FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ

Jiří Bouchala

Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století* (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Jiří Bouchala
Funkce komplexní proměnné

ISBN

Můj dům by měl dveře bez petlice
a okna nezasklená,
aby každý mohl vejít dovnitř,
...

Jan Skácel

Předmluva

Tento text vznikal tak, že jsem přepracovával své poznámky k přednáškám, které jsem vedl pro studenty Fakulty elektrotechniky a informatiky VŠB-TU Ostrava od roku 1994.

Jistě v něm zůstaly nedostatky a možná i chyby. Prosím proto čtenáře o shovívavost a sdělení všech připomínek.[1]

Chci poděkovat svému kamarádovi Mgr. Jaroslavu Drobkovi, Ph.D., který celý text pečlivě přečetl a svými připomínkami ho pomohl vylepšit.

Tento i ostatní v rámci projektu *Matematika pro inženýry 21. století* připravované výukové materiály lze najít na stránkách http://mi21.vsb.cz/. Podívejte se na ně!

V Orlové, 2012 Jiří Bouchala

[1]Všechny připomínky (výhrady, komentáře, doporučení, výhružky a dary) zasílejte (prosím) na moji e-mailovou adresu: `jiri.bouchala@vsb.cz`

Obsah

Kapitola 1

Komplexní čísla, rozšířená Gaussova rovina

1.1 Komplexní čísla

Všichni se už od střední školy setkáváme s komplexními čísly. Připomeňme si základní pojmy a vztahy, s nimiž budeme v dalším pracovat.

- Komplexní číslo z je číslo tvaru

  $$z = x + iy, \text{ kde } x,\, y \in \mathbb{R} \text{ a } i^2 = -1;$$

  číslo x resp. y nazýváme reálnou resp. imaginární částí komplexního čísla z a značíme $\operatorname{Re} z$ resp. $\operatorname{Im} z$. [1]

- Speciálním případem komplexních čísel jsou čísla reálná a ryze imaginární. Reálná čísla z jsou charakterizována podmínkou $\operatorname{Im} z = 0$, ryze imaginární čísla podmínkou $\operatorname{Re} z = 0$.

- Dvě komplexní čísla z_1 a z_2 se rovnají právě tehdy, mají-li tytéž reálné a tytéž imaginární části, tj.

  $$z_1 = z_2 \;\Leftrightarrow\; [\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \;\wedge\; \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2]\,.$$

- Pro každé komplexní číslo $z = x + iy$ definujme jeho absolutní hodnotu jako nezáporné (reálné!) číslo

  $$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$$

  a číslo komplexně sdružené vztahem

  $$\overline{z} := x - iy = \operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z.$$

[1] **Domluvme se:** napíšeme-li $z = x + iy$, myslíme tím (nebude-li řečeno jinak), že $x = \operatorname{Re} z \in \mathbb{R}$ a $y = \operatorname{Im} z \in \mathbb{R}$.

- Pro každá dvě komplexní čísla $z_1 = x_1 + iy_1$ a $z_2 = x_2 + iy_2$ definujeme

$$z_1 + z_2 := (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$
$$z_1 - z_2 := (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2),$$
$$z_1 z_2 := (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1),$$

  a je-li $z_2 \neq 0 = 0 + 0i$, definujeme taky

$$\frac{z_1}{z_2} := \frac{1}{|z_2|^2}\,(z_1 \overline{z_2}).$$

- Pro každé komplexní číslo $z = x + iy$ platí:

$$z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

Poznámka 1.1. Jedním ze zásadních rozdílů mezi reálnými a komplexními čísly je skutečnost, že *komplexní čísla nejsou uspořádaná*. Vztah $z_1 < z_2$ není mezi komplexními čísly z_1 a z_2 definován, nejsou-li obě čísla z_1 a z_2 reálná.

Příklad 1.2. Určete $\operatorname{Re} z$ a $\operatorname{Im} z$, je-li

$$z = \frac{2 + 3i}{1 - 2i}.$$

Řešení.

$$z = \frac{2 + 3i}{1 - 2i} \cdot \frac{1 + 2i}{1 + 2i} = \frac{-4 + 7i}{5} = -\frac{4}{5} + \frac{7}{5}i,$$

a proto

$$\operatorname{Re} z = -\frac{4}{5} \quad \text{a} \quad \operatorname{Im} z = \frac{7}{5}.$$

▲

1.2 Geometrická interpretace, argument komplexního čísla

Protože zřejmě existuje vzájemně jednoznačný vztah mezi body $\mathbb{R}^2$ a komplexními čísly:

$$(x, y) \;\leftrightarrow\; x + iy,$$

je přirozené znázorňovat si komplexní čísla jako body roviny. Množinu všech komplexních čísel budeme nazývat Gaussovou rovinou a značit $\mathbb{C}$.

S geometrickou interpretací souvisí i tzv. goniometrický tvar komplexního čísla z. Uvažujme $z \in \mathbb{C},\ z \neq 0$. Pak zřejmě existuje $\varphi \in \mathbb{R}$ takové, že [1]

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{1.1}$$

Z periodicity funkcí sinus a kosinus vyplývá, že číslo (úhel) φ není vztahem (1.1) určeno jednoznačně.

Definice 1.3. Množinu všech reálných čísel φ, pro něž platí rovnost (1.1), nazýváme argumentem komplexního čísla $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a značíme $\operatorname{Arg} z$, tj.

$$\operatorname{Arg} z := \{\varphi \in \mathbb{R} :\ z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)\}.$$

Poznámka 1.4. Je-li $z = 0$, je i $|z| = 0$ a rovnost (1.1) platí při `jakékoliv` volbě $\varphi \in \mathbb{R}$. Z tohoto důvodu argument čísla 0 není definován!

Věta 1.5. *Buď $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a $\varphi \in \operatorname{Arg} z$. Potom*

$$\operatorname{Arg} z = \{\varphi + 2k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Důkaz. Z periodicity funkcí sinus a kosinus a z předpokladu $\varphi \in \operatorname{Arg} z$ plyne, že

$$\{\varphi + 2k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\} \subset \operatorname{Arg} z.$$

Přesvědčme se, že platí i opačná inkluse. Buď $\psi \in \operatorname{Arg} z$ libovolný bod. Chceme dokázat, že existuje $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $\psi = \varphi + 2k\pi$.

$$\varphi,\ \psi \in \operatorname{Arg} z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|(\cos\psi + i\sin\psi)\ \wedge\ |z| \neq 0] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\varphi + i\sin\varphi = \cos\psi + i\sin\psi \Rightarrow \begin{bmatrix} \cos\varphi = \cos\psi \\ \wedge \\ \sin\varphi = \sin\psi \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \cos^2\varphi = \cos\psi\cos\varphi \\ \wedge \\ \sin^2\varphi = \sin\psi\sin\varphi \end{bmatrix} \Rightarrow \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = \cos\psi\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = \cos(\psi - \varphi) \Rightarrow [\exists k \in \mathbb{Z} :\ \psi - \varphi = 2k\pi] \Rightarrow [\exists k \in \mathbb{Z} :\ \psi = \varphi + 2k\pi]\,.$$

$\square$

[1] Bystrý čtenář nepřehlédne souvislost s *polárními souřadnicemi* v $\mathbb{R}^2$.

Definice 1.6. Takovou hodnotu argumentu $\varphi \in \operatorname{Arg} z$, pro kterou platí

$$-\pi < \varphi \leqq \pi,$$

nazýváme hlavní hodnotou argumentu komplexního čísla $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a značíme $\arg z$.

Příklad 1.7. Určete $\operatorname{Arg} z$ a $\arg z$, je-li $z = -\sqrt{3} - i$.

Řešení. Zřejmě[1]

$$\pi + \arcsin \frac{1}{2} = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} \in \operatorname{Arg} z,$$

a proto[2]

$$\operatorname{Arg} z = \{\frac{7\pi}{6} + 2k\pi : \ k \in \mathbb{Z}\}, \ \arg z = -\frac{5\pi}{6}.$$

▲

1.3 Nekonečno

Podobně jako je v reálném oboru užitečné doplnit konečná reálná čísla o $+\infty$ a $-\infty$, ukazuje se i v komplexním oboru potřeba rozšířit Gaussovu rovinu $\mathbb{C}$. Nejúčelnější je přidat pouze *jediný* bod; budeme jej značit ∞ a nazývat nekonečno.

Ukažme si ještě jednu geometrickou interpretaci komplexních čísel, tzv. stereografickou projekci, která nám přibliží volbu bodu ∞. Uvažujme kulovou plochu umístěnou tak, že se dotýká svým „jižním pólem“ roviny komplexních čísel právě v bodě 0, a označme si její „severní pól“ N. Nyní přiřaďme každému nenulovému komplexnímu číslu z bod $z^* \neq N$ ležící na dané kulové ploše tak, aby z^* byl průsečíkem této plochy s přímkou spojující obraz čísla z s bodem N. Tímto způsobem získáme vzájemně jednoznačnou korespondenci mezi (konečnými) komplexními čísly (nule odpovídá „jižní pól“) a body dané kulové plochy (samozřejmě zmenšené o bod N).

Všimněme si, že čím větší je $|z|$, tím menší je vzdálenost bodů z^* a N dané sféry. I to nás vede k tomu přidat k $\mathbb{C}$ pouze jediný bod (∞) a přiřadit mu při výše popsané projekci právě bod N.

Množinu

$$\mathbb{C} \cup \{\infty\} =: \mathbb{C}_\infty$$

budeme nazývat rozšířenou (nebo taky uzavřenou) Gaussovou rovinou.

[1] Rada čtenáři: nakreslete si obrázek.

[2] Viz větu 1.5 a definici hlavní hodnoty argumentu.

Definujme nyní pro každé $z \in \mathbb{C}$:

- $z \pm \infty = \infty \pm z = \infty$,
- $z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty$, je-li navíc $z \neq 0$,
- $\frac{z}{\infty} = 0$,
- $\frac{z}{0} = \infty$, je-li navíc $z \neq 0$,
- $\frac{\infty}{z} = \infty$,
- $\infty^n = \infty,\ \infty^{-n} = 0,\ 0^{-n} = \infty$, je-li $n \in \mathbb{N}$,
- $|\infty| = \infty,\ \overline{\infty} = \infty$.[1]

1.4 Okolí bodu

Definice 1.8. Okolím bodu $z_0 \in \mathbb{C}$ resp. ∞ s poloměrem $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ rozumíme množinu

$$U(z_0, \varepsilon) := \{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| < \varepsilon\}$$

resp. množinu

$$U(\infty, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| > \frac{1}{\varepsilon}\} \cup \{\infty\}.$$

Prstencovým okolím bodu $z \in \mathbb{C}_\infty$ s poloměrem $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ rozumíme množinu

$$P(z, \varepsilon) := U(z, \varepsilon) \setminus \{z\}.$$

Nezáleží-li nám na „velikosti" okolí (tj. na konkrétní hodnotě ε), píšeme krátce $U(z)$ resp. $P(z)$ a mluvíme o okolí resp. prstencovém okolí bodu z.

Definice 1.9. Množina $M \subset \mathbb{C}_\infty$ se nazývá otevřená, obsahuje-li s každým svým bodem i nějaké okolí tohoto bodu. Tzn.

$$M \text{ je otevřená} \quad \Leftrightarrow \quad (\forall z \in M)\,(\exists U(z)) : \ U(z) \subset M.$$

Příklady 1.10.

a) $\emptyset$, $\mathbb{C}$ a $\mathbb{C}_\infty$ jsou otevřené množiny,

[1] **Pozor,** není definováno: $\infty \pm \infty$, $0 \cdot \infty$, $\infty \cdot 0$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\operatorname{Arg} \infty$, $\arg \infty$.

b) $\{z \in \mathbb{C} : \ |z-3| < |z+2-i|\}$ a $\{z \in \mathbb{C} : \ \operatorname{Im} z < 1\}$ jsou otevřené množiny,

c) $\{2+\sqrt{3}i\}$, $\{z \in \mathbb{C} : \ \operatorname{Re} z + 2 \operatorname{Im} z = 7\}$ a $\{z \in \mathbb{C} : \ \operatorname{Im} z \leqq 1\}$ nejsou otevřené množiny.

1.5 Posloupnosti komplexních čísel

Definice 1.11. Buď $z \in \mathbb{C}_\infty$ a buď (z_n) posloupnost v $\mathbb{C}_\infty$. [a] Řekneme, že posloupnost (z_n) má limitu z a píšeme $\lim z_n = z$ nebo $z_n \to z$, platí-li

$$\left(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+\right) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqq n_0) : \ z_n \in U(z, \varepsilon).$$

Posloupnost (z_n) nazveme konvergentní, existuje-li číslo $z \in \mathbb{C}$ takové, že

$$\lim z_n = z.$$

[a] Posloupností v $\mathbb{C}_\infty$ rozumíme – podobně jako u reálných posloupností – zobrazení z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{C}_\infty$, jehož definiční obor obsahuje všechna dost velká $n \in \mathbb{N}$.

Poznámka 1.12.

- Definice limity posloupnosti vlastně říká, že vně libovolného (tzn. jakkoliv malého) okolí bodu z leží nejvýše konečně mnoho členů posloupnosti (z_n).
- Uvažujme posloupnost (z_n) a bod z v $\mathbb{C}_\infty$ a – při stereografické projekci odpovídající – posloupnost (z_n^*) a bod z^* na kulové ploše v $\mathbb{R}^3$. Pak platí

$$z_n \to z \ (\text{v } \mathbb{C}_\infty) \ \Leftrightarrow \ z_n^* \to z^* \ (\text{v } \mathbb{R}^3).$$

Věta 1.13. *Nechť $z_n = x_n + iy_n$ pro všechna dost velká $n \in \mathbb{N}$ a nechť $z = x + iy$. Potom platí*

$$\lim z_n = z \ \Leftrightarrow \ [\lim x_n = x \ \wedge \ \lim y_n = y] \, .$$

Příklad 1.14. Určete

$$\lim \frac{(2n-i)i}{n}.$$

Řešení.

$$\lim \frac{(2n-i)i}{n} = \lim \left(\frac{1}{n} + 2i \right) = \lim \frac{1}{n} + i \lim 2 = 0 + 2i = 2i.$$

▲

Poznámka 1.15. Definice limity je formálně stejná jako definice limity reálných posloupností. Platí proto i analogie mnoha vět. Uveďme pro ilustraci některé z nich.

Věta 1.16. *Každá posloupnost komplexních čísel má nejvýš jednu limitu.*

Věta 1.17. *Posloupnost komplexních čísel má limitu $z \in \mathbb{C}_\infty$ právě tehdy, když každá posloupnost z ní vybraná má tutéž limitu z.*

Věta 1.18. *Je-li posloupnost (z_n) konvergentní a taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $z_n \in \mathbb{C}$, je posloupnost (z_n) omezená (tzn. že existuje $k \in \mathbb{R}^+$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $|z_n| \leqq k$).*

Kapitola 2

Komplexní funkce reálné a komplexní proměnné

2.1 Komplexní funkce

Definice 2.1. Komplexní funkcí (komplexní proměnné) rozumíme každé zobrazení z $\mathbb{C}_\infty$ do množiny všech neprázdných podmnožin $\mathbb{C}_\infty$. Jinými slovy: komplexní funkcí f rozumíme předpis, který každému číslu $z \in Df \subset \mathbb{C}_\infty$ (a nikoho nepřekvapí, že množinu Df nazýváme definičním oborem funkce f) přiřadí jedno nebo více komplexních čísel z $\mathbb{C}_\infty$. Toto nebo tato komplexní čísla značíme $f(z)$ a nazýváme f – obrazem čísla z.
Pokud je pro `každé` $z \in Df$ množina $f(z)$ jednoprvková, nazýváme funkci f jednoznačnou. Pokud tomu tak není, nazýváme funkci f mnohoznačnou, případně – podle počtu prvků $f(z)$ – dvojznačnou, trojznačnou, ..., nekonečněznačnou.
Je-li $Df \subset \mathbb{R}$, nazýváme funkci f komplexní funkcí reálné proměnné.

Úmluva. Zadáme-li funkci pouze předpisem, rozumíme jejím definičním oborem množinu všech čísel z $\mathbb{C}_\infty$, pro něž má daný předpis smysl.[1]

Příklady 2.2.

a) $f(z) := z^2 \ldots$ `jednoznačná` funkce, $Df = \mathbb{C}_\infty$;

b) $f(z) := \operatorname{Arg} z \ldots$ `nekonečněznačná` funkce, $Df = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

[1]Například: definičním oborem funkce f definované předpisem

$$f(z) := \frac{1}{z}$$

je množina $Df = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Úmluva. Někdy budeme – nepříliš přesně – psát

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, \ \ k \in \mathbb{Z},$$

místo správného zápisu

$$\operatorname{Arg} z = \{\arg z + 2k\pi : \ \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

(Podobně i pro jiné mnohoznačné funkce.)

Definice 2.3. Buď f mnohoznačná funkce. `Jednoznačnou funkci` φ nazýváme jednoznačnou větví (mnohoznačné) funkce f, platí-li současně

(1) $D\varphi \subset Df$,

(2) $\forall z \in D\varphi : \ \ \varphi(z) \in f(z)$.

Příklad 2.4. Funkce

$$\varphi_1(z) := \arg z,$$
$$\varphi_2(z) := \arg z + 2\pi$$

jsou dvě – navzájem různé – jednoznačné větve funkce $f(z) := \operatorname{Arg} z$.

2.2 Některé důležité komplexní funkce

2.2.1 Exponenciální funkce

Exponenciální funkci definujeme pro každé $z = x + iy \in \mathbb{C}$ předpisem [1]

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+iy} := \mathrm{e}^x(\cos y + i \sin y).$$

[1] Pozorný čtenář může být touto definicí zneklidněn, značíme totiž symbolem „e" dvě různé funkce:

$$\mathrm{e}^z : \ \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\} \ \ \text{a} \ \ \mathrm{e}^x : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+.$$

Nemusíme se však bát, protože pro $z = x + 0i = x$ je

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+0i} = \mathrm{e}^x(\cos 0 + i \sin 0) = \mathrm{e}^x;$$

jinak řečeno: „komplexní" exponenciální funkce je rozšířením „reálné" exponenciální funkce na $\mathbb{C}$.

Ze stejného důvodu nebudeme v dalším měnit označení ani některých jiných komplexních funkcí (např. sin, cos, sinh, cosh, ln, ...).

Věta 2.5 (Vlastnosti exponenciální funkce).

(i) e^z *je funkce jednoznačná.*

(ii) *Oborem hodnot funkce* e^z *je* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(iii) *Funkce* e^z *je periodická s periodou* $2\pi i$.

Důkaz uvedených tvrzení plyne přímo z definice a vlastností `reálných` funkcí e^x, $\sin x$, $\cos x$. Ukažme si pro ilustraci, jak lze například dokázat $2\pi i$-periodicitu exponenciální funkce:

$$\underline{\mathrm{e}^{z+2\pi i}} = \mathrm{e}^{x+iy+2\pi i} = \mathrm{e}^x \left(\cos(y+2\pi) + i\sin(y+2\pi)\right) = \\ = \mathrm{e}^x \left(\cos y + i \sin y\right) = \mathrm{e}^{x+iy} = \underline{\mathrm{e}^z}.$$

□

2.2.2 Goniometrické funkce

Goniometrické funkce jsou definovány předpisy

$$\sin z := \frac{\mathrm{e}^{iz} - \mathrm{e}^{-iz}}{2i}, \ \cos z := \frac{\mathrm{e}^{iz} + \mathrm{e}^{-iz}}{2},$$

$$\operatorname{tg} z := \frac{\sin z}{\cos z}, \ \operatorname{cotg} z := \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Věta 2.6 (Vlastnosti goniometrických funkcí).

