

# Funkce komplexní proměnné a integrální transformace

## Fourierovy řady I.

Marek Lampart

Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století* (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

# Fourierovy řady

# Fourierovy řady

Funkce  $f(t)$  reálné proměnné  $t$ , pro kterou existuje  $T \in \mathbb{R}$  kladné takové, že pro každé  $t$  z definičního oboru platí

$$f(t + T) = f(t). \quad (1)$$

se nazývá *periodická funkce*.

# Fourierovy řady

Funkce  $f(t)$  reálné proměnné  $t$ , pro kterou existuje  $T \in \mathbb{R}$  kladné takové, že pro každé  $t$  z definičního oboru platí

$$f(t + T) = f(t). \quad (1)$$

se nazývá *periodická funkce*.

Nejmenší  $T$ , pro něž platí rovnice (1), se nazývá *perioda*.

# Fourierovy řady

Funkce  $f(t)$  reálné proměnné  $t$ , pro kterou existuje  $T \in \mathbb{R}$  kladné takové, že pro každé  $t$  z definičního oboru platí

$$f(t + T) = f(t). \quad (1)$$

se nazývá *periodická funkce*.

Nejmenší  $T$ , pro něž platí rovnice (1), se nazývá *perioda*.

Tedy funkce  $f$  je *periodická s periodou  $T$* .

# Fourierovy řady

Funkce  $f(t)$  reálné proměnné  $t$ , pro kterou existuje  $T \in \mathbb{R}$  kladné takové, že pro každé  $t$  z definičního oboru platí

$$f(t + T) = f(t). \quad (1)$$

se nazývá *periodická funkce*.

Nejmenší  $T$ , pro něž platí rovnice (1), se nazývá *perioda*.

Tedy funkce  $f$  je *periodická s periodou  $T$* .

Pro libovolné  $\alpha \in \mathbb{R}$  nazveme interval  $(\alpha, \alpha + T]$  *základním intervalem periodicity*.

# Fourierovy řady

Funkce  $f(t)$  reálné proměnné  $t$ , pro kterou existuje  $T \in \mathbb{R}$  kladné takové, že pro každé  $t$  z definičního oboru platí

$$f(t + T) = f(t). \quad (1)$$

se nazývá *periodická funkce*.

Nejmenší  $T$ , pro něž platí rovnice (1), se nazývá *perioda*.

Tedy funkce  $f$  je *periodická s periodou  $T$* .

Pro libovolné  $\alpha \in \mathbb{R}$  nazveme interval  $(\alpha, \alpha + T]$  *základním intervalem periodicity*.

Naším úkolem bude najít polynom  $T_n(t)$ , který nejlépe aproximuje danou funkci na daném intervalu v dané normě vzhledem k zadanému ortogonálnímu systému báзовých funkcí.

# Fourierovy řady

Funkce  $f(t)$  reálné proměnné  $t$ , pro kterou existuje  $T \in \mathbb{R}$  kladné takové, že pro každé  $t$  z definičního oboru platí

$$f(t + T) = f(t). \quad (1)$$

se nazývá *periodická funkce*.

Nejmenší  $T$ , pro něž platí rovnice (1), se nazývá *perioda*.

Tedy funkce  $f$  je *periodická s periodou  $T$* .

Pro libovolné  $\alpha \in \mathbb{R}$  nazveme interval  $(\alpha, \alpha + T]$  *základním intervalem periodicity*.

Naším úkolem bude najít polynom  $T_n(t)$ , který nejlépe aproximuje danou funkci na daném intervalu v dané normě vzhledem k zadanému ortogonálnímu systému báзовých funkcí.

Budeme přitom danou funkci rozvíjet ve *Fourierovu řadu*.



# Fourierovy řady

Funkce  $f(t)$  reálné proměnné  $t$ , pro kterou existuje  $T \in \mathbb{R}$  kladné takové, že pro každé  $t$  z definičního oboru platí

$$f(t + T) = f(t). \quad (1)$$

se nazývá *periodická funkce*.

Nejmenší  $T$ , pro něž platí rovnice (1), se nazývá *perioda*.

Tedy funkce  $f$  je *periodická s periodou  $T$* .

Pro libovolné  $\alpha \in \mathbb{R}$  nazveme interval  $(\alpha, \alpha + T]$  *základním intervalem periodicity*.

Naším úkolem bude najít polynom  $T_n(t)$ , který nejlépe aproximuje danou funkci na daném intervalu v dané normě vzhledem k zadanému ortogonálnímu systému báзовých funkcí.

Budeme přitom danou funkci rozvíjet ve *Fourierovu řadu*.

Takový proces se nazývá *harmonická analýza*.

# Fourierovy řady

# Fourierovy řady

## Lema 1

# Fourierovy řady

## Lema 1

*Každou periodickou funkci  $f(t)$  s periodou  $T$  je možno transformovat na funkci s periodou  $2\pi$ .*

# Fourierovy řady

## Lema 1

*Každou periodickou funkci  $f(t)$  s periodou  $T$  je možno transformovat na funkci s periodou  $2\pi$ .*

Jako elementární příklad nám poslouží *jednoduchý harmonický kmit* daný obecnou sinovou funkcí

# Fourierovy řady

## Lema 1

*Každou periodickou funkci  $f(t)$  s periodou  $T$  je možno transformovat na funkci s periodou  $2\pi$ .*

Jako elementární příklad nám poslouží *jednoduchý harmonický kmit* daný obecnou sinovou funkcí

$$f(t) = A \sin(\omega t + \varphi). \quad (2)$$

# Fourierovy řady

## Lema 1

*Každou periodickou funkci  $f(t)$  s periodou  $T$  je možno transformovat na funkci s periodou  $2\pi$ .*

Jako elementární příklad nám poslouží *jednoduchý harmonický kmit* daný obecnou sinovou funkcí

$$f(t) = A \sin(\omega t + \varphi). \quad (2)$$

Zde

# Fourierovy řady

## Lema 1

*Každou periodickou funkci  $f(t)$  s periodou  $T$  je možno transformovat na funkci s periodou  $2\pi$ .*

Jako elementární příklad nám poslouží *jednoduchý harmonický kmit* daný obecnou sinovou funkcí

$$f(t) = A \sin(\omega t + \varphi). \quad (2)$$

Zde

- ▶ nezávislou proměnnou  $t$  interpretujeme jako čas,



# Fourierovy řady

## Lema 1

*Každou periodickou funkci  $f(t)$  s periodou  $T$  je možno transformovat na funkci s periodou  $2\pi$ .*

Jako elementární příklad nám poslouží *jednoduchý harmonický kmit* daný obecnou sinovou funkcí

$$f(t) = A \sin(\omega t + \varphi). \quad (2)$$

Zde

- ▶ nezávislou proměnnou  $t$  interpretujeme jako čas,
- ▶  $A$  je *amplituda* udávající výchylku z rovnovážné polohy,

# Fourierovy řady

## Lema 1

*Každou periodickou funkci  $f(t)$  s periodou  $T$  je možno transformovat na funkci s periodou  $2\pi$ .*

Jako elementární příklad nám poslouží *jednoduchý harmonický kmit* daný obecnou sinovou funkcí

$$f(t) = A \sin(\omega t + \varphi). \quad (2)$$

Zde

- ▶ nezávislou proměnnou  $t$  interpretujeme jako čas,
- ▶  $A$  je *amplituda* udávající výchylku z rovnovážné polohy,
- ▶ celý argument  $\omega t + \varphi$  nazýváme *fáze kmitu*,

# Fourierovy řady

## Lema 1

*Každou periodickou funkci  $f(t)$  s periodou  $T$  je možno transformovat na funkci s periodou  $2\pi$ .*

Jako elementární příklad nám poslouží *jednoduchý harmonický kmit* daný obecnou sinovou funkcí

$$f(t) = A \sin(\omega t + \varphi). \quad (2)$$

Zde

- ▶ nezávislou proměnnou  $t$  interpretujeme jako čas,
- ▶  $A$  je *amplituda* udávající výchylku z rovnovážné polohy,
- ▶ celý argument  $\omega t + \varphi$  nazýváme *fáze kmitu*,
- ▶ pro  $t = 0$  dostáváme *počáteční fázi*,

# Fourierovy řady

## Lema 1

*Každou periodickou funkci  $f(t)$  s periodou  $T$  je možno transformovat na funkci s periodou  $2\pi$ .*

Jako elementární příklad nám poslouží *jednoduchý harmonický kmit* daný obecnou sinovou funkcí

$$f(t) = A \sin(\omega t + \varphi). \quad (2)$$

Zde

- ▶ nezávislou proměnnou  $t$  interpretujeme jako čas,
- ▶  $A$  je *amplituda* udávající výchylku z rovnovážné polohy,
- ▶ celý argument  $\omega t + \varphi$  nazýváme *fáze kmitu*,
- ▶ pro  $t = 0$  dostáváme *počáteční fázi*,
- ▶ konstantu  $\omega$ , udávající počet kmitů za  $2\pi$  vteřin, nazýváme *kruhovou frekvencí (úhlovou rychlostí)*.

# Fourierovy řady

## Lema 1

*Každou periodickou funkci  $f(t)$  s periodou  $T$  je možno transformovat na funkci s periodou  $2\pi$ .*

Jako elementární příklad nám poslouží *jednoduchý harmonický kmit* daný obecnou sinovou funkcí

$$f(t) = A \sin(\omega t + \varphi). \quad (2)$$

Zde

- ▶ nezávislou proměnnou  $t$  interpretujeme jako čas,
- ▶  $A$  je *amplituda* udávající výchylku z rovnovážné polohy,
- ▶ celý argument  $\omega t + \varphi$  nazýváme *fáze kmitu*,
- ▶ pro  $t = 0$  dostáváme *počáteční fázi*,
- ▶ konstantu  $\omega$ , udávající počet kmitů za  $2\pi$  vteřin, nazýváme *kruhovou frekvencí (úhlovou rychlostí)*.

Doba jednoho kmitu, perioda, se označuje  $T$ .

# Fourierovy řady

## Lema 1

*Každou periodickou funkci  $f(t)$  s periodou  $T$  je možno transformovat na funkci s periodou  $2\pi$ .*

Jako elementární příklad nám poslouží *jednoduchý harmonický kmit* daný obecnou sinovou funkcí

$$f(t) = A \sin(\omega t + \varphi). \quad (2)$$

Zde

- ▶ nezávislou proměnnou  $t$  interpretujeme jako čas,
- ▶  $A$  je *amplituda* udávající výchylku z rovnovážné polohy,
- ▶ celý argument  $\omega t + \varphi$  nazýváme *fáze kmitu*,
- ▶ pro  $t = 0$  dostáváme *počáteční fázi*,
- ▶ konstantu  $\omega$ , udávající počet kmitů za  $2\pi$  vteřin, nazýváme *kruhovou frekvencí (úhlovou rychlostí)*.

Doba jednoho kmitu, perioda, se označuje  $T$ .

V našem příkladě je  $T = 2\pi/\omega$ .

# Fourierovy řady

# Fourierovy řady

Periodická funkce vyjadřující složené harmonické kmitání je popsána nekonečnou řadou s členy



# Fourierovy řady

Periodická funkce vyjadřující složené harmonické kmitání je popsána nekonečnou řadou s členy

$$u_n = A_n \sin(n\omega t + \varphi_n). \quad (3)$$

# Fourierovy řady

Periodická funkce vyjadřující složené harmonické kmitání je popsána nekonečnou řadou s členy

$$u_n = A_n \sin(n\omega t + \varphi_n). \quad (3)$$

Tyto lze ekvivalentně zapsat ve tvaru

# Fourierovy řady

Periodická funkce vyjadřující složené harmonické kmitání je popsána nekonečnou řadou s členy

$$u_n = A_n \sin(n\omega t + \varphi_n). \quad (3)$$

Tyto lze ekvivalentně zapsat ve tvaru

$$u_n = a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t). \quad (4)$$

# Fourierovy řady

Periodická funkce vyjadřující složené harmonické kmitání je popsána nekonečnou řadou s členy

$$u_n = A_n \sin(n\omega t + \varphi_n). \quad (3)$$

Tyto lze ekvivalentně zapsat ve tvaru

$$u_n = a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t). \quad (4)$$

Zde pro jednoduchost klademe

# Fourierovy řady

Periodická funkce vyjadřující složené harmonické kmitání je popsána nekonečnou řadou s členy

$$u_n = A_n \sin(n\omega t + \varphi_n). \quad (3)$$

Tyto lze ekvivalentně zapsat ve tvaru

$$u_n = a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t). \quad (4)$$

Zde pro jednoduchost klademe

$$u_0 = \frac{a_0}{2}. \quad (5)$$

# Fourierovy řady

Periodická funkce vyjadřující složené harmonické kmitání je popsána nekonečnou řadou s členy

$$u_n = A_n \sin(n\omega t + \varphi_n). \quad (3)$$

Tyto lze ekvivalentně zapsat ve tvaru

$$u_n = a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t). \quad (4)$$

Zde pro jednoduchost klademe

$$u_0 = \frac{a_0}{2}. \quad (5)$$

Řadu

# Fourierovy řady

Periodická funkce vyjadřující složené harmonické kmitání je popsána nekonečnou řadou s členy

$$u_n = A_n \sin(n\omega t + \varphi_n). \quad (3)$$

Tyto lze ekvivalentně zapsat ve tvaru

$$u_n = a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t). \quad (4)$$

Zde pro jednoduchost klademe

$$u_0 = \frac{a_0}{2}. \quad (5)$$

Řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \quad (6)$$

# Fourierovy řady

Periodická funkce vyjadřující složené harmonické kmitání je popsána nekonečnou řadou s členy

$$u_n = A_n \sin(n\omega t + \varphi_n). \quad (3)$$

Tyto lze ekvivalentně zapsat ve tvaru

$$u_n = a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t). \quad (4)$$

Zde pro jednoduchost klademe

$$u_0 = \frac{a_0}{2}. \quad (5)$$

Řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \quad (6)$$

nazýváme *trigonometrickou řadou*.



# Fourierovy řady

Periodická funkce vyjadřující složené harmonické kmitání je popsána nekonečnou řadou s členy

$$u_n = A_n \sin(n\omega t + \varphi_n). \quad (3)$$

Tyto lze ekvivalentně zapsat ve tvaru

$$u_n = a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t). \quad (4)$$

Zde pro jednoduchost klademe

$$u_0 = \frac{a_0}{2}. \quad (5)$$

Řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \quad (6)$$

nazýváme *trigonometrickou řadou*.

Pokud řada konverguje, tak konverguje k funkci s periodou  $T = 2\pi/\omega$ , tj. s periodou členu s indexem 1.

# Fourierovy řady

Periodická funkce vyjadřující složené harmonické kmitání je popsána nekonečnou řadou s členy

$$u_n = A_n \sin(n\omega t + \varphi_n). \quad (3)$$

Tyto lze ekvivalentně zapsat ve tvaru

$$u_n = a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t). \quad (4)$$

Zde pro jednoduchost klademe

$$u_0 = \frac{a_0}{2}. \quad (5)$$

Řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \quad (6)$$

nazýváme *trigonometrickou řadou*.

Pokud řada konverguje, tak konverguje k funkci s periodou  $T = 2\pi/\omega$ , tj. s periodou členu s indexem 1.

Koeficienty  $a_n$  a  $b_n$  se nazývají *Fourierovy koeficienty funkce  $f(t)$* .

# Fourierova řada

# Fourierova řada

Je-li trigonometrická řada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) \quad (7)$$

stejněměrně konvergentní v  $\mathbb{R}$ ,

# Fourierova řada

Je-li trigonometrická řada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) \quad (7)$$

stejněměrně konvergentní v  $\mathbb{R}$ , dává součet, který je spojitou periodickou funkcí  $f(t)$  s periodou prvního členu řady, tj.  $T = 2\pi$ .

# Fourierova řada

Je-li trigonometrická řada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) \quad (7)$$

stejněměrně konvergentní v  $\mathbb{R}$ , dává součet, který je spojitou periodickou funkcí  $f(t)$  s periodou prvního členu řady, tj.  $T = 2\pi$ . Platí tedy

# Fourierova řada

Je-li trigonometrická řada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) \quad (7)$$

stejněměrně konvergentní v  $\mathbb{R}$ , dává součet, který je spojitou periodickou funkcí  $f(t)$  s periodou prvního členu řady, tj.  $T = 2\pi$ . Platí tedy

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)). \quad (8)$$

# Fourierova řada



# Fourierova řada

Koeficient  $a_0$  určíme integrací rovnice (8) v mezích od  $-\pi$  do  $\pi$ .

# Fourierova řada

Koeficient  $a_0$  určíme integrací rovnice (8) v mezích od  $-\pi$  do  $\pi$ .

Tedy

# Fourierova řada

Koeficient  $a_0$  určíme integrací rovnice (8) v mezích od  $-\pi$  do  $\pi$ .

Tedy

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt =$$

# Fourierova řada

Koeficient  $a_0$  určíme integrací rovnice (8) v mezích od  $-\pi$  do  $\pi$ .

Tedy

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) \right) dt$$

# Fourierova řada

Koeficient  $a_0$  určíme integrací rovnice (8) v mezích od  $-\pi$  do  $\pi$ .

Tedy

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) \right) dt = \pi a_0,$$

# Fourierova řada

Koeficient  $a_0$  určíme integrací rovnice (8) v mezích od  $-\pi$  do  $\pi$ .

Tedy

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) \right) dt = \pi a_0,$$

$$a_0 =$$

# Fourierova řada

Koeficient  $a_0$  určíme integrací rovnice (8) v mezích od  $-\pi$  do  $\pi$ .

Tedy

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) \right) dt = \pi a_0,$$
$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt. \quad (9)$$

# Fourierova řada

Koeficient  $a_0$  určíme integrací rovnice (8) v mezích od  $-\pi$  do  $\pi$ .

Tedy

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) \right) dt = \pi a_0,$$
$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt. \quad (9)$$

Koeficienty  $a_n$  určíme tak, že rovnici (8) přenásobíme funkcí  $\cos(nt)$  a opět integrujeme ve stejných mezích.



# Fourierova řada

Koeficient  $a_0$  určíme integrací rovnice (8) v mezích od  $-\pi$  do  $\pi$ .

Tedy

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) \right) dt = \pi a_0,$$
$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt. \quad (9)$$

Koeficienty  $a_n$  určíme tak, že rovnici (8) přenásobíme funkcí  $\cos(nt)$  a opět integrujeme ve stejných mezích.

Pak dostáváme

# Fourierova řada

Koeficient  $a_0$  určíme integrací rovnice (8) v mezích od  $-\pi$  do  $\pi$ .

Tedy

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) \right) dt = \pi a_0,$$
$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt. \quad (9)$$

Koeficienty  $a_n$  určíme tak, že rovnici (8) přenásobíme funkcí  $\cos(nt)$  a opět integrujeme ve stejných mezích.

Pak dostáváme

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) \, dt =$$

# Fourierova řada

Koeficient  $a_0$  určíme integrací rovnice (8) v mezích od  $-\pi$  do  $\pi$ .

Tedy

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) \right) dt = \pi a_0,$$
$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt. \quad (9)$$

Koeficienty  $a_n$  určíme tak, že rovnici (8) přenásobíme funkcí  $\cos(nt)$  a opět integrujeme ve stejných mezích.

Pak dostáváme

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) \, dt = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nt) \, dt$$

# Fourierova řada

Koeficient  $a_0$  určíme integrací rovnice (8) v mezích od  $-\pi$  do  $\pi$ .

Tedy

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) \right) dt = \pi a_0,$$
$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt. \quad (9)$$

Koeficienty  $a_n$  určíme tak, že rovnici (8) přenásobíme funkcí  $\cos(nt)$  a opět integrujeme ve stejných mezích.

Pak dostáváme

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) \, dt = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nt) \, dt = a_n \pi,$$

# Fourierova řada

Koeficient  $a_0$  určíme integrací rovnice (8) v mezích od  $-\pi$  do  $\pi$ .

