



Integrální transformace

T. Kozubek, M. Lampart

Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století* (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Obsah

Předmluva	8
Úvod	11
1 Fourierovy řady	13
1.1 Fourierova řada	15
1.2 Fourierova řada v komplexním oboru	18
1.3 Rozvoj periodické funkce	22
1.4 Sinová a kosinová řada	30
1.5 Vlastnosti Fourierových řad	36
1.6 Prostor $L_2(a, b)$	39
1.7 Zobecněná Fourierova řada	45
1.8 Gibbsův jev	51
1.9 Řešený příklad	54
1.10 Appendix	59
2 Laplaceova transformace	63
2.1 Vlastnosti Laplaceovy transformace	67
2.2 Zpětná Laplaceova transformace	79
2.3 Aplikace Laplaceovy transformace	84
Literatura	96
Rejstřík	99

Seznam obrázků

1.1	Graf funkce (1.41)	22
1.2	Graf součtu rozvoje funkce (1.41)	24
1.3	Graf součtu $s_1(t)$ rozvoje funkce (1.41)	24
1.4	Graf součtu $s_2(t)$ rozvoje funkce (1.41)	24
1.5	Graf součtu $s_3(t)$ rozvoje funkce (1.41)	25
1.6	Graf součtu $s_4(t)$ rozvoje funkce (1.41)	25
1.7	Dvoustranné amplitudové spektrum funkce (1.41)	27
1.8	Dvoustranné fázové spektrum funkce (1.41)	27
1.9	Graf funkce (1.46)	28
1.10	Graf součtu $s_2(t)$ rozvoje funkce (1.46)	29
1.11	Graf součtu $s_3(t)$ rozvoje funkce (1.46)	29
1.12	Dvoustranné amplitudové spektrum funkce (1.46)	31
1.13	Dvoustranné fázové spektrum funkce (1.46)	31
1.14	Graf lichého prodloužení funkce (1.53)	35
1.15	Graf sudého prodloužení funkce (1.53)	35
1.16	Graf funkce f_0	42
1.17	Graf funkce f_1	42
1.18	Gibbsův jev	53
1.19	Graf periodického signálu $f(t) = t $ se základním intervalem periodicity $(-0.5, 1)$	55
1.20	Graf 10 harmonických	57
1.21	Amplitudové spektrum daného signálu	58
1.22	Fázové spektrum daného signálu	58
2.1	Heavisideova funkce	65
2.2	Polorovina $\operatorname{Re} p > \alpha_0$	65
2.3	Oscilační okruh	92
2.4	Oscilační okruh	92

2.5	Regulační systém jako černá skříňka	94
2.6	Impulsní charakteristika systému	95

Seznam tabulek

1.1	Tabulka koeficientů harmonické analýzy funkce (1.41)	26
1.2	Tabulka koeficientů harmonické analýzy funkce (1.46)	30
2.1	Laplaceovy transformace některých funkcí	83
2.1	Laplaceovy transformace některých funkcí	84

Předmluva

Vážený čtenáři,

text, který právě čtete, vznikl v rámci řešení projektu „**Matematika pro inženýry 21. století – inovace výuky matematiky na technických školách v nových podmínkách rychle se vyvíjející informační a technické společnosti.**“ Projekt je řešen na Vysoké škole báňské – Technické univerzitě v Ostravě a Západočeské univerzitě v Plzni v období 2009 – 2012.

Hlavní motivací projektu je potřeba reagovat na změny významu jednotlivých partií matematiky při řešení praktických problémů, způsobenou zejména velkým pokrokem v matematickém modelování, dramatickým zlepšováním software a rychlým zvyšováním výpočetních kapacit moderních počítačů. Inženýři nyní běžně využívají stále se vyvíjející komplikované softwarové produkty založené na matematických pojmech, se kterými se v kurzech matematiky buďto nesetkají vůbec nebo v nevhodné formě. Na druhé straně prezentace některých pojmů v základních kurzech neodráží z nejrůznějších důvodů potřeby odborných kateder. Bohužel tento stav ztěžuje studentům aktivní používání získaných vědomostí v odborných předmětech i orientaci v rychle se vyvíjejících metodách inženýrské praxe.

Cílem projektu je inovace matematických a některých odborných kurzů na technických vysokých školách s cílem získat zájem studentů, zvýšit efektivnost výuky, zpřístupnit prakticky aplikovatelné výsledky moderní matematiky a vytvořit předpoklady pro efektivní výuku inženýrských předmětů. Zkvalitnění výuky matematiky budoucích inženýrů chceme dosáhnout po stránce formální využitím nových informačních technologií přípravy elektronických studijních materiálů a po stránce věcné pečlivým výběrem vyučované látky s důsledným využíváním zavedených pojmů v celém kurzu matematiky s promyšlenou integrací moderního matematického aparátu do vybraných in-

ženýrských předmětů. Metodiku výuky matematiky a její atraktivnost pro studenty chceme zlepšit důrazem na motivaci a důsledným používáním postupu „od problému k řešení“.

V rámci projektu vytváříme 40 nových výukových materiálů z oblastí matematické analýzy, lineární algebry, numerických metod, metod optimalizace, diskrétní matematiky, teorie grafů, statistiky a několika odborných kurzů. Všechny hotové výukové materiály budou volně k dispozici na webových stránkách projektu <http://mi21.vsb.cz>

Autoři předem děkují za všechny případné nápady a návrhy k vylepšení textu i za upozornění na chyby.

Úvod

Tento text slouží pro podporu výuky předmětu Funkce komplexní proměnné a integrální transformace, který je vyučován v 1. ročníku magisterského studia na Fakultě elektrotechniky a informatiky VŠB-Technické univerzity Ostrava. Jeho vznik byl podpořen projektem MI21 - Matematika pro inženýry 21. století, <http://mi21.vsb.cz>

V celé řadě technických úloh se setkáváme s potřebou analyzovat funkce, jejichž průběh se pravidelně opakuje. Příkladem jsou funkce, které popisují periodické děje v různých fyzikálních procesech (chvění konstrukcí, ustálený pohyb pístu spalovacích motorů, ustálené točivé pohyby). Jako vhodný prostředek k jejich analýze se ukázala metoda rozvíjející danou periodickou funkci v nekonečnou trigonometrickou řadu, tzv. Fourierovu řadu. Její definice, vlastnosti a příklady použití k harmonické analýze signálů jsou náplní první kapitoly.

V technické praxi se rovněž často setkáváme s úlohami, které vedou na řešení diferenciálních nebo integro-diferenciálních rovnic (analýza napětí v součásti při jejím zatěžování, průběh proudu v elektrických obvodech, rozložení teploty v tělese při jeho zahřívání). Ve druhé kapitole se proto zaměříme na řešení diferenciálních rovnic pomocí účinného nástroje nazvaného Laplaceova transformace, který umožňuje transformovat dané diferenciální a integro-diferenciální rovnice na čistě algebraické rovnice, čímž se významně zjednoduší proces hledání řešení. Po zavedení Laplaceovy transformace následuje výčet jejích vlastností, realizace zpětné Laplaceovy transformace a ilustrace užití na příkladech z oblasti elektrotechniky a regulačních systémů.

Děkujeme studentům za připomínky k prvnímu vydání textu a také doc. RNDr. Jiřímu Bouchalovi, Ph.D. za cenné rady.

T. Kozubek, M. Lampart
Ostrava
22. srpna 2012

Kapitola 1

Fourierovy řady

V mnohých technických úlohách se setkáváme s funkcemi, jejichž průběh se stále opakuje. Tyto funkce vyjadřují periodické děje v různých fyzikálních procesech (chvění konstrukcí, ustálený pohyb pístu spalovacích motorů, ustálené točivé pohyby) či mechanických kmitech (akustické kmity) a střídavé elektrické proudy.

Takové funkce nazýváme *periodické*, tj. máme-li funkci $f(t)$ reálné proměnné t a existuje-li kladné reálné číslo T takové, že pro každé t z definičního oboru platí

$$f(t) = f(t + T). \quad (1.1)$$

Číslo T , pro něž platí rovnice (1.1), se nazývá *perioda*, tedy funkce f je *periodická s periodou T* . Je-li T perioda funkce f , pak je také periodou každé číslo nT , kde $n \in \mathbb{N}$. Nejmenší číslo T , pro něž platí rovnice (1.1) pak nazýváme *základní periodou*. Poznamenejme, že základní perioda nemusí existovat. Jako příklad poslouží konstantní funkce, která má za periodu libovolné kladné reálné číslo, ale základní periodu nemá. Nadále budeme pro jednoduchost používat označení perioda a z textu bude vždy jasné, zda se jedná o periodu základní nebo ne. Dále pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$ nazveme interval $(\alpha, \alpha + T]$ *intervalem periodicity* a speciálně *základní interval periodicity* je případ, kdy $\alpha = 0$ nebo $\alpha = -T/2$, tedy základní interval periodicity má tvar $(0, T]$ nebo $(-T/2, T/2]$.

Následující lema ukazuje, že se při dalším studiu stačí omezit na periodické funkce s periodou 2π .

Lema 1 *Ke každé periodické funkci $f(t)$ s periodou T existuje transformace argumentu¹ $t = \text{tr}(x)$ taková, že transformovaná funkce $f(\text{tr}(x))$ má periodou 2π .*

Důkaz: Buď

$$t = \text{tr}(x) = \frac{T}{2\pi}x.$$

Pak

$$f(t) = f(\text{tr}(x)) = f\left(\frac{T}{2\pi}x\right) = g(x).$$

Funkce $g(x)$ je definovaná pro každé x a je periodická s periodou 2π :

$$g(x + 2\pi) = f\left(\frac{T}{2\pi}(x + 2\pi)\right) = f\left(\frac{T}{2\pi}x + T\right) = f(t + T) = f(t) = g(x).$$

□

Jako elementární příklad nám poslouží *jednoduchý harmonický kmit* daný obecnou sinovou funkcí

$$f(t) = A \sin(\omega t + \varphi). \quad (1.2)$$

Zde nezávislou proměnnou t interpretujeme jako čas, A je *amplituda* udávající výchylku z rovnovážné polohy, celý argument $\omega t + \varphi$ nazýváme *fáze kmitu*, pro $t = 0$ dostáváme *počáteční fázi* a konstantu ω , udávající počet kmitů za 2π vteřin, nazýváme *kruhovou frekvencí (úhlovou rychlostí)*. Doba jednoho kmitu, perioda, se označuje T a v našem příkladě je $T = 2\pi/\omega$.

V praxi se ovšem setkáváme se složitějšími periodickými funkcemi, které jak ukážeme v dalších podkapitolách, lze napsat jako součet nekonečné řady jednoduchých harmonických kmitů, kde první člen této řady má stejnou periodu jako daná periodická funkce. Periody následujících kmitů jsou pak po řadě polovina, třetina, atd. periody kmitu prvního. Tak vznikne periodická funkce vyjadřující složené harmonické kmitání, která je popsána nekonečnou řadou s členy

$$u_n = A_n \sin(n\omega t + \varphi_n). \quad (1.3)$$

¹transformací argumentu rozumíme transformaci souřadnic, s pojmem již byl čtenář seznámen při transformaci kartézské soustavy souřadnic na souřadnice polární, sférické nebo válcové

Tyto lze ekvivalentně zapsat ve tvaru

$$u_n = a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t), \quad (1.4)$$

kde pro jednoduchost klademe

$$u_0 = \frac{a_0}{2}. \quad (1.5)$$

Řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \quad (1.6)$$

nazýváme *trigonometrickou řadou*. Pokud řada konverguje, jak ukážeme později, tak konverguje k funkci s periodou² $T = 2\pi/\omega$, tj. s periodou členu s indexem 1. Koeficienty a_n a b_n se nazývají *Fourierovy koeficienty funkce $f(t)$* .

1.1 Fourierova řada

V podkapitole 1.5 si ukážeme, že je-li trigonometrická řada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) \quad (1.7)$$

stejněměrně konvergentní v $\mathbb{R}$, dává součet, který je spojitou periodickou funkcí $f(t)$ s periodou prvního členu řady², tj. $T = 2\pi$ (zde jsme užili Lematu 1, tudíž $T = 2\pi$ a $\omega = 1$). Platí tedy

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)). \quad (1.8)$$

Naším úkolem je nyní určit koeficienty a_n a b_n stejněměrně konvergentní trigonometrické řady (1.8) a to na základě funkce $f(t)$, která je jejím součtem. K řešení tohoto problému použijeme ortogonalitu systému funkcí z Příkladu 10 (str. 44) na intervalu $[-\pi, \pi]$, tj. intervalu délky 2π .

Koeficient a_0 určíme integrací rovnice (1.8) v mezích od $-\pi$ do π . Tedy

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) \right) dt = \pi a_0,$$

²pozorný čtenář si všiml, že daná perioda nemusí být základní. Pokud by bylo $a_1 = b_1 = 0$, pak by $2\pi/\omega$ bylo periodou, ale ne nejmenší. Je-li navíc alespoň jeden z koeficientů a_2 nebo b_2 nenulový, pak je základní perioda π/ω .

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt, \quad (1.9)$$

zde jsme užili faktu, že pro každé n je $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) \, dt = 0$ a $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) \, dt = 0$. Koeficienty a_n určíme tak, že rovnici (1.8) přenásobíme funkcí $\cos(nt)$ a opět integrujeme ve stejných mezích. Pak podle výpočtu z Příkladu 10 (str. 44) dostáváme

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) \, dt &= a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nt) \, dt = a_n \pi, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) \, dt. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Koeficienty b_n určíme analogicky jako a_n s tím rozdílem, že rovnici (1.8) přenásobíme funkcí $\sin(nt)$:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) \, dt &= b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nt) \, dt = b_n \pi, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) \, dt. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Vzorce pro výpočet koeficientů, které jsme právě odvodili, se nazývají (*Eulerovy*)-*Fourierovy*. Daná trigonometrická řada se nazývá *Fourierova řada funkce* $f(t)$ a koeficienty a_n a b_n *Fourierovy koeficienty funkce* $f(t)$.

Následuje přirozená otázka, kterou je nutno zodpovědět, zda Fourierova řada (1.8) konverguje a je-li její součet roven $f(t)$ v intervalu $[-\pi, \pi]$. Odpověď nám dává následující věta, která bude dokázána v podkapitole 1.5:

Věta 1 (Dirichlet) *Vyhovuje-li funkce $f(t)$ tzv. Dirichletovým podmínkám, pak daná Fourierova řada funkce $f(t)$ konverguje v každém t k hodnotě*

$$\frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0))$$

a platí

$$\frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt).$$

Navíc v bodech t , kde je $f(t)$ spojitá, je

$$\frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0)) = f(t).$$

Kde v předešlé větě používáme standardní notaci³

$$f(t+0) = \lim_{t_1 \rightarrow t^+} f(t_1) \text{ a } f(t-0) = \lim_{t_1 \rightarrow t^-} f(t_1).$$

Dirichletovy podmínky jsou následující:

1. funkce $f(t)$ je periodická,
2. funkce $f(t)$ má v intervalu periodicity jen konečný počet nespojitostí
1. druhu,
3. funkce $f(t)$ má v intervalu periodicity po částech spojitou derivaci.

Příklad 1 Následující funkce nesplňují na intervalu $[-\pi, \pi]$ Dirichletovy podmínky:

$$f_1(t) = \frac{2}{1-t}, \quad f_2(t) = \sin\left(\frac{2}{2-t}\right).$$

Skutečně, $f_1(t)$ má v bodě $t_0 = 1$ bod nespojitosti 2. druhu a $f_2(t)$ má v okolí bodu $t_0 = 2$ nekonečně mnoho extrémů.

Výše uvedené vztahy (1.9) – (1.11) lze zobecnit pro funkce s periodou $T = 2l$, tedy pro funkce s intervalem periodicity $[-l, l]$. Pomocí Lematu 1 provedeme transformaci $t = \frac{\pi}{l}t$ a dostaneme pro $n \in \mathbb{N}$ vzorce:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \, dt, \tag{1.12}$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos(n \frac{\pi}{l} t) \, dt, \tag{1.13}$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin(n \frac{\pi}{l} t) \, dt \tag{1.14}$$

a Fourierova řada má tvar

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\frac{\pi}{l} nt) + b_n \sin(\frac{\pi}{l} nt)). \tag{1.15}$$

³někdy se používá kratší notace $f(t+)$ resp. $f(t-)$

1.2 Fourierova řada v komplexním oboru

V podkapitole 1.1 jsme odvodili vzorce pro Fourierovy koeficienty a_n a b_n . Fourierovy řady dané periodické funkce peridy 2π . Dané vzorce mají tvar

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)), \quad (1.16)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt, \quad (1.17)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) \, dt, \quad (1.18)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) \, dt. \quad (1.19)$$

Přepíšme nyní funkce $\sin(nt)$ a $\cos(nt)$ v řadě (1.16) pomocí následujícího exponenciálního vyjádření:

$$\cos(nt) = \frac{1}{2}(e^{int} + e^{-int}), \quad (1.20)$$

$$\sin(nt) = \frac{1}{2i}(e^{int} - e^{-int}) = -\frac{i}{2}(e^{int} - e^{-int}). \quad (1.21)$$

Po dosazení (1.20) a (1.21) do řady (1.16) dostáváme

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \left(\frac{e^{int} + e^{-int}}{2} \right) - ib_n \left(\frac{e^{int} - e^{-int}}{2} \right) \right) = \quad (1.22)$$

$$= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{int} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-int} \right). \quad (1.23)$$

Položme nyní

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad (1.24)$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad (1.25)$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n), \quad (1.26)$$

přičemž c_n a c_{-n} jsou komplexně sdružené koeficienty. Nyní můžeme vyjádřit pomocí Fourierových koeficientů komplexní koeficienty c_n a c_{-n} takto:

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos(nt) - i \sin(nt)) dt = \quad (1.27)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int} dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (1.28)$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos(nt) + i \sin(nt)) dt = \quad (1.29)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{int} dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.30)$$

Pro koeficient c_0 dostáváme

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt.$$

Vidíme tedy, že je možné vyjádřit všechny koeficienty c_i pomocí jediného vzorce

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (1.31)$$

Po dosazení koeficientů c_n do (1.23) dostáváme následující tvar Fourierovy řady

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}, \quad (1.32)$$

kde c_n jsou dány vzorcem (1.31). Tvar řady (1.32) nazýváme *komplexní zápis Fourierovy řady funkce $f(t)$* . Koeficienty c_n nazýváme *komplexní Fourierovy koeficienty*.

Poznamenejme, že výhodou komplexního zápisu Fourierovy řady je právě (1.31), tedy výpočet koeficientů jediným integrálem (integrál komplexní funkce reálné proměnné). Dále pak, má-li funkce $f(t)$ periodu T , pak vzorce (1.31) a (1.32) mají tvar

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{in\omega t} + c_{-n} e^{-in\omega t}), \quad (1.33)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (1.34)$$

kde $\omega = 2\pi/T$.

Konečně, pokud jsme provedli zápis Fourierovy řady v komplexním tvaru a chceme jej převést do tvaru reálného, pak stačí pro výpočet koeficientů použít vzorců

$$a_n = c_n + c_{-n}, \quad (1.35)$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n}). \quad (1.36)$$

Vzorce (1.35) a (1.36) jsme vyjádřili ze vzorců (1.25) a (1.26).

Příklad 2 Určeme komplexní a reálný zápis Fourierovy řady funkce $f(t) = 1/2 e^t$ se základním intervalem periodicity $(0, \pi]$ a $f(0) = f(\pi)$.

Postupujeme podle výše uvedené poznámky, tj. hledejme nejprve komplexní tvar a pak provedeme převod na tvar reálný. Tedy podle (1.34) je (zde $\omega = 2$)

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2} e^t e^{-2int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi e^{(1-2in)t} dt = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1-2in} \left[e^{(1-2in)t} \right]_0^\pi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1-2in} (e^\pi - 1), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \end{aligned}$$

Komplexní zápis Fourierovy řady zadané funkce má tvar

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} (e^\pi - 1) + \frac{e^\pi - 1}{2\pi} \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{1-2in} e^{2int} + \frac{1}{1+2in} e^{-2int} \right) = \\ &= \frac{e^\pi - 1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^\infty \frac{1}{1-2in} e^{2int}. \end{aligned}$$

Převedme danou řadu do reálného tvaru. Nejprve určíme podle vzorců (1.35) a (1.36) koeficienty a_n a b_n :

$$\begin{aligned} a_n &= c_n + c_{-n} = \frac{1}{2\pi} (e^\pi - 1) \left(\frac{1}{1-2in} + \frac{1}{1+2in} \right) = \\ &= \frac{e^\pi - 1}{\pi} \frac{1}{1+4n^2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \\ b_n &= i(c_n - c_{-n}) = \frac{i}{2\pi} (e^\pi - 1) \left(\frac{1}{1-2in} - \frac{1}{1+2in} \right) = \\ &= -2 \frac{e^\pi - 1}{\pi} \frac{n}{1+4n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Konečně, reálný tvar hledané Fourierovy řady je

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}(e^\pi - 1) + \frac{e^\pi - 1}{\pi} \left(\frac{\cos(2t)}{1 + 4 \cdot 1^2} + \frac{\cos(4t)}{1 + 4 \cdot 2^2} + \dots \right) - \\ &\quad - 2 \frac{e^\pi - 1}{\pi} \left(\frac{\sin(2t)}{1 + 4 \cdot 1^2} + \frac{\sin(4t)}{1 + 4 \cdot 2^2} + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi}(e^\pi - 1) + \frac{e^\pi - 1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + 4n^2} \cos(2nt) - \\ &\quad - 2 \frac{e^\pi - 1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1 + 4n^2} \sin(2nt). \end{aligned}$$

Nedílnou součástí harmonické analýzy je *analýza spekter*. Zde se budeme zabývat otázkou *fázového* a *amplitudového spektra*.

Prvně, *jednostranným spektrem* rozumíme uspořádanou dvojici posloupností

$$(\{A_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}),$$

kde $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ představuje *jednostranné amplitudové spektrum* a je definováno vzorcí

$$A_0 = \left| \frac{a_0}{2} \right| = |c_0|, \quad (1.37)$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2|c_n|, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.38)$$

a $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *jednostranné fázové spektrum* definované vztahem

$$\varphi_n = -\arg c_n \in (-\pi, \pi], \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.39)$$

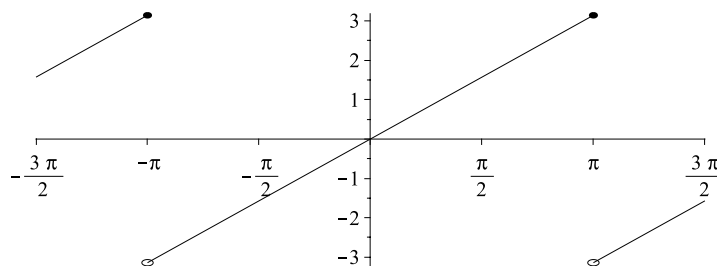
Dvoustranným spektrem rozumíme uspořádanou dvojici posloupností

$$(\{|c_n|\}_{n=-\infty}^{\infty}, \{\varphi_{\pm n}\}_{n=1}^{\infty}),$$

kde $\{|c_n|\}_{n=-\infty}^{\infty}$ představuje *dvoustranné amplitudové spektrum* a $\{\varphi_{\pm n}\}_{n=1}^{\infty}$ *dvoustranné fázové spektrum* definované

$$\varphi_n = -\arg c_n \in (-\pi, \pi], \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (1.40)$$

Poznamenejme, že fáze φ_0 není definována. Je-li analyzována komplexní funkce s nenulovou imaginární částí, pak platí, že koeficienty c_n a c_{-n} nejsou komplexně sdružené. Tedy amplitudové spektrum není sudé a fázové spektrum není liché.



Obrázek 1.1: Graf funkce (1.41)

1.3 Rozvoj periodické funkce

Zabývejme se nejprve situací, kdy máme rozvíjet Fourierovu řadu periodických funkcí. Máme-li periodickou funkci, pak její rozvoj snadno provedeme podle vzorců (1.12), (1.13) a (1.14). Uveďme nyní dva příklady, na základě Lematu 1 můžeme bez újmy na obecnosti uvažovat základní interval periodicity 2π .

Příklad 3 Rozviňme ve Fourierovu řadu periodickou funkci $f(t)$ se základním intervalem periodicity $(-\pi, \pi]$ (viz obrázek 1.1) zadanou předpisem

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{pro } t \in (-\pi, \pi], \\ \pi & \text{pro } t = -\pi, \end{cases} \quad (1.41)$$

provedme spektrální analýzu.

Nejprve je zapotřebí ověřit Dirichletovy podmínky:

1. funkce je zřejmě periodická,
2. funkce je uvnitř intervalu periodicity spojitá, nespojitá je v krajních bodech $(2k+1)\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$), jedná se však o nespojitost 1. druhu,
3. funkce je uvnitř intervalu periodicity diferencovatelná ($f'(t) = 1$).

Nic nám tedy nebrání použít vzorce (1.9), (1.10) a (1.11) k výpočtu Fou-

rierových koeficientů:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \, dt = \frac{1}{\pi} \left[\frac{t^2}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos(nt) \, dt = \frac{1}{\pi} \left[\frac{t}{n} \sin(nt) + \frac{1}{n^2} \cos(nt) \right]_{-\pi}^{\pi} = 0, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin(nt) \, dt = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{t}{n} \cos(nt) + \frac{1}{n^2} \sin(nt) \right]_{-\pi}^{\pi} = (-1)^{n+1} \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

Všimněme si, že rozvíjená funkce je lichá a všechny koeficienty a_n jsou nulové, tedy příslušná Fourierova řada bude mít pouze sinové členy, bude lichá. To není náhoda, jak ukážeme v další kapitole. Hledaný rozvoj naší funkce tedy je

$$f(t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin(nt)}{n}.$$

Podle Dirichletovy věty 1 je součet této řady roven $f(t) = t$ pro $t \in (-\pi, \pi)$. V bodech $\pm\pi$ je nespojitost prvního druhu a platí:

$$\begin{aligned} f(\pi_-) &= \pi \text{ a } f(\pi_+) = -\pi, \\ f(-\pi_-) &= \pi \text{ a } f(-\pi_+) = -\pi. \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} \frac{f(-\pi_+) + f(-\pi_-)}{2} &= 0, \\ \frac{f(\pi_+) + f(\pi_-)}{2} &= 0, \end{aligned}$$

tyto hodnoty má součet řady v bodech $\pm\pi$, tj. $f(\pi) = 0$ a $f(-\pi) = 0$, graf součtu je na obrázku 1.2.

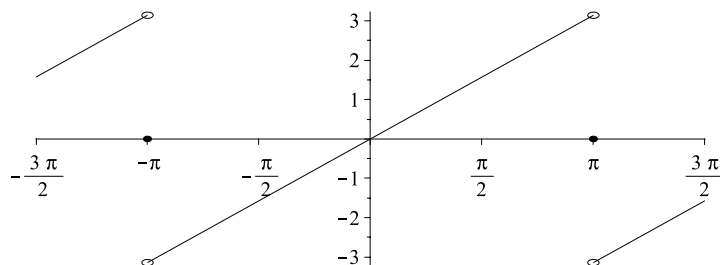
Částečné součty prvních členů

$$s_1(t) = 2 \sin(t), \quad (1.42)$$

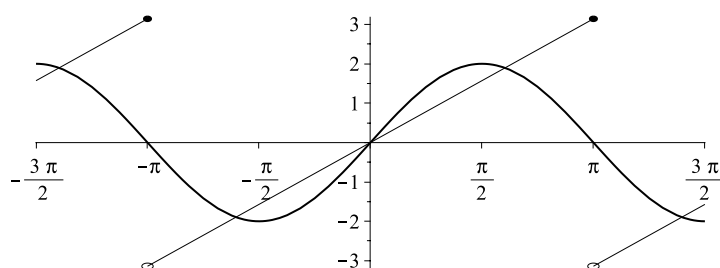
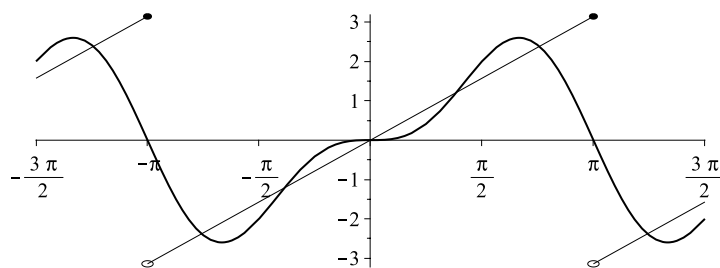
$$s_2(t) = 2 \left(\sin(t) - \frac{\sin(2t)}{2} \right), \quad (1.43)$$

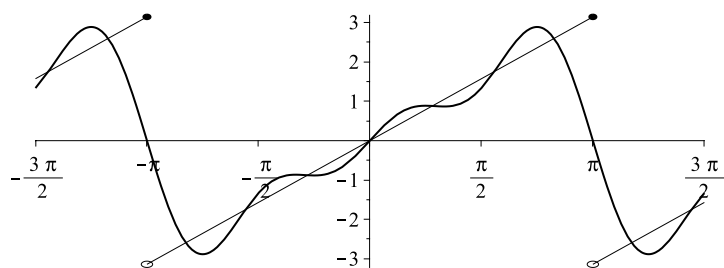
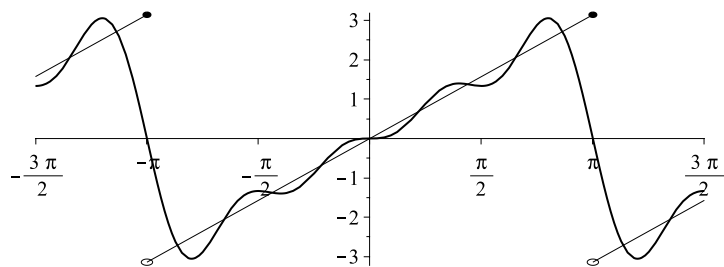
$$s_3(t) = 2 \left(\sin(t) - \frac{\sin(2t)}{2} + \frac{\sin(3t)}{3} \right), \quad (1.44)$$

$$s_4(t) = 2 \left(\sin(t) - \frac{\sin(2t)}{2} + \frac{\sin(3t)}{3} - \frac{\sin(4t)}{4} \right), \quad (1.45)$$



Obrázek 1.2: Graf součtu rozvoje funkce (1.41)

Obrázek 1.3: Graf součtu $s_1(t)$ rozvoje funkce (1.41)Obrázek 1.4: Graf součtu $s_2(t)$ rozvoje funkce (1.41)

Obrázek 1.5: Graf součtu $s_3(t)$ rozvoje funkce (1.41)Obrázek 1.6: Graf součtu $s_4(t)$ rozvoje funkce (1.41)

jsou po řadě v obrázcích 1.3, 1.4, 1.5 a 1.6.

Sestavme nyní jednostranné a dvoustranné fázové a amplitudové spektrum, uijeme vzorců (1.37), (1.38), (1.39), (1.40) a (1.24), (1.25), (1.26):

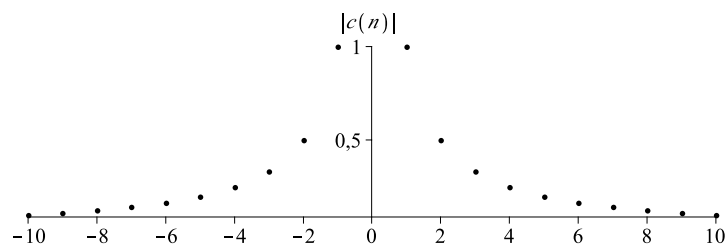
$$\begin{aligned} A_0 &= \left| \frac{a_0}{2} \right| = 0, \\ A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sqrt{0 + (-1)^{n+1} \frac{2}{n}} = \frac{2}{n}, \\ c_n &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2} \left(0 - i(-1)^{n+1} \frac{2}{n} \right) = i(-1)^n \frac{1}{n}, \\ \varphi_n &= -\arg c_n = \begin{cases} -\pi/2 & \text{pro } n = \dots, -5, -3, -1, 2, 4, 6, \dots, \\ \pi/2 & \text{pro } n = \dots, -6, -4, -2, 1, 3, 5, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

Dvoustranné amplitudové (resp. fázové) spektrum je zobrazeno na obrázku 1.7 (resp. 1.8). Hodnoty koeficientů jsou uvedeny v tabulce 1.1.

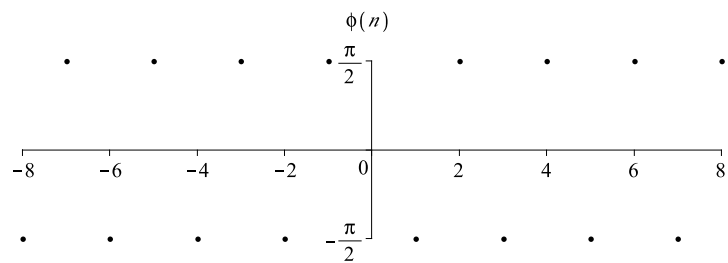
n	-3	-2	-1	0	1	2	3
a_n	—	—	—	0	0	0	0
b_n	—	—	—	—	2	-1	2/3
c_n	i/3	-i/2	i	0	-i	i/2	-i/3
$ c_n $	1/3	1/2	1	0	1	1/2	1/3
A_n	—	—	—	0	2	1	2/3
φ_n	$-\pi/2$	$\pi/2$	$-\pi/2$	—	$\pi/2$	$-\pi/2$	$\pi/2$

Tabulka 1.1: Tabulka koeficientů harmonické analýzy funkce (1.41)

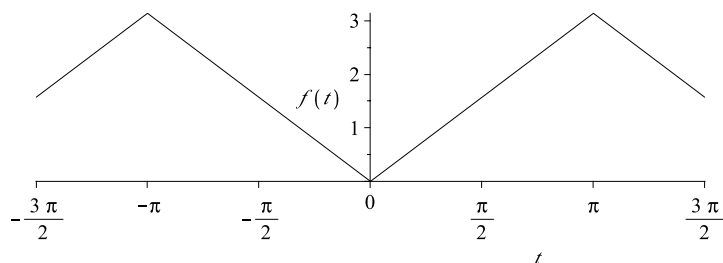
Příklad 4 Rozviňme ve Fourierovu řadu periodickou funkci $f(t)$ se základ-



Obrázek 1.7: Dvoustranné amplitudové spektrum funkce (1.41)



Obrázek 1.8: Dvoustranné fázové spektrum funkce (1.41)



Obrázek 1.9: Graf funkce (1.46)

ním intervalem periodicity $(-\pi, \pi]$ (viz obrázek 1.9) zadanou předpisem

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{pro } t \in [0, \pi], \\ -t & \text{pro } t \in (-\pi, 0), \end{cases} \quad (1.46)$$

provedme spektrální analýzu.

Analýzu problému provedeme úplně stejně jako u předchozího příkladu.

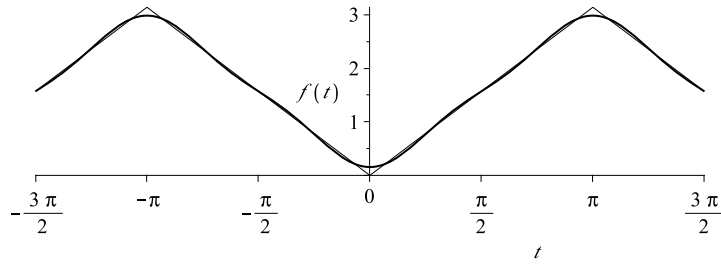
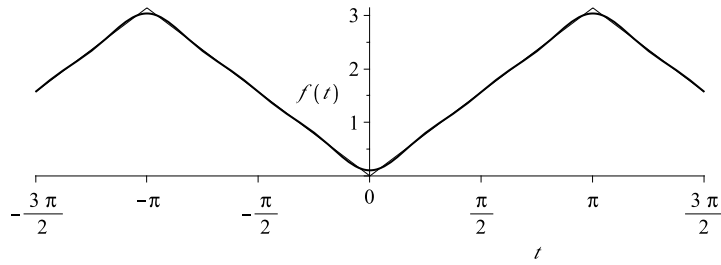
Nejprve overíme Dirichletovy podmínky:

1. funkce je zřejmě periodická,
2. funkce je spojitá,
3. funkce je diferencovatelná na intervalu $(k\pi, \pi + k\pi)$ pro $k \in \mathbb{Z}$.

Můžeme tedy použít vzorce (1.9), (1.10) a (1.11) k výpočtu Fourierových koeficientů:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 -t \, dt + \int_0^{\pi} t \, dt \right) = \pi, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) \, dt = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 -t \cos(nt) \, dt + \int_0^{\pi} t \cos(nt) \, dt \right) = \\ &= \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1), \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) \, dt = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 -t \sin(nt) \, dt + \int_0^{\pi} t \sin(nt) \, dt \right) = 0. \end{aligned}$$

Za zmínku stojí, že rozvíjená funkce je sudá a všechny koeficienty b_n jsou nulové, tedy příslušná Fourierova řada bude mít pouze kosinové členy, bude sudá. To není náhoda, jak ukážeme v další kapitole. Hledaný rozvoj naší

Obrázek 1.10: Graf součtu $s_2(t)$ rozvoje funkce (1.46)Obrázek 1.11: Graf součtu $s_3(t)$ rozvoje funkce (1.46)

funkce tedy je

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)t}{(2n-1)^2},$$

kde jsme využili toho, že $a_n = 0$ pro sudá n .

Podle Dirichletovy věty 1 je součet této řady roven $f(t)$ pro $t \in \mathbb{R}$, graf součtu je taktéž na obrázku 1.9. Částečné součty prvních členů

$$s_2(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos(t) + \frac{\cos(3t)}{9} \right), \quad (1.47)$$

$$s_3(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos(t) + \frac{\cos(3t)}{9} + \frac{\cos(5t)}{25} \right), \quad (1.48)$$

jsou po řadě znázorněny na obrázcích 1.10 a 1.11.

Sestavme nyní jednostranné a dvoustranné fázové a amplitudové spek-

trum, užijeme vzorců (1.37), (1.38), (1.39), (1.40) a (1.24), (1.25), (1.26):

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \left| \frac{a_0}{2} \right| = \pi/2, \\
 A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1) + 0} = \frac{2}{\pi n^2} |(-1)^n - 1|, \\
 c_n &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1) - i0 \right) = \frac{1}{\pi n^2}((-1)^n - 1), \\
 \varphi_n &= -\arg c_n = \begin{cases} 0 & \text{pro } n = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots, \\ \pi & \text{pro } n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots \end{cases}
 \end{aligned}$$

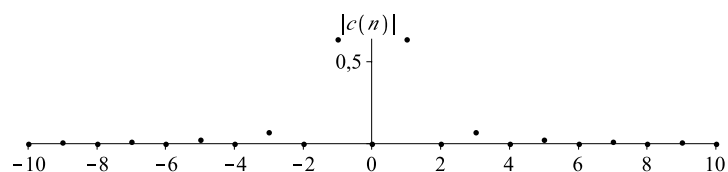
Dvoustranné amplitudové (resp. fázové) spektrum je zobrazeno na obrázku 1.12 (resp. 1.13). Hodnoty koeficientů jsou uvedeny v tabulce 1.2.

n	-3	-2	-1	0	1	2	3
a_n	—	—	—	π	$-4/\pi$	0	$-4/(9\pi)$
b_n	—	—	—	—	0	0	0
c_n	$-2/(9\pi)$	0	$-2/\pi$	$\pi/2$	$-2/\pi$	0	$-2/(9\pi)$
$ c_n $	$2/(9\pi)$	0	$2/\pi$	0	$2/\pi$	0	$2/(9\pi)$
A_n	—	—	—	$\pi/2$	$4/\pi$	0	$4/(9\pi)$
φ_n	π	0	π	—	π	0	π

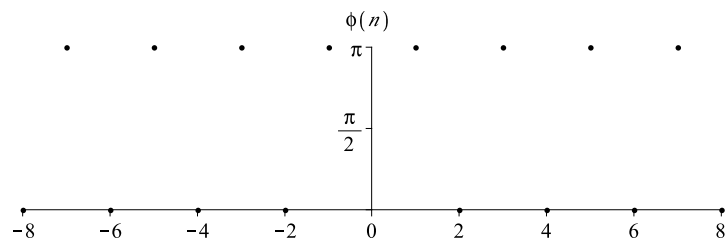
Tabulka 1.2: Tabulka koeficientů harmonické analýzy funkce (1.46)

1.4 Sinová a kosinová řada

V příkladech 3 a 4 jsme pozorovali zajímavou vlastnost, že když byla daná funkce lichá (resp. sudá), tak Fourierova řada obsahovala jen sinové (resp. kosinové) členy. Toto pozorování vystihují následující věty:



Obrázek 1.12: Dvoustranné amplitudové spektrum funkce (1.46)



Obrázek 1.13: Dvoustranné fázové spektrum funkce (1.46)

Věta 2 *Bud $f(t)$ lichá funkce s periodou 2π splňující Dirichletovy podmínky. Pak její Fourierův rozvoj obsahuje pouze sinové členy*

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt). \quad (1.49)$$

Důkaz: Prvně, podle Dirichletovy věty 1 řada (1.49) konverguje.

Nyní ukážeme, že $a_n = 0$ pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $b_n \in \mathbb{R}$. Jelikož je funkce $f(t)$ lichá, tj. $f(-t) = -f(t)$ pro každé t , a taktéž $f(t) \cos(nt)$ je lichá, dostáváme

pro $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 -f(-t) \, dt + \int_0^{\pi} f(t) \, dt \right) = \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(- \int_0^{\pi} f(t) \, dt + \int_0^{\pi} f(t) \, dt \right) = 0, \\
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) \, dt = \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 f(t) \cos(nt) \, dt + \int_0^{\pi} f(t) \cos(nt) \, dt \right) = \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(- \int_0^{\pi} f(t) \cos(nt) \, dt + \int_0^{\pi} f(t) \cos(nt) \, dt \right) = 0,
 \end{aligned}$$

kde pro výpočet prvního integrálu v předposlední rovnosti jsme užili lineární substituce $t = -t$.

Funkce $f(t) \sin(nt)$ je zřejmě sudá, pro $n \in \mathbb{N}$ máme

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) \, dt = \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 f(t) \sin(nt) \, dt + \int_0^{\pi} f(t) \sin(nt) \, dt \right) = \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} f(t) \sin(nt) \, dt + \int_0^{\pi} f(t) \sin(nt) \, dt \right) = \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(nt) \, dt.
 \end{aligned}$$

□

Věta 3 *Buď $f(t)$ sudá periodická funkce s periodou 2π splňující Dirichletovy podmínky. Pak její Fourierův rozvoj obsahuje pouze kosinové členy*

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt). \quad (1.50)$$

Důkaz: Důkaz povedeme stejně jako předešlý, přičemž nyní $f(-t) = f(t)$. Tedy, funkce $f(t) \sin(nt)$ je zřejmě lichá a pro $n \in \mathbb{N}$ máme

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) \, dt = \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 f(t) \sin(nt) \, dt + \int_0^{\pi} f(t) \sin(nt) \, dt \right) = \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(- \int_0^{\pi} f(t) \sin(nt) \, dt + \int_0^{\pi} f(t) \sin(nt) \, dt \right) = 0.
 \end{aligned}$$

Dále, funkce $f(t) \cos(nt)$ je sudá a pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ je

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) \, dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 f(t) \cos(nt) \, dt + \int_0^{\pi} f(t) \cos(nt) \, dt \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} f(t) \cos(nt) \, dt + \int_0^{\pi} f(t) \cos(nt) \, dt \right) = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(nt) \, dt. \end{aligned}$$

□

Důkazy předešlých vět nám dávají také návod, jak počítat příslušné koeficienty.

Je-li funkce $f(t)$ lichá s periodou $T = 2l$ se základním intervalem periodicity $(-l, l]$, budou všechny koeficienty $a_n = 0$ a

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \sin\left(n \frac{\pi}{l} t\right) \, dt.$$

Je-li funkce $f(t)$ sudá s periodou $T = 2l$ se základním intervalem periodicity $(-l, l]$, budou všechny koeficienty $b_n = 0$ a

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \cos\left(n \frac{\pi}{l} t\right) \, dt.$$

Předpokládejme, že máme na intervalu $(0, l]$ funkci $f(t)$ splňující Dirichletovy podmínky a chceme ji rozvinout ve Fourierovu řadu. Takový úkol lze provést různým způsobem. Zadanou funkci je možno prodloužit na interval $(-l, l]$, což můžeme provést tak, že se na intervalu $(-l, 0)$ dodefinuje tak, aby prodloužení bylo sudé či liché.

Definice 1 *Bud' $f(t)$ po částech spojitá funkce na intervalu $(0, l]$. Liché periodické prodloužení funkce $f(t)$ se základním intervalem periodicity $(-l, l]$ je funkce $g(t)$ definovaná předpisem*

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & \text{pro } t \in [0, l], \\ -f(-t) & \text{pro } t \in (-l, 0). \end{cases} \quad (1.51)$$

Definice 2 Buď $f(t)$ po částech spojitá funkce na intervalu $(0, l]$. Sudé periodické prodloužení funkce $f(t)$ se základním intervalem periodicity $(-l, l]$ je funkce $g(t)$ definovaná předpisem

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & \text{pro } t \in (0, l], \\ f(-t) & \text{pro } t \in (-l, 0). \end{cases} \quad (1.52)$$

Řada (1.49) se nazývá *sinova Fourierova řada* a řada (1.50) *kosinova Fourierova řada*.

Pozorný čtenář si všiml, že předpokládáme základní interval $(0, l]$, což se může zdát být omezující v případě, kdy je zadaná funkce definovaná na intervalu $(a, b]$. Potom stačí provést transformaci souřadnic $\tau = t - a$ a transformovat interval $(a, b]$ na $(0, l]$, kde $l = b - a$.

Příklad 5 Rozviňme následující funkci v sinovu a kosinovu Fourierovu řadu

$$f(t) = t \sin(t) \text{ pro } t \in (0, \pi]. \quad (1.53)$$

Sinova Fourierova řada

Nejprve provedeme liché prodloužení (viz obrázek 1.14). Rozvíjená funkce má periodu 2π a základní interval periodicity $(-\pi, \pi]$. Podle Věty 2 je $a_n = 0$ a $b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \sin\left(n \frac{\pi}{l} t\right) dt$. Tedy pro $n = 2, 3, \dots$ je

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t \sin(t) \sin(nt) dt = \frac{4n}{\pi} \frac{(-1)^n - 1}{(n-1)^2(n+1)^2}.$$

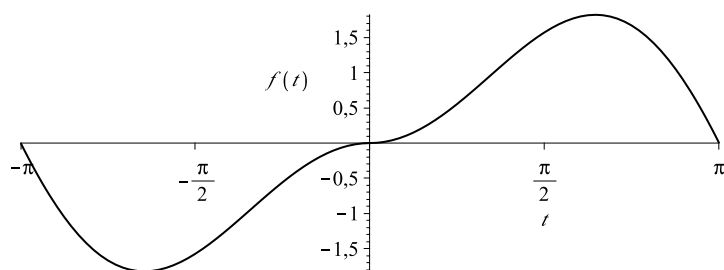
Pro $n = 1$ dostáváme

$$b_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t \sin^2(t) dt = \frac{\pi}{2}.$$

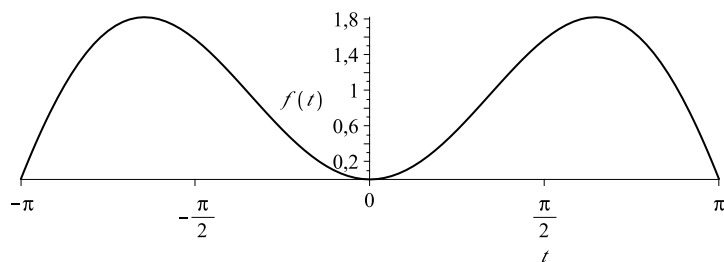
Daná řada má tvar

$$f(t) = \frac{\pi}{2} \sin(t) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4n}{\pi} \frac{(-1)^n - 1}{(n-1)^2(n+1)^2} \sin(nt).$$

Kosinova Fourierova řada



Obrázek 1.14: Graf lichého prodloužení funkce (1.53)



Obrázek 1.15: Graf sudého prodloužení funkce (1.53)

Nejprve provedeme sudé prodloužení (viz obrázek 1.15). Rozvíjená funkce má tedy periodu 2π a základní interval periodicity $(-\pi, \pi]$. Podle Věty 3 je $b_n = 0$ a $a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \cos\left(n\frac{\pi}{l}t\right) dt$. Tedy pro $n = 0, 2, 3, \dots$ je

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t \sin(t) \cos(nt) dt = 2 \frac{(-1)^{n+1}}{(n-1)(n+1)}.$$

Pro $n = 1$ dostáváme

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t \sin(t) \cos(t) dt = \frac{1}{2}.$$

Daná řada má tvar

$$f(t) = 1 + \frac{1}{2} \cos(t) + \sum_{n=2}^{\infty} 2 \frac{(-1)^{n+1}}{(n-1)(n+1)} \cos(nt).$$

1.5 Vlastnosti Fourierových řad

Věta 4 *Pro každou po částech spojitou funkci $f(t)$ na intervalu $[a, b]$ platí*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \sin(nt) \, dt = 0, \quad (1.54)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \cos(nt) \, dt = 0. \quad (1.55)$$

Důkaz: Je-li interval $[a, b]$ délky 2π , pak není těžké ověřit, že vzorce (1.54) a (1.55) platí. Je-li interval $[a, b]$ delší než 2π , pak jej rozdělme na $k + 1$ intervalů

$$[a, b] = \left[\bigcup_{i=1}^k [a + 2(i-1)\pi, a + 2i\pi] \right] \cup [a + 2k\pi, a + 2k\pi + b],$$

kde délka posledního je méně než 2π . Nyní prodlužme funkci $f(t)$ napravo od bodu b tak, že ji položíme rovnu nule na intervalu $[b, a + 2(k+1)\pi]$. Pak

$$\int_a^b f(t) \sin(nt) \, dt = \sum_{i=1}^{k+1} \int_{a+2(i-1)\pi}^{a+2i\pi} f(t) \sin(nt) \, dt$$

a každý z integrálů na pravé straně je pro $n \rightarrow \infty$ v limitě roven nule. Obdobně ukážeme platnost (1.55), čímž je věta dokázána. $\square$

Následující věta, kterou jsme již uvedli v podkapitole 1.1 a použili v podkapitole 1.3, dává odpověď na otázku, jaké podmínky musí splňovat funkce $f(t)$, aby příslušná Fourierova řada konvergovala.

Věta 1 (Dirichlet) *Vyhovuje-li funkce $f(t)$ Dirichletovým podmínkám, pak daná Fourierova řada funkce $f(t)$ konverguje v každém t k hodnotě*

$$\frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0))$$

a platí

$$\frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt).$$

Navíc v bodech t , kde je $f(t)$ spojitá, je

$$\frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0)) = f(t).$$

Důkaz Dirichletovy věty: Dá se ukázat (viz [7]), že pro každé n platí

$$1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin\left(\left(\frac{1}{2} + n\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt. \quad (1.56)$$

Daný vztah přenásobme výrazem

$$\frac{f(t+0) + f(t-0)}{2} \quad (1.57)$$

a dostáváme

$$\frac{f(t+0) + f(t-0)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left[\frac{f(t+0) + f(t-0)}{2} \right] \frac{\sin\left(\left(\frac{1}{2} + n\right)u\right)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} du. \quad (1.58)$$

Nyní zavedeme

$$R_n(t) = s_n(t) - \frac{f(t+0) + f(t-0)}{2}, \quad (1.59)$$

kde

$$s_n(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin kt). \quad (1.60)$$

K důkazu tvrzení nyní stačí ukázat, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(t) = 0.$$

Pro částečný součet platí (viz [7])

$$s_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left[\frac{f(t+u) + f(t-u)}{2} \right] \frac{\sin\left(\left(\frac{1}{2} + n\right)u\right)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} du. \quad (1.61)$$

Pak z (1.58) a (1.61) dostáváme

$$\begin{aligned} R_n(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left[\frac{f(t+u) + f(t-u)}{2} \right] \frac{\sin\left(\left(\frac{1}{2} + n\right)u\right)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} du - \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left[\frac{f(t+0) + f(t-0)}{2} \right] \frac{\sin\left(\left(\frac{1}{2} + n\right)u\right)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} du. \end{aligned}$$

Integrál upravíme

$$\begin{aligned}
 R_n(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left[\frac{f(t+u) - f(t+0)}{2} \right] \frac{\sin \left(\left(\frac{1}{2} + n \right) u \right)}{\sin \left(\frac{u}{2} \right)} \mathrm{d} u + \\
 &\quad + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left[\frac{f(t-u) - f(t-0)}{2} \right] \frac{\sin \left(\left(\frac{1}{2} + n \right) u \right)}{\sin \left(\frac{u}{2} \right)} \mathrm{d} u = \\
 &= I_1 + I_2.
 \end{aligned}$$

Na oba integrály I_1 i I_2 lze nyní uplatnit větu 4. Skutečně, pro I_1 máme

$$\begin{aligned}
 \pi I_1 &= \int_0^\pi \left[\frac{f(t+u) - f(t+0)}{2 \sin \left(\frac{u}{2} \right)} \right] \sin \left(\left(\frac{1}{2} + n \right) u \right) \mathrm{d} u = \\
 &= \int_0^\pi \left[\frac{f(t+u) - f(t+0)}{2 \sin \left(\frac{u}{2} \right)} \right] \sin \left(\frac{u}{2} \right) \cos(nu) \mathrm{d} u + \\
 &\quad + \int_0^\pi \left[\frac{f(t+u) - f(t+0)}{2 \sin \left(\frac{u}{2} \right)} \right] \cos \left(\frac{u}{2} \right) \sin(nu) \mathrm{d} u = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^\pi [f(t+u) - f(t+0)] \cos(nu) \mathrm{d} u + \\
 &\quad + \int_0^\pi \left[\frac{f(t+u) - f(t+0)}{2 \sin \left(\frac{u}{2} \right)} \right] \cos \left(\frac{u}{2} \right) \sin(nu) \mathrm{d} u = \\
 &= J_1 + J_2.
 \end{aligned}$$

Na integrál J_1 lze přímo použít Větu 4. Pro integrál J_2 je zapotřebí vyšetřit chování funkce

$$\frac{f(t+u) - f(t+0)}{2 \sin \left(\frac{u}{2} \right)}$$

v bodě $u = 0$. Jednoduchou úpravou dostaneme

$$\frac{f(t+u) - f(t+0)}{2 \sin\left(\frac{u}{2}\right)} = \frac{f(t+u) - f(t+0)}{u} \frac{\frac{u}{2}}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)}.$$

První činitel konverguje pro $u \rightarrow 0$ k limitě

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(t+u) - f(t+0)}{u} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t+0)}{h} = f'(t),$$

která je podle předpokladu konečná. Druhý činitel má limitu pro $u \rightarrow 0$ rovnou 1 a tato funkce je zřejmě po částech spojitá. Tedy i na integrál J_2 lze aplikovat větu 4.

Celkově tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_1 = 0.$$

Analogicky se ukáže

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_2 = 0.$$

Věta je tímto dokázána. □

1.6 Prostor $L_2(a, b)$

Označme $L_2(a, b)$ množinu všech vhodných (viz Poznámka 1) komplexních funkcí $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$, pro které je integrál

$$\int_a^b |f(t)|^2 dt \tag{1.62}$$

konečný. Funkce náležící prostoru $L_2(a, b)$ se nazývá *integrovatelná s kvadrátem*.

Poznámka 1 *Pozorný čtenář si všiml zvýrazněného slova vhodných ve výše uvedené definici. Tento výraz je podstatný pro korektnost textu. Není totiž možno bez omezení budovat prostor integrovatelných funkcí s kvadrátem. Matematici umí toto omezení přesně vymezit, a to jediným slovem měřitelných. Za předpokladu měřitelnosti je vše korektní. K tomu, abychom používali tento termín, musíme budovat teorii míry, která svým rozsahem překračuje tento text a mnohá inženýrská studia. Celkově tedy, funkce, které jsou pro nás*

přípustné, vhodné, jsou ty, se kterými se většinou setkáme v praxi a v tomto textu, není-li řečeno jinak. Pro další omezení věnujte pozornost následujícím poznámkám.

Prostor $L_2(a, b)$ s operací součtu ($h(t) = f(t) + g(t)$) a násobkem skaláru ($h(t) = cf(t)$) je lineární. K tomu je zapotřebí ověřit podmínky:

1. součet dvou funkcí z $L_2(a, b)$ je opět funkce z $L_2(a, b)$. Víme, že platí nerovnost $|a + b|^2 \leq 2(|a|^2 + |b|^2)$. Stačí tedy položit $a = f(t)$ a $b = g(t)$. Pak $|f(t) + g(t)|^2 \leq 2(|f(t)|^2 + |g(t)|^2)$. Integrací dané nerovnosti přes interval (a, b) máme $\int_a^b |f(t) + g(t)|^2 dt \leq 2(\int_a^b |f(t)|^2 dt + \int_a^b |g(t)|^2 dt)$. Oba integrály na pravé straně nerovnosti jsou konečné, tedy i integrál na levé straně je konečný a funkce $f(t) + g(t)$ je integrovatelná s kvadrátem.
2. součin funkce z $L_2(a, b)$ s komplexním číslem je funkce z $L_2(a, b)$. Skutečně, $\int_a^b |cf(t)|^2 dt = |c|^2 \int_a^b |f(t)|^2 dt$, tedy funkce $cf(t)$ je integrovatelná s kvadrátem.

Příklad 6 Integrací lze ověřit, že

$$f(t) = \frac{1+i}{\sqrt{t}} \in L_2[1, 2], \quad f(t) = \frac{1+i}{\sqrt{t}} \notin L_2(0, 1] \quad \text{a} \quad f(t) = \frac{1+i}{\sqrt[4]{t}} \in L_2(0, 1].$$

Poznámka 2 Při řešení mnohých problémů se často používá speciální prostor $L_1(a, b)$, *prostor funkcí integrovatelných na intervalu (a, b)* . Tento prostor je opět lineární. Řekneme, že funkce f patří do $L_1(a, b)$, je-li na intervalu (a, b) (*absolutně*) *integrovatelná*, tj.

$$\int_a^b |f(t)| dt < \infty.$$

Zřejmě, je-li $f(t) \in L_2(a, b)$, pak také $f(t) \in L_1(a, b)$. Opačná implikace však neplatí, viz příklad 8.

Příklad 7 Integrací lze ověřit, že

$$f(t) = \frac{1+i}{\sqrt{t}} \in L_1[1, 2] \quad \text{a} \quad f(t) = \frac{1+i}{\sqrt[4]{t}} \in L_1(0, 1].$$

Příklad 8 Rozhodněme, zda funkce $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t-1}}$ je integrovatelná s kvadrátem, či alespoň absolutně integrovatelná na intervalu $[1, 2]$. Spočtěme příslušné integrály:

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}} dt = \lim_{u \rightarrow 1} \int_u^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}} dt = \lim_{u \rightarrow 1} [2\sqrt{t-1}]_u^2 = 2,$$

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{t-1}} \right)^2 dt = \lim_{u \rightarrow 1} \int_u^2 \frac{1}{t-1} dt = \lim_{u \rightarrow 1} [\ln |t-1|]_u^2 = \infty.$$

Celkově, daná funkce $\frac{1}{\sqrt{t-1}} \in L_1[1, 2]$, ale $\frac{1}{\sqrt{t-1}} \notin L_2[1, 2]$.

Uvedme nyní postačující podmínku na integrovatelné funkce s kvadrátem.

Věta 5 Každá po částech spojitá funkce na uzavřeném intervalu je na tomto intervalu integrovatelná s kvadrátem.

Poznámka 3 Výše uvedená věta charakterizuje prvky prostoru $L_2(a, b)$ a doplňuje předchozí Poznámku 1. K úplnosti je však nutno definovat po částech spojitou funkci. Je to taková funkce, která vyhovuje následujícím podmínkám:

1. existuje konečné dělení intervalu (a, b) takové, že dělicí intervaly jsou navzájem disjunktní a jejich sjednocení je právě interval (a, b) ,
2. funkce zúžená na každý dělicí interval je spojitá.

Jediné, co je zapotřebí zvážit, je omezenost funkce na příslušném dělicím intervalu, což pilný čtenář zvládne sám.

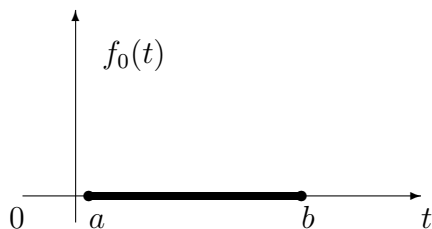
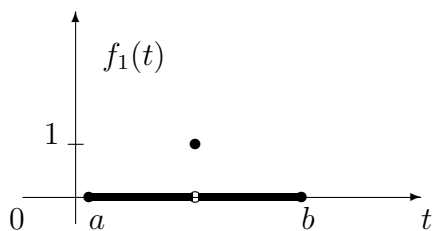
Budte f a g funkce z $L_2(a, b)$, pak skalární součin funkcí f a g na intervalu (a, b) definujeme vztahem

$$(f, g) = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt. \quad (1.63)$$

Normu funkce f z $L_2(a, b)$ definujeme předpisem

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)}. \quad (1.64)$$

Normu funkce tedy chápeme jako její vzdálenost od nulové funkce.

Obrázek 1.16: Graf funkce f_0 Obrázek 1.17: Graf funkce f_1

Poznámka 4 Zvídavý čtenář si všiml, že vezme-li například funkce $f_0(t)$ a $f_1(t)$ definované na obrázcích 1.16 a 1.17 pak

$$\|f_0\| = \|f_1\| = 0.$$

Tedy pro dvě různé funkce dostává stejnou normu, což není v pořádku. Vezmeme-li v úvahu předchozí poznámku 1, pak vzhledem k Lebesgueově míře jsou tyto funkce totožné, liší se pouze na množině míry nula.

Formulujme základní vlastnosti skalárního součinu a normy, důkaz je snadný a proto jej přenecháváme čtenáři:

Lema 2 Budte f, g a h funkce z $L_2(a, b)$ a $c \in \mathbb{C}$, pak

1. $(f, f) = \int_a^b f(t) \overline{f(t)} dt = \int_a^b |f(t)|^2 dt = \|f\|^2,$
2. $(cf, g) = c(f, g),$
3. $(f + h, g) = (f, g) + (h, g),$

4. $(f, g) = \overline{(g, f)}$,
5. Schwarz-Buňakovského nerovnost: $|(f, g)| \leq \|f\| \|g\|$,
6. $\|f\| = 0$ právě tehdy, je-li $f(t) = 0$ pro každé t ,
7. $\|cf\| = |c| \|f\|$,
8. $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

Systém funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ z $L_2(a, b)$ je *ortogonální*, je-li skalární součin každých dvou různých funkcí roven nule, tj. platí-li pro každé $m \neq n$

$$(f_m, f_n) = 0. \quad (1.65)$$

Je-li navíc norma každé funkce posloupnosti rovna jedné, nazýváme takový systém *ortonormální*, tj.

$$(f_m, f_n) = \begin{cases} 1 & \text{pro } m = n, \\ 0 & \text{pro } m \neq n. \end{cases} \quad (1.66)$$

Příklad 9 Systém funkcí $\{e^{int}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ je na intervalu $[0, 2\pi]$ ortogonální, není však ortonormální. Prvně, $\int_0^{2\pi} |e^{int}|^2 dt = 2\pi$, tedy $e^{int} \in L_2[0, 2\pi]$ pro každé n . Dále

$$(f_m, f_n) = \begin{cases} \int_0^{2\pi} e^{imt} e^{-int} dt = 2\pi & \text{pro } m = n, \\ \int_0^{2\pi} e^{imt} e^{-int} dt = 0 & \text{pro } m \neq n. \end{cases} \quad (1.67)$$

Daný systém funkcí lze jednoduchým způsobem normalizovat přenásobením každé funkce převrácenou hodnotou normy, tj.

$$\left\{ \frac{e^{int}}{\|e^{int}\|} \right\}_{n=-\infty}^{\infty} = \left\{ \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{n=-\infty}^{\infty}.$$

Pak zřejmě

$$\left\| \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} \right\|^2 = \frac{1}{2\pi} (e^{int}, e^{int}) = 1.$$

Příklad 10 Posloupnost trigonometrických funkcí

$$1, \cos(t), \sin(t), \cos(2t), \sin(2t), \dots$$

je na intervalu $(-\pi, \pi)$ ortogonální, není však ortonormální. Skutečně:

$$\text{pro } m \neq n \text{ je } \begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt) \sin(nt) \, dt = 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt) \cos(nt) \, dt = 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt) \sin(nt) \, dt = 0, \end{cases} \quad (1.68)$$

$$\text{pro } m = n \text{ je } \begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt) \sin(mt) \, dt = 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt) \cos(mt) \, dt = \pi, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt) \sin(mt) \, dt = \pi. \end{cases} \quad (1.69)$$

Normalizací dané posloupnosti získáme ortonormální systém funkcí:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(t)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(t)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(2t)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(2t)}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

Příklad 11 Systém funkcí $\{e^{int}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ není na intervalu $[0, \pi]$ ortogonální. Skutečně

$$(f_m, f_n) = \int_0^{\pi} e^{imt} e^{-int} \, dt = \frac{(-1)^{m-n} - 1}{m-n} \neq 0 \text{ pro } m-n \text{ liché.}$$

Nechť je dána posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ z $L_2(a, b)$. Existuje-li funkce f z $L_2(a, b)$ taková, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0, \quad (1.70)$$

pak říkáme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje k f v normě $L_2(a, b)$* . Někdy se také používá označení *konvergence v průměru* nebo *konvergence ve smyslu střední kvadratické odchylky*.

Posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ z $L_2(a, b)$ konverguje na množině M k funkci f *stejněměrně*, jestliže pro každé $\epsilon > 0$ existuje n_0 takové, že pro každé $n > n_0$ a každé $z \in M$ je $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$.

Poznamenejme, že pokud víme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *stejněměrně konvergentní*, pak je také *konvergentní*. Následující příklad ukazuje, že naopak tomu tak být nemusí.

Příklad 12 Geometrická posloupnost $\{t^n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní, ale není stejnoměrně konvergentní na intervalu $[0, 1)$. Snadno se ověří, že daná posloupnost konverguje k 0 na intervalu $[0, 1)$. Dále platí, že $\sup |t^n| = 1$ pro $t \in [0, 1)$, tedy limitou není 0, daná posloupnost nekonverguje absolutně.

1.7 Zobecněná Fourierova řada

Jak jsme již popsali v předešlých odstavcích, celá teorie Fourierových řad vznikla z potřeby rozvinout danou periodickou funkci v periodickou funkci tvořenou trigonometrickými funkcemi, viz příklad 10. Většina vět platných pro Fourierovy řady zůstane platná, nahradíme-li v původních úvahách trigonometrické funkce systémem funkcí, jež jsou ortogonální popřípadě ortonormální (viz podkapitola 1.6).

Vzniká tedy otázka, zda je možno zadanou funkci $f(t)$, která je integrovatelná s kvadrátem na intervalu $[a, b]$, rozvinout v nekonečnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \varphi_n(t)$$

pomocí ortonormovaného systému funkcí $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\varphi_n \in L^2(a, b)$ a určit koeficienty α_n .

1. Aproximace

Budeme aproximovat funkci $f(t)$ polynomem T_n na základě nejmenší střední kvadratické odchylky za předpokladu, že $\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ je ortonormální soustava funkcí. Je tedy otázkou, jak volit koeficienty α_n v mnohočlenu

$$T_k(t) = \alpha_0 \varphi_0(t) + \alpha_1 \varphi_1(t) + \cdots + \alpha_k \varphi_k(t),$$

aby byla hodnota integrálu

$$I_k = \frac{1}{b-a} \int_a^b [f(t) - T_k(t)]^2 dt$$

minimální. Upravme daný integrál

$$I_k = \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b [f(t)]^2 dt - 2 \int_a^b [f(t)T_k(t)] dt + \int_a^b [T_k(t)]^2 dt \right).$$

Pak je

$$\int_a^b f(t)T_k(t) \, dt = \sum_{n=0}^k \alpha_n \int_a^b f(t)\varphi_n(t) \, dt.$$

Označme $a_n = \int_a^b f(t)\varphi_n(t) \, dt$ a nazvěme toto číslo *Fourierovým koeficientem funkce $f(t)$ vzhledem k dané soustavě funkcí $\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^\infty$* . Pak máme

$$\int_a^b f(t)T_k(t) \, dt = \sum_{n=0}^\infty \alpha_n a_n.$$

Nyní spočtěme

$$\begin{aligned} \int_a^b [T_k(t)]^2 \, dt &= \int_a^b \left[\sum_{n=0}^k \alpha_n \varphi_n \right]^2 \, dt = \\ &= \int_a^b \left(\sum_{n=0}^k \alpha_n^2 \varphi_n^2 + 2 \sum_{\substack{m,n=0 \\ n < m}}^k \alpha_n \alpha_m \varphi_n \varphi_m \right) \, dt = \\ &= \sum_{n=0}^k \alpha_n^2, \end{aligned}$$

díky ortonormalitě systému $\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^\infty$. Integrál má tudíž tvar

$$I_k = \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b f(t)^2 \, dt + \sum_{n=0}^k (\alpha_n^2 - 2\alpha_n a_n + a_n^2 - a_n^2) \right) = \quad (1.71)$$

$$= \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b f(t)^2 \, dt + \sum_{n=0}^k (\alpha_n - a_n)^2 - \sum_{n=0}^k a_n^2 \right). \quad (1.72)$$

Tato rovnice platí pro libovolnou volbu koeficientů α_n . Integrál I_k má tedy minimální hodnotu při volbě $\alpha_n = a_n$. Označme mnohočlen T_k s koeficienty $\alpha_n = a_n$ jako P_k a příslušné integrály J_k . Pak

$$J_k = \frac{1}{b-a} \int_a^b [f(t) - P_k(t)]^2 \, dt = \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b [f(t)]^2 \, dt - \sum_{n=0}^k a_n^2 \right). \quad (1.73)$$

Jelikož je pro každé k

$$J_k \geq 0,$$

je

$$\sum_{n=0}^k a_n^2 \leq \int_a^b [f(t)]^2 \, dt. \quad (1.74)$$

Nerovnost (1.74) se nazývá *Besselova*. Jelikož jsou formule (1.73) a (1.74) platné pro každé k , je nekonečná řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$$

konvergentní, neboť jsou všechny částečné součty menší než dané pevné kladné číslo a to podle (1.74) $\int_a^b [f(t)]^2 dt$.

2. Uzavřenost

Řešme nyní přirozenou otázku, zda

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J_k = 0.$$

Ortonormální systémy, jež splňují tuto vlastnost, označujeme jako *uzavřené*. Proto pro ně platí:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b [f(t) - \sum_{n=0}^k a_n \varphi_n(t)]^2 dt = \int_a^b [f(t)]^2 dt - \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 = 0,$$

čili

$$\int_a^b [f(t)]^2 dt = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2, \quad (1.75)$$

rovnice (1.75) se nazývá *Parsevalova*. O posloupnosti trigonometrických funkcí jsme již dokázali, že je v intervalu $[0, 2\pi]$ ortonormální, viz příklad 10. Uzavřenost se dokáže pomocí Fejérových vět.

3. Ortonormalita

V předchozích podkapitolách jsme si již ukázali, že ortonormalita systému funkcí podstatně zjednodušuje rozvíjení dané funkce pomocí těchto funkcí. Bohužel mocninná posloupnost funkcí

$$\varphi_k(t) = t^k, \text{ kde } k = 0, 1, \dots \quad (1.76)$$

není ortonormální ani normovaná, navzdory častému úkolu rozvinout funkci $f(t)$ v mocninnou řadu. Způsob, jak sestavit koeficienty takové mocninné řady, je znám, stačí rozvíjet danou funkci $f(t)$ v Taylorovu řadu. Tento způsob je teoreticky dobrý, v praxi však narazíme na problém, který nemusí mít řešení, a to určení hodnot všech řádů derivace dané funkce. Tento problém lze odstranit tak, že danou funkci nebudeme rozvíjet pomocí systému (1.76), ale pomocí systému složeného z mnohočlenů, který tvoří ortonormovanou soustavu funkcí na daném intervalu.

Věta 6 (Schmidt) *Buď*

$$\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^{\infty} \quad (1.77)$$

posloupnost spojitých a nenulových funkcí na intervalu $[a, b]$ taková, že každý konečný úsek $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_k(t)$ představuje $k + 1$ lineárně nezávislých funkcí. Pak lze z této posloupnosti vytvořit posloupnost funkcí

$$\{\psi_n(t)\}_{n=0}^{\infty} \quad (1.78)$$

spojitých na intervalu $[a, b]$ takovou, že

1. *každý její konečný úsek $\psi_0(t), \psi_1(t), \dots, \psi_{k-1}(t)$ představuje k lineárně nezávislých funkcí,*
2. *každá funkce $\psi_k(t)$ je lineární kombinací funkcí $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_{k-1}(t)$,*
3. *posloupnost (1.78) tvoří ortonormovanou soustavu.*

Důkaz věty má dvě části. První část je konstrukční, konstruuje se příslušná ortonormovaná soustava. Ve druhé se ověří platnost vlastností popsaných danou větou. Provedme nyní konstrukci, prověření daných vlastností se již provede snadno a je přenecháno čtenáři jako cvičení.

Konstrukce posloupnosti (1.78):

1. Položme

$$\psi_0(t) = \frac{\varphi_0(t)}{c_0}, \quad (1.79)$$

kde $c_0^2 = \int_a^b \varphi_0^2(t) dt$. Funkce $\psi_0(t)$ je zřejmě normovaná. Skutečně

$$\int_a^b \psi_0^2(t) dt = 1/c_0^2 \int_a^b \varphi_0^2(t) dt = 1.$$

2. Zavedme funkci

$$\chi_1(t) = \varphi_1(t) - a_{10}\psi_0(t), \quad (1.80)$$

kde a_{10} volíme tak, aby funkce $\chi_1(t)$ byla ortogonální k funkci $\psi_0(t)$, tedy aby platilo

$$\int_a^b \chi_1(t)\psi_0(t) dt = \int_a^b [\varphi_1(t) - a_{10}\psi_0(t)]\psi_0(t) dt = 0.$$

Odtud máme

$$a_{10} = \int_a^b a_{10} \psi_0^2(t) \, dt = \int_a^b \varphi_1(t) \psi_0(t) \, dt.$$

Označme

$$c_1^2 = \int_a^b \chi_1^2(t) \, dt,$$

pak funkce

$$\psi_1(t) = \frac{\chi_1(t)}{c_1} \quad (1.81)$$

je na intervalu $[a, b]$ ortonormální k funkci $\psi_0(t)$.

Podobně zavedeme funkci

$$\chi_2(t) = \varphi_2(t) - a_{20}\psi_0(t) - a_{21}\psi_1(t), \quad (1.82)$$

kde a_{20} a a_{21} volíme tak, aby funkce $\chi_2(t)$ byla ortogonální k funkcím $\psi_0(t)$ a $\psi_1(t)$. Snadno odvodíme, že

$$a_{20} = \int_a^b \varphi_2(t) \psi_0(t) \, dt, \quad (1.83)$$

$$a_{21} = \int_a^b \varphi_2(t) \psi_1(t) \, dt. \quad (1.84)$$

Potom funkce

$$\psi_2(t) = \frac{\chi_2(t)}{c_2}, \text{ kde } c_2^2 = \int_a^b \chi_2^2(t) \, dt, \quad (1.85)$$

je normovaná a ortogonální k $\psi_0(t)$ a $\psi_1(t)$.

3. K určení dalších členů posloupností (1.78) stačí postupovat analogicky s pomocí matematické indukce. Poznamenejme, že čísla c_k jsou vesměs různá od nuly vzhledem k lineární nezávislosti každého konečného úseku posloupností (1.77). Z konstrukce (1.78) pak plyne lineární nezávislost každého jejího konečného úseku.

Příklad 13 Aplikujme Větu 6 na mocninnou posloupnost funkcí (1.76) na intervalu $[-1, 1]$. Výše popsaným procesem odvodíme mnohočleny, které, až na konstantní faktory, jsou tak zvané *Legendreovy polynomy*. Konstruuje první tři členy hledané ortonormované soustavy.

Prvně, $\varphi_0(t) = 1$ a

$$c_0^2 = \int_{-1}^1 \varphi_0^2(t) \, dt = 2,$$

tedy

$$c_0 = \sqrt{2}$$

a

$$\psi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Dále položíme

$$\chi_1(t) = \varphi_1(t) - a_{10}\psi_0(t) = t - a_{10}\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$a_{10} = \int_{-1}^1 \varphi_1(t)\psi_0(t) \, dt = \int_{-1}^1 \frac{t}{\sqrt{2}} \, dt = 0,$$

proto

$$\chi_1(t) = t$$

a

$$c_1^2 = \int_{-1}^1 \chi_1^2(t) \, dt = \int_{-1}^1 t^2 \, dt = \frac{2}{3}.$$

Dostáváme tedy

$$\psi_1(t) = \frac{\chi_1(t)}{c_1} = \frac{t}{\sqrt{2/3}} = \sqrt{\frac{3}{2}}t.$$

Nyní položíme

$$\chi_2(t) = \varphi_2(t) - a_{20}\psi_0(t) - a_{21}\psi_1(t) = t^2 - \frac{1}{3},$$

$$c_2^2 = \int_{-1}^1 \chi_2^2 \, dt = \frac{8}{45}$$

a

$$\psi_2(t) = \frac{\chi_2(t)}{c_2} = \sqrt{\frac{5}{2}} \left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2} \right).$$

První tři členy hledané posloupnosti jsou:

$$\psi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\psi_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}t,$$

$$\psi_2(t) = \sqrt{\frac{5}{2}} \left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2} \right).$$

Závěrem, danou funkci $f(t)$, která je v intervalu $[-1, 1]$ spojitá, můžeme rozvíjet v řadu tvořenou z těchto mnohočlenů.

1.8 Gibbsův jev

V předchozích kapitolách jsme se zabývali rozvojem funkcí z $L_2(a, b)$ ve Fourierovu řadu. Již víme, že Fourierova řada funkce $f \in L_2(0, 2\pi)$ konverguje v normě prostoru $L_2(0, 2\pi)$ k funkci f . Jsou-li navíc splněny další podmínky (viz Věta 2.11 z [6]), pak konverguje Fourierova řada stejnoměrně. Jednoduchým příkladem funkce nesplňující tyto podmínky je

$$f_0(t) = \frac{\pi - t}{2} \text{ pro } t \in (0, 2\pi),$$

která je periodicky rozšířená na celé $\mathbb{R}$ viz. obrázek 1.18. Lze ověřit (viz Kapitola 2 z [10]), že

$$f_0(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kt)}{k}, \quad (1.86)$$

zde rovnost platí ve smyslu konvergence v $L_2(l, l + 2\pi)$, $l \in \mathbb{R}$, a také ve smyslu stejnoměrné konvergence na každém intervalu s krajními body $2l\pi + \epsilon$ a $2(l+1)\pi - \epsilon$, kde $\epsilon \in (0, \pi)$ (viz Věta 2.4 z [6]). Problémem jsou tedy body nespojitosti funkce f_0 , například nevíme, co se děje v bodě $t = 0$. V tomto bodě je součet řady (1.86) roven 0, tedy průměru limit v nule zprava a zleva

$$\frac{1}{2} [f_0(0+0) + f_0(0-0)] = 0.$$

Zaměřme se nyní na chybu částečného součtu řady (1.86)

$$R_n(t) = s_n(t) - f_0(t) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kt)}{k} - \frac{\pi - t}{2} \text{ pro } t \in (0, 2\pi).$$

Lehce ověříme, že

$$R'_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{2 \sin\left(\frac{1}{2}t\right)},$$

$$R_n(0) = -\frac{\pi}{2}$$

a tedy

$$R_n(t) = -\frac{\pi}{2} + \int_0^t \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right)} dx.$$

Funkce $s_n(t)$ je rostoucí v okolí nuly. Nyní hledíme takový bod $t_n > 0$, v němž má funkce $R_n(t)$ lokální extrém a je nejbližší k nule. Z rovnice $R'_n(t) = 0$ dostáváme

$$\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) = 0$$

a tedy

$$x_n = \pi\left(n + \frac{1}{2}\right)^{-1}.$$

Označíme-li $n + 1/2 = p$ a použijeme substituci $px = s$ dostaneme

$$R_n(t_n) = \int_0^{\pi/p} \frac{\sin(px)}{2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right)} dx - \frac{\pi}{2} = \int_0^{\pi} \frac{\sin(s)}{2p \sin\left(\frac{s}{2p}\right)} ds - \frac{\pi}{2}.$$

Pak pro dosti velké p (tj. pro dosti velké n) je

$$2p \sin\left(\frac{s}{2p}\right) \geq 0,$$

pro $s \in (0, \pi)$ a

$$\lim_{p \rightarrow \infty} 2p \sin\left(\frac{s}{2p}\right) = s.$$

Nyní najdeme integrální majorantu a dostáváme

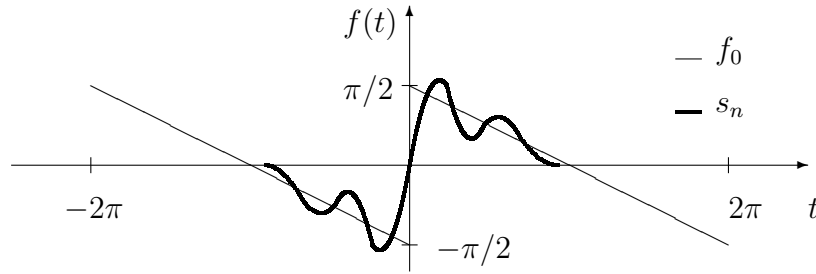
$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(t_n) = \int_0^{\pi} \frac{\sin(s)}{s} ds - \frac{\pi}{2} \doteq 0,18\pi$$

a pro velká n je

$$s_n(t_n) \doteq 1,18\frac{\pi}{2}.$$

Každý částečný součet $s_n(t)$ má tedy maximum, které převyšuje asi o 18 % maximum funkce f_0 , viz obrázek 1.18. Tomuto fenoménu se říká *Gibbsův jev*.

Maximum se s rostoucím n stále podstatně liší od maxima funkce f_0 , jen bod t_n se blíží k nule, v němž je maxima dosaženo. Proto nikdy nemůžeme dosáhnout toho, aby částečný součet řady (1.86) aproximoval funkci f_0 stejnoměrně.



Obrázek 1.18: Gibbsův jev

Dá se ukázat (viz Kapitola 6 v [6]), že každá funkce f , která má konečný počet bodů nespojitosti prvního druhu, lze zapsat ve tvaru

$$f(t) = g(t) + h(t),$$

kde $g(t)$ je funkce splňující naše dodatečné podmínky kladené na funkci f_0 a jejíž Fourierova řada konverguje stejnoměrně, a kde

$$h(t) = \sum_{i=1}^m c_i f_0(t - t_i)$$

je funkce, která zachycuje skoky funkce f .

Z vlastností funkce f_0 víme, že Fourierova řada funkce f konverguje v každém bodě t k hodnotě

$$\frac{1}{2}[f(t+0) + f(t-0)]$$

a že v okolí každého bodu funkce f se projeví Gibbsův jev. Tedy, částečný součet Fourierovy řady funkce f bude v okolí každého bodu nespojitosti t_i nabývat, až na zanedbatelnou odchylku, hodnotu

$$\frac{1}{2}[f(t_i+0) + f(t_i-0)] \pm \frac{1}{2}1,18[f(t_i+0) + f(t_i-0)],$$

v okolí bodu nespojitosti tedy nebudou částečné součty konvergovat stejnoměrně.

1.9 Řešený příklad

V této kapitole vyřešíme jeden příklad, ve kterém budeme hledat Fourierovu řadu periodického signálu. Jak vyplývá z předchozích kapitol, Fourierova řada periodického signálu je matematický zápis tvrzení, že periodický signál $f(t)$ s opakovacím kmitočtem $1/T$ lze složit z konstantního signálu a harmonických signálů o kmitočtech $1/kT$, kde $k = 1, 2, 3, \dots$. Tedy

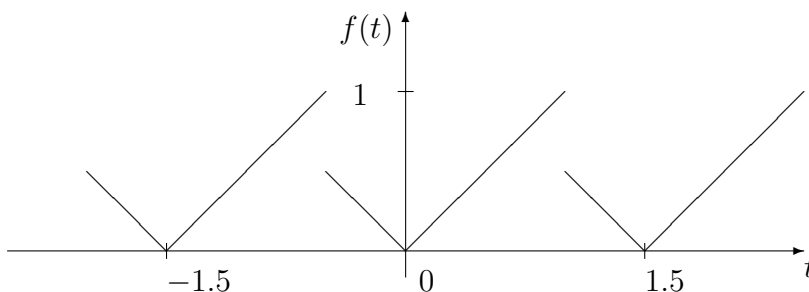
$$\begin{aligned}
 f(t) &= A_0 + \underbrace{A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)}_{\text{první (základní) harmonická}} + \\
 &+ A_2 \cos(2\omega t + \varphi_2) + A_3 \cos(3\omega t + \varphi_3) + \\
 &+ \dots + \underbrace{A_k \cos(k\omega t + \varphi_k)}_{k\text{-tá harmonická (vyšší)}} + \dots \\
 &= \underbrace{A_0}_{\text{stejnoseměrná složka (střední hodnota)}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t + \varphi_k)}_{\text{střídavá složka}},
 \end{aligned} \tag{1.87}$$

kde A_k je amplituda k -té harmonické složky, $k\omega$ je kruhový opakovací kmitočet k -té harmonické složky a φ_k je počáteční fáze k -té harmonické složky.

Z výše uvedené formule (1.87) je zřejmé, že každý periodický signál má *střídavou* a *stejnoseměrnou složku*. Stejnoseměrná složka je rovna střední hodnotě signálu za opakovací periodu. Střídavá složka se skládá z harmonických signálů o nulových středních hodnotách, je to tedy původní signál zbavený stejnosměrné složky. Střídavá složka obsahuje tzv. *první harmonickou* o kmitočtu, který je stejný jako opakovací kmitočet periodického signálu, a z *vyšších harmonických*, kterých je obecně nekonečný počet a jejichž kmitočet je celočíselným násobkem kmitočtu první harmonické.

Rozklad výše uvedeného periodického signálu (1.87) na dílčí komponenty je jednoznačný a platí, že každé dva různé periodické signály o opakovacím kmitočtu ω jsou jednoznačně reprezentovány různými dvojicemi množin $\{A_0, A_1, \dots, A_k, \dots\}$ a $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k, \dots\}$ viz kapitola Fourierova řada v komplexním oboru 1.2. Grafické znázornění těchto množin ve formě spektrálních čar na kmitočtové ose se nazývá *spektrum signálu*.

Prochází-li signál elektrickým obvodem, můžeme to chápat jako průchod množiny jeho harmonických složek. V důsledku rozdílných přenosových



Obrázek 1.19: Graf periodického signálu $f(t) = |t|$ se základním intervalem periodicity $(-0.5, 1)$.

schopností obvodu na různých kmitočtech dojde k tomu, že na výstupu obvodu budou jednotlivé harmonické složky vzájemně různě utlumeny a fázově posunuty, takže výstupní signál sice bude rovněž periodický, ale oproti vstupnímu signálu bude zkreslený. Spektrum signálu, resp. rozložení jeho spektrálních čar na kmitočtové ose, tak spolu s kmitočtovou charakteristikou obvodu přináší užitečný a názorný nástroj na chápání jevů spojených s interakcemi signálu a obvodů.

Protože harmonický signál je možné zapsat ještě v jiných tvarech, než jak je uvedeno v diskutovaném vzorci (1.87) (konkrétně v rozkladu na sinovou a cosinovou složku a také v komplexním tvaru jako součet dvou rotujících fázorů), existují tomu odpovídající tvary Fourierovy řady viz kapitoly 1.4 a 1.2. Další motivační úvahy a aplikace je možno nalézt v práci [1], kterou jsou také motivovány předchozí odstavce.

Konstruujeme nyní Fourierovu řadu pomocí 10 harmonických signálů

$$f(t) = |t|$$

na základním intervalu periodicity $(-0.5, 1)$ viz obrázek 1.19. Dále provedme harmonickou analýzu, tedy konstruujeme amplitudové a fázové spektrum.

Postup a nutné vzorce k výpočtům jsou uvedeny v kapitole Fourierova řada v komplexním oboru 1.2. Výsledek je tedy možno nalézt přímým výpočtem za pomoci tužky a papíru nebo si můžeme pomoci vhodným algoritmem. My použijeme software Matlab, příslušný kód m-filu je uveden níže i s komentáři, porovnejte vzorce z kapitoly Fourierovy řady v komplexním oboru 1.2 se zápisem jádra algoritmu 1.1 na řádcích 19 až 29.

Algoritmus 1.1: Algoritmus rozvoje ve Fourierovu řadu

```

1 function Fourierova_rada(f,a,b,N)
2
3 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
4 % Rozvoj zadane funkce f(t) z L2(a,b)
5 % ve standardni Fourierovu radu
6 % v komplexnim tvaru pomoci N harmonickych
7 % Příklad volání: Fourierova_rada('abs(t)',-0.5,1,10)
8 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
9
10 syms t real; % Symbolická proměnná t
11 T=sym(b-a); % Perioda
12 w=2*pi/T; % Úhlová rychlost
13
14 % Vypocet koeficientu cn Fourierovy rady fN
15 % a její sestavení
16 % Vypocet amplitud An a fazi FIn pro n=-N,...,N
17
18 fN=0; An=zeros(2*N+1,1); FIn=zeros(2*N+1,1);
19 for n=-N:N
20     cn=1/T*int(f*exp(-i*w*n*t),t,a,b);
21     % Koeficient n-teho členu FR
22     fN=fN+cn.*exp(i*w*n*t);
23     % Sestavení Fourierovy rady fN
24     An(n+N+1)=abs(double(cn));
25     % Vypocet amplitudy (indexace vek. od 1)
26     FIn(n+N+1)=-angle(double(cn));
27     % Vypocet faze (indexace vektoru od 1)
28 end;
29
30 % Grafy funkcí f a fN
31 figure; hold on; grid on; box on;
32 set(gca,'FontSize',14);
33
34 % Puvodní funkce f
35 hf=ezplot(f,[a,b]);
36 set(hf,'Color','Red','LineWidth',2);
37
38 % Aproximace fN pomoci N harmonickych
39 hfN=ezplot(fN,[a,b]);
40 set(hfN,'Color','Blue',
41 'LineWidth',2,'LineStyle','--');
42 xlabel('t');
43 title(['Fourierova rada funkce f(t)=',f]);
44 legend('f(t)', ['f_{',num2str(N),'}(t)'],
45 'Location','NorthEastOutside');

```

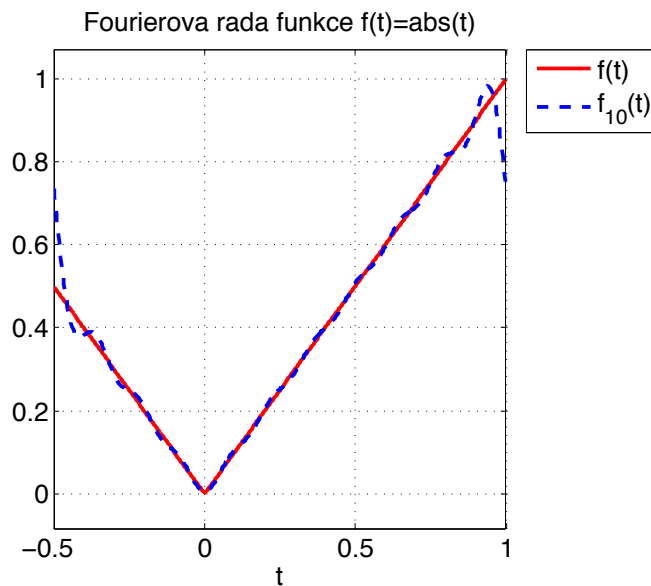

Algoritmus 1.2: Algoritmus rozvoje ve Fourierovu řadu

```

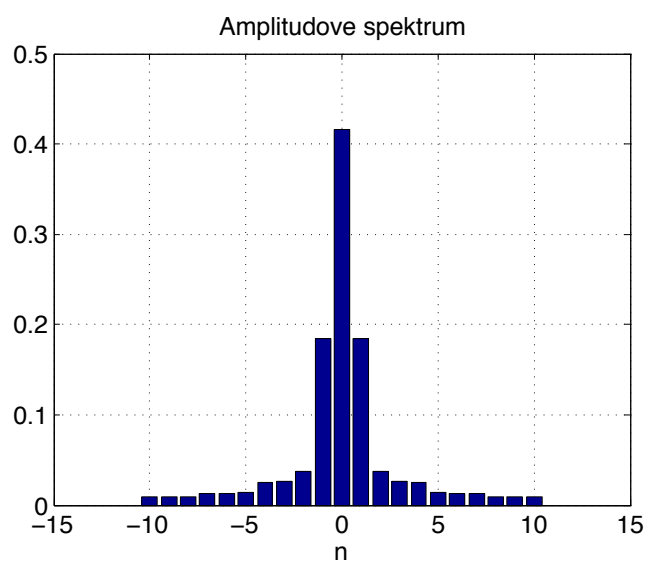
47
48 % Amplitudove spektrum
49 figure; hold on; grid on; box on;
50 set(gca,'FontSize',14);
51 bar(-N:N,An); xlabel('n');
52 title('Amplitudove spektrum')
53
54 % Fazove spektrum
55 figure; hold on; grid on; box on;
56 set(gca,'FontSize',14);
57 bar(-N:N,FIn); xlabel('n');
58 title('Fazove spektrum')

```

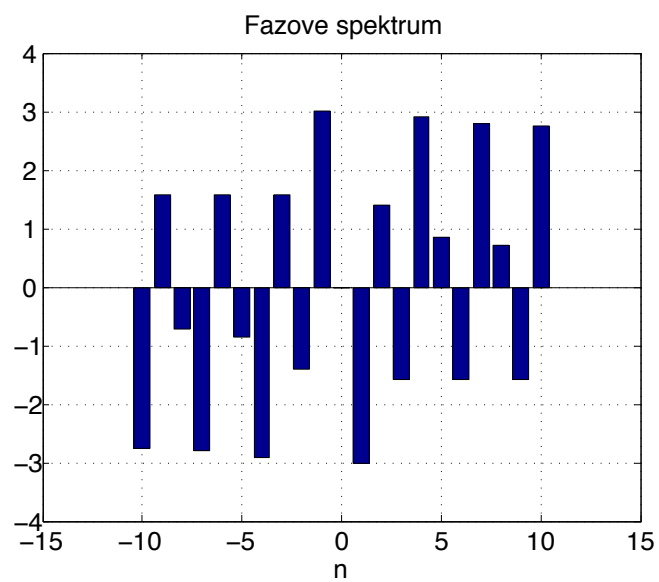
Po provedení výpočtu výše uvedeného algoritmu v Matlabu obdržíme řešení výpočtu, tedy Fourierova řada z příslušných 10 harmonických (obrázek 1.20), amplitudové (obrázek 1.21) a fázové (obrázek 1.22) spektrum.



Obrázek 1.20: Graf 10 harmonických



Obrázek 1.21: Amplitudové spektrum daného signálu



Obrázek 1.22: Fázové spektrum daného signálu

1.10 Apendix

Z historického hlediska vznikly Fourierovy řady v oblasti matematické fyziky. Motivací bylo řešení počátečně okrajové úlohy pro vlnovou a difuzní rovnici na konečném intervalu. S řešením problému přišel J. Fourier (1768 – 1830), francouzský matematik a fyzik.

Metoda, kterou navrhnul a která dnes nese jeho jméno, vedla později k systematickému studiu trigonometrických řad, dnes nazvaných Fourierovými. Konstrukci provedeme pro vlnovou rovnici, další konstrukce a příklady čtenář nalezne v [3].

Konstruujeme počátečně okrajovou úlohu, která popisuje kmitání struny na konečném intervalu délky l . Koncové body struny jsou upevněny v nulové poloze. Uvažujeme počáteční výchylku $\varphi(x)$ a počáteční rychlost $\psi(x)$. Problém má tedy tvar

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, & 0 < x < l, & & t > 0, \\ u(0, t) &= u(l, t) = 0, & & & t > 0, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), & u_t(x, 0) &= \psi(x), & 0 < x < l, \end{aligned} \quad (1.88)$$

kde $u = u(x, t)$ popisuje průhyb struny v bodě x a čase t .

Vyjděme z předpokladu, že řešení existuje a má tvar

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad (1.89)$$

kde $X = X(x)$ a $T = T(t)$ jsou reálné funkce jedné reálné proměnné mající spojitou druhou derivaci. Proměnné x a t jsou v tomto případě vzájemně odděleny. Dosazením (1.89) do rovnice problému (1.88) dostáváme

$$XT'' = c^2 X''T.$$

Vydělíme členem $-c^2 XT$, zde předpokládáme, že $XT \neq 0$, tedy

$$-\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = -\frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Tento vztah nám říká, že výraz na levé straně závisí pouze na časové proměnné t a výraz na pravé straně závisí pouze na prostorové proměnné x .

Navíc, tato rovnost musí platit pro všechna $t > 0$ a $x \in (0, l)$ a tedy

$$-\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = -\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda,$$

kde λ je konstanta.

Převodli jsme tedy původní parciální diferenciální rovnici na rovnici obyčejnou diferenciální se separovanými proměnnými s neznámými funkcemi $X(x)$ a $T(t)$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (1.90)$$

$$T''(t) + c^2 \lambda T(t) = 0. \quad (1.91)$$

Dále máme okrajové podmínky problému (1.88), máme tedy okrajové podmínky

$$X(0) = X(l) = 0. \quad (1.92)$$

Nejprve budeme řešit okrajovou úlohu (1.90), (1.92). Zřejmé triviální řešení $X(x) = 0$ nás nezajímá, tedy vyloučíme případ $\lambda \leq 0$. Je-li $\lambda > 0$, pak má rovnice (1.90) řešení tvaru

$$X(x) = C \cos(\sqrt{\lambda}x) + D \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

a z okrajových podmínek (1.92) plyne

$$X(0) = C = 0,$$

$$X(l) = D \sin(\sqrt{\lambda}l) = 0.$$

Netriviální řešení tedy získáme, když

$$\sin(\sqrt{\lambda}l) = 0,$$

neboli

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Každému takovému λ_n pak odpovídá řešení

$$X_n(x) = C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.93)$$

kde C_n jsou libovolné konstanty.

Nyní řešme rovnici (1.91), řešení pro $\lambda = \lambda_n$ má tvar

$$T_n(t) = A_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.94)$$

kde A_n a B_n jsou opět libovolné konstanty. Původní parciální diferenciální rovnici (1.88) řeší posloupnost funkcí

$$u_n(x, t) = \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N},$$

které splňují předepsané okrajové podmínky. Pozorný čtenář si všiml, že místo $A_n C_n$ (resp. $B_n C_n$) píšeme A_n (resp. B_n), neboť jde o libovolné reálné konstanty. Úloha je lineární, a proto i libovolný konečný součet je opět řešením

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.95)$$

Musíme ještě zohlednit počáteční podmínky. Tedy funkce (1.95) bude vyhovovat počátečním podmínkám, pokud bude platit

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^N A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad (1.96)$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^N \frac{n\pi c}{l} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right). \quad (1.97)$$

Pro libovolná počáteční data je úloha (1.88) jednoznačně řešitelná a příslušné řešení je dáno vzorcem (1.95). Podmínky (1.96) a (1.97) jsou značně omezující a jejich splnění se dá těžko zaručit. Z tohoto důvodu hledáme řešení problému (1.88) ve tvaru nekonečného součtu a vyjádříme jej ve formě Fourierovy řady

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.98)$$

Konstanty A_n a B_n jsou pak dány jako Fourierovy koeficienty sinových rozvojų funkcí $\varphi(x)$ a $\psi(x)$, tedy

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{l} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Jinak řečeno, řešení úlohy (1.88) pro vlnovou rovnici je v každém čase t vyjádřené ve tvaru Fourierovy sinové řady v proměnné x , pokud lze takto vyjádřit počáteční podmínky $\varphi(x)$ a $\psi(x)$. Ukazuje se, že pro dostatečně širokou třídu funkcí je takovýto rozklad možný a příslušné řady konvergují. V takovém případě koeficienty počítáme pomocí vzorců

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx,$$

$$B_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^l \psi(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx.$$

Závěrem je nutno poznamenat, že ke korektnosti je zapotřebí diskutovat konvergenci. Úvahy o konvergencích je zapotřebí vztáhnout na funkce φ a ψ , ty byly provedeny v předchozích kapitolách.

Kapitola 2

Laplaceova transformace

Laplaceova transformace je efektivní metoda k řešení různých praktických úloh oblastí matematické fyziky, elektrotechniky i regulačních systémů.

Tato kapitola je motivována pracemi [4] - [11] a je organizována následujícím způsobem. Nejprve zavedeme nutné pojmy, poté se budeme v podkapitole 2.1 věnovat vlastnostem Laplaceovy transformace. V podkapitole 2.2 se naučíme provádět zpětnou Laplaceovu transformaci a nakonec v podkapitole 2.3 poukážeme na aplikační příklady: řešení diferenciálních rovnic (i systémů), příklady z oblasti elektrotechniky a regulačních systémů.

Budeme uvažovat komplexní funkce f reálné proměnné $t \in (-\infty, \infty)$, tj. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, a komplexní proměnnou $p = x + iy \in \mathbb{C}$. Předpokládejme, že nevlastní integrál

$$\int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt \quad (2.1)$$

existuje a má konečnou hodnotu pro alespoň jedno p . Pak integrál (2.1) nazýváme *Laplaceův integrál funkce f* .

Příklad 14 Spočtěme Laplaceův integrál funkce $f(t) = 1$. Podle (2.1) máme

$$\int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt = \int_0^\infty e^{-pt} dt = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^\alpha e^{-pt} dt = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-p\alpha} \right).$$

Jelikož $\alpha \in \mathbb{R}$, pro $p = x + iy$ platí $|e^{-p\alpha}| = e^{-x\alpha}$. Tedy pro $\operatorname{Re} p > 0$ platí $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} e^{-p\alpha} = 0$ a Laplaceův integrál funkce $f(t) = 1$ pro $\operatorname{Re} p > 0$ konverguje a je roven funkci $1/p$. Pro $\operatorname{Re} p \leq 0$ Laplaceův integrál neexistuje.

Příklad 15 Spočtěme Laplaceův integrál funkce $f(t) = e^{at}$, kde $a \in \mathbb{C}$. Podle (2.1) máme

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt &= \int_0^\infty e^{at}e^{-pt} dt = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^\alpha e^{(a-p)t} dt = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a-p} e^{(a-p)\alpha} - \frac{1}{a-p} \right) = \frac{1}{p-a} \end{aligned}$$

pro $\operatorname{Re}(p-a) > 0$. Tedy Laplaceův integrál funkce $f(t) = e^{at}$ konverguje pro $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a$ k funkci $1/(p-a)$ a jinak diverguje.

Definice 3 *Bud' f komplexní funkce reálné proměnné $t \in (-\infty, \infty)$. Bud' $M \subset \mathbb{C}$ množina všech p , pro než je Laplaceův integrál (2.1) konvergentní. Pak komplexní funkci F definovanou vztahem*

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt \quad (p \in M) \quad (2.2)$$

nazýváme Laplaceův obraz funkce f . Dané zobrazení, které přiřazuje funkci f její Laplaceův obraz F , nazýváme Laplaceova transformace a značíme

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(p).$$

Definice 4 *Funkci f nazýváme předmět (někdy také vzor, originál), jsou-li splněny následující podmínky:*

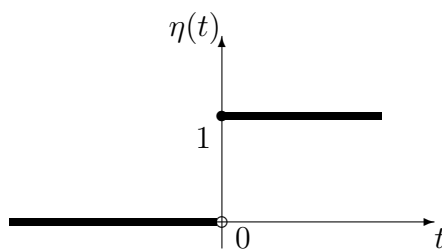
1. *f je na $[0, \infty)$ po částech spojitá,*
2. *$f(t) = 0$ pro každé $t < 0$,*
3. *existuje reálné číslo $M > 0$ a α takové, že pro každé $t \in [0, \infty)$ platí*

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}. \quad (2.3)$$

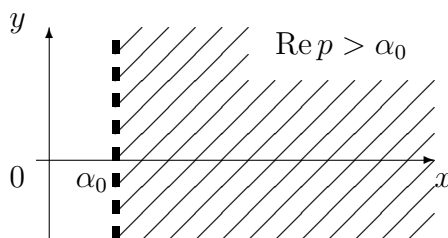
Definice 5 *Bud' $\alpha_0 = \inf\{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \text{ vyhovuje (2.3)}\}$. Číslo α_0 nazýváme index růstu předmětu f .*

Důležitým příkladem předmětu je Heavisideova funkce zobrazená na obrázku 2.1, definovaná vztahem

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t < 0, \\ 1, & \text{pro } t \geq 0. \end{cases} \quad (2.4)$$



Obrázek 2.1: Heavisideova funkce

Obrázek 2.2: Polorovina $\operatorname{Re} p > \alpha_0$

Věta 7 (o existenci Laplaceova obrazu) *Buď f předmět s indexem růstu α_0 . Pak Laplaceův integrál*

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt$$

konverguje v polorovině $\operatorname{Re} p > \alpha_0$ (viz obrázek 2.1) absolutně a definuje Laplaceův obraz $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$, který je v té polorovině analytickou funkcí.

Důkaz: Nejprve dokažme absolutní konvergenci integrálu v polorovině $\operatorname{Re} p > \alpha_0$. Existence integrálu $\int_0^\tau f(t)e^{-pt} dt$, pro každé $\tau > 0$, plyne z faktu, že $f(t)$ je na $[0, \infty)$ po částech spojitá. Je-li $p = x + iy$ a $\operatorname{Re} p > \alpha_0$, pak $|e^{-pt}| = e^{-xt}$. Z třetí podmínky na předmět pak pro každé α takové, že $x > \alpha > \alpha_0$ plyne

$$|f(t)e^{-pt}| \leq Me^{\alpha t} e^{-xt} = Me^{(\alpha-x)t}.$$

Tedy

$$\left| \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt \right| \leq \int_0^\infty |f(t)e^{-pt}| dt \leq M \int_0^\infty e^{(\alpha-x)t} dt = \left[M \frac{e^{(\alpha-x)t}}{\alpha-x} \right]_0^\infty.$$

Jelikož $\alpha - x < 0$, je $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{(\alpha-x)t} = 0$ a

$$\left| \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt \right| \leq \frac{M}{x - \alpha}. \quad (2.5)$$

Tedy máme dokázáno, že Laplaceův integrál konverguje absolutně v polorovině $\operatorname{Re} p > \alpha_0$.

Ukažme nyní, že F je analytická v polorovině $\operatorname{Re} p > \alpha_0$. Buď α_1 takové, že $x \geq \alpha_1 > \alpha > \alpha_0$. Pak z třetí podmínky na předmět máme

$$|f(t) e^{-pt}| \leq M e^{(\alpha-\alpha_1)t}.$$

Výraz pravé strany nerovnosti nezávisí na p a jelikož $\alpha - \alpha_1 < 0$, integrál

$$\int_0^\infty M e^{(\alpha-\alpha_1)t} dt$$

konverguje. Tedy Laplaceův integrál konverguje v polorovině $\operatorname{Re} p \geq \alpha_1$ stejnoměrně. Navíc platí

$$\frac{\partial}{\partial p} [f(t) e^{-pt}] = -t f(t) e^{-pt}$$

a

$$|-t f(t) e^{-pt}| \leq M t e^{(\alpha-\alpha_1)t},$$

kde

$$\int_0^\infty M t e^{(\alpha-\alpha_1)t} dt = \frac{M}{(\alpha - \alpha_1)^2}.$$

To znamená, že integrál

$$\int_0^\infty -t f(t) e^{-pt} dt$$

konverguje v polorovině $\operatorname{Re} p \geq \alpha_1$.

Celkově tedy, Laplaceův integrál funkce f můžeme integrovat podle parametru p . To znamená, že funkce F je analytická v polorovině $\operatorname{Re} p \geq \alpha_1 > \alpha_0$. Z libovůle α_1 pak plyne, že F je analytická v polorovině $\operatorname{Re} p > \alpha_0$. $\square$

Důsledek 1 Buď $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ a $x = \operatorname{Re} p$. Pak $\lim_{x \rightarrow \infty} F(p) = 0$.

Důkaz: Tvrzení plyne z formule (2.5) důkazu věty 7. $\square$

Příklad 16 Nelezněme funkci $f(t)$ tak, aby její Laplaceův obraz byl roven funkci $\sqrt{p}$.

Prvně $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x + iy} \neq 0$. Tedy podle předchozího Důsledku 1 funkce $\sqrt{p}$ nemůže být Laplaceovým obrazem žádné funkce $f(t)$.

Důkaz následujícího tvrzení, které nám dává úplnou informaci o chování funkce F v okolí ∞ , překračuje rozsah tohoto textu a je možné ho nalézt například v [6].

Věta 8 (první limitní) *Bud' f předmět s indexem růstu α_0 a $\alpha > \alpha_0$. Pak pro Laplaceův obraz F funkce f platí*

$$\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0.$$

$$\operatorname{Re} p \geq \alpha$$

2.1 Vlastnosti Laplaceovy transformace

V této podkapitole se budeme zabývat základními vlastnostmi Laplaceovy transformace. Formulujeme větu, která bude základním stavebním kamenem pro operátorový počet a uvedeme celou řadu příkladů k její ilustraci. Tyto příklady nám poskytnou velké množství obrazů funkcí, které jsou důležité a používané v praxi. Podkapitolu uzavřeme druhou a třetí limitní větou a Duhamelovým vzorcem.

Věta 9 (pravidla operátorového počtu) *Nechť f_k jsou předměty, $\mathcal{L}(f_k(t)) = F_k(p)$ a $c_k \in \mathbb{C}$ pro $k = 1, 2, \dots, n$. Pak*

I. linearita

$$\mathcal{L}\left(\sum_{k=1}^n c_k f_k(t)\right) = \sum_{k=1}^n c_k F_k(p),$$

II. podobnost

$$\mathcal{L}(f(\lambda t)) = \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right), \quad \lambda > 0,$$

III. substituce v obrazu

$$\mathcal{L}(e^{at}f(t)) = F(p - a),$$

IV. derivace podle parametru

$$\frac{\partial f(t, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{\partial F(p, \lambda)}{\partial \lambda}, \text{ kde } \mathcal{L}(f(t, \lambda)) = F(p, \lambda),$$

V. posunutí

$$\mathcal{L}(f(t - \tau)\eta(t - \tau)) = e^{-\tau p}F(p),$$

VI. derivace předmětu

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = p^n F(p) - p^{n-1}f(0_+) - \dots - f^{(n-1)}(0_+),$$

kde f a její derivace až do řádu $n - 1$ jsou spojité a $f^{(i)}(0_+) = \lim_{t \rightarrow 0_+} f^{(i)}(t)$,

VII. derivace obrazu

$$\mathcal{L}(-tf(t)) = F'(p),$$

VIII. integrace předmětu

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau) \, d\tau\right) = \frac{F(p)}{p},$$

IX. integrace obrazu

$$\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_p^\infty F(z) \, dz = \lim_{\operatorname{Re} q \rightarrow \infty} \int_p^q F(z) \, dz,$$

kde $f(t)/t$ je předmět s indexem růstu α_0 , $\int_p^\infty F(z) \, dz$ existuje a graf integrační křivky $\int_p^\infty F(z) \, dz$ leží v $\operatorname{Re} p > \alpha_0$.

Důkaz:I. linearita

Z linearity integrálu máme

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(\sum_{k=1}^n c_k f_k(t)\right) &= \int_0^\infty \left(\sum_{k=1}^n c_k f_k(t)\right) e^{-pt} dt = \\ &= \sum_{k=1}^n c_k \int_0^\infty f_k(t) e^{-pt} dt = \sum_{k=1}^n c_k F_k(p),\end{aligned}$$

kde $\int_0^\infty f_k(t) e^{-pt} dt = F_k(p)$. Poznamenejme, že integrál

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k=1}^n c_k f_k(t)\right) e^{-pt} dt$$

konverguje v polorovině $\operatorname{Re} p > \alpha_0$, kde $\alpha_0 = \max_{i=1,2,\dots,n} \{\alpha_0^i\}$ a α_0^i je index růstu funkce f_i pro každé i .

II. podobnost

Podle (2.2) máme

$$\mathcal{L}(f(\lambda t)) = \int_0^\infty f(\lambda t) e^{-pt} dt.$$

Substituujeme v pravé straně $u = \lambda t$, (tj. $dt = 1/\lambda du$), pak

$$\mathcal{L}(f(\lambda t)) = \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty f(u) e^{-pu/\lambda} du = \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right).$$

Zřejmě, je-li α_0 index růstu f závisující na t , pak $\lambda\alpha_0$ je index růstu f proměnné u .

III. substituce v obrazu

Podle (2.2) máme

$$\mathcal{L}(e^{at} f(t)) = \int_0^\infty e^{at} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^\infty f(t) e^{-(p-a)t} dt = F(p-a),$$

kde $\int_0^\infty f(t) e^{-(p-a)t} dt$ konverguje pro $\operatorname{Re}(p-a) > \alpha_0$, α_0 je index růstu f .

IV. derivace podle parametru

Důkaz této části přesahuje náročnost tohoto textu, je možno jej nalézt v [6].

V. posunutí

Podle (2.2) máme

$$\mathcal{L}(f(t-\tau)\eta(t-\tau)) = \int_0^\infty f(t-\tau)\eta(t-\tau)e^{-pt} dt.$$

Navíc $f(t-\tau)\eta(t-\tau) = 0$ pro každé $t \in (0, \tau)$, tedy

$$\mathcal{L}(f(t-\tau)\eta(t-\tau)) = \int_\tau^\infty f(t-\tau)\eta(t-\tau)e^{-pt} dt.$$

Zavedeme-li substituci $t - \tau = u$, tak dostáváme

$$\mathcal{L}(f(t-\tau)\eta(t-\tau)) = \int_0^\infty f(u)\eta(u)e^{-p(u+\tau)} du = e^{-p\tau} \int_0^\infty f(u)e^{-pu} du,$$

celkově tedy

$$\mathcal{L}(f(t-\tau)\eta(t-\tau)) = e^{-p\tau} \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt = e^{-p\tau} F(p).$$

VI. derivace předmětu

Nejprve dokažme případ pro $i = 1$, tj.

$$\mathcal{L}(f'(t)) = pF(p) - f(0_+).$$

Podle (2.2) máme

$$\mathcal{L}(f'(t)) = \int_0^\infty f'(t)e^{-pt} dt,$$

pro $\operatorname{Re} p > \alpha_0$. Poznamenejme, že je-li α_0 index růstu funkce f' , pak je také indexem růstu f . Počítejme nyní integrál na pravé straně metodou per partes, tedy pro $t \in (0, \infty)$ položme

$$\begin{aligned} u(t) &= f(t), & v(t) &= e^{-pt}, \\ u'(t) &= f'(t), & v'(t) &= -pe^{-pt}. \end{aligned}$$

Pak

$$\mathcal{L}(f'(t)) = [f(t)e^{-pt}]_0^\infty + p \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt. \quad (2.6)$$

Jelikož $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ ($\alpha > \alpha_0$) pro každé p takové, že $\operatorname{Re} p > \alpha > \alpha_0$, pak platí

$$|f(t)e^{-pt}| \leq Me^{(\alpha - \operatorname{Re} p)t}.$$

Navíc $\lim_{t \rightarrow \infty} M e^{(\alpha - \operatorname{Re} p)t} = 0$ a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) e^{-pt} = 0. \quad (2.7)$$

Dosadíme-li (2.7) do (2.6) dostáváme

$$\mathcal{L}(f'(t)) = pF(p) - f(0_+).$$

Pro libovolné n se důkaz provede matematickou indukcí.

VII. derivace obrazu

Z důkazu Věty 7 plyne, že

$$\int_0^\infty f(t) e^{-pt} \, dt$$

a

$$\int_0^\infty -t f(t) e^{-pt} \, dt$$

jsou rovnoměrně konvergentní v polorovině $\operatorname{Re} p \geq \alpha > \alpha_0$, kde α_0 je index růstu f . Laplaceův integrál funkce f můžeme derivovat podle parametru p , tedy je-li

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} \, dt = F(p),$$

pak

$$F'(p) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial p} (f(t) e^{-pt}) \, dt = \int_0^\infty -t f(t) e^{-pt} \, dt.$$

Konečně, podle (2.2) máme

$$\mathcal{L}(-t f(t)) = F'(p).$$

VIII. integrace předmětu

Označme

$$\mathcal{L}(g(t)) = \mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau) \, d\tau\right) = G(p).$$

Zřejmě platí

$$g'(t) = f(t), \quad g(0) = 0.$$

Z vlastnosti derivování předmětu plyne

$$\mathcal{L}(g'(t)) = pG(p) - g(0_+).$$

Tedy

$$\mathcal{L}(f(t)) = pG(p).$$

Celkově tedy

$$G(p) = \frac{F(p)}{p}.$$

IX. integrace obrazu

Buď $\mathcal{L}(f(t)/t) = G(p)$. Pak dle Věty 7 je funkce G analytická v polorovině $\operatorname{Re} p > \alpha_0$. Jelikož

$$|G(p)| \leq \int_0^\infty \left| \frac{f(t)}{t} e^{-pt} \right| dt \leq M \int_0^\infty e^{-(\sigma - \alpha_0)t} dt = \frac{M}{\sigma - \alpha_0},$$

kde M je kladná konstanta a $\operatorname{Re} p = \sigma > \alpha_0$, máme

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} |G(p)| = 0. \quad (2.8)$$

Z vlastnosti derivace obrazu máme

$$\mathcal{L}(-f(t)) = G'(p)$$

a

$$F(p) = -G'(p).$$

Pak pro integrály funkcí F a $-G'$ máme

$$G(p) - G(q) = \int_p^q F(z) dz,$$

zde integrujeme po křivce s koncovými body p a q splňující podmínku $\operatorname{Re} q > \operatorname{Re} p > \alpha_0$.

Nyní stačí přejít v předchozím vzorci k limitě $\operatorname{Re} q = \sigma \rightarrow \infty$, uplatníme (2.8) a dostáváme

$$G(p) = \int_p^\infty F(z) dz.$$

□

Následující příklady 17 až 24 ukazují, jak použít vlastnosti z předchozí Věty 9.

Příklad 17 Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \sin(\omega t)$.

Podle Eulerových vzorců platí

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}.$$

Položíme-li v Příkladu 15 parametr $a = \pm i\omega$ a navíc užijeme linearitu Věty 9, pak pro $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re}(\pm i\omega) = |\operatorname{Im} \omega|$ dostáváme

$$\mathcal{L}(\sin(\omega t)) = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{p + i\omega} \right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

Příklad 18 Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = e^{at} \sin(\omega t)$. K výpočtu použijeme výsledku Příkladu 17 a vlastnosti substituce v obrazu Věty 9. Tedy pro $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a + |\operatorname{Im} \omega|$ máme

$$\mathcal{L}(e^{at} \sin(\omega t)) = \frac{\omega}{(p - a)^2 + \omega^2}.$$

Příklad 19 Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = t^n e^{at}$. Z Příkladu 15 víme, že

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{p - a}.$$

Využijme nyní vlastnosti derivace podle parametru z Věty 9 a derivujme levou i pravou stranu podle parametru a

$$\mathcal{L}(te^{at}) = \frac{1}{(p - a)^2}.$$

Další derivace mají tvar

$$\mathcal{L}(t^2 e^{at}) = \frac{2}{(p - a)^3},$$

$$\mathcal{L}(t^3 e^{at}) = \frac{3!}{(p - a)^4},$$

$$\mathcal{L}(t^n e^{at}) = \frac{n!}{(p - a)^{n+1}}.$$

Příklad 20 Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \eta(t - \tau)$. Poznamenejme, že funkce f je posunutá Heavisideova funkce o τ , tedy

$$\eta(t - \tau) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t < \tau, \\ 1, & \text{pro } t \geq \tau. \end{cases}$$

Z Příkladu 14 víme, že $\mathcal{L}(\eta(t)) = 1/p$. Nyní z vlastnosti posunutí Věty 9 plyne

$$\mathcal{L}(\eta(t - \tau)) = \frac{e^{-\tau p}}{p}.$$

Příklad 21 Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \sin(\omega t - \varphi)\eta(\omega t - \varphi)$, kde $\varphi > 0$ a $\omega > 0$. Z vlastnosti podobnosti Věty 9 platí

$$\mathcal{L}(\sin(\omega t - \varphi)\eta(\omega t - \varphi)) = \frac{1}{\omega} F\left(\frac{p}{\omega}\right),$$

kde $\mathcal{L}(\sin(t - \varphi)\eta(t - \varphi)) = F(p)$. Z Příkladu 17 víme, že

$$\mathcal{L}(\sin(t)) = \frac{1}{p^2 + 1}$$

a z vlastnosti posunutí Věty 9 dostáváme

$$F(p) = \mathcal{L}(\sin(t - \varphi)\eta(t - \varphi)) = \frac{1}{p^2 + 1} e^{-\varphi p}.$$

Celkově tedy

$$\mathcal{L}(\sin(\omega t - \varphi)\eta(\omega t - \varphi)) = \frac{1}{\omega} \frac{1}{(p/\omega)^2 + 1} e^{-\varphi p/\omega} = \frac{\omega e^{-\varphi p/\omega}}{p^2 + \omega^2}.$$

Příklad 22 Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \sin^3(t)$. Nejprve označme $\mathcal{L}(\sin^3(t)) = F(p)$. Dále

$$(\sin^3(t))' = 3\sin^2(t)\cos(t)$$

a

$$(\sin^3(t))'' = 6\sin(t)\cos^2(t) - 3\sin^3(t) = 6\sin(t) - 9\sin^3(t),$$

podle Příkladu 17 máme

$$\mathcal{L}((\sin^3(t))'') = \frac{6}{p^2 + 1} - 9 \mathcal{L}(\sin^3(t)) = \frac{6}{p^2 + 1} - 9F(p). \quad (2.9)$$

Navíc

$$(\sin^3(t))|_{t=0+} = (\sin^3(t))'|_{t=0+} = 0$$

a podle vlastnosti derivace předmětu Věty 9 máme

$$\mathcal{L}(\sin^3(t))'' = p^2 F(p) - p \cdot 0 - 0 = p^2 F(p). \quad (2.10)$$

Nyní porovnejme (2.9) a (2.10), dostáváme

$$\frac{6}{p^2 + 1} - 9F(p) = p^2 F(p),$$

tedy

$$F(p) = \frac{6}{(p^2 + 1)(p^2 + 9)}.$$

Příklad 23 Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = t^n$.

Z Příkladu 14 víme, že

$$\mathcal{L}(\eta(t)) = \frac{1}{p}.$$

Pak z vlastnosti integrování předmětu dostáváme

$$\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}\left(\int_0^t 1 \, d\tau\right) = \frac{1}{p^2},$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{t^2}{2}\right) = \mathcal{L}\left(\int_0^t \tau \, d\tau\right) = \frac{1}{p^3},$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{t^n}{n!}\right) = \mathcal{L}\left(\int_0^t \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!} \, d\tau\right) = \frac{1}{p^{n+1}}.$$

Tedy

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

Příklad 24 Najděte Laplaceův obraz funkce $f(t) = \sin(t)/t$.

Z Příkladu 15 víme, že

$$\mathcal{L}(\sin(t)) = \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Pak z vlastnosti integrování obrazu máme

$$\mathcal{L}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) = \int_p^\infty \frac{1}{z^2 + 1} dz = [\arctg(z)]_p^\infty = \frac{\pi}{2} - \arctg(p) = \operatorname{arccotg}(p).$$

Věta 10 (druhá limitní) *Nechť f a f' jsou předměty a navíc f je na intervalu $(0, \infty)$ spojitá. Je-li $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ a α_0 je index růstu funkce f' , pak*

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = f(0_+).$$

Důkaz: Z vlastnosti derivování předmětu Věty 9 plyne, že

$$\mathcal{L}(f'(t)) = pF(p) - f(0_+).$$

Jelikož $f'(t)$ je předmět s indexem růstu α_0 , pak z Věty 8 vyplývá

$$\lim_{p \rightarrow \infty} (pF(p) - f(0_+)) = 0$$

v polorovině $\operatorname{Re} p \geq \alpha > \alpha_0$. Tedy

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = f(0_+).$$

□

Věta 11 (třetí limitní) *Nechť f a f' jsou předměty a navíc f je na intervalu $(0, \infty)$ spojitá. Je-li $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ a existuje $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \neq \infty$, pak*

$$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t).$$

Důkaz: Víme, že

$$\mathcal{L}(f'(t)) = pF(p) - f(0_+).$$

Pak podle (2.2) máme

$$\mathcal{L}(f'(t)) = \int_0^\infty f'(t)e^{-pt} dt = pF(p) - f(0_+). \quad (2.11)$$

Navíc platí

$$\lim_{p \rightarrow 0} \int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} \lim_{p \rightarrow 0} f'(t) e^{-pt} dt. \quad (2.12)$$

Pak z (2.11) a (2.12) plyne

$$\lim_{p \rightarrow 0} (pF(p) - f(0_+)) = \int_0^{\infty} f'(t) dt = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(0_+).$$

My však předpokládáme, že existuje $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \neq \infty$, tedy

$$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t).$$

□

Definice 6 Konvolucí funkcí f a g nazýváme funkci h definovanou předpisem

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}$$

a značíme

$$h = f * g.$$

Pokud jsou funkce f a g předměty, pak

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau,$$

což plyne z vlastnosti předmětu, tj. $f(\tau) = 0$ pro $\tau < 0$ a $g(t - \tau) = 0$ pro $t < \tau$. Důkaz následujících vlastností konvoluce je jednoduchý a přenecháváme jej čtenáři.

Věta 12 Konvoluce má následující vlastnosti:

1. komutativita: $f * g = g * f$,
2. asociativita: $(f * g) * h = f * (g * h)$,
3. distributivita na sčítání $f * (h + g) = (f * h) + (f * g)$,
4. $(cf) * g = f * (cg) = c(f * g)$, kde c je konstanta.

Příklad 25 Najděte konvoluci předmětů $f(t) = t$ a $g(t) = \sin(t)$.

Postupujme podle definice, tedy

$$(f * g)(t) = \sin(t) * t = \int_0^t \sin(\tau)(t - \tau) \, d\tau = t - \sin(t).$$

Poznamenejme, že duhá rovnost platí díky předpokladu, že obě funkce jsou předměty (tj. $f(\tau) = 0$ pro $\tau < 0$ a $g(t - \tau) = 0$ pro $t < \tau$).

Věta 13 (násobení obrazů) *Budte f a g předměty s indexy růstu α_0^f a α_0^g , $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ a $\mathcal{L}(g(t)) = G(p)$. Pak $\alpha_0 = \max\{\alpha_0^f, \alpha_0^g\}$ je index růstu funkce $h = f * g$. Navíc platí*

$$\mathcal{L}((f * g)(t)) = F(p)G(p).$$

Důsledek 2 (Duhamelův vzorec) *Budte f a g předměty, $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ a $\mathcal{L}(g(t)) = G(p)$. Bud' f' předmět a f je spojitá funkce na intervalu $[0, \infty)$. Pak*

$$pF(p)G(p) = \mathcal{L}(f(0_+)g(t) + (f' * g)(t)).$$

Příklad 26 Najděte předmět k Laplaceovu obrazu

$$\frac{1}{(p^2 + 1)^2}.$$

Z Příkladu 17 víme, že

$$\mathcal{L}(\sin(t)) = \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Položme

$$F(p) = G(p) = \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Nyní použijeme Větu 13

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p^2 + 1)^2} &= F(p)G(p) = \mathcal{L}(\sin(t) * \sin(t)) = \\ &= \int_0^t \sin(\tau) \sin(t - \tau) \, d\tau = 1/2 \sin(t) - 1/2 t \cos(t). \end{aligned}$$

Věta 14 *Budte f a g předměty s indexy růstu α_0^f a α_0^g , $\alpha_0 = \max\{\alpha_0^f, \alpha_0^g\}$, $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ a $\mathcal{L}(g(t)) = G(p)$. Pak*

$$\mathcal{L}(f(t)g(t)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(z)G(p-z) \, dz,$$

kde $p \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} p > a + \alpha_0$ a $\alpha_0 < a$.

Symbolem $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}$ rozumíme limitu $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{a-ib}^{a+ib}$ a v integrálu $\int_{a-ib}^{a+ib}$ integrujeme po integrační křivce $z = a + it$, $t \in [-b, b]$, zde $0 < b \in \mathbb{R}$ a $a \in \mathbb{R}$ volíme tak, aby $\alpha_0 < a$. Důkaz Vět 13 a 14 vynecháváme, je možné je nalézt v [5].

Příklad 27 Pomocí Věty 14 najděte Laplaceův obraz funkce $e^t \sin(t)$.

Z příkladů 17 a 15 víme, že

$$\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(\sin(t)) = \frac{1}{p^2 + 1}$$

a

$$\mathcal{L}(g(t)) = \mathcal{L}(e^t) = \frac{1}{p - 1}.$$

Navíc, $\alpha_0^f = 0$, $\alpha_0^g = 1$ a $\alpha_0 = \max\{0, 1\} = 1$. Pak dle Věty 14

$$\mathcal{L}(\sin(t)e^t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{1}{z^2 + 1} \frac{1}{(p - z) - 1} \, dz,$$

kde $a > 1$ a $\operatorname{Re} p > a + 1$. Pak dle základní věty o reziduích integrál dopočítáme

$$\mathcal{L}(\sin(t)e^t) = -\operatorname{Res} \left[\frac{1}{z^2 + 1} \frac{1}{(p - z) - 1} \right]_{z=p-1} = \frac{1}{(p - 1)^2 + 1}.$$

2.2 Zpětná Laplaceova transformace

V předchozí podkapitole jsme se zabývali výpočtem Laplaceova obrazu F k zadanému předmětu f . Laplaceovu transformaci jsme definovali jako zobrazení

$$\mathcal{L} : P \rightarrow O,$$

které přiřadí předmětu množiny P jeho obraz množiny O . Zkoumejme nyní inverzní operaci, inverzní zobrazení, *zpětnou Laplaceovu transformaci*

$$\mathcal{L}^{-1} : O \rightarrow P,$$

která přiřadí dané komplexní funkci komplexní proměnné F předmět f , pro který platí $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$.

K tomu je zapotřebí zodpovědět otázky:

OT1: existence zpětné Laplaceovy transformace,

OT2: identifikovat definiční obor $\mathcal{L}^{-1}$.

Částečnou odpověď na otázku OT1 dává následující věta:

Věta 15 (Lerch) *Budte $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ a $\mathcal{L}(g(t)) = F(p)$. Pak $f = g$ až na izolované body, v nichž alespoň jedna z funkcí není spojitá.*

Poznamenejme, že podmínka na izolované body z Lerchovy věty není nikterak omezující, v praxi nám na hodnotách v izolovaných bodech nezáleží.

K řešení otázky OT2 je zřejmé, že F musí splňovat nutné podmínky Laplaceova obrazu F předmětu f . Tj.

1. existuje $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ takové, že F je v polorovině $\operatorname{Re} p > \alpha_0$ analytická,
2. v libovolné polorovině $\operatorname{Re} p \geq \alpha > \alpha_0$ platí $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0$.

Věta 16 *Bud' F analytická v $\mathbb{C}$ s výjimkou konečného počtu singulárních bodů $a_i \in \mathbb{C}$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Nechť pro každé $a \in \mathbb{R}$ takové, že $a > \max_{i=1,2,\dots,n} \{|a_i|\}$, platí:*

1. *existuje posloupnost kružnic k_i se středem v 0 a poloměry R_i , pro které platí $|a| < R_1 < \dots < R_n < \dots$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \infty$ tak, že*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{p \in k_n} \{|F(p)|\} = 0,$$

2. *integrál $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} |F(p)| dp$ má konečnou hodnotu.*

Pak na $\mathbb{R}$ existuje spojitý předmět f , který je určen předpisem

$$f(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n \operatorname{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=a_i} & \text{pro } t > 0, \\ 0 & \text{pro } t \leq 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

Poznámka 5 Poznamenejme, že se rezidua ve vzorci (2.13) počítají v singularitách funkce $F(p)e^{pt}$. Funkce e^{pt} je však analytická v $\mathbb{C}$, tedy rozhodující jsou pro výpočet rezidua funkce $F(p)$.

Pokud je například a_i jednoduchý pól, pak podle pravidel pro počítání reziduí je

$$\text{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=a_i} = e^{a_i t} \text{Res}[F(p)]_{p=a_i}.$$

Pokud je a_i pól násobnosti 2, dostáváme

$$\begin{aligned} \text{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=a_i} &= \lim_{p \rightarrow a_i} \frac{d}{dp} [(p - a_i)^2 F(p)e^{pt}] = \\ &= \text{Res}[F(p)]_{p=a_i} e^{a_i t} + \lim_{p \rightarrow a_i} [(p - a_i)^2 F(p)] t e^{a_i t}. \end{aligned}$$

Všimli jsme si, že podstatnou roli hrají obrazy F , jež mají racionální tvar, viz Příklady 17 - 24. Zabývejme se tedy nyní zpětnou Laplaceovou transformací funkcí tvaru

$$F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}, \quad (2.14)$$

kde $P(p)$ a $Q(p)$ jsou polynomy nad oborem komplexních čísel.

Věta 17 Funkce (2.14) je Laplaceův obraz nějakého předmětu právě tehdy, pokud $\text{st}(P(p)) < \text{st}(Q(p))$.

Důkaz: Prvně, v polorovině $\text{Re } p \leq \alpha$ platí

$$\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{P(p)}{Q(p)} = 0.$$

Což nastává jedině v případě $\text{st}(P(p)) < \text{st}(Q(p))$ (st označuje stupeň polynomu).

Na druhou stranu, nechť $\text{st}(P(p)) < \text{st}(Q(p))$. To znamená, že existuje rozklad pravé strany (2.14) na parciální zlomky nad polem komplexních čísel

$$F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^{r_k} \frac{P_{kl}}{(p - a_k)^l}, \quad (2.15)$$

kde $P_{kl} \in \mathbb{C}$, r_k je násobnost kořenu a_k polynomu $Q(p)$ a m je počet různých nulových bodů polynomu $Q(p)$.

Z Příkladu 19 víme, že

$$\mathcal{L}\left(\frac{t^{l-1}}{(l-1)!}e^{a_k t}\right) = \frac{1}{(p-a_k)^l}.$$

Díky linearitě Laplaceovy transformace a (2.15) máme pro $t > 0$

$$F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)} = \mathcal{L}\left(\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^{r_k} \frac{P_{kl} t^{l-1}}{(l-1)!} e^{a_k t}\right).$$

Pak z Věty 15 plyne

$$f(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^{r_k} \frac{P_{kl} t^{l-1}}{(l-1)!} e^{a_k t} & \text{pro } t > 0, \\ 0 & \text{pro } t < 0. \end{cases}$$

□

Z důkazu předchozí věty plyne

Věta 18 (druhá věta o rozkladu) *Laplaceův obraz F funkce f je racionální funkce právě tehdy, když pro $t > 0$ můžeme předpis f vyjádřit jako lineární kombinaci funkcí tvaru $t^n e^{at}$, kde $n \in \mathbb{N}_0$ a $a \in \mathbb{C}$.*

Příklad 28 Určete předmět funkce $F(p) = \frac{p+1}{p^2-p}$.

K výpočtu použijeme úvah Poznámky 5. Funkce F má dva jednoduché póly 0 a 1. Máme tedy

$$\text{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=0} = -1, \quad \text{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=1} = 2e^t.$$

Pak podle vzorce (2.13) Věty 16 máme pro $t > 0$

$$f(t) = -1 + 2e^t.$$

Příklad 29 Určete předmět funkce $F(p) = \frac{1}{(p+1)(p-1)^3(p^2+1)}$.

Výpočet budeme provádět stejně jako u předešlého příkladu, tedy použijeme úvah Poznámky 5. Funkce F má tři jednoduché póly -1 , $\pm i$ a pól třetího řádu 1. Máme tedy

$$\text{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=-1} = -1/16 e^{-t}, \quad \text{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=i} = 1/8 e^{it}$$

$$\operatorname{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=-i} = -1/8 e^{-it}, \quad \operatorname{Res}[F(p)e^{pt}]_{p=1} = \frac{2t^2 - 6t + 5}{2} e^t.$$

Pak podle vzorce (2.13) Věty 16 máme pro $t > 0$

$$f(t) = -1/16 e^{-t} + 1/8 e^{it} - 1/8 e^{-it} + \frac{2t^2 - 6t + 5}{2} e^t.$$

Tabulka 2.1: Laplaceovy transformace některých funkcí

Předmět	Obraz
1	$\frac{1}{p}$
e^{at}	$\frac{1}{p - a}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$\sinh(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$
$\cosh(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$
$e^{at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p - a)^2 + \omega^2}$
$e^{at} \cos(\omega t)$	$\frac{p - a}{(p - a)^2 + \omega^2}$

Tabulka 2.1: Laplaceovy transformace některých funkcí

Předmět	Obraz
$t^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$t^n e^{at}, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
$t \sin(\omega t)$	$\frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$
$t \cos(\omega t)$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$

2.3 Aplikace Laplaceovy transformace

Řešení diferenciálních rovnic

Uvažujme Cauchyho úlohu pro lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) a počátečními podmínkami

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = f, \quad (2.16)$$

$$x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x'_0, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}. \quad (2.17)$$

Dále předpokládejme, že pravá strana rovnice f a řešení x včetně jejich derivací až do řádu n jsou předměty. Za těchto podmínek můžeme danou úlohu řešit Laplaceovou transformací.

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že počáteční podmínky jsou dány v bodě $t_0 = 0$, tedy

$$x(0_+) = x_0, x'(0_+) = x'_0, \dots, x^{(n-1)}(0_+) = x_0^{(n-1)}. \quad (2.18)$$

Označme $\mathcal{L}(x(t)) = X(p)$ a $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$. Pak rovnici (2.16) můžeme přepsat do tvaru (Věta 9)

$$\begin{aligned} & [p^n X(p) - p^{n-1}x_0 - p^{n-2}x'_0 \dots - x_0^{(n-1)}] & + \\ & a_1[p^{n-1}X(p) - p^{n-2}x_0 - p^{n-3}x'_0 \dots - x_0^{(n-2)}] & + \\ & & \vdots \\ & a_{(n-1)}[pX(p) - x_0] & + \\ & a_n X(p) & = F(p). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Po úpravách dostáváme

$$X(p) = \frac{F(p) - P(p)}{Q(p)}, \quad (2.20)$$

kde $Q(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n$ je charakteristický polynom rovnice (2.16) a stupeň polynomu P je nejvýše $(n-1)$.

Nyní stačí najít k funkci X předmět x . Takovýto předmět je pak podle jednoznačnosti zpětné Laplaceovy transformace (Věta 15) řešením diferenciální rovnice (2.16) na intervalu $(0, \infty)$.

Poznámka 6

1. Výše popsaný postup se nazývá *operátorová metoda*.
2. Rovnice (2.19) se nazývá *operátorová*.
3. Výhodou operátorové metody je jednoduchost operací při řešení.
4. Řešením dostáváme rovnou partikulární řešení (pokud nejsou počáteční podmínky známy, dostáváme řešení obecné).

Příklad 30 Řešme diferenciální rovnici

$$\begin{cases} x'' - 2x' + x = 4, \\ x(0_+) = 0, \quad x'(0_+) = 1. \end{cases} \quad (2.21)$$

Budeme postupovat výše popsanou operátorovou metodou. Tedy položíme $\mathcal{L}(x(t)) = X(p)$, pak

$$\mathcal{L}(x'(t)) = pX(p),$$

$$\mathcal{L}(x''(t)) = p^2X(p) - 1.$$

Dále $\mathcal{L}(4) = 4/p$, $\operatorname{Re} p > 0$. Odpovídající operátorová rovnice má tvar

$$p^2X(p) - 1 - 2pX(p) + X(p) = 4/p.$$

Vyjádríme $X(p)$

$$X(p) = \frac{p+4}{p(p-1)^2}, \quad \operatorname{Re} p > 1.$$

Po rozkladu na parciální zlomky dostáváme

$$X(p) = \frac{4}{p} - \frac{4}{p-1} + \frac{5}{(p-1)^2}.$$

Zpětnou Laplaceovou transformací získáme pro $t \geq 0$ řešení

$$x(t) = 4 - 4e^t + 5te^t.$$

Ve výše popsaném postupu je možno se vyhnout rozkladu na parciální zlomky. Stačí si všimnout, že funkce

$$X(p) = \frac{p+4}{p(p-1)^2}$$

má v bodě 0 jednoduchý pól a v bodě 1 dvojnásobný pól a použít postup popsany v Kapitole 2.2 (viz Věta 16 a Příklad 29). Pak podle známých vzorců pro výpočet reziduí dostáváme

$$\operatorname{Res}[X(p)e^{pt}]_{p=0} = 4,$$

$$\operatorname{Res}[X(p)e^{pt}]_{p=1} = 5te^t - 4e^t.$$

Na základě zpětné Laplaceovy transformace dostáváme řešení

$$x(t) = 4 - 4e^t + 5te^t.$$

Příklad 31 Řešme diferenciální rovnici

$$\begin{cases} x'' + 4x = 2 \cos(2t), \\ x(0_+) = 0, \quad x'(0_+) = 4. \end{cases} \quad (2.22)$$

Budeme postupovat výše popsanou operátorovou metodou. Tedy položíme $\mathcal{L}(x(t)) = X(p)$, pak

$$\mathcal{L}(x'(t)) = pX(p),$$

$$\mathcal{L}(x''(t)) = p^2X(p) - 4.$$

Dále $\mathcal{L}(2 \cos(2t)) = 2p/(p^2 + 4)$. Odpovídající operátorová rovnice má tvar

$$(p^2 + 4)X(p) - 4 = \frac{2p}{p^2 + 4}.$$

Vyjádříme $X(p)$:

$$X(p) = \frac{4}{p^2 + 4} + \frac{2p}{(p^2 + 4)^2}.$$

Zpětnou Laplaceovou transformací dostáváme řešení

$$x(t) = 1/2 (4 + t) \sin(2t).$$

Příklad 32 Nespojité pravé strany I.

Řešme diferenciální rovnici

$$\begin{cases} x'' + x = f(t), \\ x(0_+) = 1, \quad x'(0_+) = -1, \end{cases} \quad (2.23)$$

kde

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{pro } 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{pro } t > 1. \end{cases} \quad (2.24)$$

Postupujme podobně jako u předchozích příkladů. Položíme $\mathcal{L}(x(t)) = X(p)$, pak

$$\mathcal{L}(x'(t)) = pX(p) - 1,$$

$$\mathcal{L}(x''(t)) = p^2X(p) - p + 1.$$

Dále $\mathcal{L}(f(t))$ je možno počítat přímo z definice (2.2):

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt = \int_0^1 e^{-pt} dt = \frac{1}{p}(1 - e^{-p}). \quad (2.25)$$

Nebo si stačí všimnout, že $f(t) = \eta(t) - \eta(t-1)$ a podle vlastnosti posunutí Věty 9 opět dostáváme (2.25). Odpovídající operátorová rovnice má tvar

$$(p^2 + 1)X(p) - p + 1 = \frac{1}{p}(1 - e^{-p}).$$

Vyjádříme $X(p)$, po rozkladu na parciální zlomky

$$X(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{(p^2 + 1)} - \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 1} \right) e^{-p}.$$

Zpětnou Laplaceovou transformací dostáváme řešení

$$x(t) = (1 - \sin(t))\eta(t) - (1 - \cos(t))\eta(t-1)$$

nebo bez užití $\eta(t)$

$$x(t) = \begin{cases} 1 - \sin(t), & t \in [0, 1), \\ \cos(t) - \sin(t), & t \geq 1. \end{cases}$$

Příklad 33 Nespojité pravé strany II.

Řešme diferenciální rovnici

$$\begin{cases} x'' + x = f(t), \\ x(0_+) = 1, x'(0_+) = 0, \end{cases} \quad (2.26)$$

kde

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{pro } 0 \leq t \leq 3 \\ 2, & \text{pro } t > 3. \end{cases} \quad (2.27)$$

Postupujme analogicky jako u předchozího příkladu. Položme $\mathcal{L}(x(t)) = X(p)$, pak

$$\mathcal{L}(x''(t)) = p^2 X(p) - p.$$

Dále si stačí všimnout, že $f(t) = \eta(t) + \eta(t - 3)$ a podle vlastnosti posunutí Věty 9 dostáváme

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{p}(1 + e^{-3p}). \quad (2.28)$$

Odpovídající operátorová rovnice má tvar

$$(p^2 X(p) - p) + X(p) = \frac{1}{p}(1 + e^{-3p}).$$

Vyjádříme $X(p)$:

$$X(p) = \frac{p}{(p^2 + 1)} + \frac{1}{p(p^2 + 1)}(1 + e^{-3p}).$$

Zpětnou Laplaceovou transformací dostáváme řešení

$$x(t) = 1 + (1 - \cos(t - 3))\eta(t - 3)$$

nebo bez užití $\eta(t)$

$$x(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 3), \\ 2 - \cos(t - 3), & t \geq 3. \end{cases}$$

Příklad 34 Posunuté počáteční podmínky

Řešme diferenciální rovnici

$$\begin{cases} x'' + 3x' + 2x = e^t, \\ x(1_+) = 1, \quad x'(1_+) = 1. \end{cases} \quad (2.29)$$

Protože počáteční podmínky nejsou dány v bodě $t_0 = 0$, musíme provést substituci $t = \tau + 1$ a $x(t) = x(\tau + 1) = y(\tau)$. Nová rovnice má tvar

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = e^{\tau+1}, \\ y(0_+) = 1, \quad y'(0_+) = 1. \end{cases} \quad (2.30)$$

Tedy položíme $\mathcal{L}(y(t)) = Y(p)$, pak

$$\mathcal{L}(y'(\tau)) = pY(p) - 1,$$

$$\mathcal{L}(y''(t)) = p^2 Y(p) - p - 1.$$

Dále

$$\mathcal{L}(e^{\tau+1}) = e \mathcal{L}(e^\tau) = e \frac{1}{p-1}.$$

Vyjádříme $Y(p)$ po rozkladu na parciální zlomky

$$Y(p) = \frac{e/6}{p-1} + \frac{3-e/2}{p+1} + \frac{e/3-2}{p+2}.$$

Zpětnou Laplaceovou transformací dostáváme pro $\tau \geq 0$ řešení

$$y(\tau) = e/6 e^\tau + (3-e/2) e^{-\tau} + (e/3-2) e^{-2\tau}.$$

Zpětnou substitucí $\tau = t-1$ a $y(\tau) = x(t)$ dostáváme pro $t \geq 1$ řešení

$$x(t) = e/6 e^{t-1} + (3-e/2) e^{1-t} + (e/3-2) e^{2-2t}.$$

Příklad 35 Řešme soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{cases} x' - x + y = 2, \\ x - y' - y = e^t, \\ x(0_+) = 1, x'(0_+) = 1. \end{cases} \quad (2.31)$$

Položme $\mathcal{L}(x(t)) = X(p)$ a $\mathcal{L}(y(t)) = Y(p)$, pak $\mathcal{L}(x'(t)) = pX(p) - 1$ a $\mathcal{L}(y'(t)) = pY(p) - 1$. Odpovídající operátorový systém má tvar

$$\begin{cases} (p-1)X(p) + Y(p) = \frac{p+2}{p}, \\ X(p) - (p+1)Y(p) = -\frac{p}{p-1}. \end{cases} \quad (2.32)$$

Po úpravě a rozkladu na parciální zlomky

$$\begin{cases} X(p) = \frac{2}{p^3} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p-1}, \\ Y(p) = \frac{2}{p^3} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}. \end{cases} \quad (2.33)$$

Zpětnou Laplaceovou transformací dostáváme řešení

$$\begin{cases} x(t) = t^2 + t + e^t, \\ y(t) = t^2 - t + 1. \end{cases} \quad (2.34)$$

Úlohy z elektrotechniky

Uvažujme nejprve jednoduchý oscilační obvod znázorněný na obrázku 2.3 popsany integro-diferenciální rovnicí

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = u(t), \quad (2.35)$$

kde L , R , C jsou po řadě konstanty indukce, odporu a kapacity. Dále u je elektomotorické napětí a i je proud.

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že celým obvodem na počátku neprochází proud. Tato počáteční podmínka odpovídá situaci zapínání. Tedy, obvodem neprochází proud a $i(0_+) = 0$. Dále poslední člen levé strany (2.35) představuje napětí na deskách kondenzátoru, na počátku je nulové.

Označme $\mathcal{L}(i(t)) = I(p)$ a $\mathcal{L}(u(t)) = U(p)$, funkce $I(p)$ a $U(p)$ se nazývají *operátorový proud* resp. *operátorové napětí*. Potom z vlastnosti derivování předmětu Věty 9 máme

$$\mathcal{L}\left(\frac{di(t)}{dt}\right) = pI(p),$$

z vlastnosti integrování předmětu Věty 9 máme

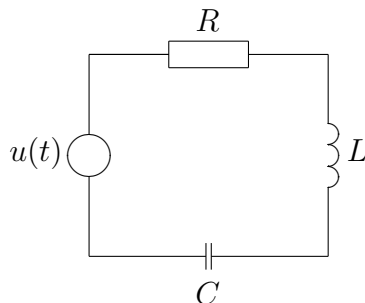
$$\mathcal{L}\left(\int_0^t i(\tau) d\tau\right) = \frac{I(p)}{p}.$$

Přepíšeme rovnici (2.35) do operátorového tvaru

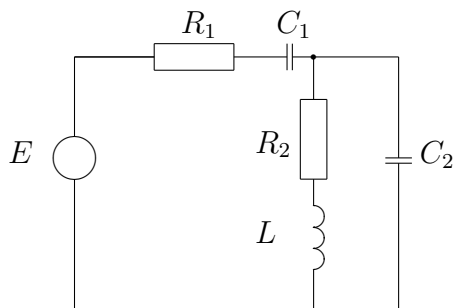
$$LpI(p) + RI(p) + \frac{I(p)}{Cp} = U(p),$$

po úpravě

$$I(p) = \frac{U(p)}{Lp + R + \frac{1}{Cp}} = \frac{U(p)}{Z(p)}, \quad (2.36)$$



Obrázek 2.3: Oscilační okruh



Obrázek 2.4: Oscilační okruh

kde $Z(p)$ je operátorová impedance okruhu. Vzorec (2.36) nazýváme *operátorový tvar Ohmova zákona*.

Závěrem, zpětnou Laplaceovou transformací pak z (2.36) určíme proud okruhu i .

Příklad 36 Nalezněme operátorovou impedanci a operátorový proud protékající sítí znázorněné na obrázku 2.4.

Nejprve, pro operátorové impedance platí:

- větev I.** se skládá z odporu R_1 a kapacity C_1 , a platí $Z_1 = R_1 + \frac{1}{C_1 p}$,
větev II. se skládá z odporu R_2 a indukčnosti L , a platí $Z_2 = R_2 + Lp$,
větev III. se skládá z kapacity C_2 , a platí $Z_3 = \frac{1}{C_2 p}$.

Větve II a III jsou zapojeny paralelně, tedy jejich výsledná impedance má

tvar

$$\frac{1}{Z_4} = \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}.$$

Dále můžeme uvažovat obvod jako sériově zapojené operátorové impedance Z_1 a Z_4 . Tedy

$$Z = Z_1 + Z_4 = Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}.$$

Po dosazení a užití druhého Kirchhova zákona $U(p) = E/p$ dostáváme

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = \frac{E}{p} \frac{R_2 + Lp + \frac{1}{C_2 p}}{\left(R_1 + \frac{1}{C_1 p}\right) \left(R_2 + Lp + \frac{1}{C_2 p}\right) + (R_2 + Lp) \frac{1}{C_2 p}},$$

zde v uvažovaném oscilačním okruhu uvažujeme zapojené konstantní elektromotorické napětí $u = E$.

Úlohy z regulačních systémů

Regulační systém si lze představit jako černou skříňku (viz Obrázek 2.5) a jeho vlastnosti lze popsat pomocí reakcí výstupů na vstupní signály. Dynamické vlastnosti regulačních systémů jsou určeny vztahy mezi výstupními a vstupními veličinami. Dynamické vlastnosti takovýchto systémů budeme popisovat v časové závislosti pomocí lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^m b_j u^{(j)}(t),$$

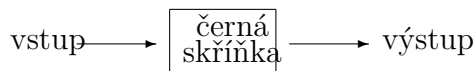
kde $a_i, b_j \in \mathbb{R}$ a $m \leq n$ je podmínka realizovatelnosti systému.

Časové posunutí signálu lze popsat jako dopravní zpoždění

$$y(t) = u(t - T_d).$$

Přenosovou funkci daného systému určíme jako poměr obrazu výstupní veličiny k obrazu vstupní veličiny vzhledem k Laplaceově transformaci za předpokladu nulových počátečních podmínek

$$y^{(n-1)}(0) = y^{(n-2)}(0) = \dots = y'(0) = y(0) = 0.$$



Obrázek 2.5: Regulační systém jako černá skříňka

Přenosová funkce pak má tvar racionální lomenné funkce

$$F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)} = \frac{b_m(p - n_1)(p - n_2) \dots (p - n_m)}{a_n(p - k_1)(p - k_2) \dots (p - k_n)},$$

kde k_i jsou póly přenosu a n_j jsou nuly přenosu.

Impulsní charakteristiku používáme pro popis časové závislosti daného regulačního systému, kterou lze získat jako odezvu na vstupní signál tvaru Diracova impulsu při nulových počátečních podmínkách. Impulsní charakteristiku $f(t)$ dostáváme po zpětné Laplaceově transformaci

$$\mathcal{L}^{-1}(F(p)) = f(t).$$

Příklad 37 Nalezněme impulsní charakteristiku přenosové funkce

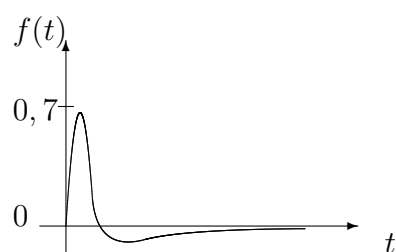
$$F(p) = \frac{5p + 3}{p^3 + 6p^2 + 11p + 6}.$$

Danou funkci rozložíme na parciální zlomky

$$F(p) = \frac{-1}{p + 1} + \frac{7}{p + 2} - \frac{6}{p + 3}.$$

Zpětnou Laplaceovou transformací dostáváme impulsní charakteristiku (viz Obrázek 2.6) pro $t > 0$

$$f(t) = -e^{-t} + e^{-2t} - 6e^{-3t}.$$



Obrázek 2.6: Impulsní charakteristika systému

Literatura

- [1] Bišek, D. - Hájek, K. - Krtička, A. - Zaplatílek, K. - Doňar, B. - *Elektronické obvody I*. Univerzita obrany, 2006.
- [2] Častová, N. - *Funkce komplexní proměnné a integrální transformace*. Interní učební text, Katedra aplikované matematiky, FEI, VŠB-TU Ostrava, 2008.
- [3] Drábek, P. - Holubová, G., - *Parciální diferenciální rovnice. Úvod do klasické teorie*, Západočeská univerzita v Plzni, 2001.
- [4] Galajda, P. - Schrötter, Š. - *Funkcie komplexnej premennej a operátorový počet*. Vydavateľstvo Alfa, Bratislava, 1991.
- [5] Jevgarov, M., A., - *Funkce komplexní proměnné*. SNTL Nakladatelství technické literatury, Praha, 1981.
- [6] Kufner, A. - Kadlec, J. - *Fourierovy řady*. Academia, Brno, 1969.
- [7] Martan, F. - Srovnal, A. - *Fourierovy řady*. ČVUT Praha, 1965.
- [8] Pírko, Z. - Veit, J. - *Laplaceova transformace*. SNTL Nakladatelství technické literatury, Praha, Bratislava, 1970.
- [9] Rektorys, K. a spolupracovníci - *Přehled užití matematiky*. SNTL Nakladatelství technické literatury, 1981.
- [10] Srovnal, V. - *Analýza regulačních systémů*. Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava, 2004.
- [11] Srovnal, V. - *Regulační systémy II*. Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava, 2005.

- [12] Stein, E., M. - Shakarchi, R. - *Complex analysis*. Princeton lectures in Analysis II, Princeton University Press, Princeton, Oxford, 2003.

Rejstřík

funkce

- absolutně integrovatelná, 40
- Heavisideova, 64
- integrovatelná s kvadrátem, 39
- periodická, 13

integrál Laplaceův, 63

- interval periodicity, 13
- základní, 13

jev Gibbsův, 52

koeficienty Fourierovy, 15, 19

- konvergence posloupnosti funkcí, 44
- konvoluce, 77

metoda operátorová, 85

nerovnost

- Besselova, 47

norma, 41

obraz Laplaceův, 64

perioda, 13

- základní, 13

podmínky Dirichletovy, 16, 17

prodloužení

- liché, 33
- sudé, 34

prostor

$L_1(a, b)$, 40

$L_2(a, b)$, 39

předmět Laplaceův, 64

rovnost

- Parsevalova, 47

součin skalární, 41

spektrum

- amplitudové, 21
- fázové, 21

stejněměrná konvergence funkcí, 44

systém

- ortogonální, 43
- otonormální, 43

transformace

- Laplaceova, 64
- zpětná Laplaceova, 80

uzavřenost systému, 47

vzorec Duhamelův, 78

věta

- Dirichletova, 16, 36
- Fejérova, 47
- limitní, 36
- o existenci L. obrazu, 65
- Schmidtova, 48

řada

Fourierova, 19
Fourierova kosinova, 34
Fourierova sinova, 34
trigonometrická, 15