DISKRÉTNÍ TRANSFORMACE

David Horák

Toto dílo by nevzniklo bez paní doc. Ing. Niny Častové, CSc., mé velké Učitelky, jejíž památce je věnováno.

Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století* (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

David Horák
DISKRÉTNÍ TRANSFORMACE

ISBN

Předmluva

Tento dokument nechť čtenář bere jako pracovní verzi vznikajícího učebního textu, který je neustále doplňován a modifikován. Autor velice ocení připomínky, komentáře a doporučení čtenářů.[1]

Těmi by měli především být studenti technických univerzit, kterým je tento text uzpůsoben a problematika je často popisována na inženýrských aplikacích, zejména frekvenční, časově-frekvenční a kepstrální analýze seismických a zvukových signálů, digitálním zpracování obrazu, různých technikách filtrace signálů atd. I tento fakt vedl autora k způsobu výkladu (od Fourierových řad přes diskrétní Fourierovu transformaci k okenní Fourierově transformaci, waveletové transformaci a Z-transformaci). Tento modul by měl obsahovat i ukázkové implementace efektivních algoritmů - k tomuto účelu byl z důvodu přehlednosti použit Matlab. Ačkoliv má tento modul název „Disktrétní transformace“ (DT), tak pro svou ucelenost obsahuje mnohdy i zmínku či připomenutí spojité integrální transformace (IT), která není obsažena v jiných modulech. Spojení představení konkrétní spojité IT a její efektivní numerické realizace - tedy DT - se jeví autorovi jako ideální a směřuje i k budoucímu sloučení dvou předmětů IT a DT v předmět jeden.

Tento i ostatní v rámci projektu *Matematika pro inženýry 21 století* připravované výukové materiály lze najít na stránkách http://mi21.vsb.cz/.

Rád bych na tomto místě vzpomenul a velké díky vyjádřil paní doc. Ing. Nině Častové, CSc., mé učitelce, která mne již během mých raných studií s nadšením a láskou zasvěcovala do tajů a krás integrálních a diskrétních transformací, a tyto materiály jsou tudíž i jejím dílem.

Rovněž bych rád poděkoval mému kolegovi Ing. Martinu Čermákovi za pomoc při přepisování textů a cenné připomínky.

Za motivaci, vytváření těch nejlepších podmínek a prostoru k tvorbě, starostlivost a péči děkuji své Ivance a celé své rodině.

V Rychvaldě, 2011 David Horák

[1] Komentáře, připomínky a doporučení, prosím, zasílejte na e-mailovou adresu: `david.horak@vsb.cz`

Obsah

Kapitola 1

Úvod, základní pojmy, obecný pohled na integrální transformace

1.1 Základní pojmy

Definice 1.1. Vektorový (lineární) prostor je neprázdná množina V, na které je definováno sčítaní prvků $f+g$ a násobení skalárem ($\mathbb{C}$) splňující: sčítání je komutativní a asociativní, existuje nulový prvek a ke každému prvku prvek inverzní (opačný) a násobení je distributivní v obou proměnných vzhledem ke sčítání a vzhledem k první proměnné vzhledem k násobení a $1.f = f$ pro $\forall f \in V$.

Definice 1.2. Obecný skalární součin definovaný na prostoru V je zobrazení $\langle .,. \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$, pro které platí (pro $\forall c \in \mathbb{C}$ a $\forall f, g, h \in V$)
1. $\langle cf, g \rangle = c \langle f, g \rangle$,
2. $\langle f + h, g \rangle = \langle f, g \rangle + \langle h, g \rangle$,
3. $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$,
4. $\langle f, f \rangle > 0$ pro $f \neq 0$.

Definice 1.3. Norma $\|.\|$ na vektorovém prostoru V je zobrazení $\|.\| : V \to \mathbb{R}$, pro které platí (pro $\forall c \in \mathbb{C}$ a $\forall f, g \in V$):
1. $\|f\| \geqq 0, \|f\| = 0 \iff f = 0$,
2. $\|cf\| = |c| \, \|f\|$,
3. $\|f + g\| \leqq \|f\| + \|g\|$ (tzv. trojúhelníková nerovnost).

Poznámka 1.4. Pro $\forall f, g \in V$ platí tzv. Cauchyho-Schwarzova-Buňakovského nerovnost $|\langle f, g \rangle| \leqq \|f\| . \|g\|$.

