

Funkce komplexní proměnné a integrální transformace

Fourierovy řady II.

Marek Lampart

Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století* (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Prostor $L_2(a, b)$

Prostor $L_2(a, b)$

Označme $L_2(a, b)$ množinu všech vhodných komplexních funkcí $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$, pro které je integrál

$$\int_a^b |f(t)|^2 dt \quad (1)$$

konečný.

Prostor $L_2(a, b)$

Označme $L_2(a, b)$ množinu všech vhodných komplexních funkcí $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$, pro které je integrál

$$\int_a^b |f(t)|^2 dt \quad (1)$$

konečný.

Funkce náležící prostoru $L_2(a, b)$ se nazývá *integrovatelná s kvadrátem*.

Prostor $L_2(a, b)$

Označme $L_2(a, b)$ množinu všech vhodných komplexních funkcí $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$, pro které je integrál

$$\int_a^b |f(t)|^2 dt \quad (1)$$

konečný.

Funkce náležící prostoru $L_2(a, b)$ se nazývá *integrovatelná s kvadrátem*.

Poznámka 1

Prostor $L_2(a, b)$

Označme $L_2(a, b)$ množinu všech vhodných komplexních funkcí $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$, pro které je integrál

$$\int_a^b |f(t)|^2 dt \quad (1)$$

konečný.

Funkce náležící prostoru $L_2(a, b)$ se nazývá *integrovatelná s kvadrátem*.

Poznámka 1

Výraz vhodných ve výše uvedené definici je podstatný pro korektnost textu. Funkce, které jsou pro nás přípustné, vhodné, jsou ty, se kterými se většinou setkáme v praxi a v tomto textu, není-li řečeno jinak. Pro další omezení věnujte pozornost následujícím poznámkám.

Prostor $L_2(a, b)$

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 1

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 1

Integrací lze ověřit, že

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 1

Integrací lze ověřit, že

$$\blacktriangleright f(t) = \frac{1+i}{\sqrt{t}} \in L_2[1, 2],$$

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 1

Integrací lze ověřit, že

► $f(t) = \frac{1+i}{\sqrt{t}} \in L_2[1, 2],$

► $f(t) = \frac{1+i}{\sqrt{t}} \notin L_2(0, 1],$

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 1

Integrací lze ověřit, že

► $f(t) = \frac{1+i}{\sqrt{t}} \in L_2[1, 2],$

► $f(t) = \frac{1+i}{\sqrt{t}} \notin L_2(0, 1],$

► $f(t) = \frac{1+i}{\sqrt[4]{t}} \in L_2(0, 1].$

Prostor $L_2(a, b)$

Prostor $L_2(a, b)$

Poznámka 2

Prostor $L_2(a, b)$

Poznámka 2

*Při řešení mnohých problémů se často používá speciální prostor $L_1(a, b)$, *prostor funkcí integrovatelných na intervalu (a, b) .**

Prostor $L_2(a, b)$

Poznámka 2

*Při řešení mnohých problémů se často používá speciální prostor $L_1(a, b)$, **prostor funkcí integrovatelných na intervalu (a, b)** .*

Tento prostor je opět lineární.

Prostor $L_2(a, b)$

Poznámka 2

*Při řešení mnohých problémů se často používá speciální prostor $L_1(a, b)$, **prostor funkcí integrovatelných na intervalu (a, b)** .*

Tento prostor je opět lineární.

*Řekneme, že funkce f patří do $L_1(a, b)$, je-li na intervalu (a, b) **(absolutně) integrovatelná**.*

Prostor $L_2(a, b)$

Poznámka 2

*Při řešení mnohých problémů se často používá speciální prostor $L_1(a, b)$, **prostor funkcí integrovatelných na intervalu (a, b)** .*

Tento prostor je opět lineární.

*Řekneme, že funkce f patří do $L_1(a, b)$, je-li na intervalu (a, b) **(absolutně) integrovatelná**.*

To jest

Prostor $L_2(a, b)$

Poznámka 2

Při řešení mnohých problémů se často používá speciální prostor $L_1(a, b)$, *prostor funkcí integrovatelných na intervalu (a, b)* .

Tento prostor je opět lineární.

Řekneme, že funkce f patří do $L_1(a, b)$, je-li na intervalu (a, b) *(absolutně) integrovatelná*.

To jest

$$\int_a^b |f(t)| \, dt < \infty.$$

Prostor $L_2(a, b)$

Poznámka 2

Při řešení mnohých problémů se často používá speciální prostor $L_1(a, b)$, *prostor funkcí integrovatelných na intervalu (a, b)* .

Tento prostor je opět lineární.

Řekneme, že funkce f patří do $L_1(a, b)$, je-li na intervalu (a, b) *(absolutně) integrovatelná*.

To jest

$$\int_a^b |f(t)| \, dt < \infty.$$

Zřejmě, je-li $f(t) \in L_2(a, b)$, pak také $f(t) \in L_1(a, b)$.

Prostor $L_2(a, b)$

Poznámka 2

Při řešení mnohých problémů se často používá speciální prostor $L_1(a, b)$, *prostor funkcí integrovatelných na intervalu (a, b)* .

Tento prostor je opět lineární.

Řekneme, že funkce f patří do $L_1(a, b)$, je-li na intervalu (a, b) *(absolutně) integrovatelná*.

To jest

$$\int_a^b |f(t)| \, dt < \infty.$$

Zřejmě, je-li $f(t) \in L_2(a, b)$, pak také $f(t) \in L_1(a, b)$.

Opačná implikace však neplatí.

Prostor $L_2(a, b)$

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 2

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 2

Integrací lze ověřit, že

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 2

Integrací lze ověřit, že

$$\blacktriangleright f(t) = \frac{1+i}{\sqrt{t}} \in L_1[1, 2],$$

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 2

Integrací lze ověřit, že

$$\blacktriangleright f(t) = \frac{1+i}{\sqrt{t}} \in L_1[1, 2],$$

$$\blacktriangleright f(t) = \frac{1+i}{\sqrt[4]{t}} \in L_1(0, 1].$$

Prostor $L_2(a, b)$

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 3

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 3

Rozhodněme, zda funkce $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t-1}}$ je integrovatelná s kvadrátem, či alespoň absolutně integrovatelná na intervalu $[1, 2]$.

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 3

Rozhodněme, zda funkce $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t-1}}$ je integrovatelná s kvadrátem, či alespoň absolutně integrovatelná na intervalu $[1, 2]$. Spočtěme příslušné integrály:

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 3

Rozhodněme, zda funkce $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t-1}}$ je integrovatelná s kvadrátem, či alespoň absolutně integrovatelná na intervalu $[1, 2]$. Spočtěme příslušné integrály:

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}} dt =$$

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 3

Rozhodněme, zda funkce $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t-1}}$ je integrovatelná s kvadrátem, či alespoň absolutně integrovatelná na intervalu $[1, 2]$. Spočtěme příslušné integrály:

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}} dt = \lim_{u \rightarrow 1} \int_u^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}} dt$$

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 3

Rozhodněme, zda funkce $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t-1}}$ je integrovatelná s kvadrátem, či alespoň absolutně integrovatelná na intervalu $[1, 2]$. Spočtěme příslušné integrály:

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}} dt = \lim_{u \rightarrow 1} \int_u^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}} dt = \lim_{u \rightarrow 1} [2\sqrt{t-1}]_u^2$$

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 3

Rozhodněme, zda funkce $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t-1}}$ je integrovatelná s kvadrátem, či alespoň absolutně integrovatelná na intervalu $[1, 2]$. Spočtěme příslušné integrály:

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}} dt = \lim_{u \rightarrow 1} \int_u^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}} dt = \lim_{u \rightarrow 1} [2\sqrt{t-1}]_u^2 = 2,$$

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 3

Rozhodněme, zda funkce $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t-1}}$ je integrovatelná s kvadrátem, či alespoň absolutně integrovatelná na intervalu $[1, 2]$. Spočtěme příslušné integrály:

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}} dt = \lim_{u \rightarrow 1} \int_u^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}} dt = \lim_{u \rightarrow 1} [2\sqrt{t-1}]_u^2 = 2,$$

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{t-1}} \right)^2 dt =$$

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 3

Rozhodněme, zda funkce $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t-1}}$ je integrovatelná s kvadrátem, či alespoň absolutně integrovatelná na intervalu $[1, 2]$. Spočtěme příslušné integrály:

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}} dt = \lim_{u \rightarrow 1} \int_u^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}} dt = \lim_{u \rightarrow 1} [2\sqrt{t-1}]_u^2 = 2,$$

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{t-1}} \right)^2 dt = \lim_{u \rightarrow 1} \int_u^2 \frac{1}{t-1} dt$$

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 3

Rozhodněme, zda funkce $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t-1}}$ je integrovatelná s kvadrátem, či alespoň absolutně integrovatelná na intervalu $[1, 2]$. Spočtěme příslušné integrály:

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}} dt = \lim_{u \rightarrow 1} \int_u^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}} dt = \lim_{u \rightarrow 1} [2\sqrt{t-1}]_u^2 = 2,$$

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{t-1}} \right)^2 dt = \lim_{u \rightarrow 1} \int_u^2 \frac{1}{t-1} dt = \lim_{u \rightarrow 1} [\ln |t-1|]_u^2$$

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 3

Rozhodněme, zda funkce $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t-1}}$ je integrovatelná s kvadrátem, či alespoň absolutně integrovatelná na intervalu $[1, 2]$. Spočtěme příslušné integrály:

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}} dt = \lim_{u \rightarrow 1} \int_u^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}} dt = \lim_{u \rightarrow 1} [2\sqrt{t-1}]_u^2 = 2,$$

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{t-1}} \right)^2 dt = \lim_{u \rightarrow 1} \int_u^2 \frac{1}{t-1} dt = \lim_{u \rightarrow 1} [\ln |t-1|]_u^2 = \infty.$$

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 3

Rozhodněme, zda funkce $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t-1}}$ je integrovatelná s kvadrátem, či alespoň absolutně integrovatelná na intervalu $[1, 2]$. Spočtěme příslušné integrály:

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}} dt = \lim_{u \rightarrow 1} \int_u^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}} dt = \lim_{u \rightarrow 1} [2\sqrt{t-1}]_u^2 = 2,$$

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{t-1}} \right)^2 dt = \lim_{u \rightarrow 1} \int_u^2 \frac{1}{t-1} dt = \lim_{u \rightarrow 1} [\ln |t-1|]_u^2 = \infty.$$

Celkově, daná funkce $\frac{1}{\sqrt{t-1}} \in L_1[1, 2]$,

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 3

Rozhodněme, zda funkce $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t-1}}$ je integrovatelná s kvadrátem, či alespoň absolutně integrovatelná na intervalu $[1, 2]$. Spočtěme příslušné integrály:

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}} dt = \lim_{u \rightarrow 1} \int_u^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}} dt = \lim_{u \rightarrow 1} [2\sqrt{t-1}]_u^2 = 2,$$

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{t-1}} \right)^2 dt = \lim_{u \rightarrow 1} \int_u^2 \frac{1}{t-1} dt = \lim_{u \rightarrow 1} [\ln |t-1|]_u^2 = \infty.$$

Celkově, daná funkce $\frac{1}{\sqrt{t-1}} \in L_1[1, 2]$, ale $\frac{1}{\sqrt{t-1}} \notin L_2[1, 2]$.

Prostor $L_2(a, b)$

Prostor $L_2(a, b)$

Věta 1

Prostor $L_2(a, b)$

Věta 1

Každá po částech spojitá funkce na uzavřeném intervalu je na tomto intervalu integrovatelná s kvadrátem.

Prostor $L_2(a, b)$

Věta 1

Každá po částech spojitá funkce na uzavřeném intervalu je na tomto intervalu integrovatelná s kvadrátem.

Poznámka 3

Prostor $L_2(a, b)$

Věta 1

Každá po částech spojitá funkce na uzavřeném intervalu je na tomto intervalu integrovatelná s kvadrátem.

Poznámka 3

K úplnosti je ještě nutno definovat po částech spojitou funkci.

Prostor $L_2(a, b)$

Věta 1

Každá po částech spojitá funkce na uzavřeném intervalu je na tomto intervalu integrovatelná s kvadrátem.

Poznámka 3

*K úplnosti je ještě nutno definovat po částech spojitou funkci.
Je to taková funkce, která vyhovuje následujícím podmínkám:*

Prostor $L_2(a, b)$

Věta 1

Každá po částech spojitá funkce na uzavřeném intervalu je na tomto intervalu integrovatelná s kvadrátem.

Poznámka 3

K úplnosti je ještě nutno definovat po částech spojitou funkci.

Je to taková funkce, která vyhovuje následujícím podmínkám:

- 1. existuje konečné dělení intervalu (a, b) takové, že dělicí intervaly jsou navzájem disjunktní a jejich sjednocení je právě interval (a, b) ,*

Prostor $L_2(a, b)$

Věta 1

Každá po částech spojitá funkce na uzavřeném intervalu je na tomto intervalu integrovatelná s kvadrátem.

Poznámka 3

K úplnosti je ještě nutno definovat po částech spojitou funkci.

Je to taková funkce, která vyhovuje následujícím podmínkám:

- 1. existuje konečné dělení intervalu (a, b) takové, že dělicí intervaly jsou navzájem disjunktní a jejich sjednocení je právě interval (a, b) ,*
- 2. funkce zúžená na každý dělicí interval je spojitá.*

Prostor $L_2(a, b)$

Věta 1

Každá po částech spojitá funkce na uzavřeném intervalu je na tomto intervalu integrovatelná s kvadrátem.

Poznámka 3

K úplnosti je ještě nutno definovat po částech spojitou funkci.

Je to taková funkce, která vyhovuje následujícím podmínkám:

- 1. existuje konečné dělení intervalu (a, b) takové, že dělicí intervaly jsou navzájem disjunktní a jejich sjednocení je právě interval (a, b) ,*
- 2. funkce zúžená na každý dělicí interval je spojitá.*

Jediné, co je zapotřebí zvážit, je omezenost funkce na příslušném dělicím intervalu.

Prostor $L_2(a, b)$

Prostor $L_2(a, b)$

Bud'te f a g funkce z $L_2(a, b)$.

Prostor $L_2(a, b)$

Bud'te f a g funkce z $L_2(a, b)$.

Pak *skalární součin funkcí f a g na intervalu (a, b)* definujeme vztahem

Prostor $L_2(a, b)$

Buďte f a g funkce z $L_2(a, b)$.

Pak *skalární součin funkcí f a g na intervalu (a, b)* definujeme vztahem

$$(f, g) = \int_a^b f(t) \overline{g}(t) \, dt. \quad (2)$$

Prostor $L_2(a, b)$

Buďte f a g funkce z $L_2(a, b)$.

Pak *skalární součin funkcí f a g na intervalu (a, b)* definujeme vztahem

$$(f, g) = \int_a^b f(t) \overline{g}(t) \, dt. \quad (2)$$

Normu funkce f z $L_2(a, b)$ definujeme předpisem

Prostor $L_2(a, b)$

Buďte f a g funkce z $L_2(a, b)$.

Pak *skalární součin funkcí f a g na intervalu (a, b)* definujeme vztahem

$$(f, g) = \int_a^b f(t) \overline{g}(t) \, dt. \quad (2)$$

Normu funkce f z $L_2(a, b)$ definujeme předpisem

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)}. \quad (3)$$

Prostor $L_2(a, b)$

Bud'te f a g funkce z $L_2(a, b)$.

Pak *skalární součin funkcí f a g na intervalu (a, b)* definujeme vztahem

$$(f, g) = \int_a^b f(t) \overline{g}(t) \, dt. \quad (2)$$

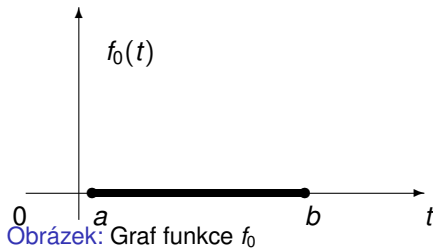
Normu funkce f z $L_2(a, b)$ definujeme předpisem

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)}. \quad (3)$$

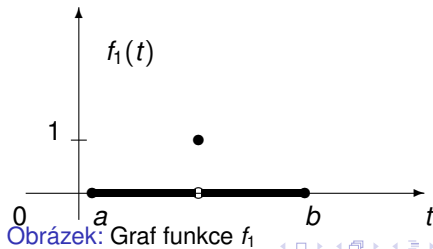
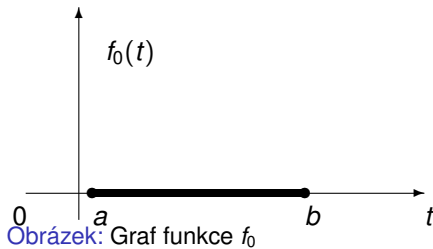
Normu funkce tedy chápeme jako její vzdálenost od nulové funkce.

Prostor $L_2(a, b)$

Prostor $L_2(a, b)$



Prostor $L_2(a, b)$



Prostor $L_2(a, b)$

Prostor $L_2(a, b)$

Poznámka 4

Prostor $L_2(a, b)$

Poznámka 4

Vezměme funkce $f_0(t)$ a $f_1(t)$ definované na předchozích obrázcích.

Prostor $L_2(a, b)$

Poznámka 4

*Vezměme funkce $f_0(t)$ a $f_1(t)$ definované na předchozích obrázcích.
Pak*

$$\|f_0\| = \|f_1\| = 0.$$

Prostor $L_2(a, b)$

Poznámka 4

*Vezměme funkce $f_0(t)$ a $f_1(t)$ definované na předchozích obrázcích.
Pak*

$$\|f_0\| = \|f_1\| = 0.$$

Tedy pro dvě různé funkce dostáváme stejnou normu, což není v pořádku.

Prostor $L_2(a, b)$

Poznámka 4

Vezměme funkce $f_0(t)$ a $f_1(t)$ definované na předchozích obrázcích. Pak

$$\|f_0\| = \|f_1\| = 0.$$

Tedy pro dvě různé funkce dostáváme stejnou normu, což není v pořádku.

Vezmeme-li v úvahu předchozí poznámku, pak vzhledem k Lebesgueově míře jsou tyto funkce totožné, liší se pouze na množině míry nula.

Prostor $L_2(a, b)$

Prostor $L_2(a, b)$

Lema 1

Prostor $L_2(a, b)$

Lema 1

Bud'te f, g a h funkce z $L_2(a, b)$ a $c \in \mathbb{C}$.

