Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava
Západočeská univerzita v Plzni

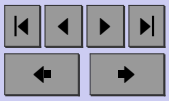
Interaktivní učebnice Úvodu do Teorie Grafů

Petr Kovář

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Petr Kovář
Interaktivní učebnice Úvodu do Teorie Grafů

ISBN



Předmluva

Tento text, slouží jako interaktivní učební pomůcka k předmětu *Diskrétní matematika a úvod do Teorie grafů (DiM)* pro bakalářské studium na technické vysoké škole. Při výběru témat jsem vycházel především z osnov předmětu, tak jak byly navrženy pro studenty oborů se zaměřením na informatiku a další technické obory. Jedná se o doplňující text k učebnímu textu *Úvod do teorie grafů*. Při přípravě jsem čerpal ze skript *Diskrétní matematika* Petra Hliněného [4], z knihy *Kapitoly z diskrétní matematiky* od Jiřího Matouška a Jaroslava Nešetřila [7], z knihy *Discrete Mathematics and Its Applications* od K. Rosena [8], z knihy *Introduction to Graph Theory* od Douglase B. Westa [9] a celé řady dalších učebnic a článků.

Budu rád, když mne upozorníte na překlepy i na méně srozumitelné pasáže, abych je v dalších verzích mohl opravit.

Text byl vysázen pomocí sázecího systému TEX ve formátu pdfLATEX.

V Ostravě 31. 7. 2012 Petr Kovář

Obsah

Obsah
8. strana ze 272

Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Kapitola 1

Pojem grafu

Teorie grafů je jednou z mladších disciplin matematiky. Zatímco historie aritmetiky nebo geometrie se ztrácejí hluboko před počátkem letopočtu, tak začátky teorie grafů klademe poměrně přesně do 30. let 18. století. V roce 1736 Švýcarský a později pruský matematik Leonhard Euler vyřešil tak zvaný „Problém sedmi mostů města Královce.“ Při řešení nevyužil metody žádné z tehdy známých disciplin matematiky, ale použil (jak sám napsal v dopise svému příteli) „geometrii pozic,“ dnes bychom řekli Teorii grafů. Za zakladatele teorie grafů proto považujeme Eulera a rok 1736 za rok vzniku teorie grafů. První monografii a současně učebnici Teorie grafů („Theorie der endlichen und unendlichen Graphen“) vydal Maďarský matematik Dénes Kőnig o dvě stě let později, v roce 1936.

Dnes našla teorie grafů jako významná část diskrétní matematiky své uplatnění při řešení mnoha praktických úloh. Její výhodou je snadná a intuitivní představa, která modeluje reálnou situaci jako množinu objektů (vrcholy grafu) a vztahy mezi nimi (hrany grafu).

Převedeme-li konkrétní úlohu do řeči teorie grafů, často se jedná o již řešený obecný problém a můžeme použít známe algoritmy při implementaci řešení. Bezesporu zásadní výhodou je snadná implementace objektů a postupů Teorie grafů v počítači.

1.1. Graf

Průvodce studiem

V této sekci zavedeme pojem grafu jako dvojici množin: množinu objektů, kterým říkáme vrcholy grafu, a množinu hran, jež reprezentují vztahy mezi objekty. Ukážeme několik způsobů, jak graf může modelovat reálnou situaci. Upozorníme na omezení zavedeného pojmu graf, na analogie a rozdíly mezi pojmy „graf“ a „relace“ a zmíníme také obecnější struktury než je „graf“.

Nakonec zavedeme několik běžných tříd grafů, se kterými se často setkáme v dalším textu.

Cíle

Po prostudování této sekce budete schopni:

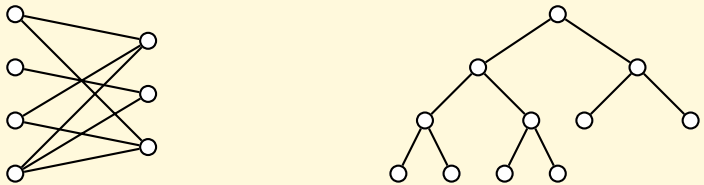
- nadefinovat graf jako algebraickou strukturu,
- vysvětlit rozdíl mezi grafem a jeho nakreslením,
- popsat základní typy grafů.

Pojem grafu je jedním z ústředních pojmů současné Diskrétní matematiky. Hned na úvod je nutno zdůraznit, že grafem *nebudeme rozumět graf funkce*! V Diskrétní matematice grafem rozumíme algebraickou strukturu, která přehledně popisuje objekty a vztahy mezi nimi.

Neformálně si graf můžeme představit jako několik objektů (říkám jim vrcholy) a jejich spojnice (hrany). Nespornou výhodou grafů je jejich přehledné a intuitivní znázornění, kdy

vrcholy nakreslíme jako body nebo puntíky v rovině a hrany zakreslíme jako křivky spojující příslušné vrcholy.

Současně je jasné, že při pečlivém rozboru komplikovaných úloh a zejména při implementaci algoritmů pro jejich řešení nevystačíme s neformálně zavedenou strukturou grafů jako puntíků a čar v rovině. Všimněte si, jak následující definice vystihne podstatu struktury grafu: objekty a jejich vazby. Jestliže mezi dvěma objekty je vazba, popíšeme ji jako dvojici (dvouprvkovou množinu) příslušných objektů (vrcholů). Naopak, jestliže mezi dvěma objekty vazba není, příslušnou dvojici objektů do množiny hran nezařadíme.



Obrázek 1.1 Ukázky grafů.

Definice 1.1. *Graf* G (také *jednoduchý* graf nebo *obyčejný* graf) je uspořádaná dvojice $G = (V, E)$, kde V je neprázdná množina *vrcholů* a E je množina *hran* – množina (některých) dvouprvkových podmnožin množiny V.

V dalším textu budeme pracovat převážně s konečnými grafy, tj. s takovými grafy, které mají konečnou a neprázdnou množinu V. Množinu vrcholů daného grafu G budeme značit $V(G)$ a množinu jeho hran $E(G)$. Proto například $|V(G)|$ je číslo, které udává počet vrcholů grafu G a $|E(G)|$ je počet hran grafu G.

Vrcholy grafu značíme obvykle malými písmeny z konce abecedy (například $u, v, w, \dots$). Hrany jsou dvouprvkové podmnožiny V, například $\{u, v\}$ nebo $\{u, w\}$. Z praktických důvodů budeme hrany značit zkráceně uv nebo uw, mějme však na paměti, že uv je jen zkratkou zápisu $\{u, v\}$. Zejména má smysl říkat, že „vrcholy u a v patří hraně“ uv, nebo že vrcholy u a v jsou *incidentní* s hranou uv („incidentní“ znamená $u \in \{u, v\}$).

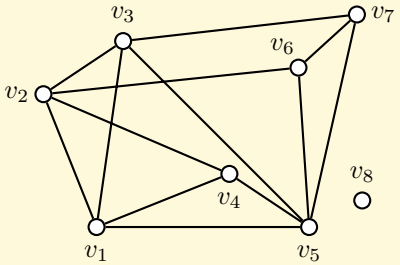
Dále říkáme, že vrcholy u a v jsou *spojené hranou* uv nebo že jsou *sousední* v grafu G, jestliže hrana $uv \in E(G)$. Pokud množina E hranu uv neobsahuje, tak vrcholy u, v jsou *nesousední* nebo *nezávislé*. Naopak pracujeme-li s hranou uv, tak vrcholy u a v nazýváme *koncové* vrcholy hrany uv.

1.1.0.1. Graf a jeho nakreslení

Graf můžeme znázornit nebo dokonce zadat vhodným obrázkem. Jedno takové nakreslení grafu je na Obrázku 1.2. Snadno ověříte (a to doporučujeme jako snadné cvičení), že graf G na Obrázku 1.2 popisuje strukturu $G = (V, E)$, kde množina vrcholů je $V = \{v_1, v_2, \dots, v_8\}$ a množina hran (dvouprvkových podmnožin množiny V) je $E = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_1v_5, v_2v_3, v_2v_4, v_2v_6, v_3v_5, v_3v_7, v_4v_5, v_5v_6, v_5v_7, v_6v_7\}$.

Aby nakreslení grafu bylo opravdu přehledné, tak je praktické požadovat

- aby každý vrchol byl zakreslen do jiného bodu,
- aby každá hrana procházela jen jejími dvěma koncovými vrcholy (a žádným jiným vrcholem),
- aby se dvě různé hrany v nakreslení protínaly nejvýše jednou,
- aby žádná hrana neprotínala sama sebe,



Obrázek 1.2 Nakreslení grafu G.

- aby se v nakreslení křížilo co možná nejméně hran.

Zatímco první čtyři požadavky je možné splnit vždy, poslední požadavek obecně splnit nelze. Více se o kreslení grafů dozvíme v Kapitole 6.

Příklad 1.2. Jsou vrcholy v_1 a v_5 v grafu G na Obrázku 1.2 sousední? A jsou vrcholy v_4 a v_7 sousední?

Řešení. Protože množina hran $E(G)$ grafu G obsahuje hranu v_1v_5, tak vrcholy v_1 a v_5 jsou sousední (v grafu G). Naproti tomu hrana v_4v_7 do množiny $E(G)$ nepatří a proto vrcholy v_4 a v_7 nejsou sousední, jsou nezávislé v grafu G. ▲

Hrany v grafu můžeme chápat jako spojnice, cesty, vodiče mezi nějakými objekty, městy nebo uzly. Ale hrany mohou reprezentovat i abstraktnější vazby: hrana xy může znamenat „procesy x a y nemohou běžet současně“, protože například využívají stejné zdroje systému.

Příklad 1.3. Najděte co největší množinu nezávislých vrcholů v grafu G na Obrázku 1.2.

Řešení. Označme hledanou množinu N. Všimneme si, že ze tří vrcholů v_1, v_2 a v_3 jsou každé dva spojené hranou, proto do hledané množiny N můžeme zahrnout nejvýše jeden z nich. Podobně do N lze zařadit nejvýše jeden z vrcholů v_5, v_6 a v_7. Při sestavování největší nezávislé množiny N proto musíme vyřadit vždy alespoň čtyři vrcholy z celkového počtu osmi vrcholů v G.

Dále snadno ověříme, že žádné dva vrcholy z množiny $N = \{v_3, v_4, v_7, v_8\}$ nejsou spojené hranou a proto množina N je největší množinou nezávislých vrcholů. (Existují i jiné čtyřprvkové množiny nezávislých vrcholů, najdete nějakou?) ▲

Výsledek Příkladu 1.3 můžeme interpretovat takto: Je-li graf modelem osmi procesů, kdy hrany spojují procesy, které nemohou běžet současně, tak jsme ukázali, že v daném systému mohou běžet současně nejvýše čtyři procesy. Navíc jsme zjistili, které procesy to mohou být.

1.1.0.2. Různé způsoby zadání grafu

Uvědomte si, že stejný graf můžeme popsat několika způsoby. Jednak algebraicky, kdy zadáme nebo popíšeme množinu vrcholů V a množinu hran E nebo „obrázkem“ (nakreslením grafu). Každý z nich má své výhody. Algebraický přístup je vhodný pro implementaci algoritmů a existuje několik možností, jak strukturu grafu popsat v rámci příslušného programovacího jazyka. Pro teoretický rozbor nebo dokonce jen první seznámení s problémem je naopak vhodný obrázek, často nakreslíme i jen neúplné schéma tak, abychom získali představu o grafu, který bude naším modelem.

V praxi je obvyklé, že struktura grafu není nijak přirozeně popsána a jsme to právě my, kdo bude příslušný model (graf) sestavovat. Je pak na nás, jaký popis zvolíme.

Příklad 1.4. Devět kamarádů si na Vánoce dalo dárky. Každý dal dárky třem svým kamarádům. Ukažte, že není možné, aby každý dostal dárky právě od těch tří kamarádů, kterým dárky sám dal.

Řešení. Situaci si znázorníme grafem. Vrcholy grafu budou kamarádi, máme tedy celkem 9 vrcholů. Hrana bude mezi těmi dvěma vrcholy (kamarády), kteří si navzájem dali dárky.

Pokud by řešení existovalo, tak bychom uměli sestavit graf s devíti vrcholy, ve kterém každý vrchol je sousední se třemi jinými vrcholy. Formulace zadání však naznačuje, že taková situace nemůže nastat a tedy že takový graf není možné sestrojit. Vskutku, takový graf neexistuje a každý pokus o jeho sestrojení skončí nezdarem. Doporučujeme, abyste si zkusili graf sestavit a uvědomit si, proč se konstrukce nedaří. Podrobné řešení si ukážeme později v této kapitole. ▲

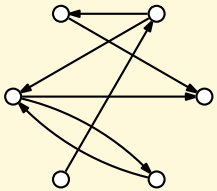
Poznámka 1.5. Připomeňme, že relace na množině A je nějaká podmnožina kartézského součinu $A \times A$. Graf G je množina vrcholů V a hrany jsou tvořeny některými dvojicemi vrcholů v množině E. Můžeme se proto na graf dívat jako na relaci ϱ na množině V, kdy dva vrcholy u a v jsou v relaci, jestliže existuje hrana uv. Taková relace ϱ je jistě symetrická (proč?) a není reflexivní. Dokonce žádný vrchol není v relaci sám se sebou a proto říkáme, že relace ϱ je *ireflexivní*. Nakreslení grafu pak není nic jiného než nějaké znázornění relace ϱ.

Každé tvrzení o grafech můžeme zformulovat jako tvrzení o příslušné relaci. Upřednostňujeme však terminologii a pohled teorie grafů, neboť bývá přehlednější.

Tak, jako jsme zavedli jednoduchý (neorientovaný) graf, má smysl pracovat i s orientovanými grafy. Pokud graf reprezentuje dopravní síť, silniční síť nebo jiný produktovod, může být užitečné zavést *orientaci hrany*. Hrana uv pak není totožná s hranou vu.

Definice 1.6. *Orientovaným grafem* rozumíme uspořádanou dvojici $G = (V, E)$, kde V je množina *vrcholů* a množina *orientovaných hran* je $E \subseteq V \times V$.

Orientovaná hrana uv pak není dvouprvková podmnožina $\{u, v\}$, ale uspořádaná dvojice (u, v) dvou prvků $u, v \in V$. Vrchol u je *počáteční* a vrchol v *koncový* vrchol hrany uv. V nakreslení znázorníme orientované hrany šipkami (Obrázek 1.3). Orientovanými grafy se budeme podrobně zabývat především v Kapitole 7.



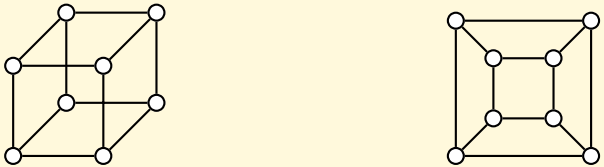
Obrázek 1.3 Orientovaný graf.

Pro zájemce

Ještě obecnější pojem než orientovaný graf, je *multigraf*. V multigrafech mohou existovat vícenásobné hrany a smyčky. V *pseudografech* mohou být současně orientované i neorientované a násobné hrany. Definici multigrafů a pseudografů najdete třeba v [5].

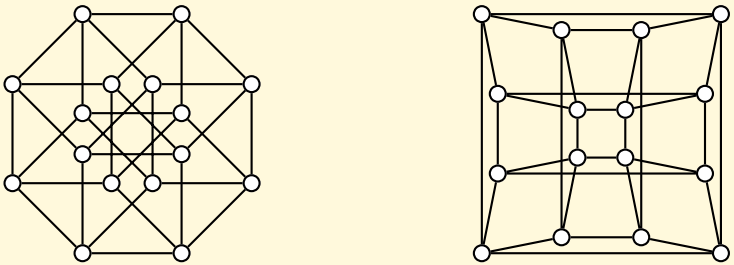
Pro zájemce

Terminologie „vrchol“ a „hrana“ grafu pochází z geometrie mnohostěnů. Například obyčejnou třírozměrnou krychli obvykle znázorňujeme jako na Obrázku 1.4. Osm vrcholů krychle přirozeně odpovídá vrcholům grafu na obrázku a stejně tak dvanáct hran krychle najdeme jako dvanáct hran v grafu na obrázku.



Obrázek 1.4 Různá nakreslení grafu krychle.

Na obrázku 1.5 pak vidíme znázornění čtyřrozměrné krychle, kterou samozřejmě není možné v třírozměrném prostoru sestrojit, ale její model můžeme celkem pěkně studovat na příslušném grafu.



Obrázek 1.5 Dvě nakreslení grafu čtyřrozměrné krychle (hyperkrychle čtvrtého řádu).

Pojmy k zapamatování

— graf s množinou vrcholů a množinou hran

— orientovaný graf
— nakreslení grafu

1.2. Základní třídy grafů

V předchozí části jsme řekli, že grafy můžeme popsat algebraicky (zadat množinu vrcholů a množinu hran) nebo obrázkem. Graf však můžeme jednoznačně zadat popisem vlastností nebo jen jeho jménem. Řada struktur se vyskytuje natolik často, že se ustálilo popisné jméno takového grafu nebo celé skupiny grafů.

Graf, který obsahuje jediný vrchol (a žádnou hranu), se nazývá *triviální* graf (Obrázek 1.6 vlevo).

1.2.0.3. Kompletní graf

Jestliže graf na daném počtu vrcholů n obsahuje všechny možné hrany, říkáme, že je *kompletní*.

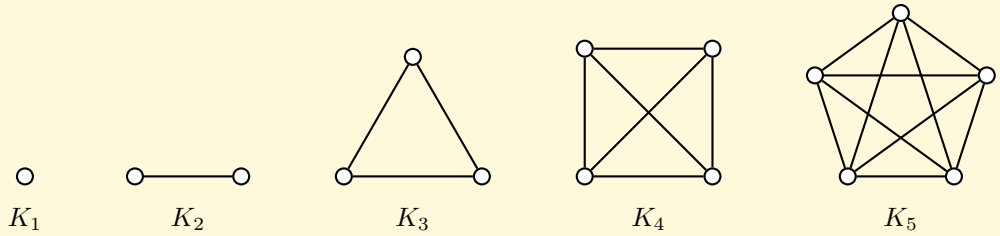
Definice 1.7. Graf na n vrcholech ($n \geqq 1$), který obsahuje všech $\binom{n}{2}$ hran se nazývá *úplný* nebo také *kompletní* graf a značí se K_n.

Algebraicky můžeme kompletní graf K_n popsat následujícím způsobem.

$$K_n = (V, E): \quad V = \{1, 2, \ldots, n\}, \quad E = \{ij : i, j = 1, 2, \ldots n \wedge i \neq j\}$$

Příklady kompletních grafů pro malé hodnoty n jsou na Obrázku 1.6.

Všimněte si, že v Definici 1.7 jsme za vrcholy grafu vzali množinu prvních n přirozených čísel. Mohli jsme však stejně dobře zvolit libovolnou množinu s n prvky.



Obrázek 1.6 Triviální graf a kompletní grafy.

1.2.0.4. Cyklus (kružnice)

Graf, který má n vrcholů spojených n hranami do jediného „cyklu“, nazýváme *cyklus*.

Definice 1.8. Graf na n vrcholech (kde $n \geq 3$), které jsou spojeny po řadě n hranami do jediného cyklu tak, že každý vrchol je spojen s následujícím vrcholem a poslední vrchol je navíc spojen s prvním vrcholem, se nazývá *cyklus* na n vrcholech a značí se C_n. Číslo n je *délka* cyklu C_n.

Algebraicky můžeme cyklus C_n popsat takto:

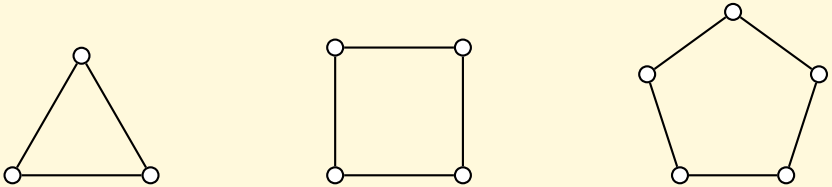
$$C_n = (V, E): \quad V = \{1, 2, \ldots, n\}, \quad E = \{i(i+1) : i = 1, 2, \ldots n-1\} \cup \{1n\},$$

kde číslo n je alespoň 3.

Připomeňme, že zápis $i(i+1)$ je zkrácený zápis množiny $\{i, i+1\}$. Některé učebnice místo „cyklus“ používají termín *kružnice*. Cyklu délky tři říkáme také *trojúhelník* a cyklu délky čtyři někdy říkáme *čtverec*. Všimněte si, že trojúhelník C_3 je současně kompletním grafem K_3.

Obsah
19 strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Cyklus nemůže mít méně než tři vrcholy, neboť by taková struktura nebyla jednoduchým grafem.



Obrázek 1.7 Cykly C_3, C_4 a C_5.

1.2.0.5. Cesta

Graf, jehož vrcholy je možno seřadit do řady tak, že každý vrchol (kromě prvního) je spojen s předchozím vrcholem a každý vrchol (kromě posledního) s následujícím vrcholem, nazýváme *cesta*.

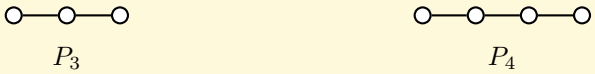
Definice 1.9. Graf na n vrcholech, které jsou spojeny po řadě $n-1$ hranami se nazývá *cesta* a značí se P_n.

Algebraicky můžeme cestu P_n popsat

$$P_n = (V, E): \quad V = \{1, 2, \ldots, n\}, \quad E = \{i(i+1): i = 1, 2, \ldots n-1\}.$$

Obsah
20. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Všimněte si, že kompletní graf K_1 je současně triviální graf i (triviální) cesta P_1 a kompletní graf K_2 je současně cestou P_2. První a poslední vrchol cesty jsou *koncové* vrcholy, ostatní vrcholy (pokud existují) jsou *vnitřní* vrcholy.



P_3 P_4

Obrázek 1.8 Cesty P_3 a P_4.

Poznámka 1.10. Pozor, v některých knihách nebo učebních textech (například [4]) se používá jiné značení, index v zápise P_n odpovídá počtu hran, nikoliv počtu vrcholů.

1.2.0.6. Kompletní bipartitní graf

Poslední třídou grafů, kterou si nyní popíšeme, jsou *kompletní bipartitní grafy*. Často se setkáme s problémem, kdy množinu vrcholů lze přirozeně rozdělit na dvě části říkáme jim *partity*, přičemž je jasné že hranou jsou spojeny pouze vrcholy, které patří do různých partit. Typickým příkladem je přiřazovací úloha: máme skupinu zaměstnanců a několik pracovních úkolů. Hranou spojíme vždy nějakého pracovníka s nějakým úkolem. Hrana nikdy nespojuje dva pracovníky nebo dva úkoly. Následující definice popisuje jeden důležitý případ grafu se dvěma partitami.

Definice 1.11. Graf, který má vrcholovou množinu rozdělenu na dvě neprázdné disjunktní podmnožiny M a N ($|M| = m$, $|N| = n$) a který obsahuje všech $m \cdot n$ hran uv takových, že $u \in M$ a $v \in N$, nazýváme *kompletní bipartitní graf* (nebo také *úplný bipartitní graf*) a značíme jej $K_{m,n}$.

Obsah
21. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Je dobré si uvědomit, že kompletní bipartitní graf $K_{m,n}$neobsahuje žádnou hranu uv, kde u, v patří do stejné partity M nebo N.

Algebraicky můžeme kompletní bipartitní graf $K_{m,n}$ popsat takto:

$$K_{m,n} = (M \cup N, E): \quad M = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}, \quad N = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\},$$
$$E = \{u_i v_j : i = 1, 2, \ldots, m \wedge j = 1, 2, \ldots n\}.$$

Všimněte si, že kompletní bipartitní graf $K_{1,2}$ je současně cestou P_3 a kompletní bipartitní graf $K_{2,2}$ je současně cyklem C_4.

Příklad 1.12. Který graf má více vrcholů, K_{10} nebo $K_{6,7}$? A který z nich má více hran?

Řešení. Podle definice má kompletní graf K_{10} deset vrcholů a celkem $\binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ hran. Naproti tomu kompletní bipartitní graf $K_{6,7}$ má $6+7 = 13$ vrcholů a celkem $6 \cdot 7 = 42$ hran.

Proto kompletní bipartitní graf $K_{6,7}$ má více vrcholů, ale kompletní graf K_{10} má více hran. ▲

1.2.0.7. Další grafy

Některé další grafy se vyskytují často a mají svá jména. Mezi nejznámější patří Petersenův graf na Obrázku 1.9 nebo motýlek na Obrázku 1.10.

Pojmy k zapamatování

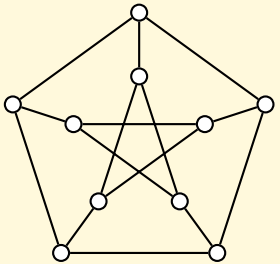
— kompletní graf

— cyklus

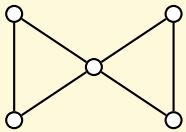
— cesta

— kompletní bipartitní graf

Obsah
22. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obrázek 1.9 Petersenův graf.



Obrázek 1.10 Motýlek.

1.3. Stupeň vrcholu

Průvodce studiem

Nyní zavedeme „stupeň vrcholu“, což je číslo, které pro každý vrchol vyjadřuje počet sousedních vrcholů (souvisejících objektů). Zformulujeme a dokážeme Princip sudosti, což je překvapivě jednoduché a důležité tvrzení, které ukazuje vazbu mezi stupni vrcholů a počtem hran grafu.

V druhé části sekce prozkoumáme stupně vrcholů v grafu detailněji. Ukážeme, které posloupnosti nezáporných celých čísel mohou tvořit posloupnost stupňů vrcholů v nějakém grafu

Obsah
23. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

a které ne.

Cíle

Po prostudování této sekce budete schopni:

- určit stupeň vrcholu v grafu,
- vysvětlit, jak spolu souvisí stupně vrcholů a počet hran v grafu,
- sestavit stupňovou posloupnost daného grafu,
- poznat, zda daná posloupnost nezáporných celých čísel je stupňovou posloupností nějakého grafu,
- sestavit graf s danou stupňovou posloupností.

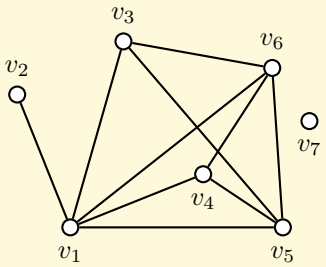
Mějme graf G jako na Obrázku 1.11. Připomeňme, že je-li hrana uv v grafu G, tak vrcholy u a v nazýváme koncové vrcholy této hrany a říkáme, že vrcholy u a v jsou s hranou uv incidentí.

Definice 1.13. *Stupeň vrcholu* v grafu G je počet hran, se kterými je vrchol incidentní.

Stupeň vrcholu v v grafu G značíme $\deg(v)$ nebo také $\deg_G(v)$, pokud chceme zdůraznit, v jakém grafu stupeň vrcholu v zkoumáme. Často se používá symbol $\delta(G)$, který udává nejmenší stupeň vrcholu v daném grafu G, a symbol $\Delta(G)$, který udává nejvyšší stupeň vrcholu v grafu G.

Graf, ve kterém jsou všechny vrcholy stejného stupně, se nazývá *pravidelný graf*.

Určit stupně vrcholů v grafu na Obrázku 1.11 je snadné. Stačí pro každý vrchol spočítat počet incidentních hran. Stupně vrcholů však můžeme určit i v případě, kdy je graf popsán množinami vrcholů V a hran E nebo je-li zadán jménem.



Obrázek 1.11 Graf se stupni vrcholů 5, 1, 3, 3, 4, 4 a 0.

Příklad 1.14. Jaké jsou stupně vrcholů v grafu K_n? A jaké stupně mají vrcholy v grafu $K_{m,n}$ a P_n?

Řešení. Protože každý vrchol kompletního grafu K_n je sousední se všemi ostatními vrcholy, tak stupeň každého vrcholu je $n-1$. Můžeme psát $\deg_{K_n}(v) = n-1$ pro každý vrchol $v \in V(K_n)$.

V kompletním bipartitním grafu $K_{m,n}$ je podle definice každý vrchol z jedné partity sousední pouze s vrcholy z druhé partity. Proto každý vrchol u z partity s m vrcholy je stupně $\deg(u) = n$ a každý vrchol v z partity s n vrcholy je stupně $\deg(v) = m$.

Pro cestu P_n rozlišíme tři případy pečlivým rozborem Definice 1.9. Triviální cesta obsahuje jediný vrchol stupně 0. Cesta P_2 má oba vrcholy stupně 1 a konečně v cestě s více než dvěma vrcholy jsou vždy dva vrcholy stupně 1 (oba *koncové vrcholy* cesty P_n) a všechny zbývající vrcholy jsou stupně 2. ▲

Následující tvrzení ukazuje, že mezi stupni vrcholů a počtem hran grafu je jednoduchý vztah.

Obsah
25. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Věta 1.15 (Princip sudosti). *Součet stupňů všech vrcholů v grafu je vždy sudý a je roven dvojnásobku počtu hran.*

Máme-li graf G, tak tvrzení věty můžeme zapsat vztahem

$$\sum_{v \in V(G)} deg_G(v) = 2|E(G)|. \tag{1.1}$$

Důkaz. Tvrzení ukážeme metodou dvojího počítání. Dvěma způsoby spočítáme koncové vrcholy hran. Pozor, každý vrchol započítáme tolikrát, kolikrát je koncovým vrcholem nějaké hrany – nejedná se jen o pouhý počet vrcholů.

Stupeň každého vrcholu v udává počet, kolikrát je daný vrchol v koncovým vrcholem nějaké hrany. Proto součet všech stupňů vrcholů je počtem všech koncových vrcholů hran.

Současně uvážíme, že každá hrana má dva koncové vrcholy, proto počet koncových vrcholů hran je roven současně dvojnásobku počtu hran. □

Uvědomte si, že známe-li stupně všech vrcholů v daném grafu, je počet hran grafu určen jednoznačně. Může existovat několik různých grafů s danými stupni, ale všechny tyto grafy mají stejný počet hran, který lze určit ze vztahu 1.1. Například máme-li pravidelný graf G na n vrcholech, ve kterém jsou všechny vrcholy stupně r, tak graf G má $nr/2$ hran.

Příklad 1.16. Kolik hran má graf na Obrázku 1.11?

Řešení. Protože stupně vrcholů v grafu na Obrázku 1.11 jsou 5, 1, 3, 3, 4, 4 a 0, tak součet stupňů jeho vrcholů je $5+1+3+3+4+4+0 = 20$. Podle vztahu 1.1 z Věty 1.15 má daný graf $20/2 = 10$ hran. ▲

Obsah
26. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Všimněte si, že součet stupňů všech vrcholů v daném grafu je podle Věty 1.15 vždy sudý. Proto se Větě 1.15 říká „Princip sudosti“. Podle principu sudosti *žádný graf* nemůže mít lichý počet vrcholů lichého stupně. A proto, pokud je v grafu G nějaký vrchol lichého stupně, musí v grafu G takových vrcholů být sudý počet.

Nyní je čas vrátit se k Příkladu 1.4.

Příklad 1.17 (Pokračování Příkladu 1.4). Devět kamarádů si na Vánoce dalo dárky. Každý dal dárky třem svým kamarádům. Ukažte, že není možné, aby každý dostal dárky právě od těch tří kamarádů, kterým dárky sám dal. Návod: ukažte, že neexistuje graf, který by danou situaci modeloval.

Řešení. V řešení Příkladu 1.4 jsme ukázali, že pokud by existovalo řešení daného problému, tj. každý z devíti kamarádů by mohl dostat dárky od těch tří, kterým dárky dal, tak celou úlohu můžeme modelovat grafem s devíti vrcholy, přičemž každý vrchol bude stupně 3. Podle Věty 1.15 takový graf existovat nemůže, neboť by měl lichý počet (devět) vrcholů lichého stupně 3. ▲

Pro zájemce

V řešení Příkladu 1.17 jsme postupovali nepřímo. Uvažme implikaci $A \Rightarrow B$: „Jestliže má Příklad 1.4 řešení, pak existuje model řešení ve formě grafu.“ Vycházeli jsme z předpokladu A: „Existuje takové řešení úlohy, kdy si kamarádi navzájem vymění dárky“ a snažili jsme se odvodit tvrzení B: „sestavíme graf, který úlohu modeluje“. Místo, abychom ukázali implikaci $A \Rightarrow B$ jsme však ukázali její obměnu $\neg B \Rightarrow \neg A$ (připomínáme, že obměna implikace má stejnou pravdivostní hodnotu jako implikace samotná). Protože neexistuje graf, který by danou situaci modeloval, tak Příklad 1.4 nemá řešení. To současně znamená, že neexistuje taková výměna dárků, aby každý z devíti kamarádů dostal dárky právě od těch tří kamarádů, kterým dárky sám dal.

Příklad 1.18. Kolik hran má graf, který má tři vrcholy stupně 5 a sedm vrcholů stupně 4?

Řešení. Takový graf neexistuje! Součet stupňů vrcholů takového grafu by byl $3 \cdot 5 + 7 \cdot 4 = 43$ a podle Principu sudosti (Věta 1.15) by měl 43/2 hran, což není možné, neboť počet hran nemůže být desetinné číslo. ▲

Definice 1.19. Mějme graf G s vrcholy $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Posloupnost stupňů vrcholů $(\deg(v_1), \deg(v_2), \ldots, \deg(v_n))$ nazýváme *stupňovou posloupností* grafu G.

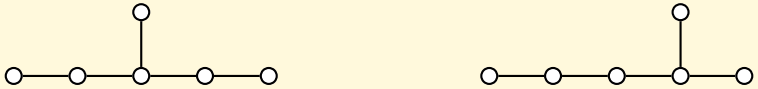
Pro přehlednost budeme pracovat se stupňovými posloupnostmi uspořádanými do nerostoucí posloupnosti, tj. $\deg(v_1) \geqq \deg(v_2) \geqq \ldots \geqq \deg(v_n)$).

Například stupňová posloupnost grafu na Obrázku 1.11 je $(5, 4, 4, 3, 3, 1, 0)$. Stupňová posloupnost kompletního grafu K_6 je $(5, 5, 5, 5, 5, 5)$ a stupňová posloupnost kompletního bipartitního grafu $K_{4,3}$ je $(4, 4, 4, 3, 3, 3, 3)$.

Pro každý graf umíme snadno sestavit stupňovou posloupnost a tato stupňová posloupnost je určena jednoznačně. Je přirozené se ptát, zda můžeme stupňovou posloupnost použít pro jednoznačné určení grafu. Odpověď je jednoduchá – ne. Stupňová posloupnost určuje (jednoduchý) graf jednoznačně jen ve speciálních případech. Například posloupnost $(3, 3, 3, 3)$ je stupňovou posloupností kompletního grafu K_4 a žádného jiného. Podobně stupňové posloupnosti $(0, 0, 0, 0, 0)$ nebo $(2, 2, 1, 1)$ určují graf jednoznačně. Naproti tomu na Obrázku 1.12 jsou dva různé grafy se stejnou stupňovou posloupností $(3, 2, 2, 1, 1, 1)$.

Pro zájemce

Zkuste najít nejmenší příklad (s co nejmenším počtem vrcholů a nejmenším počtem hran) dvou různých grafů se stejnou stupňovou posloupností. Napovíme, že příklad na Obrázku 1.12 není nejmenší.



Obrázek 1.12 Dva grafy se stupňovou posloupností $(3, 2, 2, 1, 1, 1)$.

Máme-li dánu posloupnost celých čísel, tato posloupnost může a nemusí být stupňovou posloupností žádného grafu. Například obsahuje-li posloupnost P záporné číslo, evidentně se nejedná o stupňovou posloupnost. Podobně, jestliže posloupnost n nezáporných celých čísel obsahuje číslo n nebo číslo větší než n, tak se nejedená o stupňovou posloupnost žádného grafu, neboť žádný vrchol nemůže mít více než $n-1$ sousedních vrcholů. Podle principu sudosti ani posloupnost $(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$ není stupňovou posloupností žádného grafu (Příklad 1.4), neboť součet stupňů není sudý. Následující příklad ukazuje, že dokonce ani posloupnost n nezáporných čísel, z nichž žádné není větší než $n-1$ a součet prvků posloupnosti je sudý, nemusí být stupňovou posloupností nějakého grafu.

Příklad 1.20. Ukažte, že posloupnost $(3, 3, 3, 1)$ není stupňovou posloupností žádného grafu.

Řešení. Nejprve si všimněte, že podle žádné z doposud zmíněných kriterií nepoznáme, že graf se stupňovou posloupností $(3, 3, 3, 1)$ nemůže existovat: Podle principu sudosti by počet hran hledaného grafu byl $(3 + 3 + 3 + 1)/2 = 5$. Hledaný graf by musel mít čtyři vrcholy. Nejvyšší číslo 3 nepřesahuje nejvyšší možný stupeň grafu na čtyřech vrcholech.

Všimneme si, že graf na čtyřech vrcholech může obsahovat nejvýše $\binom{4}{2} = 6$ hran, s každým vrcholem budou incidentní vždy tři z nich. Víme, že hledaný graf by měl obsahovat 5 hran, avšak současně musí obsahovat vrchol stupně 1, a tedy z celkového počtu 6 hran musí alespoň dvě hrany chybět, což není možné. Proto graf se stupňovou posloupností $(3, 3, 3, 1)$

Obsah
29. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

neexistuje. ▲

V řešení Příkladu 1.20 se nám podařilo argumentovat, že daná posloupnost není stupňovou posloupností žádného grafu. Existuje nějaký jednoduchý a univerzální postup, jak pro každou posloupnost P rozhodneme, zda existuje graf s takovou stupňovou posloupností P? Odpověď dává následující věta. Takový univerzální a poměrně jednoduchý postup existuje, jedná se však o rekurzivní postup, kdy odpověď na otázku, zda daná posloupnost je stupňovou posloupností nějakého grafu, převedeme na stejnou otázku avšak pro kratší posloupnost s menšími čísly.

Věta 1.21 (Věta Havlova-Hakimiho). *Nechť* $(d_1 \geqq d_2 \geqq \ldots \geqq d_n)$ *je posloupnost nezáporných celých čísel. Pak graf s* n *vrcholy se stupňovou posloupností*

$$D = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$$

existuje právě tehdy, když existuje graf s $n-1$ *vrcholy se stupňovou posloupností*

$$D' = (d_2 - 1, d_2 - 3, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1}, d_{d_1+1}, , d_n).$$

Větu 1.21 dokázali nezávisle na sobě český matematik V. J. Havel a americký matematik S. Louis Hakimi. Důkaz je poměrně technický a proto jej vynecháme. Na druhou stranu v dalším textu využijeme myšlenky důkazu, který je konstruktivní a umožní nám sestrojit alespoň jeden graf s danou stupňovou posloupností.

Posloupnost D' vznikne z nerostoucí posloupnosti D tak, že vynecháme první člen d_1 a právě d_1 následujících prvků (pokud existují) zmenšíme o jedničku. Nakonec její prvky přeuspořádáme tak, abychom dostali nerostoucí posloupnost. Posloupnost D' je kratší a

obsahuje menší čísla než posloupnost D a proto po nejvýše $n-1$ krocích dostaneme posloupnost, o které budeme umět ihned rozhodnout, zda je grafová. Stejná odpověď pak podle Věty 1.21 platí i pro posloupnost D.

Vrátíme se k Příkladu 1.20.

Příklad 1.22. Ukažte, že posloupnost $(3,3,3,1)$ není stupňovou posloupností žádného grafu užitím Věty 1.21.

Řešení. Opakovaným užitím Věty 1.21 dostaneme následující posloupnosti

$$(3,3,3,1) \overset{H-H}{\sim} (2,2,0) \overset{H-H}{\sim} (1,-1).$$

Poslední z nich jistě není stupňovou posloupností žádného grafu, proto ani $(3,3,3,1)$ není stupňovou posloupností žádného grafu. ▲

Všimněte si, že mezi jednotlivými posloupnostmi ve výpočtu nemůžeme použít symbol „=“, neboť se jedná o různé posloupnosti. Místo toho používáme symbol $\sim$, kterým vyjadřujeme ekvivalenci jednotlivých posloupností, přesněji o ekvivalenci vzhledem k otázce, zda se jedná nebo nejedná o stupňovou posloupnost nějakého grafu.

Poznámka 1.23. K určení, zda daná posloupnost celých čísel je stupňovou posloupností nějakého grafu, můžeme použít následující postup. Jednotlivé kroky jsou seřazeny dle obtížnosti, začínáme nejsnadněji ověřitelnými možnostmi:

1) ověříme, zda posloupnost neobsahuje záporná čísla,
2) ověříme, zda posloupnost n čísel neobsahuje číslo n a větší,
3) ověříme, zda součet prvků posloupnosti je sudý (Věta 1.15),

4) opakovaným použitím Věty 1.21 ověříme, zda daná posloupnost je stupňovou posloupností nějakého grafu.

Samozřejmě můžeme ihned ověřovat podmínku Věty 1.21. Pokud by však odpověď na některou z předchozích otázek byla záporná, tak se můžeme vyhnout často zdlouhavému postupu.

Příklad 1.24. Užitím Věty 1.21 rozhodněte, zda posloupnost $(6,1,3,2,3,2,4,1)$ je stupňovou posloupností nějakého grafu.

Řešení. Na první pohled je zřejmé, že posloupnost osmi čísel neobsahuje záporná čísla ani číslo větší než 7. Navíc posloupnost splňuje i Princip sudosti (Věta 1.15), neboť počet lichých čísel v posloupnosti je sudý. Nemůžeme proto snadno vyloučit, že se jedná o stupňovou posloupnost grafu. Dále posloupnost seřadíme do nerostoucí posloupnosti $(6,4,3,3,2,2,1,1)$ a užitím Věty Havla-Hakimiho (Věty 1.21) dostaneme

$$(6,4,3,3,2,2,1,1) \overset{H-H}{\sim} (3,2,2,1,1,0,1) \sim (3,2,2,1,1,1,0).$$

To znamená, že posloupnost $(6,4,3,3,2,2,1,1)$ je grafová právě tehdy, když je grafová posloupnost $(3,2,2,1,1,1,0)$, kterou jsme také seřadili do neklesající posloupnosti. Opakovaným použitím věty Havla-Hakimiho dostaneme

$$(3,2,2,1,1,1,0) \overset{H-H}{\sim} (1,1,0,1,1,0) \sim (1,1,1,1,0,0) \overset{H-H}{\sim} (0,1,1,0,0) \sim$$

$$\sim (1,1,0,0,0) \overset{H-H}{\sim} (0,0,0,0).$$

Protože posloupnost $(0,0,0,0)$ je bezpochyby stupňová posloupnost grafu sestávajícího ze čtyř izolovaných vrcholů (čtyř kopií grafu K_1), je také posloupnost $(6,4,3,3,2,2,1,1)$ stupňovou posloupností nějakého grafu.

Zkušený počtář mohl už v průběhu výpočtu snadno poznat, že již posloupnost $(1,1,1,1,0,0)$ je jistě stupňovou posloupností grafu, který obsahuje dvě kopie grafu K_2 a dvě kopie grafu K_1. ▲

Rekurzivní výpočet, který slouží k ověření, zda daná stupňová posloupnost D je nebo není stupňovou posloupností nějakého grafu, můžeme použít pro nalezení grafu s danou stupňovou posloupností. Při popisu použijeme označení z Věty 1.21. Nejprve sestavíme graf, jehož stupňová posloupnost D' je ve výpočtu poslední, neboť víme, že takový graf existuje. V dalším kroku přidáme jeden vrchol stupně d_1 a spojíme jej hranami s vrcholy stupňů $d_2-1, d_3-1, \ldots, d_{d_1+1}-1$ tak, aby vznikl graf se stupňovou posloupností D. Podobně přidáváme další vrcholy, až sestavíme graf se zadanou stupňovou posloupností.

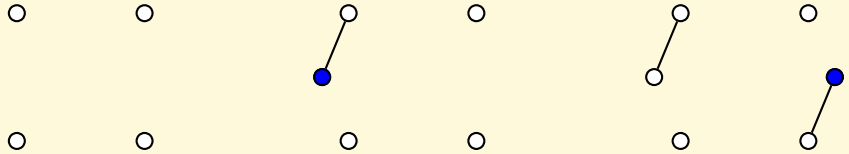
Příklad 1.25 (pokračování Příkladu 1.24). Najděte graf se stupňovou posloupností $(6,1,3,2,3,2,4,1)$.

Řešení. Na straně 32 jsme ukázali, že posloupnost $(6,1,3,2,3,2,4,1)$ je stupňovou posloupností nějakého grafu. Nyní výpočet použijeme pro nalezení takového grafu. Nejprve nakreslíme graf se stupňovou posloupností $(0,0,0,0)$ (Obrázek 1.13 vlevo).

Potom přidáme vrchol stupně 1 (přidaný vrchol je vždy označen modře) a spojíme jej s některým z nakreslených vrcholů. Dostaneme graf se stupňovou posloupností $(1,1,0,0,0)$ (Obrázek 1.13 uprostřed).

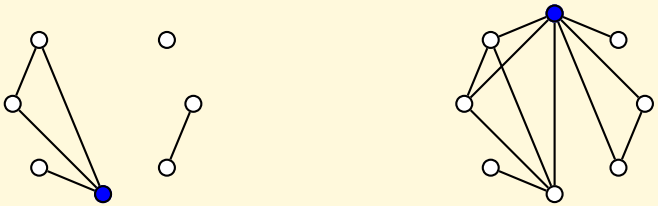
Přidáme další vrchol stupně 1 a spojíme jej s některým z nakreslených vrcholů stupně 0. Dostaneme graf se stupňovou posloupností $(1,1,1,1,0,0)$ (Obrázek 1.13 vpravo).

V dalším kroku přidáme vrchol stupně 3 a spojíme jej se dvěma vrcholy stupně 1 a jedním vrcholem stupně 0. Všimněte si, že vrcholy stupně 1 můžeme vybrat několika způsoby, zvolili jsme náhodně dva z nich. Dostaneme graf se stupňovou posloupností $(3,2,2,1,1,1,0)$ (Obrázek 1.14 vlevo).



Obrázek 1.13 Rekonstrukce grafu, první tři kroky.

Nakonec přidáme vrchol stupně 6 a spojíme jej s jedním vrcholem stupně 3, se dvěma vrcholy stupně 2, se dvěma vrcholy stupně 1 a jedním vrcholem stupně 0. Znovu připomínáme, že hrany nepřidáváme úplně náhodně. Hranou spojíme vždy přidaný vrchol a druhý koncový vrchol má předepsaný stupeň. Pokud máme více vrcholů stejného stupně, můžeme zvolit libovolný z nich Dostaneme například graf se stupňovou posloupností $(6, 4, 3, 3, 2, 2, 1, 1)$ (Obrázek 1.14 vpravo).



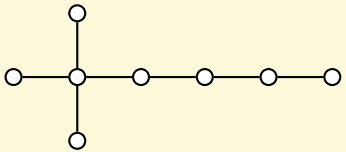
Obrázek 1.14 Rekonstrukce grafu, další dva kroky.

Obsah
34. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Pro zájemce

Věta 1.21 spolu s postupem podrobně rozebraným v Příkladu 1.25 nám umožní pro každou posloupnost nezáporných čísel nejen rozhodnout, zda se jedná o stupňovou posloupnost nějakého grafu, ale také takový graf zkonstruovat. Jak jsme uvedli dříve, tak graf není svou stupňovou posloupností určen jednoznačně. Obvykle máme při rekonstrukci grafu možnost volby a mohli bychom zkonstruovat více různých grafů se stejnou stupňovou posloupností.

Není však těžké si rozmyslet, že existují grafy, které postupem uvedeným v Příkladu 1.25 nepůjde zkonstruovat. Pozor, neříkáme, že takový graf neexistuje, ale že konstrukce najde vždy *jiný* graf se stejnou stupňovou posloupností. Příklad takového grafu je na Obrázku 1.15. Rozmyslete si, proč pomocí výše popsaného algoritmu sestavíme jiný graf se stejnou stupňovou posloupností $(4, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$.



Obrázek 1.15 Graf, který nelze zkonstruovat postupem popsaným v Příkladu 1.25.

Pojmy k zapamatování

— stupeň vrcholu
— princip sudosti
— stupňová posloupnost grafu
— Věta Havla-Hakimiho

1.4. Podgrafy

Při řešení úloh často uvažujeme případy, kdy z daného grafu vynecháme některé vrcholy (a hrany s nimi incidentní), nebo vynecháme nějaké hrany, případně obojí. Přirozeně se tak dostáváme k pojmu „podgraf“.

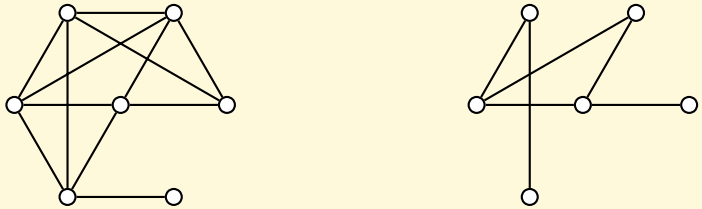
Definice 1.26. Graf H nazveme *podgrafem* grafu G jestliže $V(H) \subseteq V(G)$ a $E(H) \subseteq E(G)$. Píšeme $H \subseteq G$.

Všimněte si, že vynecháme-li z G některý vrchol, musíme současně vynechat i všechny hrany s ním incidentní. Definice je v tomto smyslu korektní, neboť pokud bychom vynechali jen vrcholy a nikoli hrany, tak H by nemusel být grafem, ale jen nějakou dvojicí množin $V(H)$ a $E(H)$. Abychom $H = (V(H), E(H))$ nazvali grafem, tak $E(H)$ obsahuje (některé) dvouprvkové podmnožiny $V(H)$.

Na Obrázku 1.16 máme graf G a jeho podgraf H, který vznikl odebráním jednoho vrcholu (a hrany s ním incidentní) a dalších čtyř hran. Naopak, pokud bychom v grafu G na Obrázku 1.2 odebrali vrchol v_7 a ponechali vrcholy $W = \{v_1, v_2, \ldots, v_6\}$ a ponechali hrany $F = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_1v_5, v_2v_3, v_2v_4, v_2v_6, v_3v_5, v_3v_7, v_4v_5, v_5v_6\}$, tak sice $W \subseteq V$ a $F \subseteq F$ ale dvojice (W, F) netvoří graf, protože hrana v_3v_7 nemá oba koncové vrcholy v množině W (neplatí $\{v_3, v_7\} \subseteq W$).

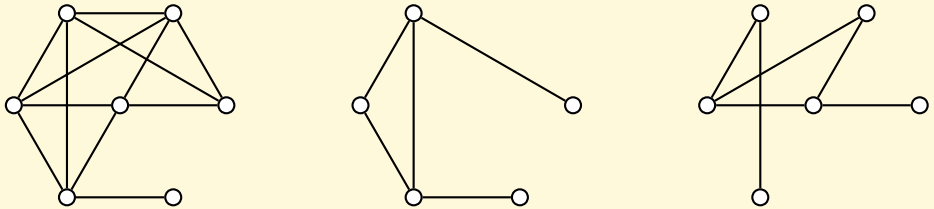
Nyní popíšeme dva důležité speciální případy podgrafů.

Definice 1.27. Podgraf I grafu G nazveme *indukovaným* podgrafem grafu G, jestliže $E(I)$ obsahuje všechny hrany grafu G, které jsou incidentní s vrcholy z $V(I)$. (Vynecháme pouze hrany, které byli incidentní s vynechanými vrcholy.)



Obrázek 1.16 Graf G a jeho podgraf H.

Ekvivalentně můžeme říci, že indukovaný podgraf I vznikne z grafu G (případným) vynecháním některých vrcholů a vynecháním pouze těch hran, které jsou incidentní s některým vynechaným vrcholem. Zmíníme ještě třetí způsob, jak zavést pojem indukovaného podgrafu. Můžeme říci, že indukovaný podgraf I grafu G, je takový podgraf grafu G, který má ze všech podgrafů s vrcholovou množinou $V(I)$ největší počet hran. Graf I na Obrázku 1.17 uprostřed je indukovaným podgrafem grafu G, avšak podgraf H (vpravo) grafu G není indukovaný, neboť v něm chybí i další hrany grafu G.