Definice 1.5. Množina vektorů (prvků vektorového prostoru V) $\{f_n, n \in J\} \in V$ je ortogonální, platí-li: $\langle f_m, f_n \rangle = 0$ pro $m \neq n$, $m, n \in J$. Platí-li navíc pro $\forall n \in J$, že $\|f_n\| = 1$, je množina ortonormální.

Definice 1.6. Množina vektorů $\{f_n, n \in J\} \in V$ je bází vektorového prostoru V právě tehdy, je-li lineárně nezávislá (žáden vektor se nedá vyjádřit pomocí ostatních) a každý vektor $v \in V$ se dá vyjádřit jako jejich lineární kombinace, tj. $v = \sum\limits_{n \in J} \alpha_n f_n$. V případě konečně-dimenzionálního vektorového prostoru V dimenze N vektor $\boldsymbol{\alpha}$ se složkami α_n nazveme souřadnicemi v v dané uspořádané bázi. Báze je ortonormální, pokud vektory báze vyhovují definici 1.5.

Poznámka 1.7. J je množina indexů, např. $J = \{0, 1, ..., N-1, ...\}$ nebo $J = \{0, 1, ..., N-1\}$.

Definice 1.8. Ortonormální množinu, pro kterou neexistuje nenulový prvek ve V na ni kolmý, nazveme úplnou.

Poznámka 1.9. Úplný prostor je takový prostor, v němž každá Cauchyovská posloupnost má limitu. Úplný normovaný prostor se nazývá Banachův. Úplný prostor s skalárním součinem se nazývá Hilbertův - má úplnou ortonormální bázi. V Hilbertově prostoru pro ortonormální posloupnost $\{f_n\}$ bude řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \langle v, f_n \rangle f_n$ vždy konvergovat (pro $v \in V$) a nazveme ji později (zobecněnou) Fourierovou řadou (FŘ) (podmínkou konvergence je tedy úplnost množiny $\{f_n\}$).

Definice 1.10. $\mathbf{L}^1([a,b])$ je množina všech měřitelných funkcí (integrovatelných v Lebesgueově smyslu) na intervalu $[a,b]$, tzn.

$$\int_a^b |f(t)|\, dt < \infty.$$

$\mathbf{L}^2([a,b])$ je množina všech funkcí integrovatelných s kvadrátem (v Lebesgueově smyslu) na intervalu $[a,b]$, tzn.

$$\int_a^b |f(t)|^2\, dt < \infty.$$

$\mathbf{l}^2$ je množina všech posloupností $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ takových, že

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|^2 < \infty.$$

$\mathbf{l}^2(N) = \mathbb{C}^N$ je množina všech konečných posloupností $\{f_n\}_{n=0}^{N-1}$. Prostor $\mathbf{L}^2([a,b])$ je isometricky isomorfní s prostorem $\mathbf{l}^2$.

Poznámka 1.11. Každá funkce po částech spojitá na intervalu $[a,b]$ patří do prostoru $\mathbf{L}^2([a,b]) \subset \mathbf{L}^1([a,b])$. Prostory $\mathbf{L}^2([a,b])$ a $\mathbf{L}^2((a,b))$ můžeme ztotožnit, neboť se jejich funkce liší na množině míry nula. U konečných posloupností (vektorů)$\{f_n\}_{n=0}^{N-1}$ je vždy $\sum_{n=0}^{N-1} |f_n|^2 < \infty$ (sčítáme konečně mnoho reálných čísel).

Poznámka 1.12. V případě $f(t), g(t) \in \mathbf{L}^2(I)$ budeme v tomto textu pracovat se skalárním součinem

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_I f(t)\overline{g(t)} dt,$$

v případě $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathbf{l^2}(N)$ pak se skalárním součinem

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} f_k \overline{g_k}$$

a normami indukovanými skalárním součinem $\langle .,. \rangle$, tj.

$$\|f(t)\| = \sqrt{\langle f(t), f(t) \rangle} \text{ resp. } \quad \|\mathbf{f}\| = \sqrt{\langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle}.$$

Příklad 1.13. Dokažte, že systém funkcí $\{f_n = e^{int}, n \in \mathbb{Z}\} \in \mathbf{L}^2([0, 2\pi])$ je ortogonální a není ortonormální vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.