Prostor $L_2(a, b)$

Lema 1

Bud'te f, g a h funkce z $L_2(a, b)$ a $c \in \mathbb{C}$.

Pak

Prostor $L_2(a, b)$

Lema 1

Bud'te f, g a h funkce z $L_2(a, b)$ a $c \in \mathbb{C}$.

Pak

$$1. (f, f) = \int_a^b f(t) \bar{f}(t) \, dt = \int_a^b |f(t)|^2 \, dt = \|f\|^2,$$

Prostor $L_2(a, b)$

Lema 1

Bud'te f, g a h funkce z $L_2(a, b)$ a $c \in \mathbb{C}$.

Pak

1. $(f, f) = \int_a^b f(t) \bar{f}(t) \, dt = \int_a^b |f(t)|^2 \, dt = \|f\|^2,$
2. $(cf, g) = c(f, g),$

Prostor $L_2(a, b)$

Lema 1

Bud'te f, g a h funkce z $L_2(a, b)$ a $c \in \mathbb{C}$.

Pak

1. $(f, f) = \int_a^b f(t) \bar{f}(t) \, dt = \int_a^b |f(t)|^2 \, dt = \|f\|^2,$
2. $(cf, g) = c(f, g),$
3. $(f + h, g) = (f, g) + (h, g),$

Prostor $L_2(a, b)$

Lema 1

Bud'te f, g a h funkce z $L_2(a, b)$ a $c \in \mathbb{C}$.

Pak

1. $(f, f) = \int_a^b f(t) \bar{f}(t) dt = \int_a^b |f(t)|^2 dt = \|f\|^2,$
2. $(cf, g) = c(f, g),$
3. $(f + h, g) = (f, g) + (h, g),$
4. $(f, g) = \overline{(g, f)},$

Prostor $L_2(a, b)$

Lema 1

Bud'te f, g a h funkce z $L_2(a, b)$ a $c \in \mathbb{C}$.

Pak

1. $(f, f) = \int_a^b f(t) \bar{f}(t) dt = \int_a^b |f(t)|^2 dt = \|f\|^2,$
2. $(cf, g) = c(f, g),$
3. $(f + h, g) = (f, g) + (h, g),$
4. $(f, g) = \overline{(g, f)},$
5. *Schwarz-Buňakovského nerovnost:* $|(f, g)| \leq \|f\| \|g\|,$

Prostor $L_2(a, b)$

Lema 1

Bud'te f, g a h funkce z $L_2(a, b)$ a $c \in \mathbb{C}$.

Pak

1. $(f, f) = \int_a^b f(t) \bar{f}(t) dt = \int_a^b |f(t)|^2 dt = \|f\|^2,$
2. $(cf, g) = c(f, g),$
3. $(f + h, g) = (f, g) + (h, g),$
4. $(f, g) = \overline{(g, f)},$
5. *Schwarz-Buňakovského nerovnost:* $|(f, g)| \leq \|f\| \|g\|,$
6. $\|f\| = 0$ právě tehdy, je-li $f(t) = 0$ pro každé $t,$

Prostor $L_2(a, b)$

Lema 1

Bud'te f, g a h funkce z $L_2(a, b)$ a $c \in \mathbb{C}$.

Pak

1. $(f, f) = \int_a^b f(t) \bar{f}(t) dt = \int_a^b |f(t)|^2 dt = \|f\|^2,$
2. $(cf, g) = c(f, g),$
3. $(f + h, g) = (f, g) + (h, g),$
4. $(f, g) = \overline{(g, f)},$
5. *Schwarz-Buňakovského nerovnost:* $|(f, g)| \leq \|f\| \|g\|,$
6. $\|f\| = 0$ právě tehdy, je-li $f(t) = 0$ pro každé t ,
7. $\|cf\| = |c| \|f\|,$

Prostor $L_2(a, b)$

Lema 1

Bud'te f, g a h funkce z $L_2(a, b)$ a $c \in \mathbb{C}$.

Pak

1. $(f, f) = \int_a^b f(t) \bar{f}(t) dt = \int_a^b |f(t)|^2 dt = \|f\|^2,$
2. $(cf, g) = c(f, g),$
3. $(f + h, g) = (f, g) + (h, g),$
4. $(f, g) = \overline{(g, f)},$
5. *Schwarz-Buňakovského nerovnost:* $|(f, g)| \leq \|f\| \|g\|,$
6. $\|f\| = 0$ právě tehdy, je-li $f(t) = 0$ pro každé t ,
7. $\|cf\| = |c| \|f\|,$
8. $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|.$

Prostor $L_2(a, b)$

Prostor $L_2(a, b)$

Systém funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ z $L_2(a, b)$ je *ortogonální*, je-li skalární součin každých dvou různých funkcí roven nule,

Prostor $L_2(a, b)$

Systém funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ z $L_2(a, b)$ je *ortogonální*, je-li skalární součin každých dvou různých funkcí roven nule,
tj. platí-li pro každé $m \neq n$

$$(f_m, f_n) = 0. \quad (4)$$

Prostor $L_2(a, b)$

Systém funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ z $L_2(a, b)$ je *ortogonální*, je-li skalární součin každých dvou různých funkcí roven nule, tj. platí-li pro každé $m \neq n$

$$(f_m, f_n) = 0. \quad (4)$$

Je-li navíc norma každé funkce posloupnosti rovna jedné, nazýváme takový systém *ortonormální*,

Prostor $L_2(a, b)$

Systém funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ z $L_2(a, b)$ je *ortogonální*, je-li skalární součin každých dvou různých funkcí roven nule,
tj. platí-li pro každé $m \neq n$

$$(f_m, f_n) = 0. \quad (4)$$

Je-li navíc norma každé funkce posloupnosti rovna jedné, nazýváme takový systém *ortonormální*,
tj.

$$(f_m, f_n) = \begin{cases} 1 & \text{pro } m = n, \\ 0 & \text{pro } m \neq n. \end{cases} \quad (5)$$

Prostor $L_2(a, b)$

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 4

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 4

Systém funkcí $\{e^{int}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ je na intervalu $[0, 2\pi]$ ortogonální, není však ortonormální.

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 4

Systém funkcí $\{e^{int}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ je na intervalu $[0, 2\pi]$ ortogonální, není však ortonormální.

Prvně, $\int_0^{2\pi} |e^{int}|^2 dt = 2\pi$,

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 4

Systém funkcí $\{e^{int}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ je na intervalu $[0, 2\pi]$ ortogonální, není však ortonormální.

Prvně, $\int_0^{2\pi} |e^{int}|^2 dt = 2\pi$, tedy $e^{int} \in L_2[0, 2\pi]$ pro každé n .

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 4

Systém funkcí $\{e^{int}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ je na intervalu $[0, 2\pi]$ ortogonální, není však ortonormální.

Prvně, $\int_0^{2\pi} |e^{int}|^2 dt = 2\pi$, tedy $e^{int} \in L_2[0, 2\pi]$ pro každé n .

Dále

$$(f_m, f_n) =$$

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 4

Systém funkcí $\{e^{int}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ je na intervalu $[0, 2\pi]$ ortogonální, není však ortonormální.

Prvně, $\int_0^{2\pi} |e^{int}|^2 dt = 2\pi$, tedy $e^{int} \in L_2[0, 2\pi]$ pro každé n .

Dále

$$(f_m, f_n) = \begin{cases} \int_0^{2\pi} e^{imt} e^{-int} dt = 2\pi & \text{pro } m = n, \\ 0 & \text{pro } m \neq n, \end{cases}$$

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 4

Systém funkcí $\{e^{int}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ je na intervalu $[0, 2\pi]$ ortogonální, není však ortonormální.

Prvně, $\int_0^{2\pi} |e^{int}|^2 dt = 2\pi$, tedy $e^{int} \in L_2[0, 2\pi]$ pro každé n .

Dále

$$(f_m, f_n) = \begin{cases} \int_0^{2\pi} e^{imt} e^{-int} dt = 2\pi & \text{pro } m = n, \\ \int_0^{2\pi} e^{imt} e^{-int} dt = 0 & \text{pro } m \neq n. \end{cases} \quad (6)$$

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 4

Systém funkcí $\{e^{int}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ je na intervalu $[0, 2\pi]$ ortogonální, není však ortonormální.

Prvně, $\int_0^{2\pi} |e^{int}|^2 dt = 2\pi$, tedy $e^{int} \in L_2[0, 2\pi]$ pro každé n .

Dále

$$(f_m, f_n) = \begin{cases} \int_0^{2\pi} e^{imt} e^{-int} dt = 2\pi & \text{pro } m = n, \\ \int_0^{2\pi} e^{imt} e^{-int} dt = 0 & \text{pro } m \neq n. \end{cases} \quad (6)$$

Daný systém funkcí lze jednoduchým způsobem normalizovat přenásobením každé funkce převrácenou hodnotou normy:

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 4

Systém funkcí $\{e^{int}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ je na intervalu $[0, 2\pi]$ ortogonální, není však ortonormální.

Prvně, $\int_0^{2\pi} |e^{int}|^2 dt = 2\pi$, tedy $e^{int} \in L_2[0, 2\pi]$ pro každé n .

Dále

$$(f_m, f_n) = \begin{cases} \int_0^{2\pi} e^{imt} e^{-int} dt = 2\pi & \text{pro } m = n, \\ \int_0^{2\pi} e^{imt} e^{-int} dt = 0 & \text{pro } m \neq n. \end{cases} \quad (6)$$

Daný systém funkcí lze jednoduchým způsobem normalizovat přenásobením každé funkce převrácenou hodnotou normy:

$$\left\{ \frac{e^{int}}{\|e^{int}\|} \right\}_{n=-\infty}^{\infty}$$

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 4

Systém funkcí $\{e^{int}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ je na intervalu $[0, 2\pi]$ ortogonální, není však ortonormální.

Prvně, $\int_0^{2\pi} |e^{int}|^2 dt = 2\pi$, tedy $e^{int} \in L_2[0, 2\pi]$ pro každé n .

Dále

$$(f_m, f_n) = \begin{cases} \int_0^{2\pi} e^{imt} e^{-int} dt = 2\pi & \text{pro } m = n, \\ \int_0^{2\pi} e^{imt} e^{-int} dt = 0 & \text{pro } m \neq n. \end{cases} \quad (6)$$

Daný systém funkcí lze jednoduchým způsobem normalizovat přenásobením každé funkce převrácenou hodnotou normy:

$$\left\{ \frac{e^{int}}{\|e^{int}\|} \right\}_{n=-\infty}^{\infty} = \left\{ \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{n=-\infty}^{\infty}.$$

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 4

Systém funkcí $\{e^{int}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ je na intervalu $[0, 2\pi]$ ortogonální, není však ortonormální.

Prvně, $\int_0^{2\pi} |e^{int}|^2 dt = 2\pi$, tedy $e^{int} \in L_2[0, 2\pi]$ pro každé n .

Dále

$$(f_m, f_n) = \begin{cases} \int_0^{2\pi} e^{imt} e^{-int} dt = 2\pi & \text{pro } m = n, \\ \int_0^{2\pi} e^{imt} e^{-int} dt = 0 & \text{pro } m \neq n. \end{cases} \quad (6)$$

Daný systém funkcí lze jednoduchým způsobem normalizovat přenásobením každé funkce převrácenou hodnotou normy:

$$\left\{ \frac{e^{int}}{\|e^{int}\|} \right\}_{n=-\infty}^{\infty} = \left\{ \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{n=-\infty}^{\infty}.$$

Pak zřejmě

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 4

Systém funkcí $\{e^{int}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ je na intervalu $[0, 2\pi]$ ortogonální, není však ortonormální.

Prvně, $\int_0^{2\pi} |e^{int}|^2 dt = 2\pi$, tedy $e^{int} \in L_2[0, 2\pi]$ pro každé n .

Dále

$$(f_m, f_n) = \begin{cases} \int_0^{2\pi} e^{imt} e^{-int} dt = 2\pi & \text{pro } m = n, \\ \int_0^{2\pi} e^{imt} e^{-int} dt = 0 & \text{pro } m \neq n. \end{cases} \quad (6)$$

Daný systém funkcí lze jednoduchým způsobem normalizovat přenásobením každé funkce převrácenou hodnotou normy:

$$\left\{ \frac{e^{int}}{\|e^{int}\|} \right\}_{n=-\infty}^{\infty} = \left\{ \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{n=-\infty}^{\infty}.$$

Pak zřejmě

$$\left\| \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} \right\|^2$$

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 4

Systém funkcí $\{e^{int}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ je na intervalu $[0, 2\pi]$ ortogonální, není však ortonormální.

Prvně, $\int_0^{2\pi} |e^{int}|^2 dt = 2\pi$, tedy $e^{int} \in L_2[0, 2\pi]$ pro každé n .

Dále

$$(f_m, f_n) = \begin{cases} \int_0^{2\pi} e^{imt} e^{-int} dt = 2\pi & \text{pro } m = n, \\ \int_0^{2\pi} e^{imt} e^{-int} dt = 0 & \text{pro } m \neq n. \end{cases} \quad (6)$$

Daný systém funkcí lze jednoduchým způsobem normalizovat přenásobením každé funkce převrácenou hodnotou normy:

$$\left\{ \frac{e^{int}}{\|e^{int}\|} \right\}_{n=-\infty}^{\infty} = \left\{ \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{n=-\infty}^{\infty}.$$

Pak zřejmě

$$\left\| \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} \right\|^2 = \frac{1}{2\pi} (e^{int}, e^{int})$$

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 4

Systém funkcí $\{e^{int}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ je na intervalu $[0, 2\pi]$ ortogonální, není však ortonormální.

Prvně, $\int_0^{2\pi} |e^{int}|^2 dt = 2\pi$, tedy $e^{int} \in L_2[0, 2\pi]$ pro každé n .

Dále

$$(f_m, f_n) = \begin{cases} \int_0^{2\pi} e^{imt} e^{-int} dt = 2\pi & \text{pro } m = n, \\ \int_0^{2\pi} e^{imt} e^{-int} dt = 0 & \text{pro } m \neq n. \end{cases} \quad (6)$$

Daný systém funkcí lze jednoduchým způsobem normalizovat přenásobením každé funkce převrácenou hodnotou normy:

$$\left\{ \frac{e^{int}}{\|e^{int}\|} \right\}_{n=-\infty}^{\infty} = \left\{ \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{n=-\infty}^{\infty}.$$

Pak zřejmě

$$\left\| \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} \right\|^2 = \frac{1}{2\pi} (e^{int}, e^{int}) = 1.$$

Prostor $L_2(a, b)$

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 5

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 5

Posloupnost trigonometrických funkcí

$$1, \cos(t), \sin(t), \cos(2t), \sin(2t), \dots$$

je na intervalu $(-\pi, \pi)$ ortogonální, není však ortonormální.

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 5

Posloupnost trigonometrických funkcí

$$1, \cos(t), \sin(t), \cos(2t), \sin(2t), \dots$$

*je na intervalu $(-\pi, \pi)$ ortogonální, není však ortonormální.
Skutečně:*

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 5

Posloupnost trigonometrických funkcí

$$1, \cos(t), \sin(t), \cos(2t), \sin(2t), \dots$$

*je na intervalu $(-\pi, \pi)$ ortogonální, není však ortonormální.
Skutečně:*

$$\text{pro } m \neq n \text{ je } \left\{ \right.$$

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 5

Posloupnost trigonometrických funkcí

$$1, \cos(t), \sin(t), \cos(2t), \sin(2t), \dots$$

*je na intervalu $(-\pi, \pi)$ ortogonální, není však ortonormální.
Skutečně:*

$$\text{pro } m \neq n \text{ je } \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt) \sin(nt) \, dt = 0, \right.$$

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 5

Posloupnost trigonometrických funkcí

$$1, \cos(t), \sin(t), \cos(2t), \sin(2t), \dots$$

je na intervalu $(-\pi, \pi)$ ortogonální, není však ortonormální.

Skutečně:

$$\text{pro } m \neq n \text{ je } \begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt) \sin(nt) \, dt = 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt) \cos(nt) \, dt = 0, \end{cases}$$

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 5

Posloupnost trigonometrických funkcí

$$1, \cos(t), \sin(t), \cos(2t), \sin(2t), \dots$$

*je na intervalu $(-\pi, \pi)$ ortogonální, není však ortonormální.
Skutečně:*

$$\text{pro } m \neq n \text{ je } \begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt) \sin(nt) \, dt = 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt) \cos(nt) \, dt = 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt) \sin(nt) \, dt = 0, \end{cases} \quad (7)$$

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 5

Posloupnost trigonometrických funkcí

$$1, \cos(t), \sin(t), \cos(2t), \sin(2t), \dots$$

*je na intervalu $(-\pi, \pi)$ ortogonální, není však ortonormální.
Skutečně:*

$$\text{pro } m \neq n \text{ je } \left\{ \begin{array}{l} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt) \sin(nt) \, dt = 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt) \cos(nt) \, dt = 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt) \sin(nt) \, dt = 0, \end{array} \right. \quad (7)$$

$$\text{pro } m = n \text{ je } \left\{ \right.$$

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 5

Posloupnost trigonometrických funkcí

$$1, \cos(t), \sin(t), \cos(2t), \sin(2t), \dots$$

*je na intervalu $(-\pi, \pi)$ ortogonální, není však ortonormální.
Skutečně:*

$$\text{pro } m \neq n \text{ je } \begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt) \sin(nt) \, dt = 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt) \cos(nt) \, dt = 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt) \sin(nt) \, dt = 0, \end{cases} \quad (7)$$

$$\text{pro } m = n \text{ je } \begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt) \sin(mt) \, dt = 0, \end{cases}$$

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 5

Posloupnost trigonometrických funkcí

$$1, \cos(t), \sin(t), \cos(2t), \sin(2t), \dots$$

*je na intervalu $(-\pi, \pi)$ ortogonální, není však ortonormální.
Skutečně:*

$$\text{pro } m \neq n \text{ je } \begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt) \sin(nt) \, dt = 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt) \cos(nt) \, dt = 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt) \sin(nt) \, dt = 0, \end{cases} \quad (7)$$

$$\text{pro } m = n \text{ je } \begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt) \sin(mt) \, dt = 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt) \cos(mt) \, dt = \pi, \end{cases}$$

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 5

Posloupnost trigonometrických funkcí

$$1, \cos(t), \sin(t), \cos(2t), \sin(2t), \dots$$

*je na intervalu $(-\pi, \pi)$ ortogonální, není však ortonormální.
Skutečně:*

$$\text{pro } m \neq n \text{ je } \begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt) \sin(nt) \, dt = 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt) \cos(nt) \, dt = 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt) \sin(nt) \, dt = 0, \end{cases} \quad (7)$$

$$\text{pro } m = n \text{ je } \begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt) \sin(mt) \, dt = 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt) \cos(mt) \, dt = \pi, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt) \sin(mt) \, dt = \pi. \end{cases} \quad (8)$$

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 5

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 5

Normalizací dané posloupnosti získáme ortonormální systém funkcí:

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 5

Normalizací dané posloupnosti získáme ortonormální systém funkcí:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(t)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(t)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(2t)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(2t)}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

Prostor $L_2(a, b)$

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 6

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 6

Systém funkcí $\{e^{int}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ není na intervalu $[0, \pi]$ ortogonální.