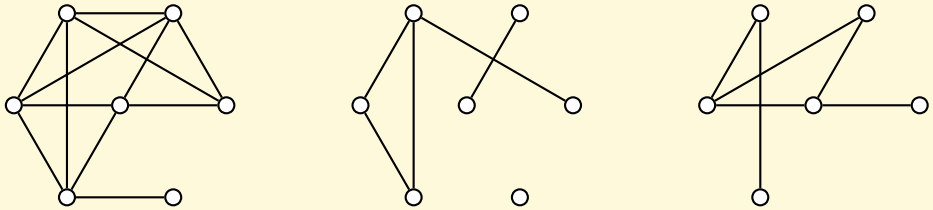


Obrázek 1.17 Graf G, jeho indukovaný podgraf I a podgraf H, který není indukovaný.

Uvědomte si, že indukovaný podgraf obsahuje co možná největší počet hran původního grafu. V jistém smyslu analogicky můžeme požadovat, aby podgraf měl co nejvíce vrcholů původního grafu. Dostáváme následující definici.

Definice 1.28. Podgraf F grafu G nazveme *faktorem* grafu G jestliže $V(F) = V(G)$.

Graf F na Obrázku 1.18 uprostřed je faktorem grafu G, avšak podgraf H (vpravo) není faktorem, neboť v něm chybí nějaké vrcholy grafu G (stačí, aby chyběl jediný vrchol).



Obrázek 1.18 Graf G, jeho faktor F a podgraf H, který není faktorem.

Jestliže o grafu H říkáme, že je podgrafem grafu G, tak naopak graf G se nazývá *nadgraf* grafu H. Pojmy podgrafu, indukovaného podgrafu, faktoru využijeme v argumentacích a při popisu algoritmů v dalším textu.

1.4.0.8. Bipartitní grafy

Na straně 21 jsme nadefinovali kompletní bipartitní graf. Každému podgrafu kompletního bipartitního grafu říkáme *bipartitní graf*. O bipartitních grafech se dozvíme více v Sekcích 6.1 a 7.4.

Obsah
38. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Pojmy k zapamatování

— podgraf
— indukovaný podgraf
— faktor

1.5. Isomorfismus grafů

Modelovat reálnou situaci grafem je praktické zejména proto, že při popisu abstrahujeme od konkrétní situace a zaměříme se na podstatné vlastnosti struktury: který vrchol je sousední s kterým vrcholem. Stejnou situaci však lze popsat na první pohled různými grafy (různé označení vrcholů, zcela odlišné nakreslení grafu, ...) Přitom se jedná o *stejnou strukturu*.

Je přirozené se ptát, jak můžeme poznat, že dva grafy mají stejnou strukturu a že se liší jen jejich označení nebo nakreslení. Právě proto se zavádí pojem isomorfismu.

Definice 1.29. *Isomorfismus grafů* G *a* H je bijektivní zobrazení $f : V(G) \to V(H)$, pro které platí, že každé dva vrcholy u, v v grafu G jsou sousední právě tehdy, když jsou sousední jejich obrazy $f(u), f(v)$ v grafu H.

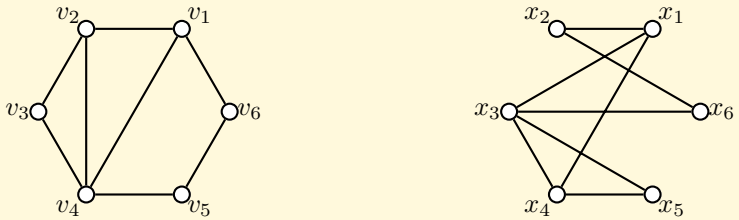
Stručně můžeme zapsat

$$\forall u, v \in V(G) : uv \in E(G) \Leftrightarrow f(u)f(v) \in E(H). \tag{1.2}$$

Říkáme, že dva grafy jsou isomorfní, jestliže mají stejnou strukturu. Hlavním důvodem, proč se zavádí pojem isomorfismu grafů je, abychom měli nástroj, pomocí kterého se budeme snažit rozhodnout, zda nějaké dva grafy mají nebo nemají stejnou strukturu.

Poznámka 1.30 (Isomorfní grafy si nejsou rovny). Uvědomte si, že pokud dva grafy G a H jsou isomorfní, tak si *nejsou* rovny, protože každý má třeba úplně jinou množinu vrcholů. Samozřejmě $|V(G)| = |V(H)|$, ale obecně nemusí platit $V(G) = V(H)$. Důležité je, že struktura obou grafů je stejná. Bylo by chybou napsat $G = H$. Pro vyjádření informace, že grafy G a H jsou isomorfní používáme zápis $G \simeq H$.

Příklad 1.31. Jsou grafy G a H na Obrázku 1.19 isomorfní?



Obrázek 1.19 Grafy G a H.

Řešení. Ukážeme, že grafy G a H jsou isomorfní, neboť zobrazení $f : V(G) \to V(H)$ dané seznamem vrcholů a jejich obrazů zachovává sousednost.

$$\begin{aligned} f(v_1) &= x_1 \\ f(v_2) &= x_4 \\ f(v_3) &= x_5 \\ f(v_4) &= x_3 \\ f(v_5) &= x_6 \\ f(v_6) &= x_2 \end{aligned}$$

Obsah
40. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Všimněte si, že vrchol v_4 stupně 4 se zobrazí na vrchol x_3, který je stupně 4. Oba vrcholy v_1, v_2 stupně 3 se zobrazí opět na vrcholy x_1, x_4 stupně 3. A konečně zbývající vrcholy v_3, v_5, v_6 stupně 2 se zobrazí na vrcholy x_2, x_5, x_6 stupně 2. Ale pozor! Samotná rovnost stupňů jako důkaz isomorfismu nestačí! Ověříme zachování sousednosti pro všech osm hran grafu G: hrana v_1v_2 grafu G se zobrazí na hranu $f(v_1)f(v_2) = x_1x_4$ grafu H, hrana v_1v_4 grafu G se zobrazí na hranu $f(v_1)f(v_4) = x_1x_3$ grafu H a konečně hrana v_1v_6 grafu G se zobrazí na hranu $f(v_1)f(v_6) = x_1x_2$ grafu H. Zbývajících pět hran se ověří podobně. Navíc třeba vrcholy v_1, v_3 nejsou sousední a proto ani jejich obrazy $f(v_1) = x_1$, $f(v_3) = x_5$ nemohou být sousední.

Všimněte si, že pokud mají oba grafy G a H stejný počet hran, stačí ověřit zachovaní existujících hran. Chybějící hrany grafu G pak musí chybět i v grafu H. ▲

Samotná rovnost stupňů vrcholů a stupňů jejich obrazů k zajištění isomorfismu nestačí, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 1.32. Ukažte, že zobrazení $h : V(G) \to V(H)$ dané seznamem vrcholů a jejich obrazů

$$\begin{aligned} h(v_1) &= x_1 \\ h(v_2) &= x_4 \\ h(v_3) &= x_5 \\ h(v_4) &= x_3 \\ h(v_5) &= x_2 \\ h(v_6) &= x_6 \end{aligned}$$

není isomorfismus grafů G a H i když stupeň obrazu je vždy roven stupni vzorového vrcholu (ověřte si to).

Obsah
41. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Řešení. Stačí si všimnou, že zatímco hrana v_1v_6 patří do grafu G tak její obraz $h(v_1)h(v_6) = = x_1x_6$ do grafu H nepatří. Je porušena podmínka 1.2. To ale neznamená, že grafy nejsou isomorfní! To znamená, že zobrazení h není isomorfismem grafů G a H. ▲

Jak však poznáme, že dva grafy jsou isomorfní? Stručně řečeno „těžko“. Pokud jsou dva grafy isomorfní, musíme najít isomorfismus (bijektivní zobrazení mezi množinami vrcholů) a ověřit, že zachovává sousednost vrcholů (vztah 1.2). Hledat zobrazení „zkusmo“ není dobrý nápad, neboť různých bijektivních zobrazení mezi vrcholovými množinami dvou grafů na n vrcholech existuje $n!$.

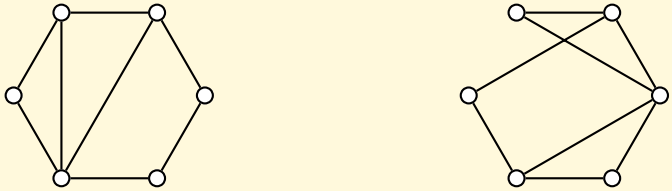
Pro zájemce

Ani použití hrubé síly počítače nemusí už pro poměrně malé grafy stačit, neboť počet prověřovaných možností roste velmi rychle v závislosti na počtu vrcholů. Složitost takového algoritmu není polynomiální, neboť počet kroků je úměrný $O(n!)$. Navíc pro každou možnost bychom měli ověřit zachování sousednosti pro *všechny* hrany.

Jestliže naopak dva grafy isomorfní nejsou, nečekejme, že se nám podaří vyloučit každý z $n!$ možných isomorfismů. Již pro malé grafy je takových bijekcí příliš mnoho. Pro vyloučení isomorfismu dvou grafů doporučujeme najít nějakou vlastnost, který jeden graf má a druhý nemá. Jakou vlastnost? Zde se uplatní důvtip či zkušenost řešitele.

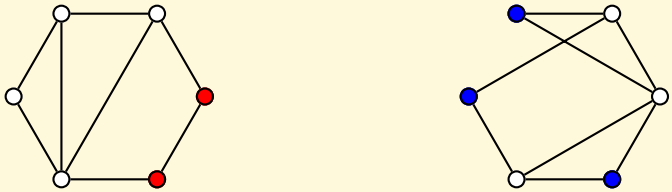
Příklad 1.33. Jsou grafy G a H na Obrázku 1.20 isomorfní?

Řešení. Ukážeme, že grafy G a H nejsou isomorfní. Nebudeme však postupně zkoumat všechny možné bijekce $V(G) \to V(H)$, kterých existuje $6! = 720$. Dokonce nebudeme postupně procházet všech $4!$ bijekcí $V(G) \to V(H)$, které zobrazují na sebe vrcholy odpovídajících stupňů. Všimneme si, že v grafu G jsou dva vrcholy stupně 2 sousední (na Obrázku 1.21 jsou vyznačeny červeně), avšak v grafu H žádné dva vrcholy stupně 2 nejsou



Obrázek 1.20 Grafy G a H.

sousední (na Obrázku 1.21 jsou všechny vrcholy stupně 2 vyznačeny modře), proto nemohou být grafy G a H zakreslením stejné struktury a nejsou isomorfní.



Obrázek 1.21 Grafy G a H s vyznačenými vrcholy.

▲

Další animovaný příklad najdete na adrese http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/izomorfismus.pdf.

Při vyšetřování isomorfismu doporučujeme prozkoumat vlastnosti grafů, které shrnuje následující věta.

Věta 1.34. *Isomorfní grafy G a H mají*

- *stejný počet vrcholů,*
- *stejný počet hran,*
- *stejný nejvyšší stupeň $\Delta(G) = \Delta(H)$,*
- *stejný nejnižší stupeň $\delta(G) = \delta(H)$,*
- *stejnou stupňovou posloupnost,*
- *každý podgraf grafu G musí být podgrafem grafu H a naopak*

Jestliže se pro dané dva grafy bude některá z uvedených vlastností lišit, pak jistě tyto dva grafy nejsou isomorfní.

Naopak, při konstrukci isomorfismu (bijekce $f : V(G) \to V(H)$) využijeme faktu, že vzor x i obraz $f(x)$ musí být vrcholy stejných stupňů, tj. $\deg_G(v) = \deg_H(f(v))$. Opačná implikace však neplatí, jak jsme ukázali v Příkladu 1.20. Nestačí porovnat stupňové posloupnosti!

Na závěr upozorníme na jedno pozorování o isomorfních grafech.

Věta 1.35. *Relace „být isomorfní“ $\simeq$ je relací ekvivalence na třídě všech grafů.*

Důkaz. Relace $\simeq$ je

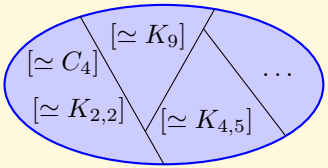
- reflexivní, protože každý graf je isomorfní sám sobě (za isomorfismus zvolíme identické zobrazení),

Obsah
44. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

- symetrická, neboť k isomorfismu (bijekci) $f : V(G) \to V(H)$ existuje (jednoznačně) isomorfismus $f^{-1} : V(H) \to V(G)$,
- tranzitivní, neboť skládáním isomorfismů $f : V(G) \to V(H)$ a $g : V(H) \to V(F)$ dostaneme isomorfismus (složené zobrazení) $g \circ f : V(G) \to V(F)$.

Ověřením reflexivity, symetrie a tranzitivity jsme ukázali, že $\simeq$ je relací ekvivalence na třídě všech grafů. □

Protože relace $\simeq$ z Věty 1.35 je relací ekvivalence, má smysl sestavit rozklad třídy (množiny) všech grafů podle této ekvivalence. Podrobnosti najdete v [6]. Pokud mluvíme o nějakém *grafu*, myslíme tím obvykle celou třídu takového rozkladu (Obrázek 1.22). Nezáleží na konkrétní reprezentaci, nakreslení či pojmenování grafu, všechny isomorfní grafy mají stejnou strukturu. Když řekneme například „v cyklu C_5“ najdeme dva nezávislé vrcholy, myslíme tím každý graf C_5, nikoliv nějaké jeho jediné nakreslení v sešitě.



Obrázek 1.22 Třídy grafů.

Pojmy k zapamatování

— isomorfismus grafů

Obsah
45. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

1.6. O implementaci grafů

Průvodce studiem

V závěru kapitoly zmíníme několik nejjednodušších způsobů implementace grafů v počítači. Upozorníme na praktická omezení každé uvedené implementace.

Cíle

Po prostudování této sekce budete schopni:

- třemi způsoby implementovat strukturu grafu do programovacího jazyka,
- zvolit nejvhodnější způsob implementace v závislosti na řešeném problému,
- sestavit stupňovou posloupnost daného grafu,
- poznat, zda daná posloupnost nezáporných celých čísel je stupňovou posloupností nějakého grafu,
- sestavit graf s danou stupňovou posloupností.

Mějme nějaký graf G. Vrcholy grafu G označíme přirozenými čísly $0, 1, \ldots, n-1$, kde n udává počet vrcholů grafu G. V algoritmech budeme obvykle pro uložení počtu vrcholů používat proměnnou `N`.

Většina algoritmů uvedených v tomto textu není psána pro nějaký konkrétní programovací jazyk, ale v jakémsi pseudokódu, který spíš než na formální přesnost se snaží o názornost a dobré porozumění. Při implementaci uvedených algoritmů do konkrétního programovacího jazyka by měly stačit základní znalosti a klasické programovací struktury jako jsou podmínky `if/else`, cykly `for` řízené proměnnou nebo cykly `while` řízené podmínkou. Dále předpokládáme, že můžeme pracovat s jedno- nebo dvourozměrnými poli, jejichž indexy

Obsah
46. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

budou začínat od 0. Také budeme používat funkce, zásobník a frontu.

Zmíníme tři nejběžnější implementace grafů v počítači.

1.6.0.9. Matice sousednosti

Pro grafy s velkým počtem hran a pro grafy, které se v průběhu algoritmu často mění je vhodné uložení pomocí Matice sousednosti.

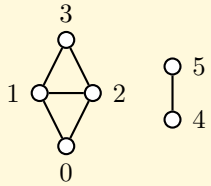
Matice sousednosti grafu G je čtvercová matice $A = (a_{ij})$ řádu n, ve které je prvek $a_{ij} = 1$ právě tehdy, když jsou vrcholy i a j sousední. V opačném případě je $a_{ij} = 0$, přičemž $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Můžeme tedy psát:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{je-li } v_i v_j \in E(G) \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Matici sousednosti můžeme uložit do dvourozměrného pole `g[][]`. Pozor: v matici A stejně jako v poli `g[][]` od 0.

Je zřejmé, že matice A je pro jednoduché grafy symetrická a že součet čísel v i-tém řádku (v i-tém sloupci) matice A je roven stupni vrcholu i. Snadno ověříme, zda se hrana ij v grafu nachází nebo ne. Snadno také nějakou hranu ij do grafu přidáme nebo ji z grafu odebereme. Obecně však je matice sousednosti rozsáhlá a zabírá mnoho paměti i pro řídké grafy.

Obsah
47. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obrázek 1.23 Graf G se šesti vrcholy $0, 1, \ldots, 5$.

Matice sousednosti grafu G z Obrázku 1.23 je

$$A = \begin{array}{c} v\backslash v \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

1.6.0.10. Matice incidence

Pro grafy s menším počtem hran a pro grafy, ve kterých se v průběhu algoritmu nemění počet hran, je vhodné uložení pomocí incidenční matice.

Incidenční matice B grafu G je obdélníková matice s n řádky a $m = |E(G)|$ sloupci. Každému vrcholu grafu G odpovídá jeden řádek matice B a každé hraně grafu G jeden sloupec matice B. Hrany označíme $e_0, e_1, \ldots, e_{m-1}$. Prvek b_{ij} matice B nabývá hodnoty 1 právě tehdy, když vrchol i je incidentní s hranou e_j, v opačném případě je $b_{ij} = 0$. Je snadné

Obsah
48. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

si uvědomit, že součet čísel v každém sloupci incidenční matice je vždy roven 2 a součet čísel v i-tém řádku je roven stupni vrcholu i. Pro velké grafy by incidenční matice byla velmi rozsáhlá a poměrně řídká. Obsahuje jen $2m$ jedniček z celkového počtu mn prvků.

Incidenční matice grafu G je na Obrázku 1.23.

$$B = \begin{array}{c} v\backslash e \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 01 & 02 & 12 & 13 & 23 & 45 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

1.6.0.11. Seznam sousedů

Graf můžeme reprezentovat i pomocí seznamů sousedních vrcholů. Pro každý vrchol $i = 0, 1, \ldots, n-1$ grafu G vytvoříme seznam (pole) vrcholů, například `sous[i][]`, které jsou s vrcholem i sousední. Každé pole bude mít $\deg(i)$ položek, kde $\deg(i)$ je stupeň vrcholu i, který je uložen v poli `deg[]`. Prvky `sous[i][0], sous[i][1], ..., sous[i][deg[i]-1]` obsahují vrcholy (nebo jejich indexy) sousední s vrcholem i. Seznam stupňů vrcholů a se-

Obsah
49 strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

znamy sousedů vrcholů grafu G z Obrázku 1.23 jsou

```
deg[] = [2, 3, 3, 2, 1, 1],
```

```
sous[0][] = [1, 2],
sous[1][] = [0, 2, 3],
sous[2][] = [0, 1, 3],
sous[3][] = [1, 2],
sous[4][] = [5],
sous[5][] = [4].
```

Všimněte si, že má-li graf m hran, budou seznamy polí obsahovat celkem $2m$ položek, neboť každá hrana ij je v seznamech uložena dvakrát. Jednou jako vrchol j v poli `a[i][]` a podruhé jako vrchol i v poli `a[j][]`.

Nevýhodou polí je náročná úprava takové struktury v průběhu algoritmu. Pokud implementujeme algoritmus, který bude zpracovávat obecný řídký graf, tak pro seznamy sousedů může být vhodnější použít místo polí dynamické linkované seznamy. Výhodou je, že strukturu grafu můžeme v průběhu algoritmu snadno modifikovat. Položky seznamu můžeme vyřadit nebo do seznamu zařadit nové. Nevýhodou je časová náročnost vyhledání konkrétní hrany. Naproti tomu použijeme-li pole, můžeme (už při vytvoření) seřadit seznamy sousedů podle pevně zvoleného klíče a pro vyhledání použít binární dělení.

V Kapitole 4 se budeme věnovat ohodnoceným grafům. Pro uložení ohodnocených grafů lze použít podobná schémata a čísla přiřazená hranám nebo vrcholům grafu budou obvykle uložena do dalších polí nebo struktur. Při implementaci složitějších algoritmů můžeme použít i strukturované datové typy a pod.

Animovaný příklad, který ukazuje různé způsoby uložení grafu v počítači, je na adrese http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/reprezentace_grafu_v_pc.pdf.

Pojmy k zapamatování

— matice sousednosti

— matice incidence

— graf daný seznamem sousedů

Obsah

51. strana ze 272

Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

1.7. Test

Následuje jednoduchý test, pro nalezení správné odpovědi jedné otázky není potřeba více než půl minuty.

Zacátek testu **Základní grafové pojmy**

1. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?

(a) Graf je množina G, která obsahuje podmnožinu vrcholů V a podmnožinu hran E.

(b) Graf G je dvojice množin: množina vrcholů V a množina hran E, přičemž prvky množin V a E jsou libovolné.

(c) Graf G je dvojice množin: množina vrcholů V a množina hran E, přičemž množina E obsahuje dvouprvkové podmnožiny množiny V.

(d) Graf G je dvojice množin: množina vrcholů V a množina hran E, přičemž množina V obsahuje dvouprvkové podmnožiny množiny E.

(e) Graf G je množina různých bodů v rovině, přičemž některé body jsou spojené křivkou.

(f) Graf G je dvouprvková množina $\{V, E\}$ libovolných prvků V a E.

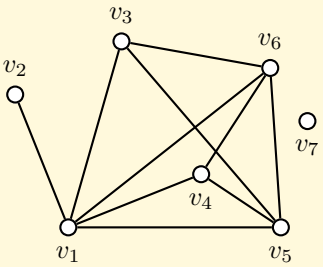
2. Kolik hran má kompletní graf K_{10}?

(a) 10 hran, (b) 45 hran,
(c) 100 hran, (d) žádný z uvedených počtů.

3. Které dvojice vrcholů jsou v grafu na Obrázku 1.24 sousední?

(a) vrcholy v_1 a v_2, (b) vrcholy v_2 a v_3, (c) vrcholy v_3 a v_4,
(d) vrcholy v_4 a v_5, (e) vrcholy v_5 a v_6, (f) vrcholy v_6 a v_7.

4. Kolik vrcholů má nejkratší cyklus?



Obrázek 1.24 Graf G.

5. Kolik hran má cesta P_{10}?

(a) 9 hran, (b) 10 hran,
(c) 11 hran, (d) žádný z uvedených počtů.

6. Kolik hran má kompletní graf $K_{4,7}$?

(a) 11 hran, (b) 28 hran,
(c) 45 hran, (d) žádný z uvedených počtů.

7. Pro Které hodnoty m, n je kompletní bipartitní graf $K_{m,n}$ cestou?

(a) $m = 1$, $n = 1$. (b) $m = 1$, $n = 2$.
(c) $m = 2$, $n = 1$. (d) $m = 2$, $n = 2$.
(e) $m = 1$ a n libovolné. (f) pro žádné z uvedených parametrů.

8. Jaká je stupňová posloupnost grafu $K_{2,5}$?

(a) $2, 2, 5, 5, 5, 5, 5$, (b) $2, 2, 2, 5, 5, 5, 5$ hran,
(c) $6, 6, 6, 6, 6, 6, 6$ hran, (d) žádná z uvedených posloupností.

Obsah
53. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

9. Kolik hran má graf s osmi vrcholy stupně 5?

(a) 8, (b) 20,
(c) 40, (d) Takový graf neexistuje.

10. Kolik hran má graf s devíti vrcholy stupně 5?

(a) 5, (b) 9,
(c) 45, (d) Takový graf neexistuje.

11. určuje stupňová posloupnost graf jednoznačně?

(a) ano, (b) ne

12. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?

(a) Neexistuje graf, který má každý vrchol jiného stupně.
(b) Existuje jediný graf, který má stupeň každého vrcholu roven 0.
(c) Součet stupňů všech vrcholů všech vrcholů v grafu je roven počtu hran.
(d) Počet hran v každém grafu je sudý.
(e) V každém grafu je sudý počet vrcholů lichého stupně.
(f) Graf se sudým stupněm každého vrcholu má sudý počet hran.

13. Která z následujících posloupností jsou stupňovými posloupnostmi nějakého grafu?

(a) $1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0$. (b) $5, 5, 5, 5, 3, 3$.
(c) $3, 3, 2, 2, 1, 1$. (d) $4, 2, 2, 2, 2, 2$.
(e) $6, 5, 4, 3, 2, 1$. (f) $7, 6, 6, 5, 3, 3, 2, 1, 1$.

14. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?

(a) Kompletní bipartitní graf $K_{2,4}$ obsahuje podgraf C_3.
(b) Kompletní bipartitní graf $K_{2,4}$ obsahuje podgraf C_4.

(c) Kompletní bipartitní graf $K_{2,4}$ obsahuje podgraf C_5.
(d) Kompletní bipartitní graf $K_{2,4}$ obsahuje podgraf C_6.
(e) Kompletní bipartitní graf $K_{2,4}$ obsahuje podgraf P_6.
(f) Kompletní bipartitní graf $K_{2,4}$ neobsahuje žádný z uvedených podgrafů.

15. Jaký je nejdelší indukovaný cyklus v kompletním bipartitním grafu $K_{3,5}$?

(a) C_3, (b) C_4, (c) C_5,
(d) C_6, (e) C_7, (f) C_8.

16. Jaká je nejdelší indukovaná cesta v kompletním grafu K_6?

(a) P_1, (b) P_2, (c) P_3,
(d) P_4, (e) P_5, (f) P_6.

17. Se kterými grafy je isomorfní cyklus C_4?

(a) C_5 bez jednoho vrcholu,
(b) $K_{2,2}$,
(c) $C_3 \cup K_1$,
(d) s žádným z uvedených grafů.

18. Se kterými grafy je isomorfní kompletní graf K_3?

(a) P_3, (b) $K_{1,2}$,
(c) C_3, (d) s žádným z uvedených grafů.

19. Se kterými grafy je isomorfní cesta P_3?

(a) K_3, (b) $K_{1,2}$,
(c) C_3, (d) s žádným z uvedených grafů.

20. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?

Obsah
55. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

(a) Isomorfní grafy mají stejný počet vrcholů.
(b) Grafy se stejným počtem vrcholů jsou isomorfní.
(c) Isomorfní grafy mají stejný počet hran.
(d) Grafy se stejným počtem hran jsou isomorfní.
(e) Isomorfní grafy mají stejnou stupňovou posloupnost.
(f) Grafy se stejnou stupňovou posloupností jsou isomorfní.

21. Kolik existuje různých 2-pravidelných grafů na osmi vrcholech?

22. Kolik existuje různých souvislých 2-pravidelných grafů na osmi vrcholech?

Konec testu | Oprava testu

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:

Kapitola 2

Souvislost grafu

Jestliže máme počítačovou nebo dopravní síť, tak je přirozené zkoumat, zda je v síti možno vyslat signál, případně cestovat nebo dopravovat produkty z místa X do místa Y. Bude-li tato síť reprezentována grafem, budeme zkoumat existenci cest mezi vrcholy. Zavedeme proto pojem sledu, tahu a cesty v grafu. Předpokládáme, že mezi vrcholy je dovoleno putovat pouze po hranách grafu.

Navíc je důležité umět rozpoznat, jak odolná je daná síť vůči poruchám, které mohou narušit komunikaci nebo transport v síti. Výpadky mohou být dvojího druhu: porucha může nastat jednak v rámci každého spojení, které odpovídá hraně grafu, nebo v křižovatkách/uzlech sítě, které odpovídají vrcholům grafu. V druhé části kapitoly si ukážeme, jak takovou odolnost vůči výpadkům měřit a že je možno ji popsat číselným parametrem.

2.1. Souvislost grafu, komponenty grafu

Průvodce studiem

Abychom mohli popsat, co to znamená, že graf je souvislý, zavedeme takzvaný sled v grafu. *Zjednodušeně můžeme říci, že sled mezi dvěma vrcholy u, v popisuje putování v grafu z vrcholu u do vrcholu v po hranách a vrcholech grafu. Vysvětlíme, co to znamená, že daná dopravní či komunikační síť je souvislá nebo nesouvislá.*

Cíle

Po prostudování této sekce budete schopni:

- vysvětlit, co to znamená, že daná dopravní či komunikační síť je souvislá nebo nesouvislá,
- pro malé grafy ověřit, zda daná síť je souvislá nebo nesouvislá,
- najít komponenty souvislosti sítě.

Abychom uměli popsat, co to znamená, že graf je „souvislý“, zavedeme následující pojem.

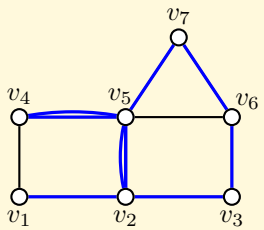
Definice 2.1. *Sledem* v_0v_n v grafu G rozumíme takovou posloupnost vrcholů a hran

$$(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n),$$

kde v_i jsou vrcholy grafu G a e_i jsou hrany grafu G, přičemž každá hrana e_i má koncové vrcholy v_{i-1} a v_i. Počet hran nazveme *délkou sledu* v_0v_n.
Vrchol v_0 nazýváme *počáteční* a vrchol v_n *koncový* vrchol sledu.

Pro algoritmy, které mají prohledávat graf, je taková definice velmi šikovná! Všimněte si, že sled je jakýsi záznam o putování v grafu. Máme posloupnost vrcholů a hran, přičemž hrany a vrcholy se pravidelně střídají. Pokud graf reprezentuje silniční síť, tak sled v grafu je vlastně detailní popis cesty: „vyjedeme z Ostravy po cestě číslo 56, přijedeme do Frýdku-Místku, odkud dále pokračujeme po silnici číslo 48 do Českého Těšína.“

V jednoduchém grafu, tedy v takovém grafu, který neobsahuje násobné hrany, je mezi každou dvojicí vrcholů jen jedna hrana nebo žádná hrana. Můžeme se proto domluvit, že při popisu sledu *v jednoduchém grafu* nemusím hrany vypisovat, neboť je můžeme vždy jednoznačně doplnit. Podle této úmluvy bude sled možno zapsat jako posloupnost vrcholů a obvykle nebudeme v zápise sledu používat závorky (jako v Příkladu 2.2). Je však potřeba mít na paměti, že v reálné situaci nemusí být předpoklad o jednoznačnosti hrany splněn. Například z Ostravy můžeme do Frýdku-Místku přijet jednak po dálnici (cesta číslo 56) nebo po silnici první třídy číslo 477. Proto „sled“ zapsaný stručně podle úmluvy „z Ostravy pojedeme do Frýdku-Místku a dále pokračujeme do Českého Těšína“ není určen jednoznačně.



Obrázek 2.1 Příklad sledu v grafu.

Obsah
59. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Příklad 2.2. V grafu na Obrázku 2.1 je příklad sledu mezi vrcholy v_1 a v_5. Sled

$$v_1, v_1v_2, v_2, v_2v_5, v_5, v_5v_7, v_7, v_7v_6, v_6, v_6v_3, v_3, v_3v_2, v_2, v_2v_5, v_5, v_5v_4, v_4, v_4v_5, v_5$$

je vyznačen modrou křivkou. Podle úmluvy můžeme uvedený sled zapsat stručně

$$v_1, v_2, v_5, v_7, v_6, v_3, v_2, v_5, v_4, v_5.$$

Dvě křivky mezi vrcholy v_4 a v_5 a mezi vrcholy v_2 a v_5 nejsou násobné hrany, ale znázorňují opakování hrany v modře vyznačeném sledu. Protože sled obsahuje 9 hran (a tedy 10 vrcholů) je délka sledu 9. Připomeňme, že 9 hran nemusí být 9 *různých* hran a 10 vrcholů nemusí být 10 *různých* vrcholů, některé hrany nebo vrcholy se mohou i vícekrát opakovat.

Posloupnost, která obsahuje jediný prvek, třeba v_1 je také sled v daném grafu. Jedná se o *triviální sled* délky nula. ▲

Příklad 2.3. Všimněte si, že posloupnost vrcholů $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ neurčuje žádný sled v grafu na Obrázku 2.1, protože hrana v_3v_4 v daném grafu není. ▲

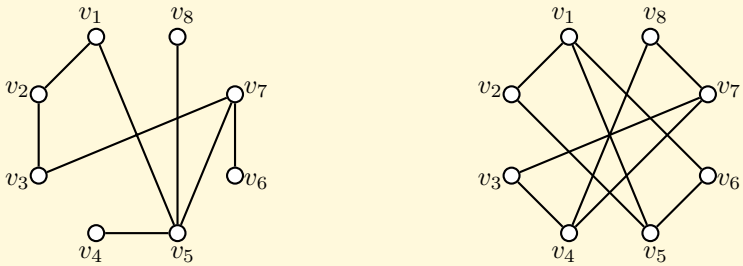
Pojem „souvislosti“ je vybudován na pojmu sled.

Definice 2.4. Řekneme, že vrchol v je *dosažitelný* z vrcholu u, jestliže v grafu existuje sled z vrcholu u do vrcholu v.
Graf nazveme *souvislý*, jestliže pro každé dva vrcholy u, v je vrchol v dosažitelný z vrcholu u. V opačném případě je graf *nesouvislý*.

Jestliže v neorientovaném grafu existuje sled z vrcholu u do vrcholu v, tak obrácením pořadí vrcholů sledu dostaneme sled z vrcholu v do vrcholu u. Pokud není nutné pečlivě rozlišovat počáteční a koncový vrchol, říkáme, že existuje sled mezi vrcholy u a v.

Rozhodnout o tom, zda graf je nebo není souvislý patří mezi základní úlohy, které pro daný graf řešíme. Odpověď je obvykle zajímavá v kontextu praktické úlohy, kterou daný graf modeluje: „je silniční síť souvislá?“ Odpověď je za normální situace kladná. Avšak v extrémních případech musíme umět rychle rozhodnout, zda „je silniční síť souvislá v kalamitní situaci, kdy došlo k uzavření některých silnic?“ Později v této kapitole ukážeme algoritmus, který bude umět otázku zodpovědět pro libovolný graf.

Příklad 2.5. Jsou grafy na Obrázku 2.2 souvislé?



Obrázek 2.2 Grafy G a H.

Řešení. Graf G (na Obrázku 2.2 vlevo) je souvislý, neboť mezi každými dvěma vrcholy existuje sled. Například vrchol v_8 je z vrcholu v_1 dosažitelný, neboť v_1, v_5, v_8 je sled mezi vrcholy v_1 a v_8. Sled mezi libovolnou dvojicí vrcholů můžete získat vybráním vhodné části sledu $v_6, v_7, v_3, v_2, v_1, v_5, v_8, v_5, v_4$, který obsahuje všechny vrcholy grafu G.

Naproti tomu graf H (na Obrázku 2.2 vpravo) není souvislý, neboť žádný sled mezi vrcholy v_1 a v_8 v grafu H neexistuje. ▲

Obsah
61. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Příklad 2.6. Mějme pětiprvkovou množinu $A = [1, 5]$. Sestavíme graf G, jehož vrcholy budou všechny dvouprvkové podmnožiny množiny A. Dva vrcholy spojíme hranou, pokud jsou odpovídající podmnožiny disjunktní. Ukažte, že graf G je souvislý.

Řešení. Ukážeme, že graf G splňuje definici souvislosti, tj. najdeme sled mezi libovolnými dvěma vrcholy. Označme V_1, V_2 nějaké dva vrcholy grafu G. (Uvědomte si, že vrcholy jsou dvouprvkové podmnožiny A a že platí $V_1, V_2 \subset A$.) Rozlišíme tři možnosti:

1. $|V_1 \cap V_2| = 0$. Podle definice grafu G je mezi vrcholy V_1 a V_2 hrana, neboť se jedná o disjunktní podmnožiny.

2. $|V_1 \cap V_2| = 1$. Množiny V_1 a V_2 mají jeden prvek společný a proto $|V_1 \cup V_2| = 3$. Označme $V_3 = A \setminus (V_1 \cup V_2)$, množina V_3 obsahuje zbývající dva prvky množiny A. Podle definice jsou v grafu G hrany V_1V_3 i V_2V_3, neboť V_1 a V_3 a také V_2 a V_3 jsou disjunktní dvojice podmnožin. Proto V_1, V_3, V_2 je sled mezi vrcholy V_1 a V_2.

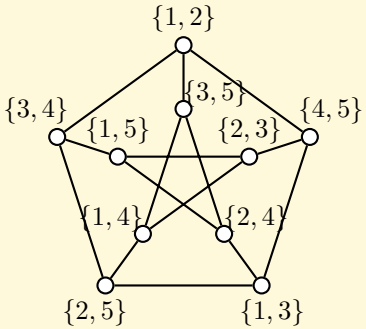
3. Zbývá prozkoumat případ $|V_1 \cap V_2| = 2$. Protože V_1 i V_2 jsou dvouprvkové podmnožiny, musí být $V_1 = V_2$ a vrchol V_1 je současně triviální sled mezi V_1 a V_2.

Našli jsme sled mezi každými dvěma vrcholy grafu G, proto je graf G podle Definice 2.4 souvislý. Jedno možné nakreslení grafu G je na Obrázku 2.3. ▲

Někdy však není žádoucí, aby se při putování v grafu opakovaly hrany nebo vrcholy. Opakuje-li se vrchol ve sledu, který modeluje silniční síť, tak nejspíš bloudíme, opakuje-li se hrana ve sledu, který modeluje dopravní síť, tak mrháme energií na dopravu. Zavedeme následující definici.

Definice 2.7. *Tah* je sled, ve kterém se neopakují žádné hrany a *cesta* je sled, ve kterém se neopakují ani žádné vrcholy.

Obsah
62. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obrázek 2.3 Graf G je Petersenův graf.

Název „tah“ vychází z analogie kreslení jedním tahem, neboť při kreslení grafu můžeme všechny hrany nějakého tahu nakreslit jedním tahem. Název „cesta“ odpovídá definici cesty v Kapitole 1.2, protože vrcholy a hrany takového sledu tvoří podgraf, který je cestou.

Všimněte si, že v daném grafu je každá cesta zároveň tahem a že každý tah je současně sledem. Opačné implikace obecně neplatí.

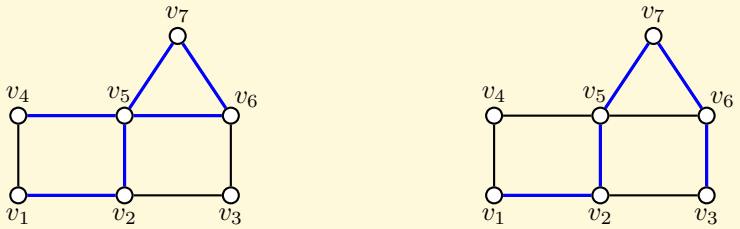
Příklad 2.8. V grafu na Obrázku 2.4 vlevo je příklad tahu mezi vrcholy v_1 a v_4. Hrany tahu $v_1, v_2, v_5, v_7, v_6, v_5, v_4$ jsou vyznačeny modře.

Vpravo je pak příklad cesty mezi vrcholy v_1 a v_3. Hrany cesty $v_1, v_2, v_5, v_7, v_6, v_3$ jsou vyznačeny modře.

Všimněte si, že cesta na Obrázku 2.4 vpravo je současně tahem i cestou v daném grafu. Naproti tomu tah na Obrázku 2.4 vlevo je současně sledem, avšak není cestou, neboť vrchol v_5 se v něm vyskytuje dvakrát. ▲

Animovaný příklad sledu, tahu a cesty je na adrese http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.

Obsah
63. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obrázek 2.4 Příklad tahu v grafu z vrcholu v_1 do vrcholu v_4 a příklad cesty z vrcholu v_1 do vrcholu v_3.

vsb.cz/files/unit/sled_tah_cesta.pdf.

Tahům v grafu se budeme věnovat podrobněji v Kapitole 3. Následující věta ukazuje, že každý sled mezi dvěma vrcholy lze nahradit cestou.

Věta 2.9. *Pokud mezi dvěma vrcholy grafu G existuje sled, pak mezi nimi existuje cesta.*

Důkaz. Mějme nějaký sled S mezi vrcholy u, v v grafu G. Vrcholy a hrany sledu S označme $u = v_0, e_1, v_1, \ldots, e_n, v_n = v$, kde n je délka sledu S. Ukážeme, jak ze sledu S sestavit cestu P mezi vrcholy u, v (v cestě se žádný vrchol neopakuje).

Pokud se ve sledu S žádný vrchol neopakuje, tak $P = S$ je hledanou cestou.

Pokud se některý vrchol opakuje, tak označme v_i jeho první výskyt a v_j jeho poslední výskyt. Celý úsek mezi v_i a v_j vynecháme (včetně vrcholu v_j) a ponecháme jen první výskyt vrcholu v_i. Dostaneme tak sled S', ve kterém se daný vrchol již neopakuje.

Pokud se ve sledu S' neopakuje už žádný jiný vrchol, tak $P = S'$ je hledaná cesta. Pokud se některý jiný vrchol opakuje, celý postup zopakujeme pro další takový vrchol.

Obsah
64. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Postup je jistě konečný, neboť graf G obsahuje konečně mnoho vrcholů a po nejvýše $|V(G)|$ krocích dostaneme sled P, ve kterém se žádný vrchol neopakuje a který je hledanou cestou mezi vrcholy u a v. □

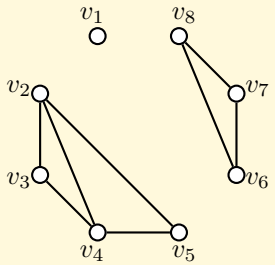
Podle Věty 2.9 víme, že existuje-li mezi některými dvěma vrcholy grafu sled, tak mezi nimi existuje také cesta. Navíc důkaz Věty 2.9 je konstruktivní, neboť dává návod, jak takovou cestu z daného sledu zkonstruovat. Definici souvislosti bychom mohli vyslovit i takto: „Graf nazveme souvislý, jestliže mezi každými dvěma vrcholy existuje cesta.“ Na druhou stranu sled má jednu důležitou vlastnost, kterou tah ani cesty v grafu nemají. Spojením dvou sledů, kdy na posloupnost vrcholů jednoho sledu navážeme vrcholy druhého sledu (koncový vrchol prvního sledu splyne s počátečním vrcholem druhého sledu), dostaneme opět sled. Toto obecně *není* pravda pro cesty, ani pro tahy. Proto je pojem sledu šikovný pro argumentaci řady tvrzení týkajících se souvislosti.

Příklad 2.10 (Pokračování Příkladu 2.2). V grafu na Obrázku 2.4 je vyznačen sled z vrcholu v_1 do vrcholu v_5. Podle postupu popsaného v důkazu Věty 2.9 sestavte cestu z vrcholu v_1 do vrcholu v_5.

Řešení. Ve sledu $v_1, v_2, v_5, v_7, v_6, v_3, v_2, v_5, v_4, v_5$ se vrchol v_2 opakuje dvakrát a vrchol v_5 dokonce třikrát. Nejprve vynecháme úsek mezi prvním a posledním (druhým) výskytem vrcholu v_2. Dostaneme sled v_1, v_2, v_5, v_4, v_5. Dále vynecháme úsek mezi prvním a posledním (nyní druhým) výskytem vrcholu v_5. Dostaneme sled v_1, v_2, v_5, který je současně cestou mezi vrcholy v_1 a v_5. ▲

Jestliže graf není souvislý, tak sestává z několika „částí“, které souvislé jsou. Tyto části se nazývají „komponenty“, jejich přesnou definici uvedeme později na straně 67. Pro jednoduchost můžeme říci, že komponentu tvoří každý takový podgraf, který je souvislý a současně

obsahuje co nejvíce vrcholů a hran původního grafu. Například graf na Obrázku 2.5 má tři komponenty. Je důležité si uvědomit, že pokud bychom řekli pouze, že komponenta je souvislý podgraf, tak například indukovaný podgraf na vrcholech v_3, v_4 a v_5 je souvislý podgraf grafu na Obrázku 2.5, který však není komponentou daného grafu.



Obrázek 2.5 Graf se třemi komponentami.

Pro zájemce

Pojem souvislosti je možno vybudovat s využitím sledů a relací. Mějme nějaký graf G a na jeho vrcholové množině $V(G)$ zavedeme relaci $\sim$ tak, že dva vrcholy $u, v \in V(G)$ jsou v relaci $\sim$ (píšeme $u \sim v$) právě tehdy, když v grafu G existuje sled uv. Relaci $\sim$ říkáme „relace dosažitelnosti.“

Lemma 2.11. *Relace $\sim$ je relací ekvivalence.*

Důkaz. Připomeňme, že binární relace je relací ekvivalence, pokud je reflexivní, symetrická a tranzitivní. Abychom ukázali, že relace $\sim$ je ekvivalencí, ověříme všechny tři vlastnosti

1. Reflexivita relace $\sim$ plyne snadno z existence triviálního sledu uu délky 0. Pro každý vrchol $u \in V(G)$ proto platí $u \sim u$.

2. Symetrie relace $\sim$ je zřejmá, neboť ke každému sledu z vrcholu u do vrcholu v můžeme v grafu G sestavit sled z vrcholu v do vrcholu u tak, že vezmeme posloupnost vrcholů a hran v opačném pořadí. Za předpokladu, že graf G je neorientovaný, tak pro libovolnou dvojici vrcholů $u, v \in V(G)$ platí $u \sim v \Leftrightarrow v \sim u$.
3. A konečně abychom ověřili tranzitivitu stačí si uvědomit, že spojením sledu z vrcholu u do vrcholu v a sledu z vrcholu v do vrcholu w dostaneme opět sled, a sice sled z vrcholu u do vrcholu w. Platí proto implikace $u \sim v \wedge v \sim w \Rightarrow y \sim w$ a relace $\sim$ je tranzitivní.

Ukázali jsme, že relace $\sim$ je reflexivní, symetrická a tranzitivní a jedná se proto o relaci ekvivalence. □

Nyní můžeme vyslovit jinou definici souvislosti grafu.

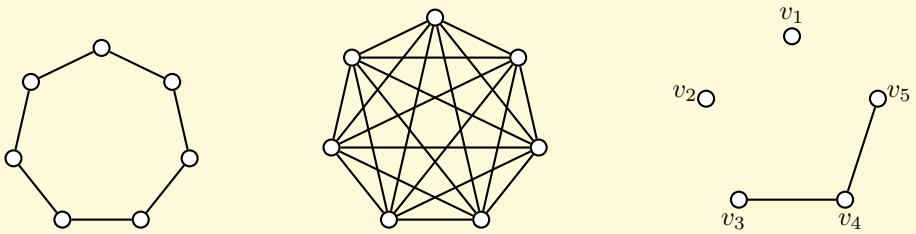
Definice 2.12. Řekneme, že graf G je *souvislý*, jestliže relace $\sim$ na množině $V(G)$ je úplná.

Nyní můžeme vyslovit definici komponenty daného grafu G. Připomeňme, že v Lemmatu 2.11 jsme ukázali, že relace $\sim$ je relace ekvivalence. Můžeme proto sestavit rozklad vrcholové množiny grafu G příslušný relaci $\sim$. V každé třídě rozkladu jsou vrcholy, které jsou navzájem dosažitelné.

Definice 2.13. Třídy ekvivalence relace $\sim$ jsou podmnožiny $V(G)$ a podgrafy indukované na těchto podmnožinách se nazývají *komponenty souvislosti* grafu G.

Můžeme vyslovit třetí definici souvislého grafu, která vychází z počtu komponent daného grafu.

Definice 2.14. Řekneme, že graf G je *souvislý*, pokud je graf G tvořený jedinou komponentou souvislosti.



Obrázek 2.6 Příklad souvislých grafů G_1, G_2 a nesouvislého grafu G_3.

Příklad 2.15. Sestavte relaci $\sim$ pro grafy na Obrázku 2.6. Určete příslušné třídy rozkladu vrcholové množiny.

Řešení. Graf G_1 je současně cyklem C_7, a jedná se proto o souvislý graf. To znamená, že mezi každými dvěma vrcholy najdeme sled a relace $\sim_{G_1}$ obsahuje všechny dvojice: $\sim_{G_1} = V(G) \times V(G)$. Třída rozkladu této relace je jediná, obsahuje všechny vrcholy grafu G_1.

Zcela analogicky postupujeme při určování souvislosti grafu G_2. Protože graf G_2 je kompletní graf K_7, dostaneme $\sim_{G_2} = V(G) \times V(G)$. Třída rozkladu této relace je opět jediná, obsahuje všechny vrcholy grafu G_2.

Naproti tomu graf G_3 není souvislý, obsahuje tři komponenty. Relace $\sim$ obsahuje následující dvojice

$$\begin{aligned} \sim \quad = \quad & \{(v_1,v_1),(v_2,v_2),(v_3,v_3),(v_3,v_4),(v_3,v_5),\\ & (v_4,v_3),(v_4,v_4),(v_4,v_5),(v_5,v_3),(v_5,v_4),(v_5,v_5)\}. \end{aligned}$$

Třídy rozkladu této relace ekvivalence jsou tři: $[\sim_{G_3} v_1] = \{v_1\}$, $[\sim_{G_3} v_2] = \{v_2\}$ a $[\sim_{G_3} v_3] = \{v_3, v_4, v_5\}$. ▲

Ukázali jsme, že souvislost grafu je možno popsat několika způsoby. Samozřejmě všechny tři uvedené způsoby jsou ekvivalentní, to znamená, že je-li graf souvislý dle Definice 2.4, tak je také

souvislý podle Definice 2.12 i podle Definice 2.14 a naopak. Pro praktické ověření souvislosti se mohou hodit všechny přístupy v závislosti na konkrétní implementaci.

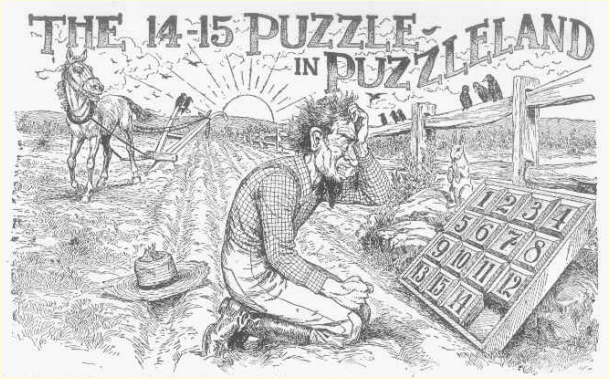
V Kapitole 2.2 ukážeme algoritmus, který najde všechny komponenty daného grafu.

Příklad 2.16. Představme si graf S, který bude popisovat možné tahy střelce na klasické šachovnici. Připomeňme, že střelec se pohybuje diagonálně o libovolný počet polí. Vrcholy grafu budou políčka šachovnice a hranou spojíme dvě políčka, pokud mezi nimi bude možno táhnout střelcem. Je graf S souvislý?

Řešení. Graf S má 64 vrcholů a poměrně mnoho hran, například vrcholy, které odpovídají rohovým políčkům, jsou stupně 7, zatímco vrcholy, které odpovídají políčkům blízko středu šachovnice, jsou stupně 13. Není těžké si rozmyslet, že graf S souvislý není, aniž bychom graf sestavovali. Protože střelec se pohybuje pouze diagonálně, nemůže vstoupit na políčko jiné barvy, než na kterém se nachází. Naproti tomu s využitím dostatečného počtu tahů se můžeme dostat na libovolné pole dané barvy. Proto graf S není souvislý a má dvě komponenty souvislosti. Navíc obě komponenty jsou navzájem isomorfní podgrafy. ▲

Příklad 2.17. Loydova patnáctka je známý hlavolam, jehož úkolem je přesouváním patnácti dřevěných čtverečků s čísly 1 až 15 v krabici 4 krát 4 políčka zajistit, aby čísla čtena po řádcích tvořila aritmetickou posloupnost 1, 2 až 15.. Výchozí pozice je na Obrázku 2.7. Jak by mohl vypadat graf popisující daný problém?

Řešení. Pokud bychom sestavili stavový graf dané úlohy (každý vrchol odpovídá jednomu možnému rozmístění čtverečků), bude takový graf L mít 16! vrcholů. Každý vrchol bude spojen s nejvýše čtyřmi dalšími vrcholy (existují nejvýše čtyři čtverečky, které můžeme přesunout na volné políčko). Dá se však ukázat, že takový graf nebude souvislý a výchozí



Obrázek 2.7 Loydova patnáctka, dobová ilustrace.

pozice s prohozenými čísly 14 a 15, která je na Obrázku 2.7, se nachází v jiné komponentě, než požadovaný cílový stav. Proto daná úloha nemá řešení.