Řešení. $f_n = e^{int}$ náleží prostoru $\mathbf{L}^2([0, 2\pi])$:

$\langle f_n,\ f_m \rangle = \int_0^{2\pi} e^{int} e^{-imt} dt = 0, \quad n \neq m.$

$\int_0^{2\pi} |e^{int}|^2 dt = \int_0^{2\pi} e^{int} e^{-int} dt = 2\pi \Rightarrow \| e^{int} \| = \sqrt{2\pi}.$

Systém funkcí je v zadaném prostoru ortogonální. Ortonormální systém funkcí bude: $\left\{ \frac{f_n}{\|f_n\|} \right\}_{n\in\mathbb{Z}} = \left\{ \frac{e^{int}}{\|e^{int}\|} \right\}_{n\in\mathbb{Z}} = \left\{ \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{n\in\mathbb{Z}}.$ ▲

Příklad 1.14. Dokažte, že systém funkcí $\{f_n = e^{int}, n \in \mathbb{Z}\} \in \mathbf{L}^2([0, \pi])$ není ortogonální vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.

Řešení. $\langle f_n, f_m \rangle = \int_0^{\pi} e^{int} e^{-imt} dt = \frac{(-1)^{n-m}-1}{n-m} \neq 0, \quad n \neq m.$ ▲

Příklad 1.15. Rozhodněte, zda funkce $f(t) = \frac{1+2i}{(t-1)^{1/3}}$ je integrovatelná s kvadrátem na intervalu $[1, 2]$, tedy zda-li je prvkem $\mathbf{L}^2([1, 2])$.

Řešení. $\int_1^2 \left| \frac{1+2i}{(t-1)^{1/3}} \right|^2 dt = 5 \lim_{u \to 1} \int_u^2 \frac{dt}{(t-1)^{2/3}} = 15$. Funkce $f(t)$ je na intervalu $[1, 2]$ integrovatelná s kvadrátem, tj. $f \in \mathbf{L}^2([1, 2])$. ▲

Příklad 1.16. Ověřte, že systém funkcí

$$\{1/2, \cos(t), \sin(t), \cos(2t), \sin(2t), \cos(3t), \sin(3t), \ldots\} \in \mathbf{L}^2([-\pi, \pi])$$

je ortogonální vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.

Řešení. Výpočtem následujících integrálů se snadno přesvědčíme, že tato soustava (reálných) funkcí je ortogonální:

$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \sin(nt) dt = 0,\ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \cos(nt) dt = 0,$

$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt) \cos(nt) dt = 0,\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) \cos(nt) dt = 0,$

$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt) \sin(nt) dt = 0,\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt) \cos(nt) dt = 0 \quad$ pro $\forall m, n\ (m \neq n)$.

Daná soustava funkcí není však ortonormální, protože již pro první funkci $f_1 = 1/2$ je $\| f_1 \| = \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{4} dt \right]^{1/2} = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi} \neq 1.$ ▲

Příklad 1.17. Zjistěte, zda systém tvořený funkcemi $\{f_n = e^{int}, n \in \mathbb{Z}\} \in \mathbf{L}^2([-\pi, \pi])$ je ortogonální vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.

Řešení. Zde na rozdíl od předchozího příkladu při vytvoření skalárního součinu dvou funkcí musíme vzít v úvahu druhou funkci komplexně sdruženou:

$\langle f_n, f_m \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} e^{-imt} dt = 0, \quad n \neq m.$

Posloupnost funkcí $\{e^{int}\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbf{L}^2([-\pi, \pi])$ tvoří ortogonální systém.

Protože $\| e^{int} \| = \left[\int_{-\pi}^{\pi} e^{int} e^{-int} dt \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2\pi}$, potom posloupnost funkcí $\left\{ \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tvoří systém ortonormální. ▲

1.2 Obecný pohled na integrální transformace

Integrální (disktrétní) transformace, dále IT (DT) jsou nástrojem pro analýzu, zpracování a uchování informací z rozsáhlých souborů spojitých (diskrétních) dat představujících zkoumané veličiny z různých inženýrských aplikací.

Společným principem IT je obecně „poměření“ zkoumaného vstupu $f(t) \in \mathbf{L}^2(I)$ s množinou testovacích funkcí tvořících jádro transformace $Q = \{\chi_q(t) = \chi(t,q), q \in \Lambda\}$ na množině I, kde Λ je vybraná množina indexů. Chceme-li při analýze odlišit dvě funkce, musí být množina Q nekonečná. Zásadní otázkou je výběr vhodného systému testovacích funkcí pro danou aplikaci. Přes různorodost přístupů existují společné požadavky a to:

1. jednoduchost algoritmů pro výpočet přímé i zpětné transformace,
2. dostatečná univerzálnost algoritmu,
3. jednoznačnost a stabilita algoritmu (malým změnám ve vstupních datech odpovídají malé změny v datech výstupních).