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 6

Systém funkcí $\{e^{int}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ není na intervalu $[0, \pi]$ ortogonální.

Skutečně

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 6

Systém funkcí $\{e^{int}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ není na intervalu $[0, \pi]$ ortogonální.

Skutečně

$$(f_m, f_n) =$$

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 6

Systém funkcí $\{e^{int}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ není na intervalu $[0, \pi]$ ortogonální.

Skutečně

$$(f_m, f_n) = \int_0^\pi e^{imt} e^{-int} dt$$

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 6

Systém funkcí $\{e^{int}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ není na intervalu $[0, \pi]$ ortogonální.

Skutečně

$$(f_m, f_n) = \int_0^\pi e^{imt} e^{-int} dt = \frac{(-1)^{m-n} - 1}{m-n} \neq 0 \text{ pro } m-n \text{ liché.}$$

Prostor $L_2(a, b)$

Prostor $L_2(a, b)$

Nechť je dána posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ z $L_2(a, b)$.

Prostor $L_2(a, b)$

Nechť je dána posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ z $L_2(a, b)$.

Existuje-li funkce f z $L_2(a, b)$ taková, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0, \quad (9)$$

pak říkáme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje k f v normě $L_2(a, b)$* .

Prostor $L_2(a, b)$

Nechť je dána posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ z $L_2(a, b)$.

Existuje-li funkce f z $L_2(a, b)$ taková, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0, \quad (9)$$

pak říkáme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje k f v normě $L_2(a, b)$* .

Někdy se také používá označení *konvergence v průměru* nebo *konvergence ve smyslu střední kvadratické odchylky*.

Prostor $L_2(a, b)$

Nechť je dána posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ z $L_2(a, b)$.

Existuje-li funkce f z $L_2(a, b)$ taková, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0, \quad (9)$$

pak říkáme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje k f v normě $L_2(a, b)$* .

Někdy se také používá označení *konvergence v průměru* nebo *konvergence ve smyslu střední kvadratické odchylky*.

Posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ z $L_2(a, b)$ konverguje na množině M k funkci f *stejněměrně*, jestliže pro každé $\epsilon > 0$ existuje n_0 takové, že pro každé $n > n_0$ a každé $z \in M$ je $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$.

Prostor $L_2(a, b)$

Nechť je dána posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ z $L_2(a, b)$.

Existuje-li funkce f z $L_2(a, b)$ taková, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0, \quad (9)$$

pak říkáme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje k f v normě $L_2(a, b)$* .

Někdy se také používá označení *konvergence v průměru* nebo *konvergence ve smyslu střední kvadratické odchylky*.

Posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ z $L_2(a, b)$ konverguje na množině M k funkci f *stejněměrně*, jestliže pro každé $\epsilon > 0$ existuje n_0 takové, že pro každé $n > n_0$ a každé $z \in M$ je $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$.

Pokud víme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je stejnoměrně konvergentní, pak je také konvergentní.

Prostor $L_2(a, b)$

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 7

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 7

Geometrická posloupnost $\{t^n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní, ale není stejnoměrně konvergentní na intervalu $[0, 1)$.

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 7

Geometrická posloupnost $\{t^n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní, ale není stejnoměrně konvergentní na intervalu $[0, 1)$.

Snadno se ověří, že daná posloupnost konverguje k 0 na intervalu $[0, 1)$.

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 7

Geometrická posloupnost $\{t^n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní, ale není stejnoměrně konvergentní na intervalu $[0, 1)$.

Snadno se ověří, že daná posloupnost konverguje k 0 na intervalu $[0, 1)$.

Dále platí, že $\sup |t^n| = 1$ pro $t \in [0, 1)$.

Prostor $L_2(a, b)$

Příklad 7

Geometrická posloupnost $\{t^n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní, ale není stejnoměrně konvergentní na intervalu $[0, 1)$.

Snadno se ověří, že daná posloupnost konverguje k 0 na intervalu $[0, 1)$.

Dále platí, že $\sup |t^n| = 1$ pro $t \in [0, 1)$.

Tedy limitou není 0, daná posloupnost nekongverguje absolutně.

Zobecněná Fourierova řada

Zobecněná Fourierova řada

Celá teorie Fourierových řad vznikla z potřeby rozvinout danou periodickou funkci v periodickou funkci tvořenou trigonometrickými funkcemi.

Zobecněná Fourierova řada

Celá teorie Fourierových řad vznikla z potřeby rozvinout danou periodickou funkci v periodickou funkci tvořenou trigonometrickými funkcemi.

Většina vět platných pro Fourierovy řady zůstane platná, nahradíme-li v původních úvahách trigonometrické funkce systémem funkcí, jež jsou ortogonální popřípadě ortonormální.

Zobecněná Fourierova řada

Celá teorie Fourierových řad vznikla z potřeby rozvinout danou periodickou funkci v periodickou funkci tvořenou trigonometrickými funkcemi.

Většina vět platných pro Fourierovy řady zůstane platná, nahradíme-li v původních úvahách trigonometrické funkce systémem funkcí, jež jsou ortogonální popřípadě ortonormální.

Vzniká tedy otázka, zda je možno zadanou funkci $f(t)$, která je integrovatelná s kvadrátem na intervalu $[a, b]$, rozvinout v nekonečnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \varphi_n(t)$$

pomocí ortonormovaného systému funkcí $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\varphi_n \in L^2(a, b)$ a určit koeficienty α_n .

Zobecněná Fourierova řada

Zobecněná Fourierova řada

1. Aproximace

Zobecněná Fourierova řada

1. Aproximace

Předpokládejme, že $\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ je ortonormální soustava funkcí.

Zobecněná Fourierova řada

1. Aproximace

Předpokládejme, že $\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ je ortonormální soustava funkcí.

Budeme aproximovat funkci $f(t)$ polynomem T_n na základě nejmenší střední kvadratické odchylky.

Zobecněná Fourierova řada

1. Aproximace

Předpokládejme, že $\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ je ortonormální soustava funkcí.

Budeme aproximovat funkci $f(t)$ polynomem T_n na základě nejmenší střední kvadratické odchylky. Je tedy otázkou, jak volit koeficienty α_n v mnohočlenu

Zobecněná Fourierova řada

1. Aproximace

Předpokládejme, že $\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ je ortonormální soustava funkcí.

Budeme aproximovat funkci $f(t)$ polynomem T_n na základě nejmenší střední kvadratické odchylky. Je tedy otázkou, jak volit koeficienty α_n v mnohočlenu

$$T_k(t) = \alpha_0\varphi_0(t) + \alpha_1\varphi_1(t) + \cdots + \alpha_k\varphi_k(t),$$

Zobecněná Fourierova řada

1. Aproximace

Předpokládejme, že $\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ je ortonormální soustava funkcí.

Budeme aproximovat funkci $f(t)$ polynomem T_n na základě nejmenší střední kvadratické odchylky. Je tedy otázkou, jak volit koeficienty α_n v mnohočlenu

$$T_k(t) = \alpha_0 \varphi_0(t) + \alpha_1 \varphi_1(t) + \cdots + \alpha_k \varphi_k(t),$$

aby byla hodnota integrálu

$$I_k = \frac{1}{b-a} \int_a^b [f(t) - T_k(t)]^2 dt$$

minimální.

Zobecněná Fourierova řada

Zobecněná Fourierova řada

Upravme daný integrál

Zobecněná Fourierova řada

Upravme daný integrál

$$I_k =$$

Zobecněná Fourierova řada

Upravme daný integrál

$$I_k = \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b [f(t)]^2 \, dt - 2 \int_a^b [f(t) T_k(t)] \, dt + \int_a^b [T_k(t)]^2 \, dt \right).$$

Zobecněná Fourierova řada

Upravme daný integrál

$$I_k = \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b [f(t)]^2 dt - 2 \int_a^b [f(t) T_k(t)] dt + \int_a^b [T_k(t)]^2 dt \right).$$

Pak je

Zobecněná Fourierova řada

Upravme daný integrál

$$I_k = \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b [f(t)]^2 dt - 2 \int_a^b [f(t) T_k(t)] dt + \int_a^b [T_k(t)]^2 dt \right).$$

Pak je

$$\int_a^b f(t) T_k(t) dt =$$

Zobecněná Fourierova řada

Upravme daný integrál

$$I_k = \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b [f(t)]^2 dt - 2 \int_a^b [f(t) T_k(t)] dt + \int_a^b [T_k(t)]^2 dt \right).$$

Pak je

$$\int_a^b f(t) T_k(t) dt = \sum_{n=0}^k \alpha_n \int_a^b f(t) \varphi_n(t) dt.$$

Zobecněná Fourierova řada

Upravme daný integrál

$$I_k = \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b [f(t)]^2 dt - 2 \int_a^b [f(t) T_k(t)] dt + \int_a^b [T_k(t)]^2 dt \right).$$

Pak je

$$\int_a^b f(t) T_k(t) dt = \sum_{n=0}^k \alpha_n \int_a^b f(t) \varphi_n(t) dt.$$

Označme $a_n = \int_a^b f(t) \varphi_n(t) dt$.

Zobecněná Fourierova řada

Upravme daný integrál

$$I_k = \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b [f(t)]^2 dt - 2 \int_a^b [f(t) T_k(t)] dt + \int_a^b [T_k(t)]^2 dt \right).$$

Pak je

$$\int_a^b f(t) T_k(t) dt = \sum_{n=0}^k \alpha_n \int_a^b f(t) \varphi_n(t) dt.$$

Označme $a_n = \int_a^b f(t) \varphi_n(t) dt$.

Toto číslo nazýváme *Fourierovým koeficientem funkce $f(t)$ vzhledem k dané soustavě funkcí $\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$* .

Zobecněná Fourierova řada

Upravme daný integrál

$$I_k = \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b [f(t)]^2 dt - 2 \int_a^b [f(t) T_k(t)] dt + \int_a^b [T_k(t)]^2 dt \right).$$

Pak je

$$\int_a^b f(t) T_k(t) dt = \sum_{n=0}^k \alpha_n \int_a^b f(t) \varphi_n(t) dt.$$

Označme $a_n = \int_a^b f(t) \varphi_n(t) dt$.

Toto číslo nazýváme *Fourierovým koeficientem funkce $f(t)$ vzhledem k dané soustavě funkcí $\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$* .

Pak máme

Zobecněná Fourierova řada

Upravme daný integrál

$$I_k = \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b [f(t)]^2 dt - 2 \int_a^b [f(t) T_k(t)] dt + \int_a^b [T_k(t)]^2 dt \right).$$

Pak je

$$\int_a^b f(t) T_k(t) dt = \sum_{n=0}^k \alpha_n \int_a^b f(t) \varphi_n(t) dt.$$

Označme $a_n = \int_a^b f(t) \varphi_n(t) dt$.

Toto číslo nazýváme *Fourierovým koeficientem funkce $f(t)$ vzhledem k dané soustavě funkcí $\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$* .

Pak máme

$$\int_a^b f(t) T_k(t) dt =$$

Zobecněná Fourierova řada

Upravme daný integrál

$$I_k = \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b [f(t)]^2 dt - 2 \int_a^b [f(t) T_k(t)] dt + \int_a^b [T_k(t)]^2 dt \right).$$

Pak je

$$\int_a^b f(t) T_k(t) dt = \sum_{n=0}^k \alpha_n \int_a^b f(t) \varphi_n(t) dt.$$

Označme $a_n = \int_a^b f(t) \varphi_n(t) dt$.

Toto číslo nazýváme *Fourierovým koeficientem funkce $f(t)$ vzhledem k dané soustavě funkcí $\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$* .

Pak máme

$$\int_a^b f(t) T_k(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n a_n.$$

Zobecněná Fourierova řada

Zobecněná Fourierova řada

Nyní spočtěme

Zobecněná Fourierova řada

Nyní spočtěme

$$\int_a^b [T_k(t)]^2 dt =$$

Zobecněná Fourierova řada

Nyní spočtěme

$$\int_a^b [T_k(t)]^2 dt = \int_a^b \left[\sum_{n=0}^k \alpha_n \varphi_n \right]^2 dt$$

Zobecněná Fourierova řada

Nyní spočtěme

$$\begin{aligned}\int_a^b [T_k(t)]^2 dt &= \int_a^b \left[\sum_{n=0}^k \alpha_n \varphi_n \right]^2 dt \\ &= \int_a^b \left(\sum_{n=0}^k \alpha_n^2 \varphi_n^2 + 2 \sum_{\substack{m,n=0 \\ n < m}}^k \alpha_n \alpha_m \varphi_n \varphi_m \right) dt\end{aligned}$$

Zobecněná Fourierova řada

Nyní spočtěme

$$\begin{aligned}\int_a^b [T_k(t)]^2 dt &= \int_a^b \left[\sum_{n=0}^k \alpha_n \varphi_n \right]^2 dt \\&= \int_a^b \left(\sum_{n=0}^k \alpha_n^2 \varphi_n^2 + 2 \sum_{\substack{m,n=0 \\ n < m}}^k \alpha_n \alpha_m \varphi_n \varphi_m \right) dt \\&= \sum_{n=0}^k \alpha_n^2,\end{aligned}$$

Zobecněná Fourierova řada

Nyní spočtěme

$$\begin{aligned}\int_a^b [T_k(t)]^2 dt &= \int_a^b \left[\sum_{n=0}^k \alpha_n \varphi_n \right]^2 dt \\&= \int_a^b \left(\sum_{n=0}^k \alpha_n^2 \varphi_n^2 + 2 \sum_{\substack{m,n=0 \\ n < m}}^k \alpha_n \alpha_m \varphi_n \varphi_m \right) dt \\&= \sum_{n=0}^k \alpha_n^2,\end{aligned}$$

díky ortonormalitě systému $\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$.

Zobecněná Fourierova řada

Zobecněná Fourierova řada

Integrál má tudíž tvar

Zobecněná Fourierova řada

Integrál má tudíž tvar

$$I_k =$$

Zobecněná Fourierova řada

Integrál má tudíž tvar

$$I_k = \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b f(t)^2 dt + \sum_{n=0}^k (\alpha_n^2 - 2\alpha_n a_n + a_n^2 - a_n^2) \right) \quad (10)$$

Zobecněná Fourierova řada

Integrál má tudíž tvar

$$I_k = \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b f(t)^2 dt + \sum_{n=0}^k (\alpha_n^2 - 2\alpha_n a_n + a_n^2 - a_n^2) \right) \quad (10)$$

$$= \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b f(t)^2 dt + \sum_{n=0}^k (\alpha_n - a_n)^2 - \sum_{n=0}^k a_n^2 \right). \quad (11)$$

Zobecněná Fourierova řada

Integrál má tudíž tvar

$$I_k = \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b f(t)^2 dt + \sum_{n=0}^k (\alpha_n^2 - 2\alpha_n a_n + a_n^2 - a_n^2) \right) \quad (10)$$

$$= \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b f(t)^2 dt + \sum_{n=0}^k (\alpha_n - a_n)^2 - \sum_{n=0}^k a_n^2 \right). \quad (11)$$

Tato rovnice platí pro libovolnou volbu koeficientů α_n .

Zobecněná Fourierova řada

Integrál má tudíž tvar

$$I_k = \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b f(t)^2 dt + \sum_{n=0}^k (\alpha_n^2 - 2\alpha_n a_n + a_n^2 - a_n^2) \right) \quad (10)$$

$$= \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b f(t)^2 dt + \sum_{n=0}^k (\alpha_n - a_n)^2 - \sum_{n=0}^k a_n^2 \right). \quad (11)$$

Tato rovnice platí pro libovolnou volbu koeficientů α_n .

Integrál I_k má tedy minimální hodnotu při volbě $\alpha_n = a_n$.

Zobecněná Fourierova řada

Zobecněná Fourierova řada

Označme mnohočlen T_k s koeficienty $\alpha_n = a_n$ jako P_k a příslušné integrály J_k .

Zobecněná Fourierova řada

Označme mnohočlen T_k s koeficienty $\alpha_n = a_n$ jako P_k a příslušné integrály J_k .

Pak

$$J_k =$$

Zobecněná Fourierova řada

Označme mnohočlen T_k s koeficienty $\alpha_n = a_n$ jako P_k a příslušné integrály J_k .

Pak

$$J_k = \frac{1}{b-a} \int_a^b [f(t) - P_k(t)]^2 dt$$

Zobecněná Fourierova řada

Označme mnohočlen T_k s koeficienty $\alpha_n = a_n$ jako P_k a příslušné integrály J_k .

Pak

$$J_k = \frac{1}{b-a} \int_a^b [f(t) - P_k(t)]^2 dt = \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b [f(t)]^2 dt - \sum_{n=0}^k a_n^2 \right). \quad (12)$$

Zobecněná Fourierova řada

Označme mnohočlen T_k s koeficienty $\alpha_n = a_n$ jako P_k a příslušné integrály J_k .

Pak

$$J_k = \frac{1}{b-a} \int_a^b [f(t) - P_k(t)]^2 dt = \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b [f(t)]^2 dt - \sum_{n=0}^k a_n^2 \right). \quad (12)$$

Pro každé k platí

Zobecněná Fourierova řada

Označme mnohočlen T_k s koeficienty $\alpha_n = a_n$ jako P_k a příslušné integrály J_k .

Pak

$$J_k = \frac{1}{b-a} \int_a^b [f(t) - P_k(t)]^2 dt = \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b [f(t)]^2 dt - \sum_{n=0}^k a_n^2 \right). \quad (12)$$

Pro každé k platí

$$J_k \geq 0.$$

Zobecněná Fourierova řada

Označme mnohočlen T_k s koeficienty $\alpha_n = a_n$ jako P_k a příslušné integrály J_k .