Existuje vysvětlení, které využívá vlastností permutací a které se obejde bez konstrukce obrovského grafu s $16! = 20922789888000$ vrcholy, nicméně vysvětlení překračuje rámec našeho textu. ▲

Pojmy k zapamatování

— sled v grafu

— souvislý a nesouvislý graf

— tah a cesta v grafu

— komponenty souvislosti

2.2. Prohledávání grafu

Průvodce studiem

Ukážeme algoritmus, který umožní rychle ověřit, zda daný graf (například graf, který odpovídá reálné úloze) je souvislý nebo není. Algoritmus bude obecný, jednoduchou modifikací bude možno najít komponenty souvislosti grafu (resp. dané sítě). Jinou jednoduchou modifikací dostaneme algoritmus pro „prohledávání do hloubky“ nebo pro „prohledávání do šířky.“ Uvedený algoritmus půjde snadno modifikovat a použít pro jakékoliv *zpracování struktury grafu, čímž rozumíme zpracování každého vrcholu grafu, případně každé hrany grafu. Nebudeme řešit implementaci algoritmu do konkrétního programovacího jazyka, ale zaměříme se na princip algoritmu.*

Cíle

Po prostudování této sekce budete schopni:

- algoritmicky ověřit, zda daný graf (daná síť) je souvislý nebo nesouvislý,
- najít všechny komponenty souvislosti libovolného grafu,
- popsat a použít algoritmy, které zpracují daný graf (nebo síť) postupem do hloubky či do šířky.

Ve slíbeném obecném algoritmu pro „procházení“ grafu vystačíme s několika málo datovými typy. Pro každý vrchol budeme rozlišovat jeden ze tří možných stavů, ve kterých se vrchol může v průběhu algoritmu nacházet:

- iniciační – výchozí stav na začátku algoritmu,

- nalezený – jakmile vrchol najdeme jako koncový vrchol nějaké hrany,
- zpracovaný – jakmile prozkoumáme všechny hrany incidentní s tímto vrcholem.

Pro každou hranu grafu budeme rozlišovat dva stavy

- iniciační – výchozí stav na začátku algoritmu,
- zpracovaná – jakmile je hrana nalezena (prozkoumána) jako hrana incidentní s některým vrcholem.

Dále budeme udržovat pomocnou strukturu se seznamem všech vrcholů, které se nacházejí ve stavu „nalezený“ (a dosud „nezpracovaný“). Tomuto seznamu budeme říkat *úschovna*.

Způsob, jakým vybíráme vrcholy z úschovny, určuje různé varianty našeho algoritmu. Může se jednat o procházení grafu postupem „do hloubky“ nebo „do šířky“.

V algoritmu najdete volání funkcí `ZPRACUJ_VRCHOL()` a `ZPRACUJ_HRANU()`. Tyto funkce nemají pro samotné prohledaní grafu žádný význam, avšak využijeme je později při sestavení algoritmu, který zpracuje graf, tj. pro sestavení algoritmu, který pro každý vrchol nebo pro každou hranu provede nějakou operaci. Příslušnou operaci budou realizovat zmíněné funkce `ZPRACUJ_VRCHOL()` a `ZPRACUJ_HRANU()`.

Algoritmus 2.1 (Procházení souvislých komponent grafu).

```
// na vstupu je graf G
vstup < graf G;
stav(všechny vrcholy a hrany G) = iniciační;
uschovna U = libovolný vrchol u grafu G;
stav(u) = nalezený;

// zpracování vybrané komponenty G
while (U je neprázdná) {
   vyber vrchol v a odeber jej z úschovny U: U = U - v;
   ZPRACUJ(v);
   for (hrany e vycházející z v) {    // pro všechny hrany
      if (stav(e) == iniciační)
         ZPRACUJ(e);
      w = druhý vrchol hrany e = vw;  // známe sousedy?
      if (stav(w) == iniciační) {
         stav(w) = nalezený;
         přidej vrchol w do úschovny: U = U + w;
      }
      stav(e) = zpracovaná;
   }
   stav(v) = zpracovaný;
   // případný přechod na další komponentu G
   if (U je prázdná && G má další vrcholy)
      uschovna U = {vrchol v_1 z další komponenty G};
}
```

Obsah
73. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Stručně popíšeme hlavní části algoritmu. Na začátku

- všem vrcholům i hranám přiřadíme iniciační stav,
- vybereme libovolný vrchol z úschovny.

V průběhu každého cyklu algoritmu zpracujeme nějaký jeden vrchol v. To znamená, že

- zpracovaný vrchol v z úschovny odstraníme,
- prozkoumáme (a případně zpracujeme) všechny dosud nezpracované hrany incidentní s vrcholem v,
- pokud je některý vrchol w sousední s vrcholem v v iniciačním stavu, přidáme vrchol w do úschovny U.

Prozkoumáme (a zpracujeme) tak celou komponentu grafu, která obsahuje výchozí vrchol `u`.

Jestliže se v grafu nachází další nezpracované vrcholy, víme že graf nebude souvislý a bude mít více komponent. Algoritmus umí najít (a zpracovat) všechny komponenty, pro rozlišení komponent můžeme zpracované vrcholy zařazovat do různých struktur (polí, množin a pod.).

Různým způsobem implementace úschovny dostaneme několik různých variant Algoritmu 2.1.

Procházení „do hloubky“ Jestliže úschovnu `U` implementujeme jako zásobník, tak vrchol zpracovávaný v dalším cyklu bude poslední nalezený vrchol. Zpracováváme stále další a další, třeba i vzdálenější vrcholy, pokud existují.

Obsah
74. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Procházení „do šířky“ Jestliže úschovnu `U` implementujeme jako frontu, tak nejprve zpracujeme všechny vrcholy sousední s vrcholem `u`. Označme si tyto vrcholy pro přehlednost $v_1, v_2, \ldots, v_d$. Dále postupně zpracujeme všechny nezpracované vrcholy, které jsou sousední s vrcholy $v_1, v_2, \ldots, v_d$ (jedná se o vrcholy ve vzdálenosti 2 od výchozího vrcholu `u`; pojem vzdálenosti zavedeme v Kapitole 4), atd.

Dijkstrův algoritmus pro nejkratší cesty Z úschovny vybíráme vždy ten vrchol, který je nejblíže k výchozímu vrcholu `u`. Podrobně se tomuto algoritmu budeme věnovat v Kapitole 4.

2.2.0.12. Poznámky o složitosti Algoritmu 2.1

Mějme nějakou kladnou funkci $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Předpokládejme, že funkce $g(n)$ vyjadřuje počet kroků daného algoritmu v závislosti na velikosti vstupu, která je dána parametrem n. Připomeňme, že symbolem $O(g(n))$ rozumíme takovou množinu funkcí $f(n)$, pro které existují kladné konstanty c a n_0 tak, že pro všechna přirozená čísla $n > n_0$ platí $g(n) \leqq c \cdot f(n)$. Jestliže řekneme, že algoritmus má složitost $O(g(n))$, tak tím chceme vyjádřit, že počet kroků algoritmu, a tedy i doba běhu algoritmu, poroste stejně jako roste funkce $g(n)$ v závislosti na velikosti vstupu n. Přesný počet kroků nebo doba běhu pak závisí (až na nějaký konstantní násobek) na konkrétní implementaci nebo architektuře, případně na taktu použitého procesoru.

Algoritmus 2.1 je nejen přehledný, ale současně rychlý. Počet kroků algoritmu je úměrný počtu vrcholů a hran daného grafu. Obecně můžeme říci, že složitost algoritmu je $O(n+m)$, kde n udává počet vrcholů a m počet hran daného grafu. To znamená, že například pro graf se 100 vrcholy a 400 hranami bude Algoritmus 2.1 potřebovat řádově $c \cdot (100+400)$ kroků, kde parametr c závisí na konkrétní implementaci. Pokud bychom měli graf se 100 000 vrcholy

a 400 000 hranami, tak počet kroků Algoritmu 2.1 bude řádově $c \cdot (100\ 000 + 400\ 000)$. V našem případě můžeme čekat, že parametr c je v řádu desítek.

2.2.0.13. Úlohy související s prohledáváním grafu

Nyní zmíníme několik typických problémů, které můžeme řešit pomocí Algoritmu 2.1 přímo nebo s jeho drobnou modifikací.

Příklad 2.18. Jak pomocí Algoritmu 2.1 vypsat všechny hrany daného grafu?

Řešení. Stačí využít funkci `zpracuj(e)`. Jestliže e je zpracovávaná hrana, tak ji v těle funkce `zpracuj(e)` vypíšeme. ▲

Příklad 2.19. Jak pomocí Algoritmu 2.1 zjistíme, zda je graf G souvislý?

Řešení. Stačí upravit poslední řádek algoritmu. Jestliže je úschovna U prázdná a v grafu G jsou další vrcholy, tak graf G není souvislý. Protože jsme zpracovali všechny vrcholy a hrany komponenty, která obsahuje vrchol u, tak úschovna U je prázdná. Ale graf obsahuje další vrcholy, které nejsou dosažitelné z vrcholu u a není proto souvislý.

Naopak, jestliže je úschovna U prázdná a žádné další vrcholy v grafu G nejsou, jsou všechny vrcholy dosažitelné z vrcholu u a graf G je souvislý. ▲

Příklad 2.20. Jak pomocí Algoritmu 2.1 najít a označit všechny komponenty grafu G?

Řešení. Zavedeme pomocnou proměnnou označující číslo komponenty, například k. Na začátku algoritmu položíme $k = 1$ a při zpracování každého vrcholu mu přiřadíme číslo komponenty k.

Dále upravíme poslední řádek algoritmu. Jestliže je úschovna U prázdná a současně jsou v grafu G další vrcholy, tak graf G není souvislý. Do úschovny uložíme libovolný zbývající

vrchol `v_1` a zvýšíme hodnotu proměnné k. Při zpracování vrcholů pak každému vrcholu přiřazujeme již nové číslo komponenty.

Podobně postupujeme i pro zbývající komponenty. ▲

Pojmy k zapamatování

— prohledávání grafu

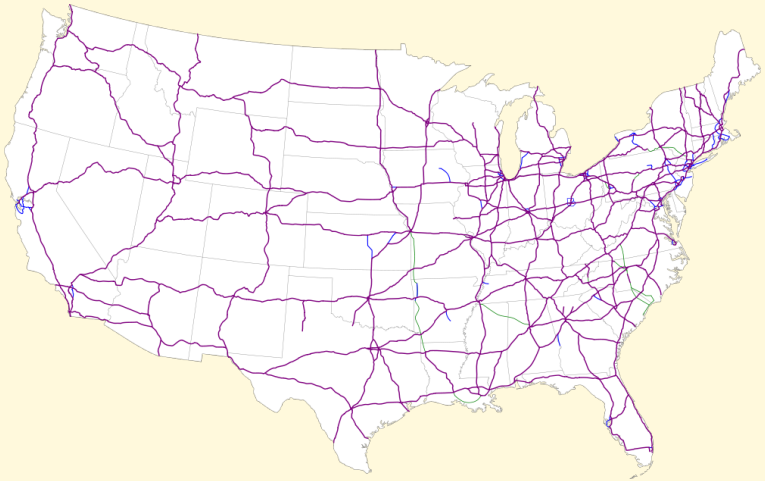
— postup do šířky a do hloubky

2.3. Vyšší stupně souvislosti

Průvodce studiem

Jestliže nějaký graf reprezentuje dopravní nebo komunikační síť, tak je důležité vědět, jak je taková síť odolná vůči lokálním výpadkům, které mohou narušit transport či komunikaci v síti. Výpadky mohou být dvojího druhu: jednak může porucha nastat u každého spojení, které odpovídá hraně grafu, ale i v křižovatkách/uzlech sítě, které odpovídají vrcholům grafu. V této kapitole si ukážeme, jak popsat souvislost grafu číselnými parametry a jak lze souvislost grafu měřit.

Na Obrázku 2.8 je dálniční síť v USA. Graf sítě je evidentně souvislý a současně je zřejmé, že případná uzavírka některé jedné dálnice příliš nenaruší dopravu mezi východním a západním pobřežím, neboť mezi atlantským a tichomořským existuje řada alternativních cest.



Obrázek 2.8 Eisenhowerův systém dálnic v USA.

Cíle

Po prostudování této sekce budete schopni:

- popsat číselný parametr, který charakterizuje souvislost grafu,
- na základě znalosti stupně souvislosti rozhodnout, zda porušení (odebrání) jistého počtu vrcholů nebo hran naruší souvislost sítě,
- vysvětlit, jak disjunktní cesty mezi vrcholy v grafu zajistí vyšší souvislost, tj. vyšší odolnost příslušné sítě vůči poruchám.

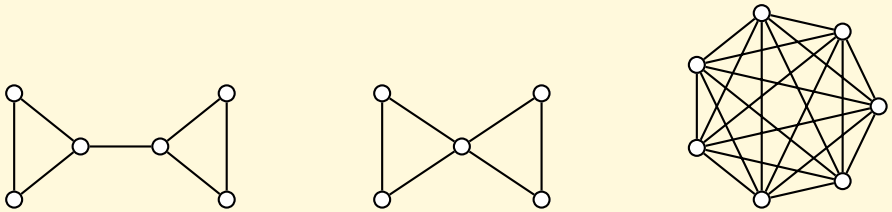
V praxi nás zajímá nejen, jestli v dané síti existuje spojení (cesta) mezi vrcholy grafu, ale také jestli bude existovat nějaké spojení v případě lokálních výpadků. V řeči teorie grafů se ptáme, zda odebrání několika vrcholů nebo hran poruší souvislost grafu. Dostáváme se tak přirozeně k pojmům *stupeň vrcholové souvislosti a stupeň hranové souvislosti.*

Definice 2.21. Graf G je *hranově k-souvislý*, pokud $k \geqq 1$ a po odebrání libovolných $k-1$ hran z G zůstane výsledný faktor souvislý.
Stupeň hranové souvislosti grafu G je takové největší číslo k, že graf G je hranově k-souvislý.

Všimněte si, každý souvislý graf je podle uvedené definice automaticky hranově 1-souvislý, neboť odebráním 0 hran (neodebereme žádnou hranu), zůstane graf souvislý.

Dále je nutno upozornit, že v definici hranové souvislosti není řečeno, které hrany se odebírají. Má-li graf zůstat souvislý po odebrání *libovolných* $k-1$ *hran*, musíme uvážit všechny možnosti, jak $k-1$ hran odebrat. Jestliže existuje alespoň jedna množina nějakých $k-1$ hran, že jejich odebráním dostaneme nesouvislý graf, tak daný graf *není* hranově k-souvislý. Zejména musíme zdůraznit, že nestačí šikovně odstranit $k-1$ hran grafu G tak, aby výsledný graf zůstal souvislý a pak můžeme graf G prohlásit za hranově k-souvislý. To není pravda. Například z kompletního grafu K_7 na Obrázku 2.9 vpravo lze sice šikovně odebrat až 15 hran a výsledný podgraf zůstane souvislý, avšak nesouvislý podgraf můžeme dostat odebráním pouhých šesti hran a proto stupeň hranové souvislosti grafu K_7 je 6.

Není těžké si rozmyslet, že každý graf, který je hranově k-souvislý, je podle definice také hranově $(k-1)$-souvislý, hranově $(k-2)$-souvislý, atd. až hranově 1-souvislý, neboť nestačí-li odebrat $k-1$ hran, abychom dostali nesouvislý faktor, tak pro porušení souvislosti nemůže stačit odebrat *méně než* $k-1$ hran. Na druhou stranu si všimneme, že graf, který *není* hranově k-souvislý, nemůže být ani hranově $(k+1)$-souvislý, hranově $(k+2)$-souvislý, atd., protože stačí-li pro porušení souvislosti odebrat některých $k-1$ hran, můžeme odebrat i



Obrázek 2.9 Grafy s různými stupni souvislosti.

více hran (pochopitelně ne více, než je počet hran celého grafu) a souvislost porušit.

Příklad 2.22. Určete stupeň hranové souvislosti grafů na Obrázku 2.9.

Řešení. Každý ze tří uvedených grafů je souvislý, proto podle definice hranové k-souvislosti jsou všechny grafy hranově 1-souvislé.

V grafu na obrázku vlevo stačí odebrat jednu hranu a dostaneme nesouvislý graf, proto graf vlevo *není* hranově 2-souvislý. Stupeň hranové souvislosti prvního grafu je 1.

Rozebráním šesti možností snadno nahlédneme, že odebráním jedné hrany grafu na obrázku uprostřed souvislost neporušíme. Proto uvedený graf je také hranově 2-souvislý. Není však již hranově 3-souvislý, neboť stačí odebrat dvě hrany incidentní s některým vrcholem stupně 2 a dostaneme nesouvislý podgraf (faktor). Stupeň hranové souvislosti druhého grafu je proto 2.

Konečně v grafu na obrázku vpravo neporušíme souvislost odebráním 1, 2, 3, 4 ani 5 hran, proto je kompletní graf K_7 hranově 2-, 3-, 4-, 5- a 6-souvislý. Podrobné zdůvodnění zahrnuje vyšetření mnoha případů, které zde nerozepisujeme, protože později ukážeme jednodušší argument. Avšak odebráním všech šesti hran incidentních s některým pevně

zvoleným vrcholem, dostaneme nesouvislý podgraf (faktor), proto graf K_7 *není* hranově 7-souvislý. Stupeň hranové souvislosti grafu K_7 je 6. ▲

Zcela analogicky zavedeme stupně vrcholové souvislosti. Budeme zkoumat, zda odebráním vrcholů (a samozřejmě všech hran s nimi incidentních), dostaneme souvislý nebo nesouvislý graf.

Definice 2.23. Definice Graf G je *vrcholově k-souvislý*, pokud $|V(G)| > k \geqq 1$ a po odebrání libovolných $k-1$ vrcholů z grafu G zůstane výsledný indukovaný podgraf souvislý. Stupeň vrcholové souvislosti grafu G je takové největší číslo k, že graf G je vrcholově k-souvislý.

Všimněte si, že na rozdíl od definice hranové souvislosti požadujeme, aby číslo k bylo menší než počet vrcholů. Nemělo by smysl zjišťovat, zda po odstranění všech vrcholů je výsledný graf souvislý, protože po odstranění všech vrcholů nezůstane žádný graf!

Zcela analogicky jako u hranové k-souvislosti můžeme vyslovit následující pozorování: každý graf, který je vrcholově k-souvislý, je podle definice také vrcholově $(k-1)$-souvislý, vrcholově $(k-2)$-souvislý, atd. až vrcholově 1-souvislý. Současně graf, který *není* vrcholově k-souvislý, není ani vrcholově $(k+1)$-souvislý, vrcholově $(k+2)$-souvislý, atd., protože pro porušení souvislosti stačí odebrat některých $(k-1)$ vrcholů.

Příklad 2.24. Určete stupeň vrcholové souvislosti grafů na Obrázku 2.9.

Řešení. Všechny grafy na Obrázku 2.9 jsou souvislé, proto podle definice vrcholové k-souvislosti jsou vrcholově 1-souvislé.

V grafu na obrázku vlevo i v grafu na obrázku uprostřed stačí odebrat jediný vrchol a dostaneme nesouvislý graf, proto ani jeden z těchto grafů *není* vrcholově 2-souvislý. Stupeň vrcholové souvislosti je pro oba grafy roven 1.

V grafu na obrázku vpravo souvislost neporušíme odebráním 1, 2, 3, 4 ani 5 vrcholů, proto je kompletní graf K_7 také vrcholově 2-, 3-, 4-, 5- a 6-souvislý. Všimněte si, že po odebrání t vrcholů, kde $1 \leqq t \leqq 6$ dostaneme *souvislý* podgraf K_{7-t}. Ale i když odebráním libovolných 6 vrcholů dostaneme souvislý podgraf K_1, tak graf K_7 *není* vrcholově 7-souvislý, neboť podle definice volíme $k < |V(G)|$. Stupeň vrcholové souvislosti grafu K_7 je 6. ▲

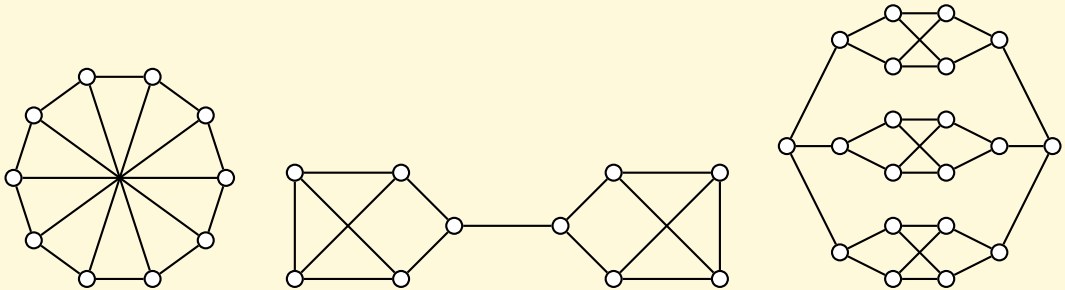
Všimněte si, že graf na Obrázku 2.9 uprostřed je vrcholově 1-souvislý a hranově 2--souvislý. Obecně je možno ukázat, že stupeň vrcholové souvislosti nemůže být vyšší než stupeň hranové souvislosti. Není proto možno sestavit graf, který by například byl hranově 2-souvislý a vrcholově 3-souvislý.

Současně je zřejmé, že stupeň hranové souvislosti nemůže být větší než nejmenší stupeň vrcholu v daném grafu, neboť odebráním všech hran incidentních s vrcholem nejmenšího stupně dostaneme nesouvislý graf.

Pro zájemce

Pro pravidelné grafy, ve kterých jsou všechny vrcholy stupně 3, je možno ukázat ještě silnější tvrzení. V každém 3-pravidelném grafu je vrcholový i hranový stupeň souvislosti vždy roven stejnému číslu. Například graf krychle (Obrázek 1.4) i Petersenův graf (Obrázek 1.9) jsou hranově i vrcholově 3-souvislé, dále například graf na Obrázku 2.10 vlevo je hranově i vrcholově 3-souvislý, graf na Obrázku 2.10 uprostřed je hranově i vrcholově 1-souvislý a konečně graf na Obrázku 2.10 vpravo je hranově i vrcholově 2-souvislý.

Mějme dán nějaký graf G a v něm dvě cesty P a P' (cestou v grafu rozumíme podgraf, který je cestou). Řekneme, že cesty P a P' jsou *hranově disjunktní*, jestliže žádná hrana grafu nepatří současně do obou cest P i P'. Následující věta pojednává o hranově disjunktních



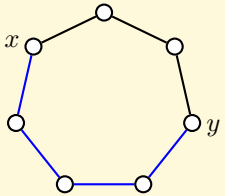
Obrázek 2.10 3-pravidelné grafy.

cestách a o cestách, které nemají společné vrcholy s výjimkou prvního a posledního vrcholu. Řekneme, že cesty P a P' jsou *interně disjunktní*, jestliže žádný vrchol grafu není současně vnitřním vrcholem obou cest P i P'.

Věta 2.25 (Mengerovy věty). *Graf G je hranově k-souvislý právě tehdy, když mezi libovolnými dvěma vrcholy existuje alespoň k hranově disjunktních cest (vrcholy mohou být sdílené).*
Graf G je vrcholově k-souvislý právě tehdy, když mezi libovolnými dvěma vrcholy existuje alespoň k interně disjunktních cest (koncové vrcholy jsou společné).

Důkaz obou částí věty je možné postavit na existenci maximálního toku, kterému se budeme věnovat v Kapitole 7. Například v cyklu najdeme mezi každou dvojicí různých vrcholů dvě hranově disjunktní cesty i interně disjunktní cesty (Obrázek 2.11).

Kompletní graf K_n je hranově i vrcholově $(n-1)$-souvislý. Podle Věty 2.25 to znamená, že mezi každou dvojicí vrcholů existuje $n-1$ interně disjunktních cest, které jsou současně



Obrázek 2.11 Dvě hranově i interně disjunktní cesty mezi x a y v cyklu C_7.

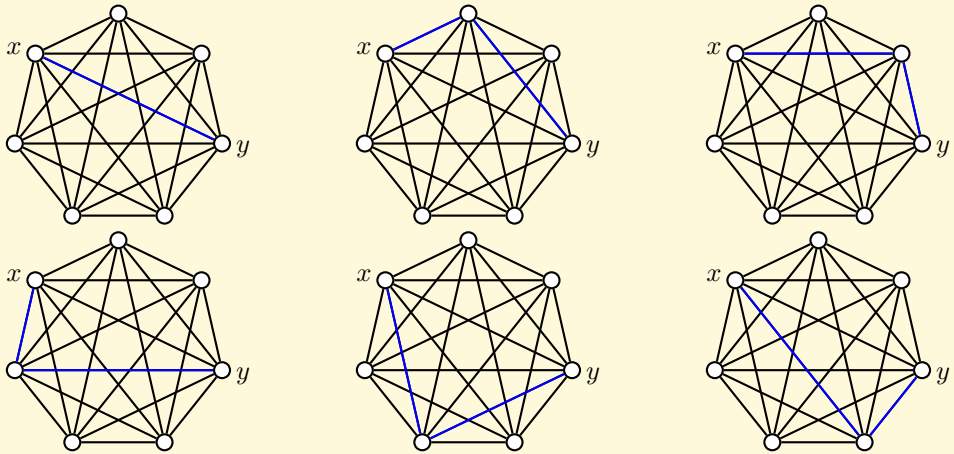
hranově disjunktní. Například na Obrázku 2.12 je šest interně disjunktních cest mezi dvěma vybranými vrcholy x, y. Žádné dvě modře vyznačené cesty nemají společnou hranu ani společný vrchol (s výjimkou koncových vrcholů x a y).

Příklad 2.26. Určete stupeň hranové souvislosti i stupeň vrcholové souvislosti grafu G na Obrázku 2.13.

Řešení. Je zřejmé, že graf G je souvislý a odebráním jediného vrcholu se souvislost neporuší. Naproti tomu odebráním obou vrcholů označených červeně na Obrázku 2.14 dostaneme nesouvislý graf, proto stupeň vrcholové souvislosti grafu G je 2.

Stupeň hranové souvislosti je nejvýše 4, neboť v grafu jsou vrcholy stupně 4 a odebráním všech hran incidentních s takovým vrcholem dostaneme nesouvislý graf. Navíc mezi každou dvojicí vrcholů najdeme čtyři hranově disjunktní cesty (vždy dvě cesty jsou v Obrázku 2.14 vyznačeny zeleně a dvě modře), proto je podle Věty 2.25 graf G hranově alespoň 4-souvislý. Dostáváme tak, že stupeň hranové souvislosti grafu G je 4. ▲

Obsah
84. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

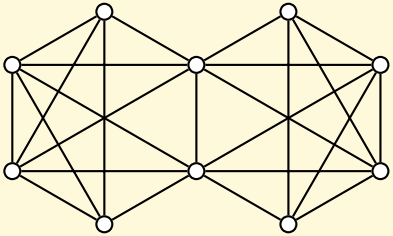


Obrázek 2.12 Šest různých interně disjunktních cest mezi vrcholy x, y v grafu K_7.

Pro zájemce

Stupeň hranové souvislosti je možno definovat a určovat také pomocí řezů v grafu. Pojem řezu zavedeme v Kapitole 7, kde současně uvedeme algoritmus, který hledá minimální řez v síti. Tento algoritmus je možno mírně upravit a použít pro určení stupně hranové souvislosti libovolného grafu.

Internet (World Wide Web) bývá často znázorňován podobně jako na Obrázku 2.15. Takové zobrazení však nevystihuje jeden důležitý aspekt internetu – jeho poměrně vysokou hranovou i vrcholovou souvislost. Vždyť právě vysoká souvislost a schopnost doručení zprávy mezi libovolnými dvěma vrcholy byl jeden z klíčových požadavků, který stál u zrodu internetu.

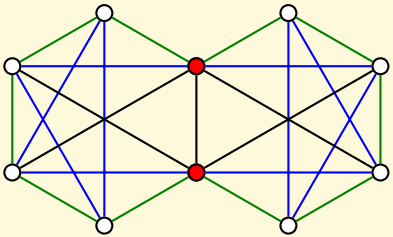


Obrázek 2.13 Grafy G.

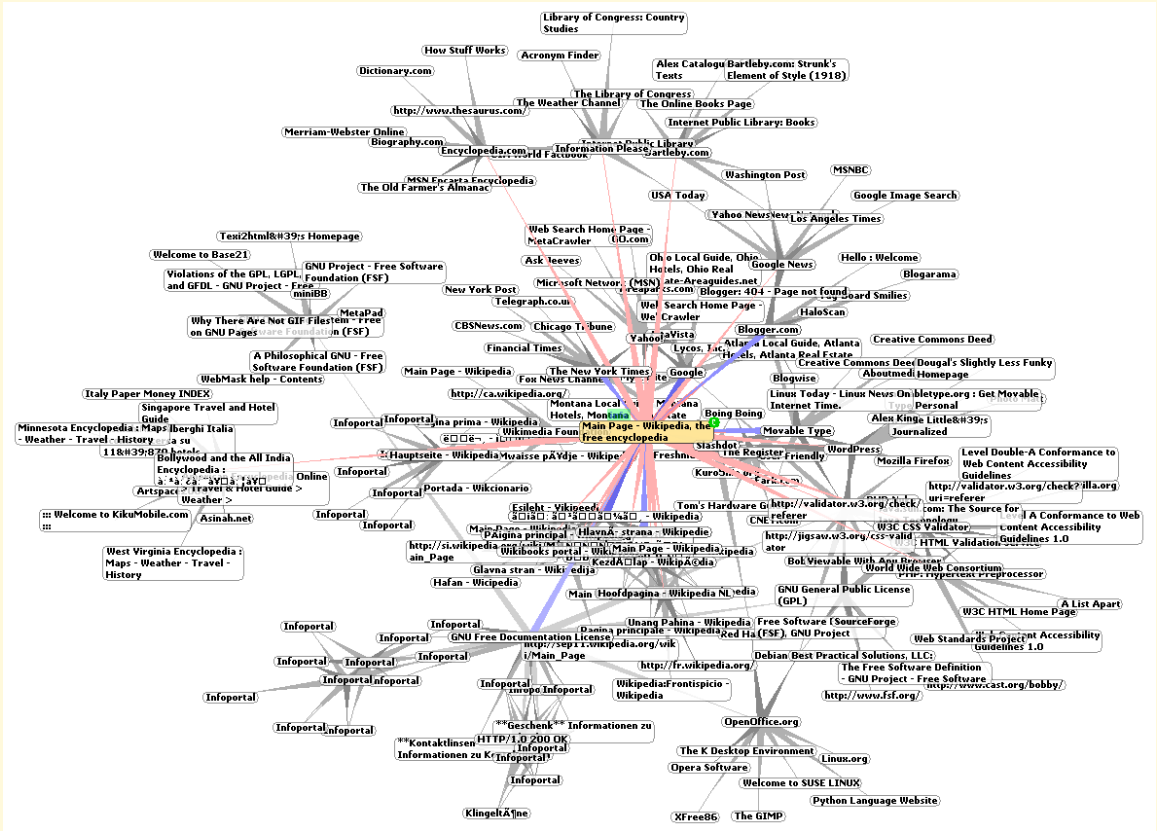
Pojmy k zapamatování

— stupeň vrcholové souvislosti
— stupeň hranové souvislosti
— Mengerovy věty

Obsah
86. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obrázek 2.14 Hranově disjunktní cesty v grafu G.



Obrázek 2.15 Znázornění části webu, která souvisí s Wikipedií.

2.4. Test

Následuje jednoduchý test, pro nalezení správné odpovědi jedné otázky není potřeba více než půl minuty.

Zacátek testu **Souvislost grafu**

1. Kolik nejvíce různých komponent může mít graf na 10 vrcholech?

2. Kolik nejvíce různých komponent může 2-pravidelný mít graf na 10 vrcholech?

3. Kolik komponent má souvislý graf?
   (a) jednu komponentu, (b) jednu nebo dvě komponenty,
   (c) dvě a více komponent, (d) žádnou komponentu.

4. Kolik komponent má nesouvislý graf?
   (a) jednu komponentu, (b) právě jednu nebo dvě komponenty,
   (c) dvě a více komponent, (d) žádnou komponentu.

5. Kolik komponent souvislosti má 5-pravidelný graf na deseti vrcholech?

6. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?
   (a) Sousední vrcholy v neorientovaném grafu jsou navzájem dosažitelné.
   (b) Jsou-li vrcholy v jednoduchém grafu navzájem dosažitelné, tak jsou spojeny hranou.
   (c) Jsou-li vrcholy v jednoduchém grafu navzájem dosažitelné, tak mezi nimi existuje v grafu cesta.

(d) Existuje-li mezi dvěma vrcholy v neorientovaném grafu cesta, tak jsou navzájem dosažitelné.

(e) Existuje-li mezi dvěma vrcholy v neorientovaném grafu sled, tak mezi nimi existuje také cesta.

(f) Jsou-li nějaké dva vrcholy v jednoduchém grafu navzájem dosažitelné, tak graf je souvislý.

(g) Nejsou-li nějaké dva vrcholy v jednoduchém grafu navzájem dosažitelné, tak graf je nesouvislý.

7. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?

(a) Prohledávání grafu do šířky umíme určit, zda je graf souvislý.

(b) Prohledávání grafu do šířky umíme určit, zda je graf nesouvislý.

(c) Prohledávání grafu do hloubky umíme určit, zda je graf souvislý.

(d) Prohledávání grafu do hloubky umíme určit, zda je graf nesouvislý.

(e) Prohledávání grafu do šířky je rychlejší, než prohledávání grafu do hloubky.

(f) Pro nesouvislé grafy nemůžeme použít algoritmus prohledáváno do šířky.

(g) Pro nesouvislé grafy nemůžeme použít algoritmus prohledáváno do hloubky.

8. Jaký je vrcholový stupeň souvislosti cyklu C_n?

9. Jaký je hranový stupeň souvislosti cyklu C_n?

10. Jaký je vrcholový stupeň souvislosti kompletního grafu K_7?

11. Jaký je hranový stupeň souvislosti cesty P_6?

12. Jaký je vrcholový stupeň souvislosti kompletního bipartitního grafu $K_{3,4}$?

13. Jaký je hranový stupeň souvislosti kompletního bipartitního grafu $K_{3,4}$?

14. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?

(a) Kompletní graf K_6 je vrcholově 1-souvislý.
(b) Kompletní graf K_6 je vrcholově 2-souvislý.
(c) Kompletní graf K_6 je vrcholově 3-souvislý.
(d) Kompletní graf K_6 je vrcholově 4-souvislý.
(e) Kompletní graf K_6 je vrcholově 5-souvislý.
(f) Kompletní graf K_6 je vrcholově 6-souvislý.
(g) Kompletní graf K_6 je vrcholově 7-souvislý.

15. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?

(a) Hranový stupeň souvislosti nemůže být větší než vrcholový stupeň souvislosti.
(b) Vrcholový stupeň souvislosti nemůže být větší než hranový stupeň souvislosti.
(c) Jestliže mezi některými vrcholy grafu existuje k interně disjunktních cesta, tak graf je vrcholově k-souvislý.
(d) Jestliže mezi některými vrcholy grafu existuje k interně disjunktních cesta, tak graf je hranově k-souvislý.

(e) Jestliže stupeň vrcholové souvislosti grafu je k, tak mezi některými vrcholy grafu existuje k interně disjunktních cesta.

(f) Jestliže stupeň vrcholové souvislosti grafu je k, tak mezi některými vrcholy grafu existuje k hranově disjunktních cesta.

16. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?

(a) Každý souvislý graf má nějakou hranu.

(b) Nesouvislý graf má méně hran než vrcholů.

(c) Souvislý graf může mít více vrcholů než hran.

(d) Všechny souvislé grafy mají méně vrcholů než hran.

(e) Nesouvislý graf má vrchol stupně 0.

(f) Má-li graf vrchol stupně 0, tak není souvislý.

Konec testu | Oprava testu

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:

Kapitola 3

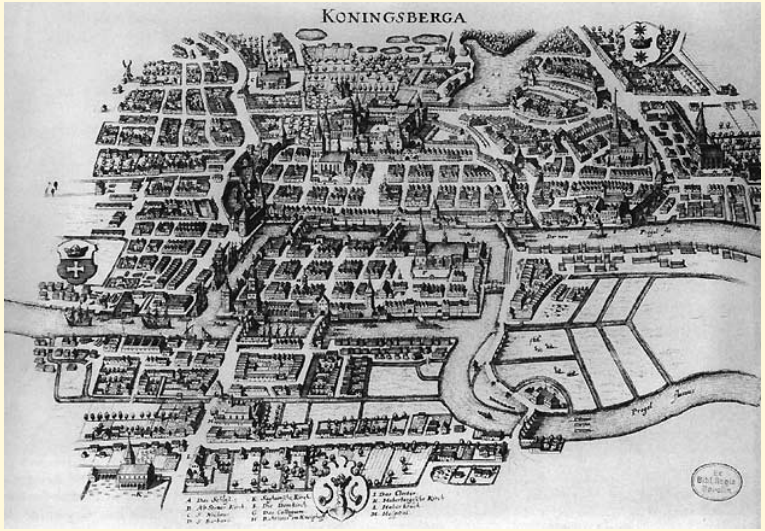
Eulerovské grafy

Průvodce studiem

Historicky první problém vyřešený pomocí Teorie grafů 1736 byl tak zvaný Problém sedmi mostů města Královce.

V osmnáctém století byl Královec bohatým městem. Na tehdejší dobu vyspělá ekonomika umožnila městu vystavět celkem sedm mostů přes řeku Pregolu (Obrázek 3.1). Podle tradice trávili měšťané nedělní odpoledne procházkami po městě. Vznikla tak otázka, zda je možno projít všech sedm královeckých mostů, každý z nich právě jednou. Nikomu se to nedařilo, ale nikdo ani neuměl zdůvodnit, proč by to nebylo možné.

Oslovili Leonharda Eulera, který v té době žil v Petrohradu, zda by problém uměl vyřešit. Euler úlohu snadno vyřešil. Uvědomil si, že při jejím řešení nevyužil ani geometrii, ani algebru ani známe početní metody, ale metodu, kterou ve své korespondenci s německým matematikem Leibnizem nazvali „geometrie pozic.“ Euler při řešení problému sedmi mostů města Královce



Obrázek 3.1 Dobová mapa města Královce.

tuto metodu formálně zavedl. Dnes bychom řekli, že použil teorii grafů při hledání tahu, který obsahuje každou hranu daného grafu právě jedenkrát.

Pošťák má za úkol roznést poštu do každé ulice ve svém okrsku. Je přirozené, že si naplánuje trasu tak, aby každou ulicí procházel jen jednou – nachodí se tak co nejméně a navíc poštu doručí dříve. Představme si graf, který modeluje ulice okrsku tak, že hrany odpovídají ulicím a křižovatky vrcholům grafu. Pošťákova úloha tak přesně odpovídá hledání tahu, který obsahuje každou hranu právě jednou.

Podobně můžeme plánovat trasu sněžné frézy, která odklízí chodníky. Možná budeme chtít

Obsah
94. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

některé ulice projít dvakrát – jednou po každé straně kde se nachází chodník. Grafový model snadno upravíme tak, aby chodníky po obou stranách ulice odpovídaly násobným hranám nebo interně disjunktním cestám v grafu.

Podobně mohou trasy svých vozů plánovat popeláři, kropící vozy, vozidla technických služeb atd.

3.1. Kreslení jedním tahem

Cíle

Po prostudování této sekce budete schopni:

- zformulovat některé praktické úlohy jako úlohy nalezení eulerovského tahu,
- rozpoznat, zda daný graf je možno nakreslit (projít) jedním uzavřeným tahem,
- rozpoznat, zda daný graf je možno nakreslit jedním (ne nutně uzavřeným) tahem.

V úvodu jsme zmínili celou řadu úloh, které lze řešit tak, že v nějakém grafu hledáme tah, který obsahuje každou hranu grafu právě jedenkrát.

Definice 3.1. Tah v souvislém grafu G, který začíná a končí ve stejném vrcholu a který obsahuje všechny hrany grafu G, se nazývá *uzavřený eulerovský tah*. Tah v souvislém grafu G, který obsahuje všechny hrany grafu G a výchozí vrchol se liší od koncového vrcholu, se nazývá *otevřený eulerovský tah*.
Graf, ve kterém existuje uzavřený eulerovský tah, se nazývá *eulerovský graf*. Říkáme, že takový graf lze *nakreslit jedním tahem*.

Při popisu úlohy hledání uzavřeného nebo otevřeného eulerovského tahu v daném grafu budeme obvykle hovořit o kreslení jedním tahem, ačkoliv hlavní motivací daného problému nemusí být právě kreslení jedním tahem, ale třeba optimální řešení nějakého dopravního problému. Je to proto, že kreslení jedním tahem je názorné a velmi dobře popisuje důležité vlastnosti:

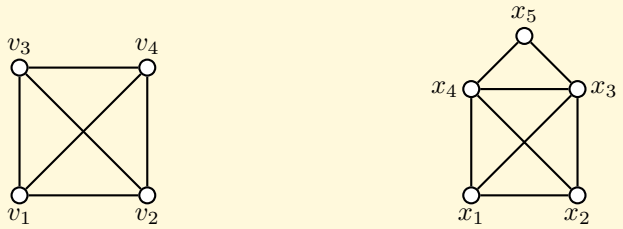
- hledaný tah má obsahovat každou hranu grafu,
- žádná hrana se neopakuje,
- uzavřený tah začíná a končí ve stejném vrcholu.

Budeme-li říkat „graf G lze nakreslit jedním uzavřeným tahem“, tak tím současně říkáme "v grafu G existuje uzavřený eulerovský tah“.

Poznámka 3.2. Všimněte si, že v definici eulerovského tahu požadujeme, aby daný graf G byl souvislý. Uvědomte si, že například graf, který obsahuje dvě komponenty C_5 *není* podle definice eulerovský, ačkoliv má všechny vrcholy sudého stupně. Dokonce ani graf, jehož jedna komponenta je eulerovský graf a další komponenty jsou izolované vrcholy není eulerovský, ačkoliv v něm najdeme uzavřený eulerovský tah, který obsahuje *všechny* hrany celého grafu.

Příklad 3.3. Které z grafů na Obrázku 3.2 lze nakreslit jedním tahem?

Řešení. Budeme-li zkoušet nakreslit kompletní graf K_4 jedním tahem, nepodaří se nám to. Abychom to ukázali nade vší pochybnost, mohli bychom třeba systematicky prozkoumat všechny možnosti, jak seřadit hrany. Graf K_4 má 6 hran a ty lze seřadit celkem $P(6) = 6! = 720$ způsoby, avšak ani jeden z nich neodpovídá eulerovskému tahu v grafu. Ve Větě 3.4 ukážeme překvapivě jednoduchou podmínku, která pomůže snadno rozpoznat, zda v daném grafu (a tedy například i v grafu K_4) existuje eulerovský tah.



Obrázek 3.2 Které z uvedených grafů lze nakreslit jedním tahem?

Naproti tomu v grafu na obrázku vpravo existuje otevřený eulerovský tah (dokonce několik různých), například $x_1, x_2, x_3, x_4, x_1, x_3, x_5, x_4, x_2$. Na druhou stranu, pokud bychom v grafu hledali uzavřený eulerovský tah, tak neuspějeme. V grafu neexistuje ani otevřený eulerovský tah, který by začínal nebo končil v některém z vrcholů x_3, x_4 nebo x_5. ▲

Následující věta dává jednoduché kriterium, kdy v daném grafu existuje uzavřený eulerovský tah. Právě tuto větu zformuloval a dokázal Leonhard Euler už v roce 1736.

Věta 3.4 (Eulerova věta). *Graf G lze nakreslit jedním uzavřeným tahem právě tehdy, když je graf G souvislý a všechny jeho vrcholy jsou sudého stupně.*

Důkaz. Ukážeme si myšlenku důkazu. Formální důkaz vyžaduje pečlivé značení, najdete jej na straně 102. Protože tvrzení věty má tvar ekvivalence (říkáme, že něco platí „právě tehdy, když“ platí něco jiného), budeme dokazovat dvě implikace.

1. Nejprve ukážeme implikaci "⇒" : „jestliže lze graf nakreslit jedním uzavřeným tahem, tak je souvislý a všechny jeho vrcholy jsou sudého stupně.“

Mějme graf G, který je možno nakreslit jedním uzavřeným tahem. Abychom zdůvodnili, že graf G je souvislý, stačí si uvědomit, že mezi každými dvěma vrcholy najdeme sled tak, že z uzavřeného eulerovského tahu vybereme příslušný úsek.

Dále, protože uzavřený eulerovský tah do každého vrcholu vždy nějakou hranou vstoupí a jinou hranou pokračuje, tak stupeň každého vrcholu je nějaký násobek čísla 2 a je proto sudý.

2. Nyní ukážeme opačnou implikaci "$\Leftarrow$" , která zní: „jestliže máme souvislý graf a všechny jeho vrcholy jsou sudého stupně, tak jej lze nakreslit jedním uzavřeným tahem.“

   Důkaz je konstruktivní, umožní nám uzavřený eulerovský tah najít. Postupujeme indukcí vzhledem k počtu hran.

   Základ indukce: Nejmenší graf, který je souvislý a má všechny vrcholy sudého stupně, je triviální graf. V triviálním grafu existuje triviální uzavřený sled a tvrzení platí.

   Nejmenší souvislý netriviální graf G se všemi vrcholy sudého stupně je cyklus C_n, protože v netriviálním souvislém grafu nemohou být vrcholy stupně 0 a právě v cyklu C_n jsou všechny vrcholy stupně 2. Cyklus C_n je jistě možno nakreslit jedním uzavřeným tahem, neboť hrany cyklu tvoří hledaný uzavřený sled.

   Indukční krok: Mějme nějaký netriviální souvislý graf $G = (V, E)$ se všemi vrcholy sudého stupně. Předpokládejme, že každý souvislý graf s méně než $|E|$ hranami je možno nakreslit jedním uzavřeným tahem. V grafu G jistě najdeme nějaký uzavřený tah T. Při hledání tahu T můžeme začít v libovolném vrcholu a protože každý vrchol grafu G je stupně alespoň 2, můžeme vždy pokračovat hranou, která se v tahu zatím nevyskytovala. Protože graf je konečný, dříve nebo později se v tahu zopakuje nějaký

vrchol. Dostaneme tak uzavřený tah. Ale pozor! Vrchol, který se zopakuje, *nemusí být první vrchol sestaveného tahu*. Úsek sestaveného tahu, který začíná prvním výskytem zopakovaného vrcholu, je hledaný uzavřený tah T.

Odebereme-li nyní všechny hrany uzavřeného tahu T, dostaneme graf označený $G-T$, ve kterém jsou opět všechny vrcholy sudého stupně (některé mohou být izolované vrcholy). Pokud graf $G-T$ není souvislý, lze každou jeho komponentu L_i dle indukčního předpokladu nakreslit jedním uzavřeným tahem T_i. Nyní do uzavřeného tahu T přidáme za každou komponentu uzavřený tah T_i (tah T_i je v komponentě eulerovský a obsahuje všechny hrany komponenty) a získáme uzavřený eulerovský tah původního grafu G.

Podle principu (silné) matematické indukce je důkaz hotov.

Ukázali jsme, že nutnou i dostatečnou podmínku pro existenci uzavřeného eulerovského tahu v grafu je, aby graf byl souvislý a měl všechny vrcholy sudého stupně. □

Na adrese http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/eulerova_veta.pdf najdete animaci, která ukazuje jednotlivé kroky důkazu.

Eulerova věta řeší pouze existenci *uzavřeného* eulerovského tahu. Jak je to s existencí otevřeného eulerovského tahu ukazuje následující tvrzení.

Věta 3.5. *Graf G lze nakreslit jedním otevřeným tahem právě tehdy, když je graf G souvislý a právě dva jeho vrcholy jsou lichého stupně.*

Důkaz. Tvrzení Věty 3.5 má opět tvar ekvivalence a budeme dokazovat dvě implikace.
"⇒" Stejně jako v důkazu Věty 3.4 zdůvodníme, že můžeme-li graf G nakreslit jedním otevřeným tahem, je graf G souvislý a všechny vrcholy jsou sudého stupně s výjimkou

prvního a posledního vrcholu otevřeného tahu. První i poslední vrchol jsou různé (tah je otevřený) a každý z nich je incidentní s lichým počtem hran, neboť první hrana tahu a poslední hrana tahu přispějí do stupně vrcholu jedničkou, zatímco vnitřní vrcholy tahu jsou incidentní vždy se sudým počtem různých hran tahu.

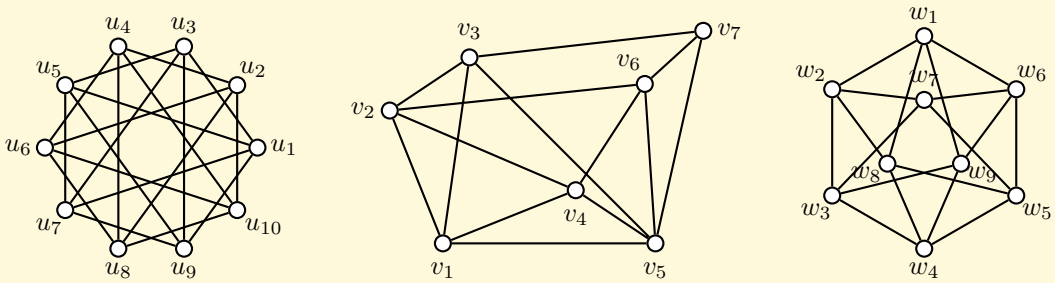
"⇐" Mám-li souvislý graf G s právě dvěma vrcholy u, v lichého stupně, můžeme do grafu G přidat nový vrchol x, který spojíme hranami s vrcholy u, v a dostaneme souvislý graf G', ve kterém jsou všechny vrcholy (dokonce i vrcholy u, v, x) sudého stupně a podle Eulerovy věty 3.4 v grafu G' existuje *uzavřený* eulerovský tah T', který začíná a končí ve vrcholu x. Je zřejmé, že z uzavřeného tahu T' stačí vynechat vrchol x a obě přidané hrany a dostaneme otevřený eulerovský tah T mezi vrcholy u a v v původním grafu G. □

Všimněte si, že důkaz Věty 3.5 jsme elegantním trikem převedli na tvrzení, pro které jsme využili už dokázanou Větu 3.4. Zcela analogicky bychom mohli ukázat už první implikaci "⇒" Věty 3.5. Proto je Věta 3.5 považována za důsledek Eulerovy věty 3.4 a pro konstrukci otevřeného eulerovského tahu můžeme použít stejný postup jako pro konstrukci uzavřeného eulerovského tahu.

Je dobré zdůraznit, že existuje-li v daném grafu uzavřený eulerovský tah, tak v něm *neexistuje* otevřený eulerovský tah. Existuje-li totiž v grafu uzavřený eulerovský tah, tak všechny vrcholy grafu jsou sudého stupně a aby existoval otevřený eulerovský tah, tak musí v grafu být právě dva vrcholy lichého stupně.

Příklad 3.6. Které z grafů na Obrázku 3.3 je možno nakreslit jedním tahem? Najděte alespoň jeden takový tah, pokud existuje.

Řešení. Graf na Obrázku 3.3 vlevo má sice všechny vrcholy sudého stupně, ale není souvislý. Proto v něm neexistuje uzavřený ani otevřený eulerovský tah.



Obrázek 3.3 Které z uvedených grafů lze nakreslit jedním tahem?

Graf na Obrázku 3.3 uprostřed je souvislý a má právě dva vrcholy lichého stupně: v_5 a v_7. V grafu existuje otevřený eulerovský tah, například

$$v_7, v_6, v_4, v_1, v_2, v_3, v_5, v_1, v_3, v_7, v_5, v_6, v_2, v_4, v_5.$$

Graf na Obrázku 3.3 vpravo je souvislý a má všechny vrcholy sudého stupně, proto v něm existuje uzavřený eulerovský tah, například

$$w_1, w_2, w_7, w_5, w_8, w_2, w_3, w_4, w_8, w_1, w_9, w_4, w_5, w_6, w_7, w_3, w_9, w_6, w_1.$$

▲

Další animovaný příklad je k dispozici na adrese http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/eulerovsky_tah.pdf.

Poznámka 3.7. Pokud bychom chtěli sestavit algoritmus, který bude v daném grafu hledat uzavřený eulerovský tah, tak nejprve můžeme snadno ověřit, zda takový tah vůbec existuje.

Obsah
101. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Souvislost grafu ověříme užitím postupu popsaného v Příkladu 2.19 a ověřit, zda je každý vrchol sudého stupně je snadné. Nyní najdeme libovolný uzavřený tah T postupem, který jsme popsali v indukčním kroku důkazu Věty 3.4.