Je samozřejmé, že se tyto požadavky přenáší i na diskrétní úroveň. Jejich splnění umožňuje použití tzv. multiplikativního integrálu, pro analýzu ve smyslu dekompozice tzv. **přímou IT** ve tvaru

$$T\{f\} = (\mathbf{T}f)(q) = \widehat{f}(q) = F(q) = \int_I f(t)\overline{\chi(t,q)}dt, \tag{1.1}$$

pro analýzu ve smyslu syntézy tzv. **zpětnou IT** ve tvaru

$$T^{-1}\{F\} = (\mathbf{T}^{-1}F)(t) = f(t) = \int_{\widehat{I}} F(q)\chi(t,q)dq, \tag{1.2}$$

kde množina funkcí $\chi(t,q)$ tvoří tzv. multiplikativní systém $Q = \{\chi(t,q)\} \subset \mathbf{L}^2(I)$.

Definice 1.18. Multiplikativní systém na $I = [a,b]$ je uplná ortonormální soustava funkcí $Q=\{\chi_n(t), n = 0,1,...\} \subset \mathbf{L}^2(I)$ pro něž platí, že pro každé $\chi_k, \chi_m \in Q, k \neq m$ soustava Q obsahuje jak jejich součin $\chi_k{\cdot}\chi_m \in Q$, tak podíl $\frac{1}{\chi_k} \in Q$.

Poznámka 1.19. Příklady diskrétních ortonormálních systémů: Rademacherova, Haarova, Walshova a Fourierova soustava (detailněji viz. níže).

Diskretizaci IT je třeba vidět na dvou úrovních. První diskretizace (přechod od prostoru $\mathbf{L}^2(I)$ k prostoru $\mathbf{l}^2$) spočívá ve formálním nahrazení integrálu integrálním součtem s dělením určeným vzorkovací frekvencí $\frac{1}{T}$ (T je perioda vzorkování)

$$F_n = c_n = \sum_{k=0}^{\infty} f_k\overline{\chi_{n,k}}, \tag{1.3}$$

$$f_n = \sum_{k=0}^{\infty} F_k \chi_{n,k}, \tag{1.4}$$

kde $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ je vstupní posloupnost vzniklá vzorkováním $f(t)$ ($f(nT) = f(t_n) = f_n$) posloupností δ-funkcí a $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ je výstupní obrazová posloupnost a $\{\chi_{k,n}\}_{n=0}^{\infty}$ je diskretizovaná k-tá funkce multiplikativního systému. Vztah (1.3) nazveme **diskretizovanou přímou IT** a vztah (1.4) **diskretizovanou zpětnou IT**.

Druhá diskretizace (přechod od prostoru $\mathbf{l}^2$ k prostoru $\mathbf{l}^2(N)$) mající již význam pro praktické využití při numerickém počítání spočívá v tzv. konečnosti sumace, tj. sumace probíhá v mezích od 0 do $N-1$, kde N je počet vzorků ($\frac{1}{N} \sim T$). Obdržíme takto

$$F_n = c_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k \overline{\chi_{n,k}}, \tag{1.5}$$

$$f_n = \sum_{k=0}^{N-1} F_k \chi_{n,k}, \tag{1.6}$$

kde $\{f_n\}_{n=0}^{N-1}$ je vstupní konečná posloupnost (vektor $\mathbf{f}$), $\{F_n\}_{n=0}^{N-1}$ je výstupní obrazová konečná posloupnost (vektor $\mathbf{F}$) a $\{\boldsymbol{\chi}_n\}_{n=0}^{N-1}$ je diskrétní multiplikativní systém (množina vektorů $\boldsymbol{\chi}_n$). Vztah (1.5) nazveme **přímou DT (přímou zobecněnou DFT)** a vztah (1.6) **zpětnou DT (zpětnou zobecněnou DFT)**. (Pozor! DT - diskrétní transformace není totéž co diskretizovaná IT).

Snaha o efektivní vyčíslení DT vede k **maticovým zápisům**

$$\mathbf{c} = \mathbf{F} = \mathbf{M}\mathbf{f},$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{c},$$

kde $\mathbf{f}$ je vektor vstupních dat, $\mathbf{F}$ je vektor výstupních dat (obrazu) a $\mathbf{M}$ je transformační matice, obsahující jakožto řádky diskretizované bázové (ortonormální) funkce, tj. n-tý řádek odpovídá $\boldsymbol{\chi}_n$.