Pak

$$J_k = \frac{1}{b-a} \int_a^b [f(t) - P_k(t)]^2 dt = \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b [f(t)]^2 dt - \sum_{n=0}^k a_n^2 \right). \quad (12)$$

Pro každé k platí

$$J_k \geq 0.$$

Proto

Zobecněná Fourierova řada

Označme mnohočlen T_k s koeficienty $\alpha_n = a_n$ jako P_k a příslušné integrály J_k .

Pak

$$J_k = \frac{1}{b-a} \int_a^b [f(t) - P_k(t)]^2 dt = \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b [f(t)]^2 dt - \sum_{n=0}^k a_n^2 \right). \quad (12)$$

Pro každé k platí

$$J_k \geq 0.$$

Proto

$$\sum_{n=0}^k a_n^2 \leq \int_a^b [f(t)]^2 dt. \quad (13)$$

Zobecněná Fourierova řada

Označme mnohočlen T_k s koeficienty $\alpha_n = a_n$ jako P_k a příslušné integrály J_k .

Pak

$$J_k = \frac{1}{b-a} \int_a^b [f(t) - P_k(t)]^2 dt = \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b [f(t)]^2 dt - \sum_{n=0}^k a_n^2 \right). \quad (12)$$

Pro každé k platí

$$J_k \geq 0.$$

Proto

$$\sum_{n=0}^k a_n^2 \leq \int_a^b [f(t)]^2 dt. \quad (13)$$

Nerovnost (13) se nazývá *Besselova*.

Zobecněná Fourierova řada

Označme mnohočlen T_k s koeficienty $\alpha_n = a_n$ jako P_k a příslušné integrály J_k .

Pak

$$J_k = \frac{1}{b-a} \int_a^b [f(t) - P_k(t)]^2 dt = \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b [f(t)]^2 dt - \sum_{n=0}^k a_n^2 \right). \quad (12)$$

Pro každé k platí

$$J_k \geq 0.$$

Proto

$$\sum_{n=0}^k a_n^2 \leq \int_a^b [f(t)]^2 dt. \quad (13)$$

Nerovnost (13) se nazývá *Besselova*.

Formule (12) a (13) jsou platné pro každé k .

Zobecněná Fourierova řada

Označme mnohočlen T_k s koeficienty $\alpha_n = a_n$ jako P_k a příslušné integrály J_k .

Pak

$$J_k = \frac{1}{b-a} \int_a^b [f(t) - P_k(t)]^2 dt = \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b [f(t)]^2 dt - \sum_{n=0}^k a_n^2 \right). \quad (12)$$

Pro každé k platí

$$J_k \geq 0.$$

Proto

$$\sum_{n=0}^k a_n^2 \leq \int_a^b [f(t)]^2 dt. \quad (13)$$

Nerovnost (13) se nazývá *Besselova*.

Formule (12) a (13) jsou platné pro každé k .

Proto je nekonečná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ konvergentní, neboť jsou všechny částečné součty menší než dané pevné kladné číslo.

Zobecněná Fourierova řada

Zobecněná Fourierova řada

2. Uzavřenost

Zobecněná Fourierova řada

2. Uzavřenost

Řešme nyní přirozenou otázku, zda

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J_k = 0.$$

Zobecněná Fourierova řada

2. Uzavřenost

Řešme nyní přirozenou otázku, zda

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J_k = 0.$$

Ortonormální systémy, jež splňují tuto vlastnost, označujeme jako *uzavřené*.

Zobecněná Fourierova řada

2. Uzavřenost

Řešme nyní přirozenou otázku, zda

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J_k = 0.$$

Ortonormální systémy, jež splňují tuto vlastnost, označujeme jako *uzavřené*. Proto pro ně platí:

Zobecněná Fourierova řada

2. Uzávěřenost

Řešme nyní přirozenou otázku, zda

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J_k = 0.$$

Ortonormální systémy, jež splňují tuto vlastnost, označujeme jako *uzavřené*. Proto pro ně platí:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b \left[f(t) - \sum_{n=0}^k a_n \varphi_n(t) \right]^2 dt =$$

Zobecněná Fourierova řada

2. Uzávěřenost

Řešme nyní přirozenou otázku, zda

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J_k = 0.$$

Ortonormální systémy, jež splňují tuto vlastnost, označujeme jako *uzavřené*. Proto pro ně platí:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b [f(t) - \sum_{n=0}^k a_n \varphi_n(t)]^2 dt = \int_a^b [f(t)]^2 dt - \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$$

Zobecněná Fourierova řada

2. Uzávěřenost

Řešme nyní přirozenou otázku, zda

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J_k = 0.$$

Ortonormální systémy, jež splňují tuto vlastnost, označujeme jako *uzavřené*. Proto pro ně platí:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b [f(t) - \sum_{n=0}^k a_n \varphi_n(t)]^2 dt = \int_a^b [f(t)]^2 dt - \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 = 0,$$

Zobecněná Fourierova řada

2. Uzavřenost

Řešme nyní přirozenou otázku, zda

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J_k = 0.$$

Ortonormální systémy, jež splňují tuto vlastnost, označujeme jako *uzavřené*. Proto pro ně platí:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b [f(t) - \sum_{n=0}^k a_n \varphi_n(t)]^2 dt = \int_a^b [f(t)]^2 dt - \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 = 0,$$

čili

Zobecněná Fourierova řada

2. Uzavřenost

Řešme nyní přirozenou otázku, zda

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J_k = 0.$$

Ortonormální systémy, jež splňují tuto vlastnost, označujeme jako *uzavřené*. Proto pro ně platí:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b [f(t) - \sum_{n=0}^k a_n \varphi_n(t)]^2 dt = \int_a^b [f(t)]^2 dt - \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 = 0,$$

čili

$$\int_a^b [f(t)]^2 dt =$$

Zobecněná Fourierova řada

2. Uzavřenost

Řešme nyní přirozenou otázku, zda

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J_k = 0.$$

Ortonormální systémy, jež splňují tuto vlastnost, označujeme jako *uzavřené*. Proto pro ně platí:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b [f(t) - \sum_{n=0}^k a_n \varphi_n(t)]^2 dt = \int_a^b [f(t)]^2 dt - \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 = 0,$$

čili

$$\int_a^b [f(t)]^2 dt = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2. \quad (14)$$

Zobecněná Fourierova řada

2. Uzavřenost

Řešme nyní přirozenou otázku, zda

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J_k = 0.$$

Ortonormální systémy, jež splňují tuto vlastnost, označujeme jako *uzavřené*. Proto pro ně platí:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b [f(t) - \sum_{n=0}^k a_n \varphi_n(t)]^2 dt = \int_a^b [f(t)]^2 dt - \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 = 0,$$

čili

$$\int_a^b [f(t)]^2 dt = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2. \quad (14)$$

Rovnice (14) se nazývá *Parsevalova*.

Zobecněná Fourierova řada

2. Uzavřenost

Řešme nyní přirozenou otázku, zda

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J_k = 0.$$

Ortonormální systémy, jež splňují tuto vlastnost, označujeme jako *uzavřené*. Proto pro ně platí:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b [f(t) - \sum_{n=0}^k a_n \varphi_n(t)]^2 dt = \int_a^b [f(t)]^2 dt - \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 = 0,$$

čili

$$\int_a^b [f(t)]^2 dt = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2. \quad (14)$$

Rovnice (14) se nazývá *Parsevalova*. O posloupnosti trigonometrických funkcí jsme již dokázali, že je v intervalu $[0, 2\pi]$ ortonormální.

Zobecněná Fourierova řada

2. Uzavřenost

Řešme nyní přirozenou otázku, zda

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J_k = 0.$$

Ortonormální systémy, jež splňují tuto vlastnost, označujeme jako *uzavřené*. Proto pro ně platí:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b [f(t) - \sum_{n=0}^k a_n \varphi_n(t)]^2 dt = \int_a^b [f(t)]^2 dt - \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 = 0,$$

čili

$$\int_a^b [f(t)]^2 dt = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2. \quad (14)$$

Rovnice (14) se nazývá *Parsevalova*. O posloupnosti trigonometrických funkcí jsme již dokázali, že je v intervalu $[0, 2\pi]$ ortonormální.

Uzavřenost se dokáže pomocí Fejérových vět.

Zobecněná Fourierova řada

Zobecněná Fourierova řada

3. Ortonormalita

Zobecněná Fourierova řada

3. Ortonormalita

Již jsme ukázali, že ortonormalita systému funkcí podstatně zjednodušuje rozvíjení dané funkce pomocí těchto funkcí.

Zobecněná Fourierova řada

3. Ortonormalita

Již jsme ukázali, že ortonormalita systému funkcí podstatně zjednodušuje rozvíjení dané funkce pomocí těchto funkcí.
Bohužel mocninná posloupnost funkcí

$$\varphi_k(t) = t^k, \text{ kde } k = 0, 1, \dots \quad (15)$$

není ortonormální ani normovaná, navzdory častému úkolu rozvinout funkci $f(t)$ v mocninnou řadu.

Zobecněná Fourierova řada

3. Ortonormalita

Již jsme ukázali, že ortonormalita systému funkcí podstatně zjednodušuje rozvíjení dané funkce pomocí těchto funkcí.

Bohužel mocninná posloupnost funkcí

$$\varphi_k(t) = t^k, \text{ kde } k = 0, 1, \dots \quad (15)$$

není ortonormální ani normovaná, navzdory častému úkolu rozvinout funkci $f(t)$ v mocninnou řadu.

Způsob, jak sestavit koeficienty takové mocninné řady, je znám.

Zobecněná Fourierova řada

3. Ortonormalita

Již jsme ukázali, že ortonormalita systému funkcí podstatně zjednodušuje rozvíjení dané funkce pomocí těchto funkcí.
Bohužel mocninná posloupnost funkcí

$$\varphi_k(t) = t^k, \text{ kde } k = 0, 1, \dots \quad (15)$$

není ortonormální ani normovaná, navzdory častému úkolu rozvinout funkci $f(t)$ v mocninnou řadu.

Způsob, jak sestavit koeficienty takové mocninné řady, je znám.
Stačí rozvíjet danou funkci $f(t)$ v Taylorovu řadu.

Zobecněná Fourierova řada

3. Ortonormalita

Již jsme ukázali, že ortonormalita systému funkcí podstatně zjednodušuje rozvíjení dané funkce pomocí těchto funkcí.
Bohužel mocninná posloupnost funkcí

$$\varphi_k(t) = t^k, \text{ kde } k = 0, 1, \dots \quad (15)$$

není ortonormální ani normovaná, navzdory častému úkolu rozvinout funkci $f(t)$ v mocninnou řadu.

Způsob, jak sestavit koeficienty takové mocninné řady, je znám.

Stačí rozvíjet danou funkci $f(t)$ v Taylorovu řadu.

Tento způsob je teoreticky dobrý, v praxi však narazíme na problém, který nemusí mít řešení, a to určení hodnot všech řádů derivace dané funkce.

Zobecněná Fourierova řada

3. Ortonormalita

Již jsme ukázali, že ortonormalita systému funkcí podstatně zjednodušuje rozvíjení dané funkce pomocí těchto funkcí.
Bohužel mocninná posloupnost funkcí

$$\varphi_k(t) = t^k, \text{ kde } k = 0, 1, \dots \quad (15)$$

není ortonormální ani normovaná, navzdory častému úkolu rozvinout funkci $f(t)$ v mocninnou řadu.

Způsob, jak sestavit koeficienty takové mocninné řady, je znám.

Stačí rozvíjet danou funkci $f(t)$ v Taylorovu řadu.

Tento způsob je teoreticky dobrý, v praxi však narazíme na problém, který nemusí mít řešení, a to určení hodnot všech řádů derivace dané funkce.

Tento problém lze odstranit tak, že danou funkci budeme rozvíjet pomocí systému složeného z mnohočlenů, který tvoří ortonormovanou soustavu funkcí na daném intervalu.

Zobecněná Fourierova řada

Zobecněná Fourierova řada

Věta 2 (Schmidt)

Zobecněná Fourierova řada

Věta 2 (Schmidt)

Bud'

$$\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^{\infty} \quad (16)$$

posloupnost spojitých a nenulových funkcí na intervalu $[a, b]$ taková, že každý konečný úsek $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_k(t)$ představuje $k + 1$ lineárně nezávislých funkcí.

Zobecněná Fourierova řada

Věta 2 (Schmidt)

Bud'

$$\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^{\infty} \quad (16)$$

posloupnost spojitých a nenulových funkcí na intervalu $[a, b]$ taková, že každý konečný úsek $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_k(t)$ představuje $k + 1$ lineárně nezávislých funkcí. Pak lze z této posloupnosti vytvořit posloupnost funkcí

$$\{\psi_n(t)\}_{n=0}^{\infty} \quad (17)$$

spojitých na intervalu $[a, b]$ takovou, že

Zobecněná Fourierova řada

Věta 2 (Schmidt)

Bud'

$$\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^{\infty} \quad (16)$$

posloupnost spojitých a nenulových funkcí na intervalu $[a, b]$ taková, že každý konečný úsek $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_k(t)$ představuje $k + 1$ lineárně nezávislých funkcí. Pak lze z této posloupnosti vytvořit posloupnost funkcí

$$\{\psi_n(t)\}_{n=0}^{\infty} \quad (17)$$

spojitých na intervalu $[a, b]$ takovou, že

- 1. každý její konečný úsek $\psi_0(t), \psi_1(t), \dots, \psi_{k-1}(t)$ představuje k lineárně nezávislých funkcí,*

Zobecněná Fourierova řada

Věta 2 (Schmidt)

Bud'

$$\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^{\infty} \quad (16)$$

posloupnost spojitých a nenulových funkcí na intervalu $[a, b]$ taková, že každý konečný úsek $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_k(t)$ představuje $k + 1$ lineárně nezávislých funkcí. Pak lze z této posloupnosti vytvořit posloupnost funkcí

$$\{\psi_n(t)\}_{n=0}^{\infty} \quad (17)$$

spojitých na intervalu $[a, b]$ takovou, že

- 1. každý její konečný úsek $\psi_0(t), \psi_1(t), \dots, \psi_{k-1}(t)$ představuje k lineárně nezávislých funkcí,*
- 2. každá funkce $\psi_k(t)$ je lineární kombinací funkcí $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_{k-1}(t)$,*

Zobecněná Fourierova řada

Věta 2 (Schmidt)

Bud'

$$\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^{\infty} \quad (16)$$

posloupnost spojitých a nenulových funkcí na intervalu $[a, b]$ taková, že každý konečný úsek $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_k(t)$ představuje $k + 1$ lineárně nezávislých funkcí. Pak lze z této posloupnosti vytvořit posloupnost funkcí

$$\{\psi_n(t)\}_{n=0}^{\infty} \quad (17)$$

spojitých na intervalu $[a, b]$ takovou, že

- 1. každý její konečný úsek $\psi_0(t), \psi_1(t), \dots, \psi_{k-1}(t)$ představuje k lineárně nezávislých funkcí,*
- 2. každá funkce $\psi_k(t)$ je lineární kombinací funkcí $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_{k-1}(t)$,*
- 3. posloupnost (17) tvoří ortonormovanou soustavu.*

Zobecněná Fourierova řada

Zobecněná Fourierova řada

Proved'me nyní konstrukci ortonormované soustavy ze Schmidtovy věty.

Zobecněná Fourierova řada

Proved'me nyní konstrukci ortonormované soustavy ze Schmidtovy věty.

1.

Zobecněná Fourierova řada

Proved'me nyní konstrukci ortonormované soustavy ze Schmidtovy věty.

1. Položme

$$\psi_0(t) = \frac{\varphi_0(t)}{c_0}, \quad (18)$$

Zobecněná Fourierova řada

Proveďme nyní konstrukci ortonormované soustavy ze Schmidtovy věty.

1. Položme

$$\psi_0(t) = \frac{\varphi_0(t)}{c_0}, \quad (18)$$

kde $c_0^2 = \int_a^b \varphi_0^2(t) \, dt$.

Zobecněná Fourierova řada

Proveďme nyní konstrukci ortonormované soustavy ze Schmidtovy věty.

1. Položme

$$\psi_0(t) = \frac{\varphi_0(t)}{c_0}, \quad (18)$$

kde $c_0^2 = \int_a^b \varphi_0^2(t) dt$.

Funkce $\psi_0(t)$ je zřejmě normovaná.

Zobecněná Fourierova řada

Proveďme nyní konstrukci ortonormované soustavy ze Schmidty vĕty.

1. Položme

$$\psi_0(t) = \frac{\varphi_0(t)}{c_0}, \quad (18)$$

kde $c_0^2 = \int_a^b \varphi_0^2(t) dt$.

Funkce $\psi_0(t)$ je zřejmě normovaná.

Skutečně

Zobecněná Fourierova řada

Proveďme nyní konstrukci ortonormované soustavy ze Schmidty vĕty.

1. Položme

$$\psi_0(t) = \frac{\varphi_0(t)}{c_0}, \quad (18)$$

kde $c_0^2 = \int_a^b \varphi_0^2(t) \, dt$.

Funkce $\psi_0(t)$ je zřejmě normovaná.

Skutečně

$$\int_a^b \psi_0^2(t) \, dt =$$

Zobecněná Fourierova řada

Proveďme nyní konstrukci ortonormované soustavy ze Schmidtovy věty.

1. Položme

$$\psi_0(t) = \frac{\varphi_0(t)}{c_0}, \quad (18)$$

kde $c_0^2 = \int_a^b \varphi_0^2(t) \, dt$.

Funkce $\psi_0(t)$ je zřejmě normovaná.

Skutečně

$$\int_a^b \psi_0^2(t) \, dt = 1/c_0^2 \int_a^b \varphi_0^2(t) \, dt =$$

Zobecněná Fourierova řada

Proveďme nyní konstrukci ortonormované soustavy ze Schmidty vĕty.

1. Položme

$$\psi_0(t) = \frac{\varphi_0(t)}{c_0}, \quad (18)$$

kde $c_0^2 = \int_a^b \varphi_0^2(t) \, dt$.

Funkce $\psi_0(t)$ je zřejmě normovaná.

Skutečně

$$\int_a^b \psi_0^2(t) \, dt = 1/c_0^2 \int_a^b \varphi_0^2(t) \, dt = 1,$$

Zobecněná Fourierova řada

Zobecněná Fourierova řada

2.

Zobecněná Fourierova řada

2. Zaved'me funkci

$$\chi_1(t) = \varphi_1(t) - a_{10}\psi_0(t), \quad (19)$$

Zobecněná Fourierova řada

2. Zavedme funkci

$$\chi_1(t) = \varphi_1(t) - a_{10}\psi_0(t), \quad (19)$$

kde a_{10} volíme tak, aby funkce $\chi_1(t)$ byla ortogonální k funkci $\psi_0(t)$.

