109
31	147	118
32	159	128
33	170	138
34	182	148
35	195	159

53	494	427
54	514	445
55	536	465
56	557	484
57	579	504
58	602	525
59	625	546
60	648	567
61	672	589
62	697	611
63	721	634
64	747	657
65	772	681

Zdroj: [1], tabulka T4



Obsah

268. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

T7. Kritické hodnoty Mannova-Whitneyova testu

$\alpha = 0,05$	n																		
m	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
4	-	-	0																
5	-	0	1	2															
6	-	1	2	3	5														
7	-	1	3	5	6	8													
8	0	2	4	6	8	10	13												
9	0	2	4	7	10	12	15	17											
10	0	3	5	8	11	14	17	20	23										
11	0	3	6	9	13	16	19	23	26	30									
12	1	4	7	11	14	18	22	26	29	33	37								
13	1	4	8	12	16	20	24	28	33	37	41	45							
14	1	5	9	13	17	22	26	31	36	40	45	50	55						
15	1	5	10	14	19	24	29	34	39	44	49	54	59	64					
16	1	6	11	15	21	26	31	37	42	47	53	59	64	70	75				
17	2	6	11	17	22	28	34	39	45	51	57	63	69	75	81	87			
18	2	7	12	18	24	30	36	42	48	55	61	67	74	80	86	93	99		



Obsah

269. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

19	2	7	13	19	25	32	38	45	52	58	65	72	78	85	92	99	106	113	
20	2	8	14	20	27	34	41	48	55	62	69	76	83	90	98	105	112	119	127
21	2	8	15	22	29	36	43	50	58	65	73	80	88	96	103	111	119	126	134
22	3	9	16	23	30	38	45	53	61	69	77	85	93	101	109	117	125	133	141
23	3	9	17	24	32	40	48	56	64	73	81	89	98	106	115	123	132	140	149
24	3	10	17	25	33	42	50	59	67	76	85	94	102	111	120	129	138	147	156
25	3	10	18	27	35	44	53	62	71	80	89	98	107	117	126	135	145	154	161
26	4	11	19	28	37	46	55	64	74	83	93	102	112	122	132	141	151	161	171
27	4	11	20	29	38	48	57	67	77	87	97	107	117	127	137	147	158	168	178
28	4	12	21	30	40	50	60	70	80	90	101	111	122	132	143	154	164	175	186
29	4	13	22	32	42	52	62	73	83	94	105	116	127	138	149	160	171	182	193
30	5	13	23	33	43	54	65	76	87	98	109	120	131	143	154	166	177	189	200

Zdroj: [1], tabulka T8



Obsah

270. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

T8. Kritické hodnoty $h_\alpha(k, v)$ Hartlyova testu

$\alpha = 0,05$	k										
stupně volnosti v	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	39	87,5	142	202	266	333	403	475	550	626	704
3	15,4	27,8	39,2	50,7	62	72,9	83,5	93,9	104	114	124
4	9,6	15,5	20,6	25,2	29,5	33,6	37,5	41,1	44,6	48	51,4
5	7,15	10,8	13,7	16,3	18,7	20,8	22,9	24,7	26,5	28,2	29,9
6	5,82	8,38	10,4	12,1	13,7	15	16,3	17,5	18,6	19,7	20,7
7	4,99	6,94	8,44	9,7	10,8	11,8	12,7	13,5	14,3	15,1	15,8
8	4,43	6,00	7,18	8,12	9,03	9,78	10,5	11,1	11,7	12,2	12,7
9	4,03	5,34	6,31	7,11	7,8	8,41	8,95	9,45	9,91	10,3	10,7
10	3,72	4,85	5,67	6,34	6,92	7,42	7,87	8,28	8,66	9,01	9,34
12	3,28	4,16	4,79	5,3	5,72	6,09	6,42	6,72	7,00	7,25	7,48
15	2,86	3,54	4,01	4,37	4,68	4,95	5,19	5,4	5,59	5,77	5,93
20	2,46	2,95	3,29	3,54	3,76	3,94	4,1	4,24	4,37	4,49	4,59
30	2,07	2,4	2,61	2,78	2,91	3,02	3,12	3,21	3,29	3,36	3,39
60	1,67	1,85	1,96	2,04	2,11	2,17	2,22	2,26	2,3	2,33	2,36
∞	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0



Obsah

271. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

T8. Kritické hodnoty $h_\alpha(k, v)$ Hartlyova testu (pokračování)