Věta 1.20. *Nechť $f(t) \in \mathbf{L}^2(I)$, potom rozvoj $f(t)$ podle multiplikativního (úplného ortonormálního) systému $\{\chi_n(t)\} = \{\varphi_n(t)\}$*

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \chi_n(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \varphi_n(t), \quad c_n = \langle f, \varphi_n \rangle \tag{1.7}$$

*konverguje k $f(t)$ skoro všude na intervalu I. Vztah (1.7) nazýváme **zobecněnou FŘ.** Platí, že každý prvek f Hilbertova prostoru (zde $\mathbf{L}^2(I)$) lze vyjádřit ve tvaru zobecněné FŘ.*

Poznámka 1.21. Konvergence $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n \varphi_n(t)$ k $f(t)$ skoro všude na intervalu I znamená, že existuje množina $M \subset I$ míry nula taková, že pro $\forall t \in I \setminus M$ a $N \to \infty$ platí

$$\| \sum_{n=0}^{N} \langle f(t), \varphi_n(t) \rangle \varphi_n(t) - f(t) \| = \left[\int_{I \setminus M} \left(\sum_{n=0}^{N} \langle f(t), \varphi_n(t) \rangle \varphi_n(t) - f(t) \right)^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \to 0.$$

Z (1.7) plyne další pohled na IT jako na hledání souřadnic funkce $f(t)$ z vektorového prostoru $\mathbf{L}^2(I)$ v ortonormální bázi tvořené funkcemi $\varphi_n(t)$. Čtenář zajisté ví, že pro nalezení souřadnic vektoru v ortonormální bázi stačí spočítat jen příslušné skalární součiny $c_n = \langle f, \varphi_n \rangle$ (jednoduchost algoritmů).

Relace mezi zobecněnou FŘ a zobecněnou DFT je pak zřejmá ze vztahů (1.7) a (1.5) - n-tý koeficient diskrétní zobecněné FŘ je totožný s n-tým koeficientem zobecněné DFT.

Kapitola 2

Konvoluce jako IT

Konvoluce je velmi důležitý pojem v teorii IT. Tento nástroj se používá k filtraci vstupních signálů, při analýze přenosových jevů, při řešení inverzních úloh apod. Lze ukázat (vhodnou substitucí v konvolučním integrálu), že každá IT (Laplaceova, Fourierova, Hilbertova, Stieltjesova) je speciálním případem konvoluce. Zároveň na konvoluci dvou funkcí lze nahlížet jako na nejobecnější IT, kde funkce $f(\tau)$ je originálem a $g(t-\tau)$ jádrem IT.

2.1 Konvoluce funkcí

Definice 2.1. Nechť $f(t)$ a $g(t)$ jsou alespoň po částech spojité komplexní funkce reálné proměnné $t \in (-\infty, +\infty)$. Konvolucí těchto dvou funkcí nazýváme funkci $h(t)$ definovanou konvergentním integrálem

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau = (f \star g)(t) = f \star g. \tag{2.1}$$

Integrál (2.1) se nazývá konvoluční resp. konvolutorní.

Poznámka 2.2. Pokud $t \in (0, +\infty)$, pak konvoluce těchto funkcí je dána konvergentním integrálem s proměnnou horní mezí

$$h(t) = \int_{0}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{t} f(\tau)g(t-\tau)d\tau, \tag{2.2}$$

kde pro $\tau > t$ v důsledku principu kauzality integrand $f(\tau)g(t-\tau) = 0$, tzn. $0 < \tau \leqq t$.

Postačující podmínkou pro konverenci konvolučního integrálu je příslušnost funkcí $f(t)$ a $g(t)$ do prostoru $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ resp. $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^+)$.

Vlastnosti konvoluce:

1. konvoluce dvou spojitých funkcí $f(t)$ a $g(t)$ na $\mathbb{R}$ je funkce $h = f \star g$ spojitá na $\mathbb{R}$,
2. linearita (distributivita vzhledem ke sčítání a násobení konstantou): $f \star (g_1 + g_2) = f \star g_1 + f \star g_2$ a $f \star (cg) = c(f \star g)$,
3. komutativita: $f \star g = g \star f$,
4. asociativita: $f \star (g_1 \star g_2) = (f \star g_1) \star g_2 = f \star g_1 \star g_2$,
5. $|f \star g| \leqq |f| \star |g|$,
6. jsou-li funkce $f(t), g(t)$ originály a existují-li jejich integrální obrazy (Laplaceův, Fourierův, apod.) $F(s), G(s)$, pak i konvoluce $h = f \star g$ je originál, jejíž integrální obraz se rovná součinu jejich obrazů, tj. $H(s) = F(s)G(s)$ - tzv. konvoluční teorém.