Zobecněná Fourierova řada

2. Zavedme funkci

$$\chi_1(t) = \varphi_1(t) - a_{10}\psi_0(t), \quad (19)$$

kde a_{10} volíme tak, aby funkce $\chi_1(t)$ byla ortogonální k funkci $\psi_0(t)$.
Tedy aby platilo

Zobecněná Fourierova řada

2. Zavedme funkci

$$\chi_1(t) = \varphi_1(t) - a_{10}\psi_0(t), \quad (19)$$

kde a_{10} volíme tak, aby funkce $\chi_1(t)$ byla ortogonální k funkci $\psi_0(t)$.

Tedy aby platilo

$$\int_a^b \chi_1(t)\psi_0(t) \, dt =$$

Zobecněná Fourierova řada

2. Zavedme funkci

$$\chi_1(t) = \varphi_1(t) - a_{10}\psi_0(t), \quad (19)$$

kde a_{10} volíme tak, aby funkce $\chi_1(t)$ byla ortogonální k funkci $\psi_0(t)$.

Tedy aby platilo

$$\int_a^b \chi_1(t)\psi_0(t) \, dt = \int_a^b [\varphi_1(t) - a_{10}\psi_0(t)]\psi_0(t) \, dt$$

Zobecněná Fourierova řada

2. Zavedme funkci

$$\chi_1(t) = \varphi_1(t) - a_{10}\psi_0(t), \quad (19)$$

kde a_{10} volíme tak, aby funkce $\chi_1(t)$ byla ortogonální k funkci $\psi_0(t)$.

Tedy aby platilo

$$\int_a^b \chi_1(t)\psi_0(t) \, dt = \int_a^b [\varphi_1(t) - a_{10}\psi_0(t)]\psi_0(t) \, dt = 0.$$

Zobecněná Fourierova řada

2. Zavedme funkci

$$\chi_1(t) = \varphi_1(t) - a_{10}\psi_0(t), \quad (19)$$

kde a_{10} volíme tak, aby funkce $\chi_1(t)$ byla ortogonální k funkci $\psi_0(t)$.

Tedy aby platilo

$$\int_a^b \chi_1(t)\psi_0(t) \, dt = \int_a^b [\varphi_1(t) - a_{10}\psi_0(t)]\psi_0(t) \, dt = 0.$$

Odtud máme

Zobecněná Fourierova řada

2. Zavedme funkci

$$\chi_1(t) = \varphi_1(t) - a_{10}\psi_0(t), \quad (19)$$

kde a_{10} volíme tak, aby funkce $\chi_1(t)$ byla ortogonální k funkci $\psi_0(t)$.

Tedy aby platilo

$$\int_a^b \chi_1(t)\psi_0(t) \, dt = \int_a^b [\varphi_1(t) - a_{10}\psi_0(t)]\psi_0(t) \, dt = 0.$$

Odtud máme

$$a_{10} =$$

Zobecněná Fourierova řada

2. Zavedme funkci

$$\chi_1(t) = \varphi_1(t) - a_{10}\psi_0(t), \quad (19)$$

kde a_{10} volíme tak, aby funkce $\chi_1(t)$ byla ortogonální k funkci $\psi_0(t)$.

Tedy aby platilo

$$\int_a^b \chi_1(t)\psi_0(t) \, dt = \int_a^b [\varphi_1(t) - a_{10}\psi_0(t)]\psi_0(t) \, dt = 0.$$

Odtud máme

$$a_{10} = \frac{\int_a^b \varphi_1(t)\psi_0(t) \, dt}{\int_a^b \psi_0^2(t) \, dt} =$$

Zobecněná Fourierova řada

2. Zavedme funkci

$$\chi_1(t) = \varphi_1(t) - a_{10}\psi_0(t), \quad (19)$$

kde a_{10} volíme tak, aby funkce $\chi_1(t)$ byla ortogonální k funkci $\psi_0(t)$.

Tedy aby platilo

$$\int_a^b \chi_1(t)\psi_0(t) \, dt = \int_a^b [\varphi_1(t) - a_{10}\psi_0(t)]\psi_0(t) \, dt = 0.$$

Odtud máme

$$a_{10} = \frac{\int_a^b \varphi_1(t)\psi_0(t) \, dt}{\int_a^b \psi_0^2(t) \, dt}.$$

Zobecněná Fourierova řada

2. Zavedme funkci

$$\chi_1(t) = \varphi_1(t) - a_{10}\psi_0(t), \quad (19)$$

kde a_{10} volíme tak, aby funkce $\chi_1(t)$ byla ortogonální k funkci $\psi_0(t)$.

Tedy aby platilo

$$\int_a^b \chi_1(t)\psi_0(t) \, dt = \int_a^b [\varphi_1(t) - a_{10}\psi_0(t)]\psi_0(t) \, dt = 0.$$

Odtud máme

$$a_{10} = \frac{\int_a^b \varphi_1(t)\psi_0(t) \, dt}{\int_a^b \psi_0^2(t) \, dt}.$$

Označme

Zobecněná Fourierova řada

2. Zavedme funkci

$$\chi_1(t) = \varphi_1(t) - a_{10}\psi_0(t), \quad (19)$$

kde a_{10} volíme tak, aby funkce $\chi_1(t)$ byla ortogonální k funkci $\psi_0(t)$.

Tedy aby platilo

$$\int_a^b \chi_1(t)\psi_0(t) \, dt = \int_a^b [\varphi_1(t) - a_{10}\psi_0(t)]\psi_0(t) \, dt = 0.$$

Odtud máme

$$a_{10} = \frac{\int_a^b \varphi_1(t)\psi_0(t) \, dt}{\int_a^b \psi_0^2(t) \, dt}.$$

Označme

$$c_1^2 = \int_a^b \chi_1^2(t) \, dt.$$

Zobecněná Fourierova řada

2. Zavedme funkci

$$\chi_1(t) = \varphi_1(t) - a_{10}\psi_0(t), \quad (19)$$

kde a_{10} volíme tak, aby funkce $\chi_1(t)$ byla ortogonální k funkci $\psi_0(t)$.
Tedy aby platilo

$$\int_a^b \chi_1(t)\psi_0(t) \, dt = \int_a^b [\varphi_1(t) - a_{10}\psi_0(t)]\psi_0(t) \, dt = 0.$$

Odtud máme

$$a_{10} = \frac{\int_a^b \varphi_1(t)\psi_0(t) \, dt}{\int_a^b \psi_0^2(t) \, dt}.$$

Označme

$$c_1^2 = \int_a^b \chi_1^2(t) \, dt.$$

Pak funkce $\psi_1(t) = \frac{\chi_1(t)}{c_1}$ je na intervalu $[a, b]$ ortonormální k funkci $\psi_0(t)$.

Zobecněná Fourierova řada

Zobecněná Fourierova řada

Podobně zavedeme funkci

$$\chi_2(t) = \varphi_2(t) - a_{20}\psi_0(t) - a_{21}\psi_1(t), \quad (20)$$

Zobecněná Fourierova řada

Podobně zavedeme funkci

$$\chi_2(t) = \varphi_2(t) - a_{20}\psi_0(t) - a_{21}\psi_1(t), \quad (20)$$

kde a_{20} a a_{21} volíme tak, aby funkce $\chi_2(t)$ byla ortogonální k funkcím $\psi_0(t)$ a $\psi_1(t)$.

Zobecněná Fourierova řada

Podobně zavedeme funkci

$$\chi_2(t) = \varphi_2(t) - a_{20}\psi_0(t) - a_{21}\psi_1(t), \quad (20)$$

kde a_{20} a a_{21} volíme tak, aby funkce $\chi_2(t)$ byla ortogonální k funkcím $\psi_0(t)$ a $\psi_1(t)$.

Snadno odvodíme, že

Zobecněná Fourierova řada

Podobně zavedeme funkci

$$\chi_2(t) = \varphi_2(t) - a_{20}\psi_0(t) - a_{21}\psi_1(t), \quad (20)$$

kde a_{20} a a_{21} volíme tak, aby funkce $\chi_2(t)$ byla ortogonální k funkcím $\psi_0(t)$ a $\psi_1(t)$.

Snadno odvodíme, že

$$a_{20} =$$

Zobecněná Fourierova řada

Podobně zavedeme funkci

$$\chi_2(t) = \varphi_2(t) - a_{20}\psi_0(t) - a_{21}\psi_1(t), \quad (20)$$

kde a_{20} a a_{21} volíme tak, aby funkce $\chi_2(t)$ byla ortogonální k funkcím $\psi_0(t)$ a $\psi_1(t)$.

Snadno odvodíme, že

$$a_{20} = \int_a^b \varphi_2(t)\psi_0(t) \, dt, \quad (21)$$

Zobecněná Fourierova řada

Podobně zavedeme funkci

$$\chi_2(t) = \varphi_2(t) - a_{20}\psi_0(t) - a_{21}\psi_1(t), \quad (20)$$

kde a_{20} a a_{21} volíme tak, aby funkce $\chi_2(t)$ byla ortogonální k funkcím $\psi_0(t)$ a $\psi_1(t)$.

Snadno odvodíme, že

$$a_{20} = \int_a^b \varphi_2(t)\psi_0(t) \, dt, \quad (21)$$

$$a_{21} =$$

Zobecněná Fourierova řada

Podobně zavedeme funkci

$$\chi_2(t) = \varphi_2(t) - a_{20}\psi_0(t) - a_{21}\psi_1(t), \quad (20)$$

kde a_{20} a a_{21} volíme tak, aby funkce $\chi_2(t)$ byla ortogonální k funkcím $\psi_0(t)$ a $\psi_1(t)$.

Snadno odvodíme, že

$$a_{20} = \int_a^b \varphi_2(t)\psi_0(t) \, dt, \quad (21)$$

$$a_{21} = \int_a^b \varphi_2(t)\psi_1(t) \, dt. \quad (22)$$

Zobecněná Fourierova řada

Podobně zavedeme funkci

$$\chi_2(t) = \varphi_2(t) - a_{20}\psi_0(t) - a_{21}\psi_1(t), \quad (20)$$

kde a_{20} a a_{21} volíme tak, aby funkce $\chi_2(t)$ byla ortogonální k funkcím $\psi_0(t)$ a $\psi_1(t)$.

Snadno odvodíme, že

$$a_{20} = \int_a^b \varphi_2(t)\psi_0(t) \, dt, \quad (21)$$

$$a_{21} = \int_a^b \varphi_2(t)\psi_1(t) \, dt. \quad (22)$$

Potom funkce

Zobecněná Fourierova řada

Podobně zavedeme funkci

$$\chi_2(t) = \varphi_2(t) - a_{20}\psi_0(t) - a_{21}\psi_1(t), \quad (20)$$

kde a_{20} a a_{21} volíme tak, aby funkce $\chi_2(t)$ byla ortogonální k funkcím $\psi_0(t)$ a $\psi_1(t)$.

Snadno odvodíme, že

$$a_{20} = \int_a^b \varphi_2(t)\psi_0(t) \, dt, \quad (21)$$

$$a_{21} = \int_a^b \varphi_2(t)\psi_1(t) \, dt. \quad (22)$$

Potom funkce

$$\psi_2(t) =$$

Zobecněná Fourierova řada

Podobně zavedeme funkci

$$\chi_2(t) = \varphi_2(t) - a_{20}\psi_0(t) - a_{21}\psi_1(t), \quad (20)$$

kde a_{20} a a_{21} volíme tak, aby funkce $\chi_2(t)$ byla ortogonální k funkcím $\psi_0(t)$ a $\psi_1(t)$.

Snadno odvodíme, že

$$a_{20} = \int_a^b \varphi_2(t)\psi_0(t) \, dt, \quad (21)$$

$$a_{21} = \int_a^b \varphi_2(t)\psi_1(t) \, dt. \quad (22)$$

Potom funkce

$$\psi_2(t) = \frac{\chi_2(t)}{c_2}, \text{ kde } c_2^2 = \int_a^b \chi_2^2(t) \, dt, \quad (23)$$

Zobecněná Fourierova řada

Podobně zavedeme funkci

$$\chi_2(t) = \varphi_2(t) - a_{20}\psi_0(t) - a_{21}\psi_1(t), \quad (20)$$

kde a_{20} a a_{21} volíme tak, aby funkce $\chi_2(t)$ byla ortogonální k funkcím $\psi_0(t)$ a $\psi_1(t)$.

Snadno odvodíme, že

$$a_{20} = \int_a^b \varphi_2(t)\psi_0(t) \, dt, \quad (21)$$

$$a_{21} = \int_a^b \varphi_2(t)\psi_1(t) \, dt. \quad (22)$$

Potom funkce

$$\psi_2(t) = \frac{\chi_2(t)}{c_2}, \text{ kde } c_2^2 = \int_a^b \chi_2^2(t) \, dt, \quad (23)$$

je normovaná a ortogonální k $\psi_0(t)$ a $\psi_1(t)$.

Zobecněná Fourierova řada

Zobecněná Fourierova řada

3.

Zobecněná Fourierova řada

3. K určení dalších členů posloupností

$$\{\psi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$$

stačí postupovat analogicky s pomocí matematické indukce.

Zobecněná Fourierova řada

3. K určení dalších členů posloupností

$$\{\psi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$$

stačí postupovat analogicky s pomocí matematické indukce.

Poznamenejme, že čísla c_k jsou vesměs různá od nuly vzhledem k lineární nezávislosti každého konečného úseku posloupnosti

$$\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}.$$

Zobecněná Fourierova řada

3. K určení dalších členů posloupností

$$\{\psi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$$

stačí postupovat analogicky s pomocí matematické indukce.

Poznamenejme, že čísla c_k jsou vesměs různá od nuly vzhledem k lineární nezávislosti každého konečného úseku posloupnosti

$$\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}.$$

Z konstrukce $\{\psi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ pak plyne lineární nezávislost každého jejího konečného úseku.

Zobecněná Fourierova řada

Zobecněná Fourierova řada

Příklad 8

Zobecněná Fourierova řada

Příklad 8

Aplikujme Schmidtovu větu na mocninnou posloupnost funkcí

$\varphi_k(t) = t^k$, kde $k = 0, 1, \dots$ na intervalu $[-1, 1]$.

Zobecněná Fourierova řada

Příklad 8

Aplikujme Schmidtovu větu na mocninnou posloupnost funkcí

$\varphi_k(t) = t^k$, kde $k = 0, 1, \dots$ na intervalu $[-1, 1]$.

*Výše popsaným procesem odvodíme mnohočleny, které, až na konstantní faktory, jsou tak zvané **Legendreovy polynomy**.*

Zobecněná Fourierova řada

Příklad 8

Aplikujme Schmidtovu větu na mocninnou posloupnost funkcí $\varphi_k(t) = t^k$, kde $k = 0, 1, \dots$ na intervalu $[-1, 1]$.

*Výše popsaným procesem odvodíme mnohočleny, které, až na konstantní faktory, jsou tak zvané **Legendreovy polynomy**.*

Konstruujme první tři členy hledané ortonormované soustavy.

Zobecněná Fourierova řada

Příklad 8

Aplikujme Schmidtovu větu na mocninnou posloupnost funkcí

$\varphi_k(t) = t^k$, kde $k = 0, 1, \dots$ na intervalu $[-1, 1]$.

*Výše popsaným procesem odvodíme mnohočleny, které, až na konstantní faktory, jsou tak zvané **Legendreovy polynomy**.*

Konstruuje první tři členy hledané ortonormované soustavy.

Prvně, $\varphi_0(t) = 1$

Zobecněná Fourierova řada

Příklad 8

Aplikujme Schmidtovu větu na mocninnou posloupnost funkcí

$\varphi_k(t) = t^k$, kde $k = 0, 1, \dots$ na intervalu $[-1, 1]$.

*Výše popsaným procesem odvodíme mnohočleny, které, až na konstantní faktory, jsou tak zvané **Legendreovy polynomy**.*

Konstruujeme první tři členy hledané ortonormované soustavy.

Prvně, $\varphi_0(t) = 1$ a

$$c_0^2 = \int_{-1}^1 \varphi_0^2(t) dt = 2,$$

Zobecněná Fourierova řada

Příklad 8

Aplikujme Schmidtovu větu na mocninnou posloupnost funkcí

$\varphi_k(t) = t^k$, kde $k = 0, 1, \dots$ na intervalu $[-1, 1]$.

Výše popsaným procesem odvodíme mnohočleny, které, až na konstantní faktory, jsou tak zvané *Legendreovy polynomy*.

Konstruuje první tři členy hledané ortonormované soustavy.

Prvně, $\varphi_0(t) = 1$ a

$$c_0^2 = \int_{-1}^1 \varphi_0^2(t) dt = 2,$$

tedy

Zobecněná Fourierova řada

Příklad 8

Aplikujme Schmidtovu větu na mocninnou posloupnost funkcí

$\varphi_k(t) = t^k$, kde $k = 0, 1, \dots$ na intervalu $[-1, 1]$.

Výše popsaným procesem odvodíme mnohočleny, které, až na konstantní faktory, jsou tak zvané *Legendreovy polynomy*.

Konstruuje první tři členy hledané ortonormované soustavy.

Prvně, $\varphi_0(t) = 1$ a

$$c_0^2 = \int_{-1}^1 \varphi_0^2(t) dt = 2,$$

tedy

$$c_0 = \sqrt{2}$$

Zobecněná Fourierova řada

Příklad 8

Aplikujme Schmidtovu větu na mocninnou posloupnost funkcí

$\varphi_k(t) = t^k$, kde $k = 0, 1, \dots$ na intervalu $[-1, 1]$.

Výše popsaným procesem odvodíme mnohočleny, které, až na konstantní faktory, jsou tak zvané *Legendreovy polynomy*.

Konstruuje první tři členy hledané ortonormované soustavy.

Prvně, $\varphi_0(t) = 1$ a

$$c_0^2 = \int_{-1}^1 \varphi_0^2(t) dt = 2,$$

tedy

$$c_0 = \sqrt{2}$$

a

Zobecněná Fourierova řada

Příklad 8

Aplikujme Schmidtovu větu na mocninnou posloupnost funkcí $\varphi_k(t) = t^k$, kde $k = 0, 1, \dots$ na intervalu $[-1, 1]$.

Výše popsaným procesem odvodíme mnohočleny, které, až na konstantní faktory, jsou tak zvané *Legendreovy polynomy*.

Konstruuje první tři členy hledané ortonormované soustavy.

Prvně, $\varphi_0(t) = 1$ a

$$c_0^2 = \int_{-1}^1 \varphi_0^2(t) dt = 2,$$

tedy

$$c_0 = \sqrt{2}$$

a

$$\psi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Zobecněná Fourierova řada

Příklad 8

Zobecněná Fourierova řada

Příklad 8

Dále položme

Zobecněná Fourierova řada

Příklad 8

Dále položme

$$\chi_1(t) =$$

Zobecněná Fourierova řada

Příklad 8

Dále položme

$$\chi_1(t) = \varphi_1(t) - a_{10}\psi_0(t)$$

Zobecněná Fourierova řada

Příklad 8

Dále položme

$$\chi_1(t) = \varphi_1(t) - a_{10}\psi_0(t) = t - a_{10}\frac{1}{\sqrt{2}},$$

Zobecněná Fourierova řada

Příklad 8

Dále položme

$$\chi_1(t) = \varphi_1(t) - a_{10}\psi_0(t) = t - a_{10}\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$a_{10} =$$

Zobecněná Fourierova řada

Příklad 8

Dále položíme

$$\chi_1(t) = \varphi_1(t) - a_{10}\psi_0(t) = t - a_{10}\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$a_{10} = \int_{-1}^1 \varphi_1(t)\psi_0(t) \, dt$$

Zobecněná Fourierova řada

Příklad 8

Dále položíme

$$\chi_1(t) = \varphi_1(t) - a_{10}\psi_0(t) = t - a_{10}\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$a_{10} = \int_{-1}^1 \varphi_1(t)\psi_0(t) \, dt = \int_{-1}^1 \frac{t}{\sqrt{2}}$$

Zobecněná Fourierova řada

Příklad 8

Dále položíme

$$\chi_1(t) = \varphi_1(t) - a_{10}\psi_0(t) = t - a_{10}\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$a_{10} = \int_{-1}^1 \varphi_1(t)\psi_0(t) \, dt = \int_{-1}^1 \frac{t}{\sqrt{2}} \, dt = 0,$$

Zobecněná Fourierova řada

Příklad 8

Dále položíme

$$\chi_1(t) = \varphi_1(t) - a_{10}\psi_0(t) = t - a_{10}\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$a_{10} = \int_{-1}^1 \varphi_1(t)\psi_0(t) \, dt = \int_{-1}^1 \frac{t}{\sqrt{2}} \, dt = 0,$$

proto

Zobecněná Fourierova řada

Příklad 8

Dále položíme

$$\chi_1(t) = \varphi_1(t) - a_{10}\psi_0(t) = t - a_{10}\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$a_{10} = \int_{-1}^1 \varphi_1(t)\psi_0(t) \, dt = \int_{-1}^1 \frac{t}{\sqrt{2}} \, dt = 0,$$

proto

$$\chi_1(t) = t$$

Zobecněná Fourierova řada

Příklad 8

Dále položíme

$$\chi_1(t) = \varphi_1(t) - a_{10}\psi_0(t) = t - a_{10}\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$a_{10} = \int_{-1}^1 \varphi_1(t)\psi_0(t) \, dt = \int_{-1}^1 \frac{t}{\sqrt{2}} \, dt = 0,$$

proto

$$\chi_1(t) = t$$

a

Zobecněná Fourierova řada

Příklad 8

Dále položme

$$\chi_1(t) = \varphi_1(t) - a_{10}\psi_0(t) = t - a_{10}\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$a_{10} = \int_{-1}^1 \varphi_1(t)\psi_0(t) \, dt = \int_{-1}^1 \frac{t}{\sqrt{2}} \, dt = 0,$$

proto

$$\chi_1(t) = t$$

a

$$c_1^2 =$$

Zobecněná Fourierova řada

Příklad 8

Dále položme

$$\chi_1(t) = \varphi_1(t) - a_{10}\psi_0(t) = t - a_{10}\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$a_{10} = \int_{-1}^1 \varphi_1(t)\psi_0(t) \, dt = \int_{-1}^1 \frac{t}{\sqrt{2}} \, dt = 0,$$

proto

$$\chi_1(t) = t$$

a

$$c_1^2 = \int_{-1}^1 \chi_1^2(t) \, dt$$

Zobecněná Fourierova řada

Příklad 8

Dále položíme

$$\chi_1(t) = \varphi_1(t) - a_{10}\psi_0(t) = t - a_{10}\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$a_{10} = \int_{-1}^1 \varphi_1(t)\psi_0(t) \, dt = \int_{-1}^1 \frac{t}{\sqrt{2}} \, dt = 0,$$

proto

$$\chi_1(t) = t$$

a

$$c_1^2 = \int_{-1}^1 \chi_1^2(t) \, dt = \int_{-1}^1 t^2 \, dt$$

Zobecněná Fourierova řada

Příklad 8

Dále položíme

$$\chi_1(t) = \varphi_1(t) - a_{10}\psi_0(t) = t - a_{10}\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$a_{10} = \int_{-1}^1 \varphi_1(t)\psi_0(t) \, dt = \int_{-1}^1 \frac{t}{\sqrt{2}} \, dt = 0,$$

proto

$$\chi_1(t) = t$$

a

$$c_1^2 = \int_{-1}^1 \chi_1^2(t) \, dt = \int_{-1}^1 t^2 \, dt = \frac{2}{3}.$$

Zobecněná Fourierova řada

Příklad 8

Zobecněná Fourierova řada

Příklad 8

Dostáváme tedy

Zobecněná Fourierova řada

Příklad 8

Dostáváme tedy

$$\psi_1(t) =$$

Zobecněná Fourierova řada

Příklad 8

Dostáváme tedy

$$\psi_1(t) = \frac{\chi_1(t)}{c_1}$$

Zobecněná Fourierova řada

Příklad 8

Dostáváme tedy

$$\psi_1(t) = \frac{\chi_1(t)}{c_1} = \frac{t}{\sqrt{2/3}}$$

Zobecněná Fourierova řada

Příklad 8

Dostáváme tedy

$$\psi_1(t) = \frac{\chi_1(t)}{c_1} = \frac{t}{\sqrt{2/3}} = \sqrt{\frac{3}{2}}t.$$

Zobecněná Fourierova řada

Příklad 8

Dostáváme tedy

$$\psi_1(t) = \frac{\chi_1(t)}{c_1} = \frac{t}{\sqrt{2/3}} = \sqrt{\frac{3}{2}}t.$$

Nyní položme

Zobecněná Fourierova řada

Příklad 8

Dostáváme tedy

$$\psi_1(t) = \frac{\chi_1(t)}{c_1} = \frac{t}{\sqrt{2/3}} = \sqrt{\frac{3}{2}}t.$$

Nyní položme

$$\chi_2(t) =$$

Zobecněná Fourierova řada

Příklad 8

Dostáváme tedy

$$\psi_1(t) = \frac{\chi_1(t)}{c_1} = \frac{t}{\sqrt{2/3}} = \sqrt{\frac{3}{2}}t.$$

Nyní položíme

$$\chi_2(t) = \varphi_2(t) - a_{20}\psi_0(t) - a_{21}\psi_1(t)$$

Zobecněná Fourierova řada

Příklad 8

Dostáváme tedy

$$\psi_1(t) = \frac{\chi_1(t)}{c_1} = \frac{t}{\sqrt{2/3}} = \sqrt{\frac{3}{2}}t.$$

Nyní položíme

$$\chi_2(t) = \varphi_2(t) - a_{20}\psi_0(t) - a_{21}\psi_1(t) = t^2 - \frac{1}{3},$$

Zobecněná Fourierova řada

Příklad 8

Dostáváme tedy

$$\psi_1(t) = \frac{\chi_1(t)}{c_1} = \frac{t}{\sqrt{2/3}} = \sqrt{\frac{3}{2}}t.$$

Nyní položíme

$$\chi_2(t) = \varphi_2(t) - a_{20}\psi_0(t) - a_{21}\psi_1(t) = t^2 - \frac{1}{3},$$

$$c_2^2 =$$

Zobecněná Fourierova řada

Příklad 8

Dostáváme tedy

$$\psi_1(t) = \frac{\chi_1(t)}{c_1} = \frac{t}{\sqrt{2/3}} = \sqrt{\frac{3}{2}}t.$$

Nyní položíme

$$\chi_2(t) = \varphi_2(t) - a_{20}\psi_0(t) - a_{21}\psi_1(t) = t^2 - \frac{1}{3},$$

$$c_2^2 = \int_{-1}^1 \chi_2^2 dt$$

Zobecněná Fourierova řada

Příklad 8

Dostáváme tedy

$$\psi_1(t) = \frac{\chi_1(t)}{c_1} = \frac{t}{\sqrt{2/3}} = \sqrt{\frac{3}{2}}t.$$

Nyní položíme

$$\chi_2(t) = \varphi_2(t) - a_{20}\psi_0(t) - a_{21}\psi_1(t) = t^2 - \frac{1}{3},$$

$$c_2^2 = \int_{-1}^1 \chi_2^2 dt = \frac{8}{45}$$

Zobecněná Fourierova řada

Příklad 8

Dostáváme tedy

$$\psi_1(t) = \frac{\chi_1(t)}{c_1} = \frac{t}{\sqrt{2/3}} = \sqrt{\frac{3}{2}}t.$$

Nyní položíme

$$\chi_2(t) = \varphi_2(t) - a_{20}\psi_0(t) - a_{21}\psi_1(t) = t^2 - \frac{1}{3},$$

$$c_2^2 = \int_{-1}^1 \chi_2^2 dt = \frac{8}{45}$$

a

Zobecněná Fourierova řada

Příklad 8

Dostáváme tedy

$$\psi_1(t) = \frac{\chi_1(t)}{c_1} = \frac{t}{\sqrt{2/3}} = \sqrt{\frac{3}{2}}t.$$

Nyní položíme

$$\chi_2(t) = \varphi_2(t) - a_{20}\psi_0(t) - a_{21}\psi_1(t) = t^2 - \frac{1}{3},$$

$$c_2^2 = \int_{-1}^1 \chi_2^2 dt = \frac{8}{45}$$

a

$$\psi_2(t) =$$

Zobecněná Fourierova řada

Příklad 8

Dostáváme tedy

$$\psi_1(t) = \frac{\chi_1(t)}{c_1} = \frac{t}{\sqrt{2/3}} = \sqrt{\frac{3}{2}}t.$$

Nyní položíme

$$\chi_2(t) = \varphi_2(t) - a_{20}\psi_0(t) - a_{21}\psi_1(t) = t^2 - \frac{1}{3},$$

$$c_2^2 = \int_{-1}^1 \chi_2^2 dt = \frac{8}{45}$$

a

$$\psi_2(t) = \frac{\chi_2(t)}{c_2}$$

Zobecněná Fourierova řada

Příklad 8

Dostáváme tedy

$$\psi_1(t) = \frac{\chi_1(t)}{c_1} = \frac{t}{\sqrt{2/3}} = \sqrt{\frac{3}{2}}t.$$

Nyní položíme

$$\chi_2(t) = \varphi_2(t) - a_{20}\psi_0(t) - a_{21}\psi_1(t) = t^2 - \frac{1}{3},$$

$$c_2^2 = \int_{-1}^1 \chi_2^2 dt = \frac{8}{45}$$

a

$$\psi_2(t) = \frac{\chi_2(t)}{c_2} = \sqrt{\frac{5}{2}} \left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2} \right).$$

Zobecněná Fourierova řada

Příklad 8

Zobecněná Fourierova řada

Příklad 8

První tři členy hledané posloupnosti jsou:

Zobecněná Fourierova řada

Příklad 8

První tři členy hledané posloupnosti jsou:

$$\psi_0(t) =$$

Zobecněná Fourierova řada

Příklad 8

První tři členy hledané posloupnosti jsou:

$$\psi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

Zobecněná Fourierova řada

Příklad 8

První tři členy hledané posloupnosti jsou:

$$\psi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\psi_1(t) =$$

Zobecněná Fourierova řada

Příklad 8

První tři členy hledané posloupnosti jsou:

$$\psi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\psi_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}t,$$

Zobecněná Fourierova řada

Příklad 8

První tři členy hledané posloupnosti jsou:

$$\psi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\psi_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}t,$$

$$\psi_2(t) =$$

Zobecněná Fourierova řada

Příklad 8

První tři členy hledané posloupnosti jsou:

$$\psi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\psi_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}t,$$

$$\psi_2(t) = \sqrt{\frac{5}{2}} \left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2} \right).$$

Zobecněná Fourierova řada

Příklad 8

První tři členy hledané posloupnosti jsou:

$$\psi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\psi_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}t,$$

$$\psi_2(t) = \sqrt{\frac{5}{2}} \left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2} \right).$$

Závěrem, danou funkci $f(t)$, která je v intervalu $[-1, 1]$ spojitá, můžeme rozvíjet v řadu tvořenou z těchto mnohočlenů.

Gibbsův jev

Gibbsův jev

V předchozích kapitolách jsme se zabývali rozvojem funkcí z $L_2(a, b)$ ve Fourierovu řadu.

Gibbsův jev

V předchozích kapitolách jsme se zabývali rozvojem funkcí z $L_2(a, b)$ ve Fourierovu řadu.

Již víme, že Fourierova řada funkce $f \in L_2(0, 2\pi)$ konverguje v normě prostoru $L_2(0, 2\pi)$ k funkci f .

Gibbsův jev

V předchozích kapitolách jsme se zabývali rozvojem funkcí z $L_2(a, b)$ ve Fourierovu řadu.

Již víme, že Fourierova řada funkce $f \in L_2(0, 2\pi)$ konverguje v normě prostoru $L_2(0, 2\pi)$ k funkci f .

Jsou-li navíc splněny další podmínky, pak konverguje Fourierova řada stejnoměrně.

Gibbsův jev

V předchozích kapitolách jsme se zabývali rozvojem funkcí z $L_2(a, b)$ ve Fourierovu řadu.

Již víme, že Fourierova řada funkce $f \in L_2(0, 2\pi)$ konverguje v normě prostoru $L_2(0, 2\pi)$ k funkci f .

Jsou-li navíc splněny další podmínky, pak konverguje Fourierova řada stejnoměrně.

Jednoduchým příkladem funkce nesplňující tyto podmínky je

Gibbsův jev

V předchozích kapitolách jsme se zabývali rozvojem funkcí z $L_2(a, b)$ ve Fourierovu řadu.

Již víme, že Fourierova řada funkce $f \in L_2(0, 2\pi)$ konverguje v normě prostoru $L_2(0, 2\pi)$ k funkci f .

Jsou-li navíc splněny další podmínky, pak konverguje Fourierova řada stejnoměrně.

Jednoduchým příkladem funkce nesplňující tyto podmínky je

$$f_0(t) = \frac{\pi - t}{2} \text{ pro } t \in (0, 2\pi),$$

Gibbsův jev

V předchozích kapitolách jsme se zabývali rozvojem funkcí z $L_2(a, b)$ ve Fourierovu řadu.

Již víme, že Fourierova řada funkce $f \in L_2(0, 2\pi)$ konverguje v normě prostoru $L_2(0, 2\pi)$ k funkci f .

Jsou-li navíc splněny další podmínky, pak konverguje Fourierova řada stejnoměrně.

Jednoduchým příkladem funkce nesplňující tyto podmínky je

$$f_0(t) = \frac{\pi - t}{2} \text{ pro } t \in (0, 2\pi),$$

která je periodicky rozšířená na celé $\mathbb{R}$.

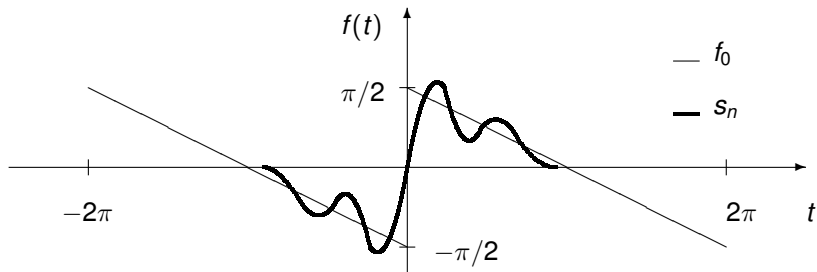
Gibbsův jev

Gibbsův jev

Tato funkce je znázorněna grafem

Gibbsův jev

Tato funkce je znázorněna grafem



Obrázek: Gibbsův jev

Gibbsův jev

Gibbsův jev

Lze ověřit, že

Gibbsův jev

Lze ověřit, že

$$f_0(t) =$$

Gibbsův jev

Lze ověřit, že

$$f_0(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kt)}{k}. \quad (24)$$

Gibbsův jev

Lze ověřit, že

$$f_0(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kt)}{k}. \quad (24)$$

Zde rovnost platí ve smyslu konvergence v $L_2(I, I + 2\pi)$, $I \in \mathbb{R}$, a také ve smyslu stejnoměrné konvergence na každém intervalu s krajními body $2I/\pi + \epsilon$ a $2(I + 1)\pi - \epsilon$, kde $\epsilon \in (0, \pi)$.

Gibbsův jev

Lze ověřit, že

$$f_0(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kt)}{k}. \quad (24)$$

Zde rovnost platí ve smyslu konvergence v $L_2(I, I + 2\pi)$, $I \in \mathbb{R}$, a také ve smyslu stejnoměrné konvergence na každém intervalu s krajními body $2I\pi + \epsilon$ a $2(I + 1)\pi - \epsilon$, kde $\epsilon \in (0, \pi)$.

Problémem jsou tedy body nespojitosti funkce f_0 .

Gibbsův jev

Lze ověřit, že

$$f_0(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kt)}{k}. \quad (24)$$

Zde rovnost platí ve smyslu konvergence v $L_2(I, I + 2\pi)$, $I \in \mathbb{R}$, a také ve smyslu stejnoměrné konvergence na každém intervalu s krajními body $2I\pi + \epsilon$ a $2(I + 1)\pi - \epsilon$, kde $\epsilon \in (0, \pi)$.

Problémem jsou tedy body nespojitosti funkce f_0 .

Například v bodě $t = 0$ je součet řady (24) roven 0, tedy průměru limit v nule zprava a zleva

Gibbsův jev

Lze ověřit, že

$$f_0(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kt)}{k}. \quad (24)$$

Zde rovnost platí ve smyslu konvergence v $L_2(I, I + 2\pi)$, $I \in \mathbb{R}$, a také ve smyslu stejnoměrné konvergence na každém intervalu s krajními body $2I\pi + \epsilon$ a $2(I + 1)\pi - \epsilon$, kde $\epsilon \in (0, \pi)$.