(i) *Všechny goniometrické funkce jsou jednoznačné.*

(ii) $\sin z$ *a* $\cos z$ *jsou funkce periodické s periodou* 2π,
$\operatorname{tg} z$ *a* $\operatorname{cotg} z$ *jsou funkce periodické s periodou* π.

(iii) *Pro každé* $z \in \mathbb{C}$ *platí:*

$$\sin(-z) = -\sin z, \ \cos(-z) = \cos z,$$

$$\operatorname{tg}(-z) = -\operatorname{tg} z, \ \operatorname{cotg}(-z) = -\operatorname{cotg} z.$$

(iv) *Pro každé* $z \in \mathbb{C}$ *platí tzv. Eulerův vzorec*

$$\mathrm{e}^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

(v)

$$\sin z = 0 \ \Leftrightarrow \ [\exists k \in \mathbb{Z} : \ z = k\pi],$$

$$\cos z = 0 \ \Leftrightarrow \ \left[\exists k \in \mathbb{Z} : \ z = \frac{\pi}{2} + k\pi\right].$$

Příklad 2.7. Určete $\operatorname{Re} z$ a $\operatorname{Im} z$, je-li $z = \cos(4+i)$.

Řešení.

$$z = \cos(4+i) = \frac{\mathrm{e}^{i(4+i)} + \mathrm{e}^{-i(4+i)}}{2} =$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{-1}(\cos 4 + i\sin 4) + \mathrm{e}(\cos(-4) + i\sin(-4))}{2} = \frac{\mathrm{e}^{-1}+\mathrm{e}}{2}\cos 4 + i\frac{\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}}{2}\sin 4,$$

a proto

$$\operatorname{Re} z = \cosh 1\ \cos 4, \quad \operatorname{Im} z = -\sinh 1\ \sin 4.$$

▲

2.2.3 Hyperbolické funkce

Hyperbolické funkce definujeme předpisy

$$\sinh z := \frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{2}, \quad \cosh z := \frac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2},$$

$$\operatorname{tgh} z := \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \operatorname{cotgh} z := \frac{\cosh z}{\sinh z}.$$

Poznámka 2.8. Podobně jako v reálném oboru můžeme i pro komplexní funkce zavést pojem inverzní funkce. Na rozdíl od funkcí reálných však budeme definovat inverzní funkci i pro funkce, které `nejsou prosté`. V takovém případě pak bude příslušná inverzní funkce funkcí mnohoznačnou. Příkladem může být níže definovaná logaritmická funkce.

2.2.4 Logaritmická funkce

Logaritmickou funkci definujeme jako funkci inverzní k funkci exponenciální, tzn.

$$\operatorname{Ln} z := \{w \in \mathbb{C} : \ \mathrm{e}^w = z\}.$$

Z vlastnosti (ii) exponenciální funkce (viz větu 2.5) vyplývá, že definičním oborem funkce $\operatorname{Ln} z$ je množina $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Buď

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

kde $|z| > 0$ a $\varphi \in \mathbb{R}$, a položme

$$\operatorname{Ln} z = u + iv.$$

Potom je
$$e^{u+iv} = z,$$
tj.
$$e^{u}\left(\cos v + i \sin v\right) = |z|\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right),$$
a proto [1]
$$u = \ln|z| \ \wedge\ \left[\exists k \in \mathbb{Z} : v = \varphi + 2k\pi\right].$$

Zjistili jsme, že pro každé $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je
$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\varphi + 2k\pi),\ \ k \in \mathbb{Z},$$
neboli, že
$$\boxed{\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z.}$$

Příklad 2.9.
$$\operatorname{Ln}(-1+i) = \ln\sqrt{2} + \frac{3\pi}{4}i + 2k\pi i,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Definice 2.10. Funkci <u>hlavní hodnota logaritmu</u> definujeme na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ předpisem
$$\ln z := \ln|z| + i \arg z.$$

Příklad 2.11.
$$\ln(-1-i) = \ln\sqrt{2} - \frac{3\pi}{4}i.$$

2.2.5 Obecná mocninná funkce

Připomeňme si: je-li $n \in \mathbb{N}$ resp. $-n \in \mathbb{N}$, je funkce $z \mapsto z^n$ definovaná předpisem
$$z^n := \underbrace{zzz\ldots z}_{n\text{-krát}} \quad \text{resp.} \quad z^n := \frac{1}{z^{-n}}.$$

Definujme nyní mocninnou funkci i pro $a \in \mathbb{C}$ takové, že $\pm\, a \notin \mathbb{N}$:
$$z^a := \{e^{as} :\ s \in \operatorname{Ln} z\} \overset{\text{ozn.}}{=} e^{a \operatorname{Ln} z}.$$

Příklad 2.12.
$$2^i = e^{i \operatorname{Ln} 2} = e^{i(\ln 2 + 2k\pi i)} = e^{-2k\pi + i\ln 2} = e^{-2k\pi}\left(\cos(\ln 2) + i\sin(\ln 2)\right),\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

[1] Symbol „ln“ zde znamená `přirozený logaritmus`, tj. funkci z $\mathbb{R}^+$ do $\mathbb{R}$.

2.2.6 n-tá odmocnina

Funkci n-tá odmocnina $(n \in \mathbb{N},\ n \neq 1)$ definujeme předpisem

$$\sqrt[n]{z} := \{w \in \mathbb{C} :\ w^n = z\}.$$

Cvičení 2.13.

a) Dokažte, že pro každé $0 \neq z \in \mathbb{C}$ a $1 < n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}}$$

a že funkce $z \mapsto z^{\frac{1}{n}}$ je právě n-`značná`.

b) Dokažte, že pro $a = \frac{m}{n}$, kde $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ a $n \in \mathbb{N}$ jsou navzájem `nesoudělná čísla`, je funkce $z \mapsto z^a$ právě n-`značná`.

c) Dokažte, že pro $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ je funkce $z \mapsto z^a$ `nekonečnězначná`.

Příklad 2.14.

$$\sqrt[4]{i} = i^{\frac{1}{4}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{4}\operatorname{Ln} i} = \mathrm{e}^{\frac{1}{4}(\frac{\pi}{2}i + 2k\pi i)} = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{8}i + k\frac{\pi}{2}i} =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}\right),\ k \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

2.3 Reálná a imaginární část funkce

Úmluva. Pokud nebude řečeno jinak, budeme pojmem komplexní funkce rozumět funkci `jednoznačnou`.

Poznámka 2.15. Ukažme si, jak lze každou konečnou komplexní funkci f, pro niž platí $Df \subset \mathbb{C}$, tzn. že

$$f :\ \mathbb{C} \to \mathbb{C},$$

vyjádřit pomocí dvou reálných funkcí dvou reálných proměnných.

Definice 2.16. Buď $f:\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Funkci

$$u:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad \text{resp.} \quad v:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

definovanou na množině

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2:\ x + iy \in Df\}$$

předpisem

$$u(x,y) := \operatorname{Re} f(x+iy) \quad \text{resp.} \quad v(x,y) := \operatorname{Im} f(x+iy)$$

nazýváme reálnou resp. imaginární částí funkce f.

Skutečnost, že u resp. v je reálnou resp. imaginární částí funkce f budeme zapisovat symbolem

$$f = u + iv.$$

Příklad 2.17. Najděme reálnou a imaginární část funkce

$$f(z) := \frac{z}{\overline{z}}.$$

Řešení.

$$f(z) = f(x+iy) = \frac{x+iy}{x-iy} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + i\frac{2xy}{x^2+y^2},$$

a proto $f = u + iv$, kde

$$u(x,y) := \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \quad \text{a} \quad v(x,y) := \frac{2xy}{x^2+y^2}.$$

▲

2.4 Limita funkce komplexní proměnné

Úmluva. Píšeme-li

$$z_0 \neq z_n \to z_0,$$

myslíme tím, že $z_n \to z_0$ a že pro všechna dost velká $n \in \mathbb{N}$ je $z_n \in \mathbb{C}_\infty \setminus \{z_0\}$.

Definice 2.18. Řekneme, že funkce $f: \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ má v bodě $z_0 \in \mathbb{C}_\infty$ limitu $a \in \mathbb{C}_\infty$ a píšeme $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = a$, platí-li implikace

$$z_0 \neq z_n \to z_0 \;\Rightarrow\; f(z_n) \to a$$

(tím rozumíme: pro `každou` posloupnost (z_n) takovou, že $z_0 \neq z_n \to z_0$, platí, že $f(z_n) \to a$).

Věta 2.19. *Nechť $f: \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ a nechť $z_0, a \in \mathbb{C}_\infty$. Potom $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = a$ právě tehdy, platí-li*

$$(\forall U(a))\,(\exists P(z_0))\,(\forall z \in P(z_0)): \; f(z) \in U(a).$$

Věta 2.20. *Nechť $f = u + iv: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a nechť $z_0 = x_0 + iy_0$ a $a = \alpha + i\beta$. Potom $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = a$ právě tehdy, platí-li*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = \alpha \qquad \wedge \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = \beta.$$

Příklady 2.21.

a)
$$\lim_{z\to i}\left(\frac{z-i}{z^2+1}\right) = \lim_{z\to i}\left(\frac{1}{z+i}\right) = \lim_{x+iy\to i}\left(\frac{1}{x+i(y+1)}\right) =$$
$$= \lim_{x+iy\to i}\left(\frac{x}{x^2+(y+1)^2} + i\frac{-(y+1)}{x^2+(y+1)^2}\right) =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,1)}\left(\frac{x}{x^2+(y+1)^2}\right) + i\lim_{(x,y)\to(0,1)}\left(\frac{-(y+1)}{x^2+(y+1)^2}\right) = 0 - \frac{1}{2}i = -\frac{1}{2}i.$$

b) $\lim\limits_{z\to -1} \arg z$ neexistuje, protože

- $-1 \neq z_n := \cos\left(\pi + \frac{(-1)^n}{n}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{(-1)^n}{n}\right) \to -1,$
- $\arg(z_{2n}) \to -\pi,$
- $\arg(z_{2n+1}) \to \pi.$

2.5 Spojitost funkce komplexní proměnné

Definice 2.22. Řekneme, že funkce $f: \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ je spojitá v bodě $z_0 \in \mathbb{C}_\infty$, platí-li

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Řekneme, že funkce f je spojitá na množině $M \subset \mathbb{C}_\infty$, platí-li pro každé $z_0 \in M$ implikace

$$\left.\begin{array}{r} z_n \to z_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}: \ z_n \in M \end{array}\right\} \Rightarrow f(z_n) \to f(z_0).$$

Řekneme, že funkce f je spojitá, je-li spojitá na svém definičním oboru.

Věta 2.23. *Nechť $f: \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ a nechť $z_0 \in \mathbb{C}_\infty$. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i)

$$f \textit{ je spojitá v bodě } z_0,$$

(ii)

$$z_n \to z_0 \ \Rightarrow \ f(z_n) \to f(z_0),$$

(iii)

$$(\forall U(f(z_0)))\,(\exists U(z_0))\,(\forall z \in U(z_0)): \ f(z) \in U(f(z_0))\,.$$

Cvičení 2.24. Rozmyslete si, jak spolu souvisí `spojitost` funkce

$$f = u + iv: \ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

se `spojitostí` funkcí

$$u, v: \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}.$$

Příklady 2.25.

a) Funkce $\arg z$ není spojitá, neboť není spojitá (např.) v bodě -1 (viz příklad 2.21 b)).

b) Funkce $\arg z$ je spojitá na množině $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0\rangle = \{z \in \mathbb{C}: \ z \notin \mathbb{R}^- \ \wedge \ z \neq 0\}$.

2.6 Komplexní funkce reálné proměnné. Křivky

Buď f komplexní funkcí reálné proměnné, tj. buď f zobrazením z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{C}_\infty$. Podobně jako u komplexních funkcí komplexní proměnné můžeme i zde zavést pojem limity a spojitosti.

Definice 2.26. Buď $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}_\infty$.
Řekneme, že funkce f má v bodě $t_0 \in \mathbb{R}$ limitu $a \in \mathbb{C}_\infty$ a píšeme $\lim\limits_{t\to t_0} f(t) = a$, platí-li

$$t_0 \neq t_n \to t_0 \ \ (\text{v } \mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad f(t_n) \to a.$$

Řekneme, že funkce f je spojitá v bodě $t_0 \in \mathbb{R}$, platí-li

$$\lim_{t\to t_0} f(t) = f(t_0).$$

Řekneme, že funkce f je spojitá na množině $M \subset \mathbb{R}$, platí-li pro každé $t_0 \in M$ implikace

$$\left.\begin{array}{r} t_n \to t_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}: \ t_n \in M \end{array}\right\} \ \Rightarrow \ f(t_n) \to f(t_0).$$

Řekneme, že funkce f je spojitá, je-li spojitá na svém definičním oboru.

Velice důležitou třídu spojitých funkcí tvoří křivky.

Definice 2.27. Křivkou v $\mathbb{C}_\infty$ (resp. v $\mathbb{C}$) rozumíme každou spojitou komplexní funkci reálné proměnné

$$\gamma: \ I \to \mathbb{C}_\infty \ \ (\text{resp. } \gamma: \ I \to \mathbb{C}),$$

kde $I = D\gamma \subset \mathbb{R}$ je interval.
Množinu

$$\langle\gamma\rangle := \gamma(I) = \{\gamma(t): \ t \in I\} \subset \mathbb{C}_\infty$$

pak nazýváme geometrickým obrazem křivky γ. Je-li $M = \langle\gamma\rangle$, říkáme, že γ je parametrizací množiny M.

Poznámka 2.28. Již jsme si všimli, že existuje vzájemně jednoznačný vztah mezi body $\mathbb{R}^2$ a body $\mathbb{C}$:

$$(x, y) \ \leftrightarrow \ x + iy.$$

Podobně si lze všimnout, že existuje vzájemně jednoznačný vztah mezi křivkami v $\mathbb{R}^2$ a křivkami v $\mathbb{C}$:

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \ \leftrightarrow \ \gamma = \gamma_1 + i\gamma_2.$$

Můžeme proto i pro křivky v $\mathbb{C}$ považovat za známé pojmy zavedené pro křivky v $\mathbb{R}^2$ (viz [1]). Uveďme pro příklad některé z nich:

- jednoduchá křivka,
- uzavřená křivka,
- jednoduchá uzavřená křivka,
- opačně orientovaná křivka,
- hladký oblouk,
- po částech hladká křivka,
- počáteční a koncový bod křivky,
- derivace křivky v bodě,
- tečný vektor křivky, ...

Cvičení 2.29. Znázorněte v Gaussově rovině geometrický obraz křivky γ, je-li

a) $\gamma(t) := 2 - 3i + 2\mathrm{e}^{-2it},\ t \in \langle 0, \frac{3}{4}\pi \rangle$;

b) $\gamma(t) := \begin{cases} 4\mathrm{e}^{it},\ t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle, \\ i(4 + \frac{\pi}{2} - t),\ t \in \langle \frac{\pi}{2}, 4 + \frac{\pi}{2} \rangle, \\ t - 4 - \frac{\pi}{2},\ t \in \langle 4 + \frac{\pi}{2}, 8 + \frac{\pi}{2} \rangle. \end{cases}$

Definice 2.30.

- Uzávěrem množiny $M \subset \mathbb{C}_\infty$ rozumíme množinu

$$\overline{M} := \{z \in \mathbb{C}_\infty :\ \text{existuje posloupnost } (z_n) \text{ v } M \text{ taková, že } z_n \to z\}.$$

  (Rozumíme-li uzavřenými množinami doplňky množin otevřených, lze $\overline{M}$ ekvivalentně definovat jako nejmenší uzavřenou množinu obsahující M.)

- Množiny $A, B \subset \mathbb{C}_\infty$ nazýváme oddělenými, platí-li

$$\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset.$$

- Množina $M \subset \mathbb{C}_\infty$ se nazývá souvislá, nelze-li ji napsat jako sjednocení dvou neprázdných oddělených množin. Tzn. že $M \subset \mathbb{C}_\infty$ je souvislá, platí-li implikace

$$\left.\begin{aligned} M &= A \cup B \\ \overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} &= \emptyset \end{aligned}\right\} \Rightarrow\ [A = \emptyset\ \vee B = \emptyset]\,.$$

Definice 2.31. Množina $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ se nazývá oblastí, platí-li současně tyto dvě podmínky:

(1) Ω je otevřená množina (viz definici 1.9),

(2) Ω je souvislá množina (tzn. – v případě otevřené množiny – že každé dva body Ω lze spojit křivkou v Ω; přesněji: pro každé dva body $z_1, z_2 \in \Omega$ existuje křivka $\gamma : \langle a, b\rangle \to \Omega$ taková, že $\gamma(a) = z_1,\ \gamma(b) = z_2$).

Definice 2.32. Buď $M \subset \mathbb{C}_\infty$. Množinu $K \subset M$ nazýváme komponentou množiny M, má-li současně tyto dvě vlastnosti:

(1) K je souvislá množina;

(2) je-li $K^* \subset M$ souvislá množina obsahující K (tzn. $K \subset K^*$), je $K = K^*$. [a]

[a] Komponentou množiny tedy nazýváme každou její `maximální souvislou podmnožinu`.

Poznámka 2.33. Dá se ukázat,[1] že každá množina $M \subset \mathbb{C}_\infty$ je sjednocením systému všech svých komponent; tento systém je přitom disjunktní.

Definice 2.34. Oblast $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$, jejíž doplněk v $\mathbb{C}_\infty$ (tj. množina $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$) má právě n různých komponent, se nazývá n–násobně souvislá oblast. Jednonásobně souvislá oblast se nazývá jednoduše souvislá oblast.

Příklady 2.35.

a) $\emptyset,\ \mathbb{C},\ \mathbb{C}_\infty,\ U(z),$ kde $z \in \mathbb{C}_\infty$, jsou jednoduše souvislé oblasti.

b) $P(z),\ \mathbb{C} \setminus \{z\},$ kde $z \in \mathbb{C}$, jsou dvojnásobně souvislé oblasti.

c) $U(1, 2010) \setminus \{2, 4, 5 + i\}$ je čtyřnásobně souvislá oblast.

d) $U(3, 2) \cup U(4i, 3)$ není oblast (není souvislá).

e) $\mathbb{C}_\infty \setminus \{z \in \mathbb{C} :\ \arg z \in \langle 0, \frac{\pi}{4}\rangle\}$ není oblast (není otevřená).

[1] Viz např. [4].

Kapitola 3

Derivace komplexní funkce komplexní proměnné

3.1 Derivace funkce

Definice 3.1. Buď $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.
Derivaci funkce f v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ definujeme rovností

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

existuje-li limita vpravo a je-li `konečná`.
Řekneme, že funkce f je holomorfní na množině Ω, je-li $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená množina a existuje-li $f'(z)$ pro každé $z \in \Omega$.
Řekneme, že funkce f je holomorfní v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$, je-li f holomorfní na nějakém okolí bodu z_0 (tj. má-li derivaci v každém bodě nějakého okolí $U(z_0)$).

Poznámka 3.2. Všimněme si, že definice derivace je `formálně` totožná s definicí derivace reálné funkce reálné proměnné. Formálně stejné by byly formulace i důkazy mnoha vět o „počítání“ derivací.[1] Nebudeme je proto uvádět.