Poznámka 2.3. Důležitou vlastností konvolučního integrálu při vhodné volbě jádra $g(t)$ je redukce oscilací funkce $f(t)$, výsledná konvoluce $h(t)$ mění své znaménko na intervalu $(-\infty, +\infty)$ resp. $(0, +\infty)$ nejvíce tolikrát, kolikrát mění své znaménko funkce $f(t)$. Konstrukce a vlastnosti jednotlivých jader jsou probírány v kapitole 5.2.

2.2 Konvoluce posloupností

Vycházejme ze dvou funkcí $f(z)$ a $g(z)$ regulárních (holomorfních) na množině Ω, které lze rozvinout na mezikruží $M = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\} \subset \Omega$ se středem v bodě z_0 v konvergentní mocninné Laurentovy řady

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = A(z), \quad g(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n = B(z).$$

$\{a_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}, \{b_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ jsou posloupnosti tvořené koeficienty mocninných řad a na funkce $A(z), B(z)$ můžeme nahlížet jako na obrazy těchto posloupností při tzv. Laurentově transformaci s jádrem $(z - z_0)^n$. V oboru konvergence, tj. pro $\forall z \in M$ lze vytvořit součin těchto řad

$$h(z) = f(z)g(z) = A(z)B(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n . \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n = C(z),$$

kde koeficienty c_n jsou porovnáním koeficientů u stejných mocnin $(z - z_0)^n$ dány vztahem

$$c_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{n-k} b_k, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{2.3}$$

Definice 2.4. Nechť $\{a_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$, $\{b_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ jsou posloupnosti. Posloupnost $\{c_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ určenou vztahem (2.3) nazveme konvolucí dvou posloupností $\{a_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}, \{b_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ a zapisujeme ji $\{c_n\}_{n=-\infty}^{+\infty} = \{(a \star b)_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$.

Poznámka 2.5. Posloupnost $\{c_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$, která je konvolucí posloupností $\{a_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$, $\{b_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$, má za obraz $C(z)$, který se rovná součinu obrazů příslušných posloupností $A(z), B(z)$, tj. $C(z) = A(z)B(z)$.

Poznámka 2.6. Redukuje-li se Laurentova řada na svou regulární část, tzv. Taylorovu řadu se středem v bodě $z_0 = 0$ a konvergentní na množině $M = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r_2\}$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = A(z), \quad g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = B(z),$$

pak součin těchto řad, obraz konvoluce posloupností $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}, \{b_n\}_{n=0}^{+\infty}$, bude

$$h(z) = f(z)g(z) = A(z)B(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n . \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = C(z),$$

kde koeficienty c_n jsou dány vztahem

$$c_n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{n-k} b_k, \quad n - k \geqq 0, \; n = 0, 1, 2, ... \tag{2.4}$$

Tentýž vztah určuje konvoluci posloupností $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}, \{b_n\}_{n=0}^{+\infty}$, jejichž obrazy $A(z), B(z)$ jsou bez absolutního členu hlavními částmi Laurentových rozvojů se středem v bodě $z_0 = 0$ a konvergentní na množině $M = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z|\}$ (viz. jednostranná Z--transformace)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{-n} = A(z), \; g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^{-n} = B(z),$$

$$h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^{-n} = A(z)B(z) = C(z).$$

2.3 Konvoluce vektorů

Definice 2.7. Nechť vektor $\mathbf{a}$ má N_1 složek $(a_0, ..., a_{N_1-1})^T$, vektor $\mathbf{b}$ má N_2 složek $(b_0, ..., b_{N_2-1})^T$, pak vektor $\mathbf{c}$ mající $N_1 + N_2 - 1$ složek $(c_0, ..., c_{N_1+N_2-1})^T$, které vypočteme jako

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k, \ n - k \geqq 0, \ n = 0, 1, ..., N_1 + N_2 - 1 \tag{2.5}$$

nazveme konvolucí vektorů $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$.