Problémem jsou tedy body nespojitosti funkce f_0 .

Například v bodě $t = 0$ je součet řady (24) roven 0, tedy průměru limit v nule zprava a zleva

$$\frac{1}{2} [f_0(0 + 0) + f_0(0 - 0)] = 0.$$

Gibbsův jev

Gibbsův jev

Zaměříme se nyní na chybu částečného součtu řady (24)

Gibbsův jev

Zaměříme se nyní na chybu částečného součtu řady (24)

$$R_n(t) =$$

Gibbsův jev

Zaměříme se nyní na chybu částečného součtu řady (24)

$$R_n(t) = s_n(t) - f_0(t)$$

Gibbsův jev

Zaměříme se nyní na chybu částečného součtu řady (24)

$$R_n(t) = s_n(t) - f_0(t) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kt)}{k} - \frac{\pi - t}{2} \text{ pro } t \in (0, 2\pi).$$

Gibbsův jev

Zaměříme se nyní na chybu částečného součtu řady (24)

$$R_n(t) = s_n(t) - f_0(t) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kt)}{k} - \frac{\pi - t}{2} \text{ pro } t \in (0, 2\pi).$$

Lehce ověříme, že

Gibbsův jev

Zaměříme se nyní na chybu částečného součtu řady (24)

$$R_n(t) = s_n(t) - f_0(t) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kt)}{k} - \frac{\pi - t}{2} \text{ pro } t \in (0, 2\pi).$$

Lehce ověříme, že

$$R'_n(t) =$$

Gibbsův jev

Zaměříme se nyní na chybu částečného součtu řady (24)

$$R_n(t) = s_n(t) - f_0(t) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kt)}{k} - \frac{\pi - t}{2} \text{ pro } t \in (0, 2\pi).$$

Lehce ověříme, že

$$R'_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt)$$

Gibbsův jev

Zaměříme se nyní na chybu částečného součtu řady (24)

$$R_n(t) = s_n(t) - f_0(t) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kt)}{k} - \frac{\pi - t}{2} \text{ pro } t \in (0, 2\pi).$$

Lehce ověříme, že

$$R'_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{2 \sin\left(\frac{1}{2}t\right)},$$

Gibbsův jev

Zaměříme se nyní na chybu částečného součtu řady (24)

$$R_n(t) = s_n(t) - f_0(t) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kt)}{k} - \frac{\pi - t}{2} \text{ pro } t \in (0, 2\pi).$$

Lehce ověříme, že

$$R'_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{2 \sin\left(\frac{1}{2}t\right)},$$

$$R_n(0) = -\frac{\pi}{2}$$

Gibbsův jev

Zaměříme se nyní na chybu částečného součtu řady (24)

$$R_n(t) = s_n(t) - f_0(t) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kt)}{k} - \frac{\pi - t}{2} \text{ pro } t \in (0, 2\pi).$$

Lehce ověříme, že

$$R'_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{2 \sin\left(\frac{1}{2}t\right)},$$

$$R_n(0) = -\frac{\pi}{2}$$

a tedy

Gibbsův jev

Zaměříme se nyní na chybu částečného součtu řady (24)

$$R_n(t) = s_n(t) - f_0(t) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kt)}{k} - \frac{\pi - t}{2} \text{ pro } t \in (0, 2\pi).$$

Lehce ověříme, že

$$R'_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{2 \sin\left(\frac{1}{2}t\right)},$$

$$R_n(0) = -\frac{\pi}{2}$$

a tedy

$$R_n(t) =$$

Gibbsův jev

Zaměříme se nyní na chybu částečného součtu řady (24)

$$R_n(t) = s_n(t) - f_0(t) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kt)}{k} - \frac{\pi - t}{2} \text{ pro } t \in (0, 2\pi).$$

Lehce ověříme, že

$$R'_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{2 \sin\left(\frac{1}{2}t\right)},$$

$$R_n(0) = -\frac{\pi}{2}$$

a tedy

$$R_n(t) = -\frac{\pi}{2} + \int_0^t \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right)} dx.$$

Gibbsův jev

Gibbsův jev

Funkce $s_n(t)$ je rostoucí v okolí nuly.

Gibbsův jev

Funkce $s_n(t)$ je rostoucí v okolí nuly.

Nyní hledějme takový bod $t_n > 0$, v němž má funkce $R_n(t)$ lokální extrém a je nejbližší k nule.

Gibbsův jev

Funkce $s_n(t)$ je rostoucí v okolí nuly.

Nyní hledíme takový bod $t_n > 0$, v němž má funkce $R_n(t)$ lokální extrém a je nejbližší k nule.

Z rovnice $R'_n(t) = 0$ dostáváme

Gibbsův jev

Funkce $s_n(t)$ je rostoucí v okolí nuly.

Nyní hledíme takový bod $t_n > 0$, v němž má funkce $R_n(t)$ lokální extrém a je nejbližší k nule.

Z rovnice $R'_n(t) = 0$ dostáváme

$$\sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right) = 0$$

Gibbsův jev

Funkce $s_n(t)$ je rostoucí v okolí nuly.

Nyní hledíme takový bod $t_n > 0$, v němž má funkce $R_n(t)$ lokální extrém a je nejbližší k nule.

Z rovnice $R'_n(t) = 0$ dostáváme

$$\sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right) = 0$$

a tedy

Gibbsův jev

Funkce $s_n(t)$ je rostoucí v okolí nuly.

Nyní hledíme takový bod $t_n > 0$, v němž má funkce $R_n(t)$ lokální extrém a je nejbližší k nule.

Z rovnice $R'_n(t) = 0$ dostáváme

$$\sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right) = 0$$

a tedy

$$x_n = \pi \left(n + \frac{1}{2} \right)^{-1}.$$

Gibbsův jev

Funkce $s_n(t)$ je rostoucí v okolí nuly.

Nyní hledíme takový bod $t_n > 0$, v němž má funkce $R_n(t)$ lokální extrém a je nejbližší k nule.

Z rovnice $R'_n(t) = 0$ dostáváme

$$\sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right) = 0$$

a tedy

$$x_n = \pi \left(n + \frac{1}{2} \right)^{-1}.$$

Označíme-li $n + 1/2 = p$ a použijeme substituci $px = s$ dostaneme

Gibbsův jev

Funkce $s_n(t)$ je rostoucí v okolí nuly.

Nyní hledíme takový bod $t_n > 0$, v němž má funkce $R_n(t)$ lokální extrém a je nejbližší k nule.

Z rovnice $R'_n(t) = 0$ dostáváme

$$\sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right) = 0$$

a tedy

$$x_n = \pi \left(n + \frac{1}{2} \right)^{-1}.$$

Označíme-li $n + 1/2 = p$ a použijeme substituci $px = s$ dostaneme

$$R_n(t_n) =$$

Gibbsův jev

Funkce $s_n(t)$ je rostoucí v okolí nuly.

Nyní hledíme takový bod $t_n > 0$, v němž má funkce $R_n(t)$ lokální extrém a je nejbližší k nule.

Z rovnice $R'_n(t) = 0$ dostáváme

$$\sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right) = 0$$

a tedy

$$x_n = \pi \left(n + \frac{1}{2} \right)^{-1}.$$

Označíme-li $n + 1/2 = p$ a použijeme substituci $px = s$ dostaneme

$$R_n(t_n) = \int_0^{\pi/p} \frac{\sin(px)}{2 \sin \left(\frac{1}{2}x \right)} dx - \frac{\pi}{2}$$

Gibbsův jev

Funkce $s_n(t)$ je rostoucí v okolí nuly.

Nyní hledíme takový bod $t_n > 0$, v němž má funkce $R_n(t)$ lokální extrém a je nejbližší k nule.

Z rovnice $R'_n(t) = 0$ dostáváme

$$\sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right) = 0$$

a tedy

$$x_n = \pi \left(n + \frac{1}{2} \right)^{-1}.$$

Označíme-li $n + 1/2 = p$ a použijeme substituci $px = s$ dostaneme

$$R_n(t_n) = \int_0^{\pi/p} \frac{\sin(px)}{2 \sin \left(\frac{1}{2}x \right)} dx - \frac{\pi}{2} = \int_0^{\pi} \frac{\sin(s)}{2p \sin \left(\frac{s}{2p} \right)} - \frac{\pi}{2}.$$

Gibbsův jev

Gibbsův jev

Pak pro dosti velké p (tj. pro dosti velké n) je

Gibbsův jev

Pak pro dosti velké p (tj. pro dosti velké n) je

$$2p \sin \left(\frac{s}{2p} \right) \geq 0,$$

Gibbsův jev

Pak pro dosti velké p (tj. pro dosti velké n) je

$$2p \sin\left(\frac{s}{2p}\right) \geq 0,$$

pro $s \in (0, \pi)$

Gibbsův jev

Pak pro dosti velké p (tj. pro dosti velké n) je

$$2p \sin \left(\frac{s}{2p} \right) \geq 0,$$

pro $s \in (0, \pi)$ a

$$\lim_{p \rightarrow \infty} 2p \sin \left(\frac{s}{2p} \right) = s.$$

Gibbsův jev

Pak pro dosti velké p (tj. pro dosti velké n) je

$$2p \sin\left(\frac{s}{2p}\right) \geq 0,$$

pro $s \in (0, \pi)$ a

$$\lim_{p \rightarrow \infty} 2p \sin\left(\frac{s}{2p}\right) = s.$$

Nyní najdeme integrální majorantu a dostáváme

Gibbsův jev

Pak pro dosti velké p (tj. pro dosti velké n) je

$$2p \sin\left(\frac{s}{2p}\right) \geq 0,$$

pro $s \in (0, \pi)$ a

$$\lim_{p \rightarrow \infty} 2p \sin\left(\frac{s}{2p}\right) = s.$$

Nyní najdeme integrální majorantu a dostáváme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(t_n) =$$

Gibbsův jev

Pak pro dosti velké p (tj. pro dosti velké n) je

$$2p \sin\left(\frac{s}{2p}\right) \geq 0,$$

pro $s \in (0, \pi)$ a

$$\lim_{p \rightarrow \infty} 2p \sin\left(\frac{s}{2p}\right) = s.$$

Nyní najdeme integrální majorantu a dostáváme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(t_n) = \int_0^\pi \frac{\sin(s)}{s} \, ds - \frac{\pi}{2}$$

Gibbsův jev

Pak pro dosti velké p (tj. pro dosti velké n) je

$$2p \sin\left(\frac{s}{2p}\right) \geq 0,$$

pro $s \in (0, \pi)$ a

$$\lim_{p \rightarrow \infty} 2p \sin\left(\frac{s}{2p}\right) = s.$$

Nyní najdeme integrální majorantu a dostáváme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(t_n) = \int_0^\pi \frac{\sin(s)}{s} \, ds - \frac{\pi}{2} \doteq 0,18\pi.$$

Gibbsův jev

Pak pro dosti velké p (tj. pro dosti velké n) je

$$2p \sin\left(\frac{s}{2p}\right) \geq 0,$$

pro $s \in (0, \pi)$ a

$$\lim_{p \rightarrow \infty} 2p \sin\left(\frac{s}{2p}\right) = s.$$

Nyní najdeme integrální majorantu a dostáváme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(t_n) = \int_0^\pi \frac{\sin(s)}{s} \, ds - \frac{\pi}{2} \doteq 0,18\pi.$$

Pro velká n je

Gibbsův jev

Pak pro dosti velké p (tj. pro dosti velké n) je

$$2p \sin\left(\frac{s}{2p}\right) \geq 0,$$

pro $s \in (0, \pi)$ a

$$\lim_{p \rightarrow \infty} 2p \sin\left(\frac{s}{2p}\right) = s.$$

Nyní najdeme integrální majorantu a dostáváme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(t_n) = \int_0^\pi \frac{\sin(s)}{s} \, ds - \frac{\pi}{2} \doteq 0,18\pi.$$

Pro velká n je

$$s_n(t_n) \doteq 1,18 \frac{\pi}{2}.$$

Gibbsův jev

Pak pro dosti velké p (tj. pro dosti velké n) je

$$2p \sin\left(\frac{s}{2p}\right) \geq 0,$$

pro $s \in (0, \pi)$ a

$$\lim_{p \rightarrow \infty} 2p \sin\left(\frac{s}{2p}\right) = s.$$

Nyní najdeme integrální majorantu a dostáváme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(t_n) = \int_0^\pi \frac{\sin(s)}{s} ds - \frac{\pi}{2} \doteq 0,18\pi.$$

Pro velká n je

$$s_n(t_n) \doteq 1,18 \frac{\pi}{2}.$$

Každý částečný součet $s_n(t)$ má tedy maximum, které převyšuje asi o 18 % maximum funkce f_0 .

Gibbsův jev

Pak pro dosti velké p (tj. pro dosti velké n) je

$$2p \sin\left(\frac{s}{2p}\right) \geq 0,$$

pro $s \in (0, \pi)$ a

$$\lim_{p \rightarrow \infty} 2p \sin\left(\frac{s}{2p}\right) = s.$$

Nyní najdeme integrální majorantu a dostáváme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(t_n) = \int_0^\pi \frac{\sin(s)}{s} ds - \frac{\pi}{2} \doteq 0,18\pi.$$

Pro velká n je

$$s_n(t_n) \doteq 1,18\frac{\pi}{2}.$$

Každý částečný součet $s_n(t)$ má tedy maximum, které převyšuje asi o 18 % maximum funkce f_0 .

Tomuto fenoménu se říká *Gibbsův jev*.

Gibbsův jev

Gibbsův jev

Dá se ukázat, že každá funkce f , která má konečný počet bodů nespojitosti prvního druhu, lze zapsat ve tvaru

Gibbsův jev

Dá se ukázat, že každá funkce f , která má konečný počet bodů nespojitosti prvního druhu, lze zapsat ve tvaru

$$f(t) = g(t) + h(t),$$

Gibbsův jev

Dá se ukázat, že každá funkce f , která má konečný počet bodů nespojitosti prvního druhu, lze zapsat ve tvaru

$$f(t) = g(t) + h(t),$$

kde $g(t)$ je funkce splňující naše dodatečné podmínky kladené na funkci f_0 a jejíž Fourierova řada konverguje stejnoměrně.

Gibbsův jev

Dá se ukázat, že každá funkce f , která má konečný počet bodů nespojitosti prvního druhu, lze zapsat ve tvaru

$$f(t) = g(t) + h(t),$$

kde $g(t)$ je funkce splňující naše dodatečné podmínky kladené na funkci f_0 a jejíž Fourierova řada konverguje stejnoměrně.

Funkce

$$h(t) = \sum_{i=1}^m c_i f_0(t - t_i)$$

je funkce, která zachycuje skoky funkce f .

Gibbsův jev

Gibbsův jev

Z vlastností funkce f_0 víme, že Fourierova řada funkce f konverguje v každém bodě t k hodnotě

Gibbsův jev

Z vlastností funkce f_0 víme, že Fourierova řada funkce f konverguje v každém bodě t k hodnotě

$$\frac{1}{2}[f(t+0) + f(t-0)]$$

Gibbsův jev

Z vlastností funkce f_0 víme, že Fourierova řada funkce f konverguje v každém bodě t k hodnotě

$$\frac{1}{2}[f(t+0) + f(t-0)]$$

a že v okolí každého bodu funkce f se projeví Gibbsův jev.

Gibbsův jev

Z vlastností funkce f_0 víme, že Fourierova řada funkce f konverguje v každém bodě t k hodnotě

$$\frac{1}{2}[f(t+0) + f(t-0)]$$

a že v okolí každého bodu funkce f se projeví Gibbsův jev. Tedy částečný součet Fourierovy řady funkce f bude v okolí každého bodu nespojitosti t_i nabývat, až na zanedbatelnou odchylku, hodnotu

Gibbsův jev

Z vlastností funkce f_0 víme, že Fourierova řada funkce f konverguje v každém bodě t k hodnotě

$$\frac{1}{2}[f(t+0) + f(t-0)]$$

a že v okolí každého bodu funkce f se projeví Gibbsův jev. Tedy částečný součet Fourierovy řady funkce f bude v okolí každého bodu nespojitosti t_i nabývat, až na zanedbatelnou odchylku, hodnotu

$$\frac{1}{2}[f(t_i+0) + f(t_i-0)] \pm \frac{1}{2}1,18[f(t_i+0) + f(t_i-0)].$$

Gibbsův jev

Z vlastností funkce f_0 víme, že Fourierova řada funkce f konverguje v každém bodě t k hodnotě

$$\frac{1}{2}[f(t+0) + f(t-0)]$$

a že v okolí každého bodu funkce f se projeví Gibbsův jev. Tedy částečný součet Fourierovy řady funkce f bude v okolí každého bodu nespojitosti t_i nabývat, až na zanedbatelnou odchylku, hodnotu

$$\frac{1}{2}[f(t_i+0) + f(t_i-0)] \pm \frac{1}{2}1,18[f(t_i+0) + f(t_i-0)].$$

V okolí bodu nespojitosti tedy nebudou částečné součty konvergovat stejnoměrně.

