HERBÁŘ FUNKCÍ

verze 0.11

Petr Girg
Petr Nečesal
Josef Polák

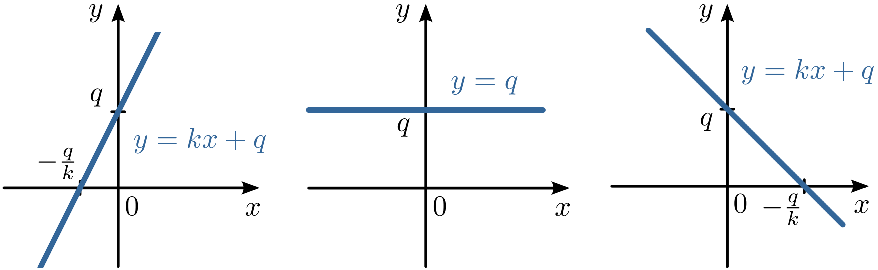
Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století* (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni

evropský sociální fond v ČR | EVROPSKÁ UNIE | MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY | OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Lineární funkce

$$f: y = kx + q, \qquad k, q \in \mathbb{R}, \qquad D(f) = \mathbb{R}, \qquad H(f) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{pro } k \neq 0, \\ \{q\} & \text{pro } k = 0. \end{cases}$$



Grafy lineárních funkcí

Lineární funkce

$$f: y = kx + q, \qquad k, q \in \mathbb{R}, \qquad D(f) = \mathbb{R}, \qquad H(f) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{pro } k \neq 0, \\ \{q\} & \text{pro } k = 0. \end{cases}$$

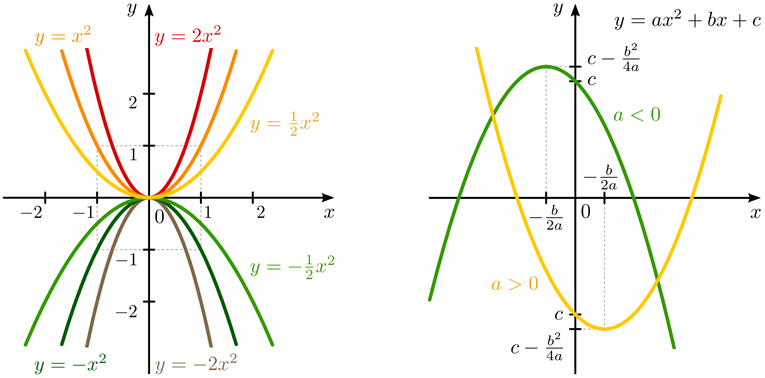
Vlastnosti:

1. grafem lineární funkce je *přímka*,
2. lineární funkce je *konvexní*, *konkávní* a *monotónní*,
3. lineární funkce je *spojitá*, *diferencovatelná* a *hladká*,
4. pro $k > 0$ je f *prostá* a *rostoucí*,
5. pro $k < 0$ je f *prostá* a *klesající*,
6. pro $k = 0$ je f **konstantní funkce** (**konstanta**),
7. pro $k = 0$ je f *neklesající* i *nerostoucí*, *omezená* a *periodická* s libovolnou periodou,
8. pro $q = 0$ a $k \neq 0$ se f říká **přímá úměrnost**,
9. pro $q = 0$ je f *lichá*,
10. pro $q = k = 0$ je f *lichá* i *sudá*.

Kvadratická funkce

$$f: y = ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2 + y_0, \quad a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0, \quad x_0 = -\frac{b}{2a},\ y_0 = c - \frac{b^2}{4a},$$

$$D(f) = \mathbb{R}, \quad H(f) = \begin{cases} \langle y_0, +\infty) & \text{pro } a > 0, \\ (-\infty, y_0\rangle & \text{pro } a < 0. \end{cases}$$



Grafy kvadratických funkcí

Kvadratická funkce

$$f: y = ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2 + y_0, \quad a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0, \quad x_0 = -\tfrac{b}{2a},\ y_0 = c - \tfrac{b^2}{4a},$$

$$D(f) = \mathbb{R}, \quad H(f) = \begin{cases} \langle y_0, +\infty) & \text{pro } a > 0, \\ (-\infty, y_0\rangle & \text{pro } a < 0. \end{cases}$$

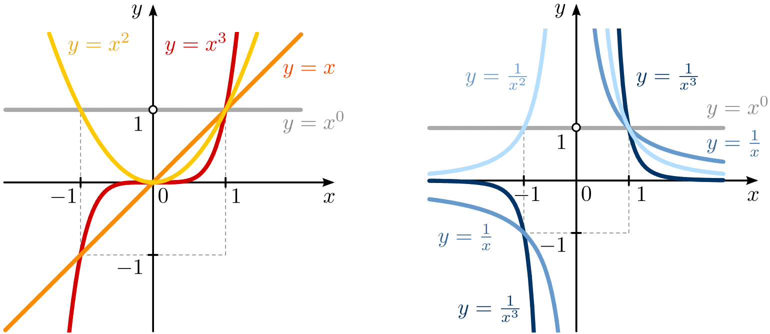
Vlastnosti:

1. grafem kvadratické funkce je *parabola*,
2. kvadratická funkce není omezená,
3. kvadratická funkce je *spojitá*, *diferencovatelná* a *hladká*,
4. pro $a > 0$ je f *ryze konvexní*, *omezená zdola* a není omezená shora,
5. pro $a < 0$ je f *ryze konkávní* a *omezená shora* a není omezená zdola,
6. pro $b = 0$ je f *sudá*.

Mocninná funkce s celým exponentem

$$f: y = x^n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$D(f) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{pro } n \geq 1, \\ \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{pro } n \leq 0, \end{cases} \qquad H(f) = \begin{cases} \{1\} & \text{pro } n = 0, \\ \mathbb{R} & \text{pro } n > 0 \text{ liché}, \\ \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{pro } n < 0 \text{ liché}, \\ \langle 0, +\infty) & \text{pro } n > 0 \text{ sudé}, \\ (0, +\infty) & \text{pro } n < 0 \text{ sudé}. \end{cases}$$



Grafy mocninných funkcí s celým exponentem

Mocninná funkce s celým exponentem

$$f: y = x^n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$D(f) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{pro } n \geq 1, \\ \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{pro } n \leq 0, \end{cases} \quad H(f) = \begin{cases} \{1\} & \text{pro } n = 0, \\ \mathbb{R} & \text{pro } n > 0 \text{ liché}, \\ \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{pro } n < 0 \text{ liché}, \\ \langle 0, +\infty) & \text{pro } n > 0 \text{ sudé}, \\ (0, +\infty) & \text{pro } n < 0 \text{ sudé}. \end{cases}$$

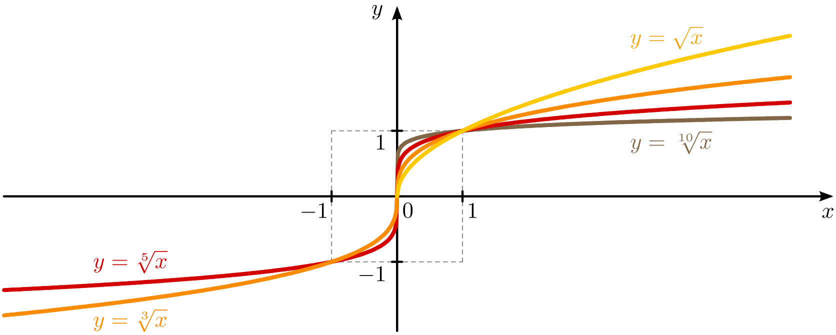
Vlastnosti:

1. grafem mocninné funkce je pro $n = 1$ *přímka*, pro $n \geq 2$ *parabola* n-tého stupně, pro $n = 0$ část *přímky* a pro $n \leq -1$ *hyperbola* stupně $-n + 1$,
2. mocninná funkce je *lichá* pro n liché a *sudá* pro n sudé,
3. mocninná funkce je *spojitá* a *diferencovatelná* na $D(f)$,
4. pro n liché f není omezená zdola ani shora, nemá minimum ani maximum, je *rostoucí* pro $n \geq 1$ liché a *klesající* na $(-\infty, 0)$ a na $(0, +\infty)$ pro $n \leq -1$ liché,
5. pro $n \geq 2$ sudé je f *zdola omezená*, není omezená shora, nemá maximum, je *rostoucí* na $\langle 0, +\infty)$ a *klesající* na $(-\infty, 0\rangle$, má *ostré minimum* v bodě $x = 0$,
6. pro $n \leq -2$ sudé je f *zdola omezená*, není omezená shora, nemá maximum ani minimum, je *rostoucí* na $(-\infty, 0)$ a *klesající* na $(0, +\infty)$.

Funkce n-tá odmocnina

je funkce *inverzní* k části mocninné funkce s přirozeným mocnitelem

$$f : y = \sqrt[n]{x}, \quad n \in \mathbb{N},\ n \geq 2, \qquad D(f) = H(f) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{pro } n \text{ liché,} \\ \langle 0, +\infty) & \text{pro } n \text{ sudé.} \end{cases}$$



Graf druhé, třetí, páté a desáté odmocniny

Funkce n-tá odmocnina

je funkce *inverzní* k části mocninné funkce s přirozeným mocnitelem

$$f : y = \sqrt[n]{x}, \quad n \in \mathbb{N},\ n \geq 2, \qquad D(f) = H(f) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{pro } n \text{ liché,} \\ \langle 0, +\infty) & \text{pro } n \text{ sudé.} \end{cases}$$

Vlastnosti:

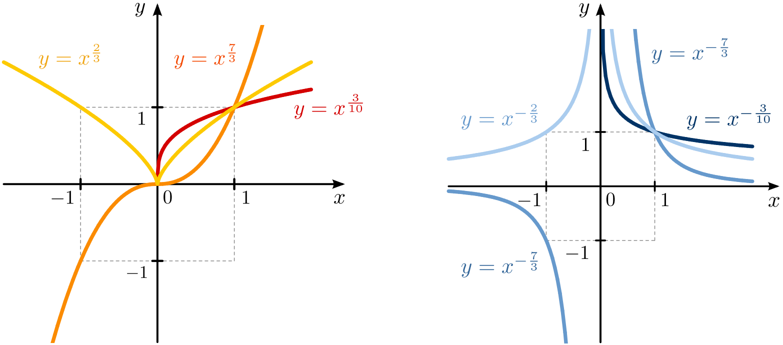
1. n-tá odmocnina je *prostá*, *rostoucí* a není omezená,
2. n-tá odmocnina je *spojitá* na $D(f)$ a *diferencovatelná* na $D(f) \setminus \{0\}$,
3. pro n liché je f *lichá*, není omezená zdola ani shora, nemá minimum ani maximum,
4. pro n sudé je f *omezená zdola*, není omezená shora, nemá maximum a má *ostré minimum* v bodě $x = 0$,
5. f není lipschitzovsky spojitá na okolí bodu 0.

Vztahy:

$$\begin{aligned} (\sqrt[n]{x})^n &= \sqrt[n]{x^n} = x && \text{pro } x \in \mathbb{R} \text{ a } n \text{ liché,} \\ (\sqrt[n]{x})^n &= \sqrt[n]{x^n} = x && \text{pro } x \in \langle 0, +\infty) \text{ a } n \text{ sudé.} \end{aligned}$$

Mocninná funkce s racionálním exponentem

$$f : y = x^{\frac{m}{n}}, \qquad m \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}, \qquad D(f) = \begin{cases} \langle 0, +\infty) & \text{pro } \frac{m}{n} > 0, \ n \text{ sudé}, \\ \mathbb{R} & \text{pro } \frac{m}{n} > 0, \ n \text{ liché}, \\ (0, +\infty) & \text{pro } \frac{m}{n} < 0, \ n \text{ sudé}, \\ \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{pro } \frac{m}{n} < 0, \ n \text{ liché}. \end{cases}$$



Grafy mocninných funkcí s racionálním exponentem

Mocninná funkce s racionálním exponentem

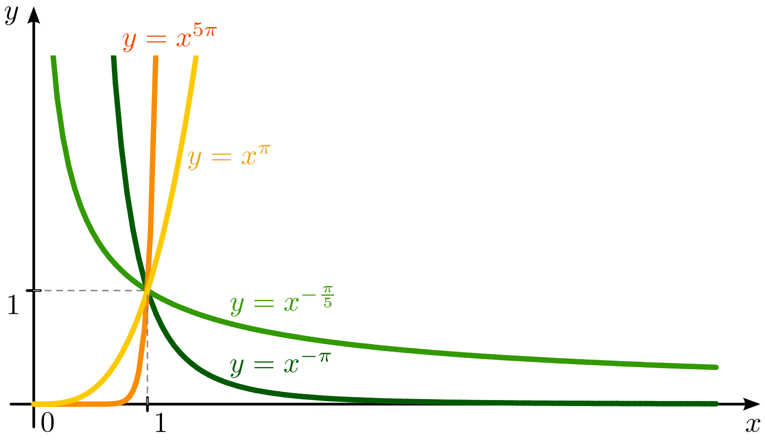
$$f : y = x^{\frac{m}{n}}, \qquad m \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}, \qquad D(f) = \begin{cases} \langle 0, +\infty) & \text{pro } \frac{m}{n} > 0,\ n \text{ sudé}, \\ \mathbb{R} & \text{pro } \frac{m}{n} > 0,\ n \text{ liché}, \\ (0, +\infty) & \text{pro } \frac{m}{n} < 0,\ n \text{ sudé}, \\ \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{pro } \frac{m}{n} < 0,\ n \text{ liché}. \end{cases}$$

Vlastnosti:

1. mocninná funkce je *lichá* pro m a n liché a je *sudá* pro m sudé a n liché,
2. mocninná funkce je *spojitá* na $D(f)$ a *diferencovatelná* na $D(f) \setminus \{0\}$.

Mocninná funkce s obecným reálným exponentem

$$f : y = x^a, \qquad a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \qquad D(f) = H(f) = \begin{cases} \langle 0, +\infty) & \text{pro } a > 0, \\ (0, +\infty) & \text{pro } a < 0. \end{cases}$$



Grafy mocninných funkcí s iracionálním exponentem

Mocninná funkce s obecným reálným exponentem

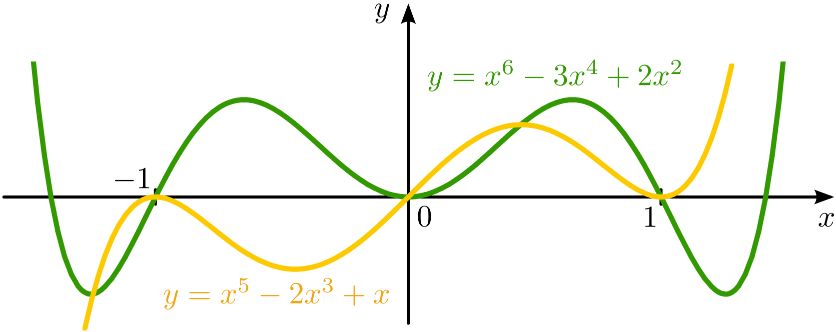
$$f : y = x^a, \qquad a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \qquad D(f) = H(f) = \begin{cases} \langle 0, +\infty) & \text{pro } a > 0, \\ (0, +\infty) & \text{pro } a < 0. \end{cases}$$

Vlastnosti:

1. mocninná funkce je *prostá* a *ryze monotónní*,
2. mocninná funkce není omezená,
3. mocninná funkce je *spojitá* na $D(f)$ a *diferencovatelná* na $(0, +\infty)$,
4. f je *rostoucí* pro $a > 0$ a *klesající* pro $a < 0$,
5. f je *zdola omezená*, není shora omezená, nemá maximum, pro $a < 0$ nemá minimum a pro $a > 0$ má ostré minimum v bodě $x = 0$.

Polynomická funkce n-tého stupně

$$P : y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad n \in \mathbb{N}_0,\ a_n \neq 0,$$
$$a_k \in \mathbb{R},\ k = 0, \ldots, n,\ a_n \neq 0,$$
$$D(P) = \mathbb{R}.$$



Grafy polynomických funkcí

Polynomická funkce n-tého stupně

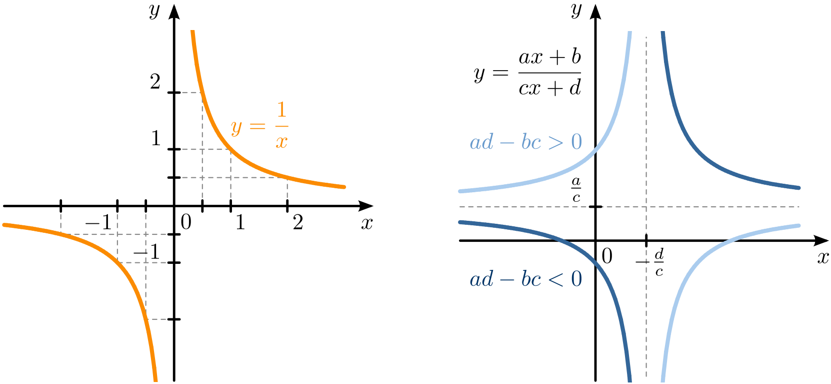
$$P: y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad n \in \mathbb{N}_0,\ a_n \neq 0,$$
$$a_k \in \mathbb{R},\ k = 0, \ldots, n,\ a_n \neq 0,$$
$$D(P) = \mathbb{R}.$$

Vlastnosti:

1. polynomická funkce je *spojitá*, *diferencovatelná* a *hladká*,
2. polynomická funkce stupně $n \geq 1$ není omezená,
3. podle **základní věty algebry** má každá algebraická rovnice $P(x) = 0$ stupně $n \geq 1$ v oboru komplexních čísel alespoň jeden kořen,
4. každá algebraická rovnice $P(x) = 0$ stupně $n \geq 1$ má v oboru komplexních čísel právě n kořenů (se započítáním násobnosti),
5. podle **Descartovy věty** je počet kladných kořenů algebraické rovnice $P(x) = 0$ stupně $n \geq 1$ buď roven počtu znaménkových změn v posloupnosti koeficientů a_0, a_1, ..., a_n, nebo je o sudý počet menší.

Lineární lomená funkce

$$f : y = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R},\ c \neq 0,\ ad-bc \neq 0, \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{-\tfrac{d}{c}\right\},$$
$$H(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\tfrac{a}{c}\right\}.$$



Graf nepřímé úměrnosti (pro $k = 1$) a lineární lomené funkce

Lineární lomená funkce

$$f : y = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R},\ c \neq 0,\ ad-bc \neq 0, \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{-\tfrac{d}{c}\right\},$$
$$H(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\tfrac{a}{c}\right\}.$$

Vlastnosti:

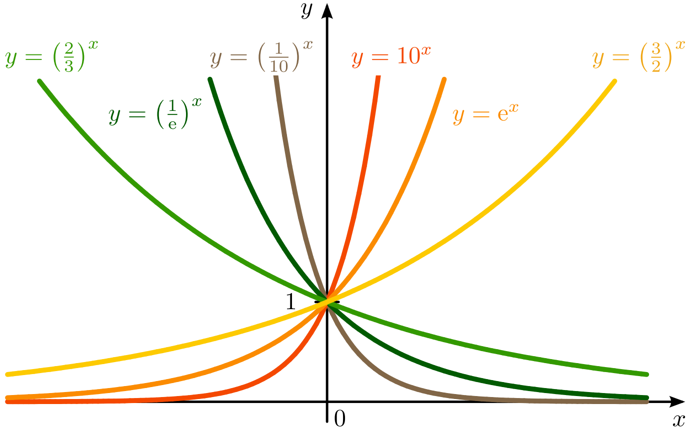
1. grafem lineárně lomené funkce je *rovnoosá hyperbola* se středem v bodě $\left[-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right]$,
2. lineárně lomená funkce je *prostá*,
3. lineárně lomená funkce je *spojitá* a *diferencovatelná* na $D(f)$,
4. f není omezená zdola ani shora, nemá minimum ani maximum,
5. pro $ad-bc<0$ je f *klesající* na $\left(-\infty, -\frac{d}{c}\right)$ a na $\left(-\frac{d}{c}, +\infty\right)$,
6. pro $ad-bc>0$ je f *rostoucí* na $\left(-\infty, -\frac{d}{c}\right)$ a na $\left(-\frac{d}{c}, +\infty\right)$,
7. f není monotónní na $D(f) = \left(-\infty, -\frac{d}{c}\right) \cup \left(-\frac{d}{c}, +\infty\right)$,
8. f není spojitá na $\mathbb{R}$, v bodě $x = -\frac{d}{c}$ má *bod nespojitosti 2. druhu*,

   $$\lim_{x \to -\frac{d}{c}^-} f(x) = \mp\infty \quad \text{pro } ad-bc \lessgtr 0, \qquad \lim_{x \to -\frac{d}{c}^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{pro } ad-bc \lessgtr 0,$$
9. pro $a = d = 0$, $b \neq 0$, $k = \frac{b}{c}$ je $f : y = \frac{k}{x}$, jež se nazývá **nepřímá úměrnost**; je to *lichá funkce*.

Exponenciální funkce

$f: \; y = a^x, \qquad a > 0, \; a \neq 1, \qquad D(f) = \mathbb{R}, \qquad H(f) = (0, +\infty),$

$f: \; y = \mathrm{e}^x,$ $\qquad$ e je Eulerovo číslo, $\qquad D(f) = \mathbb{R}, \qquad H(f) = (0, +\infty).$



Grafy exponenciálních funkcí

Exponenciální funkce

$$f:\ y = a^x, \qquad a>0,\ a\neq 1, \qquad D(f)=\mathbb{R}, \qquad H(f)=(0,+\infty),$$
$$f:\ y = \mathrm{e}^x, \qquad \mathrm{e}\ \text{je Eulerovo číslo}, \qquad D(f)=\mathbb{R}, \qquad H(f)=(0,+\infty).$$

Vlastnosti:

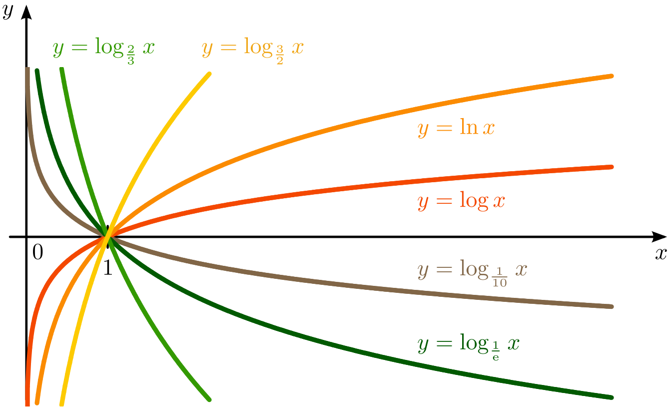
1. graf exponenciální funkce je *exponenciála*,
2. exponenciální funkce je *prostá*,
3. exponenciální funkce je *spojitá*, *diferencovatelná* a *hladká*,
4. f je *rostoucí* pro $a>0$ a *klesající* pro $a<0$,
5. f je *zdola omezená* a není omezená shora, nemá maximum ani minimum,
6. e je **Eulerovo číslo**:

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!} = 2.71828182845904523536028747 1\ldots$$

Logaritmická funkce

je funkce *inverzní* k exponenciální funkci

$$f:\ y=\log_a x,\qquad a>0,\ a\neq 1,\qquad D(f)=(0,+\infty),\quad H(f)=\mathbb{R},$$
$$f:\ y=\log x=\log_{10} x,\qquad D(f)=(0,+\infty),\quad H(f)=\mathbb{R},$$
$$f:\ y=\ln x=\log_{\mathrm{e}} x,\qquad \mathrm{e}=2.71828182\ldots\qquad D(f)=(0,+\infty),\quad H(f)=\mathbb{R}.$$



Grafy logaritmických funkcí

Logaritmická funkce

je funkce *inverzní* k exponenciální funkci

$$f: \; y = \log_a x, \qquad a > 0,\; a \neq 1, \qquad D(f) = (0, +\infty), \quad H(f) = \mathbb{R},$$

$$f: \; y = \log x = \log_{10} x, \qquad D(f) = (0, +\infty), \quad H(f) = \mathbb{R},$$

$$f: \; y = \ln x = \log_{\mathrm{e}} x, \qquad \mathrm{e} = 2.71828182\ldots \qquad D(f) = (0, +\infty), \quad H(f) = \mathbb{R}.$$

Vlastnosti:

1. graf logaritmické funkce je *logaritmická křivka*,
2. logaritmická funkce je *prostá*,
3. logaritmická funkce je *spojitá*, *diferencovatelná* a *hladká*,
4. f je *rostoucí* pro $a > 1$ a *klesající* pro $0 < a < 1$,
5. f není omezená zdola ani shora, nemá minimum ani maximum.

Vztahy:

$$a^{\log_a x} = x \quad \text{pro } x > 0, \qquad \log_a a^x = x \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$$

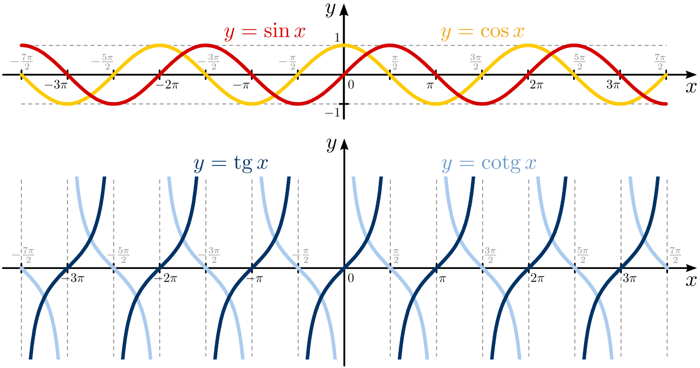
Goniometrické funkce

$$f: \ y = \sin x, \qquad D(f) = \mathbb{R}, \qquad H(f) = \langle -1, 1 \rangle,$$

$$f: \ y = \cos x, \qquad D(f) = \mathbb{R}, \qquad H(f) = \langle -1, 1 \rangle,$$

$$f: \ y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}, \qquad H(f) = \mathbb{R},$$

$$f: \ y = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \qquad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{ k\pi, k \in \mathbb{Z} \}, \qquad H(f) = \mathbb{R}.$$



Grafy goniometrických funkcí

Goniometrické funkce

$$
\begin{array}{lll}
f: \; y = \sin x, & D(f) = \mathbb{R}, & H(f) = \langle -1, 1 \rangle, \\
f: \; y = \cos x, & D(f) = \mathbb{R}, & H(f) = \langle -1, 1 \rangle, \\
f: \; y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, & D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}, & H(f) = \mathbb{R}, \\
f: \; y = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, & D(f) = \mathbb{R} \setminus \{ k\pi, k \in \mathbb{Z} \}, & H(f) = \mathbb{R}.
\end{array}
$$

Vlastnosti:

1. funkce sinus, tangens a kotangens jsou *liché* funkce, kosinus je funkce *sudá*,
2. funkce sinus a kosinus jsou *omezené* 2π*–periodické* funkce,
   funkce tangens a kotangens jsou *neomezené* π*–periodické* funkce,
3. všechny goniometrické funkce jsou *spojité* na $D(f)$.

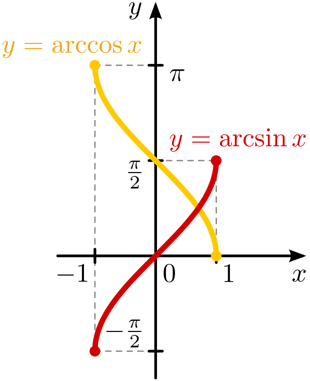
Vztahy pro $x, y \in \mathbb{R}$**:**

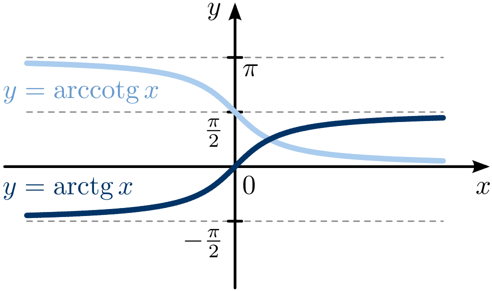
$$
\begin{array}{rclrcl}
\sin(2x) & = & 2 \sin x \cos x, & \sin x + \sin y & = & 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \\
\cos(2x) & = & \cos^2 x - \sin^2 x, & \sin x - \sin y & = & 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}, \\
\sin(x \pm y) & = & \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, & \cos x + \cos y & = & 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \\
\cos(x \pm y) & = & \cos x \cos y \mp \sin x \sin y, & \cos x - \cos y & = & -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.
\end{array}
$$

Cyklometrické funkce

jsou funkce *inverzní* k částem goniometrických funkcí

$$f:\ y=\arcsin x,\qquad D(f)=\langle -1,1\rangle,\qquad H(f)=\langle -\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\rangle,$$
$$f:\ y=\arccos x,\qquad D(f)=\langle -1,1\rangle,\qquad H(f)=\langle 0,\pi\rangle,$$
$$f:\ y=\operatorname{arctg} x,\qquad D(f)=\mathbb{R},\qquad H(f)=\left(-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right),$$
$$f:\ y=\operatorname{arccotg} x,\qquad D(f)=\mathbb{R},\qquad H(f)=(0,\pi)\,.$$





Grafy cyklometrických funkcí

Cyklometrické funkce

jsou funkce *inverzní* k částem goniometrických funkcí

$$
\begin{array}{lll}
f:\ y = \arcsin x, & D(f) = \langle -1, 1\rangle, & H(f) = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle, \\
f:\ y = \arccos x, & D(f) = \langle -1, 1\rangle, & H(f) = \langle 0, \pi\rangle, \\
f:\ y = \operatorname{arctg} x, & D(f) = \mathbb{R}, & H(f) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \\
f:\ y = \operatorname{arccotg} x, & D(f) = \mathbb{R}, & H(f) = (0, \pi).
\end{array}
$$

Vlastnosti:

1. funkce arkussinus a arkustangens jsou *liché* funkce,

$$
\begin{array}{rcl}
\arcsin(-x) = -\arcsin x & \text{a} & \arccos(-x) = \pi - \arccos x \quad \text{pro } x \in \langle -1, 1\rangle, \\
\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x & \text{a} & \operatorname{arccotg}(-x) = \pi - \operatorname{arccotg} x \quad \text{pro } x \in \mathbb{R},
\end{array}
$$

2. všechny cyklometrické funkce jsou *spojité* na $D(f)$.

Vztahy:

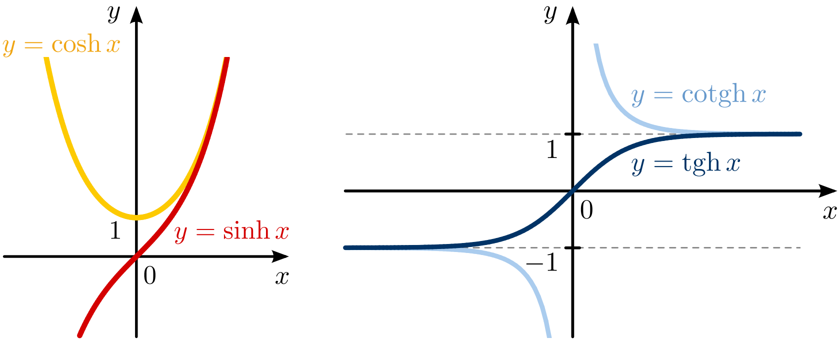
$$
\begin{array}{rll}
\sin(\arcsin x) = x & \text{pro } x \in \langle -1, 1\rangle, & \cos(\arccos x) = x \quad \text{pro } x \in \langle -1, 1\rangle, \\
\arcsin(\sin x) = x & \text{pro } x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle, & \arccos(\cos x) = x \quad \text{pro } x \in \langle 0, \pi\rangle, \\
\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x & \text{pro } x \in \mathbb{R}, & \operatorname{cotg}(\operatorname{arccotg} x) = x \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}, \\
\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x & \text{pro } x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), & \operatorname{arccotg}(\operatorname{cotg} x) = x \quad \text{pro } x \in (0, \pi),
\end{array}
$$

$$
\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad \text{pro } x \in \langle -1, 1\rangle, \qquad \operatorname{arctg} x = \operatorname{arccotg} \frac{1}{x} \quad \text{pro } x > 0,
$$

$$
\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2} \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}.
$$

Hyperbolické funkce

$$
\begin{array}{llll}
f: & y = \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}, & D(f) = \mathbb{R}, & H(f) = \mathbb{R}, \\
f: & y = \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}, & D(f) = \mathbb{R}, & H(f) = \langle 1, +\infty), \\
f: & y = \operatorname{tgh} x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}, & D(f) = \mathbb{R}, & H(f) = (-1, 1), \\
f: & y = \operatorname{cotgh} x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x}, & D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}, & H(f) = \mathbb{R} \setminus \langle -1, 1\rangle.
\end{array}
$$



Grafy hyperbolických funkcí

Hyperbolické funkce

$$
\begin{array}{llll}
f:\ y=\sinh x & =\frac{e^x-e^{-x}}{2}, & D(f)=\mathbb{R}, & H(f)=\mathbb{R},\\
f:\ y=\cosh x & =\frac{e^x+e^{-x}}{2}, & D(f)=\mathbb{R}, & H(f)=\langle 1,+\infty),\\
f:\ y=\operatorname{tgh} x & =\frac{\sinh x}{\cosh x}, & D(f)=\mathbb{R}, & H(f)=(-1,1),\\
f:\ y=\operatorname{cotgh} x & =\frac{\cosh x}{\sinh x}, & D(f)=\mathbb{R}\setminus\{0\}, & H(f)=\mathbb{R}\setminus\langle -1,1\rangle.
\end{array}
$$

Vlastnosti:

1. funkce hyperbolický sinus, hyperbolický tangens a hyperbolický kotangens jsou *liché* funkce, hyperbolický kosinus je funkce *sudá*,
2. všechny hyperbolické funkce jsou *spojité* na $D(f)$.

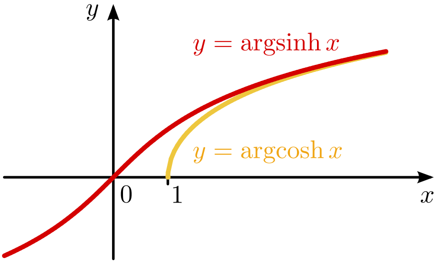
Vztahy pro $x, y \in \mathbb{R}$**:**

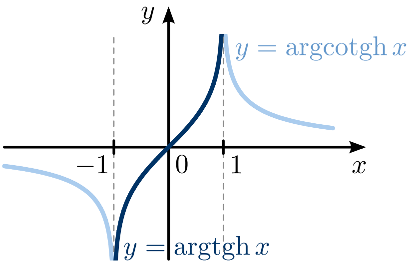
$$
\begin{aligned}
\sinh(2x) &= 2\sinh x\cosh x, & \sinh x+\sinh y &= 2\sinh\tfrac{x+y}{2}\cosh\tfrac{x-y}{2},\\
\cosh(2x) &= \cosh^2 x+\sinh^2 x, & \sinh x-\sinh y &= 2\cosh\tfrac{x+y}{2}\sinh\tfrac{x-y}{2},\\
\sinh(x\pm y) &= \sinh x\cosh y\pm\cosh x\sinh y, & \cosh x+\cosh y &= 2\cosh\tfrac{x+y}{2}\cosh\tfrac{x-y}{2},\\
\cosh(x\pm y) &= \cosh x\cosh y\pm\sinh x\sinh y, & \cosh x-\cosh y &= 2\sinh\tfrac{x+y}{2}\sinh\tfrac{x-y}{2}.
\end{aligned}
$$

Hyperbolometrické funkce

jsou funkce *inverzní* k částem hyperbolických funkcí

$$
\begin{aligned}
f:\ & y=\operatorname{argsinh} x, && D(f)=\mathbb{R}, && H(f)=\mathbb{R},\\
f:\ & y=\operatorname{argcosh} x, && D(f)=\langle 1,+\infty), && H(f)=\langle 0,+\infty),\\
f:\ & y=\operatorname{argtgh} x, && D(f)=(-1,1), && H(f)=\mathbb{R},\\
f:\ & y=\operatorname{argcotgh} x, && D(f)=\mathbb{R}\setminus\langle -1,1\rangle, && H(f)=\mathbb{R}\setminus\{0\}\,.
\end{aligned}
$$





Grafy hyperbolometrických funkcí

Hyperbolometrické funkce

jsou funkce *inverzní* k častem hyperbolických funkcí

$$\begin{array}{lll} f:\ y=\operatorname{argsinh} x, & D(f)=\mathbb{R}, & H(f)=\mathbb{R}, \\ f:\ y=\operatorname{argcosh} x, & D(f)=\langle 1,+\infty), & H(f)=\langle 0,+\infty), \\ f:\ y=\operatorname{argtgh} x, & D(f)=(-1,1), & H(f)=\mathbb{R}, \\ f:\ y=\operatorname{argcotgh} x, & D(f)=\mathbb{R}\setminus\langle -1,1\rangle, & H(f)=\mathbb{R}\setminus\{0\}\,. \end{array}$$

Vlastnosti:

1. funkce argument hyperbolického sinu, argument hyperbolického tangens a argument hyperbolického kotangens jsou *liché* funkce,
2. všechny hyperbolometrické funkce jsou *spojité* na $D(f)$.

Vztahy:

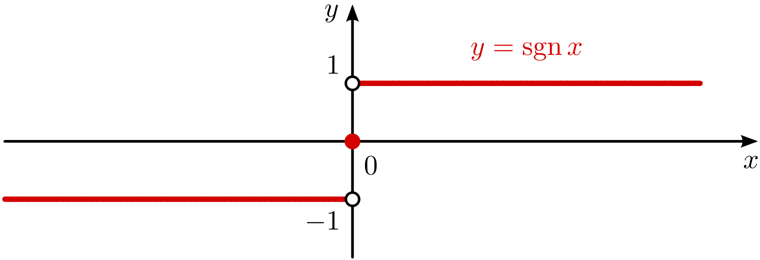
$$\begin{array}{rcll} \sinh(\operatorname{argsinh} x) &=& x & \text{pro } x\in\mathbb{R}, \\ \operatorname{argsinh}(\sinh x) &=& x & \text{pro } x\in\mathbb{R}, \end{array} \qquad \begin{array}{rcll} \cosh(\operatorname{argcosh} x) &=& x & \text{pro } x\geq 1, \\ \operatorname{argcosh}(\cosh x) &=& x & \text{pro } x\geq 0, \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} \operatorname{tgh}(\operatorname{argtgh} x) &=& x & \text{pro } x\in(-1,1), \\ \operatorname{argtgh}(\operatorname{tgh} x) &=& x & \text{pro } x\in\mathbb{R}, \end{array} \quad \begin{array}{rcll} \operatorname{cotgh}(\operatorname{argcotgh} x) &=& x & \text{pro } x\in\mathbb{R}\setminus\langle -1,1\rangle, \\ \operatorname{argcotgh}(\operatorname{cotgh} x) &=& x & \text{pro } x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}, \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} \operatorname{argsinh} x &=& \ln(x+\sqrt{x^2+1}) & \text{pro } x\in\mathbb{R}, \\ \operatorname{argcosh} x &=& \ln(x+\sqrt{x^2-1}) & \text{pro } x\geq 1. \end{array}$$

Funkce signum (znaménková funkce)

$$f : y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{pro } x < 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ 1 & \text{pro } x > 0, \end{cases} \qquad D(f) = \mathbb{R}, \qquad H(f) = \{-1, 0, 1\}.$$



Graf znaménkové funkce

Funkce signum (znaménková funkce)

$$f : y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{pro } x < 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ 1 & \text{pro } x > 0, \end{cases} \qquad D(f) = \mathbb{R}, \qquad H(f) = \{-1, 0, 1\}.$$

Vlastnosti:

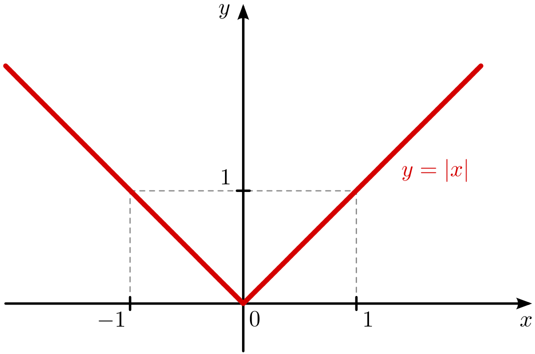
1. funkce signum je *lichá* funkce,
2. funkce signum je *neklesající* funkce,
3. funkce signum je *spojitá* v každém bodě $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
4. funkce signum není spojitá v bodě $x = 0$, v tomto bodě má *bod nespojitosti 1. druhu* se skokem 2

$$f(0-) = \lim_{x \to 0^-} \operatorname{sgn} x = -1,$$

$$f(0+) = \lim_{x \to 0^+} \operatorname{sgn} x = 1.$$

Funkce absolutní hodnota

$$f : y = |x| = \begin{cases} -x & \text{pro } x < 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ x & \text{pro } x > 0, \end{cases} \qquad D(f) = \mathbb{R}, \qquad H(f) = \langle 0, +\infty).$$



Graf funkce absolutní hodnota

Funkce absolutní hodnota

$$f : y = |x| = \begin{cases} -x & \text{pro } x < 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ x & \text{pro } x > 0, \end{cases} \qquad D(f) = \mathbb{R}, \qquad H(f) = \langle 0, +\infty).$$

Vlastnosti:

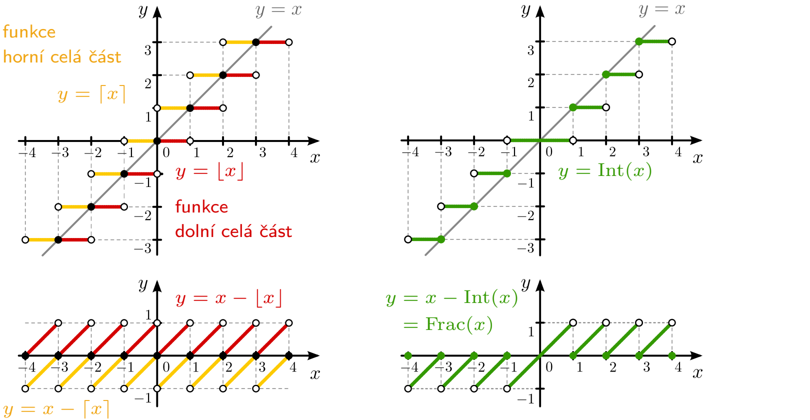
1. funkce absolutní hodnota je *sudá* funkce,
2. funkce absolutní hodnota je *konvexní* funkce,
3. funkce absolutní hodnota je *spojitá* na $D(f)$,
4. funkce absolutní hodnota nemá derivaci v bodě $x = 0$ (není diferencovatelná v bodě $x = 0$), jelikož má v tomto bodě různé jednostranné derivace

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1,$$

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1.$$

Funkce horní a dolní celá část

$$f : y = \mathrm{Int}(x) = \begin{cases} \lceil x \rceil = \min\{k \in \mathbb{Z},\ k \geq x\} & \text{pro } x < 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ \lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z},\ k \leq x\} & \text{pro } x > 0, \end{cases} \quad D(f) = \mathbb{R},\ H(f) = \mathbb{Z}.$$



Grafy funkcí horní a dolní celá část, funkce Int a jejich zbytků

Funkce horní a dolní celá část

$$f : y = \mathrm{Int}(x) = \begin{cases} \lceil x \rceil = \min\{k \in \mathbb{Z},\ k \geq x\} & \text{pro } x < 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ \lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z},\ k \leq x\} & \text{pro } x > 0, \end{cases} \quad D(f) = \mathbb{R},\ H(f) = \mathbb{Z}.$$

Vlastnosti a poznámky:

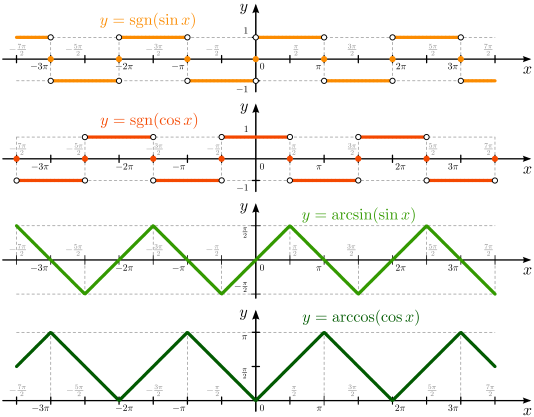
1. funkce horní a dolní celá část a funkce Int jsou funkce *neklesající*,
2. funkce Int a $\mathrm{Frac} : y = x - \mathrm{Int}(x)$ jsou funkce *liché*,
3. funkce dolní celá část $y = \lfloor x \rfloor$ bývá často uváděna jako celá část a značena $y = [x]$.

Vztahy:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{Z} : \quad \lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor = \mathrm{Int}(x) &= x, \\ \forall x \in \mathbb{R} : \quad \mathrm{Int}(x) + \mathrm{Frac}(x) &= x. \end{aligned}$$

Některé periodické funkce

$$
\begin{array}{lll}
f_1: \ y = \operatorname{sgn}(\sin x), & D(f_1) = \mathbb{R}, & H(f_1) = \{-1, 0, 1\}, \\
f_2: \ y = \operatorname{sgn}(\cos x), & D(f_2) = \mathbb{R}, & H(f_2) = \{-1, 0, 1\}, \\
f_3: \ y = \arcsin(\sin x), & D(f_3) = \mathbb{R}, & H(f_3) = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle, \\
f_4: \ y = \arccos(\cos x), & D(f_4) = \mathbb{R}, & H(f_4) = \langle 0, \pi \rangle.
\end{array}
$$



Grafy periodických funkcí f_1, f_2, f_3 a f_4

Některé periodické funkce

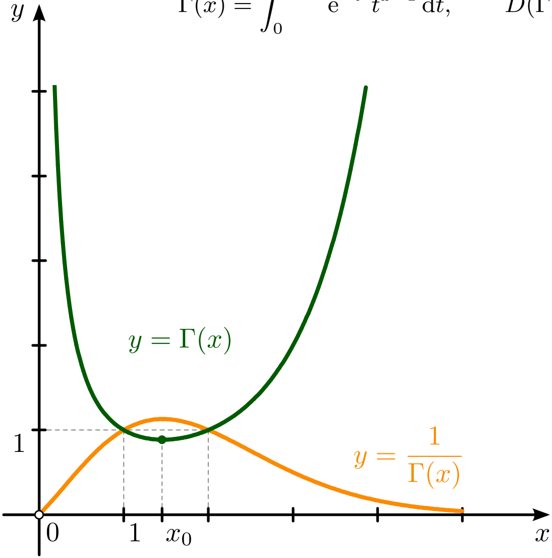
$$\begin{aligned}
f_1 &: \ y = \operatorname{sgn}(\sin x), & D(f_1) &= \mathbb{R}, & H(f_1) &= \{-1, 0, 1\},\\
f_2 &: \ y = \operatorname{sgn}(\cos x), & D(f_2) &= \mathbb{R}, & H(f_2) &= \{-1, 0, 1\},\\
f_3 &: \ y = \arcsin(\sin x), & D(f_3) &= \mathbb{R}, & H(f_3) &= \langle -\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2} \rangle,\\
f_4 &: \ y = \arccos(\cos x), & D(f_4) &= \mathbb{R}, & H(f_4) &= \langle 0, \pi \rangle.
\end{aligned}$$

Vlastnosti:

1. funkce f_1, f_2, f_3 a f_4 jsou *omezené* 2π*-periodické* funkce,
2. funkce f_1 a f_2 jsou *po částech spojité* a *po částech hladké* funkce,
3. funkce f_3 a f_4 jsou *spojité* a *po částech hladké* funkce.

Funkce gama

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\, \mathrm{d}t, \qquad D(\Gamma) = (0, +\infty).$$



Graf funkce gama

Funkce gama

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\,\mathrm{d}t, \qquad D(\Gamma) = (0, +\infty).$$

Vlastnosti:

1. $\forall x \in D(\Gamma):\ \Gamma(x) > 0$,
2. funkce Γ je *omezená zdola*, není omezená shora,
3. funkce Γ je *spojitá* a *diferencovatelná*,
4. funkce Γ je *ryze konvexní*,
5. $$\lim_{x\to 0^+} \Gamma(x) = +\infty,$$ $$\lim_{x\to +\infty} \Gamma(x) = +\infty,$$
6. funkce Γ má právě jedno *ostré lokální minimum* v bodě $x_0 \in (1, 2)$, $$x_0 \doteq 1{,}46163.$$

Funkce gama

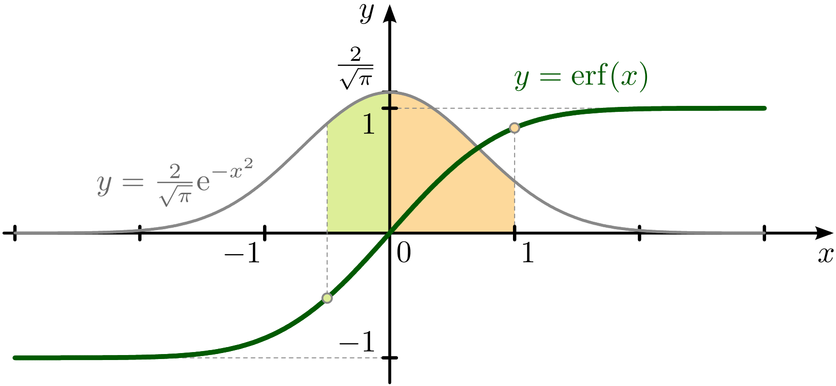
$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ t^{x-1}\,\mathrm{d}t, \qquad D(\Gamma) = (0, +\infty).$$

Vztahy:

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= x\,\Gamma(x),\\
\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi} \qquad \Longrightarrow \quad \Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\tfrac{5}{2}\right) = \tfrac{3}{4}\sqrt{\pi}, \quad \ldots\\
\Gamma(1) &= 1 \qquad \Longrightarrow \quad \Gamma(2) = 1, \quad \Gamma(3) = 2\cdot 1, \quad \Gamma(4) = 3\cdot 2\cdot 1, \quad \ldots\\
\Gamma(n) &= (n-1)! \quad \text{pro } n \in \mathbb{N},\\
\Gamma(x)\Gamma(1-x) &= \frac{\pi}{\sin \pi x} \quad \text{pro } 0 < x < 1,\\
\Gamma(x)\Gamma\left(x+\tfrac{1}{2}\right) &= 2^{1-2x}\cdot\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(2x),\\
\frac{\mathrm{d}^{(n)}\Gamma(x)}{\mathrm{d}x^{(n)}} &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ t^{x-1}\ \ln^n t\,\mathrm{d}t \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Funkce chyb (chybová funkce)

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t, \qquad D(\operatorname{erf}) = \mathbb{R}.$$



Graf chybové funkce

Funkce chyb (chybová funkce)

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t, \qquad D(\operatorname{erf}) = \mathbb{R}.$$

Vlastnosti:

1. erf je *lichá* funkce,
2. erf je *omezená*, *spojitá* a *diferencovatelná* funkce,

$$\frac{\mathrm{d}\operatorname{erf}(x)}{\mathrm{d}\,x} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2}, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{erf}(x) = \pm 1.$$

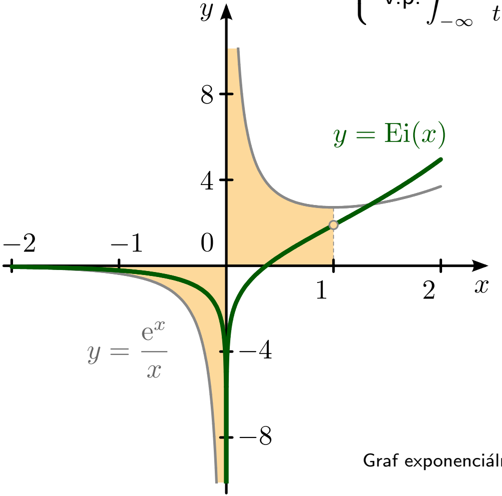
Vztahy:

$$\int_0^x \operatorname{erf}(t)\,\mathrm{d}t = x\operatorname{erf}(x) - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \mathrm{e}^{-x^2}\right),$$

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \cdots\right) = \frac{x}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!\,\left(n+\frac{1}{2}\right)}.$$

Exponenciální integrální funkce

$$\mathrm{Ei}(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t & \text{pro } x < 0, \\ \text{v.p.} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t & \text{pro } x > 0, \end{cases} \qquad D(\mathrm{Ei}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad H(\mathrm{Ei}) = \mathbb{R}.$$



Graf exponenciální integrální funkce

Exponenciální integrální funkce

$$\mathrm{Ei}(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t & \text{pro } x < 0, \qquad D(\mathrm{Ei}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ \text{v.p.} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t & \text{pro } x > 0, \qquad H(\mathrm{Ei}) = \mathbb{R}. \end{cases}$$

Vlastnosti:

1. Ei je *spojitá* na $D(\mathrm{Ei})$,
2. $x = 0$ je *bod nespojitosti 2. druhu*, $\lim_{x\to 0} \mathrm{Ei}(x) = -\infty$,
3. Ei není omezená zdola ani shora, $\lim\limits_{x\to -\infty} \mathrm{Ei}(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \mathrm{Ei}(x) = +\infty$,
4. Ei je *diferencovatelná* na $D(\mathrm{Ei})$, $\dfrac{\mathrm{d}\,\mathrm{Ei}(x)}{\mathrm{d}x} = \dfrac{e^x}{x}$,
5. Ei je *klesající* na $(-\infty, 0)$ a je *rostoucí* na $(0, +\infty)$,
6. Ei je *ryze konkávní* na $(-\infty, 0)$ a na $(0, 1)$, je *ryze konvexní* na $(1, +\infty)$,
7. Ei má právě jeden *nulový bod* $x_0 \doteq 0,3725074107814$, $\mathrm{Ei}(x_0) = 0$.

Exponenciální integrální funkce

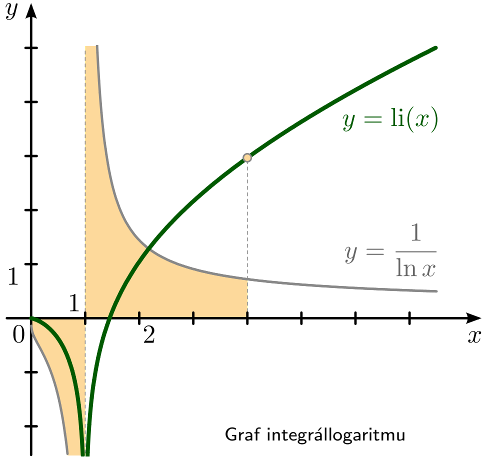
$$\mathrm{Ei}(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t & \text{pro } x < 0, \qquad D(\mathrm{Ei}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ \text{v.p.} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t & \text{pro } x > 0, \qquad H(\mathrm{Ei}) = \mathbb{R}. \end{cases}$$

Vztahy:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ei}(x) &= \mathrm{li}(\mathrm{e}^x), \\ \int_0^x \mathrm{Ei}(at)\,\mathrm{d}t &= x\,\mathrm{Ei}(ax) - \frac{\mathrm{e}^{ax} - 1}{a}, \\ \mathrm{Ei}(x) &= x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{18} - \frac{x^4}{96} + \cdots = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!\,n}. \end{aligned}$$

Funkce integrální logaritmus (integrállogaritmus)

$$\operatorname{li}(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t & \text{pro } 0 < x < 1, \qquad D(\operatorname{li}) = (0,1) \cup (1,+\infty), \\ \text{v.p.} \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t & \text{pro } x > 1, \qquad H(\operatorname{li}) = \mathbb{R}. \end{cases}$$



Graf integrállogaritmu

Funkce integrální logaritmus (integrállogaritmus)

$$\mathrm{li}(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t & \text{pro } 0 < x < 1, \qquad D(\mathrm{li}) = (0,1) \cup (1,+\infty), \\ \text{v.p.} \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t & \text{pro } x > 1, \qquad H(\mathrm{li}) = \mathbb{R}. \end{cases}$$

Vlastnosti:

1. li je *spojitá* na $D(\mathrm{li})$,
2. $x = 1$ je *bod nespojitosti 2. druhu*, $\lim\limits_{x\to 1} \mathrm{li}(x) = -\infty$,
3. li není omezená zdola ani shora, $\lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{li}(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \mathrm{li}(x) = +\infty$,
4. li je *diferencovatelná* na $D(\mathrm{li})$, $\dfrac{\mathrm{d}\,\mathrm{li}(x)}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{\ln x}$,
5. li je *klesající* na $(0,1)$ a je *rostoucí* na $(1,+\infty)$,
6. li je *ryze konkávní* na $(0,1)$ a na $(1,+\infty)$,
7. li má právě jeden *nulový bod* $x_0 \doteq 1{,}4513692348838$, $\mathrm{li}(x_0) = 0$.

Funkce integrální logaritmus (integrállogaritmus)

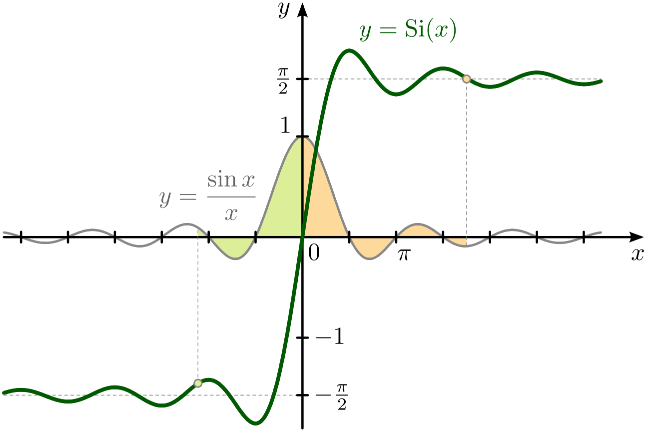
$$\mathrm{li}(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t & \text{pro } 0 < x < 1, \qquad D(\mathrm{li}) = (0,1) \cup (1,+\infty), \\ \text{v.p.} \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t & \text{pro } x > 1, \qquad H(\mathrm{li}) = \mathbb{R}. \end{cases}$$

Vztahy:

$$\begin{aligned} \mathrm{li}(x) &= \mathrm{Ei}(\ln(x)), \\ \int_0^x \mathrm{li}(at)\,\mathrm{d}t &= x\,\mathrm{li}(ax) - \frac{1}{a}\,\mathrm{li}(a^2x^2) \quad \text{pro } a > 0, \\ \int_0^1 t^p\,\mathrm{li}(t)\,\mathrm{d}t &= -\frac{\ln(2+p)}{1+p} \quad \text{pro } p > -2, \\ \int_1^{+\infty} t^p\,\mathrm{li}(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{\ln(-2-p)}{1+p} \quad \text{pro } p < -2. \end{aligned}$$

Funkce integrální sinus (integrálsinus)

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t, \qquad D(\operatorname{Si}) = \mathbb{R}.$$



Graf integrálsinu

Funkce integrální sinus (integrálsinus)

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t, \qquad D(\mathrm{Si}) = \mathbb{R}.$$

Vlastnosti:

1. Si je *lichá* funkce,
2. Si je *omezená*, *spojitá* a *diferencovatelná* funkce,

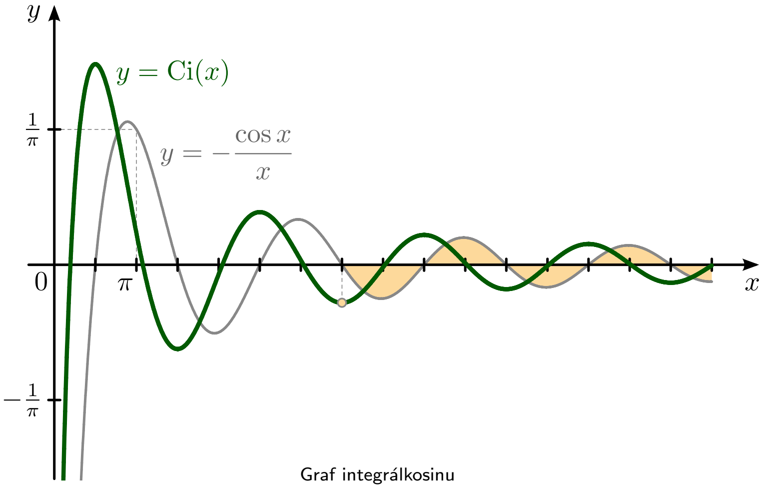
$$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Si}(x)}{\mathrm{d}\,x} = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{pro } x \neq 0, \\ 1 & \text{pro } x = 0, \end{cases} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{Si}(x) = \pm\frac{\pi}{2}.$$

Vztahy:

$$\begin{aligned} \int_0^x \mathrm{Si}(t)\,\mathrm{d}t &= x\,\mathrm{Si}(x) - 1 + \cos(x), \\ \mathrm{Si}(x) &= x - \frac{1}{3}\frac{x^3}{3!} + \frac{1}{5}\frac{x^5}{5!} - \frac{1}{7}\frac{x^7}{7!} + \cdots = x\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x^2)^n}{(2n+1)!(2n+1)}, \\ \mathrm{Si}(x) &\approx \begin{cases} x & \text{pro malá } x, \\ \dfrac{\pi}{2} - \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^3}\right)\cos x - \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{6}{x^4}\right)\sin x & \text{pro velká kladná } x. \end{cases} \end{aligned}$$

Funkce integrální kosinus (integrálkosinus)

$$\mathrm{Ci}(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t, \qquad D(\mathrm{Ci}) = (0, +\infty).$$



Graf integrálkosinu

Funkce integrální kosinus (integrálkosinus)

$$\mathrm{Ci}(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t, \qquad D(\mathrm{Ci}) = (0, +\infty).$$

Vlastnosti:
Ci je *shora omezená*, *spojitá* a *diferencovatelná* funkce,

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Ci}(x)}{\mathrm{d}\,x} = \frac{\cos x}{x}, \qquad \lim_{x\to 0^+} \mathrm{Ci}(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{Ci}(x) = 0.$$

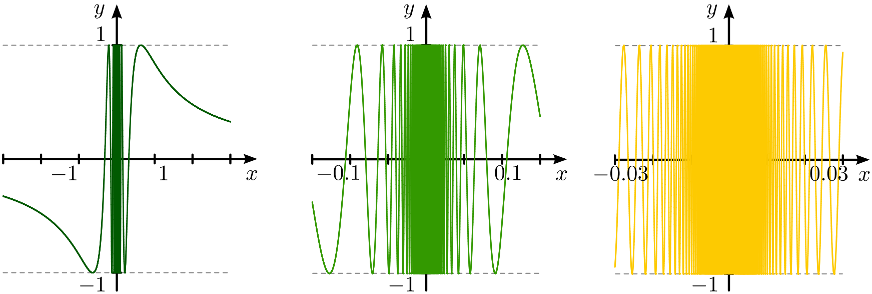
Vztahy:

$$\begin{aligned}
\int_0^x \mathrm{Ci}(t)\,\mathrm{d}t &= x\ \mathrm{Ci}(x) - \sin(x),\\
\mathrm{Ci}(x) &= \gamma + \ln x - \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{2!} + \frac{1}{4}\,\frac{x^4}{4!} - \frac{1}{6}\,\frac{x^6}{6!} + \cdots = \gamma + \ln x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-x^2)^n}{(2n)!\,2n},\\
\mathrm{Ci}(x) &\approx \begin{cases} \gamma + \ln x & \text{pro malá kladná } x,\\ \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^3}\right)\sin x - \left(\frac{1}{x^2} - \frac{6}{x^4}\right)\cos x & \text{pro velká kladná } x,\end{cases}
\end{aligned}$$

kde γ je **Eulerova–Mascheroniho** konstanta: $\gamma = 0,577215664901533\ldots$

Omezená funkce s bodem nespojitosti 2. druhu

$$f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \end{cases} \qquad D(f) = \mathbb{R}, \qquad H(f) = \langle -1, 1 \rangle.$$



Grafy funkce f

Omezená funkce s bodem nespojitosti 2. druhu

$$f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \end{cases} \qquad D(f) = \mathbb{R}, \qquad H(f) = \langle -1, 1 \rangle.$$

Vlastnosti:

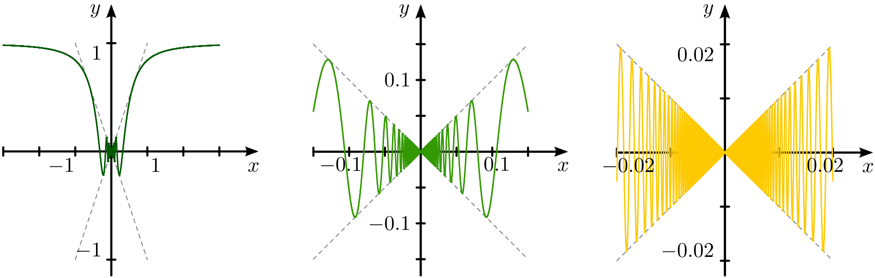
1. funkce f je *omezená*,
2. funkce f je *lichá*,
3. funkce f je *spojitá* na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$,
4. funkce f není spojitá v bodě $x = 0$, v tomto bodě má *bod nespojitosti 2. druhu*, jelikož obě jednostranné limity neexistují,

$$a_n = \frac{1}{2n\pi}, \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{n\to+\infty} f(a_n) = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}, \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{n\to+\infty} f(b_n) = 1.$$

Spojitá funkce bez derivace v počátku

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \end{cases} \qquad D(f) = \mathbb{R}.$$



Grafy funkce f

Spojitá funkce bez derivace v počátku

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \end{cases} \qquad D(f) = \mathbb{R}.$$

Vlastnosti:

1. funkce f je *omezená*,
2. funkce f je *sudá*,
3. funkce f je *spojitá* na $D(f) = \mathbb{R}$,
4. funkce f je *diferencovatelná* na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$,

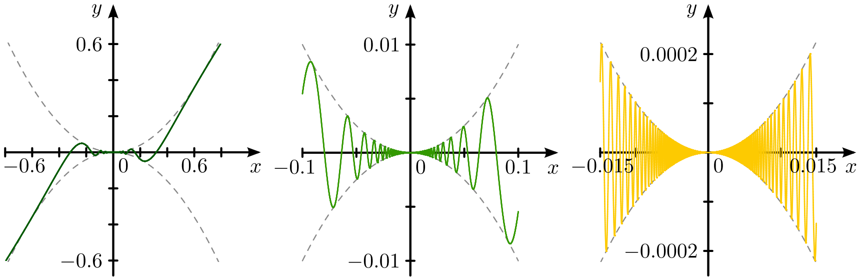
$$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \; f'(x) = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x},$$

5. funkce f nemá derivaci v bodě $x = 0$,

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \sin \frac{1}{h} \quad \text{neexistuje.}$$

Diferencovatelná funkce, která není hladká

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \end{cases} \qquad D(f) = \mathbb{R}, \qquad H(f) = \mathbb{R}.$$



Grafy funkce f

Diferencovatelná funkce, která není hladká

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \end{cases} \qquad D(f) = \mathbb{R}, \qquad H(f) = \mathbb{R}.$$

Vlastnosti:

1. funkce f není omezená zdola ani shora,
2. funkce f je *lichá*,
3. funkce f je *spojitá* na $D(f) = \mathbb{R}$,
4. funkce f je *diferencovatelná* na $D(f) = \mathbb{R}$,

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}: \quad f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x},$$

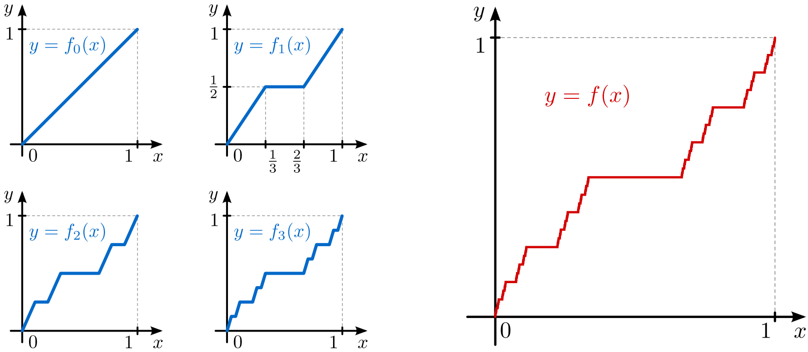
$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} h \sin \frac{1}{h} = 0,$$

5. derivace f' není spojitá v bodě $x = 0$, jelikož limita $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ neexistuje,
6. funkce f není hladká na $D(f)$.

Cantorovy ďábelské schody

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x), \qquad D(f) = \langle 0,1\rangle, \quad H(f) = \langle 0,1\rangle,$$

$$f_0(x) = x, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}:\ f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} f_{n-1}(3x) & \text{pro } x \in \left[0, \frac{1}{3}\right), \\ \frac{1}{2} & \text{pro } x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f_{n-1}(3x-2) & \text{pro } x \in \left(\frac{2}{3}, 1\right]. \end{cases}$$



Grafy funkcí f_0, f_1, f_2, f_3 a graf limitní funkce f.

Cantorovy ďábelské schody

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x), \qquad D(f) = \langle 0,1\rangle, \quad H(f) = \langle 0,1\rangle,$$

$$f_0(x) = x, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}: \; f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} f_{n-1}(3x) & \text{pro } x \in \left[0, \frac{1}{3}\right), \\ \frac{1}{2} & \text{pro } x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f_{n-1}(3x-2) & \text{pro } x \in \left(\frac{2}{3}, 1\right]. \end{cases}$$

Vlastnosti:

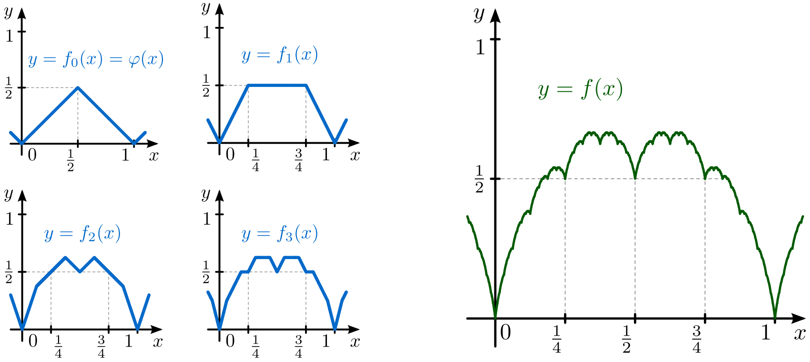
1. funkce f je *spojitá* i *stejnoměrně spojitá*,
2. funkce f není absolutně spojitá na $\langle 0,1\rangle$,
3. funkce f má *omezenou variaci*,
4. funkce f je Lebesgueovsky i Riemannovsky integrovatelná,
5. derivace f' je skoro všude nulová,

$$0 = \int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x \neq f(1) - f(0) = 1.$$

Takagiho spojitá a nikde diferencovatelná funkce

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x), \qquad D(f) = \mathbb{R}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0: \; f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\varphi\left(2^k x\right),$$

$$\varphi(x) = \operatorname{dist}(x, \mathbb{Z}) = \min_{m\in\mathbb{Z}} |x - m|\,.$$



Grafy funkcí f_0, f_1, f_2, f_3 a graf limitní funkce f.

Takagiho spojitá a nikde diferencovatelná funkce

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x), \qquad D(f) = \mathbb{R}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0 : \ f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \varphi\left(2^k x\right),$$

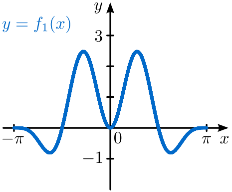
$$\varphi(x) = \operatorname{dist}(x, \mathbb{Z}) = \min_{m\in\mathbb{Z}} |x - m|\,.$$

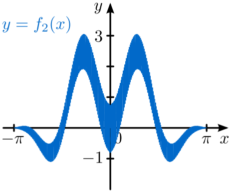
Vlastnosti:

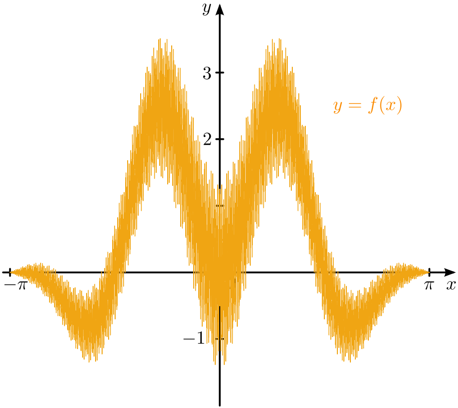
1. $H(f) \subset \langle 0, 1\rangle$,
2. funkce f je *sudá*,
3. funkce f je *periodická* se základní periodou 1,
4. funkce f je *spojitá*,
5. funkce f není diferencovatelná pro žádné $x \in \mathbb{R}$,
6. funkce f nemá jednostranné derivace pro žádné $x \in \mathbb{R}$,
7. funkce f je α*-hölderovsky spojitá* pro $\alpha \in (0, 1)$.

Féjerova funkce s divergentní Fourierovou řadou

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x), \qquad D(f) = \mathbb{R}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}: \ f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2\sin\left(2^{k^3}x\right)}{k^2} \sum_{l=1}^{2^{k^3}} \frac{\sin lx}{l}.$$







Grafy funkcí f_1, f_2 a graf limitní funkce f.

Féjerova funkce s divergentní Fourierovou řadou

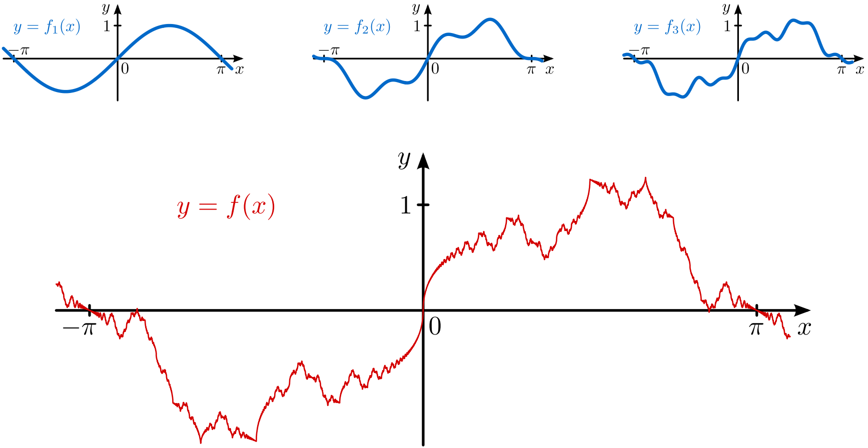
$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x), \qquad D(f) = \mathbb{R}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}:\ f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2\sin\left(2^{k^3}x\right)}{k^2} \sum_{l=1}^{2^{k^3}} \frac{\sin lx}{l}.$$

Vlastnosti:

1. funkce f je *sudá*,
2. funkce f je *periodická* se základní periodou 2π,
3. funkce f je *spojitá*,
4. Fourierova řada funkce f je *divergentní* v bodě 0.

Riemannova funkce

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x), \qquad D(f) = \mathbb{R}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}: \ f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\left(k^2 x\right)}{k^2}.$$



Grafy funkcí f_1, f_2, f_3 a graf limitní funkce f.

Riemannova funkce

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x), \qquad D(f) = \mathbb{R}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}: \; f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\left(k^2 x\right)}{k^2}.$$

Vlastnosti:

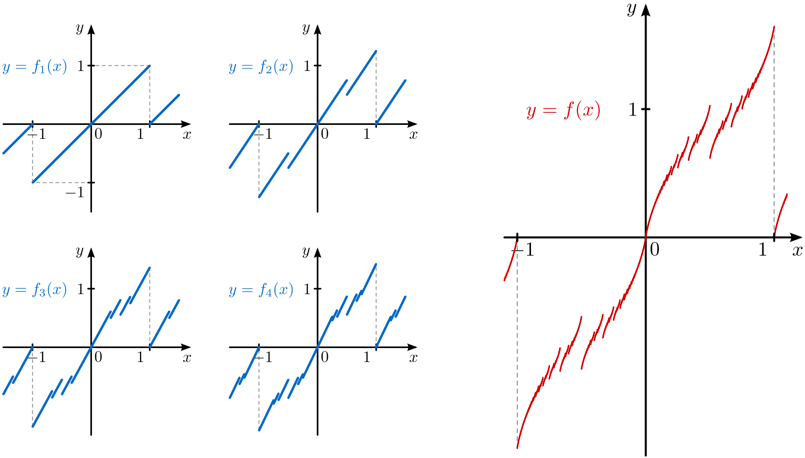
1. funkce f je *lichá*,
2. funkce f je *periodická* se základní periodou 2π,
3. funkce f je *spojitá*,
4. funkce f není nikde diferencovatelnou funkcí,
5. funkce f má *konečné derivace* pouze v bodech

$$x_0 = \pi \frac{2p+1}{2q+1}, \qquad p, q \in \mathbb{Z},$$

a navíc $f'(x_0) = -\dfrac{1}{2}$.

Riemannovsky integrovatelná funkce

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x), \qquad D(f) = \mathbb{R}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}: \ f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{kx - [kx]}{k^2}.$$



Grafy funkcí f_1, f_2 a f_3 a graf limitní funkce f.

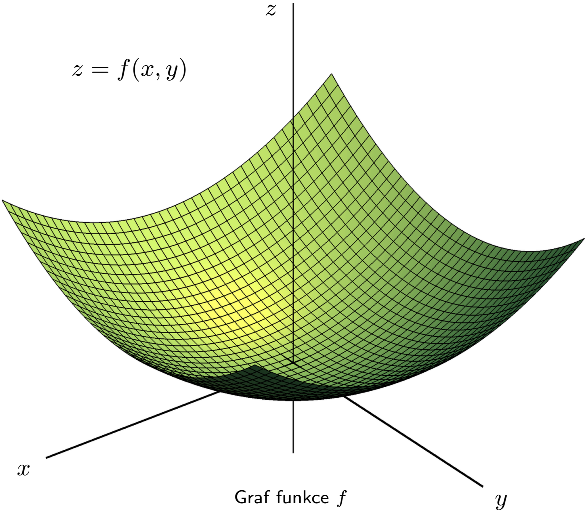
Riemannovsky integrovatelná funkce

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x), \qquad D(f) = \mathbb{R}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}: \ f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{kx - [kx]}{k^2}.$$

Vlastnosti:

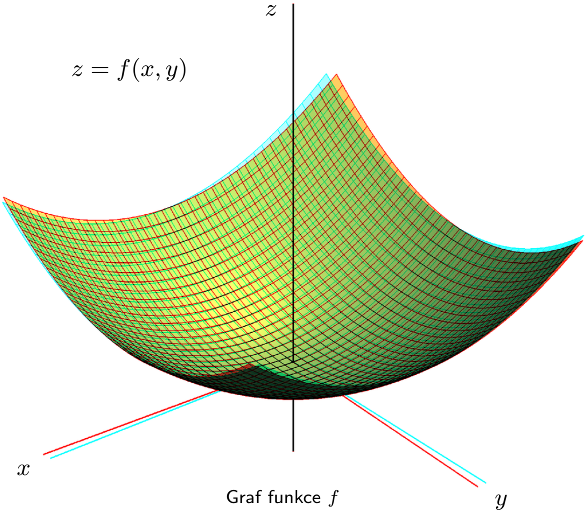
1. funkce f je *lichá*,
2. funkce f je *periodická* se základní periodou 2,
3. funkce f je *omezená*,
4. funkce f není spojitá na $\mathbb{R}$,
5. funkce f má *nekonečně mnoho bodů nespojitosti* mezi dvěma libovolnými body,
6. funkce f je *Riemannovsky integrovatelná*.

$$f(x,y) = x^2 + y^2, \qquad D(f) = \mathbb{R}^2, \qquad H(f) = \langle 0, +\infty).$$



Graf funkce f

$$f(x,y) = x^2 + y^2, \qquad D(f) = \mathbb{R}^2, \qquad H(f) = \langle 0, +\infty).$$



Graf funkce f

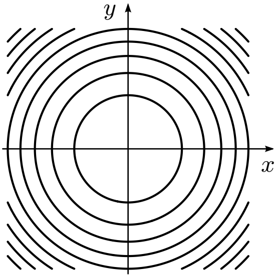
$$f(x,y) = x^2 + y^2, \qquad D(f) = \mathbb{R}^2, \qquad H(f) = \langle 0, +\infty).$$

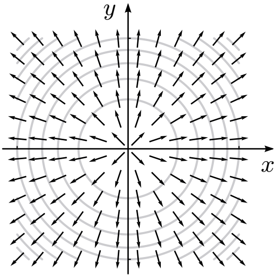
Vlastnosti:

1. f je *omezená zdola*, není omezená shora,
2. f je *spojitá* a *diferencovatelná*,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \qquad \operatorname{grad} f(x,y) = (2x, 2y),$$

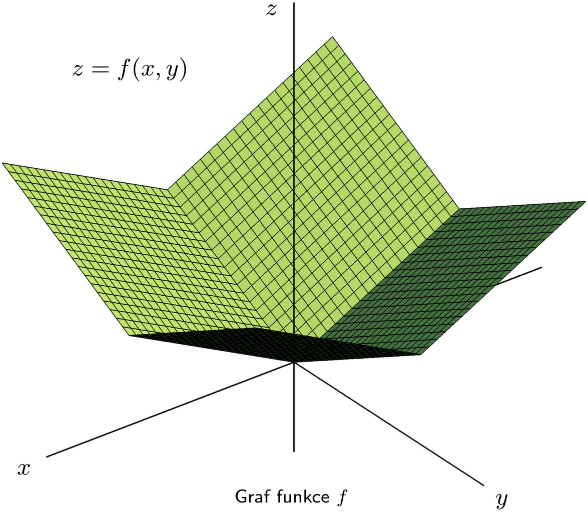
3. f má právě jedno *ostré minimum* v bodě $(x,y) = (0,0)$, nemá maximum.





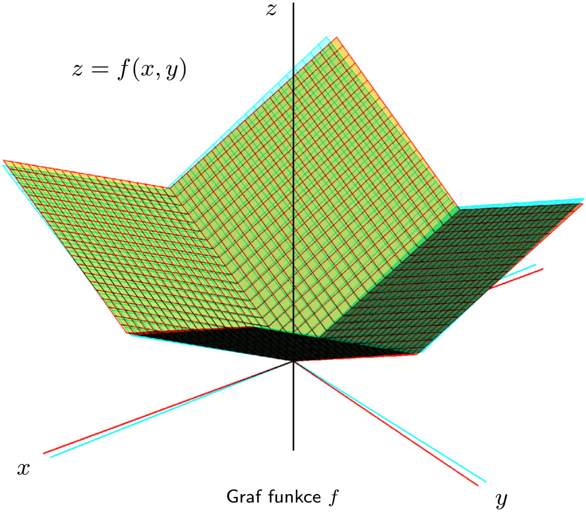
Vrstevnice grafu funkce f a normované gradienty funkce f

$$f(x,y) = |x| + |y|, \qquad D(f) = \mathbb{R}^2, \qquad H(f) = \langle 0, +\infty).$$



Graf funkce f

$$f(x,y) = |x| + |y|, \qquad D(f) = \mathbb{R}^2, \qquad H(f) = \langle 0, +\infty).$$



Graf funkce f

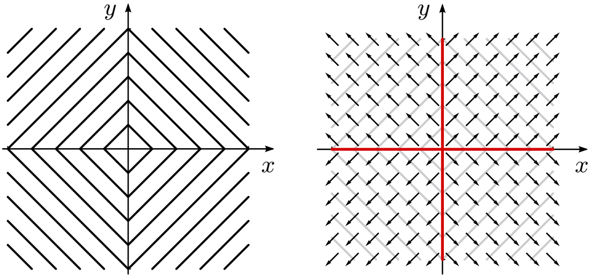
$$f(x,y) = |x| + |y|, \qquad D(f) = \mathbb{R}^2, \qquad H(f) = \langle 0, +\infty).$$

Vlastnosti:

1. f je *omezená zdola*, není omezená shora,
2. f je *spojitá* na $D(f) = \mathbb{R}^2$ a *diferencovatelná* na $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ xy \neq 0\}$,

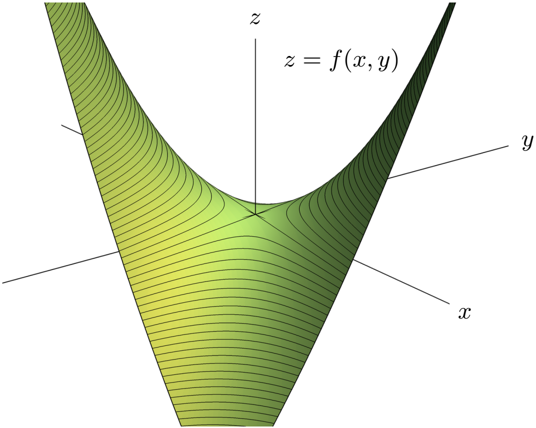
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} 1 & \text{pro } x > 0, \\ -1 & \text{pro } x < 0, \end{cases} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} 1 & \text{pro } y > 0, \\ -1 & \text{pro } y < 0, \end{cases} \qquad \operatorname{grad} f(x,y) = (\operatorname{sgn} x, \operatorname{sgn} y) \quad \text{pro } xy \neq 0,$$

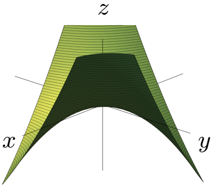
3. f má právě jedno *ostré minimum* v bodě $(x,y) = (0,0)$, nemá maximum.

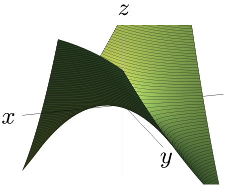


Vrstevnice grafu funkce f a normované gradienty funkce f

$$f(x,y) = x^2 + 6xy + y^2, \qquad D(f) = \mathbb{R}^2, \qquad H(f) = \mathbb{R}.$$

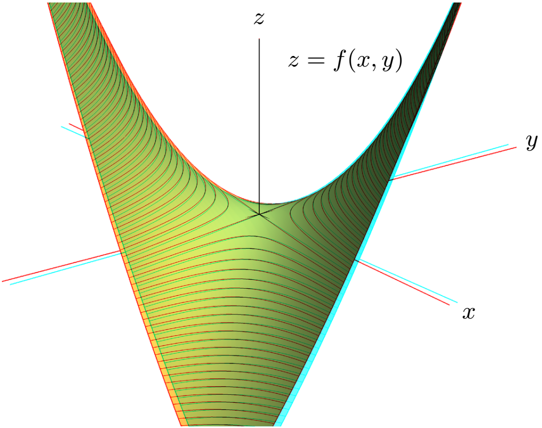


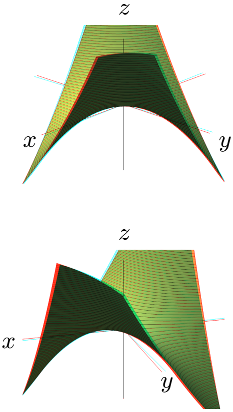




Grafy funkce f

$$f(x,y) = x^2 + 6xy + y^2, \qquad D(f) = \mathbb{R}^2, \qquad H(f) = \mathbb{R}.$$





Grafy funkce f

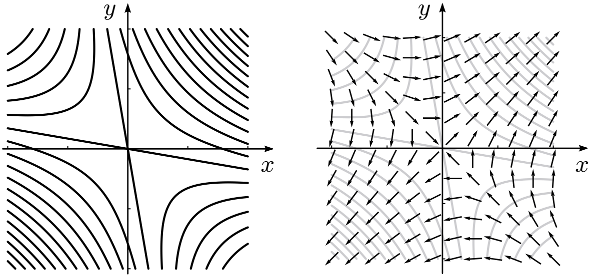
$$f(x,y) = x^2 + 6xy + y^2, \qquad D(f) = \mathbb{R}^2, \qquad H(f) = \mathbb{R}.$$

Vlastnosti:

1. f není omezená zdola ani shora,
2. f je *spojitá* a *diferencovatelná*,

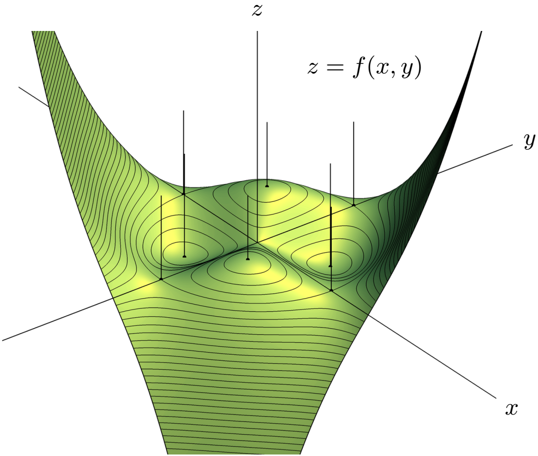
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 6y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 6x + 2y, \qquad \operatorname{grad} f(x,y) = (2x+6y, 6x+2y),$$

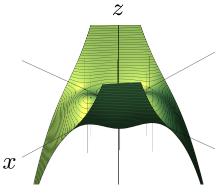
3. f nemá žádný globální ani lokální extrém, v bodě $(x,y) = (0,0)$ má *sedlový bod*.

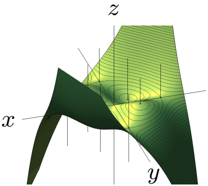


Vrstevnice grafu funkce f a normované gradienty funkce f

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\ln(x^2+y^2) & \text{pro } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pro } (x,y) = (0,0), \end{cases} \qquad D(f) = \mathbb{R}^2, \qquad H(f) = \mathbb{R}.$$

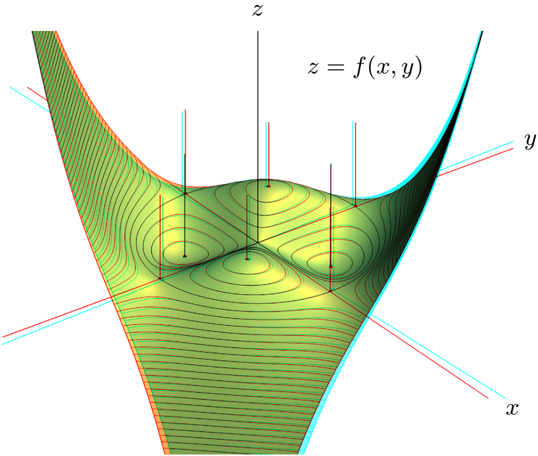


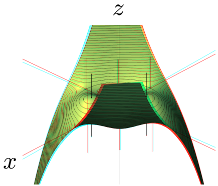


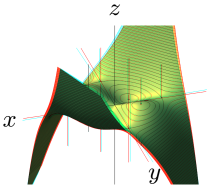


Grafy funkce f

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\ln(x^2+y^2) & \text{pro } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pro } (x,y) = (0,0), \end{cases} \qquad D(f) = \mathbb{R}^2, \qquad H(f) = \mathbb{R}.$$





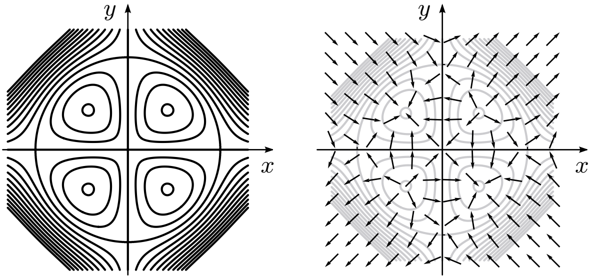


Grafy funkce f

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\ln(x^2+y^2) & \text{pro } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{pro } (x,y)=(0,0),\end{cases}\qquad D(f)=\mathbb{R}^2,\qquad H(f)=\mathbb{R}.$$

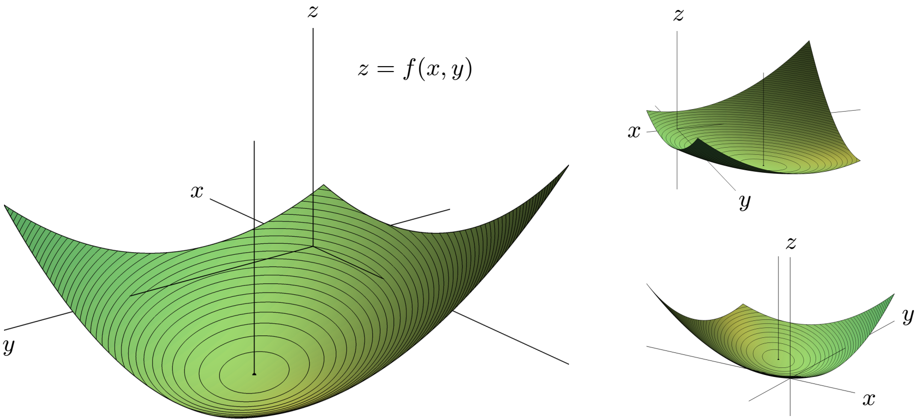
Vlastnosti:

1. f není omezená zdola ani shora, je *spojitá*,
2. f nemá žádný globální extrém, má čtyři *lokální extrémy*,
3. f má pět *sedlových bodů*: $(0,0)$, $(\pm1,0)$ a $(0,\pm1)$.



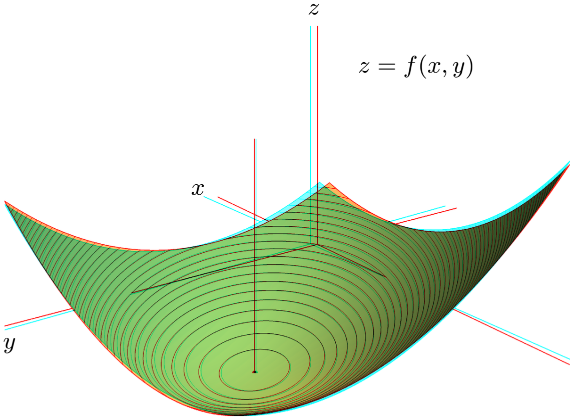
Vrstevnice grafu funkce f a normované gradienty funkce f

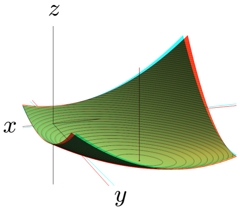
$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x - 2y, \qquad D(f) = \mathbb{R}^2.$$

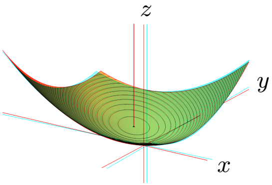


Grafy funkce f

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x - 2y, \qquad D(f) = \mathbb{R}^2.$$







Grafy funkce f

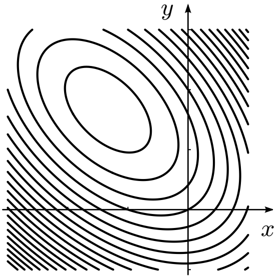
$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x - 2y, \qquad D(f) = \mathbb{R}^2.$$

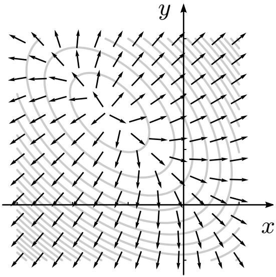
Vlastnosti:

1. f je *omezená zdola*, není omezená shora,
2. f je *spojitá* a *diferencovatelná*,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x+y+1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y+x-2, \qquad \operatorname{grad} f(x,y) = (2x+y+1, 2y+x-2),$$

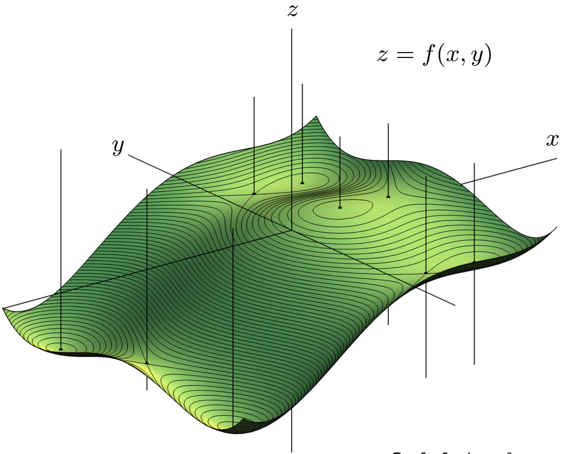
3. f má právě jedno *ostré minimum* v bodě $(x,y) = \left(-\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$, nemá maximum.

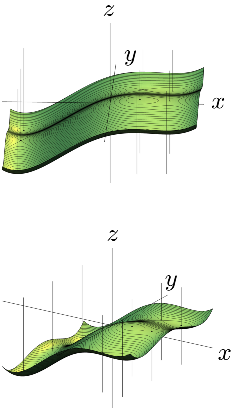




Vrstevnice grafu funkce f a normované gradienty funkce f

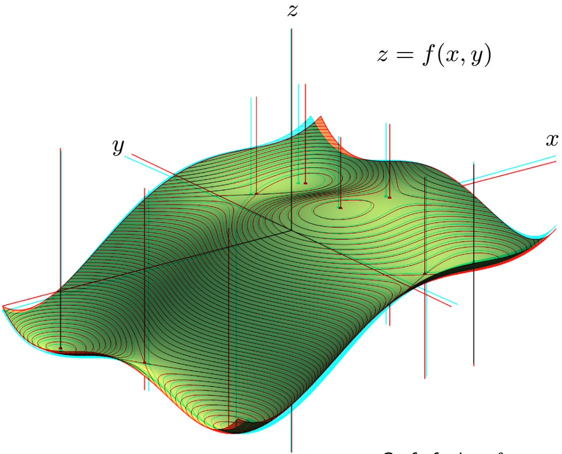
$$f(x,y) = x^4 + 2y^4 - 14x^2 - 16y^2 + 24x, \qquad D(f) = \mathbb{R}^2.$$

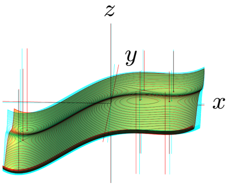


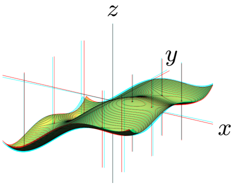


Grafy funkce f

$$f(x,y) = x^4 + 2y^4 - 14x^2 - 16y^2 + 24x, \qquad D(f) = \mathbb{R}^2.$$







Grafy funkce f

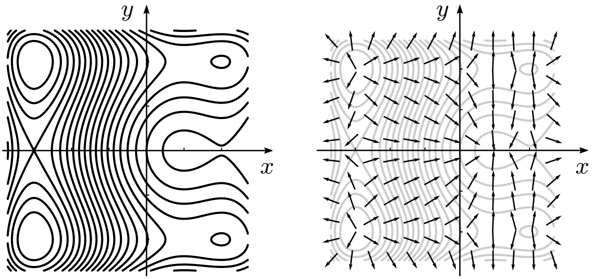
$$f(x, y) = x^4 + 2y^4 - 14x^2 - 16y^2 + 24x, \qquad D(f) = \mathbb{R}^2.$$

Vlastnosti:

1. f je *omezená zdola*, není omezená shora,
2. f je *spojitá* a *diferencovatelná*,

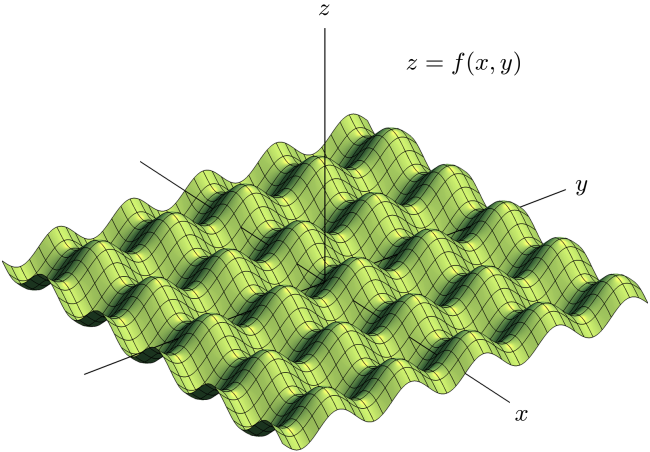
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 28x + 24,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 8y^3 - 32y,\ \operatorname{grad} f(x, y) = (4x^3 - 28x + 24, 8y^3 - 32y),$$

3. f má pět *lokálních extrémů*, má čtyři *sedlové body*, nemá maximum.



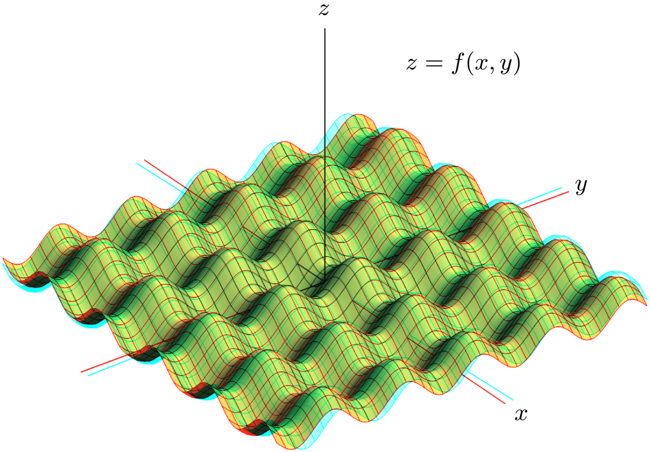
Vrstevnice grafu funkce f a normované gradienty funkce f

$$f(x,y) = \sin x + \sin y, \qquad D(f) = \mathbb{R}^2, \qquad H(f) = \langle -2, 2\rangle.$$



Graf funkce f

$$f(x,y) = \sin x + \sin y, \qquad D(f) = \mathbb{R}^2, \qquad H(f) = \langle -2, 2 \rangle.$$



Graf funkce f

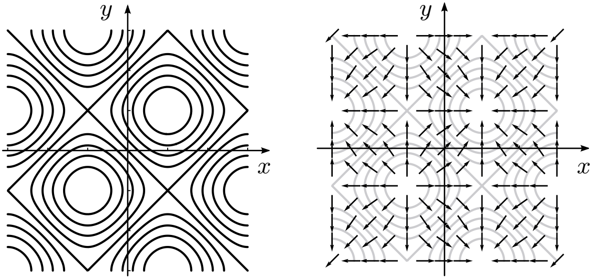
$$f(x,y) = \sin x + \sin y, \qquad D(f) = \mathbb{R}^2, \qquad H(f) = \langle -2, 2 \rangle.$$

Vlastnosti:

1. f je *omezená*,
2. f je *spojitá* a *diferencovatelná*,

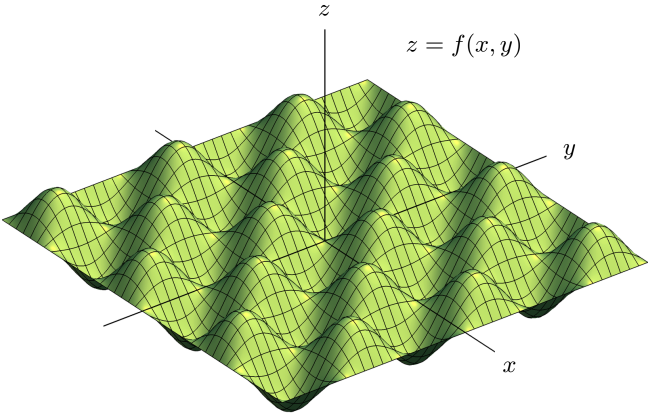
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \cos y, \qquad \operatorname{grad} f(x,y) = (\cos x, \cos y),$$

3. f má nekonečně mnoho *ostrých lokálních minim* a *ostrých lokálních maxim*.



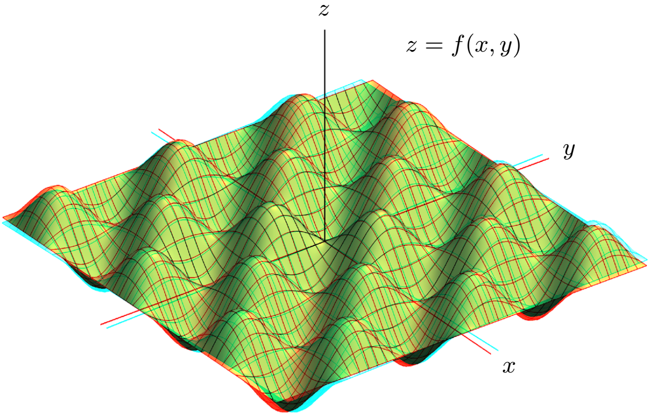
Vrstevnice grafu funkce f a normované gradienty funkce f

$$f(x,y) = \sin x \, \sin y, \qquad D(f) = \mathbb{R}^2, \qquad H(f) = \langle -1, 1 \rangle.$$



Graf funkce f

$$f(x,y)=\sin x\,\sin y,\qquad D(f)=\mathbb{R}^2,\qquad H(f)=\langle -1,1\rangle.$$



Graf funkce f

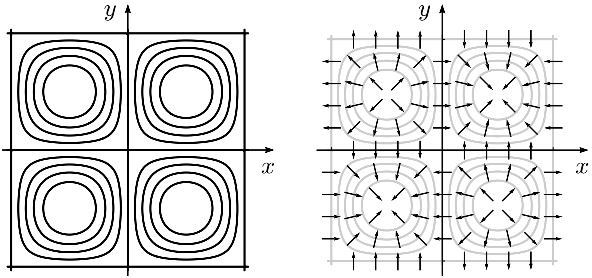
$$f(x,y) = \sin x \, \sin y, \qquad D(f) = \mathbb{R}^2, \qquad H(f) = \langle -1, 1 \rangle.$$

Vlastnosti:

1. f je *omezená*,
2. f je *spojitá* a *diferencovatelná*,

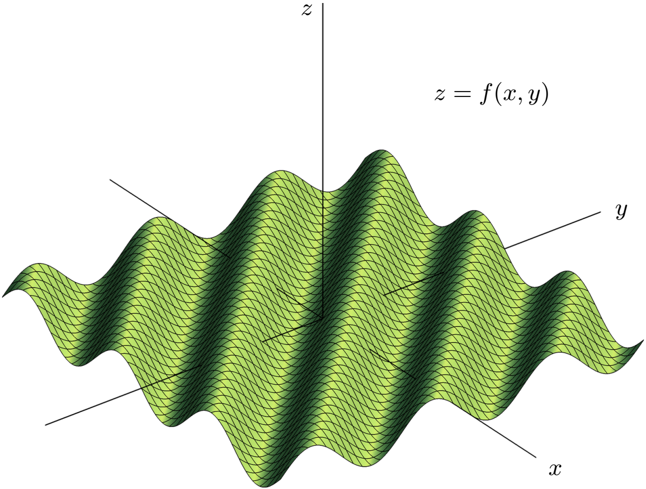
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x \sin y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \sin x \cos y, \quad \operatorname{grad} f(x,y) = (\cos x \sin y, \sin x \cos y),$$

3. f má nekonečně mnoho *ostrých lokálních minim* a *ostrých lokálních maxim*.



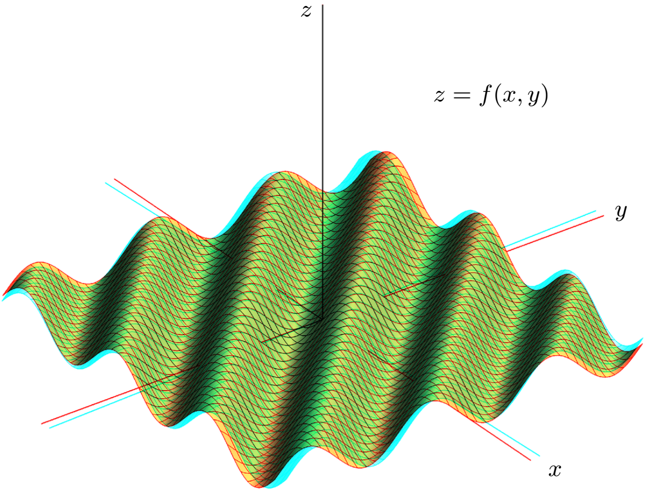
Vrstevnice grafu funkce f a normované gradienty funkce f

$$f(x,y) = \sin(x+y), \qquad D(f) = \mathbb{R}^2, \qquad H(f) = \langle -1, 1 \rangle.$$



Graf funkce f

$$f(x,y) = \sin(x+y), \qquad D(f) = \mathbb{R}^2, \qquad H(f) = \langle -1, 1\rangle.$$



Graf funkce f

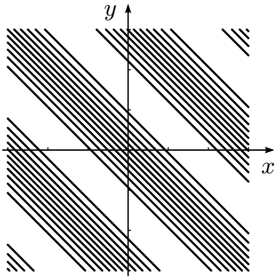
$$f(x,y) = \sin(x+y), \qquad D(f) = \mathbb{R}^2, \qquad H(f) = \langle -1, 1 \rangle.$$

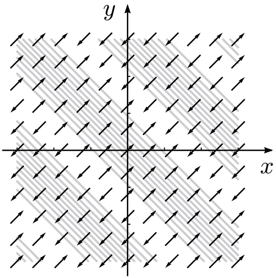
Vlastnosti:

1. f je *omezená*,
2. f je *spojitá* a *diferencovatelná*,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x+y), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \cos(x+y), \quad \operatorname{grad} f(x,y) = (\cos(x+y), \cos(x+y)),$$

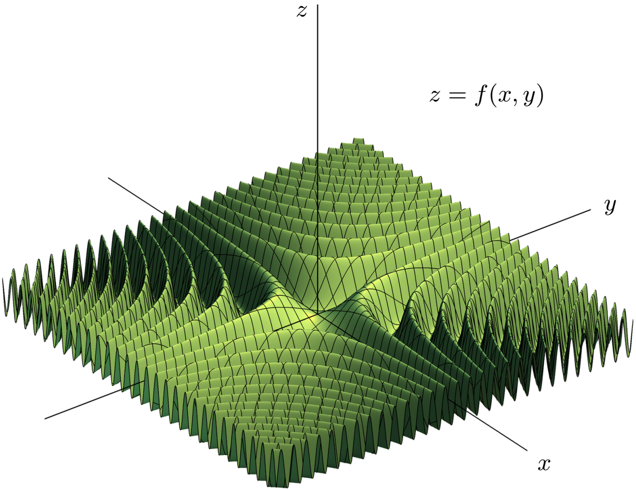
3. f má nekonečně mnoho *lokálních minim* a *lokálních maxim*.





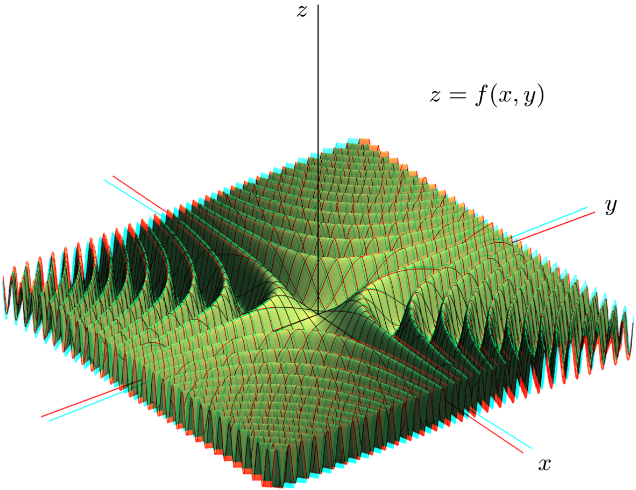
Vrstevnice grafu funkce f a normované gradienty funkce f

$$f(x,y) = \sin xy, \qquad D(f) = \mathbb{R}^2, \qquad H(f) = \langle -1, 1 \rangle.$$



Graf funkce f

$$f(x,y) = \sin xy, \qquad D(f) = \mathbb{R}^2, \qquad H(f) = \langle -1, 1 \rangle.$$



Graf funkce f

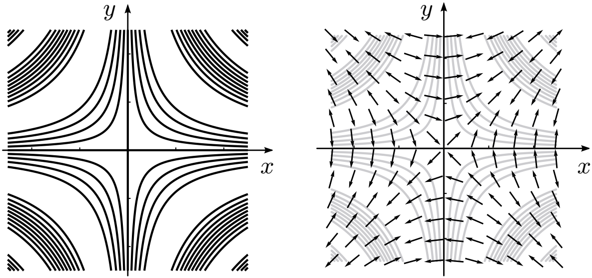
$$f(x,y) = \sin xy, \qquad D(f) = \mathbb{R}^2, \qquad H(f) = \langle -1, 1 \rangle.$$

Vlastnosti:

1. f je *omezená*,
2. f je *spojitá* a *diferencovatelná*,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cos xy, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x \cos xy, \qquad \operatorname{grad} f(x,y) = (y \cos xy, x \cos xy),$$

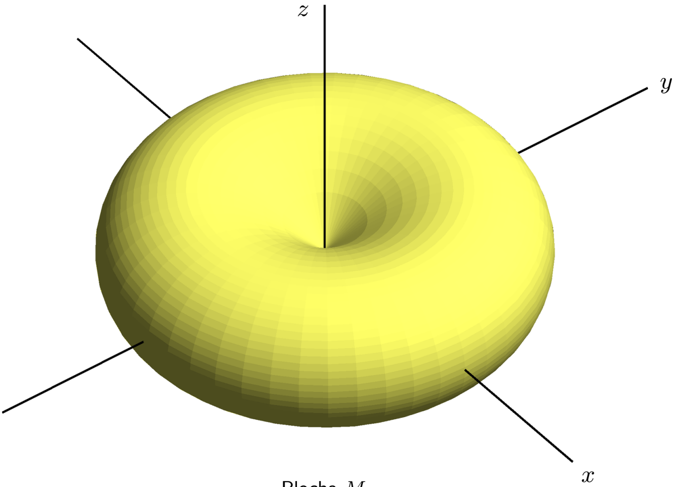
3. f má nekonečně mnoho *lokálních minim* a *lokálních maxim*.



Vrstevnice grafu funkce f a normované gradienty funkce f

Plocha zadaná implicitně rovnicí

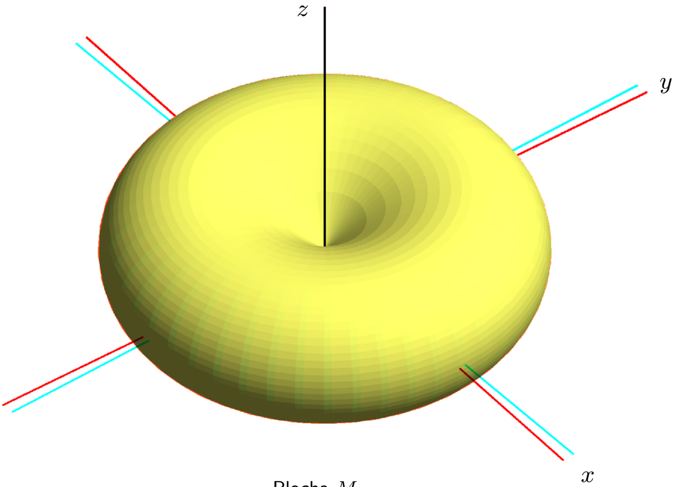
$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x^2 + y^2 + z^2)^2 = x^2 + y^2 - z^2\right\}.$$



Plocha M

Plocha zadaná implicitně rovnicí

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x^2 + y^2 + z^2)^2 = x^2 + y^2 - z^2\right\}.$$



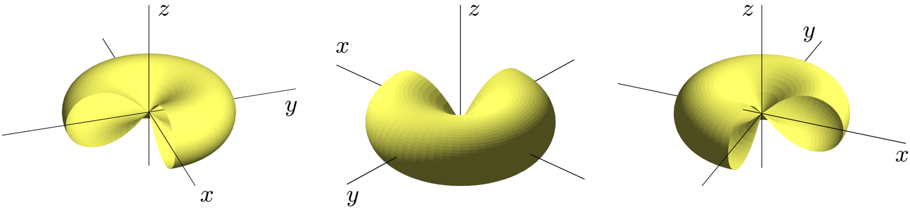
Plocha M

Plocha zadaná implicitně rovnicí

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; (x^2 + y^2 + z^2)^2 = x^2 + y^2 - z^2\right\}.$$

Vlastnosti:

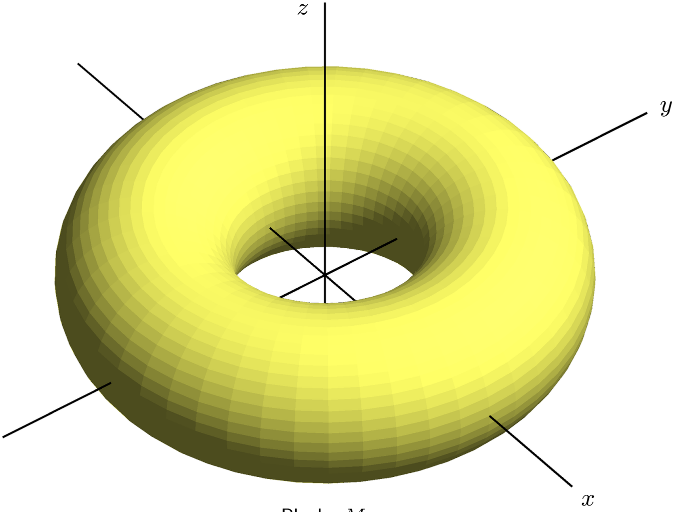
1. M je *uzavřená* plocha,
2. M je *hladká* plocha s vyjímkou bodu $(x, y, z) = (0, 0, 0)$,
3. M je *rotačně symetrická* okolo osy z.



Části plochy M

Plocha zadaná implicitně rovnicí

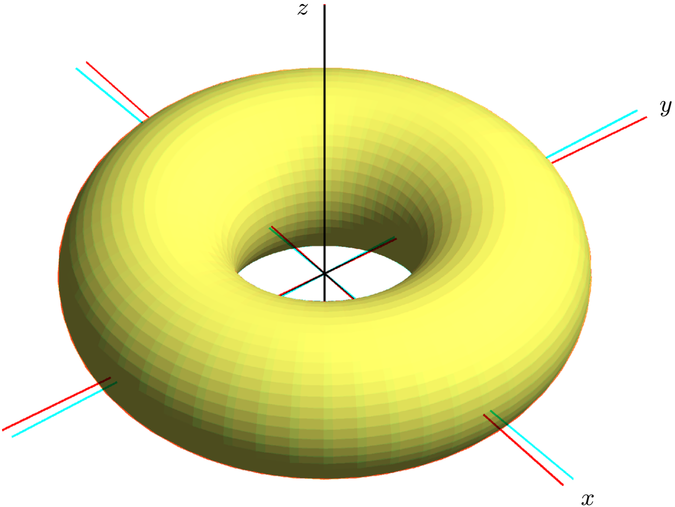
$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (2 - \sqrt{x^2 + y^2})^2 = 1 - z^2\right\}.$$



Plocha M

Plocha zadaná implicitně rovnicí

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (2 - \sqrt{x^2 + y^2})^2 = 1 - z^2\right\}.$$



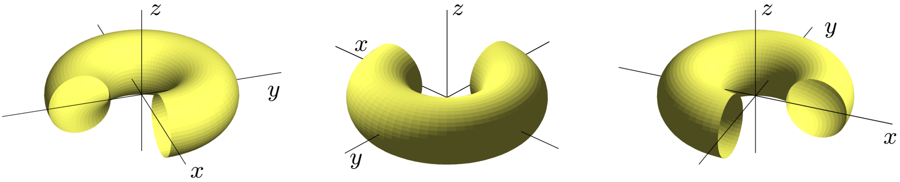
Plocha M

Plocha zadaná implicitně rovnicí

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ \left(2 - \sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = 1 - z^2\right\}.$$

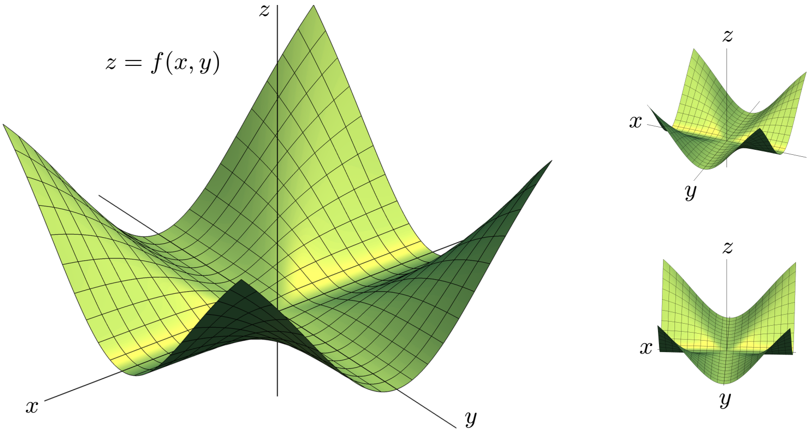
Vlastnosti:

1. M je *uzavřená* plocha (vymezuje oblast, která není jednoduše souvislá),
2. M je *hladká* plocha,
3. M je *rotačně symetrická* okolo osy z.



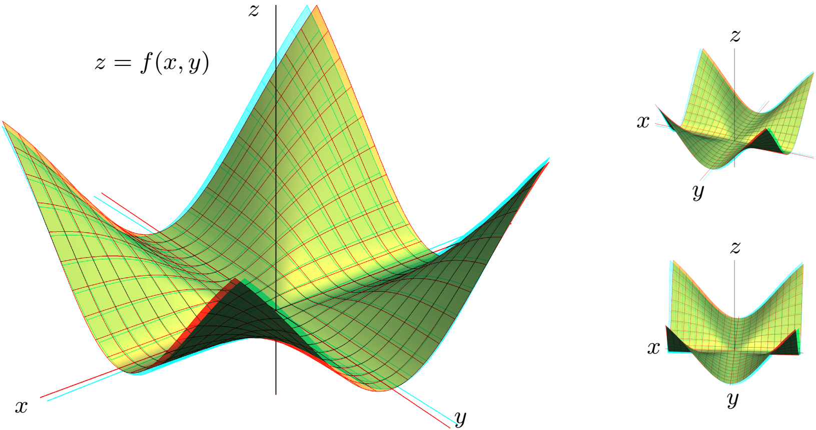
Části plochy M

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{pro } (x,y) \neq (0,0), \\[2ex] 0 & \text{pro } (x,y) = (0,0), \end{cases} \qquad D(f) = \mathbb{R}^2.$$



Grafy funkce f

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{pro } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pro } (x,y) = (0,0), \end{cases} \qquad D(f) = \mathbb{R}^2.$$



Grafy funkce f

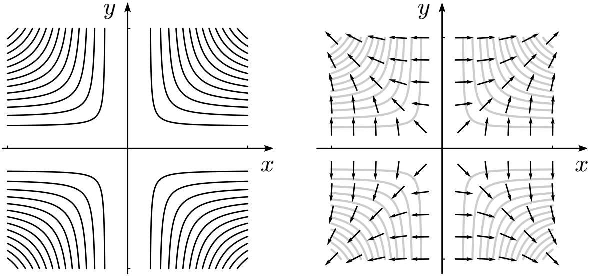
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{pro } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pro } (x,y) = (0,0), \end{cases} \qquad D(f) = \mathbb{R}^2.$$

Vlastnosti:

1. f je *spojitá* na $D(f)$, je *omezená zdola* a není omezená shora,

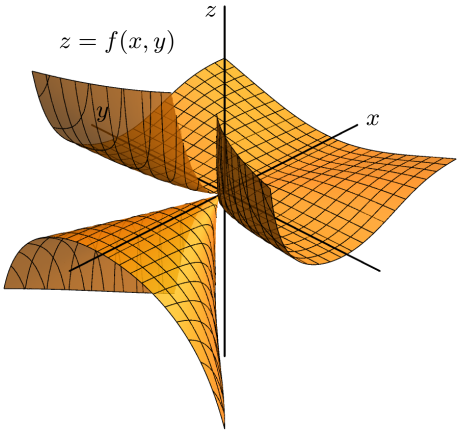
$$\forall\, x,y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} :\ 0 \leq \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \leq \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2} = x^2+y^2, \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0,$$

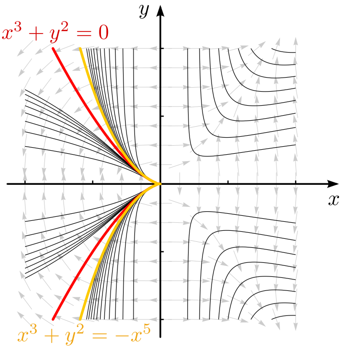
2. f je *diferencovatelná* na $D(f)$.



Vrstevnice grafu funkce f a normované gradienty funkce f

$$f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^3+y^2},\qquad D(f)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^3+y^2\neq 0\right\}.$$





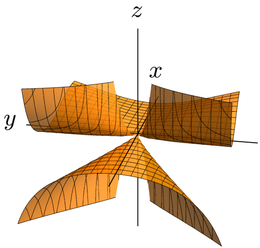
Graf funkce f, vrstevnice a normované gradienty

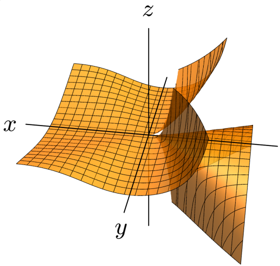
$$f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^3+y^2}, \qquad D(f)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^3+y^2\neq 0\right\}.$$

Vlastnosti: f je *spojitá* na $D(f)$, není omezená zdola ani shora,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\\ k\in\mathbb{R}}} f(x,y)=0, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx^2\\ k\in\mathbb{R}}} f(x,y)=0, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x^3+y^2=kx^5\\ k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}} f(x,y)=-\frac{1}{k},$$

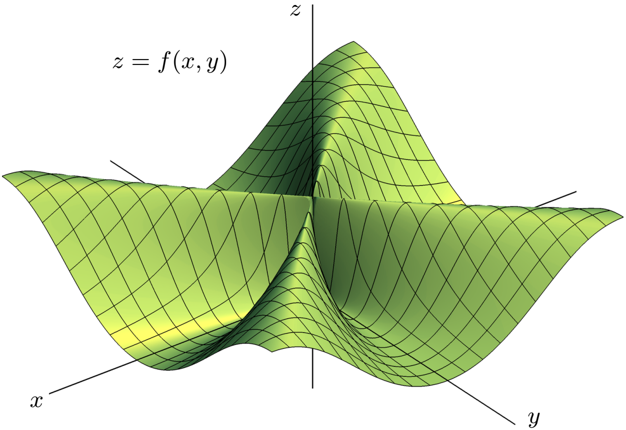
$$\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

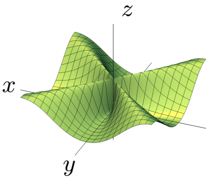


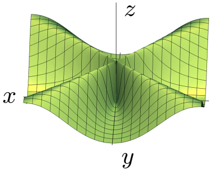


Grafy funkce f

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4} & \text{pro } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{pro } (x,y)=(0,0),\end{cases}\qquad D(f)=\mathbb{R}^2.$$

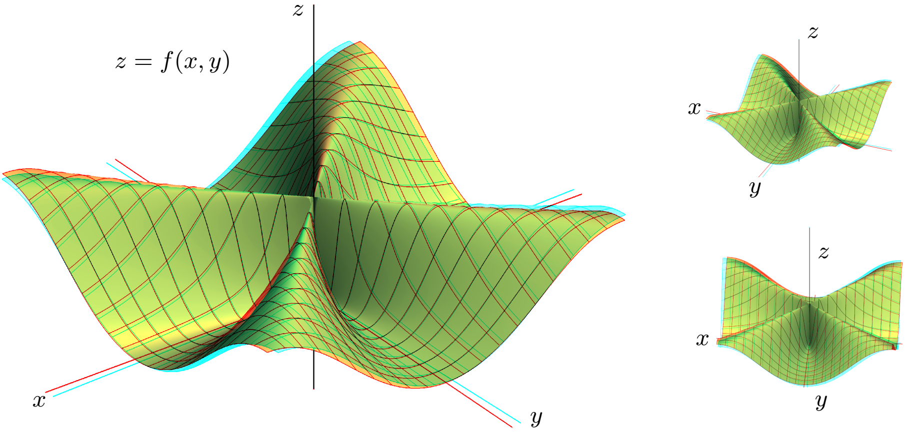






Grafy funkce f

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4} & \text{pro } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pro } (x,y) = (0,0), \end{cases} \qquad D(f) = \mathbb{R}^2.$$



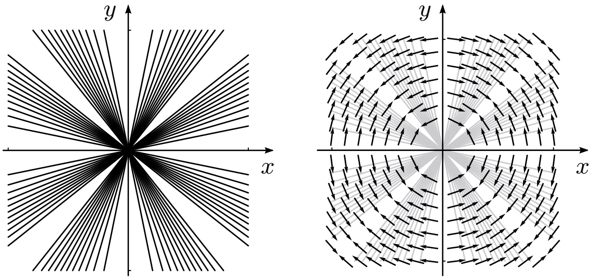
Grafy funkce f

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4} & \text{pro } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pro } (x,y) = (0,0), \end{cases} \qquad D(f) = \mathbb{R}^2.$$

Vlastnosti:

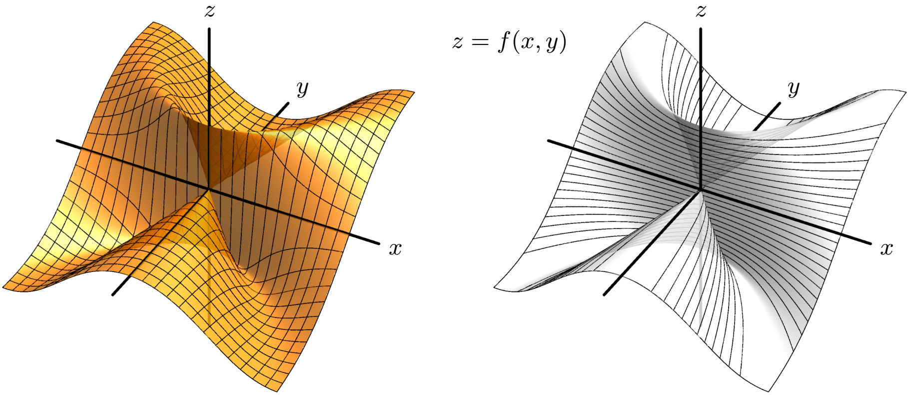
f je *omezená*, je *spojitá* všude kromě bodu $(x,y) = (0,0)$,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y = kx \\ k \in \mathbb{R}}} f(x,y) = \frac{k^2}{1+k^4}, \qquad \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$



Vrstevnice grafu funkce f a normované gradienty funkce f

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{pro } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{pro } (x,y)=(0,0),\end{cases}\qquad D(f)=\mathbb{R}^2.$$

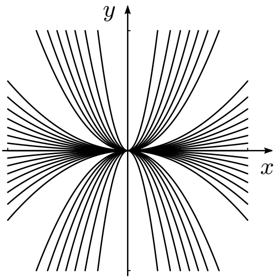


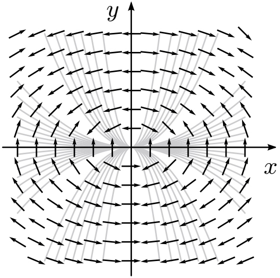
Grafy funkce f

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{pro } (x,y)\neq(0,0),\\[2ex] 0 & \text{pro } (x,y)=(0,0), \end{cases} \qquad D(f)=\mathbb{R}^2.$$

Vlastnosti:
f je *omezená*, je *spojitá* všude kromě bodu $(x,y)=(0,0)$,

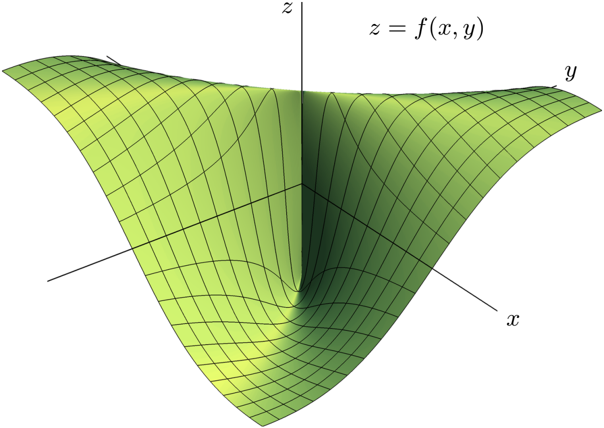
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\\ k\in\mathbb{R}}} f(x,y)=0, \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx^2\\ k\in\mathbb{R}}} f(x,y)=\frac{k}{1+k^2}, \qquad \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

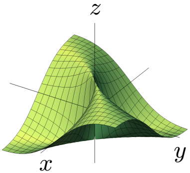


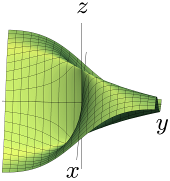


Vrstevnice grafu funkce f a normované gradienty funkce f

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{pro } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pro } (x,y) = (0,0), \end{cases} \qquad D(f) = \mathbb{R}^2.$$

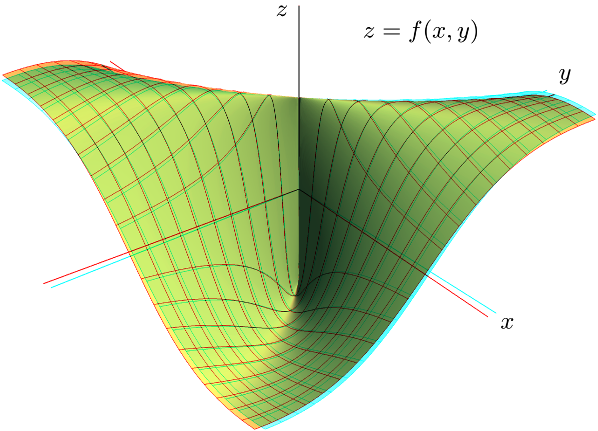


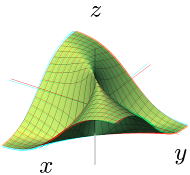


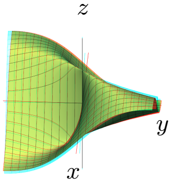


Grafy funkce f

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{pro } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pro } (x,y) = (0,0), \end{cases} \qquad D(f) = \mathbb{R}^2.$$







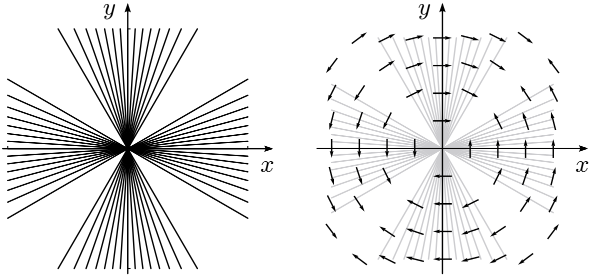
Grafy funkce f

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{pro } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pro } (x,y) = (0,0), \end{cases} \qquad D(f) = \mathbb{R}^2.$$

Vlastnosti:

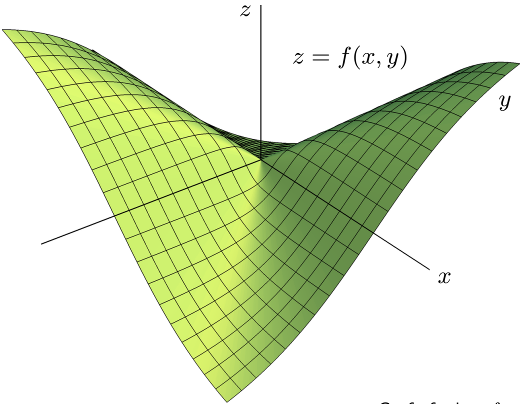
f je *omezená*, je *spojitá* všude kromě bodu $(x,y) = (0,0)$,

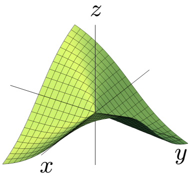
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y = kx \\ k \in \mathbb{R}}} f(x,y) = \lim_{x \to 0} \frac{kx^2}{x^2 + k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2}, \qquad \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

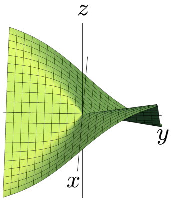


Vrstevnice grafu funkce f a normované gradienty funkce f

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{pro } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pro } (x,y) = (0,0), \end{cases} \qquad D(f) = \mathbb{R}^2.$$

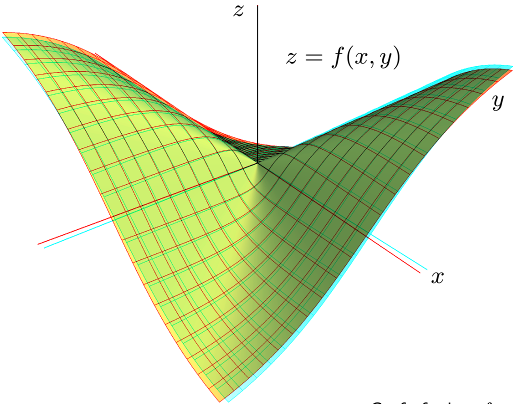


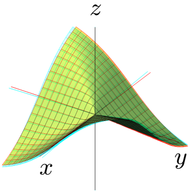


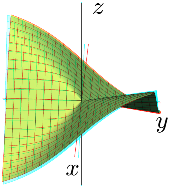


Grafy funkce f

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{pro } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pro } (x,y) = (0,0), \end{cases} \qquad D(f) = \mathbb{R}^2.$$







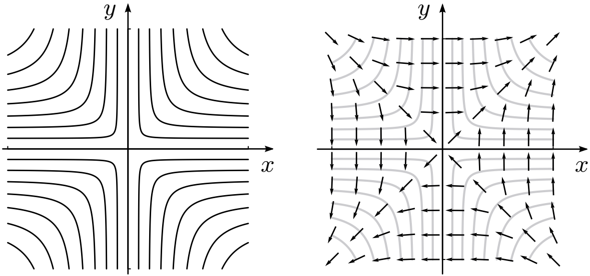
Grafy funkce f

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{pro } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pro } (x,y) = (0,0), \end{cases} \qquad D(f) = \mathbb{R}^2.$$

Vlastnosti:

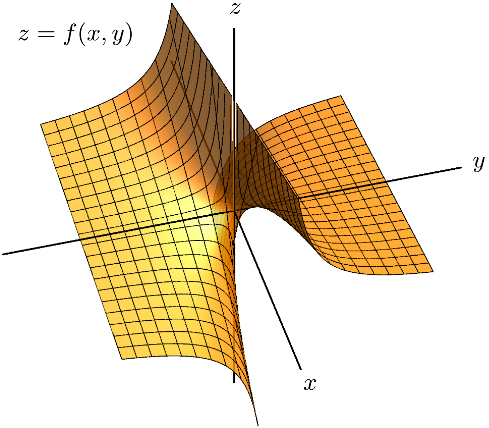
1. f je *spojitá* na $D(f)$, není omezená zdola ani shora,
2. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, ale f není diferencovatelná v bodě $(x,y) = (0,0)$,

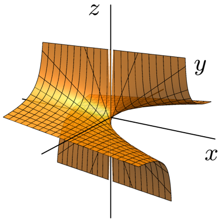
$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(h_1,h_2) - f(0,0)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1 h_2}{h_1^2+h_2^2} \quad \text{neexistuje.}$$

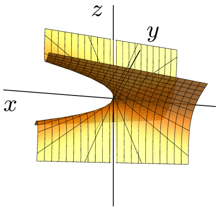


Vrstevnice grafu funkce f a normované gradienty funkce f

$$f(x,y) = \frac{x}{y}, \qquad D(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \neq 0\right\}.$$







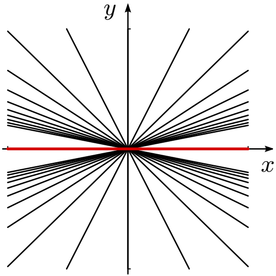
Grafy funkce f

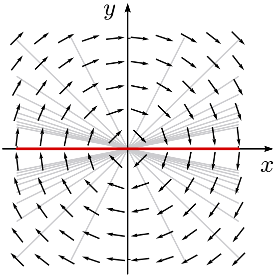
$$f(x,y) = \frac{x}{y}, \qquad D(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \neq 0\right\}.$$

Vlastnosti:

f je *spojitá* na $D(f)$, není omezená zdola ani shora,

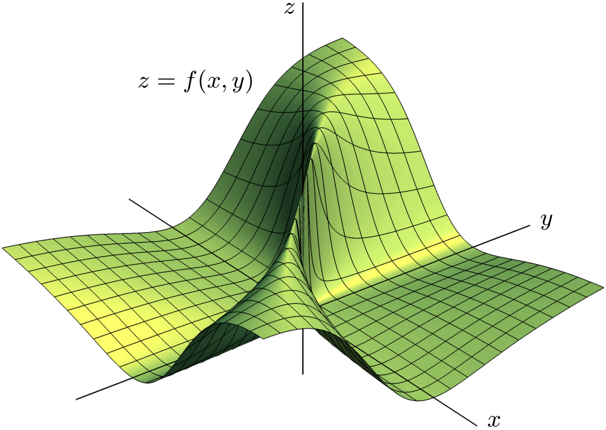
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y = kx \\ k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}} f(x,y) = \lim_{x \to 0} \frac{x}{kx} = \frac{1}{k}, \qquad \nexists \lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y).$$

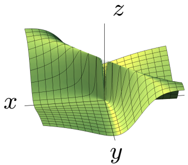


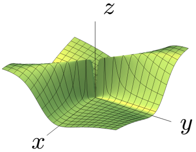


Vrstevnice grafu funkce f a normované gradienty funkce f

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x+y)^2} & \text{pro } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{pro } (x,y)=(0,0),\end{cases} \qquad D(f)=\mathbb{R}^2.$$

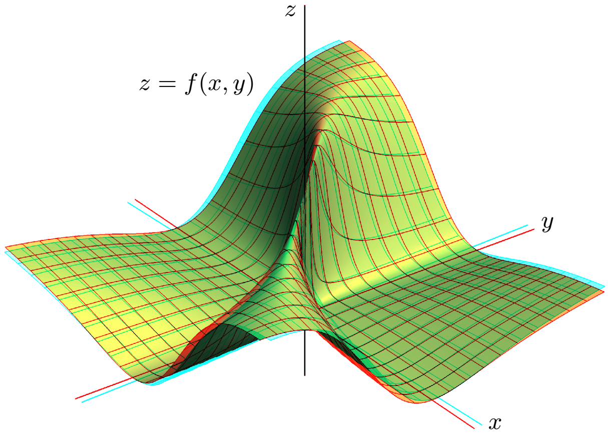


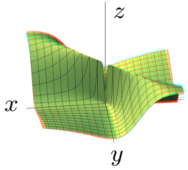


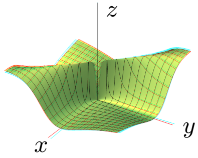


Grafy funkce f

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x+y)^2} & \text{pro } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{pro } (x,y)=(0,0),\end{cases}\qquad D(f)=\mathbb{R}^2.$$





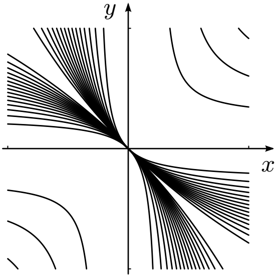


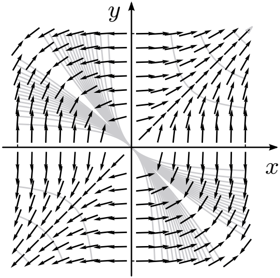
Grafy funkce f

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x+y)^2} & \text{pro } (x,y)\neq(0,0),\\[2ex] 0 & \text{pro } (x,y)=(0,0),\end{cases}\qquad D(f)=\mathbb{R}^2.$$

Vlastnosti:
f je *omezená* na $D(f)$, je *spojitá* všude kromě bodu $(x,y)=(0,0)$,

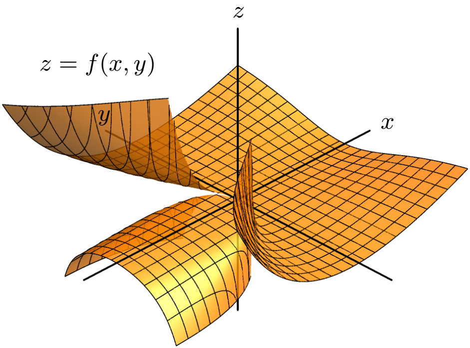
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\\ k\in\mathbb{R}}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{k^2x^2}{k^2x^2+(1+k)^2}=\begin{cases}1 & \text{pro } k=-1,\\ 0 & \text{pro } k\neq-1,\end{cases}\qquad \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

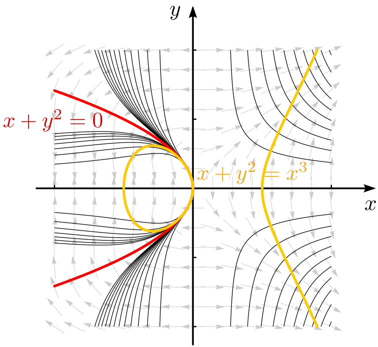




Vrstevnice grafu funkce f a normované gradienty funkce f

$$f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x+y^2}, \qquad D(f)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x+y^2\neq 0\right\}.$$



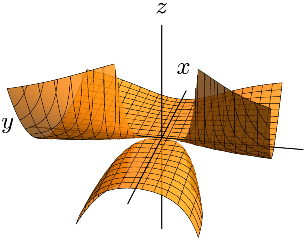


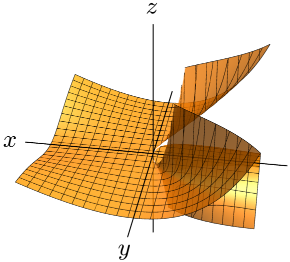
Graf funkce f, vrstevnice a normované gradienty

$$f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x+y^2},\qquad D(f)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x+y^2\neq 0\right\}.$$

Vlastnosti:
f je *spojitá* na $D(f)$, není omezená zdola ani shora,

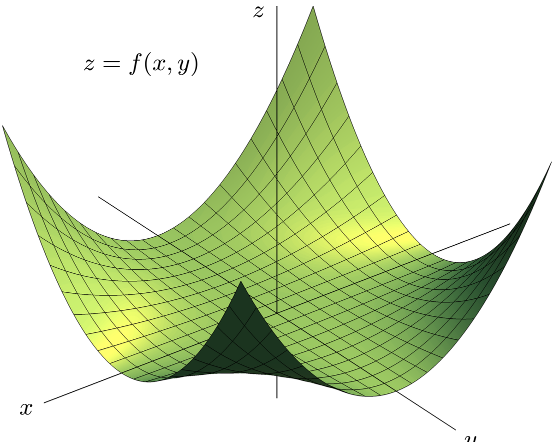
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\\ k\in\mathbb{R}}} f(x,y)=0,\qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx^2\\ k\in\mathbb{R}}} f(x,y)=0,\qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x+y^2=kx^3\\ k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}} f(x,y)=-\frac{1}{k},\quad \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$





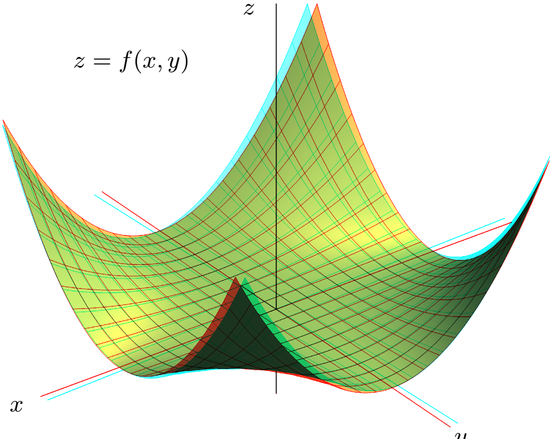
Grafy funkce f

$$f(x,y) = |xy|^2, \qquad D(f) = \mathbb{R}^2.$$



Graf funkce f

$$f(x,y) = |xy|^2, \qquad D(f) = \mathbb{R}^2.$$



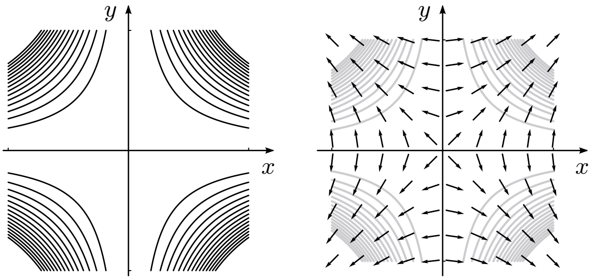
Graf funkce f

$$f(x,y) = |xy|^2, \qquad D(f) = \mathbb{R}^2.$$

Vlastnosti:

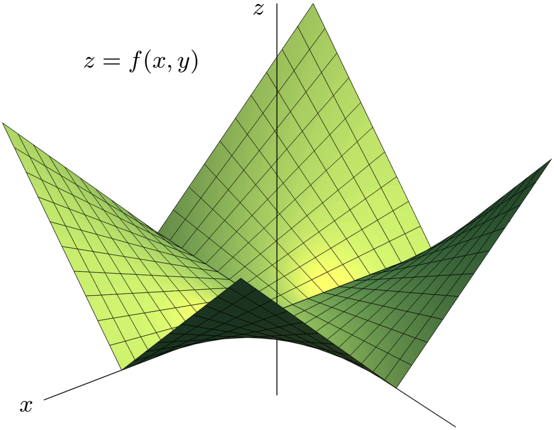
1. f je *spojitá* na $D(f)$, je *omezená zdola* a není omezená shora,
2. f je *diferencovatelná* na $D(f)$,

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(h_1,h_2) - f(0,0)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1^2 h_2^2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0.$$



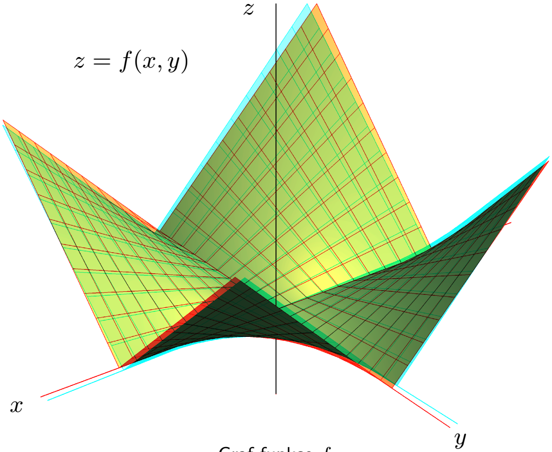
Vrstevnice grafu funkce f a normované gradienty funkce f

$$f(x,y) = |xy|, \qquad D(f) = \mathbb{R}^2.$$



Graf funkce f

$$f(x,y) = |xy|, \qquad D(f) = \mathbb{R}^2.$$



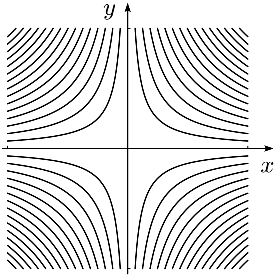
Graf funkce f

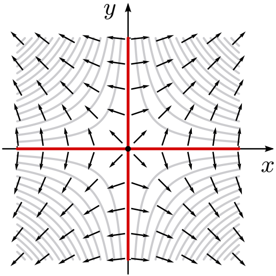
$$f(x,y) = |xy|, \qquad D(f) = \mathbb{R}^2.$$

Vlastnosti:

1. f je *spojitá* na $D(f)$, je *omezená zdola* a není omezená shora,
2. f je *diferencovatelná* v bodě $(x,y) = (0,0)$,

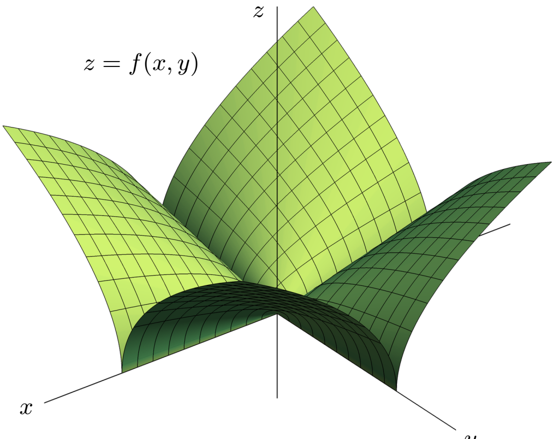
$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(h_1,h_2) - f(0,0)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|h_1 h_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0.$$





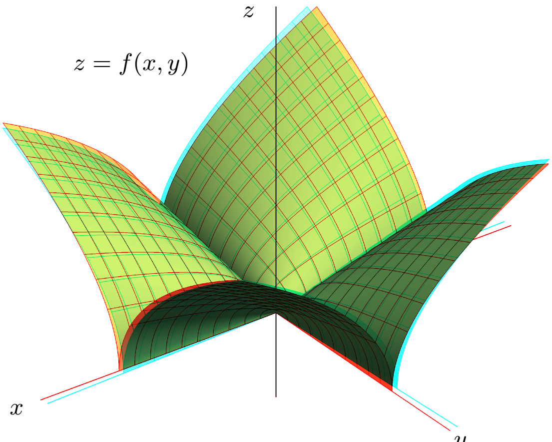
Vrstevnice grafu funkce f a normované gradienty funkce f

$$f(x,y)=\sqrt{|xy|}, \qquad D(f)=\mathbb{R}^2.$$



Graf funkce f

$$f(x,y)=\sqrt{|xy|}, \qquad D(f)=\mathbb{R}^2.$$



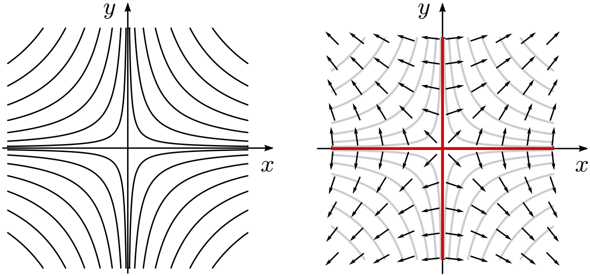
Graf funkce f

$$f(x,y)=\sqrt{|xy|}, \qquad D(f)=\mathbb{R}^2.$$

Vlastnosti:

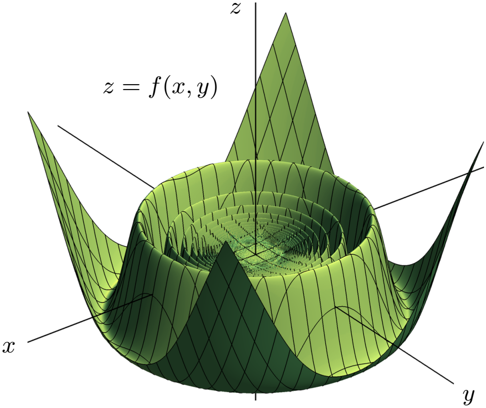
1. f je *spojitá* na $D(f)$, je *omezená zdola* a není omezená shora,
2. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$, ale f není diferencovatelná v bodě $(x,y)=(0,0)$,

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(h_1,h_2)-f(0,0)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|h_1 h_2|}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \quad \text{neexistuje.}$$



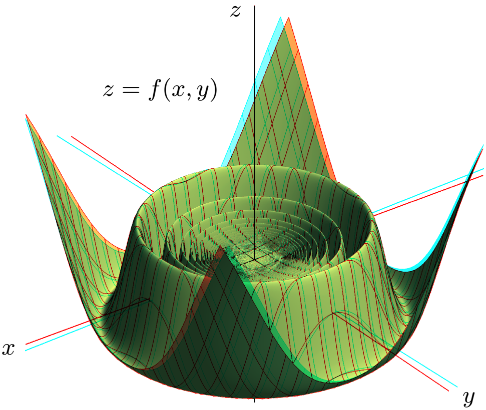
Vrstevnice grafu funkce f a normované gradienty funkce f

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{pro } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pro } (x,y) = (0,0), \end{cases} \qquad D(f) = \mathbb{R}^2.$$



Graf funkce f

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{pro } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pro } (x,y) = (0,0), \end{cases} \qquad D(f) = \mathbb{R}^2.$$



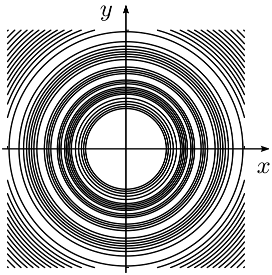
Graf funkce f

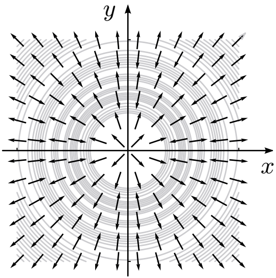
$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{pro } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pro } (x,y) = (0,0), \end{cases} \qquad D(f) = \mathbb{R}^2.$$

Vlastnosti:

1. f je *omezená* a je *spojitá* na $D(f)$,
2. f je *diferencovatelná* na $D(f)$,

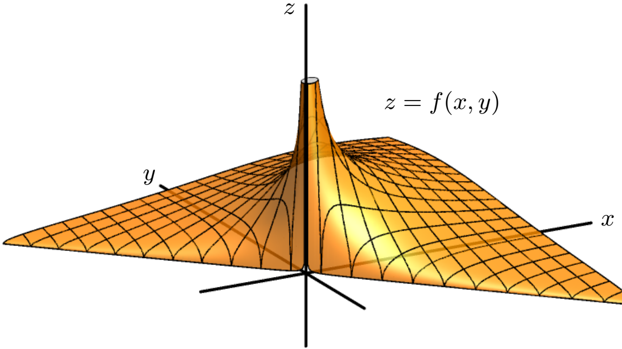
$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(h_1,h_2)-f(0,0)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \sqrt{h_1^2+h_2^2}\,\sin\frac{1}{h_1^2+h_2^2} = 0.$$





Vrstevnice grafu funkce f a normované gradienty funkce f

$$f(x,y) = \frac{x+y}{\sqrt{x^3+y^3}}, \qquad D(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x+y>0\right\}.$$



Graf funkce f

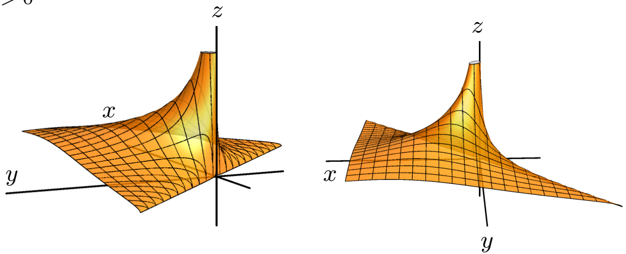
$$f(x,y)=\frac{x+y}{\sqrt{x^3+y^3}}, \qquad D(f)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x+y>0\right\}.$$

Vlastnosti:

1. f je *spojitá* na $D(f)$, je *omezená zdola* a není omezená shora,

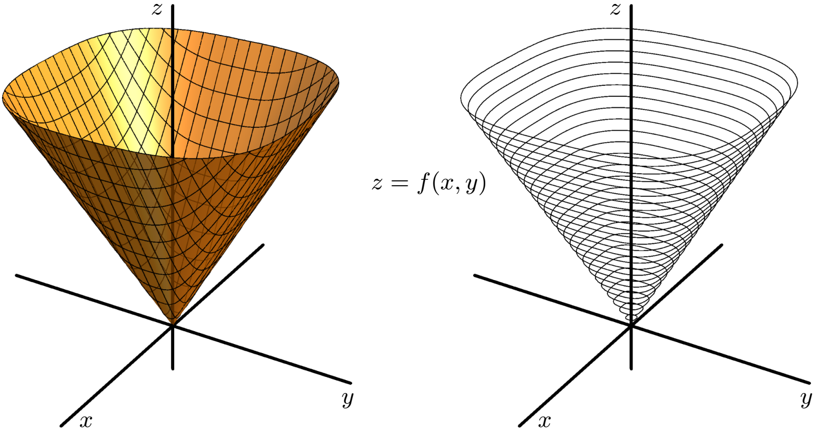
$$\lim_{\substack{x\to 0^+\\ y=kx\\ k>-1}} f(x,y)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1+k}{\sqrt{1+k^3}}=+\infty,$$

2. $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=-x+kx^2\\ k>0}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{\sqrt{3kx^4-3k^2x^5+k^3x^6}}=\sqrt{\frac{k}{3}}, \qquad \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$



Grafy funkce f

$$f(x,y) = \sqrt[3]{|x|^3 + |y|^3}, \qquad D(f) = \mathbb{R}^2.$$



Graf funkce f a jeho drátěný model

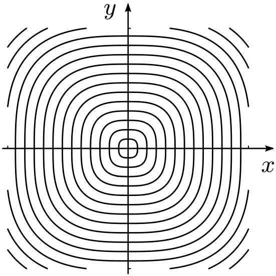
$$f(x,y) = \sqrt[3]{|x|^3 + |y|^3}, \qquad D(f) = \mathbb{R}^2.$$

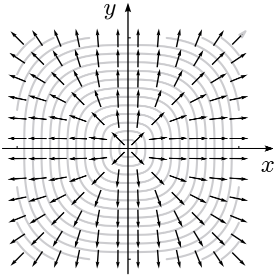
Vlastnosti:

1. f má v nule *derivaci ve všech směrech*,

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(0,0) = \sqrt[3]{|v_1|^3 + |v_2|^3}, \qquad \boldsymbol{v} = (v_1, v_2),$$

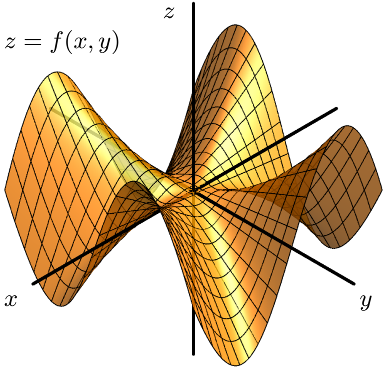
2. f není diferencovatelná v bodě $(x,y) = (0,0)$ (derivace podle vektoru nezávisí lineárně na složkách vektoru).

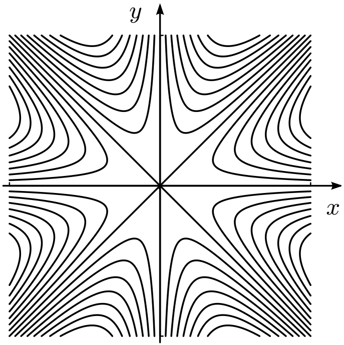




Vrstevnice grafu funkce f a normované gradienty funkce f

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2} & \text{pro } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{pro } (x,y)=(0,0),\end{cases}\qquad D(f)=\mathbb{R}^2.$$





Graf funkce f a vrstevnice

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2} & \text{pro } (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & \text{pro } (x,y)=(0,0), \end{cases} \qquad D(f)=\mathbb{R}^2.$$

Vlastnosti:

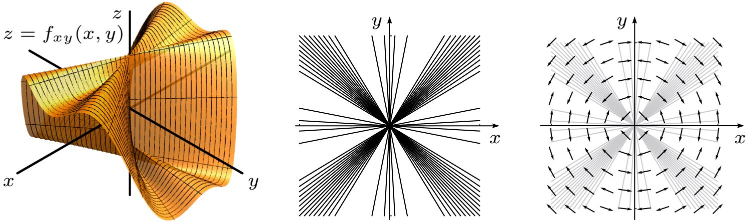
1. pro $x, y \neq 0$ platí

$$f_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\left(x^2-y^2\right)\left(x^4+10x^2y^2+y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = f_{yx}(x,y),$$

2. $$f_{xy}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1 \neq -1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = f_{yx}(0,0),$$

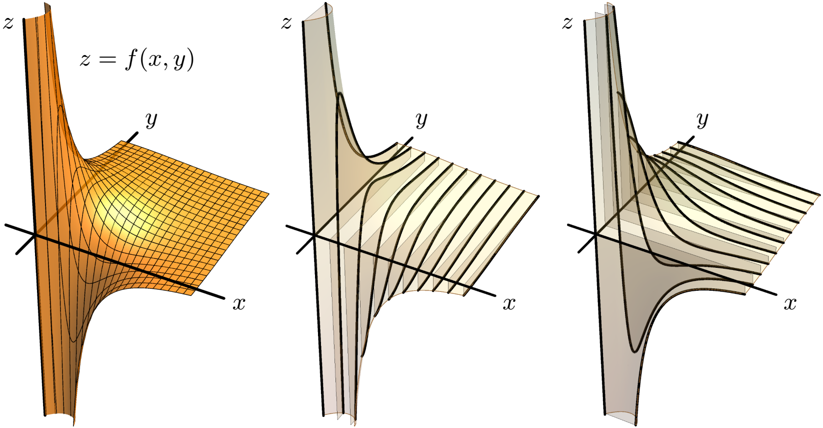
3. $f, f_x, f_y \in C(\mathbb{R}^2)$, $\quad f_{xy}, f_{yx} \in C(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$,

4. smíšené parciální derivace f_{xy} a f_{yx} nejsou spojité v počátku $(x,y)=(0,0)$.



Graf smíšené parciální derivace f_{xy}, vrstevnice a normované gradienty

$$f(x,y)=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\qquad D(f)=(0,1)\times(0,1),\qquad H(f)=\mathbb{R}.$$



Graf funkce f a jeho řezy

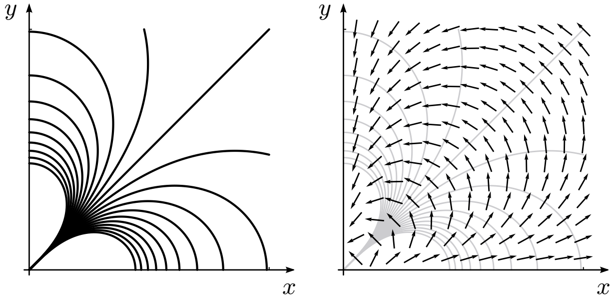
$$f(x,y)=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\qquad D(f)=(0,1)\times(0,1),\qquad H(f)=\mathbb{R}.$$

Vlastnosti:

1. dvojnásobné integrály se nerovnají

$$\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4}\neq-\frac{\pi}{4}=\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x,$$

2. dvojný integrál $\iint\limits_{(0,1)\times(0,1)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ neexistuje.



Vrstevnice grafu funkce f a normované gradienty funkce f

Lineární funkce

$$f : w = az + b, \quad a, b \in \mathbb{C},\ a \neq 0, \qquad D(f) = \mathbb{C}^*.$$

Vlastnosti:

1. $H(f) = \mathbb{C}^*$,
2. $f(\infty) = \infty$,
3. lineární funkce f je jednoznačná, prostá a spojitá funkce na $\mathbb{C}^*$,
4. geometrická interpretace lineární funkce:
   lineární funkce $f : w = z + b$, $z \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$, představuje geometricky v Gaussově rovině z posunutí o vektor $(\operatorname{Re} b, \operatorname{Im} b)$,
   lineární funkce $f : w = az$, $z \in \mathbb{C}^*$, $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, představuje v Gaussově rovině z tato geometrická zobrazení:
   1. pro $a = 1$ identické zobrazení,
   2. pro $a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha}$ otočení se středem v počátku o orientovaný úhel velikosti α,
   3. pro $a = -1$ středovou souměrnost (otočení o úhel π),
   4. pro $a \in \mathbb{R}^+$ stejnolehlost se středem v počátku a kvocientem a,
   5. pro $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, obecně geometrické zobrazení složené z otočení a stejnolehlosti,

Lineární funkce

$$f : w = az + b, \quad a, b \in \mathbb{C},\ a \neq 0, \qquad D(f) = \mathbb{C}^*.$$

Vlastnosti:

5 lineární funkce $f : w = az + b$, $z \in \mathbb{C}^*$, $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, po vyjádření koeficientu a v exponenciálním tvaru $a = |a|\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha}$ se dá geometricky interpretovat v Gaussově rovině z jako geometrické zobrazení složené ze tří složek:

1 otočení se středem v počátku o orientovaný úhel velikosti α,
2 stejnolehlosti se středem v počátku a koeficientem $|a|$,
3 posunutí o vektor $(\operatorname{Re} b, \operatorname{Im} b)$,

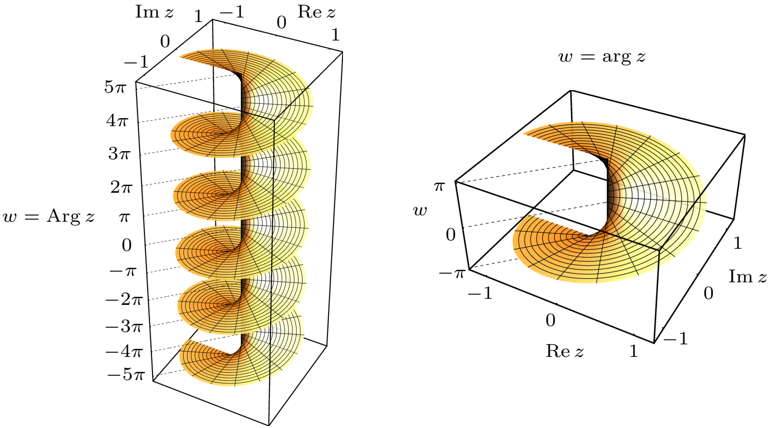
6 lineární funkce f je konformní zobrazení na množině $D(f) = \mathbb{C}^*$ (konformní zobrazení množiny $\mathbb{C}^*$ na sebe),

7 lineární funkce f zobrazuje každý geometrický útvar na útvar s ním podobný (tj. téhož typu: přímku na přímku, kružnici na kružnici, vnitřek kruhu na vnitřek kruhu, polorovinu na polorovinu apod.) a při zobrazení orientovaného úhlu se zachovává nejen jeho velikost, ale také jeho orientace.

Funkce argument komplexního čísla

$$f : w = \operatorname{Arg} z = \{\varphi \in \mathbb{R} : \; z = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\,\sin\varphi)\}\,, \qquad D(f) = \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Funkční hodnota funkce $\operatorname{Arg} z$, pro niž platí $\varphi \in (-\pi, \pi\rangle$, se nazývá hlavní hodnota komplexního čísla z a značí se $\arg z$.



Graf funkce argument $\operatorname{Arg} z$ a hlavní hodnota argumentu $\arg z$

Funkce argument komplexního čísla

$$f : w = \operatorname{Arg} z = \{\varphi \in \mathbb{R} : \ z = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)\}, \qquad D(f) = \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

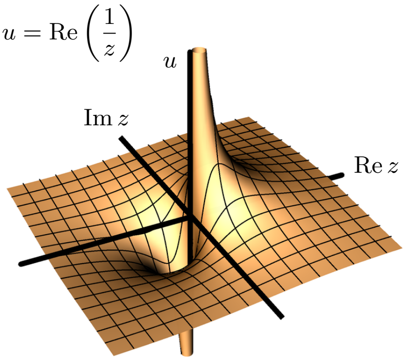
Vlastnosti:

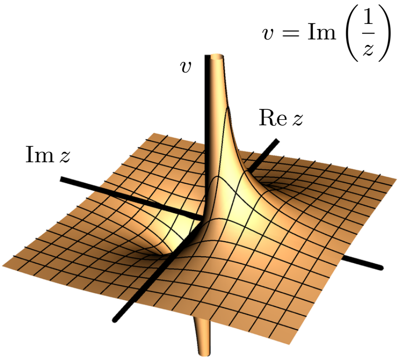
1. funkce $f : w = \operatorname{Arg} z$ je nekonečněznačná funkce,
2. funkce $f : w = \arg z$ je jednoznačná a spojitá na $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} : \ z \leq 0\}$ (tj. na Gaussově rovině bez nekladné části reálné osy),
3. funkce $\operatorname{Arg} z$ i funkce $\arg z$ jsou reálné funkce komplexní proměnné z,
4. funkce $\arg z$ je nespojitá v každém bodě $z_0 \in \{z \in \mathbb{R} : \ z \leq 0\}$:

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z_0 < 0 \\ \operatorname{Im} z \geq 0}} \arg z = \arg z_0 = \pi, \qquad \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z_0 < 0 \\ \operatorname{Im} z < 0}} \arg z = -\pi.$$

Základní lineární lomená funkce

$$f : w = \frac{1}{z}, \qquad D(f) = \mathbb{C}^*, \qquad H(f) = \mathbb{C}^*.$$





Graf reálné a imaginární části základní lineární lomené funkce $w = \frac{1}{z}$.

Základní lineární lomená funkce

$$f : w = \frac{1}{z}, \qquad D(f) = \mathbb{C}^*, \qquad H(f) = \mathbb{C}^*.$$

Vlastnosti:

1. $f(0) = \infty$, $f(\infty) = 0$,
2. funkce f je jednoznačná, prostá a spojitá funkce na $\mathbb{C}^*$,
3. funkce f vyjadřuje geometrické zobrazení složené z těchto dvou složek:
   1. kruhové inverze se středem v počátku a s poloměrem řídicí kružnice $r = 1$,
   2. osové souměrnosti podle reálné osy x,
4. funkce f zobrazuje jednotkovou kružnici $c_1 : |z| = 1$ v Gaussově rovině z na jednotkovou kružnici $c_1' : |w| = 1$ v Gaussově rovině w, vnitřek kružnice c_1 zobrazuje ve vnějšek kružnice c_1' a vnějšek kružnice c_1 zobrazuje ve vnitřek kružnice c_1',
5. funkce f je konformní zobrazení na množině $D(f) = \mathbb{C}^*$,
6. funkce f zobrazuje kružnice a přímky v kružnice nebo přímky (tzv. zobecněné kružnice),
7. funkce f zobrazuje síť vzájemně ortogonálních kružnic v Gaussově rovině z v konformně ekvivalentní kartézskou síť v Gaussově rovině w a naopak.

Lineární lomená funkce

$$f: w = \begin{cases} \dfrac{az+b}{cz+d} & \text{pro } z \neq \infty, \\ \dfrac{a}{c} & \text{pro } z = \infty, \end{cases} \quad a,b,c,d \in \mathbb{C},\ c \neq 0,\ ad-bc \neq 0, \quad D(f) = \mathbb{C}^*.$$

Vlastnosti:

1. $H(f) = \mathbb{C}^*$,
2. $f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$,
3. jednoznačná, spojitá a prostá funkce z $\mathbb{C}^*$ na $\mathbb{C}^*$,
4. $w = \dfrac{az+b}{cz+d} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{\frac{1}{c^2}(bc-ad)}{z+\frac{d}{c}}$,
5. inverzní zobrazení lineární lomené funkce je lineární lomená funkce

$$f^{-1}(w) = \begin{cases} \frac{dw-b}{-cw+a} & \text{pro } w \in \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}, \\ \infty & \text{pro } w = \frac{a}{c}, \\ -\frac{d}{c} & \text{pro } w = \infty, \end{cases}$$

6. lineární lomené zobrazení zobrazuje zobecněné kružnice na zobecněné kružnice (přímky a kružnice v $\mathbb{C}^*$ nazýváme zobecněnými kružnicemi v $\mathbb{C}^*$),

Lineární lomená funkce

$$f : w = \begin{cases} \dfrac{az+b}{cz+d} & \text{pro } z \neq \infty, \\ \dfrac{a}{c} & \text{pro } z = \infty, \end{cases} \qquad a, b, c, d \in \mathbb{C},\ c \neq 0,\ ad - bc \neq 0, \quad D(f) = \mathbb{C}^*.$$

Vlastnosti:

6 lineární lomené zobrazení zobrazuje oblasti, na které rozděluje rovinu zobecněná kružnice γ na oblasti, na kterou rozděluje rovinu zobecněná kružnice $f(\gamma)$,

7 lineární lomené zobrazení zachovává dvojpoměr

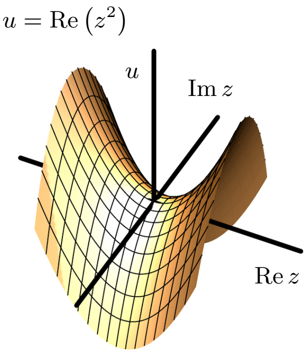
$$\forall z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}^* :\ (z_1, z_2, z_3, z_4) = (f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)),$$

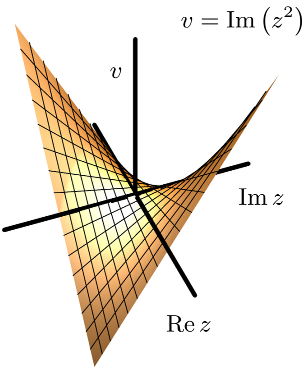
kde *dvojpoměr* uspořádané čtveřice navzájem různých bodů $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}^*$ je definován

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \begin{cases} \dfrac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \dfrac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} = \dfrac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \cdot \dfrac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1} & \text{pro } z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}, \\ \lim\limits_{z_k \to \infty} (z_1, z_2, z_3, z_4) & \text{pro } z_k = \infty, \\ & k \in \{1, 2, 3, 4\}. \end{cases}$$

Funkce n-tá mocnina

$$f : w = z^n, \quad n \in \mathbb{N}, \qquad D(f) = \mathbb{C}^*, \qquad H(f) = \mathbb{C}^*.$$





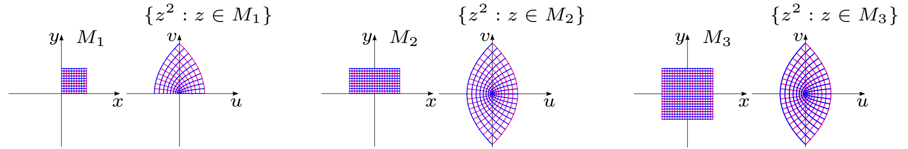
Graf reálné a imaginární části funkce druhá mocnina $w = z^2$

Funkce n-tá mocnina

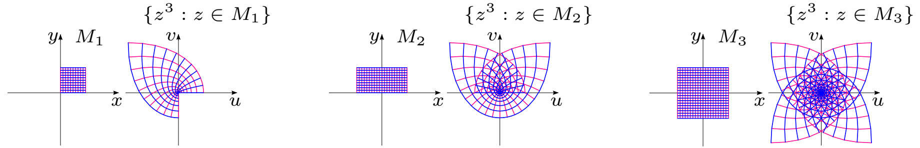
$$f: w = z^n, \quad n \in \mathbb{N}, \qquad D(f) = \mathbb{C}^*, \qquad H(f) = \mathbb{C}^*.$$

Vlastnosti:

1. $f(0) = 0$, $f(\infty) = \infty$,
2. n-tá mocnina je jednoznačná a spojitá funkce na $\mathbb{C}^*$.



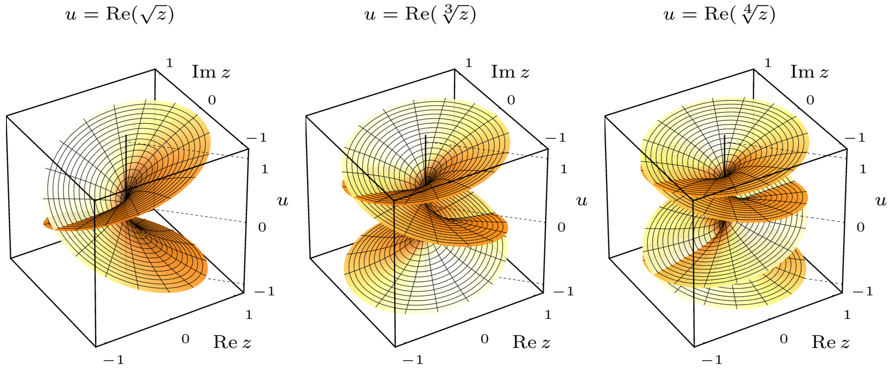
Transformace pomocí druhé mocniny $w = u + \mathrm{i}\, v = z^2$, $z = x + \mathrm{i}\, y$



Transformace pomocí třetí mocniny $w = u + \mathrm{i}\, v = z^3$, $z = x + \mathrm{i}\, y$

Funkce n-tá odmocnina

$$f: w = \sqrt[n]{z} = \{w \in \mathbb{C}^* : \ w^n = z\}, \quad n \in \mathbb{N},\ n \geq 2, \qquad D(f) = \mathbb{C}^*.$$



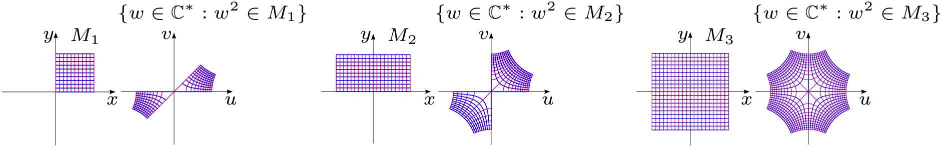
Grafy reálných částí funkcí druhá, třetí a čtvrtá odmocnina

Funkce n-tá odmocnina

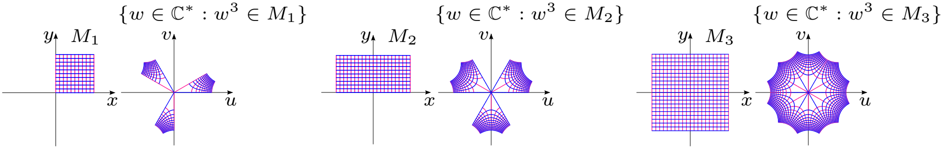
$$f : w = \sqrt[n]{z} = \{w \in \mathbb{C}^* : \ w^n = z\}, \quad n \in \mathbb{N},\ n \geq 2, \qquad D(f) = \mathbb{C}^*.$$

Vlastnosti:

1. $H(f) = \mathbb{C}^*,\ f(0) = 0,\ f(\infty) = \infty,$
2. n-tá odmocnina je n-značná funkce.



Transformace pomocí druhé odmocniny $w = u + \mathrm{i}\, v = \sqrt{z}$, $z = x + \mathrm{i}\, y$

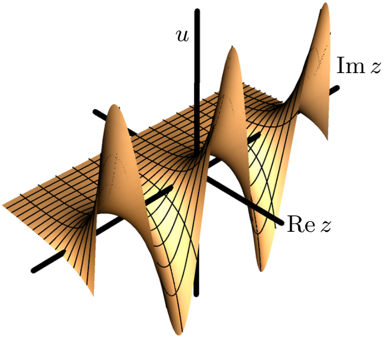


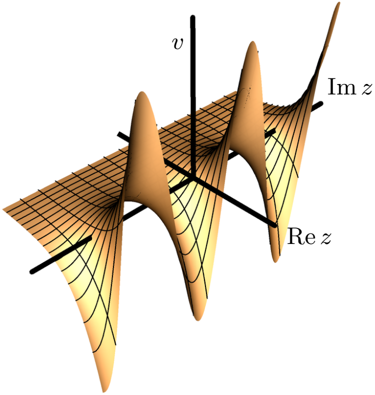
Transformace pomocí třetí odmocniny $w = u + \mathrm{i}\, v = \sqrt[3]{z}$, $z = x + \mathrm{i}\, y$

Exponenciální funkce

$$f : w = \mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad D(f) = \mathbb{C}, \qquad H(f) = \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

$u = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^z)$ $\qquad$ $v = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^z)$





Graf reálné a imaginární části exponenciální funkce $w = \mathrm{e}^z$

Exponenciální funkce

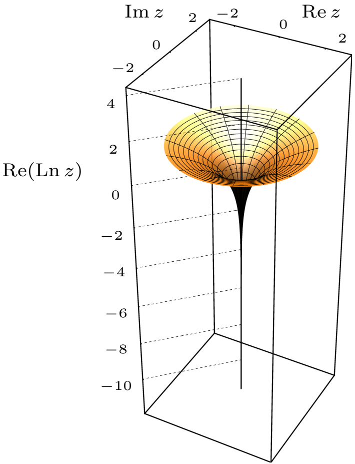
$$f : w = \mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad D(f) = \mathbb{C}, \qquad H(f) = \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

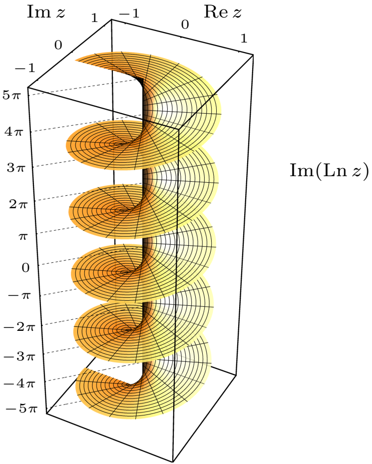
Vlastnosti:

1. exponenciální funkce je jednoznačná funkce,
2. pro $z = x + \mathrm{i}\,y$ platí $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}\,y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\,\sin y)$,
3. exponenciální funkce je periodická v $\mathrm{Im}\,z$ s periodou 2π (pro $z = \mathrm{i}\,y$ platí $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,y} = \cos y + \mathrm{i}\,\sin y$).

Logaritmická funkce

$$f: w = \operatorname{Ln} z = \{w \in \mathbb{C}:\ \mathrm{e}^w = z\}, \qquad D(f) = \mathbb{C} \setminus \{0\}, \qquad H(f) = \mathbb{C}.$$





Graf reálné a imaginární části logaritmické funkce $w = \operatorname{Ln} z$

Logaritmická funkce

$$f : w = \operatorname{Ln} z = \{w \in \mathbb{C} : \ \mathrm{e}^{w} = z\}\,, \qquad D(f) = \mathbb{C} \setminus \{0\}, \qquad H(f) = \mathbb{C}.$$

Vlastnosti:

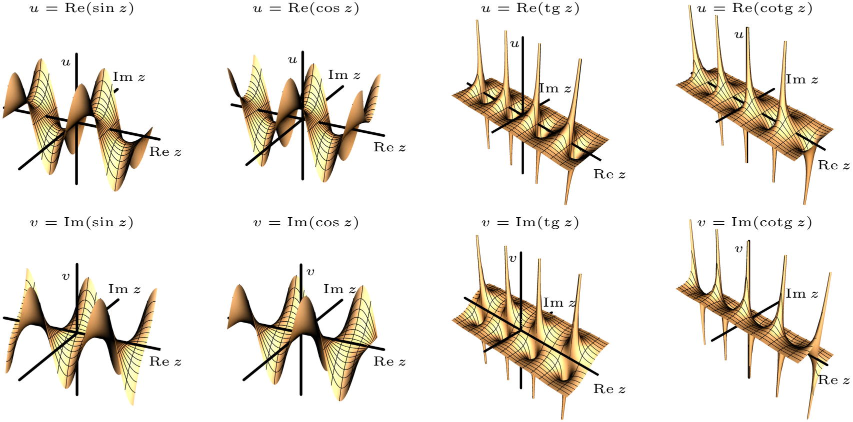
1. logaritmická funkce je nekonečněznačná funkce,
2. je-li $w_0 \in \operatorname{Ln} z$, potom $\operatorname{Ln} z = \{w \in \mathbb{C} : \ w = w_0 + \mathrm{i}\, 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\}$,
3. $\operatorname{Ln} z = \ln |z| + \mathrm{i}\, \operatorname{Arg} z$,
4. hlavní hodnota logaritmu $\ln z = \ln |z| + \mathrm{i}\, \arg z$,
5. hlavní hodnota logaritmu je jednoznačná a prostá (tj. jednolistá) funkce na množině $\mathbb{C} \setminus \{0\}$,
6. $\ln z = \ln r + \mathrm{i}\, \varphi, \quad z = r\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}, \ \varphi \in (-\pi, \pi\rangle, \ r > 0.$

Goniometrické funkce

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z},$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z},$$

$$\begin{aligned} D(\sin) &= \mathbb{C}, & H(\sin) &= \mathbb{C}, \\ D(\cos) &= \mathbb{C}, & H(\cos) &= \mathbb{C}, \\ D(\operatorname{tg}) &= \mathbb{C}, & H(\operatorname{tg}) &= \mathbb{C}^* \setminus \{\pm i\}, \\ D(\operatorname{cotg}) &= \mathbb{C}, & H(\operatorname{cotg}) &= \mathbb{C}^* \setminus \{\pm i\}. \end{aligned}$$



Grafy reálných a imaginárních částí goniometrických funkcí

Goniometrické funkce

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z},$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z},$$

$$\begin{aligned} D(\sin) &= \mathbb{C}, & H(\sin) &= \mathbb{C}, \\ D(\cos) &= \mathbb{C}, & H(\cos) &= \mathbb{C}, \\ D(\operatorname{tg}) &= \mathbb{C}, & H(\operatorname{tg}) &= \mathbb{C}^* \setminus \{\pm i\}, \\ D(\operatorname{cotg}) &= \mathbb{C}, & H(\operatorname{cotg}) &= \mathbb{C}^* \setminus \{\pm i\}. \end{aligned}$$

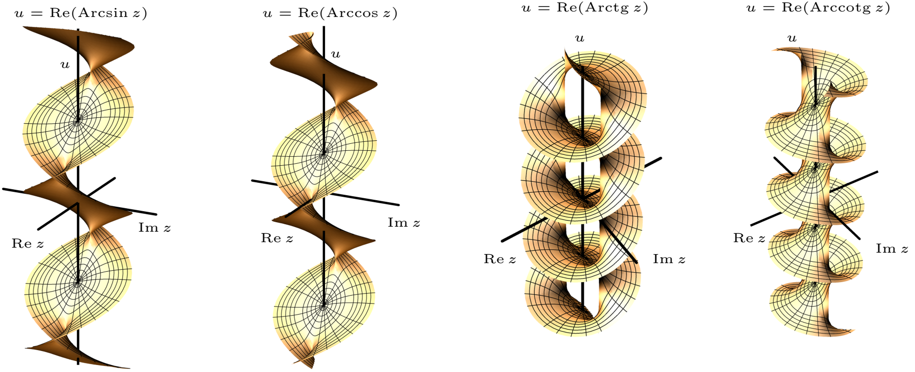
Vlastnosti:

1. $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$ a $\operatorname{cotg} z$ jsou jednoznačné funkce,
2. $\sin z$ a $\cos z$ jsou periodické funkce v $\operatorname{Re} z$ s periodou 2π,
3. $\operatorname{tg} z$ a $\operatorname{cotg} z$ jsou periodické funkce v $\operatorname{Re} z$ s periodou π,
4. platí

$$\begin{aligned} \sin(z_1 \pm z_2) &= \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2, \\ \cos(z_1 \pm z_2) &= \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2, \\ \sinh(z_1 \pm z_2) &= \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \sinh z_2, \\ \cosh(z_1 \pm z_2) &= \cosh z_1 \cosh z_2 \pm \sinh z_1 \sinh z_2. \end{aligned}$$

Cyklometrické funkce

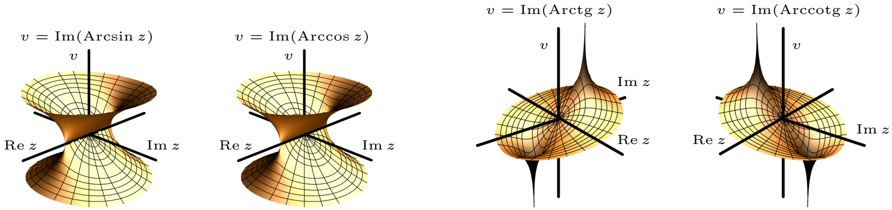
$$
\begin{aligned}
\operatorname{Arcsin} z &= \{w \in \mathbb{C} : \ \sin w = z\}, & D(\operatorname{Arcsin}) &= \mathbb{C}, & H(\operatorname{Arcsin}) &= \mathbb{C},\\
\operatorname{Arccos} z &= \{w \in \mathbb{C} : \ \cos w = z\}, & D(\operatorname{Arccos}) &= \mathbb{C}, & H(\operatorname{Arccos}) &= \mathbb{C},\\
\operatorname{Arctg} z &= \{w \in \mathbb{C} : \ \operatorname{tg} w = z\}, & D(\operatorname{Arctg}) &= \mathbb{C}^* \setminus \{\pm\mathrm{i}\}, & H(\operatorname{Arctg}) &= \mathbb{C},\\
\operatorname{Arccotg} z &= \{w \in \mathbb{C} : \ \operatorname{cotg} w = z\}, & D(\operatorname{Arccotg}) &= \mathbb{C}^* \setminus \{\pm\mathrm{i}\}, & H(\operatorname{Arccotg}) &= \mathbb{C}.
\end{aligned}
$$



Grafy reálných částí cyklometrických funkcí

Cyklometrické funkce

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Arcsin} z &= \{w \in \mathbb{C} : \ \sin w = z\}, & D(\operatorname{Arcsin}) &= \mathbb{C}, & H(\operatorname{Arcsin}) &= \mathbb{C},\\
\operatorname{Arccos} z &= \{w \in \mathbb{C} : \ \cos w = z\}, & D(\operatorname{Arccos}) &= \mathbb{C}, & H(\operatorname{Arccos}) &= \mathbb{C},\\
\operatorname{Arctg} z &= \{w \in \mathbb{C} : \ \operatorname{tg} w = z\}, & D(\operatorname{Arctg}) &= \mathbb{C}^* \setminus \{\pm \mathrm{i}\}, & H(\operatorname{Arctg}) &= \mathbb{C},\\
\operatorname{Arccotg} z &= \{w \in \mathbb{C} : \ \operatorname{cotg} w = z\}, & D(\operatorname{Arccotg}) &= \mathbb{C}^* \setminus \{\pm \mathrm{i}\}, & H(\operatorname{Arccotg}) &= \mathbb{C}.
\end{aligned}
$$



Grafy imaginárních částí cyklometrických funkcí

Cyklometrické funkce

$$\begin{aligned}
\operatorname{Arcsin} z &= \{w \in \mathbb{C}: \ \sin w = z\}, & D(\operatorname{Arcsin}) &= \mathbb{C}, & H(\operatorname{Arcsin}) &= \mathbb{C},\\
\operatorname{Arccos} z &= \{w \in \mathbb{C}: \ \cos w = z\}, & D(\operatorname{Arccos}) &= \mathbb{C}, & H(\operatorname{Arccos}) &= \mathbb{C},\\
\operatorname{Arctg} z &= \{w \in \mathbb{C}: \ \operatorname{tg} w = z\}, & D(\operatorname{Arctg}) &= \mathbb{C}^* \setminus \{\pm \mathrm{i}\}, & H(\operatorname{Arctg}) &= \mathbb{C},\\
\operatorname{Arccotg} z &= \{w \in \mathbb{C}: \ \operatorname{cotg} w = z\}, & D(\operatorname{Arccotg}) &= \mathbb{C}^* \setminus \{\pm \mathrm{i}\}, & H(\operatorname{Arccotg}) &= \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

Vlastnosti:

1. cyklometrické funkce jsou nekonečnězznačné funkce,
2. hlavní hodnoty označujeme $\arcsin$, $\arccos$, arctg, $\operatorname{arccotg}$,
3. hodnoty arkustangens a arkuskotangens v bodě ∞:

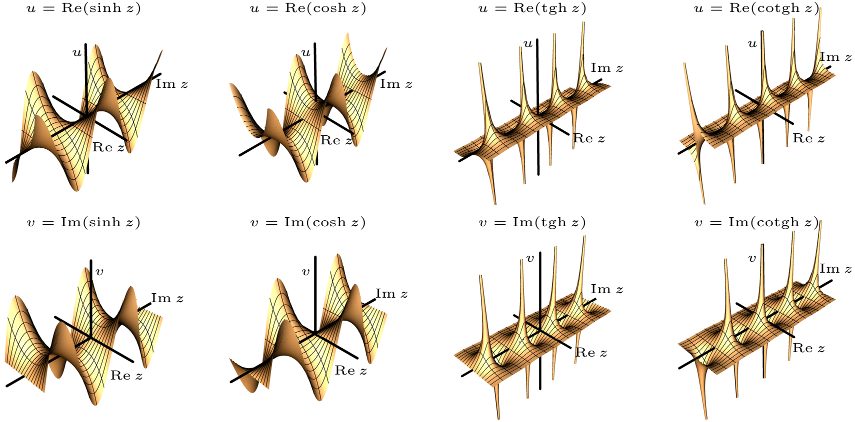
$$\begin{aligned}
\operatorname{Arctg} \infty &= (2k+1)\tfrac{\pi}{2}, & k &\in \mathbb{Z},\\
\operatorname{Arccotg} \infty &= k\pi, & k &\in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Hyperbolické funkce

$$\sinh z = \frac{\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z}}{2}, \qquad \operatorname{tgh} z = \frac{\sinh z}{\cosh z},$$

$$\cosh z = \frac{\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}}{2}, \qquad \operatorname{cotgh} z = \frac{\cosh z}{\sinh z},$$

$$\begin{aligned}
D(\sinh) &= \mathbb{C}, & H(\sinh) &= \mathbb{C},\\
D(\cosh) &= \mathbb{C}, & H(\cosh) &= \mathbb{C},\\
D(\operatorname{tgh}) &= \mathbb{C}, & H(\operatorname{tgh}) &= \mathbb{C}^* \setminus \{\pm 1\},\\
D(\operatorname{cotgh}) &= \mathbb{C}, & H(\operatorname{cotgh}) &= \mathbb{C}^* \setminus \{\pm 1\}.
\end{aligned}$$



Grafy reálných a imaginárních částí hyperbolických funkcí.

Hyperbolické funkce

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \qquad \operatorname{tgh} z = \frac{\sinh z}{\cosh z},$$

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad \operatorname{cotgh} z = \frac{\cosh z}{\sinh z},$$

$$\begin{aligned} D(\sinh) &= \mathbb{C}, & H(\sinh) &= \mathbb{C}, \\ D(\cosh) &= \mathbb{C}, & H(\cosh) &= \mathbb{C}, \\ D(\operatorname{tgh}) &= \mathbb{C}, & H(\operatorname{tgh}) &= \mathbb{C}^* \setminus \{\pm 1\}, \\ D(\operatorname{cotgh}) &= \mathbb{C}, & H(\operatorname{cotgh}) &= \mathbb{C}^* \setminus \{\pm 1\}. \end{aligned}$$

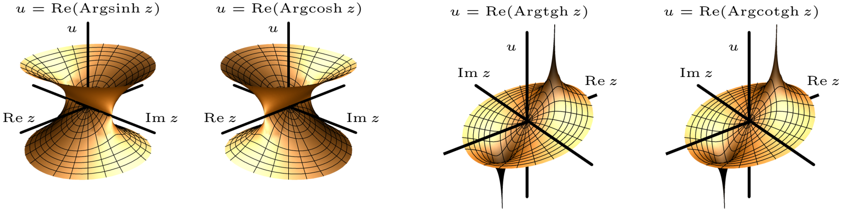
Vlastnosti:

1. $\sinh z$, $\cosh z$, $\operatorname{tgh} z$ a $\operatorname{cotgh} z$ jsou jednoznačné funkce,
2. $\sinh z$ a $\cosh z$ jsou periodické funkce v $\operatorname{Im} z$ s periodou 2π,
3. $\operatorname{tgh} z$ a $\operatorname{cotgh} z$ jsou periodické funkce v $\operatorname{Im} z$ s periodou π,
4. platí

$$\begin{aligned} \sin z &= \sin x \cosh y + \mathrm{i}\, \cos x \sinh y, & \cosh z &= \cos \mathrm{i}\, z, \\ \cos z &= \cos x \cosh y - \mathrm{i}\, \sin x \sinh y, & \cosh \mathrm{i}\, z &= \cos z, \\ \sinh z &= \sinh x \cos y + \mathrm{i}\, \cosh x \sin y, & \sinh z &= -\mathrm{i}\, \sin \mathrm{i}\, z, \\ \cosh z &= \cosh x \cos y + \mathrm{i}\, \sinh x \sin y, & \sinh \mathrm{i}\, z &= \mathrm{i}\, \sin z. \end{aligned}$$

Hyperbolometrické funkce

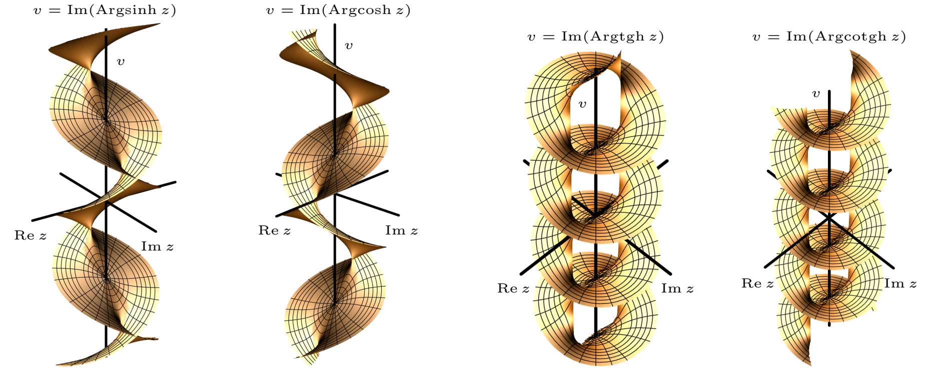
$$
\begin{aligned}
\operatorname{Argsinh} z &= \{w \in \mathbb{C}: \ \sinh w = z\}, & D(\operatorname{Argsinh}) &= \mathbb{C}, & H(\operatorname{Argsinh}) &= \mathbb{C},\\
\operatorname{Argcosh} z &= \{w \in \mathbb{C}: \ \cosh w = z\}, & D(\operatorname{Argcosh}) &= \mathbb{C}, & H(\operatorname{Argcosh}) &= \mathbb{C},\\
\operatorname{Argtgh} z &= \{w \in \mathbb{C}: \ \operatorname{tgh} w = z\}, & D(\operatorname{Argtgh}) &= \mathbb{C}^* \setminus \{\pm 1\}, & H(\operatorname{Argtgh}) &= \mathbb{C},\\
\operatorname{Argcotgh} z &= \{w \in \mathbb{C}: \ \operatorname{cotgh} w = z\}, & D(\operatorname{Argcotgh}) &= \mathbb{C}^* \setminus \{\pm 1\}, & H(\operatorname{Argcotgh}) &= \mathbb{C}.
\end{aligned}
$$



Grafy reálných částí hyperbolometrických funkcí

Hyperbolometrické funkce

$$\begin{aligned}
\operatorname{Argsinh} z &= \{w \in \mathbb{C} : \ \sinh w = z\}, & D(\operatorname{Argsinh}) &= \mathbb{C}, & H(\operatorname{Argsinh}) &= \mathbb{C},\\
\operatorname{Argcosh} z &= \{w \in \mathbb{C} : \ \cosh w = z\}, & D(\operatorname{Argcosh}) &= \mathbb{C}, & H(\operatorname{Argcosh}) &= \mathbb{C},\\
\operatorname{Argtgh} z &= \{w \in \mathbb{C} : \ \operatorname{tgh} w = z\}, & D(\operatorname{Argtgh}) &= \mathbb{C}^* \setminus \{\pm 1\}, & H(\operatorname{Argtgh}) &= \mathbb{C},\\
\operatorname{Argcotgh} z &= \{w \in \mathbb{C} : \ \operatorname{cotgh} w = z\}, & D(\operatorname{Argcotgh}) &= \mathbb{C}^* \setminus \{\pm 1\}, & H(\operatorname{Argcotgh}) &= \mathbb{C}.
\end{aligned}$$



Grafy imaginárních částí hyperbolometrických funkcí

Hyperbolometrické funkce

$$\begin{aligned}
\operatorname{Argsinh} z &= \{w \in \mathbb{C}:\ \sinh w = z\}, & D(\operatorname{Argsinh}) &= \mathbb{C}, & H(\operatorname{Argsinh}) &= \mathbb{C},\\
\operatorname{Argcosh} z &= \{w \in \mathbb{C}:\ \cosh w = z\}, & D(\operatorname{Argcosh}) &= \mathbb{C}, & H(\operatorname{Argcosh}) &= \mathbb{C},\\
\operatorname{Argtgh} z &= \{w \in \mathbb{C}:\ \operatorname{tgh} w = z\}, & D(\operatorname{Argtgh}) &= \mathbb{C}^* \setminus \{\pm 1\}, & H(\operatorname{Argtgh}) &= \mathbb{C},\\
\operatorname{Argcotgh} z &= \{w \in \mathbb{C}:\ \operatorname{cotgh} w = z\}, & D(\operatorname{Argcotgh}) &= \mathbb{C}^* \setminus \{\pm 1\}, & H(\operatorname{Argcotgh}) &= \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

Vlastnosti:

1. hyperbolometrické funkce jsou nekonečněznačné funkce,
2. hlavní hodnoty označujeme $\operatorname{argsinh}$, $\operatorname{argcosh}$, argtgh, $\operatorname{argcotgh}$,
3. hodnoty argumentu hyperbolického tangens a argumentu hyperbolického kotangens v bodě ∞:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Argtgh} \infty &= (2k+1)\tfrac{\pi}{2}\mathrm{i}\,, & k &\in \mathbb{Z},\\
\operatorname{Argcotgh} \infty &= k\pi\mathrm{i}\,, & k &\in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Obecná mocninná a exponenciální funkce

$$f: w = z^a = \mathrm{e}^{a \operatorname{Ln} z}, \qquad D(f) = \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad a \in \mathbb{C},$$
$$f: w = a^z = \mathrm{e}^{z \operatorname{Ln} a}, \qquad D(f) = \mathbb{C}, \qquad a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Vlastnosti:

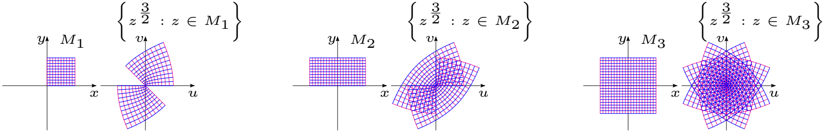
1. $f(z) = z^a$ je funkcí

$$\begin{cases} \text{jednoznačnou} & \text{pro } a \in \mathbb{Z}, \\ n\text{-značnou} & \text{pro } a \in \mathbb{Q}, \qquad a = \frac{m}{n},\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}, \\ \text{nekonečněznačnou} & \text{pro } a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

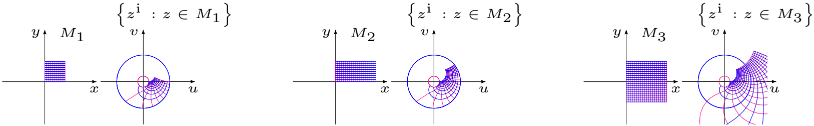
Obecná mocninná a exponenciální funkce

$$f : w = z^a = \mathrm{e}^{a \,\mathrm{Ln}\, z}, \qquad D(f) = \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad a \in \mathbb{C},$$

$$f : w = a^z = \mathrm{e}^{z \,\mathrm{Ln}\, a}, \qquad D(f) = \mathbb{C}, \qquad a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$



Transformace pomocí mocninné funkce $w = u + \mathrm{i}\, v = z^{\frac{3}{2}}$, $z = x + \mathrm{i}\, y$

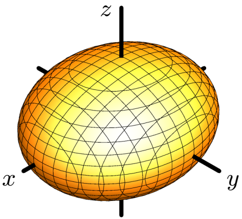


Transformace pomocí mocninné funkce $w = u + \mathrm{i}\, v = z^{\mathrm{i}}$, $z = x + \mathrm{i}\, y$

Kvadriky v $\mathbb{R}^3$ v základní poloze

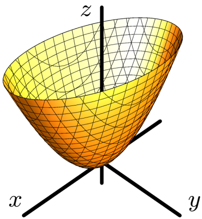
elipsoid

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



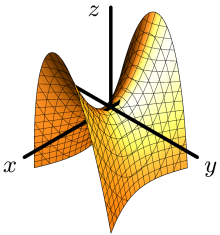
eliptický paraboloid

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z=0$$



hyperbolický paraboloid

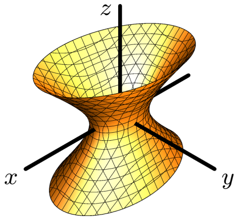
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-z=0$$



Kvadriky v $\mathbb{R}^3$ v základní poloze

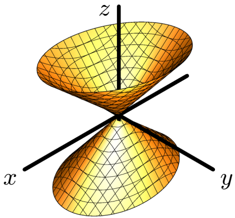
jednodílný hyperboloid

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



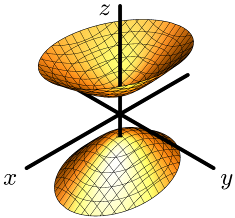
kužel

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$



dvoudílný hyperboloid

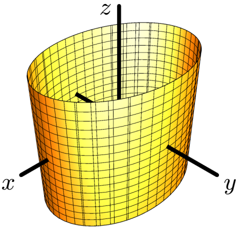
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$



Kvadriky v $\mathbb{R}^3$ v základní poloze

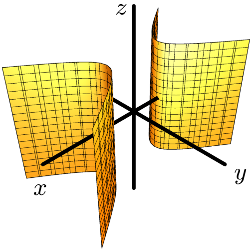
eliptický válec

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



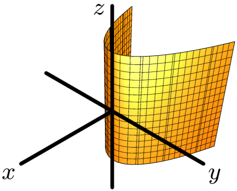
hyperbolický válec

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

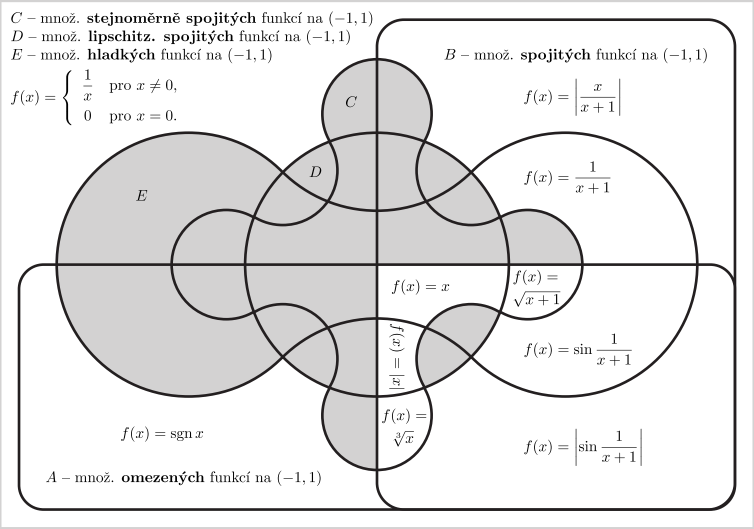


parabolický válec

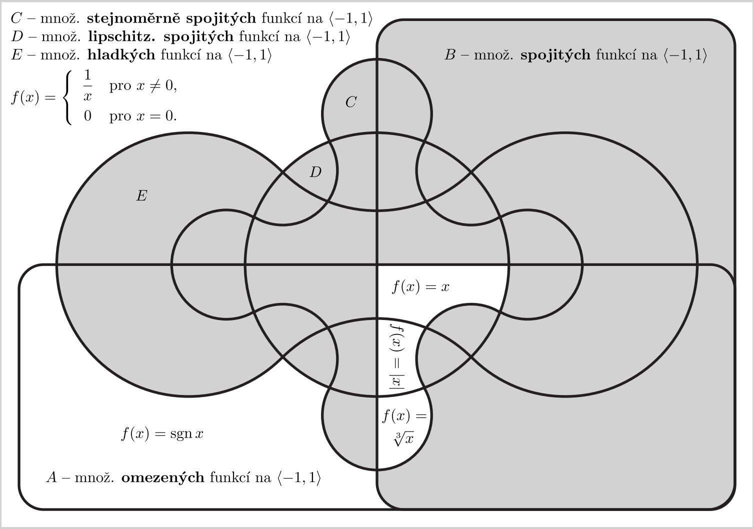
$$y^2 + 2ax = 0$$



Omezenost, spojitost a lipschitzovskost funkcí na $(-1, 1)$



Omezenost, spojitost a lipschitzovskost funkcí na $\langle -1, 1\rangle$



Řecká abeceda – 1. část

název	příkaz TEXu	velké t.	malé t.	velké p.	malé p.
alfa	`A, \alpha`	A	α		α α
beta (béta)	`B, \beta`	B	β		β
gama (gamma)	`\Gamma , \gamma`	Γ	γ	Γ	γ γ
delta	`\Delta , \delta`	Δ	δ	Δ	δ
epsílon	`E , \varepsilon, \epsilon`	E	ϵ, ε		ε ϵ
(d)zéta	`Z , \zeta`	Z	ζ		ζ ζ
éta	`H , \eta`	H	η		η η
théta	`\Theta , \theta`	Θ	θ	Θ	ϑ θ

Řecká abeceda – 2. část

název	příkaz TEXu	velké t.	malé t.	velké p.	malé p.
ióta	`I` , `\iota`	I	ι		
kapa (kappa)	`K` , `\kappa`	K	κ		$\varkappa$ κ
lambda	`\Lambda` , `\lambda`	Λ	λ	Λ	λ λ
mí	`M`, `\mu`	M	μ		μ μ
ný	`N`, `\nu`	N	ν		ν ν
ksí	`\Xi`, `\xi`	Ξ	ξ		ξ ξ
omikron	`O` , `o`	O	o		
pí	`\Pi` , `\pi`, `\varpi`	Π	π, ϖ	Π	π π

Řecká abeceda – 3. část

název	příkaz TEXu	velké t.	malé t.	velké p.	malé p.
ró	`P , \rho, \varrho`	P	ρ, ϱ		ϱ ρ
sigma	`\Sigma , \sigma, \varsigma`	Σ	σ, ς	Σ	σ σ
tau	`T , \tau`	T	τ		τ τ
ypsilon	`Y , \upsilon`	Y	υ		
fí	`\Phi , \phi, \varphi`	Φ	ϕ, φ	Φ	φ ϕ
chí	`X , \chi`	X	χ		χ
psí	`\Psi , \psi`	Ψ	ψ	Ψ	ψ ψ
omega	`\Omega , \omega`	Ω	ω	Ω	ω

Literatura

Brabec, J., Martan, F., Rozenský, Z.: Matematická analýza I. Praha, SNTL 1985.

Brabec, J., Hrůza, B.: Matematická analýza II. Praha, SNTL 1986.

Došlá, Z., Došlý, O.: Diferenciální počet funkcí více proměnných. Brno, Masarykova univerzita v Brně 1999.

Jarník, V.: Integrální počet II. Praha, ČSAV 1955.

Knuth, D. E.: Umění programování (1. díl, Základní algoritmy). Brno, Computer Press 2008.

Needham, T.: Visual Complex Analysis. New York, Oxford University Press 2000.

Oldham, K., Myland, J., Spanier, J.: An atlas of functions. New York, Springer 2009.

Polák, J.: Přehled středoškolské matematiky. (9. vydání) Praha, Prometheus 2008.

Rektorys, K. a spol.: Přehled užité matematiky. Praha, Prometheus 1995.

Shaw, W. T.: Complex Analysis with Mathematica. Cambridge, Cambridge University Press 2006.

Wagon, S.: Mathematica in Action. New York, Springer 2010.

The Wolfram Functions Site. [online]. [cit. 2011-11-11].
Dostupné z: http://functions.wolfram.com