Dále najdeme komponenty souvislosti grafu $G - T$ (podle Příkladu 2.20) a pro každou netriviální komponentu najdeme rekurzivně uzavřený eulerovský tah (eulerovský vzhledem ke komponentě, nikoliv vzhledem k původnímu grafu G). Tyto uzavřené tahy vhodně vložíme do uzavřeného tahu T a dostaneme uzavřený eulerovský tah původního grafu G.

Stejný trik jako v důkazu Věty 3.5 můžeme použít i pro důkaz ještě obecnějšího tvrzení: každý souvislý graf s $2k$ vrcholy lichého stupně lze nakreslit k otevřenými tahy. Vzhledem k praktickým motivacím, které jsme zmiňovali v úvodu kapitoly se kreslení více tahy může hodit při plánování tras pro více pošťáků nebo pro více popelářských vozů.

Pro zájemce

Pro úplnost zde uvádíme i pečlivě zapsaný důkaz Eulerovy věty 3.4. Doporučujeme tento důkaz porovnat s důkazem uvedeným na straně 97.

Důkaz. Protože Eulerova věta 3.4 má tvar ekvivalence, ukážeme platnost dvou implikací.
"⇒" Uzavřený eulerovský tah v grafu G při každém průchodu vrcholem v obsahuje dvě hrany incidentní s v. Navíc první a poslední hrana uzavřeného tahu jsou incidentní se stejným vrcholem, proto stupeň každého vrcholu v grafu G je násobek dvojky. Každý eulerovský graf G má proto všechny vrcholy sudého stupně.
"⇐" Postupujeme indukcí vzhledem k počtu hran.
Základ indukce: Nejmenší graf splňující podmínky věty je triviální graf, který obsahuje triviální uzavřený sled s jediným vrcholem.
Indukční krok: Mějme nějaký netriviální souvislý graf G se všemi vrcholy sudého stupně. Předpokládejme, že všechny souvislé sudé grafy s menším počtem hran obsahují eulerovský tah. Pro-

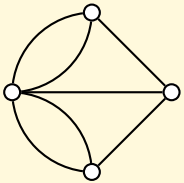
tože graf G má všechny vrcholy stupně alespoň 2 (vrchol stupně menšího by byl triviální komponentou), tak podle Lemmatu 5.3 (větu ukážeme v Kapitole 5) obsahuje graf G nějaký cyklus C. V grafu $G' = G - E(C)$ zůstane každý vrchol sudého stupně, neboť odebereme vždy 0 nebo 2 hrany incidentní s každým vrcholem. Proto každá komponenta L_i grafu G' je souvislý sudý graf s méně hranami než G a podle indukčního předpokladu obsahuje komponenta L_i uzavřený eulerovský tah. Navíc každá komponenta L_i obsahuje nějaký vrchol cyklu C, jinak by původní graf nebyl souvislý. V každé komponentě L_i označme v_i jeden takový vrchol cyklu C. Nyní postupujeme podle cyklu C a vždy, když narazíme na nějaký vrchol v_i, tak na stávající tah navážeme uzavřený eulerovský tah komponenty L_i a dále pokračujeme po cyklu C. Sestavíme tak uzavřený tah, který bude obsahovat všechny hrany cyklu C i všech komponent grafu $G - E(C)$, proto se jedná o eulerovský tah v grafu G. □

Pro zájemce

Využití eulerovských grafů se neomezují pouze na putování v grafu, který reprezentuje nějakou mapu. Další pěkné aplikace eulerovských grafů najdeme pro stavové grafy. Vrcholy stavového grafu nějakého systému odpovídají možným stavům, které mohou nastat, a hrany spojují stavy, mezi kterými existuje legální přechod. Například konečné automaty jsou jedním typem stavových grafů. Při testu systému bychom rádi prověřili všechny možné stavy a přechody mezi nimi. Optimální test můžeme naplánovat podle eulerovského tahu grafem.

Pro zájemce

Není těžké ukázat, že platnost Eulerovy věty 3.4 je možno rozšířit i pro grafy s násobnými hranami (multigrafy), ve kterých je stupeň každého vrcholu určen počtem incidentních hran. Všimněte si,



Obrázek 3.4 Graf úlohy sedmi mostů města Královce.

že dokonce původní úloha sedmi mostů města Královce vede na řešení úlohy v multigrafu, který je na Obrázku 3.4.

Pro zájemce

Na okraj uvedeme, že v dnešním Královci je možné projít každý z mostů právě jednou, procházka však není turisticky atraktivní, neboť musí začínat na jednom z ostrovů a končit na druhém. V centru dnešního Kaliningradu je nyní mostů pět. Dva ze sedmi mostů z původní úlohy byly zničeny během druhé světové války. Další dva byly později zbořeny a nahrazeny novými. Zbývající tři mosty zůstaly zachovány, přičemž jeden z nich byl v roce 1935 přestavěn. V terminologii teorie grafů by oběma břehům odpovídaly vrcholy stupně 2 a oběma ostrovům vrcholy stupně 3 (Obrázek 3.5).

Pojmy k zapamatování

— kreslení jedním tahem

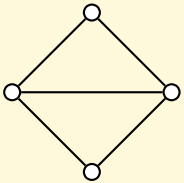
— Eulerova věta

Obsah

104. strana ze 272

Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno



Obrázek 3.5 Graf úlohy sedmi mostů dnešního města Královce.

3.2. Hamiltonovské grafy

Průvodce studiem

Při hledání eulerovského tahu v grafu jsme chtěli navštívit každou hranu daného grafu právě jedenkrát, přičemž opakované navštívení vrcholu nehrálo roli. Přirozeně vzniká analogická úloha, kdy nemusíme projít každou hranu, ale chceme navštívit každý vrchol právě jednou. Jako klasická praktická motivace takové úlohy se uvádí problém obchodního cestujícího, který má navštívit všechna města svého regionu, vrátit se do výchozího města a přitom nacestovat co nejkratší vzdálenost. Ve zjednodušené verzi nás zajímá, zda můžeme navštívit každé město právě jednou a vrátit se zpět. V terminologii teorie grafů hledáme cyklus, který obsahuje všechny vrcholy daného grafu. Takový cyklus může, ale nemusí existovat.

Další podobné úlohy odpovídají plánování trasy pošťáka na vesnici, kde se roznáší jen málo poštovních zásilek. Spíš než projít každou ulici, musí pošťák navštívit všechny adresy (domy), do kterých má doručit nějakou zásilku. Podobně ve velkoskladu se při navážení nebo předávání zboží rozváží paleta, nebo třeba několik palet s různým zbožím na určitá místa ve skladu. Vozík má opět za úkol navštívit všechna vybraná místa a přitom urazit co nejkratší vzdálenost. Všechny uvedené úlohy odpovídají stejné úloze teorie grafů – nalezení tzv. hamiltonovského cyklu v grafu.

Cíle

Po prostudování této sekce budete schopni:

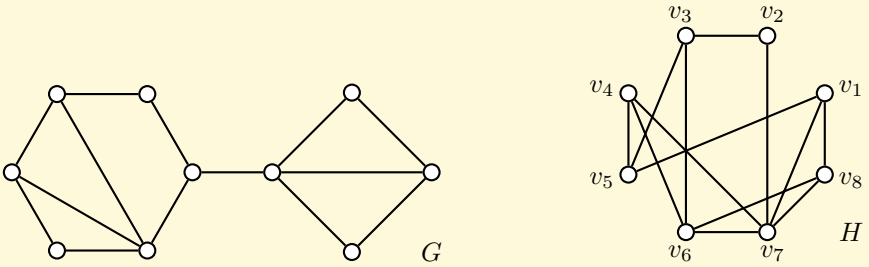
- popsat úlohu, která odpovídá hledání hamiltonovského cyklu v grafu,
- použít některé jednoduché dostatečné podmínky pro nalezení hamiltonovského cyklu.

Nejprve zavedeme následující pojem.

Definice 3.8. *Hamiltonovský cyklus* v grafu je takový cyklus, který prochází všemi vrcholy. Graf, ve kterém existuje hamiltonovský cyklus, se nazývá *hamiltonovský graf*.

Hamiltonovský cyklus v grafu prochází každým vrcholem právě jedenkrát. Takový cyklus nemusí pochopitelně obsahovat všechny hrany daného grafu.

Příklad 3.9. Které z grafů na Obrázku 3.6 jsou hamiltonovské?



Obrázek 3.6 Které z uvedených grafů obsahují hamiltonovský cyklus?

Obsah
106. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Řešení. Snadno odhadneme, že graf na Obrázku 3.6 vlevo není hamiltonovský. Zdůvodníme to nepřímo. Kdyby hamiltonovský byl, tak by obsahoval nějaký hamiltonovský cyklus C a byl by současně vrcholově (i hranově) 2-souvislý, neboť mezi každou dvojicí vrcholů bychom našli na cyklu C dvě interně disjunktní cesty. Ale protože vrcholová souvislost grafu na Obrázku 3.6 vlevo je rovna 1, tak tento graf neobsahuje hamiltonovský cyklus.

Graf na Obrázku 3.6 vpravo je hamiltonovský, neboť obsahuje hamiltonovský cyklus. Jeden takový cyklus je například

$$v_1, v_7, v_2, v_3, v_5, v_4, v_6, v_8.$$

▲

Hamiltonovský graf zavedli jako analogii eulerovského grafu. Na první pohled se zdá, že hledání hamiltonovského cyklu je velmi podobné hledání eulerovskému tahu. Není tomu tak! Zatímco pro rozhodnutí o existenci eulerovského tahu v souvislém grafu je nutnou i dostatečnou podmínkou sudost všech stupňů vrcholů, tak pro existenci hamiltonovského cyklu žádná taková snadno ověřitelná podmínka není známa. Řada matematiků se dokonce domnívá, že takovou podmínku ani nelze najít.

Není znám jednoduchý a současně rychlý algoritmus, pomocí kterého bychom v daném grafu našli hamiltonovský cyklus a nebo poznali, že takový cyklus neexistuje. Pochopitelně je možno prověřit všech $n!$ různých pořadí vrcholů, zda leží po řadě na nějakém cyklu, avšak takový postup vyžaduje pro obecný graf až $n!$ (exponenciálně mnoho) kroků v závislosti na počtu vrcholů daného grafu. Algoritmus, který by existenci hamiltonovského cyklu ověřil obecně s využitím nejvýše polynomiálně mnoha kroků, znám není. Pro obecný graf proto není lehké rozhodnout, zda je hamiltonovský. Je známo několik jednoduchých dostatečných podmínek. Jestliže graf splňuje například některou z následujících podmínek, tak víme, že obsahuje hamiltonovský cyklus.

Věta 3.10 (Diracova věta). *Mějme graf G na n vrcholech, kde $n \geqq 3$. Je-li nejmenší stupeň vrcholů v grafu alespoň $n/2$, tak je graf G hamiltonovský.*

Diracova věta 3.10 je speciálním případem následujícího tvrzení, které je obecnější.

Věta 3.11 (Oreho věta). *Mějme graf G na n vrcholech, kde $n \geqq 3$. Jestliže pro každé dva nesousední vrcholy u a v v grafu G platí $\deg(u) + \deg(v) \geqq n$, tak je graf G hamiltonovský.*

Důkaz můžete najít například v [5]. Všimněte si, že obě věty mají tvar implikace, nikoli ekvivalence. Proto graf, který splňuje podmínky je hamiltonovský, ale ne každý hamiltonovský graf musí podmínky věty splňovat. Například každý graf cyklu je jistě hamiltonovský, ale pro $n > 4$ nesplňuje podmínky ani Věty 3.10, ani Věty 3.11. Také graf na Obrázku 3.6 vpravo je hamiltonovský, ale uvedené dostatečné podmínky nesplňuje.

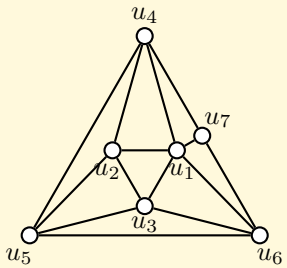
Příklad 3.12. Které kompletní bipartitní grafy $K_{m,m}$ jsou hamiltonovské?

Řešení. Každý bipartitní graf $K_{m,m}$ pro $m \geqq 2$ je hamiltonovský podle Diracovy věty, neboť má $2m$ vrcholů a stupeň každého vrcholu je (alespoň) polovina počtu vrcholů. Pro $m = 1$ Diracovu větu nemůžeme použít, protože graf $K_{1,1}$ má jen dva vrcholy. Na druhou stranu je zřejmé, že graf $K_{1,1}$ hamiltonovský není. ▲

Příklad 3.13. Rozhodněte zda je graf na Obrázku 3.7 hamiltonovský.

Řešení. Graf na Obrázku 3.7 je hamiltonovský podle Oreho věty 3.11, neboť má více než dva vrcholy a součet stupňů každých dvou nesousedních vrcholů je alespoň 7. Všimněte si, že Diracovu větu 3.10 nemůžeme použít, neboť vrchol u_7 je stupně menšího než $|V(G)|/2$. Podle Oreho věty 3.11 určíme, že graf G je hamiltonovský, protože součet stupňů každých dvou (nejen nesousedních) vrcholů u, v je $\deg(u) + \deg(v) \geqq 7 = n$.

Obsah
108. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obrázek 3.7 Graf obsahuje pět vrcholů stupně 4, jeden vrchol stupně 5 a jeden vrchol stupně 3.

Hamiltonovský cyklus je například

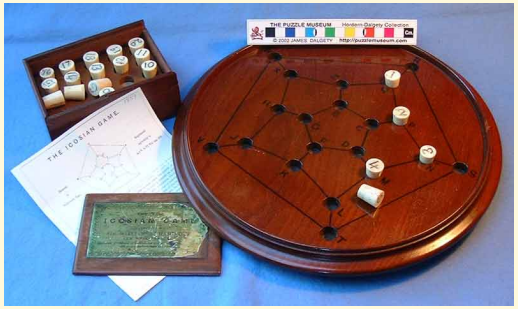
$$u_1, u_2, u_3, u_6, u_5, u_4, u_7.$$

▲

Pro zájemce

Hamiltonovským grafům se říká „hamiltonovské“ podle irského matematika Williama Rowana Hamiltona, který v roce 1857 vymyslel a komerčně využil hru „Cesta kolem světa“. Jednalo se o nalezení takové cesty po hranách dvanáctistěnu, abychom každý vrchol navštívili jen jednou a vrátili se do původního vrcholu. Příklady hry jsou na Obrázku 3.8.

Další úlohou, kterou je možné přeformulovat na hledání hamiltonovského cyklu je klasická úloha jezdce na šachovnici. Máme za úkol koněm objet celou šachovnici tak, abychom každé políčko navštívili právě jednou a nakonec se vrátili na výchozí políčko. Sestavíme-li graf, jehož vrcholy odpovídají



Obrázek 3.8 Různé varianty Hamiltonovy hry.

políčkům šachovnice a hranou spojíme každá dvě políčka, mezi kterými existuje regulérní tah jezdcem, dostaneme graf s 64 vrcholy, ve kterém máme za úkol najít hamiltonovský cyklus. Taková cesta jezdcem existuje. Dokážete ji najít?

Pojmy k zapamatování

— hamiltonovský cyklus

— hamiltonovský graf

Obsah
110. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

3.3. Test

Následuje jednoduchý test, pro nalezení správné odpovědi jedné otázky není potřeba více než půl minuty.

Zacátek testu **Eulerovké a hamiltonovskégrafy**

1. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?

(a) Eulerovský graf má právě dva vrcholy lichého stupně.
(b) Eulerovský graf má všechny vrcholy sudého stupně.
(c) Každý graf, jehož hrany lze nakreslit jedním tahem, je eulerovský.
(d) Není-li daný graf eulerovský, stačí přidat několik hran, aby vznikl eulerovský graf.
(e) Eulerovský graf je souvislý.
(f) každý pravidelný graf je eulerovský.
(g) každý souvislý pravidelný graf je eulerovský.

2. Které z následujících grafů jsou eulerovské?

(a) K_7. (b) C_8. (c) $K_{3,4}$.
(d) $K_{2,4}$. (e) P_6. (f) Petersenův graf.

3. Kolik vrcholů lichého stupně může mít eulerovský graf?

4. Eulerovský graf lze nakreslit

(a) jedním otevřeným tahem,
(b) jedním uzavřeným tahem,
(c) jedním otevřeným nebo uzavřeným tahem.

5. Může mít eulerovský graf více vrcholů než hran?

(a) ano, (b) ne.

6. Může mít eulerovský graf více hran než vrcholů?

(a) ano, (b) ne.

7. Je pravda, že každý eulerovský graf má více hran než vrcholů?

(a) ano, (b) ne.

8. Pro které n je možno kompletní graf K_n nakreslit jedním otevřeným tahem?

9. Pro které n je možno kompletní bipartitní graf $K_{1,n}$ nakreslit jedním otevřeným tahem?

10. Je pravda, že každý graf, který není možno nakreslit jedním otevřeným ani uzavřeným eulerovským tahem není souvislý?

(a) ano, (b) ne.

11. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?

(a) Každý eulerovský graf je hamiltonovský.
(b) Každý hamiltonovský graf je eulerovský.
(c) Alespoň jeden eulerovský graf je hamiltonovský.
(d) Alespoň jeden hamiltonovský graf je eulerovský.
(e) Žádný eulerovský graf není hamiltonovský.
(f) Žádný hamiltonovský graf není eulerovský.

12. Které z následujících grafů jsou hamiltonovské?

(a) P_6. (b) $K_{2,4}$. (c) $K_{4,4}$. (d) K_6.

Konec testu Oprava testu

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:

Kapitola 4

Vzdálenost a metrika v grafu

Průvodce studiem

V kapitole 2 jsme se zabývali otázkou, zda v grafu, který modeluje nějakou reálnou situaci, existuje cesta mezi vybranými dvěma vrcholy. V mnoha praktických aplikacích má smysl zjistit „jak daleko“ jsou vrcholy v grafu. Ukážeme, jak přirozeně „měřit“ vzdálenosti v grafu.

Jestliže například máme graf, který reprezentuje silniční síť, tak je velmi přirozené ptát se

„Jak daleko je z vrcholu (města) u do vrcholu (města) v?“

nebo

„Jak dlouho trvá cesta z vrcholu (města) u do vrcholu (města) v?“

Při podrobnějším zkoumání nebudeme „vzdáleností“ rozumět pouhý počet hran, *tedy například počet různých silnic, kterými pojedeme, nebo počet křižovatek, které projedeme. Pro určení*

vzdálenosti bude zásadní délka hran, *neboli délka jednotlivých úseků mezi křižovatkami. Všimněte si, že informace o délkách úseků (hran) v grafu, tak jak jsme jej na straně 11 zavedli, zatím obsažena není.*

Proto, abychom mohli v grafu měřit vzdálenosti, zavedeme pojem ohodnocení hran *grafu. Ohodnocení bude zpravidla odpovídat nějaké fyzikální veličině, například délce v metrech, tloušťce, kapacitě, elektrickému odporu, barvě, a pod.*

Budeme-li pracovat s ohodnoceným grafem, obvykle abstrahujeme od fyzikální podstaty příslušné veličiny a s ohodnocením budeme pracovat jako s číslem. Budeme například pracovat s hranami délek 4 a 12 a jejich navázáním dostaneme cestu nebo sled délky 16. Až budeme výsledky interpretovat v kontextu původní úlohy, neměli bychom zapomenout na příslušnou jednotku fyzikální veličiny. Délka 16 bude odpovídat například šestnácti kilometrům, v jiné interpretaci pak třeba 16 ohmům. V jiné úloze budou například hrany s ohodnocením 4 a 12, které jsou incidentní se stejným vrcholem, odpovídat celkové kapacitě potrubí 16 kubických metrů za sekundu. A třeba v další úloze nebude mít smysl ohodnocení navazujících hran sčítat, neboť se bude jednat o barvu případně o šířku cest.

Poznamenejme ještě, že při ohodnocování hran obvykle vystačíme s celými čísly. Je-li například vzdálenost udávána v kilometrech včetně desetinné části odpovídající stovkám nebo desítkám metrů, tak je vhodné pracovat se vzdáleností vyjádřenou v metrech a všechny délky tak budou celá čísla.

Cíle

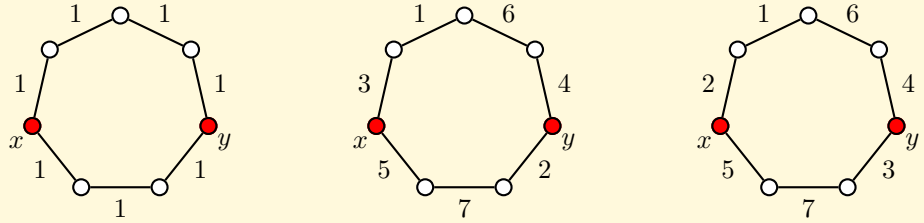
Po prostudování této kapitoly budete schopni:

- určit vzdálenost (délku nejkratší cesty) mezi dvěma vrcholy v ohodnoceném i neohodnoceném grafu,

- určit vzdálenost z jednoho vrcholu do všech ostatních vrcholů,
- určit vzdálenost mezi každou dvojicí vrcholů daného grafu,
- správně určit meze použitelnosti jednotlivých algoritmů.

4.1. Vzdálenost v grafu

Dříve než podáme formální definici ohodnoceného grafu a dříve než nadefinujeme pojem *délka cesty* v grafu, tak vystačíme s intuitivní představou. Pro názornost srovnejme vzdálenost vrcholů x a y pro tři různé grafy na Obrázku 4.1. Předpokládejme, že čísla přiřazená hranám určují délku každého úseku. Zatímco v grafu na obrázku vlevo je vzdálenost mezi vrcholy x a y rovna 3 (cesta „spodem“ vede přes tři hrany délky 1), tak v prostředním grafu najdeme dvě cesty délky 14 (obě „horní“ i „spodní“ cesta mají stejnou délku). Konečně, v grafu na obrázku vpravo je nejkratší cesta z vrcholu x do vrcholu y délky 13 (cesta „horem“ přes celkem čtyři hrany délek 2, 1, 6 a 4).



Obrázek 4.1 Různé vzdálenosti v grafu v závislosti na délkách hran.

Jestliže jsou délky všech hran stejné, tak délka cesty je samozřejmě úměrná počtu hran

Obsah
116. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

cesty. Z Obrázku 4.1 je jasné, že délka cesty nemusí nutně odpovídat počtu hran cesty.

Nyní zavedeme pojem vzdálenosti v neohodnoceném grafu. Připomeňme, že na straně 58 jsme definovali délku sledu jako počet hran sledu.

Definice 4.1. *Vzdálenost* $\mathrm{dist}_G(u,v)$ mezi vrcholy u a v grafu G je dána délkou nejkratšího sledu mezi u a v v G. Pokud sled mezi u, v neexistuje, položíme vzdálenost $\mathrm{dist}_G(u,v) = \infty$.

Všimněte si, že:

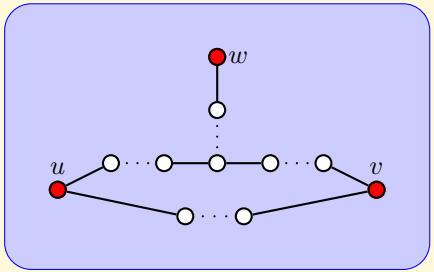
- nejkratší sled (ze všech sledů obsahuje nejméně hran) je *vždy cestou*,
- v neorientovaných grafech platí $\mathrm{dist}_G(u,v) = \mathrm{dist}_G(v,u)$,
- vzdálenost vrcholu od sebe samotného je $\mathrm{dist}_G(u,u) = 0$,
- pokud $\mathrm{dist}_G(u,v) = 1$, tak hrana uv patří do grafu G.

Lemma 4.2. *Vzdálenost mezi vrcholy v daném grafu G splňuje tzv.* trojúhelníkovou nerovnost*:*

$$\forall u,v,w \in V(G)\colon\ \mathrm{dist}_G(u,v) + \mathrm{dist}_G(v,w) \geqq \mathrm{dist}_G(u,w).$$

Důkaz. Nerovnost ihned plyne ze zřejmého pozorování, že na sled délky $\mathrm{dist}_G(u,v)$ mezi vrcholy u, v lze navázat sled délky $\mathrm{dist}_G(v,w)$ mezi v, w, čímž dostaneme sled délky $\mathrm{dist}_G(u,v)+\mathrm{dist}_G(v,w)$ mezi u, w. Proto nemůže být $\mathrm{dist}_G(u,w) > \mathrm{dist}_G(u,v)+\mathrm{dist}_G(v,w)$. Může však existovat kratší sled mezi u,w, proto $\mathrm{dist}_G(u,w) \leqq \mathrm{dist}_G(u,v) + \mathrm{dist}_G(v,w)$. Schématický příklad je na Obrázku 4.2. □

Obsah
117. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obrázek 4.2 Dva sledy: mezi u a v a mezi v a w; kratší mezi u a w.

Pro zájemce

V matematice je *metrika* taková funkce ρ, která přiřazuje vzdálenost každé dvojici prvků z nějaké dané množiny A a která má navíc jisté vlastnosti. Množina A spolu s metrikou ρ se nazývá *metrický prostor*.

Definice 4.3. *Metrika* ρ na množině A je zobrazení $\rho : A \times A \to \mathbb{R}$ takové, že $\forall x, y \in A$ platí

1. $\rho(x, y) \geqq 0$ přičemž $\rho(x, y) = 0$ jen pro $x = y$,
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,
3. $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geqq \rho(x, z)$.

S různými metrikami se setkáváme i v jiných matematických disciplínách, třeba v analýze je metrikou funkce absolutní hodnoty, v geometrii je metrikou eukleidovská vzdálenost dvou bodů v rovině nebo prostoru a v algebře jsou metrikou různé normy. Vzdálenost v grafu zavedená v Definici 4.1 je metrika na množině vrcholů daného grafu.

Obsah
118. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Už dříve jsme zmínili, že budeme určovat vzdálenost mezi dvěma vrcholy grafu proto, abychom uměli určit odpovídající vzdálenost v nějaké praktické úloze. Jak vzdálenost určíme? Uvědomte si, že obecně prozkoumání všech možných cest mezi dvěma vrcholy by bylo nejen časově náročné, ale také algoritmicky obtížné. Například v kompletním grafu umíme všechny cesty mezi danou dvojicí vrcholů najít snadno (Příklad 4.4). Na druhou stranu v obecném grafu je mezi danou dvojicí vrcholů cest méně, ale určit jejich počet může být náročnější než u kompletního grafu na stejném počtu vrcholů. Zkuste si rozmyslet, jak byste určili počet různých cest mezi vrcholy u_1 a u_2 na Obrázku 3.7.

Příklad 4.4. Určete počet všech cest mezi danou dvojicí vrcholů u a v v kompletním grafu K_n. Kolik je takových cest mezi dvojicí vrcholů v K_7?

Řešení. Mějme kompletní graf a v něm dva vrcholy u, v. Budeme určovat počet cest, které začínají ve vrcholu u a končí ve vrcholu v. Rozlišíme dva případy:

1. Jestliže $u = v$, tak existuje jediná cesta z u do v – a sice triviální cesta.
2. Jestliže $u \neq v$, tak dále rozlišíme možnosti podle toho, kolik dalších vrcholů se nachází na cestě mezi vrcholy u a v.
   (a) Pokud takový vnitřní vrchol není žádný, existuje v grafu jediná cesta z u do v.
   (b) Jestliže na cestě z vrcholu u do v najdeme k vnitřních vrcholů, tak existuje různých takových cest celkem $V(n-2,k) = \frac{(n-2)!}{(n-2-k)!}$. Za vnitřní vrcholy cesty můžeme vybrat libovolných k vrcholů a při sestavení cesty rozlišíme jejich pořadí. Jedná se tedy o variace bez opakování (podrobně o určování počtu výběrů se dočtete v [6]).

   Počet vnitřních vrcholů k může nabývat libovolné hodnoty od 1 po nejvýše $n-2$.

Celkem je počet hledaných cest dán vztahem

$$1 + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{(n-2)!}{(n-2-k)!}. \tag{4.1}$$

Pro $n = 7$ stačí dosadit do obecného vztahu 4.1. Počet všech cest mezi dvěma vybranými vrcholy v grafu K_7 je roven $1 + \sum_{k=1}^{5} \frac{5!}{(5-k)!} = 327$. ▲

Naštěstí se ukazuje, že pro určení vzdálenosti mezi dvěma vrcholy nemusíme prozkoumávat všechny cesty mezi danou dvojicí vrcholů. V další části této kapitoly se budeme věnovat algoritmům pro určení vzdálenosti v neohodnoceném grafu.

Pojmy k zapamatování

— vzdálenost v grafu

— metrika v grafu

4.2. Určení vzdáleností neboli výpočet metriky

Průvodce studiem

V této sekci se budeme věnovat algoritmům pro určení vzdálenosti mezi vrcholy grafu. Ukážeme dva algoritmy, jeden pro určení vzdálenosti mezi každými dvěma vrcholy a druhý, rychlejší, pro určení vzdáleností všech vrcholů od jednoho pevně zvoleného vrcholu. Oba algoritmy mají polynomiální složitost, budeme proto umět určit vzdálenost dvou vrcholů rychle i v poměrně velkém grafu.

Obsah
120. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Cíle

Po prostudování této sekce budete schopni:

- určit vzdálenost (délku nejkratší cesty) mezi dvěma vrcholy v neohodnoceném grafu,
- určit vzdálenost mezi každou dvojicí vrcholů daného grafu,
- rozhodnout, který z uvedených algoritmů je pro danou úlohu nejvhodnější.

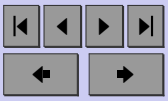
Nejprve ukážeme, jak jednoduchá modifikace algoritmu pro prohledávání grafu (Algoritmus 2.1) umožní určit vzdálenosti z jednoho pevně zvoleného vrcholu do všech ostatních vrcholů. Předpokládejme, že máme implementaci Algoritmu 2.1 s postupem do šířky, tj. úschovna je implementována jako fronta. Místo označení úschovny „U“ jako v Algoritmu 2.1 budeme proto v tomto algoritmu úschovnu označovat „F“.

Nyní stačí, když v průběhu algoritmu každému nově objevenému vrcholu přiřadíme vzdálenost, která je o jedničku větší, než vzdálenost právě zpracovávaného vrcholu. Pro uchování informace o vzdálenosti každého vrcholu použijeme jednorozměrné pole `vzdal[]`.

Pseudokód algoritmu může vypadat například takto:

Obsah

121. strana ze 272



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Algoritmus 4.1 (Vzdálenosti z daného vrcholu).

```
// na vstupu je graf G
vstup < graf G;
stav(všechny vrcholy a hrany G) = iniciační;
fronta F = libovolný vrchol u grafu G;
stav(u) = nalezený;
vzdal(u) = 0;                          // vzdálenost u

// zpracování vybrané komponenty G
while (F je neprázdná) {
   vyber vrchol v a odeber jej z fronty F: F = F - v;
   for (hrany e vycházející z v) {    // pro všechny hrany
      w = druhý vrchol hrany e = vw;  // známe sousedy?
      if (stav(w) == iniciační) {
         stav(w) = nalezený;
         přidej vrchol w do fronty: F = F + w;
         vzdal[w] = vzdal[v]+1;       // vzdálenost w
      }
   }
   stav(v) = zpracovaný;

   // vrcholy z dalších komponent jsou nedosažitelné!
   while (v grafu G je nezpracovaný vrchol w) {
      vzdal[w] = MAX_INT;             // nekonečno
      stav(w) = zpracovaný;
   }
}
```

Obsah
122. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Po skončení běhu algoritmu bude každá položka pole `vzdal[]` obsahovat číselnou hodnotu, která udává vzdálenost příslušného vrcholu od výchozího vrcholu u. Dokonce i vrcholy nedosažitelné z výchozího vrcholu budou mít správně určenou vzdálenost ∞.

Poznámka 4.5. Všimněte si, že po skončení algoritmu sice bude známa vzdálenost každého vrcholu od výchozího vrcholu u, avšak nejkratší cestu nebudeme umět zrekonstruovat. Pokud bychom chtěli navíc zjistit, jak nejkratší cesty vypadají, bude potřeba v průběhu algoritmu získat další informace. Elegantním řešením je pro každý vrchol w uložit informaci o *předchozím* vrcholu na nějaké nejkratší cestě z vrcholu u do vrcholu w. K tomu stačí jednorozměrné pole `pre[]`. Do algoritmu stačí za řádek, kde je určena vzdálenost vrcholu w, přidat následující řádek.

```
pre[w] = v;                    // předchůdce w
```

Na konci algoritmu bude pro každý vrchol, který se nachází v komponentě spolu s výchozím vrcholem u, uložena v poli `pre[]` informace, kudy nejkratší cesta z vrcholu u do vrcholu w vede. Tuto cestu můžeme zrekonstruovat:

- poslední vrchol takové cesty je vrchol w,
- předposlední vrchol cesty je vrchol $pre[w]$,
- předpředposlední vrchol cesty je vrchol $pre[pre[w]]$,
- ...
- první (tj. výchozí) vrchol cesty je vrchol $pre[\ldots pre[pre[w]]]$, což je vrchol u.

Obsah
123. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

4.2.0.14. Složitost Algoritmu 4.1

Uvedený algoritmus je poměrně rychlý. Počet kroků závisí na počtu vrcholů a hran daného grafu. Při vhodné implementaci je počet kroků úměrný počtu vrcholů (pro řídké grafy – s malým počtem hran) nebo počtu hran (pro husté grafy). Obecně můžeme říci, že složitost algoritmu je $O(n+m)$, kde n udává počet vrcholů a m je počet hran daného grafu. I v kompletním grafu, který má $m = \binom{n}{2} = n(n-1)/2$ hran, je proto složitost algoritmu řádově $O(n^2)$.

4.2.0.15. Důkaz správnosti Algoritmu 4.1

Ačkoliv to nebylo výslovně řečeno, při popisu Algoritmu 4.1 jsme předpokládali, že vzdálenější vrcholy budou zpracovány později, než vrcholy blíže k výchozímu vrcholu u. Toto pozorování pečlivě zformulujeme (Lemma 4.6), dokážeme jeho platnost a pak jej použijeme v důkazu, že Algoritmus 4.1 funguje správně, tj. že po skončení běhu algoritmu dostaneme vzdálenosti (i nejkratší cesty) z výchozího vrcholu do všech ostatních vrcholů.

Lemma 4.6. *Nechť u, v, w jsou takové vrcholy souvislého grafu G, že* $\mathrm{dist}_G(u,v) < \mathrm{dist}_G(u,w)$. *Pak při procházení grafu G postupem* do šířky *z vrcholu u je vrchol v nalezen dříve než vrchol w.*

Důkaz. Postupujeme indukcí vzhledem ke vzdálenosti $\mathrm{dist}_G(u,v)$.
Základ indukce: Jestliže $\mathrm{dist}_G(u,v) = 0$, tak $u = v$ a tvrzení je zřejmé – vrchol u dostane na začátku algoritmu stav „nalezen“ jako první.
Indukční krok: Předpokládejme, že pro vrcholy ve vzdálenosti *menší* než nějaká pevně zvolená hodnota d, tvrzení platí. Mějme vrchol v, pro který platí $\mathrm{dist}_G(u,v) = d > 0$ a označme v' předposlední vrchol (sousední k vrcholu v) na nejkratší cestě z vrcholu u

Obsah
124. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

do vrcholu v. Víme, že $\text{dist}_G(u, v') = d - 1$. Stejně tak označme w' předposlední vrchol na nejkratší cestě z vrcholu u do vrcholu w. Protože $\text{dist}_G(u, v) < \text{dist}_G(u, w)$, je také $\text{dist}_G(u, v) - 1 < \text{dist}_G(u, w) - 1$ tedy $\text{dist}_G(u, v') < \text{dist}_G(u, w')$.

To podle indukčního předpokladu znamená, že vrchol v' bude v prohledávání do šířky nalezen dříve než vrchol w', protože vrchol v' se nachází ve vzdálenosti menší než d od výchozího vrcholu u. To ale současně znamená, že vrchol v' se dostal do fronty F dříve než vrchol w', a proto sousedé vrcholu v' (mezi nimi i vrchol v) budou při prohledávání nalezeni dříve než sousedé vrcholu w'. To je dokazované tvrzení a podle principu matematické indukce platí pro vrcholy v libovolné vzdálenosti. □

Nyní můžeme ukázat, že Algoritmus 4.1 pracuje správně.

Věta 4.7. *Algoritmus 4.1 určí vzdálenost z nějakého výchozího vrcholu u do všech ostatních vrcholů.*

Důkaz. Tvrzení ukážeme opět indukcí vzhledem ke vzdálenosti vrcholu od výchozího vrcholu u..

Základ indukce: Podle Algoritmu 4.1 je na začátku přiřazena vrcholu u vzdálenost `dist[u]=0` a dále se vzdálenost do výchozího vrcholu u již nemění, neboť vzdálenosti se určují pouze pro vrcholy v iniciačním stavu. Proto i po skončení algoritmu bude `dist[u]=0`, což odpovídá správné vzdálenosti $\text{dist}_G(u, u) = 0$.

Indukční krok: Mějme nějaký vrchol w ve vzdálenosti $d > 0$ od vrcholu u a předpokládejme, že všechny vrcholy ve vzdálenosti menší než d mají vzdálenost určenu správně. Označme w' předposlední vrchol na nejkratší cestě z vrcholu u do vrcholu w. Podle Lemmatu 4.6 budou všechny vrcholy, které jsou blíže k výchozímu vrcholu u zpracovány dříve než w, tedy i vrchol w' bude zpracován dříve. Nejpozději při zpracování vrcholu w' bude nastavena

hodnota položky `dist[w]=dist[w']+1`, neboť všechny vrcholy s vzdáleností od u menší než vrchol w mají podle indukčního předpokladu vzdálenost určenu správně a hodnota `dist[w]` se nastaví pouze při pracování nějakého vrcholu sousedního s w. □

Poznámka 4.8. Dobře si rozmyslete, že při použití jiného algoritmu než s postupem do šířky (například s postupem do hloubky) by tvrzení Věty 4.6 nebylo pravdivé. Při prohledávání grafu postupem do hloubky *není* pravda, že vrchol v, který je do úschovny vložen dříve než vrchol w, bude zpracován dříve než vrchol w. Naopak dokonce víme, že dříve přidaný vrchol bude zpracován později. Vzdálenosti od výchozího vrcholu u by proto takový algoritmus neurčil správně.

4.2.0.16. Výpočet metriky skládáním cest

Jak jsme uvedli na straně 118, je metrika funkce, která každé dvojici prvků dané množiny přiřadí číslo tak, aby byly splněny vlastnosti v Definici 4.3.

Definice 4.9. Mějme dán graf G. *Metrika grafu* G je funkce, která každé dvojici vrcholů $u, v \in V(G)$ přiřadí jejich vzdálenost $\mathrm{dist}_G(u, v)$.

V dalším budeme tuto metriku ukládat do dvourozměrného pole `d[][]`, jehož každá položka `d[i][j]` bude obsahovat hodnotu vzdálenosti $\mathrm{dist}(i, j)$ mezi vrcholy i a j v daném grafu. (Pro jednoduchost předpokládáme, že vrcholy jsou čísla $0, 1, \ldots, |V(G)|-1$.) Tomuto dvourozměrnému poli budeme říkat „metrika d“, místo abychom dlouze opisovali „metrika, jejíž funkční hodnoty jsou uloženy v poli `d[][]`.“

Pro sestavení metriky d bychom mohli opakovaně použít Algoritmus 4.1. Stačí pro každý vrchol $u \in V(G)$ určit pomocí Algoritmu 4.1 vzdálenosti do všech ostatních vrcholů a určit

Obsah
126. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

tak všechny hodnoty v u-tém řádku metriky d. Všimněte si, že pro neorientované grafy tak současně určíme všechny hodnoty v u-tém sloupci metriky d.

Existuje však jednodušší algoritmus:

Algoritmus 4.2 (Sestavení metriky).

```
vstup: matice sousednosti G[][] grafu na N vrcholech, kde
       G[i][j]=1 pro hranu mezi i,j a
       G[i][j]=0 jinak;

// inicializace (hodnotu MAX_INT/2 považujeme za "nekonečno")
for (i=0; i<N; i++)
   for (j=0; j<N; j++)
      d[i][j] = (i==j ? 0 : (G[i][j] ? 1 : MAX_INT/2));

// cyklus pro všechny vrcholy
for (t=0; t<N; t++)
   // probereme všechny dvojice vrcholů
   for (i=0; i<N; i++)
      for (j=0; j<N; j++)
         // vede přes vrchol t kratší cesta?
         d[i][j] = min(d[i][j], d[i][t]+d[t][j]);
```

Rozebereme podrobně, jak Algoritmus 4.2 funguje. Vrcholy daného grafu G máme označené jako $0, 1, 2, \ldots, N-1$ (čísla můžeme chápat například jako indexy vrcholů).

Na začátku algoritmu položíme

- `d[i][j]=0` jestliže vrcholy $i = j$,

- `d[i][j]=1` jestliže vrcholy i a j jsou sousední (na straně 134 popíšeme modifikaci algoritmu, kde budeme prvku `d[i][j]` přiřazovat délku hrany ij),
- nebo `d[i][j]` položíme rovno nekonečno (implementováno jako `MAX_INT/2`), pokud hrana ij v grafu není.

Nyní postupně určíme metriku grafu G. Po každém kroku $t \geqq 0$ algoritmu bude hodnota `d[i][j]` udávat délku takové nejkratší cesty mezi vrcholy i a j, která vede pouze přes „povolené“ vrcholy z množiny $\{0, 1, 2, \ldots, t\}$. V průběhu každého kroku upravíme vzdálenost pro každou dvojici vrcholů i, j. Rozlišíme dvě možnosti:

- najdeme kratší cestu přes nově povolený vrchol t; potom nahradíme hodnotu `d[i][j]` menší vzdáleností `d[i][t] + d[t][j]` nebo
- přidání vrcholu t do seznamu „povolených“ vrcholů nepomůže najít cestu kratší než byla `d[i][j]` v předchozím kroku; potom hodnotu `d[i][j]` ponecháme beze změny.

Po nejvýše N iteracích cyklu řízeného proměnnou t budou prvky pole `d[][]` obsahovat vzdálenosti mezi odpovídajícími dvojicemi vrcholů. Všimněte si, že v každém průběhu vnějšího cyklu řízeného proměnnou t můžeme obecně upravit vzdálenost mezi každou dvojicí vrcholů. Proto každá hodnota pole `d[][]` se v průběhu algoritmu může mnohokrát změnit. Hodnoty v poli `d[][]` se v průběhu algoritmu mohou pouze snižovat.

Pokud je graf G nesouvislý, tak i po skončení algoritmu bude v každém prvku pole `d[][]`, které odpovídá vzájemně nedosažitelným vrcholům, uložena hodnota `MAX_INT/2`. Neměli bychom však pracovat s hodnotou `MAX_INT`, aby na některých systémech nedošlo přičtením k „přetečení“ hodnoty odpovídající nekonečnu.

Rozmyslete si, že obecně neumíme v průběhu algoritmu poznat, zda algoritmus bude hodnoty v poli `d[][]` měnit, nebo zda už všechny hodnoty v poli `d[][]` odpovídají

vzdálenostem. Není těžké vymyslet takový graf, aby se změnila hodnota jediného prvku v poli `d[][]` a to až v posledním kroku algoritmu.

4.2.0.17. Složitost Algoritmu 4.2

Všimněte si, že v každém průběhu vnějšího cyklu řízeného proměnnou t pracujeme s každým prvkem pole `d[][]`. Stejně tak pracujeme s každým prvkem pole `d[][]` během inicializace. Složitost takového algoritmu je proto $O(n^3)$, kde $n = N$ udává počet vrcholů daného grafů.

4.2.0.18. Porovnání Algoritmů 4.1 a 4.2

Srovnejme nyní oba algoritmy popsané v této sekci.

Zatímco Algoritmus 4.2 má velmi jednoduchou implementaci a najde vzdálenosti mezi každou dvojicí vrcholů, tak Algoritmus 4.1 má o trochu složitější implementaci a dává pouze vzdálenosti do všech vrcholů z jednoho pevně zvoleného vrcholu.

Na druhou stranu má Algoritmus 4.2 řádově vyšší složitost $O(n^3)$ oproti složitosti $O(n^2)$ Algoritmu 4.1. A pokud nás zajímá vzdálenost mezi jednou pevně zvolenou dvojicí vrcholů, tak Algoritmus 4.2 nemůžeme ukončit předčasně. Abychom měli jistotu, že máme určenu vzdálenost mezi danou dvojicí vrcholů, *musí* se určit vzdálenost mezi každými dvěma vrcholy daného grafu.

Pojmy k zapamatování

— algoritmy výpočtu metriky v grafu

Obsah
129. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

4.3. Vzdálenost v ohodnocených grafech

Průvodce studiem

Už v úvodu Kapitoly 4 jsme zmínili význam grafu, ve kterém jsou hranám přiřazena čísla, přičemž tato čísla odpovídají délkám, tloušťkám, kapacitám, případně barvám v nějaké praktické úloze. V této sekci nejprve zavedeme pojem ohodnocení grafu formálně a pak vyslovíme několik základních tvrzení. Dále ukážeme, proč se v dalším textu omezíme na grafy, které mají hrany ohodnocené pouze kladnými čísly.

Cíle

Po prostudování této sekce budete schopni:

- vysvětlit význam ohodnocení grafu,
- popsat některé praktické úlohy pomocí ohodnoceného grafu,
- vysvětlit, proč se omezíme na kladně ohodnocené grafy.

Definice 4.10. *Ohodnocený graf* je graf G spolu s ohodnocením hran reálnými čísly. Ohodnocení je funkce $w : E(G) \to \mathbb{R}$ (anglicky „weight“), která každé hraně přiřadí reálné číslo $w(e)$, kterému říkáme *váha hrany*.
Kladně ohodnocený (vážený) graf G má takové ohodnocení w, že pro každou hranu $e \in E(G)$ je její váha $w(e)$ kladná.

Obecně mohou čísla přiřazená hranám být libovolná reálná čísla. V praxi se však většinou setkáváme s grafy, v nichž váhy všech hran jsou kladné. Když budeme chtít zdůraznit,

Obsah
130. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

že hrany grafu jsou ohodnoceny kladnými čísly, budeme hovořit o „kladně váženém“ případně jen o „váženém“ grafu. Dále se z praktických důvodů často omezíme na ohodnocení přirozenými čísly (a případně nulou), neboť váhy obvykle odpovídají fyzikálním veličinám a my můžeme zvolit dostatečně malou jednotku pro jejich vyjádření, aby rozdíly v desetinách neměly už žádný praktický význam. Navíc se při početních operacích s přirozenými čísly vyhneme některým zaokrouhlovacím chybám, které mohou v různých implementacích způsobit, že se výsledky algoritmů dosažené na různých systémech mohou mírně lišit.

Poznámka 4.11. Striktně vzato ohodnocený graf je *dvojice* (G, w), kde G je graf a w je jeho ohodnocení. Dále v textu si však dovolíme mluvit o ohodnoceném grafu G, protože z kontextu bude vždy jasné, s jakým ohodnocením pracujeme.

Nyní zavedeme vzdálenost v ohodnoceném (případně váženém) grafu. Vážená vzdálenost nebude pouhý počet hran mezi danou dvojicí vrcholů, ale bude se jednat o součet vah jednotlivých hran.

Definice 4.12. Mějme ohodnocený graf G s ohodnocením w. *Délkou ohodnoceného sledu* $S = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n$ v G rozumíme součet ohodnocení všech jeho hran

$$d_G^w(S) = w(e_1) + w(e_2) + \cdots + w(e_n),$$

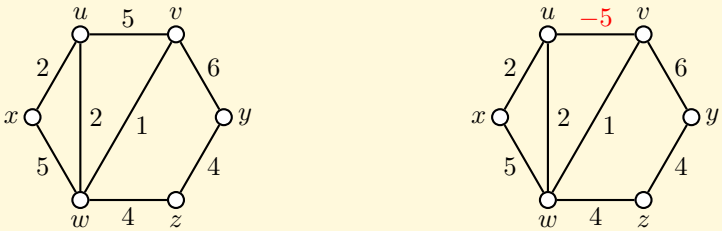
přičemž každá hrana se počítá tolikrát, kolikrát se ve sledu S objevuje. *Vzdáleností* mezi dvěma vrcholy u, v ve váženém (ohodnoceném) grafu (G, w) rozumíme

$$\mathrm{dist}_G^w(u, v) = \min\{d_G^w(S), \text{kde } S \text{ je } \textbf{cesta} \text{ s koncovými vrcholy } u, v\}.$$

Jestliže vrcholy u a v jsou nedosažitelné, klademe $\mathrm{dist}_G^w(u, v) = \infty$.

Poznámka 4.13 (O existenci nejkratšího sledu a cesty). Musíme upozornit na jeden podstatný rozdíl mezi určováním vzdáleností v neohodnocených a ohodnocených grafech. Všimněte si, že mezi dvěma vrcholy v grafu se záporně ohodnocenými hranami nemusí nejkratší sled vůbec existovat! Například v grafech na Obrázku 4.3 budeme hledat nejkratší sled a cestu z vrcholu x do vrcholu y. V kladně váženém grafu na obrázku 4.3 vlevo najdeme po drobném rozmyšlení nejkratší sled $S_1 = x, u, w, v, y$ délky 11. Tento sled je současně i nejkratší cestou z vrcholu x do vrcholu y.

Jaký je však nejkratší sled z vrcholu x do vrcholu y v grafu na obrázku 4.3 vpravo? Sled $S_1 = x, u, w, v, y$ není nejkratší, neboť sled $S_2 = x, u, v, y$ má délku 3. Ale sled $S_3 = = x, u, v, w, u, v, y$ má délku rovnu dokonce jen 1. Sled $S_3 = x, u, v, w, u, v, w, u, v, y$ má délku dokonce -11, atd. A například také sled $S_4 = x, u, v, u, v, y$ má délku -7. Je zřejmé, že ke každému sledu s libovolně malou délkou najdeme sled s ještě menší délkou. Proto nejkratší sled z vrcholu x do vrcholu y neexistuje.



Obrázek 4.3 Nejkratší sled a cesta mezi vrcholy x a y.

Naproti tomu nejkratší cesta z vrcholu x do vrcholu y existuje, je to cesta $S_2 = x, u, v, y$ a má délku 3. Všimněte si, že vzdálenost vrcholů x a y podle Definice 4.12 je rovna 3, neboť je definována jako délka nejkratší *cesty* a nikoliv nejkratšího sledu.

Obsah
132. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Problém s nejkratším sledem souvisí s tím, že ve sledu se mohou záporně ohodnocené hrany libovolně mnohokrát opakovat a mohou tak „pokazit“ existenci minimální délky sledu. V algoritmu, který bude hledat vzdálenosti nebo nejkratší cesty v ohodnoceném grafu, musíme tento jev vzít v úvahu. To je důvod, proč se při popisu algoritmů omezíme na *kladně* vážené grafy. Určování vzdáleností hran v grafu se záporně ohodnocenými hranami je možné, ale přesahuje rámec tohoto textu.

Dá se ukázat, že podobně jako neohodnocené grafy je vážená vzdálenost metrikou v grafu. Platí následující pozorování.

Lemma 4.14. *Vážená vzdálenost mezi vrcholy v daném kladně váženém grafu splňuje* trojúhelníkovou nerovnost*:*

$$\forall u, v, w \in V(G)\colon\ \mathrm{dist}^w_G(u,v) + \mathrm{dist}^w_G(v,w) \geqq \mathrm{dist}^w_G(u,w).$$

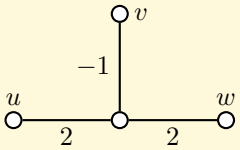
Příklad 4.15. Určete, zda Lemma 4.14 platí i v ohodnocených grafech se záporně ohodnocenými hranami.

Řešení. Zkuste si řešení rozmyslet sami dříve než si přečtete následující zdůvodnění.