Tedy

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) \right) dt = \pi a_0,$$
$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt. \quad (9)$$

Koeficienty  $a_n$  určíme tak, že rovnici (8) přenásobíme funkcí  $\cos(nt)$  a opět integrujeme ve stejných mezích.

Pak dostáváme

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) \, dt = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nt) \, dt = a_n \pi,$$

$$a_n =$$

# Fourierova řada

Koeficient  $a_0$  určíme integrací rovnice (8) v mezích od  $-\pi$  do  $\pi$ .

Tedy

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) \right) dt = \pi a_0,$$
$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt. \quad (9)$$

Koeficienty  $a_n$  určíme tak, že rovnici (8) přenásobíme funkcí  $\cos(nt)$  a opět integrujeme ve stejných mezích.

Pak dostáváme

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) \, dt = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nt) \, dt = a_n \pi,$$
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) \, dt. \quad (10)$$

# Fourierova řada

# Fourierova řada

Koeficienty  $b_n$  určíme analogicky jako  $a_n$ :



# Fourierova řada

Koeficienty  $b_n$  určíme analogicky jako  $a_n$ :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) \, dt =$$

# Fourierova řada

Koeficienty  $b_n$  určíme analogicky jako  $a_n$ :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) \, dt = b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nt) \, dt$$

# Fourierova řada

Koeficienty  $b_n$  určíme analogicky jako  $a_n$ :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) \, dt = b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nt) \, dt = b_n \pi,$$

# Fourierova řada

Koeficienty  $b_n$  určíme analogicky jako  $a_n$ :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) \, dt = b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nt) \, dt = b_n \pi,$$

$$b_n =$$

# Fourierova řada

Koeficienty  $b_n$  určíme analogicky jako  $a_n$ :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) \, dt = b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nt) \, dt = b_n \pi,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) \, dt. \quad (11)$$

# Fourierova řada

Koeficienty  $b_n$  určíme analogicky jako  $a_n$ :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) \, dt = b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nt) \, dt = b_n \pi,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) \, dt. \quad (11)$$

Vzorce pro výpočet koeficientů se nazývají *(Eulerovy)-Fourierovy*.

# Fourierova řada

Koeficienty  $b_n$  určíme analogicky jako  $a_n$ :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) \, dt = b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nt) \, dt = b_n \pi,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) \, dt. \quad (11)$$

Vzorce pro výpočet koeficientů se nazývají *(Eulerovy)-Fourierovy*.  
Daná trigonometrická řada se nazývá *Fourierova řada funkce  $f(t)$* .

# Fourierova řada

Koeficienty  $b_n$  určíme analogicky jako  $a_n$ :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) \, dt = b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nt) \, dt = b_n \pi,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) \, dt. \quad (11)$$

Vzorce pro výpočet koeficientů se nazývají *(Eulerovy)-Fourierovy*.  
Daná trigonometrická řada se nazývá *Fourierova řada funkce  $f(t)$* .  
Koeficienty  $a_n$  a  $b_n$  *Fourierovy koeficienty funkce  $f(t)$* .



# Fourierova řada

# Fourierova řada

## Věta 1 (Dirichlet)

# Fourierova řada

## Věta 1 (Dirichlet)

*Vyhovuje-li funkce  $f(t)$  tzv. Dirichletovým podmínkám, pak daná Fourierova řada funkce  $f(t)$  konverguje v každém  $t$  k hodnotě*

# Fourierova řada

## Věta 1 (Dirichlet)

*Vyhovuje-li funkce  $f(t)$  tzv. Dirichletovým podmínkám, pak daná Fourierova řada funkce  $f(t)$  konverguje v každém  $t$  k hodnotě*

$$\frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0))$$

# Fourierova řada

## Věta 1 (Dirichlet)

*Vyhovuje-li funkce  $f(t)$  tzv. Dirichletovým podmínkám, pak daná Fourierova řada funkce  $f(t)$  konverguje v každém  $t$  k hodnotě*

$$\frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0))$$

*a platí*

# Fourierova řada

## Věta 1 (Dirichlet)

*Vyhovuje-li funkce  $f(t)$  tzv. Dirichletovým podmínkám, pak daná Fourierova řada funkce  $f(t)$  konverguje v každém  $t$  k hodnotě*

$$\frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0))$$

*a platí*

$$\frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt).$$

# Fourierova řada

## Věta 1 (Dirichlet)

*Vyhovuje-li funkce  $f(t)$  tzv. Dirichletovým podmínkám, pak daná Fourierova řada funkce  $f(t)$  konverguje v každém  $t$  k hodnotě*

$$\frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0))$$

*a platí*

$$\frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt).$$

*Navíc v bodech  $t$ , kde je  $f(t)$  spojitá, je*

# Fourierova řada

## Věta 1 (Dirichlet)

*Vyhovuje-li funkce  $f(t)$  tzv. Dirichletovým podmínkám, pak daná Fourierova řada funkce  $f(t)$  konverguje v každém  $t$  k hodnotě*

$$\frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0))$$

*a platí*

$$\frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt).$$

*Navíc v bodech  $t$ , kde je  $f(t)$  spojitá, je*

$$\frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0)) = f(t).$$



# Fourierova řada

## Věta 1 (Dirichlet)

*Vyhovuje-li funkce  $f(t)$  tzv. Dirichletovým podmínkám, pak daná Fourierova řada funkce  $f(t)$  konverguje v každém  $t$  k hodnotě*

$$\frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0))$$

*a platí*

$$\frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt).$$

*Navíc v bodech  $t$ , kde je  $f(t)$  spojitá, je*

$$\frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0)) = f(t).$$

V předešlé větě používáme standardní notaci

# Fourierova řada

## Věta 1 (Dirichlet)

*Vyhovuje-li funkce  $f(t)$  tzv. Dirichletovým podmínkám, pak daná Fourierova řada funkce  $f(t)$  konverguje v každém  $t$  k hodnotě*

$$\frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0))$$

*a platí*

$$\frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt).$$

*Navíc v bodech  $t$ , kde je  $f(t)$  spojitá, je*

$$\frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0)) = f(t).$$

V předešlé větě používáme standardní notaci

$$f(t+0) = \lim_{t_1 \rightarrow t^+} f(t_1)$$

# Fourierova řada

## Věta 1 (Dirichlet)

*Vyhovuje-li funkce  $f(t)$  tzv. Dirichletovým podmínkám, pak daná Fourierova řada funkce  $f(t)$  konverguje v každém  $t$  k hodnotě*

$$\frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0))$$

*a platí*

$$\frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt).$$

*Navíc v bodech  $t$ , kde je  $f(t)$  spojitá, je*

$$\frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0)) = f(t).$$

V předešlé větě používáme standardní notaci

$$f(t+0) = \lim_{t_1 \rightarrow t^+} f(t_1) \text{ a } f(t-0) = \lim_{t_1 \rightarrow t^-} f(t_1).$$

# Fourierova řada

# Fourierova řada

*Dirichletovy podmínky* jsou následující:

# Fourierova řada

*Dirichletovy podmínky* jsou následující:

1. funkce  $f(t)$  je periodická,

# Fourierova řada

*Dirichletovy podmínky* jsou následující:

1. funkce  $f(t)$  je periodická,
2. funkce  $f(t)$  má v intervalu periodicity jen konečný počet nespojitostí 1. druhu,

# Fourierova řada

*Dirichletovy podmínky* jsou následující:

1. funkce  $f(t)$  je periodická,
2. funkce  $f(t)$  má v intervalu periodicity jen konečný počet nespojitostí 1. druhu,
3. funkce  $f(t)$  má v intervalu periodicity po částech spojitou derivaci.



# Fourierova řada

*Dirichletovy podmínky* jsou následující:

1. funkce  $f(t)$  je periodická,
2. funkce  $f(t)$  má v intervalu periodicity jen konečný počet nespojitostí 1. druhu,
3. funkce  $f(t)$  má v intervalu periodicity po částech spojitou derivaci.

## Poznámka 1

# Fourierova řada

*Dirichletovy podmínky* jsou následující:

1. funkce  $f(t)$  je periodická,
2. funkce  $f(t)$  má v intervalu periodicity jen konečný počet nespojitostí 1. druhu,
3. funkce  $f(t)$  má v intervalu periodicity po částech spojitou derivaci.

## Poznámka 1

*Výše uvedené podmínky se často uvádějí v ekvivalentním tvaru:*

# Fourierova řada

*Dirichletovy podmínky* jsou následující:

1. funkce  $f(t)$  je periodická,
2. funkce  $f(t)$  má v intervalu periodicity jen konečný počet nespojitostí 1. druhu,
3. funkce  $f(t)$  má v intervalu periodicity po částech spojitou derivaci.

## Poznámka 1

*Výše uvedené podmínky se často uvádějí v ekvivalentním tvaru:*

1. *na intervalu periodicity je funkce  $f(t)$  alespoň po částech spojitá, tj. má pouze konečný počet bodů nespojitosti 1. druhu,*

# Fourierova řada

*Dirichletovy podmínky* jsou následující:

1. funkce  $f(t)$  je periodická,
2. funkce  $f(t)$  má v intervalu periodicity jen konečný počet nespojitostí 1. druhu,
3. funkce  $f(t)$  má v intervalu periodicity po částech spojitou derivaci.

## Poznámka 1

*Výše uvedené podmínky se často uvádějí v ekvivalentním tvaru:*

1. *na intervalu periodicity je funkce  $f(t)$  alespoň po částech spojitá, tj. má pouze konečný počet bodů nespojitosti 1. druhu,*
2. *na intervalu periodicity má funkce  $f(t)$  konečný počet extrémů (konstantní části funkce  $f(t)$  se neuvažují),*

# Fourierova řada

*Dirichletovy podmínky* jsou následující:

1. funkce  $f(t)$  je periodická,
2. funkce  $f(t)$  má v intervalu periodicity jen konečný počet nespojitostí 1. druhu,
3. funkce  $f(t)$  má v intervalu periodicity po částech spojitou derivaci.

## Poznámka 1

*Výše uvedené podmínky se často uvádějí v ekvivalentním tvaru:*

1. *na intervalu periodicity je funkce  $f(t)$  alespoň po částech spojitá, tj. má pouze konečný počet bodů nespojitosti 1. druhu,*
2. *na intervalu periodicity má funkce  $f(t)$  konečný počet extrémů (konstantní části funkce  $f(t)$  se neuvažují),*
3. *funkce  $f(t)$  je definovaná v krajních bodech intervalu periodicity (tj. nabývá v nich konečných hodnot) nebo existují příslušné jednostranné limity funkce v těchto bodech.*

# Fourierova řada

# Fourierova řada

## Příklad 1

# Fourierova řada

## Příklad 1

*Následující funkce nesplňují na intervalu  $[-\pi, \pi]$  Dirichletovy podmínky:*



# Fourierova řada

## Příklad 1

*Následující funkce nesplňují na intervalu  $[-\pi, \pi]$  Dirichletovy podmínky:*

$$f_1(t) = \frac{2}{1-t},$$

# Fourierova řada

## Příklad 1

*Následující funkce nesplňují na intervalu  $[-\pi, \pi]$  Dirichletovy podmínky:*

$$f_1(t) = \frac{2}{1-t}, \quad f_2(t) = \sin\left(\frac{2}{2-t}\right).$$

# Fourierova řada

## Příklad 1

*Následující funkce nesplňují na intervalu  $[-\pi, \pi]$  Dirichletovy podmínky:*

$$f_1(t) = \frac{2}{1-t}, \quad f_2(t) = \sin\left(\frac{2}{2-t}\right).$$

*Skutečně,  $f_1(t)$  má v bodě  $t_0 = 1$  bod nespojitosti 2. druhu.*

# Fourierova řada

## Příklad 1

*Následující funkce nesplňují na intervalu  $[-\pi, \pi]$  Dirichletovy podmínky:*

$$f_1(t) = \frac{2}{1-t}, \quad f_2(t) = \sin\left(\frac{2}{2-t}\right).$$

*Skutečně,  $f_1(t)$  má v bodě  $t_0 = 1$  bod nespojitosti 2. druhu.  
Funkce  $f_2(t)$  má v okolí bodu  $t_0 = 2$  nekonečně mnoho extrémů.*

# Fourierova řada

# Fourierova řada

Výše uvedené vztahy lze zobecnit pro funkce s periodou  $T = 2l$ , tedy pro funkce s intervalem periodicity  $[-l, l]$ .

# Fourierova řada

Výše uvedené vztahy lze zobecnit pro funkce s periodou  $T = 2l$ , tedy pro funkce s intervalem periodicity  $[-l, l]$ .

Pomocí Lematu 1 provedeme transformaci  $t = \frac{\pi}{l}t$  a dostaneme pro  $n \in \mathbb{N}$  vzorce:

# Fourierova řada

Výše uvedené vztahy lze zobecnit pro funkce s periodou  $T = 2l$ , tedy pro funkce s intervalem periodicity  $[-l, l]$ .

Pomocí Lematu 1 provedeme transformaci  $t = \frac{\pi}{l}t$  a dostaneme pro  $n \in \mathbb{N}$  vzorce:

$$a_0 =$$



# Fourierova řada

Výše uvedené vztahy lze zobecnit pro funkce s periodou  $T = 2l$ , tedy pro funkce s intervalem periodicity  $[-l, l]$ .

Pomocí Lematu 1 provedeme transformaci  $t = \frac{\pi}{l}t$  a dostaneme pro  $n \in \mathbb{N}$  vzorce:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \, dt, \quad (12)$$

# Fourierova řada

Výše uvedené vztahy lze zobecnit pro funkce s periodou  $T = 2l$ , tedy pro funkce s intervalem periodicity  $[-l, l]$ .

Pomocí Lematu 1 provedeme transformaci  $t = \frac{\pi}{l}t$  a dostaneme pro  $n \in \mathbb{N}$  vzorce:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \, dt, \quad (12)$$

$$a_n =$$

# Fourierova řada

Výše uvedené vztahy lze zobecnit pro funkce s periodou  $T = 2l$ , tedy pro funkce s intervalem periodicity  $[-l, l]$ .

Pomocí Lematu 1 provedeme transformaci  $t = \frac{\pi}{l}t$  a dostaneme pro  $n \in \mathbb{N}$  vzorce:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \, dt, \quad (12)$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos(n \frac{\pi}{l} t) \, dt, \quad (13)$$

# Fourierova řada

Výše uvedené vztahy lze zobecnit pro funkce s periodou  $T = 2l$ , tedy pro funkce s intervalem periodicity  $[-l, l]$ .

Pomocí Lematu 1 provedeme transformaci  $t = \frac{\pi}{l}t$  a dostaneme pro  $n \in \mathbb{N}$  vzorce:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \, dt, \quad (12)$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos(n \frac{\pi}{l} t) \, dt, \quad (13)$$

$$b_n =$$

# Fourierova řada

Výše uvedené vztahy lze zobecnit pro funkce s periodou  $T = 2l$ , tedy pro funkce s intervalem periodicity  $[-l, l]$ .

Pomocí Lematu 1 provedeme transformaci  $t = \frac{\pi}{l}t$  a dostaneme pro  $n \in \mathbb{N}$  vzorce:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \, dt, \quad (12)$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos\left(n\frac{\pi}{l}t\right) \, dt, \quad (13)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin\left(n\frac{\pi}{l}t\right) \, dt \quad (14)$$

# Fourierova řada

Výše uvedené vztahy lze zobecnit pro funkce s periodou  $T = 2l$ , tedy pro funkce s intervalem periodicity  $[-l, l]$ .

Pomocí Lematu 1 provedeme transformaci  $t = \frac{\pi}{l}t$  a dostaneme pro  $n \in \mathbb{N}$  vzorce:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \, dt, \quad (12)$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos\left(n\frac{\pi}{l}t\right) \, dt, \quad (13)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin\left(n\frac{\pi}{l}t\right) \, dt \quad (14)$$

Fourierova řada má tvar

# Fourierova řada

Výše uvedené vztahy lze zobecnit pro funkce s periodou  $T = 2l$ , tedy pro funkce s intervalem periodicity  $[-l, l]$ .

Pomocí Lematu 1 provedeme transformaci  $t = \frac{\pi}{l}t$  a dostaneme pro  $n \in \mathbb{N}$  vzorce:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \, dt, \quad (12)$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos(n \frac{\pi}{l} t) \, dt, \quad (13)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin(n \frac{\pi}{l} t) \, dt \quad (14)$$

Fourierova řada má tvar

$$f(t) =$$

# Fourierova řada

Výše uvedené vztahy lze zobecnit pro funkce s periodou  $T = 2l$ , tedy pro funkce s intervalem periodicity  $[-l, l]$ .

Pomocí Lematu 1 provedeme transformaci  $t = \frac{\pi}{l}t$  a dostaneme pro  $n \in \mathbb{N}$  vztahy:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) dt, \quad (12)$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos(n\frac{\pi}{l}t) dt, \quad (13)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin(n\frac{\pi}{l}t) dt \quad (14)$$

Fourierova řada má tvar

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\frac{\pi}{l}nt) + b_n \sin(\frac{\pi}{l}nt)). \quad (15)$$



# Fourierova řada v komplexním oboru

# Fourierova řada v komplexním oboru

Fourierovy koeficienty  $a_n$  a  $b_n$  Fourierovy řady dané perodické funkce peridy  $2\pi$  mají tvar

# Fourierova řada v komplexním oboru

Fourierovy koeficienty  $a_n$  a  $b_n$  Fourierovy řady dané perodické funkce peridy  $2\pi$  mají tvar

$$f(t) =$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

Fourierovy koeficienty  $a_n$  a  $b_n$  Fourierovy řady dané periodické funkce peridy  $2\pi$  mají tvar

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)), \quad (16)$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

Fourierovy koeficienty  $a_n$  a  $b_n$  Fourierovy řady dané periodické funkce peridy  $2\pi$  mají tvar

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)), \quad (16)$$

$$a_0 =$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

Fourierovy koeficienty  $a_n$  a  $b_n$  Fourierovy řady dané periodické funkce peridy  $2\pi$  mají tvar

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)), \quad (16)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt, \quad (17)$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

Fourierovy koeficienty  $a_n$  a  $b_n$  Fourierovy řady dané periodické funkce peridy  $2\pi$  mají tvar

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)), \quad (16)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt, \quad (17)$$

$$a_n =$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

Fourierovy koeficienty  $a_n$  a  $b_n$  Fourierovy řady dané perodické funkce peridy  $2\pi$  mají tvar

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)), \quad (16)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt, \quad (17)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) \, dt, \quad (18)$$



# Fourierova řada v komplexním oboru

Fourierovy koeficienty  $a_n$  a  $b_n$  Fourierovy řady dané periodické funkce peridy  $2\pi$  mají tvar

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)), \quad (16)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt, \quad (17)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) \, dt, \quad (18)$$

$$b_n =$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

Fourierovy koeficienty  $a_n$  a  $b_n$  Fourierovy řady dané periodické funkce peridy  $2\pi$  mají tvar

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)), \quad (16)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt, \quad (17)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) \, dt, \quad (18)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) \, dt. \quad (19)$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

# Fourierova řada v komplexním oboru

Užijeme následujícího exponenciálního vyjádření:

# Fourierova řada v komplexním oboru

Užijeme následujícího exponenciálního vyjádření:

$$\cos(nt) = \frac{1}{2}(e^{int} + e^{-int}), \quad (20)$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

Užijeme následujícího exponenciálního vyjádření:

$$\cos(nt) = \frac{1}{2}(e^{int} + e^{-int}), \quad (20)$$

$$\sin(nt) = \frac{1}{2i}(e^{int} - e^{-int}) = -\frac{i}{2}(e^{int} - e^{-int}). \quad (21)$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

Užijeme následujícího exponenciálního vyjádření:

$$\cos(nt) = \frac{1}{2}(e^{int} + e^{-int}), \quad (20)$$

$$\sin(nt) = \frac{1}{2i}(e^{int} - e^{-int}) = -\frac{i}{2}(e^{int} - e^{-int}). \quad (21)$$