Řešený příklad

Řešený příklad

Fourierova řada periodického signálu je matematický zápis tvrzení, že periodický signál $f(t)$ s opakovacím kmitočtem $1/T$ lze složit z konstantního signálu a harmonických signálů o kmitočtech $1/kT$, kde $k = 1, 2, 3, \dots$

Řešený příklad

Fourierova řada periodického signálu je matematický zápis tvrzení, že periodický signál $f(t)$ s opakovacím kmitočtem $1/T$ lze složit z konstantního signálu a harmonických signálů o kmitočtech $1/kT$, kde $k = 1, 2, 3, \dots$. Tedy

$$f(t) =$$

Řešený příklad

Fourierova řada periodického signálu je matematický zápis tvrzení, že periodický signál $f(t)$ s opakovacím kmitočtem $1/T$ lze složit z konstantního signálu a harmonických signálů o kmitočtech $1/kT$, kde $k = 1, 2, 3, \dots$. Tedy

$$f(t) = A_0$$

Řešený příklad

Fourierova řada periodického signálu je matematický zápis tvrzení, že periodický signál $f(t)$ s opakovacím kmitočtem $1/T$ lze složit z konstantního signálu a harmonických signálů o kmitočtech $1/kT$, kde $k = 1, 2, 3, \dots$. Tedy

$$f(t) = A_0 + \underbrace{A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)}_{\text{první (základní) harmonická}}$$

Řešený příklad

Fourierova řada periodického signálu je matematický zápis tvrzení, že periodický signál $f(t)$ s opakovacím kmitočtem $1/T$ lze složit z konstantního signálu a harmonických signálů o kmitočtech $1/kT$, kde $k = 1, 2, 3, \dots$. Tedy

$$f(t) = A_0 + \underbrace{A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)}_{\text{první (základní) harmonická}} + A_2 \cos(2\omega t + \varphi_2) + A_3 \cos(3\omega t + \varphi_3)$$

Řešený příklad

Fourierova řada periodického signálu je matematický zápis tvrzení, že periodický signál $f(t)$ s opakovacím kmitočtem $1/T$ lze složit z konstantního signálu a harmonických signálů o kmitočtech $1/kT$, kde $k = 1, 2, 3, \dots$. Tedy

$$\begin{aligned} f(t) = & A_0 + \underbrace{A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)}_{\text{první (základní) harmonická}} \\ & + A_2 \cos(2\omega t + \varphi_2) + A_3 \cos(3\omega t + \varphi_3) \\ & + \dots + \underbrace{A_k \cos(k\omega t + \varphi_k)}_{k\text{-tá harmonická (vyšší)}} + \dots \end{aligned}$$

Řešený příklad

Fourierova řada periodického signálu je matematický zápis tvrzení, že periodický signál $f(t)$ s opakovacím kmitočtem $1/T$ lze složit z konstantního signálu a harmonických signálů o kmitočtech $1/kT$, kde $k = 1, 2, 3, \dots$. Tedy

$$\begin{aligned} f(t) &= A_0 + \underbrace{A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)}_{\text{první (základní) harmonická}} \\ &\quad + A_2 \cos(2\omega t + \varphi_2) + A_3 \cos(3\omega t + \varphi_3) \\ &\quad + \dots + \underbrace{A_k \cos(k\omega t + \varphi_k)}_{k\text{-tá harmonická (vyšší)}} + \dots \\ &= \underbrace{A_0}_{\text{stejnoseměrná složka (střední hodnota)}} \end{aligned}$$

Řešený příklad

Fourierova řada periodického signálu je matematický zápis tvrzení, že periodický signál $f(t)$ s opakovacím kmitočtem $1/T$ lze složit z konstantního signálu a harmonických signálů o kmitočtech $1/kT$, kde $k = 1, 2, 3, \dots$. Tedy

$$\begin{aligned} f(t) &= A_0 + \underbrace{A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)}_{\text{první (základní) harmonická}} \\ &\quad + A_2 \cos(2\omega t + \varphi_2) + A_3 \cos(3\omega t + \varphi_3) \\ &\quad + \dots + \underbrace{A_k \cos(k\omega t + \varphi_k)}_{k\text{-tá harmonická (vyšší)}} + \dots \\ &= \underbrace{A_0}_{\text{stejnoseměrná složka (střední hodnota)}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t + \varphi_k)}_{\text{střídavá složka}}, \end{aligned} \tag{25}$$

Řešený příklad

Fourierova řada periodického signálu je matematický zápis tvrzení, že periodický signál $f(t)$ s opakovacím kmitočtem $1/T$ lze složit z konstantního signálu a harmonických signálů o kmitočtech $1/kT$, kde $k = 1, 2, 3, \dots$. Tedy

$$\begin{aligned} f(t) &= A_0 + \underbrace{A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)}_{\text{první (základní) harmonická}} \\ &\quad + A_2 \cos(2\omega t + \varphi_2) + A_3 \cos(3\omega t + \varphi_3) \\ &\quad + \dots + \underbrace{A_k \cos(k\omega t + \varphi_k)}_{k\text{-tá harmonická (vyšší)}} + \dots \\ &= \underbrace{A_0}_{\text{stejnoseměrná složka (střední hodnota)}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t + \varphi_k)}_{\text{střídavá složka}}, \end{aligned} \tag{25}$$

kde A_k je amplituda k -té harmonické složky,

Řešený příklad

Fourierova řada periodického signálu je matematický zápis tvrzení, že periodický signál $f(t)$ s opakovacím kmitočtem $1/T$ lze složit z konstantního signálu a harmonických signálů o kmitočtech $1/kT$, kde $k = 1, 2, 3, \dots$. Tedy

$$\begin{aligned} f(t) &= A_0 + \underbrace{A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)}_{\text{první (základní) harmonická}} \\ &\quad + A_2 \cos(2\omega t + \varphi_2) + A_3 \cos(3\omega t + \varphi_3) \\ &\quad + \dots + \underbrace{A_k \cos(k\omega t + \varphi_k)}_{k\text{-tá harmonická (vyšší)}} + \dots \\ &= \underbrace{A_0}_{\text{stejnoseměrná složka (střední hodnota)}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t + \varphi_k)}_{\text{střídavá složka}}, \end{aligned} \tag{25}$$

kde A_k je amplituda k -té harmonické složky, $k\omega$ je kruhový opakovací kmitočet k -té harmonické složky

Řešený příklad

Fourierova řada periodického signálu je matematický zápis tvrzení, že periodický signál $f(t)$ s opakovacím kmitočtem $1/T$ lze složit z konstantního signálu a harmonických signálů o kmitočtech $1/kT$, kde $k = 1, 2, 3, \dots$. Tedy

$$\begin{aligned} f(t) &= A_0 + \underbrace{A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)}_{\text{první (základní) harmonická}} \\ &\quad + A_2 \cos(2\omega t + \varphi_2) + A_3 \cos(3\omega t + \varphi_3) \\ &\quad + \dots + \underbrace{A_k \cos(k\omega t + \varphi_k)}_{k\text{-tá harmonická (vyšší)}} + \dots \\ &= \underbrace{A_0}_{\text{stejnoseměrná složka (střední hodnota)}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega t + \varphi_k)}_{\text{střídavá složka}}, \end{aligned} \tag{25}$$

kde A_k je amplituda k -té harmonické složky, $k\omega$ je kruhový opakovací kmitočet k -té harmonické složky a φ_k je počáteční fáze k -té harmonické složky.

Řešený příklad

Řešený příklad

Z výše uvedené formule (25) je zřejmé, že každý periodický signál má *střídavou* a *stejnoseměrnou složku*.

Řešený příklad

Z výše uvedené formule (25) je zřejmé, že každý periodický signál má *střídavou* a *stejnosemernou složku*.

Stejnosemerná složka je rovna střední hodnotě signálu za opakovací periodu.

Řešený příklad

Z výše uvedené formule (25) je zřejmé, že každý periodický signál má *střídavou a stejnosměrnou složku*.

Stejnosiměrná složka je rovna střední hodnotě signálu za opakovací periodu.

Střídavá složka se skládá z harmonických signálů o nulových středních hodnotách, je to tedy původní signál zbavený stejnosměrné složky.

Řešený příklad

Z výše uvedené formule (25) je zřejmé, že každý periodický signál má *střídavou a stejnosměrnou složku*.

Stejnosiměrná složka je rovna střední hodnotě signálu za opakovací periodu.

Střídavá složka se skládá z harmonických signálů o nulových středních hodnotách, je to tedy původní signál zbavený stejnosměrné složky.

Střídavá složka obsahuje tzv. *první harmonickou* o kmitočtu, který je stejný jako opakovací kmitočet periodického signálu,

Řešený příklad

Z výše uvedené formule (25) je zřejmé, že každý periodický signál má *střídavou a stejnosměrnou složku*.

Stejnosměrná složka je rovna střední hodnotě signálu za opakovací periodu.

Střídavá složka se skládá z harmonických signálů o nulových středních hodnotách, je to tedy původní signál zbavený stejnosměrné složky.

Střídavá složka obsahuje tzv. *první harmonickou* o kmitočtu, který je stejný jako opakovací kmitočet periodického signálu, a *vyšší harmonické*, kterých je obecně nekonečný počet a jejichž kmitočet je celočíselným násobkem kmitočtu první harmonické.

Řešený příklad

Řešený příklad

Rozklad výše uvedeného periodického signálu (25) na dílčí komponenty je jednoznačný.

Řešený příklad

Rozklad výše uvedeného periodického signálu (25) na dílčí komponenty je jednoznačný.

Platí, že každé dva různé periodické signály o opakovacím kmitočtu ω jsou jednoznačně reprezentovány různými dvojicemi množin

$\{A_0, A_1, \dots, A_k, \dots\}$ a $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k, \dots\}$.

Řešený příklad

Rozklad výše uvedeného periodického signálu (25) na dílčí komponenty je jednoznačný.

Platí, že každé dva různé periodické signály o opakovacím kmitočtu ω jsou jednoznačně reprezentovány různými dvojicemi množin

$\{A_0, A_1, \dots, A_k, \dots\}$ a $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k, \dots\}$.

Grafické znázornění těchto množin ve formě spektrálních čar na kmitočtové ose se nazývá *spektrum signálu*.

Řešený příklad

Řešený příklad

Prochází-li signál elektrickým obvodem, můžeme to chápat jako průchod množiny jeho harmonických složek.

Řešený příklad

Prochází-li signál elektrickým obvodem, můžeme to chápat jako průchod množiny jeho harmonických složek.

V důsledku rozdílných přenosových schopností obvodu na různých kmitočtech dojde k tomu, že na výstupu obvodu budou jednotlivé harmonické složky vzájemně různě utlumeny a fázově posunuty.

Řešený příklad

Prochází-li signál elektrickým obvodem, můžeme to chápat jako průchod množiny jeho harmonických složek.

V důsledku rozdílných přenosových schopností obvodu na různých kmitočtech dojde k tomu, že na výstupu obvodu budou jednotlivé harmonické složky vzájemně různě utlumeny a fázově posunuty. Takže výstupní signál sice bude rovněž periodický, ale oproti vstupnímu signálu bude zkreslený.

Řešený příklad

Prochází-li signál elektrickým obvodem, můžeme to chápat jako průchod množiny jeho harmonických složek.

V důsledku rozdílných přenosových schopností obvodu na různých kmitočtech dojde k tomu, že na výstupu obvodu budou jednotlivé harmonické složky vzájemně různě utlumeny a fázově posunuty. Takže výstupní signál sice bude rovněž periodický, ale oproti vstupnímu signálu bude zkreslený.

Spektrum signálu, resp. rozložení jeho spektrálních čar na kmitočtové ose, tak spolu s kmitočtovou charakteristikou obvodu přináší užitečný a názorný nástroj na chápání jevů spojených s interakcemi signálu a obvodů.

Řešený příklad

Řešený příklad

Konstruuujme nyní Fourierovu řadu signálu

Řešený příklad

Konstruuujme nyní Fourierovu řadu signálu

$$f(t) = |x|$$

Řešený příklad

Konstruuujme nyní Fourierovu řadu signálu

$$f(t) = |x|$$

pomocí 10 harmonických na základním intervalu periodicity $(-0.5, 1)$.

Řešený příklad

Konstruuje nyní Fourierovu řadu signálu

$$f(t) = |x|$$

pomocí 10 harmonických na základním intervalu periodicity $(-0.5, 1)$.

Dále provedeme harmonickou analýzu, tedy konstruuje amplitudové a fázové spektrum.

Řešený příklad

Konstruuje nyní Fourierovu řadu signálu

$$f(t) = |x|$$

pomocí 10 harmonických na základním intervalu periodicity $(-0.5, 1)$.

Dále provedeme harmonickou analýzu, tedy konstruuje amplitudové a fázové spektrum.

Graf periodického signálu je znázorněn

Řešený příklad

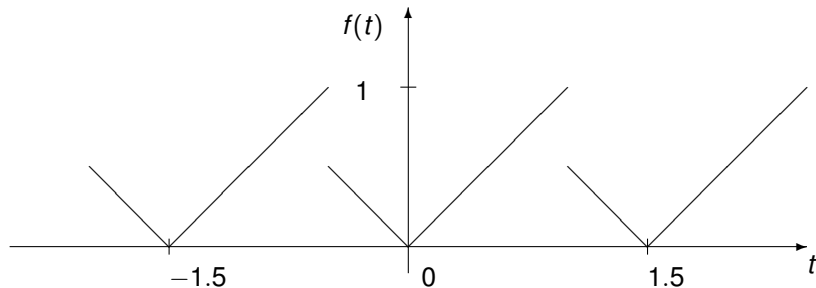
Konstruuje nyní Fourierovu řadu signálu

$$f(t) = |x|$$

pomocí 10 harmonických na základním intervalu periodicity $(-0.5, 1)$.

Dále provedeme harmonickou analýzu, tedy konstruuje amplitudové a fázové spektrum.

Graf periodického signálu je znázorněn



Řešený příklad

Řešený příklad

K výpočtu použijeme software Matlab.

Řešený příklad

K výpočtu použijeme software Matlab.

Algoritmus 1: Algoritmus rozvoje ve Fourierovu řadu

```
1 function Fourierova_rada(f,a,b,N)
2 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
3 % Rozvoj zadane funkce f(t) z L2(a,b)
4 % ve standardni Fourierovu radu
5 % v komplexnim tvaru pomoci N harmonickych
6 % Příklad volání: Fourierova_rada('abs(t)',-0.5,1,10)
7 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
8
9 syms t real; % Symbolická proměnná t
10 T=sym(b-a); % Perioda
11 w=2*pi/T;    % Úhlová rychlost
```


Řešený příklad

Řešený příklad

Algoritmus 1: Algoritmus rozvoje ve Fourierovu řadu

```
13 % Vypocet koeficientu cn Fourierovy rady fN
14 % a její sestavení
15 % Vypocet amplitud An a fazi FIn pro n=-N,...,N
16
17 fN=0; An=zeros(2*N+1,1); FIn=zeros(2*N+1,1);
18 for n=-N:N
19     cn=1/T*int(f*exp(-i*w*n*t),t,a,b);
20     % Koeficient n-teho členu FR
21     fN=fN+cn.*exp(i*w*n*t);
22     % Sestavení Fourierovy rady fN
23     An(n+N+1)=abs(double(cn));
24     % Vypocet amplitudy (indexace vek. od 1)
25     FIn(n+N+1)=-angle(double(cn));
26     % Vypocet faze (indexace vektoru od 1)
27 end;
28
29 % Grafy funkcí f a fN
30 figure; hold on; grid on; box on;
31 set(gca,'FontSize',14);
```

Řešený příklad

Řešený příklad

Algoritmus 1: Algoritmus rozvoje ve Fourierovu řadu

```
33 % Puvodni funkce f
34 hf=ezplot(f,[a,b]);
35 set(hf,'Color','Red','LineWidth',2);
36
37 % Aproximace fN pomoci N harmonickych
38 hfN=ezplot(fN,[a,b]);
39 set(hfN,'Color','Blue',
40 'LineWidth',2,'LineStyle','--');
41 xlabel('t');
42 title(['Fourierova rada funkce f(t)=' ,f]);
43 legend('f(t)', ['f_{',num2str(N),'}(t)'],
44 'Location','NorthEastOutside');
```

Řešený příklad

Řešený příklad

Algoritmus 1: Algoritmus rozvoje ve Fourierovu řadu

```
47  
48 % Amplitudove spektrum  
49 figure; hold on; grid on; box on;  
50 set(gca,'FontSize',14);  
51 bar(-N:N,An); xlabel('n');  
52 title('Amplitudove spektrum')  
53  
54 % Fazove spektrum  
55 figure; hold on; grid on; box on;  
56 set(gca,'FontSize',14);  
57 bar(-N:N,FIn); xlabel('n');  
58 title('Fazove spektrum')
```

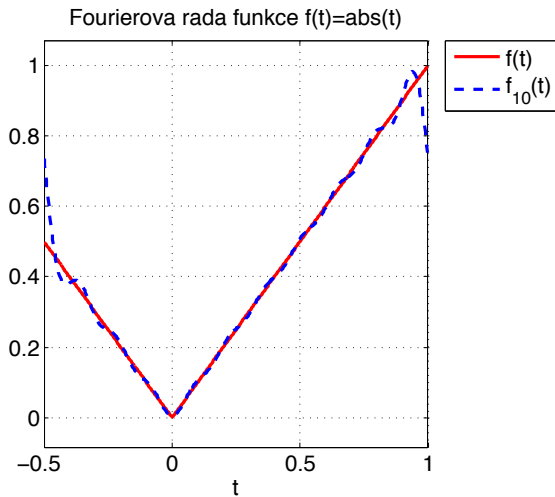
Řešený příklad

Řešený příklad

Graf 10 harmonických je znázorněn

Řešený příklad

Graf 10 harmonických je znázorněn



Obrázek: Graf 10 harmonických

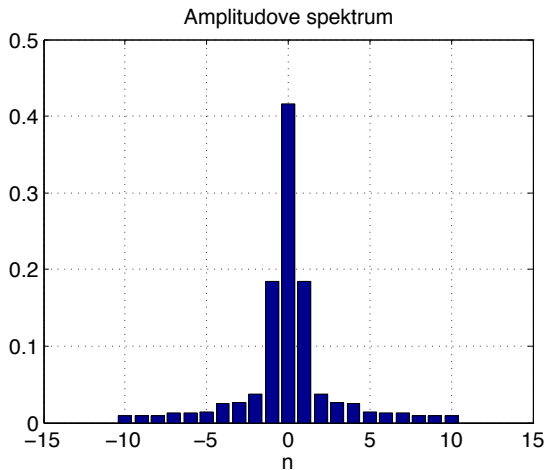
Řešený příklad

Řešený příklad

Amplitudové spektrum daného signálu je znázorněno

Řešený příklad

Amplitudové spektrum daného signálu je znázorněno



Obrázek: Amplitudové spektrum daného signálu

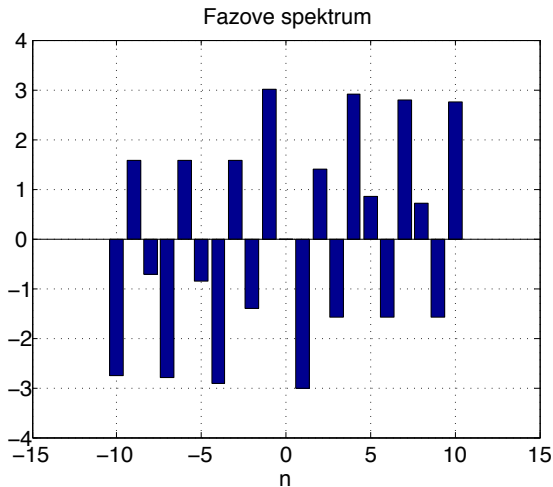
Řešený příklad

Řešený příklad

Fázové spektrum daného signálu je znázorněno

Řešený příklad

Fázové spektrum daného signálu je znázorněno



Obrázek: Fázové spektrum daného signálu