Snadno najdeme příklad grafu a trojice jeho vrcholů u, v, w, které trojúhelníkovou rovnost nesplňují. Jeden příklad je na Obrázku 4.4. Zatímco vzdálenost $\mathrm{dist}^w_G(u,v) = 1$, vzdálenost $\mathrm{dist}^w_G(v,w) = 1$, tak součet těchto vzdáleností *není větší nebo roven* vzdálenosti $\mathrm{dist}^w_G(u,w) = 4$. ▲

4.3.0.19. Algoritmus 4.1 pro ohodnocené grafy

Jestliže jsou váhy daného grafu G tvořeny malými přirozenými čísly (G je kladně vážený), mohli bychom pro nalezení nejkratších vzdáleností z vrcholu u do ostatních vrcholů daného grafu G použít Algoritmus 4.1. Místo abychom upravili algoritmus, upravíme graf G.



Obrázek 4.4 Příklad grafu se záporně ohodnocenou hranou, ve kterém neplatí trojúhelníková nerovnost.

Každou hranu e nahradíme cestou, jejíž počet hran (a tedy délka v neohodnoceném grafu) bude rovna její váze $w(e)$. Dostaneme tak obvykle mnohem větší graf, který však nebude ohodnocený a vzdálenosti mezi „původními“ vrcholy v něm budou odpovídat vzdálenostem v ohodnoceném grafu G.

Zejména je dobré si uvědomit, že by nestačilo v Algoritmu 4.1 upravit řádek, kde se nastavuje vzdálenost vrcholu. Kdybychom místo

```
vzdal[w] = vzdal[v]+1;        // vzdálenost w
```

použili

```
vzdal[w] = vzdal[v]+w(e);     // vzdálenost w
```

algoritmus by nedával správné výsledky. Vždyť nejkratší cesta z výchozího vrcholu nemusí nutně vést přes *dříve objevený*, ale spíše přes *bližší vrchol* nebo po *kratší hraně*.

4.3.0.20. Algoritmus 4.2 pro ohodnocené grafy

Pro nalezení metriky d (matice vzdáleností mezi každou dvojicí vrcholů) v kladně váženém grafu G bychom mohli jednak použít modifikaci grafu G jako v předchozím odstavci,

Obsah
134. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

ale mohli bychom poměrně snadno upravit samotný Algoritmus 4.2. Stačí, když během inicializace položíme

- `d[i][j]=0` jestliže vrcholy $i = j$,
- `d[i][j]=w(e)` jestliže vrcholy i a j jsou spojeny hranou e,
- nebo `d[i][j]` položíme rovno nekonečno (implementováno jako `MAX_INT/2`, pokud hrana ij v grafu není.

Změní se tedy jediný řádek algoritmu, inicializace. Místo řádku

```
d[i][j] = (i==j ? 0 : (G[i][j] ? 1 : MAX_INT/2));
```

použijeme řádek

```
d[i][j] = (i==j ? 0 : (G[i][j] ? w[i][j] : MAX_INT/2));
```

kde `w[i][j]` je dvourozměrné pole, které obsahuje v i-tém řádku a j-tém sloupci váhu hrany ij nebo hodnotu ∞, pokud hrana ij neexistuje, případně hodnotu 0, pokud $i = j$. Algoritmus bude pracovat správně, dokonce se stejnou složitostí jako pro neohodnocené grafy.

V další sekci si ukážeme jiný algoritmus, který je rychlejší zejména v případě, kdy hledáme vzdálenosti mezi danou dvojicí vrcholů nebo když daný graf G obsahuje málo hran.

Obsah
135. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Pojmy k zapamatování

— (kladně) vážený graf
— vzdálenost v ohodnocených grafech
— algoritmy pro určení vážené vzdálenosti

4.4. Nejkratší cesta v ohodnoceném grafu

Průvodce studiem

V této sekci ukážeme další modifikaci Algoritmu 2.1, tzv. Dijkstrův algoritmus (čti „Dajkstrův" podle nizozemského informatika Edsgera W. Dijkstry). Úschovna U nebude implementována ani jako fronta, ani jako zásobník, ale jako množina, ze které budeme v každém kroku vybírat vrchol podle čísla, které mu bude v průběhu algoritmu přiřazené. Dijkstrův algoritmus lze použít pro nalezení nejkratší cesty z jednoho pevně zvoleného vrcholu do jiného zvoleného vrcholu, případně do všech vrcholů daného kladně váženého grafu. Vskutku je to právě Dijkstrův algoritmus a jeho modifikace, které se používají v řadě praktických aplikací, například při vyhledávání vlakových a autobusových spojení.

Cíle

Po prostudování této sekce budete schopni:

- pomocí Dijkstrova algoritmu najít nejkratší cesty z pevně zvoleného vrcholu daného grafu,
- odhadnout složitost Dijkstrova algoritmu pro daný graf,

- vysvětlit, proč algoritmus funguje pouze pro kladně vážené grafy.

Mějme dán *kladně* vážený graf G s ohodnocením w. Zvolíme jeden vrchol u grafu G za výchozí, z něj budeme hledat vzdálenost do jiného pevně zvoleného vrcholu v grafu G (případně do všech ostatních vrcholů v grafu G). Podobně jako v Algoritmu 2.1 budeme prohledávat graf G postupem „do šířky“. Budeme pracovat s následujícími proměnnými:

- počet vrcholů grafu G označíme `N`,
- předpokládejme, že graf G bude uložen pomocí seznamu sousedů v dvourozměrném poli `sous[][]`, kde prvek `sous[j][k]` udává $(k+1)$. souseda vrcholu j (pozor, protože indexujeme od 0, jedná se o $(k+1)$. souseda, nikoliv o k. souseda); o seznamu sousedů je psáno na straně 49,
- pro uložení stupňů vrcholů použijeme jednorozměrné pole `deg[]`,
- pracujeme s kladně váženým grafem, váhy budou uloženy v dvourozměrném poli `w[][]`; hodnota `MAX_INT` bude reprezentovat ∞,
- v průběhu algoritmu budeme pro každý vrchol i ukládat v poli `vzdal[]` informaci o délce nejkratší doposud nalezené cesty do vrcholu i,
- abychom uměli nejkratší nalezenou cestu zrekonstruovat, budeme v poli `pre[]` uchovávat pro každý vrchol i informaci o předposledním vrcholu na nejkratší cestě do vrcholu i (podobně jako u Algoritmu 4.1 na straně 123),
- protože se jedná o modifikaci algoritmu prohledávání grafu, budeme pro každý vrchol ukládat informaci o jeho stavu do pole `stav[]`; rozlišíme, zda je vrchol v iniciačním nebo zpracovaném stavu.

V každém kroku vybereme z úschovny nalezených vrcholů vždy ten vrchol j, který má ze všech vrcholů v úschovně *nejmenší (dosud nalezenou) vzdálenost* od výchozího vrcholu u. Tato informace je uložena v proměnné `vzdal[j]`. Později ukážeme, že takto zvolený vrchol už má správně určenou vzdálenost a protože je graf G kladně vážený, tak neexistuje kratší cesta do vrcholu j než ta, kterou algoritmus předtím nalezl.

Algoritmus 4.3 (Dijkstrův algoritmus).

```
vstup: graf na N vrcholech daný seznamem sousedů sous[][] a w[][],
       kde sous[i][0], ..., sous[i][st[i]-1]} jsou sousedé vrcholu i
       stupně st[i] a hrana z i do sous[i][k] má délku w[i][k] > 0;
vstup: u, v (hledáme cestu z u do v);
// stav[i] udává stav vrcholu i:
//    0 ... iniciační
//    1 ... zpracovaný
// vzdal[i] udává zatím nalezenou vzdálenost do vrcholu i
// pre[i] udává, ze kterého vrcholu jsme do i přišli

// inicializace
for (i=0; i<=N; i++)   // MAX_INT dáme navíc i do vzdal[N]!
   { vzdal[i] = MAX_INT; stav[i] = iniciační; }
vzdal[u] = 0;

while (stav[v] == iniciační) {
   for (i=0, j=N; i<N; i++)     // vzdal[N] = MAX_INT
      if (stav[i] == iniciační && vzdal[i] < vzdal[j])
         j = i;
   // našli jsme nejbližší nezpracovaný vrchol j
   // zpracujeme jej
   if (vzdal[j] == MAX_INT) return NENI_CESTA;
   stav[j] = zpracovaný;
   for (k=0; k<st[j]; k++)
      if (vzdal[j]+w[j][k] < vzdal[sous[j][k]]) {
         pre[sous[j][k]] = j;
         vzdal[sous[j][k]] = vzdal[j]+w[j][k];
      }
```

Obsah
139. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Na konci zpracování budou v poli `vzdal[]` uloženy vzdálenosti od výchozího vrcholu do cílového vrcholu v (a do každého vrcholu grafu G, který je blíže než vrchol v). Tuto cestu budeme umět zrekonstruovat tak, jak bylo popsáno na straně 123.

Pozor, Dijstrův algoritmus pracuje správně jen pro kladně vážené grafy. Proč tomu tak je vysvětlíme na straně 143.

Všimněte si, že algoritmus pracuje vždy pouze s prvky polí, které odpovídají vrcholům v úschovně. To znamená, že jakmile je nějaký vrchol v zpracovaný, nebude se měnit ani odpovídající položka pole `vzdal[v]`, ani jeho předchůdce `vzdal[v]` na nejkratší cestě z výchozího vrcholu u.

Animovaná ukázka Dijkstrova algoritmu je na adrese http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/dijkstruv_algoritmus.pdf.

4.4.0.21. Složitost Algoritmu 4.3

Dijkstrův algoritmus 4.3 je sice složitější než Algoritmus 4.2, je však obvykle *výrazně rychlejší*. Jestliže hledáme nejkratší cestu z výchozího vrcholu u do nějakého vybraného vrcholu v, tak doba běhu závisí v podstatě pouze na volbě vrcholu v. Čím vzdálenější bude vrchol v od vrcholu u vzhledem k ostatním vrcholům, tím bude potřebný počet kroků větší. V nejhorším případě však bude počet kroků odpovídat počtu kroků pro nalezení nejkratší cesty do všech vrcholů. Celkový počet kroků Dijkstrova algoritmu potřebný k nalezení nejkratší cesty z výchozího vrcholu u do všech ostatních vrcholů (v případě, že za v zvolíme vrchol, který je od u nejvzdálenější) je úměrný zhruba n^2, kde n je počet vrcholů grafu. Proto složitost Dijkstrova algoritmu je $O(n^2)$.

Při vhodné implementaci úschovny nezpracovaných vrcholů (např. haldou, ve které používáme nalezenou vzdálenost jako vyhledávací klíč) lze dosáhnout i rychlejšího běhu tohoto algoritmu pro řídké grafy s malým počtem hran m. Potom je počet kroků algoritmu úměrný

počtu hran grafu a složitost Dijkstrova algoritmu je $O(m)$. Pro husté grafy je $O(m) = O(n^2)$ a je tedy stejná jako pro Algoritmus 4.1, který hledá vzdálenosti z jednoho pevně zvoleného výchozího vrcholu v neohodnocených grafech.

4.4.0.22. Modifikace Dijkstrova algoritmu

Jestliže vnější cyklus nebude řízen podmínkou `(stav[v] == iniciační)`, ale triviálně splněnou podmínkou, tak najde takto upravený algoritmus vzdálenost i nejkratší cesty z výchozího vrcholu u do všech ostatních vrcholů. Triviálně splněnou podmínkou máme na mysli nekonečný cyklus řízený podmínkou `while (1)`.

Pokud bychom chtěli Dijkstrův algoritmus použít pro nalezení nejkratších vzdáleností mezi všemi dvojicemi vrcholů, bude nutno jej spustit opakovaně – jednou pro každý vrchol zvolený jako výchozí. Složitost takového algoritmu je pak $O(n^3)$.

Rozmyslete si, že Algoritmus 4.3 lze použít i pro hledání nejkratších cest v *orientovaném* grafu. Pouze bude jinak vypadat struktura vstupních dat, ale žádné další úpravy samotného algoritmu nejsou potřeba.

Dále je snadné Dijkstrův algoritmus modifikovat i pro hledání *nejširší* cesty (například pro přepravu nadrozměrného nákladu) z výchozího vrcholu u do jiného vrcholu, případně do všech vrcholů daného grafu. Předpokládejme, že váha hran udává jejich šířku a je uložena v poli `w[][]` a že pole `vzdal[]` obsahuje šířky nejširších nalezených cest. Stačí nahradit část algoritmu

```
if (vzdal[j]+w[j][k] < vzdal[sous[j][k]]) {
     pre[sous[j][k]] = j;
     vzdal[sous[j][k]] = vzdal[j]+w[j][k];
}
```

Obsah
141. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

následujícími řádky

```
if (min(vzdal[j], w[j][k]) > vzdal[sous[j][k]]) {
     pre[sous[j][k]] = j;
     vzdal[sous[j][k]] = min(vzdal[j], w[j][k]);
}
```

Současně je přehlednější nahradit zprávu o ukončení běhu algoritmu `return NENI_CESTA` za `return KONEC`, protože algoritmus skončí, jakmile v úschovně nebude žádný nezpracovaný vrchol s konečnou vzdáleností od výchozího vrcholu.

4.4.0.23. Důkaz správnosti Dijkstrova algoritmu

Nyní ukážeme, že v kladně vážených grafech pracuje Dijkstrův algoritmus správně.

Věta 4.16. *Mějme kladně vážený graf G a v něm nějaké dva pevně zvolené vrcholy u a v. Algoritmus 4.3 najde nejkratší cestu z vrcholu u do vrcholu v.*

Důkaz. Klíčovým faktem je, že v každé iteraci obsahuje pole `vzdal[]` takové vzdálenosti (a nejkratší cesty) z vrcholu u do ostatních vrcholů, které vedou pouze přes již zpracované vrcholy. Pro přehlednost označme S množinu vrcholů, které jsou už zpracované do určité iterace Algoritmu 4.3. Ukážeme, že tento fakt se v průběhu algoritmu nezmění a proto po skončení algoritmu, kdy jsou zpracované všechny vrcholy dané komponenty, jsou všechny získané vzdálenosti (a cesty) nejkratší.

Důkaz provedeme matematickou indukcí vzhledem k počtu iterací.

Základ indukce: V první iteraci Algoritmu 4.3 vybereme vrchol j, který je v iniciačním stavu a má nejmenší hodnotu v poli `vzdal[j]`. Takový vrchol je jediný – a sice vrchol

$j = u$. Tento vrchol zpracujeme a upravíme vzdálenosti všem jeho sousedům podle vah hran, které je spojují s vrcholem j. Předpokládaný fakt je splněn triviálně, neboť na konci iterace je $S = \{u\}$ a získané vzdálenosti do všech vrcholů jsou nejmenší, jestliže bereme v úvahu pouze cesty vedoucí přes vrcholy množiny S.

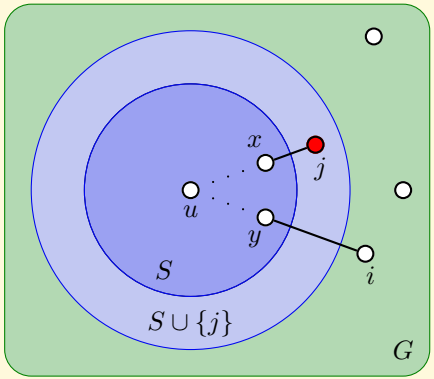
Indukční krok: V každé další iteraci vybereme ten vrchol j, který má ze všech nezpracovaných vrcholů nejkratší nalezenou vzdálenost od vrcholu u. To ale současně znamená, že vzdálenost (a cesta) do vrcholu j je nejkratší možná v celém grafu a že žádná kratší cesta už do vrcholu j nevede. Uvědomme si, že každá „oklika“ přes jiné nezpracované vrcholy i (vrcholy mimo množinu S) musí být delší díky výběru vrcholu j (Obrázek 4.5). Zde využíváme toho, že *žádná hrana v grafu nemá záporné ohodnocení*, protože jinak by přičtení takové záporné váhy k délce jiné cesty do vrcholu j mohlo znamenat kratší cestu než přes zpracované vrcholy v množině S. V iteraci algoritmu zbývá projít (a případně „vylepšit“) cesty do sousedů vrcholu j.

Na konci algoritmu zbývá sestavit nejkratší cestu z vrcholu u do vrcholu v. Je uložená v poli `pre[]`, můžeme ji „pozpátku“ od vrcholu v zrekonstruovat: předposlední vrchol před v je `pre[v]`, před předposlední vrchol je `pre[pre[v]]`, atd...

Podle principu matematické indukce je důkaz hotov. □

4.4.0.24. Poznámky k Dijkstrovu algoritmu

Všimněte si, že je-li nějaká hrana v daném grafu záporně ohodnocená, tak v důkazu nemůžeme použít tvrzení, že nejkratší cesty do vybraného vrcholu j vedou pouze přes zpracované vrcholy v množině S. V některých velmi speciálních případech by takový algoritmus mohl fungovat, ale výhodnější je použít jiné (třebaže poněkud složitější algoritmy), které umí najít nejkratší cesty i v grafech se zápornými ohodnoceními. Takový je například Bellman-Fordův



Obrázek 4.5 K důkazu správnosti Dijkstrova algoritmu.

algoritmus, avšak jeho popis přesahuje rámec tohoto textu.

Pěkná analogie mezi Algoritmem 4.1 a Dijkstrovým algoritmem je popsána v knize [1]. Autor ukazuje, jak odvodit Dijkstrův algoritmus z Algoritmu 4.1 pomocí velkého množství paralelně prozkoumávaných hran.

Pojmy k zapamatování

— Dijkstrův algoritmus

— modifikace Dijkstrova algoritmu

4.5. Test

Následuje jednoduchý test, pro nalezení správné odpovědi jedné otázky není potřeba více než půl minuty.

Zacátek testu **Vzdálenost a metrika v grafu**

1. Jaká je největší možná vzdálenost dvou vrcholů v grafu P_5?

2. Jaká je největší možná vzdálenost dvou vrcholů v grafu K_5?

3. Jaká je největší možná vzdálenost dvou vrcholů v grafu C_5?

4. Jaká je největší možná vzdálenost dvou vrcholů v grafu $K_{5,5}$?

5. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?

   (a) Vzdálenost vrcholů v grafu splňuje trojúhelníkovou nerovnost.
   (b) Vážená vzdálenost vrcholů v grafu splňuje trojúhelníkovou nerovnost.
   (c) Vzdálenost vrcholů z různých komponent není definována.
   (d) Vzdálenost vrcholů z různých komponent je ∞.
   (e) Existuje-li mezi vrcholy u a v cesta délky 1, je vzdálenost mezi vrcholy u a v rovna 1.
   (f) Existuje-li mezi vrcholy u a v cesta délky 4, je vzdálenost mezi vrcholy u a v rovna 4.
   (g) Existuje-li mezi vrcholy u a v sled délky 4, tak mezi vrcholy u a v existuje cesta délky 4.

6. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?

(a) Vzdálenost libovolných dvou vrcholů kompletního grafu je konečné číslo.
(b) Vzdálenost libovolných dvou vrcholů kompletního grafu je rovna 1.
(c) Vzdálenost libovolných dvou vrcholů kompletního grafu je rovna n.
(d) každé dva vrcholy kompletního bipartitního grafu $K_{m,n}$ jsou ve vzdálenosti 1.

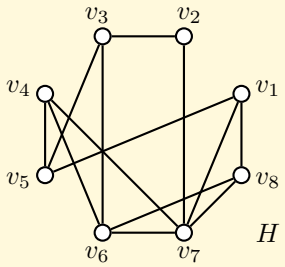
7. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?

(a) Vzdálenost mezi dvěma danými vrcholy v ohodnoceném grafu je vždy větší než v neohodnoceném grafu.
(b) Vzdálenost dvou vrcholů v nesouvislém ohodnoceném grafu není definována.
(c) Existuje graf a v něm takové dva vrcholy u a v, že mezi u a v vážená vzdálenost není definována a přitom vzdálenost je definována.
(d) Váženou vzdálenost je možno určit v libovolně ohodnoceném grafu.
(e) Váženou vzdálenost je možno určit v libovolně kladně ohodnoceném grafu.
(f) Váženou vzdálenost v ohodnoceném grafu určíme tak, že v neohodnoceném grafu najdeme nejkratší cesty a sečteme ohodnocení odpovídajících hran.

8. Mějme neohodnocený graf H na Obrázku 4.6. Jaká je vzdálenost vrcholů v_1 a v_2?

9. Mějme neohodnocený graf H na Obrázku 4.6. Jaká je vzdálenost vrcholů v_1 a v_3?

10. Mějme neohodnocený graf H na Obrázku 4.6. Jaká je vzdálenost vrcholů v_4 a v_6?



Obrázek 4.6 Neohodnocený graf H.

11. Mějme ohodnocený graf G na Obrázku 4.7. Jaká je vzdálenost vrcholů u a v?

12. Mějme ohodnocený graf G na Obrázku 4.7. Jaká je vzdálenost vrcholů u a y?

13. Mějme ohodnocený graf G na Obrázku 4.7. Jaká je vzdálenost vrcholů x a z?

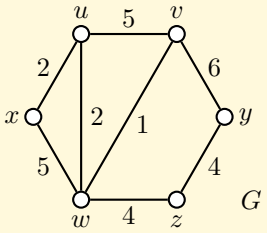
14. Mějme ohodnocený graf G na Obrázku 4.7. Jaká je vzdálenost vrcholů x a w?

15. Kolik nejvíce může mít vrcholů graf, jehož největší možná vzdálenost mezi libovolnými dvěma vrcholy je 1?

(a) 1 vrchol. (b) 2 vrcholy.
(c) 5 vrcholů. (d) Počet vrcholů není omezen.

16. Kolik nejvíce může mít vrcholů graf, jehož největší možná vzdálenost mezi libovolnými

Obsah
147. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obrázek 4.7 Ohodnocený graf G.

dvěma vrcholy je 2?

(a) 1 vrchol.
(b) 2 vrcholy.
(c) 5 vrcholů.
(d) Počet vrcholů není omezen.

Konec testu | Oprava testu

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:

Obsah
148. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Kapitola 5

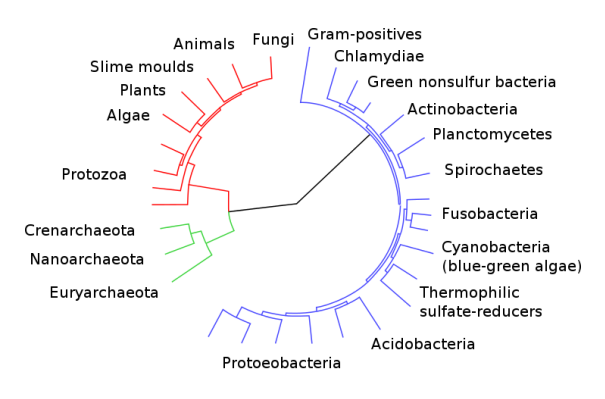
Stromy

Průvodce studiem

Jedním z nejběžnějších útvarů v přírodě i v matematice jsou „stromy“, tj. objekty se „stromovou strukturou“. Existuje celá řada motivací, které můžeme popsat „stromem“: rodokmeny, evoluční strom, elektrické rozvodné sítě, hierarchické struktury se vztahem nadřazený a podřízený, popis větvení při vyhledávání a pod. Všechny tyto struktury mají jednu věc společnou – neobsahují „cykly“.

V evolučním stromu cykly nenajdeme, cyklus v rozvodné síti může znamenat krátké spojení a cyklus v rodokmenu zavání incestem. Ukážeme několik základních tvrzení týkající se grafů, kterým budeme říkat stromy. Zavedeme pojem centra stromu a ukážeme, jak centrum vypadá a že centrum stromu je určeno jednoznačně.

V sekci 1.5 jsme zmínili, že je obtížné rozpoznat, zda dva obecné grafy jsou isomorfní. V sekci 5.3 ukážeme, že ve speciálním případě, kdy máme dva stromy, je poměrně snadné



Obrázek 5.1 Zjednodušený evoluční strom a rodokmen.

rozpoznat, zda jsou isomorfní.

V poslední části kapitoly zavedeme důležitý pojem kostry grafu a uvedeme několik algoritmů pro hledání kostry obecného grafu. Na závěr zmíníme jednu nečekanou a pěknou aplikaci algoritmů pro hledání minimální kostry.

5.1. Základní vlastnosti stromů

Cíle

Po prostudování této sekce budete schopni:

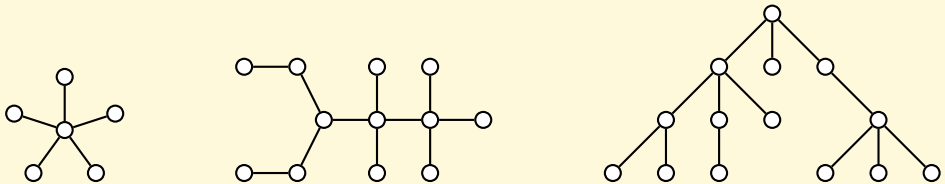
- popsat základní vlastnosti stromu,

Obsah
150. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

- rozpoznat strukturu stromu v praktické úloze,
- popsat kostru grafu a její význam.

Řekneme, že graf neobsahuje cyklus (kružnici), jestliže žádný jeho podgraf není cyklem. Jedním slovem se takovému grafu říká *acyklický* graf.

Definice 5.1. *Strom* je souvislý graf, který neobsahuje cyklus. *Les* je graf, jehož komponenty jsou stromy.



Obrázek 5.2 Příklady stromů.

Na Obrázku 5.2 jsou tři příklady grafů, kterým říkáme stromy. Tyto grafy tvoří dohromady jediný graf, který je lesem.

Poznámka 5.2 (O názvosloví). Obvykle je lepší definovat nejprve obecnější strukturu a potom specifikovat její další vlastnosti a popsat speciální případy. Bylo by tak přehlednější definovat *les* jako jednoduchý graf, který neobsahuje cyklus a *strom* jako souvislý les. Taková definice stromu však zní přinejmenším „podivně.“

V každém stromu, který obsahuje alespoň dva vrcholy, budeme rozlišovat, zda vrchol je stupně 1 nebo většího. Vrcholům stupně 1 budeme říkat *list* (tento název opět pěkně

koresponduje s analogií k opravdovým stromům). Ostatním vrcholům budeme říkat *nelistové vrcholy*. Listy budou často hrát roli při různých konstrukcích, popisech algoritmů nebo v důkazech. Nejprve ukážeme, že list najdeme v každém stromu s výjimkou triviálního grafu (který je také stromem).

Lemma 5.3. *Každý strom s více než jedním vrcholem má vždy alespoň jeden list.*

Důkaz. Mějme nějaký strom T a v něm vybereme libovolný vrchol v. Protože T je souvislý graf s více než jedním vrcholem, tak nemůže mít vrchol v stupeň 0 – takový graf by nebyl souvislý.

Ve stromu T sestrojíme co nejdelší tah S, který začíná ve vrcholu v. Tah S začneme libovolnou hranou vycházející z vrcholu v (už víme, že taková hrana existuje). Nyní v každém dalším vrcholu u sestavovaného tahu S rozlišíme:

- buď má vrchol u stupeň alespoň 2; potom prodloužíme tah S o další hranu do nového vrcholu (který nyní označíme u) a postup opakujeme,
- nebo je vrchol u stupně 1 a zároveň je hledaným listem.

Všimněte si, že pokud by se při konstrukci tahu S mohl některý vrchol stromu T zopakovat, tak by tah S obsahoval nějaký cyklus. Tento cyklus by byl současně podgrafem stromu T, což odporuje definici stromu! Protože strom T je konečný, tak popsaná konstrukce tahu S musí skončit v hledaném listu. □

Uvedený důkaz je konstruktivní, ukazuje, jak v grafu list najít. Pokud známe nejen strukturu grafu, ale i stupně vrcholů, je samozřejmě nalezení listu ještě jednodušší.

Všimněte si, že strom s jediným vrcholem je z nějakého úhlu pohledu výjimečný – neobsahuje list. Říká se mu *triviální strom*. Řada tvrzení (nejen Lemma 5.3) platí pro všechny

stromy s výjimkou triviálního stromu a proto někteří autoři triviální strom za strom nepovažují. Mějte to na paměti při studiu odborné literatury.

Není těžké ukázat, že v každém netriviálním stromu existují vždy alespoň dva vrcholy stupně 1. Navíc se dá ukázat, že je-li ve stromu T nějaký vrchol stupně k, tak v T najdeme alespoň k listů. A dokonce se dá spočítat, kolik listů je v daném stromu, jestliže známe stupně všech nelistových vrcholů (Příklad 5.9). My však v dalším textu budeme pracovat s „alespoň jedním“ listem, proto vystačíme s tvrzením tak, jak bylo zformulováno (a dokázáno) v Lemmatu 5.3.

Nyní ukážeme, že počet hran stromu s daným počtem vrcholů je určen jednoznačně. Tvrzení můžeme interpretovat tak, že každý strom na daném počtu vrcholů má stejný počet hran.

Věta 5.4. *Strom s n vrcholy má právě $n-1$ hran.*

Důkaz. Tvrzení ukážeme indukcí podle počtu vrcholů.
Základ indukce: Triviální strom s jedním vrcholem má $n-1=0$ hran a proto pro triviální strom tvrzení platí.
Indukční krok: Mějme netriviální strom T s n vrcholy (tj. $n>1$). Předpokládejme, že pro každý strom s méně než n vrcholy tvrzení platí, tedy že takový strom má o jednu hranu méně než vrcholů.

Nyní využijeme Lemma 5.3, podle kterého má strom T alespoň jeden list v (vrchol stupně 1).

Označme $T' = T - v$ graf, který vznikne ze stromu T odebráním vrcholu v (tzv. „oholením“). Odebráním listu neporušíme souvislost grafu, neboť žádná cesta mezi dvěma vrcholy různými od v nemůže vést přes vrchol v stupně 1. Proto je graf T' souvislý.

Dále odebráním hrany nemůže vzniknout cyklus a proto je graf T' také bez cyklů. To znamená, že T' je strom s $n-1$ vrcholy a podle indukčního předpokladu má o jednu hranu méně než vrcholů. Strom T' má tedy $(n-1)-1$ hran a původní strom T má o jeden vrchol a jednu hranu více, tj. strom T' má $(n-1)-1+1 = n-1$ hran.

Podle principu matematické indukce je tvrzení dokázáno. □

Příklad 5.5. V databázi je 12 záznamů (objektů) a 34 vazeb mezi nimi. Chtěli bychom strukturu databáze přehledně znázornit grafem, ve kterém jsou objekty znázorněny jako vrcholy a vazby mezi nimi jsou zakresleny jako hrany. a) Bude takový graf stromem? b) Můžeme tvrdit, že takový výsledný graf bude souvislý?

Řešení. a) Výsledný graf jistě nebude stromem, ale musí obsahovat cykly, protože strom s 12 vrcholy by musel mít právě 11 hran (vazeb).

A dokonce ani kdyby vazeb bylo 11, nemohli bychom tvrdit, že výsledný graf bude strom, neboť záleží na struktuře dat. Výsledný graf by mohl obsahovat cykly; v takovém případě se však dá ukázat, že by nebyl souvislý.

b) Výsledný graf může, ale nemusí být souvislý. Výsledek velmi závisí na struktuře dat. Výsledný graf by mohl například obsahovat jednu komponentu s 9 vrcholy a 3 izolované vrcholy, neboť kompletní graf K_9 obsahuje $\binom{9}{2} = 36$ hran a my z něj můžeme vynechat 2 libovolné hrany.

Dokonce ani graf s 12 vrcholy a 55 hranami nemusí být souvislý, neboť graf se dvěma komponentami K_1 a K_{11} má právě 12 vrcholů a 55 hran. Pokud by však daný graf měl 12 vrcholů a více než 55 hran, musí už být souvislý. Vskutku, graf K_{12} má 66 hran a je hranově 11-souvislý a proto vynecháním libovolných méně než $66-55 = 11$ hran zůstane výsledný graf souvislý.

▲

Protože strom je souvislý graf, tak podle definice víme, že mezi každými dvěma vrcholy stromu najdeme alespoň jednu cestu. Nyní ukážeme silnější tvrzení, že mezi každou dvojicí vrcholů existuje ve stromu vždy *jediná* cesta.

Věta 5.6. *Mezi každými dvěma vrcholy stromu existuje právě jedna cesta.*

Důkaz. Tvrzení dokážeme sporem. Budeme vycházet ze současné platnosti předpokladu věty (T je strom) a negace tvrzení (mezi některými vrcholy stromu T neexistuje žádná nebo existuje více než jedna cesta) a dojdeme ke sporu.

Podle definice stromu je T souvislý graf, a proto víme, že mezi každými dvěma vrcholy u, v stromu T vede nějaká cesta. Pro spor tedy předpokládáme, že takových cest existuje více. Mějme nějaké dvě různé cesty mezi vrcholy u, v. Sjednocení těchto cest je uzavřený sled ve stromu T, ze kterého po vynechání případných opakujících se hran a vrcholů vznikne cyklus. Tento cyklus je podgrafem ve stromu T, což je spor s předpokladem, že T je strom a neobsahuje cyklus.

Vidíme, že negace tvrzení vede ke sporu (sporem myslíme situaci, kdy jsme ukázali, že strom T současně obsahuje i neobsahuje cyklus) a proto platí, že mezi vrcholy u a v existuje ve stromu právě jedna cesta. □

Poznámka 5.7. Tvrzení Věty 5.6 bychom mohli ukázat i nepřímo tak, že dokážeme obměnu věty. Vyjdeme z negace tvrzení (mezi některými vrcholy stromu T neexistuje žádná nebo existuje více než jedna cesta) a odvodíme negaci předpokladu věty (daný graf není strom).

Podle Věty 5.4 víme, že strom s n vrcholy má právě $n-1$ hran. Přidáním nějaké hrany do stromu souvislost neporušíme, ale výsledný graf už není stromem (má více než $n-1$ hran) a proto musí obsahovat nějaký cyklus. Z Věty 5.6 snadno ukážeme, že takový cyklus bude jediný.

Důsledek 5.8. *Přidáním jedné (nové) hrany do stromu vznikne graf s právě jedním cyklem.*

Důkaz. Mějme strom T a nějaké dva jeho vrcholy u, v, mezi kterými není hrana. Přidáním hrany uv vznikne právě jeden cyklus spojením uv a jediné cesty mezi vrcholy u, v v T (jediné podle Věty 5.6). □

Pozor, po přidání dvou hran do stromu počet cyklů výsledného grafu závisí na tom, kam hrany přidáme. Počet cyklů už není (na rozdíl od případu popsaného v Důsledku 5.8) určen jednoznačně. Výsledný graf může obsahovat dva nebo tři cykly.

Kontrolní otázky

1. Jak se jmenuje strom, který má n vrcholů a mezi nimi právě dva listy?
2. Kolik musíme z grafu K_n vynechat hran, abychom dostali strom?

Příklad 5.9. Ukažte, že známe-li stupně $\deg(v_1), \deg(v_2), \ldots, \deg(v_k)$ všech nelistových vrcholů v nějakém stromu T, umíme také určit počet listů ve stromu T.

Řešení. Podle Věty 5.4 víme, že každý strom T s n vrcholy má $n-1$ hran. Nevíme sice kolik je listů (neznáme počet $n-k$), ale víme, že každý list je stupně 1.

Dále víme podle Principu sudosti (Věta 1.15), že součet stupňů vrcholů je roven dvojnásobku počtu hran. Dostáváme tak následující rovnost.

$$\begin{aligned} 2(n-1) &= \sum_{i=1}^{k} \deg(v_i) + (n-k)\cdot 1 \\ 2n-2 &= \sum_{i=1}^{k} \deg(v_i) + n - k \\ n &= 2 - k + \sum_{i=1}^{k} \deg(v_i) \end{aligned}$$

Hledaný počet listů $n-k$ je proto

$$n-k = 2-2k+\sum_{i=1}^{k}\deg(v_i) = 2+\sum_{i=1}^{k}(\deg(v_i)-2)\,.$$

Například strom, který má čtyři nelistové vrcholy stupně 3 má $2+4(3-2)=6$ listů a celkem 10 vrcholů. ▲

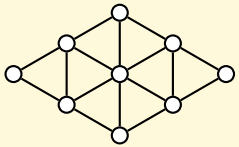
Máme dán nějaký souvislý graf G. Při určování stupně hranové souvislosti jsme se ptali, kolik *nejméně* stačí z grafu odstranit hran, aby se graf G stal nesouvislý.

Má však také smysl se ptát, kolik *nejvíce* hran můžeme z grafu G odstranit, aby G zůstal souvislý, nebo naopak kolik *nejméně* hran musí v grafu G zůstat, aby byl ještě souvislý. Jsou to právě stromy, které jsou souvislé grafy, ale už z nich nemůžeme odebrat žádnou hranu, aniž by se porušila souvislost. To ukazuje následující věta.

Věta 5.10. *Strom je* minimální souvislý *graf (s daným počtem vrcholů).*

Důkaz. Strom je podle definice souvislý graf. Pokud souvislý graf obsahuje cyklus, zůstane souvislý i po vynechání některé hrany cyklu. Proto je minimální souvislý graf stromem.

Naopak, pokud by vynecháním nějaké hrany uv z daného stromu T vznikl souvislý graf, pak by mezi vrcholy u, v ve stromu T existovaly alespoň dvě různé cesty: cesta z vrcholu u do vrcholu v ve stromu $T \setminus uv$ i samotná hrana uv. To však podle Věty 5.6 není možné. Proto je strom minimálním souvislým grafem na daných vrcholech. □



Obrázek 5.3 Graf G.

Příklad 5.11. Kolik nejvíce hran můžeme odstranit z grafu G na Obrázku 5.3, aby výsledný graf zůstal souvislý?

Řešení. Podle Věty 5.10 víme, že výsledný graf po odebírání hran bude stromem. Protože graf G má 9 vrcholů a 16 hran, tak podle Věty 5.4 víme, že můžeme odstranit až 8 hran.

Z grafu na Obrázku 5.3 můžeme dokonce odstranit takových 8 hran, že odstraněné hrany tvoří spolu s vrcholy grafu G souvislý faktor a současně ponechané hrany tvoří souvislý faktor. Najdete takových 8 hran? ▲

Pojmy k zapamatování

— strom a les
— list
— počet hran stromu

5.2. Kořenové stromy

Průvodce studiem

V této sekci zavedeme několik pojmů, které využijeme v další části při zkoumání isomorfismu stromů. Zavedeme pojem kořenového stromu a uspořádaného kořenového stromu. Nadefinujeme centrum stromu a na příkladech ukážeme, jak centrum stromu najít. Na závěr zmíníme obecnější pojem – centrum grafu.

Cíle

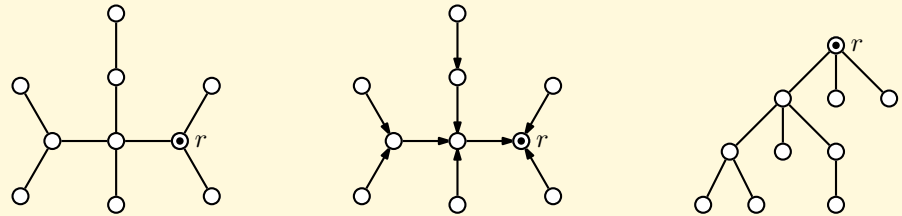
Po prostudování této sekce budete schopni:

- najít centrum stromu,
- vysvětlit rozdíl mezi stromem a kořenovým stromem,
- vysvětlit rozdíl mezi kořenovým stromem a uspořádaným kořenovým stromem.

Při práci se strukturou typu strom, je někdy užitečné označit význačný vrchol, tzv. *kořen*. Kořen může představovat jakýsi „začátek“ uložených dat, nebo hlavní prvek v nějaké hierarchické struktuře objektů. Kořenové stromy mají motivaci v rodokmenech, ze kterých převzaly i terminologii.

Definice 5.12. *Kořenovým stromem* je strom T spolu s vyznačeným *kořenem* $r \in V(T)$. Kořenový strom zapisujeme jako dvojicí (T, r), případně říkáme pouze strom T s kořenem r.

Neměli bychom zaměňovat pojmy „strom“ a „kořenový strom“, protože kořenový strom obsahuje další informaci – víme, který vrchol je kořenem.



Obrázek 5.4 Různá nakreslení téhož kořenového stromu T s vyznačeným kořenem r.

Na Obrázku 5.4 máme tři různá nakreslení téhož kořenového stromu (T, r). Vlevo na obrázku je nejjednodušší nakreslení – máme strom T a jeho kořen r je označený pro přehlednost puntíkem. Uvědomte si, že zvolením kořene v libovolném stromu umíme jednoznačně přiřadit orientaci každé hraně, například od listů ke kořeni. V některých knihách upřednostňují opačnou orientaci, obvykle závisí na interpretaci úlohy, která je grafem modelována. Orientace hran je znázorněna na Obrázku 5.4 uprostřed. V nakreslení však tuto orientaci nemusíme uvádět, protože orientaci snadno určíme.

Pro přehlednost se kořenové stromy často zakreslují tak, aby kořen byl v nakreslení výš než ostatní vrcholy. Další vrcholy kreslíme do různých úrovní níž a níž podle jejich vzdálenosti od kořene. V tomto nakreslení se orientace hran určí ještě jednodušeji – jsou orientovány vždy „nahoru.“ Příklad takového nakreslení je na Obrázku 5.4 vpravo. V tomto

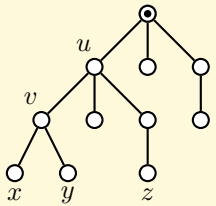
nakreslení je navíc jednoznačně určen kořen i bez jeho označení – jedná se o vrchol, který je v obrázku nejvýše.

V dalším textu budeme kořenové stromy zakreslovat právě tak, aby kořen byl nahoře a další vrcholy budou zakresleny pod ním. Upozorníme ještě, že v některých knihách se kořenové stromy zakreslují „naopak“, s kořenem dole, což může někdy lépe odpovídat problému, který je stromem modelován.

5.2.0.25. Rodiče a potomci

V kořenovém stromu můžeme pro dvojici sousedních vrcholů jednoznačně určit „příbuzenský vztah,“ což usnadňuje slovní formulace. Nejprve zavedeme následující pojmy.

Definice 5.13. Mějme kořenový strom (T, r) a v něm dvojici vrcholů u, v, kde vrchol u je sousední s vrcholem v na cestě z vrcholu v ke kořenu r. Pak u nazýváme *rodičem* vrcholu v a v nazýváme *potomkem* vrcholu u.



Obrázek 5.5 Kořenový strom T s rodiči a potomky.

Na Obrázku 5.5 máme vyznačený vrchol u, který je rodičem vrcholu v a vrchol v je

Obsah
161. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

potomkem rodiče u. Naproti tomu vrchol v je rodičem vrcholů x a y, přičemž vrcholy x a y jsou jeho potomci.

Někdy je šikovné popisovat jiné vztahy mezi vrcholy i když nemáme zavedenu formální definici. Je zřejmé, co máme na mysli, když například řekneme, že na Obrázku 5.5 „vrcholy x a y jsou sourozenci“, nebo „vrchol u je prarodičem vrcholu x.

Všimněte si, že jinou volbou kořene se může vzájemný vztah vrcholů změnit. Pokud bychom ve stromu T na Obrázku 5.5 zvolili za kořen vrchol x, tak najednou bude vrchol v rodičem vrcholu u a naopak u bude potomkem v. Pokud bychom však za kořen zvolili vrchol z, tak vztah mezi vrcholem u a v zůstane stejný jako na Obrázku 5.5.

V kořenových stromech se místo „list“ často používá termín *koncový vrchol*. Kořen může být listem, avšak v tomto případě preferujeme název *kořen* a neříkáme mu koncový vrchol. V kořenovém stromu koncové vrcholy nemají potomky a nejsou kořenem. Například v grafu na Obrázku 5.5 je šest koncových vrcholů.

5.2.0.26. Centrum stromu

V další části bude pro kořen stromu hrát důležitou roli tzv. *centrum* stromu. Centrem stromu nazveme vrchol případně hranu spojující dvojici vrcholů, které získáme postupným odstraňováním listů. Procesu, kdy ve stromu označíme všechny jeho listy a potom je odstraníme, se říká *oholení stromu*.

Definice 5.14. *Centrem stromu* T rozumíme vrchol nebo hranu v daném stromu T, které určíme následujícím postupem:

1. Jestliže má strom T jediný vrchol v, je v centrum stromu T. Pokud má strom T dva vrcholy, je centrem stromu T hrana spojující tyto dva vrcholy.
2. Jinak vytvoříme (menší) strom $T' \subset T$ vynecháním všech listů stromu T (oholením) a vracíme se na předchozí bod 1.

Rekurzivním postupem získané centrum stromu T' bude zároveň centrem stromu T.

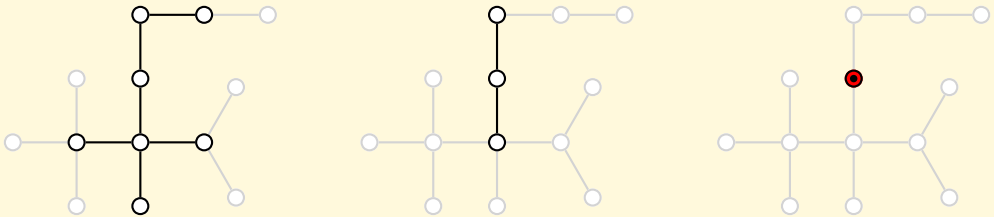
Je zřejmé, že strom T', který vznikne ze stromu T je menší než strom T, protože v každém netriviálním stromu budeme podle Lemmatu 5.3 holit alespoň jeden list. Také si snadno rozmyslíme, že oholením v kroku 2) vznikne neprázdný strom, neboť netriviální strom, jehož každý vrchol je listem, je pouze strom na dvou vrcholech, jehož centrem je podle kroku 1) jediná jeho hrana.

Obrázek 5.6 Stromy T_1 a T_2.

Příklad 5.15. Najděte centrum stromu T_1 na Obrázku 5.6 vlevo.

Obsah
163. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Řešení. Ve stromu T_1 najdeme všechny listy (je jich šest) a odstraníme je (Obrázek 5.7 vlevo). Na obrázku jsou listy i hrany s nimi incidentní pro názornost ponechány, jsou však obarveny šedou barvou. Protože výsledný strom má více než dva vrcholy, celý postup zopakujeme. Na Obrázku 5.7 uprostřed jsme odebrali další čtyři listy výsledného menšího stromu. Protože výsledný strom má opět více než dva vrcholy, celý postup znovu zopakujeme. Dostaneme strom s jediným vrcholem , který podle Definice 5.14 je centrem stromu T_1 (Obrázek 5.7 vpravo), označíme jej červeně.

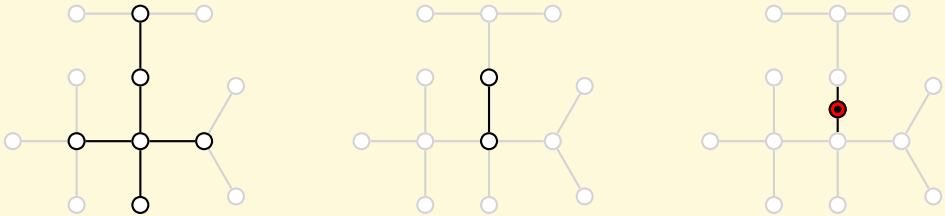


Obrázek 5.7 Hledání centra stromu T_1.

▲

Příklad 5.16. Najděte centrum stromu T_1 na Obrázku 5.6 vpravo.

Řešení. Ve stromu T_2 najdeme všechny listy (je jich sedm) a odstraníme je (Obrázek 5.8 vlevo). Opět jsou listy i hrany s nimi incidentní obarveny šedou barvou. Protože výsledný strom má více než dva vrcholy, celý postup zopakujeme. Na Obrázku 5.8 uprostřed jsme odebrali další čtyři listy výsledného menšího stromu. Výsledný strom má jen dva vrcholy. Proto podle Definice 5.14 je hrana, která je spojuje, centrem stromu T_2. Centrum jsme na Obrázku 5.8 vpravo označili jako nový vrchol na této hraně.



Obrázek 5.8 Hledání centra stromu T_2.

▲

V Příkladu 5.16 jsme na hranu centra přidali nový vrchol. Výsledný graf má o jeden vrchol více, než měl původní strom T, přesto budeme pro jednoduchost nazývat tento vrchol „centrem stromu T“, ačkoliv se jedná o jiný strom než T.

Je zajímavé si rozmyslet, proč vrcholy centra stromu jsou „uprostřed stromu“, tj. žádný jiný vrchol stromu nemá tak malou maximální vzdálenost od ostatních vrcholů, jako má vrchol centra (je-li jediný) nebo koncové vrcholy centra (je-li centrem hrana).

Všimněte si, že kořen stromu obecně *nemusí* ležet v centru. My však často budeme za kořen volit právě centrum stromu. V následující sekci budou určení centra a umístění kořene do centra základní kroky algoritmu, který bude rozhodovat o isomorfismu daných stromů.

5.2.0.27. Kořen a centrum stromu

Budeme-li chtít nějakému stromu přiřadit kořen *jednoznačně*, je nejlepší jej přiřadit *centru* stromu (protože centrum je určeno jednoznačně). V případě, že centrem stromu je hrana uv,

„přidáme“ na tuto hranu nový vrchol a zvolíme jej kořenem. Přesněji z daného stromu T odstraníme hranu uv, přidáme kořen r a přidáme dvě hrany ur, vr. Získáme strom T'. Snadno nahlédneme, že nově přidaný vrchol r je centrem stromu T'.

5.2.0.28. Pěstované stromy

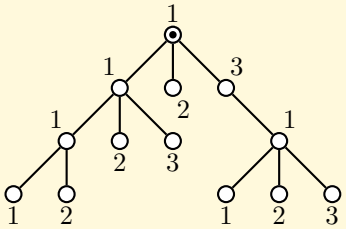
Další informací vázanou ke kořenovým stromům je uspořádání potomků každého vrcholu (jako seřazení potomků jedné generace v rodokmenech podle data jejich narození).

Definice 5.17. Kořenový strom T, r je *uspořádaný*, jestliže pro každý jeho vrchol je jednoznačně dáno pořadí jeho potomků („zleva doprava“). Uspořádaný kořenový strom se také nazývá *pěstovaný strom*.

Formálně můžeme pěstovaný strom popsat jako trojici (T, r, f), kde T je nějaký strom a r jeho kořen. Funkce $f : V(T) \to \mathbb{N}$ přiřadí každému vrcholu jeho pořadí mezi sourozenci. Má-li tedy vrchol k potomků, budou těmto potomkům přiřazena čísla $1, 2, \ldots, k$. Jestliže nějaký vrchol nemá sourozence (například kořen), můžeme mu přiřadit libovolné přirozené číslo, třeba číslo 1.

5.2.0.29. Centrum grafu

V Definici 5.14 jsme zavedli centrum stromu. Má smysl definovat také centrum souvislého grafu, avšak pro určení centra obecného grafu nevystačíme s Definicí 5.14. Obsahuje-li graf cyklus, tak holením neodstraníme žádný vrchol cyklu, protože každý vrchol cyklu je stupně alespoň 2 a není listem.



Obrázek 5.9 Pěstovaný strom.

Pro zájemce

Abychom mohli popsat centrum obecného grafu, musíme nejprve zavést několik pojmů. *Excentricita vrcholu* je číslo, které pro každý vrchol udává největší vzdálenost, kterou z daného vrcholu najdeme. Předpokládejme, že máme sestavenou metriku (Definice 4.9) a uloženou do dvourozměrného pole `d[][]`. Excentricitu vrcholu u určíme tak, že v řádku pole `d[][]`, který odpovídá vrcholu u, vybereme největší číslo. Jestliže je graf nesouvislý, je excentricita každého vrcholu ∞.

Na straně 36 jsme definovali indukovaný podgraf na dané množině vrcholů.

Centrum obecného grafu je definováno jako podgraf indukovaný na množině vrcholů s nejmenší excentricitou. Dá se ukázat, že vezmeme-li strom, tak takto definované centrum grafu a centrum stromu, které získáme podle Definice 5.14, jsou totožné.

Pojmy k zapamatování

— kořenový strom

— kořen, rodič a potomek

— centrum stromu

Obsah
167. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

— uspořádaný kořenový (pěstovaný) strom

5.3. Isomorfismus stromů

Průvodce studiem

Centrum stromu i jednoznačné pořadí potomků kořenového stromu jsme zavedli, abychom mohli popsat algoritmus rozpoznávání isomorfních stromů. V této sekci ukážeme, jak každému stromu přiřadit jednoznačně kód a potom porovnáním kódů poznáme, které stromy jsou isomorfní a které ne.