Po dosazení do řady (16) dostáváme

# Fourierova řada v komplexním oboru

Užijeme následujícího exponenciálního vyjádření:

$$\cos(nt) = \frac{1}{2}(e^{int} + e^{-int}), \quad (20)$$

$$\sin(nt) = \frac{1}{2i}(e^{int} - e^{-int}) = -\frac{i}{2}(e^{int} - e^{-int}). \quad (21)$$

Po dosazení do řady (16) dostáváme

$$f(t) =$$



# Fourierova řada v komplexním oboru

Užijeme následujícího exponenciálního vyjádření:

$$\cos(nt) = \frac{1}{2}(e^{int} + e^{-int}), \quad (20)$$

$$\sin(nt) = \frac{1}{2i}(e^{int} - e^{-int}) = -\frac{i}{2}(e^{int} - e^{-int}). \quad (21)$$

Po dosazení do řady (16) dostáváme

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \left( \frac{e^{int} + e^{-int}}{2} \right) - ib_n \left( \frac{e^{int} - e^{-int}}{2} \right) \right)$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

Užijeme následujícího exponenciálního vyjádření:

$$\cos(nt) = \frac{1}{2}(e^{int} + e^{-int}), \quad (20)$$

$$\sin(nt) = \frac{1}{2i}(e^{int} - e^{-int}) = -\frac{i}{2}(e^{int} - e^{-int}). \quad (21)$$

Po dosazení do řady (16) dostáváme

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \left( \frac{e^{int} + e^{-int}}{2} \right) - ib_n \left( \frac{e^{int} - e^{-int}}{2} \right) \right) \quad (22)$$

$$= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{int} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-int} \right). \quad (23)$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

# Fourierova řada v komplexním oboru

Položme nyní

# Fourierova řada v komplexním oboru

Položme nyní

$$c_0 =$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

Položme nyní

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad (24)$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

Položme nyní

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad (24)$$

$$c_n =$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

Položme nyní

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad (24)$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad (25)$$



# Fourierova řada v komplexním oboru

Položme nyní

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad (24)$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad (25)$$

$$c_{-n} =$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

Položme nyní

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad (24)$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad (25)$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n). \quad (26)$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

Položme nyní

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad (24)$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad (25)$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n). \quad (26)$$

Nyní můžeme vyjádřit pomocí Fourierových koeficientů komplexní koeficienty  $c_n$  a  $c_{-n}$  takto:

# Fourierova řada v komplexním oboru

Položme nyní

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad (24)$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad (25)$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n). \quad (26)$$

Nyní můžeme vyjádřit pomocí Fourierových koeficientů komplexní koeficienty  $c_n$  a  $c_{-n}$  takto:

$$c_n =$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

Položme nyní

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad (24)$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad (25)$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n). \quad (26)$$

Nyní můžeme vyjádřit pomocí Fourierových koeficientů komplexní koeficienty  $c_n$  a  $c_{-n}$  takto:

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

Položme nyní

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad (24)$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad (25)$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n). \quad (26)$$

Nyní můžeme vyjádřit pomocí Fourierových koeficientů komplexní koeficienty  $c_n$  a  $c_{-n}$  takto:

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos(nt) - i \sin(nt)) dt \quad (27)$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

Položme nyní

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad (24)$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad (25)$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n). \quad (26)$$

Nyní můžeme vyjádřit pomocí Fourierových koeficientů komplexní koeficienty  $c_n$  a  $c_{-n}$  takto:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos(nt) - i \sin(nt)) \, dt \quad (27) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int} \, dt, \end{aligned}$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

Položme nyní

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad (24)$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad (25)$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n). \quad (26)$$

Nyní můžeme vyjádřit pomocí Fourierových koeficientů komplexní koeficienty  $c_n$  a  $c_{-n}$  takto:

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos(nt) - i \sin(nt)) dt \quad (27)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int} dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (28)$$



# Fourierova řada v komplexním oboru

Položme nyní

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad (24)$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad (25)$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n). \quad (26)$$

Nyní můžeme vyjádřit pomocí Fourierových koeficientů komplexní koeficienty  $c_n$  a  $c_{-n}$  takto:

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos(nt) - i \sin(nt)) dt \quad (27)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int} dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (28)$$

$$c_{-n} =$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

Položme nyní

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad (24)$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad (25)$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n). \quad (26)$$

Nyní můžeme vyjádřit pomocí Fourierových koeficientů komplexní koeficienty  $c_n$  a  $c_{-n}$  takto:

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos(nt) - i \sin(nt)) dt \quad (27)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int} dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (28)$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

Položme nyní

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad (24)$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad (25)$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n). \quad (26)$$

Nyní můžeme vyjádřit pomocí Fourierových koeficientů komplexní koeficienty  $c_n$  a  $c_{-n}$  takto:

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos(nt) - i \sin(nt)) dt \quad (27)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int} dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (28)$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos(nt) + i \sin(nt)) dt \quad (29)$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

Položme nyní

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad (24)$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad (25)$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n). \quad (26)$$

Nyní můžeme vyjádřit pomocí Fourierových koeficientů komplexní koeficienty  $c_n$  a  $c_{-n}$  takto:

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos(nt) - i \sin(nt)) dt \quad (27)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int} dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (28)$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos(nt) + i \sin(nt)) dt \quad (29)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{int} dt,$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

Položme nyní

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad (24)$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad (25)$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n). \quad (26)$$

Nyní můžeme vyjádřit pomocí Fourierových koeficientů komplexní koeficienty  $c_n$  a  $c_{-n}$  takto:

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos(nt) - i \sin(nt)) dt \quad (27)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int} dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (28)$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos(nt) + i \sin(nt)) dt \quad (29)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{int} dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (30)$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

# Fourierova řada v komplexním oboru

Pro koeficient  $c_0$  dostáváme

# Fourierova řada v komplexním oboru

Pro koeficient  $c_0$  dostáváme

$$c_0 =$$



# Fourierova řada v komplexním oboru

Pro koeficient  $c_0$  dostáváme

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

Pro koeficient  $c_0$  dostáváme

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt.$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

Pro koeficient  $c_0$  dostáváme

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt.$$

Vidíme tedy, že je možné vyjádřit všechny koeficienty  $c_i$  pomocí jediného vzorce

# Fourierova řada v komplexním oboru

Pro koeficient  $c_0$  dostáváme

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt.$$

Vidíme tedy, že je možné vyjádřit všechny koeficienty  $c_i$  pomocí jediného vzorce

$$c_n =$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

Pro koeficient  $c_0$  dostáváme

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt.$$

Vidíme tedy, že je možné vyjádřit všechny koeficienty  $c_i$  pomocí jediného vzorce

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} \, dt,$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

Pro koeficient  $c_0$  dostáváme

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt.$$

Vidíme tedy, že je možné vyjádřit všechny koeficienty  $c_i$  pomocí jediného vzorce

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} \, dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (31)$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

Pro koeficient  $c_0$  dostáváme

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt.$$

Vidíme tedy, že je možné vyjádřit všechny koeficienty  $c_i$  pomocí jediného vzorce

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} \, dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (31)$$

Po dosazení koeficientů  $c_n$  do (23) dostáváme následující tvar Fourierovy řady

# Fourierova řada v komplexním oboru

Pro koeficient  $c_0$  dostáváme

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt.$$

Vidíme tedy, že je možné vyjádřit všechny koeficienty  $c_i$  pomocí jediného vzorce

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (31)$$

Po dosazení koeficientů  $c_n$  do (23) dostáváme následující tvar Fourierovy řady

$$f(t) =$$



# Fourierova řada v komplexním oboru

Pro koeficient  $c_0$  dostáváme

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt.$$

Vidíme tedy, že je možné vyjádřit všechny koeficienty  $c_i$  pomocí jediného vzorce

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (31)$$

Po dosazení koeficientů  $c_n$  do (23) dostáváme následující tvar Fourierovy řady

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int})$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

Pro koeficient  $c_0$  dostáváme

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt.$$

Vidíme tedy, že je možné vyjádřit všechny koeficienty  $c_i$  pomocí jediného vzorce

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (31)$$

Po dosazení koeficientů  $c_n$  do (23) dostáváme následující tvar Fourierovy řady

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}. \quad (32)$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

Pro koeficient  $c_0$  dostáváme

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt.$$

Vidíme tedy, že je možné vyjádřit všechny koeficienty  $c_i$  pomocí jediného vzorce

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (31)$$

Po dosazení koeficientů  $c_n$  do (23) dostáváme následující tvar Fourierovy řady

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}. \quad (32)$$

Tvar řady (32) nazýváme *komplexní zápis Fourierovy řady funkce  $f(t)$* .

# Fourierova řada v komplexním oboru

Pro koeficient  $c_0$  dostáváme

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt.$$

Vidíme tedy, že je možné vyjádřit všechny koeficienty  $c_i$  pomocí jediného vzorce

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (31)$$

Po dosazení koeficientů  $c_n$  do (23) dostáváme následující tvar Fourierovy řady

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}. \quad (32)$$

Tvar řady (32) nazýváme *komplexní zápis Fourierovy řady funkce  $f(t)$* .

Koeficienty  $c_n$  nazýváme *komplexní Fourierovy koeficienty*.

# Fourierova řada v komplexním oboru

# Fourierova řada v komplexním oboru

Výhodou komplexního zápisu Fourierovy řady je výpočet koeficientů jediným integrálem (integrál komplexní funkce reálné proměnné).

# Fourierova řada v komplexním oboru

Výhodou komplexního zápisu Fourierovy řady je výpočet koeficientů jediným integrálem (integrál komplexní funkce reálné proměnné).

Má-li funkce  $f(t)$  periodu  $T$ , pak vzorce (31) a (32) mají tvar

# Fourierova řada v komplexním oboru

Výhodou komplexního zápisu Fourierovy řady je výpočet koeficientů jediným integrálem (integrál komplexní funkce reálné proměnné).

Má-li funkce  $f(t)$  periodu  $T$ , pak vzorce (31) a (32) mají tvar

$$f(t) =$$



# Fourierova řada v komplexním oboru

Výhodou komplexního zápisu Fourierovy řady je výpočet koeficientů jediným integrálem (integrál komplexní funkce reálné proměnné).

Má-li funkce  $f(t)$  periodu  $T$ , pak vzorce (31) a (32) mají tvar

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{in\omega t} + c_{-n} e^{-in\omega t}), \quad (33)$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

Výhodou komplexního zápisu Fourierovy řady je výpočet koeficientů jediným integrálem (integrál komplexní funkce reálné proměnné).

Má-li funkce  $f(t)$  periodu  $T$ , pak vzorce (31) a (32) mají tvar

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{in\omega t} + c_{-n} e^{-in\omega t}), \quad (33)$$

$$c_n =$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

Výhodou komplexního zápisu Fourierovy řady je výpočet koeficientů jediným integrálem (integrál komplexní funkce reálné proměnné).

Má-li funkce  $f(t)$  periodu  $T$ , pak vzorce (31) a (32) mají tvar

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{in\omega t} + c_{-n} e^{-in\omega t}), \quad (33)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \quad (34)$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

Výhodou komplexního zápisu Fourierovy řady je výpočet koeficientů jediným integrálem (integrál komplexní funkce reálné proměnné).

Má-li funkce  $f(t)$  periodu  $T$ , pak vzorce (31) a (32) mají tvar

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{in\omega t} + c_{-n} e^{-in\omega t}), \quad (33)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \quad (34)$$

kde  $\omega = 2\pi/T$ .

# Fourierova řada v komplexním oboru

Výhodou komplexního zápisu Fourierovy řady je výpočet koeficientů jediným integrálem (integrál komplexní funkce reálné proměnné).

Má-li funkce  $f(t)$  periodu  $T$ , pak vzorce (31) a (32) mají tvar

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{in\omega t} + c_{-n} e^{-in\omega t}), \quad (33)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \quad (34)$$

kde  $\omega = 2\pi/T$ .

Chceme-li Fourierovu řadu v komplexním tvaru převést do tvaru reálného, pak stačí pro výpočet koeficientů použít vzorců

# Fourierova řada v komplexním oboru

Výhodou komplexního zápisu Fourierovy řady je výpočet koeficientů jediným integrálem (integrál komplexní funkce reálné proměnné).

Má-li funkce  $f(t)$  periodu  $T$ , pak vzorce (31) a (32) mají tvar

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{in\omega t} + c_{-n} e^{-in\omega t}), \quad (33)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \quad (34)$$

kde  $\omega = 2\pi/T$ .

Chceme-li Fourierovu řadu v komplexním tvaru převést do tvaru reálného, pak stačí pro výpočet koeficientů použít vzorců

$$a_n =$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

Výhodou komplexního zápisu Fourierovy řady je výpočet koeficientů jediným integrálem (integrál komplexní funkce reálné proměnné).

Má-li funkce  $f(t)$  periodu  $T$ , pak vzorce (31) a (32) mají tvar

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{in\omega t} + c_{-n} e^{-in\omega t}), \quad (33)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \quad (34)$$

kde  $\omega = 2\pi/T$ .

Chceme-li Fourierovu řadu v komplexním tvaru převést do tvaru reálného, pak stačí pro výpočet koeficientů použít vzorců

$$a_n = c_n + c_{-n}, \quad (35)$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

Výhodou komplexního zápisu Fourierovy řady je výpočet koeficientů jediným integrálem (integrál komplexní funkce reálné proměnné).

Má-li funkce  $f(t)$  periodu  $T$ , pak vzorce (31) a (32) mají tvar

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{in\omega t} + c_{-n} e^{-in\omega t}), \quad (33)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \quad (34)$$

kde  $\omega = 2\pi/T$ .

Chceme-li Fourierovu řadu v komplexním tvaru převést do tvaru reálného, pak stačí pro výpočet koeficientů použít vzorců

$$\begin{aligned} a_n &= c_n + c_{-n}, \\ b_n &= \end{aligned} \quad (35)$$



# Fourierova řada v komplexním oboru

Výhodou komplexního zápisu Fourierovy řady je výpočet koeficientů jediným integrálem (integrál komplexní funkce reálné proměnné).

Má-li funkce  $f(t)$  periodu  $T$ , pak vzorce (31) a (32) mají tvar

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{in\omega t} + c_{-n} e^{-in\omega t}), \quad (33)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \quad (34)$$

kde  $\omega = 2\pi/T$ .

Chceme-li Fourierovu řadu v komplexním tvaru převést do tvaru reálného, pak stačí pro výpočet koeficientů použít vzorců

$$a_n = c_n + c_{-n}, \quad (35)$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n}). \quad (36)$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 2

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 2

*Určeme komplexní a reálný zápis Fourierovy řady funkce*

*$f(t) = 1/2 e^t$  se základním intervalem periodicity  $(0, \pi]$  a  $f(0) = f(\pi)$ .*

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 2

*Určeme komplexní a reálný zápis Fourierovy řady funkce  $f(t) = 1/2 e^t$  se základním intervalem periodicity  $(0, \pi]$  a  $f(0) = f(\pi)$ .*

*Postupujme podle výše uvedené poznámky, tj. hledíme nejprve komplexní tvar a pak provedeme převod na tvar reálný.*

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 2

*Určeme komplexní a reálný zápis Fourierovy řady funkce  $f(t) = 1/2 e^t$  se základním intervalem periodicity  $(0, \pi]$  a  $f(0) = f(\pi)$ .*

*Postupujme podle výše uvedené poznámky, tj. hledíme nejprve komplexní tvar a pak provedeme převod na tvar reálný.*

*Tedy podle (34) je (zde  $\omega = 2$ )*

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 2

*Určeme komplexní a reálný zápis Fourierovy řady funkce*

*$f(t) = 1/2 e^t$  se základním intervalem periodicity  $(0, \pi]$  a  $f(0) = f(\pi)$ .*

*Postupujme podle výše uvedené poznámky, tj. hledíme nejprve komplexní tvar a pak provedeme převod na tvar reálný.*

*Tedy podle (34) je (zde  $\omega = 2$ )*

$$c_n =$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 2

*Určeme komplexní a reálný zápis Fourierovy řady funkce  $f(t) = 1/2 e^t$  se základním intervalem periodicity  $(0, \pi]$  a  $f(0) = f(\pi)$ .*

*Postupujme podle výše uvedené poznámky, tj. hledíme nejprve komplexní tvar a pak provedeme převod na tvar reálný.*

*Tedy podle (34) je (zde  $\omega = 2$ )*

$$c_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} e^t e^{-2int} dt$$



# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 2

*Určeme komplexní a reálný zápis Fourierovy řady funkce  $f(t) = 1/2 e^t$  se základním intervalem periodicity  $(0, \pi]$  a  $f(0) = f(\pi)$ .*

*Postupujme podle výše uvedené poznámky, tj. hledejme nejprve komplexní tvar a pak provedeme převod na tvar reálný.*

*Tedy podle (34) je (zde  $\omega = 2$ )*

$$c_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} e^t e^{-2int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{(1-2in)t} dt$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 2

*Určeme komplexní a reálný zápis Fourierovy řady funkce  $f(t) = 1/2 e^t$  se základním intervalem periodicity  $(0, \pi]$  a  $f(0) = f(\pi)$ .*

*Postupujme podle výše uvedené poznámky, tj. hledejme nejprve komplexní tvar a pak provedeme převod na tvar reálný.*

*Tedy podle (34) je (zde  $\omega = 2$ )*

$$c_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} e^t e^{-2int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{(1-2in)t} dt = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1-2in} \left[ e^{(1-2in)t} \right]_0^{\pi}$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 2

Určeme komplexní a reálný zápis Fourierovy řady funkce  $f(t) = 1/2 e^t$  se základním intervalem periodicity  $(0, \pi]$  a  $f(0) = f(\pi)$ .

Postupujme podle výše uvedené poznámky, tj. hledejme nejprve komplexní tvar a pak provedeme převod na tvar reálný.

Tedy podle (34) je (zde  $\omega = 2$ )

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} e^t e^{-2int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{(1-2in)t} dt = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1-2in} \left[ e^{(1-2in)t} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1-2in} (e^{\pi} - 1), \end{aligned}$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 2

Určeme komplexní a reálný zápis Fourierovy řady funkce  $f(t) = 1/2 e^t$  se základním intervalem periodicity  $(0, \pi]$  a  $f(0) = f(\pi)$ .

Postupujme podle výše uvedené poznámky, tj. hledejme nejprve komplexní tvar a pak provedeme převod na tvar reálný.