Poznámka 2.8. Nechť $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ jsou sloupcové vektory. Konvoluci vektorů $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ lze vyjádřit maticově

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \star \mathbf{b} = \mathbf{M_A b} = \mathbf{M_B a},$$

kde matice $\mathbf{M_A}$ řádu $(N_1 + N_2 - 1, N_2)$ je tvořená komponentami vektoru $\mathbf{a}$, matice $\mathbf{M_B}$ řádu $(N_1 + N_2 - 1, N_1)$ je tvořená komponentami vektoru $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{M_A} = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N_1-1} & a_{N_1-2} & \cdots & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & a_{N_1-1} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}, \mathbf{M_B} = \begin{bmatrix} b_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & b_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & b_1 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{N_2-1} & b_{N_2-2} & \cdots & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & b_{N_2-1} & \cdots & b_2 & b_1 & b_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}.$$

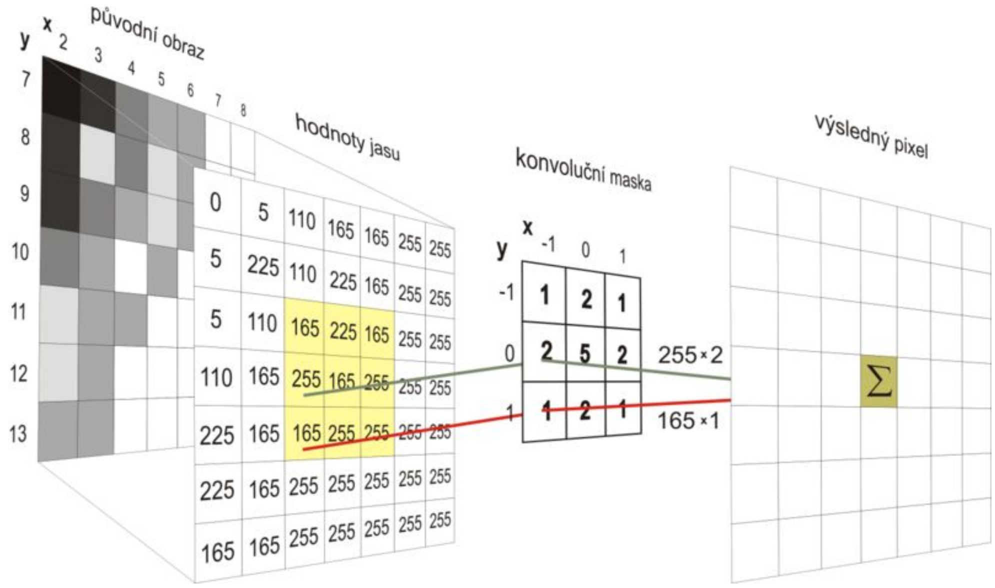
Vektor $\mathbf{a}$ často reprezentuje vstupní signál, $\mathbf{c}$ výstupní signál a $\mathbf{b}$ diskrétní časovou charakteristiku zvanou diskrétní filtr, ze kterého většinou sestavujeme matici $\mathbf{M_B}$ pro její výpočet $\mathbf{c} = \mathbf{M_B a}$.

Diskrétní dekonvoluci, tj. nalezení vstupu $\mathbf{a}$ při zadaném filtru $\mathbf{b}$ a výstupu - konvoluci $\mathbf{c}$, nelze vyjádřit ve tvaru $\mathbf{a} = \mathbf{c} \star \mathbf{b}$, nýbrž v maticovém tvaru $\mathbf{a} = \mathbf{M_B^{-1} c}$.

Příklad 2.9. Nechť vektor $\mathbf{a}$ má $N_1 = 8$ složek $(1, 3, 6, 2, 7, 8, 4, 5)^T$ a vektor $\mathbf{b}$ má $N_2 = 3$ složky $(6, 1, 3)^T$, pak konvoluce $\mathbf{c}$ bude mít $8 + 3 - 1 = 10$ složek $(6, 19, 42, 27, 62, 61, 53, 58, 17, 15)^T$.

Poznámka 2.10. V případě výpočtu pomocí periodické (cyklické) konvoluce upravíme oba vektory na stejnou délku $N \geqq N_1 + N_2 - 1$ vložením nul

$$a_n = \begin{cases} a_n, & n = 0, 1, ..., N_1 - 1 \\ 0, & n = N_1, N_1 + 1, ..., N - 1 \end{cases}, \ b_n = \begin{cases} b_n, & n = 0, 1, ..., N_2 - 1 \\ 0, & n = N_2, N_2 + 1, ..., N - 1 \end{cases}.$$



Obr. 2.1Princip dvourozměrné konvoluce [10]

2.4 Konvoluce dvourozměrných vektorů

Diskrétní 2D konvoluce $\mathbf{c} = \mathbf{a} \star \mathbf{b}$ využívaná při zpracování dvourozměrného obrazu v počítačové grafice má tvar