$\alpha = 0,01$	I										
stupně volnosti v	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	199	448	729	1036	1362	1705	2063	2432	2813	3204	3605
3	47,5	85	120	151	184	216	249	281	310	337	361
4	23,2	37	49	59	69	79	89	97	106	113	120
5	14,9	22	28	33	38	42	46	50	54	57	60
6	11,1	15,5	19,1	22	25	27	30	32	34	36	37
7	8,89	12,1	14,5	16,5	18,4	20	22	23	24	26	27
8	7,5	9,9	11,7	13,2	14,5	15,8	16,9	17,9	18,9	19,8	21
9	6,54	8,5	9,9	11,1	12,1	13,1	13,9	14,7	15,3	16	16,6
10	5,85	7,4	8,6	9,6	10,4	11,1	11,8	12,4	12,9	13,4	13,9
12	4,91	6,1	6,9	7,6	8,2	8,7	9,1	9,5	9,9	10,2	10,6
15	4,07	4,9	5,5	6	6,4	6,7	7,1	7,3	7,5	7,8	8
20	3,32	3,8	4,3	4,6	4,9	5,1	5,3	5,5	5,6	5,8	5,9
30	2,63	3	3,3	3,4	3,6	3,7	3,8	3,9	4	4,1	4,2
60	1,96	2,2	2,3	2,4	2,4	2,5	2,5	2,6	2,6	2,7	2,7
∞	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0

Zdroj: [1], tabulka T13



Obsah

272. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

T9. Kritické hodnoty $c_\alpha(k, v)$ Cochranova testu

$\alpha = 0,05$	k										
stupně volnosti v	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1,00	0,97	0,91	0,84	0,78	0,73	0,68	0,64	0,60	0,57	0,54
2	0,98	0,87	0,77	0,68	0,62	0,56	0,52	0,48	0,44	0,42	0,39
3	0,94	0,80	0,68	0,60	0,53	0,48	0,44	0,40	0,37	0,35	0,33
4	0,91	0,75	0,63	0,54	0,48	0,43	0,39	0,36	0,33	0,31	0,29
5	0,88	0,71	0,59	0,51	0,44	0,40	0,36	0,33	0,30	0,28	0,26
6	0,85	0,68	0,56	0,48	0,42	0,37	0,34	0,31	0,28	0,26	0,24
7	0,83	0,65	0,54	0,46	0,40	0,35	0,32	0,29	0,27	0,25	0,23
8	0,82	0,63	0,52	0,44	0,38	0,34	0,30	0,28	0,25	0,24	0,22
9	0,80	0,62	0,50	0,42	0,37	0,33	0,29	0,27	0,24	0,23	0,21
10	0,79	0,60	0,49	0,41	0,36	0,32	0,28	0,26	0,24	0,22	0,20
12	0,77	0,58	0,47	0,39	0,34	0,30	0,27	0,24	0,22	0,20	0,19
15	0,74	0,55	0,44	0,37	0,32	0,28	0,25	0,23	0,21	0,19	0,18
20	0,71	0,52	0,42	0,35	0,30	0,26	0,23	0,21	0,19	0,18	0,16
30	0,67	0,49	0,38	0,32	0,27	0,24	0,21	0,19	0,17	0,16	0,15
60	0,62	0,44	0,34	0,28	0,24	0,21	0,18	0,16	0,15	0,14	0,13
120	0,59	0,41	0,32	0,26	0,22	0,19	0,17	0,15	0,13	0,12	0,11



Obsah

273. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

T9. Kritické hodnoty $c_\alpha(k, v)$ Cochranova testu (pokračování)

$\alpha = 0,01$	k										
stupně volnosti v	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1,00	0,99	0,97	0,93	0,88	0,84	0,79	0,75	0,72	0,68	0,65
2	1,00	0,94	0,86	0,79	0,72	0,66	0,62	0,57	0,54	0,50	0,48
3	0,98	0,88	0,78	0,70	0,63	0,57	0,52	0,48	0,45	0,42	0,39
4	0,96	0,83	0,72	0,63	0,56	0,51	0,46	0,43	0,39	0,37	0,34
5	0,94	0,79	0,68	0,59	0,52	0,47	0,42	0,39	0,36	0,33	0,31
6	0,92	0,76	0,64	0,55	0,49	0,43	0,39	0,36	0,33	0,31	0,29
7	0,90	0,73	0,61	0,53	0,46	0,41	0,37	0,34	0,31	0,29	0,27
8	0,88	0,71	0,59	0,50	0,44	0,39	0,35	0,32	0,29	0,27	0,25
9	0,87	0,69	0,57	0,49	0,42	0,38	0,34	0,31	0,28	0,26	0,24
10	0,85	0,67	0,55	0,47	0,41	0,36	0,32	0,30	0,27	0,25	0,23
12	0,83	0,65	0,53	0,44	0,39	0,34	0,30	0,28	0,25	0,23	0,22
15	0,80	0,61	0,50	0,42	0,36	0,32	0,28	0,26	0,23	0,22	0,20
20	0,77	0,58	0,46	0,39	0,33	0,29	0,26	0,23	0,21	0,20	0,18
30	0,72	0,53	0,42	0,35	0,30	0,26	0,23	0,21	0,19	0,17	0,16
60	0,66	0,47	0,37	0,30	0,26	0,22	0,20	0,18	0,16	0,15	0,14
120	0,62	0,43	0,33	0,27	0,23	0,20	0,17	0,16	0,14	0,13	0,12