Tedy podle (34) je (zde  $\omega = 2$ )

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} e^t e^{-2int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{(1-2in)t} dt = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1-2in} \left[ e^{(1-2in)t} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1-2in} (e^{\pi} - 1), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \end{aligned}$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 2

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 2

*Komplexní zápis Fourierovy řady zadané funkce má tvar*

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 2

*Komplexní zápis Fourierovy řady zadané funkce má tvar*

$$f(t) =$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 2

*Komplexní zápis Fourierovy řady zadané funkce má tvar*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}(e^{\pi} - 1)$$



# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 2

*Komplexní zápis Fourierovy řady zadané funkce má tvar*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}(e^{\pi} - 1) + \frac{e^{\pi} - 1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1 - 2in} e^{2int} + \frac{1}{1 + 2in} e^{-2int} \right)$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 2

*Komplexní zápis Fourierovy řady zadané funkce má tvar*

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}(e^{\pi} - 1) + \frac{e^{\pi} - 1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1 - 2in} e^{2int} + \frac{1}{1 + 2in} e^{-2int} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi}(e^{\pi} - 1) \end{aligned}$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 2

*Komplexní zápis Fourierovy řady zadané funkce má tvar*

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}(e^{\pi} - 1) + \frac{e^{\pi} - 1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1 - 2in} e^{2int} + \frac{1}{1 + 2in} e^{-2int} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi}(e^{\pi} - 1) + \frac{e^{\pi} - 1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 - 2in} e^{2int}. \end{aligned}$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 2

*Komplexní zápis Fourierovy řady zadané funkce má tvar*

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}(e^{\pi} - 1) + \frac{e^{\pi} - 1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1 - 2in} e^{2int} + \frac{1}{1 + 2in} e^{-2int} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi}(e^{\pi} - 1) + \frac{e^{\pi} - 1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 - 2in} e^{2int}. \end{aligned}$$

*Převéd'me danou řadu do reálného tvaru.*

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 2

*Komplexní zápis Fourierovy řady zadané funkce má tvar*

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}(e^{\pi} - 1) + \frac{e^{\pi} - 1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1 - 2in} e^{2int} + \frac{1}{1 + 2in} e^{-2int} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi}(e^{\pi} - 1) + \frac{e^{\pi} - 1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 - 2in} e^{2int}. \end{aligned}$$

*Převěd'me danou řadu do reálného tvaru. Nejprve určíme podle vzorců (35) a (36) koeficienty  $a_n$  a  $b_n$ :*

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 2

*Komplexní zápis Fourierovy řady zadané funkce má tvar*

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}(e^\pi - 1) + \frac{e^\pi - 1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1 - 2in} e^{2int} + \frac{1}{1 + 2in} e^{-2int} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi}(e^\pi - 1) + \frac{e^\pi - 1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 - 2in} e^{2int}. \end{aligned}$$

*Převěd'me danou řadu do reálného tvaru. Nejprve určíme podle vzorců (35) a (36) koeficienty  $a_n$  a  $b_n$ :*

$$a_n =$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 2

*Komplexní zápis Fourierovy řady zadané funkce má tvar*

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}(e^\pi - 1) + \frac{e^\pi - 1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1 - 2in} e^{2int} + \frac{1}{1 + 2in} e^{-2int} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi}(e^\pi - 1) + \frac{e^\pi - 1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 - 2in} e^{2int}. \end{aligned}$$

*Převěd'me danou řadu do reálného tvaru. Nejprve určíme podle vzorců (35) a (36) koeficienty  $a_n$  a  $b_n$ :*

$$a_n = c_n + c_{-n}$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 2

*Komplexní zápis Fourierovy řady zadané funkce má tvar*

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}(e^\pi - 1) + \frac{e^\pi - 1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1 - 2in} e^{2int} + \frac{1}{1 + 2in} e^{-2int} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi}(e^\pi - 1) + \frac{e^\pi - 1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 - 2in} e^{2int}. \end{aligned}$$

*Převěd'me danou řadu do reálného tvaru. Nejprve určíme podle vzorců (35) a (36) koeficienty  $a_n$  a  $b_n$ :*

$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{1}{2\pi}(e^\pi - 1) \left( \frac{1}{1 - 2in} + \frac{1}{1 + 2in} \right)$$



# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 2

*Komplexní zápis Fourierovy řady zadané funkce má tvar*

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}(e^{\pi} - 1) + \frac{e^{\pi} - 1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1 - 2in} e^{2int} + \frac{1}{1 + 2in} e^{-2int} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi}(e^{\pi} - 1) + \frac{e^{\pi} - 1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 - 2in} e^{2int}. \end{aligned}$$

*Převěd'me danou řadu do reálného tvaru. Nejprve určíme podle vzorců (35) a (36) koeficienty  $a_n$  a  $b_n$ :*

$$\begin{aligned} a_n &= c_n + c_{-n} = \frac{1}{2\pi}(e^{\pi} - 1) \left( \frac{1}{1 - 2in} + \frac{1}{1 + 2in} \right) \\ &= \frac{e^{\pi} - 1}{\pi} \frac{1}{1 + 4n^2}, \end{aligned}$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 2

*Komplexní zápis Fourierovy řady zadané funkce má tvar*

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}(e^\pi - 1) + \frac{e^\pi - 1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1 - 2in} e^{2int} + \frac{1}{1 + 2in} e^{-2int} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi}(e^\pi - 1) + \frac{e^\pi - 1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 - 2in} e^{2int}. \end{aligned}$$

*Převěd'me danou řadu do reálného tvaru. Nejprve určíme podle vzorců (35) a (36) koeficienty  $a_n$  a  $b_n$ :*

$$\begin{aligned} a_n &= c_n + c_{-n} = \frac{1}{2\pi}(e^\pi - 1) \left( \frac{1}{1 - 2in} + \frac{1}{1 + 2in} \right) \\ &= \frac{e^\pi - 1}{\pi} \frac{1}{1 + 4n^2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 2

*Komplexní zápis Fourierovy řady zadané funkce má tvar*

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}(e^\pi - 1) + \frac{e^\pi - 1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1 - 2in} e^{2int} + \frac{1}{1 + 2in} e^{-2int} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi}(e^\pi - 1) + \frac{e^\pi - 1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 - 2in} e^{2int}. \end{aligned}$$

*Převěd'me danou řadu do reálného tvaru. Nejprve určíme podle vzorců (35) a (36) koeficienty  $a_n$  a  $b_n$ :*

$$\begin{aligned} a_n &= c_n + c_{-n} = \frac{1}{2\pi}(e^\pi - 1) \left( \frac{1}{1 - 2in} + \frac{1}{1 + 2in} \right) \\ &= \frac{e^\pi - 1}{\pi} \frac{1}{1 + 4n^2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

$$b_n =$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 2

*Komplexní zápis Fourierovy řady zadané funkce má tvar*

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}(e^\pi - 1) + \frac{e^\pi - 1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1 - 2in} e^{2int} + \frac{1}{1 + 2in} e^{-2int} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi}(e^\pi - 1) + \frac{e^\pi - 1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 - 2in} e^{2int}. \end{aligned}$$

*Převěd'me danou řadu do reálného tvaru. Nejprve určíme podle vzorců (35) a (36) koeficienty  $a_n$  a  $b_n$ :*

$$\begin{aligned} a_n &= c_n + c_{-n} = \frac{1}{2\pi}(e^\pi - 1) \left( \frac{1}{1 - 2in} + \frac{1}{1 + 2in} \right) \\ &= \frac{e^\pi - 1}{\pi} \frac{1}{1 + 4n^2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n})$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 2

*Komplexní zápis Fourierovy řady zadané funkce má tvar*

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}(e^{\pi} - 1) + \frac{e^{\pi} - 1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1 - 2in} e^{2int} + \frac{1}{1 + 2in} e^{-2int} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi}(e^{\pi} - 1) + \frac{e^{\pi} - 1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 - 2in} e^{2int}. \end{aligned}$$

*Převěd'me danou řadu do reálného tvaru. Nejprve určíme podle vzorců (35) a (36) koeficienty  $a_n$  a  $b_n$ :*

$$\begin{aligned} a_n &= c_n + c_{-n} = \frac{1}{2\pi}(e^{\pi} - 1) \left( \frac{1}{1 - 2in} + \frac{1}{1 + 2in} \right) \\ &= \frac{e^{\pi} - 1}{\pi} \frac{1}{1 + 4n^2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \\ b_n &= i(c_n - c_{-n}) = \frac{i}{2\pi}(e^{\pi} - 1) \left( \frac{1}{1 - 2in} - \frac{1}{1 + 2in} \right) \end{aligned}$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 2

*Komplexní zápis Fourierovy řady zadané funkce má tvar*

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}(e^\pi - 1) + \frac{e^\pi - 1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1 - 2in} e^{2int} + \frac{1}{1 + 2in} e^{-2int} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi}(e^\pi - 1) + \frac{e^\pi - 1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 - 2in} e^{2int}. \end{aligned}$$

*Převěd'me danou řadu do reálného tvaru. Nejprve určíme podle vzorců (35) a (36) koeficienty  $a_n$  a  $b_n$ :*

$$\begin{aligned} a_n &= c_n + c_{-n} = \frac{1}{2\pi}(e^\pi - 1) \left( \frac{1}{1 - 2in} + \frac{1}{1 + 2in} \right) \\ &= \frac{e^\pi - 1}{\pi} \frac{1}{1 + 4n^2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \\ b_n &= i(c_n - c_{-n}) = \frac{i}{2\pi}(e^\pi - 1) \left( \frac{1}{1 - 2in} - \frac{1}{1 + 2in} \right) \\ &= -2 \frac{e^\pi - 1}{\pi} \frac{n}{1 + 4n^2}, \end{aligned}$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 2

*Komplexní zápis Fourierovy řady zadané funkce má tvar*

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}(e^\pi - 1) + \frac{e^\pi - 1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1 - 2in} e^{2int} + \frac{1}{1 + 2in} e^{-2int} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi}(e^\pi - 1) + \frac{e^\pi - 1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 - 2in} e^{2int}. \end{aligned}$$

*Převěd'me danou řadu do reálného tvaru. Nejprve určíme podle vzorců (35) a (36) koeficienty  $a_n$  a  $b_n$ :*

$$\begin{aligned} a_n &= c_n + c_{-n} = \frac{1}{2\pi}(e^\pi - 1) \left( \frac{1}{1 - 2in} + \frac{1}{1 + 2in} \right) \\ &= \frac{e^\pi - 1}{\pi} \frac{1}{1 + 4n^2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \\ b_n &= i(c_n - c_{-n}) = \frac{i}{2\pi}(e^\pi - 1) \left( \frac{1}{1 - 2in} - \frac{1}{1 + 2in} \right) \\ &= -2 \frac{e^\pi - 1}{\pi} \frac{n}{1 + 4n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 2



# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 2

*Konečně, reálný tvar hledané Fourierovy řady je*

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 2

*Konečně, reálný tvar hledané Fourierovy řady je*

$$f(t) =$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 2

*Konečně, reálný tvar hledané Fourierovy řady je*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}(e^{\pi} - 1)$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 2

*Konečně, reálný tvar hledané Fourierovy řady je*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}(e^{\pi} - 1) + \frac{e^{\pi} - 1}{\pi} \left( \frac{\cos(2t)}{1 + 4 \cdot 1^2} + \frac{\cos(4t)}{1 + 4 \cdot 2^2} + \dots \right)$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 2

*Konečně, reálný tvar hledané Fourierovy řady je*

$$\begin{aligned} f(t) = \frac{1}{2\pi}(e^{\pi} - 1) &+ \frac{e^{\pi} - 1}{\pi} \left( \frac{\cos(2t)}{1 + 4 \cdot 1^2} + \frac{\cos(4t)}{1 + 4 \cdot 2^2} + \dots \right) \\ &- 2 \frac{e^{\pi} - 1}{\pi} \left( \frac{\sin(2t)}{1 + 4 \cdot 1^2} + \frac{\sin(4t)}{1 + 4 \cdot 2^2} + \dots \right) \end{aligned}$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 2

*Konečně, reálný tvar hledané Fourierovy řady je*

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}(e^{\pi} - 1) + \frac{e^{\pi} - 1}{\pi} \left( \frac{\cos(2t)}{1 + 4 \cdot 1^2} + \frac{\cos(4t)}{1 + 4 \cdot 2^2} + \dots \right) \\ &\quad - 2 \frac{e^{\pi} - 1}{\pi} \left( \frac{\sin(2t)}{1 + 4 \cdot 1^2} + \frac{\sin(4t)}{1 + 4 \cdot 2^2} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{2\pi}(e^{\pi} - 1) \end{aligned}$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 2

*Konečně, reálný tvar hledané Fourierovy řady je*

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}(e^{\pi} - 1) + \frac{e^{\pi} - 1}{\pi} \left( \frac{\cos(2t)}{1 + 4 \cdot 1^2} + \frac{\cos(4t)}{1 + 4 \cdot 2^2} + \dots \right) \\ &\quad - 2 \frac{e^{\pi} - 1}{\pi} \left( \frac{\sin(2t)}{1 + 4 \cdot 1^2} + \frac{\sin(4t)}{1 + 4 \cdot 2^2} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{2\pi}(e^{\pi} - 1) + \frac{e^{\pi} - 1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + 4n^2} \cos(2nt) \end{aligned}$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 2

*Konečně, reálný tvar hledané Fourierovy řady je*

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}(e^\pi - 1) + \frac{e^\pi - 1}{\pi} \left( \frac{\cos(2t)}{1 + 4 \cdot 1^2} + \frac{\cos(4t)}{1 + 4 \cdot 2^2} + \dots \right) \\ &\quad - 2 \frac{e^\pi - 1}{\pi} \left( \frac{\sin(2t)}{1 + 4 \cdot 1^2} + \frac{\sin(4t)}{1 + 4 \cdot 2^2} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{2\pi}(e^\pi - 1) + \frac{e^\pi - 1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + 4n^2} \cos(2nt) \\ &\quad - 2 \frac{e^\pi - 1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1 + 4n^2} \sin(2nt). \end{aligned}$$



# Fourierova řada v komplexním oboru

# Fourierova řada v komplexním oboru

Nedílnou součástí harmonické analýzy je *analýza spekter*.

# Fourierova řada v komplexním oboru

Nedílnou součástí harmonické analýzy je *analýza spekter*.

Zde se budeme zabývat otázkou *fázového* a *amplitudového spektra*.

# Fourierova řada v komplexním oboru

Nedílnou součástí harmonické analýzy je *analýza spekter*.

Zde se budeme zabývat otázkou *fázového* a *amplitudového spektra*.

Prvně, *jednostranným spektrem* rozumíme uspořádanou dvojici posloupností

$$(\{A_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}).$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

Nedílnou součástí harmonické analýzy je *analýza spekter*.

Zde se budeme zabývat otázkou *fázového* a *amplitudového spektra*.

Prvně, *jednostranným spektrem* rozumíme uspořádanou dvojici posloupností

$$(\{A_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}).$$

Zde  $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$  představuje *jednostranné amplitudové spektrum* a je definováno vzorci

# Fourierova řada v komplexním oboru

Nedílnou součástí harmonické analýzy je *analýza spekter*.

Zde se budeme zabývat otázkou *fázového* a *amplitudového spektra*.

Prvně, *jednostranným spektrem* rozumíme uspořádanou dvojici posloupností

$$(\{A_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}).$$

Zde  $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$  představuje *jednostranné amplitudové spektrum* a je definováno vzorci

$$A_0 =$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

Nedílnou součástí harmonické analýzy je *analýza spekter*.

Zde se budeme zabývat otázkou *fázového* a *amplitudového spektra*.

Prvně, *jednostranným spektrem* rozumíme uspořádanou dvojici posloupností

$$(\{A_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}).$$

Zde  $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$  představuje *jednostranné amplitudové spektrum* a je definováno vzorci

$$A_0 = \left| \frac{a_0}{2} \right| = |c_0|,$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

Nedílnou součástí harmonické analýzy je *analýza spekter*.

Zde se budeme zabývat otázkou *fázového* a *amplitudového spektra*.

Prvně, *jednostranným spektrem* rozumíme uspořádanou dvojici posloupností

$$(\{A_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}).$$

Zde  $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$  představuje *jednostranné amplitudové spektrum* a je definováno vzorcí

$$A_0 = \left| \frac{a_0}{2} \right| = |c_0|, \quad (37)$$

$$A_n =$$



# Fourierova řada v komplexním oboru

Nedílnou součástí harmonické analýzy je *analýza spekter*.

Zde se budeme zabývat otázkou *fázového* a *amplitudového spektra*.

Prvně, *jednostranným spektrem* rozumíme uspořádanou dvojici posloupností

$$(\{A_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}).$$

Zde  $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$  představuje *jednostranné amplitudové spektrum* a je definováno vzorcí

$$\begin{aligned} A_0 &= \left| \frac{a_0}{2} \right| = |c_0|, \\ A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2|c_n|, \end{aligned} \tag{37}$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

Nedílnou součástí harmonické analýzy je *analýza spekter*.

Zde se budeme zabývat otázkou *fázového* a *amplitudového spektra*.

Prvně, *jednostranným spektrem* rozumíme uspořádanou dvojici posloupností

$$(\{A_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}).$$

Zde  $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$  představuje *jednostranné amplitudové spektrum* a je definováno vzorci

$$A_0 = \left| \frac{a_0}{2} \right| = |c_0|, \quad (37)$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2|c_n|, \quad n = 1, 2, \dots \quad (38)$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

Nedílnou součástí harmonické analýzy je *analýza spekter*.

Zde se budeme zabývat otázkou *fázového* a *amplitudového spektra*.

Prvně, *jednostranným spektrem* rozumíme uspořádanou dvojici posloupností

$$(\{A_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}).$$

Zde  $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$  představuje *jednostranné amplitudové spektrum* a je definováno vzorcí

$$A_0 = \left| \frac{a_0}{2} \right| = |c_0|, \quad (37)$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2|c_n|, \quad n = 1, 2, \dots \quad (38)$$

Dále  $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$  je *jednostranné fázové spektrum* definované vztahem

# Fourierova řada v komplexním oboru

Nedílnou součástí harmonické analýzy je *analýza spekter*.

Zde se budeme zabývat otázkou *fázového* a *amplitudového spektra*.

Prvně, *jednostranným spektrem* rozumíme uspořádanou dvojici posloupností

$$(\{A_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}).$$

Zde  $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$  představuje *jednostranné amplitudové spektrum* a je definováno vzorcí

$$A_0 = \left| \frac{a_0}{2} \right| = |c_0|, \quad (37)$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2|c_n|, \quad n = 1, 2, \dots \quad (38)$$

Dále  $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$  je *jednostranné fázové spektrum* definované vztahem

$$\varphi_n =$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

Nedílnou součástí harmonické analýzy je *analýza spekter*.

Zde se budeme zabývat otázkou *fázového* a *amplitudového spektra*.

Prvně, *jednostranným spektrem* rozumíme uspořádanou dvojici posloupností

$$(\{A_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}).$$

Zde  $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$  představuje *jednostranné amplitudové spektrum* a je definováno vzorcí

$$A_0 = \left| \frac{a_0}{2} \right| = |c_0|, \quad (37)$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2|c_n|, \quad n = 1, 2, \dots \quad (38)$$

Dále  $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$  je *jednostranné fázové spektrum* definované vztahem

$$\varphi_n = -\arg c_n \in (-\pi, \pi],$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

Nedílnou součástí harmonické analýzy je *analýza spekter*.

Zde se budeme zabývat otázkou *fázového* a *amplitudového spektra*.

Prvně, *jednostranným spektrem* rozumíme uspořádanou dvojici posloupností

$$(\{A_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}).$$

Zde  $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$  představuje *jednostranné amplitudové spektrum* a je definováno vzorcí

$$A_0 = \left| \frac{a_0}{2} \right| = |c_0|, \quad (37)$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2|c_n|, \quad n = 1, 2, \dots \quad (38)$$

Dále  $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$  je *jednostranné fázové spektrum* definované vztahem

$$\varphi_n = -\arg c_n \in (-\pi, \pi], \quad n = 1, 2, \dots \quad (39)$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

# Fourierova řada v komplexním oboru

*Dvoustranným spektrem* rozumíme uspořádanou dvojici posloupností

$$(\{|c_n|\}_{n=-\infty}^{\infty}, \{\varphi_{\pm n}\}_{n=1}^{\infty}).$$



# Fourierova řada v komplexním oboru

*Dvoustranným spektrem* rozumíme uspořádanou dvojici posloupností

$$(\{|c_n|\}_{n=-\infty}^{\infty}, \{\varphi_{\pm n}\}_{n=1}^{\infty}).$$

Zde  $\{|c_n|\}_{n=-\infty}^{\infty}$  představuje *dvoustranné amplitudové spektrum*.

# Fourierova řada v komplexním oboru

*Dvoustranným spektrem* rozumíme uspořádanou dvojici posloupností

$$(\{|c_n|\}_{n=-\infty}^{\infty}, \{\varphi_{\pm n}\}_{n=1}^{\infty}).$$

Zde  $\{|c_n|\}_{n=-\infty}^{\infty}$  představuje *dvoustranné amplitudové spektrum*.

Dále  $\{\varphi_{\pm n}\}_{n=1}^{\infty}$  představuje *dvoustranné fázové spektrum* definované

# Fourierova řada v komplexním oboru

*Dvoustranným spektrem* rozumíme uspořádanou dvojici posloupností

$$(\{|c_n|\}_{n=-\infty}^{\infty}, \{\varphi_{\pm n}\}_{n=1}^{\infty}).$$

Zde  $\{|c_n|\}_{n=-\infty}^{\infty}$  představuje *dvoustranné amplitudové spektrum*.

