



INTEGRÁLNÍ POČET FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

Petr Vodstrčil a Jiří Bouchala

Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století* (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Petr Vodstrčil a Jiří Bouchala
Integrální počet funkcí více proměnných

© Petr Vodstrčil a Jiří Bouchala, 13. června 2012
ISBN

Předmluva

O modulu „Integrální počet funkcí více proměnných“

Integrální počet patří k pilířům matematické analýzy a má zásadní význam nejen v matematice, ale i v mnoha technických oborech. Proto je zapotřebí tuto disciplínu dobře zvládnout.

Toto skriptum se bude věnovat vícerozměrným (dvojným a trojným) integrálům. Je proto vhodné připomenout si výpočet integrálů jednorozměrných. To je dobře popsáno např. v [1], [2], [4].

Samotný text je rozdělen do dvou hlavních kapitol. První kapitola pojednává o dvojných integrálech, zatímco druhá o integrálech trojných. Každá z těchto kapitol je následně dále rozdělena na podkapitoly. Vyložené pojmy jsou vždy ilustrovány na řešených příkladech. Na konci kapitol najdete i neřešené příklady k procvičení, a to včetně výsledků.

Na závěr bychom vám rádi popřáli mnoho úspěchů a radosti při studiu.

V Ostravě dne 13. června 2012

Petr Vodstrčil a Jiří Bouchala ¹

¹e-mail: petr.vodstrcil@vsb.cz a jiri.bouchala@vsb.cz

O projektu

Vážený čtenáři,

text, který právě čtete, vznikl v rámci řešení projektu „Matematika pro inženýry 21. století – inovace výuky matematiky na technických školách v nových podmínkách rychle se vyvíjející informační a technické společnosti“. Projekt je řešen na Vysoké škole báňské - Technické univerzitě v Ostravě a Západočeské univerzitě v Plzni v období 2009 – 2012.

Hlavní motivací projektu je potřeba reagovat na změny významu jednotlivých partií matematiky při řešení praktických problémů, způsobenou zejména velkým pokrokem v matematickém modelování, dramatickým zlepšováním software a rychlým zvyšováním výpočetních kapacit moderních počítačů. Inženýři nyní běžně využívají stále se vyvíjející komplikované softwarové produkty založené na matematických pojmech, se kterými se v kurzech matematiky buďto nesetkají vůbec nebo v nevhodné formě. Na druhé straně prezentace některých pojmů v základních kurzech neodráží z nejruznějších důvodů potřeby odborných kateder. Bohužel tento stav ztěžuje studentům aktivní používání získaných vědomostí v odborných předmětech i orientaci v rychle se vyvíjejících metodách inženýrské praxe.

Cílem projektu je inovace matematických a některých odborných kurzů na technických vysokých školách s cílem získat zájem studentů, zvýšit efektivnost výuky, zpřístupnit prakticky aplikovatelné výsledky moderní matematiky a vytvořit předpoklady pro efektivní výuku inženýrských předmětů. Zkvalitnění výuky matematiky budoucích inženýrů chceme dosáhnout po stránce formální využitím nových informačních technologií přípravy elektronických studijních materiálů a po stránce věcné pečlivým výběrem vyučované látky s důsledným využíváním zavedených pojmů v celém kurzu matematiky s promyšlenou integrací moderního matematického aparátu do vybraných inženýrských předmětů. Metodiku výuky matematiky a její atraktivnost pro studenty chceme zlepšit důrazem na motivaci a důsledným používáním postupu „od problému k řešení“.

V rámci projektu vytváříme 40 nových výukových materiálů z oblastí matematické analýzy, lineární algebry, numerických metod, metod optimalizace, diskrétní matematiky, teorie grafů, statistiky a několika odborných kurzů. Všechny hotové výukové materiály budou volně k dispozici na webových stránkách projektu <http://mi21.vsb.cz>. Autoři předem děkují za všechny případné nápady a návrhy k vylepšení textu i za upozornění na chyby.

Text byl vysázen pomocí sázecího systému $\text{\TeX}$ ve formátu pdf $\text{\LaTeX}$.

Obsah

Předmluva	iii
1 Dvojný integrál	1
1.1 Připomenutí (jednorozměrného) integrálu.	1
1.2 Dvojný integrál na intervalu	2
1.3 Měřitelné množiny v $\mathbb{R}^2$	8
1.4 Dvojný integrál na měřitelné množině	11
1.4.1 Fubiniova věta pro dvojný integrál	13
1.4.2 Substituční metoda pro dvojný integrál	18
1.4.3 Substituce do polárních souřadnic	20
1.4.4 Substituce do zobecněných polárních souřadnic	24
1.5 Pro zájemce	27
1.5.1 Výpočty některých jednorozměrných integrálů	27
1.5.2 Základní věta algebry	29
1.6 Některé aplikace dvojného integrálu	32
1.6.1 Obsah rovinného obrazce	32
1.6.2 Objem válcového tělesa	34
1.6.3 Obsah plochy	36
1.6.4 Některé aplikace dvojného integrálu v mechanice	37
1.7 Příklady k procvičení	40
Klíč k příkladům k procvičení	41
2 Trojný integrál	43
2.1 Trojný integrál na intervalu	43
2.2 Měřitelné množiny v $\mathbb{R}^3$	44
2.3 Trojný integrál na měřitelné množině	45
2.3.1 Fubiniova věta pro trojný integrál	46
2.3.2 Substituční metoda pro trojný integrál	53
2.3.3 Substituce do cylindrických (válcových) souřadnic	53
2.3.4 Substituce do sférických souřadnic	56
2.3.5 Substituce do zobecněných sférických souřadnic	58
2.4 Některé aplikace trojného integrálu	60
2.4.1 Objem tělesa	60

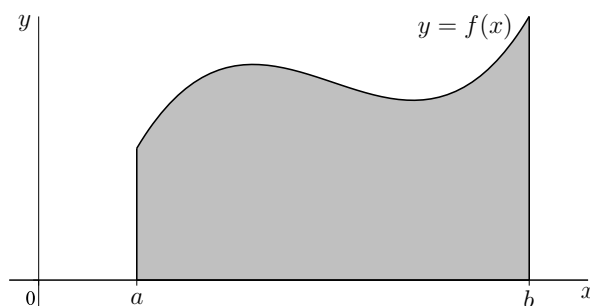
2.4.2	Některé aplikace trojného integrálu v mechanice	64
2.5	Příklady k procvičení	69
	Klíč k příkladům k procvičení	70
	Literatura	72
	Rejstřík	73

Kapitola 1

Dvojný integrál

1.1 Připomenutí (jednorozměrného) integrálu.

Buď funkce $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^+$ spojitá. Integrál $\int_a^b f(x) dx$ je pak obsahem plochy ohraničené grafem funkce f a přímkami $y = 0, x = a, x = b$.



Připomeňme si, jak je Riemannův integrál definován.

Buď $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ omezená (ne nutně spojitá). Pro každé dělení

$$D: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

intervalu $\langle a, b \rangle$ jsou definována čísla

$$s(D) = \sum_{k=1}^n \inf_{x \in \langle x_{k-1}, x_k \rangle} f(x) \cdot (x_k - x_{k-1}),$$

$$S(D) = \sum_{k=1}^n \sup_{x \in \langle x_{k-1}, x_k \rangle} f(x) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

a pomocí nich pak

$$\int_a^b f(x) dx = \sup_D s(D), \quad \int_a^b f(x) dx = \inf_D S(D).$$

O funkci f říkáme, že je Riemannovsky integrovatelná na $\langle a, b \rangle$, platí-li

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{\overline{b}} f(x) dx.$$

Tuto společnou hodnotu pak nazýváme Riemannovým integrálem funkce f na $\langle a, b \rangle$ a značíme $\int_a^b f(x) dx$.

Připomeňme, že platí následující tvrzení.

Věta 1.1 (o existenci (jednorozměrného) Riemannova integrálu). *Nechť funkce f je spojitá nebo monotónní na intervalu $\langle a, b \rangle$. Pak existuje $\int_a^b f(x) dx$.*

Věta 1.2 (o výpočtu Riemannova integrálu pomocí primitivní funkce). *Předpokládejme, že existuje $\int_a^b f(x) dx$. Nechť dále funkce F je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a pro každé $x \in (a, b)$ platí $F'(x) = f(x)$ (F je primitivní funkce k f na (a, b)). Pak*

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$



Příklad 1.3. Díky větám 1.1 a 1.2 můžeme například lehce spočítat, že

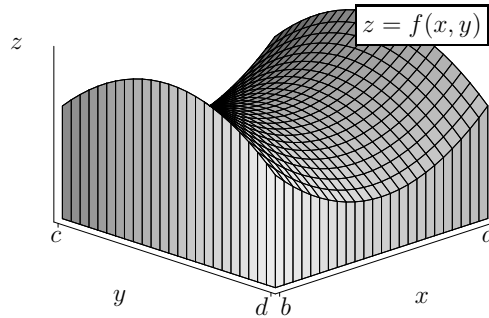
$$\int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

1.2 Dvojný integrál na intervalu

Dvojný Riemannův integrál na intervalu zavedeme zcela analogicky. Pro spojitou funkci

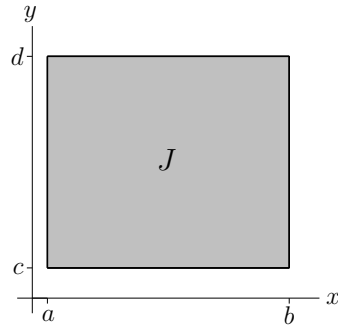
$$f: J = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle \rightarrow \mathbb{R}^+$$

bude $\iint_J f(x, y) dx dy$ definován tak, aby jeho hodnota odpovídala objemu tělesa ohraničeného grafem funkce f a rovinami $z = 0, x = a, x = b, y = c, y = d$.



Nyní přistupme ke slíbené definici.

V celé této kapitole buď funkce $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ omezená na dvojrozměrném uzavřeném intervalu (předpoklad spojitosti je opět vynechán) $J = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$, kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}; a < b, c < d$.



To znamená, že existuje číslo $k \in \mathbb{R}^+$ takové, že pro každé $(x, y) \in J$ je $|f(x, y)| \leq k$. Definujme pro libovolná dělení

$$D_x: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

$$D_y: c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$$

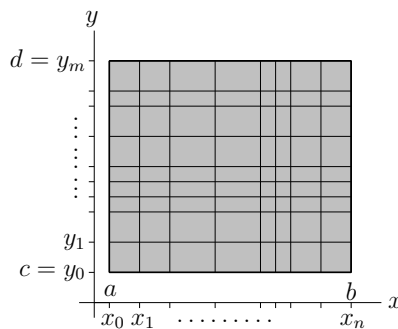
intervalů $\langle a, b \rangle$ a $\langle c, d \rangle$ dělení $D = (D_x, D_y)$ intervalu J jakožto systém uzavřených dvojrozměrných intervalů

$$J_{kl} = \langle x_{k-1}, x_k \rangle \times \langle y_{l-1}, y_l \rangle, \quad \text{kde } k \in \{1, \dots, n\}, l \in \{1, \dots, m\}$$

a označme

$$\lambda(J_{kl}) = (x_k - x_{k-1}) \cdot (y_l - y_{l-1})$$

obsahy obdélníků J_{kl} .



Nyní pro každé takovéto dělení D intervalu J definujeme součty

$$s(D) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \inf_{(x,y) \in J_{kl}} f(x,y) \cdot \lambda(J_{kl}) \quad (\text{dolní součet}),$$

$$S(D) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \sup_{(x,y) \in J_{kl}} f(x,y) \cdot \lambda(J_{kl}) \quad (\text{horní součet})$$

a pomocí nich dolní a horní dvojný Riemannův integrál funkce f na intervalu J .

$$\iint_J f(x,y) \, dx \, dy = \sup\{s(D) : D \text{ je dělení } J\},$$

$$\iint_{\underline{J}} f(x,y) \, dx \, dy = \inf\{S(D) : D \text{ je dělení } J\}.$$

Řekneme, že funkce f je na intervalu J (Riemannovsky) integrovatelná, platí-li

$$\iint_J f(x,y) \, dx \, dy = \iint_{\underline{J}} f(x,y) \, dx \, dy.$$

Tuto společnou hodnotu pak značíme $\iint_J f(x,y) \, dx \, dy$ a nazýváme dvojným Riemannovým integrálem funkce f na intervalu J .



Příklad 1.4. Přímo z definice dvojného integrálu lze snadno odvodit, že

$$\iint_{\langle 0,1 \rangle \times \langle 0,1 \rangle} 1 \, dx \, dy = 1.$$



Příklad 1.5. Podobně jako v předchozím příkladu lze zjistit, že

$$\iint_{\langle 0,1 \rangle \times \langle 0,1 \rangle} f(x,y) \, dx \, dy, \text{ kde}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

neexistuje, neboť

$$\iint_{\underline{\langle 0,1 \rangle \times \langle 0,1 \rangle}} f(x,y) \, dx \, dy = 0 \quad \text{a} \quad \iint_{\overline{\langle 0,1 \rangle \times \langle 0,1 \rangle}} f(x,y) \, dx \, dy = 1.$$

Poznámka 1.6. Buď $D^p = (D_x^p, D_y^p)$ libovolná posloupnost dělení intervalu J taková, že

$$\|D_x^p\| \rightarrow 0, \quad \|D_y^p\| \rightarrow 0 \quad \text{pro } p \rightarrow +\infty. \quad {}^1$$

Vytvořme pro každé D^p (tvořené systémem obdélníků J_{kl}^p) tzv. integrální součet

$$I(D^p) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m f(\xi_k^p, \theta_l^p) \cdot \lambda(J_{kl}^p),$$

kde $(\xi_k^p, \theta_l^p) \in J_{kl}^p$ je libovolný bod. Pak platí, že

$$\iint_J f(x, y) \, dx \, dy = \lim_{p \rightarrow +\infty} I(D^p),$$

pokud integrál na levé straně výše uvedené rovnosti existuje.

Věta 1.7 (o existenci dvojného integrálu). *Je-li funkce $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá v uzavřeném intervalu J , pak existuje $\iint_J f(x, y) \, dx \, dy$.*

¹Symbolem $\|D\|$, kde $D: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ je dělení intervalu $\langle a, b \rangle$, přitom rozumíme tzv. normu dělení D definovanou rovností

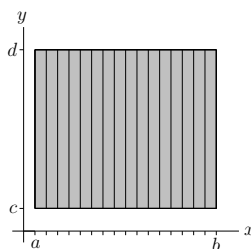
$$\|D\| = \max_{k \in \{1, 2, \dots, n\}} (x_k - x_{k-1}).$$

Věta 1.8 (Fubiniova věta pro dvojný integrál funkce na intervalu).

Nechť funkce f je integrovatelná na intervalu J .

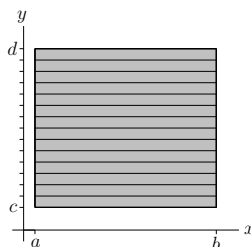
- 1) Jestliže pro každé $x \in \langle a, b \rangle$ je funkce $y \mapsto f(x, y)$ integrovatelná na intervalu $\langle c, d \rangle$, je

$$\iint_J f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx \quad (\text{tzv. dvojnásobný integrál}).$$



- 2) Jestliže pro každé $y \in \langle c, d \rangle$ je funkce $x \mapsto f(x, y)$ integrovatelná na intervalu $\langle a, b \rangle$, je

$$\iint_J f(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy.$$



Poznámka 1.9. Součástí tvrzení 1), resp. tvrzení 2), je skutečnost, že funkce

$$x \mapsto \int_c^d f(x, y) \, dy, \quad \text{resp.} \quad y \mapsto \int_a^b f(x, y) \, dx,$$

je integrovatelná na intervalu $\langle a, b \rangle$, resp. $\langle c, d \rangle$.

Poznámka 1.10. První varianta věty 1.8 odpovídá „sčítání funkčních hodnot po sloupcích“ a druhá varianta „po řádcích“ (viz ilustrace ve větě).

Příklady 1.11.

1)

$$\iint_{\langle 0,1 \rangle \times \langle 0,2 \rangle} 1 \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_0^2 1 \, dy \right) dx = \int_0^1 [y]_{y=0}^2 dx = \int_0^1 2 \, dx = 2.$$

2)

$$\begin{aligned} \iint_{\langle -2,1 \rangle \times \langle 2,5 \rangle} (4x - y + 3) \, dx \, dy &= \int_{-2}^1 \left(\int_2^5 (4x - y + 3) \, dy \right) dx = \\ &= \int_{-2}^1 \left[4xy - \frac{y^2}{2} + 3y \right]_{y=2}^5 dx = \int_{-2}^1 \left(20x - \frac{25}{2} + 15 - 8x + 2 - 6 \right) dx = \\ &= \int_{-2}^1 \left(12x - \frac{3}{2} \right) dx = \left[6x^2 - \frac{3}{2}x \right]_{x=-2}^1 = 6 - \frac{3}{2} - 24 + 3 = -\frac{45}{2}. \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} \iint_{\langle 1,2 \rangle \times \langle 0,1 \rangle} (x^2 + xy + y^2) \, dx \, dy &= \int_1^2 \left(\int_0^1 (x^2 + xy + y^2) \, dy \right) dx = \\ &= \int_1^2 \left[x^2y + \frac{xy^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^1 dx = \int_1^2 \left(x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{3} \right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{3} \right]_1^2 = \\ &= \left(\frac{8}{3} + 1 + \frac{2}{3} \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right) = \frac{13}{3} - \frac{11}{12} = \frac{41}{12}. \end{aligned}$$

Můžeme ještě zkusit tentýž příklad spočítat tak, že budeme integrovat v opačném pořadí.

$$\begin{aligned} \iint_{\langle 1,2 \rangle \times \langle 0,1 \rangle} (x^2 + xy + y^2) \, dx \, dy &= \int_0^1 \left(\int_1^2 (x^2 + xy + y^2) \, dx \right) dy = \\ &= \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2y}{2} + xy^2 \right]_{x=1}^2 dy = \int_0^1 \left(\left(\frac{8}{3} + 2y + 2y^2 \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{y}{2} + y^2 \right) \right) dy = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{7}{3} + \frac{3y}{2} + y^2 \right) dy = \left[\frac{7y}{3} + \frac{3y^2}{4} + \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^1 = \frac{7}{3} + \frac{3}{4} + \frac{1}{3} = \frac{41}{12}. \end{aligned}$$

Vidíme tedy, že náročnost obou postupů je v tomto případě srovnatelná.

4)

$$\begin{aligned}
\iint_{\langle 0,1 \rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle} xy^2 \sin(x^2 y) \, dx \, dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 xy^2 \sin(x^2 y) \, dx \right) dy = \\
&= \left| \begin{array}{l} \text{substitute} \\ x^2 y = t \\ 2xy \, dx = dt \\ xy \, dx = \frac{1}{2} dt \\ 0 \mapsto 0, \, 1 \mapsto y \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^y \frac{1}{2} y \sin t \, dt \right) dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{y}{2} [-\cos t]_{t=0}^y dy = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{y}{2} (-\cos y + 1) dy = \left[\frac{y^2}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} y \cos y \, dy = \left| \begin{array}{l} \text{per-partes} \\ u = y \quad v' = \cos y \\ u' = 1 \quad v = \sin y \end{array} \right| = \\
&= \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} \left([y \sin y]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y \, dy \right) = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - [-\cos y]_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Student si může sám vyzkoušet, že pokud by integroval nejdříve podle proměnné y , dostal by se při výpočtu do potíží.

1.3 Měřitelné množiny v $\mathbb{R}^2$

Buď $M \subseteq \mathbb{R}^2$. Definujme charakteristickou funkci množiny M předpisem

$$\chi_M(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } (x, y) \in M, \\ 0 & \text{pro } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus M. \end{cases}$$

Definice 1.12. Řekneme, že omezená množina M je (Jordanovsky) měřitelná, je-li funkce χ_M Riemannovsky integrovatelná na uzavřeném intervalu $J \subseteq \mathbb{R}^2$ takovém, že $M \subseteq J$. Číslo

$$\lambda(M) = \iint_J \chi_M(x, y) \, dx \, dy$$

pak nazýváme (Jordanovou) mírou množiny M .

Poznámka 1.13. Je-li $M \subseteq \mathbb{R}^2$ omezená, existuje nekonečně mnoho uzavřených intervalů J takových, že $M \subseteq J$. Výše uvedená definice je však na volbě takového J nezávislá.

Poznámka 1.14 (ke geometrické interpretaci míry množiny). Buď M měřitelná, J uzavřený interval v $\mathbb{R}^2$ takový, že $M \subseteq J$. Pokusme se najít geometrický význam čísla

$$\lambda(M) = \iint_J \chi_M(x, y) \, dx \, dy.$$

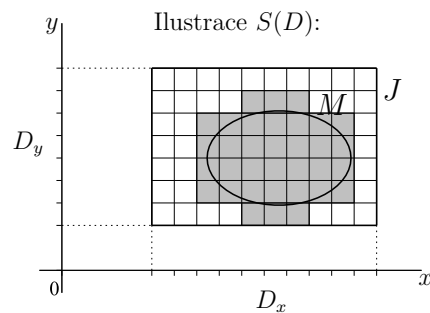
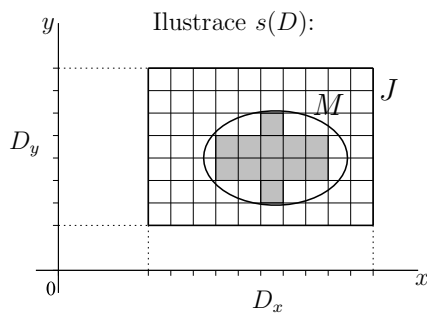
Zvolme $D = (D_x, D_y)$ dělení intervalu J . Všimněme si, že

$$s(D) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \inf_{(x,y) \in J_{kl}} \chi_M(x, y) \cdot \lambda(J_{kl}),$$

což je součet obsahů všech obdélníků J_{kl} ležících v M . Podobně

$$S(D) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \sup_{(x,y) \in J_{kl}} \chi_M(x, y) \cdot \lambda(J_{kl})$$

je součet obsahů všech obdélníků J_{kl} majících s M neprázdný průnik.



Pro míru množiny M platí

$$\lambda(M) = \sup_D s(D) = \inf_D S(D).$$

Míra množiny M je zobecněním pojmu „obsah“ množiny, který nám je intuitivně jasný pro některé speciální množiny M (např. obdélník, kruh, apod.).

Věta 1.15 (vlastnosti měřitelných množin).

- 1) Má-li $M \subseteq \mathbb{R}^2$ nejvýše konečně mnoho bodů, je M měřitelná a platí $\lambda(M) = 0$.
- 2) Každý omezený interval v $\mathbb{R}^2$ (nejen uzavřený) je měřitelná množina.
- 3) Je-li M měřitelná, je $\lambda(M) \geq 0$.

- 4) Sjednocení nebo průnik konečného počtu měřitelných množin je měřitelná množina.

Rozdíl dvou měřitelných množin je měřitelná množina.

- 5) Jsou-li $M_1, M_2, \dots, M_n$ měřitelné a navzájem disjunktní množiny (tj. $M_i \cap M_j = \emptyset$ pro $i \neq j$), je

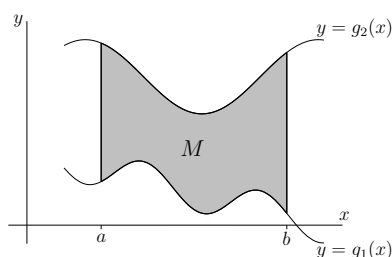
$$\lambda(M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_n) = \lambda(M_1) + \lambda(M_2) + \dots + \lambda(M_n).$$

- 6) Platí-li pro měřitelné množiny M a N , že $M \subseteq N$, potom $\lambda(M) \leq \lambda(N)$.

- 7) Množina

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \in \langle a, b \rangle \wedge g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\},$$

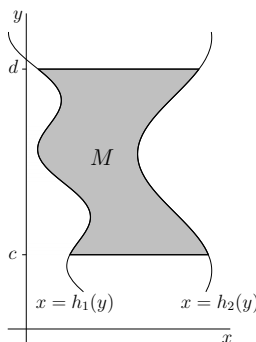
kde funkce g_1, g_2 jsou spojité na intervalu $\langle a, b \rangle$ a $g_1(x) \leq g_2(x)$ pro každé $x \in \langle a, b \rangle$, je měřitelná.



- 8) Množina

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y \in \langle c, d \rangle \wedge h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\},$$

kde funkce h_1, h_2 jsou spojité na intervalu $\langle c, d \rangle$ a $h_1(y) \leq h_2(y)$ pro každé $y \in \langle c, d \rangle$, je měřitelná.



- 9) Buď $M \subseteq \mathbb{R}^2$ omezená. Pak M je měřitelná právě tehdy, když množina všech hraničních bodů množiny M má Jordanovu míru 0.

Poznámka 1.16. Je-li M jako v 7), resp. v 8), říkáme, že M je elementární (uzavřená) oblast prvního, resp. druhého, druhu.

Příklad 1.17. Množina



$$M = \{(x, y) \in \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle : x, y \in \mathbb{Q}\}$$

není (Jordanovsky) měřitelná.

1.4 Dvojný integrál na měřitelné množině

Definice 1.18. Buď f omezená ^a na neprázdné měřitelné množině $M \subseteq \mathbb{R}^2$. Řekneme, že funkce f je na množině M (Riemannovsky) integrovatelná, je-li funkce $f \cdot \chi_M$ definovaná předpisem

$$(f \cdot \chi_M)(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{pro } (x, y) \in M, \\ 0 & \text{pro } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus M, \end{cases}$$

integrovatelná na nějakém uzavřeném intervalu $J \subseteq \mathbb{R}^2$ takovém, že $M \subseteq J$. Dvojným (Riemannovým) integrálem funkce f na množině M pak rozumíme číslo

$$\iint_M f(x, y) \, dx \, dy = \iint_J (f \cdot \chi_M)(x, y) \, dx \, dy.$$

Navíc definujeme

$$\iint_{\emptyset} f(x, y) \, dx \, dy = 0 \quad \text{pro každou funkci } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}.$$

^a Tzn. $(\exists k \in \mathbb{R}^+) (\forall (x, y) \in M) : |f(x, y)| \leq k$.

Poznámka 1.19.

- i) Výše uvedená definice nezávisí na volbě uzavřeného intervalu J takového, že $M \subseteq J$.
- ii) Všimněme si, že funkce $f \cdot \chi_M$ je definována v $\mathbb{R}^2$.

Věta 1.20 (Vlastnosti dvojného integrálu). *Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^2$ je měřitelná množina a nechť funkce f a g jsou integrovatelné na M . Pak platí:*

1) Pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ je

$$\iint_M (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)) \, dx \, dy = \alpha \iint_M f(x, y) \, dx \, dy + \beta \iint_M g(x, y) \, dx \, dy.$$

2) Je-li $M = M_1 \cup M_2$, kde M_1 a M_2 jsou měřitelné množiny a $\lambda(M_1 \cap M_2) = 0$, je

$$\iint_M f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{M_1} f(x, y) \, dx \, dy + \iint_{M_2} f(x, y) \, dx \, dy.$$

3) Je-li $f(x, y) \leq g(x, y)$ pro každé $(x, y) \in M$, je

$$\iint_M f(x, y) \, dx \, dy \leq \iint_M g(x, y) \, dx \, dy.$$

4)

$$\left| \iint_M f(x, y) \, dx \, dy \right| \leq \iint_M |f(x, y)| \, dx \, dy.$$

5) Je-li $\lambda(M) = 0$, je

$$\iint_M f(x, y) \, dx \, dy = 0.$$

6) Je-li funkce h omezená na M a je-li $f(x, y) = h(x, y)$ pro každé $(x, y) \in M \setminus M_0$, kde M_0 je měřitelná množina míry nula, je

$$\iint_M f(x, y) \, dx \, dy = \iint_M h(x, y) \, dx \, dy.$$

7) Je-li funkce h spojitá na uzavřené měřitelné množině M , je h na M integrovatelná.

Poznámka 1.21.

- i) Součástí věty je také tvrzení, že všechny uvedené integrály existují.
- ii) Všimněme si, že část 7) je zobecněním věty 1.7.

1.4.1 Fubiniova věta pro dvojný integrál

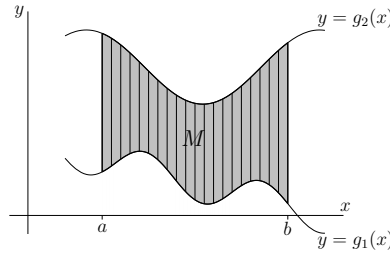
Věta 1.22 (Fubiniova věta pro dvojný integrál).

i) Nechť funkce f je integrovatelná na množině

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \in \langle a, b \rangle \wedge g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\},$$

kde funkce g_1 a g_2 jsou spojité v $\langle a, b \rangle$ a $g_1(x) \leq g_2(x)$ pro každé $x \in \langle a, b \rangle$.
Nechť pro každé $x \in \langle a, b \rangle$ je funkce $y \mapsto f(x, y)$ integrovatelná na intervalu $\langle g_1(x), g_2(x) \rangle$. Potom

$$\iint_M f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) \, dy \right) dx \quad (\text{tzv. dvojnásobný integrál}).$$

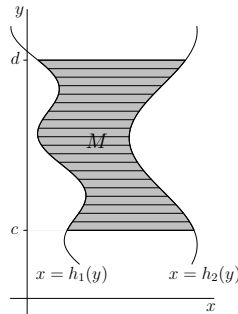


ii) Nechť funkce f je integrovatelná na množině

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y \in \langle c, d \rangle \wedge h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\},$$

kde funkce h_1 a h_2 jsou spojité v $\langle c, d \rangle$ a $h_1(y) \leq h_2(y)$ pro každé $y \in \langle c, d \rangle$.
Nechť pro každé $y \in \langle c, d \rangle$ je funkce $x \mapsto f(x, y)$ integrovatelná na intervalu $\langle h_1(y), h_2(y) \rangle$. Potom

$$\iint_M f(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) \, dx \right) dy.$$



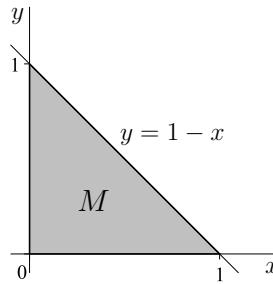
Poznámka 1.23. Fubiniova věta nám umožňuje dvojný integrál převádět na dva do sebe vnořené jednorozměrné integrály (mluvíme o tzv. dvojnásobném integrálu).



Příklad 1.24. Vypočtete integrál $I = \iint_M (x^2 + y^2 + 1) \, dx \, dy$, kde

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x + y \leq 1\}.$$

Řešení. Množina M je trojúhelník s vrcholy $(0, 0)$, $(1, 0)$ a $(0, 1)$ (viz obrázek).



Není těžké si uvědomit, že

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \in \langle 0, 1 \rangle \wedge 0 \leq y \leq 1 - x\},$$

a proto (podle věty 1.22) platí

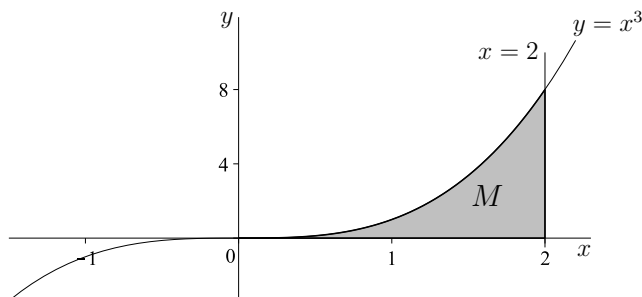
$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (x^2 + y^2 + 1) \, dy \right) dx = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} + y \right]_{y=0}^{1-x} dx = \\ &= \int_0^1 \left(x^2(1-x) + \frac{(1-x)^3}{3} + (1-x) \right) dx = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 (3x^2 - 3x^3 + 1 - 3x + 3x^2 - x^3 + 3 - 3x) \, dx = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 (-4x^3 + 6x^2 - 6x + 4) \, dx = \frac{1}{3} [-x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 4x]_0^1 = \\ &= \frac{1}{3} (-1 + 2 - 3 + 4) = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

▲



Příklad 1.25. Vypočtete integrál $I = \iint_M x^2 e^{-y} \, dx \, dy$, je-li M omezená uzavřená oblast ohraničená křivkami $y = x^3$, $y = 0$, $x = 2$.

Řešení. Množina M je znázorněna na následujícím obrázku.



Zřejmě lze psát

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \in \langle 0, 2 \rangle \wedge 0 \leq y \leq x^3\}.$$

Proto podle věty 1.22 platí

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \left(\int_0^{x^3} x^2 e^{-y} dy \right) dx = \int_0^2 x^2 [-e^{-y}]_{y=0}^{x^3} dx = \int_0^2 x^2 (-e^{-x^3} + 1) dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} \text{substituce} \\ -x^3 = t \\ -3x^2 dx = dt \\ 0 \mapsto 0, 2 \mapsto -8 \end{array} \right| = \frac{1}{3} \int_{-8}^0 (-e^t + 1) dt = \frac{1}{3} [-e^t + t]_{-8}^0 = \frac{7 + e^{-8}}{3}. \end{aligned}$$

Mohli bychom také postupovat jiným způsobem (chápeme-li M jako elementární množinu druhého druhu). Platí totiž

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y \in \langle 0, 8 \rangle \wedge \sqrt[3]{y} \leq x \leq 2\},$$

odkud

$$\begin{aligned} I &= \int_0^8 \left(\int_{\sqrt[3]{y}}^2 x^2 e^{-y} dx \right) dy = \int_0^8 e^{-y} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=\sqrt[3]{y}}^2 dy = \int_0^8 \frac{e^{-y}}{3} (8 - y) dy = \\ &= \left| \begin{array}{l} \text{per-partes} \\ u = 8 - y, \quad v' = \frac{e^{-y}}{3} \\ u' = -1, \quad v = -\frac{1}{3} e^{-y} \end{array} \right| = \left[-\frac{1}{3} e^{-y} (8 - y) \right]_0^8 - \int_0^8 \left(\frac{1}{3} e^{-y} \right) dy = \\ &= \frac{8}{3} + \left[\frac{1}{3} e^{-y} \right]_0^8 = \frac{8}{3} + \frac{1}{3} e^{-8} - \frac{1}{3} = \frac{7 + e^{-8}}{3}. \end{aligned}$$

Vidíme, že při prvním přístupu jsme potřebovali substituční metodu (pro jednorozměrné integrály), zatímco ve druhém řešení bylo potřeba užít metodu per-partes (připomeňte si je – viz např. [1] nebo [2]).

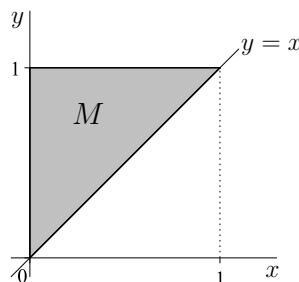
Znění substituční metody pro jednorozměrné integrály ještě zopakujeme před větou o substituci ve dvojném integrálu (viz věta 1.29 na straně 18). ▲

Příklad 1.26. Vypočtěte integrál $I = \iint_M \sin(y^2) \, dx \, dy$, kde

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq y \leq 1\}.$$

Řešení.

Množina M je trojúhelník s vrcholy $(0, 0)$, $(1, 1)$ a $(0, 1)$.



Není těžké si promyslet, že

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \in \langle 0, 1 \rangle \wedge x \leq y \leq 1\},$$

chápeme-li M jako elementární oblast prvního druhu. Podle věty 1.22 pak platí

$$I = \int_0^1 \left(\int_x^1 \sin(y^2) \, dy \right) dx.$$

Zde se však dostáváme do velkých potíží, protože nedokážeme spočítat vnitřní integrál. Dá se totiž ukázat, že $\int \sin(y^2) \, dy$ (tzv. Fresnelův integrál) sice existuje, ale není elementární funkcí, tj. jedná se o vyšší transcendentní funkci.

To ale neznamená, že zadaný dvojný integrál nedokážeme spočítat. Zkusme na množinu M pohlížet jako na elementární oblast druhého druhu, tj.

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y \in \langle 0, 1 \rangle \wedge 0 \leq x \leq y\}.$$

Pak podle věty 1.22 platí

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_0^y \sin(y^2) \, dx \right) dy = \int_0^1 [x \sin(y^2)]_{x=0}^y dy = \int_0^1 y \sin(y^2) \, dy = \\ &= \left| \begin{array}{l} \text{substituce} \\ y^2 = t \\ 2y \, dy = dt \\ y \, dy = \frac{1}{2} dt \\ 0 \mapsto 0, 1 \mapsto 1 \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int_0^1 \sin t \, dt = \frac{1}{2} [-\cos t]_0^1 = \frac{1}{2} (1 - \cos 1). \end{aligned}$$

▲



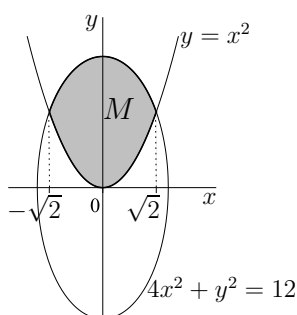
Poznámka 1.27. Poslední příklad ukazuje, že v některých situacích je zcela zásadní, zda množinu M chápeme jako elementární oblast prvního nebo druhého druhu.

Příklad 1.28. Vypočtěte integrál $I = \iint_M |x| \, dx \, dy$, kde



$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 \leq y \wedge 4x^2 + y^2 \leq 12\}.$$

Řešení. Množina M je část elipsy ohraničená parabolou (viz obrázek).



Dále si uvědomme, že můžeme psát

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \in \langle -\sqrt{2}, \sqrt{2} \rangle \wedge x^2 \leq y \leq \sqrt{12 - 4x^2}\}.$$

Odtud (podle věty 1.22) dostaneme

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\int_{x^2}^{\sqrt{12-4x^2}} |x| \, dy \right) dx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \underbrace{|x| (\sqrt{12-4x^2} - x^2)}_{\text{sudá funkce}} dx = \\ &= 2 \int_0^{\sqrt{2}} x (\sqrt{12-4x^2} - x^2) dx = 2 \int_0^{\sqrt{2}} x \sqrt{12-4x^2} dx - \left[\frac{x^4}{2} \right]_0^{\sqrt{2}} = \\ &= 2 \int_0^{\sqrt{2}} x \sqrt{12-4x^2} dx - 2 = \left| \begin{array}{l} \text{substituce} \\ 12-4x^2 = t \\ -8x dx = dt \\ x dx = -\frac{1}{8} dt \\ 0 \mapsto 12, \sqrt{2} \mapsto 4 \end{array} \right| = \frac{1}{4} \int_4^{12} \sqrt{t} dt - 2 = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \left[\sqrt{t^3} \right]_4^{12} - 2 = \frac{1}{6} (12\sqrt{12} - 8) - 2 = 4\sqrt{3} - \frac{10}{3}. \end{aligned}$$

▲

1.4.2 Substituční metoda pro dvojný integrál

Nejdříve si zopakujme substituční metodu v určitém (jednorozměrném) integrálu. Platí následující věta.

Věta 1.29 (substituční metoda). *Nechť funkce φ má spojitou první derivaci na intervalu $\langle a, b \rangle$ a nechť zobrazuje tento interval do intervalu $J \subseteq \mathbb{R}$. Dále nechť funkce f je spojitá na intervalu J . Pak platí*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, dx = \int_a^b f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u) \, du.$$

Věta 1.30 (o substituci ve dvojném integrálu).

1) *Nechť zobrazení $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dané rovnicemi*

$$\left. \begin{aligned} x &= g_1(u, v) \\ y &= g_2(u, v) \end{aligned} \right\}, \quad \text{tzn. } \Phi(u, v) = (g_1(u, v), g_2(u, v)),$$

je prosté na otevřené množině $\Omega_{uv} \subseteq \mathbb{R}^2$, nechť funkce g_1, g_2 jsou třídy C^1 na Ω_{uv} (tj. všechny parciální derivace 1. řádu funkcí g_1 a g_2 jsou spojité na Ω_{uv}) a nechť – tzv. Jacobián –

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial g_1(u, v)}{\partial v} \\ \frac{\partial g_2(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial g_2(u, v)}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

pro každé $(u, v) \in \Omega_{uv}$.

- 2) *Nechť $M_{uv} \subseteq \Omega_{uv}$ a nechť M_{uv} a $M_{xy} = \Phi(M_{uv})$ jsou uzavřené měřitelné množiny.*
 3) *Nechť funkce f je spojitá na M_{xy} .*

Potom

$$\iint_{M_{xy}} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{M_{uv}} f(g_1(u, v), g_2(u, v)) \cdot |J(u, v)| \, du \, dv.$$

Poznámka 1.31. Nalezení správné substituce ve dvojném integrálu je obecně poměrně komplikované a vyžaduje jistou dávku zkušeností. To je ukázáno v následujícím příkladu. Velkou důležitost však bude mít speciální substituce do tzv. polárních souřadnic. To, že by se tato substituce měla použít, už odhalí i méně zkušený počtář.

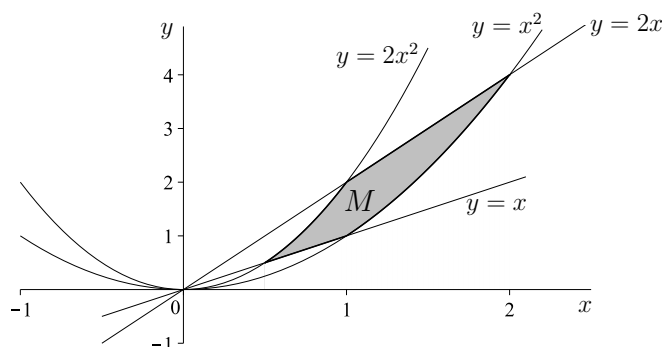


Příklad 1.32. Vypočtěte $I = \iint_M \frac{x}{y} dx dy$, kde

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \leq y \leq 2x \wedge x^2 \leq y \leq 2x^2\} \setminus \{(0, 0)\}.$$

Řešení.

Množina M je znázorněna na následujícím obrázku.



Uvědomíme-li si, že pro $(x, y) \in M$ platí

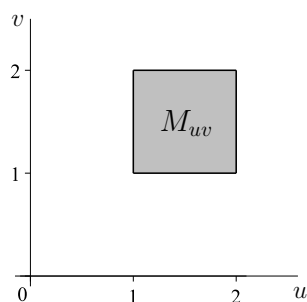
$$1 \leq \frac{y}{x} \leq 2 \quad \text{a} \quad 1 \leq \frac{y}{x^2} \leq 2 \quad (\text{viz zadání}),$$

mohlo by být užitečné zavést nové proměnné u a v vztahy

$$u = \frac{y}{x} \quad \text{a} \quad v = \frac{y}{x^2}. \quad (1.1)$$

Pak by se totiž množina M dala snadno popsat nerovnostmi

$$1 \leq u \leq 2 \quad \text{a} \quad 1 \leq v \leq 2 \quad (\text{viz obrázek}).$$



Pro zdárné provedení substituce ale potřebujeme ze vztahů (1.1) vyjádřit původní proměnné x a y (viz věta 1.30). To ale není obtížné, neboť z prvního vztahu v (1.1) plyne $y = ux$ a dosazením do druhého vztahu dostaneme $v = \frac{u}{x}$, odkud snadno $x = \frac{u}{v}$ a následně $y = \frac{u^2}{v}$. Zavedeme tedy substituci

$$\begin{aligned} x &= \frac{u}{v} \quad (= g_1(u, v)), \\ y &= \frac{u^2}{v} \quad (= g_2(u, v)). \end{aligned}$$

Tím je definováno zobrazení Φ z věty 1.30. Položme $\Omega_{uv} = (0, +\infty) \times (0, +\infty)$ (otevřená množina) a $M_{uv} = \langle 1, 2 \rangle \times \langle 1, 2 \rangle$. Pak nutně $\Phi(M_{uv}) = M$ (viz úvahy výše). Jistě $M_{uv} \subseteq \Omega_{uv}$. Navíc M_{uv} a M jsou uzavřené měřitelné množiny. Dále platí

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \\ \frac{2u}{v} & -\frac{u^2}{v^2} \end{vmatrix} = -\frac{u^2}{v^3} + \frac{2u^2}{v^3} = \frac{u^2}{v^3} \neq 0 \quad \text{na } \Omega_{uv}.$$

Podle věty 1.30 platí

$$\begin{aligned} I &= \iint_{M_{uv}} \frac{u}{v} \cdot \left| \frac{u^2}{v^3} \right| du dv = \iint_{M_{uv}} \frac{u}{v^3} du dv = \int_1^2 \left(\int_1^2 \frac{u}{v^3} du \right) dv = \\ &= \left(\int_1^2 u du \right) \cdot \left(\int_1^2 \frac{1}{v^3} dv \right) = \left[\frac{u^2}{2} \right]_1^2 \cdot \left[-\frac{1}{2v^2} \right]_1^2 = \left(2 - \frac{1}{2} \right) \cdot \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{2} \right) = \frac{9}{16}. \end{aligned}$$

▲

Poznámka 1.33. V posledním příkladu jsme využili následujícího faktu (předpokládáme spojitost funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$ a funkce g na intervalu $\langle c, d \rangle$):

$$\begin{aligned} \iint_{\langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle} f(x)g(y) dx dy &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x)g(y) dy \right) dx = \\ &= \int_a^b f(x) \cdot \underbrace{\left(\int_c^d g(y) dy \right)}_{\text{konstanta}} dx = \left(\int_c^d g(y) dy \right) \cdot \left(\int_a^b f(x) dx \right). \end{aligned}$$

Domácí cvičení 1.34. Pokuste se předchozí příklad spočítat bez použití věty o substituci ve dvojném integrálu.

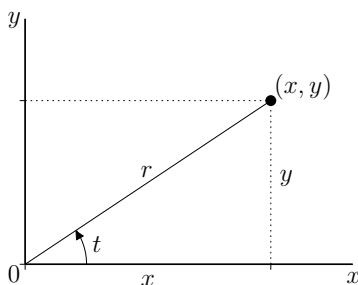
1.4.3 Substituce do polárních souřadnic

V této kapitole si ukážeme jeden významný speciální případ věty 1.30 (věta o substituci dvojného integrálu).

Jedná se o substituci

$$\begin{aligned} x &= r \cos t, \\ y &= r \sin t, \end{aligned}$$

kde $r \geq 0$ a $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ (popř. $t \in \langle -\pi, \pi \rangle$ nebo $t \in \langle \alpha, \alpha + 2\pi \rangle$ pro $\alpha \in \mathbb{R}$).



Přímým výpočtem zjistíme, že

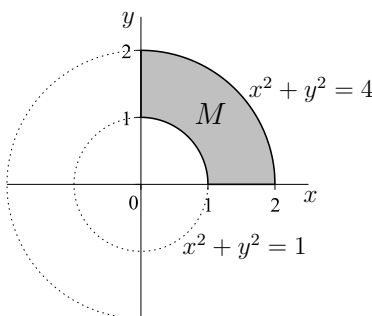
$$J(r, t) = \begin{vmatrix} \cos t & -r \sin t \\ \sin t & r \cos t \end{vmatrix} = r \cos^2 t + r \sin^2 t = r.$$

Poznámka 1.35. Tuto substituci lze zpravidla s úspěchem aplikovat v případech, že hranice množiny M , přes kterou integrujeme, obsahuje části kružnic. Vhodnost této substituce však také závisí na integrované funkci.

Příklad 1.36. Vypočtěte integrál $I = \iint_M x \, dx \, dy$, kde

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Řešení. Množina M je čtvrtina mezikruží se středem v počátku a s poloměry 1 a 2.



Bude proto vhodné zavést polární souřadnice

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t \quad (J(r, t) = r).$$

Pokusíme se tedy množinu M popsat v těchto nových souřadnicích. Vzhledem ke geometrickému významu proměnné t snadno dostaneme první omezení $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Nyní si představme, že úhel t je zafixován a zkoumejme, jak se může měnit r (vzdálenost od počátku). Z obrázku vidíme, že $1 \leq r \leq 2$. Proto platí

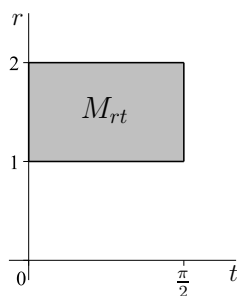
$$M = \left\{ (r \cos t, r \sin t) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \wedge 1 \leq r \leq 2 \right\}. \quad (1.2)$$

Položme

$$\Omega_{rt} = (0, +\infty) \times (-\pi, \pi)$$

a

$$M_{rt} = \left\{ (r, t) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \wedge 1 \leq r \leq 2 \right\}.$$



Věta 1.30 (s využitím poznámky 1.33) dává

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^2 r \cos t \cdot \underbrace{|J(r, t)|}_r dr \right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^2 r^2 \cos t dr \right) dt = \\ &= \left(\int_1^2 r^2 dr \right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt \right) = \left[\frac{r^3}{3} \right]_1^2 \cdot [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

▲

Poznámka 1.37. Pokud bychom omezení (1.2) nedokázali sestavit na základě obrázku, museli bychom ho získat výpočtem – a to tak, že transformační vztahy

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t$$

dosadíme do nerovností, jimiž je množina M zadáná. Přitom přihlédneme k tomu, že $r \geq 0$ a $t \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

V našem případě bychom dostali

$$r \cos t \geq 0, \quad r \sin t \geq 0 \quad \text{a} \quad 1 \leq \underbrace{r^2 \cos^2 t + r^2 \sin^2 t}_{r^2} \leq 4.$$

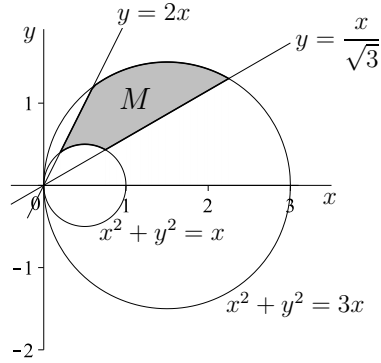
Z poslední podmínky (a $r \geq 0$) získáme $1 \leq r \leq 2$ a z prvních dvou poté dostaneme $\cos t \geq 0$ a $\sin t \geq 0$, odkud (vzhledem k $t \in \langle -\pi, \pi \rangle$) plyne, že t leží v prvním kvadrantu, tj. $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.



Příklad 1.38. Vypočítejte integrál $I = \iint_M \frac{1}{(x^2+y^2)^2} dx dy$, kde

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq 2x \wedge x \leq x^2 + y^2 \leq 3x \right\} \setminus \{(0, 0)\}.$$

Řešení.



Provedeme transformaci do polárních souřadnic. Protože pro každé $(x, y) \in M$ platí $x > 0$ a $y > 0$, ze vztahů $x = r \cos t$, $y = r \sin t$ (a $r \geq 0$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$) plyne $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ a $r > 0$. Z podmínky $\frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq 2x$ plyne

$$\frac{r \cos t}{\sqrt{3}} \leq r \sin t \leq 2r \cos t,$$

odkud

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \leq \operatorname{tg} t \leq 2,$$

tj. $t \in \langle \frac{\pi}{6}, \operatorname{arctg} 2 \rangle$. Podobně, z podmínky $x \leq x^2 + y^2 \leq 3x$ obdržíme

$$r \cos t \leq \underbrace{r^2 \cos^2 t + r^2 \sin^2 t}_{r^2} \leq 3r \cos t,$$

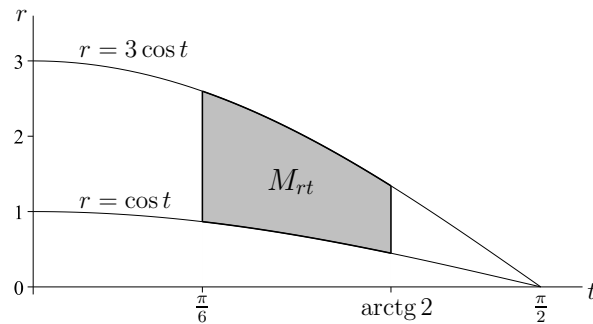
což dává nerovnost $\cos t \leq r \leq 3 \cos t$.

Položme

$$\Omega_{rt} = (0, +\infty) \times (0, 2\pi)$$

a

$$M_{rt} = \{(r, t) \in \mathbb{R}^2: t \in \langle \frac{\pi}{6}, \operatorname{arctg} 2 \rangle \wedge \cos t \leq r \leq 3 \cos t\}.$$



Podle věty 1.30 a Fubiniovy věty 1.22 máme

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\operatorname{arctg} 2} \left(\int_{\cos t}^{3 \cos t} \frac{1}{(r^2 \cos^2 t + r^2 \sin^2 t)^2} \cdot r \, dr \right) dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\operatorname{arctg} 2} \left(\int_{\cos t}^{3 \cos t} \frac{1}{r^3} \, dr \right) dt = \\
 &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\operatorname{arctg} 2} \left[-\frac{1}{2r^2} \right]_{r=\cos t}^{3 \cos t} dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\operatorname{arctg} 2} -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{9 \cos^2 t} - \frac{1}{\cos^2 t} \right) dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\operatorname{arctg} 2} \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt = \\
 &= \frac{4}{9} [\operatorname{tg} t]_{\frac{\pi}{6}}^{\operatorname{arctg} 2} = \frac{4}{9} \left(\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2) - \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \right) = \frac{4}{9} \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) = \frac{8}{9} - \frac{4\sqrt{3}}{27}.
 \end{aligned}$$

▲

Domácí cvičení 1.39. Pokuste se na omezení

$$t \in \langle \frac{\pi}{6}, \operatorname{arctg} 2 \rangle \quad \text{a} \quad \cos t \leq r \leq 3 \cos t$$

z předchozího příkladu přijít pouze na základě geometrické úvahy.

1.4.4 Substituce do zobecněných polárních souřadnic

Tentokrát uvažujme substituci

$$\begin{aligned}
 x &= a \cdot r \cos t, \\
 y &= b \cdot r \sin t,
 \end{aligned}$$

kde $a, b > 0$ jsou konstanty, $r \geq 0$ a $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ (popř. $t \in \langle -\pi, \pi \rangle$ nebo $t \in \langle \alpha, \alpha + 2\pi \rangle$ pro $\alpha \in \mathbb{R}$).

Přímým výpočtem opět zjistíme

$$J(r, t) = \begin{vmatrix} a \cos t & -ar \sin t \\ b \sin t & br \cos t \end{vmatrix} = ab \cdot r \cos^2 t + ab \cdot r \sin^2 t = ab \cdot r.$$

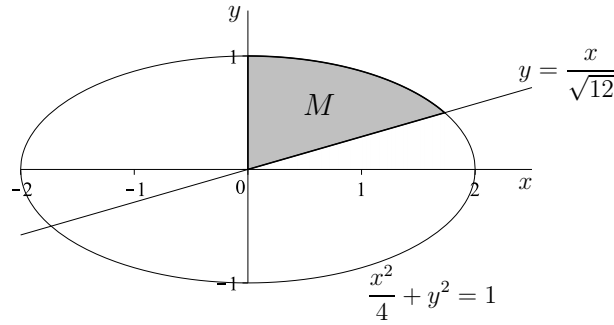
Poznámka 1.40. Substituci do zobecněných polárních souřadnic zpravidla používáme, pokud hranice oblasti, přes kterou integrujeme, má eliptický tvar (a, b jsou poloosy zmíněné elipsy).



Příklad 1.41. Vypočtěte integrál $\iint_M (x - 2y) \, dx \, dy$, kde

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1 \wedge 0 \leq x \leq \sqrt{12} \cdot y \right\}.$$

Řešení.



Použijeme zobecněné polární souřadnice

$$\begin{aligned} x &= 2r \cos t, \\ y &= r \sin t, \end{aligned} \quad (J(r, t) = 2r).$$

Podmínka $0 \leq x \leq \sqrt{12} \cdot y$ pak dává $0 \leq 2r \cos t \leq \sqrt{12} \cdot r \sin t$ a $t \in (0, \frac{\pi}{2})$. Odtud snadno

$$\cotg t \leq \frac{\sqrt{12}}{2} = \sqrt{3}.$$

Proto dostáváme, že $t \in \langle \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \rangle$. Podmínka $\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$ dává

$$\underbrace{\frac{4r^2 \cos^2 t}{4} + r^2 \sin^2 t}_{r^2} \leq 1,$$

odkud (vzhledem k podmínce $r \geq 0$) máme $0 \leq r \leq 1$. Podle věty 1.30 tedy platí

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 (2r \cos t - 2r \sin t) \cdot 2r \, dr \right) dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 4r^2 (\cos t - \sin t) \, dr \right) dt = \\ &= 4 \cdot \left(\int_0^1 r^2 \, dr \right) \cdot \left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos t - \sin t) \, dt \right) = 4 \cdot \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^1 \cdot [\sin t + \cos t]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= 4 \cdot \frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) = \frac{2}{3} (1 - \sqrt{3}). \end{aligned}$$

▲

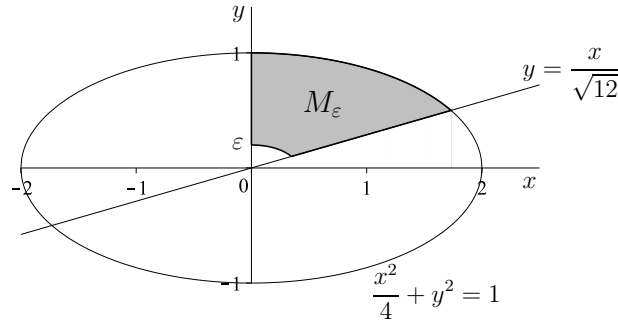
Poznámka 1.42. Všimněme si, že jsme užili tvrzení věty 1.30 (o substituci dvojného integrálu), a to přesto, že nebyly splněny všechny její předpoklady.

Zobrazení $\Phi(r, t) = (2r \cos t, r \sin t)$ totiž zobrazuje celou úsečku $\{0\} \times \langle \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \rangle$ do bodu $(0, 0)$ (tj. zobrazení Φ není prosté) a navíc $J(0, t) = 0$.

Takovéto nekorektnosti (kdy předpoklady věty 1.30 nebudou splněny na jisté množině míry nula) se dopustíme častěji. V „rozumných případech“ i přes tuto nekorektnost získáme správný výsledek.

Poznámka 1.43 (náznak korektního řešení příkladu 1.41). Pro $\varepsilon \in (0, 1)$ definujeme množinu

$$M_\varepsilon = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \varepsilon^2 \leq \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1 \wedge 0 \leq x \leq \sqrt{12} \cdot y \right\}.$$



Není těžké ukázat, že

$$I = \iint_M (x - 2y) \, dx \, dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \iint_{M_\varepsilon} (x - 2y) \, dx \, dy.$$

Pro každé $\varepsilon \in (0, 1)$ však integrál $I_\varepsilon = \iint_{M_\varepsilon} (x - 2y) \, dx \, dy$ můžeme (tentokrát zcela korektně) transformovat do zobecněných polárních souřadnic. Zvolíme-li $\Omega_{rt} = (0, +\infty) \times (0, 2\pi)$, $M_{rt} = \langle \varepsilon, 1 \rangle \times \langle \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \rangle$, pak všechny předpoklady věty 1.30 jsou splněny a platí

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= \iint_{M_\varepsilon} (x - 2y) \, dx \, dy = \iint_{M_{rt}} (2r \cos t - 2r \sin t) \cdot 2r \, dr \, dt = \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\varepsilon}^1 (2r \cos t - 2r \sin t) \cdot 2r \, dr \right) dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\varepsilon}^1 4r^2 (\cos t - \sin t) \, dr \right) dt = \\ &= 4 \cdot \left(\int_{\varepsilon}^1 r^2 \, dr \right) \cdot \left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos t - \sin t) \, dt \right) = 4 \cdot \left[\frac{r^3}{3} \right]_{\varepsilon}^1 \cdot [\sin t + \cos t]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= 4 \left(\frac{1}{3} - \frac{\varepsilon^3}{3} \right) \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) = \frac{2}{3} (1 - \varepsilon^3) (1 - \sqrt{3}). \end{aligned}$$

Proto platí

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} I_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{2}{3} (1 - \varepsilon^3) (1 - \sqrt{3}) = \frac{2}{3} (1 - \sqrt{3}).$$

1.5 Pro zájemce

Nyní si ukážeme, jak lze dvojné integrály využít i při počítání integrálů funkcí jedné reálné proměnné, které bychom jinak nebyli schopni spočítat. Dále uvidíme využití dvojných integrálů při důkazu tzv. základní věty algebry, což je velmi důležité tvrzení týkající se polynomů.



1.5.1 Výpočty některých jednorozměrných integrálů

Příklad 1.44. Necht $0 < a < b$ jsou libovolná reálná čísla. Vypočtěte integrál



$$I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx.$$

Řešení. V první řadě si uvědomme, že zadaný nevlastní integrál opravdu existuje. Funkce $f(x) = \frac{x^b - x^a}{\ln x}$ totiž není spojitá na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, proto existence integrálu není zřejmá. Není však těžké si rozmyslet, že

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{bx^{b-1} - ax^{a-1}}{\frac{1}{x}} = b - a.$$

Při výpočtu druhé limity jsme použili l'Hospitalovo pravidlo. Vidíme, že obě jednostranné limity jsou konečné, a proto lze funkci f , která je spojitá v otevřeném intervalu $(0, 1)$, spojitě rozšířit na uzavřený interval $\langle 0, 1 \rangle$. Proto uvažovaný integrál

$$I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$$

existuje (viz věta 1.1). Kdybychom chtěli integrál řešit klasickou cestou, museli bychom vypočítat primitivní funkci k funkci $f(x) = \frac{x^b - x^a}{\ln x}$. To by se nám ale nepodařilo. Nyní si ukážeme, jak lze situaci vyřešit s použitím dvojného integrálu. Uvažujme integrál

$$J = \iint_M x^y dx dy, \quad \text{kde } M = \langle 0, 1 \rangle \times \langle a, b \rangle.$$

Poznamenejme, že pro $x > 0$ výrazem x^y rozumíme $e^{y \ln x}$ a pro $y > 0$ klademe $0^y = 0$. Snadno se vidí, že funkce $g(x, y) = x^y$ je na (uzavřené) množině M spojitá, a tedy integrovatelná (viz věta 1.7). Z Fubiniovy věty (věta 1.8) plyne, že

$$J = \int_0^1 \left(\int_a^b x^y dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{x^y}{\ln x} \right]_{y=a}^b dx = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = I. \quad (1.3)$$

Na druhé straně (zaměníme-li pořadí integrace) dostaneme

$$\begin{aligned} J &= \int_a^b \left(\int_0^1 x^y dx \right) dy = \int_a^b \left[\frac{x^{y+1}}{y+1} \right]_{x=0}^1 dy = \int_a^b \frac{1}{y+1} dy = \\ &= [\ln(y+1)]_a^b = \ln(b+1) - \ln(a+1) = \ln \frac{b+1}{a+1}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Celkem tedy (viz (1.3) a (1.4))

$$I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \ln \frac{b+1}{a+1}.$$

▲



Příklad 1.45. Vypočítejte tzv. Laplaceův integrál

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Řešení. Jedná se o nevlastní Riemannův integrál. Integrovaná funkce je kladná, odkud snadno usoudíme, že

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} I_a, \quad \text{kde } I_a = \int_{-a}^a e^{-x^2} dx.$$

Standardní výpočet tohoto integrálu (pomocí primitivní funkce) by selhal. Funkce e^{-x^2} sice primitivní funkci má (vzhledem ke spojitosti), ale tato není elementární funkcí, tzn. nelze ji vyjádřit pomocí konečně mnoha „základních“ početních operací – jedná se o tzv. vyšší transcendentní funkci.

Uvažujme dvojný integrál

$$J_a = \iint_{M_a} e^{-x^2-y^2} dx dy, \quad \text{kde } M_a = \langle -a, a \rangle \times \langle -a, a \rangle.$$

Fubiniova věta dává

$$\begin{aligned} J_a &= \int_{-a}^a \left(\int_{-a}^a e^{-x^2-y^2} dy \right) dx = \int_{-a}^a \left(\int_{-a}^a e^{-x^2} \cdot e^{-y^2} dy \right) dx = \\ &= \int_{-a}^a \left(e^{-x^2} \int_{-a}^a e^{-y^2} dy \right) dx = \int_{-a}^a (e^{-x^2} \cdot I_a) dx = I_a \cdot \int_{-a}^a e^{-x^2} dx = I_a \cdot I_a = I_a^2. \end{aligned}$$

Pro každé $p > 0$ uvažujme kruh $U_p = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq p^2\}$. Snadno si rozmyslíme, že pro libovolné $a > 0$ je $U_a \subseteq M_a \subseteq U_{a\sqrt{2}}$.¹ Vzhledem k tomu, že integrovaná funkce je kladná, dostaneme

$$\iint_{U_a} e^{-x^2-y^2} dx dy \leq J_a = \iint_{M_a} e^{-x^2-y^2} dx dy \leq \iint_{U_{a\sqrt{2}}} e^{-x^2-y^2} dx dy. \quad (1.5)$$

¹Nakreslete si obrázek.

Pro libovolné $p > 0$ však integrál $\iint_{U_p} e^{-x^2-y^2} dx dy$ lze spočítat transformací do polárních souřadnic $x = r \cos t$, $y = r \sin t$ (nezapomeneme na Jacobián $J = r$).

$$\begin{aligned} \iint_{U_p} e^{-x^2-y^2} dx dy &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^p e^{-r^2} \cdot r dr \right) dt = \left| \begin{array}{l} \text{substitute} \\ -r^2 = s \\ -2r dr = ds \\ -r dr = \frac{1}{2} ds \\ 0 \mapsto 0, p \mapsto -p^2 \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\int_{-p^2}^0 e^s ds \right) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [e^s]_{-p^2}^0 dt = \pi (1 - e^{-p^2}). \end{aligned}$$

Proto platí

$$\iint_{U_a} e^{-x^2-y^2} dx dy = \pi (1 - e^{-a^2}) \quad \text{a} \quad \iint_{U_{a\sqrt{2}}} e^{-x^2-y^2} dx dy = \pi (1 - e^{-2a^2}),$$

odkud (vzhledem k (1.5))

$$\begin{aligned} \pi (1 - e^{-a^2}) &\leq J_a = I_a^2 \leq \pi (1 - e^{-2a^2}) \\ &\Downarrow \\ \sqrt{\pi (1 - e^{-a^2})} &\leq I_a \leq \sqrt{\pi (1 - e^{-2a^2})}. \end{aligned}$$

Protože

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \sqrt{\pi (1 - e^{-a^2})} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \sqrt{\pi (1 - e^{-2a^2})} = \sqrt{\pi},$$

je

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} I_a = \sqrt{\pi}.$$

▲

1.5.2 Základní věta algebry

Jako další ukázkou použití dvojných integrálů uvedeme důkaz tzv. základní věty algebry.

Věta 1.46 (Základní věta algebry).

Nechť $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ je polynom definovaný předpisem

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0,$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ a $a_n \neq 0$. Pak existuje $z_0 \in \mathbb{C}$ takové, že $f(z_0) = 0$.

Poznámka 1.47. Základní věta algebry vlastně tvrdí, že libovolný nekonstantní polynom (tj. polynom stupně alespoň 1) s komplexními koeficienty má alespoň jeden komplexní kořen.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že polynom f je normovaný, tj. $a_n = 1$. Pak polynom f má tvar

$$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0.$$

Koeficienty tohoto polynomu jsou komplexní čísla, a proto můžeme psát

$$a_k = \alpha_k + i\beta_k \quad (k \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \quad \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}).$$

Komplexní proměnnou z polynomu f pišme v „goniometrickém tvaru“, tj.

$$z = r(\cos t + i \sin t), \quad \text{kde } r, t \in \mathbb{R}.$$

Pak zřejmě dostaneme¹

$$\begin{aligned} f(z) &= z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k = r^n (\cos nt + i \sin nt) + \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k + i\beta_k) \left(r^k (\cos kt + i \sin kt) \right) = \\ &= \underbrace{\left[r^n \cos nt + \sum_{k=0}^{n-1} r^k (\alpha_k \cos kt - \beta_k \sin kt) \right]}_{p(r,t)} + i \underbrace{\left[r^n \sin nt + \sum_{k=0}^{n-1} r^k (\alpha_k \sin kt + \beta_k \cos kt) \right]}_{q(r,t)}. \end{aligned}$$

Tím jsou definovány nekonečně diferencovatelné funkce $p, q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ splňující

$$f(r(\cos t + i \sin t)) = p(r, t) + iq(r, t) \quad \text{pro každé } (r, t) \in \mathbb{R}^2.$$

Předpokládejme sporem, že pro každé $z \in \mathbb{C}$ platí $f(z) \neq 0$. To ale znamená, že pro každé $(r, t) \in \mathbb{R}^2$ platí

$$p^2(r, t) + q^2(r, t) > 0$$

(p a q nemohou být v žádném bodě současně nulové).

Definujme funkce $u, v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ předpisy

$$u(r, t) = \frac{p'_r(r, t)q(r, t) - p(r, t)q'_r(r, t)}{p^2(r, t) + q^2(r, t)}, \quad v(r, t) = \frac{p'_t(r, t)q(r, t) - p(r, t)q'_t(r, t)}{p^2(r, t) + q^2(r, t)}.$$

Vzhledem k předchozímu jsou funkce u a v spojité v celém $\mathbb{R}^2$. Dokonce i všechny jejich parciální derivace všech řádů jsou spojité v celém $\mathbb{R}^2$ (tj. $u, v \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$).

¹Je potřeba použít Moivreovu větu

$$(\forall n \in \mathbb{N}) (\forall r, t \in \mathbb{R}) : (r(\cos t + i \sin t))^n = r^n (\cos nt + i \sin nt).$$

Nyní ukážeme, že pro libovolný bod $(r, t) \in \mathbb{R}^2$ platí

$$u'_t(r, t) = v'_r(r, t).$$

Nechť tedy $(r_0, t_0) \in \mathbb{R}^2$ je libovolný (pevně zvolený) bod.

Jestliže $q(r_0, t_0) \neq 0$, pak jistě $q(r, t) \neq 0$ i v nějakém okolí bodu (r_0, t_0) . Přímým výpočtem lze ověřit, že v tomto okolí platí

$$u(r, t) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\operatorname{arctg} \frac{p(r, t)}{q(r, t)} \right) \quad \text{a} \quad v(r, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\operatorname{arctg} \frac{p(r, t)}{q(r, t)} \right).$$

Rovnost $u'_t(r_0, t_0) = v'_r(r_0, t_0)$ pak plyne z věty o záměnnosti parciálních derivací (viz např. [5]).

Je-li $q(r_0, t_0) = 0$, pak (vzhledem k podmínce $p^2(r_0, t_0) + q^2(r_0, t_0) > 0$) platí $p(r_0, t_0) \neq 0$. V takovém případě je $p(r, t) \neq 0$ v jistém okolí bodu (r_0, t_0) . V tomto okolí však platí

$$u(r, t) = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\operatorname{arctg} \frac{q(r, t)}{p(r, t)} \right) \quad \text{a} \quad v(r, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\operatorname{arctg} \frac{q(r, t)}{p(r, t)} \right).$$

Rovnost $u'_t(r_0, t_0) = v'_r(r_0, t_0)$ plyne opět z věty o záměnnosti.

Pro $R > 0$ uvažujme dvojný integrál

$$I_R = \iint_{M_R} u'_t(r, t) \, dr \, dt, \quad \text{kde } M_R = \langle 0, R \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Podle věty 1.7 výše uvedený integrál existuje. Z věty 1.8 navíc pro každé $R > 0$ dostaneme

$$I_R = \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} u'_t(r, t) \, dt \right) dr = \int_0^R [u(r, t)]_{t=0}^{2\pi} dr = \int_0^R \underbrace{(u(r, 2\pi) - u(r, 0))}_0 dr = 0.$$

Zde jsme využili toho, že pro každé $r \in \mathbb{R}$ je funkce $t \mapsto u(r, t)$ (proměnné t) periodická s periodou 2π .

Integrál I_R však můžeme spočítat i jinak (opět využijeme věty 1.8 a již dokázané vlastnosti $u'_t = v'_r$).

$$\begin{aligned} I_R &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R u'_t(r, t) \, dr \right) dt = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R v'_r(r, t) \, dr \right) dt = \int_0^{2\pi} [v(r, t)]_{r=0}^R dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (v(R, t) - v(0, t)) dt = \int_0^{2\pi} v(R, t) dt. \end{aligned}$$

Použili jsme fakt, že $v(0, t) = 0$. Ten ověříme přímým výpočtem (neboť $p'_t(0, t) = q'_t(0, t) = 0$).

Dále můžeme spočítat, že pro každé $(r, t) \in \mathbb{R}^2$ platí

$$v(r, t) = \frac{-nr^{2n} + f_{2n-1}(t)r^{2n-1} + \dots + f_1(t)r + f_0(t)}{r^{2n} + g_{2n-1}(t)r^{2n-1} + \dots + g_1(t)r + g_0(t)},$$

kde $f_0, \dots, f_{2n-1}$ a $g_0, \dots, g_{2n-1}$ jsou omezené funkce proměnné t . Úpravou získáme

$$v(r, t) = \frac{-n + \frac{f_{2n-1}(t)}{r} + \dots + \frac{f_1(t)}{r^{2n-1}} + \frac{f_0(t)}{r^{2n}}}{1 + \frac{g_{2n-1}(t)}{r} + \dots + \frac{g_1(t)}{r^{2n-1}} + \frac{g_0(t)}{r^{2n}}}.$$

Odtud snadno odvodíme, že pro každé $t \in \mathbb{R}$ je

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} v(r, t) = -n.$$

Protože funkce $f_0, \dots, f_{2n-1}$ a $g_0, \dots, g_{2n-1}$ jsou omezené, je výše uvedená konvergence stejnoměrná vzhledem k t . To však znamená, že pro dostatečně velké $R > 0$ platí

$$v(R, t) < -\frac{1}{2}n \quad \text{pro každé } t \in \mathbb{R}.$$

Pro takto zvolené R máme

$$I_R = \int_0^{2\pi} v(R, t) dt < \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2}n dt = -\pi n < 0,$$

což je spor, neboť dříve jsme zjistili, že pro libovolné $R > 0$ platí $I_R = 0$. □

1.6 Některé aplikace dvojného integrálu

1.6.1 Obsah rovinného obrazce

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^2$ je měřitelná množina. Pak pro obsah (míru) $\lambda(M)$ rovinného obrazce M platí

$$\lambda(M) = \iint_M 1 dx dy.$$



Příklad 1.48. Pro libovolné $a > 0$ vypočtěte obsah rovinného obrazce

$$M_a = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)^2 \leq 2a^2 xy \right\}.$$

Řešení. Nejprve popíšeme množinu M_a v polárních souřadnicích. Proto do podmínky

$$(x^2 + y^2)^2 \leq 2a^2 xy$$

dosadíme transformační vztahy

$$x = r \cos t \quad \text{a} \quad y = r \sin t.$$

Obdržíme tedy

$$\begin{aligned} (r^2 \cos^2 t + r^2 \sin^2 t)^2 &\leq 2a^2 r \cos t \cdot r \sin t, \\ (r^2)^2 &\leq 2a^2 r^2 \cos t \sin t, \\ r^4 &\leq a^2 r^2 \sin 2t, \\ r^2 (r^2 - a^2 \sin 2t) &\leq 0. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Nechť nyní $t \in \langle -\pi, \pi \rangle$ je pevné. Zkoumejme, jaká $r \geq 0$ pak vyhovují podmínce (1.6). Jestliže

$$t \in \left\langle -\pi, -\frac{\pi}{2} \right\rangle \cup \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle \quad (\text{první a třetí kvadrant}),$$

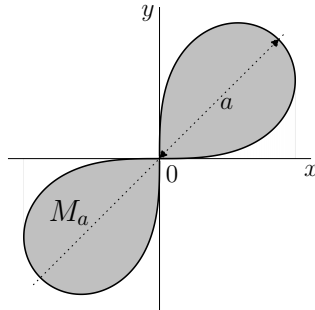
tj. v případě $\sin 2t \geq 0$, dostáváme z (1.6)

$$0 \leq r \leq a\sqrt{\sin 2t}.$$

Jestliže

$$t \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right),$$

tj. v případě $\sin 2t < 0$, vyhovuje podmínce (1.6) pouze $r = 0$.



Z vět 1.30 a 1.22 plyne, že

$$\begin{aligned} \lambda(M_a) &= \iint_{M_a} 1 \, dx \, dy \stackrel{\text{pol. souř.}}{=} \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{a\sqrt{\sin 2t}} r \, dr \right) dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{a\sqrt{\sin 2t}} r \, dr \right) dt = \\ &= \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{a\sqrt{\sin 2t}} dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{a\sqrt{\sin 2t}} dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} a^2 \sin 2t \, dt + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin 2t \, dt = \\ &= -\frac{1}{4} a^2 \underbrace{[\cos 2t]_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}}_{-2} - \frac{1}{4} a^2 \underbrace{[\cos 2t]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{-2} = \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} a^2 = a^2. \end{aligned}$$

▲

Poznámka 1.49. Hranice množiny M_a z předchozího příkladu je křivka zvaná lemniskáta.

1.6.2 Objem válcového tělesa

Bud'

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in M \wedge 0 \leq z \leq f(x, y)\},$$

kde $M \subseteq \mathbb{R}^2$ je uzavřená měřitelná množina a f je nezáporná a spojitá funkce na M . Objem $V(T)$ tělesa T pak definujeme pomocí vzorce

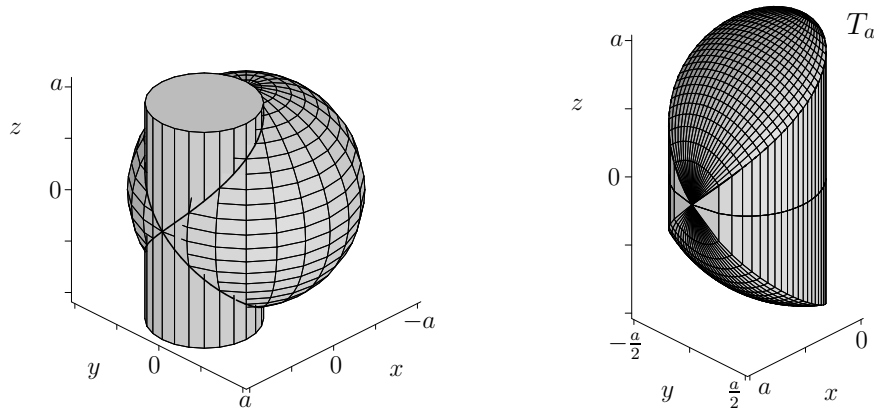
$$V(T) = \iint_M f(x, y) \, dx \, dy.$$



Příklad 1.50. Pro libovolné $a > 0$ vypočítejte objem tzv. Vivianiova tělesa

$$T_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2 \wedge x^2 + y^2 \leq ax\}.$$

Řešení. Těleso T_a je průnikem koule o poloměru a a rotačního válce majícího průměr a , přičemž plášť válce prochází středem koule (viz obrázek).



Vzhledem k symetrii tělesa T_a podle roviny $z = 0$ je zřejmé, že $V(T_a) = 2V(T_a^*)$, kde

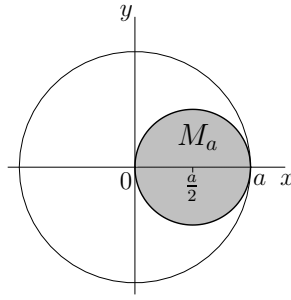
$$T_a^* = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq ax \wedge 0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\}.$$

Dále je jasné, že

$$V(T_a^*) = \iint_{M_a} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \, dx \, dy,$$

kde

$$M_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq ax\}.$$



Přejdeme-li k polárním souřadnicím $x = r \cos t$, $y = r \sin t$, omezení $x^2 + y^2 \leq ax$ dostane tvar (nutno přihlídnout k podmínkám $r \geq 0$ a $t \in \langle -\pi, \pi \rangle$)

$$\begin{aligned} r^2 \cos^2 t + r^2 \sin^2 t &\leq ar \cos t, \\ r^2 &\leq ar \cos t, \\ r(r - a \cos t) &\leq 0, \end{aligned} \quad (1.7)$$

odkud máme $(r - a \cos t) \leq 0$, tj.

$$0 \leq r \leq a \cos t.$$

Z poslední nerovnosti (vzhledem k nezápornosti výrazu $a \cos t$ a $a > 0$) snadno dostaneme

$$t \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle.$$

Proto platí

$$\begin{aligned} V(T_a) &= 2V(T_a^*) = \\ &= 2 \iint_{M_a} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \, dx \, dy \stackrel{\text{pol. souř.}}{=} 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{a \cos t} r \sqrt{a^2 - r^2} \, dr \right) dt = \\ &= \left| \begin{array}{l} \text{substituce} \\ a^2 - r^2 = u \\ -2r \, dr = du \\ r \, dr = -\frac{1}{2} du \\ 0 \mapsto a^2, \, a \cos t \mapsto a^2 \sin^2 t \end{array} \right| = - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{a^2}^{a^2 \sin^2 t} \sqrt{u} \, du \right) dt = \\ &= \frac{2}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\sqrt{u^3} \right]_{a^2 \sin^2 t}^{a^2} dt = \frac{2}{3} a^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{(1 - |\sin t|^3)}_{\text{sudá funkce}} dt = \frac{4}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 t) dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\pi a^3}{3} - \frac{4}{3}a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{(1 - \cos^2 t) \sin t}_{\sin^3 t} dt = \left| \begin{array}{l} \text{substituce} \\ \cos t = v \\ -\sin t dt = dv \\ \sin t dt = -dv \\ 0 \mapsto 1, \frac{\pi}{2} \mapsto 0 \end{array} \right| = \\
&= \frac{2\pi a^3}{3} + \frac{4}{3}a^3 \int_1^0 (1 - v^2) dv = \frac{2\pi a^3}{3} - \frac{4}{3}a^3 \int_0^1 (1 - v^2) dv = \\
&= \frac{2\pi a^3}{3} - \frac{4}{3}a^3 \left[v - \frac{v^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2\pi a^3}{3} - \frac{8}{9}a^3 = a^3 \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{8}{9} \right).
\end{aligned}$$

▲

1.6.3 Obsah plochy

Bud' $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^2$ uzavřená měřitelná množina a bud' $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ třídy C^1 na otevřené množině $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ takové, že $M \subseteq \Omega$. To znamená, že f má na Ω spojitě parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$. Obsah plochy τ definované jako graf funkce $f|_M$, tj.

$$\tau = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: (x, y) \in M \wedge z = f(x, y)\},$$

definujeme pomocí vzorce

$$P(\tau) = \iint_M \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)^2} dx dy.$$



Příklad 1.51. Pro libovolné $a > 0$ vypočítejte obsah plochy

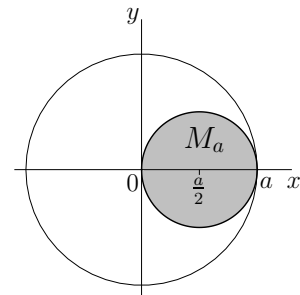
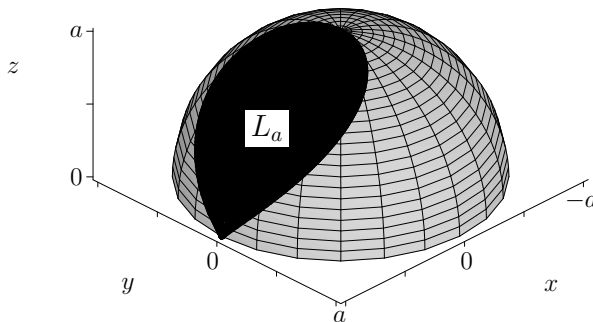
$$L_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: z \geq 0 \wedge x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \wedge x^2 + y^2 \leq ax\}.$$

Řešení. Jistě platí

$$L_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: (x, y) \in M_a \wedge z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\},$$

kde

$$M_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq ax\}.$$



Položme

$$f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}.$$

Snadno se vidí, že

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \quad \text{a} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

Proto platí

$$P(L_a) = \iint_{M_a} \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2}} \, dx \, dy = \iint_{M_a} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \, dx \, dy.$$

Zavedením polárních souřadnic (viz předchozí příklad) získáme

$$\begin{aligned} P(L_a) &= a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{a \cos t} \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} \, dr \right) dt = \left| \begin{array}{l} \text{substituce} \\ a^2 - r^2 = u \\ -2r \, dr = du \\ r \, dr = -\frac{1}{2} du \\ 0 \mapsto a^2, \, a \cos t \mapsto a^2 \sin^2 t \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{2} a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{a^2 \sin^2 t}^{a^2} \frac{1}{\sqrt{u}} \, du \right) dt = a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\sqrt{u}]_{a^2 \sin^2 t}^{a^2} dt = a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{(a - a|\sin t|)}_{\text{sudá funkce}} dt = \\ &= 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin t) \, dt = 2a^2 [t + \cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2a^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = a^2(\pi - 2). \end{aligned}$$

▲

Poznámka 1.52. Uvedený výpočet není – vzhledem k předcházejícímu výkladu – korektní. Všimněme si, že parciální derivace funkce $f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ nejsou v bodě $(a, 0) \in M_a$ vůbec definovány.

Domácí cvičení 1.53. Rozmyslete si, jak lze výpočet provést korektně.

?

1.6.4 Některé aplikace dvojného integrálu v mechanice

Představme si tenkou desku jako uzavřenou měřitelnou množinu $M \subseteq \mathbb{R}^2$ a předpokládejme, že její plošná hustota je popsána spojitou a nezápornou (na M) funkcí h .

Pak lze odvodit následující vzorce:

- Pro hmotnost desky M :

$$m(M) = \iint_M h(x, y) \, dx \, dy.$$

- Pro statické momenty desky M vzhledem k ose x , resp. y :

$$S_x(M) = \iint_M y \cdot h(x, y) \, dx \, dy, \quad \text{resp.} \quad S_y(M) = \iint_M x \cdot h(x, y) \, dx \, dy.$$

- Pro těžiště desky M :

$$T(M) = \left(\frac{S_y(M)}{m(M)}, \frac{S_x(M)}{m(M)} \right).$$

- Pro momenty setrvačnosti desky M vzhledem k ose x , resp. y :

$$I_x(M) = \iint_M y^2 \cdot h(x, y) \, dx \, dy, \quad \text{resp.} \quad I_y(M) = \iint_M x^2 \cdot h(x, y) \, dx \, dy.$$

Poznámka 1.54 (fyzikální význam čísla $h(x, y)$). Nechť $(x, y) \in M$ je dané a pro každé $\delta > 0$ je

$$\lambda(U((x, y), \delta) \cap M) \neq 0.$$

Číslem $h(x, y)$ pak rozumíme limitu

$$h(x, y) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{m(U((x, y), \delta) \cap M)}{\lambda(U((x, y), \delta) \cap M)}.$$

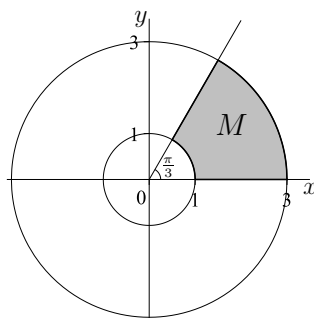
Poznámka 1.55. Je-li plošná hustota h funkce konstantní na M , říkáme, že deska M je homogenní.

Poznámka 1.56. K výpočtům dvojných integrálů vede celá řada dalších fyzikálních úloh, např. v teorii rovinných fyzikálních polí (gravitačních, elektrických, magnetických, tepelných, ...).



Příklad 1.57. Homogenní tenká deska M má tvar výseče mezikruží s poloměry 1 a 3 a středovým úhlem $\frac{\pi}{3}$. Určete vzdálenost d těžiště této desky od středu obou kružnic.

Řešení. Nejprve si desku M umístíme do souřadného systému (viz obrázek).



Deska M je homogenní, proto existuje číslo $c > 0$ takové, že pro každé $(x, y) \in M$ platí

$$h(x, y) = c.$$

Při výpočtu je výhodné použít polární souřadnice $x = r \cos t$, $y = r \sin t$. Pak lze totiž M popsat vztahy

$$t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{3} \right\rangle \quad \text{a} \quad r \in \langle 1, 3 \rangle.$$

Pro hmotnost desky tedy platí

$$m(M) = \iint_M c \, dx \, dy \stackrel{\text{pol. souř.}}{=} c \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_1^3 r \, dr \right) dt = c \cdot \frac{\pi}{3} \left[\frac{r^2}{2} \right]_1^3 = c \cdot \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 = c \cdot \frac{4\pi}{3}.$$

Nyní vypočteme statické momenty vzhledem k oběma osám.

$$S_x(M) = \iint_M cy \, dx \, dy \stackrel{\text{pol. souř.}}{=} c \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_1^3 r^2 \sin t \, dr \right) dt = c \underbrace{[-\cos t]_0^{\frac{\pi}{3}}}_{\frac{1}{2}} \cdot \left[\frac{r^3}{3} \right]_1^3 = c \cdot \frac{13}{3},$$

$$S_y(M) = \iint_M cx \, dx \, dy \stackrel{\text{pol. souř.}}{=} c \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_1^3 r^2 \cos t \, dr \right) dt = c \underbrace{[\sin t]_0^{\frac{\pi}{3}}}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \left[\frac{r^3}{3} \right]_1^3 = c \cdot \frac{13\sqrt{3}}{3}.$$

Pro souřadnice těžiště desky platí

$$T(M) = \left(\frac{S_y(M)}{m(M)}, \frac{S_x(M)}{m(M)} \right) = \left(\frac{13\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{3}{4\pi}, \frac{13}{3} \cdot \frac{3}{4\pi} \right) = \left(\frac{13\sqrt{3}}{4\pi}, \frac{13}{4\pi} \right).$$

Je vidět, že souřadnice těžiště homogenní desky nezávisí na její hustotě, což není vůbec překvapující.

Hledaná vzdálenost těžiště od středů obou kružnic je

$$d = \|T(M)\| = \sqrt{\frac{169 \cdot 3}{16\pi^2} + \frac{169}{16\pi^2}} = \frac{13}{2\pi}.$$

▲

Domácí cvičení 1.58. Zkuste se zamyslet, jak jinak bychom mohli umístit tenkou desku z předchozího příkladu do souřadného systému, aby se výpočet ještě více zjednodušil.

1.7 Příklady k procvičení



1. Pomocí Fubiniovy věty vypočtěte integrály:

i) $\iint_M (x^2 + y) \, dx \, dy$, kde $M = \langle 0, 2 \rangle \times \langle 1, 3 \rangle$;

ii) $\iint_M (x + y^2) \, dx \, dy$, kde $M = \langle 0, 2 \rangle \times \langle 1, 3 \rangle$;

iii) $\iint_M (x - y) \, dx \, dy$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y \geq 0 \wedge y \leq x \wedge x + y \leq 2\}$;

iv) $\iint_M \frac{x^2}{y^2} \, dx \, dy$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq 2 \wedge y \leq x \wedge xy \geq 1\}$;

v) $\iint_M \cos(x + y) \, dx \, dy$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \geq 0 \wedge y \geq x \wedge y \leq \pi\}$;

vi) $\iint_M (3xy^2 - 2x) \, dx \, dy$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq 1 \wedge x^2 \leq y \leq x\}$;

vii) $\iint_M \frac{x}{y} \, dx \, dy$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \geq 1 \wedge x \leq 2 \wedge y \leq x \wedge y \geq 1\}$;

viii) $\iint_M e^{2x+y} \, dx \, dy$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x + y \leq 2 \wedge y \geq 0 \wedge y \leq 1 \wedge x \geq 0\}$;

ix) $\iint_M x^2 y \, dx \, dy$, kde M je trojúhelník s vrcholy $A = (0, 0)$, $B = (3, 0)$, $C = (2, 1)$;

x) $\iint_M xy^2 \, dx \, dy$, kde M je trojúhelník s vrcholy $A = (0, 0)$, $B = (3, 0)$, $C = (2, 1)$;

xi) $\iint_M \frac{1}{y^2 + 1} \, dx \, dy$, kde M je trojúhelník s vrcholy $A = (0, 0)$, $B = (1, 1)$, $C = (0, 1)$.

2. Pomocí transformace dvojného integrálu řešte:

i) $\iint_M \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, dx \, dy$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 1 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$;

ii) $\iint_M x \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 4 \wedge y \geq 0\}$;

- iii) $\iint_M y \, dx \, dy$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 3x \wedge y \geq 0\}$;
- iv) $\iint_M \arctg \frac{y}{x} \, dx \, dy$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \wedge 0 \leq y \leq x\}$;
- v) $\iint_M e^{x^2+y^2} \, dx \, dy$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \geq 0 \wedge x^2 + y^2 \leq 1\}$;
- vi) $\iint_M xy \, dx \, dy$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1\}$;
- vii) $\iint_M (2x + y) \, dx \, dy$, kde $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + 4y^2 \leq 36 \wedge x \geq 0\}$.

Klíč k příkladům k procvičení



1.

- i) $\frac{40}{3}$;
- ii) $\frac{64}{3}$;
- iii) $\frac{2}{3}$;
- iv) $\frac{9}{4}$;
- v) -2 ;
- vi) $-\frac{11}{120}$;
- vii) $2 \ln 2 - \frac{3}{4}$;
- viii) $\frac{1}{2} (e^4 - e^3 - e + 1)$;
- ix) $\frac{33}{20}$;
- x) $\frac{9}{20}$;
- xi) $\frac{1}{2} \ln 2$.

2.

- i) $\frac{\pi}{6}$;
- ii) 0 ;
- iii) $\frac{9}{4}$;
- iv) $\frac{3\pi^2}{64}$;
- v) $\frac{\pi}{2} (e - 1)$;
- vi) $\frac{1}{2}$;

vii) 144.

Kapitola 2

Trojný integrál

V této kapitole budeme postupovat podobně (a proto méně podrobně) jako u dvojných integrálů.

2.1 Trojný integrál na intervalu

Uvažujme funkci $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ omezenou na trojrozměrném uzavřeném intervalu

$$J = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle \times \langle e, g \rangle.$$

Definujme pro libovolná dělení D_x, D_y, D_z intervalů $\langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle, \langle e, g \rangle$ dělení $D = (D_x, D_y, D_z)$ intervalu J jakožto systém uzavřených trojrozměrných intervalů

$$J_{klm} = \langle x_{k-1}, x_k \rangle \times \langle y_{l-1}, y_l \rangle \times \langle z_{m-1}, z_m \rangle$$

a značme

$$\lambda(J_{klm}) = (x_k - x_{k-1}) \cdot (y_l - y_{l-1}) \cdot (z_m - z_{m-1})$$

jejich objemy. Každému takovému dělení přiřadme součty

$$s(D) = \sum_{k,l,m} \inf_{(x,y,z) \in J_{klm}} f(x, y, z) \cdot \lambda(J_{klm}) \quad (\text{dolní součet})$$

a

$$S(D) = \sum_{k,l,m} \sup_{(x,y,z) \in J_{klm}} f(x, y, z) \cdot \lambda(J_{klm}) \quad (\text{horní součet}).$$

Pomocí těchto součtů definujme dolní a horní trojný Riemannův integrál funkce f na intervalu J .

$$\iiint_J f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \sup_D s(D), \quad \iiint_J f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \inf_D S(D).$$

Řekneme, že funkce f je na J (Riemannovsky) integrovatelná, platí-li

$$\iiint_{\underline{J}} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{\overline{J}} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

Tuto společnou hodnotu pak značíme

$$\iiint_J f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

a nazýváme trojným Riemannovým integrálem funkce f na intervalu J .

Věta 2.1 (o existenci trojného integrálu). *Je-li funkce $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá v uzavřeném intervalu J , pak existuje $\iiint_J f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$.*

2.2 Měřitelné množiny v $\mathbb{R}^3$

Definice 2.2. Omezenou množinu $M \subseteq \mathbb{R}^3$ nazveme (Jordanovsky) měřitelnou, je-li její charakteristická funkce χ_M

$$\left(\chi_M(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{pro } (x, y, z) \in M, \\ 0 & \text{pro } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus M \end{cases} \right)$$

Riemannovsky integrovatelná na nějakém uzavřeném intervalu $J \subseteq \mathbb{R}^3$ takovém, že $M \subseteq J$. Míru množiny M pak definujeme rovností

$$\lambda(M) = \iiint_J \chi_M(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

Poznámka 2.3. Předchozí definice nezávisí na volbě uzavřeného intervalu $J \subseteq \mathbb{R}^3$ takového, že $M \subseteq J$.

Poznámka 2.4. Míru množiny $M \subseteq \mathbb{R}^3$ lze chápat jako zobecnění pojmu „objem tělesa“, který nám je intuitivně jasný pro některá tělesa (kvádr, koule, válec, apod.).

Poznámka 2.5. Pro měřitelné množiny v $\mathbb{R}^3$ platí tvrzení analogická tvrzením 1)–6) věty 1.15.

Věta 2.6. *Nechť*

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: (x, y) \in M \wedge h_1(x, y) \leq z \leq h_2(x, y)\},$$

kde $M \subseteq \mathbb{R}^2$ je uzavřená měřitelná množina v $\mathbb{R}^2$ a funkce $h_1, h_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jsou na M spojité a takové, že

$$h_1(x, y) \leq h_2(x, y) \quad \text{pro každé } (x, y) \in M.$$

Pak Ω je měřitelná množina v $\mathbb{R}^3$.

Poznámka 2.7. Větu lze přeformulovat rovněž pro případy

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: (x, z) \in M \wedge h_1(x, z) \leq y \leq h_2(x, z)\}$$

a

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: (y, z) \in M \wedge h_1(y, z) \leq x \leq h_2(y, z)\}.$$

2.3 Trojný integrál na měřitelné množině

Definice 2.8. Buď funkce $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ omezená na neprázdné měřitelné množině $M \subseteq \mathbb{R}^3$. Řekneme, že f je na M (Riemannovsky) integrovatelná, je-li funkce $f \cdot \chi_M$ definovaná předpisem

$$(f \cdot \chi_M)(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & \text{pro } (x, y, z) \in M, \\ 0 & \text{pro } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus M \end{cases}$$

integrovatelná na nějakém uzavřeném intervalu $J \subseteq \mathbb{R}^3$ takovém, že $M \subseteq J$.

Trojným (Riemannovým) integrálem funkce f na množině M pak rozumíme číslo

$$\iiint_M f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_J (f \cdot \chi_M)(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

Navíc definujeme

$$\iiint_{\emptyset} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = 0$$

pro každou funkci $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

Poznámka 2.9. Tvrzení 1)–7) věty 1.20 (str. 12) je možné přeformulovat i pro případ trojných integrálů.

2.3.1 Fubiniova věta pro trojný integrál

Věta 2.10 (Fubiniova věta pro trojný integrál).

1) Necht $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ je integrovatelná na množině Ω , kde

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: (x, y) \in M \wedge h_1(x, y) \leq z \leq h_2(x, y)\}$$

splňuje předpoklady věty 2.6. Necht pro každé $(x, y) \in M$ existuje

$$\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x, y, z) dz.$$

Potom platí

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_M \left(\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy.$$

2) Necht funkce f je integrovatelná na **měřitelné** množině

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: z \in \langle e, g \rangle \wedge (x, y) \in M_z\},$$

kde $e, g \in \mathbb{R}$ ($e < g$) a $M_z \subseteq \mathbb{R}^2$ je měřitelná množina pro každé $z \in \langle e, g \rangle$. Necht pro každé $z \in \langle e, g \rangle$ je funkce $(x, y) \mapsto f(x, y, z)$ integrovatelná na M_z . Potom platí

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_e^g \left(\iint_{M_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz.$$

Poznámka 2.11. Analogická tvrzení lze získat záměnou „rolí“ proměnných x, y, z .

Poznámka 2.12. Podobně jako u dvojných integrálů nám Fubiniova věta umožňuje trojný integrál převést na dva do sebe vnořené integrály – jeden jednorozměrný a jeden dvojný. Takto vzniklý dvojný integrál lze opět (tentokrát pomocí „dvojrozměrné“ Fubiniové věty 1.22) „rozbít“ na dva do sebe vnořené jednorozměrné integrály. To však znamená, že každý trojný integrál lze (za vhodných předpokladů) nakonec napsat jako tzv. trojnásobný integrál (tři do sebe vnořené jednorozměrné integrály).

Pokud např.

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x \in \langle a, b \rangle \wedge g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \wedge h_1(x, y) \leq z \leq h_2(x, y)\},$$

dostaneme (za vhodných předpokladů)

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left(\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx.$$

Příklad 2.13. Vypočtěte integrál

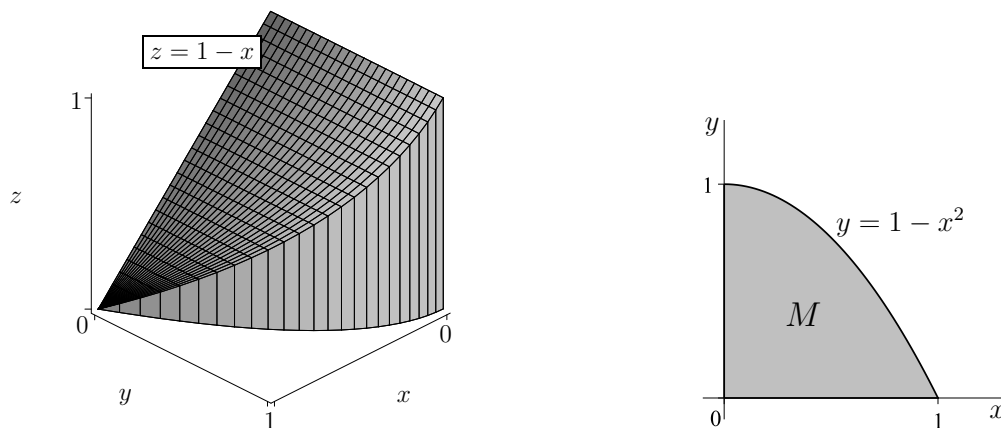
$$I = \iiint_{\Omega} 1 \, dx \, dy \, dz,$$



kde

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0 \wedge y \leq 1 - x^2 \wedge z \leq 1 - x\}.$$

Řešení. Množina Ω a její půdorys M jsou znázorněny na následujícím obrázku.



Zřejmě lze psát

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in \langle 0, 1 \rangle \wedge 0 \leq y \leq 1 - x^2 \wedge 0 \leq z \leq 1 - x\},$$

a proto (podle první části věty 2.10 a „dvojměrné“ Fubiniovy věty 1.22) platí

$$\begin{aligned} I &= \iint_M \left(\int_0^{1-x} 1 \, dz \right) dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x^2} \left(\int_0^{1-x} 1 \, dz \right) dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x^2} [z]_{z=0}^{1-x} dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x^2} (1-x) dy \right) dx = \int_0^1 [y(1-x)]_{y=0}^{1-x^2} dx = \\ &= \int_0^1 (1-x^2)(1-x) dx = \int_0^1 (1-x-x^2+x^3) dx = \\ &= \left[x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}. \end{aligned}$$



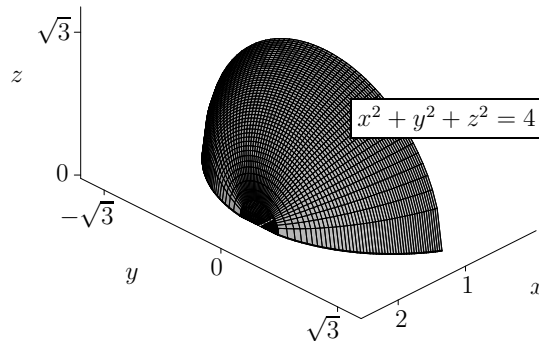
Příklad 2.14. Vypočtěte integrál

$$I = \iiint_{\Omega} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} dx dy dz,$$

kde

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x \geq 1 \wedge z \geq 0 \wedge x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}.$$

Řešení. Množina Ω je polovina kulové úseče (viz obrázek).

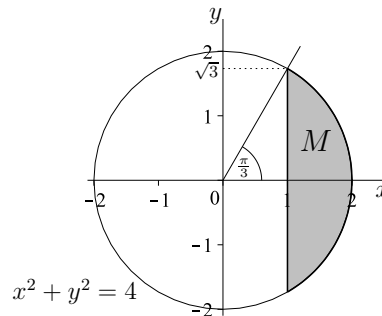


Podle první části věty 2.10 máme

$$I = \iint_M \left(\int_0^{\sqrt{4-(x^2+y^2)}} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} dz \right) dx dy,$$

kde

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \geq 1 \wedge x^2 + y^2 \leq 4\}.$$



Transformujeme-li množinu M do polárních souřadnic, dostaneme

$$M = \left\{ (r \cos t, r \sin t) \in \mathbb{R}^2: -\frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{\pi}{3} \wedge \frac{1}{\cos t} \leq r \leq 2 \right\}.$$

Odtud (vzhledem k tomu, že Jacobián transformace do polárních souřadnic je r) dostaneme (pomocí Fubiniových vět 2.10 a 1.22)

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_{\frac{1}{\cos t}}^2 \left(r \cdot \int_0^{\sqrt{4-r^2}} \frac{z}{(r^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} dz \right) dr \right) dt = \left| \begin{array}{l} \text{substitute} \\ r^2+z^2=u \\ z dz = \frac{1}{2} du \\ 0 \mapsto r^2, \sqrt{4-r^2} \mapsto 4 \end{array} \right| = \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_{\frac{1}{\cos t}}^2 \left(\frac{r}{2} \cdot \int_{r^2}^4 \frac{1}{u^{\frac{5}{2}}} du \right) dr \right) dt = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_{\frac{1}{\cos t}}^2 -\frac{r}{3} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{u^3}} \right]_{u=r^2}^4 dr \right) dt = \\
 &= -\frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_{\frac{1}{\cos t}}^2 \underbrace{r \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{r^3} \right)}_{\left(\frac{r}{8} - \frac{1}{r^2} \right)} dr \right) dt = -\frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left[\frac{r^2}{16} + \frac{1}{r} \right]_{r=\frac{1}{\cos t}}^2 dt = \\
 &= -\frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{16 \cos^2 t} - \cos t \right)}_{\text{sudá funkce}} dt = -\frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{16 \cos^2 t} - \cos t \right) dt = \\
 &= -\frac{2}{3} \left[\frac{3}{4} t - \frac{1}{16} \operatorname{tg} t - \sin t \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{3}}{16} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{\pi}{6} + \frac{3}{8} \sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

▲

Příklad 2.15. Vypočítejte integrál

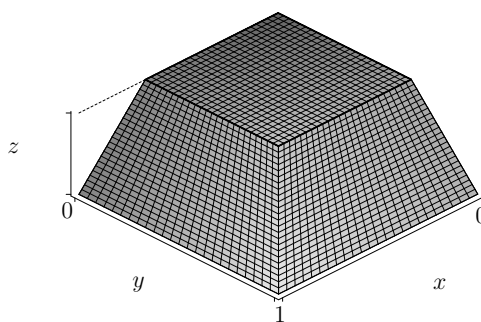
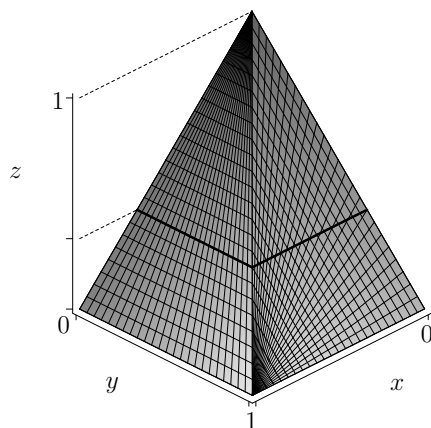
$$I = \iiint_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz,$$



kde Ω je čtyřboký jehlan s vrcholy $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 0)$ a $(0, 0, 1)$.

Řešení.

Na obrázku vidíme zadaný jehlan a jeho řez rovinou rovnoběžnou s rovinou $z = 0$.

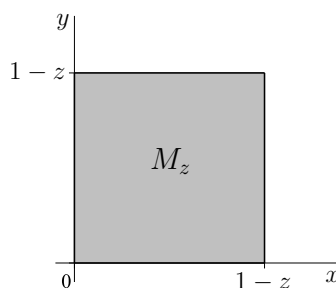


Není těžké si rozmyslet, že tímto řezem bude vždy čtverec. K řešení využijeme druhou část věty 2.10, odkud dostaneme

$$I = \int_0^1 \left(\iint_{M_z} z \, dx \, dy \right) dz,$$

kde

$$M_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq 1 - z \wedge 0 \leq y \leq 1 - z\}.$$



Proto platí

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-z} \left(\int_0^{1-z} z \, dy \right) dx \right) dz = \int_0^1 \left(\int_0^{1-z} [zy]_{y=0}^{1-z} dx \right) dz = \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-z} (z - z^2) dx \right) dz = \int_0^1 [(z - z^2)x]_{x=0}^{1-z} dz = \int_0^1 (z - z^2)(1 - z) dz = \\ &= \int_0^1 (z - 2z^2 + z^3) dz = \left[\frac{z^2}{2} - \frac{2z^3}{3} + \frac{z^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

▲



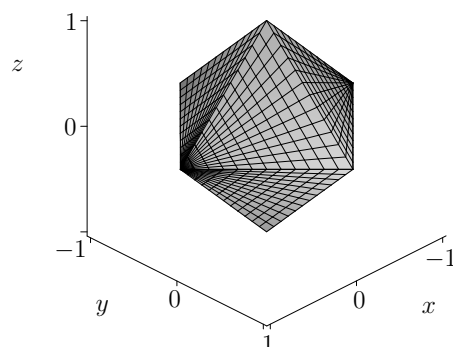
Příklad 2.16. Vypočtěte integrál

$$I = \iiint_{\Omega} x^2 \, dx \, dy \, dz,$$

kde

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: |x| + |y| + |z| \leq 1\}.$$

Řešení. Množina Ω je pravidelný osmistěn (rozmyslete si).

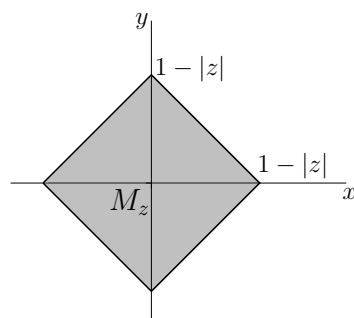


Podle druhé části věty 2.10 máme

$$I = \int_{-1}^1 \left(\iint_{M_z} x^2 \, dx \, dy \right) dz,$$

kde

$$M_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: |x| + |y| \leq 1 - |z|\} \quad (z \in \langle -1, 1 \rangle).$$



Není obtížné si uvědomit, že

$$M_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: -(1 - |z|) \leq x \leq 1 - |z| \wedge \\ \wedge -(1 - |z| - |x|) \leq y \leq 1 - |z| - |x|\},$$

odkud obdržíme

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \left(\int_{-(1-|z|)}^{1-|z|} \left(\int_{-(1-|z|-|x|)}^{1-|z|-|x|} x^2 \, dy \right) dx \right) dz = \\ &= \int_{-1}^1 \left(\int_{-(1-|z|)}^{1-|z|} 2x^2(1 - |z| - |x|) \, dx \right) dz = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_{-1}^1 \left(\int_0^{1-|z|} 2x^2(1-|z|-|x|) dx \right) dz = \\
&= 2 \cdot 2 \int_0^1 \left(\int_0^{1-|z|} 2x^2(1-|z|-|x|) dx \right) dz = 8 \int_0^1 \left(\int_0^{1-z} x^2(1-z-x) dx \right) dz = \\
&= 8 \int_0^1 \left(\int_0^{1-z} (x^2(1-z) - x^3) dx \right) dz = 8 \int_0^1 \left[\frac{1}{3}x^3(1-z) - \frac{1}{4}x^4 \right]_{x=0}^{1-z} dz = \\
&= \frac{2}{3} \int_0^1 (1-z)^4 dz = \left| \begin{array}{l} \text{substituce} \\ 1-z = u \\ -dz = du \\ 0 \mapsto 1, 1 \mapsto 0 \end{array} \right| = -\frac{2}{3} \int_1^0 u^4 du = \frac{2}{3} \int_0^1 u^4 du = \\
&= \frac{2}{3} \left[\frac{u^5}{5} \right]_0^1 = \frac{2}{15}.
\end{aligned}$$

▲

Poznámka 2.17. Při řešení předchozího příkladu jsme opět využívali faktu, že pro sudou funkci f integrovatelnou na $\langle 0, a \rangle$ platí

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

2.3.2 Substituční metoda pro trojný integrál

Věta 2.18 (o substituci v trojném integrálu).

1) Nechť zobrazení $\Phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dané rovnicemi

$$\begin{aligned}x &= g_1(u, v, w), \\y &= g_2(u, v, w), \\z &= g_3(u, v, w)\end{aligned}$$

je prosté na otevřené množině $\Omega_{uvw} \subseteq \mathbb{R}^3$, nechť funkce g_1, g_2, g_3 jsou třídy C^1 na Ω_{uvw} a nechť Jacobián

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u}(u, v, w) & \frac{\partial g_1}{\partial v}(u, v, w) & \frac{\partial g_1}{\partial w}(u, v, w) \\ \frac{\partial g_2}{\partial u}(u, v, w) & \frac{\partial g_2}{\partial v}(u, v, w) & \frac{\partial g_2}{\partial w}(u, v, w) \\ \frac{\partial g_3}{\partial u}(u, v, w) & \frac{\partial g_3}{\partial v}(u, v, w) & \frac{\partial g_3}{\partial w}(u, v, w) \end{vmatrix} \neq 0$$

pro každé $(u, v, w) \in \Omega_{uvw}$.

2) Nechť $M_{uvw} \subseteq \Omega_{uvw}$ a nechť M_{uvw} a $M_{xyz} = \Phi(M_{uvw})$ jsou uzavřené měřitelné množiny.

3) Nechť funkce f je spojitá na M_{xyz} .

Potom

$$\begin{aligned}\iiint_{M_{xyz}} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz &= \\&= \iiint_{M_{uvw}} f(g_1(u, v, w), g_2(u, v, w), g_3(u, v, w)) \cdot |J(u, v, w)| \, du \, dv \, dw.\end{aligned}$$

Poznámka 2.19. Podobně jako u dvojných integrálů neuděláme v „rozumných“ případech chybu, užijeme-li tvrzení věty i v situaci, kdy její předpoklady (nenulovost Jacobiánu, prostota Φ , ...) nebudou splněny na jisté množině míry (v $\mathbb{R}^3$) nula.

2.3.3 Substituce do cylindrických (válcových) souřadnic

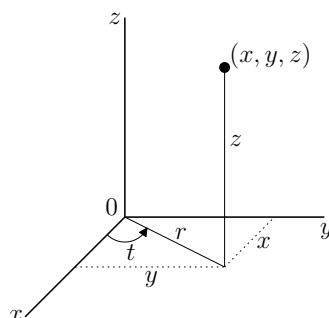
Jedná se o substituci

$$\begin{aligned}x &= r \cos t, \\y &= r \sin t, \\z &= z^*(= z),\end{aligned}$$

kde

$$r \geq 0, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle \quad (\text{popř. } t \in \langle -\pi, \pi \rangle \text{ nebo } t \in \langle \alpha, \alpha + 2\pi \rangle \text{ pro } \alpha \in \mathbb{R})$$

$$\text{a } z^* \in \mathbb{R}.$$



Jacobián tohoto zobrazení je

$$J(r, t, z^*) = \begin{vmatrix} \cos t & -r \sin t & 0 \\ \sin t & r \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r (\cos^2 t + \sin^2 t) = r.$$

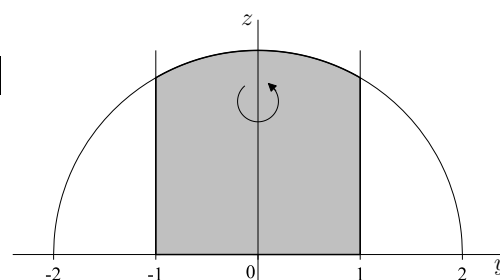
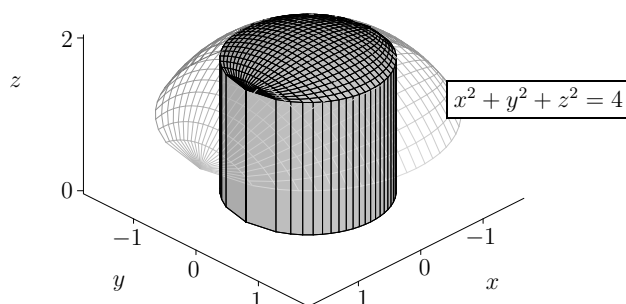
Poznámka 2.20. Substituci do cylindrických souřadnic zpravidla používáme, pokud hranice půdorysu tělesa Ω , přes které integrujeme, obsahuje části kružnic. Samozřejmě, že vhodnost či nevhodnost substituce ovlivňuje také samotná integrovaná funkce.



Příklad 2.21. Vypočtěte integrál $I = \iiint_{\Omega} (x^4 + y^4) z \, dx \, dy \, dz$, kde

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 \leq 1 \wedge z \geq 0 \wedge x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}.$$

Řešení. Množina Ω je válec „seříznutý“ shora kulovou plochou.



Zavedeme-li válcové souřadnice

$$x = r \cos t,$$

$$y = r \sin t,$$

$$z = z,$$

obdržíme omezení

$$0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq \sqrt{4-r^2}.$$

Podle věty 2.18 tedy platí

$$I = \iiint_{M_{rtz}} (r^4 \cos^4 t + r^4 \sin^4 t) z \cdot r \, dr \, dt \, dz,$$

kde

$$M_{rtz} = \left\{ (r, t, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq r \leq 1 \wedge 0 \leq t \leq 2\pi \wedge 0 \leq z \leq \sqrt{4-r^2} \right\}.$$

Užijeme-li nyní Fubiniovy věty (2.10 a 1.22), dostaneme

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{4-r^2}} (r^4 \cos^4 t + r^4 \sin^4 t) z \cdot r \, dz \right) dt \right) dr = \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \sin^4 t) \, dt \cdot \int_0^1 \left(r^5 \left(\int_0^{\sqrt{4-r^2}} z \, dz \right) \right) dr = \int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \sin^4 t) \, dt \cdot \\ &\quad \cdot \int_0^1 \left(r^5 \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=\sqrt{4-r^2}} \right) dr = \int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \sin^4 t) \, dt \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 (4r^5 - r^7) \, dr = \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \sin^4 t) \, dt \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{2r^6}{3} - \frac{r^8}{8} \right]_0^1 = \int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \sin^4 t) \, dt \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{24} = \\ &= \frac{13}{48} \int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \sin^4 t) \, dt = \frac{13}{48} \int_0^{2\pi} ((\cos^2 t + \sin^2 t)^2 - 2 \sin^2 t \cos^2 t) \, dt = \\ &= \frac{13}{48} \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2t \right) dt = \frac{13}{48} \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{1 - \cos 4t}{4} \right) dt = \\ &= \frac{13}{48} \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{4} + \frac{\cos 4t}{4} \right) dt = \frac{13}{48} \left[\frac{3}{4} t + \frac{\sin 4t}{16} \right]_0^{2\pi} = \frac{13}{48} \cdot \frac{3}{4} \cdot 2\pi = \frac{13}{32} \pi. \end{aligned}$$

▲

Poznámka 2.22. Rozmyslete si, že substitucí do cylindrických souřadnic a Fubiniovou větou dostaneme totéž, jako užitím Fubiniovy věty a následné substituce do polárních souřadnic v příslušném dvojném integrálu.

2.3.4 Substituce do sférických souřadnic

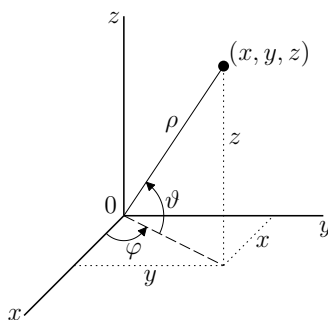
Uvažujme zobrazení

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \varphi \cos \vartheta, \\y &= \rho \sin \varphi \cos \vartheta, \\z &= \rho \sin \vartheta,\end{aligned}$$

kde

$$\rho \geq 0, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle \quad (\text{popř. } \varphi \in \langle -\pi, \pi \rangle \text{ nebo } \varphi \in \langle \alpha, \alpha + 2\pi \rangle \text{ pro } \alpha \in \mathbb{R}),$$

$$\vartheta \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle.$$



Nyní přímým výpočtem (rozvojem podle posledního řádku) určíme Jacobián tohoto zobrazení. Platí

$$\begin{aligned}J(\rho, \varphi, \vartheta) &= \begin{vmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta & -\rho \sin \varphi \cos \vartheta & -\rho \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \cos \vartheta & \rho \cos \varphi \cos \vartheta & -\rho \sin \varphi \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & 0 & \rho \cos \vartheta \end{vmatrix} = \\ &= \sin \vartheta (\rho^2 \sin \vartheta \cos \vartheta) + \rho \cos \vartheta (\rho \cos^2 \vartheta) = \rho^2 \cos \vartheta (\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta) = \rho^2 \cos \vartheta.\end{aligned}$$

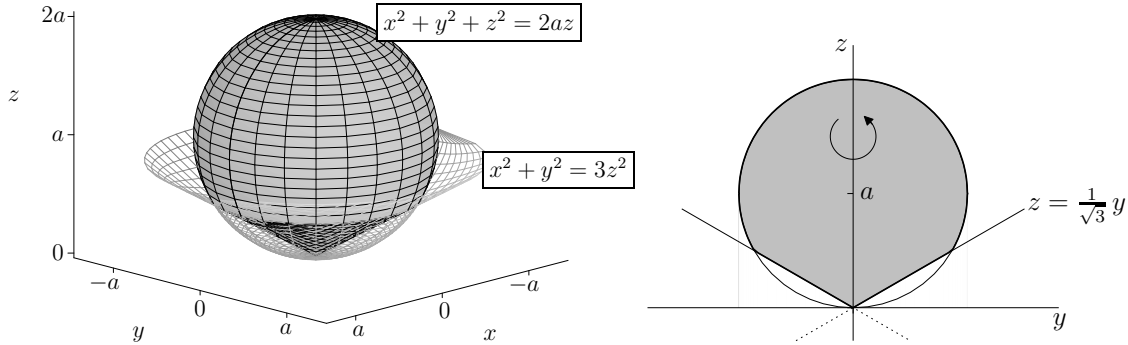
Poznámka 2.23. Pro substituci do sférických souřadnic se zpravidla rozhodneme, pokud hranice tělesa Ω , přes které integrujeme, obsahuje části kulových ploch.



Příklad 2.24. Pro $a > 0$ vypočtěte integrál $I_a = \iiint_{\Omega_a} (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz$, kde

$$\Omega_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az \wedge x^2 + y^2 \leq 3z^2\}.$$

Řešení. Podmínku $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az$ lze upravit do tvaru $x^2 + y^2 + (z - a)^2 \leq a^2$. Množina Ω_a je tedy průnikem koule (se středem v bodě $(0, 0, a)$ a poloměrem a) a rotačního kužele (viz obrázek).



Zavedme sférické souřadnice

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \varphi \cos \vartheta, \\y &= \rho \sin \varphi \cos \vartheta, \\z &= \rho \sin \vartheta.\end{aligned}$$

Uvědomme si ještě jednou, že

$$\rho \geq 0, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle \quad \text{a} \quad \vartheta \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle.$$

Dosazením transformačních vztahů do podmínek

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az \quad \text{a} \quad x^2 + y^2 \leq 3z^2$$

obdržíme

$$\rho^2 \leq 2a\rho \sin \vartheta \quad \wedge \quad \rho^2 \cos^2 \vartheta \leq 3\rho^2 \sin^2 \vartheta,$$

odkud dostaneme ($\rho \geq 0$)

$$\rho \leq 2a \sin \vartheta \quad \wedge \quad \cos^2 \vartheta \leq 3 \sin^2 \vartheta.$$

Z první nerovnosti obdržíme $\vartheta \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ a z druhé následně $\cos \vartheta \leq \sqrt{3} \sin \vartheta$. Celkem tedy máme

$$\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle, \quad \vartheta \in \langle \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \rangle, \quad \rho \in \langle 0, 2a \sin \vartheta \rangle.$$

Z vět 2.18, 2.10 a 1.22 pak plyne

$$\begin{aligned}I_a &= \int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2a \sin \vartheta} \rho^2 \cdot \rho^2 \cos \vartheta \, d\rho \right) d\vartheta \right) d\varphi = 2\pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \vartheta \left[\frac{\rho^5}{5} \right]_{\rho=0}^{2a \sin \vartheta} d\vartheta = \\&= \frac{2\pi}{5} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \vartheta \cdot 2^5 \cdot a^5 \cdot \sin^5 \vartheta \, d\vartheta = \left| \begin{array}{l} \text{substitute} \\ \sin \vartheta = u \\ \cos \vartheta \, d\vartheta = du \\ \frac{\pi}{6} \mapsto \frac{1}{2}, \quad \frac{\pi}{2} \mapsto 1 \end{array} \right| = \frac{2\pi}{5} \cdot 32a^5 \int_{\frac{1}{2}}^1 u^5 \, du = \\&= \frac{64}{5} \pi a^5 \left[\frac{u^6}{6} \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{64}{5} \pi a^5 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{64} \right) = \frac{21}{10} \pi a^5.\end{aligned}$$

▲

2.3.5 Substituce do zobecněných sférických souřadnic

Nechť $a, b, c > 0$ jsou daná čísla. Uvažujme zobrazení

$$\begin{aligned}x &= a \cdot \rho \cos \varphi \cos \vartheta, \\y &= b \cdot \rho \sin \varphi \cos \vartheta, \\z &= c \cdot \rho \sin \vartheta,\end{aligned}$$

kde

$$\rho \geq 0, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle \quad (\text{popř. } \varphi \in \langle -\pi, \pi \rangle \text{ nebo } \varphi \in \langle \alpha, \alpha + 2\pi \rangle \text{ pro } \alpha \in \mathbb{R}),$$

$$\vartheta \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle.$$

Podobně jako u klasických sférických souřadnic můžeme i zde vypočítat Jacobián zobrazení

$$J(\rho, \varphi, \vartheta) = abc \cdot \rho^2 \cos \vartheta.$$

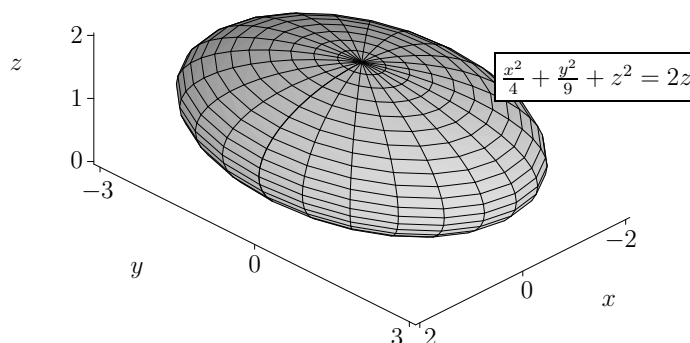
Poznámka 2.25. Substituce do zobecněných sférických souřadnic se používá, pokud těleso Ω , přes které integrujeme, má tvar elipsoidu.



Příklad 2.26. Vypočtěte integrál $I = \iiint_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz$, kde

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leq 2z \right\}.$$

Řešení. Podmínku $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leq 2z$ lze ekvivalentně upravit do tvaru $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + (z - 1)^2 \leq 1$. Odtud je vidět, že Ω je elipsoid se středem v bodě $(0, 0, 1)$ a poloosami 2, 3 a 1.



Použijeme zobecněné sférické souřadnice

$$\begin{aligned}x &= 2\rho \cos \varphi \cos \vartheta, \\y &= 3\rho \sin \varphi \cos \vartheta, \\z &= \rho \sin \vartheta.\end{aligned}$$

Jacobián tohoto zobrazení je zřejmě $J = 6\rho^2 \cos \vartheta$. Dosazením transformačních vztahů do podmínky $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leq 2z$ dostaneme $\rho^2 \leq 2\rho \sin \vartheta$. Není těžké si uvědomit, že elipsoid Ω je pak určen omezeními

$$\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle, \quad \vartheta \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle, \quad \rho \in \langle 0, 2 \sin \vartheta \rangle.$$

To tedy znamená, že

$$I = \iiint_M \rho \sin \vartheta \cdot |J| \, d\rho \, d\varphi \, d\vartheta = \iiint_M 6\rho^3 \sin \vartheta \cos \vartheta \, d\rho \, d\varphi \, d\vartheta,$$

kde

$$M = \left\{ (\rho, \varphi, \vartheta) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \varphi \leq 2\pi \wedge 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \wedge 0 \leq \rho \leq 2 \sin \vartheta \right\}.$$

Odtud podle vět 2.10 a 1.22 máme

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2 \sin \vartheta} 6\rho^3 \sin \vartheta \cos \vartheta \, d\rho \right) d\vartheta \right) d\varphi = \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \vartheta \cos \vartheta \left[\frac{6\rho^4}{4} \right]_{\rho=0}^{2 \sin \vartheta} d\vartheta = 3\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} 16 \sin^5 \vartheta \cos \vartheta \, d\vartheta = \left| \begin{array}{l} \text{substitute} \\ \sin \vartheta = u \\ \cos \vartheta \, d\vartheta = du \\ 0 \mapsto 0, \frac{\pi}{2} \mapsto 1 \end{array} \right| = \\ &= 48\pi \int_0^1 u^5 \, du = 48\pi \left[\frac{u^6}{6} \right]_0^1 = 48\pi \cdot \frac{1}{6} = 8\pi. \end{aligned}$$

Jiná možnost, jak integrál spočítat, je použít „posunuté“ zobecněné sférické souřadnice

$$\begin{aligned} x &= 2\rho \cos \varphi \cos \vartheta, \\ y &= 3\rho \sin \varphi \cos \vartheta, \\ z &= 1 + \rho \sin \vartheta. \end{aligned}$$

Jacobián tohoto zobrazení je opět $J = 6\rho^2 \cos \vartheta$ a dosazením transformačních vztahů do podmínky $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leq 2z$, která je ekvivalentní s nerovností $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + (z-1)^2 \leq 1$, obdržíme $\rho^2 \leq 1$, tj. $0 \leq \rho \leq 1$. Odtud (podobně jako u prvního způsobu výpočtu) dostaneme, že

$$I = \iiint_N (1 + \rho \sin \vartheta) \cdot |J| \, d\rho \, d\varphi \, d\vartheta = \iiint_N (1 + \rho \sin \vartheta) \cdot 6\rho^2 \cos \vartheta \, d\rho \, d\varphi \, d\vartheta,$$

kde

$$N = \left\{ (\rho, \varphi, \vartheta) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \varphi \leq 2\pi \wedge -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \wedge 0 \leq \rho \leq 1 \right\}.$$

Podle vět 2.10 a 1.22 pak pro integrál I platí

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \rho \sin \vartheta) \cdot 6\rho^2 \cos \vartheta \, d\vartheta \right) d\varphi \right) d\rho = \\
 &= 2\pi \int_0^1 \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (6\rho^2 \cos \vartheta + 6\rho^3 \sin \vartheta \cos \vartheta) d\vartheta \right) d\rho = \\
 &= 2\pi \int_0^1 \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (6\rho^2 \cos \vartheta + 3\rho^3 \sin 2\vartheta) d\vartheta \right) d\rho = \\
 &= 2\pi \int_0^1 \left[6\rho^2 \sin \vartheta - \frac{3}{2}\rho^3 \cos 2\vartheta \right]_{\vartheta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\rho = 2\pi \int_0^1 12\rho^2 d\rho = 24\pi \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^1 = \\
 &= 24\pi \cdot \frac{1}{3} = 8\pi.
 \end{aligned}$$

▲

2.4 Některé aplikace trojného integrálu

2.4.1 Objem tělesa

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^3$ je měřitelná množina. Pak objem tělesa M definujeme pomocí vztahu

$$\lambda(M) = \iiint_M 1 \, dx \, dy \, dz.$$

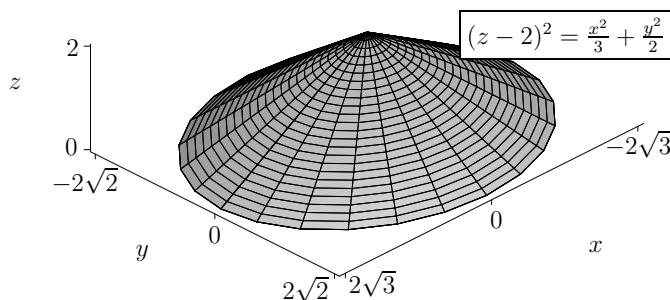
Poznámka 2.27. Uvažujme množinu T stejnou jako v kapitole 1.6.2. Pak zřejmě platí $V(T) = \lambda(T)$.



Příklad 2.28. Vypočtěte objem tělesa $M \subseteq \mathbb{R}^3$ ohraničeného plochami

$$(z-2)^2 = \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2}, \quad z = 0.$$

Řešení. Naše těleso M je částí eliptického kužele.



Jeho průnikem s rovinou $z = z_0$, kde $0 \leq z_0 \leq 2$, je množina

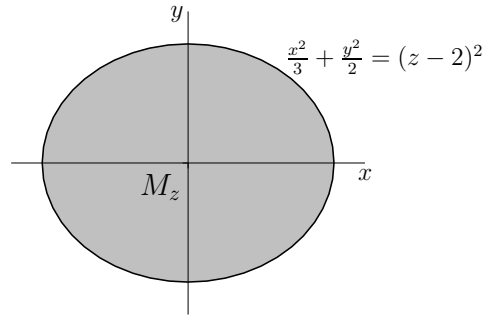
$$\left\{ (x, y, z_0) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} \leq (z_0 - 2)^2 \right\} \quad (\text{tj. elipsa}).$$

Není obtížné si uvědomit, že pro objem tělesa M platí (viz věta 2.10)

$$\lambda(M) = \iiint_M 1 \, dx \, dy \, dz = \int_0^2 \left(\iint_{M_z} 1 \, dx \, dy \right) dz,$$

kde

$$M_z = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} \leq (z - 2)^2 \right\}.$$



Pro výpočet vnitřního integrálu $\iint_{M_z} 1 \, dx \, dy$ použijeme transformaci do zobecněných polárních souřadnic

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{3} \cdot r \cos t, \\ y &= \sqrt{2} \cdot r \sin t. \end{aligned}$$

Jacobián tohoto zobrazení je zřejmě $J = \sqrt{6} \cdot r$. Přitom množinu M_z (pro $z \in \langle 0, 2 \rangle$) lze v těchto zobecněných polárních souřadnicích popsat nerovnostmi

$$0 \leq t \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 2 - z.$$

Odtud a z vět 1.30 a 1.22 plyne, že

$$\begin{aligned} \lambda(M) &= \iiint_M 1 \, dx \, dy \, dz = \int_0^2 \left(\iint_{M_z} 1 \, dx \, dy \right) dz = \\ &= \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2-z} \sqrt{6} \cdot r \, dr \right) dt \right) dz = 2\pi \int_0^2 \left[\sqrt{6} \cdot \frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{2-z} dz = \\ &= 2\pi \int_0^2 \sqrt{6} \cdot \frac{(2-z)^2}{2} dz = \pi\sqrt{6} \cdot \left[-\frac{(2-z)^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8\pi\sqrt{6}}{3}. \end{aligned}$$

▲

Poznámka 2.29. V předchozím příkladu bychom také mohli postupovat tak, že bychom (pro vhodná a, b) zavedli tzv. zobecněné cylindrické souřadnice, tj.

$$\begin{aligned}x &= a \cdot r \cos t, \\y &= b \cdot r \sin t, \\z &= z^* (= z),\end{aligned}$$

kde

$$r \geq 0, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle \quad (\text{popř. } t \in \langle -\pi, \pi \rangle \text{ nebo } t \in \langle \alpha, \alpha + 2\pi \rangle \text{ pro } \alpha \in \mathbb{R})$$

$$\text{a } z^* \in \mathbb{R}.$$

Jacobián tohoto zobrazení je

$$J(r, t, z^*) = \begin{vmatrix} a \cos t & -ar \sin t & 0 \\ b \sin t & br \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = ab \cdot r (\cos^2 t + \sin^2 t) = ab \cdot r.$$

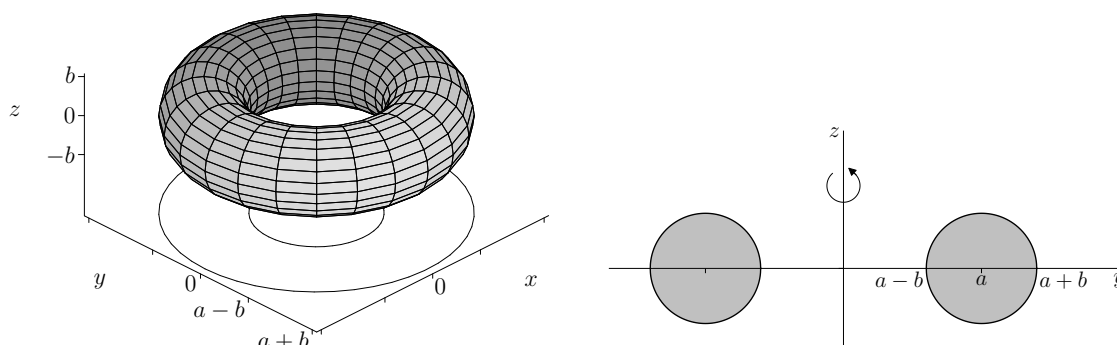
Domácí cvičení 2.30. Pokuste se vyřešit příklad 2.28 pomocí zobecněných cylindrických souřadnic (viz poznámka 2.29).



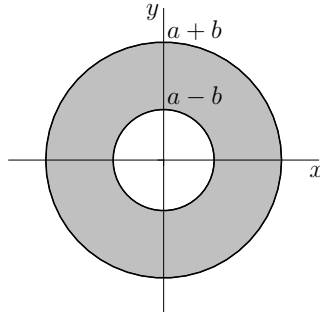
Příklad 2.31. Vypočtěte objem tělesa M ohraničeného plochou (anuloidem)

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - a\right)^2 + z^2 = b^2 \quad (0 < b < a).$$

Řešení.



Víme, že pro objem tělesa M platí $\lambda(M) = \iiint_M 1 \, dx \, dy \, dz$. Řezem tělesa M rovinou $z = 0$ je mezikruží znázorněné na obrázku níže.



Pro výpočet $\lambda(M)$ bude tedy vhodné použít v příslušném integrálu transformaci do cylindrických souřadnic

$$\begin{aligned}x &= r \cos t, \\y &= r \sin t, \\z &= z.\end{aligned}$$

Jacobián tohoto zobrazení je $J = r$. Těleso M v těchto nových (cylindrických) souřadnicích popíšeme podmínkami (promyslete to!)

$$t \in \langle 0, 2\pi \rangle, \quad r \in \langle a - b, a + b \rangle, \quad z \in \left\langle -\sqrt{b^2 - (r - a)^2}, \sqrt{b^2 - (r - a)^2} \right\rangle.$$

Proto (vzhledem ke větám 1.22, 2.10 a 2.18) pro objem tělesa M platí

$$\begin{aligned}\lambda(M) &= \iiint_M 1 \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} \left(\int_{a-b}^{a+b} \left(\int_{-\sqrt{b^2 - (r-a)^2}}^{\sqrt{b^2 - (r-a)^2}} r \, dz \right) dr \right) dt = \\&= 2\pi \cdot 2 \cdot \int_{a-b}^{a+b} r \sqrt{b^2 - (r-a)^2} \, dr = \left| \begin{array}{l} \text{substitute} \\ r - a = u \\ dr = du \\ a - b \mapsto -b \\ a + b \mapsto b \end{array} \right| = 4\pi \int_{-b}^b (u + a) \sqrt{b^2 - u^2} \, du = \\&= 4\pi \int_{-b}^b \underbrace{u \sqrt{b^2 - u^2}}_{\text{lichá v } u} \, du + 4\pi a \int_{-b}^b \underbrace{\sqrt{b^2 - u^2}}_{\text{sudá v } u} \, du = 8\pi a \int_0^b \sqrt{b^2 - u^2} \, du = \\&= \left| \begin{array}{l} \text{substitute} \\ u = b \sin s \\ du = b \cos s \, ds \\ 0 \mapsto 0, \, b \mapsto \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = 8\pi a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{b^2 - b^2 \sin^2 s} \cdot b \cos s \, ds = 8\pi ab^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 s \, ds = \\&= 8\pi ab^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2s}{2} \, ds = 8\pi ab^2 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \underbrace{\left[\frac{\sin 2s}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} \right) = 2\pi^2 ab^2.\end{aligned}$$

Jinou možnost, jak spočítat objem našeho tělesa M , dává tzv. Guldinovo pravidlo (viz [7]):

„Daný profil o obsahu P se pohybuje tak, že jeho rovina zůstává kolmá k prostorové křivce, kterou opisuje jeho těžiště. Pak objem tělesa je $P \cdot D$, kde D je délka dráhy opsaná těžištěm profilu.“

Podle Guldinova pravidla pak platí

$$\lambda(M) = P \cdot D = (\pi b^2) \cdot (2\pi a) = 2\pi^2 ab^2.$$

▲

2.4.2 Některé aplikace trojného integrálu v mechanice

Nechť těleso M je uzavřená měřitelná množina v $\mathbb{R}^3$ a nechť jeho objemová hustota je popsána spojitou a nezápornou funkcí h

$$\left(h(x, y, z) = \lim_{\delta \rightarrow 0+} \frac{m(U((x, y, z), \delta) \cap M)}{\lambda(U((x, y, z), \delta) \cap M)} \right).$$

Pak platí následující vzorce:

- Pro hmotnost tělesa M :

$$m(M) = \iiint_M h(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

- Pro statické momenty tělesa M vzhledem k souřadnicovým rovinám xy, yz, xz :

$$\begin{aligned} S_{xy}(M) &= \iiint_M z \cdot h(x, y, z) \, dx \, dy \, dz, & S_{yz}(M) &= \iiint_M x \cdot h(x, y, z) \, dx \, dy \, dz, \\ S_{xz}(M) &= \iiint_M y \cdot h(x, y, z) \, dx \, dy \, dz. \end{aligned}$$

- Pro souřadnice těžiště T tělesa M :

$$T(M) = \left(\frac{S_{yz}(M)}{m(M)}, \frac{S_{xz}(M)}{m(M)}, \frac{S_{xy}(M)}{m(M)} \right).$$

- Pro momenty setrvačnosti tělesa M vzhledem k osám x, y, z :

$$I_x(M) = \iiint_M (y^2 + z^2) \cdot h(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

$$I_y(M) = \iiint_M (x^2 + z^2) \cdot h(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

$$I_z(M) = \iiint_M (x^2 + y^2) \cdot h(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

Poznámka 2.32. Řekneme, že těleso M je homogenní, je-li jeho objemová hustota h funkce konstantní na M .

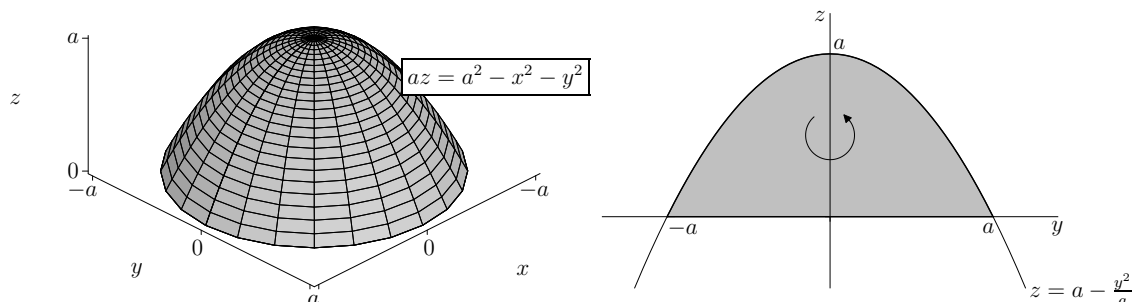
Příklad 2.33. Vypočítejte hmotnost tělesa M_a , kde $a > 0$, ohraničeného plochami

$$z = 0, \quad az = a^2 - x^2 - y^2,$$



je-li jeho objemová hustota h definována rovností $h(x, y, z) = z^3$.

Řešení. Těleso M_a je ohraničené rovinou $z = 0$ a rotačním paraboloidem $az = a^2 - x^2 - y^2$.



Pro hmotnost tělesa M_a platí

$$m(M_a) = \iiint_{M_a} z^3 \, dx \, dy \, dz.$$

Poslední integrál lze přitom spočítat např. transformací do cylindrických souřadnic

$$x = r \cos t,$$

$$y = r \sin t,$$

$$z = z.$$

Jacobián tohoto zobrazení je $J = r$. Těleso M_a v těchto nových souřadnicích můžeme přitom popsat podmínkami

$$t \in \langle 0, 2\pi \rangle, \quad r \in \langle 0, a \rangle, \quad z \in \left\langle 0, a - \frac{r^2}{a} \right\rangle.$$

Proto platí

$$\begin{aligned}
 m(M_a) &= \iiint_{M_a} z^3 \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^a \left(\int_0^{a-\frac{r^2}{a}} z^3 \cdot r \, dz \right) dr \right) dt = \\
 &= 2\pi \int_0^a \frac{1}{4} r \left(a - \frac{r^2}{a} \right)^4 dr = \left| \begin{array}{l} \text{substituce} \\ a - \frac{r^2}{a} = u \\ -\frac{2r}{a} dr = du \\ r dr = -\frac{a}{2} du \\ 0 \mapsto a, a \mapsto 0 \end{array} \right| = \frac{\pi}{2} \cdot \left(-\frac{a}{2} \right) \cdot \int_a^0 u^4 \, du = \\
 &= \frac{\pi a}{4} \left[\frac{u^5}{5} \right]_0^a = \frac{\pi a^6}{20}.
 \end{aligned}$$

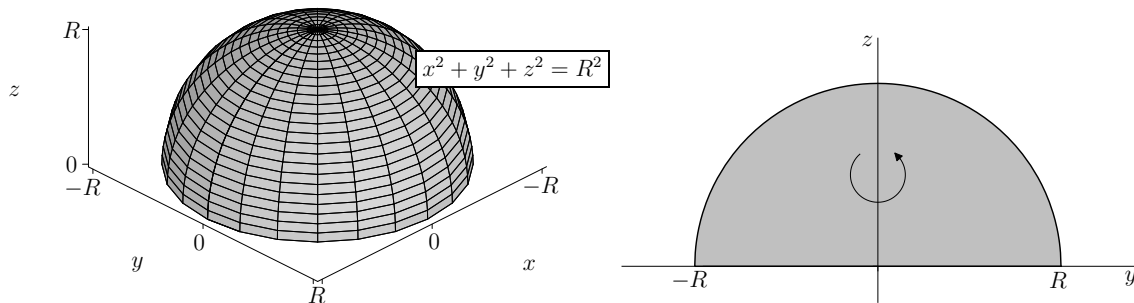
▲



Příklad 2.34. Pro $R > 0$ vypočítejte souřadnice těžiště T_R homogenní polokoule

$$\Omega_R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \wedge z \geq 0\}.$$

Řešení.



Zřejmě

$$T_R = \left(0, 0, \frac{S_{xy}(\Omega_R)}{m(\Omega_R)} \right),$$

kde (při objemové hustotě $k > 0$)

$$S_{xy}(\Omega_R) = \iiint_{\Omega_R} z \cdot k \, dx \, dy \, dz, \quad m(\Omega_R) = \iiint_{\Omega_R} k \, dx \, dy \, dz.$$

Pro snadnější výpočet těchto dvou integrálů použijeme transformaci do sférických souřadnic

$$\begin{aligned}
 x &= \rho \cos \varphi \cos \vartheta, \\
 y &= \rho \sin \varphi \cos \vartheta, \\
 z &= \rho \sin \vartheta.
 \end{aligned}$$

Jacobián tohoto zobrazení je $J = \rho^2 \cos \vartheta$. Ve sférických souřadnicích polokouli Ω_R popíšeme totiž velmi snadno:

$$\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle, \quad \vartheta \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle, \quad \rho \in \langle 0, R \rangle.$$

Proto platí

$$\begin{aligned} S_{xy}(\Omega_R) &= k \cdot \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^R \rho \sin \vartheta \cdot \rho^2 \cos \vartheta \, d\rho \right) d\vartheta \right) d\varphi = \\ &= k \cdot 2\pi \cdot \left[\frac{\sin^2 \vartheta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^R = k \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{4} \cdot k \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} m(\Omega_R) &= k \cdot \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^R \rho^2 \cos \vartheta \, d\rho \right) d\vartheta \right) d\varphi = \\ &= k \cdot 2\pi \cdot [\sin \vartheta]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^R = k \cdot 2\pi \cdot 1 \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{2\pi R^3}{3} \cdot k. \end{aligned}$$

Poslední integrál jsme vlastně nemuseli počítat, protože v našem případě vychází $m(\Omega_R) = k \cdot \lambda(\Omega_R)$. Dále si uvědomme, že Ω_R je polokoule, a proto její míru (objem) dokážeme spočítat i bez integrálů:

$$\lambda(\Omega_R) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{2}{3} \pi R^3.$$

Pro souřadnice těžiště tedy platí

$$T_R = \left(0, 0, \frac{\frac{\pi R^4}{4} \cdot k}{\frac{2\pi R^3}{3} \cdot k} \right) = \left(0, 0, \frac{3}{8} R \right).$$

▲

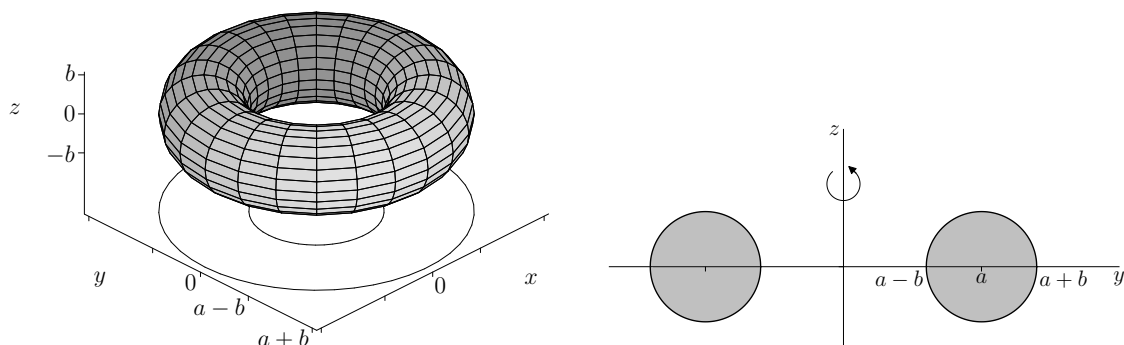
Příklad 2.35. Vypočítejte moment setrvačnosti vzhledem k ose z tělesa M ohraničeného anuloidem



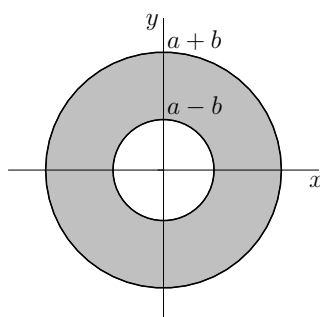
$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - a \right)^2 + z^2 = b^2 \quad (0 < b < a),$$

je-li objemová hustota tohoto tělesa v každém jeho bodě rovna jedné.

Řešení. V příkladu 2.31 jsme se s anuloidem již setkali. Pro jistotu si připomeňme, jak těleso M vypadá (viz následující obrázky).



Řez tělesa M rovinou $z = 0$ vidíme níže.



Platí

$$I_z(M) = \iiint_M (x^2 + y^2) \cdot 1 \, dx \, dy \, dz = \iiint_M (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz.$$

Pro snadnější výpočet integrálu provedeme transformaci do cylindrických souřadnic (viz příklad 2.31). Pak

$$\begin{aligned} I_z(M) &= \int_0^{2\pi} \left(\int_{a-b}^{a+b} \left(\int_{-\sqrt{b^2-(r-a)^2}}^{\sqrt{b^2-(r-a)^2}} r^2 \cdot r \, dz \right) dr \right) dt = \\ &= 2\pi \cdot 2 \cdot \int_{a-b}^{a+b} r^3 \sqrt{b^2 - (r-a)^2} \, dr = \left. \begin{array}{l} \text{substituce} \\ r-a = u \\ dr = du \\ a-b \mapsto -b \\ a+b \mapsto b \end{array} \right| = 4\pi \int_{-b}^b (u+a)^3 \sqrt{b^2 - u^2} \, du = \\ &= 4\pi \left(\int_{-b}^b \left(\underbrace{u^3 \sqrt{b^2 - u^2}}_{\text{liché v } u} + \underbrace{3u^2 a \sqrt{b^2 - u^2}}_{\text{sudé v } u} + \underbrace{3ua^2 \sqrt{b^2 - u^2}}_{\text{liché v } u} + \underbrace{a^3 \sqrt{b^2 - u^2}}_{\text{sudé v } u} \right) du \right) = \\ &= 8\pi \int_0^b \left(3u^2 a \sqrt{b^2 - u^2} + a^3 \sqrt{b^2 - u^2} \right) du = \left. \begin{array}{l} \text{substituce} \\ u = b \sin s \\ du = b \cos s \, ds \\ 0 \mapsto 0, \, b \mapsto \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 8\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3ab^2 \sin^2 s \cdot b \cos s + a^3 \cdot b \cos s) \cdot b \cos s \, ds = \\
&= 8\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(3ab^4 \underbrace{\sin^2 s \cos^2 s}_{\frac{1}{4} \sin^2 2s} + a^3 b^2 \cos^2 s \right) ds = \\
&= 8\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(3ab^4 \cdot \frac{1 - \cos 4s}{8} + a^3 b^2 \cdot \frac{1 + \cos 2s}{2} \right) ds = \\
&= 8\pi \left(3ab^4 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{\pi}{2} + 0 + a^3 b^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + 0 \right) = \frac{\pi^2 ab^2}{2} (3b^2 + 4a^2).
\end{aligned}$$

▲

2.5 Příklady k procvičení



1. Pomocí Fubiniovy věty vypočtete integrály:

i) $\iiint_M xy^2 z \, dx \, dy \, dz$, kde $M = \langle 0, 2 \rangle \times \langle 1, 3 \rangle \times \langle 1, 2 \rangle$;

ii) $\iiint_M e^{3x+2y+z} \, dx \, dy \, dz$, kde $M = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$;

iii) $\iiint_M \frac{1}{1-x-y} \, dx \, dy \, dz$, kde $M = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 2, 5 \rangle \times \langle 2, 4 \rangle$;

iv) $\iiint_M xy \, dx \, dy \, dz$, kde
 $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x + y \leq 1 \wedge 0 \leq z \leq x^2 + y^2 + 1\}$;

v) $\iiint_M \frac{1}{x+y+1} \, dx \, dy \, dz$, kde
 $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0 \wedge x + y + z \leq 1\}$;

vi) $\iiint_M x^2 y z^3 \, dx \, dy \, dz$, kde
 $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: z \leq xy \wedge y \geq x \geq 0 \wedge y \leq 1 \wedge z \geq 0\}$.

2. Pomocí transformace trojného integrálu řešte:

- i) $\iiint_M z \, dx \, dy \, dz$, kde $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \wedge z \leq 1\}$;
- ii) $\iiint_M z^2 \, dx \, dy \, dz$, kde $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\}$;
- iii) $\iiint_M z \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz$, kde
 $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 \leq 9 \wedge y \geq 0 \wedge 0 \leq z \leq 2\}$;
- iv) $\iiint_M (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz$, kde $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 \leq 2z \wedge z \leq 2\}$;
- v) $\iiint_M z \, dx \, dy \, dz$, kde
 $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x \geq 0 \wedge \sqrt{x^2 + y^2} - 1 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$;
- vi) $\iiint_M (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz$, kde
 $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \wedge x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z\}$;
- vii) $\iiint_M xy \, dx \, dy \, dz$, kde
 $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0\}$;
- viii) $\iiint_M \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz$, kde
 $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: 0 \leq x \leq y \wedge z \geq 0 \wedge x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$;
- ix) $\iiint_M 1 \, dx \, dy \, dz$, kde $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \wedge z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$;
- x) $\iiint_M z \, dx \, dy \, dz$, kde $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \wedge z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$.



Klíč k příkladům k procvičení

1.

i) 26;

ii) $\frac{1}{6} (e - 1) (e^2 - 1) (e^3 - 1)$;

iii) $20 \ln 2 - 10 \ln 5$;

iv) $\frac{7}{120}$;

v) $\frac{3}{2} - 2 \ln 2$;

vi) $\frac{1}{364}$.

2.

i) $\frac{\pi}{4}$;

ii) $\frac{7\pi}{6}$;

iii) 18π ;

iv) $\frac{16\pi}{3}$;

v) 0 ;

vi) $\frac{53\pi}{480}$;

vii) $\frac{1}{15}$;

viii) $\frac{\pi}{16}$;

ix) $\frac{8\pi}{3} (2 - \sqrt{2})$;

x) 2π .



Literatura

- [1] BOUCHALA, J.: *Matematická analýza 1*. Ostrava: VŠB-TU, 1998. Skriptum.
- [2] HOŠKOVÁ, Š., KUBEN, J., RAČKOVÁ, P.: *Integrální počet funkcí jedné proměnné*. Ostrava: VŠB-TU, 2006.
- [3] JARNÍK, V.: *Diferenciální počet (I)*. Praha: Academia, 1984.
- [4] JARNÍK, V.: *Integrální počet (I)*. Praha: Academia, 1984.
- [5] JARNÍK, V.: *Diferenciální počet (II)*. Praha: Academia, 1984.
- [6] JARNÍK, V.: *Integrální počet (II)*. Praha: Academia, 1984.
- [7] REKTORYS, K. a kol.: *Přehled užití matematiky*. 5. vydání. Praha: SNTL, 1988.

Rejstřík



- anuloid, 62, 67
- dělení intervalu, 1, 3, 43
- funkce
 - charakteristická, 8, 44
 - omezená, 3
 - primitivní, 2
 - Riemannovsky integrovatelná, 2, 4, 11, 44
 - třídy C^1 , 18, 36, 53
 - vyšší transcendentní, 16, 28
- hmotnost
 - desky, 37
 - tělesa, 64
- hustota
 - objemová, 64
 - plošná, 38
- integrál
 - dvojnásobný, 6, 13
 - dvojný, 1
 - dolní, 4
 - horní, 4
 - na intervalu, 2, 4
 - na měřitelné množině, 11
 - Fresnelův, 16
 - jednorozměrný, 1, 2
 - Laplaceův, 28
 - trojnásobný, 46
 - trojný, 43, 44
 - dolní, 43
 - horní, 43
 - na měřitelné množině, 45
- interval
 - dvojozměrný, 3
 - trojozměrný, 43
- Jacobián, 18, 53
- lemniskáta, 34
- míra
 - Jordanova, 8
- množina
 - měřitelná, 8, 44
- moment
 - setrvačnosti, 38, 65
 - statický, 38, 64
- norma dělení, 5
- objem tělesa, 34, 60
- oblast
 - elementární
 - druhého druhu, 11
 - prvního druhu, 11
- obsah
 - obrazce, 32
 - plochy, 36
- pravidlo
 - Guldinovo, 64
- součet
 - dolní, 4, 43
 - horní, 4, 43
 - integrální, 5
- souřadnice
 - cylindrické (válcové), 53
 - zobecněné, 62
 - polární, 20

zobecněné, 24

sférické, 56

zobecněné, 58

těleso

Vivianiovo, 34

těžiště, 38, 64

věta

Fubiniova

pro dvojný integrál na M , 13

pro dvojný integrál na intervalu,
6

pro trojný integrál na M , 46

o existenci

dvojného integrálu, 5

jednorozměrného integrálu, 2

trojného integrálu, 44

o substituci

dvojného integrálu, 18

jednorozměrného integrálu, 18

trojného integrálu, 53

o vlastnostech

dvojného integrálu, 12

měřitelných množin, 10

o výpočtu jednorozměrného inte-
grálu, 2

základní, algebry, 29