Funkce komplexní proměnné a integrální transformace

Fourierovy řady II.
Autotest

Marek Lampart

Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století* (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Nápověda

- Test zahájíte kliknutím na tlačítko "Zacatek testu".
- U každého příkladu je správná pouze jediná odpověď, správně zodpovězená otázka je hodnocena jedním bodem.
- Test ukončíme kliknutím na tlačítko "Konec testu". Ve vedlejším rámečku se zobrazí počet získaných bodů v daném testu.
- Kliknutím na tlačítko "Oprava" se provede opravení testu. Správně zodpovězené otázky budou označeny zeleně, chybné odpovědi budou vyznačeny červeně.

Zacatek testu

1. Funkce $f : (a, b) \to \mathbb{C}$ náležící prostoru $L_2(a, b)$ se nazývá

- ☐ absolutně integrovatelná.
- ☐ integrovatelná s kvadrátem.
- ☐ po částech integrovatelná.
- ☐ integrovatelná v průměru.

2. Každá funkce $f : (a, b) \to \mathbb{C}$ náležící prostoru $L_2(a, b)$ splňuje, že

- ☐ integrál $\int_a^b |f(t)^2| \,\mathrm{d}\, t < \infty$
- ☐ integrál $\int_a^b |f(t)^2| \,\mathrm{d}\, t = \infty$
- ☐ integrál $\int_a^b |f(t)|^2 \,\mathrm{d}\, t < \infty$
- ☐ integrál $\int_a^b |f(t)|^2 \,\mathrm{d}\, t = \infty$

Konec testu | Oprava

Zacatek testu

1. Funkce $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

- ☐ je na intervalu $[0, 1]$ integrovatelná s kvadrátem.
- ☐ není na intervalu $[0, 1]$ integrovatelná s kvadrátem.

2. Funkce $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

- ☐ je na intervalu $[0, 1]$ integrovatelná s kvadrátem.
- ☐ není na intervalu $[0, 1]$ integrovatelná s kvadrátem.

Konec testu

Oprava

Zacatek testu

1. Funkce f je na intervalu (a, b) absolutně integrovatelná, pokud splňuje

- ☐ $\int_a^b |f(t)| \, \mathrm{d}\, t < \infty$.
- ☐ $\int_a^b |f(t)| \, \mathrm{d}\, t = \infty$.
- ☐ $\int_a^b f(t) \, \mathrm{d}\, t < \infty$.
- ☐ $\int_a^b f(t) \, \mathrm{d}\, t = \infty$.

2. Funkce $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

- ☐ je na intervalu $[0, 1]$ absolutně integrovatelná.
- ☐ není na intervalu $[0, 1]$ absolutně integrovatelná.

Konec testu | Oprava

Zacatek testu

1. Skalární součin funkcí $f, g \in L_2(a, b)$ na intervalu (a, b) je definován vztahem

- ☐ $(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}\,t.$
- ☐ $(f, g) = \int_a^b \sqrt{f(t)g(t)}\,\mathrm{d}\,t.$
- ☐ $(f, g) = \int_a^b \overline{f}(t)g(t)\,\mathrm{d}\,t.$
- ☐ $(f, g) = \int_a^b f(t)\overline{g}(t)\,\mathrm{d}\,t.$

2. Norma funkce f z $L_2(a, b)$ je definována předpisem

- ☐ $\|f\| = \sqrt{|f|}.$
- ☐ $\|f\| = \sqrt{f^2}.$
- ☐ $\|f\| = \sqrt{(f + f)}.$
- ☐ $\|f\| = \sqrt{(f, f)}.$

Konec testu | | Oprava

Zacatek testu

1. Nechť $f, g, h \in L_2(a, b), c \in \mathbb{C}$. Z následujících možností vyberte tu, která pro skalární součin neplatí.

- ☐ $(cf, cg) = c(f, g)$
- ☐ $(f + h, g) = (f, g) + (h, g)$
- ☐ $(f, g) = \overline{(g, f)}$
- ☐ $(cf, g) = c(f, g)$

2. Vyberte správný tvar Schwarz-Buňakovského nerovnosti.

- ☐ $|(f, g)| \leq |f||g|$
- ☐ $|(f, g)| \geq |f||g|$
- ☐ $|(f, g)| \leq \|f\|\|g\|$
- ☐ $|(f, g)| \geq \|f\|\|g\|$

Konec testu | | Oprava

Zacatek testu

1. Norma funkce $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} \in L_2(0,1)$ je rovna

- ☐ 1
- ☐ $\sqrt{2}$
- ☐ $\sqrt{3}$
- ☐ $\sqrt{5}$

2. Systém funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ z $L_2(a,b)$ je ortogonální, platí-li

- ☐ $(f_m, f_n) = 0$ pro každé $m = n$.
- ☐ $(f_m, f_n) = 0$ pro každé $m \neq n$
- ☐ $(f_m, f_n) \neq 0$ pro každé $m = n$
- ☐ $(f_m, f_n) \neq 0$ pro každé $m \neq n$