Dále  $\{\varphi_{\pm n}\}_{n=1}^{\infty}$  představuje *dvoustranné fázové spektrum* definované

$$\varphi_n =$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

*Dvoustranným spektrem* rozumíme uspořádanou dvojici posloupností

$$(\{|c_n|\}_{n=-\infty}^{\infty}, \{\varphi_{\pm n}\}_{n=1}^{\infty}).$$

Zde  $\{|c_n|\}_{n=-\infty}^{\infty}$  představuje *dvoustranné amplitudové spektrum*.

Dále  $\{\varphi_{\pm n}\}_{n=1}^{\infty}$  představuje *dvoustranné fázové spektrum* definované

$$\varphi_n = -\arg c_n \in (-\pi, \pi],$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

*Dvoustranným spektrem* rozumíme uspořádanou dvojici posloupností

$$(\{|c_n|\}_{n=-\infty}^{\infty}, \{\varphi_{\pm n}\}_{n=1}^{\infty}).$$

Zde  $\{|c_n|\}_{n=-\infty}^{\infty}$  představuje *dvoustranné amplitudové spektrum*.

Dále  $\{\varphi_{\pm n}\}_{n=1}^{\infty}$  představuje *dvoustranné fázové spektrum* definované

$$\varphi_n = -\arg c_n \in (-\pi, \pi], \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (40)$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

*Dvoustranným spektrem* rozumíme uspořádanou dvojici posloupností

$$(\{|c_n|\}_{n=-\infty}^{\infty}, \{\varphi_{\pm n}\}_{n=1}^{\infty}).$$

Zde  $\{|c_n|\}_{n=-\infty}^{\infty}$  představuje *dvoustranné amplitudové spektrum*.

Dále  $\{\varphi_{\pm n}\}_{n=1}^{\infty}$  představuje *dvoustranné fázové spektrum* definované

$$\varphi_n = -\arg c_n \in (-\pi, \pi], \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (40)$$

Poznamenejme, že fáze  $\varphi_0$  není definována.

# Fourierova řada v komplexním oboru

*Dvoustranným spektrem* rozumíme uspořádanou dvojici posloupností

$$(\{|c_n|\}_{n=-\infty}^{\infty}, \{\varphi_{\pm n}\}_{n=1}^{\infty}).$$

Zde  $\{|c_n|\}_{n=-\infty}^{\infty}$  představuje *dvoustranné amplitudové spektrum*.

Dále  $\{\varphi_{\pm n}\}_{n=1}^{\infty}$  představuje *dvoustranné fázové spektrum* definované

$$\varphi_n = -\arg c_n \in (-\pi, \pi], \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (40)$$

Poznamenejme, že fáze  $\varphi_0$  není definována.

Je-li analyzována komplexní funkce s nenulovou imaginární částí, pak platí, že koeficienty  $c_n$  a  $c_{-n}$  nejsou komplexně sdružené.

# Fourierova řada v komplexním oboru

*Dvoustranným spektrem* rozumíme uspořádanou dvojici posloupností

$$(\{|c_n|\}_{n=-\infty}^{\infty}, \{\varphi_{\pm n}\}_{n=1}^{\infty}).$$

Zde  $\{|c_n|\}_{n=-\infty}^{\infty}$  představuje *dvoustranné amplitudové spektrum*.

Dále  $\{\varphi_{\pm n}\}_{n=1}^{\infty}$  představuje *dvoustranné fázové spektrum* definované

$$\varphi_n = -\arg c_n \in (-\pi, \pi], \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots \quad (40)$$

Poznamenejme, že fáze  $\varphi_0$  není definována.

Je-li analyzována komplexní funkce s nenulovou imaginární částí, pak platí, že koeficienty  $c_n$  a  $c_{-n}$  nejsou komplexně sdružené.

Tedy amplitudové spektrum není sudé a fázové spektrum není liché.



# Rozvoj periodické funkce

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Rozviňme ve Fourierovu řadu periodickou funkci  $f(t)$  se základním intervalem periodicity  $(-\pi, \pi]$  zadanou předpisem*

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{pro } t \in (-\pi, \pi], \\ \pi & \text{pro } t = -\pi, \end{cases} \quad (41)$$

*a proved'me spektrální analýzu.*

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Rozviňme ve Fourierovu řadu periodickou funkci  $f(t)$  se základním intervalem periodicity  $(-\pi, \pi]$  zadanou předpisem*

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{pro } t \in (-\pi, \pi], \\ \pi & \text{pro } t = -\pi, \end{cases} \quad (41)$$

*a proved'me spektrální analýzu.  
Zadaná funkce je znázorněna grafem*

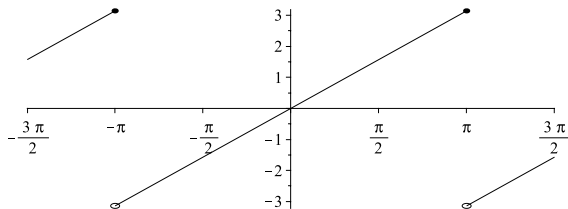
# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

Rozviňme ve Fourierovu řadu periodickou funkci  $f(t)$  se základním intervalem periodicity  $(-\pi, \pi]$  zadanou předpisem

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{pro } t \in (-\pi, \pi], \\ \pi & \text{pro } t = -\pi, \end{cases} \quad (41)$$

a proved'me spektrální analýzu.  
Zadaná funkce je znázorněna grafem



# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Nejprve je zapotřebí ověřit Dirichletovy podmínky:*

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Nejprve je zapotřebí ověřit Dirichletovy podmínky:*

- ▶ *funkce je zřejmě periodická,*



# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Nejprve je zapotřebí ověřit Dirichletovy podmínky:*

- ▶ *funkce je zřejmě periodická,*
- ▶ *funkce je uvnitř intervalu periodicity spojitá,*

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Nejprve je zapotřebí ověřit Dirichletovy podmínky:*

- ▶ *funkce je zřejmě periodická,*
- ▶ *funkce je uvnitř intervalu periodicity spojitá, nespojitá je v krajních bodech  $(2k + 1)\pi$ ,  $(k \in \mathbb{Z})$ ,*

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Nejprve je zapotřebí ověřit Dirichletovy podmínky:*

- ▶ *funkce je zřejmě periodická,*
- ▶ *funkce je uvnitř intervalu periodicity spojitá, nespojitá je v krajních bodech  $(2k + 1)\pi$ ,  $(k \in \mathbb{Z})$ , jedná se však o nespojitost 1. druhu,*

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Nejprve je zapotřebí ověřit Dirichletovy podmínky:*

- ▶ *funkce je zřejmě periodická,*
- ▶ *funkce je uvnitř intervalu periodicity spojitá, nespojitá je v krajních bodech  $(2k + 1)\pi$ , ( $k \in \mathbb{Z}$ ), jedná se však o nespojitost 1. druhu,*
- ▶ *funkce je uvnitř intervalu periodicity diferencovatelná ( $f'(t) = 1$ ).*

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Nejprve je zapotřebí ověřit Dirichletovy podmínky:*

- ▶ *funkce je zřejmě periodická,*
- ▶ *funkce je uvnitř intervalu periodicity spojitá, nespojitá je v krajních bodech  $(2k + 1)\pi$ ,  $(k \in \mathbb{Z})$ , jedná se však o nespojitost 1. druhu,*
- ▶ *funkce je uvnitř intervalu periodicity diferencovatelná ( $f'(t) = 1$ ).*

*Nic nám tedy nebrání použít vzorce (9), (10) a (11) k výpočtu Fourierových koeficientů:*

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Nejprve je zapotřebí ověřit Dirichletovy podmínky:*

- ▶ *funkce je zřejmě periodická,*
- ▶ *funkce je uvnitř intervalu periodicity spojitá, nespojitá je v krajních bodech  $(2k + 1)\pi$ ,  $(k \in \mathbb{Z})$ , jedná se však o nespojitost 1. druhu,*
- ▶ *funkce je uvnitř intervalu periodicity diferencovatelná ( $f'(t) = 1$ ).*

*Nic nám tedy nebrání použít vzorce (9), (10) a (11) k výpočtu Fourierových koeficientů:*

$$a_0 =$$

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Nejprve je zapotřebí ověřit Dirichletovy podmínky:*

- ▶ *funkce je zřejmě periodická,*
- ▶ *funkce je uvnitř intervalu periodicity spojitá, nespojitá je v krajních bodech  $(2k + 1)\pi$ ,  $(k \in \mathbb{Z})$ , jedná se však o nespojitost 1. druhu,*
- ▶ *funkce je uvnitř intervalu periodicity diferencovatelná ( $f'(t) = 1$ ).*

*Nic nám tedy nebrání použít vzorce (9), (10) a (11) k výpočtu Fourierových koeficientů:*

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \, dt$$

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Nejprve je zapotřebí ověřit Dirichletovy podmínky:*

- ▶ *funkce je zřejmě periodická,*
- ▶ *funkce je uvnitř intervalu periodicity spojitá, nespojitá je v krajních bodech  $(2k + 1)\pi$ ,  $(k \in \mathbb{Z})$ , jedná se však o nespojitost 1. druhu,*
- ▶ *funkce je uvnitř intervalu periodicity diferencovatelná ( $f'(t) = 1$ ).*

*Nic nám tedy nebrání použít vzorce (9), (10) a (11) k výpočtu Fourierových koeficientů:*

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \, dt = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{t^2}{2} \right]_{-\pi}^{\pi}$$



# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Nejprve je zapotřebí ověřit Dirichletovy podmínky:*

- ▶ *funkce je zřejmě periodická,*
- ▶ *funkce je uvnitř intervalu periodicity spojitá, nespojitá je v krajních bodech  $(2k + 1)\pi$ ,  $(k \in \mathbb{Z})$ , jedná se však o nespojitost 1. druhu,*
- ▶ *funkce je uvnitř intervalu periodicity diferencovatelná ( $f'(t) = 1$ ).*

*Nic nám tedy nebrání použít vzorce (9), (10) a (11) k výpočtu Fourierových koeficientů:*

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \, dt = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{t^2}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Nejprve je zapotřebí ověřit Dirichletovy podmínky:*

- ▶ *funkce je zřejmě periodická,*
- ▶ *funkce je uvnitř intervalu periodicity spojitá, nespojitá je v krajních bodech  $(2k + 1)\pi$ ,  $(k \in \mathbb{Z})$ , jedná se však o nespojitost 1. druhu,*
- ▶ *funkce je uvnitř intervalu periodicity diferencovatelná ( $f'(t) = 1$ ).*

*Nic nám tedy nebrání použít vzorce (9), (10) a (11) k výpočtu Fourierových koeficientů:*

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \, dt = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{t^2}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$a_n =$$

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Nejprve je zapotřebí ověřit Dirichletovy podmínky:*

- ▶ *funkce je zřejmě periodická,*
- ▶ *funkce je uvnitř intervalu periodicity spojitá, nespojitá je v krajních bodech  $(2k + 1)\pi$ ,  $(k \in \mathbb{Z})$ , jedná se však o nespojitost 1. druhu,*
- ▶ *funkce je uvnitř intervalu periodicity diferencovatelná ( $f'(t) = 1$ ).*

*Nic nám tedy nebrání použít vzorce (9), (10) a (11) k výpočtu Fourierových koeficientů:*

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \, dt = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{t^2}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos(nt) \, dt$$

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Nejprve je zapotřebí ověřit Dirichletovy podmínky:*

- ▶ *funkce je zřejmě periodická,*
- ▶ *funkce je uvnitř intervalu periodicity spojitá, nespojitá je v krajních bodech  $(2k + 1)\pi$ ,  $(k \in \mathbb{Z})$ , jedná se však o nespojitost 1. druhu,*
- ▶ *funkce je uvnitř intervalu periodicity diferencovatelná ( $f'(t) = 1$ ).*

*Nic nám tedy nebrání použít vzorce (9), (10) a (11) k výpočtu Fourierových koeficientů:*

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \, dt = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{t^2}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos(nt) \, dt = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{t}{n} \sin(nt) + \frac{1}{n^2} \cos(nt) \right]_{-\pi}^{\pi}$$

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Nejprve je zapotřebí ověřit Dirichletovy podmínky:*

- ▶ *funkce je zřejmě periodická,*
- ▶ *funkce je uvnitř intervalu periodicity spojitá, nespojitá je v krajních bodech  $(2k + 1)\pi$ ,  $(k \in \mathbb{Z})$ , jedná se však o nespojitosti 1. druhu,*
- ▶ *funkce je uvnitř intervalu periodicity diferencovatelná ( $f'(t) = 1$ ).*

*Nic nám tedy nebrání použít vzorce (9), (10) a (11) k výpočtu Fourierových koeficientů:*

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \, dt = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{t^2}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos(nt) \, dt = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{t}{n} \sin(nt) + \frac{1}{n^2} \cos(nt) \right]_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Nejprve je zapotřebí ověřit Dirichletovy podmínky:*

- ▶ *funkce je zřejmě periodická,*
- ▶ *funkce je uvnitř intervalu periodicity spojitá, nespojitá je v krajních bodech  $(2k + 1)\pi$ ,  $(k \in \mathbb{Z})$ , jedná se však o nespojitost 1. druhu,*
- ▶ *funkce je uvnitř intervalu periodicity diferencovatelná ( $f'(t) = 1$ ).*

*Nic nám tedy nebrání použít vzorce (9), (10) a (11) k výpočtu Fourierových koeficientů:*

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \, dt = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{t^2}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos(nt) \, dt = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{t}{n} \sin(nt) + \frac{1}{n^2} \cos(nt) \right]_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$b_n =$$

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Nejprve je zapotřebí ověřit Dirichletovy podmínky:*

- ▶ *funkce je zřejmě periodická,*
- ▶ *funkce je uvnitř intervalu periodicity spojitá, nespojitá je v krajních bodech  $(2k + 1)\pi$ ,  $(k \in \mathbb{Z})$ , jedná se však o nespojitost 1. druhu,*
- ▶ *funkce je uvnitř intervalu periodicity diferencovatelná ( $f'(t) = 1$ ).*

*Nic nám tedy nebrání použít vzorce (9), (10) a (11) k výpočtu Fourierových koeficientů:*

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \, dt = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{t^2}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos(nt) \, dt = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{t}{n} \sin(nt) + \frac{1}{n^2} \cos(nt) \right]_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin(nt) \, dt$$

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Nejprve je zapotřebí ověřit Dirichletovy podmínky:*

- ▶ *funkce je zřejmě periodická,*
- ▶ *funkce je uvnitř intervalu periodicity spojitá, nespojitá je v krajních bodech  $(2k + 1)\pi$ ,  $(k \in \mathbb{Z})$ , jedná se však o nespojitost 1. druhu,*
- ▶ *funkce je uvnitř intervalu periodicity diferencovatelná ( $f'(t) = 1$ ).*

*Nic nám tedy nebrání použít vzorce (9), (10) a (11) k výpočtu Fourierových koeficientů:*

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \, dt = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{t^2}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos(nt) \, dt = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{t}{n} \sin(nt) + \frac{1}{n^2} \cos(nt) \right]_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin(nt) \, dt = \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{t}{n} \cos(nt) + \frac{1}{n^2} \sin(nt) \right]_{-\pi}^{\pi}$$



# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Nejprve je zapotřebí ověřit Dirichletovy podmínky:*

- ▶ *funkce je zřejmě periodická,*
- ▶ *funkce je uvnitř intervalu periodicity spojitá, nespojitá je v krajních bodech  $(2k + 1)\pi$ , ( $k \in \mathbb{Z}$ ), jedná se však o nespojitost 1. druhu,*
- ▶ *funkce je uvnitř intervalu periodicity diferencovatelná ( $f'(t) = 1$ ).*

*Nic nám tedy nebrání použít vzorce (9), (10) a (11) k výpočtu Fourierových koeficientů:*

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \, dt = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{t^2}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos(nt) \, dt = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{t}{n} \sin(nt) + \frac{1}{n^2} \cos(nt) \right]_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin(nt) \, dt = \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{t}{n} \cos(nt) + \frac{1}{n^2} \sin(nt) \right]_{-\pi}^{\pi} = (-1)^{n+1} \frac{2}{n}.$$

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Všimněme si, že*

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Všimněme si, že*

- ▶ *rozvíjená funkce je lichá,*

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Všimněme si, že*

- ▶ *rozvíjená funkce je lichá,*
- ▶ *všechny koeficienty  $a_n$  jsou nulové,*

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Všimněme si, že*

- ▶ *rozvíjená funkce je lichá,*
- ▶ *všechny koeficienty  $a_n$  jsou nulové,*
- ▶ *příslušná Fourierova řada bude mít pouze sinové členy, bude lichá.*

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Všimněme si, že*

- ▶ *rozvíjená funkce je lichá,*
- ▶ *všechny koeficienty  $a_n$  jsou nulové,*
- ▶ *příslušná Fourierova řada bude mít pouze sinové členy, bude lichá.*

*Hledaný rozvoj naší funkce tedy je*

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Všimněme si, že*

- ▶ *rozvíjená funkce je lichá,*
- ▶ *všechny koeficienty  $a_n$  jsou nulové,*
- ▶ *příslušná Fourierova řada bude mít pouze sinové členy, bude lichá.*

*Hledaný rozvoj naší funkce tedy je*

$$f(t) =$$



# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

Všimněme si, že

- ▶ rozvíjená funkce je lichá,
- ▶ všechny koeficienty  $a_n$  jsou nulové,
- ▶ příslušná Fourierova řada bude mít pouze sinové členy, bude lichá.