Zdroj: [1], tabulka T14



Obsah

274. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

T10. Kritické hodnoty $q_{\alpha}(k, v)$ studentizovaného testu

$\alpha = 0,05$	k													
v	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	18	27	32,8	37,1	40,4	43,1	45,4	47,4	49,1	50,6	52	53,2	54,3	55,4
2	6,08	8,33	9,8	10,9	11,7	12,4	13	13,5	14	14,4	14,7	15,1	15,4	15,7
3	4,5	5,91	6,82	7,5	8,04	8,48	8,85	9,18	9,46	9,72	9,95	10,2	10,3	10,5
4	3,93	5,04	5,76	6,29	6,71	7,05	7,35	7,6	7,83	8,03	8,21	8,37	8,52	8,66
5	3,64	4,6	5,22	5,67	6,03	6,33	6,58	6,8	6,99	7,17	7,32	7,47	7,6	7,72
6	3,46	4,34	4,9	5,3	5,63	5,9	6,12	6,32	6,49	6,65	6,79	6,92	7,03	7,14
7	3,34	4,16	4,68	5,06	5,36	5,61	5,82	6,00	6,16	6,3	6,43	6,55	6,66	6,76
8	3,26	4,04	4,53	4,89	5,17	5,4	5,6	5,77	5,92	6,05	6,18	6,29	6,39	6,48
9	3,2	3,95	4,41	4,76	5,02	5,24	5,43	5,59	5,74	5,87	5,98	6,09	6,19	6,28
10	3,15	3,88	4,33	4,65	4,91	5,12	5,3	5,46	5,6	5,72	5,83	5,93	6,03	6,11
11	3,11	3,82	4,26	4,57	4,82	5,03	5,2	5,35	5,49	5,61	5,71	5,81	5,9	5,98
12	3,08	3,77	4,2	4,51	4,75	4,95	5,12	5,27	5,39	5,51	5,61	5,71	5,8	5,88
13	3,06	3,73	4,15	4,45	4,69	4,88	5,05	5,19	5,32	5,43	5,53	5,63	5,71	5,79
14	3,03	3,7	4,11	4,41	4,64	4,83	4,99	5,13	5,25	5,36	5,46	5,55	5,64	5,71
15	3,01	3,67	4,08	4,37	4,59	4,78	4,94	5,08	5,2	5,31	5,4	5,49	5,57	5,65
16	3	3,65	4,05	4,33	4,56	4,74	4,9	5,03	5,15	5,26	5,35	5,44	5,52	5,59
17	2,98	3,63	4,02	4,3	4,52	4,7	4,86	4,99	5,11	5,21	5,31	5,39	5,47	5,54
18	2,97	3,61	4,00	4,28	4,49	4,67	4,82	4,96	5,07	5,17	5,27	5,35	5,43	5,5
19	2,96	3,59	3,98	4,25	4,47	4,65	4,79	4,92	5,04	5,14	5,23	5,31	5,39	5,46
20	2,95	3,58	3,96	4,23	4,45	4,62	4,77	4,9	5,01	5,11	5,2	5,28	5,36	5,43



Obsah

275. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

24	2,92	3,53	3,9	4,17	4,37	4,54	4,68	4,81	4,92	5,01	5,1	5,18	5,25	5,32
30	2,89	3,49	3,85	4,1	4,3	4,46	4,6	4,72	4,82	4,92	5,0	5,08	5,15	5,21
40	2,86	3,44	3,79	4,04	4,23	4,39	4,52	4,63	4,73	4,82	4,9	4,98	5,04	5,11
60	2,83	3,4	3,74	3,98	4,16	4,31	4,44	4,55	4,65	4,73	4,81	4,88	4,94	5,0
120	2,8	3,36	3,68	3,92	4,1	4,24	4,36	4,47	4,56	4,64	4,71	4,78	4,84	4,9
∞	2,77	3,31	3,63	3,86	4,03	4,17	4,29	4,39	4,47	4,55	4,62	4,68	4,74	4,8

Zdroj: [1], tabulka T11



Obsah

276. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

T10. Kritické hodnoty $q_\alpha(k, v)$ studentizovaného testu (pokračování)