Cíle

Po prostudování této sekce budete schopni:

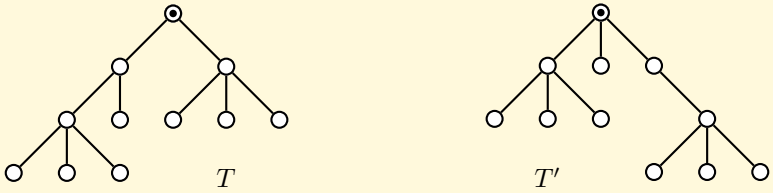
- každému pěstovanému stromu (uspořádanému kořenovému stromu) přiřadit jeho kód,
- každému stromu přiřadit jednoznačně jeho kód,
- rozhodnout o isomorfismu daných stromů.

Pojem *isomorfismus stromů* je speciálním případem isomorfismu grafů. Dva stromy jsou isomorfní, pokud jsou isomorfní jako grafy.

Připomeňme, že pro úlohu rozhodnout, zda dva grafy jsou isomorfní, není znám žádný rychlý algoritmus (s polynomiální složitostí). Stromy jsou natolik speciální třída grafů, že pro ně takový algoritmus existuje! Nyní si jej ukážeme. Nejprve zavedeme několik pojmů.

Definice 5.18. Dva kořenové stromy (T, r) a (T', r') jsou *isomorfní* pokud existuje isomorfismus mezi stromy T a T', který zobrazí kořen r na kořen r'.

Na Obrázku 5.10 jsou dva stromy, které jsou isomorfní (zkuste isomorfismus najít), avšak jistě nejsou isomorfní jako kořenové stromy, neboť kořen stromu T je stupně 2, zatímco kořen stromu T' je stupně 3.



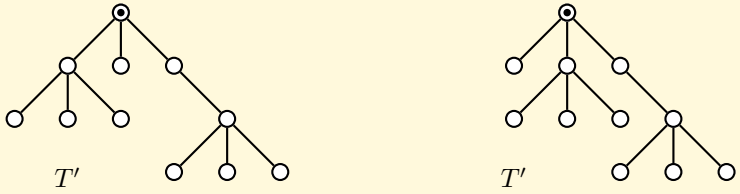
Obrázek 5.10 Isomorfní stromy, které nejsou isomorfní jako kořenové stromy.

Protože v algoritmu rozpoznávání stromů budeme pracovat s uspořádanými kořenovými stromy, bude důležité poznat, zda isomorfismus zachová také pořadí potomků. Proto zavedeme také pojem „isomorfismus pěstovaných stromů“.

Definice 5.19. Dva uspořádané kořenové stromy (pěstované stromy) jsou isomorfní, jestliže pro ně existuje isomorfismus kořenových stromů, který navíc zachová pořadí potomků každého vrcholu.

Stromy na Obrázku 5.10 nejsou isomorfní jako kořenové stromy a proto nejsou isomorfní ani jako uspořádané kořenové stromy. Na Obrázku 5.11 jsou dva stromy, které jsou isomorfní jako kořenové stromy, ale jistě nejsou isomorfní jako uspořádané kořenové stromy, neboť se liší pořadí potomků kořene.

Obsah
169. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obrázek 5.11 Isomorfní kořenové stromy, které nejsou isomorfní jako uspořádané kořenové stromy.

5.3.0.30. Kódování uspořádaných kořenových stromů

Ukážeme, že každému uspořádanému kořenovému stromu lze snadným postupem přiřadit řetězec, který jej jednoznačně popisuje. Při popisu řetězce vystačíme se dvěma symboly, třeba 0 a 1 a proto se kódu někdy říká „binární kód stromu“.

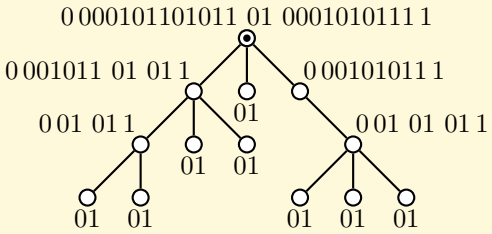
Všimněte si, že odebráním nějakého vrcholu u z netriviálního stromu T vznikne les (graf bez cyklů). Tento les označíme $T - u$. Pokud odebraný vrchol byl listem stromu T, vznikne strom $T - u$. *Podstromem vrcholu* u daného kořenového stromu (T, r) rozumíme každou komponentu grafu $T - u$, přičemž tato komponenta obsahuje některého potomka x vrcholu u. Snadno si rozmyslíme, že každý podstrom vrcholu u je opět stromem, dokonce kořenovým stromem s kořenem x.

Definice 5.20. *Kód* uspořádaného kořenového stromu se sestaví rekurzivně z kódů všech podstromů kořene, seřazených ve stejném pořadí jako jsou seřazeny kořeny podstromů (jeho potomci), a uzavřených do páru 0 a 1 (viz Obrázek 5.12).

Všimněte si, že podle definice je kód koncového vrcholu roven „01“, neboť koncový

vrchol nemá potomky (řetězec kódů podstromů je prázdný), pouze obsahuje pár symbolů 0 a 1.

Na Obrázku 5.12 jsme sestavili kód uspořádaného kořenového stromu. Nejprve jsme přiřadili kód „01“ koncovým vrcholům. Potom jsme přiřadili kódy jejich rodičům, potom prarodičům, atd. Jako poslední sestavíme kód kořene a jeho kód nazveme kódem celého uspořádaného kořenového stromu.



Obrázek 5.12 Kódování uspořádaného kořenového (pěstovaného) stromu.

Poznámka 5.21. Místo „0“ a „1“ lze použít i jiné symboly, třeba „(“ a „)“ nebo „A“ a „B“.

5.3.0.31. Uspořádaný kořenový strom daný kódem

Ukázali jsme, jak každému stromu přiřadit kód. Nyní ukážeme opačný postup, jak sestavit nebo nakreslit uspořádaný kořenový strom, když máme dán jeho kód.

Lemma 5.22. *Máme dán kód S uspořádaného kořenového stromu. Příslušný strom nakreslíme následujícím postupem:*

Obsah
171. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

- *při přečtení prvního znaku „0“ na začátku položíme pero na papír a nakreslíme kořen,*
- *při každém dalším přečtení znaku „0“ nakreslíme hranu a nového následujícího potomka x současného vrcholu a přesuneme se do x,*
- *při každém přečtení znaku „1“ se vrátíme do rodiče současného vrcholu, případně ukončíme kreslení a zvedneme pero, pokud jsme v kořenu.*

Podobně, pokud bychom chtěli sestavit strom určený kódem S, snadno podle postupu v Lemmatu 5.22 najdeme množinu vrcholů i množinu hran takového stromu.

Všimněte si, že podle definice bude kód uspořádaného kořenového stromu obsahovat vždy stejný počet nul jako jedniček a sice tolik nul, kolik je vrcholů daného stromu. Máme-li nějaký strom (ne kořenový strom!) s alespoň třemi vrcholy, tak vždy můžeme zvolit kořen několika různými způsoby a často můžeme různě seřadit potomky vrcholů. To znamená, že dva isomorfní stromy mohou mít různé kódy. Dokonce dva stromy, které jsou isomorfní jako kořenové stromy, mohou mít různé kódy. Avšak dva stromy, které jsou isomorfní jako uspořádané kořenové stromy, budou mít vždy stejný kód. Toto pozorování shrneme do následující věty, jejíž důkaz nebudeme uvádět.

Věta 5.23. *Dva uspořádané kořenové (pěstované) stromy jsou isomorfní právě tehdy, když jejich kódy získané podle Lemmatu 5.22 jsou shodné řetězce.*

Uvědomte si, že ne každá posloupnost 0 a 1 je kódem nějakého uspořádaného kořenového stromu. Je-li například počet jedniček a nul různý, nebo pokud posloupnost začíná jedničkou, tak se jistě nejedná o platný kód. Na druhou stranu každá posloupnost stejného počtu jedniček a nul, kde každý počáteční úsek obsahuje *méně* jedniček než nul, je platný kód

nějakého uspořádaného kořenového stromu. Stejný počet jedniček a nul obsahuje teprve *celý* kód.

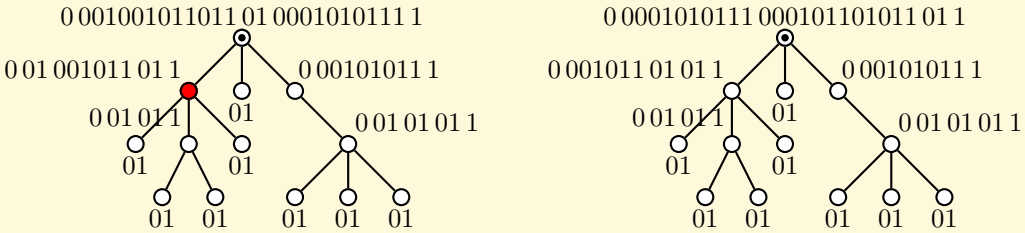
Z předchozího textu je zřejmé, že pokud chceme přiřadit kód jednoznačně každému stromu (nejen uspořádanému kořenovému stromu) musíme jednoznačně zvolit kořen a musíme umět jednoznačně seřadit potomky každého vrcholu. Už víme, že centrum stromu je určeno jednoznačně a proto budeme volit kořen v centru. Ještě si všimneme, že potomky vrcholu u můžeme seřadit jednoznačně právě pomocí kódů podstromů vrcholu u.

5.3.0.32. Minimální kód stromu

Kódy můžeme chápat jako řetězce a ty umíme seřadit *jednoznačně*, například lexikograficky. Lexikografické uspořádání je „slovníkové uspořádání“. To znamená, že pro každou dvojici řetězců (v našem případě kódů) umíme rozhodnout, který kód by ve slovníku byl napsán dříve a který později. Předpokládáme, že znak 0 se ve slovníku nachází před znakem 1. Potom například řetězec 000111 by ve slovníku byl před řetězcem 001011, ale i před řetězcem 0011 a 01.

Jestliže pro každý vrchol seřadíme potomky podle jejich kódů, dostaneme jednoznačně určený kód uspořádaného kořenového stromu, tzv. *minimální kód*.

Je dobré si uvědomit, že Definice 5.20 je formulována pouze pro *uspořádané* kořenové stromy, zatímco minimální kód můžeme sestavit pro kořenové stromy. Je proto nutno rozlišovat pojmy *kód uspořádaného kořenového stromu* T a *minimální kód kořenového stromu* T. Když nakreslíme strom, který je určen kódem uspořádaného kořenového stromu, dostaneme opět kořenový strom T. Pokud ale nakreslíme strom, který je určen minimálním kódem kořenového stromu, může se pořadí potomků oproti výchozímu kořenovému stromu T lišit. Říkáme, že jsme kořenový strom T „přepěstovali“ tak, aby jeho kód byl minimální a tím pádem jednoznačně určený.



Obrázek 5.13 Kód uspořádaného kořenového stromu a minimální kód kořenového stromu.

Příklad 5.24. Je některý z kódů na Obrázku 5.13 minimální?

Řešení. Při sestavení kódu červeně vybarveného vrcholu na Obrázku 5.13 vlevo bylo zvoleno takové pořadí kódů, jaké mají potomci červeně označeného vrcholu. Toto pořadí není lexikograficky nejmenší, neboť kód 0 0101 1 by musel předcházet kód 01. Dále ani kód kořene není lexikograficky nejmenší a proto kód na Obrázku 5.13 vlevo není minimální.

Avšak při sestavování kódů vrcholů na Obrázku 5.13 vpravo bylo zvoleno vždy takové pořadí kódů potomků, že tyto kódy jsou seřazeny lexikograficky vzestupně. Proto je kód na Obrázku 5.13 vpravo minimální. ▲

Pro nalezení minimálního kódu použijeme následující funkci `minimalni_kod()`, která pro daný kořenový strom X s kořenem r rekurzivně sestaví (lexikograficky) minimální kód. Tuto funkci použijeme v algoritmu rozpoznání isomorfismu stromů.

Obsah
174. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Algoritmus 5.1 (Nalezení minimálního kódu kořenového stromu).

```
// na vstupu je kořenový strom (případně podstrom)
vstup < kořenový strom (X,r);

funkce  minimalni_kod(strom X, vrchol r) {
   if (X má jeden vrchol)
      return "01";
   Y[1...d] = {podstromy po odebrání kořene r};
   s[1...d] = {kořeny podstromů Y[] v odpovídajícím pořadí};
              // kořeny jsou potomci kořene r
   for (i=1,...,d)
       k[i] = minimalni_kod(Y[i],s[i]);
   sort lexikograficky podle klíče k[1] <= k[2] <= ... <= k[d];
   return "0"+k[1]+...+k[d]+"1";
}
```

Pro zájemce

Počet různých uspořádaných kořenových stromů s daným počtem vrcholů je roven

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

C_n jsou tzv. *Catalanova čísla*. Catalanova čísla se objevují při řešení celé řady kombinatorických úloh, které obvykle popisují strukturu, která se skládá z menších struktur stejného typu – jako jsou například kořenový strom a jeho podstromy. Více se o Catalanových číslech můžete dozvědět například v [5].

Pro zájemce

Lexikografické uspořádání je relace uspořádání na množině všech řetězců, v našem případě kódů uspořádaných kořenových stromů. Jedná se o reflexivní, antisymetrickou a tranzitivní relaci, která je úplná, tj. pro každou dvojici řetězců S_1 a S_2 je buď $S_1 \leqq S_2$ nebo $S_2 \leqq S_1$. V řadě programovacích jazyků je tato relace implementována jako funkce pro porovnávání řetězců, pomocí které umíme rozhodnout, který řetězec nebo kód je „menší“.

Obecně bychom mohli zvolit jinou relaci pro nalezení jednoznačně určeného kódu, důležité však je, aby taková relace na množině všech kódů byla relací uspořádání, která je navíc úplná.

5.3.0.33. Určování isomorfismu stromů

Mějme nyní dva stromy a budeme zjišťovat, zda jsou isomorfní. Proto

- najdeme centrum každého stromu a v centru zvolíme kořen,
- pomocí Algoritmu 5.1 najdeme minimální kód každého kořenového stromu,
- porovnáním kódů rozhodneme podle Věty 5.23 o isomorfismu jednotlivých stromů.

Celý postup zformulujeme jako algoritmus, který zjistí, zda dané dva stromy T a U jsou isomorfní. Následující algoritmus využívá funkci `minimalni_kod(X,r)` z Algoritmu 5.1, která pro strom X s kořenem r najde (lexikograficky) minimální kód.

Obsah

176. strana ze 272

Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Algoritmus 5.2 (Určení isomorfismu stromů).

```
// Máme dva stromu U, T se stejným počtem vrcholů.
Vstup < stromy T a U;
for (X=T,U) {
   // určení center daných stromů U, T
   x = centrum(X);
   if (x je jeden vrchol)
      r = x;
   else
      přidej nový vrchol r, nahraď hranu x=uv hranami ru, rv;
   k[X] = minimalni_kod(X,r);
}
if (k[T]==k[U] jako řetězce)
    vypiš("Jsou isomorfní.");
else
    vypiš("Nejsou isomorfní.");
exit;
```

Všimněte si, že v Algoritmu 5.2 předpokládáme, že oba stromy mají stejný počet vrcholů. Vskutku, pokud stromy mají různý počet vrcholů, jistě nejsou isomorfní. Na druhou stranu bez tohoto předpokladu by algoritmus mohl ve speciálních případech dát chybnou odpověď. Například cesty P_{2n} a P_{2n+1} jistě nejsou isomorfní, ale protože centrum cesty P_{2n} je „prostřední“ hrana, tak v Algoritmu 5.2 bude na tuto hranu přidán nový vrchol a vznikne tak druhá cesta P_{2n+1}. Oba minimální kódy pak budou stejné a výsledkem algoritmu by pak byl chybný závěr, že obě cesty P_{2n} a P_{2n+1} jsou isomorfní. Dá se však ukázat, že pokud mají vstupní grafy stejný počet vrcholů, tak bude výstup algoritmu správný.

Obsah
177. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Pokud bychom měli stromů více, můžeme snadno upravit algoritmus tak, aby pro každý strom našel jeho minimální kód a za isomorfní označil ty skupiny stromů, které mají stejný minimální kód.

5.3.0.34. Složitost Algoritmu 5.2

Složitost Algoritmu 5.2 závisí především na složitosti funkce `minimalni_kod()` v Algoritmu 5.1. Při detailnějším rozboru vidíme, že pro každý z n vrcholů daného stromu X bude na nějaké úrovni rekurze volána funkce `minimalni_kod()`. Můžeme pro jednoduchost předpokládat, že seřazení kódů vyžaduje polynomiální složitost $O(n^2)$ a toto seřazení bude prováděno pro každý vrchol stromu. Dostáváme, že horní odhad složitosti Algoritmu 5.1 pro nalezení minimálního kódu jednoho stromu je $O(n^3)$.

Doba běhu celého Algoritmu 5.2 pak pochopitelně závisí lineárně na počtu stromů, pro které minimální kód hledáme.

5.3.0.35. Jiná kódování stromů

V praxi se setkáme s celou řadou různých kódování stromů. Pro ukládání rozsáhlých dat se používá Huffmanův kód. Jedná se o kód sestavený na základě binárního stromu (v binárním stromu má každý rodič nejvýše dva potomky), kde koncové vrcholy odpovídají uloženým znakům a vzdálenost od kořene souvisí s relativní četností jednotlivých znaků.

Upozorňujeme, že Huffmanův kód je zcela odlišný kódu z Definice 5.20. Zatímco Huffmannův kód slouží k ukládání znaků rozsáhlého souboru dat, tak binární kódy zavedené v této kapitole slouží k ukládání uspořádaných kořenových stromů a porovnávání stromů. Neměli bychom různé kódy zaměňovat.

Pojmy k zapamatování

— kód uspořádaného kořenového stromu
— minimální kód kořenového stromu
— isomorfismus stromů

5.4. Kostra grafu

Průvodce studiem

V této sekci se budeme věnovat jednomu ze základních problémů teorie grafů – hledání minimální kostry. Už víme, že strom je minimální souvislý graf na daném počtu vrcholů (Věta 5.10). V celé řadě praktických aplikací hraje takový souvislý podgraf důležitou roli při hledání optimálních řešení. Hledání kostry se tak objevuje jako část jiných algoritmů, například Christofidův algoritmus pro heuristické řešení úlohy obchodního cestujícího vychází z minimální kostry daného grafu.

Při řešení elektrických obvodů (výpočet proudů a napětí v jednotlivých větvích) s využitím Kirchoffových zákonů je nutno sestavit dostatečný počet lineárně nezávislých rovnic. Najdeme-li kostru grafu elektrické sítě, existuje pak poměrně jednoduchý postup jak tyto rovnice sestavit.

Cíle

Po prostudování této sekce budete schopni:

- vysvětlit pojem kostry grafu,
- najít kostru grafu pomocí hladového algoritmu,
- najít kostru grafu pomocí Jarníkova algoritmu.

Připomeňme, že faktor grafu G je takový podgraf, který obsahuje všechny vrcholy grafu G (Definice 1.28). Graf nazýváme ohodnocený, jestliže každé hraně přiřadíme reálné číslo (tzv. ohodnocení hrany), a (kladně) vážený, pokud je ohodnocení každé hrany kladné číslo.

Definice 5.25. *Kostrou* souvislého grafu G rozumíme takový faktor grafu G, který je stromem. *Váhou kostry* ohodnoceného grafu G rozumíme součet ohodnocení všech hran kostry.

Význam „koster“ spočívá v jejich minimalitě vzhledem k počtu hran, přičemž současně je zachována souvislost grafu (Věta 5.10). Pokud je ohodnocení každé hrany stejné, bude mít každá kostra grafu stejnou váhu. Jestliže se ale ohodnocení jednotlivých hran liší, mohou mít různé kostry téhož grafu různou váhu. Naším úkolem bude najít takovou kostru, jejíž váha je nejmenší možná.

Definice 5.26 (Problém minimální kostry (MST)). Je dán souvislý ohodnocený graf G s nezáporným ohodnocením hran $w : E(G) \to \mathbb{R}_0^+$. *Problém minimální kostry* znamená najít takovou kostru T v grafu G, která má nejmenší možnou váhu. Formálně

$$MST = \min_{\text{kostra} T \subseteq G} \left(\sum_{e \in E(T)} w(e) \right).$$

MST (z anglického „Minimum spanning tree“) je číslo, které udává váhu kostry s nejmenší možnou vahou.

Kontrolní otázky

1. Má smysl hledat minimální kostru v grafu se záporným ohodnocením hran? Je každý souvislý faktor (podgraf se všemi vrcholy grafu) s minimálním ohodnocením kostrou takového grafu?
2. Kolik hran má kostra souvislého grafu na n vrcholech?

Je známa celá řada algoritmů pro nalezení minimální kostry daného nezáporně ohodnoceného grafu. My uvedeme několik z nich. Při řešení praktické úlohy můžeme vybrat nejvhodnější z nich v závislosti na způsobu uložení dat.

První z nich popíšeme neformálně:

Algoritmus 5.3 (Hladový pro minimální kostru). *Mějme dán souvislý ohodnocený graf G s nezáporným ohodnocením hran w. Počet hran grafu G označíme m.*

- *Seřadíme hrany grafu G vzestupně podle jejich ohodnocení:*

$$w(e_1) \leqq w(e_2) \leqq \cdots \leqq w(e_m).$$

- *Začneme s prázdnou množinou hran $T = \emptyset$ pro kostru.*
- *Pro $i = 1, 2, \ldots, m$ vezmeme hranu e_i a pokud přidáním $T \cup \{e_i\}$ nevznikne cyklus, tak přidáme hranu e_i do T.*

  Jinak hranu e_i „zahodíme“.
- *Po zpracování všech hran obsahuje T hrany minimální kostry váženého grafu G.*

Výstupem algoritmu je množina T, která obsahuje právě hrany minimální kostry. Kostra

je pak tvořena všemi vrcholy daného grafu a množinou hran T.

Poznámka 5.27. Algoritmu se říká „hladový“, což je překlad anglického výrazu „greedy“. Výstižnější by možná byl termín „hamoun“, protože algoritmus se snaží získat v každém kroku co nejvýhodnější kus – v našem případě hranu s co nejmenší váhou. Hladový algoritmus neřeší strategii, zda by nebylo výhodnější spokojit se v nějakém kroku s horším prvkem (hranou s větší vahou) za cenu toho, že v pozdějších krocích budeme moci nevýhodu vyvážit mnohem výhodnějšími prvky, než které získá hladový algoritmus.

Uvědomte si, že algoritmus nikdy nevybírá z více možností a nezkouší různé varianty a výsledky mezi sebou porovnat. Úloha hledání minimální kostry spadá mezi několik málo problémů, při jejichž řešení hladový postup vždy vede k optimálnímu řešení. V dalších kapitolách ukážeme několik problémů, při jejichž řešení by algoritmus selhal.

Nyní ukážeme, že Algoritmus 5.3 funguje správně.

Věta 5.28. *Algoritmus 5.3 najde minimální kostru souvislého grafu.*

Důkaz. Správnost Algoritmu 5.3 ukážeme sporem.

Mějme souvislý graf G s ohodnocením hran w. Nechť T je množina hran získaná v průběhu Algoritmu 5.3. Předpokládejme, že hrany jsou již seřazené podle váhy $w(e_1) \leqq w(e_2) \leqq \cdots \leqq w(e_m)$. Minimálních koster daného grafu může existovat se stejnou vahou více. Označme T_0 množinu hran takové minimální kostry, která se s množinou T shoduje na co nejvíce prvních hranách. Pokud $T_0 = T$, algoritmus pracoval správně.

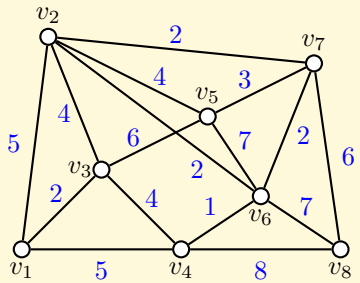
Předpokládejme pro spor, že algoritmus nenašel minimální kostru a tedy že $T_0 \neq T$. Označme $j > 0$ takový index, že se množiny T_0 a T shodují na prvních $j-1$ hranách $e_1, e_2, \ldots, e_{j-1}$, ale neshodují se na hraně e_j. To znamená, že $e_j \in T$ a přitom $e_j \notin T_0$, neboť

Obsah
182. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

podle Algoritmu 5.3 vybíráme hrany postupně a hrana e_j nemůže tvořit cyklus s předchozími hranami, neboť patří do množiny hran minimální kostry T_0.

Přidáme-li hranu e_j do kostry s množinou hran T_0, vznikne podle Důsledku 5.8 graf s právě jedním cyklem C. Cyklus C však nemůže být obsažen v nalezené kostře T, a proto existuje v cyklu C hrana e_k, která do množiny T nepatří, přičemž dle volby j víme, že $k > j$.

Potom je však podle našeho seřazení hran je $w(e_k) \geqq w(e_j)$, a proto kostra na hranách $T' = \big(T_0 \setminus \{e_k\}\big) \cup \{e_j\}$ (kostra vznikne z minimální kostry nahrazením hrany e_k hranou e_j) nemá vyšší ohodnocení (není horší) než kostra s hranami T_0. Množina hran T' této kostry se však shoduje se s množinou hran T na více hranách než T_0! To je spor s volbou T_0 a proto případ $T_0 \neq T$ nemůže nastat. To znamená, že $T_0 = T$ a algoritmus pracuje správně. □



Obrázek 5.14 Kladně ohodnocený graf G.

Příklad 5.29. Užitím hladového algoritmu (Algoritmus 5.3) najděte minimální kostru grafu G na Obrázku 5.14.

Řešení. Podle Algoritmu 5.3 nejprve seřadíme hrany podle jejich ohodnocení do neklesající posloupnosti. Dostaneme posloupnost: hrana s ohodnocením 1 v_4v_8, hrany s ohodnocením 2 v_1v_3, v_2v_6, v_2v_7, v_6v_7, hrana s ohodnocením 3 v_5v_7, hrany s ohodnocením 4 v_2v_3, v_2v_5, v_3v_4, hrany s ohodnocením 5 v_1v_2, v_1v_4, hrany s ohodnocením 6 v_3v_5, v_7v_8, hrany s ohodnocením 7 v_5v_6, v_6v_7, a hrana s ohodnocením 8 v_4v_8.

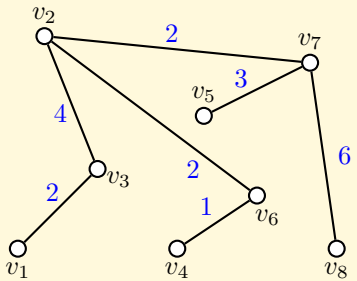
Nyní budeme postupně přidávat hrany do množiny T tak, aby tyto hrany netvořily žádný cyklus. Můžeme přidat první čtyři hrany v_4v_8, v_1v_3, v_2v_6, v_2v_7, ale pátou hranu v_6v_7 (délky 2) přidat nemůžeme, protože by spolu s již přidanými hranami v_2v_6 a v_2v_7 vytvořila cyklus C_3.

Potom přidáme další dvě hrany v_5v_7 a v_2v_3, ale osmou hranu v_2v_5 nemůžeme přidat, protože by vznikl cyklus na vrcholech v_2, v_5, v_7. Ani devátou hranu v_3v_4 nemůžeme přidat, protože by vznikl cyklus na vrcholech v_2, v_3, v_4, v_6.

Stejně tak přidáním hran v_1v_2, v_1v_4 nebo v_3v_5 by vznikl cyklus, proto je také zahodíme. Konečně přidáním hrany v_7v_8 vznikne kostra (podle Věty 5.4 víme, že vznikla kostra, neboť graf G má osm vrcholů a v množině T je sedm hran). Přidáním každé ze zbývajících hran by vznikl cyklus, proto algoritmus končí. Na Obrázku 5.15 je minimální kostra grafu G. Váha kostry je $1 + 2 + 2 + 2 + 3 + 4 + 6 = 20$.

▲

Zmíněný hladový algoritmus pro hledání minimální kostry grafu byl popsán poprvé užitím teorie grafů Kruskalem (1956). Je však známo, že Kruskal vycházel z práce českého matematika Otakara Borůvky. Už v roce 1926 řešil český akademik Otakar Borůvka otázku optimální stavby elektrické sítě na jižní Moravě a popsal velmi podobný algoritmus. Při formulaci ani v důkazu správnosti však nepoužil teorii grafů, ale maticovou algebru.



Obrázek 5.15 Minimální kostra grafu G s váhou 20.

Algoritmus 5.4 (Borůvkův algoritmus pro minimální kostru). *Mějme souvislý (kladně) vážený graf G s ohodnocením hran w různými čísly. Na začátku seřadíme hrany vzestupně podle jejich ohodnocení $w(e_1) < w(e_2) < \ldots < w(e_m)$. Kostru začneme sestavovat tak, že přidáme hranu e_i (pro $i = 1, 2, \ldots, n$), pokud přidáním nevznikne cyklus.*

Všimněte si, že v algoritmu se předpokládá, že žádné dvě hrany nemají stejnou váhu. Jako reakce na Borůvkovu práci vypracoval Vojtěch Jarník v roce 1929 podobný algoritmus. Jarníkův algoritmus je ve světě známý jako Primův algoritmus z roku 1957.

Algoritmus 5.5 (Jarníkův algoritmus pro minimální kostru). *Mějme souvislý graf G s n vrcholy a s nezáporným ohodnocením hran w. Kostru začneme sestavovat z jednoho (libovolného) vrcholu. V každém kroku algoritmu přidáme nejmenší z hran, které vedou z již vytvořeného podstromu do některého ze zbývajících vrcholů grafu G. Po $n-1$ krocích algoritmus končí.*

Všimněte si, že v Jarníkově algoritmu 5.5 hrany na začátku neseřazujeme. Navíc není

Obsah
185. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

třeba testovat vznik cyklu, neboť v každém kroku přidáváme do rozrůstajícího se stromu nějaký list. To je výhodné, neboť testování existence cyklu v grafu je výpočetně náročné.

Ukázky běhu hladového (Kruskalova) a Jarníkova (Primova) algoritmu najdete na adrese http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/minimalni_kostra.pdf.

Pojmy k zapamatování

— kostra grafu

— hladový algoritmus

Pro zájemce

5.5. Bludiště

Máte rádi bludiště? A jak souvisí bludiště a kostry grafu? Ukážeme, jak můžeme pomocí algoritmů pro hledání minimální kostry snadno sestavit bludiště.

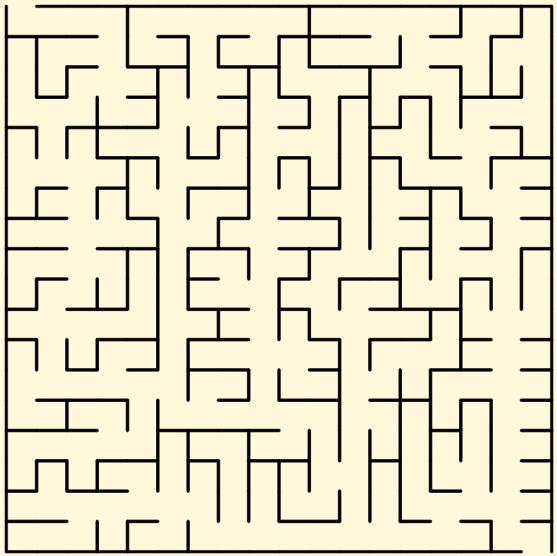
Bludiště na Obrázku 5.16 vzniklo při běhu Jarníkova (neboli Primova) algoritmu, který hledal minimální kostru v nějakém grafu. Jedná se vlastně o kostru grafu pravidelné čtvercové sítě: vrcholy odpovídají políčkům na čtverečkovaném papíře a náhodně ohodnocené hrany spojují sousední políčka. Na stránce http://en.wikipedia.org/wiki/File:MAZE_30x20_Prim.ogv najdete animaci, která zachycuje proces vzniku bludiště.

Uvědomte si, že bludiště, jehož chodby odpovídají hranám nějaké kostry, má pěkné vlastnosti, které od bludiště očekáváme: Je souvislé (protože kostra je souvislý podgraf) a proto v bludišti nejsou izolované nebo oddělené části, které nemohou přispět k „bloudění“. Dále bludiště neobsahuje cykly (protože kostra neobsahuje cykly) a proto mezi každými dvěma místy v bludišti vede právě jedna cesta, kterou je nutno objevit. Pokud bychom však chtěli vícenásobné cesty umožnit, můžeme vždy některé stěny v bludišti vymazat (neboli přidat náhodné hrany do nalezené kostry).

Kontrolní otázky

1. Bludiště na Obrázku 5.16 vzniklo při hledání kostry Primovým algoritmem. Lze pro sestavení bludiště použít i hladový algoritmus? Jak se budou obě bludiště lišit?
2. Jak se liší bludiště získané jako minimální kostra nějakého ohodnoceného grafu a bludiště, jehož sousední políčka jsou spojena náhodně?

Poznamenejme ještě, že pro generování podobných bludišť můžeme použít i algoritmus pro prohledávání do hloubky. Buď budeme v každé iteraci volit pořadí sousedů k prozkoumání podle náhodného ohodnocení nebo vezmeme neohodnocený graf a v každé iteraci budeme vybírat náhodně další vrchol mezi dosud nezpracovanými sousedními vrcholy v úschovně. Animaci takového postupu najdete na adrese http://commons.wikimedia.org/wiki/File:MAZE_30x20_DFS.ogv. Rozmyslete si, že modifikace algoritmu prohledávání do šířky obvykle *nedá* pěkné bludiště.



Obrázek 5.16 Bludiště sestavené pomocí Jarníkova algoritmu.

5.6. Test

Následuje jednoduchý test, pro nalezení správné odpovědi jedné otázky není potřeba více než půl minuty.

Zacátek testu **Stromy**

1. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?

   (a) Počet hran stromu je roven počtu vrcholů.
   (b) Strom má o jednu hranu více než vrcholů.
   (c) Počet hran ve stromu je vždy menší než počet vrcholů.
   (d) Dva různé stromy se stejným počtem vrcholů musí mít vždy stejný počet hran.
   (e) Vrcholy stupně 1 nemohou být ve stromu sousední.
   (f) Součet stupňů vrcholů stromu je o jedná větší než počet hran stromu..

2. Které z následujících vlastností grafu zaručí, že se jedná o strom?

   (a) Graf je souvislý a obsahuje alespoň jeden list.
   (b) Graf je souvislý a obsahuje alespoň dva listy.
   (c) Graf je acyklický a obsahuje alespoň jeden list.
   (d) Graf je acyklický a obsahuje alespoň jeden list.
   (e) Graf je souvislý a acyklický.

3. Víme, že součet stupňů stromu je 22. Kolik hran má tento strom?

4. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?

(a) Každý strom je současně les.
(b) Každý les je současně strom.
(c) Acyklický strom je les.
(d) Acyklický les je strom.
(e) Souvislý les je strom.
(f) Souvislý strom je les.

5. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?

(a) Každý strom obsahuje alespoň jeden list.
(b) Každý strom obsahuje alespoň dva listy.
(c) Každý strom je souvislý.
(d) Každý strom je acyklický.
(e) Každý les obsahuje alespoň jeden list.
(f) Každý les obsahuje alespoň dva listy.

6. Které z následujících posloupností mohou být stupňovými posloupnostmi stromu?

(a) $1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1,$
(b) $6, 1, 1, 1, 1, 1, 1,$
(c) $2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1,$
(d) $3, 2, 2, 2, 2, 1,$
(e) $3, 2, 2, 2, 2, 1,$
(f) $3, 2, 2, 2, 1, 1,$
(g) $2, 2, 1, 1, 0, 0.$
(h) $0.$

7. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?

(a) Mezi dvěma vrcholy stupně k existuje ve stromu právě k různých cest.
(b) Mezi dvěma vrcholy stupně k existuje ve stromu právě k interně disjunktních cest.
(c) Přidáním libovolné hrany do lesa vznikne les s menším počtem komponent.
(d) Mezi každými dvěma různými vrcholy stromu existuje právě jedna cesta.
(e) Odebráním jedné hrany ze stromu zanikne nejvýše jeden cyklus.
(f) Přidáním jedné hrany do stromu vznikne právě jeden cyklus.

8. Kolik hran musíme odebrat z cyklu C_n, aby vznikl strom?

9. Kolik hran musíme odebrat z kompletního bipartitního grafu $K_{n,n}$, aby vznikl strom?

10. Můžeme použít algoritmus pro hledání centra stromu použít i pro jiné grafy??

(a) ano, (b) ne,
(c) pouze pro acyklické grafy, (d) pouze pro souvislé grafy,
(e) pouze pro kompletní grafy, (f) pouze pro cykly.

11. Acyklický graf má 50 vrcholů a 35 hran? Kolik má tento graf komponent?

(a) 14 komponent, (b) 15 komponent,
(c) 35komponent, (d) 49 komponent,
(e) počet komponent není možno jednoznačně určit, (f) takový graf neexistuje.

12. Acyklický graf má 35 vrcholů a 50 hran? Kolik má tento graf komponent?

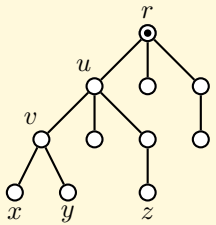
(a) 14 komponent, (b) 15 komponent,
(c) 35komponent, (d) 49 komponent,
(e) počet komponent není možno jednoznačně určit, (f) takový graf neexistuje.

13. Které z následujících kódů **nejsou** platným kódem kořenového stromu?

(a) 001010101011. (b) 01.
(c) 00000000001. (d) 0000011111.
(e) 000000111. (f) 0001100111.

14. Uvažujme kořenový strom (T, r) na Obrázku 5.17. Která z následujících tvrzení jsou

pravdivá?



Obrázek 5.17 Kořenový strom (T, r).

(a) Kořen r má tři potomky.
(b) Kořen r má deset potomků.
(c) Vrchol u je rodičem vrcholu v.
(d) Vrchol x je potomkem vrcholu u.
(e) Vrchol z nemá rodiče.
(f) každý vrchol, který je stupně 1, nemá potomky.
(g) každý vrchol, který nemá potomky, je stupně 1.

15. Jaký je kód kořenového stromu (T, r) na Obrázku 5.17?

16. Jaký je minimální kód kořenového stromu (T, r) na Obrázku 5.17?

17. Následující kódy jsou kódy isomorfních kořenových stromů. Který z nich je minimální?

Obsah
192. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

(a) 00010110100111, (b) 00010110011011,
(c) 00100101100111, (d) 00100110010111,
(e) 00011001011011, (f) 00011010010111.

18. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?

(a) Kostra grafu je souvislý podgraf daného grafu, jehož součet ohodnocení hran je nejmenší.
(b) Kostra grafu je acyklický podgraf daného grafu, jehož součet ohodnocení hran je nejmenší.
(c) Kostra grafu je souvislý podgraf daného grafu, jehož součet ohodnocení hran je nejmenší.
(d) Každý acyklický faktor daného grafu, je kostrou.
(e) Každý souvislý faktor daného grafu, je kostrou.
(f) Každý souvislý a acyklický faktor daného grafu, je kostrou.

19. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?

(a) Každý souvislý graf má kostru.
(b) Každý souvislý a acyklický graf má kostru.
(c) Každý acyklický graf má kostru.
(d) Kostra každého grafu je určena jednoznačně.
(e) V každém grafu existuje několik různých koster.
(f) Graf, který má jedinou kostru, je stromem.

Konec testu Oprava testu

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:

Obsah

194. strana ze 272

Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Kapitola 6

Barevnost a kreslení grafů

Průvodce studiem

V této kapitole se budeme věnovat dvěma tématům – vrcholovému barvení grafů a rovinnému kreslení grafů. Nejprve zavedeme základní pojmy.

Na příkladech vysvětlíme, že barvení vrcholů grafu různými barvami slouží k modelování vztahů mezi objekty. Barvy reprezentují vlastnosti, přičemž samotné barvy nejsou důležité, slouží jen pro snadnou představu a výstižné formulace. Ukážeme, jak barvení grafů může pomoci optimalizovat některé úlohy plánování.

Potom ukážeme, jak ověřit, zda je graf rovinný, tj. zda je možno jej nakreslit do roviny tak, aby se žádné hrany neprotínaly. Rovinné kreslení grafů najde své uplatnění při výrobě tištěných spojů.

V poslední části kapitoly se budeme věnovat barvení vrcholů rovinných grafů a zmíníme pěkné aplikace, které s barvením rovinných grafů souvisí.

6.1. Barevnost grafů

Průvodce studiem

Zmíníme dvě úlohy, které lze snadno přeformulovat jako úlohu vrcholového barvení grafu.

6.1.0.36. Skladovací problém

Ve skladu je uloženo mnoho druhů potravin. Podle předpisů některé druhy potravin musí být skladovány v oddělených prostorách. Například ovocné saláty nesmí být skladovány společně s čerstvými syrovými vejci nebo krájené salámy nesmí být skladovány společně se syrovým masem. Jaký je nejmenší počet oddělených místností, který ve skladu potřebujeme?

Sestavíme graf, jehož vrcholy budou odpovídat skladovaným komoditám a hranou spojíme dva vrcholy, pokud odpovídající komodity nesmí být skladovány současně. Jaký je nejmenší počet barev potřebný k takovému obarvení vrcholů grafu, aby žádné dva sousední vrcholy nebyly obarveny stejně?

6.1.0.37. Optimalizace křižovatek

Křižovatka má různé jízdní pruhy (koridory), jak pro auta, tak pro chodce. Doprava v koridorech, které se nekříží, může probíhat současně. Naopak koridory, které se kříží, musí mít zelenou v jiných časových intervalech. Jaký je nejmenší počet časových intervalů v jednom "cyklu" semaforu, kdy každý koridor měl alespoň jedenkrát zelenou?

Úlohu budeme modelovat grafem, jehož vrcholy odpovídají dopravním koridorům a každé dva koridory, které spolu kolidují, spojíme hranou. Opět se budeme ptát na nejmenší počet barev nutný k takovému obarvení vrcholů grafu, kde koncové vrcholy každé hrany mají různou barvu.

Cíle

Po prostudování této sekce budete schopni:

- vysvětlit význam barvení grafů,
- převést praktický problém na úlohu barvení grafu,
- poznat grafy s malou barevností.

Nejprve zavedeme pojem obarvení grafu a barevnost grafu. Potom uvedeme několik základních pozorování a tvrzení a ukážeme jak řešit úlohu barvení grafu pro některé speciální případy.

Definice 6.1. *Obarvení grafu* G pomocí k barev je takové zobrazení

$$c : V(G) \to \{1, 2, \ldots, k\},$$

že každé dva vrcholy, které jsou spojené hranou, budou mít různou barvu, tj. $c(u) \neq c(v)$ pro každou hranu $uv \in E(G)$.
Uvedenému obarvení vrcholů grafu se říká také *dobré* vrcholové barvení grafu.

Samozřejmě můžeme každý graf obarvit pomocí tolika barev, kolik má graf vrcholů – každý vrchol jednoduše dostane jinou barvu. Nás však zajímá co možná *nejmenší* počet barev, pro které existuje dobré vrcholové barvení grafu G. V praktických úlohách odpovídá počet barev nákladům nebo požadavkům, které se snažíme minimalizovat.

Definice 6.2. *Barevnost* grafu G je nejmenší přirozené číslo $\chi(G)$, pro které existuje obarvení grafu G pomocí $\chi(G)$ barev.

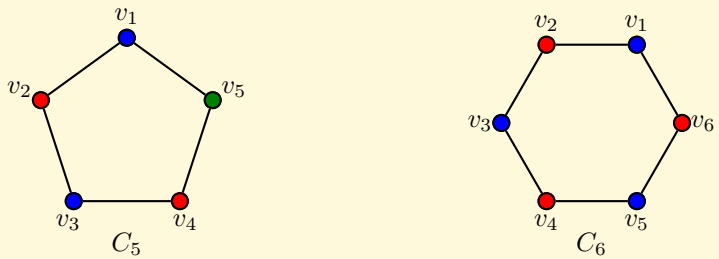
Barevnosti se říká také *chromatické číslo*.

Obsah
197. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Příklad 6.3. Určete barevnost cyklu C_5 a cyklu C_6.

Řešení. Nejprve určíme barevnost cyklu C_5. Vrcholy cyklu C_5 označíme po řadě v_1, v_2, v_3, v_4, v_5. Protože v_1 a v_2 jsou spojeny hranou, potřebujeme na obarvení grafu C_5 alespoň dvě barvy. Zkusíme celý graf obarvit dvěma barvami. Bez újmy na obecnosti obarvíme vrchol v_1 první barvou (například modře) a vrchol v_2 druhou barvou (například červeně). Potom však vrchol v_3 sousedí s červeně obarveným vrcholem v_2, proto obarvíme vrchol v_3 modrou barvou a to si zase vynutí obarvení vrcholu v_4 červenou barvou (Obrázek 6.1 vlevo).

Poslední neobarvený vrchol v_5 je sousední s modře obarveným vrcholem v_1 a červeně obarveným vrcholem v_4. Po obarvení prvního vrcholu v_1 jsme v žádném kroku už neměli možnost volby, proto dvě barvy na dobré vrcholové barvení cyklu C_5 nestačí. Na obarvení vrcholu v_5 musíme použít další barvu. Na Obrázku 6.1 je cyklus C_5 dobře obarven třemi barvami a proto barevnost cyklu C_5 je $\chi(C_5) = 3$. Stejně bychom zdůvodnili, že barevnost každého lichého cyklu je 3.



Obrázek 6.1 Dobré vrcholové barvení cyklů C_5 a C_6.

Nyní určíme barevnost cyklu C_6. Označíme vrcholy podobně jako v cyklu C_5. Ihned

Obsah
198. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

je zřejmé, že na dobré vrcholové barvení potřebujeme alespoň dvě barvy. Na Obrázku 6.1 vpravo vidíme, že dvě barvy stačí, proto barevnost cyklu C_6 je $\chi(C_6) = 2$. Analogicky bychom zdůvodnili, že barevnost každého sudého cyklu je 2. ▲

6.1.0.38. Horní odhad počtu barev

Je zřejmé, že na obarvení daného grafu nemůžeme použít více barev, než je vrcholů v grafu. Ukážeme, že barevnost grafu G se rovná počtu jeho vrcholů pouze, když G je kompletní graf.

Lemma 6.4. *Pro každý jednoduchý graf G na n vrcholech platí $\chi(G) \leqq n$. Rovnost nastává právě tehdy, když G je úplný graf.*

Důkaz. Pro každý graf G na n vrcholech stačí každý vrchol obarvit jinou barvou a máme dobré vrcholové obarvení grafu G n barvami. To znamená, že $\chi(G) \leqq n$.

Je-li $G \simeq K_n$, tak žádné dva vrcholy nemohou být obarveny stejnou barvou, protože každé dva vrcholy jsou sousední. Proto $\chi(K_n) = n$.

Pokud ale graf G není kompletní a některá hrana uv v grafu G chybí, můžeme oba její koncové vrcholy obarvit stejnou barvou $c(u) = c(v) = 1$ a zbývající vrcholy obarvíme různými barvami $2, 3, \ldots, n-1$. Dostaneme tak obarvení grafu G méně než n barvami a platí $\chi(G) < n$. Tím je tvrzení dokázáno. □

Už jsme ukázali, že $\chi(C_5) = 3 = \Delta(C_5) + 1$ a $\chi(K_n) = n = \Delta(K_n) + 1$. Toto pozorování je možno zobecnit a dá se ukázat, že jsou to právě jen liché cykly a kompletní grafy, pro které platí $\chi(G) = \Delta(G) + 1$.

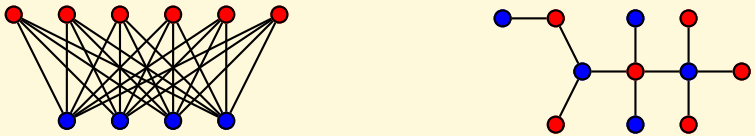
Dokonce je možno dokázat, že na dobré vrcholové obarvení každého grafu kromě kompletních grafů a lichých cyklů stačí nejvýše tolik barev, jaký je největší stupeň v grafu.

Obsah
199. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Věta 6.5 (Brooksova věta). *Pro každý graf na n vrcholech různý od K_n a lichých cyklů C_n platí $\chi(G) \leqq \Delta(G)$.*

Důkaz tohoto tvrzení přesahuje rámec našeho kurzu, zájemci jej mohou najít třeba v [5].

Samozřejmě ne v každém grafu musíme použít tolik barev, jaký je nejvyšší stupeň vrcholů v grafu. Například na dobré vrcholové obarvení (kompletních) bipartitních grafů stačí dvě barvy (Obrázek 6.2).



$K_{4,6}$ T

Obrázek 6.2 Dobré vrcholové barvení grafu $K_{4,6}$ a stromu T.

Jak obecně pro daný graf G určit $\chi(G)$ a jak najít dobré vrcholové barvení pomocí $\chi(G)$ barev? Algoritmy pro nalezení takového barvení jsou komplikované a nejsou součástí tohoto textu. Jednoduchou heuristiku, která však nemusí dát vždy obarvení pomocí nejmenšího možného počtu barev najdete v [5]. Upozorníme ještě, že není znám algoritmus s polynomiální složitostí, který by uměl najít dobré vrcholové barvení s nejmenším počtem barev pro libovolný graf. Pro obecný graf existuje algoritmus složitostí $O(n2^n)$, kde n je počet vrcholů. V praxi se obvykle využívají heuristické algoritmy jako Brelazova heuristika nebo hladová heuristika.

Obsah
200. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

6.1.0.39. Dolní odhad počtu barev

Brooksova věta říká kolik *nejvíce* barev potřebujeme na dobré vrcholové obarvení daného grafu. Nyní ukážeme několik jednoduchých odhadů, kolik barev je pro daný graf potřeba *nejméně*.

Věta 6.6. *Graf G má barevnost 1 právě tehdy, když nemá žádné hrany.*

Důkaz. Důkaz tvrzení je snadný. Pokud graf nemá hrany, obarvíme všechny vrcholy barvou 1. A mají-li všechny vrcholy stejnou barvu, nemůže být v grafu žádná hrana. □

S jedinou barvou vystačíme na dobré vrcholové barvení pouze v grafu bez hran. Grafy, na jejichž dobré obarvení potřebujeme dvě barvy, už jsou zajímavější.

Věta 6.7. *Graf G má barevnost 2 právě tehdy, když neobsahuje jako podgraf žádný cyklus liché délky.*

Důkaz. Pečlivý důkaz vyžaduje komplikované technické rozbory, proto jen naznačíme myšlenku důkazu.

Už víme, že lichý cyklus nelze dobře obarvit dvěma barvami (Příklad 6.3). Tím jsme nepřímo zdůvodnili, že graf s barevností 2 nemůže obsahovat lichý cyklus.

Zvolíme libovolný vrchol v v grafu G a obarvíme jej barvou 1. Vrcholy, jejichž vzdálenost od v je lichá, obarvíme barvou 2 a vrcholy, jejichž vzdálenost od v je sudá, obarvíme barvou 1.

Označme w poslední společný vrchol na nějakých nejkratších cestách z v do x a z v do y. Pokud bychom získali dva vrcholy x, y v sudé vzdálenosti od vrcholu v (a tedy i

od vrcholu w) spojené hranou xy, tak spojením cesty z w do x, cesty z w do y a hrany xy by vznikl uzavřený sled liché délky. Tento sled je současně cyklem (proč?) liché délky, což podle předpokladu není možné.

Pro dva vrcholy v liché vzdálenosti je zdůvodnění podobné. Proto navržené obarvení je dobré (neobarví sousední vrcholy stejnou barvou) a dvě barvy na obarvení grafu G stačí. □

Grafy, které neobsahují cykly liché délky, jsou bipartitní (Obrázek 6.2). To znamená, že jejich vrcholy umíme rozdělit do dvou množin (partit) tak, že v rámci každé partity není mezi vrcholy žádná hrana. Potom stačí vrcholy v jedné partitě obarvit jednou barvou a vrcholy v druhé partitě obarvit druhou barvou.

Bez důkazu uvedeme ještě jeden snadný dolní odhad barevnosti daného grafu.

Věta 6.8. *Jestliže v grafu G je kompletní podgraf na k vrcholech, tak na dobré obarvení celého grafu G je potřeba alespoň k barev.*

Kontrolní otázky

1. Může být barevnost grafu menší než největší stupeň vrcholů v grafu?
2. Může být barevnost grafu menší než nejmenší stupeň vrcholů v grafu?
3. Může být barevnost grafu vyšší než největší stupeň vrcholů v grafu?