Hledaný rozvoj naší funkce tedy je

$$f(t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin(nt)}{n}.$$

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Podle Dirichletovy věty 1 je součet této řady roven  $f(t) = t$  pro  $t \in (-\pi, \pi)$ .*

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Podle Dirichletovy věty 1 je součet této řady roven  $f(t) = t$  pro  $t \in (-\pi, \pi)$ .*

*V bodech  $\pm\pi$  je nespojitost prvního druhu a platí:*

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Podle Dirichletovy věty 1 je součet této řady roven  $f(t) = t$  pro  $t \in (-\pi, \pi)$ .*

*V bodech  $\pm\pi$  je nespojitost prvního druhu a platí:*

$$f(\pi_-) = \pi$$

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Podle Dirichletovy věty 1 je součet této řady roven  $f(t) = t$  pro  $t \in (-\pi, \pi)$ .*

*V bodech  $\pm\pi$  je nespojitost prvního druhu a platí:*

$$f(\pi_-) = \pi \text{ a } f(\pi_+) = -\pi,$$

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Podle Dirichletovy věty 1 je součet této řady roven  $f(t) = t$  pro  $t \in (-\pi, \pi)$ .*

*V bodech  $\pm\pi$  je nespojitost prvního druhu a platí:*

$$f(\pi_-) = \pi \text{ a } f(\pi_+) = -\pi,$$

$$f(-\pi_-) = \pi$$

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Podle Dirichletovy věty 1 je součet této řady roven  $f(t) = t$  pro  $t \in (-\pi, \pi)$ .*

*V bodech  $\pm\pi$  je nespojitost prvního druhu a platí:*

$$f(\pi_-) = \pi \text{ a } f(\pi_+) = -\pi,$$

$$f(-\pi_-) = \pi \text{ a } f(-\pi_+) = -\pi.$$



# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Podle Dirichletovy věty 1 je součet této řady roven  $f(t) = t$  pro  $t \in (-\pi, \pi)$ .*

*V bodech  $\pm\pi$  je nespojitost prvního druhu a platí:*

$$f(\pi_-) = \pi \text{ a } f(\pi_+) = -\pi,$$

$$f(-\pi_-) = \pi \text{ a } f(-\pi_+) = -\pi.$$

*Tedy*

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Podle Dirichletovy věty 1 je součet této řady roven  $f(t) = t$  pro  $t \in (-\pi, \pi)$ .*

*V bodech  $\pm\pi$  je nespojitost prvního druhu a platí:*

$$f(\pi_-) = \pi \text{ a } f(\pi_+) = -\pi,$$

$$f(-\pi_-) = \pi \text{ a } f(-\pi_+) = -\pi.$$

*Tedy*

$$\frac{f(-\pi_+) + f(-\pi_-)}{2} = 0,$$

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Podle Dirichletovy věty 1 je součet této řady roven  $f(t) = t$  pro  $t \in (-\pi, \pi)$ .*

*V bodech  $\pm\pi$  je nespojitost prvního druhu a platí:*

$$f(\pi_-) = \pi \text{ a } f(\pi_+) = -\pi,$$

$$f(-\pi_-) = \pi \text{ a } f(-\pi_+) = -\pi.$$

*Tedy*

$$\frac{f(-\pi_+) + f(-\pi_-)}{2} = 0,$$

$$\frac{f(\pi_+) + f(\pi_-)}{2} = 0.$$

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Podle Dirichletovy věty 1 je součet této řady roven  $f(t) = t$  pro  $t \in (-\pi, \pi)$ .*

*V bodech  $\pm\pi$  je nespojitost prvního druhu a platí:*

$$f(\pi_-) = \pi \text{ a } f(\pi_+) = -\pi,$$

$$f(-\pi_-) = \pi \text{ a } f(-\pi_+) = -\pi.$$

*Tedy*

$$\frac{f(-\pi_+) + f(-\pi_-)}{2} = 0,$$

$$\frac{f(\pi_+) + f(\pi_-)}{2} = 0.$$

*Tyto hodnoty má součet řady v bodech  $\pm\pi$ ,*

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Podle Dirichletovy věty 1 je součet této řady roven  $f(t) = t$  pro  $t \in (-\pi, \pi)$ .*

*V bodech  $\pm\pi$  je nespojitost prvního druhu a platí:*

$$f(\pi_-) = \pi \text{ a } f(\pi_+) = -\pi,$$

$$f(-\pi_-) = \pi \text{ a } f(-\pi_+) = -\pi.$$

*Tedy*

$$\frac{f(-\pi_+) + f(-\pi_-)}{2} = 0,$$

$$\frac{f(\pi_+) + f(\pi_-)}{2} = 0.$$

*Tyto hodnoty má součet řady v bodech  $\pm\pi$ , tj.  $f(\pi) = 0$  a  $f(-\pi) = 0$ .*

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

# Rozvoj periodické funkce

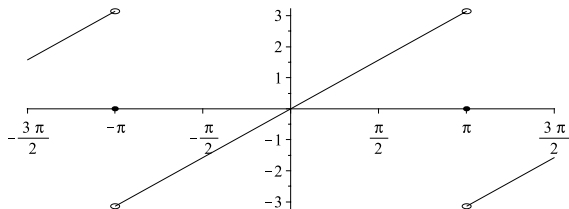
## Příklad 3

*Graf součtu je znázorněn*

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Graf součtu je znázorněn*





# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Částečné součty prvních členů jsou následující:*

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Částečné součty prvních členů jsou následující:*

$$s_1(t) =$$

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Částečné součty prvních členů jsou následující:*

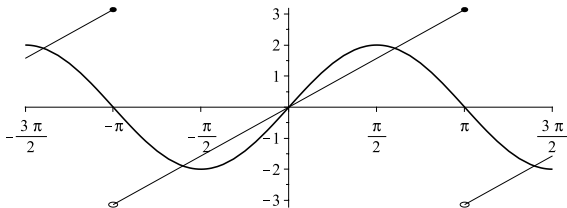
$$s_1(t) = 2 \sin(t)$$

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Částečné součty prvních členů jsou následující:*

$$s_1(t) = 2 \sin(t)$$



# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

$$s_2(t) =$$

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

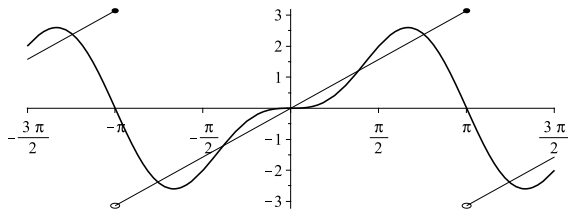
$$s_2(t) = 2 \left( \sin(t) - \frac{\sin(2t)}{2} \right)$$



# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

$$s_2(t) = 2 \left( \sin(t) - \frac{\sin(2t)}{2} \right)$$



# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

$$s_3(t) =$$

# Rozvoj periodické funkce

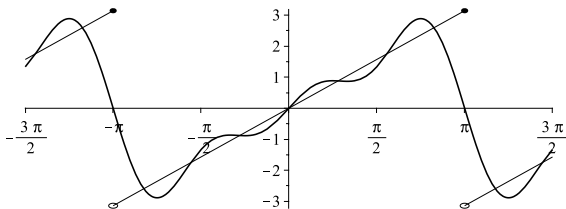
## Příklad 3

$$s_3(t) = 2 \left( \sin(t) - \frac{\sin(2t)}{2} + \frac{\sin(3t)}{3} \right)$$

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

$$s_3(t) = 2 \left( \sin(t) - \frac{\sin(2t)}{2} + \frac{\sin(3t)}{3} \right)$$



# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

$$s_4(t) =$$

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

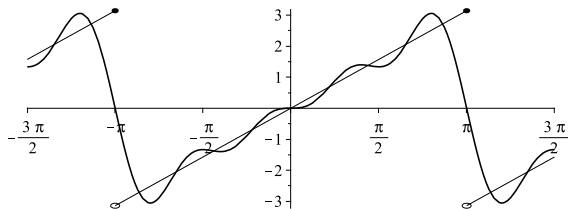
$$s_4(t) = 2 \left( \sin(t) - \frac{\sin(2t)}{2} + \frac{\sin(3t)}{3} - \frac{\sin(4t)}{4} \right)$$



# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

$$s_4(t) = 2 \left( \sin(t) - \frac{\sin(2t)}{2} + \frac{\sin(3t)}{3} - \frac{\sin(4t)}{4} \right)$$



# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Sestavme nyní jednostranné a dvoustranné fázové a amplitudové spektrum:*

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Sestavme nyní jednostranné a dvoustranné fázové a amplitudové spektrum:*

$$A_0 =$$

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Sestavme nyní jednostranné a dvoustranné fázové a amplitudové spektrum:*

$$A_0 = \left| \frac{a_0}{2} \right|$$

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Sestavme nyní jednostranné a dvoustranné fázové a amplitudové spektrum:*

$$A_0 = \left| \frac{a_0}{2} \right| = 0,$$

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Sestavme nyní jednostranné a dvoustranné fázové a amplitudové spektrum:*

$$A_0 = \left| \frac{a_0}{2} \right| = 0,$$

$$A_n =$$

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Sestavme nyní jednostranné a dvoustranné fázové a amplitudové spektrum:*

$$A_0 = \left| \frac{a_0}{2} \right| = 0,$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$



# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Sestavme nyní jednostranné a dvoustranné fázové a amplitudové spektrum:*

$$A_0 = \left| \frac{a_0}{2} \right| = 0,$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sqrt{0 + (-1)^{n+1} \frac{2}{n}}$$

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Sestavme nyní jednostranné a dvoustranné fázové a amplitudové spektrum:*

$$A_0 = \left| \frac{a_0}{2} \right| = 0,$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sqrt{0 + (-1)^{n+1} \frac{2}{n}} = \frac{2}{n},$$

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Sestavme nyní jednostranné a dvoustranné fázové a amplitudové spektrum:*

$$A_0 = \left| \frac{a_0}{2} \right| = 0,$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sqrt{0 + (-1)^{n+1} \frac{2}{n}} = \frac{2}{n},$$

$$c_n =$$

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Sestavme nyní jednostranné a dvoustranné fázové a amplitudové spektrum:*

$$A_0 = \left| \frac{a_0}{2} \right| = 0,$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sqrt{0 + (-1)^{n+1} \frac{2}{n}} = \frac{2}{n},$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$$

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Sestavme nyní jednostranné a dvoustranné fázové a amplitudové spektrum:*

$$A_0 = \left| \frac{a_0}{2} \right| = 0,$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sqrt{0 + (-1)^{n+1} \frac{2}{n}} = \frac{2}{n},$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2} \left( 0 - i(-1)^{n+1} \frac{2}{n} \right)$$

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Sestavme nyní jednostranné a dvoustranné fázové a amplitudové spektrum:*

$$A_0 = \left| \frac{a_0}{2} \right| = 0,$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sqrt{0 + (-1)^{n+1} \frac{2}{n}} = \frac{2}{n},$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2} \left( 0 - i(-1)^{n+1} \frac{2}{n} \right) = i(-1)^n \frac{1}{n},$$

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Sestavme nyní jednostranné a dvoustranné fázové a amplitudové spektrum:*

$$A_0 = \left| \frac{a_0}{2} \right| = 0,$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sqrt{0 + (-1)^{n+1} \frac{2}{n}} = \frac{2}{n},$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2} \left( 0 - i(-1)^{n+1} \frac{2}{n} \right) = i(-1)^n \frac{1}{n},$$

$$\varphi_n =$$

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Sestavme nyní jednostranné a dvoustranné fázové a amplitudové spektrum:*

$$A_0 = \left| \frac{a_0}{2} \right| = 0,$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sqrt{0 + (-1)^{n+1} \frac{2}{n}} = \frac{2}{n},$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2} \left( 0 - i(-1)^{n+1} \frac{2}{n} \right) = i(-1)^n \frac{1}{n},$$

$$\varphi_n = -\arg c_n$$



# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Sestavme nyní jednostranné a dvoustranné fázové a amplitudové spektrum:*

$$A_0 = \left| \frac{a_0}{2} \right| = 0,$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sqrt{0 + (-1)^{n+1} \frac{2}{n}} = \frac{2}{n},$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2} \left( 0 - i(-1)^{n+1} \frac{2}{n} \right) = i(-1)^n \frac{1}{n},$$

$$\varphi_n = -\arg c_n = \begin{cases} -\pi/2 & \text{pro } n = \dots, -5, -3, -1, 2, 4, 6, \dots, \end{cases}$$

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Sestavme nyní jednostranné a dvoustranné fázové a amplitudové spektrum:*

$$A_0 = \left| \frac{a_0}{2} \right| = 0,$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sqrt{0 + (-1)^{n+1} \frac{2}{n}} = \frac{2}{n},$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2} \left( 0 - i(-1)^{n+1} \frac{2}{n} \right) = i(-1)^n \frac{1}{n},$$

$$\varphi_n = -\arg c_n = \begin{cases} -\pi/2 & \text{pro } n = \dots, -5, -3, -1, 2, 4, 6, \dots, \\ \pi/2 & \text{pro } n = \dots, -6, -4, -2, 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

# Rozvoj periodické funkce

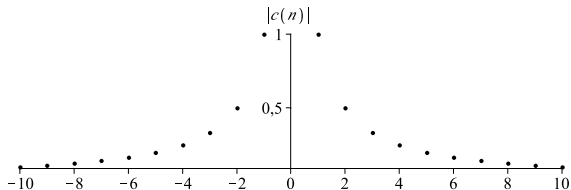
## Příklad 3

*Dvoustranné amplitudové spektrum je zobrazeno*

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Dvoustranné amplitudové spektrum je zobrazeno*



# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

# Rozvoj periodické funkce

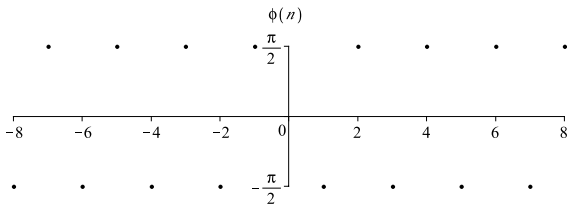
## Příklad 3

*Dvoustranné fázové spektrum je zobrazeno*

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Dvoustranné fázové spektrum je zobrazeno*





# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Hodnoty koeficientů jsou uvedeny v následující tabulce:*

# Rozvoj periodické funkce

## Příklad 3

*Hodnoty koeficientů jsou uvedeny v následující tabulce:*

| $n$         | -3       | -2      | -1       | 0 | 1       | 2        | 3       |
|-------------|----------|---------|----------|---|---------|----------|---------|
| $a_n$       | —        | —       | —        | 0 | 0       | 0        | 0       |
| $b_n$       | —        | —       | —        | — | 2       | -1       | 2/3     |
| $c_n$       | i/3      | -i/2    | i        | 0 | -i      | i/2      | -i/3    |
| $ c_n $     | 1/3      | 1/2     | 1        | 0 | 1       | 1/2      | 1/3     |
| $A_n$       | —        | —       | —        | 0 | 2       | 1        | 2/3     |
| $\varphi_n$ | $-\pi/2$ | $\pi/2$ | $-\pi/2$ | — | $\pi/2$ | $-\pi/2$ | $\pi/2$ |

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

*Rozviňme ve Fourierovu řadu periodickou funkci  $f(t)$  se základním intervalem periodicity  $(-\pi, \pi]$  zadanou předpisem*

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{pro } t \in [0, \pi], \\ -t & \text{pro } t \in (-\pi, 0), \end{cases} \quad (42)$$

*a proved'me spektrální analýzu.*

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

*Rozviňme ve Fourierovu řadu periodickou funkci  $f(t)$  se základním intervalem periodicity  $(-\pi, \pi]$  zadanou předpisem*

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{pro } t \in [0, \pi], \\ -t & \text{pro } t \in (-\pi, 0), \end{cases} \quad (42)$$

*a proved'me spektrální analýzu.  
Graf funkce je znázorněn*

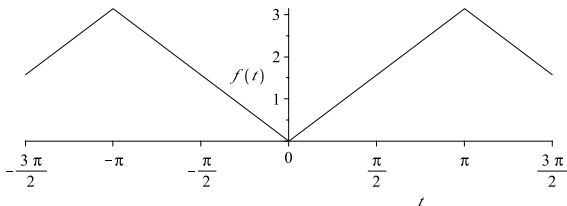
# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

Rozviňme ve Fourierovu řadu periodickou funkci  $f(t)$  se základním intervalem periodicity  $(-\pi, \pi]$  zadanou předpisem

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{pro } t \in [0, \pi], \\ -t & \text{pro } t \in (-\pi, 0), \end{cases} \quad (42)$$

a proved'me spektrální analýzu.  
Graf funkce je znázorněn



# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4



# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

*Nejprve ověříme Dirichletovy podmínky:*

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

*Nejprve ověříme Dirichletovy podmínky:*

- ▶ *funkce je zřejmě periodická,*

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

*Nejprve ověříme Dirichletovy podmínky:*

- ▶ *funkce je zřejmě periodická,*
- ▶ *funkce je spojitá,*

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

*Nejprve ověříme Dirichletovy podmínky:*

- ▶ *funkce je zřejmě periodická,*
- ▶ *funkce je spojitá,*
- ▶ *funkce je diferencovatelná na intervalu  $(k\pi, \pi + k\pi)$  pro  $k \in \mathbb{Z}$ .*

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

*Nejprve ověříme Dirichletovy podmínky:*

- ▶ *funkce je zřejmě periodická,*
- ▶ *funkce je spojitá,*
- ▶ *funkce je diferencovatelná na intervalu  $(k\pi, \pi + k\pi)$  pro  $k \in \mathbb{Z}$ .*

*Můžeme tedy spočítat Fourierovy koeficienty:*

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

*Nejprve ověříme Dirichletovy podmínky:*

- ▶ *funkce je zřejmě periodická,*
- ▶ *funkce je spojitá,*
- ▶ *funkce je diferencovatelná na intervalu  $(k\pi, \pi + k\pi)$  pro  $k \in \mathbb{Z}$ .*

*Můžeme tedy spočítat Fourierovy koeficienty:*

$$a_0 =$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

*Nejprve ověříme Dirichletovy podmínky:*

- ▶ *funkce je zřejmě periodická,*
- ▶ *funkce je spojitá,*
- ▶ *funkce je diferencovatelná na intervalu  $(k\pi, \pi + k\pi)$  pro  $k \in \mathbb{Z}$ .*

*Můžeme tedy spočítat Fourierovy koeficienty:*

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

*Nejprve ověříme Dirichletovy podmínky:*

- ▶ *funkce je zřejmě periodická,*
- ▶ *funkce je spojitá,*
- ▶ *funkce je diferencovatelná na intervalu  $(k\pi, \pi + k\pi)$  pro  $k \in \mathbb{Z}$ .*

*Můžeme tedy spočítat Fourierovy koeficienty:*

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 -t \, dt + \int_0^{\pi} t \, dt \right)$$



# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

*Nejprve ověříme Dirichletovy podmínky:*

- ▶ *funkce je zřejmě periodická,*
- ▶ *funkce je spojitá,*
- ▶ *funkce je diferencovatelná na intervalu  $(k\pi, \pi + k\pi)$  pro  $k \in \mathbb{Z}$ .*

*Můžeme tedy spočítat Fourierovy koeficienty:*

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 -t \, dt + \int_0^{\pi} t \, dt \right) = \pi,$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

*Nejprve ověříme Dirichletovy podmínky:*

- ▶ *funkce je zřejmě periodická,*
- ▶ *funkce je spojitá,*
- ▶ *funkce je diferencovatelná na intervalu  $(k\pi, \pi + k\pi)$  pro  $k \in \mathbb{Z}$ .*

*Můžeme tedy spočítat Fourierovy koeficienty:*

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 -t \, dt + \int_0^{\pi} t \, dt \right) = \pi,$$

$$a_n =$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

*Nejprve ověříme Dirichletovy podmínky:*

- ▶ *funkce je zřejmě periodická,*
- ▶ *funkce je spojitá,*
- ▶ *funkce je diferencovatelná na intervalu  $(k\pi, \pi + k\pi)$  pro  $k \in \mathbb{Z}$ .*

*Můžeme tedy spočítat Fourierovy koeficienty:*

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 -t \, dt + \int_0^{\pi} t \, dt \right) = \pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) \, dt$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

*Nejprve ověříme Dirichletovy podmínky:*

- ▶ *funkce je zřejmě periodická,*
- ▶ *funkce je spojitá,*
- ▶ *funkce je diferencovatelná na intervalu  $(k\pi, \pi + k\pi)$  pro  $k \in \mathbb{Z}$ .*

*Můžeme tedy spočítat Fourierovy koeficienty:*

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 -t \, dt + \int_0^{\pi} t \, dt \right) = \pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) \, dt = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 -t \cos(nt) \, dt + \int_0^{\pi} t \cos(nt) \, dt \right)$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

*Nejprve ověříme Dirichletovy podmínky:*

- ▶ *funkce je zřejmě periodická,*
- ▶ *funkce je spojitá,*
- ▶ *funkce je diferencovatelná na intervalu  $(k\pi, \pi + k\pi)$  pro  $k \in \mathbb{Z}$ .*

*Můžeme tedy spočítat Fourierovy koeficienty:*

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 -t \, dt + \int_0^{\pi} t \, dt \right) = \pi,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) \, dt = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 -t \cos(nt) \, dt + \int_0^{\pi} t \cos(nt) \, dt \right) \\ &= \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1), \end{aligned}$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

Nejprve ověříme Dirichletovy podmínky:

- ▶ funkce je zřejmě periodická,
- ▶ funkce je spojitá,
- ▶ funkce je diferencovatelná na intervalu  $(k\pi, \pi + k\pi)$  pro  $k \in \mathbb{Z}$ .

Můžeme tedy spočítat Fourierovy koeficienty:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 -t \, dt + \int_0^{\pi} t \, dt \right) = \pi,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) \, dt = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 -t \cos(nt) \, dt + \int_0^{\pi} t \cos(nt) \, dt \right) \\ &= \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1), \end{aligned}$$

$$b_n =$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

*Nejprve ověříme Dirichletovy podmínky:*

- ▶ *funkce je zřejmě periodická,*
- ▶ *funkce je spojitá,*
- ▶ *funkce je diferencovatelná na intervalu  $(k\pi, \pi + k\pi)$  pro  $k \in \mathbb{Z}$ .*

*Můžeme tedy spočítat Fourierovy koeficienty:*

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 -t \, dt + \int_0^{\pi} t \, dt \right) = \pi,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) \, dt = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 -t \cos(nt) \, dt + \int_0^{\pi} t \cos(nt) \, dt \right) \\ &= \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1), \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) \, dt$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

*Nejprve ověříme Dirichletovy podmínky:*

- ▶ *funkce je zřejmě periodická,*
- ▶ *funkce je spojitá,*
- ▶ *funkce je diferencovatelná na intervalu  $(k\pi, \pi + k\pi)$  pro  $k \in \mathbb{Z}$ .*

*Můžeme tedy spočítat Fourierovy koeficienty:*

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 -t \, dt + \int_0^{\pi} t \, dt \right) = \pi,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) \, dt = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 -t \cos(nt) \, dt + \int_0^{\pi} t \cos(nt) \, dt \right) \\ &= \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1), \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) \, dt = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 -t \sin(nt) \, dt + \int_0^{\pi} t \sin(nt) \, dt \right)$$



# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

Nejprve ověříme Dirichletovy podmínky:

- ▶ funkce je zřejmě periodická,
- ▶ funkce je spojitá,
- ▶ funkce je diferencovatelná na intervalu  $(k\pi, \pi + k\pi)$  pro  $k \in \mathbb{Z}$ .