$\alpha = 0,01$	k													
v	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	90	135	164	186	202	216	227	237	246	253	260	266	272	277
2	14	19	22,3	24,7	26,6	28,2	29,5	30,7	31,7	32,6	33,4	34,1	34,8	35,4
3	8,26	10,6	12,2	13,3	14,2	15	15,6	16,2	16,7	17,1	17,5	17,9	18,2	18,5
4	6,51	8,12	9,17	9,96	10,6	11,1	11,5	11,9	12,3	12,6	12,8	13,1	13,3	13,5
5	5,7	6,97	7,8	8,42	8,91	9,32	9,67	9,97	10,2	10,5	10,7	10,9	11,1	11,2
6	5,24	6,33	7,03	7,56	7,97	8,32	8,61	8,87	9,1	9,3	9,49	9,65	9,81	9,95
7	4,95	5,92	6,54	7,01	7,37	7,68	7,94	8,17	8,37	8,55	8,71	8,86	9	9,12
8	4,74	5,63	6,2	6,63	6,96	7,24	7,47	7,68	7,87	8,03	8,18	8,31	8,44	8,55
9	4,6	5,43	5,96	6,35	6,66	6,91	7,13	7,32	7,49	7,65	7,78	7,91	8,03	8,13
10	4,48	5,27	5,77	6,14	6,43	6,67	6,87	7,05	7,21	7,36	7,48	7,6	7,71	7,81
11	4,39	5,14	5,62	5,97	6,25	6,48	6,67	6,84	6,99	7,13	7,25	7,36	7,46	7,56
12	4,32	5,04	5,5	5,84	6,1	6,32	6,51	6,67	6,81	6,94	7,06	7,17	7,26	7,36
13	4,26	4,96	5,4	5,73	5,98	6,19	6,37	6,53	6,67	6,79	6,9	7,01	7,1	7,19
14	4,21	4,89	5,32	5,63	5,88	6,08	6,26	6,41	6,54	6,66	6,77	6,87	6,96	7,05
15	4,17	4,83	5,25	5,56	5,8	5,99	6,16	6,31	6,44	6,55	6,66	6,76	6,84	6,93
16	4,13	4,78	5,19	5,49	5,72	5,92	6,08	6,22	6,35	6,46	6,56	6,66	6,74	6,82
17	4,1	4,74	5,14	5,43	5,66	5,85	6,01	6,15	6,27	6,38	6,48	6,57	6,66	6,73
18	4,07	4,7	5,09	5,38	5,6	5,79	5,94	6,08	6,2	6,31	6,41	6,5	6,58	6,65
19	4,05	4,67	5,05	5,33	5,55	5,73	5,89	6,02	6,14	6,25	6,34	6,43	6,51	6,58
20	4,02	4,64	5,02	5,29	5,51	5,69	5,84	5,97	6,09	6,19	6,29	6,37	6,45	6,52



Obsah

277. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

24	3,96	4,54	4,91	5,17	5,37	5,54	5,69	5,81	5,92	6,02	6,11	6,19	6,26	6,33
30	3,89	4,45	4,8	5,05	5,24	5,4	5,54	5,65	5,76	5,85	5,93	6,01	6,08	6,14
40	3,82	4,37	4,7	4,93	5,11	5,27	5,39	5,5	5,6	5,69	5,77	5,84	5,9	5,96
60	3,76	4,28	4,6	4,82	4,99	5,13	5,25	5,36	5,45	5,53	5,6	5,67	5,73	5,79
120	3,7	4,2	4,5	4,71	4,87	5,01	5,12	5,21	5,3	5,38	5,44	5,51	5,56	5,61
∞	3,64	4,12	4,4	4,6	4,76	4,88	4,99	5,08	5,16	5,23	5,29	5,35	5,4	5,45

Zdroj: [1], tabulka T11



Obsah

278. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

T11. Kritické hodnoty vícenásobného porovnávání pomocí pořadí



$\alpha = 0,05$	k							
m	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3,3	4,7	6,1	7,5	9	10,5	12	13,5
2	8,8	12,6	16,5	20,5	24,7	28,9	33,1	37,4
3	15,7	22,7	29,9	37,3	44,8	52,5	60,3	68,2
4	23,9	34,6	45,6	57	68,6	80,4	92,4	104,6
5	33,1	48,1	63,5	79,3	95,5	112	128,8	145,8
6	43,3	62,9	83,2	104	125,3	147	169,1	191,4
7	54,4	79,1	104,6	130,8	157,6	184,9	212,8	240,9
8	66,3	96,4	127,6	159,6	192,4	225,7	259,7	294,1
9	78,9	114,8	152	190,2	229,3	269,1	309,6	350,6
10	92,3	134,3	177,8	222,6	268,4	315	362,4	410,5
11	106,3	154,8	205	256,6	309,4	363,2	417,9	473,3
12	120,9	176,2	233,4	292,2	352,4	413,6	476	539,1
13	136,2	198,5	263	329,3	397,1	466,2	536,5	607,7
14	152,1	221,7	293,8	367,8	443,6	520,8	599,4	679
15	168,6	245,7	325,7	407,8	491,9	577,4	664,6	752,8
16	185,6	270,6	358,6	449,1	541,7	635,9	732,0	829,2