Pojmy k zapamatování

— skladovací problém

— dobré vrcholové barvení

— barevnost (chromatické číslo) grafu

— Brooksova věta

6.2. Rovinné nakreslení grafů

Průvodce studiem

Už v Kapitole 1 jsme zavedli pojem nakreslení grafu. Dosud však nehrálo roli, jak daný graf nakreslíme. Pro některé aplikace je však zásadní, zda se nám podaří nakreslit graf tak, aby se hrany neprotínaly. Například schémata elektrických obvodů můžeme chápat jako grafy a při návrhu jednovrstevného tištěného spoje je žádoucí, aby se ve schématu nacházelo co nejméně křížení, protože křížení je nutno přemostit.

V této a příští sekci si zavedeme pojem rovinného grafu a ukážeme si, jak rovinné grafy poznat.

Cíle

Po prostudování této sekce budete schopni:

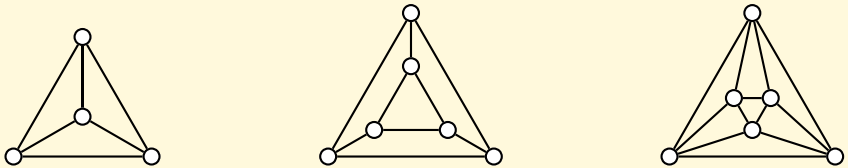
- popsat rovinný graf a vysvětlit jeho význam,
- vysvětlit rozdíl mezi rovinným a nerovinným grafem,
- určit počet oblastí grafu,
- použít Eulerův vzorec pro určení některých parametrů rovinného grafu,
- pro některé (husté) grafy poznat, že nejsou rovinné.

Nejprve vyslovíme definici rovinného grafu.

Definice 6.9. *Rovinným nakreslení* grafu G je takové nakreslení grafu, ve kterém jsou vrcholy znázorněny jako různé body v rovině a hrany jako křivky spojující body svých koncových vrcholů, přičemž hrany se nesmí křížit ani procházet jinými body, než které odpovídají koncovým vrcholům.
Řekneme, že graf je *rovinný* pokud máme jeho rovinné nakreslení.

Grafům, pro které existuje rovinné nakreslení, se někdy říká *planární* grafy.

Na Obrázku 6.3 jsou příklady rovinných grafů. Pěkným příkladem rovinných grafů jsou grafy mnohostěnů (graf čtyřstěnu, graf krychle, graf osmistěnu, graf dvanáctistěnu, hranoly, ...).



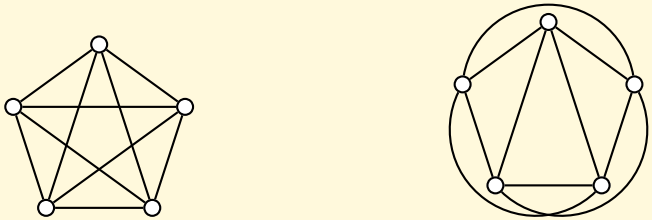
Obrázek 6.3 Rovinné grafy (graf čtyřstěnu, graf trojbokého hranolu a graf osmistěnu.

Bohužel, ne každý graf má rovinné nakreslení.

Příklad 6.10. Existuje rovinné nakreslení a) grafu K_5, b) grafu K_5 s jednou odebranou hranou?

Řešení. a) Na Obrázku 6.4 vlevo je obvyklé nakreslení grafu K_5, ve kterém je celkem pět křížení hran. Po několika pokusech se nám může podařit najít nakreslení s jediným křížením hran (Obrázek 6.4 vpravo). Dále v textu na straně 211 ukážeme, že žádné

nakreslení grafu K_5 v rovině nemůže být bez křížení hran. Graf K_5 proto nemá rovinné nakreslení.



Obrázek 6.4 Graf K_5 a jeho nakreslení s jediným křížením hran.

b) Na Obrázku 6.5 vlevo je nakreslení grafu K_5 bez jedné hrany. Na Obrázku 6.5 uprostřed je nakreslení stejného grafu, přičemž žádné dvě hrany se nekříží. Na Obrázku 6.5 vpravo je jiné nakreslení téhož grafu, přičemž hrany jsou nakresleny jako úsečky. Pro graf K_5 bez jedné hrany existuje jeho rovinné nakreslení.

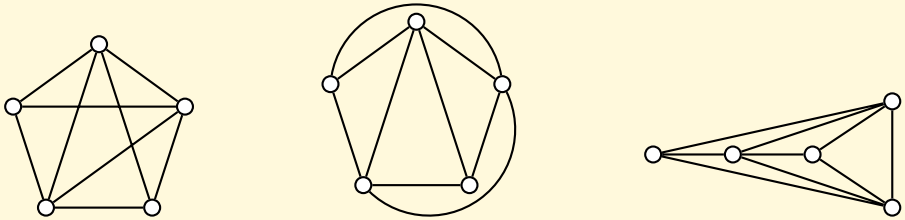
▲

Dá se ukázat, že grafy mnohostěnů jsou vždy rovinné a (alespoň) 3-souvislé. A naopak také platí, že každý rovinný 3-souvislý jednoduchý graf je grafem nějakého mnohostěnu.

V rovinném nakreslení má smysl zkoumat nejen vrcholy a hrany, ale také oblasti, na které rovinu rozdělí dané nakreslení grafu.

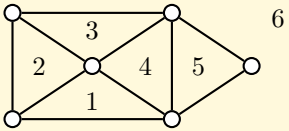
Definice 6.11. *Oblastmi* rovinného nakreslení grafu nazýváme souvislé oblasti roviny ohraničené nakreslením grafu.

Obsah
205. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obrázek 6.5 Graf K_5 bez jedné hrany a dvě jeho rovinná nakreslení.

Oblastem se někdy říká *stěny* a v anglické literatuře „faces.“ Při počítání oblastí nezapomeňme na „vnější“ oblast, neboť i ta je součástí roviny (Obrázek 6.6). Například grafy na Obrázku 6.3 mají postupně 4, 6 a 8 oblastí. Pokud se na Obrázek 6.3 podíváme jako na nakreslení jediného grafu se třemi komponentami, má nakreslení celkem 16 oblastí. Uvědomte si, že oblast grafu je ohraničena cyklem (případně jedním nebo více uzavřenými sledy, pokud jsou v grafu mosty nebo graf není souvislý).



Obrázek 6.6 Oblasti rovinného grafu.

Už Leonhard Euler si kolem roku 1750 všiml, že mezi počtem vrcholů, počtem hran a počtem oblastí rovinného grafu je jednoznačný vztah.

Obsah
206. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Věta 6.12 (Eulerův vzorec). *Mějme jednoduchý souvislý rovinný graf s f oblastmi, v vrcholy a h hranami. Potom platí*

$$v + f - h = 2.$$

Důkaz. Důkaz povedeme indukcí vzhledem k počtu hran e.
Základ indukce: Nejmenší souvislý graf na v vrcholech je podle Věty 5.10 strom. Protože strom neobsahuje cyklus, tak nakreslení grafu má jedinou oblast – vnější oblast. Podle Věty 5.4 víme, že takový graf má $h = v - 1$ hran a snadno ověříme, že platí $v + f - h = v + + 1 - (v - 1) = 2$.
Indukční krok: Předpokládejme, že tvrzení platí pro všechny grafy, které mají $h - 1$ hran. Pokud graf G obsahuje cyklus C, tak vynecháním jedné hrany e cyklu C se počet hran sníží o 1. Zároveň se změní počet oblastí, protože hrana e cyklu C oddělovala dvě oblasti (vnitřní a vnější oblast cyklu C, které sousedily společnou hranou e). Vynecháním hrany e tyto oblasti splynou v jedinou oblast a proto se počet oblastí také sníží o 1. Počet vrcholů se nezmění.

Podle indukčního předpokladu v menším grafu platí $v + (f - 1) - (h - 1) = 2$, odkud ihned vidíme, že platí také $v + f - h = 2$. □

Všimněte si, že Eulerův vzorec nezávisí na zvoleném nakreslení grafu, pouze na struktuře grafu. To znamená, že každé rovinné nakreslení grafu má stejný počet oblastí, tento počet je jednoznačně určen počtem vrcholů a hran rovinného grafu.

Ačkoli je vztah poměrně jednoduchý, má mnoho aplikací a důsledků. Některé důsledky zmíníme a dokonce dokážeme.

Důsledek 6.13. *Jednoduchý rovinný graf na $v \geqq 3$ vrcholech má nejvýše $3v - 6$ hran.*

Obsah
207. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Důkaz. Ukážeme, že nerovnost platí v každé komponentě rovinného grafu, proto můžeme předpokládat, že daný graf G je souvislý. Označíme v počet vrcholů v grafu G, f počet oblastí a h počet hran.

Protože jednoduchý graf neobsahuje smyčky ani násobné hrany, tak každá oblast je (v libovolném nakreslení grafu G) ohraničena alespoň třemi hranami. Budeme-li počítat hrany na hranici každé oblasti, započítáme každou hranu nejvýše dvakrát (ve dvou přilehlých oblastech). Platí tedy $2h \geqq 3f$, neboli $\frac{2}{3}h \geqq f$. Dosazením do Eulerova vztahu dostaneme

$$2 = v + f - h \leqq v + \frac{2}{3}h - h = v - \frac{1}{3}h,$$

odkud snadno vyjádříme horní odhad počtu hran

$$h \leqq 3(v-2) = 3v - 6,$$

což je dokazované tvrzení. □

Je zajímavé srovnat horní odhad počtu hran $3v-6$ s počtem hran $v(v-1)/2$ kompletního grafu na v. Věta 6.13 říká, že rovinný graf nemůže obsahovat „mnoho hran“, ani ne trojnásobek počtu vrcholů. Velký kompletní graf proto má mnohem více hran než rovinný graf se stejným počtem vrcholů.

Pokud v rovinném grafu nejsou žádné krátké cykly C_3 (říkáme jim trojúhelníky), tak graf musí obsahovat ještě méně hran, ani ne dvojnásobek počtu vrcholů.

Důsledek 6.14. *Jednoduchý rovinný graf bez trojúhelníků C_3 na $v \geqq 3$ vrcholech má nejvýše $2v-4$ hran.*

Důkaz. Tvrzení dokážeme obdobně. Označíme v počet vrcholů v grafu G, f počet oblastí a h počet hran. Tentokrát víme, že graf nemá ani trojúhelníky C_3, a proto je každá oblast

Obsah
208. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

v libovolném nakreslení grafu ohraničena alespoň čtyřmi hranami. Opět, budeme-li počítat hrany na hranici každé oblasti, započítáme každou hranu nejvýše dvakrát. Platí tedy $2h \geqq \geqq 4f$, neboli $\frac{2}{4}h \geqq f$. Dosazením do Eulerova vztahu dostaneme

$$2 = v + f - h \leqq v + \frac{2}{4}h - h = v - \frac{1}{2}h,$$

odkud snadno dostaneme horní odhad počtu hran v grafech bez trojúhelníků

$$h \leqq 2(v-2) = 2v - 4,$$

což je dokazované tvrzení. □

Příkladem grafů bez trojúhelníků jsou bipartitní grafy. Rovinné bipartitní grafy jsou velmi řídké – mají málo hran.

Díky Eulerovu vzorci můžeme dokonce ohraničit shora nejnižší stupeň rovinného grafu!

Důsledek 6.15. *Každý rovinný graf obsahuje vrchol stupně nejvýše* 5. *Každý rovinný graf bez trojúhelníků obsahuje vrchol stupně nejvýše* 3.

Důkaz. Postupujeme sporem. Pokud by všechny vrcholy byly stupně alespoň 6, celý graf by měl podle Principu sudosti 1.15 alespoň $\frac{1}{2} \cdot 6v = 3v$ hran, což je ve sporu s Důsledkem 6.13. Proto musí mít některý vrchol stupeň menší než 6.

Podobně, pokud by všechny vrcholy v grafu bez trojúhelníků byly pro spor stupně 4 nebo většího, tak celý graf by měl podle Principu sudosti 1.15 alespoň $\frac{1}{2} \cdot 4v = 2v$ hran, což je ve sporu s Důsledkem 6.14. Proto musí mít některý vrchol stupeň menší než 4. □

Všimněte si, že rovinný graf sice *může* obsahovat vrcholy vysokých stupňů, avšak současně musí vždy obsahovat nějaký vrchol malého stupně. Je dokonce možno ukázat, že takových vrcholů s malým stupněm musí být v grafu několik.

Obsah
209. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Pojmy k zapamatování

— rovinný graf
— oblast grafu
— Eulerův vzorec

6.3. Rozpoznání rovinných grafů

Průvodce studiem

„Být rovinný“, respektive „nebýt rovinný“ je důležitou vlastností grafu. Nejen, že nakreslení grafu bez křížení hran je přehlednější, ale (jak jsme zmínili úvodu) najdeme praktické uplatnění. Při výrobě tištěných spojů pro schémata, kterým odpovídá rovinný graf, vystačíme s jednovrstevným tištěným spojem.

Nyní ukážeme, jak pro daný graf rozhodnout, zda existuje jeho rovinné nakreslení nebo ne. Pochopitelně nemá smysl zkoušet náhodně nakreslit graf bez křížení hran, protože různých nakreslení stejného grafu existuje nekonečně mnoho.

Ukážeme, že dobrým vodítkem při určování rovinnosti grafu je Eulerův vzorec, respektive jeho důsledky uvedené v předchozí sekci.

Cíle

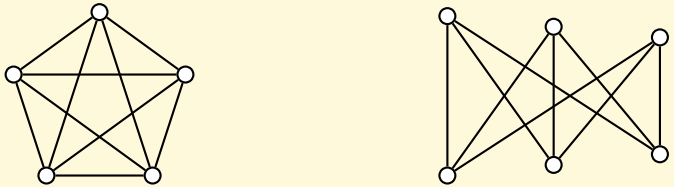
Po prostudování této sekce budete schopni:

- ukázat, že dva významné grafy K_5 a $K_{3,3}$ nejsou rovinné,
- vysvětlit pojem rozdělení grafu,

- použít Kuratowského větu pro určení, zda daný graf je rovinný.

Na rozdíl od určení barevnosti grafu, je určení rovinnosti grafu relativně rychle algoritmicky řešitelné. My se zaměříme pouze na případy malých grafů, protože zmíněné algoritmy přesahují rámec kurzu.

Nejprve ukážeme dva důležité grafy, které *nejsou* rovinné.



Obrázek 6.7 Grafy K_5 a $K_{3,3}$

Příklad 6.16. Ukažte, že grafy K_5 a $K_{3,3}$ nejsou rovinné.

Řešení. Všimněme si, že graf K_5 má 5 vrcholů a 10 hran. Ale podle Důsledku 6.13 má rovinný graf na pěti vrcholech nejvýše $3 \cdot 5 - 6 = 9$ hran. Proto není graf K_5 rovinný.

Podobně graf $K_{3,3}$ má 6 vrcholů a 9 hran a navíc neobsahuje žádné trojúhelníky. Ale podle Důsledku 6.14 má rovinný graf bez trojúhelníků na šesti vrcholech nejvýše $2 \cdot 6 - 4 = 8$ hran. Proto ani graf $K_{3,3}$ není rovinný. ▲

Výsledek příkladu zformulujeme jako další důsledek Eulerova vzorce 6.12.

Důsledek 6.17. *Grafy K_5 a $K_{3,3}$ nejsou rovinné.*

Obsah
211. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Ukazuje se, že oba grafy K_5 a $K_{3,3}$ mají klíčové postavení. Jejich struktura neumožňuje rovinné nakreslení, naproti tomu žádná další taková struktura neexistuje. Jestliže graf není rovinný, obsahuje vždy jednu z uvedených struktur.

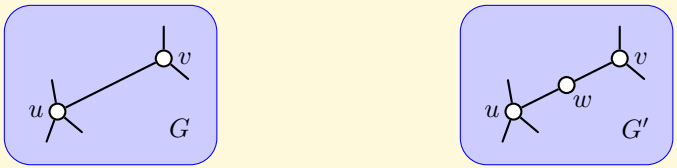
Abychom nerovinnou „strukturu“ popsali, zavedeme pojem *rozdělení* grafu. Rozdělení grafu je graf, který má stejnou strukturu, případně nějaké vrcholy stupně 2 navíc.

Definice 6.18. *Rozdělením* grafu G rozumíme graf, který vznikne z grafu G nahrazením některých hran cestami.

Rozdělení grafu se říká také *subdivize*. Neformálně můžeme říci, že v nakreslení grafu smíme na hrany přidávat vrcholy, ale nesmíme přidávat vrcholy na křížení hran. Také nesmíme přidávat cesty tam, kde není hrana.

Mějme graf G, přidáme nový vrchol w a odebereme například hranu uv grafu G a nahradíme ji dvojicí hran uw a wv. Dostaneme nový graf G', který je *rozdělením* původního grafu G (Obrázek 6.8). Symbolicky můžeme zapsat, že rozdělení G' grafu G je

$$G' = (V(G) \cup \{w\}, (E(G) \setminus \{uv\}) \cup \{uw, wv\}).$$



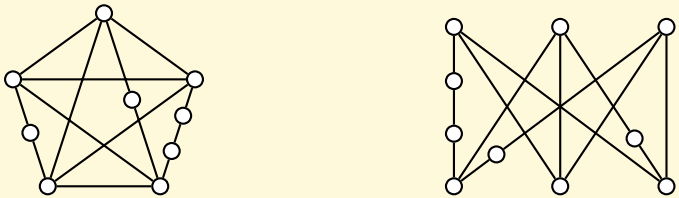
Obrázek 6.8 Graf G s vyznačenou hranou uv a rozdělení G' grafu G.

Obsah
212. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Kazimierz Kuratowski v roce 1930 ukázal, že platí následující překvapivě jednoduché tvrzení.

Věta 6.19. *Graf G je rovinný právě tehdy, když neobsahuje jako podgrafy rozdělení grafů K_5 nebo $K_{3,3}$.*

Důkaz nebudeme uvádět, protože je komplikovaný. Příklady rozdělení zakázaných podgrafů jsou na Obrázku 6.9. Takových zakázaných podgrafů sice existuje nekonečně mnoho, všechny však vycházejí ze struktury grafů K_5 a $K_{3,3}$.



Obrázek 6.9 Příklady rozdělení grafů K_5 a $K_{3,3}$.

Příklad 6.20. Je Petersenův graf na Obrázku 1.9 rovinný?

Řešení. Po chvíli zkoušení zjistíme, že se nám nedaří nakreslit Petersenův graf bez křížení hran. Zkusíme ukázat, že není rovinný.

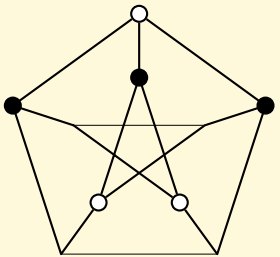
Petersenův graf má 10 vrcholů a 15 hran. Podle Důsledku 6.13 víme, že rovinný graf na 10 vrcholech může mít nejvýše $3 \cdot 10 - 6 = 24$ hran. To Petersenův graf splňuje, proto podle Důsledku 6.13 nelze o rovinnosti nebo nerovinnosti rozhodnout.

Všimneme si, že Petersenův graf neobsahuje trojúhelníky. Podle Důsledku 6.14 víme, že rovinný graf bez trojúhelníků na 10 vrcholech může mít nejvýše $2 \cdot 10 - 4 = 16$ hran. To Petersenův graf splňuje, proto podle Důsledku 6.14 nelze o rovinnosti nebo nerovinnosti rozhodnout.

Dále Petersenův graf jistě neobsahuje rozdělení grafu K_5, protože nemá pět vrcholů stupně 4 nebo většího.

Při pečlivém zkoumání si všimneme, že nejkratší cyklus v Petersenově grafu má délku 5. Proto Petersenův graf neobsahuje $K_{3,3}$ jako podgraf, protože $K_{3,3}$ obsahuje cyklus C_4.

Petersenův graf však obsahuje rozdělení grafu $K_{3,3}$, proto není rovinný (Obrázek 6.10). ▲



Obrázek 6.10 Petersenův graf obsahuje rozdělení grafu $K_{3,3}$ jako podgraf.

Příklad 6.21. Existuje nějaký rovinný graf s 21 hranami a a 16 oblastmi?

Řešení. Ukážeme, že takový graf neexistuje. Podle Eulerova vzorce 6.12 by takový graf G měl $v = 2 + e - f = 2 + 21 - 16 = 7$ vrcholů. Podle Principu sudosti 1.15 by graf G měl

součet stupňů roven 42 a protože žádný vrchol nemůže být stupně většího než 6, musel by graf G být kompletním grafem K_7. Ten však není podle Kuratowského věty 6.19 rovinný, neboť obsahuje podgraf K_5. ▲

Pro zájemce

Víme, že rovinné grafy je možno nakreslit bez křížení hran. Dá se ukázat, že rovinné grafy je možno nakreslit dokonce tak „pěkně“, že vystačíme s pravítkem.

Věta 6.22. *Každý jednoduchý rovinný graf lze nakreslit v rovině bez křížení hran tak, že hrany jsou úsečky.*

Pojmy k zapamatování

— rozdělení grafu

— Kuratowského věta

6.4. Barvení map a rovinných grafů

Průvodce studiem

Jeden z nejznámějších problémů teorie grafů je problém čtyř barev. Dnes bychom měli říkat „věta o čtyřech barvách,“ neboť už byla dokázána. Jeho formulace je sice jednoduchá, ale řešení si vyžádalo více než 100 let.

6.4.0.40. Problém čtyř barev

Kolik nejméně barev je potřeba k obarvení politické mapy tak, aby sousední státy nebyly obarveny stejnou barvou. Za sousední považujeme ty státy, které mají společný úsek hranice, nikoli pouze bod.

Úplné řešení daného problému si vyžádalo, kromě celé řady důkazů teoretických tvrzení, také vyšetření velkého množství případů na počítači.

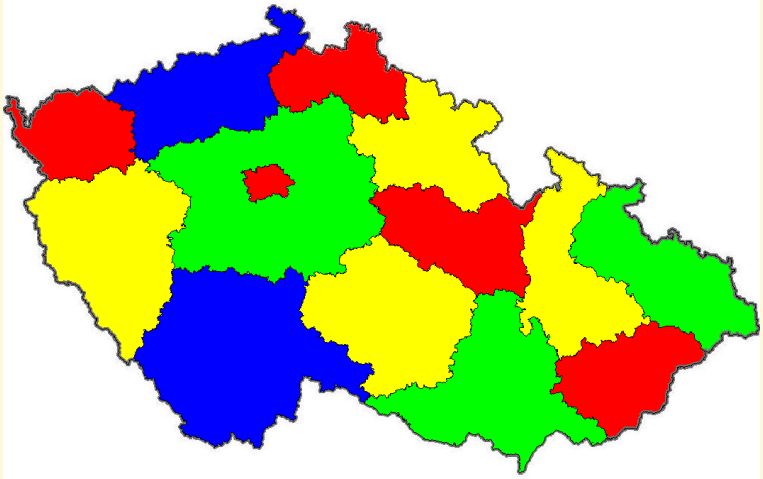
V této sekci zavedeme několik pojmů a ukážeme některá jednodušší tvrzení a speciální případy.

Cíle

Po prostudování této sekce budete schopni:

- vysvětlit jak souvisí barvení politických map a barvení grafů,
- najít dobré vrcholové barvení rovinného grafu nejvýše šesti barvami,
- najít dobré vrcholové barvení rovinného grafu bez trojúhelníků nejvýše čtyřmi barvami.

Obarvení politické mapy snadno převedeme na barvení grafu. Vezměme například mapu krajů naší republiky (Obrázek 6.11). Každou oblast nahradíme vrcholem (hlavním nebo krajským městem) a dva vrcholy spojíme hranou, jestliže jsou odpovídající oblasti nebo státy sousední. Obarvení oblastí mapy tak převedeme na hledání dobrého vrcholového barvení odpovídajícího rovinného grafu.



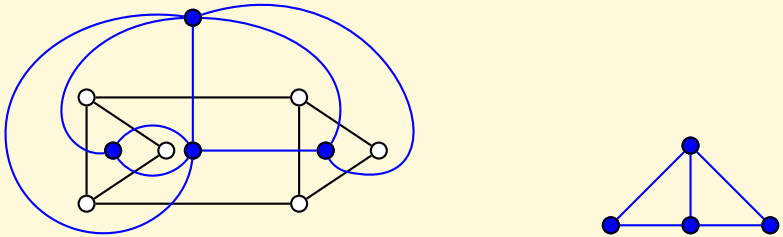
Obrázek 6.11 Obarvení krajů republiky čtyřmi barvami.

Pro zájemce

Druhou možností, jak sestavit graf G dané úlohy, je označit hranice států za hrany a místa křížení za vrcholy. Dostaneme rovinný graf G. Potom budeme hledat barvení *oblastí* grafu G, ve kterém žádné dvě sousední oblasti nemají stejnou barvu. K tomuto grafu G pak sestavíme tzv. „duální graf.“

Definice 6.23. *Duální graf* rovinného nakreslení grafu G získáme, když každou oblast nahradíme vrcholem. Dva vrcholy nového grafu spojíme hranou, jestliže odpovídající dvojice oblastí sousedí hranou grafu G.

Na Obrázku 6.12 vlevo je rovinný graf G a modře vyznačený duální *multigraf* G'. Duální multigraf obecně může obsahovat násobné hrany a smyčky. Pokud však v duálním multigrafu G' odstraníme násobné hrany (násobné hrany odpovídají cestám v grafu G, jejichž vnitřní vrcholy mají stupeň 2) a smyčky (smyčky odpovídají hranám vrcholu stupně 1), tak dostaneme jednoduchý graf (Obrázek 6.12 vpravo). Dá se ukázat, že tento duální multigraf G' i zjednodušený duální graf k rovinnému grafu jsou opět rovinné grafy.



Obrázek 6.12 Graf G s modře vyznačeným duálním multigrafem a překreslený duální graf.

Duální graf je pro dané nakreslení grafu určen jednoznačně, ale pro různá nakreslení téhož grafu můžeme dostat různé neisomorfní duální grafy.

Máme tedy rovinný graf G a hledáme jeho dobré vrcholoví barvení. Kolik nejméně barev potřebujeme? Tuto otázku si položil Francis Guthrie už v roce 1852. Všiml si, že při obarvování map Anglie vystačí se čtyřmi barvami. Během následujících let se o důkaz, že čtyři barvy stačí, pokoušela řada matematiků. Až v roce 1976 Appel a Haken (a později v roce 1993 jiným způsobem Robertson, Seymour, Sanders a Thomas), dokázali větu, která rozřešila problém čtyř barev. Jedná se o jeden z nejslavnějších výsledků diskrétní matematiky:

Věta 6.24 (Věta o čtyřech barvách). *Každý rovinný graf bez smyček lze obarvit čtyřmi barvami.*

Důkaz je velmi rozsáhlý, vydal by na samostatnou knihu, a proto jej vynecháme.

Není však těžké ukázat jednodušší tvrzení, že pro obarvení rovinného grafu stačí 6 barev. Také pro rovinné grafy bez trojúhelníků větu o čtyřech barvách dokážeme snadno.

Věta 6.25. *Každý rovinný graf lze obarvit šesti barvami. Každý rovinný graf bez trojúhelníků lze obarvit čtyřmi barvami.*

Důkaz. Tvrzení ukážeme indukcí vzhledem k počtu vrcholů.
Základ indukce: Graf s 1 vrcholem je jistě rovinný a na jeho dobré vrcholové barvení stačí jedna barva.
Indukční krok: Mějme graf s alespoň dvěma vrcholy. A předpokládejme, že pro všechny menší rovinné grafy tvrzení platí.

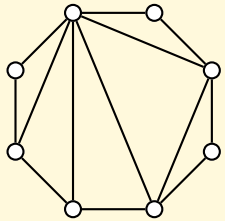
Podle Důsledku 6.15 najdeme v grafu G vrchol v stupně nejvýše 5. Graf $G - v$ je opět jednoduchý rovinný graf bez smyček i trojúhelníků. Podle indukčního předpokladu lze tento menší graf obarvit šesti barvami. Z nich jen nejvýše pět bude použito na obarvení sousedů vrcholu v a tak šestou nepoužitou barvu můžeme *vždy* použít na obarvení vrcholu v. Tím dostaneme dobré vrcholové barvení grafu G.

Druhá část se dokáže analogicky s využitím druhé části Důsledku 6.15. □

Všimněte si, že důkaz je konstruktivní. Dává jednoduchý návod, jak najít dobré vrcholové obarvení rovinného grafu nejvýše šesti barvami. Podle Věty 6.24 však víme, že budou stačit čtyři barvy. Bohužel optimální algoritmus barvení je komplikovaný a přesahuje rámec našeho

textu. Algoritmus naznačený v důkazu věty 6.25 nemusí dát barvení s nejmenším možným počtem barev.

Příklad 6.26. Určete barevnost rovinného grafu na Obrázku 6.13.



Obrázek 6.13 Graf G

Řešení. Graf G je rovinný, proto podle Věty 6.24 na jeho obarvení potřebujeme nejvýše čtyři barvy. Proto $\chi(G) \leqq 4$. Na druhou stranu snadno najdeme v grafu G podgraf K_3, proto potřebujeme podle Věty 6.8 na obarvení grafu G alespoň tři barvy: $\chi(G) \geqq 3$. Nyní víme $3 \leqq \chi(G) \leqq 4$. Protože na Obrázku 6.14 se nám podařilo najít obarvení grafu G třemi barvami, tak platí $\chi(G) = 3$. ▲

Pojmy k zapamatování

— duální graf

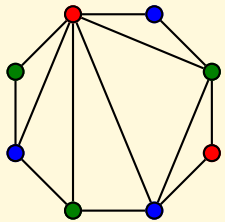
— věta o čtyřech barvách

Obsah

220. strana ze 272

Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno



Obrázek 6.14 Obarvení grafu G třemi barvami.

6.5. Test

Následuje jednoduchý test, pro nalezení správné odpovědi jedné otázky není potřeba více než půl minuty.

Zacátek testu **Barevnost a kreslení grafů**

1. Aby dané barvení grafu bylo dobré, musí platit, že

   (a) Každý vrchol má jinou barvu.
   (b) Každé dva sousední vrcholy mají jinou barvu.
   (c) Alespoň jeden soused každého vrcholu má jinou barvu, než samotný vrchol.
   (d) Počet použitých barev je alespoň $\Delta(G)$.
   (e) Pro každý vrchol mají všechny s ním sousední vrcholy navzájem různé barvy.
   (f) Pro každý vrchol mají všechny s ním sousední vrcholy jinou barvu než samotný vrchol.

2. Jaké je barevnost (chromatické číslo) netriviálního stromu?

3. Jaká je barevnost (chromatické číslo) kompletních bipartitních grafů?

4. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?

   (a) Barevnost (chromatické číslo) každého lichého cyklu je právě 3.
   (b) Barevnost (chromatické číslo) každého lichého cyklu je alespoň 3.
   (c) Barevnost (chromatické číslo) každého cyklu je 2.

(d) Jestliže graf G není kompletní, tak barevnost (chromatické číslo) grafu G je nejvýše $\Delta(G)$.

(e) Jestliže graf G není lichý cyklus, tak barevnost (chromatické číslo) grafu G je nejvýše $\Delta(G)$.

(f) Barevnost (chromatické číslo) kompletního bipartitního grafu je $\min\{\delta(G), \Delta(G)\}$.

(g) Barevnost (chromatické číslo) kompletního bipartitního grafu je $\max\{\delta(G), \Delta(G)\}$.

5. Jaká je barevnost (chromatické číslo) grafu G víme-li, že G obsahuje lichý cyklus jako podgraf?

(a) alespoň 2,
(b) alespoň 3,
(c) nejvýše 2,
(d) nejvýše 3,
(e) právě 2,
(f) právě 3.

6. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?

(a) Barevnost (chromatické číslo) grafu G je právě n, jestliže G obsahuje podgraf K_n.

(b) Barevnost (chromatické číslo) grafu G je alespoň n, jestliže G obsahuje podgraf K_n.

(c) Barevnost (chromatické číslo) grafu G je nejvýše n, jestliže G obsahuje podgraf K_n.

(d) Barevnost (chromatické číslo) grafu G je n, jestliže $\Delta(G) = n$.

(e) Barevnost (chromatické číslo) grafu G je n, jestliže $\delta(G) = n$.

(f) Barevnost (chromatické číslo) grafu G je n, jestliže $\delta(G) = \Delta(G) = n$.

7. Jaká je barevnost rovinného grafu G?

(a) 2,
(b) 4,
(c) $|V(G)|$,
(d) $\Delta(G)$,
(e) $\Delta(G) + 1$,
(f) ani jedna z uvedených možností není správně.

Obsah
223. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

8. Graf G m8 barevnost 1 právě tehdy, když?

(a) je kompletní,
(b) má nejvýše dva vrcholy,
(c) neobsahuje lichý cyklus,
(d) není souvislý,
(e) neobsahuje žádnou hranu,
(f) neobsahuje vrchol stupně $|V(G)| - 1$.

9. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?

(a) Graf je rovinný, jestliže je možno jej nakreslit v rovině tak, aby se hrany nekřížily.
(b) Graf je rovinný, jestliže neobsahuje podgraf $K_{3,3}$.
(c) Graf je rovinný, jestliže neobsahuje podgraf K_5.
(d) Graf je rovinný, jestliže neobsahuje podgraf $K_{3,3}$ ani K_5.
(e) Graf K_6 bez jedné hrany je rovinný.
(f) Graf K_5 není rovinný.

10. Označme v počet vrcholů rovinného grafu G, h počet jeho hran a f počet jeho oblastí. Podle Eulerova vzorce v každém souvislém rovinném grafu platí následující rovnost:

(a) $v + f + h = 2$,
(b) $v - f + h = 2$,
(c) $v - f - h = 2$,
(d) $v + f - h = 2$,

11. V rovinném nakreslení grafu máme 10 vrcholů a 15 hran. Kolik je v rovinném nakreslení oblastí?

(a) 3 oblasti,
(b) 5 oblastí,
(c) 7 oblastí,
(d) počet oblastí závisí na nakreslení grafu.

12. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?

(a) V rovinném grafu na v vrcholech je nejvýše $3v - 6$ hran.
(b) V rovinném grafu bez trojúhelníků C_3 na v vrcholech je nejvýše $2v - 4$ hran.

Obsah
224. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

(c) V rovinném grafu je nejvyšší stupeň vrcholu nejvýše 5 hran.
(d) V rovinném grafu bez trojúhelníků je nejvyšší stupeň vrcholu nejvýše 3 hran.
(e) Jestliže počet hran v grafu na v vrcholech je nejvýše $3v - 6$, tak graf je rovinný.
(f) Jestliže počet hran v grafu bez trojúhelníků C_3 na v vrcholech je nejvýše $3v - 6$, tak graf je rovinný.

13. Abychom ukázali, že daný graf G na v vrcholech není rovinný, stačí

(a) ukázat, že G obsahuje vrchol stupně 6 nebo většího,
(b) ukázat, že G má více než $3v - 6$ hran,
(c) ukázat, že G obsahuje podgraf K_5,
(d) ukázat, že G obsahuje podgraf $K_{3,3}$,
(e) ukázat, že G obsahuje podgraf K_5 a současně $K_{3,3}$,
(f) ukázat, že G obsahuje podgraf K_5 nebo $K_{3,3}$.

14. Abychom ukázali, že daný graf G bez trojúhelníků C_3 na v vrcholech není rovinný, stačí

(a) ukázat, že G obsahuje vrchol stupně 4 nebo většího,
(b) ukázat, že G má více než $2v - 4$ hran,
(c) ukázat, že G obsahuje podgraf K_5,
(d) ukázat, že G obsahuje podgraf $K_{3,3}$,
(e) ukázat, že G obsahuje podgraf K_5 a současně $K_{3,3}$,
(f) ukázat, že G obsahuje podgraf K_5 nebo $K_{3,3}$.

15. Jestliže graf G na v vrcholech není rovinný, tak musí platit, že

(a) G obsahuje vrchol stupně 6 nebo většího,

(b) G má více než $3v - 6$ hran,
(c) G obsahuje jako podgraf rozdělení grafu K_5,
(d) G obsahuje jako podgraf rozdělení grafu $K_{3,3}$,
(e) G obsahuje jako podgraf rozdělení grafu K_5 a současně $K_{3,3}$,
(f) G obsahuje jako podgraf rozdělení grafu K_5 nebo $K_{3,3}$.

16. Jestliže graf G bez trojúhelníků C_3 na v vrcholech není rovinný, tak musí platit, že

(a) G obsahuje vrchol stupně 4 nebo většího,
(b) G má více než $2v - 4$ hran,
(c) G obsahuje jako podgraf rozdělení grafu K_5,
(d) G obsahuje jako podgraf rozdělení grafu $K_{3,3}$,
(e) G obsahuje jako podgraf rozdělení grafu K_5 a současně $K_{3,3}$,
(f) G obsahuje jako podgraf rozdělení grafu K_5 nebo $K_{3,3}$.

17. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?

(a) Každý rovinný graf lze dobře obarvit třemi barvami.
(b) Každý rovinný graf lze dobře obarvit čtyřmi barvami.
(c) Každý rovinný graf lze dobře obarvit pěti barvami.
(d) Každý rovinný graf lze dobře obarvit šesti barvami.

18. Kolik nejméně vrcholů musí mít rovinný graf s barevností 3?

19. Kolik nejméně vrcholů musí mít rovinný graf s barevností 4?

Obsah
226. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Konec testu | Oprava testu

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:

Obsah

227. strana ze 272

Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Kapitola 7

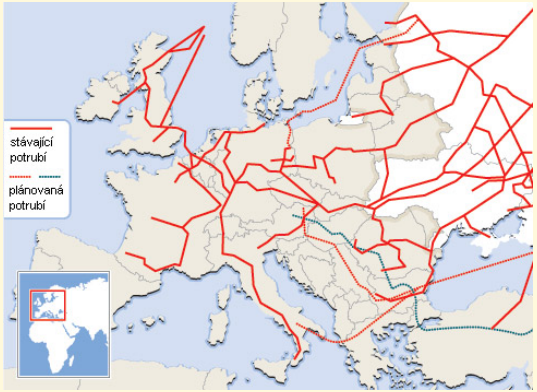
Toky v sítích

Průvodce studiem

Teorie grafů hraje klíčovou roli při řešení řady síťových úloh. Máme dánu síť (počítačovou síť, produktovod, a podobně), kde hrany reprezentují spojení a vrcholy jsou například křižovatky nebo switche.

Je přirozené, že hrany a vrcholy mají omezenou kapacitu, která je dána nějakým číslem (a fyzikální jednotkou). Hlavní otázka zní: Jaký největší objem látky nebo dat můžeme přepravit po síti s danými omezeními z výchozího vrcholu z do cílového vrcholu s. Této úloze se říká hledání největšího toku v síti.

Na Obrázku 7.1 je mapa ropovodů a plynovodů v Evropě. V posledních letech se často řešila otázka, zda je možno dopravit dostatečný objem plynu z míst těžby na východě a na severu do míst spotřeby ve střední Evropě.



Obrázek 7.1 Trasy evropských plynovodů.

V této kapitole zavedeme nutné pojmy připravíme teoretické nástroje k tomu, abychom uměli největší tok v dané síti najít.

7.1. Definice sítě

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete schopni:

- popsat následující pojmy: síť, kapacity hrany a tok v síti,
- vysvětlit a pro konkrétní síť ověřit platnost zákona kontinuity,
- vysvětlit rozdíl mezi běžným uzlem sítě, zdrojem a stokem v síti,

Obsah
229. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

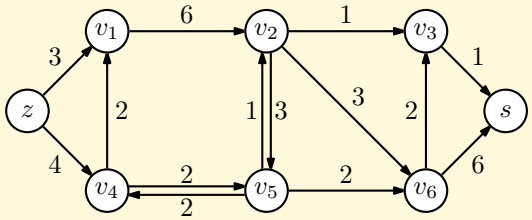
- sestavit graf sítě odpovídající reálné úloze.

Na straně 15 jsme definovali orientovaný graf. Připomeňme, že množina (orientovaných) hran E v orientovaném grafu obsahuje *uspořádané* dvojice vrcholů. Pro orientovanou hranu $e = (u, v)$ rozlišujeme počáteční vrchol u a koncový vrchol v.

Pod pojmem síť budeme rozumět orientovaný graf, ve kterém máme dva význačné vrcholy (zdroj a stok) a ohodnocené hrany (stanovíme kapacity hran).

Definice 7.1. *Síť* je čtveřice $S = (G, z, s, w)$, kde G je orientovaný graf. Vrcholy $z \in V(G)$, $s \in V(G)$ budeme nazývat *zdroj* a *stok* v síti S. Funkce $w : E(G) \to \mathbf{R}^+$ je kladné ohodnocení hran, které každé hraně přiřadí tzv. *kapacitu* hrany.

Někdy budeme pro zjednodušení říkat síť G, přičemž zdroj stok i kapacity hran budou známy z kontextu. Příklad sítě je na Obrázku 7.2.



Obrázek 7.2 Síť (G, z, s, w).

Uvědomte si, že kapacita hrany nemusí nutně odpovídat fyzikální kapacitě. Číslo přiřazené hraně může reprezentovat šířku vozovky, maximální počet automobilů, který cestou projede za jednu minutu, tloušťku potrubí, počet přenesených megabytů za vteřinu, odpor vodiče a podobně. Při popisu se budeme držet terminologie, která vychází z dopravy

Obsah
230. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

tekutin. Umožní to výstižné formulace a názornou představu. Budeme mluvit o množství, které „teče“ hranou, budeme zkoumat, kolik jednotek „přitéká“ do vrcholu a kolik z vrcholu „odtéká“.

Budeme řešit úlohu nalezení největšího toku: jaký je největší objem, který můžeme v dané síti dopravit ze zdroje do místa spotřeby? Je samozřejmé, že musíme dodržet maximální stanovené kapacity hran, tj. hranou nikdy nesmí být přepravováno větší množství, než udává kapacita hrany.

Na druhou stranu je nutné si uvědomit, že největší tok neznamená prosté naplnění všech hran na maximální kapacitu. Takový postup by ani nemuset odpovídat fyzikální realitě! Například do vrcholu v_1 v síti na Obrázku 7.2 může přitékat maximálně pět jednotek, zatímco kapacita odchozí hrany by pojala šest jednotek. Tato kapacita šesti jednotek nemůže být nikdy naplněna. Proto kromě pojmu „kapacita hrany“ zavedeme ještě pojem „tok hranou.“

Pro zjednodušení zápisu zavedeme následující značení: Symbolem $e \to v$ označíme všechny *příchozí* hrany do vrcholu v a symbolem $e \leftarrow v$ označíme všechny *odchozí* hrany z vrcholu v. Oba symboly reprezentují množiny orientovaných hran grafu G.

$$e \to v = \{uv : u \in V(G) \wedge (u, v) \in E(G)\}$$

$$e \leftarrow v = \{vu : u \in V(G) \wedge (v, u) \in E(G)\}$$

Nyní zavedeme tok v síti jako ohodnocení hran, přičemž budeme požadovat, aby ohodnocení splňovalo určité vlastnosti.

Obsah
231. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Definice 7.2. *Tok* v síti $S = (G, z, s, w)$ je funkce $f : E(G) \to \mathbf{R}_0^+$, pro kterou platí následující vlastnosti

i) ohodnocení hrany se nazývá *tok hranou* a nesmí nepřekročit kapacitu hrany

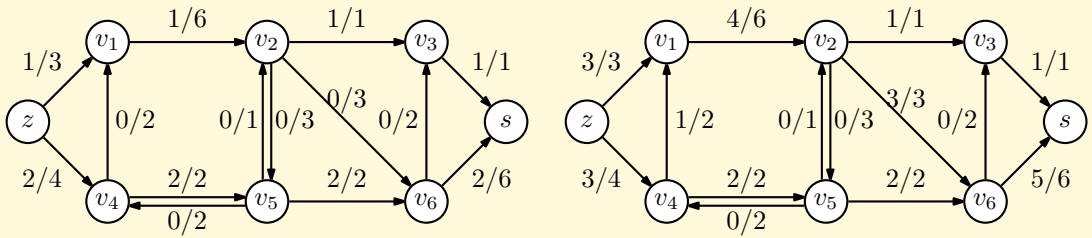
$$\forall e \in E(G) : 0 \leqq f(e) \leqq w(e),$$

ii) pro všechny vrcholy s výjimkou zdroje a stoku platí *zákon kontinuity*

$$\forall v \in V(G), v \neq z, s : \sum_{e \to v} f(e) = \sum_{e \leftarrow v} f(e).$$

Velikost toku f označíme $\|f\|$ a je dána vztahem

$$\|f\| = \sum_{e \leftarrow z} f(e) - \sum_{e \to z} f(e).$$



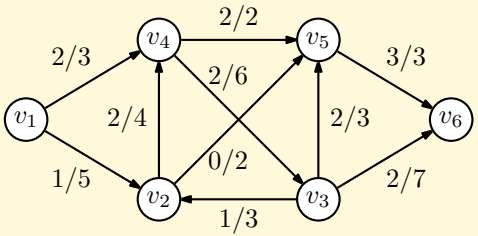
Obrázek 7.3 Tok a největší tok v síti (G, z, s, w).

Obsah
232. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Na Obrázku 7.3 vidíme příklady toků v nějaké síti. Čísla a/b přiřazená hranám mají význam toku a kapacity příslušné hrany. Například hranou zv_1 v síti vlevo teče jedna jednotka, zatímco kapacita hrany je 3, hrana v_2v_3 má nasycenou kapacitu a tok hranou v_2v_6 je nulový, třebaže její kapacita je 3.

Uvědomte si, že zákon kontinuity říká: „co do vrcholu přiteče, to z vrcholu odteče“. Tato rovnost však obecně neplatí pro zdroj ani stok, protože ze zdroje (místa vzniku nebo výroby) odtéká do sítě více jednotek než do zdroje přitéká a naopak do stoku (místa spotřeby) přitéká ze sítě více jednotek než ze stoku odtéká.

Složitější síť může obsahovat více zdrojů a stoků. V další sekci ukážeme jak některé obecnější úlohy převést na základní úlohu popsanou sítí z Definice 7.2.



Obrázek 7.4 Síť s vyznačeným tokem i kapacitami hran.

Příklad 7.3. Které vrcholy v síti na Obrázku 7.4 jsou zdroje? A které vrcholy jsou stoky?

Řešení. Ověříme platnost zákona kontinuity pro každý vrchol. Vidíme, že z vrcholu v_1 odtéká $1+2=3$ jednotky a jedná se proto o zdroj. Do vrcholu v_2 přitékají i odtékají dvě jednotky, nejedná se o zdroj ano o stok. Do vrcholu v_3 přitékají dvě jednotky, ale odtéká celkem $1+2+2=5$ jednotek, proto je vrchol v_3 druhým zdrojem v dané síti. Do vrcholu v_4

přitékají i odtékají čtyři jednotky, nejedná se o zdroj ano o stok. Do vrcholu v_5 přitékají $2+2=4$ jednotky, ale odtékají jen 3 jednotek, proto je vrchol v_5 stokem v dané síti. A konečně do vrcholu v_6 přitéká $2+3=5$ jednotek, proto je vrchol v_6 druhým stokem v dané síti. ▲

Všimněte si, že definice toku v síti nevylučuje možnost, že i do zdroje mohou přicházet hrany s nenulovým tokem a ze stoku mohou odcházet hrany s nenulovým tokem. Proto je velikost toku rovna rozdílu všeho, co ze zdroje odteče a toho co do zdroje přiteče.

Snadno ověříte, že pro každý vrchol sítí na Obrázku 7.3 (kromě zdrojů a stoků) platí zákon kontinuity a také že velikost toku v síti na Obrázku 7.3 vlevo je 3, zatímco vpravo je tok o velikosti 6, který je největší. Později v této kapitole ukážeme, jak poznat, že tok je největší možný a jak takový tok najít.

Už jsme řekli, že pro zdroj a stok obecně *neplatí* zákony kontinuity! Ze zdroje odtéká více jednotek než do zdroje přitéká a do stoku přitéká více než ze stoku odtéká avšak tento rozdíl musí být pro oba vrcholy (až na znaménko) stejný. Toto pozorování shrneme jako tvrzení.

Lemma 7.4. *Označíme-li f_z rozdíl toků na odchozích hranách a na příchozích hranách do zdroje a označíme-li f_s rozdíl toků na odchozích hranách a na příchozích hranách do stoku, platí $f_z = -f_s$.*

Důkaz. Tvrzení ukážeme přímo. Mějme síť $G(V,E)$ se zdrojem z, stokem s a tokem f. Využijeme následující trik: napíšeme nulu jako rozdíl dvou stejných výrazů $f(e) - f(e)$ pro každou hranu $e \in E(G)$ v síti.

$$0 \quad = \quad \sum_{e \in E(G)} (f(e) - f(e))$$

Nyní přeorganizujeme sčítance sum tak, aby jsme pro každý vrchol sečetli ohodnocení

Obsah
234. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

všech odchozích hran a odečteme pro každý vrchol součet ohodnocení všech příchozích hran.

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{v\in V(G)} \sum_{e\leftarrow v} f(e) - \sum_{v\in V(G)} \sum_{e\rightarrow v} f(e) \\ &= \sum_{v\in V(G)} \left(\sum_{e\leftarrow v} f(e) - \sum_{e\rightarrow v} f(e) \right) \end{aligned}$$

Podle zákona kontinuity je pro každý vrchol (s výjimkou zdroje z a stoku s) rozdíl $\sum_{e\leftarrow v} f(e) - \sum_{e\rightarrow v} f(e)$ roven nule. Dostaneme součet s pouze dvěma sčítanci.

$$0 = \sum_{v\in\{z,s\}} \left(\sum_{e\leftarrow v} f(e) - \sum_{e\rightarrow v} f(e) \right)$$

Odtud ihned dostaneme hledané tvrzení.

$$\left(\sum_{e\leftarrow z} f(e) - \sum_{e\rightarrow z} f(e) \right) = -\left(\sum_{e\leftarrow s} f(e) - \sum_{e\rightarrow s} f(e) \right)$$

□

Kontrolní otázky

1. Může existovat síť, kde pro zdroj i stok platí zákon kontinuity?
2. Může existovat síť s nenulovým tokem, kde pro zdroj i stok platí zákon kontinuity?
3. Může existovat síť s nenulovým tokem na odchozích hranách ze stoku, kde však pro zdroj i stok platí zákon kontinuity?

Poznámka 7.5. Zdroj se v anglické literatuře nazývá „source“ a stok se nazývá „sink“. V české v literatuře se stoku říká také „nor“, podobně jako se nazývá místo, kde řeka

Obsah
235. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

přechází pod zem.

Obrázek 7.5 Řeka Punkva v Moravském krasu.

Pojmy k zapamatování

— síť
— zdroj a stok v síti
— tok a velikost toku v síti

7.2. Hledání největšího toku

Průvodce studiem

V předchozí sekci jsme ukázali, jak popsat reálnou dopravní nebo komunikační úlohu sítí, tj. grafem s předepsanými kapacitami hran a vyznačeným výchozím i cílovým místem dopravy nebo komunikace. Nyní ukážeme, jak najít co možná největší objem dopravované látky nebo dat v této síti s předepsanými omezeními.

Cíle

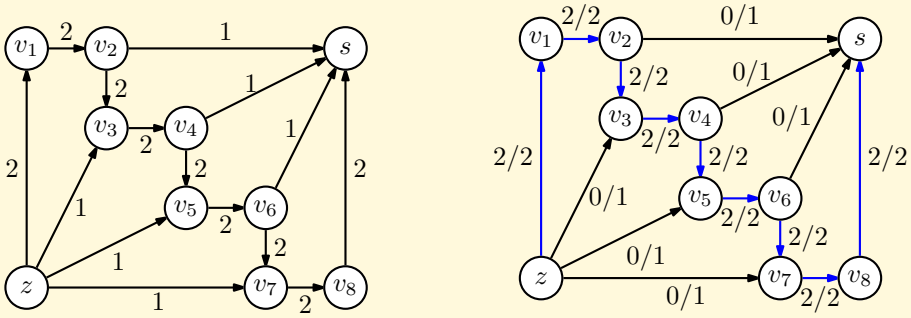
Po prostudování této kapitoly budete schopni:

- popsat, co je to řez v síti a vysvětlit, jak souvisí s tokem v síti,
- vysvětlit pojem „nenasycená cesta“ v síti a nenasycené cesty v dané síti najít,
- najít největší tok v dané síti.