Můžeme tedy spočítat Fourierovy koeficienty:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 -t \, dt + \int_0^{\pi} t \, dt \right) = \pi,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) \, dt = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 -t \cos(nt) \, dt + \int_0^{\pi} t \cos(nt) \, dt \right) \\ &= \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1), \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) \, dt = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 -t \sin(nt) \, dt + \int_0^{\pi} t \sin(nt) \, dt \right) = 0$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

*Všimněme si, že*

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

Všimněme si, že

- *rozvíjená funkce je sudá,*

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

*Všimněme si, že*

- ▶ *rozvíjená funkce je sudá,*
- ▶ *všechny koeficienty  $b_n$  jsou nulové,*

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

*Všimněme si, že*

- ▶ *rozvíjená funkce je sudá,*
- ▶ *všechny koeficienty  $b_n$  jsou nulové,*
- ▶ *příslušná Fourierova řada bude mít pouze cosinové členy.*

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

*Všimněme si, že*

- ▶ *rozvíjená funkce je sudá,*
- ▶ *všechny koeficienty  $b_n$  jsou nulové,*
- ▶ *příslušná Fourierova řada bude mít pouze cosinové členy.*

*Hledaný rozvoj naší funkce tedy je*

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

*Všimněme si, že*

- ▶ *rozvíjená funkce je sudá,*
- ▶ *všechny koeficienty  $b_n$  jsou nulové,*
- ▶ *příslušná Fourierova řada bude mít pouze cosinové členy.*

*Hledaný rozvoj naší funkce tedy je*

$$f(t) =$$



# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

*Všimněme si, že*

- ▶ *rozvíjená funkce je sudá,*
- ▶ *všechny koeficienty  $b_n$  jsou nulové,*
- ▶ *příslušná Fourierova řada bude mít pouze cosinové členy.*

*Hledaný rozvoj naší funkce tedy je*

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)t}{(2n-1)^2}.$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

*Součet této řady roven  $f(t)$  pro  $t \in \mathbb{R}$ .*

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

*Součet této řady roven  $f(t)$  pro  $t \in \mathbb{R}$ .*

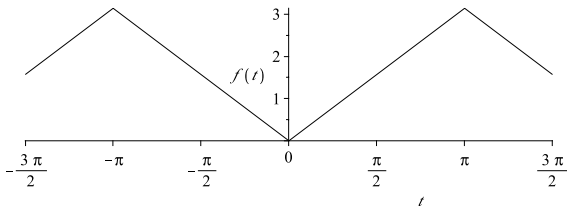
*Graf součtu je znázorněn na obrázku*

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

Součet této řady roven  $f(t)$  pro  $t \in \mathbb{R}$ .

Graf součtu je znázorněn na obrázku



# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

*Částečné součty prvních členů jsou následující:*

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

*Částečné součty prvních členů jsou následující:*

$$s_2(t) =$$



# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

*Částečné součty prvních členů jsou následující:*

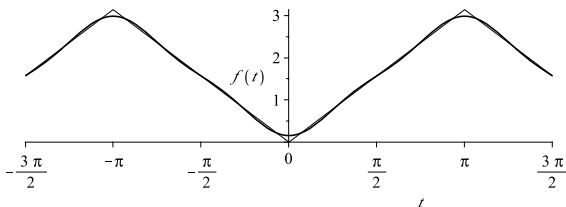
$$s_2(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left( \cos(t) + \frac{\cos(3t)}{9} \right)$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

Částečné součty prvních členů jsou následující:

$$s_2(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left( \cos(t) + \frac{\cos(3t)}{9} \right)$$



# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

$$s_3(t) =$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

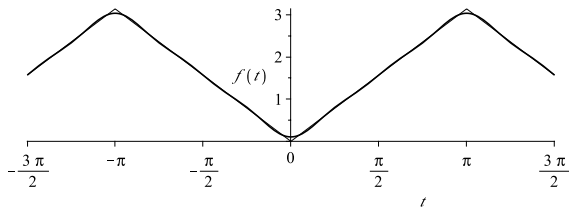
## Příklad 4

$$s_3(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left( \cos(t) + \frac{\cos(3t)}{9} + \frac{\cos(5t)}{25} \right)$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

$$s_3(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left( \cos(t) + \frac{\cos(3t)}{9} + \frac{\cos(5t)}{25} \right)$$



# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

*Sestavme nyní jednostranné a dvoustranné fázové a amplitudové spektrum:*



# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

*Sestavme nyní jednostranné a dvoustranné fázové a amplitudové spektrum:*

$$A_0 =$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

*Sestavme nyní jednostranné a dvoustranné fázové a amplitudové spektrum:*

$$A_0 = \left| \frac{a_0}{2} \right|$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

*Sestavme nyní jednostranné a dvoustranné fázové a amplitudové spektrum:*

$$A_0 = \left| \frac{a_0}{2} \right| = \pi/2,$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

*Sestavme nyní jednostranné a dvoustranné fázové a amplitudové spektrum:*

$$A_0 = \left| \frac{a_0}{2} \right| = \pi/2,$$

$$A_n =$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

*Sestavme nyní jednostranné a dvoustranné fázové a amplitudové spektrum:*

$$A_0 = \left| \frac{a_0}{2} \right| = \pi/2,$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

*Sestavme nyní jednostranné a dvoustranné fázové a amplitudové spektrum:*

$$A_0 = \left| \frac{a_0}{2} \right| = \pi/2,$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1) + 0}$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

*Sestavme nyní jednostranné a dvoustranné fázové a amplitudové spektrum:*

$$A_0 = \left| \frac{a_0}{2} \right| = \pi/2,$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1) + 0} = \frac{2}{\pi n^2}|(-1)^n - 1|,$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

*Sestavme nyní jednostranné a dvoustranné fázové a amplitudové spektrum:*

$$A_0 = \left| \frac{a_0}{2} \right| = \pi/2,$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1) + 0} = \frac{2}{\pi n^2}|(-1)^n - 1|,$$

$$C_n =$$



# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

*Sestavme nyní jednostranné a dvoustranné fázové a amplitudové spektrum:*

$$A_0 = \left| \frac{a_0}{2} \right| = \pi/2,$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1) + 0} = \frac{2}{\pi n^2}|(-1)^n - 1|,$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

*Sestavme nyní jednostranné a dvoustranné fázové a amplitudové spektrum:*

$$A_0 = \left| \frac{a_0}{2} \right| = \pi/2,$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1) + 0} = \frac{2}{\pi n^2}|(-1)^n - 1|,$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1) - i0 \right)$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

*Sestavme nyní jednostranné a dvoustranné fázové a amplitudové spektrum:*

$$A_0 = \left| \frac{a_0}{2} \right| = \pi/2,$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1) + 0} = \frac{2}{\pi n^2}|(-1)^n - 1|,$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1) - i0 \right) = \frac{1}{\pi n^2}((-1)^n - 1),$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

*Sestavme nyní jednostranné a dvoustranné fázové a amplitudové spektrum:*

$$A_0 = \left| \frac{a_0}{2} \right| = \pi/2,$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1) + 0} = \frac{2}{\pi n^2}|(-1)^n - 1|,$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1) - i0 \right) = \frac{1}{\pi n^2}((-1)^n - 1),$$

$$\varphi_n =$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

*Sestavme nyní jednostranné a dvoustranné fázové a amplitudové spektrum:*

$$A_0 = \left| \frac{a_0}{2} \right| = \pi/2,$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1) + 0} = \frac{2}{\pi n^2}|(-1)^n - 1|,$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1) - i0 \right) = \frac{1}{\pi n^2}((-1)^n - 1),$$

$$\varphi_n = -\arg c_n$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

*Sestavme nyní jednostranné a dvoustranné fázové a amplitudové spektrum:*

$$A_0 = \left| \frac{a_0}{2} \right| = \pi/2,$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1) + 0} = \frac{2}{\pi n^2} |(-1)^n - 1|,$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1) - i0 \right) = \frac{1}{\pi n^2}((-1)^n - 1),$$

$$\varphi_n = -\arg c_n = \begin{cases} 0 & \text{pro } n = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots, \end{cases}$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

*Sestavme nyní jednostranné a dvoustranné fázové a amplitudové spektrum:*

$$A_0 = \left| \frac{a_0}{2} \right| = \pi/2,$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1) + 0} = \frac{2}{\pi n^2}|(-1)^n - 1|,$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1) - i0 \right) = \frac{1}{\pi n^2}((-1)^n - 1),$$

$$\varphi_n = -\arg c_n = \begin{cases} 0 & \text{pro } n = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots, \\ \pi & \text{pro } n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots \end{cases}$$

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4



# Fourierova řada v komplexním oboru

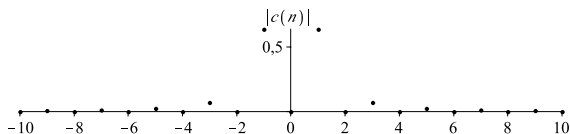
## Příklad 4

*Dvoustranné amplitudové spektrum je znázorněno*

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

*Dvoustranné amplitudové spektrum je znázorněno*



# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

# Fourierova řada v komplexním oboru

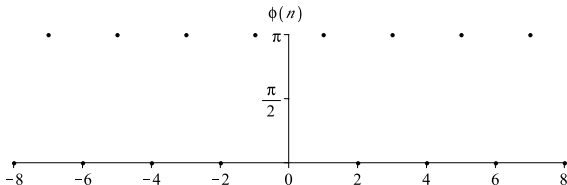
## Příklad 4

*Dvoustranné fázové spektrum je znázorněno*

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

*Dvoustranné fázové spektrum je znázorněno*



# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

*Hodnoty koeficientů jsou uvedeny v následující tabulce:*

# Fourierova řada v komplexním oboru

## Příklad 4

*Hodnoty koeficientů jsou uvedeny v následující tabulce:*

| $n$         | -3          | -2 | -1       | 0       | 1        | 2 | 3           |
|-------------|-------------|----|----------|---------|----------|---|-------------|
| $a_n$       | —           | —  | —        | $\pi$   | $-4/\pi$ | 0 | $-4/(9\pi)$ |
| $b_n$       | —           | —  | —        | —       | 0        | 0 | 0           |
| $c_n$       | $-2/(9\pi)$ | 0  | $-2/\pi$ | $\pi/2$ | $-2/\pi$ | 0 | $-2/(9\pi)$ |
| $ c_n $     | $2/(9\pi)$  | 0  | $2/\pi$  | 0       | $2/\pi$  | 0 | $2/(9\pi)$  |
| $A_n$       | —           | —  | —        | $\pi/2$ | $4/\pi$  | 0 | $4/(9\pi)$  |
| $\varphi_n$ | $\pi$       | 0  | $\pi$    | —       | $\pi$    | 0 | $\pi$       |



# Sinová a cosinová řada

# Sinová a cosinová řada

## Věta 2

# Sinová a cosinová řada

## Věta 2

*Bud'  $f(t)$  lichá funkce s periodou  $2\pi$  splňující Dirichletovy podmínky.*

# Sinová a cosinová řada

## Věta 2

*Bud'  $f(t)$  lichá funkce s periodou  $2\pi$  splňující Dirichletovy podmínky.  
Pak její Fourierův rozvoj obsahuje pouze sinové členy*

# Sinová a cosinová řada

## Věta 2

*Bud'  $f(t)$  lichá funkce s periodou  $2\pi$  splňující Dirichletovy podmínky.  
Pak její Fourierův rozvoj obsahuje pouze sinové členy*

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt). \quad (43)$$

# Sinová a cosinová řada

## Věta 2

*Bud'  $f(t)$  lichá funkce s periodou  $2\pi$  splňující Dirichletovy podmínky.  
Pak její Fourierův rozvoj obsahuje pouze sinové členy*

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt). \quad (43)$$

## Věta 3

# Sinová a cosinová řada

## Věta 2

*Bud'  $f(t)$  lichá funkce s periodou  $2\pi$  splňující Dirichletovy podmínky.  
Pak její Fourierův rozvoj obsahuje pouze sinové členy*

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt). \quad (43)$$

## Věta 3

*Bud'  $f(t)$  sudá periodická funkce s periodou  $2\pi$  splňující Dirichletovy podmínky.*

# Sinová a cosinová řada

## Věta 2

*Bud'  $f(t)$  lichá funkce s periodou  $2\pi$  splňující Dirichletovy podmínky. Pak její Fourierův rozvoj obsahuje pouze sinové členy*

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt). \quad (43)$$

## Věta 3

*Bud'  $f(t)$  sudá periodická funkce s periodou  $2\pi$  splňující Dirichletovy podmínky. Pak její Fourierův rozvoj obsahuje pouze cosinové členy*



# Sinová a cosinová řada

## Věta 2

*Bud'  $f(t)$  lichá funkce s periodou  $2\pi$  splňující Dirichletovy podmínky. Pak její Fourierův rozvoj obsahuje pouze sinové členy*

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt). \quad (43)$$

## Věta 3

*Bud'  $f(t)$  sudá periodická funkce s periodou  $2\pi$  splňující Dirichletovy podmínky. Pak její Fourierův rozvoj obsahuje pouze cosinové členy*

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt). \quad (44)$$

# Sinová a cosinová řada

# Sinová a cosinová řada

Nechť je funkce  $f(t)$  **lichá** s periodou  $T = 2l$  se základním intervalem periodicity  $(-l, l]$ .

# Sinová a cosinová řada

Nechť je funkce  $f(t)$  **lichá** s periodou  $T = 2l$  se základním intervalem periodicity  $(-l, l]$ .

Pak budou všechny koeficienty  $a_n = 0$

# Sinová a cosinová řada

Nechť je funkce  $f(t)$  lichá s periodou  $T = 2l$  se základním intervalem periodicity  $(-l, l]$ .

Pak budou všechny koeficienty  $a_n = 0$  a

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \sin\left(n\frac{\pi}{l}t\right) dt.$$

# Sinová a cosinová řada

Nechť je funkce  $f(t)$  **lichá** s periodou  $T = 2l$  se základním intervalem periodicity  $(-l, l]$ .

Pak budou všechny koeficienty  $a_n = 0$  a

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \sin\left(n\frac{\pi}{l}t\right) dt.$$

Nechť je funkce  $f(t)$  **sudá** s periodou  $T = 2l$  se základním intervalem periodicity  $(-l, l]$ .

# Sinová a cosinová řada

Nechť je funkce  $f(t)$  lichá s periodou  $T = 2l$  se základním intervalem periodicity  $(-l, l]$ .

Pak budou všechny koeficienty  $a_n = 0$  a

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \sin\left(n\frac{\pi}{l}t\right) dt.$$

Nechť je funkce  $f(t)$  **sudá** s periodou  $T = 2l$  se základním intervalem periodicity  $(-l, l]$ .

Pak budou všechny koeficienty  $b_n = 0$

# Sinová a cosinová řada

Nechť je funkce  $f(t)$  lichá s periodou  $T = 2l$  se základním intervalem periodicity  $(-l, l]$ .

Pak budou všechny koeficienty  $a_n = 0$  a

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \sin\left(n\frac{\pi}{l}t\right) dt.$$

Nechť je funkce  $f(t)$  sudá s periodou  $T = 2l$  se základním intervalem periodicity  $(-l, l]$ .

Pak budou všechny koeficienty  $b_n = 0$  a

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \cos\left(n\frac{\pi}{l}t\right) dt.$$



# Sinová a cosinová řada

Nechť je funkce  $f(t)$  lichá s periodou  $T = 2l$  se základním intervalem periodicity  $(-l, l]$ .

Pak budou všechny koeficienty  $a_n = 0$  a

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \sin \left( n \frac{\pi}{l} t \right) dt.$$

Nechť je funkce  $f(t)$  sudá s periodou  $T = 2l$  se základním intervalem periodicity  $(-l, l]$ .

Pak budou všechny koeficienty  $b_n = 0$  a

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \cos \left( n \frac{\pi}{l} t \right) dt.$$

Předpokládejme, že máme na intervalu  $(0, l]$  funkci  $f(t)$  splňující Dirichletovy podmínky a chceme ji rozvinout ve Fourierovu řadu.

# Sinová a cosinová řada

Nechť je funkce  $f(t)$  lichá s periodou  $T = 2l$  se základním intervalem periodicity  $(-l, l]$ .

Pak budou všechny koeficienty  $a_n = 0$  a

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \sin \left( n \frac{\pi}{l} t \right) dt.$$

Nechť je funkce  $f(t)$  sudá s periodou  $T = 2l$  se základním intervalem periodicity  $(-l, l]$ .

Pak budou všechny koeficienty  $b_n = 0$  a

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \cos \left( n \frac{\pi}{l} t \right) dt.$$

Předpokládejme, že máme na intervalu  $(0, l]$  funkci  $f(t)$  splňující Dirichletovy podmínky a chceme ji rozvinout ve Fourierovu řadu. Zadanou funkci je možno prodloužit na interval  $(-l, l]$ .

# Sinová a cosinová řada

Nechť je funkce  $f(t)$  lichá s periodou  $T = 2l$  se základním intervalem periodicity  $(-l, l]$ .

Pak budou všechny koeficienty  $a_n = 0$  a

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \sin\left(n\frac{\pi}{l}t\right) dt.$$

Nechť je funkce  $f(t)$  sudá s periodou  $T = 2l$  se základním intervalem periodicity  $(-l, l]$ .

Pak budou všechny koeficienty  $b_n = 0$  a

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \cos\left(n\frac{\pi}{l}t\right) dt.$$

Předpokládejme, že máme na intervalu  $(0, l]$  funkci  $f(t)$  splňující Dirichletovy podmínky a chceme ji rozvinout ve Fourierovu řadu.

Zadanou funkci je možno prodloužit na interval  $(-l, l]$ .

To můžeme provést tak, že se na intervalu  $(-l, 0)$  dodefinuje tak, aby prodloužení bylo sudé či liché.

# Sinová a cosinová řada

# Sinová a cosinová řada

## Definice 1

# Sinová a cosinová řada

## Definice 1

*Bud'  $f(t)$  po částech spojitá funkce na intervalu  $(0, l]$ . **Liché periodické prodloužení funkce  $f(t)$**  se základním intervalem periodicity  $(-l, l]$  je funkce  $g(t)$  definovaná předpisem*

# Sinová a cosinová řada

## Definice 1

Bud'  $f(t)$  po částech spojitá funkce na intervalu  $(0, l]$ . *Liché periodické prodloužení funkce  $f(t)$  se základním intervalem periodicity  $(-l, l]$  je funkce  $g(t)$  definovaná předpisem*

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & \text{pro } t \in [0, l], \\ -f(-t) & \text{pro } t \in (-l, 0). \end{cases} \quad (45)$$

# Sinová a cosinová řada

## Definice 1

Bud'  $f(t)$  po částech spojitá funkce na intervalu  $(0, l]$ . *Liché periodické prodloužení funkce  $f(t)$  se základním intervalem periodicity  $(-l, l]$  je funkce  $g(t)$  definovaná předpisem*

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & \text{pro } t \in [0, l], \\ -f(-t) & \text{pro } t \in (-l, 0). \end{cases} \quad (45)$$

## Definice 2



# Sinová a cosinová řada

## Definice 1

Bud'  $f(t)$  po částech spojitá funkce na intervalu  $(0, l]$ . *Liché periodické prodloužení funkce  $f(t)$*  se základním intervalem periodicity  $(-l, l]$  je funkce  $g(t)$  definovaná předpisem

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & \text{pro } t \in [0, l], \\ -f(-t) & \text{pro } t \in (-l, 0). \end{cases} \quad (45)$$

## Definice 2

Bud'  $f(t)$  po částech spojitá funkce na intervalu  $(0, l]$ . *Sudé periodické prodloužení funkce  $f(t)$*  se základním intervalem periodicity  $(-l, l]$  je funkce  $g(t)$  definovaná předpisem

# Sinová a cosinová řada

## Definice 1

Bud'  $f(t)$  po částech spojitá funkce na intervalu  $(0, l]$ . *Liché periodické prodloužení funkce  $f(t)$*  se základním intervalem periodicity  $(-l, l]$  je funkce  $g(t)$  definovaná předpisem

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & \text{pro } t \in [0, l], \\ -f(-t) & \text{pro } t \in (-l, 0). \end{cases} \quad (45)$$

## Definice 2

Bud'  $f(t)$  po částech spojitá funkce na intervalu  $(0, l]$ . *Sudé periodické prodloužení funkce  $f(t)$*  se základním intervalem periodicity  $(-l, l]$  je funkce  $g(t)$  definovaná předpisem

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & \text{pro } t \in (0, l], \\ f(-t) & \text{pro } t \in (-l, 0). \end{cases} \quad (46)$$

# Sinová a cosinová řada

# Sinová a cosinová řada

Řada

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt) \quad (47)$$

se nazývá *sinova Fourierova řada*.

# Sinová a cosinová řada

Řada

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt) \quad (47)$$

se nazývá *sinova Fourierova řada*.

Řada

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) \quad (48)$$

se nazývá *cosinova Fourierova řada*.

# Sinová a cosinová řada

# Sinová a cosinová řada

## Příklad 5

# Sinová a cosinová řada

## Příklad 5

*Rozviňme následující funkci v sinovu a cosinovu Fourierovu řadu*

$$f(t) = t \sin(t) \text{ pro } t \in (0, \pi]. \quad (49)$$



# Sinová a cosinová řada

## Příklad 5

*Rozviňme následující funkci v sinovu a cosinovu Fourierovu řadu*

$$f(t) = t \sin(t) \text{ pro } t \in (0, \pi]. \quad (49)$$

Sinova Fourierova řada

# Sinová a cosinová řada

## Příklad 5

*Rozviňme následující funkci v sinovu a cosinovu Fourierovu řadu*

$$f(t) = t \sin(t) \text{ pro } t \in (0, \pi]. \quad (49)$$

Sinova Fourierova řada

*Nejprve provedeme liché prodloužení.*

# Sinová a cosinová řada

## Příklad 5

*Rozviňme následující funkci v sinovu a cosinovu Fourierovu řadu*

$$f(t) = t \sin(t) \text{ pro } t \in (0, \pi]. \quad (49)$$

Sinova Fourierova řada

*Nejprve provedeme liché prodloužení.*

*Rozvíjená funkce má periodu  $2\pi$  a základní interval periodicity  $(-\pi, \pi]$ .*

# Sinová a cosinová řada

## Příklad 5

*Rozviňme následující funkci v sinovu a cosinovu Fourierovu řadu*

$$f(t) = t \sin(t) \text{ pro } t \in (0, \pi]. \quad (49)$$

Sinova Fourierova řada

*Nejprve provedeme liché prodloužení.*

*Rozvíjená funkce má periodu  $2\pi$  a základní interval periodicity  $(-\pi, \pi]$ .*

*Podle Věty 2 platí*

# Sinová a cosinová řada

## Příklad 5

*Rozviňme následující funkci v sinovu a cosinovu Fourierovu řadu*

$$f(t) = t \sin(t) \text{ pro } t \in (0, \pi]. \quad (49)$$

Sinova Fourierova řada

*Nejprve provedeme liché prodloužení.*

*Rozvíjená funkce má periodu  $2\pi$  a základní interval periodicity  $(-\pi, \pi]$ .*

*Podle Věty 2 platí*

$$a_n = 0$$

# Sinová a cosinová řada

## Příklad 5

*Rozviňme následující funkci v sinovu a cosinovu Fourierovu řadu*

$$f(t) = t \sin(t) \text{ pro } t \in (0, \pi]. \quad (49)$$

Sinova Fourierova řada

*Nejprve provedeme liché prodloužení.*

*Rozvíjená funkce má periodu  $2\pi$  a základní interval periodicity  $(-\pi, \pi]$ .*

*Podle Věty 2 platí*

$$a_n = 0$$

$a$

$$b_n =$$

# Sinová a cosinová řada

## Příklad 5

*Rozviňme následující funkci v sinovu a cosinovu Fourierovu řadu*

$$f(t) = t \sin(t) \text{ pro } t \in (0, \pi]. \quad (49)$$

Sinova Fourierova řada

*Nejprve provedeme liché prodloužení.*

*Rozvíjená funkce má periodu  $2\pi$  a základní interval periodicity  $(-\pi, \pi]$ .*

*Podle Věty 2 platí*

$$a_n = 0$$

a

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \sin\left(n\frac{\pi}{l}t\right) dt.$$

# Sinová a cosinová řada

## Příklad 5

*Rozvíňme následující funkci v sinovu a cosinovu Fourierovu řadu*

$$f(t) = t \sin(t) \text{ pro } t \in (0, \pi]. \quad (49)$$

Sinova Fourierova řada

*Nejprve provedeme liché prodloužení.*

*Rozvíjená funkce má periodu  $2\pi$  a základní interval periodicity  $(-\pi, \pi]$ .*

*Podle Věty 2 platí*

$$a_n = 0$$

*a*

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \sin\left(n\frac{\pi}{l}t\right) dt.$$

*Tedy pro  $n = 2, 3, \dots$  je*



# Sinová a cosinová řada

## Příklad 5

*Rozvíňme následující funkci v sinovu a cosinovu Fourierovu řadu*

$$f(t) = t \sin(t) \text{ pro } t \in (0, \pi]. \quad (49)$$

Sinova Fourierova řada

*Nejprve provedeme liché prodloužení.*

*Rozvíjená funkce má periodu  $2\pi$  a základní interval periodicity  $(-\pi, \pi]$ .*

*Podle Věty 2 platí*

$$a_n = 0$$

*a*

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \sin\left(n \frac{\pi}{l} t\right) dt.$$

*Tedy pro  $n = 2, 3, \dots$  je*

$$b_n =$$

# Sinová a cosinová řada

## Příklad 5

*Rozvíňme následující funkci v sinovu a cosinovu Fourierovu řadu*

$$f(t) = t \sin(t) \text{ pro } t \in (0, \pi]. \quad (49)$$

Sinova Fourierova řada

*Nejprve provedeme liché prodloužení.*

*Rozvíjená funkce má periodu  $2\pi$  a základní interval periodicity  $(-\pi, \pi]$ .*

*Podle Věty 2 platí*

$$a_n = 0$$

*a*

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \sin\left(n \frac{\pi}{l} t\right) dt.$$

*Tedy pro  $n = 2, 3, \dots$  je*

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t \sin(t) \sin(nt) dt = \frac{4n}{\pi} \frac{(-1)^n - 1}{(n-1)^2(n+1)^2}.$$

# Sinová a cosinová řada

## Příklad 5

# Sinová a cosinová řada

## Příklad 5

*Pro  $n = 1$  dostáváme*

# Sinová a cosinová řada

## Příklad 5

*Pro  $n = 1$  dostáváme*

$$b_1 =$$

# Sinová a cosinová řada

## Příklad 5

*Pro  $n = 1$  dostáváme*

$$b_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin^2(t) \, dt = \frac{\pi}{2}.$$

# Sinová a cosinová řada

## Příklad 5

*Pro  $n = 1$  dostáváme*

$$b_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin^2(t) \, dt = \frac{\pi}{2}.$$

*Daná řada má tvar*

# Sinová a cosinová řada

## Příklad 5

*Pro  $n = 1$  dostáváme*

$$b_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin^2(t) \, dt = \frac{\pi}{2}.$$

*Daná řada má tvar*

$$f(t) =$$



# Sinová a cosinová řada

## Příklad 5

*Pro  $n = 1$  dostáváme*

$$b_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin^2(t) \, dt = \frac{\pi}{2}.$$

*Daná řada má tvar*

$$f(t) = \frac{\pi}{2} \sin(t) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4n}{\pi} \frac{(-1)^n - 1}{(n-1)^2(n+1)^2} \sin(nt).$$

# Sinová a cosinová řada

## Příklad 5

*Pro  $n = 1$  dostáváme*

$$b_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin^2(t) \, dt = \frac{\pi}{2}.$$

*Daná řada má tvar*

$$f(t) = \frac{\pi}{2} \sin(t) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4n}{\pi} \frac{(-1)^n - 1}{(n-1)^2(n+1)^2} \sin(nt).$$

*Liché prodloužení funkce je znázorněno grafem*

# Sinová a cosinová řada

## Příklad 5

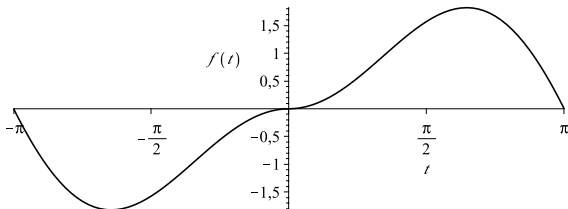
*Pro  $n = 1$  dostáváme*

$$b_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin^2(t) dt = \frac{\pi}{2}.$$

*Daná řada má tvar*

$$f(t) = \frac{\pi}{2} \sin(t) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4n}{\pi} \frac{(-1)^n - 1}{(n-1)^2(n+1)^2} \sin(nt).$$

*Liché prodloužení funkce je znázorněno grafem*



# Sinová a cosinová řada

## Příklad 5

# Sinová a cosinová řada

## Příklad 5

### Cosinova Fourierova řada

# Sinová a cosinová řada

## Příklad 5

Cosinova Fourierova řada

*Nejprve provedeme sudé prodloužení.*

# Sinová a cosinová řada

## Příklad 5

### Cosinova Fourierova řada

*Nejprve provedeme sudé prodloužení.*

*Rozvíjená funkce má tedy periodu  $2\pi$  a základní interval periodicity  $(-\pi, \pi]$ .*

# Sinová a cosinová řada

## Příklad 5

### Cosinova Fourierova řada

*Nejprve provedeme sudé prodloužení.*

*Rozvíjená funkce má tedy periodu  $2\pi$  a základní interval periodicity  $(-\pi, \pi]$ .*

*Podle Věty 3 je*



# Sinová a cosinová řada

## Příklad 5

### Cosinova Fourierova řada

*Nejprve provedeme sudé prodloužení.*

*Rozvíjená funkce má tedy periodu  $2\pi$  a základní interval periodicity  $(-\pi, \pi]$ .*

*Podle Věty 3 je*

$$b_n = 0$$

# Sinová a cosinová řada

## Příklad 5

### Cosinova Fourierova řada

*Nejprve provedeme sudé prodloužení.*

*Rozvíjená funkce má tedy periodu  $2\pi$  a základní interval periodicity  $(-\pi, \pi]$ .*

*Podle Věty 3 je*

$$b_n = 0$$

*a*

$$a_n =$$

# Sinová a cosinová řada

## Příklad 5

### Cosinova Fourierova řada

*Nejprve provedeme sudé prodloužení.*

*Rozvíjená funkce má tedy periodu  $2\pi$  a základní interval periodicity  $(-\pi, \pi]$ .*

*Podle Věty 3 je*

$$b_n = 0$$

*a*

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \cos\left(n\frac{\pi}{l}t\right) dt.$$

# Sinová a cosinová řada

## Příklad 5

### Cosinova Fourierova řada

*Nejprve provedeme sudé prodloužení.*

*Rozvíjená funkce má tedy periodu  $2\pi$  a základní interval periodicity  $(-\pi, \pi]$ .*

*Podle Věty 3 je*

$$b_n = 0$$

*a*

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \cos\left(n\frac{\pi}{l}t\right) dt.$$

*Tedy pro  $n = 0, 2, 3, \dots$  je*

# Sinová a cosinová řada

## Příklad 5

### Cosinova Fourierova řada

*Nejprve provedeme sudé prodloužení.*

*Rozvíjená funkce má tedy periodu  $2\pi$  a základní interval periodicity  $(-\pi, \pi]$ .*

*Podle Věty 3 je*

$$b_n = 0$$

*a*

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \cos\left(n\frac{\pi}{l}t\right) dt.$$

*Tedy pro  $n = 0, 2, 3, \dots$  je*

$$a_n =$$

# Sinová a cosinová řada

## Příklad 5

### Cosinova Fourierova řada

*Nejprve provedeme sudé prodloužení.*

*Rozvíjená funkce má tedy periodu  $2\pi$  a základní interval periodicity  $(-\pi, \pi]$ .*

*Podle Věty 3 je*

$$b_n = 0$$

*a*

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \cos\left(n\frac{\pi}{l}t\right) dt.$$

*Tedy pro  $n = 0, 2, 3, \dots$  je*

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t \sin(t) \cos(nt) dt = 2 \frac{(-1)^{n+1}}{(n-1)(n+1)}.$$

# Sinová a cosinová řada

## Příklad 5

# Sinová a cosinová řada

## Příklad 5

*Pro  $n = 1$  dostáváme*



# Sinová a cosinová řada

## Příklad 5

*Pro  $n = 1$  dostáváme*

$$a_1 =$$

# Sinová a cosinová řada

## Příklad 5

*Pro  $n = 1$  dostáváme*

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin(t) \cos(t) \, dt = \frac{1}{2}.$$

# Sinová a cosinová řada

## Příklad 5

*Pro  $n = 1$  dostáváme*

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin(t) \cos(t) \, dt = \frac{1}{2}.$$

*Daná řada má tvar*

# Sinová a cosinová řada

## Příklad 5

*Pro  $n = 1$  dostáváme*

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin(t) \cos(t) \, dt = \frac{1}{2}.$$

*Daná řada má tvar*

$$f(t) =$$

# Sinová a cosinová řada

## Příklad 5

*Pro  $n = 1$  dostáváme*

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin(t) \cos(t) \, dt = \frac{1}{2}.$$

*Daná řada má tvar*

$$f(t) = 1 + \frac{1}{2} \cos(t) + \sum_{n=2}^{\infty} 2 \frac{(-1)^{n+1}}{(n-1)(n+1)} \cos(nt).$$

# Sinová a cosinová řada

## Příklad 5

*Pro  $n = 1$  dostáváme*

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin(t) \cos(t) \, dt = \frac{1}{2}.$$

*Daná řada má tvar*

$$f(t) = 1 + \frac{1}{2} \cos(t) + \sum_{n=2}^{\infty} 2 \frac{(-1)^{n+1}}{(n-1)(n+1)} \cos(nt).$$

*Sudé prodloužení funkce je znázorněno grafem*

# Sinová a cosinová řada

## Příklad 5

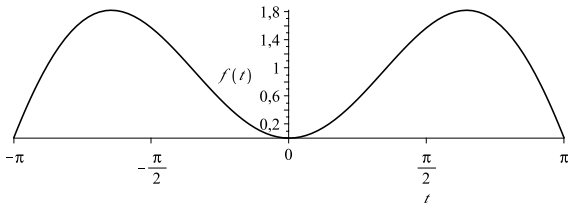
Pro  $n = 1$  dostáváme

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin(t) \cos(t) dt = \frac{1}{2}.$$

Daná řada má tvar

$$f(t) = 1 + \frac{1}{2} \cos(t) + \sum_{n=2}^{\infty} 2 \frac{(-1)^{n+1}}{(n-1)(n+1)} \cos(nt).$$

Sudé prodloužení funkce je znázorněno grafem



# Vlastnosti Fourierových řad



# Vlastnosti Fourierových řad

## Věta 4

# Vlastnosti Fourierových řad

## Věta 4

*Pro každou po částech spojitou funkci  $f(t)$  na intervalu  $[a, b]$  platí*

# Vlastnosti Fourierových řad

## Věta 4

*Pro každou po částech spojitou funkci  $f(t)$  na intervalu  $[a, b]$  platí*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \sin(nt) \, dt = 0, \quad (50)$$

# Vlastnosti Fourierových řad

## Věta 4

*Pro každou po částech spojitou funkci  $f(t)$  na intervalu  $[a, b]$  platí*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \sin(nt) \, dt = 0, \quad (50)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \cos(nt) \, dt = 0. \quad (51)$$

# Vlastnosti Fourierových řad

## Věta 4

*Pro každou po částech spojitou funkci  $f(t)$  na intervalu  $[a, b]$  platí*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \sin(nt) \, dt = 0, \quad (50)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \cos(nt) \, dt = 0. \quad (51)$$

## Věta 5 (Dirichlet)

# Vlastnosti Fourierových řad

## Věta 4

*Pro každou po částech spojitou funkci  $f(t)$  na intervalu  $[a, b]$  platí*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \sin(nt) \, dt = 0, \quad (50)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \cos(nt) \, dt = 0. \quad (51)$$

## Věta 5 (Dirichlet)

*Vyhovuje-li funkce  $f(t)$  Dirichletovým podmínkám, pak daná Fourierova řada funkce  $f(t)$  konverguje v každém  $t$  k hodnotě*

# Vlastnosti Fourierových řad

## Věta 4

*Pro každou po částech spojitou funkci  $f(t)$  na intervalu  $[a, b]$  platí*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \sin(nt) \, dt = 0, \quad (50)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \cos(nt) \, dt = 0. \quad (51)$$

## Věta 5 (Dirichlet)

*Vyhovuje-li funkce  $f(t)$  Dirichletovým podmínkám, pak daná Fourierova řada funkce  $f(t)$  konverguje v každém  $t$  k hodnotě*

$$\frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0)).$$

# Vlastnosti Fourierových řad

## Věta 4

*Pro každou po částech spojitou funkci  $f(t)$  na intervalu  $[a, b]$  platí*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \sin(nt) \, dt = 0, \quad (50)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \cos(nt) \, dt = 0. \quad (51)$$

## Věta 5 (Dirichlet)

*Vyhovuje-li funkce  $f(t)$  Dirichletovým podmínkám, pak daná Fourierova řada funkce  $f(t)$  konverguje v každém  $t$  k hodnotě*

$$\frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0)).$$

*Navíc platí*



# Vlastnosti Fourierových řad

## Věta 4

*Pro každou po částech spojitou funkci  $f(t)$  na intervalu  $[a, b]$  platí*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \sin(nt) \, dt = 0, \quad (50)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \cos(nt) \, dt = 0. \quad (51)$$

## Věta 5 (Dirichlet)

*Vyhovuje-li funkce  $f(t)$  Dirichletovým podmínkám, pak daná Fourierova řada funkce  $f(t)$  konverguje v každém  $t$  k hodnotě*

$$\frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0)).$$

*Navíc platí*

$$\frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt).$$

# Vlastnosti Fourierových řad

## Věta 4

*Pro každou po částech spojitou funkci  $f(t)$  na intervalu  $[a, b]$  platí*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \sin(nt) \, dt = 0, \quad (50)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \cos(nt) \, dt = 0. \quad (51)$$

## Věta 5 (Dirichlet)

*Vyhovuje-li funkce  $f(t)$  Dirichletovým podmínkám, pak daná Fourierova řada funkce  $f(t)$  konverguje v každém  $t$  k hodnotě*

$$\frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0)).$$

*Navíc platí*

$$\frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt).$$

# Vlastnosti Fourierových řad

## Věta 4

*Pro každou po částech spojitou funkci  $f(t)$  na intervalu  $[a, b]$  platí*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \sin(nt) \, dt = 0, \quad (50)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \cos(nt) \, dt = 0. \quad (51)$$

## Věta 5 (Dirichlet)

*Vyhovuje-li funkce  $f(t)$  Dirichletovým podmínkám, pak daná Fourierova řada funkce  $f(t)$  konverguje v každém  $t$  k hodnotě*

$$\frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0)).$$

*Navíc platí*

$$\frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt).$$