Konec testu | | Oprava

Zacatek testu

1. Systém funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ z $L_2(a,b)$ je ortonormální, platí-li

☐ $(f_m, f_n) = \begin{cases} 1 & \text{pro } m = n, \\ 0 & \text{pro } m \neq n. \end{cases}$

☐ $(f_m, f_n) = \begin{cases} 0 & \text{pro } m = n, \\ 1 & \text{pro } m \neq n. \end{cases}$

☐ $(f_m, f_n) = \begin{cases} 1 & \text{pro } m < n, \\ 0 & \text{pro } m > n. \end{cases}$

☐ $(f_m, f_n) = \begin{cases} 1 & \text{pro } m > n, \\ 0 & \text{pro } m < n. \end{cases}$

Konec testu | | Oprava

Zacatek testu

1. Soustava funkcí $1, \cos(\pi x), \cos(2\pi x), ..., \cos(n\pi x)$ na intervalu $(0, 1)$

- [ ] je ortogonální.
- [ ] není ortogonální.

2. Soustava funkcí
$\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos x, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos 2x, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos 3x, ..., \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nx$ na intervalu $[0, \pi]$

- [ ] je ortonormální.
- [ ] není ortonormální.

Konec testu | | Oprava

Zacatek testu

1. Posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ z $L_2(a,b)$ konverguje na množině M k funkci f stejnoměrně, jestliže pro každé $\epsilon > 0$ existuje n_0 takové, že

- ☐ pro každé $n > n_0$ a každé $z \in M$ je $(f_n(z) - f(z)) < \epsilon$.
- ☐ pro každé $n < n_0$ a každé $z \in M$ je $(f_n(z) - f(z)) > \epsilon$.
- ☐ pro každé $n > n_0$ a každé $z \in M$ je $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$.
- ☐ pro každé $n < n_0$ a každé $z \in M$ je $|f_n(z) - f(z)| > \epsilon$.

2. Posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ z $L_2(a,b)$ konverguje k funkci f v normě $L_2(a,b)$, existuje-li funkce f z $L_2(a,b)$ taková, že

- ☐ $\lim_{n\to\infty} |f_n - f| = 0$
- ☐ $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$
- ☐ $\lim_{n\to 0} |f_n - f| = 0$
- ☐ $\lim_{n\to 0} \|f_n - f\| = 0$

Konec testu | | Oprava

Zacatek testu

1. Fourierova řada funkce $f(x) = \dfrac{1}{\log|x|}$ na intervalu $(-\pi, \pi)$

- ☐ konverguje absolutně.
- ☐ konverguje stejnoměrně.
- ☐ diverguje.

2. Fourierova řada funkce $f(x) = \sqrt{|x|^3}$ na intervalu $(-\pi, \pi)$

- ☐ konverguje absolutně.
- ☐ konverguje stejnoměrně.
- ☐ diverguje.

Konec testu

Oprava

Zacatek testu

1. Vyberte správný tvar Besselovy nerovnosti.

☐ $\sum_{n=0}^{k} a_n \leq \int_a^b \sqrt{f(t)}\,\mathrm{d}\,t$
☐ $\sum_{n=0}^{k} a_n^2 \leq \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t$
☐ $\sum_{n=0}^{k} a_n^2 \leq \int_a^b [f(t)]^2\,\mathrm{d}\,t$
☐ $\sum_{n=0}^{k} a_n^3 \leq \int_a^b [f(t)]^3\,\mathrm{d}\,t$

2. Vyberte správný tvar Parsevalovy rovnice.

☐ $\int_a^b \sqrt{f(t)}\,\mathrm{d}\,t = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$
☐ $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t = \sum_{k=0}^{\infty} 2(a_k)^2$
☐ $\int_a^b [f(t)]^2\,\mathrm{d}\,t = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k)^2$
☐ $\int_a^b [f(t)]^3\,\mathrm{d}\,t = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k)^3$

Konec testu | Oprava

Zacatek testu

1. Mějme posloupnost spojitých a nenulových funkcí $\varphi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ na intervalu $[a, b]$ takových, že každý konečný úsek $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_k(t)$ představuje $k+1$ lineárně nezávislých funkcí. Pak podle Schmidtovy věty lze z této posloupnosti vyrobit posloupnost funkcí $\{\psi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ spojitých na intervalu $[a, b]$. Kterou z nabízených vlastností tato posloupnost nebude mít?

- ☐ Každý její konečný úsek $\psi_0(t), \psi_1(t), \ldots, \psi_{k-1}(t)$ představuje k lineárně závislých funkcí.
- ☐ Posloupnost $\{\psi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ tvoří ortonormovanou soustavu.
- ☐ Každá funkce $\psi_k(t)$ je lineární kombinací funkcí $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \ldots, \varphi_{k-1}(t)$.
- ☐ Žádná z nabízených možností není správná.

Konec testu | Oprava