Věta 3.3. *Má-li funkce $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ derivaci v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$, je f v bodě z_0 spojitá.*

Důkaz. Z předpokladu

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C}$$

[1] Máme na mysli např. věty o derivování součtu, rozdílu, součinu, podílu, složené funkce, ...

plyne existence prstencového okolí $P(z_0)$ takového, že platí

$$\forall z \in P(z_0): \quad \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| < |f'(z_0)| + 1,$$

a proto taky

$$\forall z \in P(z_0): \quad 0 \leqq |f(z) - f(z_0)| < (|f'(z_0)| + 1)\,|z - z_0|.$$

Vezměme nyní libovolnou posloupnost (z_n) takovou, že $z_n \to z_0$. Z výše uvedeného tvrzení pak vyplývá, že $|f(z_n) - f(z_0)| \to 0$, a proto $f(z_n) \to f(z_0)$.

Právě jsme dokázali spojitost funkce f v bodě z_0 (viz větu 2.23).

□

Věta 3.4. *Funkce $f = u + iv$ má v bodě $z_0 = x_0 + iy_0$ derivaci právě tehdy, platí-li tyto dvě podmínky:*

(i) *u a v jsou diferencovatelné v bodě (x_0, y_0),* [a]

(ii) *u a v splňují v bodě (x_0, y_0) tzv. Cauchyho–Riemannovy podmínky:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \\ -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) &= \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Navíc, pokud $f'(z_0)$ existuje, platí

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0).$$

[a] Připomeňme si důležité tvrzení - postačující podmínku diferencovatelnosti:

Buď $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Jsou-li funkce $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ a $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ spojité v bodě (x_0, y_0), je funkce φ diferencovatelná v bodě (x_0, y_0).

Poznámka 3.5. Vyjádření f' pomocí parciálních derivací funkcí u a v a z něho plynoucí Cauchyho–Riemannovy podmínky by neměly být po prohlédnutí následujících řádků žádným překvapením. [1]

[1] Je třeba si ovšem domyslet smysl výrazů typu: „$\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \ldots$“ .

Všimněme si: existuje-li $f'(z_0)$, je

$$\begin{aligned}
\underline{f'(z_0)} &= \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}}\frac{f(x_0+h+iy_0)-f(x_0+iy_0)}{(x_0+h+iy_0)-(x_0+iy_0)} = \\
&= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}}\frac{u(x_0+h,y_0)+iv(x_0+h,y_0)-u(x_0,y_0)-iv(x_0,y_0)}{(x_0+h-x_0)+i(y_0-y_0)} = \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{u(x_0+h,y_0)-u(x_0,y_0)}{h} + i\lim_{h\to 0}\frac{v(x_0+h,y_0)-v(x_0,y_0)}{h} = \\
&= \underline{\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)},
\end{aligned}$$

a podobně

$$\begin{aligned}
\underline{f'(z_0)} &= \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{\substack{s\to 0\\ s\in\mathbb{R}}}\frac{f(x_0+i(y_0+s))-f(x_0+iy_0)}{(x_0+i(y_0+s))-(x_0+iy_0)} = \\
&= \lim_{\substack{s\to 0\\ s\in\mathbb{R}}}\frac{u(x_0,y_0+s)+iv(x_0,y_0+s)-u(x_0,y_0)-iv(x_0,y_0)}{(x_0-x_0)+i(y_0+s-y_0)} = \\
&= \lim_{s\to 0}\frac{v(x_0,y_0+s)-v(x_0,y_0)}{s} + \frac{1}{i}\lim_{s\to 0}\frac{u(x_0,y_0+s)-u(x_0,y_0)}{s} = \\
&= \underline{\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)-i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)}.
\end{aligned}$$

Příklad 3.6. Zjistěme, ve kterých bodech má funkce

$$f(z) := \mathrm{e}^z$$

derivaci, a vyjádřeme ji.

Řešení.
Pro každé $x+iy\in\mathbb{C}$ platí:

$$f(x+iy) = \mathrm{e}^{x+iy} = \underbrace{\mathrm{e}^x\cos y}_{=:u(x,y)} + i\,\underbrace{\mathrm{e}^x\sin y}_{=:v(x,y)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \mathrm{e}^x\cos y = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y),$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \mathrm{e}^x\sin y = \frac{\partial v}{\partial x}(x,y).$$

Protože funkce u a v jsou navíc zřejmě diferencovatelné v každém bodě $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, platí pro každé $z = x + iy \in \mathbb{C}$, že

$$\underline{f'(z)} = f'(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) =$$
$$= \mathrm{e}^x \cos y + i\mathrm{e}^x \sin y = \mathrm{e}^{x+iy} = f(x+iy) = \underline{f(z)}.$$

▲

3.2 Harmonické funkce, harmonicky sdružené funkce

Definice 3.7. Buď $M \subset \mathbb{R}^2$ otevřená množina. Řekneme, že funkce $\varphi: \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je harmonická na množině M, platí-li pro každý bod $(x, y) \in M$ tyto dvě podmínky:

(1) φ má v bodě (x, y) spojité všechny parciální derivace až do druhého řádu včetně (tj. φ je třídy C^2 na M),

(2) $\Delta\varphi(x, y) := \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(x, y) = 0$.

Příklady 3.8.

a) Funkce $\varphi(x, y) := x + y + \mathrm{e}^x \cos y$ je harmonická na $\mathbb{R}^2$.

b) Funkce $\varphi(x, y) := \operatorname{Im}\,(\ln(x + iy))$ není harmonická na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. [1]

Úmluva. V dalším budeme psát zkráceně (ale nepříliš přesně), že „funkce φ je harmonická na množině $\Omega \subset \mathbb{C}$“, místo správného „funkce φ je harmonická na množině $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x + iy \in \Omega\}$“.

Pozorování 3.9. Předpokládejme, že funkce $f = u + iv$ má v každém bodě oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}$ derivaci druhého řádu [2] a že funkce u a v jsou třídy C^2 na množině $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x + iy \in \Omega\}$. Z věty 3.4 pak plyne, že pro každý bod $x + iy \in \Omega$ platí

[1] Otázka čtenáři: *Proč?*

[2] Buď $n \in \mathbb{N}$. Definujme $(n+1)$–ní derivaci funkce f v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ indukcí

$$f^{(n+1)}(z_0) = \left(f^{(n)}\right)'(z_0),$$

tj.

$$f^{(n+1)}(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f^{(n)}(z) - f^{(n)}(z_0)}{z - z_0},$$

existuje-li limita vpravo a je-li `konečná`.

$$f'(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y),$$

$$f''(x+iy) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) - i\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y).$$

Zaměřme nyní svoji pozornost na poslední z uvedených rovností: porovnáním reálných a imaginárních částí zjistíme, že

$$\forall x+iy \in \Omega: \ \Delta u(x,y) = 0 = \Delta v(x,y),$$

neboli, že funkce u a v jsou na oblasti Ω harmonické.

Následující věta toto pozorování ještě zobecňuje.

Věta 3.10. *Nechť funkce $f = u + iv$ je holomorfní na oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}$. Pak funkce u a v jsou harmonické na Ω.*

Definice 3.11. Řekneme, že funkce $u, v: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jsou harmonicky sdružené na oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}$, platí-li současně:

(1) u a v jsou harmonické na Ω,

(2) u a v splňují na Ω Cauchyho–Riemannovy podmínky.

Pozorování 3.12. Všimněme si, že harmonicky sdružené funkce tvoří právě reálné a imaginární části holomorfních funkcí.

Příklad 3.13. Najděme (existuje-li) holomorfní funkci $f = u + iv$, je-li

$$u(x,y) := x^2 - y^2 + 2xy.$$

Řešení. Hledejme funkci $v: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ „svázanou“ Cauchyho–Riemannovými podmínkami s funkcí u:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2x + 2y = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \ \Rightarrow \ v(x,y) = 2xy + y^2 + \varphi(x),$$

kde $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Nyní dosaďme do druhé z Cauchyho–Riemannových podmínek:

$$-\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 2y - 2x = \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 2y + \varphi'(x),$$

a proto

$$\varphi(x) = -x^2 + c, \text{ kde } c \in \mathbb{R},$$
$$v(x,y) = 2xy + y^2 - x^2 + c.$$

Snadno se lze přesvědčit,[1] že funkce

$$f(x+iy) := x^2 - y^2 + 2xy + i(2xy + y^2 - x^2 + c)$$

je při každé volbě $c \in \mathbb{R}$ holomorfní na $\mathbb{C}$.

▲

Věta 3.14. *Nechť u resp. v je harmonická funkce na* ***jednoduše souvislé oblasti*** *$\Omega \subset \mathbb{C}$. Potom existuje až na ryze imaginární resp. reálnou konstantu jednoznačně určená funkce $f:\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ taková, že*

(i) *f je holomorfní na Ω,*

(ii) *pro každé $x+iy \in \Omega$ platí: $u(x,y) = Re\, f(x+iy)$ resp. $v(x,y) = Im\, f(x+iy)$.*

Cvičení 3.15.

a) Najděte všechny na oblasti $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorfní funkce $f = u + iv$, kde

$$v(x,y) := \frac{y}{x^2+y^2}.$$

b) Dokažte, že je funkce

$$v(x,y) := \ln(x^2+y^2)$$

harmonická na oblasti $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, a že přesto neexistuje funkce $u:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ taková, aby $f := u + iv$ byla holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

3.3 Poznámka ke „geometrickému významu“ derivace

Předpokládejme, že je funkce $f:\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfní v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ a že

$$0 \neq f'(z_0) = |f'(z_0)|\, \mathrm{e}^{i \arg f'(z_0)}.$$

Z definice derivace pak plyne, že

$$\lim_{z \to z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| = |f'(z_0)| \in \mathbb{R}^+,$$

[1] Stačí ověřit podmínky (i) a (ii) z věty 3.4.

a proto pro z „blízké“ bodu z_0 je číslo $|f(z) - f(z_0)|$ „blízké“ číslu $|f'(z_0)| \cdot |z - z_0|$. *Jinak řečeno:* pro „malá“ $\delta > 0$ se f–obraz kružnice $\{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| = \delta\}$ „málo liší“ od kružnice $\{w \in \mathbb{C} : \ |w - f(z_0)| = |f'(z_0)| \cdot \delta\}$.

Ukažme si nyní, jak lze geometricky interpretovat $\arg f'(z_0)$. Buď γ libovolný hladký oblouk v $\mathbb{C}$ takový, že $\gamma(t_0) = z_0$. Pak číslo $\arg \gamma'(t_0)$ udává úhel, který svírá tečný vektor $\gamma'(t_0)$ s kladnou částí reálné osy.[1] Teď uvažujme (na „dostatečně malém“ okolí bodu t_0 korektně definovanou) křivku $\Gamma(t) := f(\gamma(t))$ a zkoumejme odchylku tečného vektoru $\Gamma'(t_0)$ od kladné části reálné osy, tj. argument $\Gamma'(t_0)$. Protože $\Gamma'(t_0) = f'\left(\gamma(t_0)\right) \gamma'(t_0) = f'(z_0)\gamma'(t_0)$, je

$$\arg f'(z_0) + \arg \gamma'(t_0) \in \operatorname{Arg} \Gamma'(t_0).$$

Jinak řečeno: číslo $\arg f'(z_0)$ udává úhel, o který je třeba otočit směrový vektor tečny hladkého oblouku γ v bodě $\gamma(t_0) = z_0$ tak, abychom dostali směrový vektor tečny křivky $\Gamma := f \circ \gamma$ v bodě $\Gamma(t_0) = f(z_0)$, přičemž na konkrétní volbě křivky γ nezáleží.

Tyto úvahy nás vedou k následující definici.

Definice 3.16. Buď funkce $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfní v bodě z_0 a buď $f'(z_0) \neq 0$.
Číslo $|f'(z_0)|$ nazýváme koeficientem roztažnosti funkce f v bodě z_0. [a]
Číslo $\arg f'(z_0)$ nazýváme úhlem otočení funkce f v bodě z_0.

[a] Je-li navíc $|f'(z_0)| < 1$ resp. $|f'(z_0)| > 1$, mluvíme někdy o kontrakci resp. dilataci funkce f v bodě z_0.

[1] Kreslete si obrázek!

Kapitola 4

Konformní zobrazení

4.1 Základní vlastnosti

Definice 4.1. Řekneme, že funkce $f : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ je konformní na otevřené množině $G \subset \mathbb{C}_\infty$, platí-li současně:

(1) f je spojitá a prostá na G,

(2) f' existuje ve všech bodech množiny G s výjimkou nejvýše konečně mnoha.

Cvičení 4.2. Rozmyslete si, na jakých oblastech jsou konformní funkce:

$$e^z, \ \ln z, \ \sin z, \ z^2, \ z^4, \ \dots .$$

Definice 4.3. Řekneme, že otevřené množiny $G_1, G_2 \subset \mathbb{C}_\infty$ jsou konformně ekvivalentní, existuje-li funkce $f : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ taková, že

(1) f je konformní na G_1,

(2) $f(G_1) = G_2$.

Vlastnosti konformních funkcí

i) Je-li f konformní na G, je $0 \neq f'(z) \in \mathbb{C}$ pro všechna $z \in G$ s výjimkou nejvýše dvou bodů: bodu ∞ (pokud patří do G) a bodu (je-li v G takový), jehož f–obrazem je ∞. [1]

ii) Funkce inverzní ke konformnímu zobrazení je konformní.

[1] Všimněme si, že odtud vyplývá, že konformní funkce f `zachovává úhly mezi křivkami` vycházejícími z bodu z_0 ($z_0 \in G,\ z_0 \neq \infty \neq f(z_0)$) – viz geometrický význam $\arg f'(z_0)$ na straně 26. Této vlastnosti funkce f se říká konformnost v bodě z_0.

iii) Obrazem oblasti při konformním zobrazení je oblast.

iv) Rozdělme nyní všechny jednoduše souvislé oblasti v $\mathbb{C}_\infty$ do čtyř skupin:

1. skupina obsahuje pouze prázdnou množinu,
2. skupina obsahuje pouze $\mathbb{C}_\infty$,
3. skupina obsahuje všechny oblasti tvaru $\mathbb{C}_\infty \setminus \{z_0\}$, kde $z_0 \in \mathbb{C}_\infty$,
4. skupina obsahuje všechny ostatní jednoduše souvislé oblasti. [1]

Pak platí: jednoduše souvislé oblasti Ω_1 a Ω_2 jsou konformně ekvivalentní právě tehdy, patří-li obě do stejné skupiny.

Prozkoumejme nyní podrobněji jeden velice důležitý typ konformních zobrazení.

4.2 Lineární lomené funkce

Definice 4.4. Lineární lomenou funkcí rozumíme každé zobrazení $f : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$, k němuž existují čísla $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{C}$ taková, že $ad - bc \neq 0$ a že

$$f(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d}, & \text{je-li } z \in \mathbb{C}, \\ \frac{a}{c}, & \text{je-li } z = \infty. \end{cases}$$

Vlastnosti lineárních lomených funkcí

i) Lineární lomené funkce jsou `jediná` konformní zobrazení $\mathbb{C}_\infty$ na $\mathbb{C}_\infty$.

ii) Inverzní zobrazení k lineární lomené funkci je lineární lomená funkce.

iii) Obrazem zobecněné kružnice při lineárním lomeném zobrazení je zobecněná kružnice. (Zobecněnou kružnicí rozumíme kružnici (v $\mathbb{C}$) nebo přímku – k té počítáme i bod ∞.)

iv) Nechť každá z množin $\{z_1, z_2, z_3\}$, $\{w_1, w_2, w_3\}$ obsahuje tři navzájem různá čísla z $\mathbb{C}_\infty$. Pak existuje právě jedna lineární lomená funkce f, pro niž je $f(z_1) = w_1$, $f(z_2) = w_2$ a $f(z_3) = w_3$.

v) Speciálním případem lineárních lomených zobrazení jsou lineární funkce, tj. funkce definované předpisem $f(z) := az + b$, kde $a, b \in \mathbb{C},\ a \neq 0$. [2]

[1] Tzn. všechny `neprázdné` jednoduše souvislé oblasti, jejichž doplněk obsahuje `alespoň dva` body.

[2] Rozmyslete si, že každou lineární funkci lze získat složením tří zobrazení: *otočení* ($z \mapsto \mathrm{e}^{i \arg a} z$), *stejnolehlosti* ($z \mapsto |a| z$) a *posunutí* ($z \mapsto z + b$).

Příklad 4.5. Najděte obraz kružnice

$$K = \{z \in \mathbb{C} : \ |z-1| = 1\}$$

při zobrazení

$$f(z) := \frac{1}{z}.$$

Řešení. Protože pro body $0, 2, 1+i \in K$ platí: $f(0) = \infty$, $f(2) = \frac{1}{2}$, $f(1+i) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$, je obrazem kružnice K přímka: [1]

$$f(K) = \{z \in \mathbb{C} : \ \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}\} \cup \{\infty\}.$$

▲

[1] Viz vlastnost iii) lineárních lomených funkcí.

Kapitola 5

Integrál komplexní funkce. Cauchyho věty. Cauchyho vzorce.

5.1 Integrál komplexní funkce reálné a komplexní proměnné

Věta 5.1 (Jordanova). *Nechť γ je jednoduchá uzavřená křivka v $\mathbb{C}$. Potom*

$$\mathbb{C}_\infty \setminus \langle\gamma\rangle = \Omega_1 \cup \Omega_2,$$

kde Ω_1 a Ω_2 jsou dvě disjunktní,[a] neprázdné a jednoduše souvislé oblasti, jejichž společnou hranicí je $\langle\gamma\rangle$.

[a] Tzn. $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$.

Definice 5.2. Uvažujme situaci z Jordanovy věty. Tu z oblastí Ω_1, Ω_2, která neobsahuje ∞, nazýváme vnitřkem křivky γ a značíme $\operatorname{int}\gamma$, tu, která ∞ obsahuje, nazýváme vnějškem křivky γ a značíme $\operatorname{ext}\gamma$.

Definice 5.3. Buď funkce $f = u + iv : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ $(a, b \in \mathbb{R};\ a < b)$.[a] Pak definujeme

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b u(t) + iv(t)\ \mathrm{d}t := \int_a^b u(t)\ \mathrm{d}t + i\int_a^b v(t)\ \mathrm{d}t.$$

[a] Tzn., že funkce $u(t) := \operatorname{Re} f(t),\ v(t) := \operatorname{Im} f(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou spojité na $\langle a, b\rangle$.

Definice 5.4. Buď $\gamma: \langle a,b\rangle \to \mathbb{C}$ po částech hladká křivka a buď funkce $f = u + iv: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ spojitá na $\langle\gamma\rangle$. Pak definujeme[a]

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \int_{(\gamma)} u(x,y)\,\mathrm{d}x - v(x,y)\,\mathrm{d}y + i\int_{(\gamma)} v(x,y)\,\mathrm{d}x + u(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

kde integrály na pravé straně rovnosti jsou křivkové integrály 2. druhu[b] (γ zde chápeme jako křivku v $\mathbb{R}^2$).

[a] Pomůcka pro snadnější zapamatování:

$$f(z)\,\mathrm{d}z = (u+iv)(\,\mathrm{d}x + i\,\,\mathrm{d}y) = u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y + i(v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y).$$

[b] Definici křivkového integrálu 2. druhu si lze připomenout v [1].