Hlavním úkolem, kterému se věnuje tato kapitola, je nalezení co největšího toku ze zdroje do stoku v síti dané orientovaným grafem G s předepsanými kapacitami hran. V sekci 5.4 jsme při hledání minimální kostry s výhodou využili hladový algoritmus. Bohužel, při hledání největšího toku v síti hladový algoritmus obecně *nevede* k nejlepšímu řešení! Na Obrázku 7.6 vlevo je příklad sítě s kapacitami hran, pro který hladový algoritmus selže.

Budeme-li hladový algoritmus hledat co nejvýhodnější cestu v síti, tak využije cestu z, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, s, po které může zvýšit tok o dvě jednotky (Obrázek 7.6 vpravo). Užitím hladového algoritmu najdeme tok o velikosti 2. Potom sice vedou ještě nenasycené hrany ze zdroje do vrcholů v_3, v_5 a v_7, ale z ani jednoho z těchto vrcholů již nevede hrana, která by měla volnou kapacitu. Tok už nemůžeme zvýšit přidáním nějaké

Obsah
237. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obrázek 7.6 Příklad sítě, kdy hladový algoritmus nedá optimální řešení.

cesty s nenulovým tokem, avšak nalezený tok není největší, neboť v dané síti existuje tok velikosti 5 (Obrázek 7.7).

Uvědomte si, že vůbec nemusí být na první pohled jasné, zda nalezený tok je největší. Abychom uměli poznat, že nějaký tok je největší možný, zavedeme tzv. „řez“ v grafu. Jeli X množina hran grafu, tak symbolem $G - X$ budeme rozumět graf, který vznikne z grafu G odebráním hran množiny X.

Definice 7.6. *Řez* v síti $S = (G, z, s, w)$ je taková podmnožina hran $C \subseteq E(G)$, že v grafu $G - C$ nezůstane žádná orientovaná cesta ze zdroje z do stoku s.
Kapacitu (nebo velikostí) řezu C značíme $\|C\|$ a definujeme ji jako součet kapacit všech hran řezu C, tj. $\|C\| = \sum_{e \in C} w(e)$.

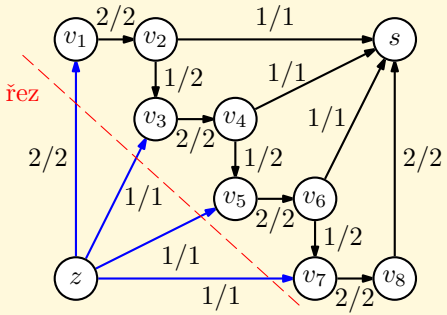
Obsah
238. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Pro označení řezu používáme písmeno „C“ podle anglického termínu „cut“. Význam řezu je jasný, odebrání hran řezu rozdělí, „rozřízne“', graf na nesouvislý graf tak, že stok se nachází v jiné komponentě než zdroj. Následující věta ukáže, že řez je klíčovým nástrojem pro rozpoznání, zda nějaký tok je největší.

Věta 7.7. *Velikost největšího toku v síti je rovna kapacitě minimálního řezu.*

Důkaz Věty 7.7 uvedeme později, na straně 241.

Na Obrázku 7.7 je příklad řezu, který je vyznačen modře. Zdůrazněme, že řez je množina modrých hran. Červená čára jen naznačuje, jak bude vypadat graf $G - C$.



Obrázek 7.7 Příklad sítě, s největším tokem o velikosti 5 a řezem s kapacitou 5.

Věta 7.7 je dobrou charakterizací největšího toku. Podle ní snadno poznáme, že tok o velikosti $\|f\|$ v dané síti je největší, jestliže najdeme řez o velikosti $\|C\| = \|f\|$. Zatím ještě neumíme největší tok najít.

Obsah
239. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

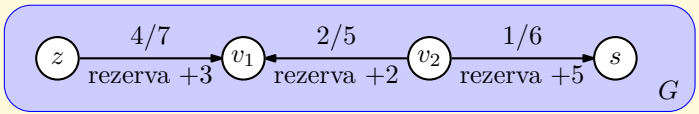
Zatím jsme mlčky předpokládali, že při zvětšování toku po nějaké cestě ze zdroje do stoku musíme vždy postupovat „ve směru šipek“. Ukazuje se, že v algoritmu hledání největšího toku s takovými cestami nevystačíme a budeme pracovat i s cestami, jejichž některé hrany budou orientovány „proti“ postupu ze zdroje do stoku, ovšem za předpokladu, že taková hrana už má nenulový (opačný) tok, který budeme moci „přetlačit“ a snížit.

Definice 7.8. Máme dánu síť $S = (G, z, s, w)$ a v ní tok f. *Nenasycená cesta* v síti S je *neorientovaná* cesta $e_1, e_2, \ldots, e_m$ v orientovaném grafu G z vrcholu u do vrcholu v (obvykle ze zdroje z do stoku s), kde

- tok nedosahuje kapacity ($f(e_i) < w(e_i)$) pro hrany e_i „ve směru“ z u do v,
- tok je nenulový ($f(e_i) > 0$) pro hrany e_i v opačném směru.

Hodnotě $w(e_i) - f(e_i)$ pro hrany e_i ve směru z vrcholu u do vrcholu v říkáme *rezerva kapacity* hrany e_i a stejně říkáme hodnotě $f(e_i)$ pro hrany e_i v opačném směru.

Nenasycená cesta je cesta s kladnými rezervami kapacit všech hran. Na Obrázku 7.8 je nejmenší taková rezerva kapacit hran označena δ.



Obrázek 7.8 Cesta s rezervou kapacit $\delta = 2$.

Nyní můžeme popsat algoritmus, který v dané síti najde největší tok.

Obsah
240. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Algoritmus 7.1 (Ford–Fulkersonův algoritmus).

```
vstup < síť S = (G,z,s,w);
výchozí tok f je pro každou hranu nulový;

do {
    prohledáním grafu najdeme množinu U vrcholů G,
    dosažitelných ze z po nenasycených cestách;
    if (s náleží U) {
       P = nějaká (výše nalezená) nenasycená cesta v S ze z do s;
       zvětšíme tok f o minimální rezervu kapacit hran cesty P;
} while (s náleží U);
výstup:  vypíšeme největší tok f;
výstup:  minimální řez je množina hran vedoucích z U do V(G)-U.
```

Nyní ukážeme, že Algoritmus 7.1 pracuje správně. Navíc ukážeme, na konci běhu algoritmu dostaneme tok, jehož velikost se rovná kapacitě nějakého řezu a tím současně ukážeme platnost Věty 7.7.

Věta 7.9. *Mějme síť $S = (G, z, s, w)$ s celočíselnými kapacitami hran. Algoritmus 7.1 najde největší tok v síti S.*

Důkaz. Důkaz správnosti algoritmu provedeme přímo.

Podle definice toku a řezu je zřejmé, že musí platit $\|f\| \leqq \|C\|$. Jestliže po skončení algoritmu budeme mít tok f a najdeme v síti S řez o stejné velikosti $\|C\| = \|f\|$, tak to znamená, že jsme našli největší možný tok v síti S, neboť $\|f\|$ nemůže přesáhnout $\|C\|$.

Stačí tedy dokázat, že po skončení algoritmu dostaneme rovnost $\|f\| = \|C\|$, kde C je řez mezi vrcholy v množině U a zbývající částí grafu G.

Předpokládejme, že máme tok f v síti S a že algoritmus skončil, protože už v síti není nenasycená cesty ze zdroje z do stoku s. To znamená, že množina U (po skončení algoritmu) neobsahuje vrchol s (už není dosažitelný po nenasycené cestě).

Z vrcholů množiny U nevedou žádné nenasycené hrany (ani cesty), ani do vrcholů množiny U nevedou hrany s nenulovým tokem, protože bychom koncové vrcholy takových hran mohli přidat do množiny U. Označme množinu všech hran odcházející z množiny U symbolem $e \leftarrow U$ a množinu všech hran přicházející do množiny U symbolem $e \rightarrow U$. Každá z hran v $e \leftarrow U$ má plný tok $f(e) = w(e)$ a každá hrana v $e \rightarrow U$ má nulový tok $f(e) = 0$, jinak by množina U neodpovídala algoritmu.

Odstraněním všech hran množiny $e \leftarrow U$ z grafu přerušíme všechny cesty ze zdroje do stoku, proto je tato množina současně řezem C v dané síti. Vypočítáme velikost toku f ze zdroje z do stoku s:

$$\|f\| = \sum_{e \leftarrow U} f(e) - \sum_{e \rightarrow U} f(e) = \sum_{e \leftarrow U} f(e) - 0 = \sum_{e \in C} w(e) = \|C\| .$$

Vidíme, že velikost toku f, je rovna kapacitě řezu C. To znamená, algoritmus pracuje správně a najde největší tok i minimální řez. To je dokazované tvrzení. □

Uvedený algoritmus nejen najde největší tok s velikostí $\|f\|$, ale snadno sestavíme i minimální řez s kapacitou $\|C\|$.

Poslední tvrzení této sekce ukazuje jedno pěkné pozorování: Největší tok v síti vždy plně využije kapacity hran nějakého řezu a proto je velikost toku součtem ohodnocení hran řezu. To znamená, že budou-li všechny kapacity celá čísla, bude i velikost toku celočíselná.

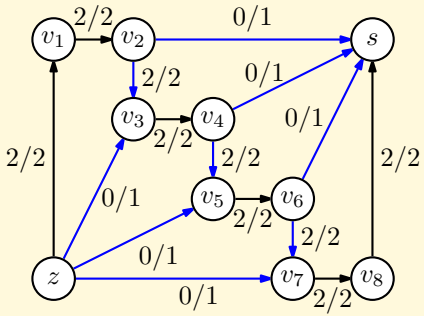
Obsah
242. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Důsledek 7.10. *Jsou-li kapacity hran sítě S celočíselné, tak největší tok v síti bude také celočíselný.*

Příklad 7.11. Najděte nenasycené cesty v síti na Obrázku 7.6 vpravo.

Řešení. Nenasycených cest existuje v dané síti šest různých (najdete je?). My vyznačíme tři z nich, které jsou interně disjunktní a každá z nich má rezervu kapacit rovnu 1.

Na Obrázku 7.9 jsou nenasycené cesty vyznačeny modře. Zvětšením toku pomocí těchto nenasycených cest dostaneme tok o velikosti 5, který je největší a který je uveden na Obrázku 7.7. Také řez uvedený na Obrázku 7.7 se shoduje s minimálním řezem, který sestavíme pomocí Algoritmu 7.1. ▲



Obrázek 7.9 Příklad tří nenasycených cest v síti.

Obsah
243. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Pro zájemce

Uvědomte si, že část pseudokódu Algoritmu 7.1 je velmi volně zformulována. Neříká, jakým způsobem najdeme nenasycené cesty, protože postup závisí na konkrétní implementaci sítě. Můžeme postupovat například modifikovaným Dijkstrovým algoritmem 4.3 a pro každý vrchol ukládat největší rezervu a předchozí vrchol pro snadnou rekonstrukci nenasycených cest. Tak můžeme dostat modifikaci Ford-Fulkersonova algoritmu, kde se v každém kroku použije nenasycená cesta s největší kapacitou. Můžeme však sestavit množinu U prohledáváním do šířky a dostaneme modifikaci Ford-Fulkersonova algoritmu, kde pracuje s nejkratšími nenasycenými cestami. Můžeme dokonce volit libovolnou nenasycenou cestu a vždy nakonec dostaneme tok se stejnou největší velikostí.

Poznámka 7.12. Je nutno upozornit, že v matematice rozlišujeme pojmy maximální a největší. Rozdíl je podrobně popsán v textu [6]. Zatímco „největší“ nabývá v porovnání s ostatními variantami největší možné hodnoty, tak „maximální“ obvykle chápeme jako stav, kdy daný parametr použitým postupem již nejde zvětšit. Pozor, nemusí se jednat o největší hodnotu, pouze říkáme, že daným postupem již nemůžeme získat stav s větší hodnotou parametru.

Proto se důsledně bavíme o „největším toku“ a ne o maximálním toku. Vždyť bez znalosti nenasycených cest můžeme chápat tok na Obrázku 7.6 jako maximální, který ale jistě není největším tokem v dané síti (Obrázek 7.7).

Pro zájemce

Je dobré upozornit, že pokud vynecháme požadavek, aby kapacity hran byly celočíselné (nebo racionální), tak je možno sestavit příklady jednoduchých sítí s iracionálními kapacitami, pro které Algoritmus 7.1 neskončí po *konečném* počtu kroků. Dokonce postupné iterace získané v průběhu algoritmus nemusí konvergovat k maximálnímu toku. Pokud jsou však všechny kapacity hran jsou celá

čísla, tak algoritmus dává správné výsledky. V důkazu jsme vycházeli z předpokladu celočíselnosti kapacit a předpokládali jsme, že algoritmus skončil.

Pojmy k zapamatování

— řez v síti

— nenasycená cesta v síti

— Ford-Fulkersonův algoritmus

7.3. Zobecnění sítí

Průvodce studiem

V předchozích sekcích jsme pečlivě popsali úlohu hledání největšího toku v síti s jediným zdrojem a jediným stokem. V praxi je běžné, že v dopravní nebo komunikační síti je však zdrojů i míst spotřeby mnoho. Pro řešení úlohy hledání největšího toku v síti s více zdroji a stoky nebudeme modifikovat algoritmus, ale ukážeme, jak jednoduchým trikem převést síť s více zdroji na síť se zdrojem jediným (a podobě s jediným stokem). Dále ukážeme, jak upravit síť s neorientovanými hranami tak, abychom mohli použít Algoritmus 7.1, který pracuje s orientovanými hranami.

V této sekci navíc ukážeme, jak úlohu hledání největšího toku v síti s danými kapacitami hran zobecnit na úlohu v síti, kde jsou navíc předepsané kapacity vrcholů a jak tuto úlohu řešit. Také se zmíníme o komplikacích, které přináší obecnější problém, kdy zkoumáme síť, ve které se přepravuje více různých komodit a upozorníme na chyby, kterých se musíme pro správné řešení vyvarovat. Na závěr zmíníme zobecnění úlohy (které souvisí například s přepravou pitné

vody), kdy máme pro každou hranu kromě maximální kapacity stanovenu požadavek minimální kapacity, kdy požadujeme, že danou hranou musí téci nějaké minimální předepsané množství.

Cíle

Po prostudování této kapitoly budete schopni:

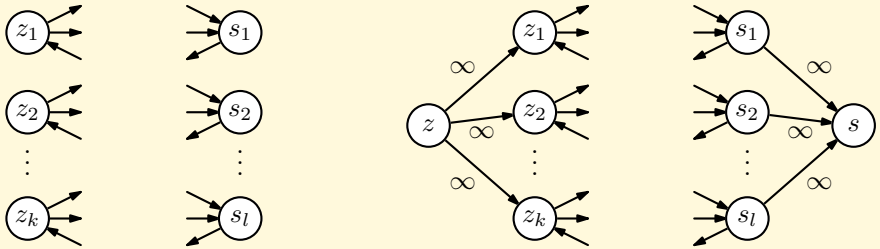
- převést úlohu hledání největšího toku v síti s více zdroji a stoky na úlohu s jediným zdrojem a jediným stokem,
- převést úlohu hledání největšího toku v síti s danými kapacitami vrcholů na úlohu v síti s kapacitami hran,
- vysvětlit rozdíl v přístupu k řešení mezi sítěmi s jediným a s více dopravovanými produkty.

Jak jsme zmínili v úvodu, dopravní nebo komunikační síť může mít předepsané kapacity vrcholů, minimální kapacity hran, v síti se může vyskytovat více zdrojů a stoků a může se dopravovat více různých produktů. Ukážeme, že některé z těchto úloh můžeme převézt na základní úlohu nalezení největšího toku v síti řešitelnou Algoritmem 7.1. Místo abychom sestavovali nové algoritmy, tak ukážeme, jak modifikovat samotnou síť a využít už popsaný (a dokázaný) Algoritmus 7.1. V následujících odstavcích se věnujeme postupně různým zobecněním.

7.3.0.41. Více zdrojů a stoků v síti

Vyskytuje-li se v grafu sítě více zdrojů nebo stoků, můžeme úlohu jednoduše převést na úlohu s jediným zdrojem a jediným stokem. Stačí, když do sítě přidáme jeden nový „hlavní“ zdroj a spojíme jej orientovanou hranou s každým ze zdrojů v síti (Obrázek 7.10). Kapacity

nových hran stanovíme dostatečně vysoké, pro názornost jsme v obrázku zvolili kapacitu ∞. Podobně přidáme nový „hlavní“ stok. Tak dostaneme síť s jediným zdrojem a jediným stokem a není těžké si rozmyslet, že nalezení největšího toku v nové síti je ekvivalentní úloze nalezení největšího toku v původní síti.



Obrázek 7.10 Převedení sítě s více zdroji a stoky (vlevo) na síť s jediným zdrojem a stokem (vpravo).

Můžeme dokonce stanovit kapacity jednotlivých zdrojů a stoků, protože v praxi je přirozené požadovat, že místa výroby nebo spotřeby mají také omezenou kapacitu. Abychom stanovili kapacitu c_i zdroje z_i, tak hraně zz_i místo kapacity ∞ přiřadíme kapacitu c_i.

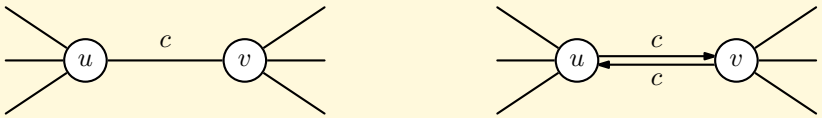
Pro zájemce

Novému zdroji se někdy říká „superzdroj“ a stoku „superstok“ z anglického „supersource“ a „supersink“. Slovíčko „super“ má v tomto kontextu význam „nadřazený“, ne „vynikající“.

7.3.0.42. Neorientované hrany

Pokud máme například kanalizační potrubí, tak orientace hran je jasná, protože voda teče vždy dolů. U silniční sítě je orientace většinou také daná, protože jízdní směry jsou oddělené a každý směr má svůj jízdní pruh. Avšak u produktovodů mohou být hrany orientované (komoditu můžeme dopravovat jen jedním směrem), ale i neorientované, kdy směr dopravy může být řízen podle potřeby (například některé plynovody a ropovody). A konečně informační nebo počítačové síti odpovídá většinou neorientovaný graf, protože komunikace probíhá oběma směry.

Uvědomte si, že Algoritmus 7.1 funguje správně jen pro orientované grafy, tedy takové grafy, kde každá hrana je orientovaná. Při hledání nenasycených cest pečlivě rozlišujeme orientaci hran a pro správné ukončení algoritmu je rozlišení souhlasně a nesouhlasně orientovaných hran klíčové.



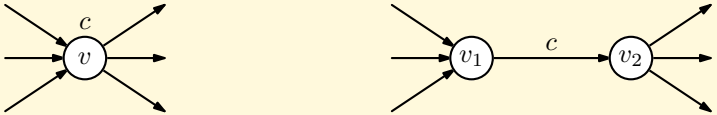
Obrázek 7.11 Nahrazení neorientované hrany dvojicí opačně orientovaných hran.

Naštěstí můžeme snadno neorientovanou hranu v síti eliminovat, když ji nahradíme dvojicí opačně orientovaných hran se stejnou kapacitou (Obrázek 7.11). Ale pozor, po skončení algoritmu se může stát, že existuje nenulový tok oběma opačně orientovanými hranami. To neodpovídá realitě, neboť ve skutečnosti je mezi koncovými uzly spojnice jediná. Tok původní (neorientovanou) hrany je dán rozdílem hodnot toků na obou orientovaných hranách a směr toku odpovídá směru hrany s větší hodnotou nalezeného toku.

Obsah
248. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

7.3.0.43. Kapacity vrcholů

V praktické úloze, která odpovídá nějaké síti, mohou mít omezenou kapacitu nejen hrany, ale také vrcholy (uzly nebo místa křížení). V dopravní síti jsou nejvíce omezujícím místem křižovatky, v internetové síti je rozhodující zatížení aktivních prvků (uzlů sítě). Ukážeme, že síť s předepsanými kapacitami hran i vrcholů můžeme poměrně snadno převést na síť, ve které jsou ohodnocené pouze hrany.



Obrázek 7.12 Vrchol s předepsanou kapacitou c (vlevo) a jeho zdvojení s kapacitou c na hraně (vpravo).

Stačí, když každý vrchol s nějakou stanovenou kapacitou c *zdvojíme*, tj. nahradíme jej dvojicí vrcholů spojených hranou s kapacitou c. Přitom všechny hrany přicházející do vrcholu v budou přicházet do vrcholu v_1 a všechny hrany odcházející z vrcholu v budou odcházet z vrcholu v_2. Jestliže takto zdvojíme každý vrchol s omezenou kapacitou, tak dostaneme (větší) síť, ve které jsou ohodnocené pouze hrany a pro hledání největšího toku vystačíme opět s Algoritmem 7.1.

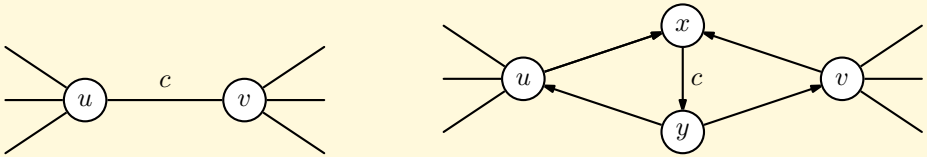
Pro zájemce

7.3.0.44. Víceproduktové toky

Jestliže máme dopravní síť, ve které se dopravuje více různých produktů (typickým příkladem je silniční síť, může se však jednat i o schéma výrobní haly, kde se pohybují dopravní vozíky, tak se jedná

složitější o úlohu. Mohlo by se zdát, že stačí najít největší tok pro každý dopravovaný produkt zvlášť, ale není tomu tak, pokud se produkty dopravují ve *společné síti*. Budeme-li pro každý dopravovaný produkt počítat s plnou kapacitou hrany, tak se snadno může stát, že součet toků různých komodit jednou hranou přesáhne kapacitu hrany. Na druhou stranu, pokud po nalezení toku pro první produkt snížíme kapacitu hrany hodnotu toku prvního produktu, tak při hledání největšího toku dalších produktů nemusíme najít nejlepší možné řešení nebo dokonce tok bude nulový. Pro různá pořadí zpracovaných produktů dostaneme můžeme dostat různá řešení. Algoritmus pro hledání největšího víceproduktového (vícekomoditního) toku je nad rámec tohoto textu.

Ukážeme alespoň, jak převedeme neorientovaný graf na orientovaný s předepsanou kapacitou hrany. Všimněte si, že nemůžeme použít trik z Obrázku 7.11, protože by každou z orientovaných hran mohl být takový nenulový pro jiný produkt, že celkem bude překročena kapacita neorientované hrany uv. Přitom není možné uvažovat pouze rozdíl toků, nebo se jedná o tok jiné komodity.



Obrázek 7.13 Nahrazení neorientované hrany pro víceproduktové toky.

Lze však použít jiné, složitější, nahrazení (Obrázek 7.13). Místo neorientované hrany uv přidáme dva nové vrcholy x, y a pět nových orientovaných hran. Přitom kapacita c je omezena jen pro hranu xy. Nyní tok pro každou komoditu bude dopravován orientovanou hranou xy *v tomto směru* a zabráníme výše popsanému překročení kapacity.

7.3.0.45. Minimální kapacity hran

Ačkoliv to nebylo výslovně řečeno, tak existuje-li nějaká orientovaná cesta ze zdroje do stoku s kladnými kapacitami hran, tak úloha nalezení největšího toku má vždy řešení. Pokud však kromě maximálních kapacit hran stanovíme i minimální kapacity hran, tj. budeme požadovat, aby tok hranou měl nějakou nenulovou hodnotu, tak taková úloha obecně *nemusí* mít řešení. Minimální tok požadujeme například ve vodovodním řádu nebo v bezdrátové síti pro udržení spojení. Hledání největšího toku v grafu s omezenými maximálními i minimálními kapacitami hran opět přesahuje rámec textu, zájemců doporučíme například [2].

Pojmy k zapamatování

— superzdroj a superstok
— kapacity vrcholů
— víceproduktové toky

7.4. Další aplikace algoritmu pro hledání největšího toku

Průvodce studiem

Rozmanitost aplikací algoritmu pro hledání největšího toku je překvapivá. V této sekci ukážeme několik odlišných problémů, které budou mít jednu věc společnou: pro jejich řešení využijeme úlohu hledání největšího toku.

Ukážeme, jak najít pomocí největšího toku najít největší párování v bipartitním grafu, dokážeme Mengerovu větu, kterou jsme bez důkazu vyslovili na straně 83, budeme hledat systém reprezentantů v systému množin a dokážeme Hallovu větu.

Obsah
251. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Cíle

Po prostudování této sekce budete schopni:

- najít největší párování v bipartitním grafu,
- vyřešit přiřazovací úlohu,
- zjistit zda existuje a najít systém reprezentantů daného množinového systému.

7.4.0.46. Největší párování v bipartitním grafu

Bipartitní grafy patří mezi základní třídy grafů (Sekce 1.2). Připomeňme, že bipartitní grafy mají vrcholy rozdělené do dvou množin (partit) a hrany grafy se vyskytují pouze mezi vrcholy z různých partit. Žádná hrana se nevyskytuje mezi dvěma vrcholy stejné partity.

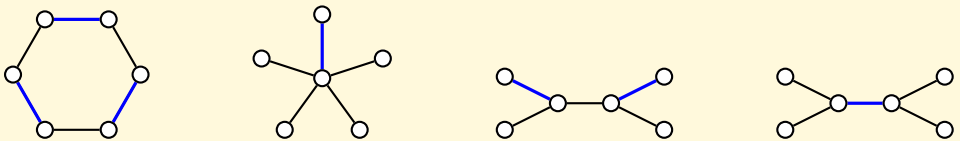
V praxi se bipartitní grafy přirozeně objeví například při popisu přiřazovací úlohy (nazývá se také přiřazovací problém): máme několik pracovníků nebo strojů a máme množinu úkolů, které je nutno vykonat. Každý pracovník může současně pracovat jen na jednom úkolu a navíc mohou mít různí pracovníci různé kvalifikace nebo možnosti a každý tak může provádět jen některé požadované úkoly. Cílem je zjistit, komu který úkol přiřadíme tak, aby bylo co nejvíce úkolů přiděleno a řešeno.

V teorii grafů popíšeme přiřazovací úlohu pomocí bipartitního grafu: jednu partitu budou tvořit pracovníci a druhou úkoly. Hranou spojíme každého pracovníka s těmi úkoly, které může vykonat. Samotně přidělení úkolů je pak popsáno množinou nezávislých hran, tedy takovou množinou hran M, že žádné dvě hrany v M nemají společný vrchol. Této množině se říká „párování“, což pěkně vystihuje podstatu úlohy: děláme dvojice typu „zaměstnanec, úkol“.

Obsah
252. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Definice 7.13. *Párování* v (bipartitním) grafu G je podmnožina nezávislých hran $M \subseteq E(G)$ (žádné dvě hrany z M nemají společný koncový vrchol).
Říkáme, že párování M *pokrývá* vrchol v, jestliže v je koncovým vrcholem nějaké hrany v párování M.

Cílem je najít největší párování, což je párování s největším počtem hran. Největší párování je řešením přiřazovací úlohy, tj. víme jak přidělit úkoly tak, aby co nejvíce úkolů bylo v řešení.



Obrázek 7.14 Párování v bipartitních grafech je vyznačen modře.

Na Obrázku 7.14 vidíme příklady párování v různých bipartitních grafech. Zatímco v prvním grafu existuje párování, jehož hrany pokrývající všechny vrcholy, tak pro druhý graf (hvězdu) má párování nejvýše jednu hranu. Ve třetím grafu je vyznačeno největší párování, párování vyznačené ve čtvrtém grafu není největší.

Ukážeme, jak převést úlohu hledání největšího párování na úlohu hledání největšího toku.

Obsah
253. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Algoritmus 7.2 (Nalezení největšího bipartitního párování). *Mějme bipartitní graf G s vrcholovou množinou rozdělenou do partit U, W.*

1. *Sestrojíme síť S: do bipartitního grafu přidáme zdroj z a stok s, všechny vrcholy z U spojíme se zdrojem z a všechny vrcholy z W spojíme s stokem s, dále všechny hrany sítě S orientujeme od zdroje do stoku a přiřadíme jim kapacity 1,*
2. *najdeme (celočíselný) největší tok v S Algoritmem 7.1,*
3. *největší párování grafu G obsahuje hrany sítě, které mají nenulový tok.*

Když uvedený postup najde tok o velikosti $k = \|f\|$, tak to současně znamená, že největší párování má k hran.

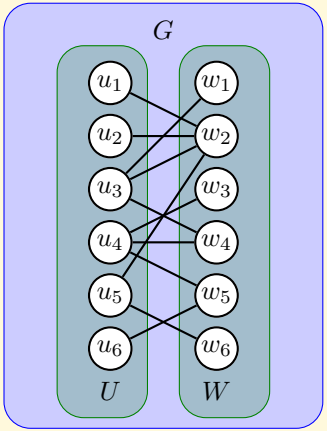
Věta 7.14. *Algoritmus 7.2 najde největší párování daného bipartitního grafu.*

Důkaz. Podle Důsledku 7.10 bude největší tok celočíselný, tj. každou hranou „poteče“ buď tok 0 nebo tok 1.

Označme M množinu hran mezi partitami U a W, které mají nenulový tok. Do každého vrcholu v partitě U vede pouze jedna hrana s kapacitou 1, proto bude každý vrchol partity U patřit nejvýše jedné hraně v množině M. Podobně každý vrchol množiny W bude patřit nejvýše jedné hraně v nalezeném množině M. To znamená, že hrany v množině M jsou nezávislé (žádné dvě nesdílí koncové vrcholy) a odpovídající hrany původního bipartitního grafu tvoří párování.

Zbývá ukázat, že toto párování je největší. To ukážeme sporem: kdyby nalezené párování nebylo největší, tak tok nalezený Algoritmem 7.1 nemohl být největší, neboť z každého párování s k hranami lze konstrukcí v Algoritmu 7.2 najít odpovídající tok o velikosti k. □

Celý postup si ukážeme na příkladu.



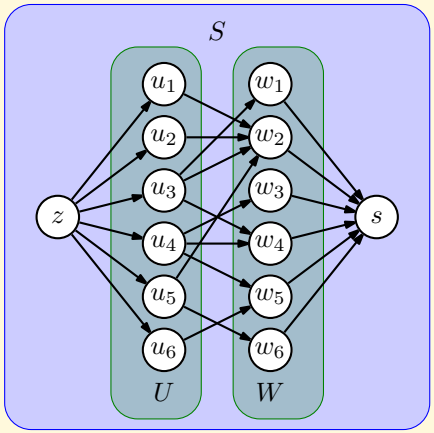
Obrázek 7.15 Bipartitní graf G.

Příklad 7.15. Nejděte největší párování v bipartitním grafu G na Obrázku 7.15.

Řešení. Nejprve sestrojíme příslušnou síť S:

- do bipartitního grafu G přidáme zdroj z a stok s,
- zdroj z spojím hranou se všemi vrcholy v partitě U a všechny vrcholy z partity W spojíme se stokem s,
- všechny hrany sítě S orientujeme od zdroje do stoku a přiřadíme jim kapacity 1. (Protože všechny hrany mají stejnou kapacitu 1, nemusíme kapacity do grafu značit.)

Dostaneme síť na Obrázku 7.16.

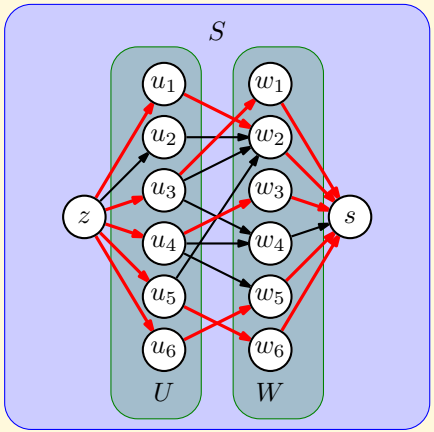


Obrázek 7.16 Síť S, která vznikne přidání zdroje, stoku, a orientovaných hran s kapacitou 1.

V nově sestavené síti S najdeme největší tok pomocí Algoritmu 7.1. Podle Důsledku 7.10 víme, že tento tok bude celočíselný (tok každou hranou bude 0 nebo 1). Získaný tok je na Obrázku 7.17. Hrany s nenulovým tokem jsme pro přehlednost zvýraznili červeně.

Hledané párování obsahuje jen ty hrany původního grafu G, kterým odpovídají orientované hrany s nenulovým tokem v síti S. Největší párování v grafu G je vyznačeno na Obrázku 7.18.

▲



Obrázek 7.17 Největší tok v síti S je vyznačen červeně.

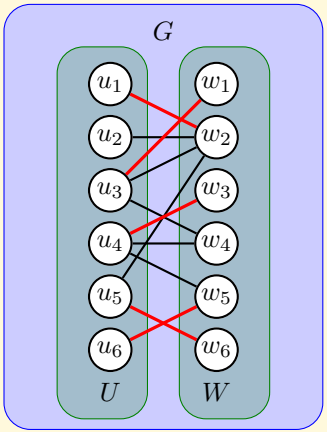
Pro zájemce

Párování má smysl hledat i v obecných grafech, nikoliv jen v bipartitních grafech. Jedná se o složitější úlohu, která přesahuje rámec tohoto textu. Zájemci se mohou dočíst více v [5].

7.4.0.47. Vyšší stupně souvislosti

V kapitole 2.3 jsme popsali, jak lze měřit vyšší stupně souvislosti. Bez důkazu jsme uvedli Mengerovy věty:

Obsah
257. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obrázek 7.18 Největší párování v grafu G.

Věta 2.25 (Mengerovy věty). Graf G je hranově k-souvislý právě tehdy, když mezi libovolnými dvěma vrcholy existuje alespoň k hranově disjunktních cest (vrcholy mohou být sdílené).
Graf G je vrcholově k-souvislý právě tehdy, když mezi libovolnými dvěma vrcholy existuje alespoň k interně disjunktních cest (koncové vrcholy jsou společné).

Nyní pomocí algoritmu hledání největšího toku větu dokážeme. Nejprve si všimneme, že podle definice hranové i vrcholové souvislosti platí:

Lemma 7.16. *Nechť u, v jsou dva vrcholy grafu G a $k > 0$ je přirozené číslo. Mezi vrcholy u a v v grafu G existuje alespoň k hranově disjunktních cest právě tehdy, když po odebrání libo-*

Obsah
258. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

volných $k-1$ vrcholů různých od u, v z grafu G zůstanou vrcholy u a v ve stejné komponentě souvislosti.

Důkaz. Jedná se o ekvivalenci, proto dokážeme obě implikace.
"⇒" Jestliže mezi vrcholy u a v v grafu G existuje alespoň k interně disjunktních cest, tak odebráním $k-1$ vrcholů odstraníme nejvýše $k-1$ různých cest z u do v a vrchol v zůstane dosažitelný po alespoň jedné cestě z vrcholu u. To znamená, že u i v patří do stejné komponenty souvislosti.
"⇐" Mějme graf G a v něm zvolené dva vrcholy u a v. Označíme například vrchol u za zdroj a vrchol v za stok a každé hraně přiřadíme kapacitu 1. Pomocí Algoritmu 7.1 najdeme největší tok z u do v.

Nejprve sporem ukážeme, že velikost toku je alespoň k. Vskutku, pokud by největší tok měl hodnotu menší než k, tak kapacita nejmenšího řezu by byla podle Věty 7.7 také menší než k. Odebráním libovolného koncového vrcholu každé hrany řezu dostaneme nesouvislý graf, přičemž odebraných vrcholů je méně než k, což podle předpokladu není možné.

To znamená, že největší tok má hodnotu alespoň k a hrany s tokem 1 tvoří různé (hranově disjunktní) cesty z u do v. □

Z Lemmatu 7.16 nyní snadno dokážeme první Mengerovu větu. Vrcholy u a v můžeme zvolit v grafu libovolně a proto graf G je k-souvislý podle definice k-souvislosti, neboť odebráním libovolných $k-1$ vrcholů zůstane výsledný graf souvislý.

Druhá Mengerova věta se ukáže podobně.

7.4.0.48. Systém reprezentantů

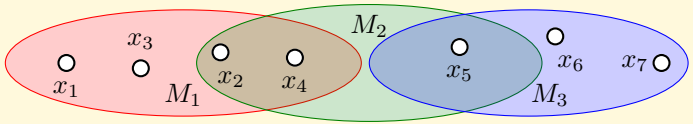
Sestavení systému reprezentantů je úloha velmi podobná přiřazovacímu problému. Mějme nějakou množinu X a systém jejích podmnožin $M_1, M_2, \ldots, M_k \subseteq X$. Ptáme se, zda je

možné v každé podmnožině M_i vybrat jeden prvek, určitého reprezentanta tak, aby každá množina měla jiného reprezentanta.

Například pokud X představuje množinu dárců pro transplantaci ledviny a M_i je taková podmnožina dárců, kteří jsou vhodným dárcem pro pacienta i ($i = 1, 2, , \ldots, , k$), tak nalezení systému reprezentantů odpovídá nalezení vhodného dárce pro každého pacienta.

Systém reprezentantů nadefinujeme pečlivě:

Definice 7.17. Nechť $M_1, M_2, \ldots, M_k$ jsou neprázdné množiny. *Systémem různých reprezentantů* množin $M_1, M_2, \ldots, M_k$ rozumíme takovou posloupnost *různých* prvků $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, že $x_i \in M_i$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, k$.



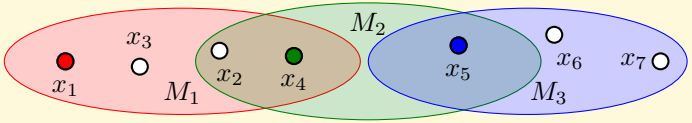
Obrázek 7.19 Množiny M_1, M_2, M_3.

Příklad 7.18. Najděte systém reprezentantů pro množiny na Obrázku 7.19.

Řešení. Stačí zvolit například prvek x_1 jako reprezentanta množiny M_1, prvek x_4 jako reprezentanta množiny M_2 a prvek x_5 jako reprezentanta množiny M_3 (Obrázek 7.20). Protože se jedná o různé prvky a platí $x_1 \in M_1$, $x_4 \in M_2$, $x_5 \in M_3$, tak se jedná o platný systém reprezentantů.

▲

Obsah
260. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obrázek 7.20 Systém reprezentantů množin M_1, M_2, M_3.

Ale ne každý systém množin má svůj systém reprezentantů, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 7.19. Najděte systém reprezentantů systému množin $M_1 = \{1, 5, 9\}$, $M_2 = = \{2, 6, 7\}$, $M_3 = \{3, 4, 8\}$, $M_4 = \{1, 6, 8\}$, $M_5 = \{2, 4, 9\}$, $M_6 = \{3, 5, 7\}$, $M_7 = \{1, 4, 7\}$, $M_8 = \{2, 5, 8\}$, $M_9 = \{3, 6, 9\}$, $M_{10} = \{1, 2, 3\}$, $M_{11} = \{4, 5, 6\}$ a $M_{12} = \{7, 8, 9\}$.

Řešení. Systém reprezentantů pro daných dvanáct množin neexistuje. Stačí si všimnout, že všechny množiny obsahují některé z devíti čísel $1, 2, , \ldots, 9$ a proto mezi nimi nemůžeme najít dvanáct různých reprezentantů. ▲

Ale pozor, ani pokud je různých prvků více než množin, tak příslušný systém reprezentantů nemusí existovat. Jak poznáme, zda systém reprezentantů existuje? Stručně řečeno těžko – výpočet je náročný, pro obecný případ není znám polynomiální algoritmus pro nalezení nebo ověření systému reprezentantů.

Důležitým a výsledkem je Hallova věta, která udává nutnou a dostatečnou podmínku pro to, aby systém reprezentantů existoval:

Věta 7.20 (Hallova věta). *Nechť $M_1, M_2, \ldots, M_k$ jsou neprázdné množiny. Pro tyto množiny existuje systém různých reprezentantů právě tehdy, když platí*

$$\forall J \subset \{1, 2, \ldots, k\} : \left|\bigcup_{j \in J} M_j\right| \geqq |J|,$$

neboli pokud sjednocení libovolné skupiny j těchto množin má alespoň j prvků (tedy tolik prvků, kolik množin je sjednoceno).

Důkaz. K důkazu opět využijeme Algoritmus 7.1.

Označme $x_1, x_2, \ldots, x_m$ po řadě všechny prvky ve sjednocení $M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k$. Definujeme bipartitní graf G na množině vrcholů s partitami $\{1, 2, \ldots, k\}$ a $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$. Dále přidáme vrcholy u a v. Navíc přidáme hrany $\{u, i\}$ pro $i = 1, 2, \ldots, k$, hrany $\{x_j, v\}$ pro $j = 1, 2, \ldots, m$ a hrany $\{i, x_j\}$ jestliže $x_j \in M_i$. Dostaneme graf na Obrázku 7.21. (Konstrukce grafu G je obdobná konstrukci sítě v Algoritmu 7.2.)

Každá cesta mezi u a v má tvar u, i, x_j, v a každá taková cesta ukazuje reprezentanta i množiny $x_j \in M_i$. Systém různých reprezentantů odpovídá k disjunktním cestám mezi u a v.

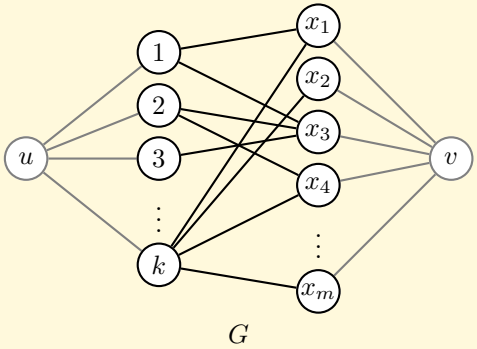
Nechť X je nyní libovolná minimální množina vrcholů v G, po jejímž odebrání z grafu nezůstane žádná cesta mezi u a v. Podle Lemmatu 7.16 mají naše množiny systém různých reprezentantů právě tehdy, když každá taková oddělující množina X má aspoň k prvků.

Položme $J = \{1, 2, \ldots, k\} \setminus X$. Na Obrázku 7.22 je množina J znázorněna červeně.

Pak každá hrana z vrcholů v množině J vede (s výjimkou vrcholu u) do vrcholů z $X \cap$ $\cap \{x_1, \ldots, x_m\}$ (jinak by existovala cesta mezi u a v). Proto platí

$$\left|\bigcup_{j \in J} M_j\right| = |X \cap \{x_1, \ldots, x_m\}| = |X| - |X \cap \{1, \ldots, k\}| = |X| - k + |J|.$$

Obsah
262. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



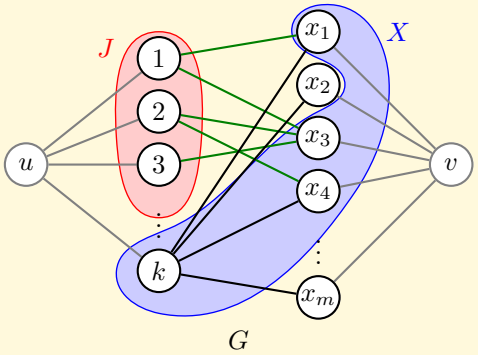
Obrázek 7.21 Graf pro hledání systému reprezentantů.

Vidíme, že $|X| \geqq k$ pro všechny (minimální) volby oddělující množiny X právě tehdy, když $\left|\bigcup_{j\in J} M_j\right| \geqq |J|$ pro všechny množiny J, což je dokazované tvrzení. □

Pojmy k zapamatování

— párování v bipartitním grafu
— systém reprezentantů
— Hallova věta

Obsah
263. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obrázek 7.22 Graf pro hledání systému reprezentantů.

Obsah
264. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

7.5. Test

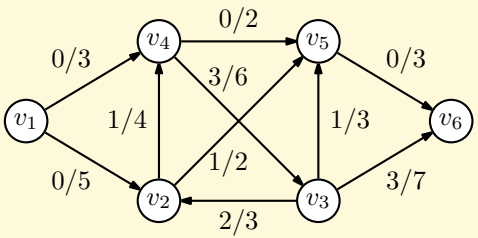
Následuje jednoduchý test, pro nalezení správné odpovědi jedné otázky není potřeba více než půl minuty.

Zacátek testu **Toky v sítích**

1. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?

   (a) Pro každý vrchol sítě platí zákon kontinuity.
   (b) Tok hranou nesmí překročit kapacitu hrany.
   (c) Kapacita hrany nesmí překročit tok hranou.
   (d) Velikost toku v síti je rovna součtu kapacit na odchozích hranách ze zdroje.
   (e) Velikost toku v síti je rovna součtu toků na odchozích hranách ze zdroje.
   (f) Největší tok v síti může obsahovat nulový tok nějakou hranou.

2. Máme síť na Obrázku 7.23. Které vrcholy jsou zdroje v dané síti?



Obrázek 7.23 Síť s vyznačenými toky a kapacitami.

Obsah
265. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

(a) v_1, (b) v_2, (c) v_3,
(d) v_4, (e) v_5, (f) v_6.

3. Máme síť na Obrázku 7.23. Které vrcholy jsou stoky v dané síti?

(a) v_1, (b) v_2, (c) v_3,
(d) v_4. (e) v_5, (f) v_6,

4. Řez v síti je

(a) součet kapacit některých hran,
(b) množina hran,
(c) taková množina hran, po jejichž odebrání nezůstane žádná orientovaná cesta ze zdroje do stoku,
(d) množina všech vrcholů s výjimkou zdroje a stoku,
(e) taková množina hran, po jejichž odebrání nezůstane žádná cesta ze zdroje do stoku,
(f) množina všech hran incidentních s nějakým vrcholem.

5. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?

(a) Kapacita největšího řezu je rovna velikosti nejmenšího toku v síti.
(b) Kapacita řezu je vždy rovna velikosti toku v síti.
(c) Kapacita řezu je vždy nejvýše rovna součtu kapacit všech hran v grafu.
(d) Kapacita řezu je vždy větší nebo rovna velikosti toku v síti.
(e) Kapacita nejmenšího řezu je rovna velikosti největšího toku v síti.
(f) Řez je taková cesta ze zdroje do stoku, která má největší kapacitu.

6. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?

(a) Nenasycená cesta má nenasycené hrany orientované ve směru od zdroje do stoku.
(b) Nenasycená cesta má všechny hrany orientované ve směru od zdroje do stoku.
(c) Nenasycená cesta má hrany s nenulovou kapacitou orientované ve směru od stoku ke zdroji.
(d) Nenasycená cesta má všechny hrany s tokem menším, než je kapacita hrany.
(e) Nenasycená cesta nemá žádnou nasycenou hranu orientovanou ve směru od stoku ke zdroji.
(f) Nenasycená cesta může mít všechny hrany orientované od stoku ke zdroji.

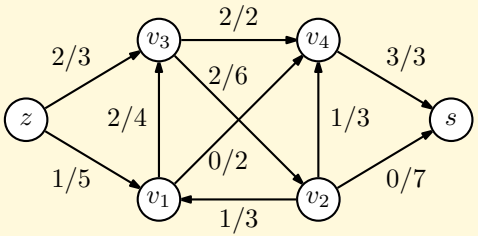
7. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?

(a) Síť s celočíselnými kapacitami hran a neceločíselným tokem není platný.
(b) Největší tok v síti nemůže být nulový.
(c) Tok každou hranou e v síti s největším tokem musí být roven kapacitě hrany e.
(d) Síť s celočíselnými kapacitami hran a neceločíselným tokem není největší.
(e) Kapacita některých hran v síti s největším tokem nemusí být naplněna.
(f) Jestliže tok v síti není největší, tak existuje orientovaná cesta ze zdroje ke stoku s kladnými rezervami všech hran.

8. mějme síť na Obrázku 7.24. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?

(a) Tok v síti(S, w, z, s) je největší.
(b) Velikost toku v síti (S, w, z, s) je 3.
(c) V síti nenajdeme řez o kapacitě 3.
(d) Tok v síti (S, w, z, s) nesplňuje zákon kontinuity.

Obsah
267. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obrázek 7.24 Síť (S, w, z, s) s vyznačenými toky a kapacitami.

9. mějme síť na Obrázku 7.24. Které z uvedených cest jsou nenasycené cesty?

(a) Cesta z, v_1, v_2, s.
(b) Cesta z, v_1, v_4, s.
(c) Cesta z, v_3, v_4, s.
(d) Cesta z, v_3, v_2, s.
(e) Cesta z, v_3, v_1, v_2, s.
(f) Cesta z, v_3, v_1, v_2, v_4, s.

10. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?

(a) Největší párování v bipartitním grafu nemusí být incidentní se všemi vrcholy.
(b) Jestliže v bipartitním grafu jsou vrcholy, které nejsou koncovým vrcholem žádné hrany párování, tak párování není největší.
(c) Párování v grafu je taková množina hran bipartitního grafu, jejímž odebráním dostaneme izolované vrcholy.
(d) Není-li párování největší, můžeme vždy párování zvětšit přidáním nějaké nezávislé hrany.

Konec testu Oprava testu

Obsah
268. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:

Obsah

269. strana ze 272

Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Literatura

[1] J. Černý, *Základní grafové algoritmy*, MFF UK, [online] (2010) [cit. 22.7.2012]. http://kam.mff.cuni.cz/~kuba/ka/

[2] J. Demel, Grafy, SNTL, Praha, (1989).

[3] D. Fronček, *Úvod do teorie grafů*, Slezská univerzita Opava, (1999), ISBN 80-7248-044-8.

[4] P. Hliněný, *Diskrétní matematika*, VŠB–TU Ostrava, skriptum (2006).

[5] P. Kovář, *Teorie grafů*, VŠB–TU Ostrava, skriptum (2012).

[6] M. Kubesa, *Základy diskrétní matematiky*, VŠB–TU Ostrava, skriptum (2012).

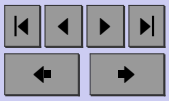
[7] J. Matoušek, J. Nešetřil, *Kapitoly z diskrétní matematiky*, Karolinum Praha, (2000), ISBN 80-246-0084-6.

[8] K.H. Rosen, *Discrete Mathematics and Its Applications – 6th ed.*, McGraw-Hill, New York NY, (2007), ISBN-10 0-07-288008-2.

[9] D.B. West, *Introduction to graph theory – 2nd ed.*, Prentice-Hall, Upper Saddle River NJ, (2001), ISBN 0-13-014400-2.

Obsah

271. strana ze 272



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Přehled použitých symbolů

$A(G)$	matice sousednosti grafu G (str. 47)
$B(G)$	incidenční matice grafu G (str. 48)
$\|C\|$	kapacita řezu C (str. 238)
$\deg(v)$	stupeň vrcholu v v grafu (str. 24)
$\mathrm{dist}(u, v)$	vzdálenost vrcholů u a v v grafu (str. 117)
$E(G)$	množina hran grafu G (str. 11)
$\|f\|$	velikost toku f (str. 232)
$h(G)$	počet hran grafu G (str. 207)
$f(G)$	počet oblastí grafu G (str. 207)
$V(G)$	množina vrcholů grafu G (str. 11)
$v(G)$	počet vrcholů grafu G (str. 207)
$\delta(G)$	nejmenší stupeň v grafu G (str. 24)
$\Delta(G)$	největší stupeň v grafu G (str. 24)
$\chi(G)$	chromatické číslo (barevnost) grafu G (str. 197)
$O(n)$	horní odhad složitosti algoritmu (str. 75)
$G \simeq H$	isomorfní grafy G a H (str. 40)
$G \cup H$	sjednocení grafů G a H
$\prod_{i=1}^{n} a_i$	součin prvků posloupnosti $(a_i)_{i=1}^{n}$
$\sum_{i=1}^{n} a_i$	součet prvků posloupnosti $(a_i)_{i=1}^{n}$
$\emptyset$	prázdná množina
$x \in A$	prvek x množiny A
$A \subseteq A$	podmnožina A množiny B
$A \subset A$	vlastní podmnožina A množiny B
$A \cap B$	průnik množin A a B

Obsah
272. strana ze 272
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno