

Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava
Západočeská univerzita v Plzni

INTEGRÁLNÍ POČET FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

(interaktivní učební text)

Petr Vodstrčil a Jiří Bouchala



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Obsah

1. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



Petr Vodstrčil a Jiří Bouchala
Integrální počet funkcí více proměnných

© Petr Vodstrčil a Jiří Bouchala, 21. srpna 2012
ISBN

Obsah

2. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Předmluva

O modulu „Integrální počet funkcí více proměnných“

Integrální počet patří k pilířům matematické analýzy a má zásadní význam nejen v matematice, ale i v mnoha technických oborech. Proto je zapotřebí tuto disciplínu dobře zvládnout.

Toto skriptum se bude věnovat vícerozměrným (dvojným a trojným) integrálům. Je proto vhodné připomenout si výpočet integrálů jednorozměrných. To je dobře popsáno např. v [1], [2], [4].

Samotný text je rozdělen do dvou hlavních kapitol. První kapitola pojednává o dvojných integrálech, zatímco druhá o integrálech trojných. Každá z těchto kapitol je následně dále rozdělena na podkapitoly. Vyrožené pojmy jsou vždy ilustrovány na řešených příkladech. Na konci kapitol najdete i neřešené příklady k procvičení, a to včetně výsledků.

Na závěr bychom vám rádi popřáli mnoho úspěchů a radosti při studiu.

V Ostravě, v létě 2012

Petr Vodstrčil a Jiří Bouchala ¹

¹e-mail: petr.vodstrcil@vsb.cz a jiri.bouchala@vsb.cz

Obsah

3. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

O projektu

Vážený čtenáři,

text, který právě čtete, vznikl v rámci řešení projektu „Matematika pro inženýry 21. století – inovace výuky matematiky na technických školách v nových podmínkách rychle se vyvíjející informační a technické společnosti“. Projekt je řešen na Vysoké škole báňské - Technické univerzitě v Ostravě a Západočeské univerzitě v Plzni v období 2009 – 2012.

Hlavní motivací projektu je potřeba reagovat na změny významu jednotlivých partií matematiky při řešení praktických problémů, způsobenou zejména velkým pokrokem v matematickém modelování, dramatickým zlepšováním software a rychlým zvyšováním výpočetních kapacit moderních počítačů. Inženýři nyní běžně využívají stále se vyvíjející komplikované softwarové produkty založené na matematických pojmech, se kterými se v kurzech matematiky buďto nesetkají vůbec nebo v nevhodné formě. Na druhé straně prezentace některých pojmů v základních kurzech neodráží z nejruznějších důvodů potřeby odborných kateder. Bohužel tento stav ztěžuje studentům aktivní používání získaných vědomostí v odborných předmětech i orientaci v rychle se vyvíjejících metodách inženýrské praxe.

Cílem projektu je inovace matematických a některých odborných kurzů na technických vysokých školách s cílem získat zájem studentů, zvýšit efektivnost výuky, zpřístupnit prakticky aplikovatelné výsledky moderní matematiky a vytvořit předpoklady pro efektivní výuku inženýrských předmětů. Zkvalitnění výuky matematiky budoucích inženýrů chceme dosáhnout po stránce formální využitím nových informačních technologií přípravy elektronických studijních materiálů a po stránce věcné pečlivým výběrem vyučované látky s důsledným využíváním zavedených pojmů v celém kurzu matematiky s promyšlenou integrací



Obsah

4. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

moderního matematického aparátu do vybraných inženýrských předmětů. Metodiku výuky matematiky a její atraktivnost pro studenty chceme zlepšit důrazem na motivaci a důsledným používáním postupu „od problému k řešení“.

V rámci projektu vytváříme 40 nových výukových materiálů z oblastí matematické analýzy, lineární algebry, numerických metod, metod optimalizace, diskrétní matematiky, teorie grafů, statistiky a několika odborných kurzů. Všechny hotové výukové materiály budou volně k dispozici na webových stránkách projektu <http://mi21.vsb.cz>. Autoři předem děkují za všechny případné nápady a návrhy k vylepšení textu i za upozornění na chyby.

Text byl vysázen pomocí sázecího systému $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ ve formátu pdf $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$.

Obsah

5. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Obsah

Předmluva	3
1 Dvojný integrál	9
1.1 Připomenutí (jednorozměrného) integrálu	9
1.2 Dvojný integrál na intervalu	12
1.3 Měřitelné množiny v $\mathbb{R}^2$	22
1.4 Dvojný integrál na měřitelné množině	27
1.4.1 Fubiniova věta pro dvojný integrál	30
1.4.2 Substituční metoda pro dvojný integrál	40
1.4.3 Substituce do polárních souřadnic	45
1.4.4 Substituce do zobecněných polárních souřadnic	51
1.4.5 Výpočty některých jednorozměrných integrálů	56
1.4.6 Základní věta algebry	60
1.5 Některé aplikace dvojného integrálu	64
1.5.1 Obsah rovinného obrazce	64
1.5.2 Objem válcového tělesa	67
1.5.3 Obsah plochy	71
1.5.4 Některé aplikace dvojného integrálu v mechanice	74
Příklady k procvičení	78



Obsah

6. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Klíč k příkladům k procvičení	80
1.6 Kontrolní testy	82
Test 1 – opakování jednorozměrného integrálu	82
Test 2 – měřitelné množiny, vlastnosti dvojného integrálu	86
Test 3 – Fubiniova věta pro dvojný integrál	88
Test 4 – substituční metoda pro dvojný integrál	92
Test 5 – výpočet dvojného integrálu	98
Test 6 – výpočet dvojného integrálu	100
2 Trojný integrál	102
2.1 Trojný integrál na intervalu	102
2.2 Měřitelné množiny v $\mathbb{R}^3$	104
2.3 Trojný integrál na měřitelné množině	106
2.3.1 Fubiniova věta pro trojný integrál	107
2.3.2 Substituční metoda pro trojný integrál	120
2.3.3 Substituce do cylindrických (válcových) souřadnic	121
2.3.4 Substituce do sférických souřadnic	126
2.3.5 Substituce do zobecněných sférických souřadnic	130
2.4 Některé aplikace trojného integrálu	135
2.4.1 Objem tělesa	135
2.4.2 Některé aplikace trojného integrálu v mechanice	142
Příklady k procvičení	152
Klíč k příkladům k procvičení	155
2.5 Kontrolní testy	156
Test 7 – Fubiniova věta pro trojný integrál	156
Test 8 – substituční metoda pro trojný integrál	158

Test 9 – výpočet trojného integrálu	160
Test 10 – výpočet trojného integrálu	162
Literatura	164
Rejstřík	165



Obsah

8. strana ze 167



Zavřít dokument

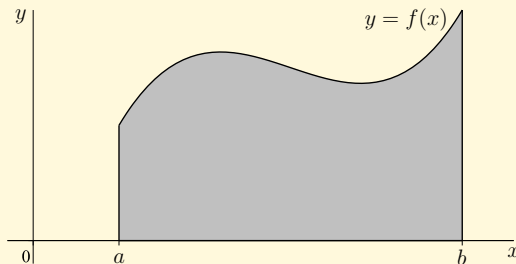
Celá obrazovka/Okno

Kapitola 1

Dvojný integrál

1.1. Připomenutí (jednorozměrného) integrálu.

Buď funkce $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^+$ spojitá. Integrál $\int_a^b f(x) dx$ je pak obsahem plochy ohraničené grafem funkce f a přímkami $y = 0, x = a, x = b$.

[Obsah](#)[9. strana ze 167](#)[Zavřít dokument](#)[Celá obrazovka/Okno](#)

Připomeňme si, jak je Riemannův integrál definován.

Bud $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ omezená (ne nutně spojitá). Pro každé dělení

$$D: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

intervalu $\langle a, b \rangle$ jsou definována čísla

$$s(D) = \sum_{k=1}^n \inf_{x \in \langle x_{k-1}, x_k \rangle} f(x) \cdot (x_k - x_{k-1}),$$

$$S(D) = \sum_{k=1}^n \sup_{x \in \langle x_{k-1}, x_k \rangle} f(x) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

a pomocí nich pak

$$\int_a^b f(x) dx = \sup_D s(D), \quad \int_a^{\overline{b}} f(x) dx = \inf_D S(D).$$

O funkci f říkáme, že je Riemannovsky integrovatelná na $\langle a, b \rangle$, platí-li

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{\overline{b}} f(x) dx.$$

Tuto společnou hodnotu pak nazýváme Riemannovým integrálem funkce f na $\langle a, b \rangle$ a značíme

$$\int_a^b f(x) dx.$$



Obsah

10. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Připomeňme, že platí následující tvrzení.

Věta 1.1 (o existenci (jednorozměrného) Riemannova integrálu). *Nechť funkce f je spojitá nebo monotónní na intervalu $\langle a, b \rangle$. Pak existuje $\int_a^b f(x) dx$.*

Věta 1.2 (o výpočtu Riemannova integrálu pomocí primitivní funkce).

Předpokládejme, že existuje $\int_a^b f(x) dx$. Nechť dále funkce F je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a pro každé $x \in (a, b)$ platí $F'(x) = f(x)$ (F je primitivní funkce k f na (a, b)). Pak

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Příklad 1.3. Díky větám 1.1 a 1.2 můžeme například lehce spočítat, že

$$\int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$



Obsah

11. strana ze 167



Zavřít dokument

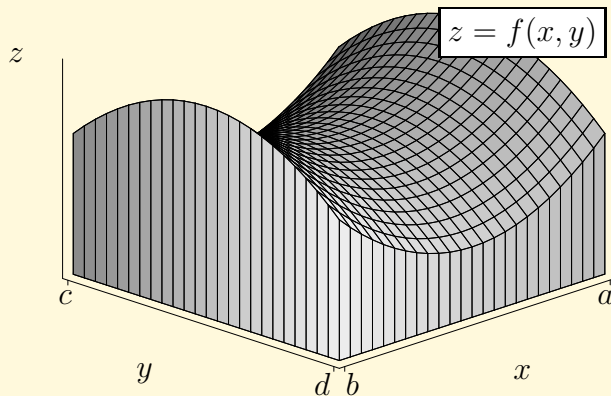
Celá obrazovka / Okno

1.2. Dvojný integrál na intervalu

Dvojný Riemannův integrál na intervalu zavedeme zcela analogicky. Pro spojitou funkci

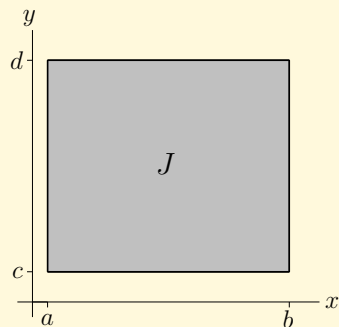
$$f: J = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle \rightarrow \mathbb{R}^+$$

bude $\iint_J f(x, y) \, dx \, dy$ definován tak, aby jeho hodnota odpovídala objemu tělesa ohraničeného grafem funkce f a rovinami $z = 0, x = a, x = b, y = c, y = d$.

[Obsah](#)[12. strana ze 167](#)[Zavřít dokument](#)[Celá obrazovka/Okno](#)

Nyní přistupme ke slíbené definici.

V celé této kapitole buď funkce $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ omezená na dvojrozměrném uzavřeném intervalu (předpoklad spojitosti je opět vynechán) $J = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$, kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}; a < b, c < d$.



To znamená, že existuje číslo $k \in \mathbb{R}^+$ takové, že pro každé $(x, y) \in J$ je $|f(x, y)| \leq k$. Definujeme pro libovolná dělení

$$D_x: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

$$D_y: c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$$

intervalů $\langle a, b \rangle$ a $\langle c, d \rangle$ dělení $D = (D_x, D_y)$ intervalu J jakožto systém uzavřených dvojrozměrných intervalů

$$J_{kl} = \langle x_{k-1}, x_k \rangle \times \langle y_{l-1}, y_l \rangle, \quad \text{kde } k \in \{1, \dots, n\}, l \in \{1, \dots, m\}$$



Obsah

13. strana ze 167



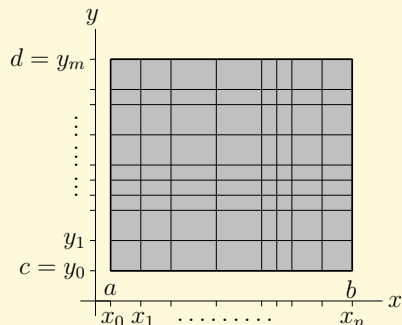
Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

a označme

$$\lambda(J_{kl}) = (x_k - x_{k-1}) \cdot (y_l - y_{l-1})$$

obsahy obdélníků J_{kl} .



Nyní pro každé takovéto dělení D intervalu J definujeme součty

$$s(D) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \inf_{(x,y) \in J_{kl}} f(x,y) \cdot \lambda(J_{kl}) \quad (\text{dolní součet}),$$

$$S(D) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \sup_{(x,y) \in J_{kl}} f(x,y) \cdot \lambda(J_{kl}) \quad (\text{horní součet})$$

a pomocí nich dolní a horní dvojný Riemannův integrál funkce f na intervalu J .

$$\int\limits_J f(x, y) \, dx \, dy = \sup\{s(D) : D \text{ je dělení } J\},$$

$$\int\limits_J f(x, y) \, dx \, dy = \inf\{S(D) : D \text{ je dělení } J\}.$$

Řekneme, že funkce f je na intervalu J (Riemannovsky) integrovatelná, platí-li

$$\int\limits_J f(x, y) \, dx \, dy = \int\limits_J f(x, y) \, dx \, dy.$$

Tuto společnou hodnotu pak značíme $\int\limits_J f(x, y) \, dx \, dy$ a nazýváme dvojným Riemannovým integrálem funkce f na intervalu J .

Příklad 1.4. Přímo z definice dvojného integrálu lze snadno odvodit, že

$$\int\limits_{\langle 0,1 \rangle \times \langle 0,1 \rangle} 1 \, dx \, dy = 1.$$

Příklad 1.5. Podobně jako v předchozím příkladu lze zjistit, že

$$\int\limits_{\langle 0,1 \rangle \times \langle 0,1 \rangle} f(x, y) \, dx \, dy, \text{ kde}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$



Obsah

15. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

neexistuje, neboť

$$\iint_{\langle 0,1 \rangle \times \langle 0,1 \rangle} f(x,y) \, dx \, dy = 0 \quad \text{a} \quad \iint_{\langle 0,1 \rangle \times \langle 0,1 \rangle} f(x,y) \, dx \, dy = 1.$$

Poznámka 1.6. Buď $D^p = (D_x^p, D_y^p)$ libovolná posloupnost dělení intervalu J taková, že

$$\|D_x^p\| \rightarrow 0, \quad \|D_y^p\| \rightarrow 0 \quad \text{pro } p \rightarrow +\infty. \quad {}^1$$

Vytvořme pro každé D^p (tvořené systémem obdélníků J_{kl}^p) tzv. integrální součet

$$I(D^p) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m f(\xi_k^p, \theta_l^p) \cdot \lambda(J_{kl}^p),$$

kde $(\xi_k^p, \theta_l^p) \in J_{kl}^p$ je libovolný bod. Pak platí, že

$$\iint_J f(x,y) \, dx \, dy = \lim_{p \rightarrow +\infty} I(D^p),$$

pokud integrál na levé straně výše uvedené rovnosti existuje.

¹Symbolem $\|D\|$, kde $D: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ je dělení intervalu $\langle a, b \rangle$, přitom rozumíme tzv. normu dělení D definovanou rovností

$$\|D\| = \max_{k \in \{1, 2, \dots, n\}} (x_k - x_{k-1}).$$



Obsah

16. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



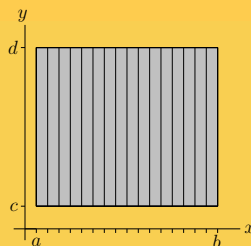
Věta 1.7 (o existenci dvojného integrálu). Je-li funkce $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá v uzavřeném intervalu J , pak existuje $\iint_J f(x, y) \, dx \, dy$.

Věta 1.8 (Fubiniova věta pro dvojný integrál funkce na intervalu).

Nechť funkce f je integrovatelná na intervalu J .

1) Jestliže pro každé $x \in \langle a, b \rangle$ je funkce $y \mapsto f(x, y)$ integrovatelná na intervalu $\langle c, d \rangle$, je

$$\iint_J f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) \, dx \quad (\text{tzv. dvojnásobný integrál}).$$



Obsah

17. strana ze 167

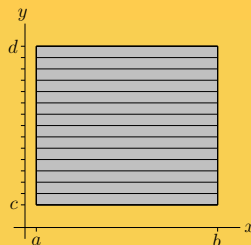


Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

2) Jestliže pro každé $y \in \langle c, d \rangle$ je funkce $x \mapsto f(x, y)$ integrovatelná na intervalu $\langle a, b \rangle$, je

$$\iint_J f(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy.$$



Poznámka 1.9. Součástí tvrzení 1), resp. tvrzení 2), je skutečnost, že funkce

$$x \mapsto \int_c^d f(x, y) \, dy, \quad \text{resp.} \quad y \mapsto \int_a^b f(x, y) \, dx,$$

je integrovatelná na intervalu $\langle a, b \rangle$, resp. $\langle c, d \rangle$.

Poznámka 1.10. První varianta věty 1.8 odpovídá „sčítání funkčních hodnot po sloupcích“ a druhá varianta „po řádcích“ (viz ilustrace ve větě).

Příklady 1.11.

1)

$$\iint_{\langle 0,1 \rangle \times \langle 0,2 \rangle} 1 \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_0^2 1 \, dy \right) dx = \int_0^1 [y]_{y=0}^2 dx = \int_0^1 2 \, dx = 2.$$

2)

$$\begin{aligned} \iint_{\langle -2,1 \rangle \times \langle 2,5 \rangle} (4x - y + 3) \, dx \, dy &= \int_{-2}^1 \left(\int_2^5 (4x - y + 3) \, dy \right) dx = \\ &= \int_{-2}^1 \left[4xy - \frac{y^2}{2} + 3y \right]_{y=2}^5 dx = \int_{-2}^1 \left(20x - \frac{25}{2} + 15 - 8x + 2 - 6 \right) dx = \\ &= \int_{-2}^1 \left(12x - \frac{3}{2} \right) dx = \left[6x^2 - \frac{3}{2}x \right]_{x=-2}^1 = 6 - \frac{3}{2} - 24 - 3 = -\frac{45}{2}. \end{aligned}$$



Obsah

19. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

3)

$$\begin{aligned}
 \iint_{\langle 1,2 \rangle \times \langle 0,1 \rangle} (x^2 + xy + y^2) \, dx \, dy &= \int_1^2 \left(\int_0^1 (x^2 + xy + y^2) \, dy \right) dx = \\
 &= \int_1^2 \left[x^2 y + \frac{xy^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^1 dx = \int_1^2 \left(x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{3} \right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{3} \right]_1^2 = \\
 &= \left(\frac{8}{3} + 1 + \frac{2}{3} \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right) = \frac{13}{3} - \frac{11}{12} = \frac{41}{12}.
 \end{aligned}$$

Můžeme ještě zkusit tentýž příklad spočítat tak, že budeme integrovat v opačném pořadí.

$$\begin{aligned}
 \iint_{\langle 1,2 \rangle \times \langle 0,1 \rangle} (x^2 + xy + y^2) \, dx \, dy &= \int_0^1 \left(\int_1^2 (x^2 + xy + y^2) \, dx \right) dy = \\
 &= \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2 y}{2} + xy^2 \right]_{x=1}^2 dy = \int_0^1 \left(\left(\frac{8}{3} + 2y + 2y^2 \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{y}{2} + y^2 \right) \right) dy = \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{7}{3} + \frac{3y}{2} + y^2 \right) dy = \left[\frac{7y}{3} + \frac{3y^2}{4} + \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^1 = \frac{7}{3} + \frac{3}{4} + \frac{1}{3} = \frac{41}{12}.
 \end{aligned}$$

Vidíme tedy, že náročnost obou postupů je v tomto případě srovnatelná.



Obsah

20. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

4)

$$\begin{aligned}
 \iint_{\langle 0,1 \rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle} xy^2 \sin(x^2 y) \, dx \, dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 xy^2 \sin(x^2 y) \, dx \right) dy = \\
 &= \left[\begin{array}{l} \text{substitute} \\ x^2 y = t \\ 2xy \, dx = dt \\ xy \, dx = \frac{1}{2} dt \\ 0 \mapsto 0, 1 \mapsto y \end{array} \right] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^y \frac{1}{2} y \sin t \, dt \right) dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{y}{2} [-\cos t]_{t=0}^y dy = \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{y}{2} (-\cos y + 1) dy = \left[\frac{y^2}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} y \cos y \, dy = \left[\begin{array}{l} \text{per-partes} \\ u = y \quad v' = \cos y \\ u' = 1 \quad v = \sin y \end{array} \right] = \\
 &= \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} \left([y \sin y]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y \, dy \right) = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - [-\cos y]_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Student si může sám vyzkoušet, že pokud by integroval nejdříve podle proměnné y , dostal by se při výpočtu do potíží.



Obsah

21. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

1.3. Měřitelné množiny v $\mathbb{R}^2$

Bud $M \subseteq \mathbb{R}^2$. Definujme charakteristickou funkci množiny M předpisem

$$\chi_M(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } (x, y) \in M, \\ 0 & \text{pro } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus M. \end{cases}$$

Definice 1.12. Řekneme, že omezená množina M je (Jordanovsky) měřitelná, je-li funkce χ_M Riemannovsky integrovatelná na uzavřeném intervalu $J \subseteq \mathbb{R}^2$ takovém, že $M \subseteq J$. Číslo

$$\lambda(M) = \iint_J \chi_M(x, y) \, dx \, dy$$

pak nazýváme (Jordanovou) mírou množiny M .

Poznámka 1.13. Je-li $M \subseteq \mathbb{R}^2$ omezená, existuje nekonečně mnoho uzavřených intervalů J takových, že $M \subseteq J$. Výše uvedená definice je však na volbě takového J nezávislá.

Poznámka 1.14 (ke geometrické interpretaci míry množiny). Bud M měřitelná, J uzavřený interval v $\mathbb{R}^2$ takový, že $M \subseteq J$. Pokusme se najít geometrický význam čísla

$$\lambda(M) = \iint_J \chi_M(x, y) \, dx \, dy.$$



Obsah

22. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

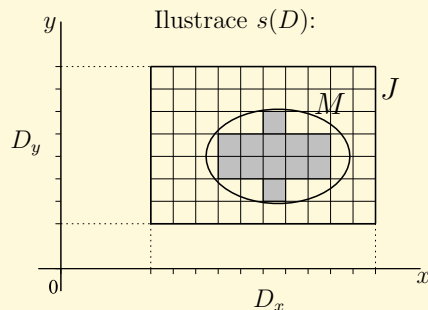
Zvolme $D = (D_x, D_y)$ dělení intervalu J . Všimněme si, že

$$s(D) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \inf_{(x,y) \in J_{kl}} \chi_M(x,y) \cdot \lambda(J_{kl}),$$

což je součet obsahů všech obdélníků J_{kl} ležících v M . Podobně

$$S(D) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \sup_{(x,y) \in J_{kl}} \chi_M(x,y) \cdot \lambda(J_{kl})$$

je součet obsahů všech obdélníků J_{kl} majících s M neprázdný průnik.



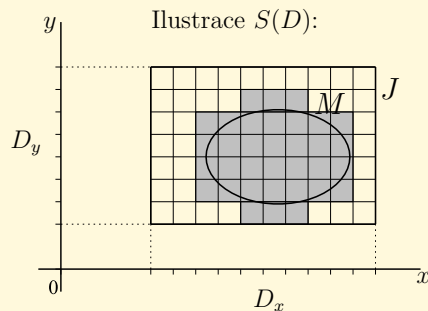
Obsah

23. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno



Pro míru množiny M platí

$$\lambda(M) = \sup_D s(D) = \inf_D S(D).$$

Míra množiny M je zobecněním pojmu „obsah“ množiny, který nám je intuitivně jasný pro některé speciální množiny M (např. obdélník, kruh, apod.).



Obsah

24. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



Věta 1.15 (vlastnosti měřitelných množin).

- 1) Má-li $M \subseteq \mathbb{R}^2$ nejvýše konečně mnoho bodů, je M měřitelná a platí $\lambda(M) = 0$.
- 2) Každý omezený interval v $\mathbb{R}^2$ (nejen uzavřený) je měřitelná množina.
- 3) Je-li M měřitelná, je $\lambda(M) \geq 0$.
- 4) Sjednocení nebo průnik konečného počtu měřitelných množin je měřitelná množina. Rozdíl dvou měřitelných množin je měřitelná množina.
- 5) Jsou-li $M_1, M_2, \dots, M_n$ měřitelné a navzájem disjunktní množiny (tj. $M_i \cap M_j = \emptyset$ pro $i \neq j$), je

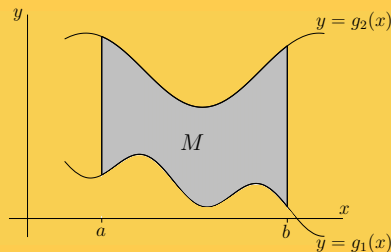
$$\lambda(M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_n) = \lambda(M_1) + \lambda(M_2) + \dots + \lambda(M_n).$$

- 6) Platí-li pro měřitelné množiny M a N , že $M \subseteq N$, potom $\lambda(M) \leq \lambda(N)$.

- 7) Množina

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \in \langle a, b \rangle \wedge g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\},$$

kde funkce g_1, g_2 jsou spojité na intervalu $\langle a, b \rangle$ a $g_1(x) \leq g_2(x)$ pro každé $x \in \langle a, b \rangle$, je měřitelná.



Obsah

25. strana ze 167



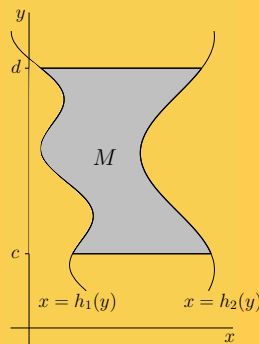
Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

8) Množina

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y \in \langle c, d \rangle \wedge h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\},$$

kde funkce h_1, h_2 jsou spojité na intervalu $\langle c, d \rangle$ a $h_1(y) \leq h_2(y)$ pro každé $y \in \langle c, d \rangle$, je měřitelná.



9) Buď $M \subseteq \mathbb{R}^2$ omezená. Pak M je měřitelná právě tehdy, když množina všech hraničních bodů množiny M má Jordanovu míru 0.

Poznámka 1.16. Je-li M jako v 7), resp. v 8), říkáme, že M je elementární (uzavřená) oblast prvního, resp. druhého, druhu.



Obsah

26. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Příklad 1.17. Množina

$$M = \{(x, y) \in \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle : x, y \in \mathbb{Q}\}$$

není (Jordanovsky) měřitelná.

1.4. Dvojný integrál na měřitelné množině

Definice 1.18. Buď f omezená ^a na neprázdné měřitelné množině $M \subseteq \mathbb{R}^2$. Řekneme, že funkce f je na množině M (Riemannovsky) integrovatelná, je-li funkce $f \cdot \chi_M$ definovaná předpisem

$$(f \cdot \chi_M)(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{pro } (x, y) \in M, \\ 0 & \text{pro } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus M, \end{cases}$$

integrovatelná na nějakém uzavřeném intervalu $J \subseteq \mathbb{R}^2$ takovém, že $M \subseteq J$.

Dvojným (Riemannovým) integrálem funkce f na množině M pak rozumíme číslo

$$\iint_M f(x, y) \, dx \, dy = \iint_J (f \cdot \chi_M)(x, y) \, dx \, dy.$$

Navíc definujeme

$$\iint_{\emptyset} f(x, y) \, dx \, dy = 0 \quad \text{pro každou funkci } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}.$$

^a Tzn. $(\exists k \in \mathbb{R}^+) (\forall (x, y) \in M) : |f(x, y)| \leq k$.



Obsah

27. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Poznámka 1.19.

- i) Výše uvedená definice nezávisí na volbě uzavřeného intervalu J takového, že $M \subseteq J$.
 ii) Všimněme si, že funkce $f \cdot \chi_M$ je definována v $\mathbb{R}^2$.

Věta 1.20 (Vlastnosti dvojného integrálu). *Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^2$ je měřitelná množina a nechť funkce f a g jsou integrovatelné na M . Pak platí:*

- 1) Pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ je

$$\iint_M (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)) \, dx \, dy = \alpha \iint_M f(x, y) \, dx \, dy + \beta \iint_M g(x, y) \, dx \, dy.$$

- 2) Je-li $M = M_1 \cup M_2$, kde M_1 a M_2 jsou měřitelné množiny a $\lambda(M_1 \cap M_2) = 0$, je

$$\iint_M f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{M_1} f(x, y) \, dx \, dy + \iint_{M_2} f(x, y) \, dx \, dy.$$

- 3) Je-li $f(x, y) \leq g(x, y)$ pro každé $(x, y) \in M$, je

$$\iint_M f(x, y) \, dx \, dy \leq \iint_M g(x, y) \, dx \, dy.$$



Obsah

28. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

4)

$$\left| \iint_M f(x, y) \, dx \, dy \right| \leq \iint_M |f(x, y)| \, dx \, dy.$$

5) Je-li $\lambda(M) = 0$, je

$$\iint_M f(x, y) \, dx \, dy = 0.$$

6) Je-li funkce h omezená na M a je-li $f(x, y) = h(x, y)$ pro každé $(x, y) \in M \setminus M_0$, kde M_0 je měřitelná množina míry nula, je

$$\iint_M f(x, y) \, dx \, dy = \iint_M h(x, y) \, dx \, dy.$$

7) Je-li funkce h spojitá na uzavřené měřitelné množině M , je h na M integrovatelná.

Poznámka 1.21.

- i) Součástí věty je také tvrzení, že všechny uvedené integrály existují.
- ii) Všimněme si, že část 7) je zobecněním věty 1.7.



Obsah

29. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno



1.4.1. Fubiniova věta pro dvojný integrál

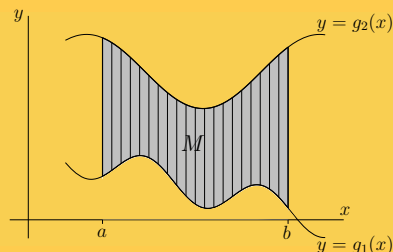
Věta 1.22 (Fubiniova věta pro dvojný integrál).

i) *Nechť funkce f je integrovatelná na množině*

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \langle a, b \rangle \wedge g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\},$$

kde funkce g_1 a g_2 jsou spojité v $\langle a, b \rangle$ a $g_1(x) \leq g_2(x)$ pro každé $x \in \langle a, b \rangle$. Nechť pro každé $x \in \langle a, b \rangle$ je funkce $y \mapsto f(x, y)$ integrovatelná na intervalu $\langle g_1(x), g_2(x) \rangle$. Potom

$$\iint_M f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) \, dy \right) dx \quad (\text{tzv. dvojnásobný integrál}).$$



Obsah

30. strana ze 167



Zavřít dokument

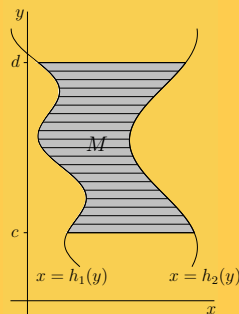
Celá obrazovka / Okno

ii) *Nechť funkce f je integrovatelná na množině*

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y \in \langle c, d \rangle \wedge h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\},$$

kde funkce h_1 a h_2 jsou spojité v $\langle c, d \rangle$ a $h_1(y) \leq h_2(y)$ pro každé $y \in \langle c, d \rangle$. Nechť pro každé $y \in \langle c, d \rangle$ je funkce $x \mapsto f(x, y)$ integrovatelná na intervalu $\langle h_1(y), h_2(y) \rangle$. Potom

$$\iint_M f(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) \, dx \right) dy.$$



Poznámka 1.23. Fubiniova věta nám umožňuje dvojný integrál převádět na dva do sebe vnořené jednorozměrné integrály (mluvíme o tzv. dvojnásobném integrálu).



Obsah

31. strana ze 167



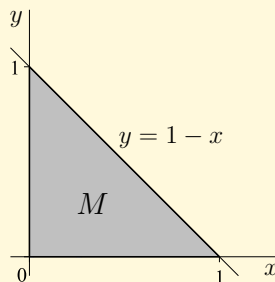
Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Příklad 1.24. Vypočtete integrál $I = \iint_M (x^2 + y^2 + 1) \, dx \, dy$, kde

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x + y \leq 1\}.$$

Řešení. Množina M je trojúhelník s vrcholy $(0, 0)$, $(1, 0)$ a $(0, 1)$ (viz obrázek).



Není těžké si uvědomit, že

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \in \langle 0, 1 \rangle \wedge 0 \leq y \leq 1 - x\},$$

a proto (podle věty 1.22) platí

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (x^2 + y^2 + 1) \, dy \right) dx = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} + y \right]_{y=0}^{1-x} dx = \\ &= \int_0^1 \left(x^2(1-x) + \frac{(1-x)^3}{3} + (1-x) \right) dx = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 (3x^2 - 3x^3 + 1 - 3x + 3x^2 - x^3 + 3 - 3x) \, dx = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 (-4x^3 + 6x^2 - 6x + 4) \, dx = \frac{1}{3} [-x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 4x]_0^1 = \\ &= \frac{1}{3} (-1 + 2 - 3 + 4) = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$



Obsah

33. strana ze 167

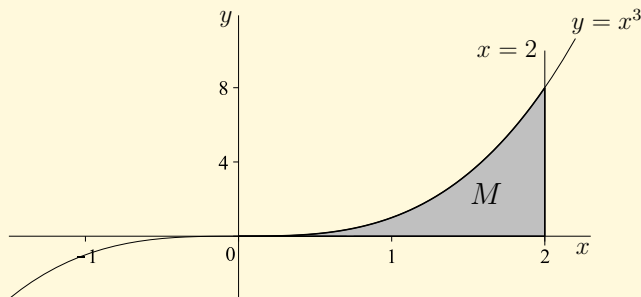


Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Příklad 1.25. Vypočtěte integrál $I = \iint_M x^2 e^{-y} dx dy$, je-li M omezená uzavřená oblast ohraničená křivkami $y = x^3$, $y = 0$, $x = 2$.

Řešení. Množina M je znázorněna na následujícím obrázku.



Zřejmě lze psát

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \in \langle 0, 2 \rangle \wedge 0 \leq y \leq x^3\}.$$

Proto podle věty 1.22 platí

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \left(\int_0^{x^3} x^2 e^{-y} dy \right) dx = \int_0^2 x^2 [-e^{-y}]_{y=0}^{x^3} dx = \int_0^2 x^2 (-e^{-x^3} + 1) dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} \text{substituce} \\ -x^3 = t \\ -3x^2 dx = dt \\ 0 \mapsto 0, 2 \mapsto -8 \end{array} \right| = \frac{1}{3} \int_{-8}^0 (-e^t + 1) dt = \frac{1}{3} [-e^t + t]_{-8}^0 = \frac{7 + e^{-8}}{3}. \end{aligned}$$



Obsah

34. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Mohli bychom také postupovat jiným způsobem (chápeme-li M jako elementární množinu druhého druhu). Platí totiž

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y \in \langle 0, 8 \rangle \wedge \sqrt[3]{y} \leq x \leq 2\},$$

odkud

$$\begin{aligned} I &= \int_0^8 \left(\int_{\sqrt[3]{y}}^2 x^2 e^{-y} dx \right) dy = \int_0^8 e^{-y} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=\sqrt[3]{y}}^2 dy = \int_0^8 \frac{e^{-y}}{3} (8 - y) dy = \\ &= \left| \begin{array}{l} \text{per-partes} \\ u = 8 - y, \quad v' = \frac{e^{-y}}{3} \\ u' = -1, \quad v = -\frac{1}{3}e^{-y} \end{array} \right| = \left[-\frac{1}{3}e^{-y}(8 - y) \right]_0^8 - \int_0^8 \left(\frac{1}{3}e^{-y} \right) dy = \\ &= \frac{8}{3} + \left[\frac{1}{3}e^{-y} \right]_0^8 = \frac{8}{3} + \frac{1}{3}e^{-8} - \frac{1}{3} = \frac{7 + e^{-8}}{3}. \end{aligned}$$

Vidíme, že při prvním přístupu jsme potřebovali substituční metodu (pro jednorozměrné integrály), zatímco ve druhém řešení bylo potřeba užít metodu per-partes (připomeňte si je – viz např. [1] nebo [2]).

Znění substituční metody pro jednorozměrné integrály ještě zopakujeme před větou o substituci ve dvojném integrálu (viz věta 1.29 na straně 40). ▲



Obsah

35. strana ze 167



Zavřít dokument

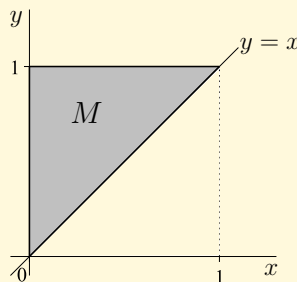
Celá obrazovka/Okno

Příklad 1.26. Vypočtěte integrál $I = \iint_M \sin(y^2) \, dx \, dy$, kde

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq y \leq 1\}.$$

Řešení.

Množina M je trojúhelník s vrcholy $(0, 0)$, $(1, 1)$ a $(0, 1)$.



Není těžké si promyslet, že

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \in \langle 0, 1 \rangle \wedge x \leq y \leq 1\},$$

chápeme-li M jako elementární oblast prvního druhu. Podle věty 1.22 pak platí

$$I = \int_0^1 \left(\int_x^1 \sin(y^2) \, dy \right) dx.$$

Zde se však dostáváme do velkých potíží, protože nedokážeme spočítat vnitřní integrál. Dá se totiž ukázat, že $\int \sin(y^2) \, dy$ (tzv. Fresnelův integrál) sice existuje, ale není elementární



Obsah

36. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

funkcí, tj. jedná se o vyšší transcendentní funkci.

To ale neznamená, že zadaný dvojný integrál nedokážeme spočítat. Zkusme na množinu M pohlížet jako na elementární oblast druhého druhu, tj.

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y \in \langle 0, 1 \rangle \wedge 0 \leq x \leq y\}.$$

Pak podle věty 1.22 platí

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_0^y \sin(y^2) \, dx \right) dy = \int_0^1 [x \sin(y^2)]_{x=0}^y dy = \int_0^1 y \sin(y^2) \, dy = \\ &= \left| \begin{array}{l} \text{substituce} \\ y^2 = t \\ 2y \, dy = dt \\ y \, dy = \frac{1}{2} dt \\ 0 \mapsto 0, 1 \mapsto 1 \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int_0^1 \sin t \, dt = \frac{1}{2} [-\cos t]_0^1 = \frac{1}{2} (1 - \cos 1). \end{aligned}$$



Poznámka 1.27. Poslední příklad ukazuje, že v některých situacích je zcela zásadní, zda množinu M chápeme jako elementární oblast prvního nebo druhého druhu.



Obsah

37. strana ze 167



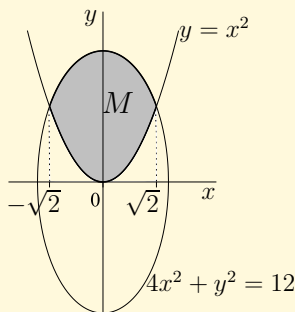
Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Příklad 1.28. Vypočtete integrál $I = \iint_M |x| dx dy$, kde

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 \leq y \wedge 4x^2 + y^2 \leq 12\}.$$

Řešení. Množina M je část elipsy ohraničená parabolou (viz obrázek).



Dále si uvědomme, že můžeme psát

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2: x \in \langle -\sqrt{2}, \sqrt{2} \rangle \wedge x^2 \leq y \leq \sqrt{12 - 4x^2} \right\}.$$

Odtud (podle věty 1.22) dostaneme

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\int_{x^2}^{\sqrt{12-4x^2}} |x| \, dy \right) dx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \underbrace{|x| (\sqrt{12-4x^2} - x^2)}_{\text{sudá funkce}} dx = \\
 &= 2 \int_0^{\sqrt{2}} x (\sqrt{12-4x^2} - x^2) dx = 2 \int_0^{\sqrt{2}} x \sqrt{12-4x^2} dx - \left[\frac{x^4}{2} \right]_0^{\sqrt{2}} = \\
 &= 2 \int_0^{\sqrt{2}} x \sqrt{12-4x^2} dx - 2 = \left| \begin{array}{l} \text{substitute} \\ 12-4x^2 = t \\ -8x dx = dt \\ x dx = -\frac{1}{8} dt \\ 0 \mapsto 12, \sqrt{2} \mapsto 4 \end{array} \right| = \frac{1}{4} \int_4^{12} \sqrt{t} dt - 2 = \\
 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \left[\sqrt{t}^3 \right]_4^{12} - 2 = \frac{1}{6} (12\sqrt{12} - 8) - 2 = 4\sqrt{3} - \frac{10}{3}.
 \end{aligned}$$

▲



Obsah

39. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

1.4.2. Substituční metoda pro dvojný integrál

Nejdříve si zopakujme substituční metodu v určitém (jednorozměrném) integrálu. Platí následující věta.

Věta 1.29 (substituční metoda). *Nechť funkce φ má spojitou první derivaci na intervalu $\langle a, b \rangle$ a nechť zobrazuje tento interval do intervalu $J \subseteq \mathbb{R}$. Dále nechť funkce f je spojitá na intervalu J . Pak platí*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, dx = \int_a^b f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u) \, du.$$



Obsah

40. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



Věta 1.30 (o substituci ve dvojném integrálu).

1) Necht' zobrazení $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dané rovnicemi

$$\left. \begin{aligned} x &= g_1(u, v) \\ y &= g_2(u, v) \end{aligned} \right\}, \quad \text{tzn. } \Phi(u, v) = (g_1(u, v), g_2(u, v)),$$

je prosté na otevřené množině $\Omega_{uv} \subseteq \mathbb{R}^2$, necht' funkce g_1, g_2 jsou třídy C^1 na Ω_{uv} (tj. všechny parciální derivace 1. řádu funkcí g_1 a g_2 jsou spojité na Ω_{uv}) a necht' – tzv. Jacobián –

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial g_1(u, v)}{\partial v} \\ \frac{\partial g_2(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial g_2(u, v)}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

pro každé $(u, v) \in \Omega_{uv}$.

2) Necht' $M_{uv} \subseteq \Omega_{uv}$ a necht' M_{uv} a $M_{xy} = \Phi(M_{uv})$ jsou uzavřené měřitelné množiny.

3) Necht' funkce f je spojitá na M_{xy} .

Potom

$$\iint_{M_{xy}} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{M_{uv}} f(g_1(u, v), g_2(u, v)) \cdot |J(u, v)| \, du \, dv.$$

Poznámka 1.31. Nalezení správné substituce ve dvojném integrálu je obecně poměrně komplikované a vyžaduje jistou dávku zkušeností. To je ukázáno v následujícím příkladu. Velkou důležitost však bude mít speciální substituce do tzv. polárních souřadnic. To, že by

Obsah

41. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

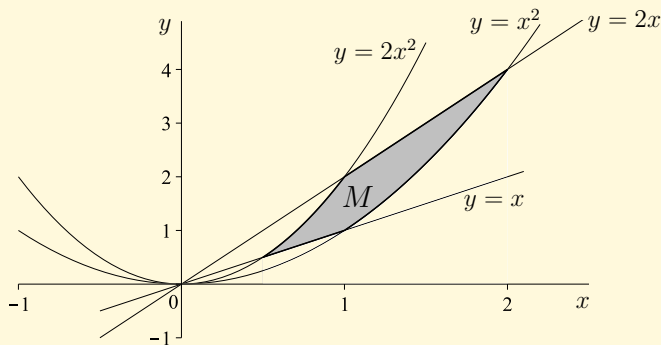
se tato substituce měla použít, už odhalí i méně zkušený počtář.

Příklad 1.32. Vypočtete $I = \iint_M \frac{x}{y} dx dy$, kde

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \leq y \leq 2x \wedge x^2 \leq y \leq 2x^2\} \setminus \{(0, 0)\}.$$

Řešení.

Množina M je znázorněna na následujícím obrázku.



Uvědomíme-li si, že pro $(x, y) \in M$ platí

$$1 \leq \frac{y}{x} \leq 2 \quad \text{a} \quad 1 \leq \frac{y}{x^2} \leq 2 \quad (\text{viz zadání}),$$

mohlo by být užitečné zavést nové proměnné u a v vztahy

$$u = \frac{y}{x} \quad \text{a} \quad v = \frac{y}{x^2}. \quad (1.1)$$



Obsah

42. strana ze 167

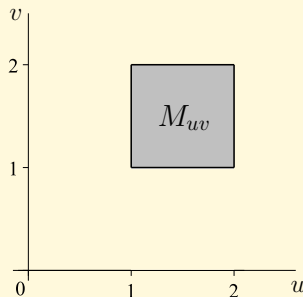


Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Pak by se totiž množina M dala snadno popsat nerovnostmi

$$1 \leq u \leq 2 \quad \text{a} \quad 1 \leq v \leq 2 \quad (\text{viz obrázek}).$$



Pro zdárné provedení substituce ale potřebujeme ze vztahů (1.1) vyjádřit původní proměnné x a y (viz věta 1.30). To ale není obtížné, neboť z prvního vztahu v (1.1) plyne $y = ux$ a dosazením do druhého vztahu dostaneme $v = \frac{u}{x}$, odkud snadno $x = \frac{u}{v}$ a následně $y = \frac{u^2}{v}$. Zavedeme tedy substituci

$$\begin{aligned} x &= \frac{u}{v} \quad (= g_1(u, v)), \\ y &= \frac{u^2}{v} \quad (= g_2(u, v)). \end{aligned}$$

Tím je definováno zobrazení Φ z věty 1.30. Položme $\Omega_{uv} = (0, +\infty) \times (0, +\infty)$ (otevřená množina) a $M_{uv} = \langle 1, 2 \rangle \times \langle 1, 2 \rangle$. Pak nutně $\Phi(M_{uv}) = M$ (viz úvahy výše). Jistě $M_{uv} \subseteq \Omega_{uv}$.



Obsah

43. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Navíc M_{uv} a M jsou uzavřené měřitelné množiny. Dále platí

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \\ \frac{2u}{v} & -\frac{u^2}{v^2} \end{vmatrix} = -\frac{u^2}{v^3} + \frac{2u^2}{v^3} = \frac{u^2}{v^3} \neq 0 \quad \text{na } \Omega_{uv}.$$

Podle věty 1.30 platí

$$\begin{aligned} I &= \iint_{M_{uv}} \frac{\frac{u}{v}}{\frac{u^2}{v}} \cdot \left| \frac{u^2}{v^3} \right| du dv = \iint_{M_{uv}} \frac{u}{v^3} du dv = \int_1^2 \left(\int_1^2 \frac{u}{v^3} du \right) dv = \\ &= \left(\int_1^2 u du \right) \cdot \left(\int_1^2 \frac{1}{v^3} dv \right) = \left[\frac{u^2}{2} \right]_1^2 \cdot \left[-\frac{1}{2v^2} \right]_1^2 = \left(2 - \frac{1}{2} \right) \cdot \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{2} \right) = \frac{9}{16}. \end{aligned}$$



Poznámka 1.33. V posledním příkladu jsme využili následujícího faktu (předpokládáme spojitost funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$ a funkce g na intervalu $\langle c, d \rangle$):

$$\begin{aligned} \iint_{\langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle} f(x)g(y) dx dy &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x)g(y) dy \right) dx = \\ &= \int_a^b f(x) \cdot \underbrace{\left(\int_c^d g(y) dy \right)}_{\text{konstanta}} dx = \left(\int_c^d g(y) dy \right) \cdot \left(\int_a^b f(x) dx \right). \end{aligned}$$



Obsah

44. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Domácí cvičení 1.34. Pokuste se předchozí příklad spočítat bez použití věty o substituci ve dvojném integrálu.

1.4.3. Substituce do polárních souřadnic

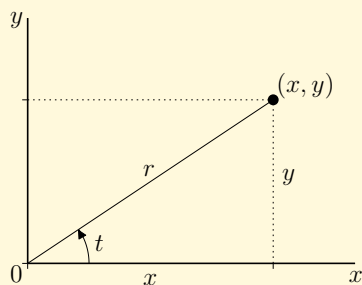
V této kapitole si ukážeme jeden významný speciální případ věty 1.30 (věta o substituci dvojného integrálu).

Jedná se o substituci

$$x = r \cos t,$$

$$y = r \sin t,$$

kde $r \geq 0$ a $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ (popř. $t \in \langle -\pi, \pi \rangle$ nebo $t \in \langle \alpha, \alpha + 2\pi \rangle$ pro $\alpha \in \mathbb{R}$).



Přímým výpočtem zjistíme, že

$$J(r, t) = \begin{vmatrix} \cos t & -r \sin t \\ \sin t & r \cos t \end{vmatrix} = r \cos^2 t + r \sin^2 t = r.$$



Obsah

45. strana ze 167



Zavřít dokument

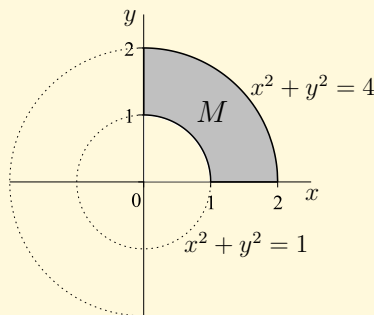
Celá obrazovka / Okno

Poznámka 1.35. Tuto substituci lze zpravidla s úspěchem aplikovat v případech, že hranice množiny M , přes kterou integrujeme, obsahuje části kružnic. Vhodnost této substituce však také závisí na integrované funkci.

Příklad 1.36. Vypočtete integrál $I = \iint_M x \, dx \, dy$, kde

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Řešení. Množina M je čtvrtina mezikruží se středem v počátku a s poloměry 1 a 2.



Bude proto vhodné zavést polární souřadnice

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t \quad (J(r, t) = r).$$

Pokusíme se tedy množinu M popsat v těchto nových souřadnicích. Vzhledem ke geometrickému významu proměnné t snadno dostaneme první omezení $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Nyní si představme,



Obsah

46. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

že úhel t je zafixován a zkoumejme, jak se může měnit r (vzdálenost od počátku). Z obrázku vidíme, že $1 \leq r \leq 2$. Proto platí

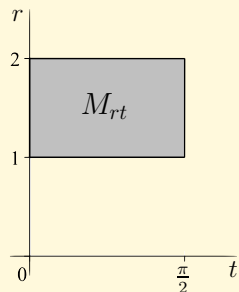
$$M = \left\{ (r \cos t, r \sin t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \wedge 1 \leq r \leq 2 \right\}. \quad (1.2)$$

Položme

$$\Omega_{rt} = (0, +\infty) \times (-\pi, \pi)$$

a

$$M_{rt} = \left\{ (r, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \wedge 1 \leq r \leq 2 \right\}.$$



Obsah

47. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Věta 1.30 (s využitím poznámky 1.33) dává

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^2 r \cos t \cdot \underbrace{|J(r, t)|}_r dr \right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^2 r^2 \cos t dr \right) dt = \\ &= \left(\int_1^2 r^2 dr \right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt \right) = \left[\frac{r^3}{3} \right]_1^2 \cdot [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{7}{3}. \end{aligned}$$



Poznámka 1.37. Pokud bychom omezení (1.2) nedokázali sestavit na základě obrázku, museli bychom ho získat výpočtem – a to tak, že transformační vztahy

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t$$

dosadíme do nerovností, jimiž je množina M zadána. Přitom přihlídneme k tomu, že $r \geq 0$ a $t \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

V našem případě bychom dostali

$$r \cos t \geq 0, \quad r \sin t \geq 0 \quad \text{a} \quad 1 \leq \underbrace{r^2 \cos^2 t + r^2 \sin^2 t}_{r^2} \leq 4.$$

Z poslední podmínky (a $r \geq 0$) získáme $1 \leq r \leq 2$ a z prvních dvou poté dostaneme $\cos t \geq 0$ a $\sin t \geq 0$, odkud (vzhledem k $t \in \langle -\pi, \pi \rangle$) plyne, že t leží v prvním kvadrantu, tj. $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.



Obsah

48. strana ze 167



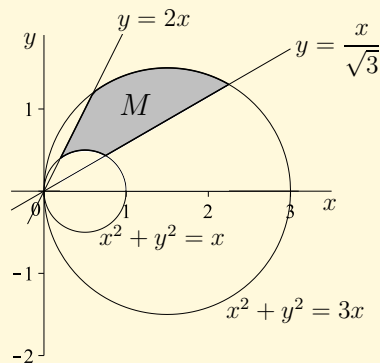
Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Příklad 1.38. Vypočtěte integrál $I = \iint_M \frac{1}{(x^2+y^2)^2} dx dy$, kde

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq 2x \wedge x \leq x^2 + y^2 \leq 3x \right\} \setminus \{(0, 0)\}.$$

Řešení.



Provedeme transformaci do polárních souřadnic. Protože pro každé $(x, y) \in M$ platí $x > 0$ a $y > 0$, ze vztahů $x = r \cos t$, $y = r \sin t$ (a $r \geq 0$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$) plyne $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ a $r > 0$. Z podmínky $\frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq 2x$ plyne

$$\frac{r \cos t}{\sqrt{3}} \leq r \sin t \leq 2r \cos t,$$

odkud

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \leq \operatorname{tg} t \leq 2,$$



Obsah

49. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

tj. $t \in \langle \frac{\pi}{6}, \arctg 2 \rangle$. Podobně, z podmínky $x \leq x^2 + y^2 \leq 3x$ obdržíme

$$r \cos t \leq \underbrace{r^2 \cos^2 t + r^2 \sin^2 t}_{r^2} \leq 3r \cos t,$$

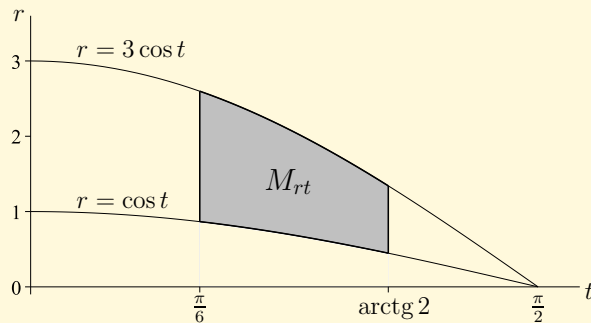
což dává nerovnost $\cos t \leq r \leq 3 \cos t$.

Položme

$$\Omega_{rt} = (0, +\infty) \times (0, 2\pi)$$

a

$$M_{rt} = \{(r, t) \in \mathbb{R}^2 : t \in \langle \frac{\pi}{6}, \arctg 2 \rangle \wedge \cos t \leq r \leq 3 \cos t\}.$$



Obsah

50. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Podle věty 1.30 a Fubiniovy věty 1.22 máme

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\arctg 2} \left(\int_{\cos t}^{3 \cos t} \frac{1}{(r^2 \cos^2 t + r^2 \sin^2 t)^2} \cdot r \, dr \right) dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\arctg 2} \left(\int_{\cos t}^{3 \cos t} \frac{1}{r^3} \, dr \right) dt = \\
 &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\arctg 2} \left[-\frac{1}{2r^2} \right]_{r=\cos t}^{3 \cos t} dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\arctg 2} -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{9 \cos^2 t} - \frac{1}{\cos^2 t} \right) dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\arctg 2} \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt = \\
 &= \frac{4}{9} [\operatorname{tg} t]_{\frac{\pi}{6}}^{\arctg 2} = \frac{4}{9} \left(\operatorname{tg}(\arctg 2) - \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \right) = \frac{4}{9} \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) = \frac{8}{9} - \frac{4\sqrt{3}}{27}.
 \end{aligned}$$



Domácí cvičení 1.39. Pokuste se na omezení

$$t \in \left\langle \frac{\pi}{6}, \arctg 2 \right\rangle \quad \text{a} \quad \cos t \leq r \leq 3 \cos t$$

z předchozího příkladu přijít pouze na základě geometrické úvahy.

1.4.4. Substituce do zobecněných polárních souřadnic

Tentokrát uvažujme substituci

$$x = a \cdot r \cos t,$$

$$y = b \cdot r \sin t,$$



Obsah

51. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

kde $a, b > 0$ jsou konstanty, $r \geq 0$ a $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ (popř. $t \in \langle -\pi, \pi \rangle$ nebo $t \in \langle \alpha, \alpha + 2\pi \rangle$ pro $\alpha \in \mathbb{R}$).

Přímým výpočtem opět zjistíme

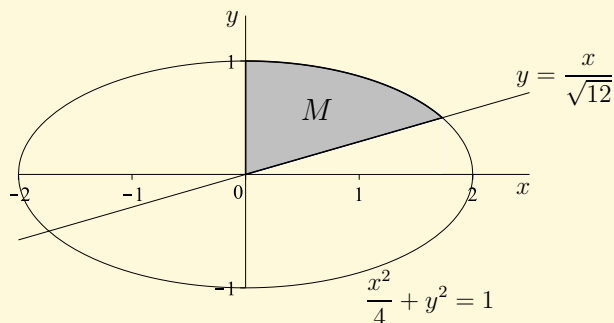
$$J(r, t) = \begin{vmatrix} a \cos t & -ar \sin t \\ b \sin t & br \cos t \end{vmatrix} = ab \cdot r \cos^2 t + ab \cdot r \sin^2 t = ab \cdot r.$$

Poznámka 1.40. Substituci do zobecněných polárních souřadnic zpravidla používáme, pokud hranice oblasti, přes kterou integrujeme, má eliptický tvar (a, b jsou poloosy zmíněné elipsy).

Příklad 1.41. Vypočtete integrál $\iint_M (x - 2y) dx dy$, kde

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1 \wedge 0 \leq x \leq \sqrt{12} \cdot y \right\}.$$

Řešení.



Obsah

52. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Použijeme zobecněné polární souřadnice

$$\begin{aligned}x &= 2r \cos t, \\ y &= r \sin t, \quad (J(r, t) = 2r).\end{aligned}$$

Podmínka $0 \leq x \leq \sqrt{12} \cdot y$ pak dává $0 \leq 2r \cos t \leq \sqrt{12} \cdot r \sin t$ a $t \in (0, \frac{\pi}{2})$. Odtud snadno

$$\cot g t \leq \frac{\sqrt{12}}{2} = \sqrt{3}.$$

Proto dostáváme, že $t \in \langle \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \rangle$. Podmínka $\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$ dává

$$\underbrace{\frac{4r^2 \cos^2 t}{4} + r^2 \sin^2 t}_{r^2} \leq 1,$$

odkud (vzhledem k podmínce $r \geq 0$) máme $0 \leq r \leq 1$. Podle věty 1.30 tedy platí

$$\begin{aligned}I &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 (2r \cos t - 2r \sin t) \cdot 2r \, dr \right) dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 4r^2 (\cos t - \sin t) \, dr \right) dt = \\ &= 4 \cdot \left(\int_0^1 r^2 \, dr \right) \cdot \left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos t - \sin t) \, dt \right) = 4 \cdot \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^1 \cdot [\sin t + \cos t]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= 4 \cdot \frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) = \frac{2}{3} (1 - \sqrt{3}).\end{aligned}$$



Obsah

53. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

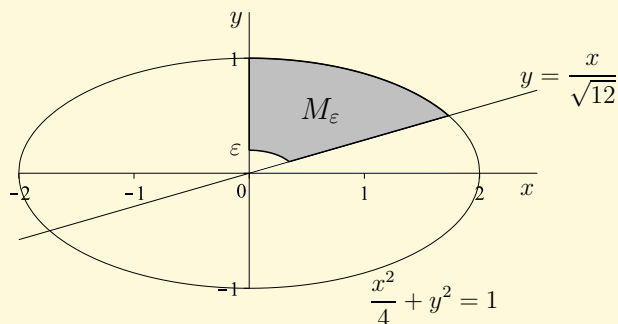
Poznámka 1.42. Všimněme si, že jsme užili tvrzení věty 1.30 (o substituci dvojného integrálu), a to přesto, že nebyly splněny všechny její předpoklady.

Zobrazení $\Phi(r, t) = (2r \cos t, r \sin t)$ totiž zobrazuje celou úsečku $\{0\} \times \langle \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \rangle$ do bodu $(0, 0)$ (tj. zobrazení Φ není prosté) a navíc $J(0, t) = 0$.

Takovéto nekorektnosti (kdy předpoklady věty 1.30 nebudou splněny na jisté množině míry nula) se dopustíme častěji. V „rozumných případech“ i přes tuto nekorektnost získáme správný výsledek.

Poznámka 1.43 (náznak korektního řešení příkladu 1.41). Pro $\varepsilon \in (0, 1)$ definujme množinu

$$M_\varepsilon = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \varepsilon^2 \leq \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1 \wedge 0 \leq x \leq \sqrt{12} \cdot y \right\}.$$



Obsah

54. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Není těžké ukázat, že

$$I = \iint_M (x - 2y) \, dx \, dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \iint_{M_\varepsilon} (x - 2y) \, dx \, dy.$$

Pro každé $\varepsilon \in (0, 1)$ však integrál $I_\varepsilon = \iint_{M_\varepsilon} (x - 2y) \, dx \, dy$ můžeme (tentokrát zcela korektně) transformovat do zobecněných polárních souřadnic. Zvolíme-li $\Omega_{rt} = (0, +\infty) \times (0, 2\pi)$, $M_{rt} = \langle \varepsilon, 1 \rangle \times \langle \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \rangle$, pak všechny předpoklady věty 1.30 jsou splněny a platí

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= \iint_{M_\varepsilon} (x - 2y) \, dx \, dy = \iint_{M_{rt}} (2r \cos t - 2r \sin t) \cdot 2r \, dr \, dt = \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\varepsilon}^1 (2r \cos t - 2r \sin t) \cdot 2r \, dr \right) dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\varepsilon}^1 4r^2 (\cos t - \sin t) \, dr \right) dt = \\ &= 4 \cdot \left(\int_{\varepsilon}^1 r^2 \, dr \right) \cdot \left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos t - \sin t) \, dt \right) = 4 \cdot \left[\frac{r^3}{3} \right]_{\varepsilon}^1 \cdot [\sin t + \cos t]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= 4 \left(\frac{1}{3} - \frac{\varepsilon^3}{3} \right) \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) = \frac{2}{3} (1 - \varepsilon^3) (1 - \sqrt{3}). \end{aligned}$$

Proto platí

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} I_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{2}{3} (1 - \varepsilon^3) (1 - \sqrt{3}) = \frac{2}{3} (1 - \sqrt{3}).$$



Obsah

55. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Pro zájemce

Nyní si ukážeme, jak lze dvojný integrály využít i při počítání integrálů funkcí jedné reálné proměnné, které bychom jinak nebyli schopni spočítat. Dále uvidíme využití dvojných integrálů při důkazu tzv. základní věty algebry, což je velmi důležité tvrzení týkající se polynomů.

1.4.5. Výpočty některých jednorozměrných integrálů

Příklad 1.44. Necht $0 < a < b$ jsou libovolná reálná čísla. Vypočítejte integrál

$$I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx.$$

Řešení. V první řadě si uvědomme, že zadaný nevlastní integrál opravdu existuje. Funkce $f(x) = \frac{x^b - x^a}{\ln x}$ totiž není spojitá na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, proto existence integrálu není zřejmá. Není však těžké si rozmyslet, že

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{bx^{b-1} - ax^{a-1}}{\frac{1}{x}} = b - a.$$

Při výpočtu druhé limity jsme použili l'Hospitalovo pravidlo. Vidíme, že obě jednostranné limity jsou konečné, a proto lze funkci f , která je spojitá v otevřeném intervalu $(0, 1)$, spojitě rozšířit na uzavřený interval $[0, 1]$. Proto uvažovaný integrál

$$I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$$

existuje (viz věta 1.1). Kdybychom chtěli integrál řešit klasickou cestou, museli bychom vypočítat primitivní funkci k funkci $f(x) = \frac{x^b - x^a}{\ln x}$. To by se nám ale nepodařilo. Nyní si ukážeme, jak lze



Obsah

56. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

situaci vyřešit s použitím dvojného integrálu. Uvažujme integrál

$$J = \iint_M x^y \, dx \, dy, \quad \text{kde } M = \langle 0, 1 \rangle \times \langle a, b \rangle.$$

Poznamenejme, že pro $x > 0$ výrazem x^y rozumíme $e^{y \ln x}$ a pro $y > 0$ klademe $0^y = 0$. Snadno se vidí, že funkce $g(x, y) = x^y$ je na (uzavřené) množině M spojitá, a tedy integrovatelná (viz věta 1.7). Z Fubiniovy věty (věta 1.8) plyne, že

$$J = \int_0^1 \left(\int_a^b x^y \, dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{x^y}{\ln x} \right]_{y=a}^b dx = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = I. \quad (1.3)$$

Na druhé straně (zaměníme-li pořadí integrace) dostaneme

$$\begin{aligned} J &= \int_a^b \left(\int_0^1 x^y \, dx \right) dy = \int_a^b \left[\frac{x^{y+1}}{y+1} \right]_{x=0}^1 dy = \int_a^b \frac{1}{y+1} dy = \\ &= [\ln(y+1)]_a^b = \ln(b+1) - \ln(a+1) = \ln \frac{b+1}{a+1}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Celkem tedy (viz (1.3) a (1.4))

$$I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \ln \frac{b+1}{a+1}.$$



Obsah

57. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Příklad 1.45. Vypočtete tzv. Laplaceův integrál

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Řešení. Jedná se o nevlastní Riemannův integrál. Integrovaná funkce je kladná, odkud snadno usoudíme, že

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} I_a, \quad \text{kde } I_a = \int_{-a}^a e^{-x^2} dx.$$

Standardní výpočet tohoto integrálu (pomocí primitivní funkce) by selhal. Funkce e^{-x^2} sice primitivní funkci má (vzhledem ke spojitosti), ale tato není elementární funkcí, tzn. nelze ji vyjádřit pomocí konečně mnoha „základních“ početních operací – jedná se o tzv. vyšší transcendentní funkci.

Uvažujme dvojný integrál

$$J_a = \iint_{M_a} e^{-x^2-y^2} dx dy, \quad \text{kde } M_a = \langle -a, a \rangle \times \langle -a, a \rangle.$$

Fubiniova věta dává

$$\begin{aligned} J_a &= \int_{-a}^a \left(\int_{-a}^a e^{-x^2-y^2} dy \right) dx = \int_{-a}^a \left(\int_{-a}^a e^{-x^2} \cdot e^{-y^2} dy \right) dx = \\ &= \int_{-a}^a \left(e^{-x^2} \int_{-a}^a e^{-y^2} dy \right) dx = \int_{-a}^a \left(e^{-x^2} \cdot I_a \right) dx = I_a \cdot \int_{-a}^a e^{-x^2} dx = I_a \cdot I_a = I_a^2. \end{aligned}$$



Obsah

58. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Pro každé $p > 0$ uvažujme kruh $U_p = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq p^2\}$. Snadno si rozmyslíme, že pro libovolné $a > 0$ je $U_a \subseteq M_a \subseteq U_{a\sqrt{2}}$.¹ Vzhledem k tomu, že integrovaná funkce je kladná, dostaneme

$$\iint_{U_a} e^{-x^2-y^2} dx dy \leq J_a = \iint_{M_a} e^{-x^2-y^2} dx dy \leq \iint_{U_{a\sqrt{2}}} e^{-x^2-y^2} dx dy. \quad (1.5)$$

Pro libovolné $p > 0$ však integrál $\iint_{U_p} e^{-x^2-y^2} dx dy$ lze spočítat transformací do polárních souřadnic $x = r \cos t$, $y = r \sin t$ (nezapomeneme na Jacobián $J = r$).

$$\begin{aligned} \iint_{U_p} e^{-x^2-y^2} dx dy &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^p e^{-r^2} \cdot r dr \right) dt = \left| \begin{array}{l} \text{substituce} \\ -r^2 = s \\ -2r dr = ds \\ -r dr = \frac{1}{2} ds \\ 0 \mapsto 0, p \mapsto -p^2 \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\int_{-p^2}^0 e^s ds \right) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [e^s]_{-p^2}^0 dt = \pi (1 - e^{-p^2}). \end{aligned}$$

Proto platí

$$\iint_{U_a} e^{-x^2-y^2} dx dy = \pi (1 - e^{-a^2}) \quad \text{a} \quad \iint_{U_{a\sqrt{2}}} e^{-x^2-y^2} dx dy = \pi (1 - e^{-2a^2}),$$

¹Nakreslete si obrázek.



Obsah

59. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

odkud (vzhledem k (1.5))

$$\begin{aligned}\pi(1 - e^{-a^2}) &\leq J_a = I_a^2 \leq \pi(1 - e^{-2a^2}) \\ &\Downarrow \\ \sqrt{\pi(1 - e^{-a^2})} &\leq I_a \leq \sqrt{\pi(1 - e^{-2a^2})}.\end{aligned}$$

Protože

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \sqrt{\pi(1 - e^{-a^2})} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \sqrt{\pi(1 - e^{-2a^2})} = \sqrt{\pi},$$

je

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} I_a = \sqrt{\pi}.$$



1.4.6. Základní věta algebry

Jako další ukázkou použití dvojných integrálů uvedeme důkaz tzv. základní věty algebry.

Věta 1.46 (Základní věta algebry).

Nechť $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ je polynom definovaný předpisem

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ a $a_n \neq 0$. Pak existuje $z_0 \in \mathbb{C}$ takové, že $f(z_0) = 0$.

Poznámka 1.47. Základní věta algebry vlastně tvrdí, že libovolný nekonstantní polynom (tj. polynom stupně alespoň 1) s komplexními koeficienty má alespoň jeden komplexní kořen.



Obsah

60. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že polynom f je normovaný, tj. $a_n = 1$. Pak polynom f má tvar

$$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0.$$

Koeficienty tohoto polynomu jsou komplexní čísla, a proto můžeme psát

$$a_k = \alpha_k + i\beta_k \quad (k \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \quad \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}).$$

Komplexní proměnnou z polynomu f pišme v „goniometrickém tvaru“, tj.

$$z = r(\cos t + i \sin t), \quad \text{kde } r, t \in \mathbb{R}.$$

Pak zřejmě dostaneme¹

$$\begin{aligned} f(z) &= z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k = r^n (\cos nt + i \sin nt) + \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k + i\beta_k) (r^k (\cos kt + i \sin kt)) = \\ &= \underbrace{\left[r^n \cos nt + \sum_{k=0}^{n-1} r^k (\alpha_k \cos kt - \beta_k \sin kt) \right]}_{p(r,t)} + i \underbrace{\left[r^n \sin nt + \sum_{k=0}^{n-1} r^k (\alpha_k \sin kt + \beta_k \cos kt) \right]}_{q(r,t)}. \end{aligned}$$

Tím jsou definovány nekonečně diferencovatelné funkce $p, q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ splňující

$$f(r(\cos t + i \sin t)) = p(r, t) + iq(r, t) \quad \text{pro každé } (r, t) \in \mathbb{R}^2.$$

¹Je potřeba použít Moivreovu větu

$$(\forall n \in \mathbb{N}) (\forall r, t \in \mathbb{R}) : (r(\cos t + i \sin t))^n = r^n (\cos nt + i \sin nt).$$



Obsah

61. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Předpokládejme sporem, že pro každé $z \in \mathbb{C}$ platí $f(z) \neq 0$. To ale znamená, že pro každé $(r, t) \in \mathbb{R}^2$ platí

$$p^2(r, t) + q^2(r, t) > 0$$

(p a q nemohou být v žádném bodě současně nulové).

Definujeme funkce $u, v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ předpisy

$$u(r, t) = \frac{p'_r(r, t)q(r, t) - p(r, t)q'_r(r, t)}{p^2(r, t) + q^2(r, t)}, \quad v(r, t) = \frac{p'_t(r, t)q(r, t) - p(r, t)q'_t(r, t)}{p^2(r, t) + q^2(r, t)}.$$

Vzhledem k předchozímu jsou funkce u a v spojité v celém $\mathbb{R}^2$. Dokonce i všechny jejich parciální derivace všech řádů jsou spojité v celém $\mathbb{R}^2$ (tj. $u, v \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$).

Nyní ukážeme, že pro libovolný bod $(r, t) \in \mathbb{R}^2$ platí

$$u'_t(r, t) = v'_r(r, t).$$

Nechť tedy $(r_0, t_0) \in \mathbb{R}^2$ je libovolný (pevně zvolený) bod.

Jestliže $q(r_0, t_0) \neq 0$, pak jistě $q(r, t) \neq 0$ i v nějakém okolí bodu (r_0, t_0) . Přímým výpočtem lze ověřit, že v tomto okolí platí

$$u(r, t) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\arctg \frac{p(r, t)}{q(r, t)} \right) \quad \text{a} \quad v(r, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\arctg \frac{p(r, t)}{q(r, t)} \right).$$

Rovnost $u'_t(r_0, t_0) = v'_r(r_0, t_0)$ pak plyne z věty o záměnnosti parciálních derivací (viz např. [5]).

Je-li $q(r_0, t_0) = 0$, pak (vzhledem k podmínce $p^2(r_0, t_0) + q^2(r_0, t_0) > 0$) platí $p(r_0, t_0) \neq 0$. V takovém případě je $p(r, t) \neq 0$ v jistém okolí bodu (r_0, t_0) . V tomto okolí však platí

$$u(r, t) = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\arctg \frac{q(r, t)}{p(r, t)} \right) \quad \text{a} \quad v(r, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\arctg \frac{q(r, t)}{p(r, t)} \right).$$



Obsah

62. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Rovnost $u'_t(r_0, t_0) = v'_r(r_0, t_0)$ plyne opět z věty o záměnnosti.

Pro $R > 0$ uvažujme dvojný integrál

$$I_R = \iint_{M_R} u'_t(r, t) \, dr \, dt, \quad \text{kde } M_R = \langle 0, R \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Podle věty 1.7 výše uvedený integrál existuje. Z věty 1.8 navíc pro každé $R > 0$ dostaneme

$$I_R = \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} u'_t(r, t) \, dt \right) dr = \int_0^R [u(r, t)]_{t=0}^{2\pi} dr = \int_0^R \underbrace{(u(r, 2\pi) - u(r, 0))}_0 dr = 0.$$

Zde jsme využili toho, že pro každé $r \in \mathbb{R}$ je funkce $t \mapsto u(r, t)$ (proměnné t) periodická s periodou 2π .

Integrál I_R však můžeme spočítat i jinak (opět využijeme věty 1.8 a již dokázané vlastnosti $u'_t = v'_r$).

$$\begin{aligned} I_R &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R u'_t(r, t) \, dr \right) dt = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R v'_r(r, t) \, dr \right) dt = \int_0^{2\pi} [v(r, t)]_{r=0}^R dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (v(R, t) - v(0, t)) dt = \int_0^{2\pi} v(R, t) dt. \end{aligned}$$

Použili jsme fakt, že $v(0, t) = 0$. Ten ověříme přímým výpočtem (neboť $p'_t(0, t) = q'_t(0, t) = 0$).

Dále můžeme spočítat, že pro každé $(r, t) \in \mathbb{R}^2$ platí

$$v(r, t) = \frac{-nr^{2n} + f_{2n-1}(t)r^{2n-1} + \dots + f_1(t)r + f_0(t)}{r^{2n} + g_{2n-1}(t)r^{2n-1} + \dots + g_1(t)r + g_0(t)},$$



Obsah

63. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

kde $f_0, \dots, f_{2n-1}$ a $g_0, \dots, g_{2n-1}$ jsou omezené funkce proměnné t . Úpravou získáme

$$v(r, t) = \frac{-n + \frac{f_{2n-1}(t)}{r} + \dots + \frac{f_1(t)}{r^{2n-1}} + \frac{f_0(t)}{r^{2n}}}{1 + \frac{g_{2n-1}(t)}{r} + \dots + \frac{g_1(t)}{r^{2n-1}} + \frac{g_0(t)}{r^{2n}}}.$$

Odtud snadno odvodíme, že pro každé $t \in \mathbb{R}$ je

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} v(r, t) = -n.$$

Protože funkce $f_0, \dots, f_{2n-1}$ a $g_0, \dots, g_{2n-1}$ jsou omezené, je výše uvedená konvergence stejnoměrná vzhledem k t . To však znamená, že pro dostatečně velké $R > 0$ platí

$$v(R, t) < -\frac{1}{2}n \quad \text{pro každé } t \in \mathbb{R}.$$

Pro takto zvolené R máme

$$I_R = \int_0^{2\pi} v(R, t) dt < \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2}n dt = -\pi n < 0,$$

což je spor, neboť dříve jsme zjistili, že pro libovolné $R > 0$ platí $I_R = 0$. □

1.5. Některé aplikace dvojného integrálu

1.5.1. Obsah rovinného obrazce

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^2$ je měřitelná množina. Pak pro obsah (míru) $\lambda(M)$ rovinného obrazce M platí

$$\lambda(M) = \iint_M 1 dx dy.$$



Obsah

64. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Příklad 1.48. Pro libovolné $a > 0$ vypočtěte obsah rovinného obrazce

$$M_a = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)^2 \leq 2a^2 xy \right\}.$$

Řešení. Nejprve popíšeme množinu M_a v polárních souřadnicích. Proto do podmínky

$$(x^2 + y^2)^2 \leq 2a^2 xy$$

dosadíme transformační vztahy

$$x = r \cos t \quad \text{a} \quad y = r \sin t.$$

Obdržíme tedy

$$\begin{aligned} (r^2 \cos^2 t + r^2 \sin^2 t)^2 &\leq 2a^2 r \cos t \cdot r \sin t, \\ (r^2)^2 &\leq 2a^2 r^2 \cos t \sin t, \\ r^4 &\leq a^2 r^2 \sin 2t, \\ r^2 (r^2 - a^2 \sin 2t) &\leq 0. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Nechť nyní $t \in \langle -\pi, \pi \rangle$ je pevné. Zkoumejme, jaká $r \geq 0$ pak vyhovují podmínce (1.6). Jestliže

$$t \in \left\langle -\pi, -\frac{\pi}{2} \right\rangle \cup \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle \quad (\text{první a třetí kvadrant}),$$

tj. v případě $\sin 2t \geq 0$, dostáváme z (1.6)

$$0 \leq r \leq a\sqrt{\sin 2t}.$$



Obsah

65. strana ze 167



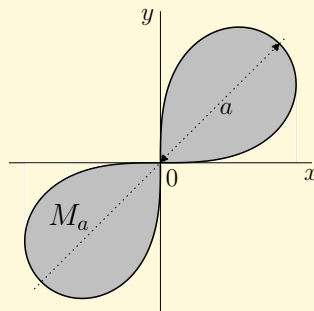
Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Jestliže

$$t \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right),$$

tj. v případě $\sin 2t < 0$, vyhovuje podmínce (1.6) pouze $r = 0$.



Z vět 1.30 a 1.22 plyne, že

$$\begin{aligned} \lambda(M_a) &= \iint_{M_a} 1 \, dx \, dy \stackrel{\text{pol. souř.}}{=} \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{a\sqrt{\sin 2t}} r \, dr \right) dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{a\sqrt{\sin 2t}} r \, dr \right) dt = \\ &= \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{a\sqrt{\sin 2t}} dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{a\sqrt{\sin 2t}} dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} a^2 \sin 2t \, dt + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin 2t \, dt = \\ &= -\frac{1}{4} a^2 \underbrace{[\cos 2t]_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}}_{-2} - \frac{1}{4} a^2 \underbrace{[\cos 2t]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{-2} = \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} a^2 = a^2. \end{aligned}$$



Obsah

66. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



Poznámka 1.49. Hranice množiny M_a z předchozího příkladu je křivka zvaná lemniskáta.

1.5.2. Objem válcového tělesa

Bud'

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: (x, y) \in M \wedge 0 \leq z \leq f(x, y)\},$$

kde $M \subseteq \mathbb{R}^2$ je uzavřená měřitelná množina a f je nezáporná a spojitá funkce na M . Objem $V(T)$ tělesa T pak definujeme pomocí vzorce

$$V(T) = \iint_M f(x, y) \, dx \, dy.$$

Příklad 1.50. Pro libovolné $a > 0$ vypočítejte objem tzv. Vivianiova tělesa

$$T_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2 \wedge x^2 + y^2 \leq ax\}.$$

Řešení. Těleso T_a je průnikem koule o poloměru a a rotačního válce majícího průměr a , přičemž plášť válce prochází středem koule (viz obrázek).

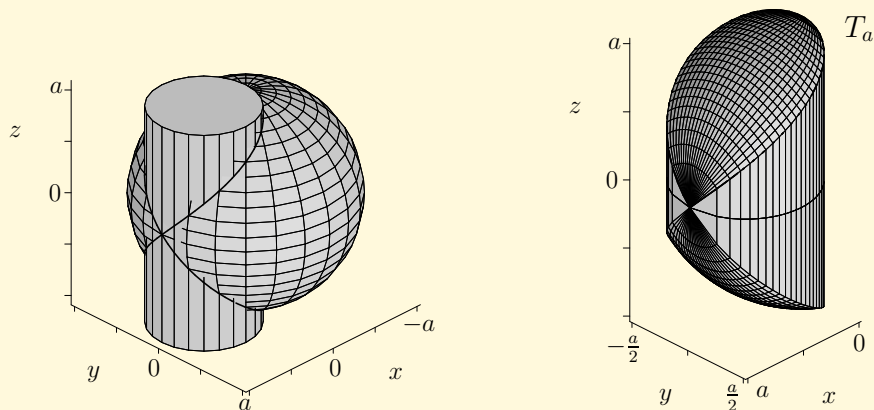
Obsah

67. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



Vzhledem k symetrii tělesa T_a podle roviny $z = 0$ je zřejmé, že $V(T_a) = 2V(T_a^*)$, kde

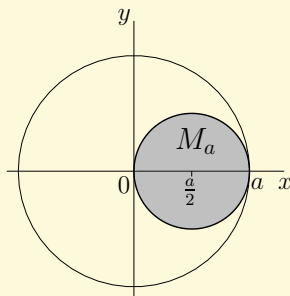
$$T_a^* = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq ax \wedge 0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \right\}.$$

Dále je jasné, že

$$V(T_a^*) = \iint_{M_a} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \, dx \, dy,$$

kde

$$M_a = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq ax \right\}.$$



Přejdeme-li k polárním souřadnicím $x = r \cos t$, $y = r \sin t$, omezení $x^2 + y^2 \leq ax$ dostane tvar (nutno přihlídnout k podmínkám $r \geq 0$ a $t \in \langle -\pi, \pi \rangle$)

$$\begin{aligned} r^2 \cos^2 t + r^2 \sin^2 t &\leq ar \cos t, \\ r^2 &\leq ar \cos t, \\ r(r - a \cos t) &\leq 0, \end{aligned} \tag{1.7}$$

odkud máme $(r - a \cos t) \leq 0$, tj.

$$0 \leq r \leq a \cos t.$$

Z poslední nerovnosti (vzhledem k nezápornosti výrazu $a \cos t$ a $a > 0$) snadno dostaneme

$$t \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle.$$



Obsah

69. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Proto platí

$$V(T_a) = 2V(T_a^*) =$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \iint_{M_a} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \, dx \, dy \stackrel{\text{pol. souř.}}{=} 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{a \cos t} r \sqrt{a^2 - r^2} \, dr \right) dt = \\
 &= \left| \begin{array}{l} \text{substituce} \\ a^2 - r^2 = u \\ -2r \, dr = du \\ r \, dr = -\frac{1}{2} du \\ 0 \mapsto a^2, \, a \cos t \mapsto a^2 \sin^2 t \end{array} \right| = - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{a^2}^{a^2 \sin^2 t} \sqrt{u} \, du \right) dt = \\
 &= \frac{2}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\sqrt{u^3} \right]_{a^2 \sin^2 t}^{a^2} dt = \frac{2}{3} a^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{(1 - |\sin t|^3)}_{\text{sudá funkce}} dt = \frac{4}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 t) dt =
 \end{aligned}$$



Obsah

70. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\pi a^3}{3} - \frac{4}{3}a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{(1 - \cos^2 t)}_{\sin^2 t} \sin t \, dt = \left| \begin{array}{l} \text{substitute} \\ \cos t = v \\ -\sin t \, dt = dv \\ \sin t \, dt = -dv \\ 0 \mapsto 1, \frac{\pi}{2} \mapsto 0 \end{array} \right| = \\
&= \frac{2\pi a^3}{3} + \frac{4}{3}a^3 \int_1^0 (1 - v^2) \, dv = \frac{2\pi a^3}{3} - \frac{4}{3}a^3 \int_0^1 (1 - v^2) \, dv = \\
&= \frac{2\pi a^3}{3} - \frac{4}{3}a^3 \left[v - \frac{v^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2\pi a^3}{3} - \frac{8}{9}a^3 = a^3 \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{8}{9} \right).
\end{aligned}$$



1.5.3. Obsah plochy

Buď $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^2$ uzavřená měřitelná množina a buď $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ třídy C^1 na otevřené množině $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ takové, že $M \subseteq \Omega$. To znamená, že f má na Ω spojité parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$. Obsah plochy τ definované jako graf funkce $f|_M$, tj.

$$\tau = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: (x, y) \in M \wedge z = f(x, y)\},$$

definujme pomocí vzorce

$$P(\tau) = \iint_M \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)^2} \, dx \, dy.$$



Obsah

71. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Příklad 1.51. Pro libovolné $a > 0$ vypočtěte obsah plochy

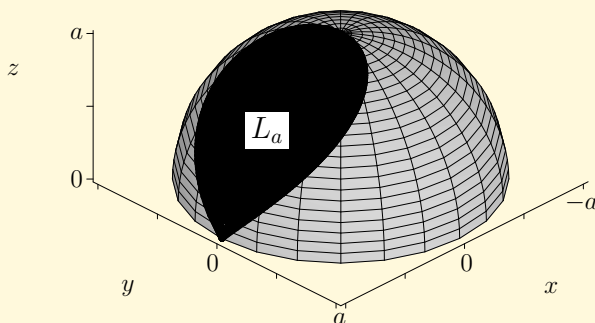
$$L_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: z \geq 0 \wedge x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \wedge x^2 + y^2 \leq ax\}.$$

Řešení. Jistě platí

$$L_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: (x, y) \in M_a \wedge z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\},$$

kde

$$M_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq ax\}.$$



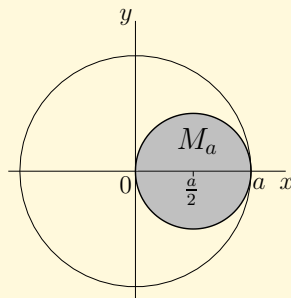
Obsah

72. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno



Položme

$$f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}.$$

Snadno se vidí, že

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \quad \text{a} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

Proto platí

$$P(L_a) = \iint_{M_a} \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2}} \, dx \, dy = \iint_{M_a} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \, dx \, dy.$$

Zavedením polárních souřadnic (viz předchozí příklad) získáme

$$\begin{aligned}
 P(L_a) &= a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{a \cos t} \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr \right) dt = \left| \begin{array}{l} \text{substituce} \\ a^2 - r^2 = u \\ -2r dr = du \\ r dr = -\frac{1}{2} du \\ 0 \mapsto a^2, a \cos t \mapsto a^2 \sin^2 t \end{array} \right| = \\
 &= \frac{1}{2} a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{a^2 \sin^2 t}^{a^2} \frac{1}{\sqrt{u}} du \right) dt = a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\sqrt{u}]_{a^2 \sin^2 t}^{a^2} dt = a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{(a - a|\sin t|)}_{\text{sudá funkce}} dt = \\
 &= 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin t) dt = 2a^2 [t + \cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2a^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = a^2(\pi - 2).
 \end{aligned}$$



Poznámka 1.52. Uvedený výpočet není – vzhledem k předcházejícímu výkladu – korektní. Všimněme si, že parciální derivace funkce $f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ nejsou v bodě $(a, 0) \in M_a$ vůbec definovány.

Domácí cvičení 1.53. Rozmyslete si, jak lze výpočet provést korektně.

1.5.4. Některé aplikace dvojného integrálu v mechanice

Představme si tenkou desku jako uzavřenou měřitelnou množinu $M \subseteq \mathbb{R}^2$ a předpokládejme, že její plošná hustota je popsána spojitou a nezápornou (na M) funkcí h .



Obsah

74. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Pak lze odvodit následující vzorce:

- Pro hmotnost desky M :

$$m(M) = \iint_M h(x, y) \, dx \, dy.$$

- Pro statické momenty desky M vzhledem k ose x , resp. y :

$$S_x(M) = \iint_M y \cdot h(x, y) \, dx \, dy, \quad \text{resp.} \quad S_y(M) = \iint_M x \cdot h(x, y) \, dx \, dy.$$

- Pro těžiště desky M :

$$T(M) = \left(\frac{S_y(M)}{m(M)}, \frac{S_x(M)}{m(M)} \right).$$

- Pro momenty setrvačnosti desky M vzhledem k ose x , resp. y :

$$I_x(M) = \iint_M y^2 \cdot h(x, y) \, dx \, dy, \quad \text{resp.} \quad I_y(M) = \iint_M x^2 \cdot h(x, y) \, dx \, dy.$$

Poznámka 1.54 (fyzikální význam čísla $h(x, y)$). Nechť $(x, y) \in M$ je dané a pro každé $\delta > 0$ je

$$\lambda(U((x, y), \delta) \cap M) \neq 0.$$

Číslem $h(x, y)$ pak rozumíme limitu

$$h(x, y) = \lim_{\delta \rightarrow 0+} \frac{m(U((x, y), \delta) \cap M)}{\lambda(U((x, y), \delta) \cap M)}.$$



Obsah

75. strana ze 167



Zavřít dokument

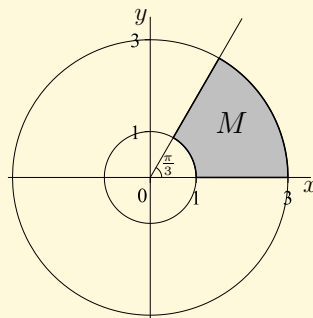
Celá obrazovka / Okno

Poznámka 1.55. Je-li plošná hustota h funkce konstantní na M , říkáme, že deska M je homogenní.

Poznámka 1.56. K výpočtům dvojných integrálů vede celá řada dalších fyzikálních úloh, např. v teorii rovinných fyzikálních polí (gravitačních, elektrických, magnetických, tepelných, ...).

Příklad 1.57. Homogenní tenká deska M má tvar výseče mezikruží s poloměry 1 a 3 a středovým úhlem $\frac{\pi}{3}$. Určete vzdálenost d těžiště této desky od středu obou kružnic.

Řešení. Nejprve si desku M umístíme do souřadného systému (viz obrázek).



Deska M je homogenní, proto existuje číslo $c > 0$ takové, že pro každé $(x, y) \in M$ platí

$$h(x, y) = c.$$

Při výpočtu je výhodné použít polární souřadnice $x = r \cos t$, $y = r \sin t$. Pak lze totiž M popsat vztahy

$$t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{3} \right\rangle \quad \text{a} \quad r \in \langle 1, 3 \rangle.$$



Obsah

76. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Pro hmotnost desky tedy platí

$$m(M) = \iint_M c \, dx \, dy \stackrel{\text{pol. souř.}}{=} c \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_1^3 r \, dr \right) dt = c \cdot \frac{\pi}{3} \left[\frac{r^2}{2} \right]_1^3 = c \cdot \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 = c \cdot \frac{4\pi}{3}.$$

Nyní vypočteme statické momenty vzhledem k oběma osám.

$$S_x(M) = \iint_M cy \, dx \, dy \stackrel{\text{pol. souř.}}{=} c \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_1^3 r^2 \sin t \, dr \right) dt = c \underbrace{[-\cos t]_0^{\frac{\pi}{3}}}_{\frac{1}{2}} \cdot \left[\frac{r^3}{3} \right]_1^3 = c \cdot \frac{13}{3},$$

$$S_y(M) = \iint_M cx \, dx \, dy \stackrel{\text{pol. souř.}}{=} c \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_1^3 r^2 \cos t \, dr \right) dt = c \underbrace{[\sin t]_0^{\frac{\pi}{3}}}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \left[\frac{r^3}{3} \right]_1^3 = c \cdot \frac{13\sqrt{3}}{3}.$$

Pro souřadnice těžiště desky platí

$$T(M) = \left(\frac{S_y(M)}{m(M)}, \frac{S_x(M)}{m(M)} \right) = \left(\frac{13\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{3}{4\pi}, \frac{13}{3} \cdot \frac{3}{4\pi} \right) = \left(\frac{13\sqrt{3}}{4\pi}, \frac{13}{4\pi} \right).$$

Je vidět, že souřadnice těžiště homogenní desky nezávisí na její hustotě, což není vůbec překvapující.

Hledaná vzdálenost těžiště od středů obou kružnic je

$$d = \|T(M)\| = \sqrt{\frac{169 \cdot 3}{16\pi^2} + \frac{169}{16\pi^2}} = \frac{13}{2\pi}.$$



Obsah

77. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Domácí cvičení 1.58. Zkuste se zamyslet, jak jinak bychom mohli umístit tenkou desku z předchozího příkladu do souřadného systému, aby se výpočet ještě více zjednodušil.

Příklady k procvičení

1. Pomocí Fubiniovy věty vypočtěte integrály:

i) $\iint_M (x^2 + y) \, dx \, dy, \quad \text{kde } M = \langle 0, 2 \rangle \times \langle 1, 3 \rangle;$

ii) $\iint_M (x + y^2) \, dx \, dy, \quad \text{kde } M = \langle 0, 2 \rangle \times \langle 1, 3 \rangle;$

iii) $\iint_M (x - y) \, dx \, dy, \quad \text{kde } M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y \geq 0 \wedge y \leq x \wedge x + y \leq 2\};$

iv) $\iint_M \frac{x^2}{y^2} \, dx \, dy, \quad \text{kde } M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq 2 \wedge y \leq x \wedge xy \geq 1\};$

v) $\iint_M \cos(x + y) \, dx \, dy, \quad \text{kde } M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \geq 0 \wedge y \geq x \wedge y \leq \pi\};$

vi) $\iint_M (3xy^2 - 2x) \, dx \, dy, \quad \text{kde } M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq 1 \wedge x^2 \leq y \leq x\};$

vii) $\iint_M \frac{x}{y} \, dx \, dy, \quad \text{kde } M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \geq 1 \wedge x \leq 2 \wedge y \leq x \wedge y \geq 1\};$



Obsah

78. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

viii) $\iint_M e^{2x+y} dx dy$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x + y \leq 2 \wedge y \geq 0 \wedge y \leq 1 \wedge x \geq 0\}$;

ix) $\iint_M x^2 y dx dy$, kde M je trojúhelník s vrcholy $A = (0, 0)$, $B = (3, 0)$, $C = (2, 1)$;

x) $\iint_M xy^2 dx dy$, kde M je trojúhelník s vrcholy $A = (0, 0)$, $B = (3, 0)$, $C = (2, 1)$;

xi) $\iint_M \frac{1}{y^2 + 1} dx dy$, kde M je trojúhelník s vrcholy $A = (0, 0)$, $B = (1, 1)$, $C = (0, 1)$.

2. Pomocí transformace dvojného integrálu řešte:

i) $\iint_M \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 1 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$;

ii) $\iint_M x \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 4 \wedge y \geq 0\}$;

iii) $\iint_M y dx dy$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 3x \wedge y \geq 0\}$;

iv) $\iint_M \arctg \frac{y}{x} dx dy$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \wedge 0 \leq y \leq x\}$;



Obsah

79. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

$$\text{v)} \iint_M e^{x^2+y^2} dx dy, \quad \text{kde } M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \geq 0 \wedge x^2 + y^2 \leq 1\};$$

$$\text{vi)} \iint_M xy dx dy, \quad \text{kde } M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1\};$$

$$\text{vii)} \iint_M (2x + y) dx dy, \quad \text{kde } M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + 4y^2 \leq 36 \wedge x \geq 0\}.$$

Klíč k příkladům k procvičení

1.

i) $\frac{40}{3};$

ii) $\frac{64}{3};$

iii) $\frac{2}{3};$

iv) $\frac{9}{4};$

v) $-2;$

vi) $-\frac{11}{120};$

vii) $2 \ln 2 - \frac{3}{4};$

viii) $\frac{1}{2} (e^4 - e^3 - e + 1);$

ix) $\frac{33}{20};$

x) $\frac{9}{20};$

xi) $\frac{1}{2} \ln 2.$



Obsah

80. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

2.

i) $\frac{\pi}{6}$;

ii) 0;

iii) $\frac{9}{4}$;

iv) $\frac{3\pi^2}{64}$;

v) $\frac{\pi}{2} (e - 1)$;

vi) $\frac{1}{2}$;

vii) 144.



Obsah

81. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

1.6. Kontrolní testy

Test 1. Rozhodněte, zda následující tvrzení (týkající se Riemannova integrálu) jsou pravdivá.

1. Pro každou funkci $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spojitou na intervalu $(0, 1)$ existuje $\int_0^1 f(x) dx$.

ANO

NE

2. Pro každou funkci $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ rostoucí na $\mathbb{R}$ existuje $\int_0^1 f(x) dx$.

ANO

NE

3. Pro každou funkci $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ omezenou na $\mathbb{R}$ existuje $\int_0^1 f(x) dx$.

ANO

NE



Obsah

82. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

4. Pro každou funkci $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ platí:

$$\int_0^1 f(x) dx \text{ existuje} \implies \int_0^1 |f(x)| dx \text{ existuje.}$$

ANO

NE

5. Platí:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx = [\operatorname{tg} x]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1 - (-1) = 2.$$

ANO

NE

6. Platí:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} -\frac{1}{\sin^2 x} dx = [\operatorname{cotg} x]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \operatorname{cotg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{cotg} \left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1 - (-1) = 2.$$

ANO

NE



Obsah

83. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

7. Platí:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx = \left| \begin{array}{l} \text{substitute} \\ 1 + \sin x = t \\ \cos x dx = dt \\ 0 \mapsto 1, 2\pi \mapsto 1 \end{array} \right| = \int_1^1 \frac{1}{t} dt = [\ln |t|]_1^1 = \ln 1 - \ln 1 = 0.$$

ANO

NE

8. Platí:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{2 + \sin x} dx = \left| \begin{array}{l} \text{substitute} \\ 2 + \sin x = t \\ \cos x dx = dt \\ 0 \mapsto 2, 2\pi \mapsto 2 \end{array} \right| = \int_2^2 \frac{1}{t} dt = [\ln |t|]_2^2 = \ln 2 - \ln 2 = 0.$$

ANO

NE



Obsah

84. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

9. Platí:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx = [x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \frac{\pi}{2} - 1.$$

ANO

NE

10. Platí:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx = [-x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = -1.$$

ANO

NE

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:



Obsah

85. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Test 2. Rozhodněte, zda následující tvrzení jsou pravdivá.

1. Každá konečná množina $M \subseteq \mathbb{R}^2$ je Jordanovsky měřitelná a má nulovou míru.

ANO

NE

2. Každá omezená množina $M \subseteq \mathbb{R}^2$ je Jordanovsky měřitelná a má konečnou míru.

ANO

NE

3. Sjednocení libovolného počtu Jordanovsky měřitelných množin (v $\mathbb{R}^2$) je Jordanovsky měřitelná množina.

ANO

NE

4. Průnik libovolného počtu Jordanovsky měřitelných množin (v $\mathbb{R}^2$) je Jordanovsky měřitelná množina.

ANO

NE



Obsah

86. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

5. Množina $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 1 \wedge x \geq 0 \wedge y \leq x\}$ je Jordanovsky měřitelná.

ANO

NE

6. Necht $M = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$. Pak pro každou funkci f Riemannovsky integrovatelnou na

$$M \text{ platí } \left| \iint_M f(x, y) \, dx \, dy \right| = \iint_M |f(x, y)| \, dx \, dy.$$

ANO

NE

7. Každá funkce $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá na množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 < 1\}$ je na M Riemannovsky integrovatelná.

ANO

NE

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:



Obsah

87. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

**Test 3.** Sestavte pravdivý výrok.¹

1. Pro každou funkci $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ spojitou na $\mathbb{R}^2$ platí

$$\int_0^1 \left(\int_1^2 f(x, y) dy \right) dx = \int_1^2 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx.$$

$$\int_0^1 \left(\int_1^2 f(x, y) dy \right) dx = \int_1^2 \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy.$$

$$\int_0^1 \left(\int_1^2 f(x, y) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_1^2 f(x, y) dx \right) dy.$$

2. Pro každou funkci $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ spojitou na $\mathbb{R}^2$ platí

$$\int_0^1 \left(\int_0^x f(x, y) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^y f(x, y) dx \right) dy.$$

¹Kreslete si obrázky.

Obsah

88. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

$$\int_0^1 \left(\int_0^x f(x, y) \, dy \right) dx = \int_0^x \left(\int_0^1 f(x, y) \, dy \right) dx.$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^x f(x, y) \, dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_y^1 f(x, y) \, dx \right) dy.$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^x f(x, y) \, dy \right) dx = \int_1^y \left(\int_0^1 f(x, y) \, dy \right) dx.$$

3. Pro každou funkci $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ spojitou na $\mathbb{R}^2$ platí

$$\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x, y) \, dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x, y) \, dx \right) dy.$$

$$\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x, y) \, dy \right) dx = \int_{y^2}^{\sqrt{y}} \left(\int_0^1 f(x, y) \, dx \right) dy.$$

$$\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x, y) \, dy \right) dx = \int_{y^2}^{\sqrt{y}} \left(\int_0^1 f(x, y) \, dy \right) dx.$$



Obsah

89. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

$$\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x, y) dy \right) dx.$$

4. Pro každou funkci $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ spojitou na $\mathbb{R}^2$ platí

$$\int_0^1 \left(\int_{x^2}^x f(x, y) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^y f(x, y) dx \right) dy.$$

$$\int_0^1 \left(\int_{x^2}^x f(x, y) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx \right) dy.$$

$$\int_0^1 \left(\int_{x^2}^x f(x, y) dy \right) dx = \int_{y^2}^y \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx.$$

$$\int_0^1 \left(\int_{x^2}^x f(x, y) dy \right) dx = \int_{x^2}^x \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy.$$



Obsah

90. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

5. Pro každou funkci $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ spojitou na $\mathbb{R}^2$ platí

$$\int_{-1}^1 \left(\int_{|x|}^1 dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_{|y|}^1 f(x, y) dx \right) dy.$$

$$\int_{-1}^1 \left(\int_{|x|}^1 dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{|y|} f(x, y) dx \right) dy.$$

$$\int_{-1}^1 \left(\int_{|x|}^1 dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_{-|y|}^0 f(x, y) dx \right) dy.$$

$$\int_{-1}^1 \left(\int_{|x|}^1 dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_{-y}^y f(x, y) dx \right) dy.$$

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:



Obsah

91. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



Test 4. Sestavte pravdivý výrok.¹

1. Necht

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 1 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\}.$$

Pak pro každou funkci $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ spojitou na $\mathbb{R}^2$ platí

$$\iint_M f(x, y) \, dx \, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 f(r \cos t, r \sin t) \, dr \right) dt.$$

$$\iint_M f(x, y) \, dx \, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 f(r \cos t, r \sin t) r \, dr \right) dt.$$

$$\iint_M f(x, y) \, dx \, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 f(r \cos t, r \sin t) \, dt \right) dr.$$

$$\iint_M f(x, y) \, dx \, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 f(r \cos t, r \sin t) r \, dt \right) dr.$$

¹Kreslete si obrázky.

Obsah

92. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

2. Necht

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq y\}.$$

Pak pro každou funkci $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ spojitou na $\mathbb{R}^2$ platí

$$\iint_M f(x, y) \, dx \, dy = \int_0^\pi \left(\int_0^1 f(r \cos t, r \sin t) \, dr \right) dt.$$

$$\iint_M f(x, y) \, dx \, dy = \int_0^\pi \left(\int_0^1 f(r \cos t, r \sin t) r \, dr \right) dt.$$

$$\iint_M f(x, y) \, dx \, dy = \int_0^\pi \left(\int_0^{\sin t} f(r \cos t, r \sin t) \, dr \right) dt.$$

$$\iint_M f(x, y) \, dx \, dy = \int_0^\pi \left(\int_0^{\sin t} f(r \cos t, r \sin t) r \, dr \right) dt.$$

$$\iint_M f(x, y) \, dx \, dy = \int_0^\pi \left(\int_0^{\cos t} f(r \cos t, r \sin t) \, dr \right) dt.$$

$$\iint_M f(x, y) \, dx \, dy = \int_0^\pi \left(\int_0^{\cos t} f(r \cos t, r \sin t) r \, dr \right) dt.$$



Obsah

93. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

3. Pro každou funkci $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ spojitou na $\mathbb{R}^2$ platí

$$\int_0^1 \left(\int_0^x f(x, y) dy \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^1 f(r \cos t, r \sin t) r dr \right) dt.$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^x f(x, y) dy \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^1 f(r \cos t, r \sin t) dr \right) dt.$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^x f(x, y) dy \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\cos t} f(r \cos t, r \sin t) r dr \right) dt.$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^x f(x, y) dy \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\cos t} f(r \cos t, r \sin t) dr \right) dt.$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^x f(x, y) dy \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\frac{1}{\cos t}} f(r \cos t, r \sin t) r dr \right) dt.$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^x f(x, y) dy \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\frac{1}{\cos t}} f(r \cos t, r \sin t) dr \right) dt.$$



Obsah

94. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

4. Necht

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 4 \wedge |y| \leq x\}.$$

Pak pro každou funkci $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ spojitou na $\mathbb{R}^2$ platí

$$\iint_M f(x, y) \, dx \, dy = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^2 f(r \cos t, r \sin t) r \, dr \right) dt.$$

$$\iint_M f(x, y) \, dx \, dy = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^2 f(r \cos t, r \sin t) \, dr \right) dt.$$

$$\iint_M f(x, y) \, dx \, dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \left(\int_0^2 f(r \cos t, r \sin t) r \, dr \right) dt.$$

$$\iint_M f(x, y) \, dx \, dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \left(\int_0^2 f(r \cos t, r \sin t) \, dr \right) dt.$$



Obsah

95. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

5. Zobrazení $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je dáno předpisem $\Phi(u, v) = (uv^2, u + v^2)$. Pak pro Jacobián J tohoto zobrazení a každé $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ platí

$$J(u, v) = 2u(u^2 - v).$$

$$J(u, v) = 2v(v^2 - u).$$

$$J(u, v) = 2u(u^2 + v).$$

$$J(u, v) = 2v(v^2 + u).$$

6. Zobrazení $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je dáno předpisem $\Phi(r, t) = (3r \cos t, 5r \sin t)$. Pak pro Jacobián J tohoto zobrazení a každé $(r, t) \in \mathbb{R}^2$ platí

$$J(r, t) = 15r.$$

$$J(r, t) = r.$$

$$J(r, t) = 15r^2.$$

$$J(r, t) = r^2.$$

7. Zobrazení $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je dáno předpisem $\Phi(r, t) = (re^{-t}, re^t)$. Pak pro Jacobián J tohoto zobrazení a každé $(r, t) \in \mathbb{R}^2$ platí

$$J(r, t) = r.$$

$$J(r, t) = 2r.$$

$$J(r, t) = r^2.$$

$$J(r, t) = 2r^2.$$



Obsah

96. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

8. Zobrazení $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je dáno předpisem $\Phi(u, v) = \left(\frac{u}{v}, \frac{v}{u}\right)$. Pak pro Jacobián J tohoto zobrazení a každé $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, pro které je $uv \neq 0$, platí

$$J(u, v) = uv.$$

$$J(u, v) = 1.$$

$$J(u, v) = u + v.$$

$$J(u, v) = 0.$$

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:



Obsah

97. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Test 5. Doplňte správné výsledky.¹

1. Necht $M = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 1, 2 \rangle$. Pak

$$\iint_M (2xy + 3y^2) \, dx \, dy = \quad .$$

2. Necht $M = \langle 1, 2 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$. Pak

$$\iint_M (x^2 + xy + y^2) \, dx \, dy = \quad .$$

3. Necht $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x + y \leq 1\}$. Pak

$$\iint_M (x^2 + y^2 + 1) \, dx \, dy = \quad .$$

¹ Zlomek „ $\frac{a}{b}$ “ pište jako „a/b“, násobení „ ab “ jako „a*b“, mocninu „ a^b “ jako „a^b“, odmocninu „ $\sqrt{a}$ “ jako „sqrt(a)“, logaritmus „ $\ln a$ “ jako „ln(a)“, číslo „ π “ jako „pi“, apod. Např. výraz „ $\frac{\pi^2}{8} \cdot (3 \ln^3 7 - \frac{\sqrt{5}}{2})$ “ napíšeme jako „(pi)^2/8*(3*(ln(7))^3-sqrt(5)/2)“.



Obsah

98. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

4. Necht $M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq y \leq x \wedge x \leq \frac{\pi}{6} \right\}$. Pak

$$\iint_M \cos(x + 2y) \, dx \, dy = \quad .$$

5. Necht $M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2: y \leq x \wedge xy \leq 4 \wedge y \geq 1 \right\}$. Pak

$$\iint_M xy \, dx \, dy = \quad .$$

6. Necht $M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2: x + y \leq 2 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 1 \right\}$. Pak

$$\iint_M \frac{x}{y^2} \, dx \, dy = \quad .$$

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:



Obsah

99. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Test 6. Doplňte správné výsledky.¹

1. Necht $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 1 \wedge x \leq 0 \wedge y \geq 0\}$. Pak

$$\iint_M \ln(x^2 + y^2 + 1) \, dx \, dy = \quad .$$

2. Necht $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 2x \wedge y \leq x \wedge y \geq 0\}$. Pak

$$\iint_M xy \, dx \, dy = \quad .$$

3. Necht $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x^2 + y^2 \leq 1\}$. Pak

$$\iint_M (x^2 + y^2 + 1) \, dx \, dy = \quad .$$

¹ Zlomek „ $\frac{a}{b}$ “ pište jako „a/b“, násobení „ ab “ jako „a*b“, mocninu „ a^b “ jako „a^b“, odmocninu „ $\sqrt{a}$ “ jako „sqrt(a)“, logaritmus „ $\ln a$ “ jako „ln(a)“, číslo „ π “ jako „pi“, apod. Např. výraz „ $\frac{\pi^2}{8} \cdot (3 \ln^3 7 - \frac{\sqrt{5}}{2})$ “ napíšeme jako „(pi)^2/8*(3*(ln(7))^3-sqrt(5)/2)“.



Obsah

100. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

4. Necht $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 4\}$. Pak

$$\iint_M (x + y + 10) \, dx \, dy = \quad .$$

5. Necht $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 1\}$. Pak

$$\iint_M \frac{1}{1 + x^2 + y^2} \, dx \, dy = \quad .$$

6. Necht $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$. Pak

$$\iint_M \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, dx \, dy = \quad .$$

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:



Obsah

101. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno



Kapitola 2

Trojný integrál

V této kapitole budeme postupovat podobně (a proto méně podrobně) jako u dvojných integrálů.

2.1. Trojný integrál na intervalu

Uvažujme funkci $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ omezenou na trojrozměrném uzavřeném intervalu

$$J = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle \times \langle e, g \rangle.$$

Definujme pro libovolná dělení D_x, D_y, D_z intervalů $\langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle, \langle e, g \rangle$ dělení $D = (D_x, D_y, D_z)$ intervalu J jakožto systém uzavřených trojrozměrných intervalů

$$J_{klm} = \langle x_{k-1}, x_k \rangle \times \langle y_{l-1}, y_l \rangle \times \langle z_{m-1}, z_m \rangle$$

Obsah

102. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

a značme

$$\lambda(J_{klm}) = (x_k - x_{k-1}) \cdot (y_l - y_{l-1}) \cdot (z_m - z_{m-1})$$

jejich objemy. Každému takovému dělení přiřadíme součty

$$s(D) = \sum_{k,l,m} \inf_{(x,y,z) \in J_{klm}} f(x,y,z) \cdot \lambda(J_{klm}) \quad (\text{dolní součet})$$

a

$$S(D) = \sum_{k,l,m} \sup_{(x,y,z) \in J_{klm}} f(x,y,z) \cdot \lambda(J_{klm}) \quad (\text{horní součet}).$$

Pomocí těchto součtů definujeme dolní a horní trojný Riemannův integrál funkce f na intervalu J .

$$\iiint\limits_J f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz = \sup_D s(D), \quad \iiint\limits_J f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz = \inf_D S(D).$$

Řekneme, že funkce f je na J (Riemannovsky) integrovatelná, platí-li

$$\iiint\limits_J f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz = \iiint\limits_J f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz.$$

Tuto společnou hodnotu pak značíme

$$\iiint\limits_J f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz$$

a nazýváme trojným Riemannovým integrálem funkce f na intervalu J .



Obsah

103. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



Věta 2.1 (o existenci trojného integrálu). Je-li funkce $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá v uzavřeném intervalu J , pak existuje $\iiint_J f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$.

2.2. Měřitelné množiny v $\mathbb{R}^3$

Definice 2.2. Omezenou množinu $M \subseteq \mathbb{R}^3$ nazveme (Jordanovsky) měřitelnou, je-li její charakteristická funkce χ_M

$$\left(\chi_M(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{pro } (x, y, z) \in M, \\ 0 & \text{pro } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus M \end{cases} \right)$$

Riemannovsky integrovatelná na nějakém uzavřeném intervalu $J \subseteq \mathbb{R}^3$ takovém, že $M \subseteq J$. Míru množiny M pak definujeme rovností

$$\lambda(M) = \iiint_J \chi_M(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

Poznámka 2.3. Předchozí definice nezávisí na volbě uzavřeného intervalu $J \subseteq \mathbb{R}^3$ takového, že $M \subseteq J$.

Poznámka 2.4. Míru množiny $M \subseteq \mathbb{R}^3$ lze chápat jako zobecnění pojmu „objem tělesa“, který nám je intuitivně jasný pro některá tělesa (kvádr, koule, válec, apod.).

Obsah

104. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Poznámka 2.5. Pro měřitelné množiny v $\mathbb{R}^3$ platí tvrzení analogická tvrzením 1)–6) věty 1.15.

Věta 2.6. *Nechť*

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: (x, y) \in M \wedge h_1(x, y) \leq z \leq h_2(x, y)\},$$

kde $M \subseteq \mathbb{R}^2$ je uzavřená měřitelná množina v $\mathbb{R}^2$ a funkce $h_1, h_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jsou na M spojité a takové, že

$$h_1(x, y) \leq h_2(x, y) \quad \text{pro každé } (x, y) \in M.$$

Pak Ω je měřitelná množina v $\mathbb{R}^3$.

Poznámka 2.7. Větu lze přeformulovat rovněž pro případy

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: (x, z) \in M \wedge h_1(x, z) \leq y \leq h_2(x, z)\}$$

a

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: (y, z) \in M \wedge h_1(y, z) \leq x \leq h_2(y, z)\}.$$



Obsah

105. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

2.3. Trojný integrál na měřitelné množině

Definice 2.8. Buď funkce $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ omezená na neprázdné měřitelné množině $M \subseteq \mathbb{R}^3$. Řekneme, že f je na M (Riemannovsky) integrovatelná, je-li funkce $f \cdot \chi_M$ definovaná předpisem

$$(f \cdot \chi_M)(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & \text{pro } (x, y, z) \in M, \\ 0 & \text{pro } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus M \end{cases}$$

integrovatelná na nějakém uzavřeném intervalu $J \subseteq \mathbb{R}^3$ takovém, že $M \subseteq J$. Trojným (Riemannovým) integrálem funkce f na množině M pak rozumíme číslo

$$\iiint_M f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_J (f \cdot \chi_M)(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

Navíc definujeme

$$\iiint_{\emptyset} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = 0$$

pro každou funkci $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

Poznámka 2.9. Tvrzení 1)–7) věty 1.20 (str. 28) je možné přeformulovat i pro případ trojných integrálů.



Obsah

106. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

2.3.1. Fubiniova věta pro trojný integrál

Věta 2.10 (Fubiniova věta pro trojný integrál).

1) *Nechť $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ je integrovatelná na množině Ω , kde*

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: (x, y) \in M \wedge h_1(x, y) \leq z \leq h_2(x, y)\}$$

splňuje předpoklady věty 2.6. Nechť pro každé $(x, y) \in M$ existuje

$$\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x, y, z) \, dz.$$

Potom platí

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iint_M \left(\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x, y, z) \, dz \right) dx \, dy.$$



Obsah

107. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



2) Necht funkce f je integrovatelná na **měřitelné** množině

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: z \in \langle e, g \rangle \wedge (x, y) \in M_z\},$$

kde $e, g \in \mathbb{R}$ ($e < g$) a $M_z \subseteq \mathbb{R}^2$ je měřitelná množina pro každé $z \in \langle e, g \rangle$. Necht pro každé $z \in \langle e, g \rangle$ je funkce $(x, y) \mapsto f(x, y, z)$ integrovatelná na M_z . Potom platí

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_e^g \left(\iint_{M_z} f(x, y, z) \, dx \, dy \right) dz.$$

Poznámka 2.11. Analogická tvrzení lze získat záměnou „rolí“ proměnných x, y, z .

Poznámka 2.12. Podobně jako u dvojných integrálů nám Fubiniho věta umožňuje trojný integrál převést na dva do sebe vnořené integrály – jeden jednorozměrný a jeden dvojný. Takto vzniklý dvojný integrál lze opět (tentokrát pomocí „dvojrozměrné“ Fubiniho věty 1.22) „rozbit“ na dva do sebe vnořené jednorozměrné integrály. To však znamená, že každý trojný integrál lze (za vhodných předpokladů) nakonec napsat jako tzv. trojnásobný integrál (tři do sebe vnořené jednorozměrné integrály).

Pokud např.

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x \in \langle a, b \rangle \wedge g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \wedge h_1(x, y) \leq z \leq h_2(x, y)\},$$

Obsah

108. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

dostaneme (za vhodných předpokladů)

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left(\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx.$$

Příklad 2.13. Vypočtěte integrál

$$I = \iiint_{\Omega} 1 \, dx \, dy \, dz,$$

kde

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0 \wedge y \leq 1 - x^2 \wedge z \leq 1 - x\}.$$



Obsah

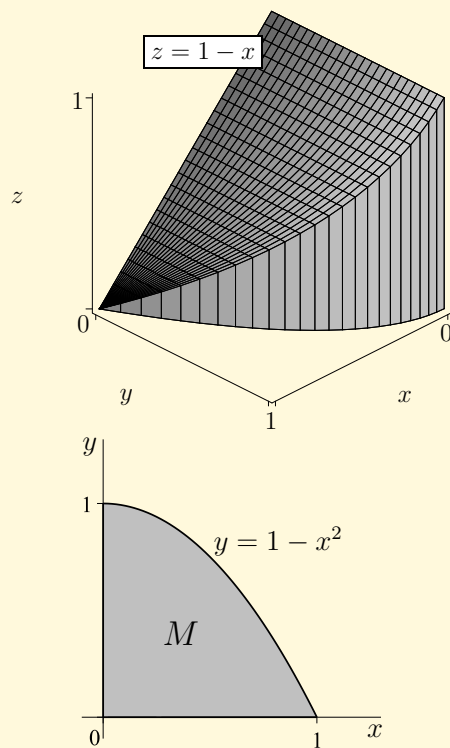
109. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Řešení. Množina Ω a její půdorys M jsou znázorněny na následujícím obrázku.



Zřejmě lze psát

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x \in \langle 0, 1 \rangle \wedge 0 \leq y \leq 1 - x^2 \wedge 0 \leq z \leq 1 - x\},$$

a proto (podle první části věty 2.10 a „dvojměrné“ Fubiniovy věty 1.22) platí

$$\begin{aligned} I &= \iiint_M \left(\int_0^{1-x} 1 \, dz \right) dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x^2} \left(\int_0^{1-x} 1 \, dz \right) dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x^2} [z]_{z=0}^{1-x} dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x^2} (1-x) dy \right) dx = \int_0^1 [y(1-x)]_{y=0}^{1-x^2} dx = \\ &= \int_0^1 (1-x^2)(1-x) dx = \int_0^1 (1-x-x^2+x^3) dx = \\ &= \left[x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

▲

Příklad 2.14. Vypočtěte integrál

$$I = \iiint_{\Omega} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} dx \, dy \, dz,$$

kde

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x \geq 1 \wedge z \geq 0 \wedge x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}.$$



Obsah

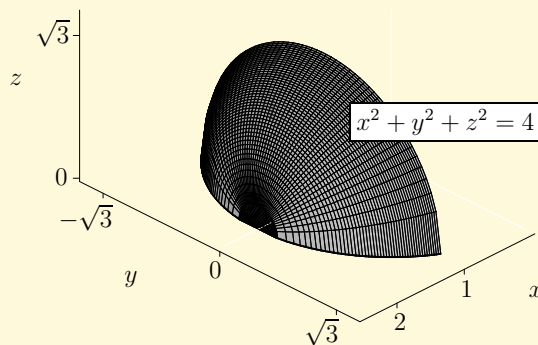
111. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Řešení. Množina Ω je polovina kulové úseče (viz obrázek).



Podle první části věty 2.10 máme

$$I = \iint_M \left(\int_0^{\sqrt{4-(x^2+y^2)}} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} dz \right) dx dy,$$

kde

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \geq 1 \wedge x^2 + y^2 \leq 4\}.$$



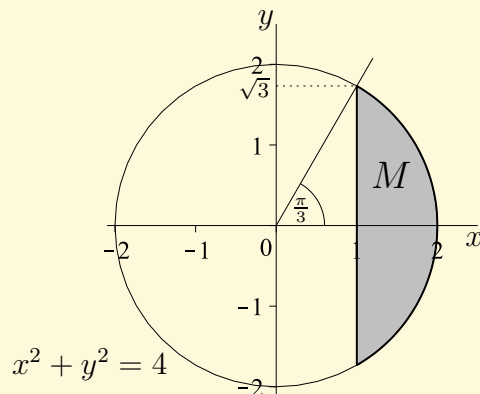
Obsah

112. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



Transformujeme-li množinu M do polárních souřadnic, dostaneme

$$M = \left\{ (r \cos t, r \sin t) \in \mathbb{R}^2: -\frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{\pi}{3} \wedge \frac{1}{\cos t} \leq r \leq 2 \right\}.$$

Odtud (vzhledem k tomu, že Jacobián transformace do polárních souřadnic je r) dostaneme

(pomocí Fubiniových vět 2.10 a 1.22)

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_{\frac{1}{\cos t}}^2 \left(r \cdot \int_0^{\sqrt{4-r^2}} \frac{z}{(r^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} dz \right) dr \right) dt = \left| \begin{array}{l} \text{substitute} \\ r^2 + z^2 = u \\ z \, dz = \frac{1}{2} du \\ 0 \mapsto r^2, \sqrt{4-r^2} \mapsto 4 \end{array} \right| = \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_{\frac{1}{\cos t}}^2 \left(\frac{r}{2} \cdot \int_{r^2}^4 \frac{1}{u^{\frac{5}{2}}} du \right) dr \right) dt = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_{\frac{1}{\cos t}}^2 -\frac{r}{3} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{u^3}} \right]_{u=r^2}^4 dr \right) dt = \\
 &= -\frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_{\frac{1}{\cos t}}^2 r \underbrace{\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{r^3} \right)}_{\left(\frac{r}{8} - \frac{1}{r^2} \right)} dr \right) dt = -\frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left[\frac{r^2}{16} + \frac{1}{r} \right]_{r=\frac{1}{\cos t}}^2 dt = \\
 &= -\frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{16 \cos^2 t} - \cos t \right)}_{\text{sudá funkce}} dt = -\frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{16 \cos^2 t} - \cos t \right) dt = \\
 &= -\frac{2}{3} \left[\frac{3}{4} t - \frac{1}{16} \operatorname{tg} t - \sin t \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{3}}{16} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{\pi}{6} + \frac{3}{8} \sqrt{3}.
 \end{aligned}$$



Obsah

114. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

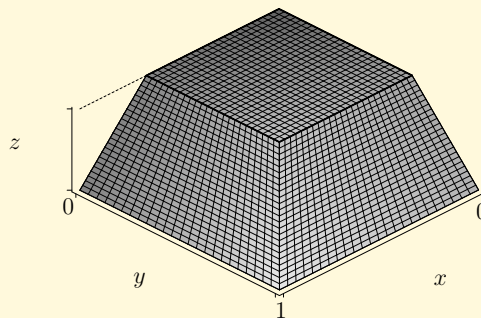
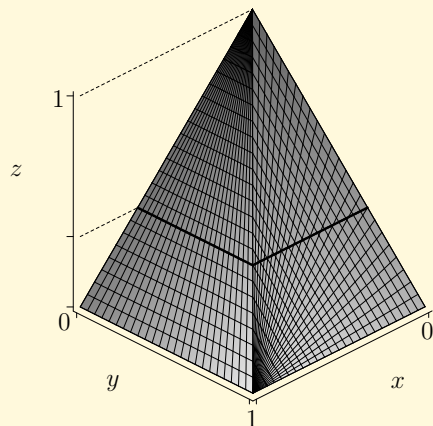
Příklad 2.15. Vypočtete integrál

$$I = \iiint_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz,$$

kde Ω je čtyřboký jehlan s vrcholy $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 0)$ a $(0, 0, 1)$.

Řešení.

Na obrázku vidíme zadaný jehlan a jeho řez rovinou rovnoběžnou s rovinou $z = 0$.

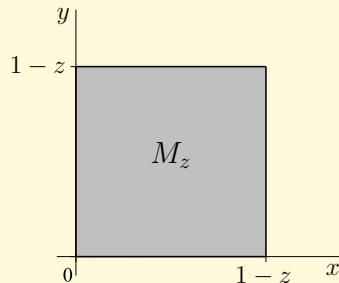


Není těžké si rozmyslet, že tímto řezem bude vždy čtverec. K řešení využijeme druhou část věty 2.10, odkud dostaneme

$$I = \int_0^1 \left(\iint_{M_z} z \, dx \, dy \right) dz,$$

kde

$$M_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq 1 - z \wedge 0 \leq y \leq 1 - z\}.$$



Proto platí

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-z} \left(\int_0^{1-z} z \, dy \right) dx \right) dz = \int_0^1 \left(\int_0^{1-z} [zy]_{y=0}^{1-z} dx \right) dz = \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-z} (z - z^2) dx \right) dz = \int_0^1 [(z - z^2)x]_{x=0}^{1-z} dz = \int_0^1 (z - z^2)(1 - z) dz = \\ &= \int_0^1 (z - 2z^2 + z^3) dz = \left[\frac{z^2}{2} - \frac{2z^3}{3} + \frac{z^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$



Obsah

116. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

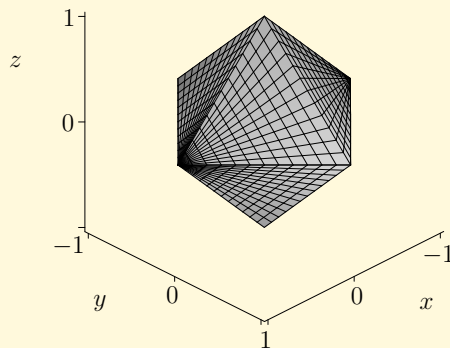
Příklad 2.16. Vypočtěte integrál

$$I = \iiint_{\Omega} x^2 \, dx \, dy \, dz,$$

kde

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: |x| + |y| + |z| \leq 1\}.$$

Řešení. Množina Ω je pravidelný osmistěn (rozmyslete si).

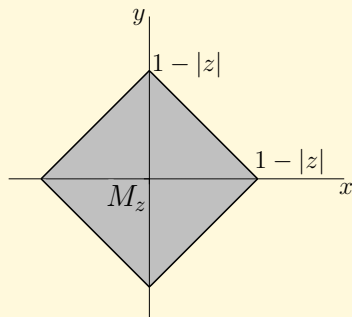


Podle druhé části věty 2.10 máme

$$I = \int_{-1}^1 \left(\iint_{M_z} x^2 \, dx \, dy \right) dz,$$

kde

$$M_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: |x| + |y| \leq 1 - |z|\} \quad (z \in \langle -1, 1 \rangle).$$



Není obtížné si uvědomit, že

$$M_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: -(1 - |z|) \leq x \leq 1 - |z| \wedge \\ \wedge -(1 - |z| - |x|) \leq y \leq 1 - |z| - |x|\},$$

odkud obdržíme

$$I = \int_{-1}^1 \left(\int_{-(1-|z|)}^{1-|z|} \left(\int_{-(1-|z|-|x|)}^{1-|z|-|x|} x^2 dy \right) dx \right) dz = \\ = \int_{-1}^1 \left(\int_{-(1-|z|)}^{1-|z|} 2x^2(1 - |z| - |x|) dx \right) dz =$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_{-1}^1 \left(\int_0^{1-|z|} 2x^2(1-|z|-|x|) dx \right) dz = \\
&= 2 \cdot 2 \int_0^1 \left(\int_0^{1-|z|} 2x^2(1-|z|-|x|) dx \right) dz = 8 \int_0^1 \left(\int_0^{1-z} x^2(1-z-x) dx \right) dz = \\
&= 8 \int_0^1 \left(\int_0^{1-z} (x^2(1-z) - x^3) dx \right) dz = 8 \int_0^1 \left[\frac{1}{3}x^3(1-z) - \frac{1}{4}x^4 \right]_{x=0}^{1-z} dz = \\
&= \frac{2}{3} \int_0^1 (1-z)^4 dz = \left| \begin{array}{l} \text{substitute} \\ 1-z = u \\ -dz = du \\ 0 \mapsto 1, 1 \mapsto 0 \end{array} \right| = -\frac{2}{3} \int_1^0 u^4 du = \frac{2}{3} \int_0^1 u^4 du = \\
&= \frac{2}{3} \left[\frac{u^5}{5} \right]_0^1 = \frac{2}{15}.
\end{aligned}$$



Poznámka 2.17. Při řešení předchozího příkladu jsme opět využívali faktu, že pro sudou funkci f integrovatelnou na $\langle 0, a \rangle$ platí

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$



Obsah

119. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

2.3.2. Substituční metoda pro trojný integrál

Věta 2.18 (o substituci v trojném integrálu).

1) *Nechť zobrazení $\Phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dané rovnicemi*

$$x = g_1(u, v, w),$$

$$y = g_2(u, v, w),$$

$$z = g_3(u, v, w)$$

je prosté na otevřené množině $\Omega_{uvw} \subseteq \mathbb{R}^3$, nechť funkce g_1, g_2, g_3 jsou třídy C^1 na Ω_{uvw} a nechť Jacobián

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u}(u, v, w) & \frac{\partial g_1}{\partial v}(u, v, w) & \frac{\partial g_1}{\partial w}(u, v, w) \\ \frac{\partial g_2}{\partial u}(u, v, w) & \frac{\partial g_2}{\partial v}(u, v, w) & \frac{\partial g_2}{\partial w}(u, v, w) \\ \frac{\partial g_3}{\partial u}(u, v, w) & \frac{\partial g_3}{\partial v}(u, v, w) & \frac{\partial g_3}{\partial w}(u, v, w) \end{vmatrix} \neq 0$$

pro každé $(u, v, w) \in \Omega_{uvw}$.

2) *Nechť $M_{uvw} \subseteq \Omega_{uvw}$ a nechť M_{uvw} a $M_{xyz} = \Phi(M_{uvw})$ jsou uzavřené měřitelné množiny.*

3) *Nechť funkce f je spojitá na M_{xyz} .*



Obsah

120. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Potom

$$\begin{aligned} \iiint_{M_{xyz}} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz &= \\ &= \iiint_{M_{uvw}} f(g_1(u, v, w), g_2(u, v, w), g_3(u, v, w)) \cdot |J(u, v, w)| \, du \, dv \, dw. \end{aligned}$$

Poznámka 2.19. Podobně jako u dvojných integrálů neuděláme v „rozumných“ případech chybu, užijeme-li tvrzení věty i v situaci, kdy její předpoklady (nenulovost Jacobiánu, prostota Φ , ...) nebudou splněny na jisté množině míry (v $\mathbb{R}^3$) nula.

2.3.3. Substitute do cylindrických (válcových) souřadnic

Jedná se o substituci

$$\begin{aligned} x &= r \cos t, \\ y &= r \sin t, \\ z &= z^*(= z), \end{aligned}$$

kde

$$r \geq 0, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle \quad (\text{popř. } t \in \langle -\pi, \pi \rangle \text{ nebo } t \in \langle \alpha, \alpha + 2\pi \rangle \text{ pro } \alpha \in \mathbb{R})$$

$$\text{a } z^* \in \mathbb{R}.$$



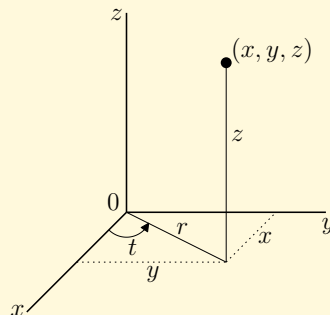
Obsah

121. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



Jacobián tohoto zobrazení je

$$J(r, t, z^*) = \begin{vmatrix} \cos t & -r \sin t & 0 \\ \sin t & r \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r (\cos^2 t + \sin^2 t) = r.$$

Poznámka 2.20. Substituci do cylindrických souřadnic zpravidla používáme, pokud hranice půdorysu tělesa Ω , přes které integrujeme, obsahuje části kružnic. Samozřejmě, že vhodnost či nevhodnost substituce ovlivňuje také samotná integrovaná funkce.

Příklad 2.21. Vypočtěte integrál $I = \iiint_{\Omega} (x^4 + y^4) z \, dx \, dy \, dz$, kde

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 \leq 1 \wedge z \geq 0 \wedge x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}.$$



Obsah

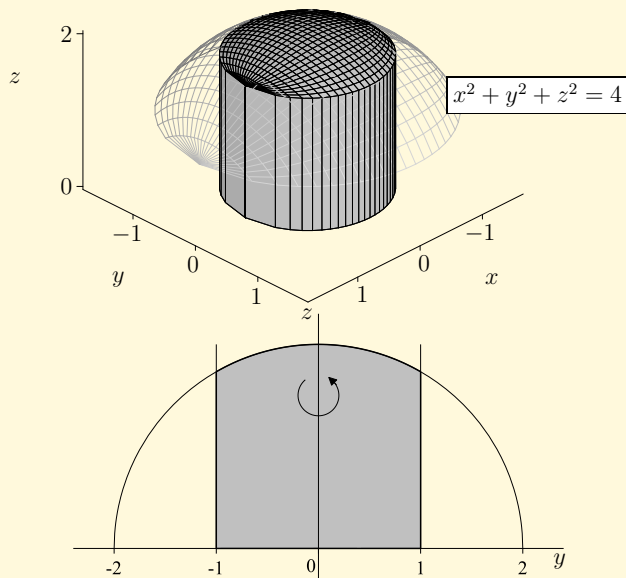
122. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Řešení. Množina Ω je válec „seříznutý“ shora kulovou plochou.



Zavedeme-li válcové souřadnice

$$x = r \cos t,$$

$$y = r \sin t,$$

$$z = z,$$

obdržíme omezení

$$0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq \sqrt{4 - r^2}.$$

Podle věty 2.18 tedy platí

$$I = \iiint_{M_{rtz}} (r^4 \cos^4 t + r^4 \sin^4 t) z \cdot r \, dr \, dt \, dz,$$

kde

$$M_{rtz} = \left\{ (r, t, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq r \leq 1 \wedge 0 \leq t \leq 2\pi \wedge 0 \leq z \leq \sqrt{4 - r^2} \right\}.$$

Užijeme-li nyní Fubiniovy věty (2.10 a 1.22), dostaneme



Obsah

124. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno



$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{4-r^2}} (r^4 \cos^4 t + r^4 \sin^4 t) z \cdot r \, dz \right) dt \right) dr = \\
 &= \int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \sin^4 t) \, dt \cdot \int_0^1 \left(r^5 \left(\int_0^{\sqrt{4-r^2}} z \, dz \right) \right) dr = \int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \sin^4 t) \, dt \cdot \\
 &\cdot \int_0^1 \left(r^5 \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=\sqrt{4-r^2}} \right) dr = \int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \sin^4 t) \, dt \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 (4r^5 - r^7) \, dr = \\
 &= \int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \sin^4 t) \, dt \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{2r^6}{3} - \frac{r^8}{8} \right]_0^1 = \int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \sin^4 t) \, dt \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{24} = \\
 &= \frac{13}{48} \int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \sin^4 t) \, dt = \frac{13}{48} \int_0^{2\pi} ((\cos^2 t + \sin^2 t)^2 - 2 \sin^2 t \cos^2 t) \, dt = \\
 &= \frac{13}{48} \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2t \right) dt = \frac{13}{48} \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{1 - \cos 4t}{4} \right) dt = \\
 &= \frac{13}{48} \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{4} + \frac{\cos 4t}{4} \right) dt = \frac{13}{48} \left[\frac{3}{4} t + \frac{\sin 4t}{16} \right]_0^{2\pi} = \frac{13}{48} \cdot \frac{3}{4} \cdot 2\pi = \frac{13}{32} \pi.
 \end{aligned}$$



Obsah

125. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Poznámka 2.22. Rozmyslete si, že substitucí do cylindrických souřadnic a Fubiniovou větou dostaneme totéž, jako užitím Fubiniovy věty a následné substituce do polárních souřadnic v příslušném dvojném integrálu.

2.3.4. Substituce do sférických souřadnic

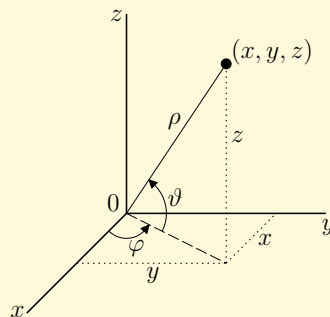
Uvažujme zobrazení

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \varphi \cos \vartheta, \\y &= \rho \sin \varphi \cos \vartheta, \\z &= \rho \sin \vartheta,\end{aligned}$$

kde

$$\rho \geq 0, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle \quad (\text{popř. } \varphi \in \langle -\pi, \pi \rangle \text{ nebo } \varphi \in \langle \alpha, \alpha + 2\pi \rangle \text{ pro } \alpha \in \mathbb{R}),$$

$$\vartheta \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle.$$



Obsah

126. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Nyní přímým výpočtem (rozvojem podle posledního řádku) určíme Jacobián tohoto zobrazení. Platí

$$J(\rho, \varphi, \vartheta) = \begin{vmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta & -\rho \sin \varphi \cos \vartheta & -\rho \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \cos \vartheta & \rho \cos \varphi \cos \vartheta & -\rho \sin \varphi \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & 0 & \rho \cos \vartheta \end{vmatrix} =$$

$$= \sin \vartheta (\rho^2 \sin \vartheta \cos \vartheta) + \rho \cos \vartheta (\rho \cos^2 \vartheta) = \rho^2 \cos \vartheta (\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta) = \rho^2 \cos \vartheta.$$

Poznámka 2.23. Pro substituci do sférických souřadnic se zpravidla rozhodneme, pokud hranice tělesa Ω , přes které integrujeme, obsahuje části kulových ploch.

Příklad 2.24. Pro $a > 0$ vypočtěte integrál $I_a = \iiint_{\Omega_a} (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz$, kde

$$\Omega_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az \wedge x^2 + y^2 \leq 3z^2\}.$$

Řešení. Podmínku $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az$ lze upravit do tvaru $x^2 + y^2 + (z - a)^2 \leq a^2$. Množina Ω_a je tedy průnikem koule (se středem v bodě $(0, 0, a)$ a poloměrem a) a rotačního kužele (viz obrázek).



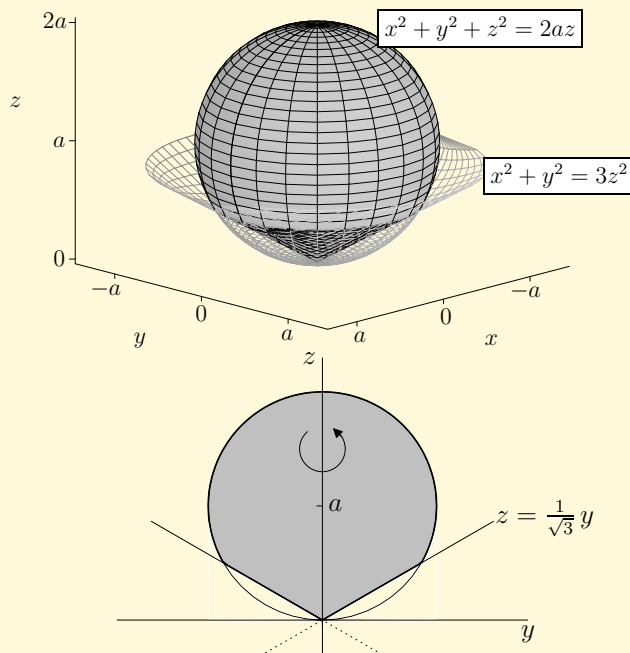
Obsah

127. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno



Zavedme sférické souřadnice

$$x = \rho \cos \varphi \cos \vartheta,$$

$$y = \rho \sin \varphi \cos \vartheta,$$

$$z = \rho \sin \vartheta.$$



Obsah

128. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Uvědomme si ještě jednou, že

$$\rho \geq 0, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle \quad \text{a} \quad \vartheta \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle.$$

Dosazením transformačních vztahů do podmínek

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az \quad \text{a} \quad x^2 + y^2 \leq 3z^2$$

obdržíme

$$\rho^2 \leq 2a\rho \sin \vartheta \quad \wedge \quad \rho^2 \cos^2 \vartheta \leq 3\rho^2 \sin^2 \vartheta,$$

odkud dostaneme ($\rho \geq 0$)

$$\rho \leq 2a \sin \vartheta \quad \wedge \quad \cos^2 \vartheta \leq 3 \sin^2 \vartheta.$$

Z první nerovnosti obdržíme $\vartheta \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ a z druhé následně $\cos \vartheta \leq \sqrt{3} \sin \vartheta$. Celkem tedy máme

$$\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle, \quad \vartheta \in \langle \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \rangle, \quad \rho \in \langle 0, 2a \sin \vartheta \rangle.$$



Obsah

129. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Z vět 2.18, 2.10 a 1.22 pak plyne

$$\begin{aligned}
 I_a &= \int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2a \sin \vartheta} \rho^2 \cdot \rho^2 \cos \vartheta \, d\rho \right) d\vartheta \right) d\varphi = 2\pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \vartheta \left[\frac{\rho^5}{5} \right]_{\rho=0}^{2a \sin \vartheta} d\vartheta = \\
 &= \frac{2\pi}{5} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \vartheta \cdot 2^5 \cdot a^5 \cdot \sin^5 \vartheta \, d\vartheta = \left| \begin{array}{l} \text{substitute} \\ \sin \vartheta = u \\ \cos \vartheta \, d\vartheta = du \\ \frac{\pi}{6} \mapsto \frac{1}{2}, \frac{\pi}{2} \mapsto 1 \end{array} \right| = \frac{2\pi}{5} \cdot 32a^5 \int_{\frac{1}{2}}^1 u^5 \, du = \\
 &= \frac{64}{5} \pi a^5 \left[\frac{u^6}{6} \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{64}{5} \pi a^5 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{64} \right) = \frac{21}{10} \pi a^5.
 \end{aligned}$$



2.3.5. Substituce do zobecněných sférických souřadnic

Nechť $a, b, c > 0$ jsou daná čísla. Uvažujme zobrazení

$$x = a \cdot \rho \cos \varphi \cos \vartheta,$$

$$y = b \cdot \rho \sin \varphi \cos \vartheta,$$

$$z = c \cdot \rho \sin \vartheta,$$



Obsah

130. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

kde

$$\rho \geq 0, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle \quad (\text{popř. } \varphi \in \langle -\pi, \pi \rangle \text{ nebo } \varphi \in \langle \alpha, \alpha + 2\pi \rangle \text{ pro } \alpha \in \mathbb{R}),$$

$$\vartheta \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle.$$

Podobně jako u klasických sférických souřadnic můžeme i zde vypočítat Jacobián zobrazení

$$J(\rho, \varphi, \vartheta) = abc \cdot \rho^2 \cos \vartheta.$$

Poznámka 2.25. Substitute do zobecněných sférických souřadnic se používá, pokud těleso Ω , přes které integrujeme, má tvar elipsoidu.

Příklad 2.26. Vypočtěte integrál $I = \iiint_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz$, kde

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leq 2z \right\}.$$

Řešení. Podmínku $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leq 2z$ lze ekvivalentně upravit do tvaru $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + (z-1)^2 \leq 1$. Odtud je vidět, že Ω je elipsoid se středem v bodě $(0, 0, 1)$ a poloosami 2, 3 a 1.



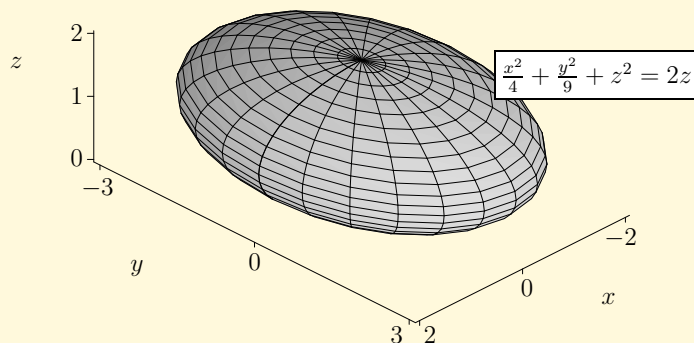
Obsah

131. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



Použijeme zobecněné sférické souřadnice

$$\begin{aligned}x &= 2\rho \cos \varphi \cos \vartheta, \\y &= 3\rho \sin \varphi \cos \vartheta, \\z &= \rho \sin \vartheta.\end{aligned}$$

Jacobián tohoto zobrazení je zřejmě $J = 6\rho^2 \cos \vartheta$. Dosazením transformačních vztahů do podmínky $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leq 2z$ dostaneme $\rho^2 \leq 2\rho \sin \vartheta$. Není těžké si uvědomit, že elipsoid Ω je pak určen omezeními

$$\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle, \quad \vartheta \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle, \quad \rho \in \langle 0, 2 \sin \vartheta \rangle.$$

To tedy znamená, že

$$I = \iiint_M \rho \sin \vartheta \cdot |J| \, d\rho \, d\varphi \, d\vartheta = \iiint_M 6\rho^3 \sin \vartheta \cos \vartheta \, d\rho \, d\varphi \, d\vartheta,$$



Obsah

132. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

kde

$$M = \left\{ (\rho, \varphi, \vartheta) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \varphi \leq 2\pi \wedge 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \wedge 0 \leq \rho \leq 2 \sin \vartheta \right\}.$$

Odtud podle vět 2.10 a 1.22 máme

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2 \sin \vartheta} 6\rho^3 \sin \vartheta \cos \vartheta \, d\rho \right) d\vartheta \right) d\varphi = \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \vartheta \cos \vartheta \left[\frac{6\rho^4}{4} \right]_{\rho=0}^{2 \sin \vartheta} d\vartheta = 3\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} 16 \sin^5 \vartheta \cos \vartheta \, d\vartheta = \left. \begin{array}{l} \text{substitute} \\ \sin \vartheta = u \\ \cos \vartheta \, d\vartheta = du \\ 0 \mapsto 0, \frac{\pi}{2} \mapsto 1 \end{array} \right| = \\ &= 48\pi \int_0^1 u^5 \, du = 48\pi \left[\frac{u^6}{6} \right]_0^1 = 48\pi \cdot \frac{1}{6} = 8\pi. \end{aligned}$$

Jiná možnost, jak integrál spočítat, je použít „posunuté“ zobecněné sférické souřadnice

$$\begin{aligned} x &= 2\rho \cos \varphi \cos \vartheta, \\ y &= 3\rho \sin \varphi \cos \vartheta, \\ z &= 1 + \rho \sin \vartheta. \end{aligned}$$

Jacobián tohoto zobrazení je opět $J = 6\rho^2 \cos \vartheta$ a dosazením transformačních vztahů do podmínky $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leq 2z$, která je ekvivalentní s nerovností $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + (z-1)^2 \leq 1$, obdržíme



Obsah

133. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

$\rho^2 \leq 1$, tj. $0 \leq \rho \leq 1$. Odtud (podobně jako u prvního způsobu výpočtu) dostaneme, že

$$I = \iiint_N (1 + \rho \sin \vartheta) \cdot |J| \, d\rho \, d\varphi \, d\vartheta = \iiint_N (1 + \rho \sin \vartheta) \cdot 6\rho^2 \cos \vartheta \, d\rho \, d\varphi \, d\vartheta,$$

kde

$$N = \left\{ (\rho, \varphi, \vartheta) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \varphi \leq 2\pi \wedge -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \wedge 0 \leq \rho \leq 1 \right\}.$$

Podle vět 2.10 a 1.22 pak pro integrál I platí

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \rho \sin \vartheta) \cdot 6\rho^2 \cos \vartheta \, d\vartheta \right) d\varphi \right) d\rho = \\ &= 2\pi \int_0^1 \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (6\rho^2 \cos \vartheta + 6\rho^3 \sin \vartheta \cos \vartheta) \, d\vartheta \right) d\rho = \\ &= 2\pi \int_0^1 \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (6\rho^2 \cos \vartheta + 3\rho^3 \sin 2\vartheta) \, d\vartheta \right) d\rho = \\ &= 2\pi \int_0^1 \left[6\rho^2 \sin \vartheta - \frac{3}{2}\rho^3 \cos 2\vartheta \right]_{\vartheta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\rho = 2\pi \int_0^1 12\rho^2 \, d\rho = 24\pi \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^1 = \\ &= 24\pi \cdot \frac{1}{3} = 8\pi. \end{aligned}$$



Obsah

134. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



2.4. Některé aplikace trojného integrálu

2.4.1. Objem tělesa

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^3$ je měřitelná množina. Pak objem tělesa M definujeme pomocí vztahu

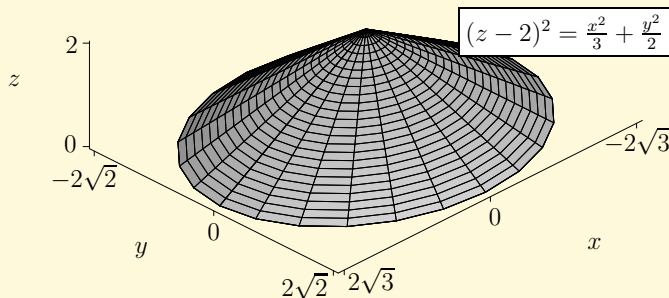
$$\lambda(M) = \iiint_M 1 \, dx \, dy \, dz.$$

Poznámka 2.27. Uvažujme množinu T stejnou jako v kapitole 1.5.2. Pak zřejmě platí $V(T) = \lambda(T)$.

Příklad 2.28. Vypočtěte objem tělesa $M \subseteq \mathbb{R}^3$ ohraničeného plochami

$$(z - 2)^2 = \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2}, \quad z = 0.$$

Řešení. Naše těleso M je částí eliptického kužele.



Obsah

135. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Jeho průnikem s rovinou $z = z_0$, kde $0 \leq z_0 \leq 2$, je množina

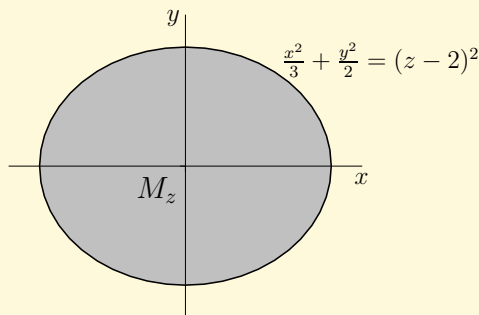
$$\left\{ (x, y, z_0) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} \leq (z_0 - 2)^2 \right\} \quad (\text{tj. elipsa}).$$

Není obtížné si uvědomit, že pro objem tělesa M platí (viz věta 2.10)

$$\lambda(M) = \iiint_M 1 \, dx \, dy \, dz = \int_0^2 \left(\iint_{M_z} 1 \, dx \, dy \right) dz,$$

kde

$$M_z = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} \leq (z - 2)^2 \right\}.$$



Pro výpočet vnitřního integrálu $\iint_{M_z} 1 \, dx \, dy$ použijeme transformaci do zobecněných polár-

ních souřadnic

$$x = \sqrt{3} \cdot r \cos t,$$

$$y = \sqrt{2} \cdot r \sin t.$$

Jacobián tohoto zobrazení je zřejmě $J = \sqrt{6} \cdot r$. Přitom množinu M_z (pro $z \in \langle 0, 2 \rangle$) lze v těchto zobecněných polárních souřadnicích popsat nerovnostmi

$$0 \leq t \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 2 - z.$$

Odtud a z vět 1.30 a 1.22 plyne, že

$$\begin{aligned} \lambda(M) &= \iiint_M 1 \, dx \, dy \, dz = \int_0^2 \left(\iint_{M_z} 1 \, dx \, dy \right) dz = \\ &= \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2-z} \sqrt{6} \cdot r \, dr \right) dt \right) dz = 2\pi \int_0^2 \left[\sqrt{6} \cdot \frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{2-z} dz = \\ &= 2\pi \int_0^2 \sqrt{6} \cdot \frac{(2-z)^2}{2} dz = \pi \sqrt{6} \cdot \left[-\frac{(2-z)^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8\pi\sqrt{6}}{3}. \end{aligned}$$



Obsah

137. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Poznámka 2.29. V předchozím příkladu bychom také mohli postupovat tak, že bychom (pro vhodná a, b) zavedli tzv. zobecněné cylindrické souřadnice, tj.

$$x = a \cdot r \cos t,$$

$$y = b \cdot r \sin t,$$

$$z = z^* (= z),$$

kde

$$r \geq 0, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle \quad (\text{popř. } t \in \langle -\pi, \pi \rangle \text{ nebo } t \in \langle \alpha, \alpha + 2\pi \rangle \text{ pro } \alpha \in \mathbb{R})$$

$$\text{a } z^* \in \mathbb{R}.$$

Jacobián tohoto zobrazení je

$$J(r, t, z^*) = \begin{vmatrix} a \cos t & -ar \sin t & 0 \\ b \sin t & br \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = ab \cdot r (\cos^2 t + \sin^2 t) = ab \cdot r.$$

Domácí cvičení 2.30. Pokuste se vyřešit příklad 2.28 pomocí zobecněných cylindrických souřadnic (viz poznámka 2.29).

Příklad 2.31. Vypočtěte objem tělesa M ohraničeného plochou (anuloidem)

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - a\right)^2 + z^2 = b^2 \quad (0 < b < a).$$



Obsah

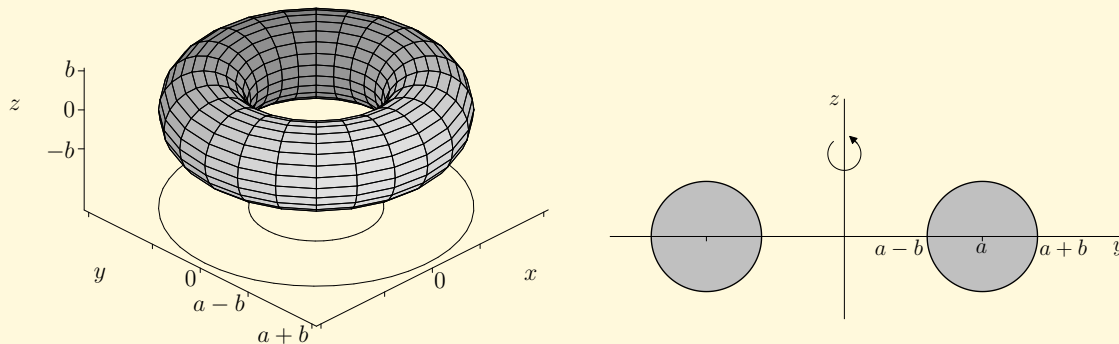
138. strana ze 167



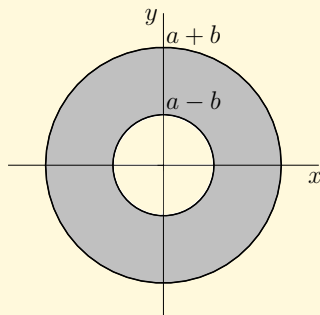
Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Řešení.



Víme, že pro objem tělesa M platí $\lambda(M) = \iiint_M 1 \, dx \, dy \, dz$. Řezem tělesa M rovinou $z = 0$ je mezikruží znázorněné na obrázku níže.



Pro výpočet $\lambda(M)$ bude tedy vhodné použít v příslušném integrálu transformaci do cylindrických souřadnic

$$x = r \cos t,$$

$$y = r \sin t,$$

$$z = z.$$

Jacobián tohoto zobrazení je $J = r$. Těleso M v těchto nových (cylindrických) souřadnicích popíšeme podmínkami (promyslete to!)

$$t \in \langle 0, 2\pi \rangle, \quad r \in \langle a - b, a + b \rangle, \quad z \in \left\langle -\sqrt{b^2 - (r - a)^2}, \sqrt{b^2 - (r - a)^2} \right\rangle.$$

[Obsah](#)[140. strana ze 167](#)[Zavřít dokument](#)[Celá obrazovka/Okno](#)

Proto (vzhledem ke větám 1.22, 2.10 a 2.18) pro objem tělesa M platí

$$\begin{aligned}
 \lambda(M) &= \iiint_M 1 \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} \left(\int_{a-b}^{a+b} \left(\int_{-\sqrt{b^2-(r-a)^2}}^{\sqrt{b^2-(r-a)^2}} r \, dz \right) dr \right) dt = \\
 &= 2\pi \cdot 2 \cdot \int_{a-b}^{a+b} r \sqrt{b^2 - (r-a)^2} \, dr = \left| \begin{array}{l} \text{substitute} \\ r-a = u \\ dr = du \\ a-b \mapsto -b \\ a+b \mapsto b \end{array} \right| = 4\pi \int_{-b}^b (u+a) \sqrt{b^2 - u^2} \, du = \\
 &= 4\pi \int_{-b}^b \underbrace{u \sqrt{b^2 - u^2}}_{\text{lichá v } u} \, du + 4\pi a \int_{-b}^b \underbrace{\sqrt{b^2 - u^2}}_{\text{sudá v } u} \, du = 8\pi a \int_0^b \sqrt{b^2 - u^2} \, du = \\
 &= \left| \begin{array}{l} \text{substitute} \\ u = b \sin s \\ du = b \cos s \, ds \\ 0 \mapsto 0, b \mapsto \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = 8\pi a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{b^2 - b^2 \sin^2 s} \cdot b \cos s \, ds = 8\pi ab^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 s \, ds = \\
 &= 8\pi ab^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2s}{2} \, ds = 8\pi ab^2 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \underbrace{\left[\frac{\sin 2s}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} \right) = 2\pi^2 ab^2.
 \end{aligned}$$



Obsah

141. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Jinou možnost, jak spočítat objem našeho tělesa M , dává tzv. Guldinovo pravidlo (viz [7]):

„Daný profil o obsahu P se pohybuje tak, že jeho rovina zůstává kolmá k prostorové křivce, kterou opisuje jeho těžiště. Pak objem tělesa je $P \cdot D$, kde D je délka dráhy opsaná těžištěm profilu.“

Podle Guldinova pravidla pak platí

$$\lambda(M) = P \cdot D = (\pi b^2) \cdot (2\pi a) = 2\pi^2 ab^2.$$



2.4.2. Některé aplikace trojného integrálu v mechanice

Nechť těleso M je uzavřená měřitelná množina v $\mathbb{R}^3$ a nechť jeho objemová hustota je popsána spojitou a nezápornou funkcí h

$$\left(h(x, y, z) = \lim_{\delta \rightarrow 0+} \frac{m(U((x, y, z), \delta) \cap M)}{\lambda(U((x, y, z), \delta) \cap M)} \right).$$

Pak platí následující vzorce:

- Pro hmotnost tělesa M :

$$m(M) = \iiint_M h(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$



Obsah

142. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

- Pro statické momenty tělesa M vzhledem k souřadnicovým rovinám xy, yz, xz :

$$S_{xy}(M) = \iiint_M z \cdot h(x, y, z) \, dx \, dy \, dz, \quad S_{yz}(M) = \iiint_M x \cdot h(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

$$S_{xz}(M) = \iiint_M y \cdot h(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

- Pro souřadnice těžiště T tělesa M :

$$T(M) = \left(\frac{S_{yz}(M)}{m(M)}, \frac{S_{xz}(M)}{m(M)}, \frac{S_{xy}(M)}{m(M)} \right).$$

- Pro momenty setrvačnosti tělesa M vzhledem k osám x, y, z :

$$I_x(M) = \iiint_M (y^2 + z^2) \cdot h(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

$$I_y(M) = \iiint_M (x^2 + z^2) \cdot h(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

$$I_z(M) = \iiint_M (x^2 + y^2) \cdot h(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

Poznámka 2.32. Řekneme, že těleso M je homogenní, je-li jeho objemová hustota h funkce konstantní na M .



Obsah

143. strana ze 167



Zavřít dokument

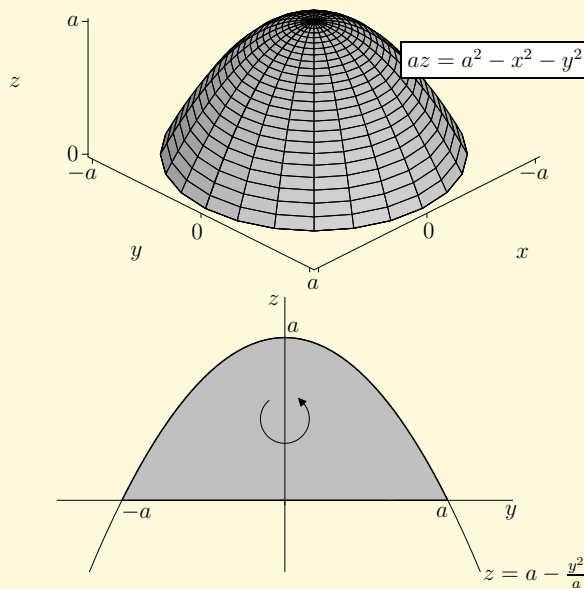
Celá obrazovka / Okno

Příklad 2.33. Vypočtete hmotnost tělesa M_a , kde $a > 0$, ohraničeného plochami

$$z = 0, \quad az = a^2 - x^2 - y^2,$$

je-li jeho objemová hustota h definována rovností $h(x, y, z) = z^3$.

Řešení. Těleso M_a je ohraničené rovinou $z = 0$ a rotačním paraboloidem $az = a^2 - x^2 - y^2$.



Pro hmotnost tělesa M_a platí

$$m(M_a) = \iiint_{M_a} z^3 \, dx \, dy \, dz.$$

Poslední integrál lze přitom spočítat např. transformací do cylindrických souřadnic

$$x = r \cos t,$$

$$y = r \sin t,$$

$$z = z.$$

Jacobián tohoto zobrazení je $J = r$. Těleso M_a v těchto nových souřadnicích můžeme přitom popsat podmínkami

$$t \in \langle 0, 2\pi \rangle, \quad r \in \langle 0, a \rangle, \quad z \in \left\langle 0, a - \frac{r^2}{a} \right\rangle.$$



Obsah

145. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Proto platí

$$\begin{aligned}
 m(M_a) &= \iiint_{M_a} z^3 \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^a \left(\int_0^{a-\frac{r^2}{a}} z^3 \cdot r \, dz \right) dr \right) dt = \\
 &= 2\pi \int_0^a \frac{1}{4} r \left(a - \frac{r^2}{a} \right)^4 dr = \left| \begin{array}{l} \text{substitute} \\ a - \frac{r^2}{a} = u \\ -\frac{2r}{a} dr = du \\ r dr = -\frac{a}{2} du \\ 0 \mapsto a, a \mapsto 0 \end{array} \right| = \frac{\pi}{2} \cdot \left(-\frac{a}{2} \right) \cdot \int_a^0 u^4 du = \\
 &= \frac{\pi a}{4} \left[\frac{u^5}{5} \right]_0^a = \frac{\pi a^6}{20}.
 \end{aligned}$$



Příklad 2.34. Pro $R > 0$ vypočítejte souřadnice těžiště T_R homogenní polokoule

$$\Omega_R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \wedge z \geq 0\}.$$



Obsah

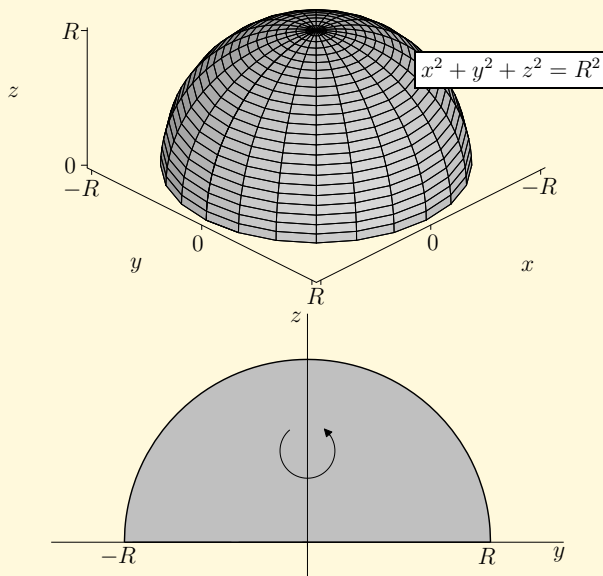
146. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Řešení.



Zřejmě

$$T_R = \left(0, 0, \frac{S_{xy}(\Omega_R)}{m(\Omega_R)} \right),$$

kde (při objemové hustotě $k > 0$)

$$S_{xy}(\Omega_R) = \iiint_{\Omega_R} z \cdot k \, dx \, dy \, dz, \quad m(\Omega_R) = \iiint_{\Omega_R} k \, dx \, dy \, dz.$$

Pro snadnější výpočet těchto dvou integrálů použijeme transformaci do sférických souřadnic

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \cos \vartheta, \\ y &= \rho \sin \varphi \cos \vartheta, \\ z &= \rho \sin \vartheta. \end{aligned}$$

Jacobián tohoto zobrazení je $J = \rho^2 \cos \vartheta$. Ve sférických souřadnicích polokouli Ω_R popíšeme totiž velmi snadno:

$$\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle, \quad \vartheta \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle, \quad \rho \in \langle 0, R \rangle.$$

Proto platí

$$\begin{aligned} S_{xy}(\Omega_R) &= k \cdot \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^R \rho \sin \vartheta \cdot \rho^2 \cos \vartheta \, d\rho \right) d\vartheta \right) d\varphi = \\ &= k \cdot 2\pi \cdot \left[\frac{\sin^2 \vartheta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^R = k \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{4} \cdot k \end{aligned}$$



Obsah

148. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

a

$$\begin{aligned}
 m(\Omega_R) &= k \cdot \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^R \rho^2 \cos \vartheta \, d\rho \right) d\vartheta \right) d\varphi = \\
 &= k \cdot 2\pi \cdot [\sin \vartheta]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^R = k \cdot 2\pi \cdot 1 \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{2\pi R^3}{3} \cdot k.
 \end{aligned}$$

Poslední integrál jsme vlastně nemuseli počítat, protože v našem případě vychází $m(\Omega_R) = k \cdot \lambda(\Omega_R)$. Dále si uvědomme, že Ω_R je polokoule, a proto její míru (objem) dokážeme spočítat i bez integrálů:

$$\lambda(\Omega_R) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{2}{3} \pi R^3.$$

Pro souřadnice těžiště tedy platí

$$T_R = \left(0, 0, \frac{\frac{\pi R^4}{4} \cdot k}{\frac{2\pi R^3}{3} \cdot k} \right) = \left(0, 0, \frac{3}{8} R \right).$$



Příklad 2.35. Vypočtete moment setrvačnosti vzhledem k ose z tělesa M ohraničeného anuloidem

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - a \right)^2 + z^2 = b^2 \quad (0 < b < a),$$

je-li objemová hustota tohoto tělesa v každém jeho bodě rovna jedné.



Obsah

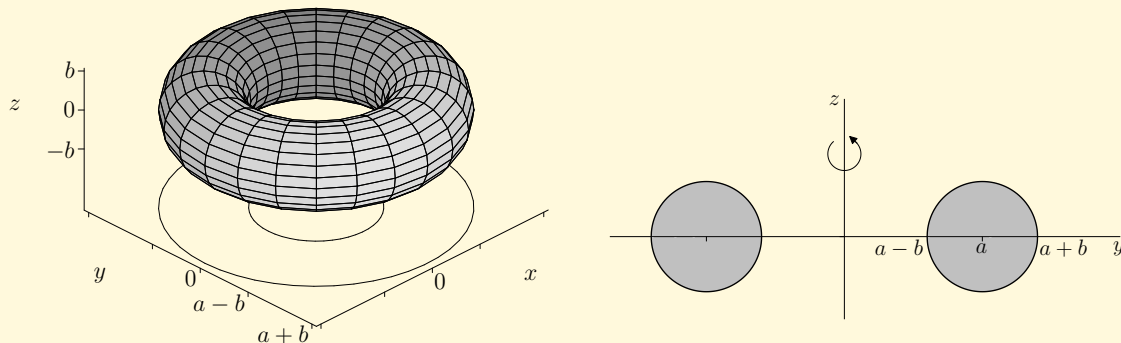
149. strana ze 167



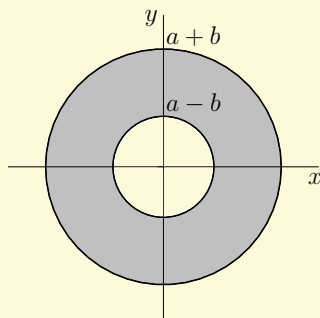
Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Řešení. V příkladu 2.31 jsme se s anuloidem již setkali. Pro jistotu si připomeňme, jak těleso M vypadá (viz následující obrázky).



Řez tělesa M rovinou $z = 0$ vidíme níže.



Platí

$$I_z(M) = \iiint_M (x^2 + y^2) \cdot 1 \, dx \, dy \, dz = \iiint_M (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz.$$

Pro snadnější výpočet integrálu provedeme transformaci do cylindrických souřadnic (viz příklad 2.31). Pak

$$\begin{aligned} I_z(M) &= \int_0^{2\pi} \left(\int_{a-b}^{a+b} \left(\int_{-\sqrt{b^2-(r-a)^2}}^{\sqrt{b^2-(r-a)^2}} r^2 \cdot r \, dz \right) dr \right) dt = \\ &= 2\pi \cdot 2 \cdot \int_{a-b}^{a+b} r^3 \sqrt{b^2 - (r-a)^2} \, dr = \left. \begin{array}{l} \text{substitute} \\ r - a = u \\ dr = du \\ a - b \mapsto -b \\ a + b \mapsto b \end{array} \right| = 4\pi \int_{-b}^b (u+a)^3 \sqrt{b^2 - u^2} \, du = \\ &= 4\pi \left(\int_{-b}^b \left(\underbrace{u^3 \sqrt{b^2 - u^2}}_{\text{liché v } u} + \underbrace{3u^2 a \sqrt{b^2 - u^2}}_{\text{sudé v } u} + \underbrace{3ua^2 \sqrt{b^2 - u^2}}_{\text{liché v } u} + \underbrace{a^3 \sqrt{b^2 - u^2}}_{\text{sudé v } u} \right) du \right) = \\ &= 8\pi \int_0^b \left(3u^2 a \sqrt{b^2 - u^2} + a^3 \sqrt{b^2 - u^2} \right) du = \left. \begin{array}{l} \text{substitute} \\ u = b \sin s \\ du = b \cos s \, ds \\ 0 \mapsto 0, \, b \mapsto \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \end{aligned}$$



Obsah

151. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

$$\begin{aligned}
&= 8\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3ab^2 \sin^2 s \cdot b \cos s + a^3 \cdot b \cos s) \cdot b \cos s \, ds = \\
&= 8\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(3ab^4 \underbrace{\sin^2 s \cos^2 s}_{\frac{1}{4} \sin^2 2s} + a^3 b^2 \cos^2 s \right) ds = \\
&= 8\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(3ab^4 \cdot \frac{1 - \cos 4s}{8} + a^3 b^2 \cdot \frac{1 + \cos 2s}{2} \right) ds = \\
&= 8\pi \left(3ab^4 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{\pi}{2} + 0 + a^3 b^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + 0 \right) = \frac{\pi^2 ab^2}{2} (3b^2 + 4a^2).
\end{aligned}$$



Příklady k procvičení

1. Pomocí Fubiniovy věty vypočtěte integrály:

- i) $\iiint_M xy^2 z \, dx \, dy \, dz$, kde $M = \langle 0, 2 \rangle \times \langle 1, 3 \rangle \times \langle 1, 2 \rangle$;
- ii) $\iiint_M e^{3x+2y+z} \, dx \, dy \, dz$, kde $M = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$;



Obsah

152. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

$$\text{iii) } \iiint_M \frac{1}{1-x-y} \, dx \, dy \, dz, \quad \text{kde } M = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 2, 5 \rangle \times \langle 2, 4 \rangle;$$

$$\text{iv) } \iiint_M xy \, dx \, dy \, dz, \quad \text{kde}$$

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x + y \leq 1 \wedge 0 \leq z \leq x^2 + y^2 + 1\};$$

$$\text{v) } \iiint_M \frac{1}{x+y+1} \, dx \, dy \, dz, \quad \text{kde}$$

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0 \wedge x + y + z \leq 1\};$$

$$\text{vi) } \iiint_M x^2 y z^3 \, dx \, dy \, dz, \quad \text{kde}$$

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: z \leq xy \wedge y \geq x \geq 0 \wedge y \leq 1 \wedge z \geq 0\}.$$

2. Pomocí transformace trojného integrálu řešte:

$$\text{i) } \iiint_M z \, dx \, dy \, dz, \quad \text{kde } M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \wedge z \leq 1\};$$

$$\text{ii) } \iiint_M z^2 \, dx \, dy \, dz, \quad \text{kde } M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\};$$

$$\text{iii) } \iiint_M z \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz, \quad \text{kde}$$

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 \leq 9 \wedge y \geq 0 \wedge 0 \leq z \leq 2\};$$



Obsah

153. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

iv) $\iiint_M (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz$, kde $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 \leq 2z \wedge z \leq 2\}$;

v) $\iiint_M z \, dx \, dy \, dz$, kde
 $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x \geq 0 \wedge \sqrt{x^2 + y^2} - 1 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$;

vi) $\iiint_M (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz$, kde
 $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \wedge x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z\}$;

vii) $\iiint_M xy \, dx \, dy \, dz$, kde
 $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0\}$;

viii) $\iiint_M \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz$, kde
 $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: 0 \leq x \leq y \wedge z \geq 0 \wedge x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$;

ix) $\iiint_M 1 \, dx \, dy \, dz$, kde $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \wedge z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$;

x) $\iiint_M z \, dx \, dy \, dz$, kde $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \wedge z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$.



Obsah

154. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Klíč k příkladům k procvičení

1.

i) 26;

ii) $\frac{1}{6} (e - 1) (e^2 - 1) (e^3 - 1)$;

iii) $20 \ln 2 - 10 \ln 5$;

iv) $\frac{7}{120}$;

v) $\frac{3}{2} - 2 \ln 2$;

vi) $\frac{1}{364}$.

2.

i) $\frac{\pi}{4}$;

ii) $\frac{7\pi}{6}$;

iii) 18π ;

iv) $\frac{16\pi}{3}$;

v) 0;

vi) $\frac{53\pi}{480}$;

vii) $\frac{1}{15}$;

viii) $\frac{\pi}{16}$;

ix) $\frac{8\pi}{3} (2 - \sqrt{2})$;

x) 2π .



Obsah

155. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

2.5. Kontrolní testy

Test 7. Rozhodněte, zda následující tvrzení jsou pravdivá.

1. Pro každou funkci $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ spojitou na množině

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x \leq 3 \wedge 2 \leq y \leq 3 \wedge 1 \leq z \leq 4\}$$

platí

$$\iiint_M f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_1^3 \left(\int_2^3 \left(\int_1^4 f(x, y, z) \, dy \right) dz \right) dx.$$

ANO

NE

2. Pro každou funkci $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ spojitou na množině

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \wedge 0 \leq y \wedge 0 \leq z \wedge x + y + z \leq 1\}$$

platí

$$\iiint_M f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^{1-x-y} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx.$$

ANO

NE



Obsah

156. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

3. Pro každou funkci $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ spojitou na množině

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: 0 \leq x \leq 3 \wedge -2 \leq y \leq 2 \wedge 1 \leq z \leq x + y + 2012\}$$

platí

$$\iiint_M f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{-2}^2 \left(\int_1^{x+y+2012} \left(\int_0^3 f(x, y, z) \, dx \right) dz \right) dy.$$

ANO

NE

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:



Obsah

157. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno



Test 8. Rozhodněte, zda následující tvrzení jsou pravdivá.

1. Pro každou funkci $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ spojitou na množině

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 \leq 4x \wedge -2 \leq z \leq 0\}$$

platí

$$\iiint_M f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{-2}^0 \left(\int_0^{4 \cos t} r f(r \cos t, r \sin t, z) \, dr \right) dz \right) dt.$$

ANO

NE

2. Pro každou funkci $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ spojitou na množině

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 \leq 4x \wedge x \leq z \leq 50\}$$

platí

$$\iiint_M f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{r \cos t}^{50} \left(\int_0^{4 \cos t} r f(r \cos t, r \sin t, z) \, dr \right) dz \right) dt.$$

ANO

NE

Obsah

158. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

3. Pro každou funkci $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ spojitou na množině

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 \leq 4z \wedge 0 \leq y\}$$

platí

$$\begin{aligned} \iiint_M f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz &= \\ &= \int_0^\pi \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{4 \sin \vartheta} f(\rho \cos \varphi \cos \vartheta, \rho \sin \varphi \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta) \rho^2 \cos \vartheta \, d\rho \right) d\vartheta \right) d\varphi. \end{aligned}$$

ANO

NE

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:



Obsah

159. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno


Test 9. Doplňte správné výsledky. ¹

1. Necht $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0 \wedge x + 2y \leq 2 \wedge 0 \leq z \leq x + y\}$.

Pak

$$\iiint_M 1 \, dx \, dy \, dz = \quad .$$

2. Necht $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0 \wedge x + y \leq 1 \wedge z \leq xy\}$. Pak

$$\iiint_M xy \, dx \, dy \, dz = \quad .$$

3. Necht $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: y \geq 0 \wedge y \leq \sqrt{x} \wedge z \geq 0 \wedge x \geq 0 \wedge x + z \leq \frac{\pi}{2}\}$. Pak

$$\iiint_M y \cos(x + z) \, dx \, dy \, dz = \quad .$$

¹ Zlomek „ $\frac{a}{b}$ “ pište jako „a/b“, násobení „ab“ jako „a*b“, mocninu „ a^b “ jako „a^b“, odmocninu „ $\sqrt{a}$ “ jako „sqrt(a)“, logaritmus „ln a“ jako „ln(a)“, číslo „ π “ jako „pi“, apod. Např. výraz „ $\frac{\pi^2}{8} \cdot (3 \ln^3 7 - \frac{\sqrt{5}}{2})$ “ napíšeme jako „(pi)^2/8*(3*(ln(7))^3-sqrt(5)/2)“.

Obsah

160. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

4. Necht $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0 \wedge y \leq 1 - x^2 \wedge z \leq x + y + 1\}$.

Pak

$$\iiint_M 1 \, dx \, dy \, dz = \quad .$$

5. Necht $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0 \wedge z \leq 1 - x \wedge z \leq 1 - y\}$. Pak

$$\iiint_M z \, dx \, dy \, dz = \quad .$$

6. Necht $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0 \wedge x + y + z \leq 1\}$. Pak

$$\iiint_M x \, dx \, dy \, dz = \quad .$$

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:



Obsah

161. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno



Test 10. Doplňte správné výsledky.¹

1. Necht $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \wedge 0 \leq z \leq 3 - y\}$. Pak

$$\iiint_M x^2 y \, dx \, dy \, dz = \quad .$$

2. Necht $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \wedge 0 \leq z \leq 3 \wedge x \leq 0 \wedge y \geq 0\}$. Pak

$$\iiint_M xz \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz = \quad .$$

3. Necht $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0\}$. Pak

$$\iiint_M (x + y + z) \, dx \, dy \, dz = \quad .$$

¹ Zlomek „ $\frac{a}{b}$ “ pište jako „a/b“, násobení „ ab “ jako „a*b“, mocninu „ a^b “ jako „a^b“, odmocninu „ $\sqrt{a}$ “ jako „sqrt(a)“, logaritmus „ $\ln a$ “ jako „ln(a)“, číslo „ π “ jako „pi“, apod. Např. výraz „ $\frac{\pi^2}{8} \cdot (3 \ln^3 7 - \frac{\sqrt{5}}{2})$ “ napíšeme jako „(pi)^2/8*(3*(ln(7))^3-sqrt(5)/2)“.

Obsah

162. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

4. Necht $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 \leq z\}$. Pak

$$\iiint_M \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz = \quad .$$

5. Necht $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0 \wedge x^2 + y^2 \leq 1 \wedge z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\}$.

Pak

$$\iiint_M (x + z) \, dx \, dy \, dz = \quad .$$

6. Necht $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \wedge x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$. Pak

$$\iiint_M 1 \, dx \, dy \, dz = \quad .$$

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:



Obsah

163. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno



Literatura

- [1] BOUCHALA, J.: *Matematická analýza 1*. Ostrava: VŠB-TU, 1998. Skriptum.
- [2] HOŠKOVÁ, Š., KUBEN, J., RAČKOVÁ, P.: *Integrální počet funkcí jedné proměnné*. Ostrava: VŠB-TU, 2006.
- [3] JARNÍK, V.: *Diferenciální počet (I)*. Praha: Academia, 1984.
- [4] JARNÍK, V.: *Integrální počet (I)*. Praha: Academia, 1984.
- [5] JARNÍK, V.: *Diferenciální počet (II)*. Praha: Academia, 1984.
- [6] JARNÍK, V.: *Integrální počet (II)*. Praha: Academia, 1984.
- [7] REKTORYS, K. a kol.: *Přehled užití matematiky*. 5. vydání. Praha: SNTL, 1988.

Obsah

164. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

Rejstřík

anuloid, 138, 149

dělení intervalu, 10, 13, 102

funkce

charakteristická, 22, 104

omezená, 13

primitivní, 11

Riemannovsky integrovatelná, 10, 15,
27, 103

třídy C^1 , 41, 71, 120

vyšší transcendentní, 37, 58

hmotnost

desky, 75

tělesa, 142

hustota

objemová, 142

plošná, 75

integrál

dvojnásobný, 17, 30

dvojný, 9

dolní, 15

horní, 15

na intervalu, 12, 15

na měřitelné množině, 27

Fresnelův, 36

jednorozměrný, 10

Laplaceův, 58

trojnásobný, 108

trojný, 102, 103

dolní, 103

horní, 103

na měřitelné množině, 106

interval



Obsah

165. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno

dvojozměrný, 13
trojozměrný, 102

Jacobián, 41, 120

lemniskáta, 67

míra
Jordanova, 22

množina
měřitelná, 22, 104

moment
setrvačnosti, 75, 143
statický, 75, 143

norma dělení, 16

objem tělesa, 67, 135

oblast
elementární
druhého druhu, 26
prvního druhu, 26

obsah
obrazce, 64
plochy, 71

pravidlo

Guldinovo, 142

součet

dolní, 14, 103

horní, 14, 103

integrální, 16

souřadnice

cylindrické (válcové), 121

zobecněné, 138

polární, 45

zobecněné, 52

sférické, 126

zobecněné, 131

těleso

Vivianiovo, 67

těžiště, 75, 143

věta

Fubiniova

pro dvojný integrál na M , 30

pro dvojný integrál na intervalu, 17

pro trojný integrál na M , 107

o existenci

dvojného integrálu, 17

jednorozměrného integrálu, 11

trojného integrálu, 104



Obsah

166. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

- o substituci
 - dvojného integrálu, 41
 - jednorozměrného integrálu, 40
 - trojného integrálu, 120
- o vlastnostech
 - dvojného integrálu, 28
 - měřitelných množin, 25
- o výpočtu jednorozměrného integrálu,
11
- základní, algebry, 60



Obsah

167. strana ze 167



Zavřít dokument

Celá obrazovka / Okno