Věta 5.5. *Nechť $\gamma: \langle a,b\rangle \to \mathbb{C}$ je hladký oblouk a nechť funkce $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je spojitá na $\langle\gamma\rangle$. Potom platí*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Důkaz. Označme $f = u + iv$ a $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$. Potom platí

$$\underline{\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z} = \int_{(\gamma)} u(x,y)\,\mathrm{d}x - v(x,y)\,\mathrm{d}y + i\int_{(\gamma)} v(x,y)\,\mathrm{d}x + u(x,y)\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_a^b u(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\gamma_1'(t) - v(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\gamma_2'(t)\,\mathrm{d}t +$$

$$+ i\int_a^b v(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\gamma_1'(t) + u(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\gamma_2'(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_a^b \left(u(\gamma_1(t),\gamma_2(t)) + iv(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\right)\gamma_1'(t) +$$

$$+ i\left(u(\gamma_1(t),\gamma_2(t)) + iv(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\right)\gamma_2'(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_a^b f\left(\gamma_1(t) + i\gamma_2(t)\right)\left(\gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t)\right)\,\mathrm{d}t = \underline{\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t.}$$

□

Příklad 5.6. Vypočtěte

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z,$$

kde $\gamma(t) := 5\mathrm{e}^{it},\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle$.

Řešení.
– *užitím definice 5.4:*

$$\underline{\int_\gamma \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z} = \int_{(\gamma)} \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + \frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y + i\int_{(\gamma)} \frac{-y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y =$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{-25\sin t\cos t}{25} + \frac{25\sin t\cos t}{25}\,\mathrm{d}t + i\int_0^{2\pi} \frac{25\sin^2 t}{25} + \frac{25\cos^2 t}{25}\,\mathrm{d}t =$$
$$= 0 + i\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}t = \underline{2\pi i}\,;$$

– *pomocí věty 5.5:*

$$\underline{\int_\gamma \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{5\mathrm{e}^{it}}\,5i\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} i\,\mathrm{d}t = \underline{2\pi i}\,.$$

▲

5.2 Cauchyho věty

Věta 5.7 (Cauchyho). *Nechť funkce f je* `holomorfní` *na* `jednoduše souvislé oblasti` $\Omega \subset \mathbb{C}$. *Pak pro každou* `uzavřenou` *po částech hladkou křivku γ v Ω (tzn. $\langle\gamma\rangle \subset \Omega$) platí*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Důkaz. Označme $f = u + iv$ a definujme vektorová pole

$$f_1(x,y) := (u(x,y), -v(x,y))\,,$$
$$f_2(x,y) := (v(x,y), u(x,y))\,.$$

Potom f_1 a f_2 jsou třídy C^2 na jednoduše souvislé oblasti

$$\Omega^* = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x + iy \in \Omega\}$$

(viz větu 3.10), a protože navíc v Ω^* platí

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial(-v)}{\partial x} \quad \text{a} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

(viz větu 3.4), jsou i `potenciální` na Ω^* (viz [1]). Proto

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{(\gamma)} f_1(x,y)\mathrm{d}s + i\int_{(\gamma)} f_2(x,y)\mathrm{d}s = 0 + i0 = 0.$$

$\square$

Věta 5.8 (zobecnění Cauchyho věty). *Nechť $\Omega = \operatorname{int}\gamma$, kde γ je jednoduchá uzavřená po částech hladká křivka v $\mathbb{C}$. Pak pro každou funkci $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, která je holomorfní na Ω a spojitá na $\overline{\Omega} = \Omega \cup \langle\gamma\rangle$, platí*[a]

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

[a]Všimněme si souvislosti s Greenovou větou – viz [1].

Pozorování 5.9. Buďte

$$\gamma,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots,\ \gamma_n$$

takové jednoduché uzavřené po částech hladké a kladně orientované křivky v $\mathbb{C}$, že pro každé $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ platí:

$$\langle\gamma_i\rangle \subset \operatorname{ext}\gamma_j,\ \text{je-li } i \neq j,$$
$$\langle\gamma_i\rangle \subset \operatorname{int}\gamma.$$

Pak množina

$$\Omega = \operatorname{int}\gamma \cap \operatorname{ext}\gamma_1 \cap \operatorname{ext}\gamma_2 \cap \ldots \cap \operatorname{ext}\gamma_n$$

je $(n+1)$-násobně souvislou oblastí.[1]

Věta 5.10 (Cauchyho věta pro vícenásobně souvislou oblast). *Nechť Ω je $(n+1)$-násobně souvislou oblastí výše popsaného typu a nechť $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na Ω a spojitá na*

$$\overline{\Omega} = \Omega \cup \langle\gamma\rangle \cup \langle\gamma_1\rangle \cup \langle\gamma_2\rangle \cup \ldots \cup \langle\gamma_n\rangle.$$

Pak platí

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

[1]Namalujte si obrázek!

5.3 Cauchyho integrální vzorce

Věta 5.11. *Nechť γ je jednoduchá uzavřená po částech hladká kladně orientovaná křivka v $\mathbb{C}$ a nechť funkce $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na $\Omega = \operatorname{int}\gamma$ a spojitá na $\overline{\Omega} = \Omega \cup \langle\gamma\rangle$. Potom pro každé $z_0 \in \Omega$ platí*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z. \tag{$\clubsuit$}$$

Navíc: je-li $n \in \mathbb{N}$, existuje $f^{(n)}(z_0)$ pro každé $z_0 \in \Omega$ a platí

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z. \tag{$\spadesuit$}$$

Důkaz. Dokažme pouze tvrzení ($\clubsuit$).
Buď $z_0 \in \Omega$ libovolný bod. Definujme pro každé $r > 0$ křivku

$$\gamma_r(t) := z_0 + r\mathrm{e}^{it},\ \ t \in \langle 0, 2\pi\rangle.$$

Z věty 5.10 pak plyne, že

$$\underline{\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z} = \lim_{r\to 0+}\int_{\gamma_r}\frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z = \underline{\lim_{r\to 0+}\left[\int_{\gamma_r}\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_r}\frac{f(z_0)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z\right]}.$$

Z předpokladu

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0}\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C}$$

plyne

$$(\exists\delta > 0,\ k > 0)(\forall z \in \mathbb{C} :\ 0 < |z - z_0| < \delta) : \left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right| \leqq k,$$

a proto pro všechna „dost malá“ $r > 0$ platí[1]

$$\left|\int_{\gamma_r}\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z\right| \leqq k2\pi r,$$

[1]Využíváme tohoto odhadu křivkového integrálu: *Buď $\gamma : \langle a, b\rangle \to \mathbb{C}$ hladký oblouk a buď funkce $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ spojitá na $\langle\gamma\rangle$. Potom platí*

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqq \sup_{z\in\langle\gamma\rangle}|f(z)| \cdot \underbrace{\int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t}_{\text{... délka křivky } \gamma}.$$

neboli

$$\underline{\lim_{r\to 0+}\int_{\gamma_r}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z=0}.$$

Navíc platí

$$\underline{\lim_{r\to 0+}\int_{\gamma_r}\frac{f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z}=\lim_{r\to 0+}\left(f(z_0)\int_0^{2\pi}\frac{1}{re^{it}}rie^{it}\,\mathrm{d}t\right)=\lim_{r\to 0+}(f(z_0)2\pi i)\underline{=f(z_0)2\pi i},$$

a proto (stačí „zkombinovat“ podtržená tvrzení)

$$\int_\gamma\frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z=f(z_0)2\pi i.$$

□

Pozorování 5.12.

- Z věty 5.11 vyplývá, že derivací holomorfní funkce získáme opět holomorfní funkci; jinak řečeno: je-li funkce f holomorfní na otevřené množině Ω a $n\in\mathbb{N}$, je funkce $f^{(n)}$ holomorfní na Ω.
- Uvažujme situaci z věty 5.11 Pak hodnoty funkce f na Ω jsou `jednoznačně určeny` hodnotami f na $\langle\gamma\rangle$.
- Vzorec (♠) můžeme získat, zderivujeme-li formálně n-krát podle z_0 obě strany rovnosti (♣).

Příklad 5.13. Vypočtěte

$$\int_\gamma\frac{\mathrm{e}^z}{z(1-z)^3}\,\mathrm{d}z,$$

kde $\gamma(t):=\frac{3}{2}\mathrm{e}^{it},\ t\in\langle 0,2\pi\rangle$.

Řešení. Z věty 5.10 plyne, že

$$\int_\gamma\frac{\mathrm{e}^z}{z(1-z)^3}\,\mathrm{d}z=\int_{\gamma_1}\frac{\mathrm{e}^z}{z(1-z)^3}\,\mathrm{d}z+\int_{\gamma_2}\frac{\mathrm{e}^z}{z(1-z)^3}\,\mathrm{d}z,$$

kde

$$\gamma_1(t):=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{it},\ t\in\langle 0,2\pi\rangle;$$
$$\gamma_2(t):=1+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{it},\ t\in\langle 0,2\pi\rangle.$$

Nyní aplikujme tvrzení věty 5.11:

$$\int_{\gamma_1}\frac{\mathrm{e}^z}{z(1-z)^3}\,\mathrm{d}z=\int_{\gamma_1}\frac{\frac{\mathrm{e}^z}{(1-z)^3}}{z-0}\,\mathrm{d}z=2\pi i\left[\frac{\mathrm{e}^z}{(1-z)^3}\right]_{z=0}=2\pi i,$$

$$\int_{\gamma_2} \frac{\mathrm{e}^z}{z(1-z)^3}\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} \frac{-\frac{\mathrm{e}^z}{z}}{(z-1)^3}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{2!}\left[\left(-\frac{\mathrm{e}^z}{z}\right)''\right]_{z=1} = \pi i(-\mathrm{e}),$$

a proto

$$\int_{\gamma} \frac{\mathrm{e}^z}{z(1-z)^3}\,\mathrm{d}z = \pi i(2-\mathrm{e}).$$

▲

5.4 Primitivní funkce, nezávislost integrálu na cestě

Definice 5.14. Řekneme, že funkce $F: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je primitivní k funkci $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ na oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}$, platí-li pro každé $z \in \Omega$, že $F'(z) = f(z)$.

Věta 5.15. *Nechť F je primitivní funkcí k f na oblasti Ω. Pak funkce tvaru $F+k$, kde $k \in \mathbb{C}$, tvoří právě všechny primitivní funkce k f na Ω.*

Důkaz. Máme dokázat:

i) $k \in \mathbb{C} \;\Rightarrow\; F+k$ je primitivní k f na Ω,
ii) Φ je primitivní k f na $\Omega \;\Rightarrow\; \exists k \in \mathbb{C}: \;\Phi = F + k$.

Ad i). $(F+k)' = F' + 0 = f$ v Ω.

Ad ii). Definujme funkci $G = u + iv: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ předpisem

$$G(z) := \Phi(z) - F(z).$$

Pak pro každé $z \in \Omega$ platí $G'(z) = 0$, a proto[1]

$$\forall x+iy \in \Omega: \; 0 = G'(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y),$$

a tedy taky

$$\forall x+iy \in \Omega: \; \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Odtud plyne, že funkce u a v jsou na množině $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2: \; x+iy \in \Omega\}$ konstantní. Dokázali jsme, že funkce $G = u + iv = \Phi - F$ je na Ω konstantní.

□

[1] Viz větu 3.4

Definice 5.16. Řekneme, že integrál funkce $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nezávisí v oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}$ na cestě, platí-li pro každé dvě po částech hladké křivky γ_1 a γ_2 takové, že

- $\langle\gamma_1\rangle \cup \langle\gamma_2\rangle \subset \Omega$,
- p.b.γ_1= p.b.$\gamma_2 \overset{ozn.}{=} z_1$,
- k.b.γ_1= k.b.$\gamma_2 \overset{ozn.}{=} z_2$,

rovnost

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z \overset{ozn.}{=} \int_{z_1}^{z_2} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Věta 5.17. *Nechť funkce $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je* `holomorfní` *na* `jednoduše souvislé oblasti` $\Omega \subset \mathbb{C}$*. Pak integrál funkce f nezávisí v Ω na cestě.*

Důkaz ponechme jako cvičení; dokazované tvrzení je přímým důsledkem věty 5.7. □

Věta 5.18 (Morerova). *Nechť funkce $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je spojitá na oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}$ a nechť pro každou jednoduchou uzavřenou po částech hladkou křivku γ v Ω platí*

$$\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Pak f je holomorfní na Ω.

Věta 5.19. *Nechť integrál* `spojité` *funkce $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nezávisí v oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}$ na cestě. Pak existuje primitivní funkce k f na Ω.*
Navíc: je-li $z_0 \in \Omega$ libovolný bod, je funkce F definovaná předpisem [a]

$$F(z) := \int_{z_0}^{z} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

primitivní funkcí k f na Ω.

[a] Symbolem „$\int_{z_0}^{z} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$“ rozumíme integrál $\int_\gamma f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$, kde γ je libovolná po částech hladká křivka v Ω, pro niž je p.b.$\gamma = z_0$ a k.b.$\gamma = z$.

Důkaz. Buď $z_0 \in \Omega$ a $F(z) := \int_{z_0}^{z} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$.
Máme dokázat, že pro každé $z \in \Omega$ platí:

$$\lim_{h\to 0} \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| = 0.$$

Buď $z \in \Omega$ libovolný bod.

Vezměme $P(0)$ takové, aby

$$\forall h \in P(0): \; z + h \in \Omega,$$

a definujme pro každé $h \in P(0)$ křivku γ_h předpisem

$$\gamma_h(t) := z + th, \; t \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Pak pro každé $h \in P(0)$ platí:

$$0 \leqq \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| = \frac{1}{|h|} \left| \int_z^{z+h} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi - f(z)h \right| =$$
$$= \frac{1}{|h|} \left| \int_{\gamma_h} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi - f(z) \int_{\gamma_h} 1\,\mathrm{d}\xi \right| = \frac{1}{|h|} \left| \int_{\gamma_h} f(\xi) - f(z)\,\mathrm{d}\xi \right| \leqq$$
$$\leqq \frac{1}{|h|} \cdot \sup_{\xi \in \langle \gamma_h \rangle} |f(\xi) - f(z)| \cdot |h| = \sup_{\xi \in \langle \gamma_h \rangle} |f(\xi) - f(z)| \to 0 \text{ pro } h \to 0,$$

protože f je podle předpokladů spojitá v bodě z. □

Příklad 5.20. Funkce

$$f(z) := \frac{1}{z}$$

je holomorfní na jednoduše souvislé oblasti $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} : \; z \leqq 0\}$, a proto (integrujeme přes křivky ležící v Ω) funkce

$$F(z) := \int_1^z f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_1^{|z|} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{|z|}^z \frac{1}{\xi}\,\mathrm{d}\xi = [\ln x]_1^{|z|} + i \int_0^{\arg z} \mathrm{d}t = \ln z$$

je primitivní funkcí k funkci f na Ω.[1]

Pozorování 5.21. Buď funkce F primitivní k funkci f na `jednoduše souvislé` oblasti Ω a buď $z_1, z_2 \in \Omega$. Zkoumejme $\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,\mathrm{d}z$. [2]

Zvolme libovolně bod $z_0 \in \Omega$. Pak existuje konstanta $k \in \mathbb{C}$ taková, že

$$\forall z \in \Omega: \; F(z) = \int_{z_0}^z f(\xi)\,\mathrm{d}\xi + k$$

(viz věty 5.15, 5.17 a 5.19), a proto

$$\underline{\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,\mathrm{d}z} = \int_{z_1}^{z_0} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{z_0}^{z_2} f(z)\,\mathrm{d}z =$$
$$= -\left(\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,\mathrm{d}z + k \right) + \left(\int_{z_0}^{z_2} f(z)\,\mathrm{d}z + k \right) = \underline{F(z_2) - F(z_1) \overset{ozn.}{=} [F(z)]_{z_1}^{z_2}}.$$

[1] Promyslete si podrobně!

[2] Opět integrujeme přes po částech hladké křivky ležící v Ω.

Toto pozorování lze zobecnit:

Věta 5.22. *Nechť existuje primitivní funkce k funkci $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ na oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}$. Pak integrál funkce f nezávisí v oblasti Ω na cestě. Navíc: je-li F primitivní funkcí k funkci f na oblasti Ω a je-li γ po částech hladká křivka v Ω, je*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = F(k.b.\,\gamma) - F(p.b.\,\gamma).$$

Příklady 5.23.

a) Buď $\gamma(t) := \mathrm{e}^{it}$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Pak $\int_\gamma \frac{1}{z^2}\,\mathrm{d}z = 0$, protože $\left(-\frac{1}{z}\right)' = \frac{1}{z^2}$ v `oblasti` $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

b) $\int_0^{1+i} \sin z \cos z\,\mathrm{d}z = \int_0^{1+i} \frac{1}{2}\sin(2z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{4}\left[-\cos(2z)\right]_0^{1+i} = \frac{1}{4}\left(1 - \cos(2+2i)\right).$

c) $\int_0^{2\pi i} z\mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z = \left[z\mathrm{e}^z\right]_0^{2\pi i} - \int_0^{2\pi i} \mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z = 2\pi i - \left[\mathrm{e}^z\right]_0^{2\pi i} = 2\pi i$
(počítali jsme „*per partes*“).

Kapitola 6

Číselné řady. Posloupnosti a řady funkcí.

6.1 Číselné řady

Definice 6.1. Řadou (komplexních čísel) rozumíme výraz

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \ldots \overset{ozn.}{=} \sum_{n=1}^{\infty} z_n, \qquad (\heartsuit)$$

kde pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $z_n \in \mathbb{C}$.
Číslo z_n nazýváme n-tým členem řady ($\heartsuit$), posloupnost (s_n) definovanou předpisem

$$s_n := z_1 + z_2 + \cdots + z_n \overset{ozn.}{=} \sum_{k=1}^{n} z_k$$

nazýváme posloupností částečných součtů řady ($\heartsuit$).
Říkáme, že řada ($\heartsuit$) konverguje, existuje-li (`konečná`) $\lim s_n \in \mathbb{C}$; v takovém případě pak číslo

$$s = \lim s_n$$

nazýváme součtem řady ($\heartsuit$) a píšeme [a]

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} z_n.$$

(Řadu, která není konvergentní, nazýváme divergentní řadou.)

[a] Zde nepřehlédněme, že symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ značíme řadu i její součet, tj. číslo! Ale nebojme se, z kontextu bude vždy jasné, o které z těchto dvou možností právě mluvíme.

Věta 6.2. *Uvažujme řadu* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$. *Pak platí:*[a]

(i) *(<u>nutná podmínka konvergence</u>)*

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n \text{ konverguje} \quad \Rightarrow \quad \lim z_n = 0.$$

(ii) *(„<u>konvergence řady = konvergence řady reálných a řady imaginárních částí</u>“)*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + iy_n) \text{ konverguje} \quad \Leftrightarrow \quad \text{konvergují řady } \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ a } \sum_{n=1}^{\infty} y_n;$$

navíc, konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + iy_n)$, *platí pro její součet:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + iy_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i \sum_{n=1}^{\infty} y_n.$$

(iii) *(<u>Bolzanova–Cauchyho podmínka</u>)*

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n \text{ konverguje} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+\right) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n, m \in \mathbb{N};\ n, m > n_0) : \ |s_n - s_m| < \varepsilon$$

$$(s_n := \sum_{k=1}^{n} z_k).$$

(iv) *(„<u>absolutní konvergence řady ⇒ konvergence řady</u>“)*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| \text{ konverguje} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} z_n \text{ konverguje} .$$

(Řekneme, že <u>řada</u> $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ <u>konverguje absolutně</u>, konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$. Řadu, která `konverguje`, ale `nekonverguje absolutně`, nazýváme <u>neabsolutně konvergentní řadou</u>.)

(v) *(<u>srovnávací kritérium</u>)*

$$\left.\begin{array}{r} \forall n \in \mathbb{N}: \ |z_n| \leqq a_n \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} z_n \text{ konverguje absolutně.}$$

[a] Doporučuji čtenáři, aby si prohlédl [2].

(vi) *(d'Alembertovo kritérium)*

$$\lim \left|\tfrac{z_{n+1}}{z_n}\right| < 1 \quad \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} z_n \text{ konverguje absolutně,}$$
$$\lim \left|\tfrac{z_{n+1}}{z_n}\right| > 1 \quad \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} z_n \text{ diverguje.}$$

(vii) *(Cauchyho kritérium)*

$$\lim \sqrt[n]{|z_n|} < 1 \quad \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} z_n \text{ konverguje absolutně,}$$
$$\lim \sqrt[n]{|z_n|} > 1 \quad \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} z_n \text{ diverguje.}$$

(viii) *(integrální kritérium)*

Nechť funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je* `nezáporná, nerostoucí` *a* `spojitá` *na intervalu* $\langle 1, +\infty)$ *a nechť pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *je* $|z_n| = f(n)$. *Pak platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < +\infty \;\Leftrightarrow\; \int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x < +\infty\,.$$

(ix) *(Leibnizovo kritérium)*

$$\left.\begin{array}{r} \forall n \in \mathbb{N}:\; 0 \leqq z_{n+1} \leqq z_n \\ \lim z_n = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} z_n \text{ konverguje.}$$

(x) *(tvrzení o konvergenci geometrické řady)*

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$, *kde* $q \in \mathbb{C}$, *konverguje právě tehdy, je-li* $|q| < 1$. *V takovém případě pak platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \frac{1}{1-q}\,.$$

Příklady 6.3.

a) Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}\,(1+i)^n$$

konverguje absolutně, protože

$$\left|\frac{\frac{n+1}{3^{n+1}}\,(1+i)^{n+1}}{\frac{n}{3^n}\,(1+i)^n}\right| = \left|\frac{1}{3}\,\frac{n+1}{n}\,(1+i)\right| \to \frac{\sqrt{2}}{3} < 1.$$

b) Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{\sqrt{n}}$$

diverguje, protože pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cos \frac{\pi}{n} + i \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{\pi}{n}$ a současně řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos \frac{\pi}{n}$ diverguje. [1]

6.2 Posloupnosti funkcí. Bodová a stejnoměrná konvergence

Definice 6.4. Řekneme, že posloupnost komplexních funkcí (f_n) <u>konverguje bodově na množině</u> $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$ k funkci f, a píšeme <u>$f_n \to f$ na Ω</u>, platí-li

$$\forall z \in \Omega : \ \lim f_n(z) = f(z),$$

tj. platí-li

$$(\forall z \in \Omega) \left(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+\right) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}, \ n \geqq n_0) : \ f_n(z) \in U(f(z), \varepsilon).$$

Poznámka 6.5. Přirozené číslo n_0 vyskytující se ve výše uvedené podmínce závisí obecně na volbě $z \in \Omega$ a $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Jestliže lze číslo n_0 zvolit nezávisle na volbě bodu $z \in \Omega$ a jsou-li funkce f_n a f konečné, mluvíme o stejnoměrné konvergenci na Ω. Řekněme to přesněji:

Definice 6.6. Buďte pro každé $n \in \mathbb{N}$ funkce f_n a f `konečné` a definované na množině $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$. Řekneme, že posloupnost funkcí (f_n) <u>konverguje stejnoměrně na množině</u> Ω k funkci f, a píšeme <u>$f_n \rightrightarrows f$ na Ω</u>, platí-li

$$\lim \left[\sup_{z \in \Omega} |f_n(z) - f(z)|\right] = 0,$$

tj. platí-li

$$\left(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+\right) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}, \ n \geqq n_0) (\forall z \in \Omega) : \ f_n(z) \in U(f(z), \varepsilon).$$

Věta 6.7. *Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na Ω a nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ je funkce f_n spojitá na Ω. Pak funkce f je spojitá na Ω.*

[1] Rozmyslete si podrobně!

Definice 6.8. Buďte pro každé $n \in \mathbb{N}$ funkce f_n a f `konečné` a definované na množině $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty$. Řekneme, že funkční řada

$$f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \ldots \stackrel{ozn.}{=} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \qquad (\spadesuit)$$

konverguje bodově resp. stejnoměrně na množině Ω ke svému součtu f, konverguje-li posloupnost (s_n) částečných součtů funkční řady $(\spadesuit)$[a] bodově resp. stejnoměrně na Ω k funkci f.

[a] $s_n(z) := \sum_{k=1}^{n} f_k(z)$.

Věta 6.9 (Weierstrassova). *Nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ je funkce f_n holomorfní na oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}$ a nechť funkční řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ konverguje na Ω lokálně stejnoměrně, tzn. že*

$$(\forall z \in \Omega)\,(\exists U(z) \subset \Omega) : \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \text{ konverguje stejnoměrně na } U(z).$$

Potom je funkce f definovaná předpisem

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

holomorfní na oblasti Ω a pro každé $p \in \mathbb{N}$ a $z \in \Omega$ platí rovnost

$$f^{(p)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(p)}(z).$$

Navíc: je-li γ po částech hladká křivka v Ω, platí

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\gamma f_n(z)\mathrm{d}z. \quad [a]$$

[a] Zapsáno symbolicky:

$$\left(\sum \ldots\right)' = \sum (\ldots)', \quad \int \left(\sum \ldots\right) = \sum \left(\int \ldots\right).$$

Kapitola 7

Mocninné řady. Taylorovy řady.

7.1 Mocninné řady

Definice 7.1. <u>Mocninnou řadou o středu</u> $z_0 \in \mathbb{C}$ rozumíme funkční řadu tvaru

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots \overset{ozn.}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \qquad (\clubsuit)$$

kde pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ je $a_n \in \mathbb{C}$.

Zabývejme se nyní konvergencí řady ($\clubsuit$), tj. zkoumejme, pro jaká $z \in \mathbb{C}$ daná řada konverguje. Je zřejmé, že řada ($\clubsuit$) konverguje pro $z = z_0$, tj. ve svém středu, a má tam součet a_0. Předpokládejme nyní, že řada ($\clubsuit$) konverguje v bodě $z_1 \neq z_0$, a buď $z \in \mathbb{C}$ takový bod, že $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$|a_n(z - z_0)^n| = |a_n(z_1 - z_0)^n| \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^n. \qquad (\star)$$

Nyní aplikujme větu 6.2. Z předpokladu, že řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z_1 - z_0)^n$ konverguje, vyplývá, že

$$\lim \left(a_n(z_1 - z_0)^n\right) = 0,$$

a proto existuje $k \in \mathbb{R}^+$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $|a_n(z_1 - z_0)^n| \leqq k$.
Navíc, z předpokladu $\left|\frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right| < 1$ plyne konvergence (geometrické) řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} k \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^n,$$

a proto ze vztahu ($\star$) (a srovnávacího kritéria) vyplývá, že řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ absolutně konverguje. Toto zjištění je zobecněno v následující větě.

Věta 7.2 (Abelova). *Nechť mocninná řada* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *konverguje v bodě* $z_1 \neq z_0$. *Pak konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně v* $U(z_0, |z_1 - z_0|)$.

Důsledek. *Pokud mocninná řada* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *diverguje v bodě* $z_2 \in \mathbb{C}$, *diverguje i v každém bodě množiny*

$$\{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| > |z_2 - z_0|\}.$$

Věta 7.3. *Pro každou mocninnou řadu* (♣) *o středu* z_0 *existuje právě jedno číslo* $R \in \langle 0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ *(říkejme mu poloměr konvergence mocninné řady* (♣)*) takové, že*

(i) *řada* (♣) *konverguje absolutně, je-li* $|z - z_0| < R$,

(ii) *řada* (♣) *diverguje, je-li* $|z - z_0| > R$.

Důkaz. Dokazované tvrzení je snadným důsledkem předchozí věty 7.2. Stačí definovat

$$R := \sup \left\{ |z - z_0| : \ z \in \mathbb{C} \ \wedge \ \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \text{ konverguje} \right\}.$$

□

Definice 7.4. Platí-li pro poloměr konvergence R mocninné řady (♣), že $0 < R < +\infty$, nazýváme $U(z_0, R)$ kruhem konvergence mocninné řady (♣); je-li $R = +\infty$, rozumíme kruhem konvergence mocninné řady (♣) množinu $U(z_0, +\infty) := \mathbb{C}$.

Poznámka 7.5. Předpokládejme, že pro poloměr konvergence R mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ platí, že $0 < R < +\infty$. Uvědomme si, že obecně nelze říci `nic` o konvergenci této řady v bodech kružnice

$$\{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| = R\}.$$

Situaci ilustrujme těmito třemi mocninnými řadami:[1]

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}.$$

[1] Jedná se ve všech třech případech o mocninné řady tvaru $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, kde $z_0 = 0$ a $a_0 = 0$.

Protože

$$\left|\frac{z^{n+1}}{z^n}\right| \to |z|, \quad \left|\frac{\frac{z^{n+1}}{n+1}}{\frac{z^n}{n}}\right| \to |z|, \quad \left|\frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{z^n}{n^2}}\right| \to |z|,$$

je (viz d'Alembertovo kritérium) poloměr konvergence každé z těchto mocninných řad roven 1. Navíc platí:

- řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n$ diverguje v každém bodě kružnice $\{z \in \mathbb{C} : \; |z| = 1\}$ (pro žádné $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$, není totiž splněna nutná podmínka konvergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n$, tj. podmínka $\lim z^n = 0$);
- řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ konverguje (neabsolutně) pro $z = -1$ (viz Leibnizovo kritérium) a diverguje pro $z = 1$ (viz integrální kritérium);
- řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ konverguje (absolutně) pro každé $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$ (viz integrální kritérium).

Věta 7.6. *Nechť existuje*

$$\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \overset{ozn.}{=} L, \quad resp. \quad \lim \sqrt[n]{|a_n|} \overset{ozn.}{=} K.$$

Pak pro poloměr konvergence R mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ platí:

$$R = \begin{cases} \frac{1}{L}, & \text{je-li } L \in \mathbb{R}^+, \\ 0, & \text{je-li } L = +\infty, \\ +\infty, & \text{je-li } L = 0, \end{cases} \quad resp. \quad R = \begin{cases} \frac{1}{K}, & \text{je-li } K \in \mathbb{R}^+, \\ 0, & \text{je-li } K = +\infty, \\ +\infty, & \text{je-li } K = 0. \end{cases}$$

Důkaz. Stačí si uvědomit, že pro $z \neq z_0$ je

$$\lim \left|\frac{a_{n+1}(z - z_0)^{n+1}}{a_n(z - z_0)^n}\right| = L|z - z_0|, \quad \text{resp.} \quad \lim \sqrt[n]{|a_n(z - z_0)^n|} = K|z - z_0|,$$

a užít d'Alembertovo, resp. Cauchyho kritérium. □

Příklad 7.7. Určete obor konvergence mocninné řady [1]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} z^n.$$

[1] Tzn. určete množinu všech $z \in \mathbb{C}$, pro něž daná řada konverguje.

Řešení.

$$\lim \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \lim \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2},$$

a proto $R = 2$; daná řada konverguje (absolutně) pro každé $z \in U(0,2)$ a diverguje pro každé $z \in \mathbb{C},\ |z| > 2$.

Je-li $|z| = 2$, je

$$\lim \left| \frac{n}{2^n} z^n \right| = \lim n = \infty \neq 0,$$

a proto řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}\, z^n$ diverguje (není splněna nutná podmínka konvergence).

▲

Příklad 7.8. Určete poloměr konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}\, z^n.$$

Řešení.

$$\frac{\frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} \to 4,$$

a proto $R = \frac{1}{4}$.

▲

Věta 7.9. *Nechť mocninná řada* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *má poloměr konvergence* $R > 0$. *Pak je funkce* f *definovaná předpisem*

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

holomorfní na oblasti $U(z_0, R)$.
Navíc: pro každé $p \in \mathbb{N}$ *a* $z \in U(z_0, R)$ *platí rovnost*

$$f^{(p)}(z) = \sum_{n=p}^{\infty} n\,(n-1)\,\ldots\,(n-p+1)\,a_n\,(z-z_0)^{n-p}$$

a mocninná řada $\sum\limits_{n=p}^{\infty} n\,(n-1)\,\ldots\,(n-p+1)\,a_n\,(z-z_0)^{n-p}$ *má taky poloměr konvergence* R.

Důkaz. Věta je přímým důsledkem Weierstrassovy a Abelovy věty (viz věty 6.9 a 7.2). □

Příklad 7.10. Určete součet mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{z^n}{n}$$

v kruhu konvergence.

Řešení. Protože

$$\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \to 1,$$

je kruhem konvergence dané mocninné řady oblast $U(0,1)$. Definujme funkci f předpisem

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{z^n}{n}.$$

Pak pro každé $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, platí

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-z)^{n-1} = \frac{1}{1-(-z)} = \frac{1}{1+z},$$

a proto existuje $c \in \mathbb{C}$ takové, že pro každé $z \in U(0,1)$ je

$$f(z) = \ln(1+z) + c.$$

Protože ale zřejmě platí:

$$0 = f(0) = \ln 1 + c = c,$$

je pro každé $z \in U(0,1)$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{z^n}{n} = \ln(1+z).$$

▲

Věta 7.11 (Abelova). *Nechť mocninná řada* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *má poloměr konvergence* $R \in (0,+\infty)$ *a nechť tato řada konverguje v bodě*

$$z_1 = z_0 + R\mathrm{e}^{i\varphi}, \ \text{kde } \varphi \in \mathbb{R}.$$

Pak je funkce f *definovaná předpisem*

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

spojitá na úsečce s krajními body z_0 *a* z_1*, tj. na množině*

$$\left\{z_0 + r\mathrm{e}^{i\varphi} : \ r \in \langle 0, R\rangle\right\} = \{z_0 + (z_1 - z_0)\,t : \ t \in \langle 0, 1\rangle\}\,.$$

Speciálně:

$$f(z_1) = f\left(z_0 + R\mathrm{e}^{i\varphi}\right) = \lim_{r\to R-} f\left(z_0 + r\mathrm{e}^{i\varphi}\right) = \lim_{t\to 1-} f\left(z_0 + (z_1 - z_0)\,t\right).$$

Příklad 7.12. Vypočtěte součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{1}{n}.$$

Řešení. Předně si uvědomme, že uvedená řada konverguje. [1] Uvažujme nyní funkci f definovanou předpisem:

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{z^n}{n}.$$

Z věty 7.11 a předcházejícího příkladu pak vyplývá, že

$$\underline{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{1}{n}} = f(1) = \lim_{z\to 1-} f(z) = \lim_{z\to 1-}\left(\ln(1+z)\right) = \underline{\ln 2}.$$

▲

[1] Viz Leibnizovo kritérium.

7.2 Taylorovy řady

Dosud jsme ukázali, že součtem mocninné řady je (v kruhu konvergence) holomorfní funkce. Následující věta říká, že `každá` holomorfní funkce je (alespoň lokálně) součtem jisté mocninné řady.

Věta 7.13 (o rozvoji holomorfní funkce do Taylorovy řady). *Nechť funkce f je holomorfní na $U(z_0, R)$, kde $z_0 \in \mathbb{C}$ a $R \in (0, +\infty) \cup \{+\infty\}$. Pak existuje* `právě jedna` *mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ taková, že pro každé $z \in U(z_0, R)$ platí*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Navíc, je-li ϱ libovolné reálné číslo takové, že $0 < \varrho < R$, platí pro koeficienty výše uvedené (tzv. Taylorovy) řady

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z,$$

kde

$$\gamma(t) := z_0 + \varrho\,\mathrm{e}^{it}, \ t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$
$$(n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}).$$

Pozorování 7.14. Je-li f holomorfní na $\mathbb{C}$, je poloměr konvergence její Taylorovy řady (o středu v libovolném bodě $z_0 \in \mathbb{C}$) roven $+\infty$. Příklady takovýchto funkcí (a jejich Taylorových řad o středu 0):

$$\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Příklad 7.15. Najděte Taylorovu řadu funkce f o středu z_0, je-li

a) $f(z) := \frac{1}{3-z}$, $z_0 = 0$,

b) $f(z) := \frac{1}{3-z}$, $z_0 = -1 + 3i$,

c) $f(z) := \ln z$, $z_0 = 2$.

Řešení.
Ad a) Předně si uvědomme, že funkce f je holomorfní na $U(0, 3)$. Při hledání její Taylorovy řady nám dobře poslouží tvrzení o konvergenci geometrické řady: [1]

$$\forall z \in U(0,3) : \ \underline{f(z)} = \frac{1}{3-z} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{z}{3}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n = \underline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}}}.$$

[1] Viz větu 6.2.

Ad b) Postupujme podobně jako před chviličkou. Pro každé

$$z \in U(-1+3i, |3-(-1+3i)|) = U(-1+3i, 5)$$

platí

$$\underline{f(z)} = \frac{1}{3-z} = \frac{1}{4-3i-(z-(-1+3i))} = \frac{1}{4-3i}\,\frac{1}{1-\frac{z+1-3i}{4-3i}} = \underline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1-3i)^n}{(4-3i)^{n+1}}}.$$

Ad c) Funkce f je zřejmě holomorfní na $U(2,2)$. Pro každé $z \in U(2,2)$ platí:

$$f'(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\frac{z-2}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{z-2}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\,(z-2)^n,$$

a proto existuje $c \in \mathbb{C}$ takové, že pro každé $z \in U(2,2)$ platí

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\,\frac{(z-2)^{n+1}}{n+1} + c.$$

Protože zřejmě

$$f(2) = \ln 2 = c,$$

je

$$\forall z \in U(2,2): \quad f(z) = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n\,n}\,(z-2)^n.$$

▲

Věta 7.16 (Liouvillova). *Nechť funkce f je* `na` $\mathbb{C}$ `holomorfní` *a* `omezená` *(tzn., že existuje $M \in \mathbb{R}^+$ takové, že pro každé $z \in \mathbb{C}$ je $|f(z)| \leqq M$). Pak je f na $\mathbb{C}$ konstantní.*

Důkaz. Už víme (viz větu 7.13), že

$$\forall z \in \mathbb{C}: \; f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

kde – pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a `každé` $\varrho \in (0, +\infty)$ –

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(\varrho\,\mathrm{e}^{it})}{(\varrho\,\mathrm{e}^{it})^{n+1}}\,\varrho\, i\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t$$

$$\left(\gamma(t) := \varrho\,\mathrm{e}^{it},\; t \in \langle 0, 2\pi\rangle\right).$$

Odtud plyne (opět pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a `každé` $\varrho \in (0, +\infty)$), že

$$|a_n| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(\varrho\,\mathrm{e}^{it})}{(\varrho\,\mathrm{e}^{it})^n}\, i\,\mathrm{d}t \right| \leqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{M}{\varrho^n}\,\mathrm{d}t = \frac{M}{\varrho^n}.$$

Protože konstantu $\varrho \in \mathbb{R}^+$ lze volit libovolně velkou, plyne z odhadů $|a_n| \leqq \frac{M}{\varrho^n}$, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n = 0$. Dokázali jsme, že pro každé $z \in \mathbb{C}$ je $f(z) = a_0$; funkce f je tedy konstantní. $\square$

Věta 7.17 (Základní věta algebry). *Každý polynom kladného stupně má v $\mathbb{C}$ alespoň jeden kořen. Jinak řečeno: buď funkce $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definovaná předpisem:*

$$f(z) := a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

kde

$$n \in \mathbb{N},\ a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C},\ a_n \neq 0.$$

Pak existuje $z \in \mathbb{C}$ takové, že $f(z) = 0$.

Důkaz. Předpokládejme sporem, že

$$\forall z \in \mathbb{C}:\ f(z) \neq 0,$$

a uvažujme funkci

$$F(z) := \frac{1}{f(z)}.$$

Pak zřejmě platí:

- F je `holomorfní na` $\mathbb{C}$
  $\left(\forall z \in \mathbb{C}:\ F'(z) = -\frac{f'(z)}{f^2(z)}\right)$,
- F je `omezená na` $\mathbb{C}$
  $\left(\lim\limits_{z\to\infty} F(z) = \lim\limits_{z\to\infty} \frac{1}{z^n\,(a_n + a_{n-1}\frac{1}{z} + \cdots + a_0\frac{1}{z^n})} = \frac{1}{\infty\,(a_n)} = \frac{1}{\infty} = 0\right)$,

a proto je (viz větu 7.16) funkce F na $\mathbb{C}$ konstantní. To je však spor s definicí funkce F. $\square$

Definice 7.18. Buď funkce f holomorfní v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ a buď $p \in \mathbb{N}$. Řekneme, že z_0 je <u>p – násobným kořenem</u> (nebo <u>p – násobným nulovým bodem</u>) <u>funkce</u> f, je-li

$$f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \cdots = f^{(p-1)}(z_0) = 0 \neq f^{(p)}(z_0).$$

Věta 7.19. *Nechť funkce f je holomorfní v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ a nechť $f(z_0) = 0$. Pak existuje $U(z_0)$ takové, že platí právě jedna z možností:*

(i) *f je nulová na $U(z_0)$,*

(ii) *$f(z) \neq 0$ pro každé $z \in U(z_0) \setminus \{z_0\}$.*

Důkaz. Jak víme, z výše uvedených předpokladů vyplývá, že funkce f je na nějakém okolí bodu z_0 rovna součtu své Taylorovy řady (o středu z_0). Není-li tato řada nulová (tj. není-li f nulová na žádném okolí bodu z_0), existuje zřejmě $p \in \mathbb{N}$ takové, že z_0 je p – násobným kořenem funkce f; tj. na nějakém okolí bodu z_0 platí:

$$f(z) = \sum_{n=p}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n = (z-z_0)^p \sum_{n=p}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^{n-p} = (z-z_0)^p\,\varphi(z),$$

kde funkce

$$\varphi(z) := \sum_{n=p}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^{n-p}$$

je holomorfní (a proto spojitá) a nenulová v bodě z_0. [1] Odtud plyne, že existuje $U(z_0)$ takové, že funkce φ je nenulová v $U(z_0)$, a proto

$$\forall z \in U(z_0) \setminus \{z_0\} : \; f(z) = (z-z_0)^p\,\varphi(z) \neq 0.$$

□

Ukažme si jeden důležitý důsledek věty 7.19.

Věta 7.20. *Nechť funkce f a g jsou holomorfní na oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}$ a nechť γ je taková jednoduchá křivka v Ω, že $f = g$ na $\langle\gamma\rangle$. Pak $f = g$ na Ω.*

Cvičení 7.21. Dokažte pomocí věty 7.20, že pro každé $z \in \mathbb{C}$ platí:

a) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$,

b) $\sin(2z) = 2\sin z\cos z$,

c) $\cos^2 z = \frac{1+\cos(2z)}{2}$, $\sin^2 z = \frac{1-\cos(2z)}{2}$,

d) $\operatorname{Re} z > 0 \;\Rightarrow\; \ln(z^2) = 2\ln z$.

---

[1] $\varphi(z_0) = \frac{f^{(p)}(z_0)}{p!} \neq 0$

Kapitola 8

Laurentovy řady. Klasifikace singulárních bodů.

8.1 Laurentovy řady

Definice 8.1. Laurentovou řadou o středu $z_0 \in \mathbb{C}$ rozumíme výraz tvaru

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \tag{$\spadesuit$}$$

kde pro každé $n \in \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ je $a_n \in \mathbb{C}$.
Mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

nazýváme regulární částí Laurentovy řady ($\spadesuit$), funkční řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \frac{1}{(z - z_0)^n}$$

hlavní částí Laurentovy řady ($\spadesuit$).
Řekneme, že Laurentova řada ($\spadesuit$) konverguje na množině $\Omega \subset \mathbb{C}$, konverguje-li na Ω její regulární i hlavní část. V takovém případě pak funkci f definovanou na Ω předpisem $f(z) := f_1(z) + f_2(z)$, kde f_1 resp. f_2 je součtem regulární resp. hlavní části Laurentovy řady ($\spadesuit$), nazýváme součtem Laurentovy řady ($\spadesuit$).

Zabývejme se nyní konvergencí Laurentovy řady ($\spadesuit$); a podívejme se nejdříve na konvergenci její hlavní části. Položíme-li

$$\xi = \frac{1}{z - z_0},$$

bude

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \frac{1}{(z-z_0)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \xi^n,$$

kde řada napravo je `mocninnou řadou` o středu 0 („v proměnné“ ξ). Buď ρ její poloměr konvergence. Pak platí: [1]

- je-li $|\xi| < \rho$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \xi^n$ konverguje absolutně,
- je-li $|\xi| > \rho$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \xi^n$ diverguje.

Definujeme-li číslo

$$r := \begin{cases} \frac{1}{\rho}, & \text{je-li } 0 < \rho < +\infty, \\ 0, & \text{je-li } \rho = +\infty, \\ +\infty, & \text{je-li } \rho = 0, \end{cases}$$

tak z předchozích úvah plyne:

- je-li $|z - z_0| > r$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \frac{1}{(z-z_0)^n}$ konverguje absolutně,
- je-li $|z - z_0| < r$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \frac{1}{(z-z_0)^n}$ diverguje.

Nyní si označme R poloměr konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

tj. regulární části Laurentovy řady (♠). Nastane právě jedna z možností:

$$r < R, \ \ r = R, \ \ r > R.$$

i) Je-li $\underline{r < R}$, konverguje Laurentova řada (♠) absolutně (a lokálně stejnoměrně) na <u>mezikruží</u>

$$P(z_0, r, R) := \{z \in \mathbb{C} : \ r < |z - z_0| < R\}$$

a diverguje v každém bodě množiny

$$\{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| < r \text{ nebo } |z - z_0| > R\}.$$

[1] Viz větu 7.3.

Navíc se dá ukázat, že součet f Laurentovy řady (♠) je funkce holomorfní na $P(z_0, r, R)$ a že pro každé $p \in \mathbb{N}$ a $z \in P(z_0, r, R)$ platí

$$f^{(p)}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{\mathrm{d}^p\left((z-z_0)^n\right)}{\mathrm{d}z^p}.$$

ii) Při rovnosti $\underline{r = R}$ Laurentova řada (♠) diverguje v každém bodě množiny

$$\{z \in \mathbb{C} : \; |z - z_0| \neq r = R\}.$$

iii) V posledním z případů, tj. je-li $\underline{r > R}$, neexistuje žádné $z \in \mathbb{C}$, ve kterém Laurentova řada (♠) konverguje.

Situace je podobná té z podkapitoly 7.1. Ukázali jsme, že součtem Laurentovy řady je (samozřejmě za předpokladu $r < R$) funkce holomorfní na mezikruží $P(z_0, r, R)$. Následující věta říká, že `každá` funkce holomorfní na mezikruží $P(z_0, r, R)$ je součtem jisté Laurentovy řady.

Věta 8.2 (o rozvoji holomorfní funkce do Laurentovy řady).
Nechť funkce f je holomorfní na $P(z_0, r, R)$, kde $z_0 \in \mathbb{C}$ a $0 \leqq r < R \leqq +\infty$. Pak existuje `právě jedna` *Laurentova řada $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ taková, že pro každé $z \in P(z_0, r, R)$ platí*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Navíc, je-li ϱ libovolné reálné číslo takové, že $r < \varrho < R$, platí pro koeficienty výše uvedené Laurentovy řady (tzv. <u>Laurentova rozvoje funkce</u> f), že

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z,$$

kde

$$\gamma(t) := z_0 + \varrho\,\mathrm{e}^{it}, \; t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$
$$(n \in \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}).$$

Příklad 8.3. Najděte Laurentův rozvoj funkce

$$f(z) := \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

na všech maximálních mezikružích se středem $z_0 = 0$, na nichž je f holomorfní.

Řešení. Laurentův rozvoj funkce f máme zřejmě najít na těchto třech mezikružích:

$$P(0,0,1),\quad P(0,1,2),\quad P(0,2,+\infty).$$

Nejdříve si uvědomme, že pro každé $z \in \mathbb{C} \setminus \{1,2\}$ je

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}.$$

Nyní přistupme zvlášť k jednotlivým mezikružím.

a) Protože platí implikace:

$$|z| < 2 \quad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{z-2} = -\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\tfrac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} -\tfrac{1}{2^{n+1}}\, z^n,$$

$$|z| < 1 \quad \Rightarrow \quad -\tfrac{1}{z-1} = \tfrac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

je pro každé $\underline{z \in P(0,0,1)} = \{z \in \mathbb{C} :\ 0 < |z| < 1\}$:

$$\underline{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n.}$$

(Všimněme si, že jsme našli – jak bylo lze čekat – Taylorovu řadu.)

b) Již víme (viz část a), že pro každé $z \in \mathbb{C}$ takové, že $1 < |z| < 2$, platí

$$\frac{1}{z-2} = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{2^{n+1}}\, z^n.$$

Protože navíc platí

$$|z| > 1 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{z^{n+1}},$$

je pro každé $\underline{z \in P(0,1,2)} = \{z \in \mathbb{C} :\ 1 < |z| < 2\}$:

$$\underline{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{2^{n+1}}\, z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{z^n}.$$

c) Z implikace uvedené v části b) a z pozorování

$$|z| > 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}$$

snadno plyne, že pro každé $\underline{z \in P(0,2,+\infty)} = \{z \in \mathbb{C} :\ 2 < |z|\}$ platí

$$\underline{f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(2^{n-1} - 1\right)\frac{1}{z^n}.}$$

▲

Cvičení 8.4. Najděte Laurentův rozvoj funkce

$$f(z) := \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

na všech maximálních mezikružích se středem $z_0 = 1$, na nichž je f holomorfní.

8.2 Izolované singularity a jejich klasifikace

Definice 8.5. Bod $z_0 \in \mathbb{C}$ nazýváme izolovanou singularitou funkce f, jsou-li splněny tyto dvě podmínky:

(1) funkce f není holomorfní v bodě z_0,

(2) existuje prstencové okolí $P(z_0)$, na němž je f holomorfní.

Je-li bod z_0 izolovanou singularitou funkce f, existuje číslo $R \in \mathbb{R}^+$ takové, že f je holomorfní na $P(z_0, R) = P(z_0, 0, R)$, a proto[a]

$$\forall z \in P(z_0, R): \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \, (z - z_0)^n.$$

Podle počtu nenulových koeficientů hlavní části této Laurentovy řady rozlišme tři případy:

a) všechny koeficienty hlavní části jsou nulové (tj. $a_{-n} = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$),

b) existuje aspoň jeden ale nejvýše konečně mnoho nenulových koeficientů hlavní části (tzn. existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{-n} \neq 0$ a že pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k > n$, je $a_{-k} = 0$),

c) existuje nekonečně mnoho nenulových koeficientů hlavní části.

Nastane-li případ *a)*, nazýváme bod z_0 odstranitelnou singularitou funkce f, v případě *b)* se bod z_0 nazývá pólem (násobnosti n) funkce f [b] a za situace *c)* budeme bodu z_0 říkat podstatná singularita funkce f.

[a] Viz větu 8.2.

[b] Pól násobnosti 1 nazýváme taky jednoduchým pólem.

Věta 8.6. *Buď $z_0 \in \mathbb{C}$ izolovanou singularitou funkce f. Pak platí:*

(i) z_0 *je* `odstranitelnou singularitou funkce` f *právě tehdy, je-li*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) \in \mathbb{C};$$

(ii) z_0 *je* `pólem funkce` f *(resp.* `pólem násobnosti` n `funkce` f*) právě tehdy, je-li*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$$

$$\left(\textit{resp. je-li} \quad \lim_{z\to z_0} \left[(z-z_0)^n f(z)\right] \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\right);$$

(iii) z_0 *je* `podstatnou singularitou funkce` f *právě tehdy, jestliže* $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ *neexistuje.*

Věta 8.7 (Velká Picardova). *Nechť* $z_0 \in \mathbb{C}$ *je* `podstatnou singularitou funkce` f*. Pak* f *nabývá na libovolném prstencovém okolí bodu* z_0 *všech hodnot z* $\mathbb{C}$ *s výjimkou nejvýš jedné, tzn.*

$$(\forall P(z_0))\,(\exists z\in\mathbb{C}):\ \mathbb{C}\setminus\{z\}\subset f\left(P(z_0)\right).$$

8.3 Laurentova řada o středu ∞, klasifikace bodu ∞

Definice 8.8. Laurentovou řadou o středu ∞ rozumíme výraz tvaru

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}, \qquad (\spadesuit)$$

kde pro každé $n \in \{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$ je $a_n \in \mathbb{C}$.
Mocninnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^n$$

nazýváme hlavní částí Laurentovy řady ($\spadesuit$), funkční řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$$

regulární částí Laurentovy řady ($\spadesuit$). [a]

[a] Všimněme si, že formálně **není rozdíl** mezi Laurentovou řadou o středu 0 a Laurentovou řadou o středu ∞. Chceme-li tyto dva případy rozlišit, je nutno udat střed řady nebo určit její hlavní resp. regulární část.

Podobně jako u Laurentových řad o středu $z_0 \in \mathbb{C}$ zavádíme pojem konvergence Laurentovy řady o středu ∞ a jejího součtu; podobně bychom dospěli k mezikruží konvergence – tentokrát tvaru

$$P(\infty, r, R) := \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{R} < |z| < \frac{1}{r}\}.$$

I zde platí: konverguje-li Laurentova řada (♠) na mezikruží $P(\infty, r, R) \neq \emptyset$, je součet této řady na $P(\infty, r, R)$ holomorfní funkcí. Platí i analogie věty 8.2:

Věta 8.9. *Nechť funkce f je holomorfní na $P(\infty, r, R) \neq \emptyset$. Pak existuje* `právě jedna` *Laurentova řada $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$ taková, že pro každé $z \in P(\infty, r, R)$ platí*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}.$$

Navíc, je-li ϱ libovolné reálné číslo takové, že

$$\frac{1}{R} < \varrho < \frac{1}{r},$$

platí pro koeficienty výše uvedené Laurentovy řady

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z^{-n+1}} \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) z^{n-1} \mathrm{d}z,$$

kde

$$\gamma(t) := \varrho\, \mathrm{e}^{it}, \ t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$
$$(n \in \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}).$$

Definice 8.10. Řekneme, že ∞ je <u>izolovanou singularitou funkce</u> f, existuje-li $P(\infty)$, na němž je f holomorfní.

Je-li ∞ izolovanou singularitou funkce f, můžeme na nějakém $P(\infty)$ funkci f rozložit v Laurentovu řadu o středu ∞; tzn.

$$\forall z \in P(\infty): \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}.$$

Stejně jako u konečných izolovaných singularit i zde podle počtu nenulových koeficientů hlavní části této Laurentovy řady klasifikujeme bod ∞. Platí i analogie věty 8.6:

Věta 8.11. *Buď ∞ izolovanou singularitou funkce f. Pak platí:*

(i) ∞ *je* `odstranitelnou singularitou funkce` f *právě tehdy, je-li*

$$\lim_{z\to\infty} f(z) \in \mathbb{C};$$

(ii) ∞ *je* `pólem funkce` f *(resp.* `pólem násobnosti` n `funkce` f*) právě tehdy, je-li*

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$$

$$\left(\textit{resp. je-li} \quad \lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^n} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\right);$$

(iii) ∞ *je* `podstatnou singularitou funkce` f *právě tehdy, jestliže* $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ *neexistuje.*

Kapitola 9

Rezidua. Reziduová věta

9.1 Reziduum funkce a jeho výpočet

Definice 9.1. Buď $z_0 \in \mathbb{C}$ (resp. ∞) izolovanou singularitou funkce f a buď

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (\text{resp. } \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{z^n})$$

Laurentův rozvoj funkce f `na` nějakém `prstencovém okolí` bodu z_0 (resp. ∞). Číslo a_{-1} (resp. $-a_1$) nazýváme <u>reziduum funkce</u> f <u>v bodě</u> z_0 (resp. ∞) a značíme $\operatorname{res} f(z_0)$ (resp. $\operatorname{res} f(\infty)$). [a]

[a] Někdy budeme používat i značení: $\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)$ (resp. $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)$).

Poznámka 9.2. Na místě je přirozená otázka, proč se číslo a_{-1} (resp. $-a_1$) nazývá „reziduum funkce“. [1] K odpovědi si stačí uvědomit, že za situace z výše uvedené definice platí[2]

$$\operatorname{res} f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \right) \mathrm{d}z$$

$$(\text{resp.} \quad \operatorname{res} f(\infty) = -\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) \mathrm{d}z = -\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} \right) \mathrm{d}z).$$

[1] „Reziduum“ znamená „zbytek“ nebo „zůstatek“.
[2] Viz větu 8.2 (resp. větu 8.9).

Věta 9.3. *Platí:*

(i) *Je-li* $z_0 \in \mathbb{C}$ `odstranitelnou singularitou funkce` f, *je* $\mathit{res}\, f(z_0) = 0$. [a]

(ii) *Je-li funkce* f *holomorfní v bodě* $z_0 \in \mathbb{C}$ *a má-li funkce* g *v bodě* z_0 `jednoduchý pól`, *je*

$$\mathop{\mathit{res}}_{z=z_0} \left(f(z)g(z)\right) = f(z_0) \mathop{\mathit{res}}_{z=z_0} g(z).$$

(iii) *Jsou-li funkce* f *a* g *holomorfní v bodě* $z_0 \in \mathbb{C}$ *a je-li bod* z_0 `jednonásobným kořenem` *funkce* g,[b] *je*

$$\mathop{\mathit{res}}_{z=z_0} \left(\frac{f(z)}{g(z)}\right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

(iv) *Je-li bod* $z_0 \in \mathbb{C}$, *resp.* ∞ `pólem násobnosti` k *funkce* f, *je*

$$\mathop{\mathit{res}}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \left(\frac{\mathrm{d}^{\,k-1}}{\mathrm{d}z^{\,k-1}} \left(f(z)(z-z_0)^k\right)\right),$$

resp.

$$\mathop{\mathit{res}}_{z=\infty} f(z) = \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \lim_{z \to \infty} \left(z^{k+2} \frac{\mathrm{d}^{\,k+1}}{\mathrm{d}z^{\,k+1}} f(z)\right).$$

(v) *Je-li funkce* f *holomorfní v* $\mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$, *kde* $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ *jsou (navzájem různé) izolované singularity funkce* f, *je*

$$\mathit{res}\, f(\infty) + \sum_{i=1}^{n} \mathit{res}\, f(z_i) = 0.$$

[a] **Varovný příklad!** Uvažujeme-li funkci $f(z) := \frac{1}{z}$, je ∞ odstranitelnou singularitou funkce f, a přesto platí: $\operatorname{res} f(\infty) = -1 \neq 0$.

[b] Tzn. $g(z_0) = 0 \neq g'(z_0)$.

Cvičení 9.4. Pokuste se o důkaz věty 9.3.

Příklady 9.5. Vypočtěte

a) $\displaystyle \mathop{\mathrm{res}}_{z=0} \left(z^2 \sin \frac{1}{z}\right)$,

b) $\displaystyle \mathop{\mathrm{res}}_{z=\frac{\pi}{4}} \frac{z^3 \sin z}{\cos(2z)}$,

c) $\displaystyle \mathop{\mathrm{res}}_{z=2\pi i} \frac{1}{(\mathrm{e}^z - 1)^2}$.

Řešení.
Ad a)
Pro každé $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ platí

$$z^2 \sin \frac{1}{z} = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n-1}},$$

a proto

$$\operatorname*{res}_{z=0} \left(z^2 \sin \frac{1}{z} \right) = \frac{-1}{3!} = -\frac{1}{6}.$$

Ad b)
Protože $\frac{\pi}{4}$ je zřejmě jednonásobným kořenem funkce

$$g(z) := \cos(2z),$$

je [1]

$$\operatorname*{res}_{z=\frac{\pi}{4}} \frac{z^3 \sin z}{\cos(2z)} = \left[\frac{z^3 \sin z}{-2 \sin(2z)} \right]_{z=\frac{\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}\pi^3}{256}.$$

Ad c)
Protože $2\pi i$ je zřejmě pólem násobnosti 2 funkce, jejíž reziduum počítáme, je [2]

$$\operatorname*{res}_{z=2\pi i} \frac{1}{(\mathrm{e}^z - 1)^2} = \frac{1}{1!} \lim_{z \to 2\pi i} \left[\frac{(z-2\pi i)^2}{(\mathrm{e}^z-1)^2} \right]' = \cdots = -1.$$

▲

9.2 Reziduová věta

Věta 9.6 (Reziduová). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je jednoduše souvislá oblast, nechť γ je jednoduchá uzavřená po částech hladká kladně orientovaná křivka v Ω a nechť funkce f je holomorfní na $\Omega \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$, kde $\{z_1, z_2, \dots, z_n\} \in \operatorname{int} \gamma$ jsou (navzájem různé) izolované singularity funkce f.*
Potom platí:

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \mathit{res}\, f(z_i)\,.$$

Důkaz je snadným důsledkem definice rezidua a vět 5.10 a 8.2.

□

[1] Viz větu 9.3 – část (iii).
[2] Viz větu 9.3 – část (iv).

Příklad 9.7. Vypočtěte
$$\int_\gamma z^2 \sin \frac{1}{z+1}\, \mathrm{d}z,$$
kde
$$\gamma(t) := 2\mathrm{e}^{it},\ t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Řešení. Z reziduové věty plyne, že
$$\int_\gamma z^2 \sin \frac{1}{z+1}\, \mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=-1} z^2 \sin \frac{1}{z+1}.$$
Protože pro každé $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ platí:
$$z^2 \sin \frac{1}{z+1} = \left((z+1)^2 - 2(z+1) + 1\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{(z+1)^{2n+1}},$$
je [1]
$$\int_\gamma z^2 \sin \frac{1}{z+1}\, \mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=-1} z^2 \sin \frac{1}{z+1} = 2\pi i \left(1\frac{(-1)^1}{3!} + 0 + 1\frac{(-1)^0}{1!} \right) = \frac{5}{3}\pi i.$$

▲

9.3 Výpočet integrálů funkcí reálné proměnné pomocí reziduové věty

a) Integrály typu $\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)\, \mathrm{d}x$,

kde $R:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je racionální funkce dvou proměnných a integrovaná funkce (tj. funkce $x \mapsto R(\sin x, \cos x)$) je spojitá na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Zvolme substituci
$$\mathrm{e}^{ix} = z.$$
Pak (zatím pouze formálně) dostaneme:
$$\underline{\sin x = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}},\quad \underline{\cos x = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}},\quad \mathrm{d}z = \mathrm{e}^{ix}\, i\, \mathrm{d}x,\ \text{tj. } \underline{\mathrm{d}x = \frac{1}{iz}\, \mathrm{d}z},$$
a proto
$$\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)\, \mathrm{d}x = \int_\gamma R\left(\frac{z - \frac{1}{z}}{2i}, \frac{z + \frac{1}{z}}{2} \right) \frac{1}{iz}\, \mathrm{d}z, \tag{9.1}$$

[1] Rozmyslete si podrobně!

kde

$$\gamma(x) := \mathrm{e}^{ix}, \quad x \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Správnost rovnosti (9.1), kterou jsme získali pouze „formálním dosazením“, plyne přímo z věty 5.5. Integrál vystupující napravo lze často spočítat pomocí reziduové věty.

Příklad 9.8.

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\frac{5}{4} - \cos x}\,\mathrm{d}x = \int_\gamma \frac{1}{\frac{5}{4} - \frac{z+\frac{1}{z}}{2}} \frac{1}{iz}\,\mathrm{d}z =$$

$$= -\frac{2}{i} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z-2)(z-\frac{1}{2})} = -\frac{2}{i}\, 2\pi i \operatorname*{res}_{z=\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{(z-2)(z-\frac{1}{2})} \right) = -4\pi \frac{1}{\frac{1}{2} - 2} = \frac{8}{3}\pi$$

$$\big(\gamma(x) = \mathrm{e}^{ix},\ x \in \langle 0, 2\pi \rangle\big)\,.$$

b) Integrály typu $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x,}$

kde $P, Q:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou polynomy, pro něž platí:

- Q nemá reálný kořen,
- stupeň polynomu Q je alespoň o 2 větší než stupeň polynomu P.

Z výše uvedených předpokladů vyplývá, že

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{\alpha_k} \frac{P(z)}{Q(z)}\,\mathrm{d}z = \lim_{k\to+\infty} \int_{-k}^{k} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x,$$

kde

$$\alpha_k(t) := t,\ t \in \langle -k, k \rangle,$$

a že

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{\beta_k} \frac{P(z)}{Q(z)}\,\mathrm{d}z = 0,$$

kde

$$\beta_k(t) := k\mathrm{e}^{it},\ t \in \langle 0, \pi \rangle.$$

Proto platí

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to+\infty} \int_{\gamma_k} \frac{P(z)}{Q(z)}\,\mathrm{d}z,$$

kde[1]

$$\gamma_k(t) := \begin{cases} \alpha_k(t+k), & \text{je-li } t \in \langle -2k, 0), \\ \beta_k(t), & \text{je-li } t \in \langle 0, \pi \rangle. \end{cases}$$

Nyní uvažujme kruh $U(0,r) \subset \mathbb{C}$ tak velký, aby obsahoval všechny kořeny polynomu Q (takový jistě existuje!). Pak pro každé reálné číslo $k > r$ platí

$$\int_{\gamma_k} \frac{P(z)}{Q(z)}\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_r} \frac{P(z)}{Q(z)}\,\mathrm{d}z,$$

a proto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to+\infty} \int_{\gamma_k} \frac{P(z)}{Q(z)}\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_r} \frac{P(z)}{Q(z)}\,\mathrm{d}z.$$

A teď aplikujme reziduovou větu:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{\gamma_r} \frac{P(z)}{Q(z)}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{\substack{z_k\in\mathbb{C}:\\ Q(z_k)=0,\\ \operatorname{Im} z_k>0}} \operatorname*{res}_{z=z_k} \left(\frac{P(z)}{Q(z)}\right).$$

Příklad 9.9.

$$\underline{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2x+2)^2}\,\mathrm{d}x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\big((x-(-1+i))\,(x-(-1-i))\big)^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= 2\pi i \operatorname*{res}_{z=-1+i} \frac{1}{\big((z-(-1+i))\,(z-(-1-i))\big)^2} = 2\pi i \lim_{z\to-1+i} \left(\frac{1}{\big(z-(-1-i)\big)^2}\right)' =$$

$$= 2\pi i \left[-2\frac{1}{\big(z-(-1-i)\big)^3}\right]_{z=-1+i} = \underline{\frac{\pi}{2}}.$$

[1] Namalujte si geometrické obrazy křivek $\alpha_k,\ \beta_k,\ \gamma_k$.

Kapitola 10

Příklady k procvičení

Příklad 10.1.
Určete reálnou a imaginární část daného komplexního čísla

a) $z = (1+i)(3-2i)\,;$

b) $z = \frac{2-3i}{3+4i}\,;$

c) $z = \frac{1+i}{1-i}\,;$

d) $z = 2i - \overline{\frac{2-4i}{2}}\,.$

Příklad 10.2.
Zapište dané komplexní číslo v goniometrickém tvaru

a) $z = -1 + \sqrt{3}i\,;$

b) $z = i\,;$

c) $z = -8\,;$

d) $z = -1 - \sqrt{3}i\,;$

e) $z = \frac{2+i}{3-2i}\,;$

f) $z = \frac{3-i}{2+i}\,.$

Příklad 10.3.
Dokažte (matematickou indukcí) tzv. *Moivrovu větu*:

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,(\forall \varphi \in \mathbb{R}):\ \big(\cos\varphi + i\sin\varphi\big)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi).$$

Příklad 10.4.
Buď $\varphi \in \mathbb{R}$. Vyjádřete $\sin(4\varphi)$ a $\cos(4\varphi)$ pomocí $\sin\varphi$ a $\cos\varphi$.

Příklad 10.5.
Určete $\operatorname{Re} z$ a $\operatorname{Im} z$, je-li $z = \left(\frac{1-i}{1+\sqrt{3}i}\right)^{24}$.

Příklad 10.6.
Určete $\operatorname{Arg} z$ a $\arg z$, je-li

a) $z = \left(\sqrt{3}+i\right)^{126}$;

b) $z = (1+i)^{137}$;

c) $z = -1-5i$.

Příklad 10.7.
Znázorněte v Gaussově rovině množinu

a) $\{z \in \mathbb{C}_\infty : \operatorname{Re} z \leqq 1\}$;

b) $\{z \in \mathbb{C}_\infty : \operatorname{Re}(z^2) = 2\}$;

c) $\{z \in \mathbb{C}_\infty : \operatorname{Im} \frac{1}{z} = \frac{1}{4}\}$;

d) $\{z \in \mathbb{C}_\infty : |\operatorname{Im} z| < 1\}$;

e) $\{z \in \mathbb{C}_\infty : |z| = \operatorname{Re} z + 1\}$;

f) $\{z \in \mathbb{C}_\infty : |z-2| = |1-2\overline{z}|\}$;

g) $\{z \in \mathbb{C}_\infty : \left|\frac{z-2}{z-3}\right| = 1\}$;

h) $\{z \in \mathbb{C}_\infty : |1+z| < |1-z|\}$;

i) $\{z \in \mathbb{C}_\infty : |z+1| = 2|z-1|\}$;

j) $\{z \in \mathbb{C}_\infty : 2 < |z+2-3i| < 4\}$;

k) $\{z \in \mathbb{C}_\infty : \frac{\pi}{4} \leqq \arg(z+2i) \leqq \frac{\pi}{2}\}$;

l) $\{z \in \mathbb{C}_\infty : |z| + \operatorname{Re} z \leqq 1 \ \wedge \ -\frac{\pi}{2} \leqq \arg z \leqq \frac{\pi}{4}\}$.

Příklad 10.8.
Buď $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dokažte následující implikace:

a) $\left.\begin{matrix} \varphi_1 \in \operatorname{Arg} z_1 \\ \varphi_2 \in \operatorname{Arg} z_2 \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; \varphi_1 + \varphi_2 \in \operatorname{Arg}(z_1 z_2)$;

b) $\left.\begin{matrix} \varphi_1 \in \operatorname{Arg} z_1 \\ \varphi_2 \in \operatorname{Arg} z_2 \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; \varphi_1 - \varphi_2 \in \operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$.

Příklad 10.9.
Rozhodněte, zda daná limita existuje, a pokud ano, vypočtěte ji

a) $\lim (3-4i)^n$,

b) $\lim \left((-1)^n + \frac{i}{n}\right)$,

c) $\lim \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n$,

d) $\lim \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^{6n}$.

Příklad 10.10.
Buď (z_n) posloupnost komplexních čísel. Dokažte následující tvrzení:

a) $z_n \to 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{z_n} \to \infty$;

b) $\left.\begin{matrix} |z_n| \to r \in \mathbb{R} \\ \arg z_n \to \varphi \in \mathbb{R} \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; z_n \to r\big(\cos\varphi + i\sin\varphi\big)$;

a ukažte, že implikaci v tvrzení b) nelze obrátit.

Příklad 10.11.
Najděte všechna $z \in \mathbb{C}_\infty$, pro která platí

a) $z^3 = 1$;

b) $z^2 = i$;

c) $z^2 = 24i - 7$;

d) $\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 = 2i$;

e) $z^4 = -1$;

f) $z^3 = i - 1$;

g) $z^5 = 1$;

h) $z^2 = -11 + 60i$;

i) $z^2 = 3 + 4i$.

Příklad 10.12.
Určete a znázorněte množinu $M = \{\frac{1}{z} : \ z \in \Omega\}$, je-li

a) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \ \arg z = \alpha\}, \ \alpha \in (-\pi, \pi\rangle$;

b) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - 1| = 1\}$;

c) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \ \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z\}$;

d) $\Omega = \{x + iy \in \mathbb{C} : \ x = 1\}$;

e) $\Omega = \{x + iy \in \mathbb{C} : \ y = 0\}$.

Příklad 10.13.
Určete a znázorněte množinu $M = \{f(z) : \ z \in \Omega\}$, je-li

a) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \ |\arg z| \leqq \frac{\pi}{6}\}, \ f(z) := z^2$;

b) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \ |\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{2}\}, \ f(z) := \mathrm{e}^z$;

c) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \ 0 < \operatorname{Re} z < \pi \ \wedge \ \operatorname{Im} z > 0\}, \ f(z) := \mathrm{e}^{iz}$;

d) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \ \operatorname{Im} z = \frac{1}{2}\}, \ f(z) := z^2$.

Příklad 10.14.
Vypočtěte

a) $\sin(2 - 3i)$;

b) $\cos i$;

c) $\cosh i$;

d) $\operatorname{Ln}(-5 + 3i)$ a $\ln(-5 + 3i)$;

e) $\mathrm{Ln}\,(-4-\sqrt{3}i)$ a $\ln(-4-\sqrt{3}i)$;

f) $\mathrm{Ln}\,(i\mathrm{e}^2)$.

Příklad 10.15.
Najděte všechna $z \in \mathbb{C}$, pro která platí

a) $\sin z = 3$;

b) $\cos z = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

c) $\sin z + \cos z = 2$;

d) $\sin z - \cos z = 3$;

e) $z^2 + 2z + 9 + 6i = 0$.

Příklad 10.16.
Vypočtěte

a) 2^i;

b) $(-2)^{\sqrt{2}}$;

c) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$;

d) $i^{\frac{3}{4}}$;

e) $(-1)^{\sqrt{3}}$;

f) $(-\sqrt{3}i+1)^{-3}$.

Příklad 10.17.
Najděte reálnou a imaginární část funkce $f:\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definované předpisem

a) $f(z) := \sin z$;

b) $f(z) := z^2 \cos z$;

c) $f(z) := z^3 + 5z - 1$;

d) $f(z) := |z|\,\overline{z}$;

e) $f(z) := z^2\,\overline{z}$;

f) $f(z) := \frac{1}{z}$.

Příklad 10.18.
Zjistěte, zda je funkce $f(z) := z^3$ prostá na množině Ω, je-li

a) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \ \operatorname{Re} z > 0\}$;

b) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \ \arg z \in \langle 0, \frac{\pi}{4})\}$.

Příklad 10.19.
Určete, zda existuje daná limita, a pokud ano, vypočtěte ji

a) $\lim\limits_{z\to 0} \frac{\operatorname{Re} z}{z}$;

b) $\lim\limits_{z\to 0} \frac{\operatorname{Im}(z^2)}{z\overline{z}}$;

c) $\lim\limits_{z\to 0} \frac{z\operatorname{Im} z}{|z|}$;

d) $\lim\limits_{z\to 0} \frac{z^2}{|z|^2}$;

e) $\lim\limits_{z\to 0} \frac{z^3}{|z|^2}$;

f) $\lim\limits_{z\to i} \frac{z^2+z(2-i)-2i}{z^2+1}$;

g) $\lim\limits_{z\to 0} \frac{\operatorname{Re} z}{1+|z|}$.

Příklad 10.20.
Znázorněte množinu $\langle\varphi\rangle := \{\varphi(t) : \ t \in D\varphi\}$, je-li

a) $\varphi(t) := 1 - it, \ D\varphi = \langle 0, 2\rangle$;

b) $\varphi(t) := t - it^2, \ D\varphi = \langle -1, 2\rangle$;

c) $\varphi(t) := 1 + \mathrm{e}^{-it}, \ D\varphi = \langle 0, 2\pi\rangle$;

d) $\varphi(t) := \mathrm{e}^{2it} - 1, \ D\varphi = \langle 0, 2\pi\rangle$;

e) $\varphi(t) := \begin{cases} \mathrm{e}^{i\pi t}, \ t \in \langle 0, 1 \rangle, \\ t - 2, \ t \in \langle 1, 3 \rangle; \end{cases}$

f) $\varphi(t) := \begin{cases} \mathrm{e}^{it}, \ t \in \langle -\frac{\pi}{2}, \pi \rangle, \\ \frac{3t}{\pi} - 4, \ t \in \langle \pi, 2\pi \rangle. \end{cases}$

Příklad 10.21.
Parametrizujte množinu Ω (tzn. najděte křivku $\varphi: \ \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ takovou, aby $\langle \varphi \rangle = \Omega$), je-li

a) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - 2 + 3i| = 2\}$;

b) Ω úsečka s krajními body $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$;

c) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \ \operatorname{Re} z = 2 \operatorname{Im} z\}$;

d) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \ \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = 2\}$.

Příklad 10.22.
Znázorněte množinu Ω a rozhodněte, zda je Ω oblastí a zda je Ω otevřenou množinou, je-li

a) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - i| < 1 \ \vee \ |z + i| < 1\}$;

b) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - 1| < 1 \ \wedge \ |z - 2| < 2\}$;

c) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - 1| < |z + 1|\}$;

d) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \ |z + 1| > 2|z|\}$;

e) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \ 1 < |z| < 2\}$;

f) $\Omega = \big\{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1 \ \wedge \ \arg z \in (-\pi, \pi\rangle \setminus \{0\}\big\}$;

g) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \ |2z| < |1 + z^2|\}$.

Příklad 10.23.
Zjistěte, ve kterých bodech má funkce f derivaci a ve kterých bodech je funkce f holomorfní, je-li

a) $f(z) := \operatorname{Re} z$;

b) $f(z) := |z^2|$;

c) $f(z) := z\mathrm{e}^z$;

d) $f(z) := \overline{z}|z|$;

e) $f(z) := \frac{\operatorname{Re} z}{z}$;

f) $f(z) := z^2\overline{z}$;

g) $f(z) := z^2 + 2z - 1$.

Příklad 10.24.
Zjistěte, zda je funkce Φ harmonická na oblasti Ω, je-li

a) $\Phi(x, y) := x^2 - y^2 + 2011$, $\Omega = \mathbb{C}$;

b) $\Phi(x, y) := \frac{x}{x^2+y^2} + x^2 - y^2 + x - y$, $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Příklad 10.25.
Najděte (existuje-li) na oblasti Ω holomorfní funkci $f = u + iv$, je-li

a) $u(x, y) := x^3 - 3xy^2 - 2y$, $\Omega = \mathbb{C}$;

b) $u(x, y) := \frac{x}{x^2+y^2}$, $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$;

c) $u(x, y) := 3x^2 - y^2 + 3x + y$, $\Omega = \mathbb{C}$;

d) $u(x, y) := x^2 - y^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2+y^2}$, $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Příklad 10.26.
Buď $u(x, y) := x^3 - 3xy^2 - 2y + 2$. Najděte (existuje-li) na $\mathbb{C}$ holomorfní funkci $f = u + iv$, pro niž platí

a) $f(0) = i$;

b) $f(1) = 3 - i$.

Příklad 10.27.
Najděte (existuje-li) na oblasti Ω holomorfní funkci $f = u + iv$, je-li

a) $v(x, y) := -3xy^2 + x^3 + 5$, $\Omega = \mathbb{C}$;

b) $v(x, y) := \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$.

Příklad 10.28.
Buď $v(x, y) := 1 + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$. Najděte (existuje-li) na oblasti $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ holomorfní funkci $f = u + iv$, pro niž platí

a) $f(3) = \ln 3 + 6 + i$;

b) $f(\mathrm{e}) = 1 - i$.

Příklad 10.29.
Dokažte, že je funkce

$$v(x, y) := \ln(x^2 + y^2)$$

harmonická na (`dvojnásobně souvislé`) oblasti $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, a že přesto neexistuje funkce $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ taková, aby funkce $f := u + iv$ byla holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Příklad 10.30.
Určete *úhel otočení* a *koeficient roztažnosti* funkce f v bodě z_0, je-li

a) $f(z) := \mathrm{e}^z$, $z_0 = -1 - \frac{\pi}{2}i$;

b) $f(z) := z^3$, $z_0 = -3 + 4i$;

c) $f(z) := \frac{z+i}{z-i}$, $z_0 = 2i$.

Příklad 10.31.
Určete, ve kterých bodech Gaussovy roviny dochází při daném zobrazení ke *kontrakci*

a) $f(z) := \frac{2}{z}$;

b) $f(z) := \ln(z + 4)$.

Příklad 10.32.
Znázorněte množiny Ω a $f(\Omega) = \{f(z) : \; z \in \Omega\}$, je-li [1]

a) $\Omega = U(1,2), \; f(z) := 1 - 2iz;$

b) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \; \operatorname{Re} z < 1\}, \; f(z) := (1+i)z + 1;$

c) $\Omega = U(1,2), \; f(z) := \frac{1}{z};$

d) $\Omega = U(1,2), \; f(z) := \frac{2iz}{z+3};$

e) $\Omega = U(1,2), \; f(z) := \frac{z-1}{2z-6};$

f) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \; \operatorname{Re} z < 1\}, \; f(z) := \frac{1}{z};$

g) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \; \operatorname{Re} z < 1\}, \; f(z) := \frac{z}{z-1+i};$

h) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \; \operatorname{Re} z < 1\}, \; f(z) := \frac{z}{z-2};$

i) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \; \operatorname{Re} z < 0 \;\wedge\; \operatorname{Im} z < 0\}, \; f(z) := \frac{1}{z};$

j) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \; \operatorname{Re} z > 0 \;\wedge\; \operatorname{Im} z > 0\}, \; f(z) := \frac{z-1}{z+1};$

k) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \; -1 < \operatorname{Re} z < 0 \;\wedge\; \operatorname{Im} z < 0\}, \; f(z) := \frac{z-i}{z+i};$

l) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \; |z| < 1 \;\wedge\; \operatorname{Re} z < 0 \;\wedge\; \operatorname{Im} z > 0\}, \; f(z) := \frac{z}{z-i}.$

Příklad 10.33.
Najděte lineární lomenou funkci f takovou, aby

a) $f(-1) = 0, \; f(i) = 2i, \; f(1+i) = 1-i;$

b) $f(i) = \infty, \; f(6) = 0, \; f(\infty) = 3;$

c) $f(0) = i, \; f(i) = 0, \; f(-1) = -i.$

Příklad 10.34.
Najděte lineární funkci, která zobrazí čtverec s vrcholy $0, \; 1-i, \; 2, \; 1+i$ na čtverec s vrcholy $1+i, \; -1+i, \; -1-i, \; 1-i.$

[1] *Nápověda k některým z níže uvedených příkladů.* Uvědomte si (a dokažte), že platí tvrzení:

$$\left.\begin{array}{c} f \text{ je konformní na oblasti } \Omega \subset \mathbb{C}_\infty, \\ A,\, B \subset \Omega \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

Příklad 10.35.
Buď
$$\Omega = \{z \in \mathbb{C}:\ \operatorname{Re} z > \operatorname{Im} z\}.$$
Najděte lineární lomenou funkci f takovou, aby $f(\Omega) = U(0,1)$.

Příklad 10.36.
Najděte konformní zobrazení, které zobrazí oblast
$$\{z \in \mathbb{C}:\ |z| < 1 \ \wedge\ \operatorname{Re} z > 0\}$$
na oblast
$$\{z \in \mathbb{C}:\ \operatorname{Im} z > 0\}.$$

Příklad 10.37.
Buď
$$\Omega = \{z \in \mathbb{C}:\ \operatorname{Re} z > 0 \ \wedge\ \operatorname{Im} z < 0\}.$$
Najděte lineární lomenou funkci f takovou, aby
$$f(\Omega) = \{z \in \mathbb{C}:\ |z| < 1 \ \wedge\ \operatorname{Re} z < 0\}.$$

Příklad 10.38.
Najděte konformní zobrazení, které zobrazí oblast
$$\{z \in \mathbb{C}:\ \operatorname{Re} z > \operatorname{Im} z > 0\}$$
na oblast $U(0,1)$.

Příklad 10.39.
Nalezněte obrazy přímek rovnoběžných s reálnou resp. imaginární osou při zobrazení $f(z) := \frac{1}{z}$ (přímky uvažujte včetně bodu ∞).

Příklad 10.40.
Nalezněte obrazy množin
$$M_\alpha = \{z \in \mathbb{C}:\ \arg z = \alpha\}, \quad N_r = \{z \in \mathbb{C}:\ |z| = r\},$$
kde $\alpha \in (-\pi, \pi\rangle$, $r \in \mathbb{R}^+$, při zobrazení $f(z) := \ln z$.

Příklad 10.41.
Vypočtěte
$$\int_\gamma |z| \,\mathrm{d}z,$$
je-li
$$\gamma(t) := \begin{cases} 3\mathrm{e}^{it}, \ t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle, \\ i\big(3 + \frac{\pi}{2} - t\big), \ t \in \langle \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 3 \rangle, \\ t - \frac{\pi}{2} - 3, \ t \in \langle \frac{\pi}{2} + 3, \frac{\pi}{2} + 6 \rangle. \end{cases}$$

Příklad 10.42.
Vypočtěte
$$\int_\gamma z^3 \,\mathrm{d}z,$$
je-li
$$\gamma(t) := \begin{cases} \mathrm{e}^{it}, \ t \in \langle -\frac{\pi}{2}, \pi \rangle, \\ \frac{3}{\pi}t - 4, \ t \in \langle \pi, 2\pi \rangle, \\ -\frac{2+i}{\pi}t + 6 + 2i, \ t \in \langle 2\pi, 3\pi \rangle. \end{cases}$$

Příklad 10.43.
Vypočtěte
$$\int_\gamma |z|\overline{z} \,\mathrm{d}z,$$
je-li γ taková jednoduchá uzavřená po částech hladká a kladně orientovaná křivka, že $\langle\gamma\rangle$ je hranicí množiny
$$\{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 2 \ \wedge \ \operatorname{Im} z > 0\}.$$

Příklad 10.44.
Vypočtěte pomocí Cauchyho integrálních vzorců daný integrál [1]

a)
$$\int_k \frac{z^2 + i}{z} \,\mathrm{d}z, \quad \text{kde} \quad k = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - 2i| = 1\};$$

[1] *Úmluva.* Symbolem $\int_k f(z)\,\mathrm{d}z$, kde $k \subset \mathbb{C}$, rozumíme $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$, kde γ je taková jednoduchá uzavřená po částech hladká kladně orientovaná křivka, že $\langle\gamma\rangle = k$.

b)

$$\int_k \frac{\sin z}{z+i}\,\mathrm{d}z, \quad \text{kde} \quad k = \{z \in \mathbb{C}: \ |z+i| = 1\};$$

c)

$$\int_k \frac{\sin z}{z^2 - 7z + 10}\,\mathrm{d}z, \quad \text{kde} \quad k = \{z \in \mathbb{C}: \ |z| = 3\};$$

d)

$$\int_k \frac{\sin z}{(z-2i)^3}\,\mathrm{d}z, \quad \text{kde} \quad k = \{z \in \mathbb{C}: \ |z| = 3\};$$

e)

$$\int_k \frac{\cos z}{z^2 - \pi^2}\,\mathrm{d}z, \quad \text{kde} \quad k = \{z \in \mathbb{C}: \ |z| = 4\};$$

f)

$$\int_k \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}}{(z^2-4)^2}\,\mathrm{d}z, \quad \text{kde} \quad k = \{z \in \mathbb{C}: \ |z-2| = 1\};$$

g)

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^z \cos(\pi z)}{z^2 + 2z}\,\mathrm{d}z, \quad \text{kde} \quad \gamma(t) := \frac{3}{2}\mathrm{e}^{it}, \ t \in \langle 0, 2\pi\rangle;$$

h)

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z^2-1)^3}, \quad \text{kde} \quad \gamma(t) := \frac{-2 + \mathrm{e}^{-4\pi i t}}{2}, \ t \in \langle 0, 4\rangle;$$

i)

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(1-z)(z+2)(z-i)^2},$$

kde γ je taková jednoduchá uzavřená po částech hladká kladně orientovaná křivka, že $-2 \in \operatorname{int} \gamma, \ i \in \operatorname{int} \gamma, \ 1 \in \operatorname{ext} \gamma$.

Příklad 10.45.
Vypočtěte

a) $\int_0^{1+i} \mathrm{e}^z \,\mathrm{d}z$;

b) $\int_0^{1+i} z^3 \,\mathrm{d}z$;

c) $\int_0^{i} z^2 \sin z \,\mathrm{d}z$;

d) $\int_0^{i} z \sin z \,\mathrm{d}z$.

Příklad 10.46.
Rozhodněte, zda daná řada konverguje

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n2^n}$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}(1+i)^n$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{3n-17}$.

Příklad 10.47.
Určete obor konvergence dané řady [1]

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z^n}{n!} + \frac{n^2}{z^n}\right)$.

Příklad 10.48.
Určete poloměr konvergence dané mocninné řady

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^{2011}}$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n(z-1)^n$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(z-1)^n}{\sqrt{(3n-2)2^n}}$;

d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1+i)^n}{3^n(n-i)}$;

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n$;

f) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \big(\cos(in)\big) z^n$;

[1] Tzn. najděte všechna $z \in \mathbb{C}$, pro která daná řada konverguje.

g) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n^2-n-2)z^n$;

h) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n+8)!}$.

Příklad 10.49.
Najděte součet dané mocninné řady v kruhu konvergence

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nz^n$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$;

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{2n+1}$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n+1}$;

e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n^2-n-2)z^n$.

Příklad 10.50.
Najděte součet dané řady

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n2^n}$.

Příklad 10.51.
Najděte Taylorovu řadu funkce f o středu z_0 a určete její poloměr konvergence, je-li

a) $f(z) := \frac{z+1}{z^2+4z-5},\ z_0 = -1$;

b) $f(z) := \frac{z}{z^2+i},\ z_0 = 0$;

c) $f(z) := \ln\frac{1+z}{1-z},\ z_0 = 0$;

d) $f(z) := \mathrm{e}^{3z-2},\ z_0 = 1$;

e) $f(z) := \sin(3z^2 + 2),\ z_0 = 0;$

f) $f(z) := \frac{1}{(z-1)^3},\ z_0 = 3;$

g) $f(z) := \sin^2 z,\ z_0 = 0.$

Příklad 10.52.
Určete obor konvergence dané Laurentovy řady [1]

a) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-|n|} z^n;$

b) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n^2+1}.$

Příklad 10.53.
Najděte Laurentovu řadu funkce f na daném „mezikruží“

a) $f(z) := \frac{\cos z}{z^2},\ 0 < |z| < 1;$

b) $f(z) := \frac{1}{z^2+1},\ |z| > 1;$

c) $f(z) := \frac{z^2+1}{z(z-i)},\ \frac{1}{2} < |z-i| < 1;$

d) $f(z) := \frac{1}{2z-5},\ |z| > \frac{5}{2};$

e) $f(z) := \frac{1}{z(z-2)},\ 1 < |z-2| < 2;$

f) $f(z) := \frac{z}{(z^2+1)^2},\ 0 < |z-i| < 2;$

g) $f(z) := \frac{z-\sin z}{z^4},\ 0 < |z| < \infty;$

h) $f(z) := \frac{z+2}{z^2-4z+3},\ 2 < |z-1| < \infty;$

i) $f(z) := \frac{1}{z(z-3)^2},\ 1 < |z-1| < 2.$

Příklad 10.54.
Najděte Laurentův rozvoj funkce f na všech „maximálních mezikružích“ se středem z_0, na nichž je f holomorfní, je-li

[1] Tzn. najděte všechna $z \in \mathbb{C}$, pro která daná řada konverguje.

a) $f(z) := \frac{z^2-z+3}{z^3-3z+2}$, $z_0 = 0$;

b) $f(z) := \frac{z+1}{z^2}$, $z_0 = 1 + i$.

Příklad 10.55.
Určete typ každé z izolovaných singularit funkce f, je-li

a) $f(z) := z^5 + 4z^3 - 2 + \frac{2}{z} + \frac{3}{z^2}$;

b) $f(z) := \frac{z^2-4}{z-2}$;

c) $f(z) := \frac{1}{z-z^3}$;

d) $f(z) := \frac{z^4}{z^4+1}$;

e) $f(z) := \frac{\mathrm{e}^z}{z^2+4}$;

f) $f(z) := \frac{z^2+4}{\mathrm{e}^z}$;

g) $f(z) := \frac{1-\mathrm{e}^z}{2+\mathrm{e}^z}$;

h) $f(z) := \mathrm{e}^{\frac{1}{z^2}}$;

i) $f(z) := \frac{1}{(z-3)^2(2-\cos z)}$;

j) $f(z) := \frac{z}{\sin z}$;

k) $f(z) := z^2 \sin \frac{z}{z+1}$;

l) $f(z) := \frac{1-\cos z}{\sin^2 z}$.

Příklad 10.56.
Dokažte l'Hospitalovo pravidlo:

Nechť funkce f a g jsou holomorfní a nekonstantní na nějakém prstencovém okolí bodu $z_0 \in \mathbb{C}$ a nechť $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \lim\limits_{z\to z_0} g(z) = 0$.
Potom platí

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

Příklad 10.57.
Vypočtěte reziduum funkce f ve všech jejích izolovaných singularitách, je-li

a) $f(z) := \frac{1}{z+z^3}$;

b) $f(z) := \frac{z^2}{(1+z)^3}$;

c) $f(z) := \frac{1}{(z^2+1)^3}$;

d) $f(z) := \frac{z^3+1}{z-2}$;

e) $f(z) := \frac{1}{z^6(z^2+1)^2}$;

f) $f(z) := \operatorname{tg} z$;

g) $f(z) := \frac{1}{\sin z}$;

h) $f(z) := \operatorname{cotg}^3 z$;

i) $f(z) := \sin z \sin \frac{1}{z}$;

j) $f(z) := \frac{\sin(\pi z)}{(z-1)^3}$.

Příklad 10.58.
Vypočtěte pomocí reziduové věty daný integrál

a)
$$\int_\gamma \frac{\cos z}{z^3}\,\mathrm{d}z, \quad \text{kde} \quad \gamma(t) := 3\mathrm{e}^{it},\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle;$$

b)
$$\int_\gamma \frac{1}{z+2}\cos\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z, \quad \text{kde} \quad \gamma(t) := 18\mathrm{e}^{it},\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle;$$

c)
$$\int_k \frac{z^3}{z^4-1}\,\mathrm{d}z, \quad \text{kde} \quad k = \{z \in \mathbb{C} :\ |z| = 2\};$$

d)
$$\int_k \frac{z^3}{z+1}\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}\,\mathrm{d}z, \quad \text{kde} \quad k = \{z \in \mathbb{C} :\ |z| = 2\};$$

e)
$$\int_\gamma z \sin\frac{z+1}{z-1}\,\mathrm{d}z, \quad \text{kde} \quad \gamma(t) := 2\mathrm{e}^{-it},\ t \in \langle 0, 6\pi\rangle;$$

f)

$$\int_\gamma \frac{e^{\pi z}}{2z^2 - i}\,dz,$$

kde γ je taková jednoduchá uzavřená po částech hladká kladně orientovaná křivka, že

$$\operatorname{int}\gamma = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1 \ \wedge \ 0 < \arg z < \frac{\pi}{2}\};$$

g)

$$\int_k \frac{dz}{z^5(z^{10} - 2)}, \quad \text{kde} \quad k = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 2\}.$$

Příklad 10.59.

Vypočtěte pomocí reziduové věty daný integrál [1]

a)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{5 + 3\cos x};$$

b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{x^4 + 6x^2 + 25};$$

c)

$$\int_0^{\infty} \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1}\,dx;$$

d)

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^3}\,dx;$$

e)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x}{3 + 2\sin x}\,dx;$$

f)

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(2x)}{5 - 4\cos x}\,dx;$$

g)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^6};$$

[1] Uvedené integrály je třeba chápat jako „*reálné*“ integrály z funkce *reálné* proměnné.

h)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + x + 1}.$$

Literatura

[1] J. Bouchala, O. Vlach *Křivkový a plošný integrál*, http://mi21.vsb.cz/, 2011.

[2] J. Bouchala, P. Vodstrčil: *Řady*, http://mi21.vsb.cz/, 2011.

[3] I. Černý: *Analýza v komplexním oboru*, Academia, Praha, 1983.

[4] I. Černý: *Základy analysy v komplexním oboru*, Academia, Praha, 1967.

[5] M. Dont, B. Opic: *Matematická analýza III – úlohy*, skripta ČVUT, Praha, 1989.

[6] J. Eliaš, J. Horváth, J. Kajan, R. Šulka: *Zbierka úloh z vyššej matematiky 4*, Alfa, Bratislava, 1979.

[7] P. Galajda, Š. Schrötter: *Funkcie komplexnej premennej a operátorový počet*, Alfa, Bratislava, 1991.

[8] I. Kluvánek, L. Mišík, M. Švec: *Matematika II.*, SVTL, Bratislava, 1965.

[9] K. Rektorys a spolupracovníci: *Přehled užité matematiky I a II*, Prometheus, Praha, 1995.

[10] J. Veselý: *Komplexní analýza pro učitele*, Karolinum, Univerzita Karlova, Praha, 2001.

Rejstřík