Obsah

279. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



$\alpha = 0,01$	k							
m	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4,1	5,7	7,3	8,9	10,5	12,2	13,9	15,6
2	10,9	15,3	19,7	24,3	28,9	33,6	38,3	43,1
3	19,5	27,5	35,7	44	52,5	61,1	69,8	78,6
4	29,7	41,9	54,5	67,3	80,3	93,6	107	120,6
5	41,2	58,2	75,8	93,6	111,9	130,4	149,1	168,1
6	53,9	76,3	99,3	122,8	146,7	171	195,7	220,6
7	67,6	95,8	124,8	154,4	184,6	215,2	246,3	277,7
8	82,4	116,8	152,2	188,4	225,2	262,6	300,6	339
9	98,1	139,2	181,4	224,5	268,5	313,1	358,4	404,2
10	114,7	162,8	212,2	262,7	314,2	366,5	419,5	473,1
11	132,1	187,6	244,6	302,9	362,2	422,6	483,7	545,6
12	150,4	213,5	278,5	344,9	412,5	481,2	551	621,4
13	169,4	240,6	313,8	388,7	464,9	542,4	621	700,5
14	189,1	268,7	350,5	434,2	519,4	606	693,8	782,6
15	209,6	297,8	388,5	481,3	575,8	671,9	769,3	867,7
16	230,7	327,9	427,9	530,1	634,2	740,0	847,3	955,7

Zdroj: [1], tabulka T15

Obsah

280. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

T12. Kritické hodnoty Friedmanova testu



$\alpha = 0,05$	k									
m	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	6	7,4	8,53	9,86	11,24	12,57	13,88	15,19	16,48	17,76
4	6,5	7,8	8,8	10,24	11,63	12,99	14,34	15,67	16,98	18,3
5	6,4	7,8	8,99	10,43	11,84	13,23	14,59	15,93	17,27	18,6
6	7	7,6	9,08	10,54	11,97	13,38	14,76	16,12	17,4	18,8
7	7,143	7,8	9,11	10,62	12,07	13,48	14,87	16,23	17,6	18,9
8	6,25	7,65	9,19	10,68	12,14	13,56	14,95	16,32	17,7	19
9	6,222	7,66	9,22	10,73	12,19	13,61	15,02	16,4	17,7	19,1
10	6,2	7,67	9,25	10,76	12,23	13,66	15,07	16,44	17,8	19,2
11	6,545	7,68	9,27	10,79	12,27	13,7	15,11	16,48	17,9	19,2
12	6,167	7,7	9,29	10,81	12,29	13,73	15,15	16,53	17,9	19,3
13	6	7,7	9,3	10,83	12,32	13,76	15,17	16,56	17,9	19,3
14	6,143	7,71	9,32	10,85	12,34	13,78	15,19	16,58	17,9	19,3
15	6,4	7,72	9,33	10,87	12,35	13,8	15,2	16,6	18	19,3
16	5,99	7,73	9,34	10,88	12,37	13,81	15,23	16,6	18	19,3
20	5,99	7,74	9,37	10,92	12,41	13,8	15,3	16,7	18	19,4
∞	5,99	7,82	9,49	11,07	12,59	14,07	15,51	16,92	18,31	19,68

Obsah

281. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



$\alpha = 0,01$	k									
m	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	-	9	10,13	11,76	13,26	14,78	16,28	17,74	19,19	20,61
4	8	9,6	11,2	12,59	14,19	15,75	17,28	18,77	20,24	21,7
5	8,4	9,96	11,43	13,11	14,74	16,32	17,86	19,37	20,86	22,3
6	9	10,2	11,75	13,45	15,1	16,69	18,25	19,77	21,3	22,7
7	8,857	10,371	11,97	13,69	15,35	16,95	18,51	20,04	21,5	23
8	9	10,35	12,14	13,87	15,53	17,15	18,71	20,24	21,8	23,2
9	8,667	10,44	12,27	14,01	15,68	17,29	18,87	20,42	21,9	23,4
10	9,6	10,53	12,38	14,12	15,79	17,41	19	20,53	22	23,5
11	9,455	10,6	12,46	14,21	15,89	17,52	19,1	20,64	22,1	23,6
12	9,5	10,68	12,53	14,28	15,96	17,59	19,19	20,73	22,2	23,7
13	9,385	10,72	12,58	14,34	16,03	17,67	19,25	20,8	22,3	23,8
14	9	10,76	12,64	14,4	16,09	17,72	19,31	20,86	22,4	23,9
15	8,933	10,8	12,68	14,44	16,14	17,78	19,35	20,9	22,4	23,9
16	8,79	10,84	12,72	14,48	16,18	17,81	19,4	20,9	22,5	24
20	8,87	10,94	12,83	14,6	16,3	18,0	19,5	21,1	22,6	24,1
∞	9,21	11,45	13,28	15,09	16,81	18,48	20,09	21,67	23,21	24,73

Obsah

282. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

T13. Kritické hodnoty vícenásobného porovnávání u Friedmannova testu



$\alpha = 0,05$	k							
m	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3,3	4,7	6,1	7,5	9	10,5	12	13,5
2	4,7	6,6	8,6	10,7	12,7	14,8	17	19,2
3	5,7	8,1	10,6	13,1	15,6	18,2	20,8	23,5
4	6,6	9,4	12,2	15,1	18	21	24	27,1
5	7,4	10,5	13,6	16,9	20,1	23,5	26,9	30,3
6	8,1	11,5	14,9	18,5	22,1	25,7	29,4	33,2
7	8,8	12,4	16,1	19,9	23,9	27,8	31,8	35,8
8	9,4	13,3	17,3	21,3	25,5	29,7	34	38,3
9	9,9	14,1	18,3	22,6	27	31,5	36	40,6
10	10,5	14,8	19,3	23,8	28,5	33,2	38	42,8
11	11	15,6	20,2	25	29,9	34,8	39,8	44,9
12	11,5	16,2	21,1	26,1	31,2	36,4	41,6	46,9
13	11,9	16,9	22	27,2	32,5	37,9	43,3	48,8
14	12,4	17,5	22,8	28,2	33,7	39,3	45	50,7
15	12,8	18,2	23,6	29,2	34,9	40,7	46,5	52,5
16	13,3	18,8	24,4	30,2	36	42	48,1	54,2

Obsah

283. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno



$\alpha = 0,01$	k							
m	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4,1	5,7	7,3	8,9	10,5	12,2	13,9	15,6
2	5,8	8	10,3	12,6	14,9	17,3	19,7	22,1
3	7,1	9,8	12,6	15,4	18,3	21,2	24,1	27
4	8,2	11,4	14,6	17,8	21,1	24,4	27,8	31,2
5	9,2	12,7	16,3	19,9	23,6	27,3	31,1	34,9
6	10,1	13,9	17,8	21,8	25,8	29,9	34,1	38,2
7	10,9	15	19,3	23,5	27,9	32,3	36,8	41,3
8	11,7	16,1	20,6	25,2	29,8	34,6	39,3	44,2
9	12,4	17,1	21,8	26,7	31,6	36,6	41,7	46,8
10	13	18	23	28,1	33,4	38,6	44	49,4
11	13,7	18,9	24,1	29,5	35	40,5	46,1	51,8
12	14,3	19,7	25,2	30,8	36,5	42,3	48,2	54,1
13	14,9	20,5	26,2	32,1	38	44	50,1	56,3
14	15,4	21,3	27,2	33,3	39,5	45,7	52	58,4
15	16	22	28,2	34,5	40,8	47,3	53,9	60,5
16	16,5	22,7	29,1	35,6	42,2	48,9	55,6	62,5

Zdroj: [1], tabulka T17

Obsah

284. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

T14. Kritické hodnoty jednovýběrového Kolmogorova-Smirnovova testu

n	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,01$
1	0,975	0,995
2	0,84189	0,92929
3	0,7076	0,829
4	0,62394	0,73424
5	0,56328	0,66853
6	0,51926	0,61661
7	0,48342	0,57581
8	0,45427	0,54179
9	0,43001	0,51332
10	0,40925	0,48893
11	0,39122	0,4677
12	0,37543	0,44905
13	0,36143	0,43247
14	0,3489	0,41762
15	0,3376	0,4042
16	0,32733	0,39201
17	0,31796	0,38086
18	0,30936	0,37062
19	0,30143	0,36117
20	0,29408	0,35241

n	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,01$
31	0,23788	0,2853
32	0,23424	0,28094
33	0,23076	0,27677
34	0,22743	0,27279
35	0,22425	0,26897
36	0,22119	0,26532
37	0,21826	0,2618
38	0,21544	0,25843
39	0,21273	0,25518
40	0,21012	0,25205
41	0,2076	0,24904
42	0,20517	0,24613
43	0,20283	0,24332
44	0,20056	0,2406
45	0,19837	0,23798
46	0,19625	0,23544
47	0,1942	0,23298
48	0,19221	0,23059
49	0,19028	0,22828
50	0,18841	0,22604

n	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,01$
61	0,17091	0,20506
62	0,16956	0,20343
63	0,16823	0,20184
64	0,16693	0,20029
65	0,16567	0,19877
66	0,16443	0,19729
67	0,16322	0,19584
68	0,16204	0,19442
69	0,16088	0,19303
70	0,15975	0,19167
71	0,15864	0,19034
72	0,15755	0,18903
73	0,15649	0,18776
74	0,15544	0,1865
75	0,15442	0,18528
76	0,15342	0,18408
77	0,15244	0,1829
78	0,15147	0,18174
79	0,15052	0,1806
80	0,1496	0,17949



Obsah

285. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

21	0,28724	0,34427
22	0,28087	0,33666
23	0,2749	0,32954
24	0,26931	0,32286
25	0,26404	0,31657
26	0,25907	0,31064
27	0,25438	0,30502
28	0,24993	0,29971
29	0,24571	0,29466
30	0,2417	0,29987

51	0,18659	0,22386
52	0,18482	0,22174
53	0,18311	0,21968
54	0,18144	0,21768
55	0,17981	0,21574
56	0,17823	21384
57	0,17669	0,21199
58	0,17519	0,21019
59	0,17373	0,20844
60	0,17231	0,20673

81	0,14868	0,1784
82	0,14779	0,17732
83	0,14691	0,17627
84	0,14605	0,17523
85	0,1452	0,17421
86	0,14437	0,17321
87	0,14355	0,17223
90	0,14177	0,16938
95	0,13746	0,16493
100	0,13403	0,16081

Zdroj: [1], tabulka T18



Obsah

286. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

T15. Kritické hodnoty Spearmanova korelačního koeficientu

n	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,01$
5	0,9	-
6	0,8286	0,9429
7	0,745	0,8929
8	0,6905	0,8571
9	0,6833	0,8167
10	0,6364	0,7818

n	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,01$
11	0,6091	0,7545
12	0,5804	0,7273
13	0,5549	0,6978
14	0,5341	0,6747
15	0,5179	0,6536
16	0,5	0,6324
17	0,4853	0,6152
18	0,4716	0,5975
19	0,4579	0,5825
20	0,4451	0,5684

n	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,01$
21	0,4351	0,5545
22	0,4241	0,5426
23	0,415	0,5306
24	0,4061	0,52
25	0,3977	0,51
26	0,3894	0,5002
27	0,3822	0,4915
28	0,3749	0,4828
29	0,3685	0,4744
30	0,362	0,4665

Zdroj: [1], tabulka T22



Obsah

287. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



Literatura

- [1] Anděl, J.: *Základy matematické statistiky*, MatFyzPress, Praha 2007, ISBN: 80-7378-003-8.
- [2] Anděl, J.: *Statistické metody*, MatFyzPress, Praha 2007, ISBN: 80-7378-001-1.
- [3] Briš R., Litschmannová M., *Statistika I. pro kombinované a distanční studium*, Ostrava 2004, dostupné na: www.am.vsb.cz/litschmannova.
- [4] Budíková, M., Lerch, T., Mikoláš, Š.: *Základní statistické metody*, Brno 2005, ISBN: 80-210-3886-1.
- [5] Budíková, M., Mikoláš, Š., Osecký, P.: *Teorie pravděpodobnosti a matematická statistika*, Brno 2007, ISBN: 80-210-3313-4.
- [6] Dummer: *Introduction to statistical science*, VŠB-TU Ostrava, Ostrava, 1998.
- [7] Dummer, Klímková: *Statistika I. (cvičení)*, VŠB-TU Ostrava, Ostrava, 1997.
- [8] Friedrich, V.: *Statistika I. – vysokoškolská učebnice*, Plzeň 2002

Obsah

288. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

- [9] Friesl, M.: *Posbírané příklady z pravděpodobnosti a statistiky*, 2004, dostupné na: <http://home.zcu.cz/friesl/Archiv/PosbPsa.pdf>.
- [10] Gibilisco, S.: *Statistika bez předchozích znalostí*, Brno 2009, ISBN: 978-80-251-2465-9.
- [11] Kazmier, L., J., Pohl, N., F. : *Basic Statistics for Business and Economics*, Second Edition. McGraw-Hill, Inc., New York, 1984.
- [12] Kohout, P.: *Příklady z teorie pravděpodobnosti*, dostupné na: http://www.kmt.zcu.cz/person/Kohout/info_soubory/exam1.htm.
- [13] Kupka, K.: *Statistické řízení jakosti*, Trilobyte 1997, ISBN: 80-238-1818-X.
- [14] Lane, D.: *HyperStat Online Statistics Textbook*, dostupné na: <http://davidmlane.com/hyperstat>.
- [15] Likeš, J., Machek, J.: *Počet pravděpodobnosti*, SNTL, Praha, 1981
- [16] Likeš, J., Machek, J.: *Matematická statistika*, SNTL, Praha, 1983
- [17] Likeš, J., Laga: *Základní statistické tabulky*, Praha, 1978
- [18] Litschmannová, M.: *Statistika I. - řešené příklady*, 2007, dostupné na: www.am.vsb.cz/litschmannova
- [19] Otipka, P., Šmajstrla, V.: *Pravděpodobnost a statistika*, dostupné na: <http://homen.vsb.cz/oti73/cdpast1/index.htm>.



Obsah

289. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

- [20] Plocki, A., Tlustý, P.: *Pravděpodobnost a statistika pro začátečníky a mírně pokročilé*, Prometheus, Praha 2007, ISBN: 978-80-7196-330-1.
- [21] Rosenthal, J.: *Zasažen bleskem*, Academia, Praha 2008, ISBN: 978-80-200-1645-4.
- [22] Seger, J., Hindls, R., Hronová, S.: *Statistika v hospodářství*, Manager – Podnikatel, Praha 1998.
- [23] Schindler, M.: *Příklady*, dostupné na:
<http://artax.karlin.mff.cuni.cz/schim9am/priklady06.pdf>.
- [24] Sternstein, M.: *Barrons AP Statistics*, Barron's Educational Series, 2010, ISBN: 0764140892.
- [25] Triola, M., F.: *Elementary Statistics*, Fourth Edition. The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., Redwood City, California, 1989.
- [26] Wonnacot, T. H., Wonnacot, R. J.: *Statistika pro obchod a hospodářství*, Victoria Publishing, Praha 1992.
- [27] Zvára, K., Štěpán, J.: *Pravděpodobnost a matematická statistika*, MatFyzPress, Praha 2006, ISBN: 80-86732-71-1.



Obsah

290. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Rejstřík

číselné charakteristiky

marginální, 128

náhodného vektoru, 128

podmíněné, 135

šikmost, 98

špičatost, 98

bayseův vzorec, 58

distribuční funkce

sdužená (simultánní), 116

funkce

distribuční, 78

pravděpodobnostní, 81

hustota pravděpodobnosti, 85

vlastnosti, 87

intenzita poruch, 189

model, 190

jev

úplná množina vzájemně disjunktních,

40

disjunktní, 35

doplňěk, 36

elementární, 33

jistý, 34

náhodný, 33

nemožný, 34

průnik, 36

rozdíl, 38

sjednocení, 37

složený, 33

jevové pole, 41



Obsah

291. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

- koeficient
 - korelační, 131
- koeficient korelace, 129
- kolmogorovovy axiomy pravděpodobnosti, 49
- kombinace
 - bez opakování, 20
 - s opakováním, 21
- kombinatorické pravidlo
 - součinu, 15
 - součtu, 16
- kovariance, 129
- kvantily, 99
- matice
 - korelační, 133
 - kovarianční, 130
- modus, 99
- moment
 - centrální, 95
 - obecný, 94
 - sdružený, 129
 - sdružený centrální, 129
- náhodná veličina, 76
 - číselné charakteristiky, 93
 - diskrétní, 81
 - spojitá, 83
- náhodný vektor
 - diskrétní, 119
 - spojitý, 120
- normalita
 - ověření, 212
 - porušení, 216
- permutace
 - bez opakování, 17
 - s opakováním, 19
- podjev, 35
- pokus
 - náhodný, 32
- pravděpodobnost, 45
 - aposteriorní, 58
 - geometrická, 48
 - klasická, 46
 - podmíněná, 51
 - průniku, 52
 - vlastnosti, 50
- pravděpodobnosti
 - apriorní, 58
- pravidlo 3σ , 211
- prostor



Obsah

292. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

- pravděpodobnostní, 50
- základní, 32
- rozdělení
 - alternativní, 148, 164
 - binomické, 149, 165
 - deometrické, 154
 - erlangovo, 196, 227
 - exponenciální, 186, 191, 223
 - geometrické, 167
 - hypergeometrické, 152, 166
 - aproximace, 153
 - logaritmicko-normální, 216, 230
 - marginální, 121, 122
 - negativně binomické (Pascalovo), 156, 170
 - normální, 201
 - normované, 207
 - standardizace, 209
 - podmíněné, 125, 126
 - poissonovo, 160, 171
 - aproximace, 163
 - rovnoměrné, 185, 220
 - sdužené, 116, 119, 120
 - weibullovo, 193
- rozdělení pravděpodobnosti, 77
- rozhodovací strom, 58
- rozptyl, 96
 - vlastnosti, 96
- rozptyly
 - podmíněné, 135
- smíšené momenty, 129
- směrodatná odchylka, 97
- střední hodnota, 94
 - vlastnosti, 95
- střední hodnoty
 - podmíněné, 135
- výběr
 - bez opakování, 15
 - neuspořádaný, 14
 - s opakováním, 14
 - uspořádaný, 14
- věta
 - o úplné pravděpodobnosti, 55
- variance
 - bez opakování, 16
 - s opakováním, 18
- veličina
 - náhodná, 75



Obsah

293. strana ze 293



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno