HERBÁŘ FUNKCÍ

verze 0.45

Jan Čepička
Petr Girg
Petr Nečesal
Josef Polák

Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století*
(reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela
Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

J. Čepička, P. Girg, P. Nečesal a J. Polák
Herbář funkcí verze 0.45

© J. Čepička, P. Girg, P. Nečesal a J. Polák, 2011
ISBN

Předmluva

Herbář funkcí je přehledový soubor vybraných funkcí. Každé funkci v herbáři je věnován jeden list, který obsahuje definici funkce, její graf a základní vlastnosti či často používané vztahy. Herbář obsahuje reálné funkce jedné a dvou reálných proměnných a komplexní funkce. Kromě základního souboru funkcí je možno v herbáři najít také integrální funkce či funkce s pozoruhodnými vlastnostmi.

V Plzni 12. 2. 2012 Autoři

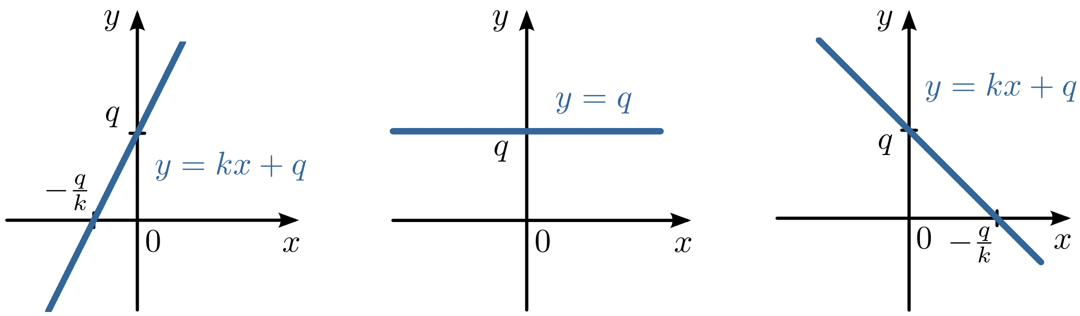
Obsah

Kapitola 1

Základní soubor funkcí v $\mathbb{R}$

Lineární funkce

$$f : y = kx + q, \qquad k, q \in \mathbb{R}, \qquad D(f) = \mathbb{R}, \qquad H(f) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{pro } k \neq 0, \\ \{q\} & \text{pro } k = 0. \end{cases}$$



Obr. 1.1: Grafy lineárních funkcí

Vlastnosti:

i) grafem lineární funkce je *přímka*,

ii) lineární funkce je *konvexní*, *konkávní* a *monotónní*,

iii) lineární funkce je *spojitá*, *diferencovatelná* a *hladká*,

iv) pro $k > 0$ je f *prostá* a *rostoucí*,

v) pro $k < 0$ je f *prostá* a *klesající*,

vi) pro $k = 0$ je f **konstantní funkce** (**konstanta**),

vii) pro $k = 0$ je f *neklesající* i *nerostoucí*, *omezená* a *periodická* s libovolnou periodou,

viii) pro $q = 0$ a $k \neq 0$ se f říká **přímá úměrnost**,

ix) pro $q = 0$ je f *lichá*,

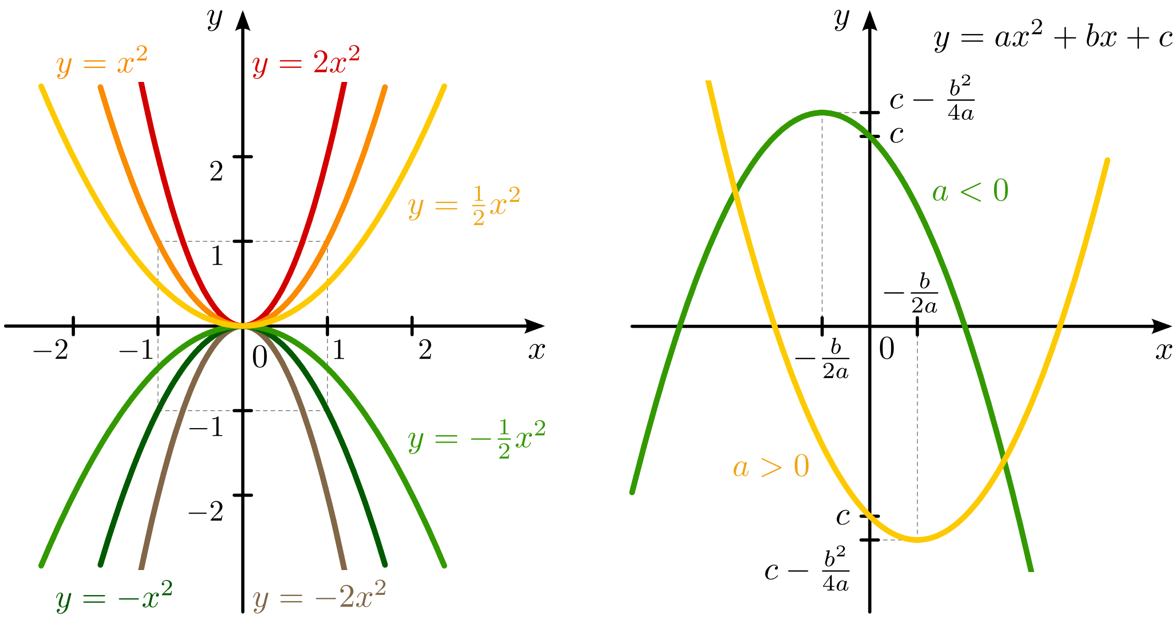
x) pro $q = k = 0$ je f *lichá* i *sudá*.

Odkazy: Polák [8].

Kvadratická funkce

$$f: y = ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2 + y_0, \qquad a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0, \quad x_0 = -\tfrac{b}{2a},\ y_0 = c - \tfrac{b^2}{4a},$$

$$D(f) = \mathbb{R}, \quad H(f) = \begin{cases} \langle y_0, +\infty) & \text{pro } a > 0, \\ (-\infty, y_0\rangle & \text{pro } a < 0. \end{cases}$$



Obr. 1.2: Grafy kvadratických funkcí

Vlastnosti:

i) grafem kvadratické funkce je *parabola*,

ii) kvadratická funkce není omezená,

iii) kvadratická funkce je *spojitá*, *diferencovatelná* a *hladká*,

iv) pro $a > 0$ je f *ryze konvexní*, *omezená zdola* a není omezená shora,

v) pro $a < 0$ je f *ryze konkávní* a *omezená shora* a není omezená zdola,

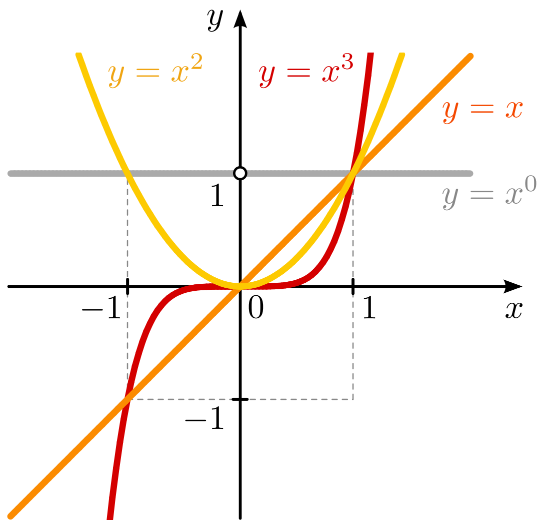
vi) pro $b = 0$ je f *sudá*.

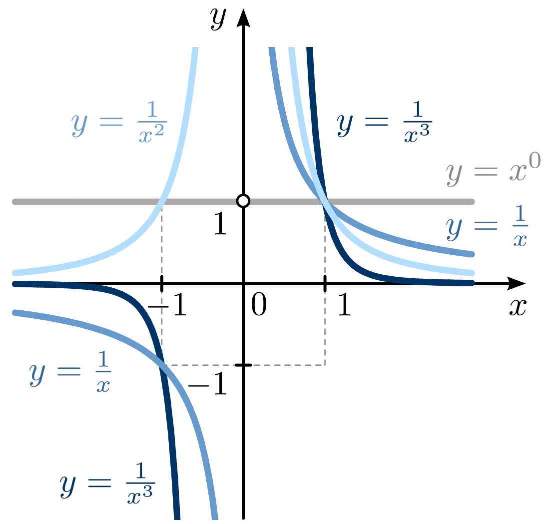
Odkazy: Polák [8].

Mocninná funkce s celým exponentem

$f: y = x^n, \quad n \in \mathbb{Z},$

$$D(f) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{pro } n \geq 1, \\ \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{pro } n \leq 0, \end{cases} \quad H(f) = \begin{cases} \{1\} & \text{pro } n = 0, \\ \mathbb{R} & \text{pro } n > 0 \text{ liché}, \\ \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{pro } n < 0 \text{ liché}, \\ \langle 0, +\infty) & \text{pro } n > 0 \text{ sudé}, \\ (0, +\infty) & \text{pro } n < 0 \text{ sudé}. \end{cases}$$





Obr. 1.3: Grafy mocninných funkcí s celým exponentem

Vlastnosti:

i) grafem mocninné funkce je pro $n = 1$ *přímka*, pro $n \geq 2$ *parabola* n-tého stupně, pro $n = 0$ část *přímky* a pro $n \leq -1$ *hyperbola* stupně $-n + 1$,

ii) mocninná funkce je *lichá* pro n liché a *sudá* pro n sudé,

iii) mocninná funkce je *spojitá* a *diferencovatelná* na $D(f)$,

iv) pro n liché f není omezená zdola ani shora, nemá minimum ani maximum, je *rostoucí* pro $n \geq 1$ liché a *klesající* na $(-\infty, 0)$ a na $(0, +\infty)$ pro $n \leq -1$ liché,

v) pro $n \geq 2$ sudé je f *zdola omezená*, není omezená shora, nemá maximum, je *rostoucí* na $\langle 0, +\infty)$ a *klesající* na $(-\infty, 0\rangle$, má *ostré minimum* v bodě $x = 0$,

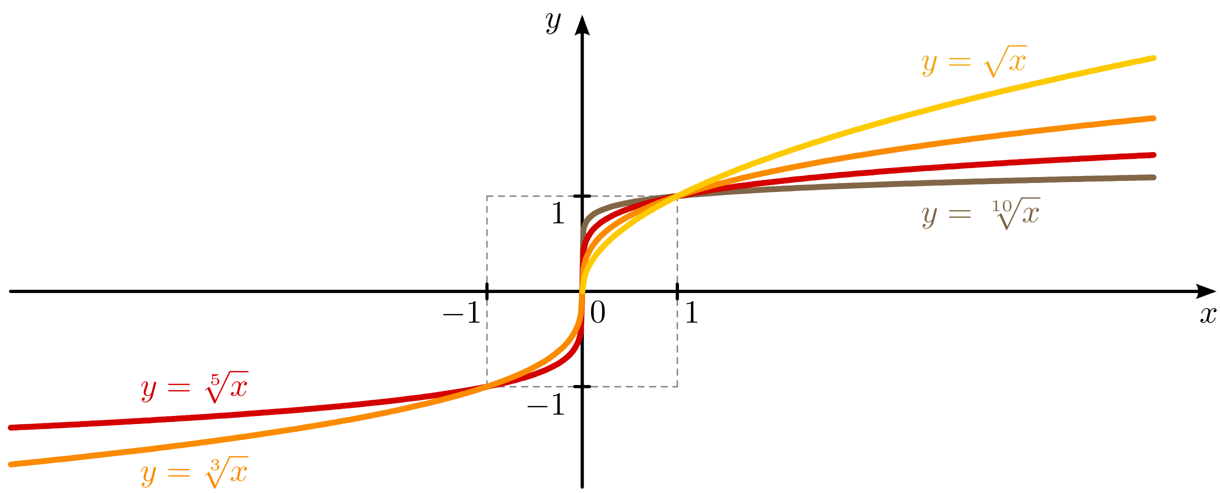
vi) pro $n \leq -2$ sudé je f *zdola omezená*, není omezená shora, nemá maximum ani minimum, je *rostoucí* na $(-\infty, 0)$ a *klesající* na $(0, +\infty)$.

Odkazy: Polák [8].

Funkce n-tá odmocnina

je funkce *inverzní* k části mocninné funkce s přirozeným mocnitelem

$$f : y = \sqrt[n]{x}, \quad n \in \mathbb{N},\ n \geq 2, \qquad D(f) = H(f) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{pro } n \text{ liché,} \\ \langle 0, +\infty) & \text{pro } n \text{ sudé.} \end{cases}$$



Obr. 1.4: Graf druhé, třetí, páté a desáté odmocniny

Vlastnosti:

i) n-tá odmocnina je *prostá*, *rostoucí* a není omezená,

ii) n-tá odmocnina je *spojitá* na $D(f)$ a *diferencovatelná* na $D(f) \setminus \{0\}$,

iii) pro n liché je f *lichá*, není omezená zdola ani shora, nemá minimum ani maximum,

iv) pro n sudé je f *omezená zdola*, není omezená shora, nemá maximum a má *ostré minimum* v bodě $x = 0$,

v) f není lipschitzovsky spojitá na okolí bodu 0.

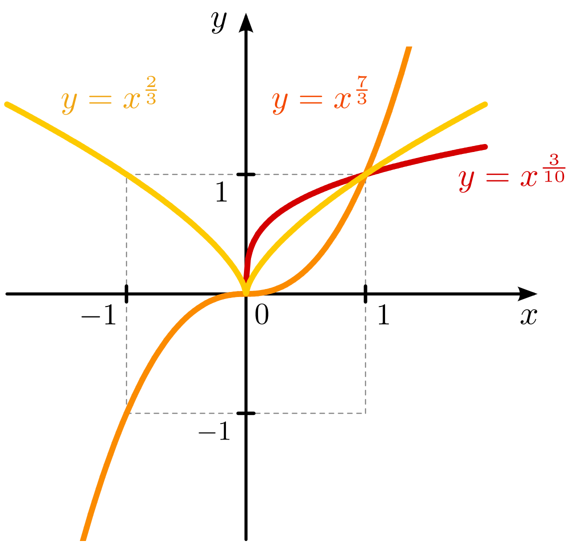
Vztahy:

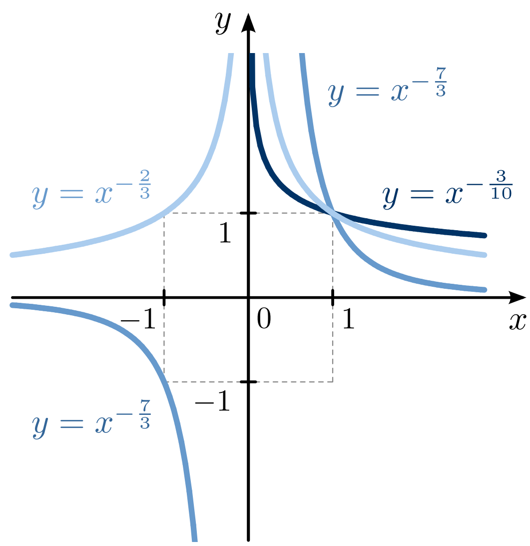
$$(\sqrt[n]{x})^n = \sqrt[n]{x^n} = x \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R} \text{ a } n \text{ liché,}$$
$$(\sqrt[n]{x})^n = \sqrt[n]{x^n} = x \qquad \text{pro } x \in \langle 0, +\infty) \text{ a } n \text{ sudé.}$$

Odkazy: Polák [8].

Mocninná funkce s racionálním exponentem

$$f: y = x^{\frac{m}{n}}, \qquad m \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}, \qquad D(f) = \begin{cases} \langle 0, +\infty) & \text{pro } \frac{m}{n} > 0,\ n \text{ sudé}, \\ \mathbb{R} & \text{pro } \frac{m}{n} > 0,\ n \text{ liché}, \\ (0, +\infty) & \text{pro } \frac{m}{n} < 0,\ n \text{ sudé}, \\ \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{pro } \frac{m}{n} < 0,\ n \text{ liché}. \end{cases}$$





Obr. 1.5: Grafy mocninných funkcí s racionálním exponentem

Vlastnosti:

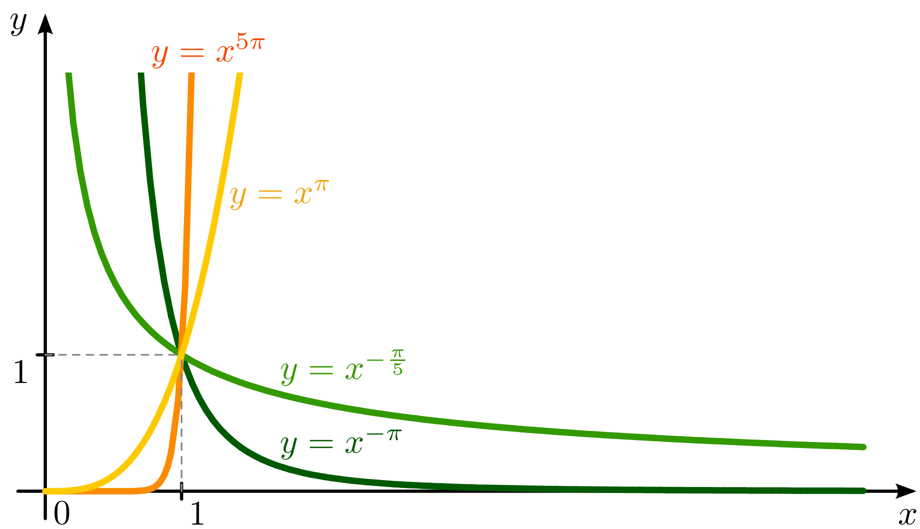
i) mocninná funkce je *lichá* pro m a n liché a je *sudá* pro m sudé a n liché,

ii) mocninná funkce je *spojitá* na $D(f)$ a *diferencovatelná* na $D(f) \setminus \{0\}$.

Odkazy: Spanier [7].

Mocninná funkce s obecným reálným exponentem

$$f : y = x^a, \qquad a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \qquad D(f) = H(f) = \begin{cases} \langle 0, +\infty) & \text{pro } a > 0, \\ (0, +\infty) & \text{pro } a < 0. \end{cases}$$



Obr. 1.6: Grafy mocninných funkcí s iracionálním exponentem

Vlastnosti:

i) mocninná funkce je *prostá* a *ryze monotónní*,

ii) mocninná funkce není omezená,

iii) mocninná funkce je *spojitá* na $D(f)$ a *diferencovatelná* na $(0, +\infty)$,

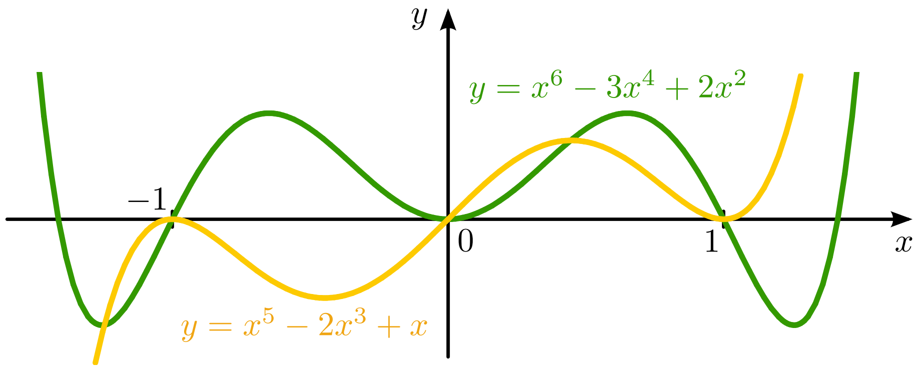
iv) f je *rostoucí* pro $a > 0$ a *klesající* pro $a < 0$,

v) f je *zdola omezená*, není shora omezená, nemá maximum, pro $a < 0$ nemá minimum a pro $a > 0$ má ostré minimum v bodě $x = 0$.

Odkazy: Spanier [7].

Polynomická funkce n-tého stupně

$$P : y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad n \in \mathbb{N}_0,\ a_k \in \mathbb{R},\ k = 0, \ldots, n,\ a_n \neq 0, \quad D(f) = \mathbb{R}.$$



Obr. 1.7: Grafy polynomických funkcí

Vlastnosti:

i) polynomická funkce je *spojitá*, *diferencovatelná* a *hladká*,

ii) polynomická funkce stupně $n \geq 1$ není omezená,

iii) podle **základní věty algebry** má každá algebraická rovnice $P(x) = 0$ stupně $n \geq 1$ v oboru komplexních čísel alespoň jeden kořen,

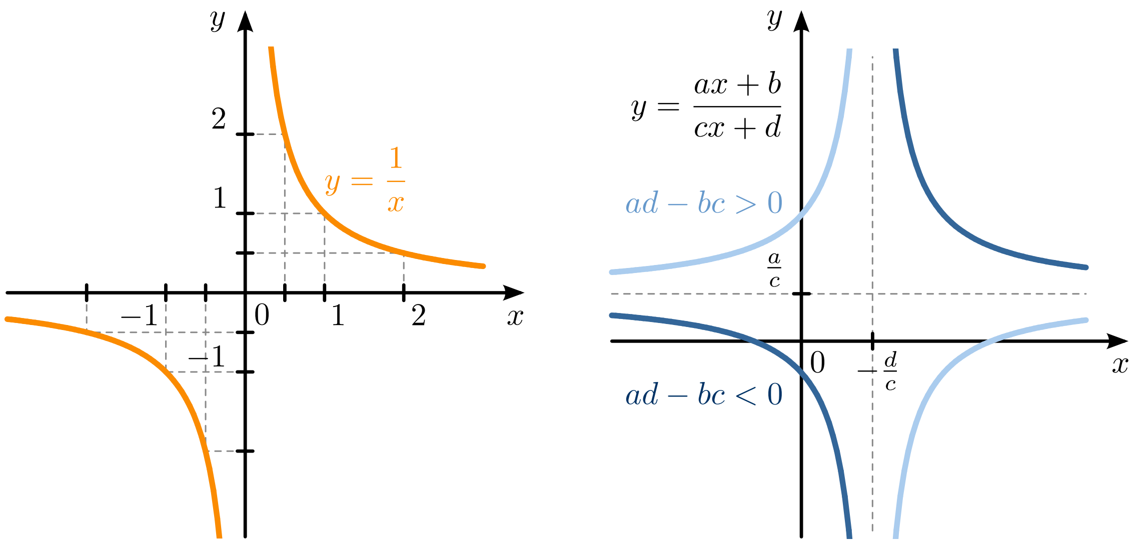
iv) každá algebraická rovnice $P(x) = 0$ stupně $n \geq 1$ má v oboru komplexních čísel právě n kořenů (se započítáním násobnosti),

v) podle **Descartovy věty** je počet kladných kořenů algebraické rovnice $P(x) = 0$ stupně $n \geq 1$ buď roven počtu znaménkových změn v posloupnosti koeficientů $a_0, a_1, \ldots, a_n$, nebo je o sudý počet menší.

Odkazy: Spanier [7].

Lineární lomená funkce

$$f : y = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R},\ c \neq 0,\ ad - bc \neq 0, \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{-\tfrac{d}{c}\right\}, \quad H(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\tfrac{a}{c}\right\}.$$



Obr. 1.8: Graf nepřímé úměrnosti (pro $k = 1$) a lineární lomené funkce

Vlastnosti:

i) grafem lineárně lomené funkce je *rovnoosá hyperbola* se středem v bodě $\left[-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right]$,

ii) lineárně lomená funkce je *prostá*,

iii) lineárně lomená funkce je *spojitá* a *diferencovatelná* na $D(f)$,

iv) f není omezená zdola ani shora, nemá minimum ani maximum,

v) pro $ad - bc < 0$ je f *klesající* na $\left(-\infty, -\frac{d}{c}\right)$ a na $\left(-\frac{d}{c}, +\infty\right)$,

vi) pro $ad - bc > 0$ je f *rostoucí* na $\left(-\infty, -\frac{d}{c}\right)$ a na $\left(-\frac{d}{c}, +\infty\right)$,

vii) f není monotónní na $D(f) = \left(-\infty, -\frac{d}{c}\right) \cup \left(-\frac{d}{c}, +\infty\right)$,

viii) f není spojitá na $\mathbb{R}$, v bodě $x = -\frac{d}{c}$ má *bod nespojitosti 2. druhu*,

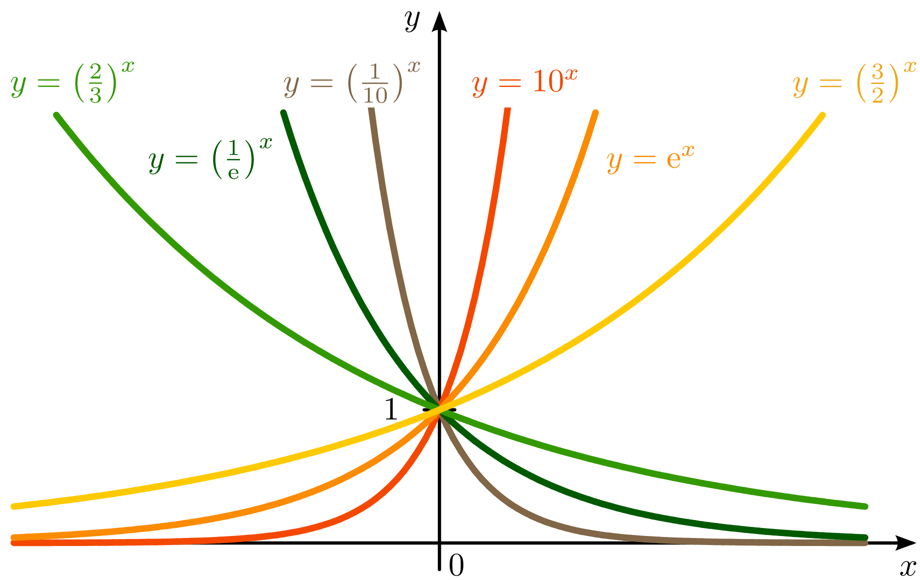
$$\lim_{x \to -\frac{d}{c}^-} f(x) = \mp\infty \quad \text{pro } ad - bc \lessgtr 0, \qquad \lim_{x \to -\frac{d}{c}^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{pro } ad - bc \lessgtr 0,$$

ix) pro $a = d = 0$, $b \neq 0$, $k = \frac{b}{c}$ je $f : y = \frac{k}{x}$, jež se nazývá **nepřímá úměrnost**;
je to *lichá funkce*.

Odkazy: Polák [8].

Exponenciální funkce

$$f:\ y = a^x, \qquad a > 0,\ a \neq 1, \qquad D(f) = \mathbb{R}, \qquad H(f) = (0, +\infty),$$
$$f:\ y = \mathrm{e}^x, \qquad \mathrm{e} \text{ je Eulerovo číslo}, \qquad D(f) = \mathbb{R}, \qquad H(f) = (0, +\infty).$$



Obr. 1.9: Grafy exponenciálních funkcí

Vlastnosti:

i) graf exponenciální funkce je *exponenciála*,

ii) exponenciální funkce je *prostá*,

iii) exponenciální funkce je *spojitá*, *diferencovatelná* a *hladká*,

iv) f je *rostoucí* pro $a > 0$ a *klesající* pro $a < 0$,

v) f je *zdola omezená* a není omezená shora, nemá maximum ani minimum,

vi) e je **Eulerovo číslo**:

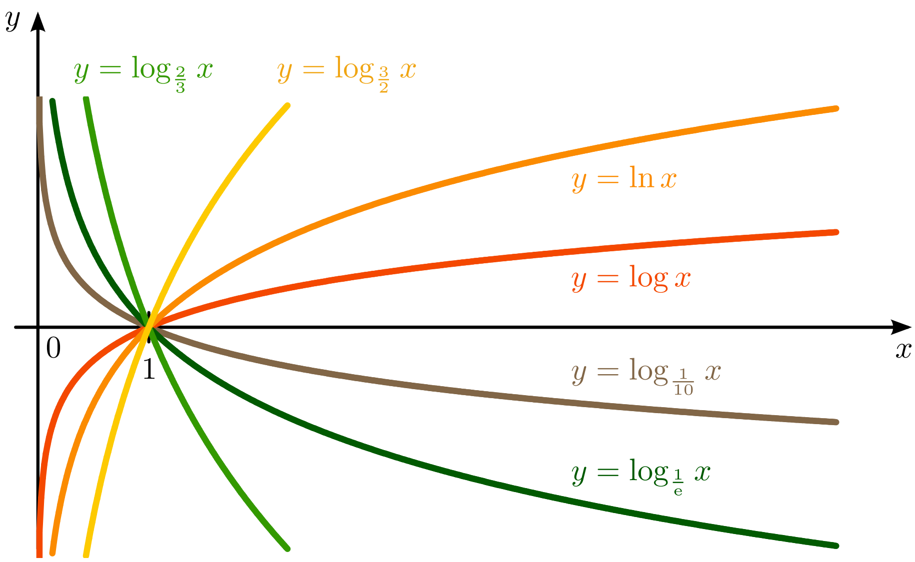
$$\mathrm{e} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = 2.71828182845904523536028747135266249775724709\ldots$$

Odkazy: Polák [8].

Logaritmická funkce

je funkce *inverzní* k exponenciální funkci

$f:\ y = \log_a x,$	$a > 0,\ a \neq 1,$	$D(f) = (0, +\infty),$	$H(f) = \mathbb{R},$
$f:\ y = \log x = \log_{10} x,$		$D(f) = (0, +\infty),$	$H(f) = \mathbb{R},$
$f:\ y = \ln x = \log_{\mathrm{e}} x,$	$\mathrm{e} = 2.71828182\ldots$	$D(f) = (0, +\infty),$	$H(f) = \mathbb{R}.$



Obr. 1.10: Grafy logaritmických funkcí

Vlastnosti:

i) graf logaritmické funkce je *logaritmická křivka*,

ii) logaritmická funkce je *prostá*,

iii) logaritmická funkce je *spojitá*, *diferencovatelná* a *hladká*,

iv) f je *rostoucí* pro $a > 1$ a *klesající* pro $0 < a < 1$,

v) f není omezená zdola ani shora, nemá minimum ani maximum.

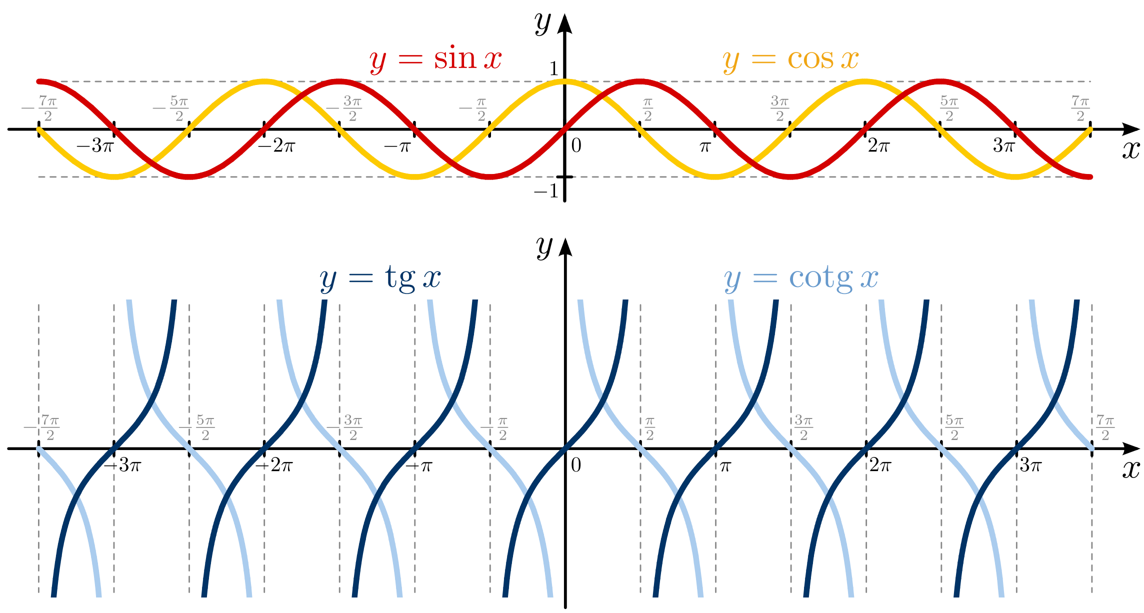
Vztahy:

$$a^{\log_a x} = x \quad \text{pro } x > 0, \qquad \log_a a^x = x \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$$

Odkazy: Polák [8].

Goniometrické funkce

$$\begin{array}{lll}
f:\ y=\sin x, & D(f)=\mathbb{R}, & H(f)=\langle -1,1\rangle,\\
f:\ y=\cos x, & D(f)=\mathbb{R}, & H(f)=\langle -1,1\rangle,\\
f:\ y=\operatorname{tg} x=\dfrac{\sin x}{\cos x}, & D(f)=\mathbb{R}\setminus\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}, & H(f)=\mathbb{R},\\
f:\ y=\operatorname{cotg} x=\dfrac{\cos x}{\sin x}, & D(f)=\mathbb{R}\setminus\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}, & H(f)=\mathbb{R}.
\end{array}$$



Obr. 1.11: Grafy goniometrických funkcí

Vlastnosti:

i) funkce sinus, tangens a kotangens jsou *liché* funkce, kosinus je funkce *sudá*,

ii) funkce sinus a kosinus jsou *omezené* 2π–*periodické* funkce,
funkce tangens a kotangens jsou *neomezené* π–*periodické* funkce,

iii) všechny goniometrické funkce jsou *spojité* na $D(f)$.

Vztahy pro $x, y \in \mathbb{R}$:

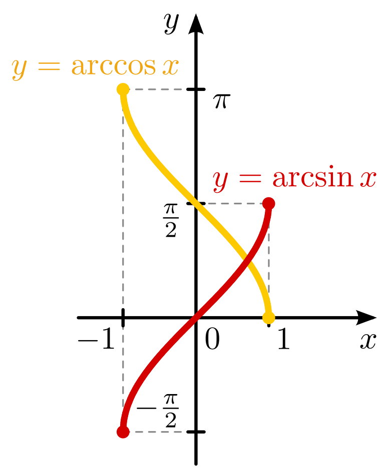
$$\begin{array}{rcl}
\sin(2x) & = & 2\sin x\cos x,\\
\cos(2x) & = & \cos^2 x-\sin^2 x,\\
\sin(x\pm y) & = & \sin x\cos y\pm\cos x\sin y,\\
\cos(x\pm y) & = & \cos x\cos y\mp\sin x\sin y,
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
\sin x+\sin y & = & 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},\\
\sin x-\sin y & = & 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2},\\
\cos x+\cos y & = & 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},\\
\cos x-\cos y & = & -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.
\end{array}$$

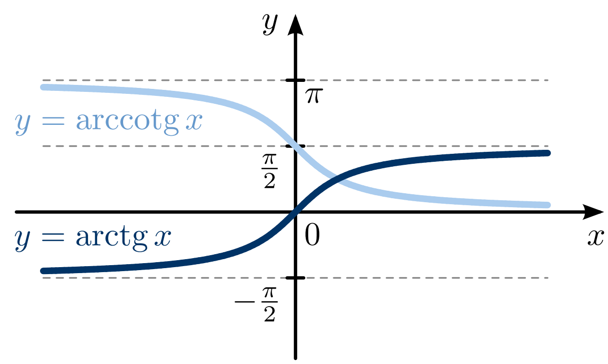
Odkazy: Polák [8].

Cyklometrické funkce

jsou funkce *inverzní* k částem goniometrických funkcí

$$
\begin{array}{lll}
f:\ y = \arcsin x, & D(f) = \langle -1, 1\rangle, & H(f) = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle, \\
f:\ y = \arccos x, & D(f) = \langle -1, 1\rangle, & H(f) = \langle 0, \pi\rangle, \\
f:\ y = \operatorname{arctg} x, & D(f) = \mathbb{R}, & H(f) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \\
f:\ y = \operatorname{arccotg} x, & D(f) = \mathbb{R}, & H(f) = (0, \pi)\,.
\end{array}
$$





Obr. 1.12: Grafy cyklometrických funkcí

Vlastnosti:

i) funkce arkussinus a arkustangens jsou *liché* funkce,

$$
\begin{array}{rclcrcll}
\arcsin(-x) & = & -\arcsin x & \text{a} & \arccos(-x) & = & \pi - \arccos x & \text{pro } x \in \langle -1, 1\rangle, \\
\operatorname{arctg}(-x) & = & -\operatorname{arctg} x & \text{a} & \operatorname{arccotg}(-x) & = & \pi - \operatorname{arccotg} x & \text{pro } x \in \mathbb{R},
\end{array}
$$

ii) všechny cyklometrické funkce jsou *spojité* na $D(f)$.

Vztahy:

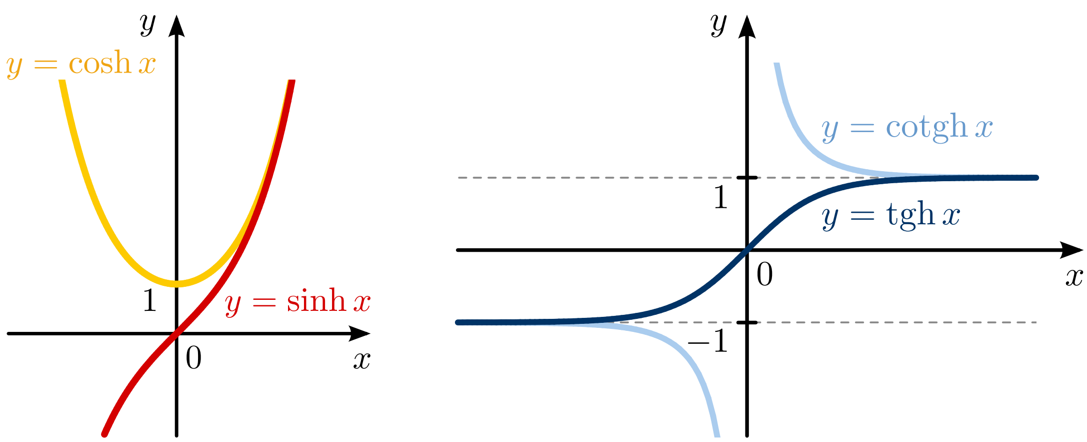
$$
\begin{array}{rcll@{\qquad}rcll}
\sin(\arcsin x) & = & x & \text{pro } x \in \langle -1, 1\rangle, & \cos(\arccos x) & = & x & \text{pro } x \in \langle -1, 1\rangle, \\
\arcsin(\sin x) & = & x & \text{pro } x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle, & \arccos(\cos x) & = & x & \text{pro } x \in \langle 0, \pi\rangle, \\
\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) & = & x & \text{pro } x \in \mathbb{R}, & \operatorname{cotg}(\operatorname{arccotg} x) & = & x & \text{pro } x \in \mathbb{R}, \\
\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) & = & x & \text{pro } x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), & \operatorname{arccotg}(\operatorname{cotg} x) & = & x & \text{pro } x \in (0, \pi),
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcll@{\qquad}rcll}
\arcsin x + \arccos x & = & \frac{\pi}{2} & \text{pro } x \in \langle -1, 1\rangle, & \operatorname{arctg} x & = & \operatorname{arccotg} \frac{1}{x} & \text{pro } x > 0, \\
\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x & = & \frac{\pi}{2} & \text{pro } x \in \mathbb{R}. & & & &
\end{array}
$$

Odkazy: Polák [8].

Hyperbolické funkce

$$
\begin{array}{llll}
f:\ y=\sinh x = \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}, & D(f)=\mathbb{R}, & H(f)=\mathbb{R}, \\
f:\ y=\cosh x = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}, & D(f)=\mathbb{R}, & H(f)=\langle 1,+\infty), \\
f:\ y=\operatorname{tgh} x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}, & D(f)=\mathbb{R}, & H(f)=(-1,1), \\
f:\ y=\operatorname{cotgh} x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x}, & D(f)=\mathbb{R}\setminus\{0\}, & H(f)=\mathbb{R}\setminus\langle -1,1\rangle.
\end{array}
$$



Obr. 1.13: Grafy hyperbolických funkcí

Vlastnosti:

i) funkce hyperbolický sinus, hyperbolický tangens a hyperbolický kotangens jsou *liché* funkce, hyperbolický kosinus je funkce *sudá*,

ii) všechny hyperbolické funkce jsou *spojité* na $D(f)$,

Vztahy pro $x, y \in \mathbb{R}$:

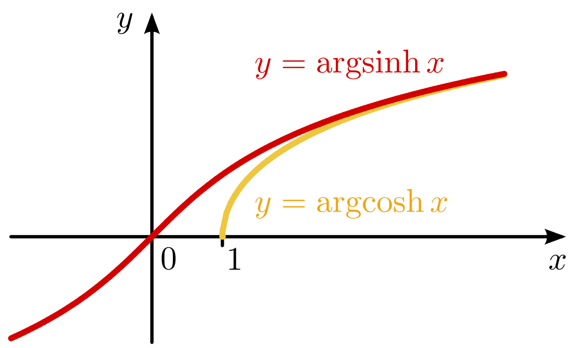
$$
\begin{aligned}
\sinh(2x) &= 2\sinh x\cosh x, & \sinh x+\sinh y &= 2\sinh\tfrac{x+y}{2}\cosh\tfrac{x-y}{2},\\
\cosh(2x) &= \cosh^2 x+\sinh^2 x, & \sinh x-\sinh y &= 2\cosh\tfrac{x+y}{2}\sinh\tfrac{x-y}{2},\\
\sinh(x\pm y) &= \sinh x\cosh y\pm\cosh x\sinh y, & \cosh x+\cosh y &= 2\cosh\tfrac{x+y}{2}\cosh\tfrac{x-y}{2},\\
\cosh(x\pm y) &= \cosh x\cosh y\pm\sinh x\sinh y, & \cosh x-\cosh y &= 2\sinh\tfrac{x+y}{2}\sinh\tfrac{x-y}{2}.
\end{aligned}
$$

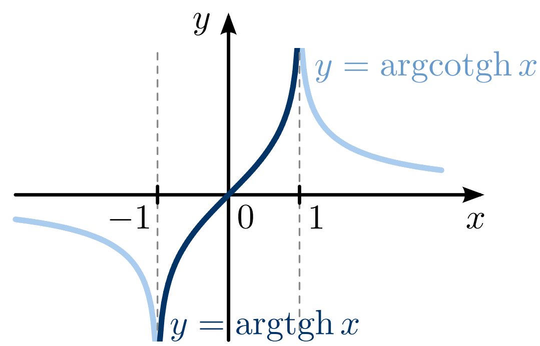
Odkazy: Polák [8].

Hyperbolometrické funkce

jsou funkce *inverzní* k částem hyperbolických funkcí

$$
\begin{array}{lll}
f:\ y = \operatorname{argsinh} x, & D(f) = \mathbb{R}, & H(f) = \mathbb{R}, \\
f:\ y = \operatorname{argcosh} x, & D(f) = \langle 1, +\infty), & H(f) = \langle 0, +\infty), \\
f:\ y = \operatorname{argtgh} x, & D(f) = (-1, 1), & H(f) = \mathbb{R}, \\
f:\ y = \operatorname{argcotgh} x, & D(f) = \mathbb{R} \setminus \langle -1, 1\rangle, & H(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.
\end{array}
$$





Obr. 1.14: Grafy hyperbolometrických funkcí

Vlastnosti:

i) funkce argument hyperbolického sinu, argument hyperbolického tangens a argument hyperbolického kotangens jsou *liché* funkce,

ii) všechny hyperbolometrické funkce jsou *spojité* na $D(f)$.

Vztahy:

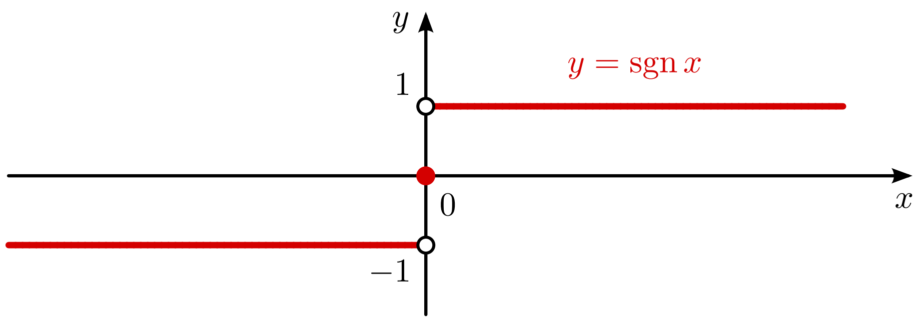
$$
\begin{array}{rll}
\sinh(\operatorname{argsinh} x) = x & \text{pro } x \in \mathbb{R}, & \cosh(\operatorname{argcosh} x) = x \quad \text{pro } x \geq 1, \\
\operatorname{argsinh}(\sinh x) = x & \text{pro } x \in \mathbb{R}, & \operatorname{argcosh}(\cosh x) = x \quad \text{pro } x \geq 0, \\
\operatorname{tgh}(\operatorname{argtgh} x) = x & \text{pro } x \in (-1, 1), & \operatorname{cotgh}(\operatorname{argcotgh} x) = x \quad \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \langle -1, 1\rangle, \\
\operatorname{argtgh}(\operatorname{tgh} x) = x & \text{pro } x \in \mathbb{R}, & \operatorname{argcotgh}(\operatorname{cotgh} x) = x \quad \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcll}
\operatorname{argsinh} x &=& \ln(x + \sqrt{x^2+1}) & \text{pro } x \in \mathbb{R}, \\
\operatorname{argcosh} x &=& \ln(x + \sqrt{x^2-1}) & \text{pro } x \geq 1, \\
\operatorname{argtgh} x &=& \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} & \text{pro } x \in (-1, 1), \\
\operatorname{argcotgh} x &=& \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \langle -1, 1\rangle, \\
\operatorname{argtgh} x &=& \operatorname{argcotgh} \frac{1}{x} & \text{pro } x \in (-1, 0) \cup (0, 1).
\end{array}
$$

Odkazy: Spanier [7].

Funkce signum (znaménková funkce)

$$f: y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{pro } x < 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ 1 & \text{pro } x > 0, \end{cases} \qquad D(f) = \mathbb{R}, \qquad H(f) = \{-1, 0, 1\}.$$



Obr. 1.15: Graf znaménkové funkce

Vlastnosti:

i) funkce signum je *lichá* funkce,

ii) funkce signum je *neklesající* funkce,

iii) funkce signum je *spojitá* v každém bodě $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

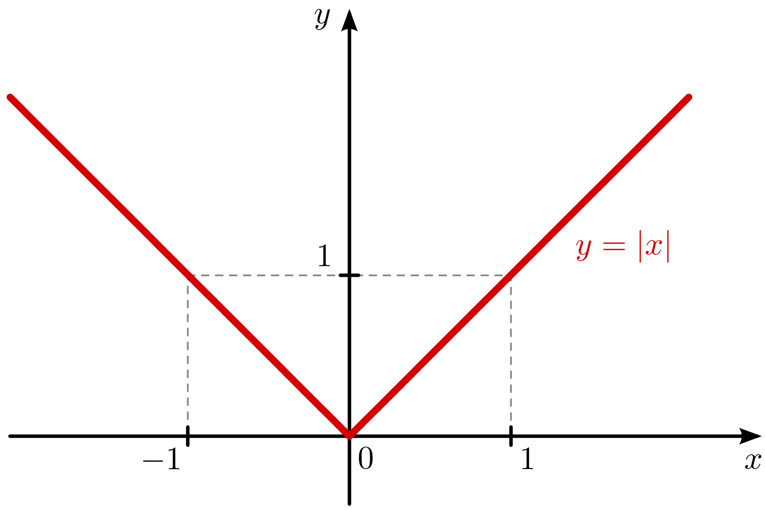
iv) funkce signum není spojitá v bodě $x = 0$, v tomto bodě má *bod nespojitosti 1. druhu* se skokem 2

$$\begin{aligned} f(0-) &= \lim_{x \to 0^-} \operatorname{sgn} x = -1, \\ f(0+) &= \lim_{x \to 0^+} \operatorname{sgn} x = 1. \end{aligned}$$

Odkazy: Polák [8].

Funkce absolutní hodnota

$$f: y = |x| = \begin{cases} -x & \text{pro } x < 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ x & \text{pro } x > 0, \end{cases} \qquad D(f) = \mathbb{R}, \qquad H(f) = \langle 0, +\infty).$$



Obr. 1.16: Graf funkce absolutní hodnota

Vlastnosti:

i) funkce absolutní hodnota je *sudá* funkce,

ii) funkce absolutní hodnota je *konvexní* funkce,

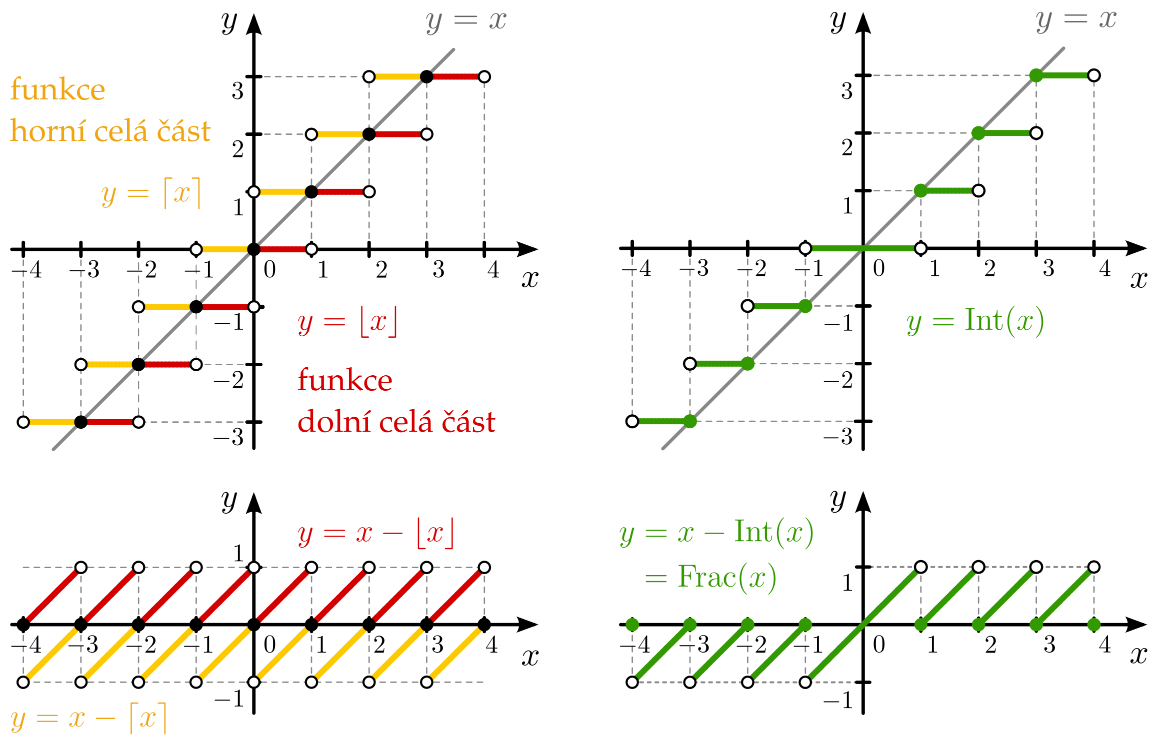
iii) funkce absolutní hodnota je *spojitá* na $D(f)$,

iv) funkce absolutní hodnota nemá derivaci v bodě $x = 0$ (není diferencovatelná v bodě $x = 0$), jelikož má v tomto bodě různé jednostranné derivace

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{h \to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1, \\ f'_+(0) &= \lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1. \end{aligned}$$

Funkce horní a dolní celá část

$$f: y = \mathrm{Int}(x) = \begin{cases} \lceil x \rceil = \min\{k \in \mathbb{Z},\ k \geq x\} & \text{pro } x < 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ \lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z},\ k \leq x\} & \text{pro } x > 0, \end{cases} \qquad D(f) = \mathbb{R}, \qquad H(f) = \mathbb{Z}.$$



Obr. 1.17: Grafy funkcí horní a dolní celá část, funkce Int a jejich zbytků

Vlastnosti a poznámky:

i) funkce horní a dolní celá část a funkce Int jsou funkce *neklesající*,

ii) funkce Int a Frac : $y = x - \mathrm{Int}(x)$ jsou funkce *liché*,

iii) funkce dolní celá část $y = \lfloor x \rfloor$ bývá často uváděna jako celá část a značena $y = [x]$.

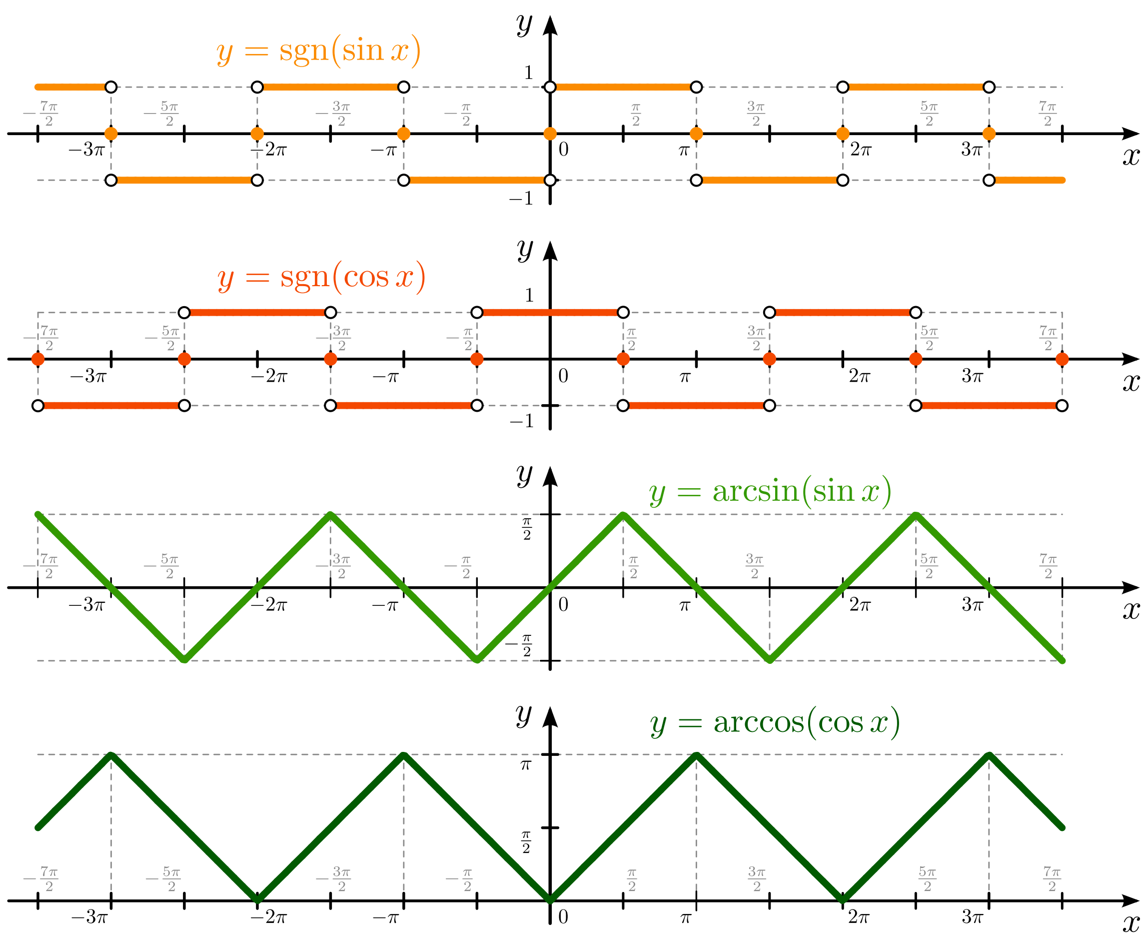
Vztahy:

$$\forall x \in \mathbb{Z}: \quad \lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor = \mathrm{Int}(x) = x,$$
$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad \mathrm{Int}(x) + \mathrm{Frac}(x) = x.$$

Odkazy: Polák [8], Spanier [7], Knuth [5].

Některé periodické funkce

$$
\begin{array}{llll}
f_1: & y = \operatorname{sgn}(\sin x), & D(f_1) = \mathbb{R}, & H(f_1) = \{-1, 0, 1\}, \\
f_2: & y = \operatorname{sgn}(\cos x), & D(f_2) = \mathbb{R}, & H(f_2) = \{-1, 0, 1\}, \\
f_3: & y = \arcsin(\sin x), & D(f_3) = \mathbb{R}, & H(f_3) = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle, \\
f_4: & y = \arccos(\cos x), & D(f_4) = \mathbb{R}, & H(f_4) = \langle 0, \pi \rangle.
\end{array}
$$



Obr. 1.18: Grafy periodických funkcí f_1, f_2, f_3 a f_4

Vlastnosti:

i) funkce f_1, f_2, f_3 a f_4 jsou *omezené* 2π*-periodické* funkce,

ii) funkce f_1 a f_2 jsou *po částech spojité* a *po částech hladké* funkce,

iii) funkce f_3 a f_4 jsou *spojité* a *po částech hladké* funkce.

Kapitola 2

Užitečné integrální funkce v $\mathbb{R}$

Funkce gama

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\, \mathrm{d}t, \qquad D(\Gamma) = (0, +\infty).$$

Vlastnosti:

i) $\forall x \in D(\Gamma): \ \Gamma(x) > 0$,

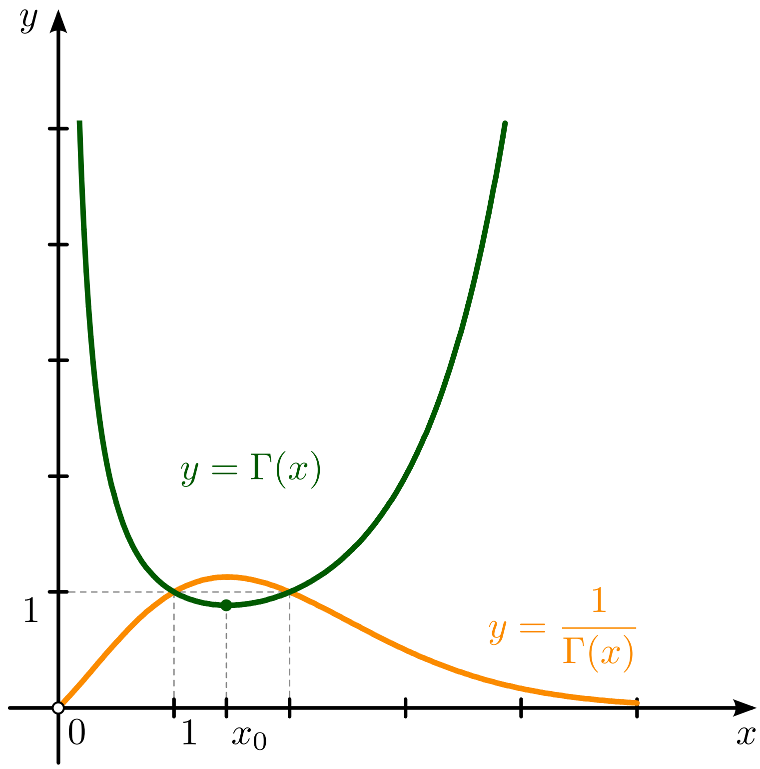
ii) funkce Γ je *omezená zdola*, není omezená shora,

iii) funkce Γ je *spojitá* a *diferencovatelná*,

iv) funkce Γ je *ryze konvexní*,

v)
$$\lim_{x \to 0^+} \Gamma(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} \Gamma(x) = +\infty,$$

vi) funkce Γ má právě jedno *ostré lokální minimum* v bodě $x_0 \in (1, 2)$,
$$x_0 \doteq 1{,}46163.$$



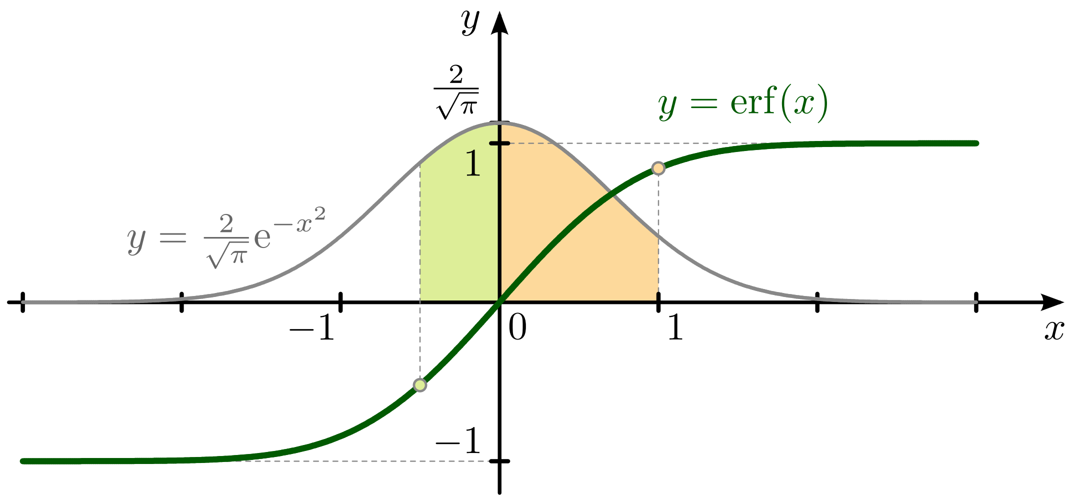
Obr. 2.1: Graf funkce gama

Vztahy:

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= x\,\Gamma(x), \\
\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi} \qquad \Longrightarrow \ \Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\tfrac{5}{2}\right) = \tfrac{3}{4}\sqrt{\pi}, \quad \ldots \\
\Gamma(1) &= 1 \qquad \Longrightarrow \ \Gamma(2) = 1, \quad \Gamma(3) = 2 \cdot 1, \quad \Gamma(4) = 3 \cdot 2 \cdot 1, \quad \ldots \\
\Gamma(n) &= (n-1)! \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}, \\
\Gamma(x)\Gamma(1-x) &= \frac{\pi}{\sin \pi x} \quad \text{pro } 0 < x < 1, \\
\Gamma(x)\Gamma\left(x + \tfrac{1}{2}\right) &= 2^{1-2x} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \Gamma(2x), \\
\frac{\mathrm{d}^{(n)}\Gamma(x)}{\mathrm{d}x^{(n)}} &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\, \ln^n t\, \mathrm{d}t \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Funkce chyb (chybová funkce)

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t, \qquad D(\operatorname{erf}) = \mathbb{R}.$$



Obr. 2.2: Graf chybové funkce

Vlastnosti:

i) erf je *lichá* funkce,

ii) erf je *omezená*, *spojitá* a *diferencovatelná* funkce,

$$\frac{\mathrm{d}\operatorname{erf}(x)}{\mathrm{d}\,x} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{erf}(x) = \pm 1.$$

Vztahy:

$$\int_0^x \operatorname{erf}(t)\,\mathrm{d}t = x\operatorname{erf}(x) - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \mathrm{e}^{-x^2}\right),$$

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \cdots\right) = \frac{x}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!\,\left(n+\frac{1}{2}\right)}.$$

Exponenciální integrální funkce

$$\mathrm{Ei}(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t & \text{pro } x < 0, \\ \text{v.p.} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t & \text{pro } x > 0, \end{cases} \qquad D(\mathrm{Ei}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad H(\mathrm{Ei}) = \mathbb{R}.$$

Vlastnosti:

i) Ei je *spojitá* na $D(\mathrm{Ei})$,

ii) $x = 0$ je *bod nespojitosti 2. druhu*,

$$\lim_{x\to 0} \mathrm{Ei}(x) = -\infty,$$

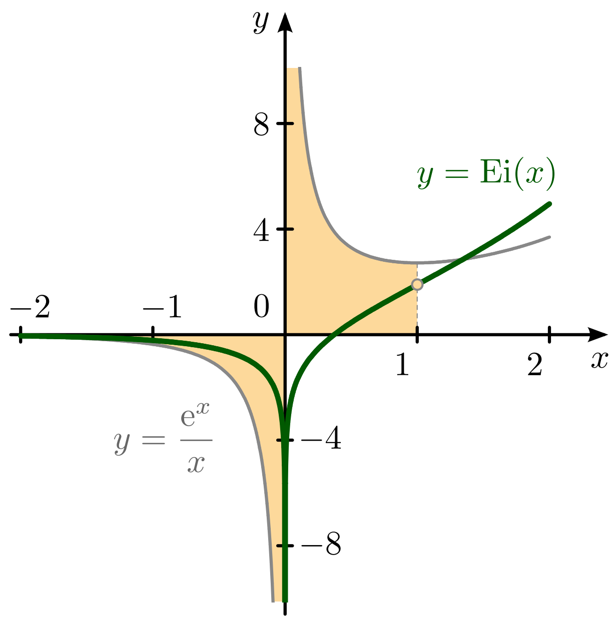
iii) Ei není omezená zdola ani shora,

$$\lim_{x\to -\infty} \mathrm{Ei}(x) = 0,$$
$$\lim_{x\to +\infty} \mathrm{Ei}(x) = +\infty,$$

iv) Ei je *diferencovatelná* na $D(\mathrm{Ei})$,

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Ei}(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{e^x}{x},$$

v) Ei je *klesající* na $(-\infty, 0)$ a je *rostoucí* na $(0, +\infty)$,



Obr. 2.3: Graf exponenciální integrální funkce

vi) Ei je *ryze konkávní* na $(-\infty, 0)$ a na $(0, 1)$, je *ryze konvexní* na $(1, +\infty)$,

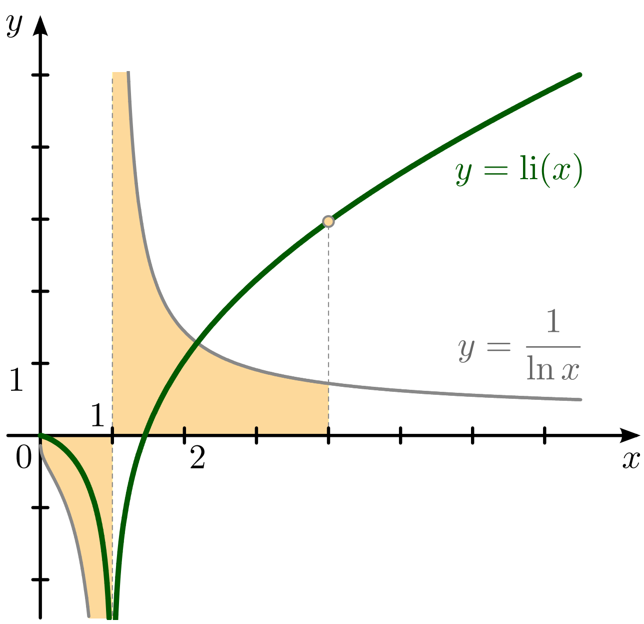
vii) Ei má právě jeden *nulový bod* $x_0 \doteq 0,3725074107814$, $\mathrm{Ei}(x_0) = 0$.

Vztahy:

$$\mathrm{Ei}(x) = \mathrm{li}(\mathrm{e}^x),$$
$$\int_0^x \mathrm{Ei}(at)\,\mathrm{d}t = x\,\mathrm{Ei}(ax) - \frac{\mathrm{e}^{ax} - 1}{a},$$
$$\mathrm{Ei}(x) = x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{18} - \frac{x^4}{96} + \cdots = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!\,n}.$$

Funkce integrální logaritmus (integrállogaritmus)

$$\operatorname{li}(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t & \text{pro } 0 < x < 1, \\ \text{v.p.} \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t & \text{pro } x > 1, \end{cases} \qquad D(\operatorname{li}) = (0,1) \cup (1,+\infty), \qquad H(\operatorname{li}) = \mathbb{R}.$$



Obr. 2.4: Graf integrállogaritmu

Vlastnosti:

i) li je *spojitá* na $D(\operatorname{li})$,

ii) $x = 1$ je *bod nespojitosti 2. druhu*,

$$\lim_{x\to 1} \operatorname{li}(x) = -\infty,$$

iii) li není omezená zdola ani shora,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} \operatorname{li}(x) &= 0, \\ \lim_{x\to +\infty} \operatorname{li}(x) &= +\infty, \end{aligned}$$

iv) li je *diferencovatelná* na $D(\operatorname{li})$,

$$\frac{\mathrm{d}\operatorname{li}(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\ln x},$$

v) li je *klesající* na $(0,1)$
a je *rostoucí* na $(1,+\infty)$,

vi) li je *ryze konkávní* na $(0,1)$ a na $(1,+\infty)$,

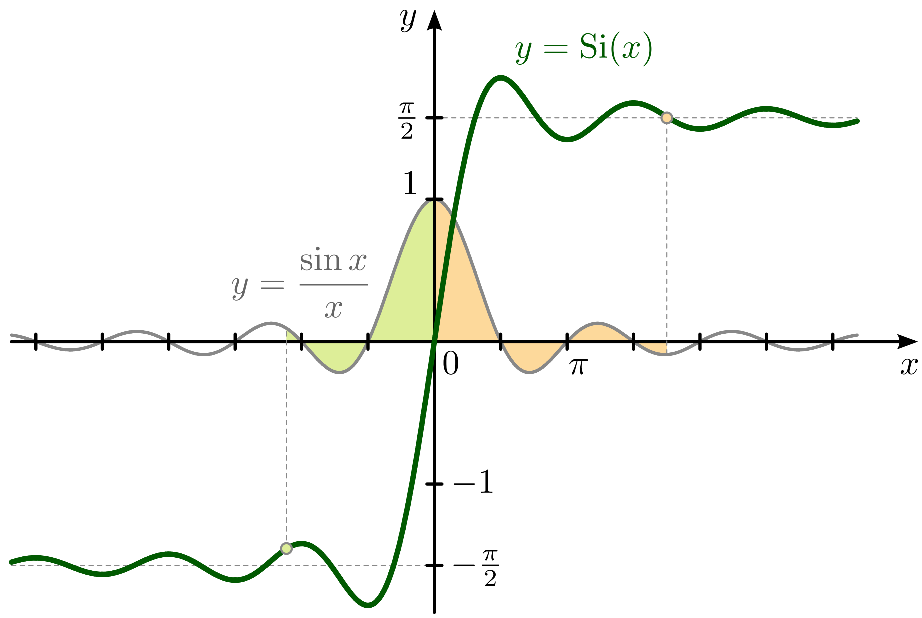
vii) li má právě jeden *nulový bod* $x_0 \doteq 1,4513692348838$, $\operatorname{li}(x_0) = 0$.

Vztahy:

$$\begin{aligned} \operatorname{li}(x) &= \operatorname{Ei}(\ln(x)), \\ \int_0^x \operatorname{li}(at)\,\mathrm{d}t &= x\operatorname{li}(ax) - \frac{1}{a}\operatorname{li}(a^2x^2) \quad \text{pro } a > 0, \\ \int_0^1 t^p \operatorname{li}(t)\,\mathrm{d}t &= -\frac{\ln(2+p)}{1+p} \quad \text{pro } p > -2, \\ \int_1^{+\infty} t^p \operatorname{li}(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{\ln(-2-p)}{1+p} \quad \text{pro } p < -2. \end{aligned}$$

Funkce integrální sinus (integrálsinus)

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t, \qquad D(\mathrm{Si}) = \mathbb{R}.$$



Obr. 2.5: Graf integrálsinu

Vlastnosti:

i) Si je *lichá* funkce,

ii) Si je *omezená*, *spojitá* a *diferencovatelná* funkce,

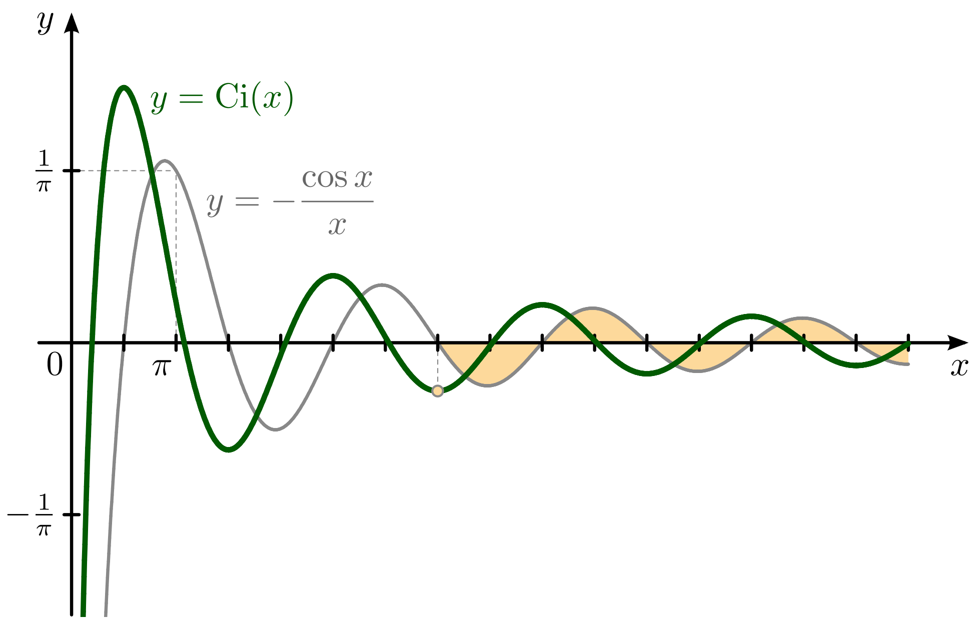
$$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Si}(x)}{\mathrm{d}\,x} = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{pro } x \neq 0, \\ 1 & \text{pro } x = 0, \end{cases} \qquad \lim_{x \to \pm\infty} \mathrm{Si}(x) = \pm\frac{\pi}{2}.$$

Vztahy:

$$\begin{aligned} \int_0^x \mathrm{Si}(t)\,\mathrm{d}t &= x\ \mathrm{Si}(x) - 1 + \cos(x), \\ \mathrm{Si}(x) &= x - \frac{1}{3}\frac{x^3}{3!} + \frac{1}{5}\frac{x^5}{5!} - \frac{1}{7}\frac{x^7}{7!} + \cdots = x\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x^2)^n}{(2n+1)!(2n+1)}, \\ \mathrm{Si}(x) &\approx \begin{cases} x & \text{pro malá } x, \\ \dfrac{\pi}{2} - \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^3}\right)\cos x - \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{6}{x^4}\right)\sin x & \text{pro velká kladná } x. \end{cases} \end{aligned}$$

Funkce integrální kosinus (integrálkosinus)

$$\mathrm{Ci}(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t, \qquad D(\mathrm{Ci}) = (0, +\infty).$$



Obr. 2.6: Graf integrálkosinu

Vlastnosti:

Ci je *shora omezená*, *spojitá* a *diferencovatelná* funkce,

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Ci}(x)}{\mathrm{d}\,x} = \frac{\cos x}{x}, \qquad \lim_{x\to 0^+} \mathrm{Ci}(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} \mathrm{Ci}(x) = 0.$$

Vztahy:

$$\begin{aligned}
\int_0^x \mathrm{Ci}(t)\,\mathrm{d}t &= x\ \mathrm{Ci}(x) - \sin(x), \\
\mathrm{Ci}(x) &= \gamma + \ln x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2!} + \frac{1}{4}\frac{x^4}{4!} - \frac{1}{6}\frac{x^6}{6!} + \cdots = \gamma + \ln x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-x^2)^n}{(2n)!\,2n}, \\
\mathrm{Ci}(x) &\approx \begin{cases} \gamma + \ln x & \text{pro malá kladná } x, \\ \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^3}\right)\sin x - \left(\frac{1}{x^2} - \frac{6}{x^4}\right)\cos x & \text{pro velká kladná } x, \end{cases}
\end{aligned}$$

kde γ je **Eulerova–Mascheroniho** konstanta:

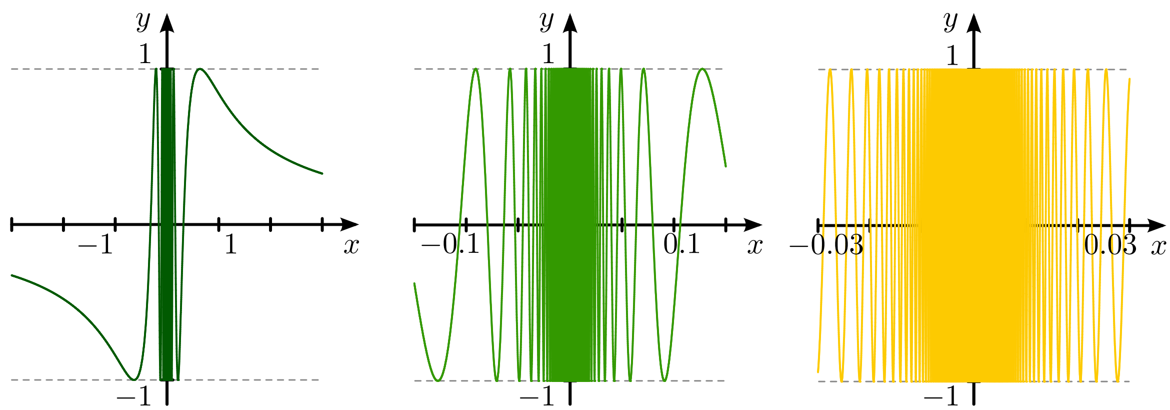
$$\gamma = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right) = 0,577215664901533\ldots$$

Kapitola 3

Pozoruhodné funkce v $\mathbb{R}$

Omezená funkce s bodem nespojitosti 2. druhu

$$f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x} & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \end{cases} \qquad D(f) = \mathbb{R}, \qquad H(f) = \langle -1, 1 \rangle.$$



Obr. 3.1: Grafy funkce f

Vlastnosti:

i) funkce f je *omezená*,

ii) funkce f je *lichá*,

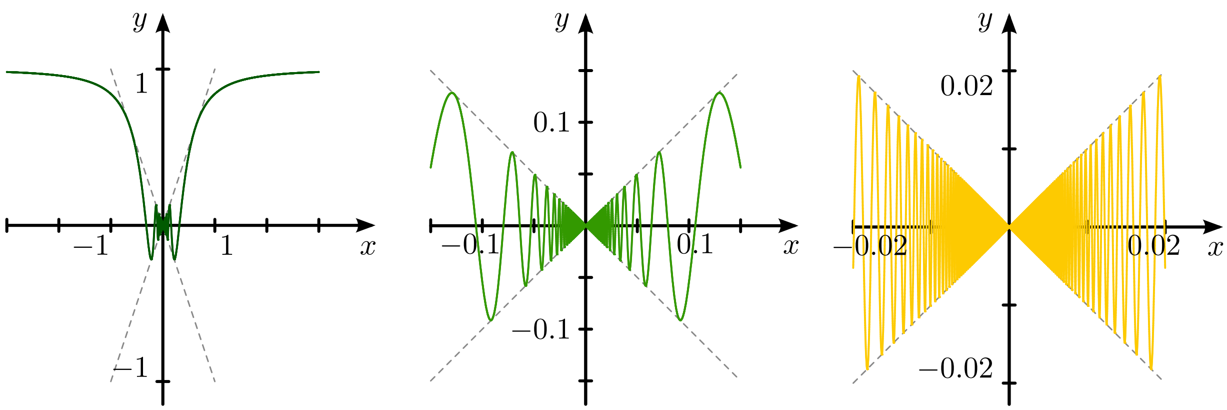
iii) funkce f je *spojitá* na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$,

iv) funkce f není spojitá v bodě $x = 0$, v tomto bodě má *bod nespojitosti 2. druhu*, jelikož obě jednostranné limity neexistují,

$$a_n = \frac{1}{2n\pi}, \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{n\to+\infty} f(a_n) = 0,$$
$$b_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}, \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{n\to+\infty} f(b_n) = 1.$$

Spojitá funkce bez derivace v počátku

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \end{cases} \qquad D(f) = \mathbb{R}.$$



Obr. 3.2: Grafy funkce f

Vlastnosti:

i) funkce f je *omezená*,

ii) funkce f je *sudá*,

iii) funkce f je *spojitá* na $D(f) = \mathbb{R}$,

iv) funkce f je *diferencovatelná* na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$,

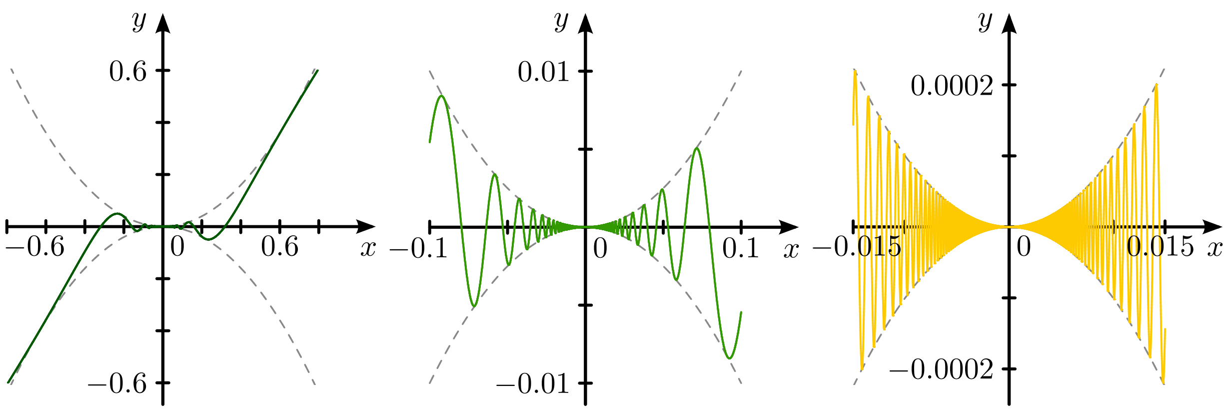
$$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \; f'(x) = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x},$$

v) funkce f nemá derivaci v bodě $x = 0$,

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \sin \frac{1}{h} \quad \text{neexistuje}.$$

Diferencovatelná funkce, která není hladká

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \end{cases} \qquad D(f) = \mathbb{R}, \qquad H(f) = \mathbb{R}.$$



Obr. 3.3: Grafy funkce f

Vlastnosti:

i) funkce f není omezená zdola ani shora,

ii) funkce f je *lichá*,

iii) funkce f je *spojitá* na $D(f) = \mathbb{R}$,

iv) funkce f je *diferencovatelná* na $D(f) = \mathbb{R}$,

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \; f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, \qquad f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} h \sin \frac{1}{h} = 0,$$

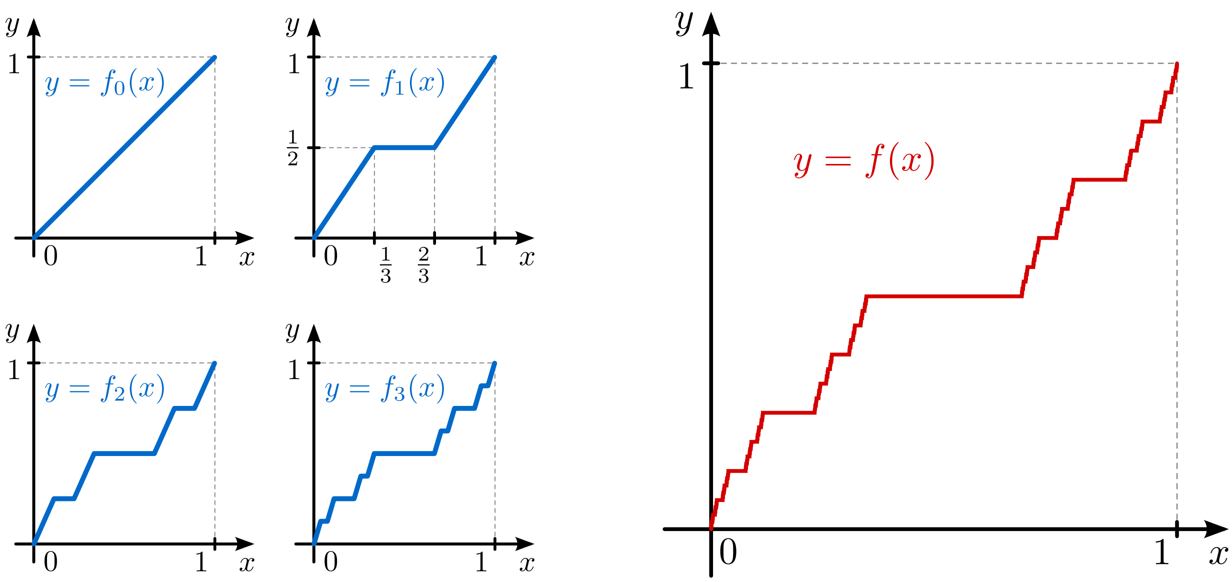
v) derivace f' není spojitá v bodě $x = 0$, jelikož limita $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ neexistuje.

vi) funkce f není hladká na $D(f)$.

Cantorovy ďábelské schody

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x), \qquad D(f) = \langle 0,1\rangle, \quad H(f) = \langle 0,1\rangle,$$

$$f_0(x) = x, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}:\; f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} f_{n-1}(3x) & \text{pro } x \in \left[0, \frac{1}{3}\right), \\ \frac{1}{2} & \text{pro } x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f_{n-1}(3x-2) & \text{pro } x \in \left(\frac{2}{3}, 1\right]. \end{cases}$$



Obr. 3.4: Grafy funkcí f_0, f_1, f_2, f_3 a graf limitní funkce f.

Vlastnosti:

i) funkce f je *spojitá* i *stejnoměrně spojitá*,

ii) funkce f není absolutně spojitá na $\langle 0,1\rangle$,

iii) funkce f má *omezenou variaci*,

iv) funkce f je Lebesgueovsky i Riemannovsky integrovatelná,

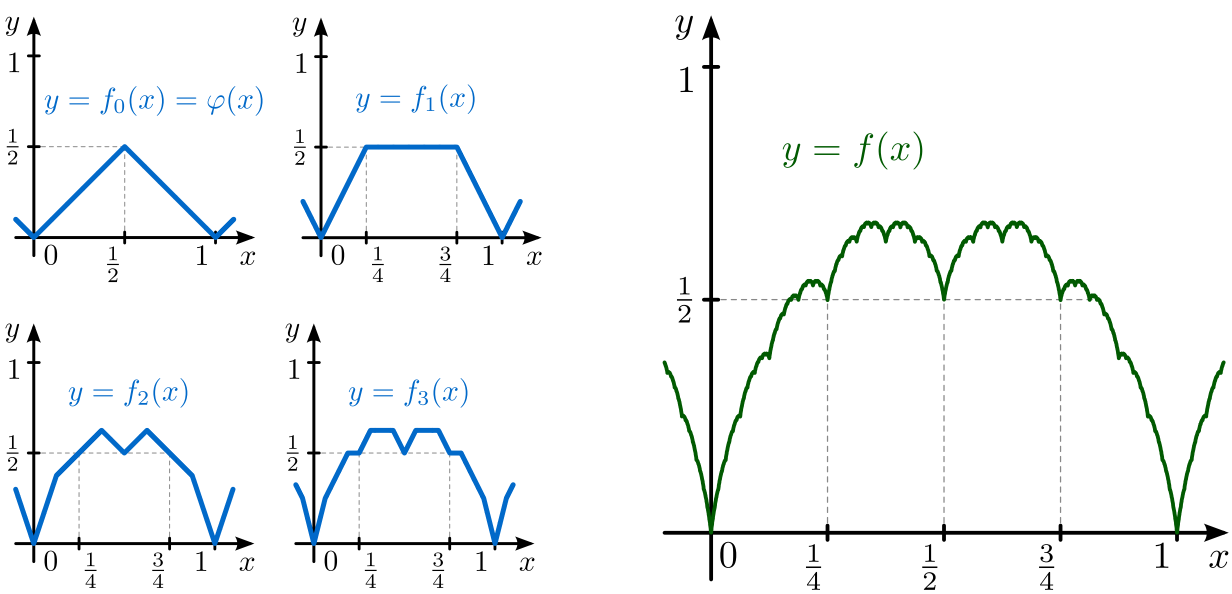
v) derivace f' je skoro všude nulová,

$$0 = \int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x \neq f(1) - f(0) = 1.$$

Takagiho spojitá a nikde diferencovatelná funkce

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x), \qquad D(f) = \mathbb{R}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0 : \; f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\varphi\left(2^k x\right),$$

$$\varphi(x) = \operatorname{dist}(x, \mathbb{Z}) = \min_{m\in\mathbb{Z}} |x - m|\,.$$



Obr. 3.5: Grafy funkcí f_0, f_1, f_2, f_3 a graf limitní funkce f.

Vlastnosti:

i) $H(f) \subset \langle 0, 1\rangle$,

ii) funkce f je *sudá*,

iii) funkce f je *periodická* se základní periodou 1,

iv) funkce f je *spojitá*,

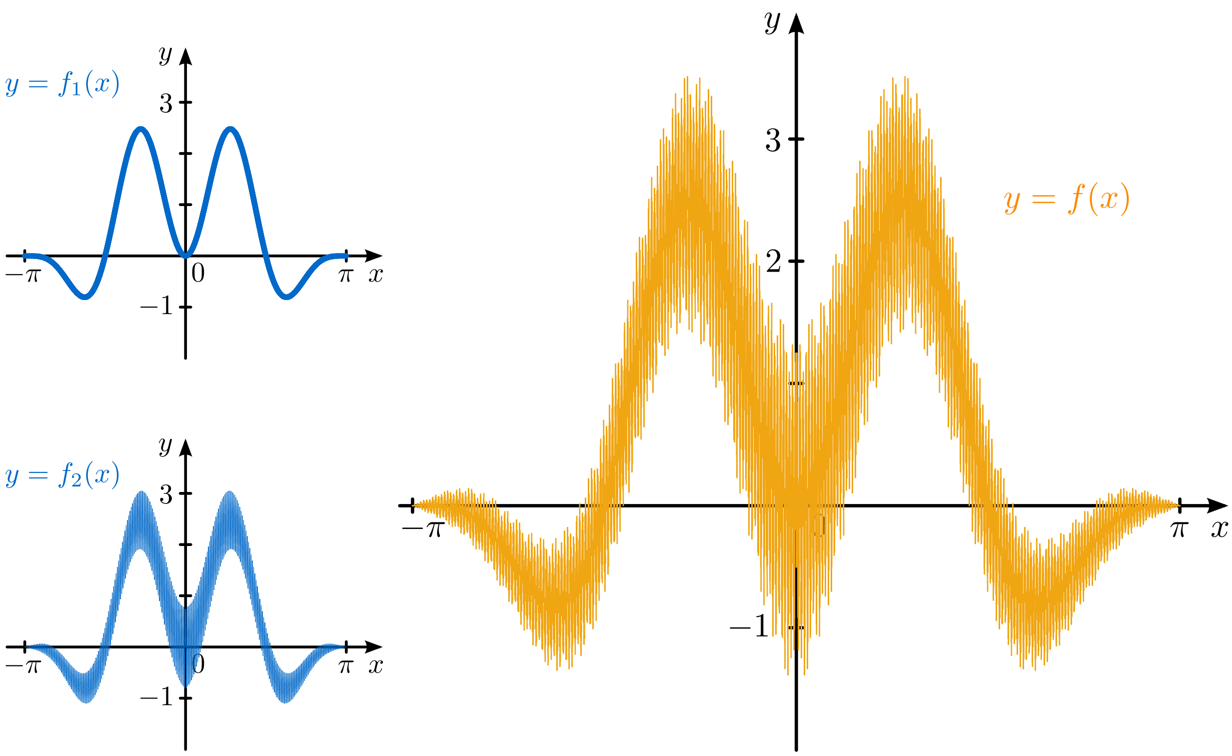
v) funkce f není diferencovatelná pro žádné $x \in \mathbb{R}$,

vi) funkce f nemá jednostranné derivace pro žádné $x \in \mathbb{R}$,

vii) funkce f je *α-hölderovsky spojitá* pro $\alpha \in (0, 1)$.

Féjerova spojitá funkce s divergentní Fourierovou řadou

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x), \qquad D(f) = \mathbb{R}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}: \; f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2 \sin\left(2^{k^3} x\right)}{k^2} \sum_{l=1}^{2^{k^3}} \frac{\sin lx}{l}.$$



Obr. 3.6: Grafy funkcí f_1, f_2 a graf limitní funkce f.

Vlastnosti:

i) funkce f je *sudá*,

ii) funkce f je *periodická* se základní periodou 2π,

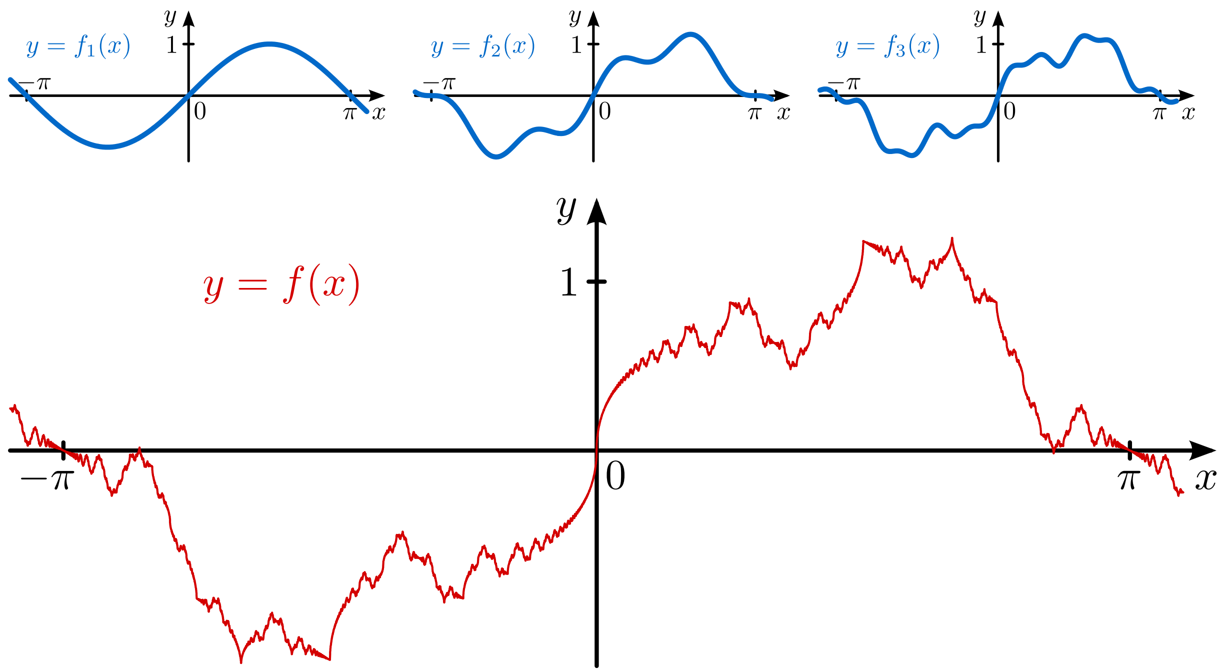
iii) funkce f je *spojitá*,

iv) Fourierova řada funkce f je *divergentní* v bodě 0.

Odkazy: Jarník [4].

Riemannova funkce

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x), \qquad D(f) = \mathbb{R}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}: \; f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k^2 x)}{k^2}.$$



Obr. 3.7: Grafy funkcí f_1, f_2, f_3 a graf limitní funkce f.

Vlastnosti:

i) funkce f je *lichá*,

ii) funkce f je *periodická* se základní periodou 2π,

iii) funkce f je *spojitá*,

iv) funkce f není nikde diferencovatelnou funkcí,

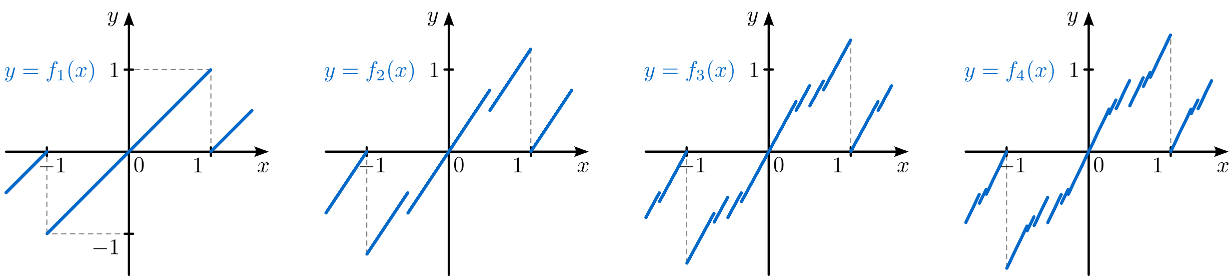
v) funkce f má *konečné derivace* pouze v bodech

$$x_0 = \pi \frac{2p+1}{2q+1}, \qquad p, q \in \mathbb{Z},$$

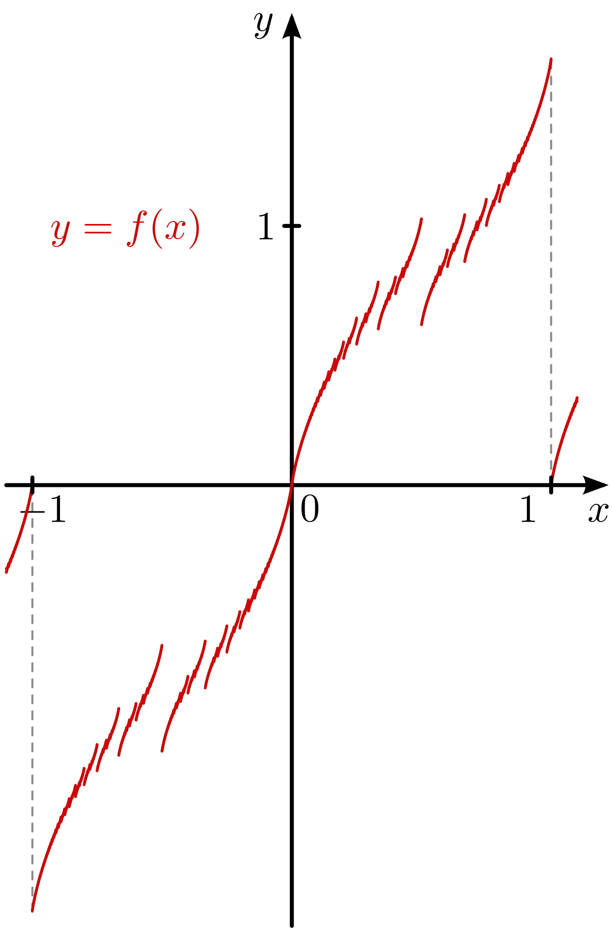
a navíc $f'(x_0) = -\dfrac{1}{2}$.

Riemannovsky integrovatelná funkce

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x), \qquad D(f) = \mathbb{R}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}: \; f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{kx - [kx]}{k^2}.$$



Obr. 3.8: Grafy funkcí f_1, f_2, f_3 a f_4



Obr. 3.9: Graf limitní funkce f

Vlastnosti:

i) funkce f je *lichá*,

ii) funkce f je *periodická* se základní periodou 2,

iii) funkce f je *omezená*,

iv) funkce f není spojitá na $\mathbb{R}$,

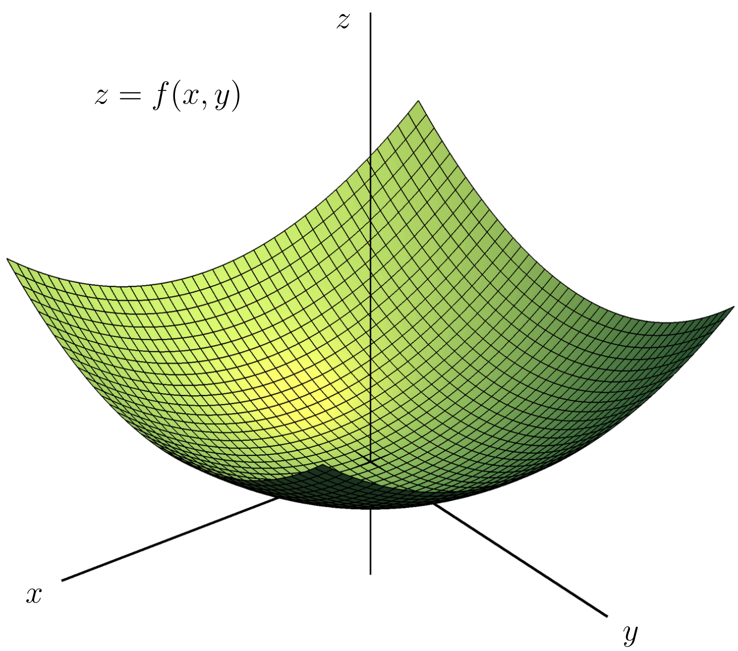
v) funkce f má *nekonečně mnoho bodů nespojitosti* mezi dvěma libovolnými body,

vi) funkce f je *Riemannovsky integrovatelná*.

Kapitola 4

Základní soubor funkcí v $\mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = x^2 + y^2, \qquad D(f) = \mathbb{R}^2, \qquad H(f) = \langle 0, +\infty).$$



Obr. 4.1: Graf funkce f

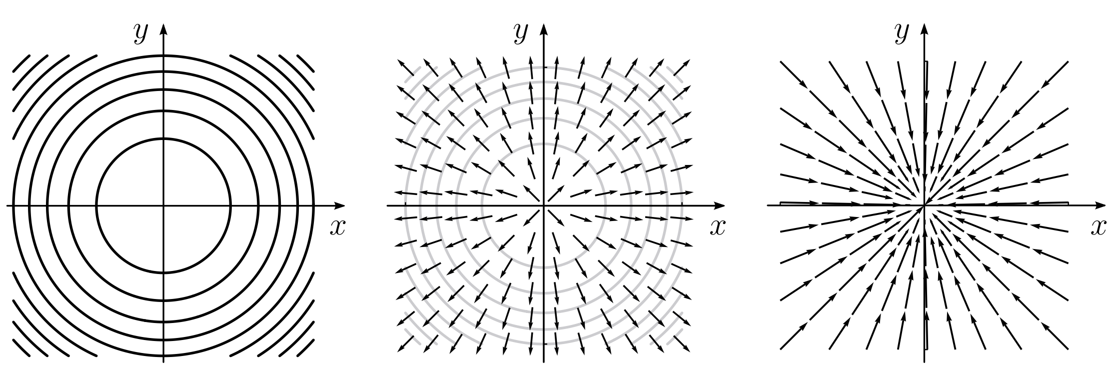
Vlastnosti:

i) f je *omezená zdola*, není omezená shora,

ii) f je *spojitá* a *diferencovatelná*,

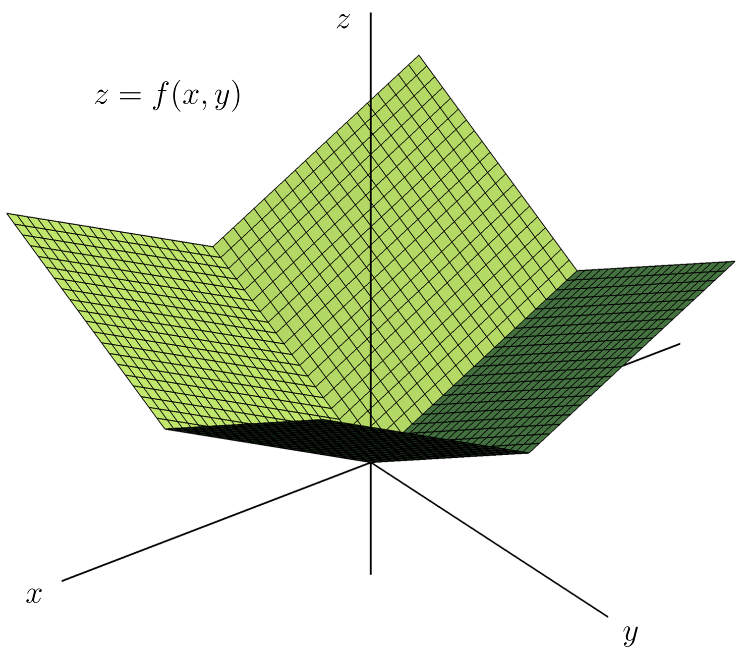
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \qquad \operatorname{grad} f(x,y) = (2x, 2y),$$

iii) f má právě jedno *ostré minimum* v bodě $(x,y) = (0,0)$, nemá maximum.



Obr. 4.2: Vrstevnice grafu funkce f, normované gradienty funkce f a spádnice

$$f(x,y) = |x| + |y|, \qquad D(f) = \mathbb{R}^2, \qquad H(f) = \langle 0, +\infty).$$



Obr. 4.3: Graf funkce f

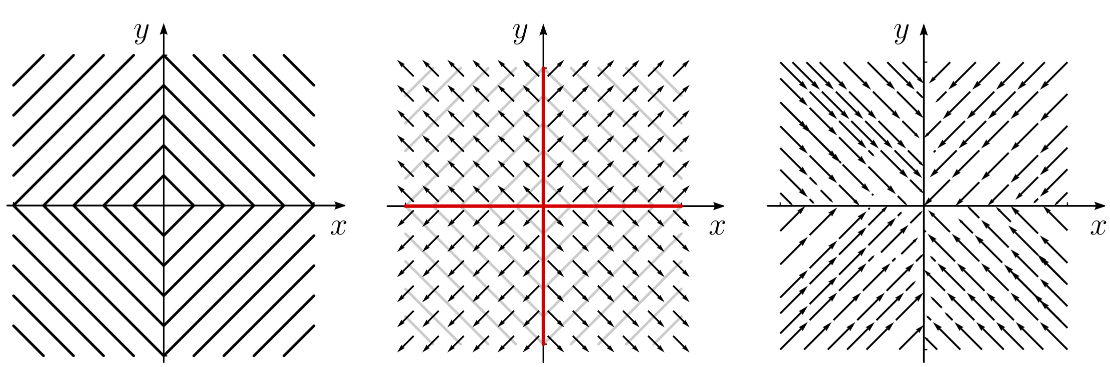
Vlastnosti:

i) f je *omezená zdola*, není omezená shora,

ii) f je *spojitá* na $D(f) = \mathbb{R}^2$ a *diferencovatelná* na $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ xy \neq 0\}$,

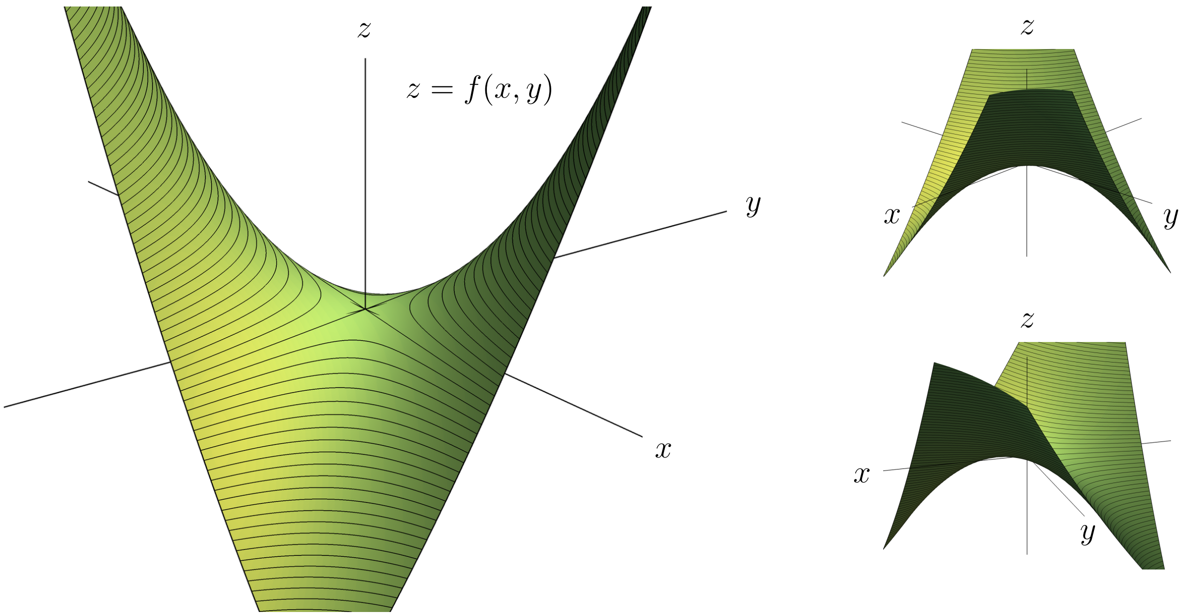
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} 1 & \text{pro } x > 0, \\ -1 & \text{pro } x < 0, \end{cases} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} 1 & \text{pro } y > 0, \\ -1 & \text{pro } y < 0, \end{cases} \qquad \operatorname{grad} f(x,y) = (\operatorname{sgn} x, \operatorname{sgn} y) \quad \text{pro } xy \neq 0,$$

iii) f má právě jedno *ostré minimum* v bodě $(x,y) = (0,0)$, nemá maximum.



Obr. 4.4: Vrstevnice grafu funkce f, normované gradienty funkce f a spádnice

$$f(x,y)=x^2+6xy+y^2, \qquad D(f)=\mathbb{R}^2, \qquad H(f)=\mathbb{R}.$$



Obr. 4.5: Grafy funkce f

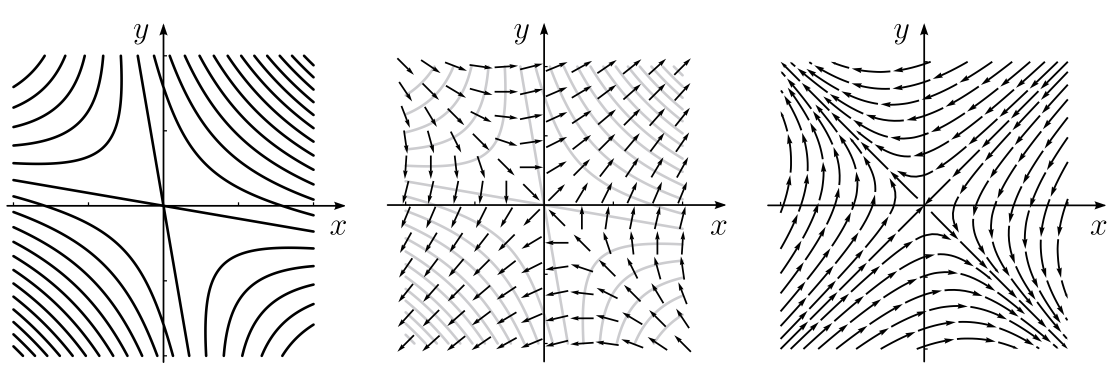
Vlastnosti:

i) f není omezená zdola ani shora,

ii) f je *spojitá* a *diferencovatelná*,

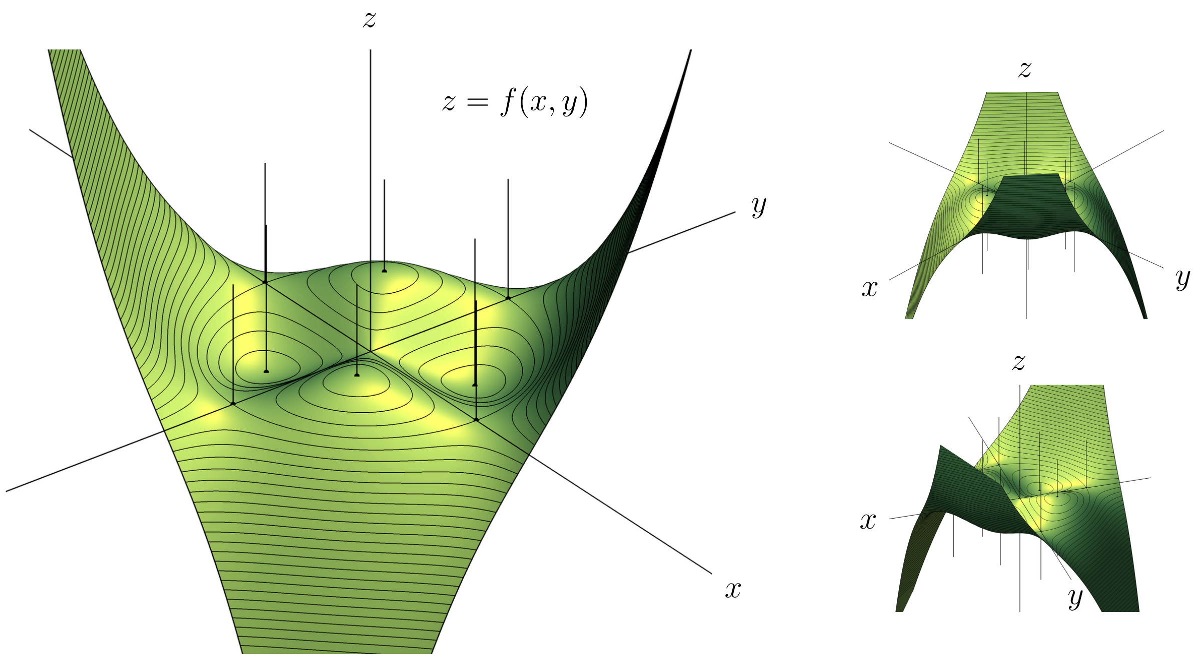
$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x+6y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=6x+2y, \qquad \operatorname{grad} f(x,y)=(2x+6y,6x+2y),$$

iii) f nemá žádný globální ani lokální extrém, v bodě $(x,y)=(0,0)$ má *sedlový bod*.



Obr. 4.6: Vrstevnice grafu funkce f, normované gradienty funkce f a spádnice

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\ln(x^2+y^2) & \text{pro } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{pro } (x,y)=(0,0),\end{cases}\qquad D(f)=\mathbb{R}^2,\qquad H(f)=\mathbb{R}.$$



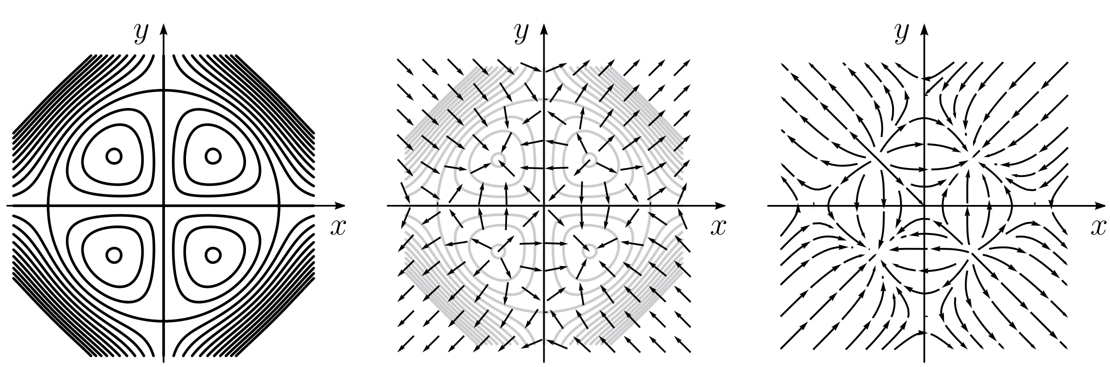
Obr. 4.7: Grafy funkce f

Vlastnosti:

i) f není omezená zdola ani shora, je *spojitá*,

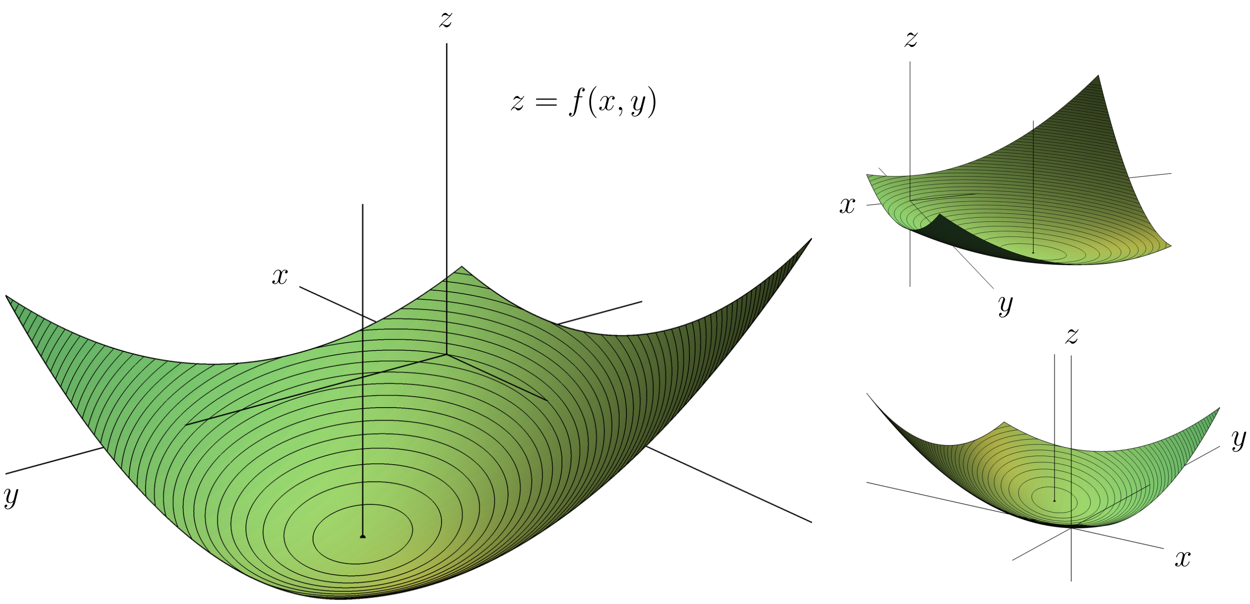
ii) f nemá žádný globální extrém, má čtyři *lokální extrémy*,

iii) f má pět *sedlových bodů*: $(0,0)$, $(\pm 1,0)$ a $(0,\pm 1)$.



Obr. 4.8: Vrstevnice grafu funkce f, normované gradienty funkce f a spádnice

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x - 2y, \qquad D(f) = \mathbb{R}^2.$$



Obr. 4.9: Grafy funkce f

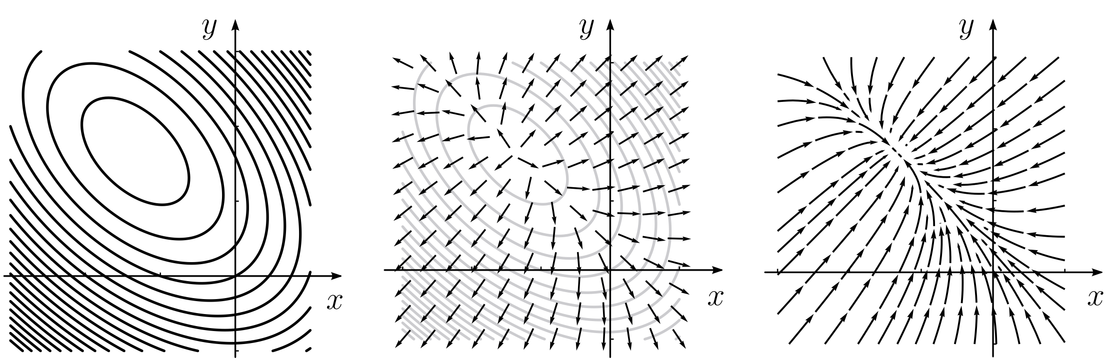
Vlastnosti:

i) f je *omezená zdola*, není omezená shora,

ii) f je *spojitá* a *diferencovatelná*,

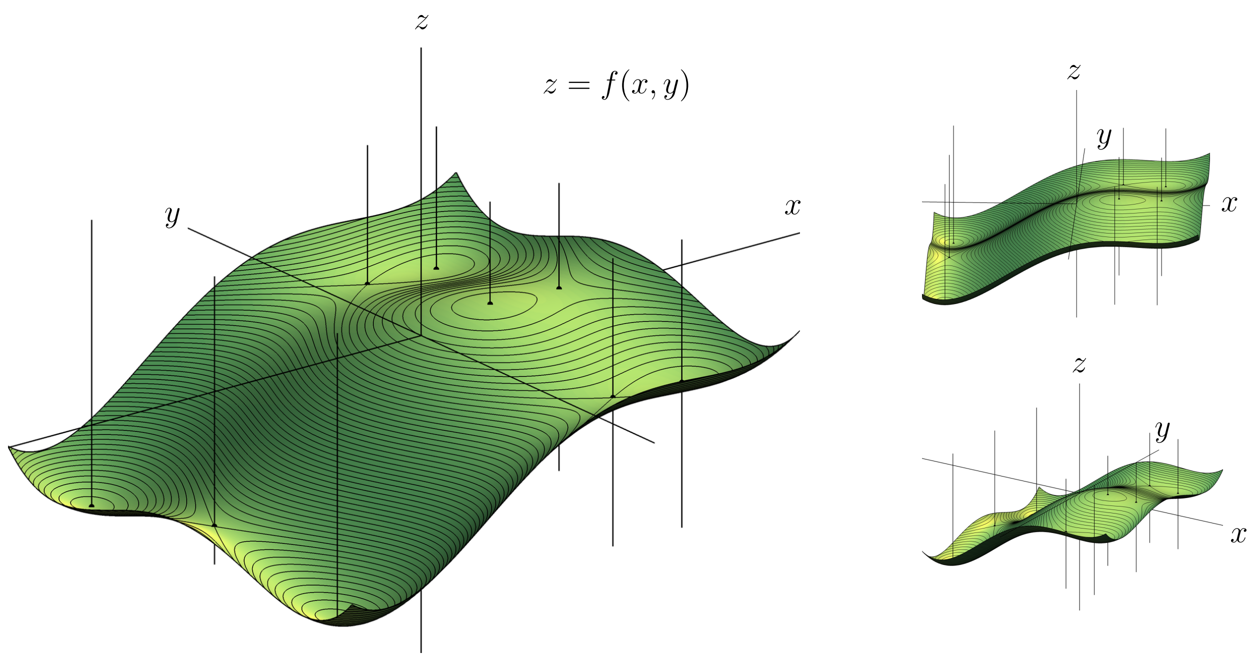
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y + 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + x - 2, \qquad \operatorname{grad} f(x,y) = (2x + y + 1, 2y + x - 2),$$

iii) f má právě jedno *ostré minimum* v bodě $(x,y) = \left(-\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$, nemá maximum.



Obr. 4.10: Vrstevnice grafu funkce f, normované gradienty funkce f a spádnice

$$f(x,y) = x^4 + 2y^4 - 14x^2 - 16y^2 + 24x, \qquad D(f) = \mathbb{R}^2.$$



Obr. 4.11: Grafy funkce f

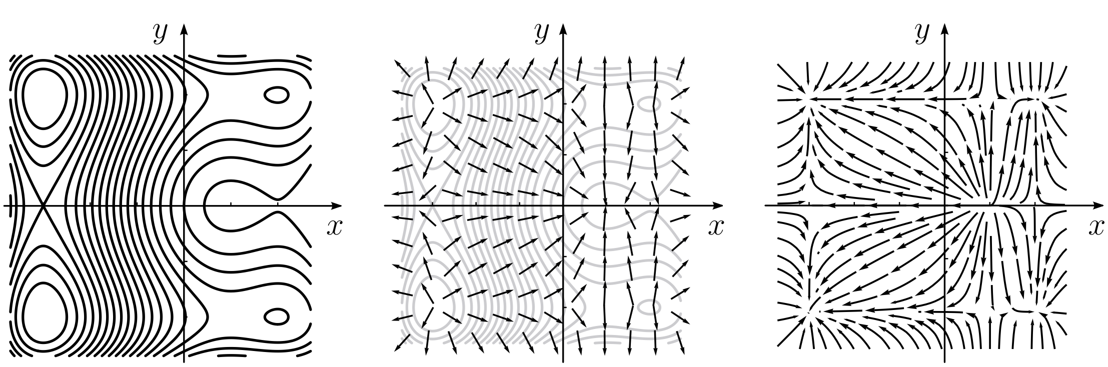
Vlastnosti:

i) f je *omezená zdola*, není omezená shora,

ii) f je *spojitá* a *diferencovatelná*,

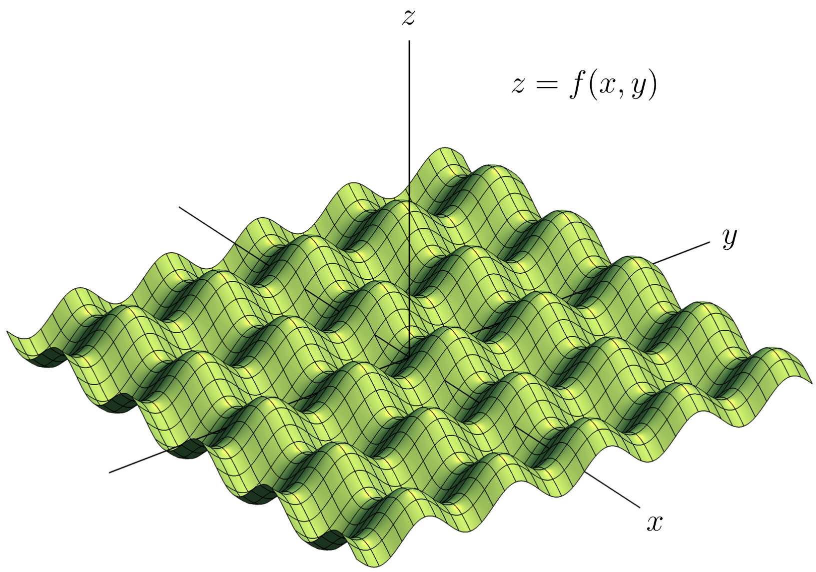
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 28x + 24, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 8y^3 - 32y, \qquad \operatorname{grad} f(x,y) = (4x^3 - 28x + 24, 8y^3 - 32y),$$

iii) f má pět *lokálních extrémů*, má čtyři *sedlové body*, nemá maximum.



Obr. 4.12: Vrstevnice grafu funkce f, normované gradienty funkce f a spádnice

$$f(x,y) = \sin x + \sin y, \qquad D(f) = \mathbb{R}^2, \qquad H(f) = \langle -2, 2 \rangle.$$



Obr. 4.13: Graf funkce f

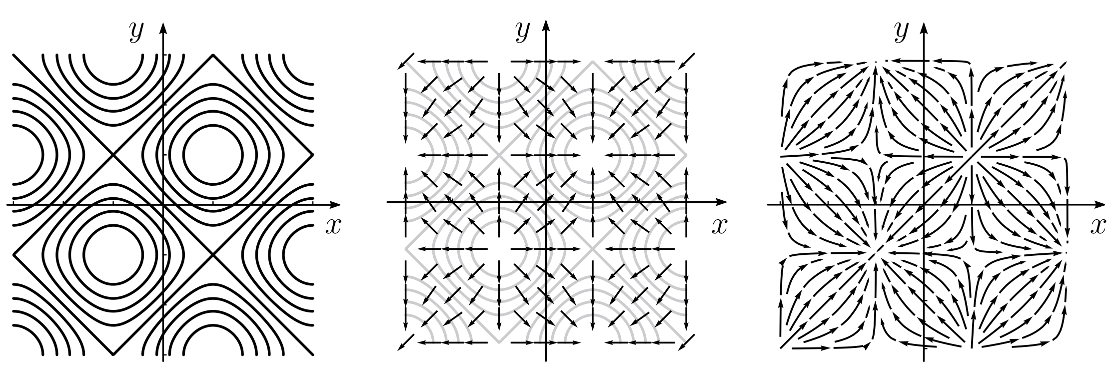
Vlastnosti:

i) f je *omezená*,

ii) f je *spojitá* a *diferencovatelná*,

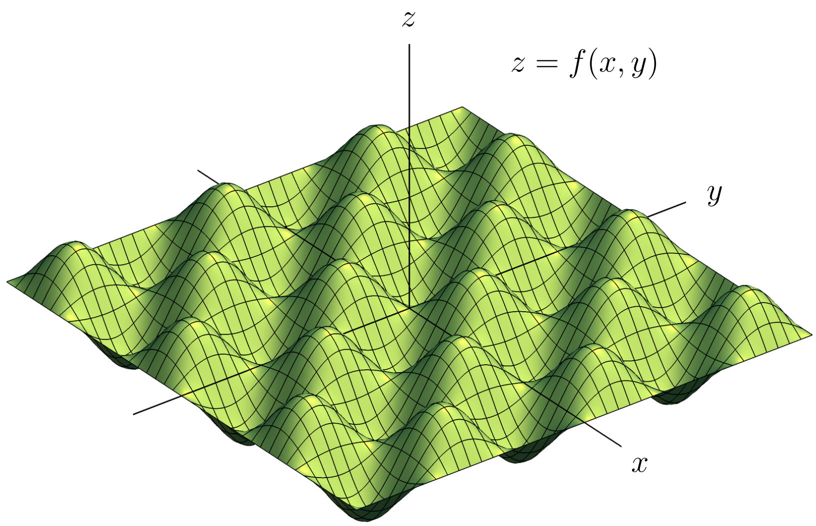
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \cos y, \qquad \operatorname{grad} f(x,y) = (\cos x, \cos y),$$

iii) f má nekonečně mnoho *ostrých lokálních minim* a *ostrých lokálních maxim*.



Obr. 4.14: Vrstevnice grafu funkce f, normované gradienty funkce f a spádnice

$$f(x,y) = \sin x\, \sin y, \qquad D(f) = \mathbb{R}^2, \qquad H(f) = \langle -1, 1 \rangle.$$



Obr. 4.15: Graf funkce f

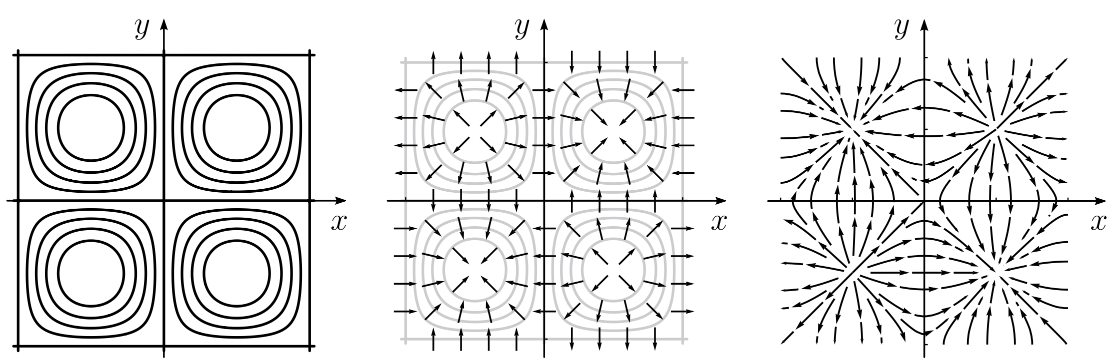
Vlastnosti:

i) f je *omezená*,

ii) f je *spojitá* a *diferencovatelná*,

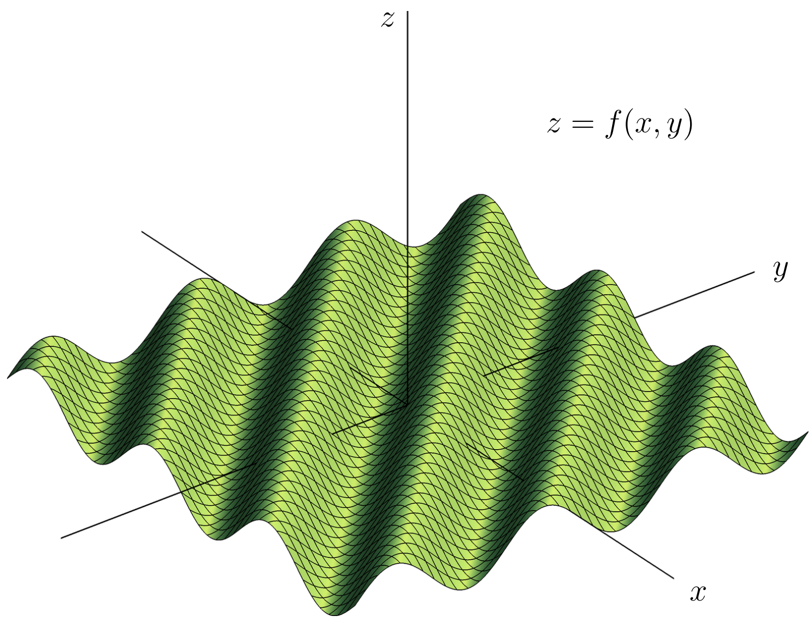
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x \sin y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \sin x \cos y, \qquad \operatorname{grad} f(x,y) = (\cos x \sin y, \sin x \cos y),$$

iii) f má nekonečně mnoho *ostrých lokálních minim* a *ostrých lokálních maxim*.



Obr. 4.16: Vrstevnice grafu funkce f, normované gradienty funkce f a spádnice

$$f(x,y) = \sin(x+y), \qquad D(f) = \mathbb{R}^2, \qquad H(f) = \langle -1, 1\rangle.$$



Obr. 4.17: Graf funkce f

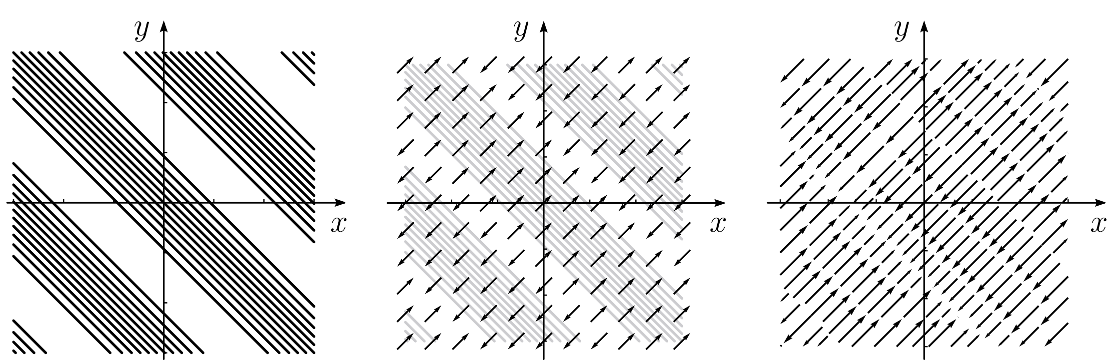
Vlastnosti:

i) f je *omezená*,

ii) f je *spojitá* a *diferencovatelná*,

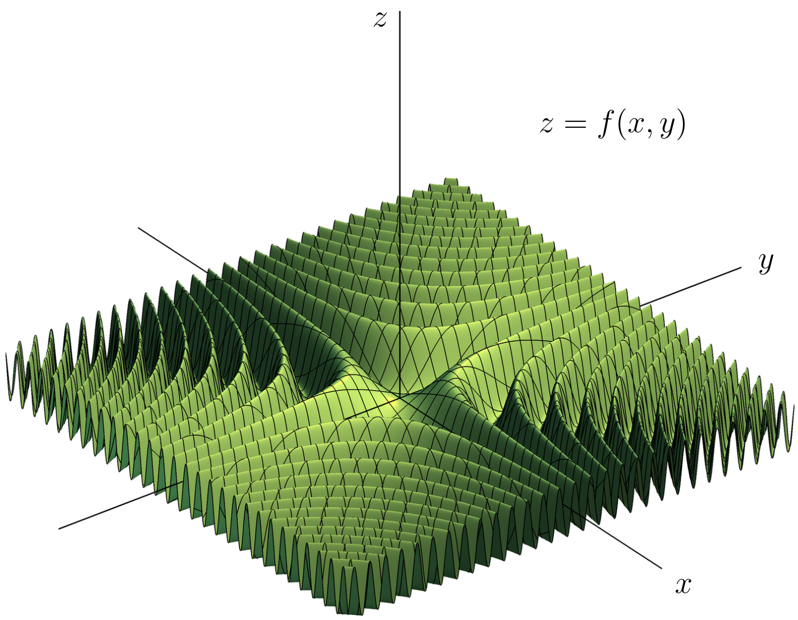
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x+y), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \cos(x+y), \qquad \operatorname{grad} f(x,y) = (\cos(x+y), \cos(x+y)),$$

iii) f má nekonečně mnoho *lokálních minim* a *lokálních maxim*.



Obr. 4.18: Vrstevnice grafu funkce f, normované gradienty funkce f a spádnice

$$f(x,y) = \sin xy, \qquad D(f) = \mathbb{R}^2, \qquad H(f) = \langle -1, 1\rangle.$$



Obr. 4.19: Graf funkce f

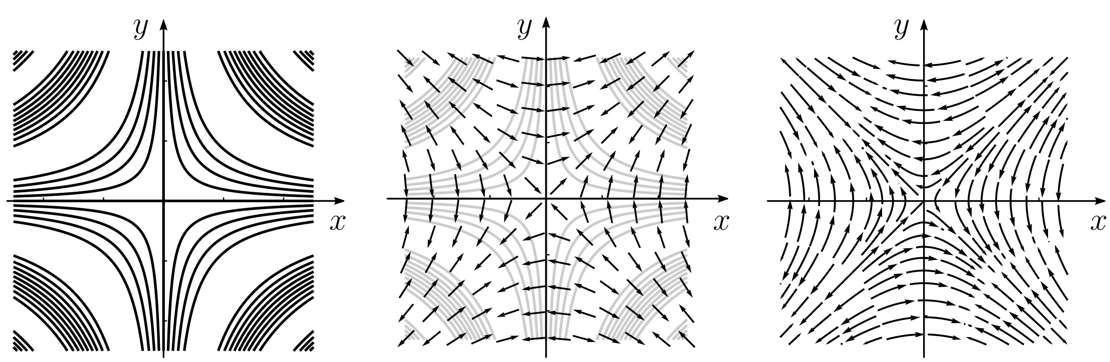
Vlastnosti:

i) f je *omezená*,

ii) f je *spojitá* a *diferencovatelná*,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cos xy, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x \cos xy, \qquad \operatorname{grad} f(x,y) = (y \cos xy, x \cos xy),$$

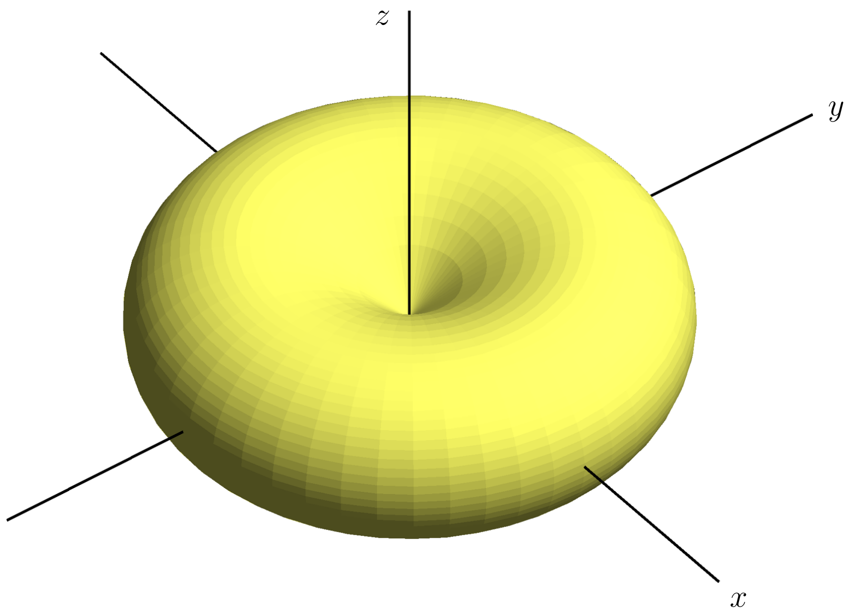
iii) f má nekonečně mnoho *lokálních minim* a *lokálních maxim*.



Obr. 4.20: Vrstevnice grafu funkce f, normované gradienty funkce f a spádnice

Plocha zadaná implicitně rovnicí

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x^2 + y^2 + z^2)^2 = x^2 + y^2 - z^2\right\}.$$



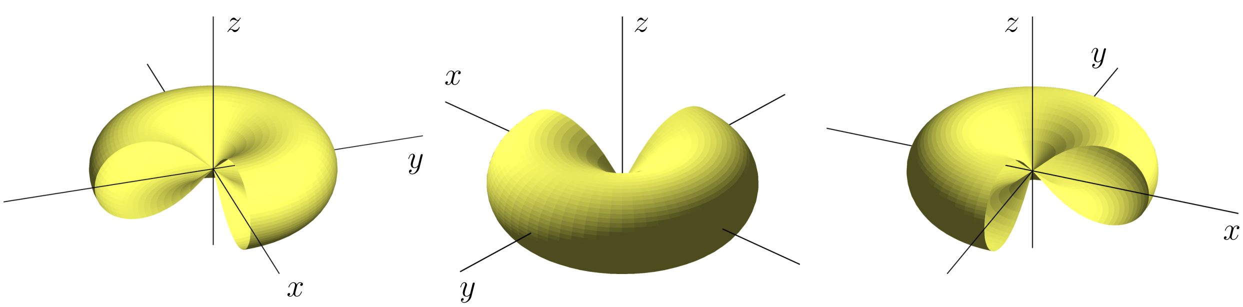
Obr. 4.21: Plocha M

Vlastnosti:

i) M je *uzavřená* plocha,

ii) M je *hladká* plocha s vyjímkou bodu $(x, y, z) = (0, 0, 0)$,

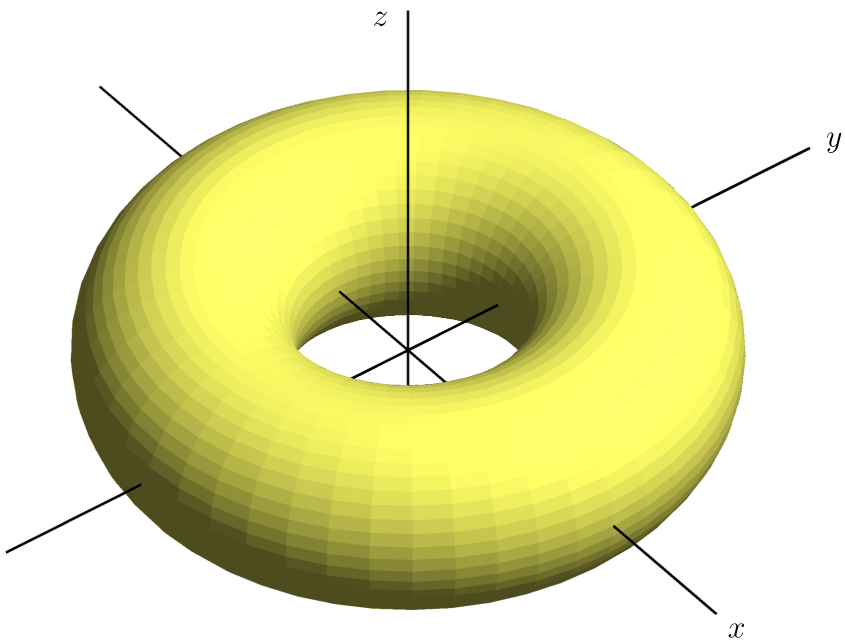
iii) M je *rotačně symetrická* okolo osy z.



Obr. 4.22: Části plochy M

Plocha zadaná implicitně rovnicí

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (2 - \sqrt{x^2 + y^2})^2 = 1 - z^2\right\}.$$



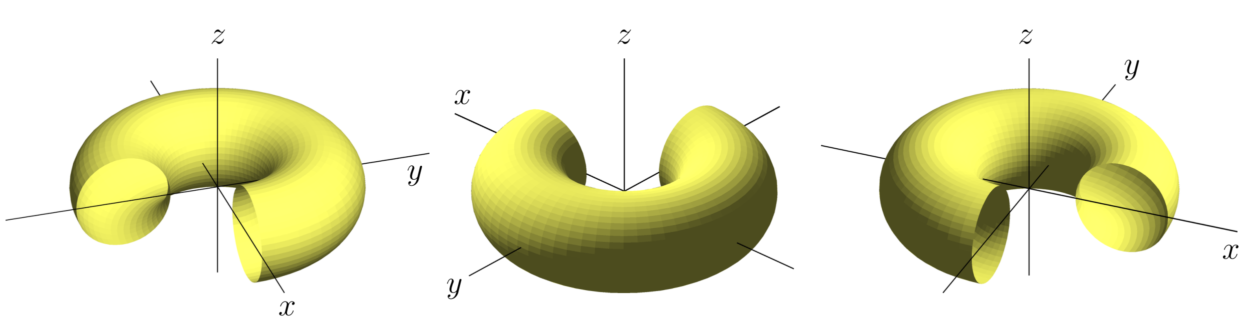
Obr. 4.23: Plocha M

Vlastnosti:

i) M je *uzavřená* plocha (vymezuje oblast, která není jednoduše souvislá),

ii) M je *hladká* plocha,

iii) M je *rotačně symetrická* okolo osy z.

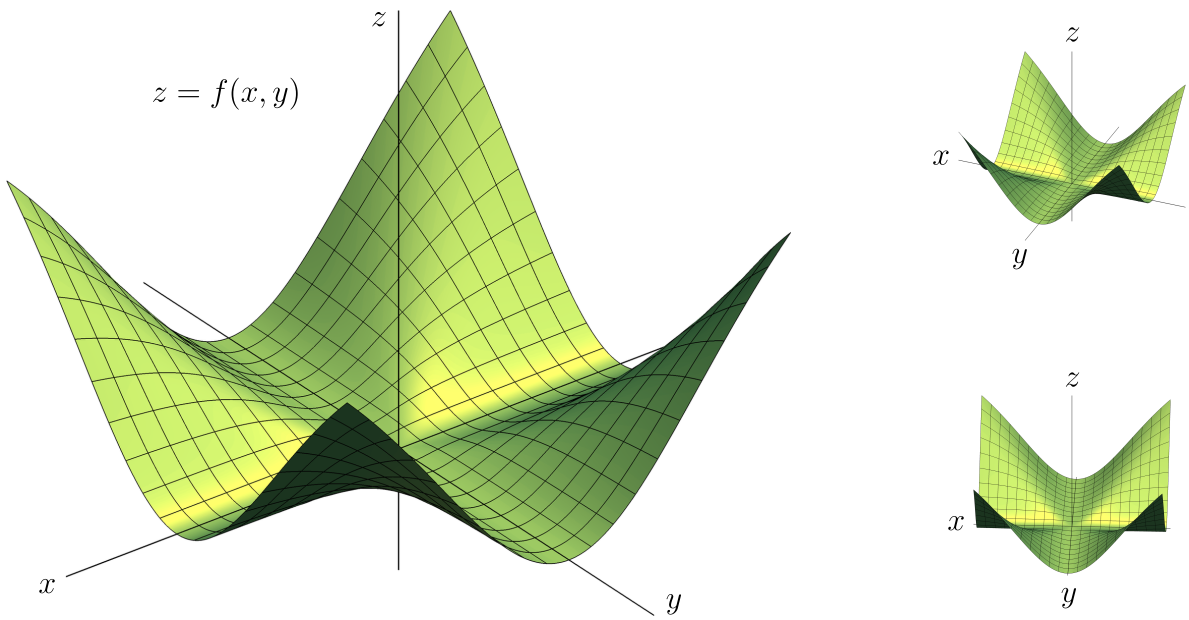


Obr. 4.24: Části plochy M

Kapitola 5

Pozoruhodné funkce v $\mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{pro } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pro } (x,y) = (0,0), \end{cases} \qquad D(f) = \mathbb{R}^2.$$



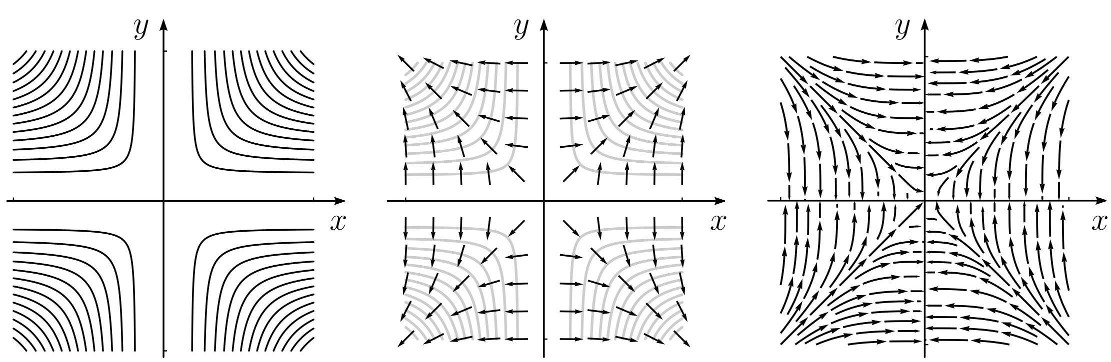
Obr. 5.1: Grafy funkce f

Vlastnosti:

i) f je *spojitá* na $D(f)$, je *omezená zdola* a není omezená shora,

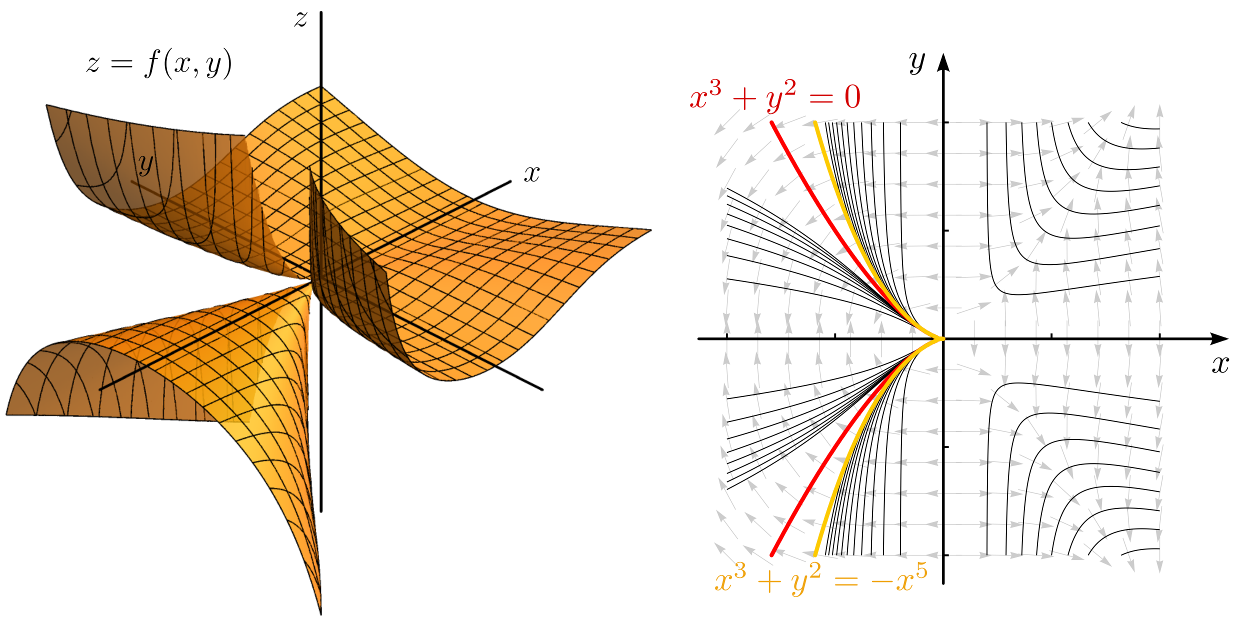
$$\forall\, x,y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} :\ 0 \leq \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \leq \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2} = x^2+y^2, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0,$$

ii) f je *diferencovatelná* na $D(f)$.



Obr. 5.2: Vrstevnice grafu funkce f, normované gradienty funkce f a spádnice

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^3+y^2}, \qquad D(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^3+y^2 \neq 0\right\}.$$

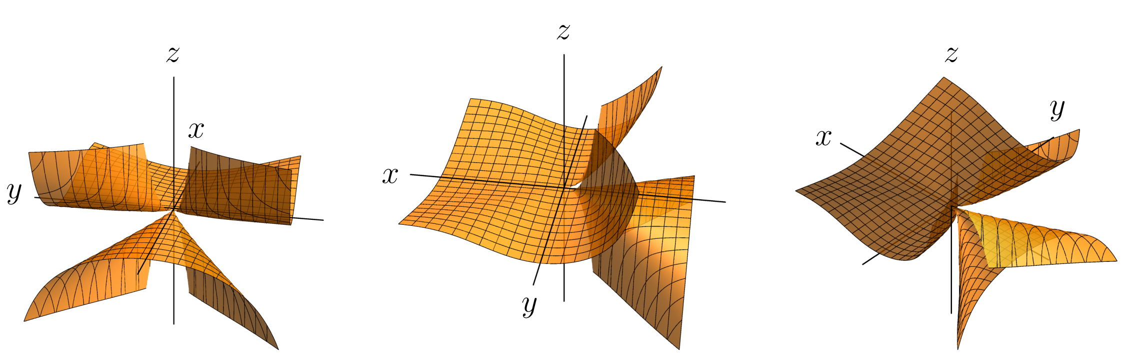


Obr. 5.3: Graf funkce f, vrstevnice a normované gradienty

Vlastnosti:

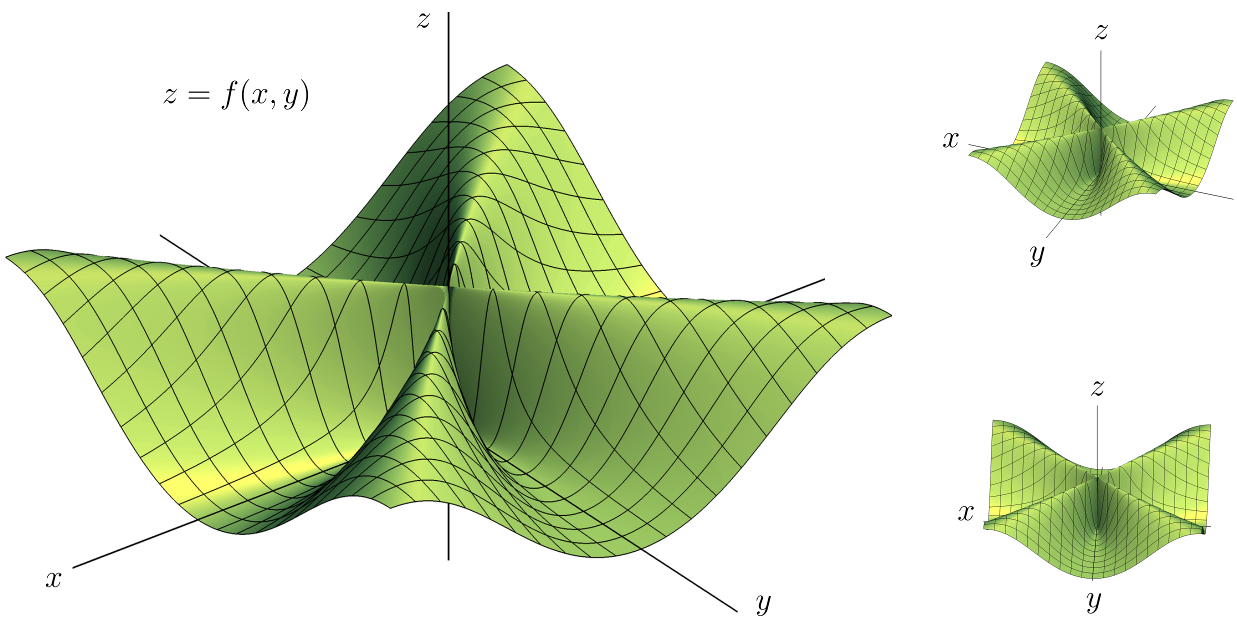
f je *spojitá* na $D(f)$, není omezená zdola ani shora,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\\ k\in\mathbb{R}}} f(x,y)=0, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx^2\\ k\in\mathbb{R}}} f(x,y)=0, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x^3+y^2=kx^5\\ k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}} f(x,y) = -\frac{1}{k}, \qquad \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$



Obr. 5.4: Grafy funkce f

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4} & \text{pro } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pro } (x,y) = (0,0), \end{cases} \qquad D(f) = \mathbb{R}^2.$$

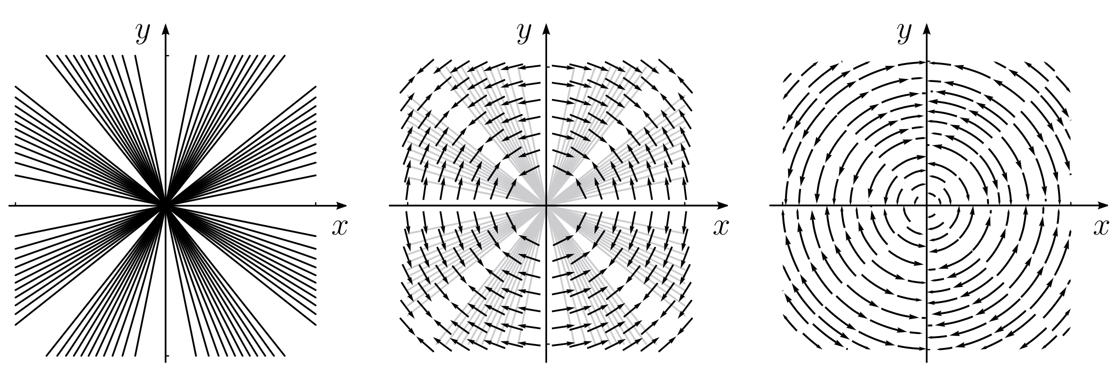


Obr. 5.5: Grafy funkce f

Vlastnosti:

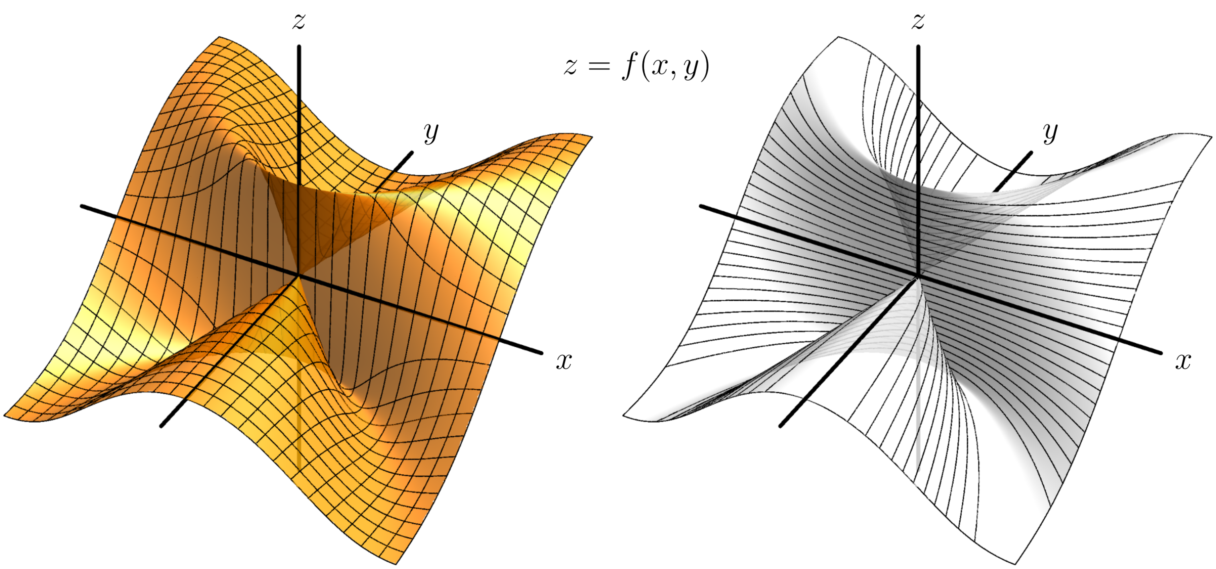
f je *omezená*, je *spojitá* všude kromě bodu $(x, y) = (0, 0)$,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y = kx \\ k \in \mathbb{R}}} f(x,y) = \frac{k^2}{1+k^4}, \qquad \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$



Obr. 5.6: Vrstevnice grafu funkce f, normované gradienty funkce f a spádnice

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{pro } (x,y)\neq(0,0),\\[2ex] 0 & \text{pro } (x,y)=(0,0),\end{cases}\qquad D(f)=\mathbb{R}^2.$$

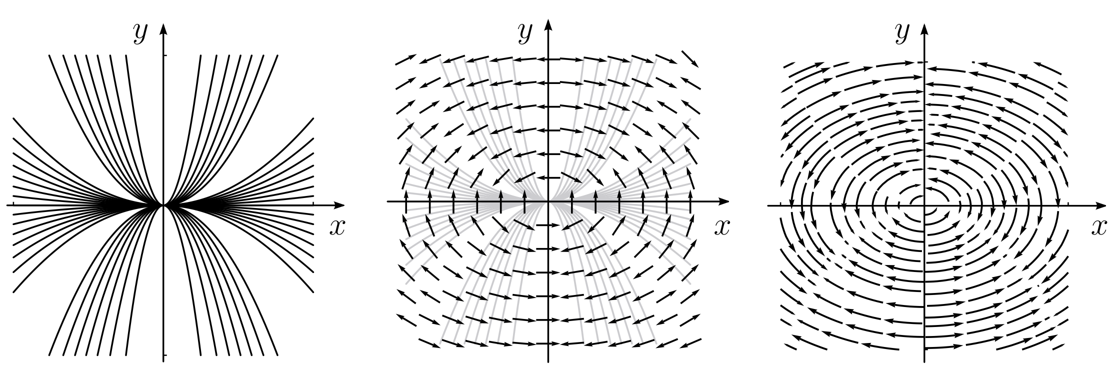


Obr. 5.7: Grafy funkce f

Vlastnosti:

f je *omezená*, je *spojitá* všude kromě bodu $(x,y)=(0,0)$,

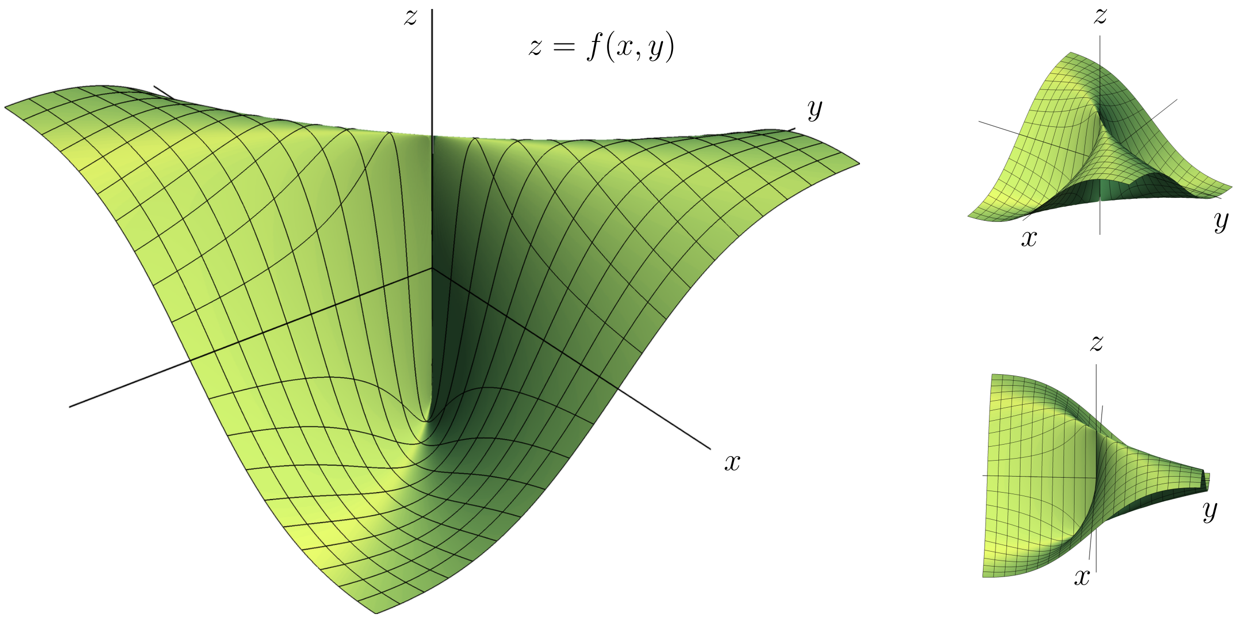
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\\ k\in\mathbb{R}}} f(x,y)=0,\qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx^2\\ k\in\mathbb{R}}} f(x,y)=\frac{k}{1+k^2},\qquad \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$



Obr. 5.8: Vrstevnice grafu funkce f, normované gradienty funkce f a spádnice

Použité zdroje: [11].

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{pro } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pro } (x,y) = (0,0), \end{cases} \qquad D(f) = \mathbb{R}^2.$$

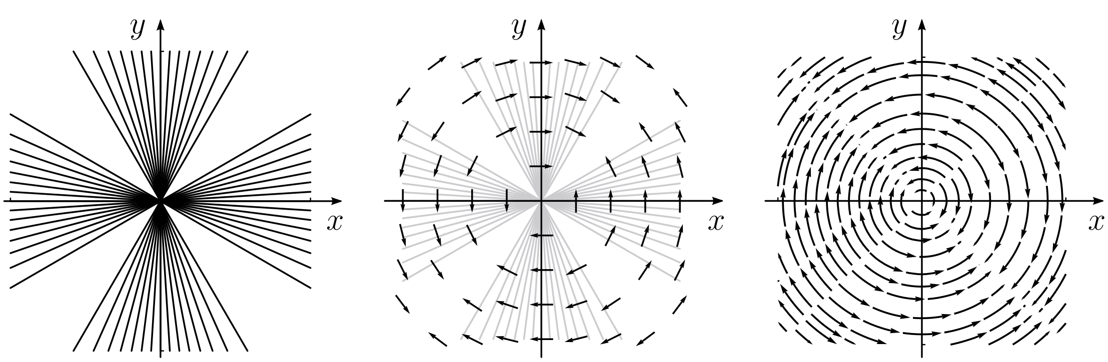


Obr. 5.9: Grafy funkce f

Vlastnosti:

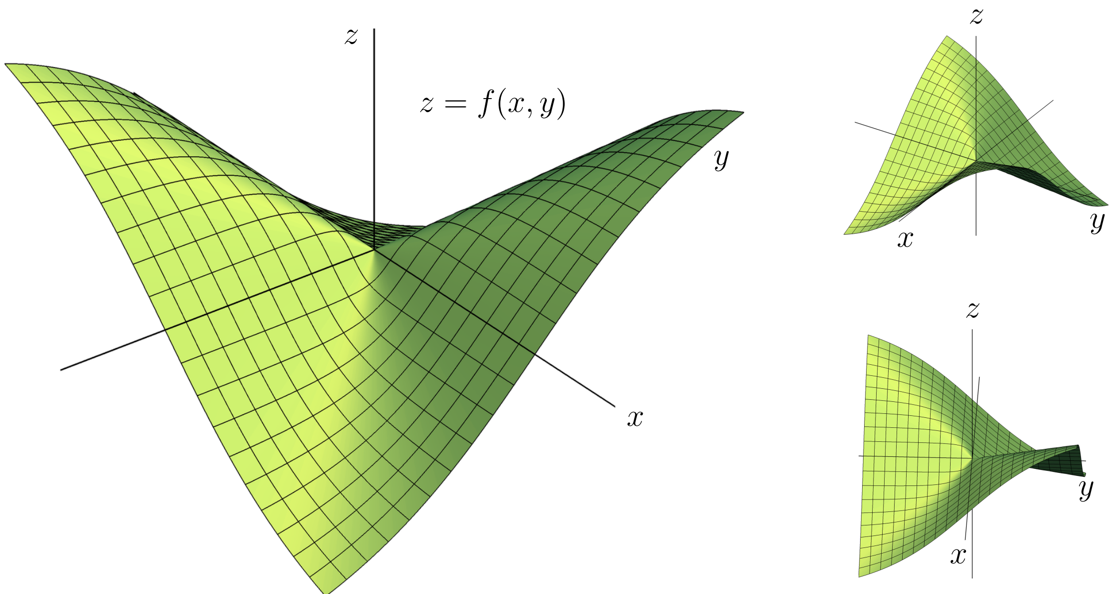
f je *omezená*, je *spojitá* všude kromě bodu $(x,y) = (0,0)$,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y = kx \\ k \in \mathbb{R}}} f(x,y) = \lim_{x \to 0} \frac{kx^2}{x^2 + k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2}, \qquad \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$



Obr. 5.10: Vrstevnice grafu funkce f, normované gradienty funkce f a spádnice

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{pro } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pro } (x,y) = (0,0), \end{cases} \qquad D(f) = \mathbb{R}^2.$$



Obr. 5.11: Grafy funkce f

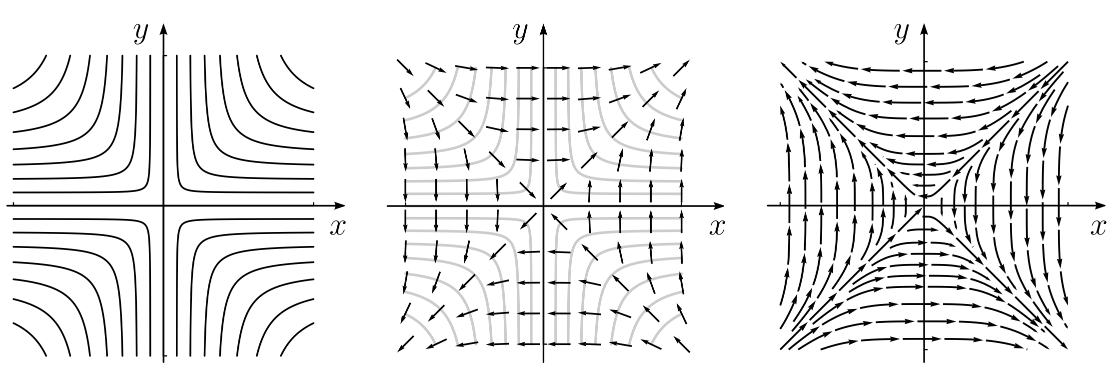
Vlastnosti:

i) f je *spojitá* na $D(f)$, není omezená zdola ani shora,

$$\forall\, x,y \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} :\ 0 \leq \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0,$$

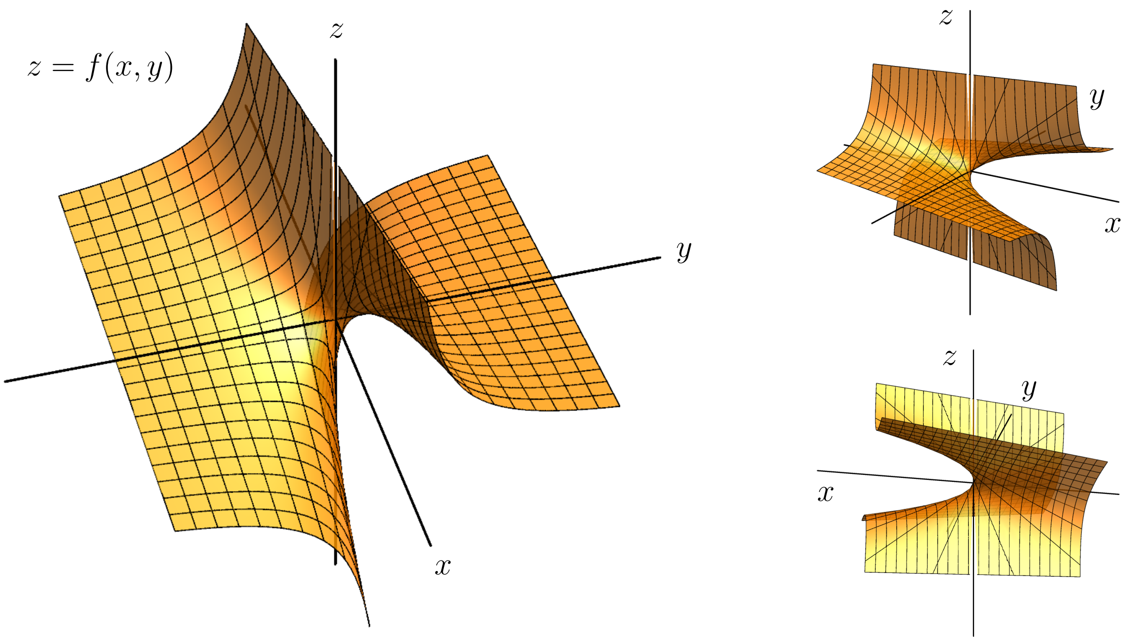
ii) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, ale f není diferencovatelná v bodě $(x,y) = (0,0)$,

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(h_1,h_2) - f(0,0)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1 h_2}{h_1^2+h_2^2} \quad \text{neexistuje}.$$



Obr. 5.12: Vrstevnice grafu funkce f, normované gradienty funkce f a spádnice

$$f(x,y)=\frac{x}{y}, \qquad D(f)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y\neq 0\right\}.$$

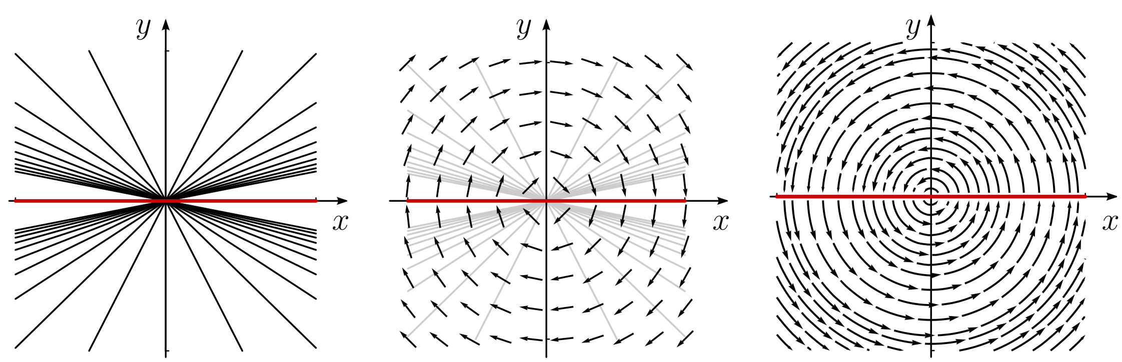


Obr. 5.13: Grafy funkce f

Vlastnosti:

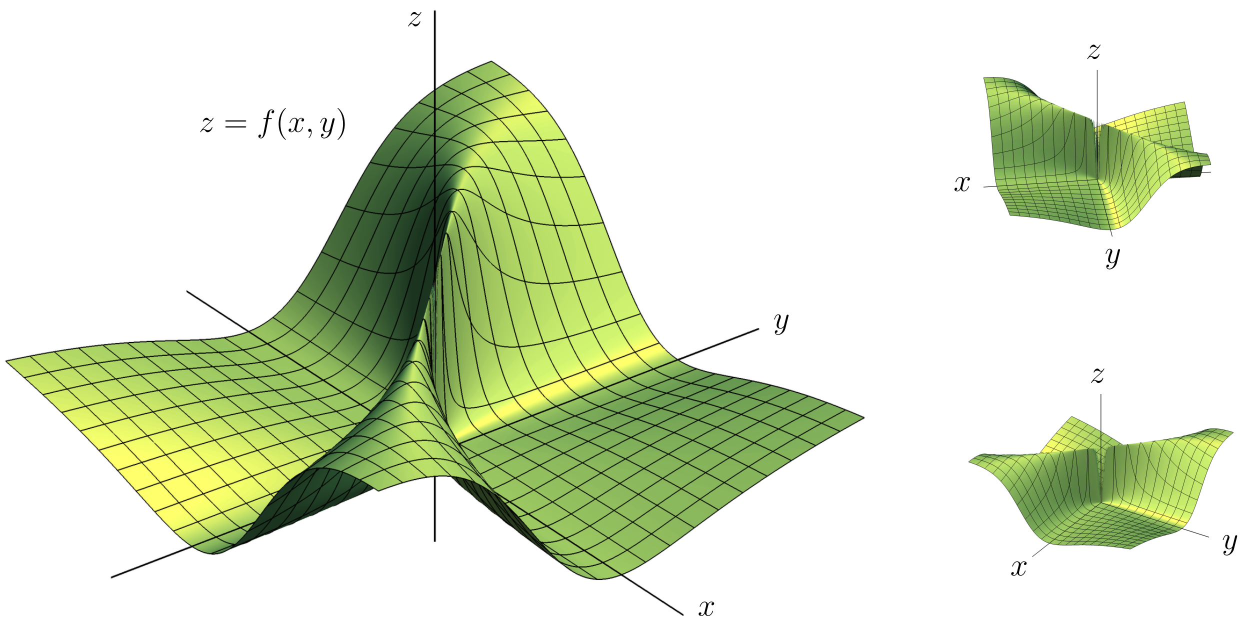
f je *spojitá* na $D(f)$, není omezená zdola ani shora,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\\ k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{kx}=\frac{1}{k}, \qquad \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$



Obr. 5.14: Vrstevnice grafu funkce f, normované gradienty funkce f a spádnice

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x+y)^2} & \text{pro } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pro } (x,y) = (0,0), \end{cases} \qquad D(f) = \mathbb{R}^2.$$

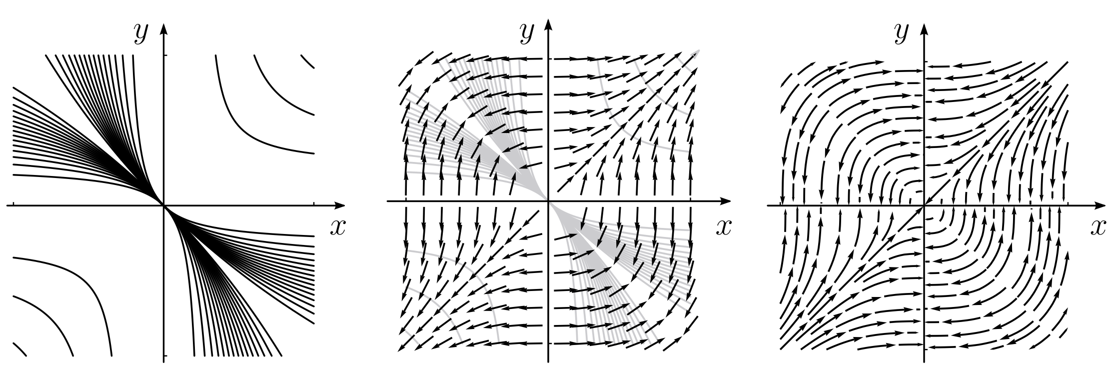


Obr. 5.15: Grafy funkce f

Vlastnosti:

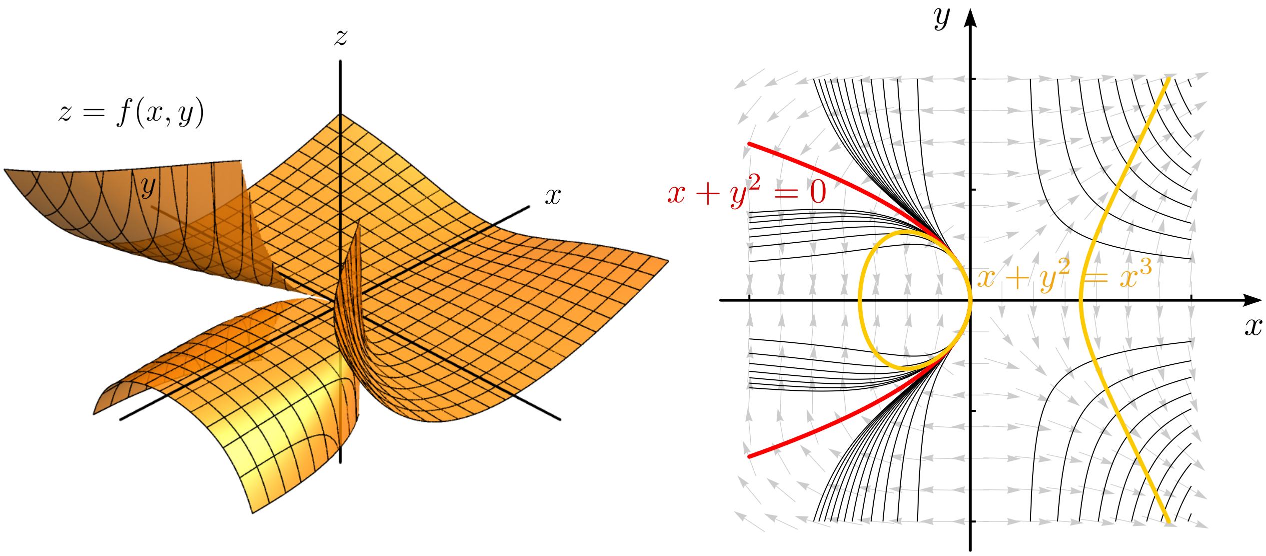
f je *omezená* na $D(f)$, je *spojitá* všude kromě bodu $(x,y) = (0,0)$,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y = kx \\ k \in \mathbb{R}}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{k^2x^2}{k^2x^2+(1+k)^2} = \begin{cases} 1 & \text{pro } k = -1, \\ 0 & \text{pro } k \neq -1, \end{cases} \quad , \qquad \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$



Obr. 5.16: Vrstevnice grafu funkce f, normované gradienty funkce f a spádnice

$$f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x+y^2},\qquad D(f)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x+y^2\neq 0\right\}.$$

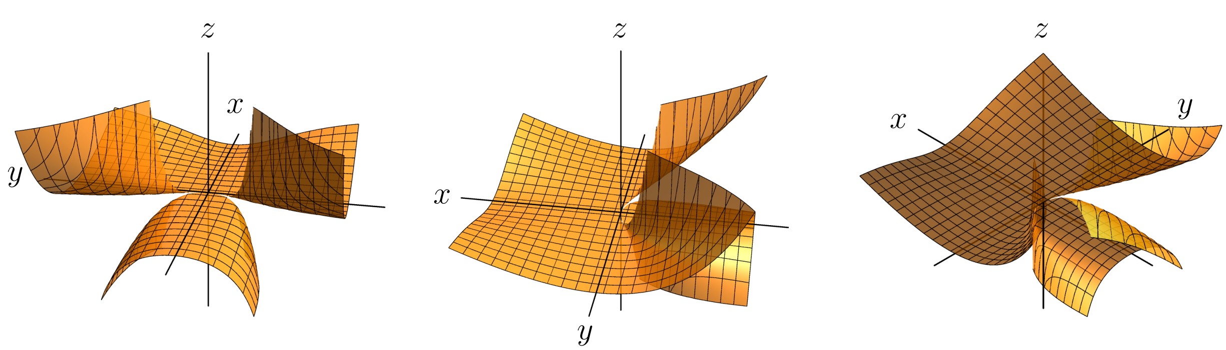


Obr. 5.17: Graf funkce f, vrstevnice a normované gradienty

Vlastnosti:

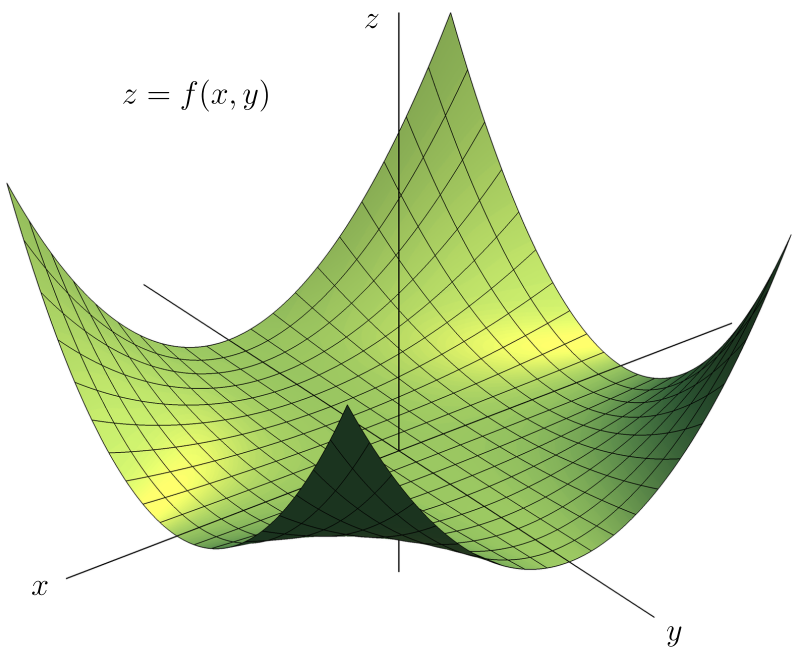
f je *spojitá* na $D(f)$, není omezená zdola ani shora,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\\ k\in\mathbb{R}}} f(x,y)=0,\quad \lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx^2\\ k\in\mathbb{R}}} f(x,y)=0,\quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x+y^2=kx^3\\ k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}} f(x,y)=-\frac{1}{k},\qquad \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$



Obr. 5.18: Grafy funkce f

$$f(x,y)=|xy|^2, \qquad D(f)=\mathbb{R}^2.$$



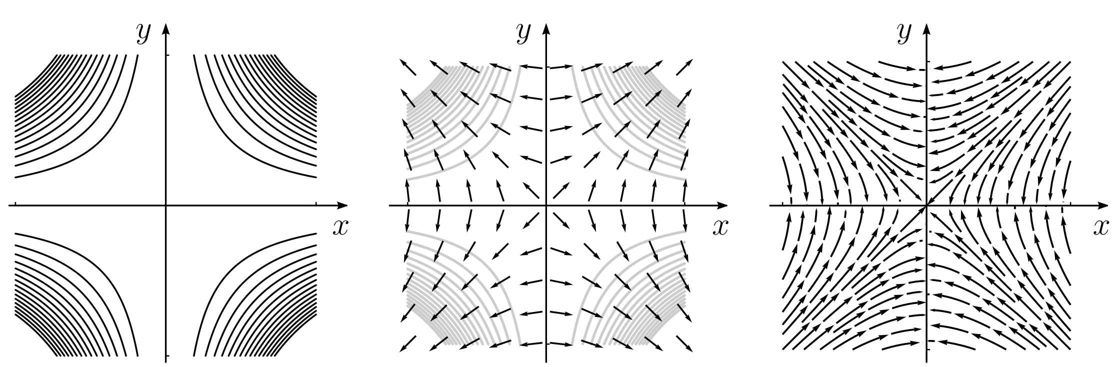
Obr. 5.19: Graf funkce f

Vlastnosti:

i) f je *spojitá* na $D(f)$, je *omezená zdola* a není omezená shora,

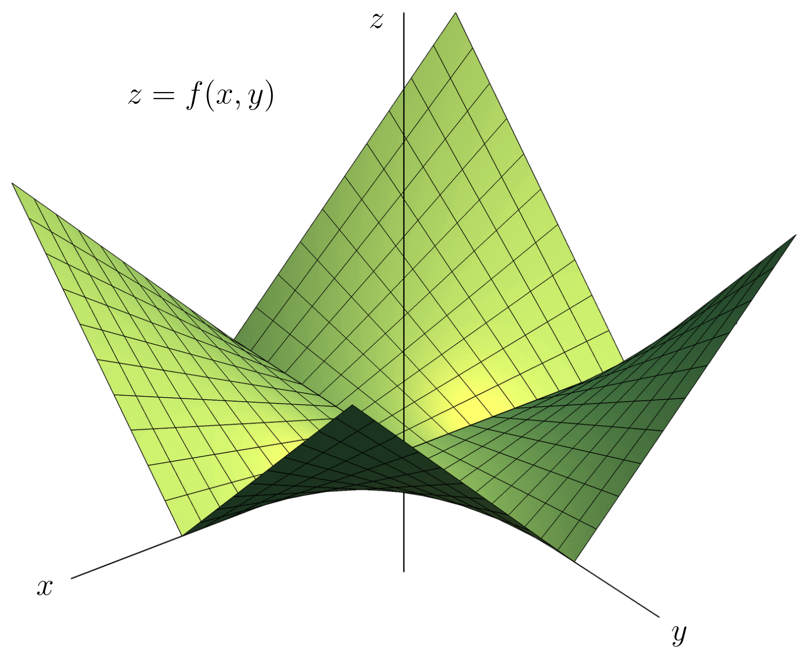
ii) f je *diferencovatelná* na $D(f)$,

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(h_1,h_2)-f(0,0)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1^2h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0.$$



Obr. 5.20: Vrstevnice grafu funkce f, normované gradienty funkce f a spádnice

$$f(x,y) = |xy|, \qquad D(f) = \mathbb{R}^2.$$



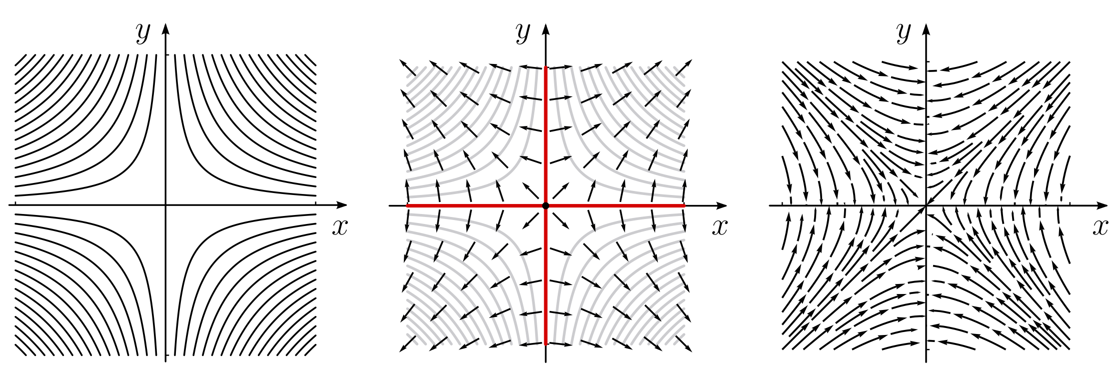
Obr. 5.21: Graf funkce f

Vlastnosti:

i) f je *spojitá* na $D(f)$, je *omezená zdola* a není omezená shora,

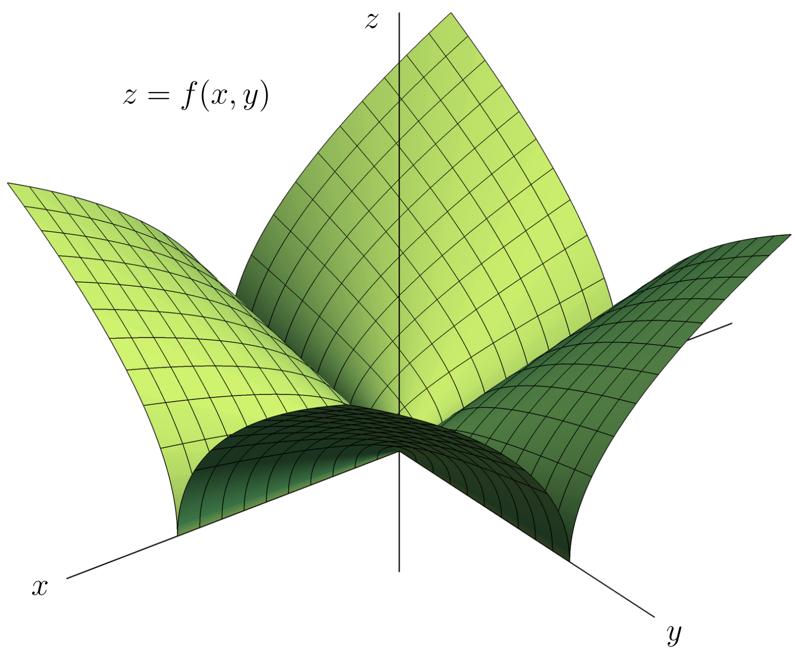
ii) f je *diferencovatelná* v bodě $(x, y) = (0, 0)$,

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(h_1,h_2) - f(0,0)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|h_1 h_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0.$$



Obr. 5.22: Vrstevnice grafu funkce f, normované gradienty funkce f a spádnice

$$f(x,y)=\sqrt{|xy|}, \qquad D(f)=\mathbb{R}^2.$$



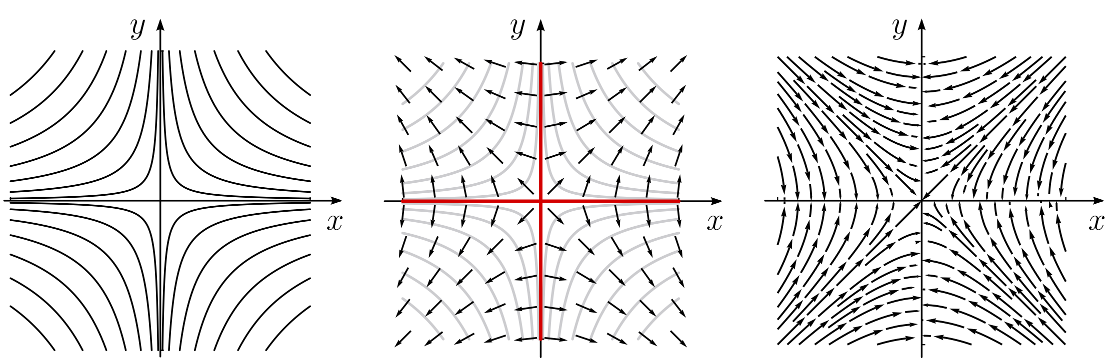
Obr. 5.23: Graf funkce f

Vlastnosti:

i) f je *spojitá* na $D(f)$, je *omezená zdola* a není omezená shora,

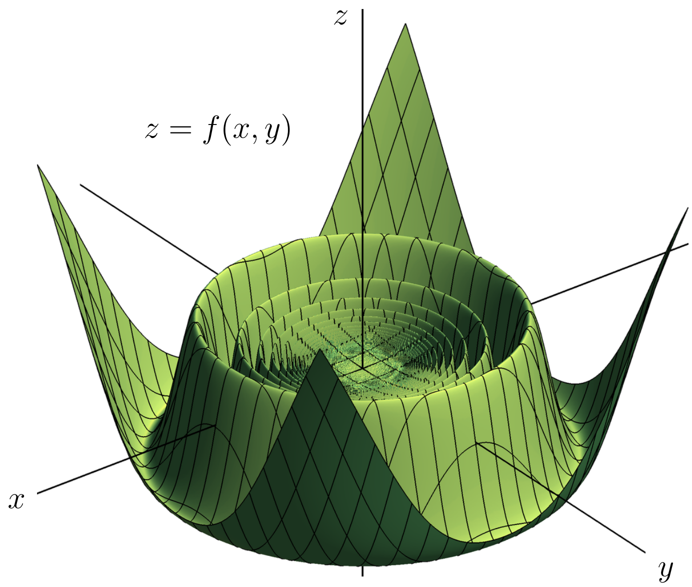
ii) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$, ale f není diferencovatelná v bodě $(x,y)=(0,0)$,

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(h_1,h_2)-f(0,0)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|h_1h_2|}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \quad \text{neexistuje.}$$



Obr. 5.24: Vrstevnice grafu funkce f, normované gradienty funkce f a spádnice

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{pro } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pro } (x,y) = (0,0), \end{cases} \qquad D(f) = \mathbb{R}^2.$$



Obr. 5.25: Graf funkce f

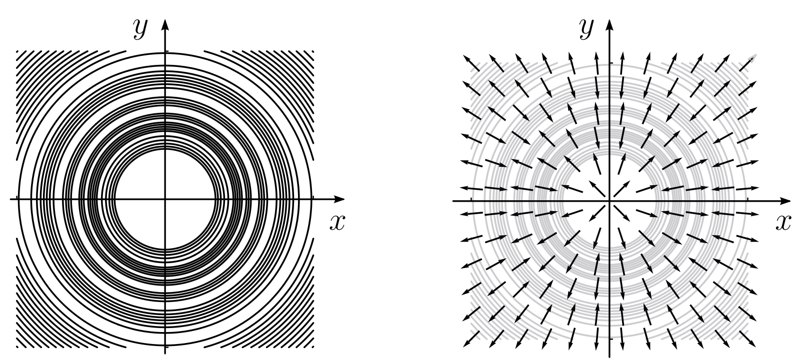
Vlastnosti:

i) f je *omezená* a je *spojitá* na $D(f)$,

$$\forall\, x,y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} :\ 0 \leq \left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right| \leq x^2+y^2, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0,$$

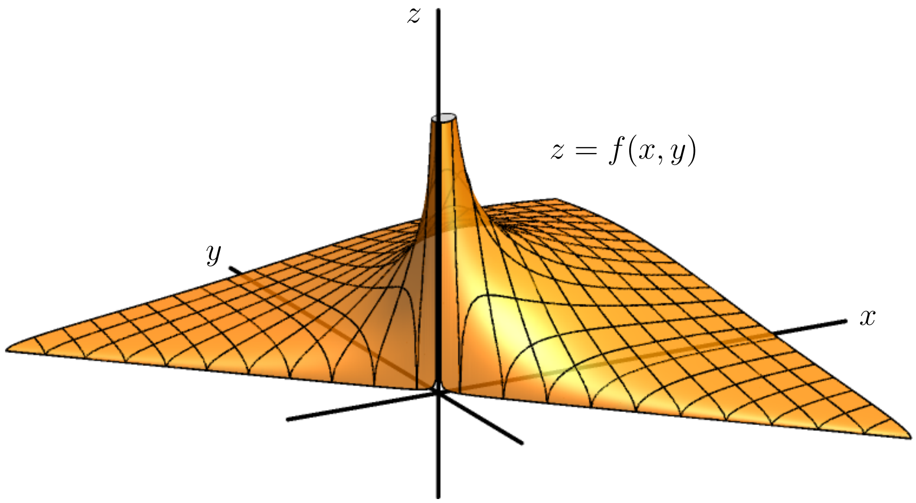
ii) f je *diferencovatelná* na $D(f)$,

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(h_1,h_2)-f(0,0)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \sqrt{h_1^2+h_2^2}\,\sin\frac{1}{h_1^2+h_2^2} = 0.$$



Obr. 5.26: Vrstevnice grafu funkce f a normované gradienty funkce f

$$f(x,y) = \frac{x+y}{\sqrt{x^3+y^3}}, \qquad D(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x+y>0\right\}.$$



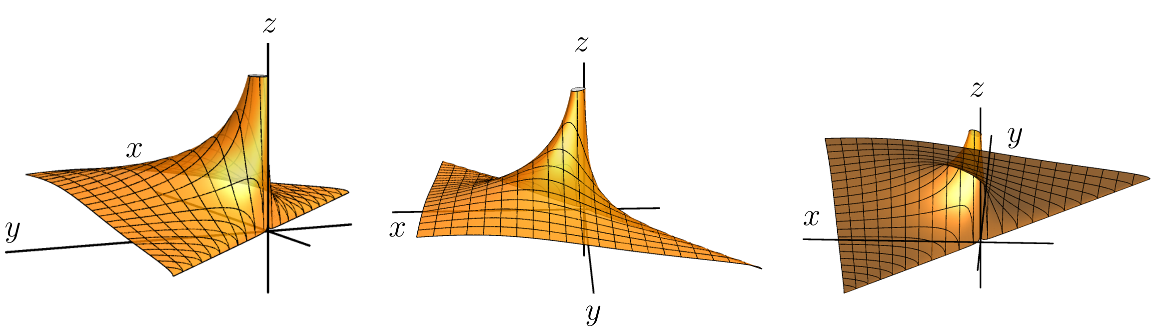
Obr. 5.27: Graf funkce f.

Vlastnosti:

i) f je *spojitá* na $D(f)$, je *omezená zdola* a není omezená shora,

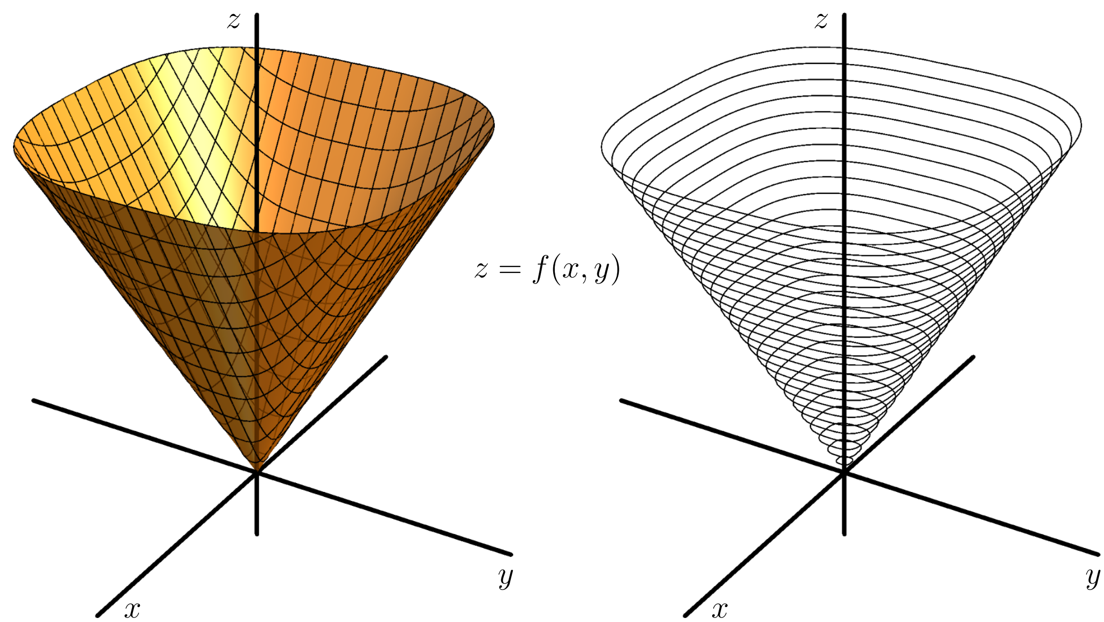
$$\lim_{\substack{x\to 0^+\\ y=kx\\ k>-1}} f(x,y) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1+k}{\sqrt{1+k^3}} = +\infty,$$

ii) $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=-x+kx^2\\ k>0}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{kx^2}{\sqrt{3kx^4-3k^2x^5+k^3x^6}} = \sqrt{\frac{k}{3}}, \qquad \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$



Obr. 5.28: Grafy funkce f

$$f(x,y) = \sqrt[3]{|x|^3 + |y|^3}, \qquad D(f) = \mathbb{R}^2.$$



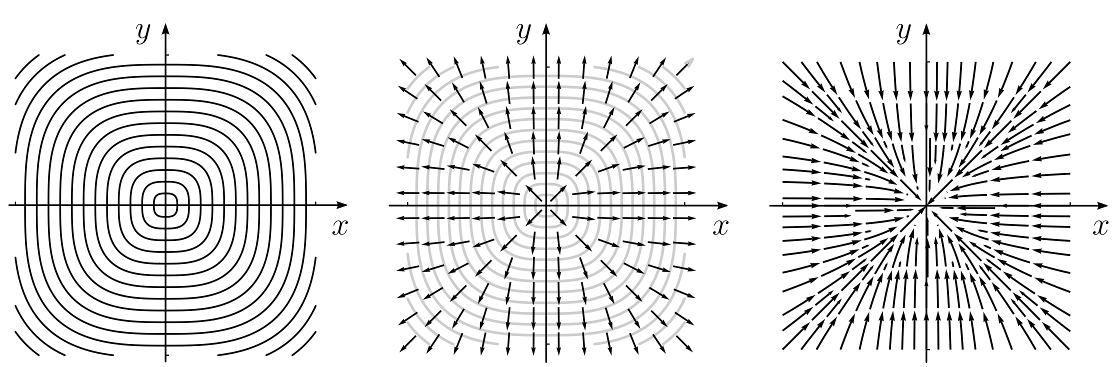
Obr. 5.29: Graf funkce f a jeho drátěný model

Vlastnosti:

i) f má v nule *derivaci ve všech směrech*,

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(0,0) = \sqrt[3]{|v_1|^3 + |v_2|^3}, \qquad \boldsymbol{v} = (v_1, v_2),$$

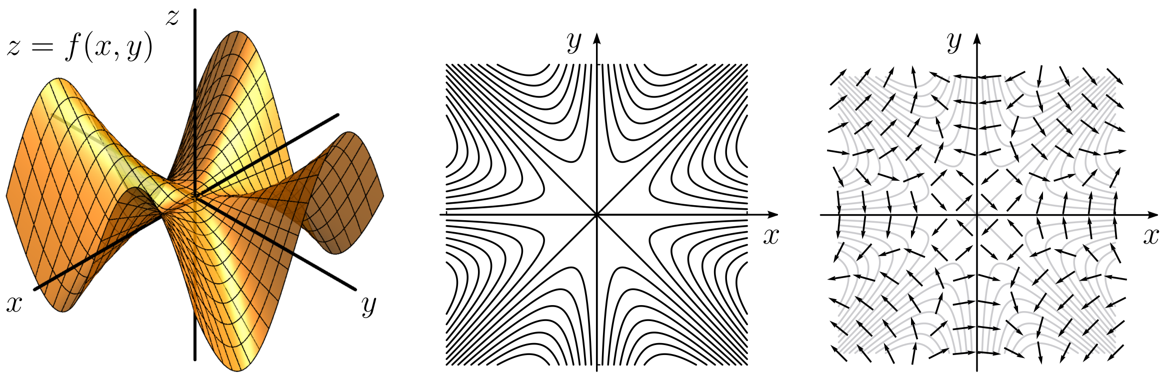
ii) f není diferencovatelná v bodě $(x,y) = (0,0)$ (derivace podle vektoru nezávisí lineárně na složkách vektoru).



Obr. 5.30: Vrstevnice grafu funkce f, normované gradienty funkce f a spádnice

Použité zdroje: [2].

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy\,(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{pro } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pro } (x,y) = (0,0), \end{cases} \qquad D(f) = \mathbb{R}^2.$$



Obr. 5.31: Graf funkce f, vrstevnice a normované gradienty

Vlastnosti:

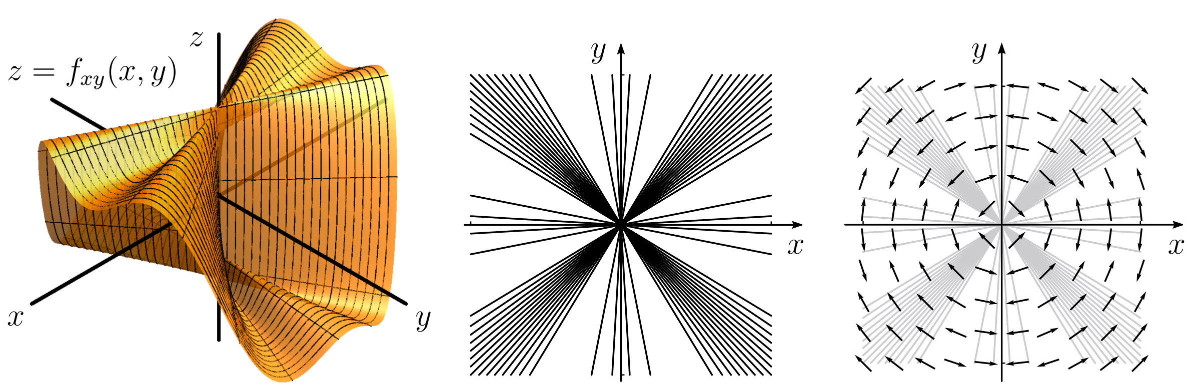
i) pro $x, y \neq 0$ platí

$$f_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{(x^2-y^2)\,(x^4+10x^2y^2+y^4)}{(x^2+y^2)^3} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = f_{yx}(x,y),$$

ii) $$f_{xy}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1 \neq -1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = f_{yx}(0,0),$$

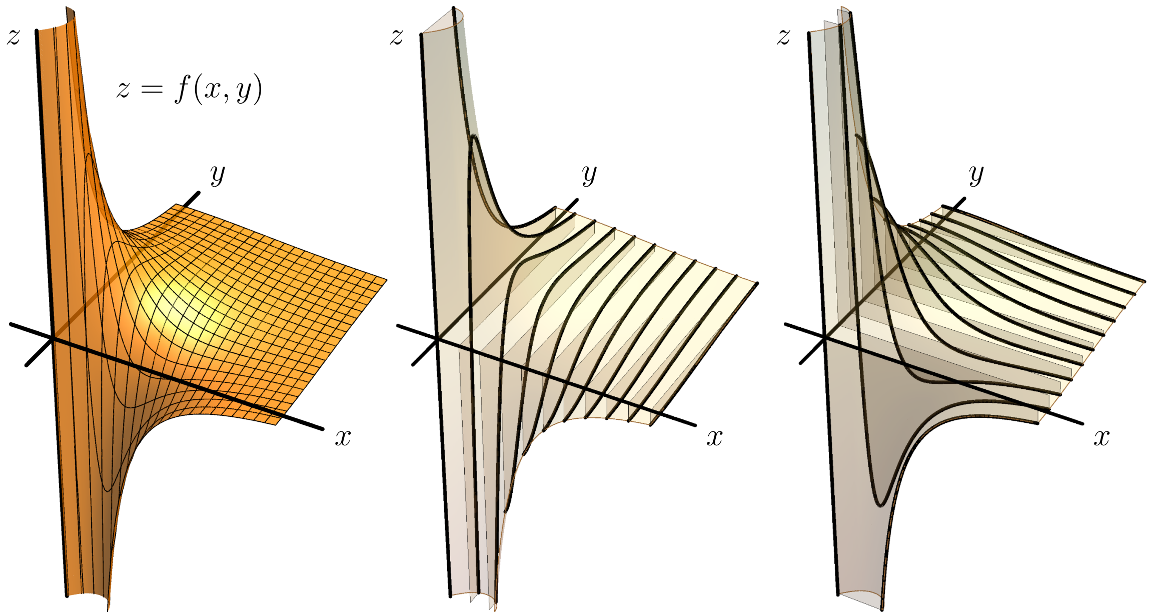
iii) $f, f_x, f_y \in C(\mathbb{R}^2)$, $\quad f_{xy}, f_{yx} \in C(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$,

iv) smíšené parciální derivace f_{xy} a f_{yx} nejsou spojité v počátku $(x,y) = (0,0)$.



Obr. 5.32: Graf smíšené parciální derivace f_{xy}, vrstevnice a normované gradienty

$$f(x,y)=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\qquad D(f)=(0,1)\times(0,1),\qquad H(f)=\mathbb{R}.$$



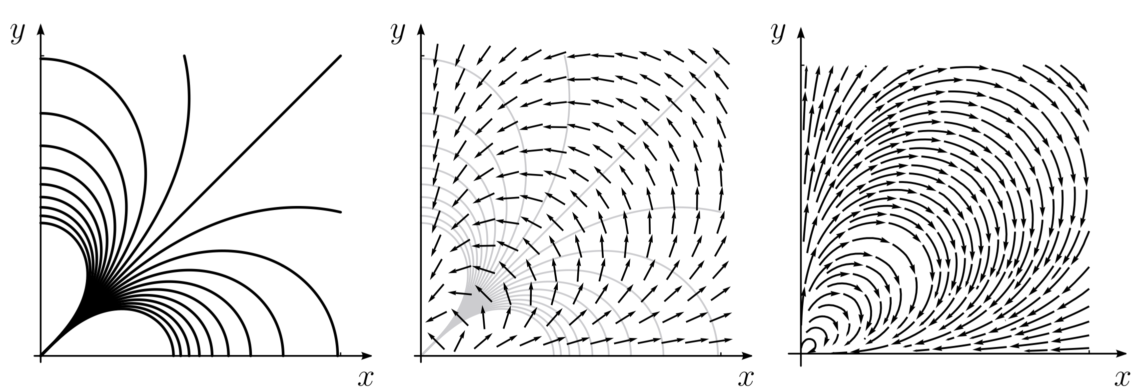
Obr. 5.33: Graf funkce f a jeho řezy

Vlastnosti:

i) dvojnásobné integrály se nerovnají

$$\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4}\neq-\frac{\pi}{4}=\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x,$$

ii) dvojný integrál $\iint\limits_{(0,1)\times(0,1)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ neexistuje.



Obr. 5.34: Vrstevnice grafu funkce f, normované gradienty funkce f a spádnice

Kapitola 6

Základní funkce v $\mathbb{C}$

Lineární funkce

$$f : w = az + b, \quad a, b \in \mathbb{C},\ a \neq 0, \qquad D(f) = \mathbb{C}^*.$$

Vlastnosti:

i) $H(f) = \mathbb{C}^*$,

ii) $f(\infty) = \infty$,

iii) lineární funkce f je jednoznačná, prostá a spojitá funkce na $\mathbb{C}^*$,

iv) geometrická interpretace lineární funkce:
lineární funkce $f : w = z + b$, $z \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$, představuje geometricky v Gaussově rovině z posunutí o vektor $(\operatorname{Re} b, \operatorname{Im} b)$,
lineární funkce $f : w = az$, $z \in \mathbb{C}^*$, $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, představuje v Gaussově rovině z tato geometrická zobrazení:

(a) pro $a = 1$ identické zobrazení,

(b) pro $a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha}$ otočení se středem v počátku o orientovaný úhel velikosti α,

(c) pro $a = -1$ středovou souměrnost (otočení o úhel π),

(d) pro $a \in \mathbb{R}^+$ stejnolehlost se středem v počátku a kvocientem a,

(e) pro $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, obecně geometrické zobrazení složené z otočení a stejnolehlosti,

lineární funkce $f : w = az + b$, $z \in \mathbb{C}^*$, $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, po vyjádření koeficientu a v exponenciálním tvaru $a = |a|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha}$ se dá geometricky interpretovat v Gaussově rovině z jako geometrické zobrazení složené ze tří složek:

(a) otočení se středem v počátku o orientovaný úhel velikosti α,

(b) stejnolehlosti se středem v počátku a koeficientem $|a|$,

(c) posunutí o vektor $(\operatorname{Re} b, \operatorname{Im} b)$,

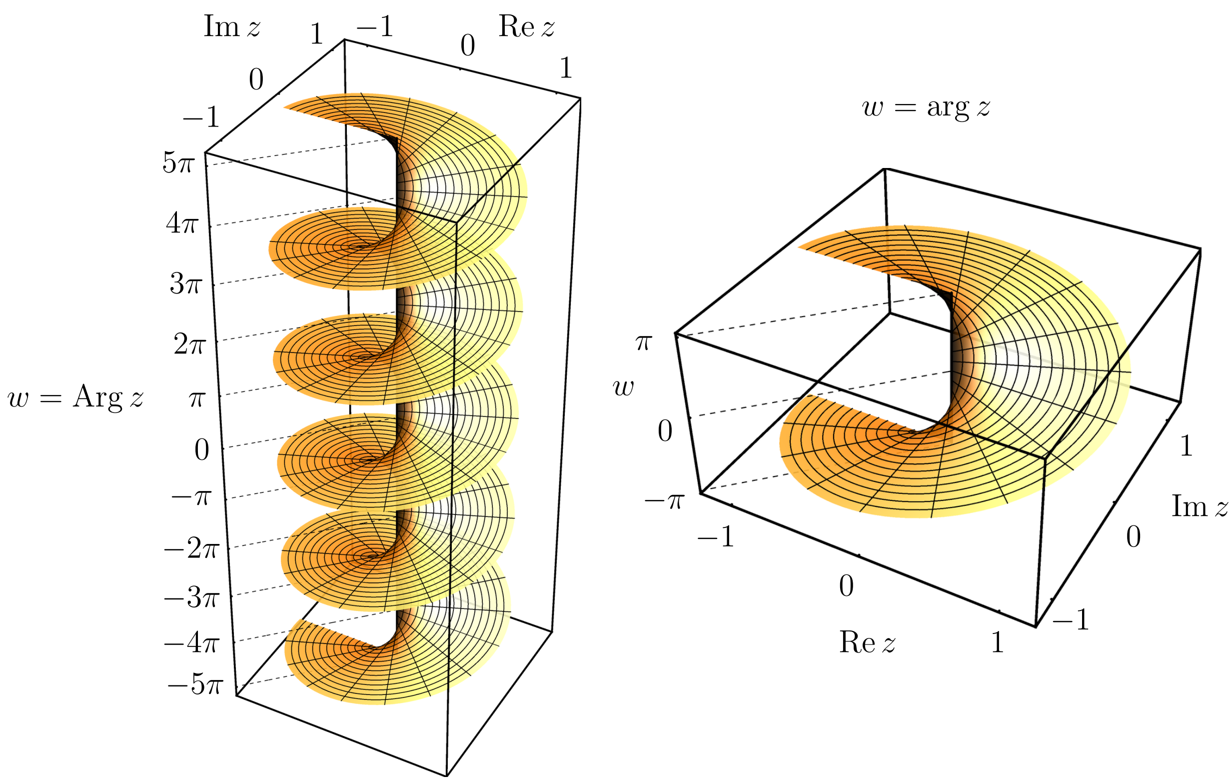
v) lineární funkce f je konformní zobrazení na množině $D(f) = \mathbb{C}^*$ (konformní zobrazení množiny $\mathbb{C}^*$ na sebe),

vi) lineární funkce f zobrazuje každý geometrický útvar na útvar s ním podobný (tj. téhož typu: přímku na přímku, kružnici na kružnici, vnitřek kruhu na vnitřek kruhu, polorovinu na polorovinu apod.) a při zobrazení orientovaného úhlu se zachovává nejen jeho velikost, ale také jeho orientace.

Funkce argument komplexního čísla

$$f: w = \operatorname{Arg} z = \{\varphi \in \mathbb{R}: \; z = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\,\sin\varphi)\}\,, \qquad D(f) = \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Funkční hodnota funkce $\operatorname{Arg} z$, pro niž platí $\varphi \in (-\pi, \pi\rangle$, se nazývá hlavní hodnota komplexního čísla z a značí se $\arg z$.



Obr. 6.1: Graf funkce argument $\operatorname{Arg} z$ a hlavní hodnota argumentu $\arg z$.

Vlastnosti:

i) funkce $f: w = \operatorname{Arg} z$ je nekonečněznačná funkce,

ii) funkce $f: w = \arg z$ je jednoznačná a spojitá na $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R}: \; z \leq 0\}$ (tj. na Gaussově rovině bez nekladné části reálné osy),

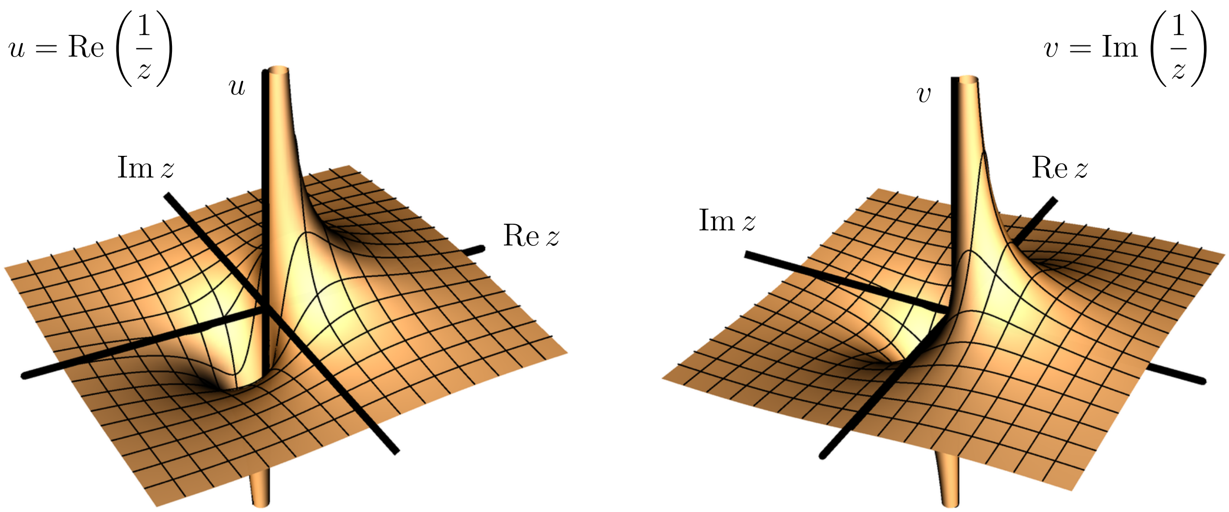
iii) funkce $\operatorname{Arg} z$ i funkce $\arg z$ jsou reálné funkce komplexní proměnné z,

iv) funkce $\arg z$ je nespojitá v každém bodě $z_0 \in \{z \in \mathbb{R}: \; z \leq 0\}$:

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z_0 < 0 \\ \operatorname{Im} z \geq 0}} \arg z = \arg z_0 = \pi, \qquad \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z_0 < 0 \\ \operatorname{Im} z < 0}} \arg z = -\pi.$$

Základní lineární lomená funkce

$$f : w = \frac{1}{z}, \qquad D(f) = \mathbb{C}^*, \qquad H(f) = \mathbb{C}^*.$$



Obr. 6.2: Graf reálné a imaginární části exponenciální funkce $w = \mathrm{e}^z$.

Vlastnosti:

i) $f(0) = \infty$, $f(\infty) = 0$,

ii) funkce f je jednoznačná, prostá a spojitá funkce na $\mathbb{C}^*$,

iii) funkce f vyjadřuje geometricky v Gaussově rovině z geometrické zobrazení složené z těchto dvou složek:

   (a) kruhové inverze se středem v počátku a s poloměrem řídicí kružnice $r = 1$,

   (b) osové souměrnosti podle reálné osy x,

iv) funkce f zobrazuje jednotkovou kružnici $c_1 : |z| = 1$ v Gaussově rovině z na jednotkovou kružnici $c_1' : |w| = 1$ v Gaussově rovině w, vnitřek kružnice c_1 zobrazuje ve vnějšek kružnice c_1' a vnějšek kružnice c_1 zobrazuje ve vnitřek kružnice c_1',

v) funkce f je konformní zobrazení na množině $D(f) = \mathbb{C}^*$ (konformní zobrazení množiny $\mathbb{C}^*$ na sebe),

vi) funkce f zobrazuje kružnice a přímky v kružnice nebo přímky (tzv. zobecněné kružnice),

vii) funkce f zobrazuje síť vzájemně ortogonálních kružnic v Gaussově rovině z v konformně ekvivalentní kartézskou síť v Gaussově rovině w a naopak.

Lineární lomená funkce

$$f : w = \begin{cases} \dfrac{az+b}{cz+d} & \text{pro } z \neq \infty, \\ \dfrac{a}{c} & \text{pro } z = \infty, \end{cases} \qquad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad c \neq 0, \quad ad - bc \neq 0, \qquad D(f) = \mathbb{C}^*.$$

Vlastnosti:

i) $H(f) = \mathbb{C}^*$,

ii) $f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$,

iii) jednoznačná, spojitá a prostá funkce z $\mathbb{C}^*$ na $\mathbb{C}^*$,

iv) $w = \dfrac{az+b}{cz+d} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{\frac{1}{c^2}(bc-ad)}{z+\frac{d}{c}}$,

v) inverzní zobrazení lineární lomené funkce je lineární lomená funkce

$$f^{-1}(w) = \begin{cases} \frac{dw-b}{-cw+a} & \text{pro } w \in \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}, \\ \infty & \text{pro } w = \frac{a}{c}, \\ -\frac{d}{c} & \text{pro } w = \infty, \end{cases}$$

vi) lineární lomené zobrazení zobrazuje zobecněné kružnice na zobecněné kružnice (přímky a kružnice v $\mathbb{C}^*$ nazýváme zobecněnými kružnicemi v $\mathbb{C}^*$),

vii) lineární lomené zobrazení zobrazuje oblasti, na které rozděluje rovinu zobecněná kružnice γ na oblasti, na kterou rozděluje rovinu zobecněná kružnice $f(\gamma)$,

viii) lineární lomené zobrazení zachovává dvojpoměr

$$\forall z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}^* : \ (z_1, z_2, z_3, z_4) = (f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)),$$

kde *dvojpoměr* uspořádané čtveřice navzájem různých bodů $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}^*$ je definován

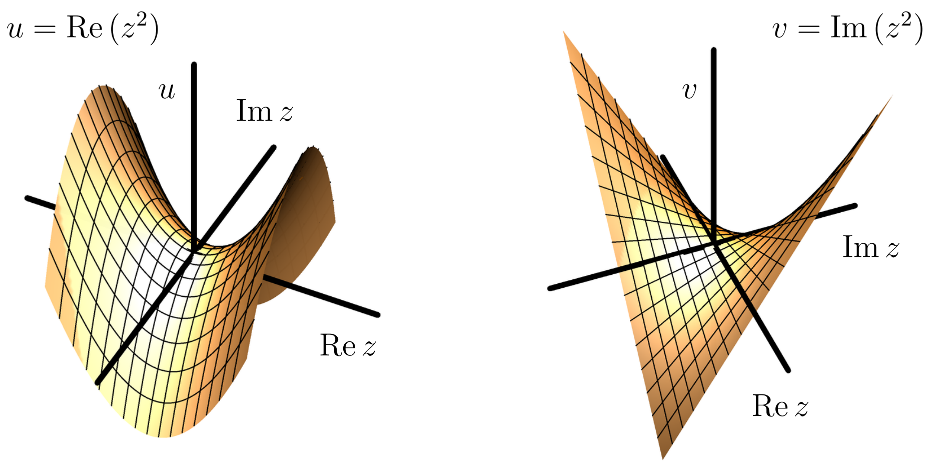
$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \begin{cases} \dfrac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \dfrac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} = \dfrac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \cdot \dfrac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1} & \text{pro } z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}, \\ \lim\limits_{z_k \to \infty} (z_1, z_2, z_3, z_4) & \text{pro } z_k = \infty,\ k \in \{1, 2, 3, 4\}, \end{cases}$$

ix) lineární lomené zobrazení $w = f(z)$, které zobrazuje navzájem různé body $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ po řadě na navzájem různé body $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}^*$ je jediné a je určeno jednoznačně vztahem

$$(z_1, z_2, z_3, z) = (w_1, w_2, w_3, w).$$

Funkce n-tá mocnina

$$f : w = z^n, \quad n \in \mathbb{N}, \qquad D(f) = \mathbb{C}^*, \qquad H(f) = \mathbb{C}^*.$$

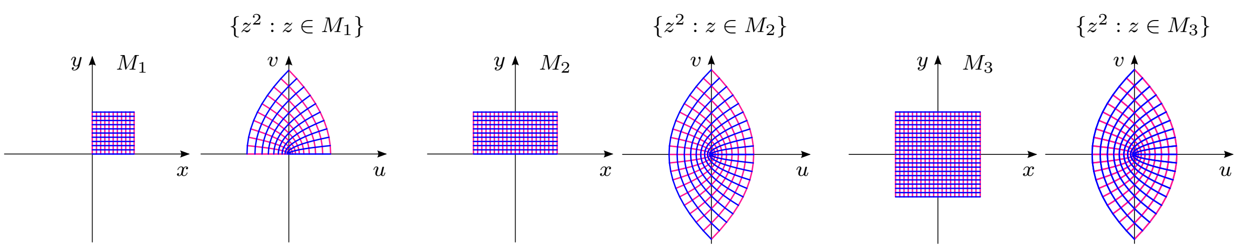


Obr. 6.3: Graf reálné a imaginární části funkce druhá mocnina $w = z^2$.

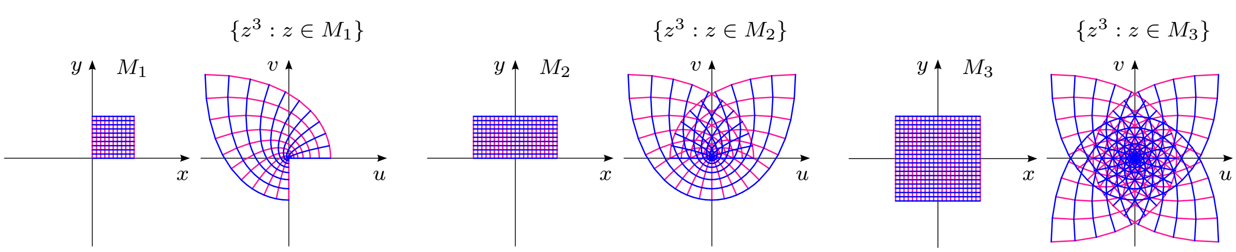
Vlastnosti:

i) $f(0) = 0$, $f(\infty) = \infty$,

ii) n-tá mocnina je jednoznačná a spojitá funkce na $\mathbb{C}^*$.



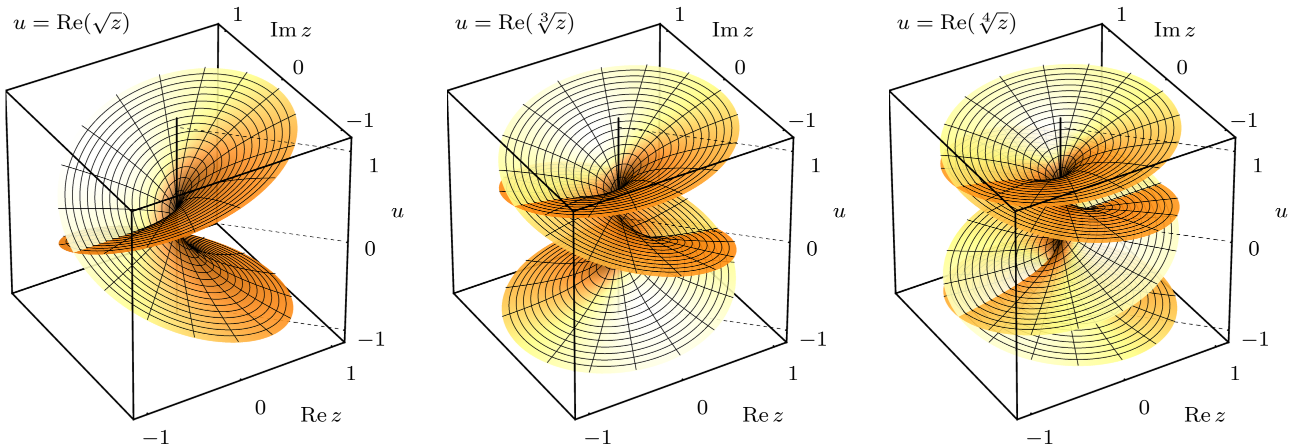
Obr. 6.4: Transformace pomocí druhé mocniny $w = u + \mathrm{i}\, v = z^2$, $z = x + \mathrm{i}\, y$.



Obr. 6.5: Transformace pomocí třetí mocniny $w = u + \mathrm{i}\, v = z^3$, $z = x + \mathrm{i}\, y$.

Funkce n-tá odmocnina

$$f : w = \sqrt[n]{z} = \{w \in \mathbb{C}^* : \ w^n = z\}\,, \quad n \in \mathbb{N},\ n \geq 2, \qquad D(f) = \mathbb{C}^*.$$



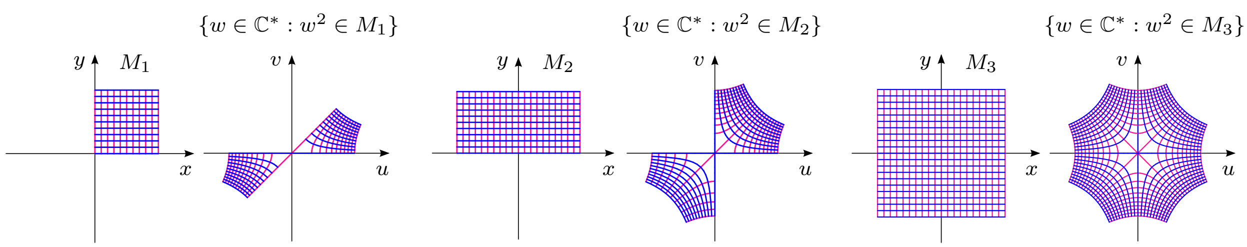
Obr. 6.6: Grafy reálných částí funkcí druhá, třetí a čtvrtá odmocnina.

Vlastnosti:

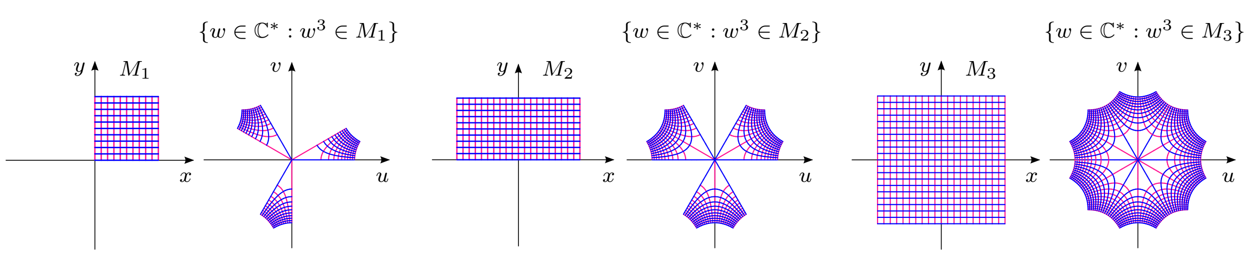
i) $H(f) = \mathbb{C}^*$,

ii) $f(0) = 0$, $f(\infty) = \infty$,

iii) n-tá odmocnina je n-značná funkce.



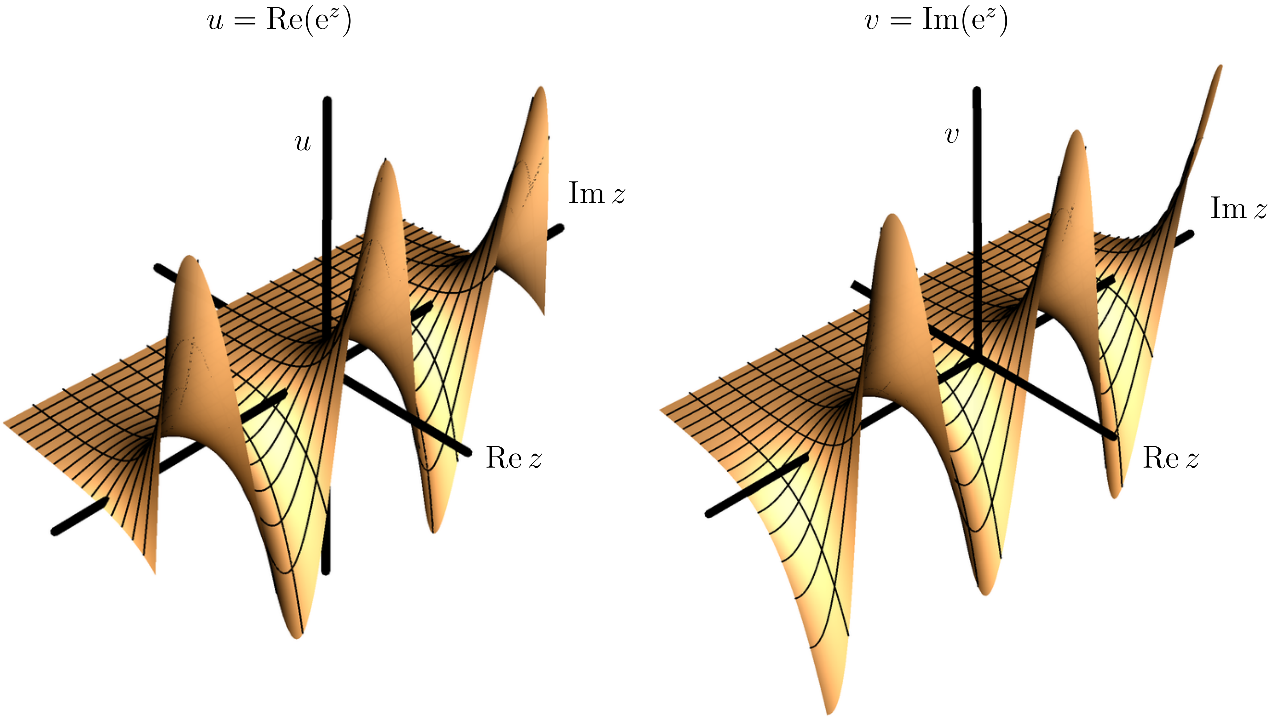
Obr. 6.7: Transformace pomocí druhé odmocniny $w = u + \mathrm{i}\,v = \sqrt{z}$, $z = x + \mathrm{i}\,y$.



Obr. 6.8: Transformace pomocí třetí odmocniny $w = u + \mathrm{i}\,v = \sqrt[3]{z}$, $z = x + \mathrm{i}\,y$.

Exponenciální funkce

$$f: w = \mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad D(f) = \mathbb{C}, \qquad H(f) = \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$



Obr. 6.9: Graf reálné a imaginární části exponenciální funkce $w = \mathrm{e}^z$.

Vlastnosti:

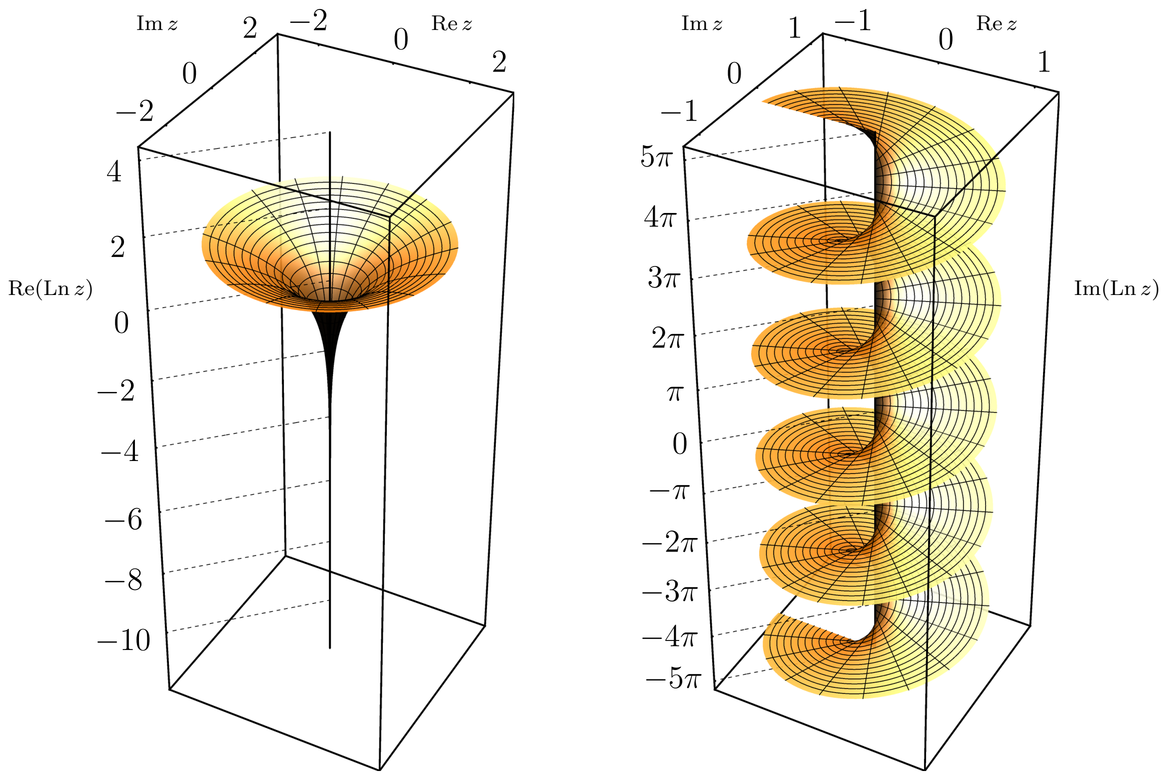
i) exponenciální funkce je jednoznačná funkce,

ii) pro $z = x + \mathrm{i}\,y$ platí $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}\,y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\,\sin y)$,

iii) exponenciální funkce je periodická v $\mathrm{Im}\,z$ s periodou 2π (pro $z = \mathrm{i}\,y$ platí $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,y} = \cos y + \mathrm{i}\,\sin y$).

Logaritmická funkce

$$f: w = \operatorname{Ln} z = \{w \in \mathbb{C}: \ \mathrm{e}^w = z\}\,, \qquad D(f) = \mathbb{C} \setminus \{0\}, \qquad H(f) = \mathbb{C}.$$



Obr. 6.10: Graf reálné a imaginární části logaritmické funkce $w = \operatorname{Ln} z$.

Vlastnosti:

i) logaritmická funkce je nekonečněznačná funkce,

ii) je-li $w_0 \in \operatorname{Ln} z$, potom $\operatorname{Ln} z = \{w \in \mathbb{C}: \ w = w_0 + \mathrm{i}\, 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\}$,

iii) $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + \mathrm{i}\ \operatorname{Arg} z$,

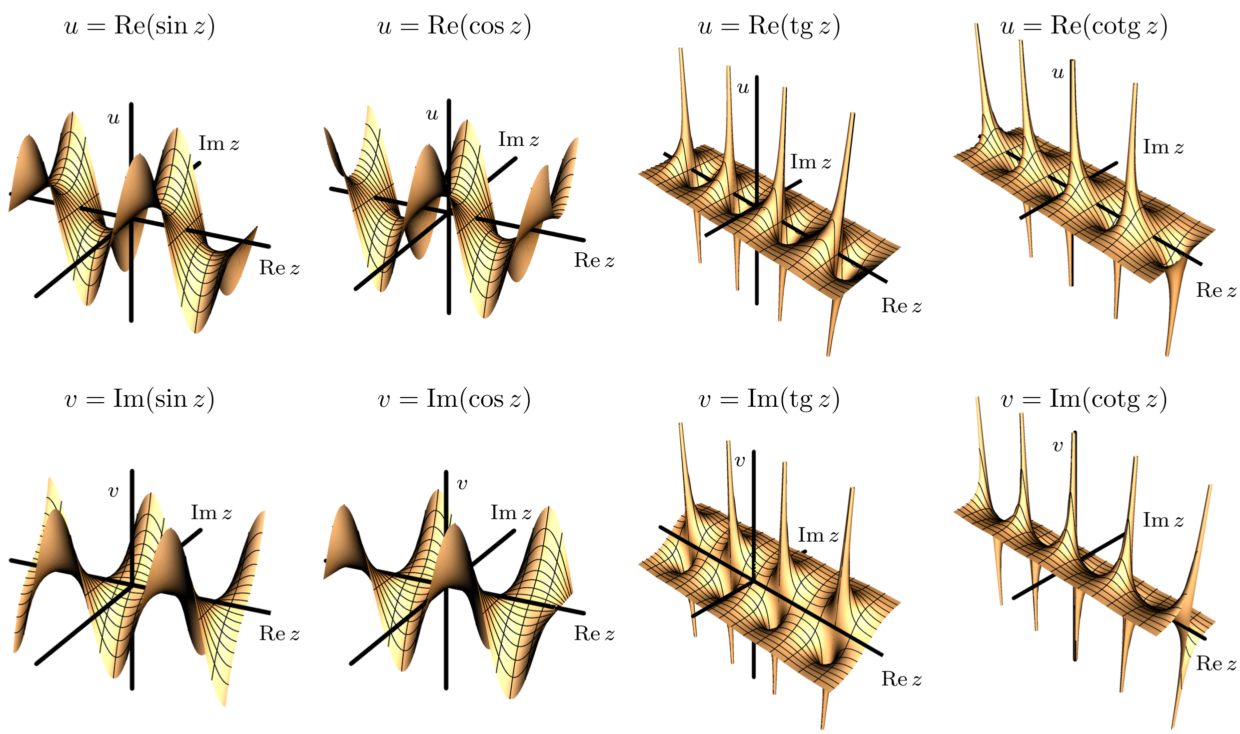
iv) hlavní hodnota logaritmu $\ln z = \ln|z| + \mathrm{i}\ \arg z$,

v) hlavní hodnota logaritmu je jednoznačná a prostá (tj. jednolistá) funkce na množině $\mathbb{C} \setminus \{0\}$,

vi) $\ln z = \ln r + \mathrm{i}\,\varphi, \quad z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, \ \varphi \in (-\pi, \pi\rangle, \ r > 0.$

Goniometrické funkce

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad D(\sin) = \mathbb{C}, \qquad H(\sin) = \mathbb{C},$$
$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z}, \qquad D(\cos) = \mathbb{C}, \qquad H(\cos) = \mathbb{C},$$
$$D(\operatorname{tg}) = \mathbb{C}, \qquad H(\operatorname{tg}) = \mathbb{C}^* \setminus \{\pm i\},$$
$$D(\operatorname{cotg}) = \mathbb{C}, \qquad H(\operatorname{cotg}) = \mathbb{C}^* \setminus \{\pm i\}.$$



Obr. 6.11: Grafy reálných a imaginárních částí goniometrických funkcí.

Vlastnosti:

i) $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$ a $\operatorname{cotg} z$ jsou jednoznačné funkce,

ii) $\sin z$ a $\cos z$ jsou periodické funkce v $\mathrm{Re}\, z$ s periodou 2π,

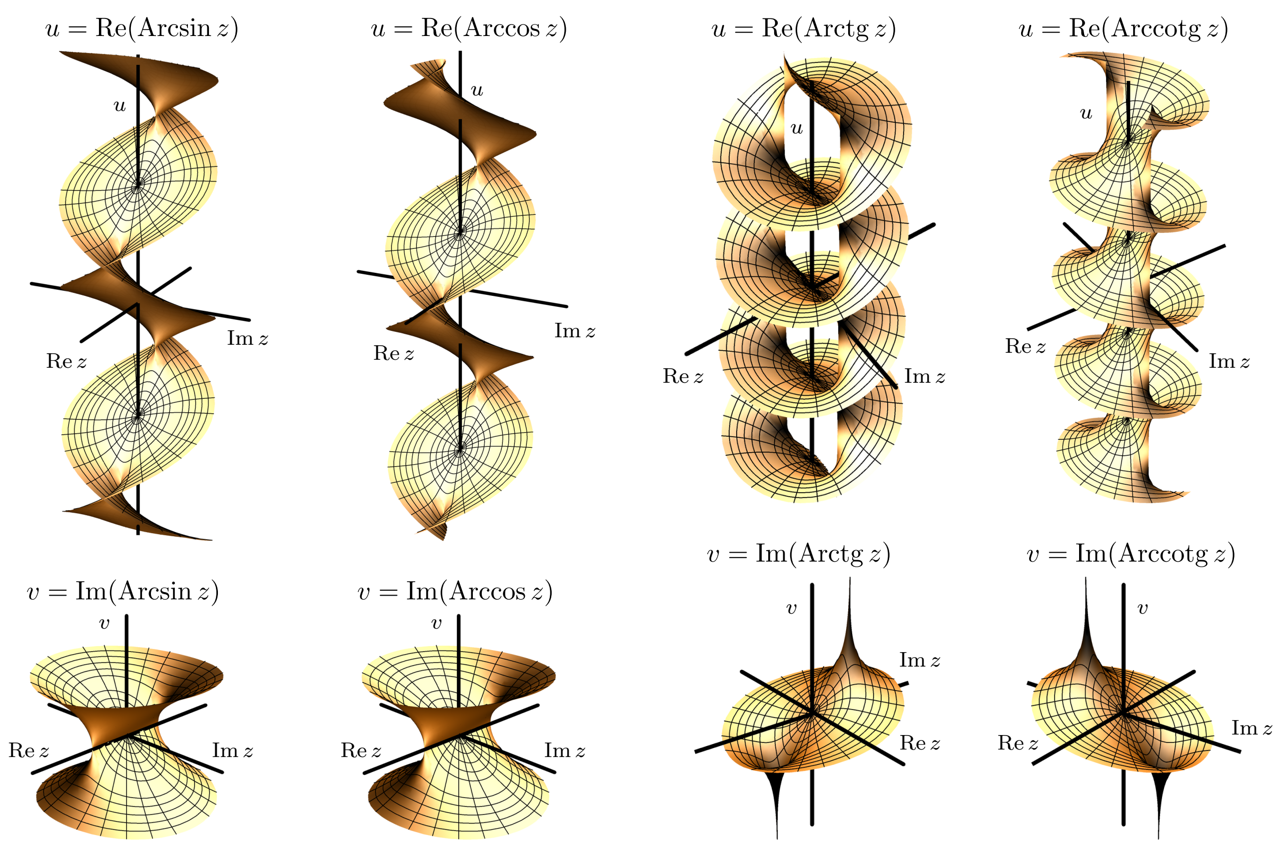
iii) $\operatorname{tg} z$ a $\operatorname{cotg} z$ jsou periodické funkce v $\mathrm{Re}\, z$ s periodou π,

iv) platí

$$\begin{aligned}
\sin(z_1 \pm z_2) &= \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2, \\
\cos(z_1 \pm z_2) &= \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2, \\
\sinh(z_1 \pm z_2) &= \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \sinh z_2, \\
\cosh(z_1 \pm z_2) &= \cosh z_1 \cosh z_2 \pm \sinh z_1 \sinh z_2.
\end{aligned}$$

Cyklometrické funkce

$$\begin{aligned}
\operatorname{Arcsin} z &= \{w \in \mathbb{C} : \sin w = z\}, & D(\operatorname{Arcsin}) &= \mathbb{C}, & H(\operatorname{Arcsin}) &= \mathbb{C},\\
\operatorname{Arccos} z &= \{w \in \mathbb{C} : \cos w = z\}, & D(\operatorname{Arccos}) &= \mathbb{C}, & H(\operatorname{Arccos}) &= \mathbb{C},\\
\operatorname{Arctg} z &= \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{tg} w = z\}, & D(\operatorname{Arctg}) &= \mathbb{C}^* \setminus \{\pm \mathrm{i}\}, & H(\operatorname{Arctg}) &= \mathbb{C},\\
\operatorname{Arccotg} z &= \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{cotg} w = z\}, & D(\operatorname{Arccotg}) &= \mathbb{C}^* \setminus \{\pm \mathrm{i}\}, & H(\operatorname{Arccotg}) &= \mathbb{C}.
\end{aligned}$$



Obr. 6.12: Grafy reálných a imaginárních částí cyklometrických funkcí.

Vlastnosti:

i) cyklometrické funkce jsou nekonečněznačné funkce,

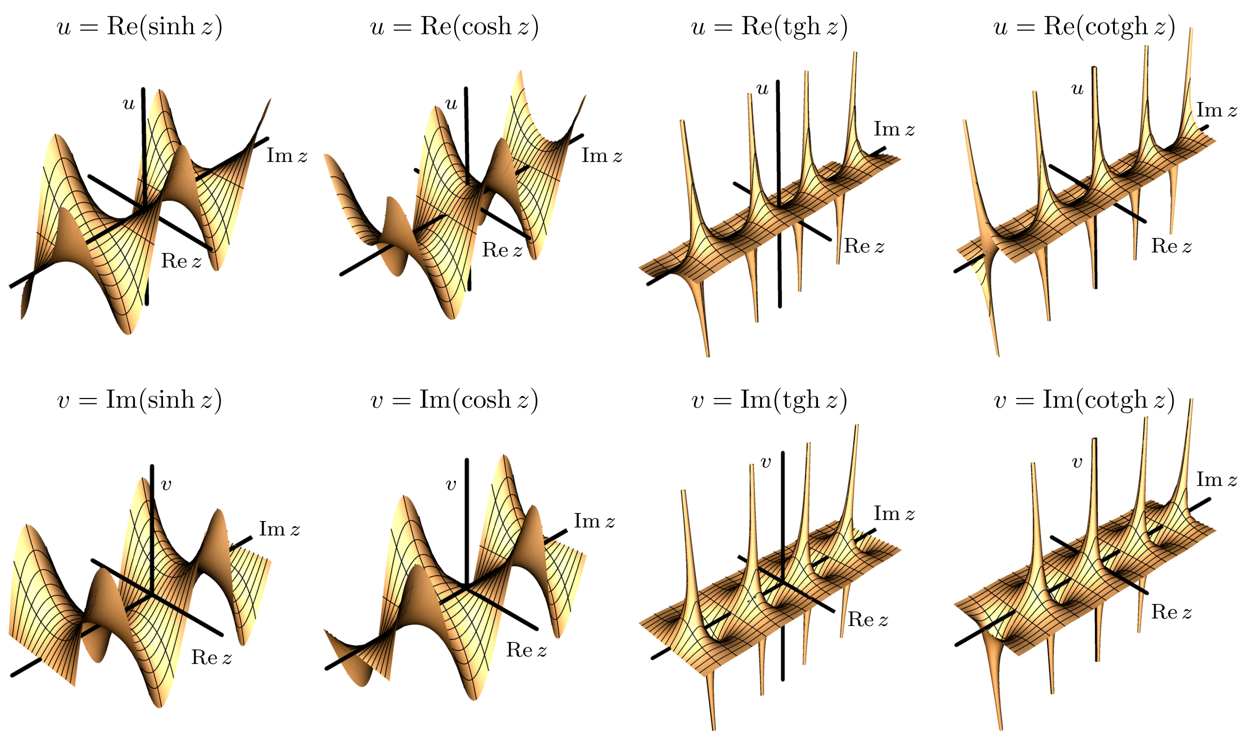
ii) hlavní hodnoty označujeme $\arcsin$, $\arccos$, arctg, $\operatorname{arccotg}$,

iii) hodnoty arkustangens a arkuskotangens v bodě ∞:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Arctg} \infty &= (2k+1)\tfrac{\pi}{2}, & k \in \mathbb{Z},\\
\operatorname{Arccotg} \infty &= k\pi, & k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Hyperbolické funkce

$$
\begin{aligned}
\sinh z &= \frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{2}, & \operatorname{tgh} z &= \frac{\sinh z}{\cosh z}, \\
\cosh z &= \frac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2}, & \operatorname{cotgh} z &= \frac{\cosh z}{\sinh z},
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
D(\sinh) &= \mathbb{C}, & H(\sinh) &= \mathbb{C}, \\
D(\cosh) &= \mathbb{C}, & H(\cosh) &= \mathbb{C}, \\
D(\operatorname{tgh}) &= \mathbb{C}, & H(\operatorname{tgh}) &= \mathbb{C}^* \setminus \{\pm 1\}, \\
D(\operatorname{cotgh}) &= \mathbb{C}, & H(\operatorname{cotgh}) &= \mathbb{C}^* \setminus \{\pm 1\}.
\end{aligned}
$$



Obr. 6.13: Grafy reálných a imaginárních částí hyperbolických funkcí.

Vlastnosti:

i) $\sinh z$, $\cosh z$, $\operatorname{tgh} z$ a $\operatorname{cotgh} z$ jsou jednoznačné funkce,

ii) $\sinh z$ a $\cosh z$ jsou periodické funkce v $\operatorname{Im} z$ s periodou 2π,

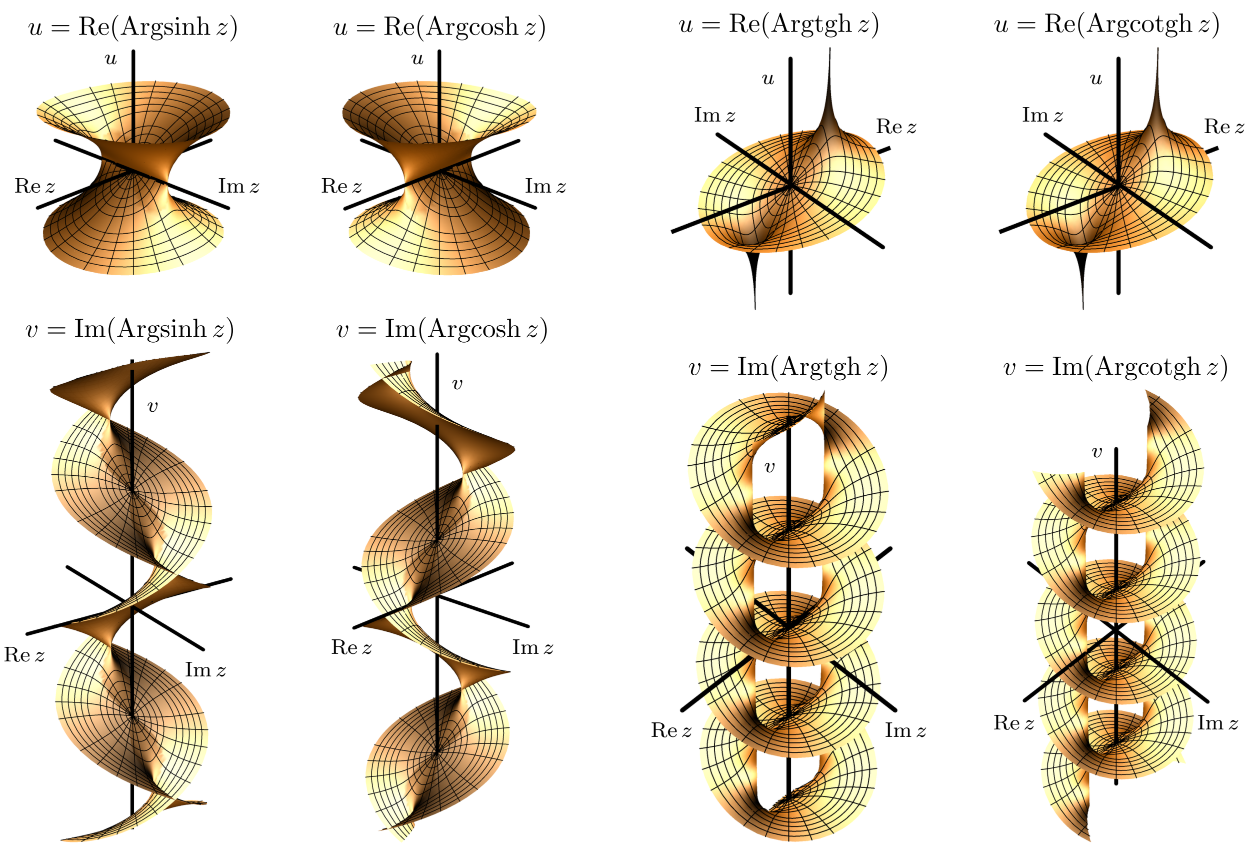
iii) $\operatorname{tgh} z$ a $\operatorname{cotgh} z$ jsou periodické funkce v $\operatorname{Im} z$ s periodou π,

iv) platí

$$
\begin{aligned}
\sin z &= \sin x \cosh y + \mathrm{i}\, \cos x \sinh y, & \cosh z &= \cos \mathrm{i}\, z, \\
\cos z &= \cos x \cosh y - \mathrm{i}\, \sin x \sinh y, & \cosh \mathrm{i}\, z &= \cos z, \\
\sinh z &= \sinh x \cos y + \mathrm{i}\, \cosh x \sin y, & \sinh z &= -\mathrm{i}\, \sin \mathrm{i}\, z, \\
\cosh z &= \cosh x \cos y + \mathrm{i}\, \sinh x \sin y, & \sinh \mathrm{i}\, z &= \mathrm{i}\, \sin z.
\end{aligned}
$$

Hyperbolometrické funkce

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Argsinh} z &= \{w \in \mathbb{C} :\ \sinh w = z\}, & D(\operatorname{Argsinh}) &= \mathbb{C}, & H(\operatorname{Argsinh}) &= \mathbb{C},\\
\operatorname{Argcosh} z &= \{w \in \mathbb{C} :\ \cosh w = z\}, & D(\operatorname{Argcosh}) &= \mathbb{C}, & H(\operatorname{Argcosh}) &= \mathbb{C},\\
\operatorname{Argtgh} z &= \{w \in \mathbb{C} :\ \operatorname{tgh} w = z\}, & D(\operatorname{Argtgh}) &= \mathbb{C}^* \setminus \{\pm 1\}, & H(\operatorname{Argtgh}) &= \mathbb{C},\\
\operatorname{Argcotgh} z &= \{w \in \mathbb{C} :\ \operatorname{cotgh} w = z\}, & D(\operatorname{Argcotgh}) &= \mathbb{C}^* \setminus \{\pm 1\}, & H(\operatorname{Argcotgh}) &= \mathbb{C}.
\end{aligned}
$$



Obr. 6.14: Grafy reálných a imaginárních částí hyperbolometrických funkcí.

Vlastnosti:

i) hyperbolometrické funkce jsou nekonečněznačné funkce,

ii) hlavní hodnoty označujeme argsinh, argcosh, argtgh, argcotgh,

iii) hodnoty argumentu hyperbolického tangens a argumentu hyperbolického kotangens v bodě ∞:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Argtgh} \infty &= (2k+1)\tfrac{\pi}{2}\mathrm{i}\,, & k \in \mathbb{Z},\\
\operatorname{Argcotgh} \infty &= k\pi\mathrm{i}\,, & k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

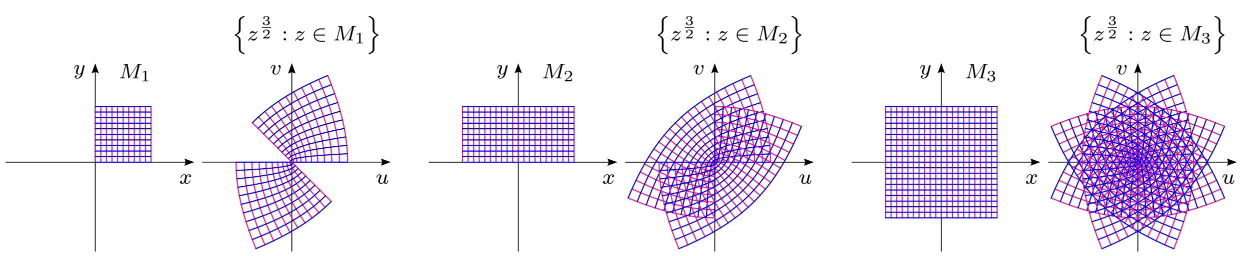
Obecná mocninná a exponenciální funkce

$$f : w = z^a = \mathrm{e}^{a \,\mathrm{Ln}\, z}, \qquad D(f) = \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad a \in \mathbb{C},$$

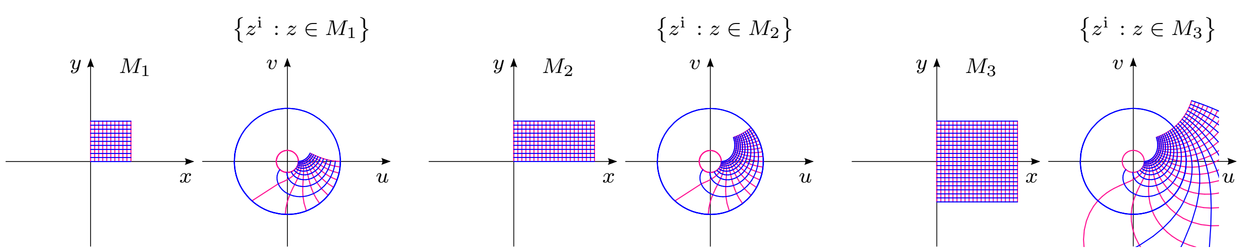
$$f : w = a^z = \mathrm{e}^{z \,\mathrm{Ln}\, a}, \qquad D(f) = \mathbb{C}, \qquad a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Vlastnosti:

i) $f(z) = z^a$ je funkcí $\begin{cases} \text{jednoznačnou} & \text{pro } a \in \mathbb{Z}, \\ n\text{-značnou} & \text{pro } a \in \mathbb{Q}, \qquad a = \frac{m}{n},\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}, \\ \text{nekonečněznačnou} & \text{pro } a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$



Obr. 6.15: Transformace pomocí mocninné funkce $w = u + \mathrm{i}\, v = z^{\frac{3}{2}}$, $z = x + \mathrm{i}\, y$.



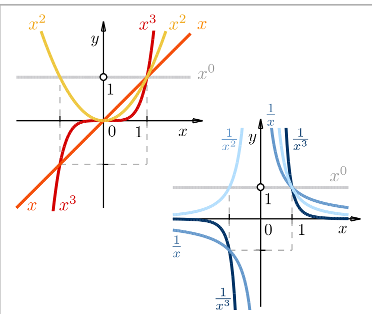
Obr. 6.16: Transformace pomocí mocninné funkce $w = u + \mathrm{i}\, v = z^{\mathrm{i}}$, $z = x + \mathrm{i}\, y$.

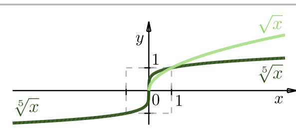
Kapitola 7

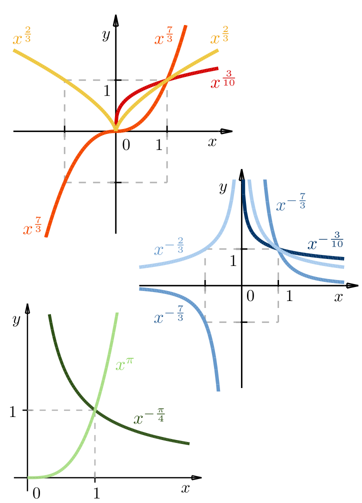
Přílohy

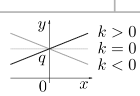
Reálné funkce jedné reálné proměnné

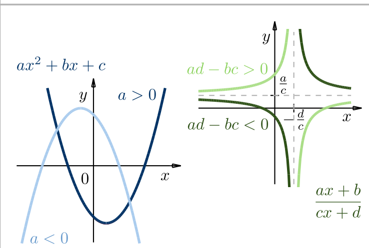
				$D(f)$	$H(f)$	pozn.	graf funkce f	$D(f')$	derivace f'
mocninná funkce s celým exponentem	$f\colon y = x^0$			$\mathbf{R}\setminus\{0\}$	$\{1\}$	sudá		$\mathbf{R}\setminus\{0\}$	$f'(x) = 0$
	$f\colon y = x^n$	$n \in \mathbf{N}$	n sudé	$\mathbf{R}$	$\langle 0, +\infty)$	sudá		$\mathbf{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
			n liché	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	lichá		$\mathbf{R}$	
	$f\colon y = x^{-n}$	$n \in \mathbf{N}$	n sudé	$\mathbf{R}\setminus\{0\}$	$(0, +\infty)$	sudá		$\mathbf{R}\setminus\{0\}$	$f'(x) = -nx^{-n-1}$
			n liché	$\mathbf{R}\setminus\{0\}$	$\mathbf{R}\setminus\{0\}$	lichá		$\mathbf{R}\setminus\{0\}$	
n-tá odmocnina	$f\colon y = \sqrt[n]{x}$	$n \in \mathbf{N}$	n sudé	$\langle 0, +\infty)$	$\langle 0, +\infty)$			$(0, +\infty)$	$f'(x) = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$
			n liché	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	lichá		$\mathbf{R}\setminus\{0\}$	
mocninná funkce s obecným exponentem	$f\colon y = x^{\frac{m}{n}}$	$m, n \in \mathbf{N}$	m sudé n liché	$\mathbf{R}$	$\langle 0, +\infty)$	sudá		$\mathbf{R}\setminus\{0\}$ ($\mathbf{R}$ pro $m \geq n$)	$f'(x) = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$
			m liché n liché	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	lichá		$\mathbf{R}\setminus\{0\}$ ($\mathbf{R}$ pro $m \geq n$)	
			m liché n sudé	$\langle 0, +\infty)$	$\langle 0, +\infty)$			$(0, +\infty)$	
	$f\colon y = x^{-\frac{m}{n}}$	$m, n \in \mathbf{N}$	m sudé n liché	$\mathbf{R}\setminus\{0\}$	$(0, +\infty)$	sudá		$\mathbf{R}\setminus\{0\}$	$f'(x) = -\frac{m}{n}x^{-\frac{m}{n}-1}$
			m liché n liché	$\mathbf{R}\setminus\{0\}$	$\mathbf{R}\setminus\{0\}$	lichá		$\mathbf{R}\setminus\{0\}$	
			m liché n sudé	$(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$			$(0, +\infty)$	
	$f\colon y = x^a$	$a \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$	$a > 0$	$\langle 0, +\infty)$	$\langle 0, +\infty)$			$(0, +\infty)$	$f'(x) = ax^{a-1}$
			$a < 0$	$(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$			$(0, +\infty)$	
	$f\colon y = q$			$\mathbf{R}$	$\{q\}$			$\mathbf{R}$	$f'(x) = 0$
	$f\colon y = kx + q$	$k \neq 0$		$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$			$\mathbf{R}$	$f'(x) = k$
	$f\colon y = ax^2 + bx + c$			$\mathbf{R}$				$\mathbf{R}$	$f'(x) = 2ax + b$
	$f\colon y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$	$c \neq 0$, $bc - ad \neq 0$		$\mathbf{R}\setminus\{-\frac{d}{c}\}$	$\mathbf{R}\setminus\{\frac{a}{c}\}$			$\mathbf{R}\setminus\{-\frac{d}{c}\}$	$f'(x) = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$
	$f\colon y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$			$\mathbf{R}$	$\{-1, 0, 1\}$	lichá			
	$f\colon y = \lvert x\rvert = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$			$\mathbf{R}$	$\langle 0, +\infty)$	sudá			
	$f\colon y = [x]$			$\mathbf{R}$	$\mathbf{Z}$	lichá			

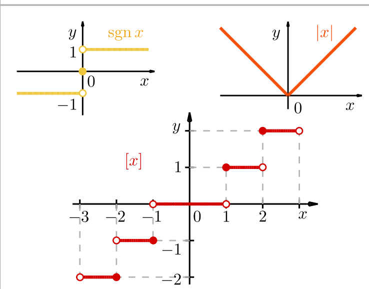






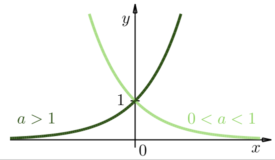
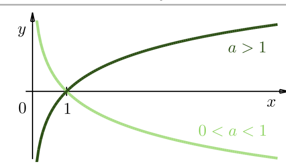
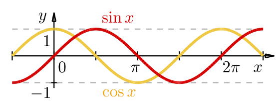
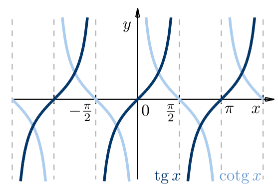
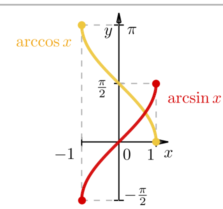
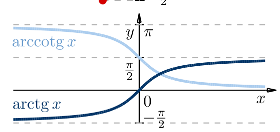
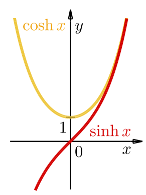
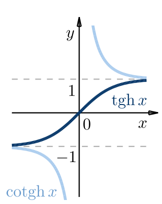
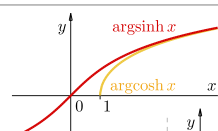
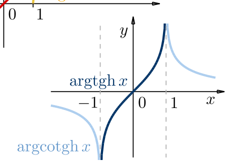






$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$

Reálné funkce jedné reálné proměnné

	transcendentní funkce	$D(f)$	$H(f)$	pozn.	graf funkce f	$D(f')$	derivace f'
exponenciální funkce	$f\colon y = a^x, \quad a > 0,\ a \neq 1$ $f\colon y = \mathrm{e}^x$ $\mathrm{e} \doteq 2{,}718281828$	$\mathbf{R}$	$(0, +\infty)$			$\mathbf{R}$	$f'(x) = a^x \ln a$ $f'(x) = \mathrm{e}^x$
logaritmická funkce	$f\colon y = \log_a x, \quad a > 0,\ a \neq 1$ $f\colon y = \log_{\mathrm{e}} x = \ln x$ $f\colon y = \log_{10} x = \log x$	$(0, +\infty)$	$\mathbf{R}$			$(0, +\infty)$	$f'(x) = \dfrac{1}{x \ln a}$ $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ $f'(x) = \dfrac{1}{x \ln 10}$
goniometrické funkce	$f\colon y = \sin x$	$\mathbf{R}$	$\langle -1, 1 \rangle$	period. $T = 2\pi$ lichá		$\mathbf{R}$	$f'(x) = \cos x$
	$f\colon y = \cos x$	$\mathbf{R}$	$\langle -1, 1 \rangle$	period. $T = 2\pi$ sudá		$\mathbf{R}$	$f'(x) = -\sin x$
	$f\colon y = \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$	$\mathbf{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$	$\mathbf{R}$	period. $T = \pi$ lichá		$\mathbf{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$	$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
	$f\colon y = \operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$	$\mathbf{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$	$\mathbf{R}$	period. $T = \pi$ lichá		$\mathbf{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$	$f'(x) = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$
cyklometrické funkce	$f\colon y = \arcsin x$	$\langle -1, 1 \rangle$	$\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$	lichá		$(-1, 1)$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
	$f\colon y = \arccos x$	$\langle -1, 1 \rangle$	$\langle 0, \pi \rangle$			$(-1, 1)$	$f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$
	$f\colon y = \operatorname{arctg} x$	$\mathbf{R}$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	lichá		$\mathbf{R}$	$f'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$
	$f\colon y = \operatorname{arccotg} x$	$\mathbf{R}$	$(0, \pi)$			$\mathbf{R}$	$f'(x) = \dfrac{-1}{1 + x^2}$
hyperbolické funkce	$f\colon y = \sinh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	lichá		$\mathbf{R}$	$f'(x) = \cosh x$
	$f\colon y = \cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$	$\mathbf{R}$	$\langle 1, +\infty)$	sudá		$\mathbf{R}$	$f'(x) = \sinh x$
	$f\colon y = \operatorname{tgh} x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$	$\mathbf{R}$	$(-1, 1)$	lichá		$\mathbf{R}$	$f'(x) = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$
	$f\colon y = \operatorname{cotgh} x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x}$	$\mathbf{R} \setminus \{0\}$	$\mathbf{R} \setminus \langle -1, 1 \rangle$	lichá		$\mathbf{R} \setminus \{0\}$	$f'(x) = \dfrac{-1}{\sinh^2 x}$
hyperbolometrické funkce	$f\colon y = \operatorname{argsinh} x$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	lichá		$\mathbf{R}$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$
	$f\colon y = \operatorname{argcosh} x$	$\langle 1, +\infty)$	$\langle 0, +\infty)$			$(1, +\infty)$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$
	$f\colon y = \operatorname{argtgh} x$	$(-1, 1)$	$\mathbf{R}$	lichá		$(-1, 1)$	$f'(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$
	$f\colon y = \operatorname{argcotgh} x$	$\mathbf{R} \setminus \langle -1, 1 \rangle$	$\mathbf{R} \setminus \{0\}$	lichá		$\mathbf{R} \setminus \langle -1, 1 \rangle$	$f'(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$

Přehled základních derivací

$f(x)$	$f'(x)$	podmínky
c (konst.)	0	$c \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}$
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$
a^x	$a^x \ln a$	$a > 0,\ a \neq 1,\ x \in \mathbb{R}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x \in (0, +\infty)$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$a > 0,\ a \neq 1,\ x \in (0, +\infty)$
x^n	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$
x^α	$\alpha . x^{\alpha-1}$	$\alpha \in \mathbb{R},\ x \in (0, +\infty)$
$\sin x$	$\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$\mathrm{tg}\, x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$
$\mathrm{cotg}\, x$	$\frac{-1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$\mathrm{arctg}\, x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
$\mathrm{arccotg}\, x$	$\frac{-1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
$\sinh x$	$\cosh x$	$x \in \mathbb{R}$
$\cosh x$	$\sinh x$	$x \in \mathbb{R}$
$\mathrm{tgh}\, x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$x \in \mathbb{R}$
$\mathrm{cotgh}\, x$	$\frac{-1}{\sinh^2 x}$	$x \neq 0$
$\mathrm{argsinh}\, x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$x \in \mathbb{R}$
$\mathrm{argcosh}\, x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$x \in (1, +\infty)$
$\mathrm{argtgh}\, x$	$\frac{1}{1-x^2}$	$x \in (-1, 1)$
$\mathrm{argcotgh}\, x$	$\frac{1}{1-x^2}$	$x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Přehled základních integrálů

1. $\displaystyle\int x^a \mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{\alpha+1} + C,$ $\qquad \begin{cases} x \in \mathbb{R}, & a \in \mathbb{N}, \\ x \neq 0, & a \in \mathbb{Z},\ a \neq -1, \\ x > 0, & a \in \mathbb{R},\ a \neq -1, \end{cases}$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln|x| + C,$ $\qquad x \neq 0,$

3. $\displaystyle\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C,$ $\qquad x \in \mathbb{R},$

4. $\displaystyle\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C,$ $\qquad x \in \mathbb{R},\ a \neq 1,\ a > 0,$

5. $\displaystyle\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C,$ $\qquad x \in \mathbb{R},$

6. $\displaystyle\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C,$ $\qquad x \in \mathbb{R},$

7. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x} \mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + C,$ $\qquad x \neq (2k+1)\tfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z},$

8. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x} \mathrm{d}x = -\operatorname{cotg} x + C,$ $\qquad x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$

9. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \arcsin x + C,$ $\qquad x \in (-1, 1),$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + C,$ $\qquad x \in \mathbb{R},$

11. $\displaystyle\int \sinh x \mathrm{d}x = \cosh x + C,$ $\qquad x \in \mathbb{R},$

12. $\displaystyle\int \cosh x \mathrm{d}x = \sinh x + C,$ $\qquad x \in \mathbb{R},$

13. $\displaystyle\int \frac{1}{\cosh^2 x} \mathrm{d}x = \operatorname{tgh} x + C,$ $\qquad x \in \mathbb{R},$

14. $\displaystyle\int \frac{1}{\sinh^2 x} \mathrm{d}x = -\operatorname{cotgh} x + C,$ $\qquad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\},$

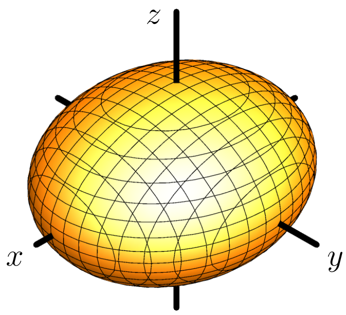
15. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \mathrm{d}x = \operatorname{argcosh} x + C,$ $\qquad x \in (1, +\infty),$

16. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \mathrm{d}x = \operatorname{argsinh} x + C,$ $\qquad x \in \mathbb{R}.$

Kvadriky v $\mathbb{R}^3$ v základní poloze (v kanonickém tvaru)

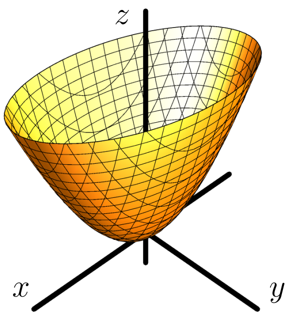
elipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



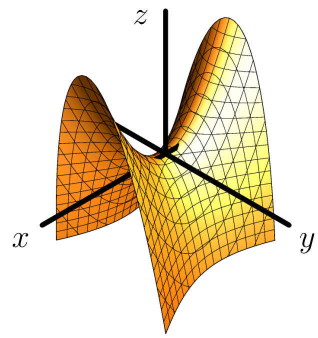
eliptický paraboloid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$$



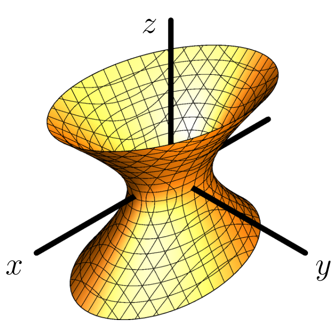
hyperbolický paraboloid

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0$$



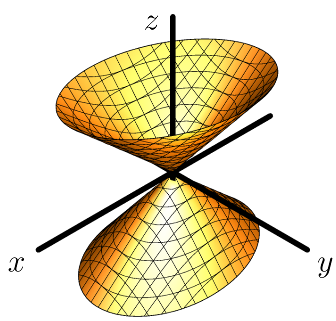
jednodílný hyperboloid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



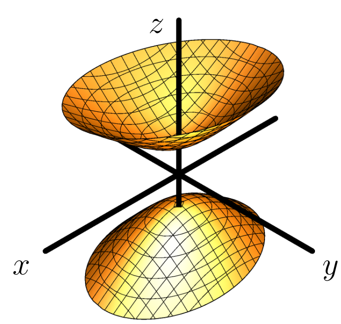
kužel

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$



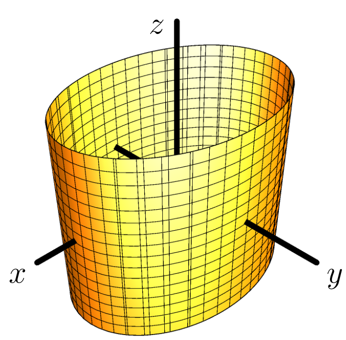
dvoudílný hyperboloid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$



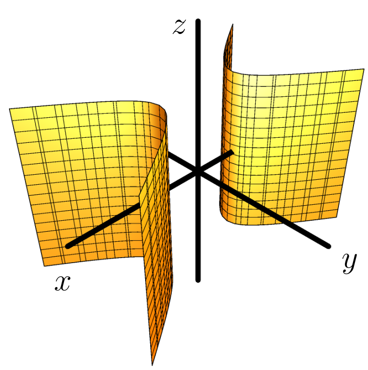
eliptický válec

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



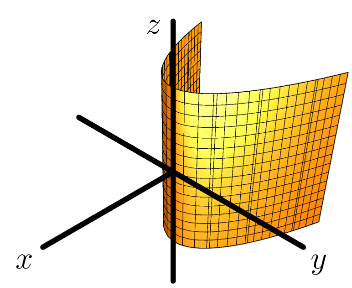
hyperbolický válec

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



parabolický válec

$$y^2 + 2ax = 0$$



Základní Maclaurinovy rozvoje

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \qquad x \in (-1, 1),$$

$$(1+x)^p = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{p}{n} x^n = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \dots, \qquad x \in (-1, 1), \quad p \in \mathbb{R},$$

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \qquad x \in \mathbb{R},$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \qquad x \in (-1, 1\rangle,$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots, \qquad x \in \mathbb{R},$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots, \qquad x \in \mathbb{R},$$

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[(2n-1)!!]^2 x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \dots, \qquad x \in \langle -1, 1\rangle,$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \qquad x \in \langle -1, 1\rangle,$$

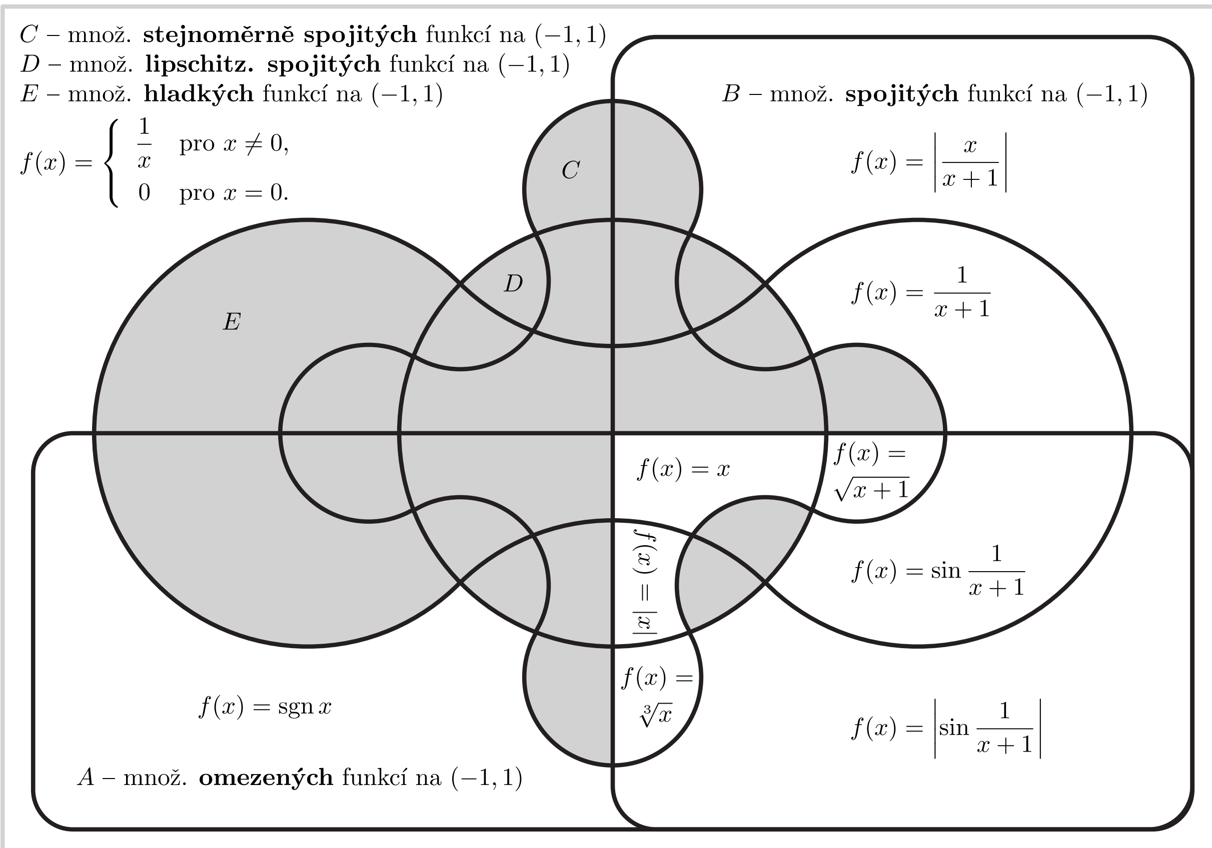
$$\sinh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots, \qquad x \in \mathbb{R},$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots, \qquad x \in \mathbb{R},$$

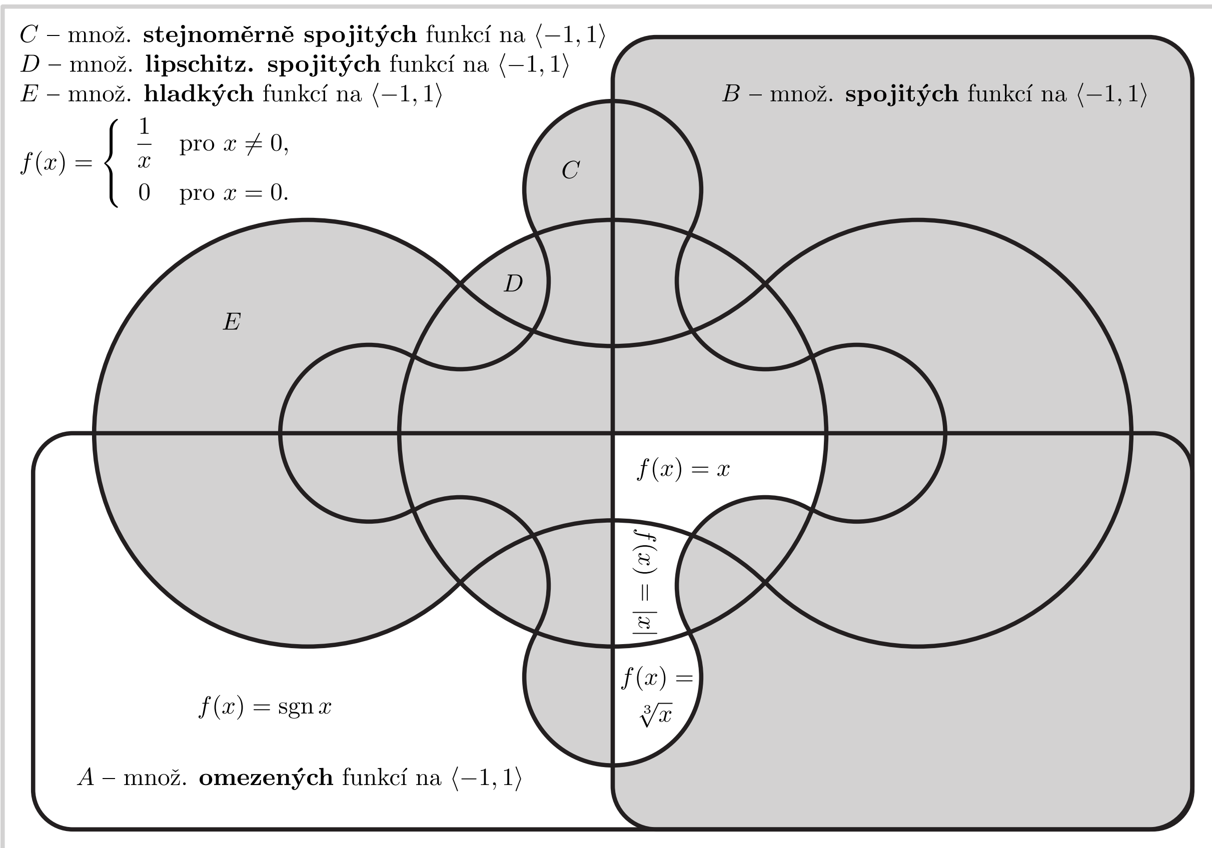
$$\operatorname{argsinh} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{[(2n-1)!!]^2 x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} - \frac{5x^7}{112} + \dots, \qquad x \in \langle -1, 1\rangle,$$

$$\operatorname{argtgh} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots, \qquad x \in (-1, 1).$$

Omezenost, spojitost a lipschitzovskost funkcí na $(-1, 1)$



Omezenost, spojitost a lipschitzovskost funkcí na $\langle -1, 1\rangle$



Řecká abeceda – 1. část

název	příkaz TEXu	velké t.	malé t.	velké p.	malé p.
alfa	`A, \alpha`	A	α		α α
beta (béta)	`B, \beta`	B	β		β
gama (gamma)	`\Gamma , \gamma`	Γ	γ	Γ	γ γ
delta	`\Delta , \delta`	Δ	δ	Δ	δ
epsílon	`E , \varepsilon, \epsilon`	E	ϵ, ε		ε ϵ
(d)zéta	`Z , \zeta`	Z	ζ		ζ ζ
éta	`H , \eta`	H	η		η η
théta	`\Theta , \theta`	Θ	θ	Θ	ϑ θ

Řecká abeceda – 2. část

název	příkaz TEXu	velké t.	malé t.	velké p.	malé p.
ióta	`I , \iota`	I	ι		
kapa (kappa)	`K , \kappa`	K	κ		$\varkappa$ κ
lambda	`\Lambda , \lambda`	Λ	λ	Λ	λ λ
mí	`M, \mu`	M	μ		μ μ
ný	`N, \nu`	N	ν		ν ν
ksí	`\Xi, \xi`	Ξ	ξ		ξ ξ
omikron	`O , o`	O	o		
pí	`\Pi , \pi, \varpi`	Π	π, ϖ	Π	π π

Řecká abeceda – 3. část

název	příkaz TEXu	velké t.	malé t.	velké p.	malé p.
ró	`P , \rho, \varrho`	P	ρ, ϱ		ϱ ρ
sigma	`\Sigma , \sigma, \varsigma`	Σ	σ, ς	Σ	σ σ
tau	`T , \tau`	T	τ		τ τ
ypsilon	`Y , \upsilon`	Y	υ		
fí	`\Phi , \phi, \varphi`	Φ	ϕ, φ	Φ	φ ϕ
chí	`X , \chi`	X	χ		χ
psí	`\Psi , \psi`	Ψ	ψ	Ψ	ψ ψ
omega	`\Omega , \omega`	Ω	ω	Ω	ω

Literatura

[1] Brabec, J., Martan, F., Rozenský, Z.: Matematická analýza I. Praha, SNTL 1985.

[2] Brabec, J., Hrůza, B.: Matematická analýza II. Praha, SNTL 1986.

[3] Došlá, Z., Došlý, O.: Diferenciální počet funkcí více proměnných. Brno, Masarykova univerzita v Brně 1999.

[4] Jarník, V.: Integrální počet II. Praha, ČSAV 1955.

[5] Knuth, D. E.: Umění programování (1. díl, Základní algoritmy). Brno, Computer Press 2008.

[6] Needham, T.: Visual Complex Analysis. New York, Oxford University Press 2000.

[7] Oldham, K., Myland, J., Spanier, J.: An atlas of functions. New York, Springer 2009.

[8] Polák, J.: Přehled středoškolské matematiky. (9. vydání) Praha, Prometheus 2008.

[9] Rektorys, K. a spol.: Přehled užité matematiky. Praha, Prometheus 1995.

[10] Shaw, W. T.: Complex Analysis with Mathematica. Cambridge, Cambridge University Press 2006.

[11] Wagon, S.: Mathematica in Action. New York, Springer 2010.

[12] The Wolfram Functions Site. [online]. [cit. 2011-11-11].
Dostupné z: http://functions.wolfram.com