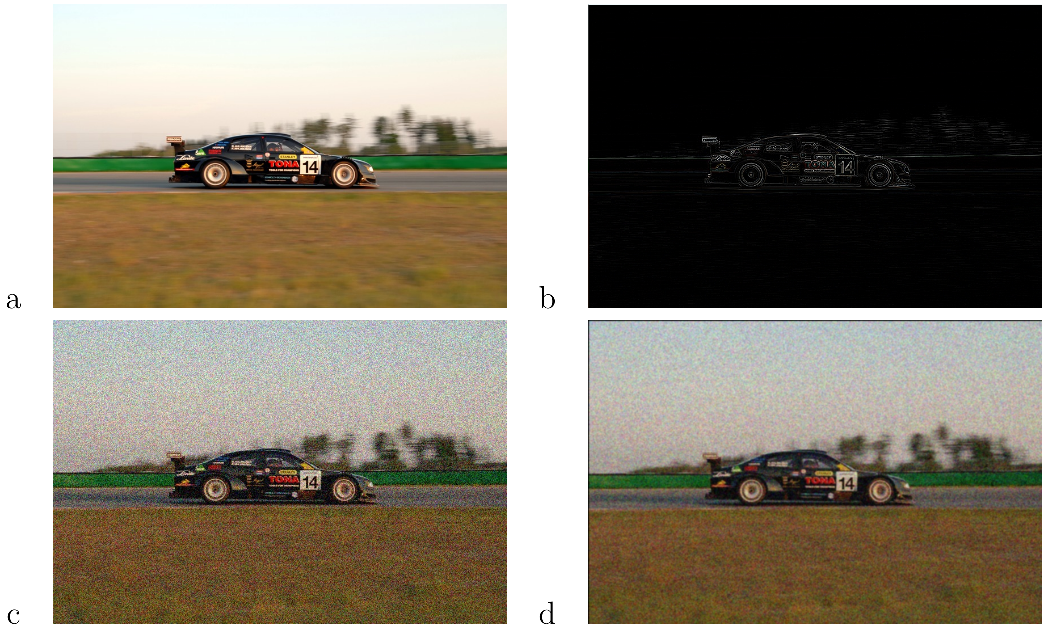
$$c_{m,n} = \sum_{i=-k}^{k} \sum_{j=-k}^{k} a_{m-i,n-j} b_{i,j}.$$

Jádro $\mathbf{b}$ lze chápat jako konvoluční masku, kterou pokládáme na příslušná místa v obrazu. Každý pixel překrytý touto maskou vynásobíme koeficientem v příslušné buňce a provedeme sečtení všech těchto hodnot, výsledek uložíme do jednoho nového pixelu, který je jakýmsi váženým průměrem okolních pixelů, viz. obr. 2.1 [10].

Speciální konvoluční masky mohou sloužit k rozostření obrazu (Gaussovskému zašumění), jeho zaostření (filtraci) či detekci hran (maska aproximuje derivaci):

$$\mathbf{b}_{gauss} = \frac{1}{159}\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & 4 & 2 \\ 4 & 9 & 12 & 9 & 4 \\ 5 & 12 & 15 & 12 & 5 \\ 4 & 9 & 12 & 9 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 4 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b}_{filt1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b}_{filt2} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b}_{filt3} = \frac{1}{256}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 6 & 24 & 36 & 24 & 6 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix},$$



Tab. 2.1Obrázek originální(a), zašuměný(c), odšuměný(d) a s detekovanými hranami(b)

$$\mathbf{b}_{edge1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b}_{edge2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Příklad 2.11. Na obrázku 2.1-a závodní Tatry demonstrujte efekt výše uvedených konvolučních masek.

Řešení. Je na obrázku 2.1-b,c,d. ▲

Cvičení 2.12. Načtěte si do Matlabu svůj obrázek a proveďte jeho Gaussovské zašumění, filtraci a detekci hran pomocí výše uvedených masek a nahraďte Matlabovskou funkci conv2() Vaší implementací 2D konvoluce.

Algoritmus 2.1 konvoluce2d.m

```
----------------------Gauss.zasumeni --------------------------
a=imread('Tatra.jpg');
b=[2 4 5 4 2; 4 9 12 9 4; 5 12 15 12 5; 4 9 12 9 4; 2 4 6 4 2]/159;
c(:,:,1)=conv2(a(:,:,1),b);
c(:,:,2)=conv2(a(:,:,2),b);
c(:,:,3)=conv2(a(:,:,3),b);
for k=1:size(c,3)
   for j=1:size(c,2)
      for i=1:size(c,1)
         c(i,j,k)=double(c(i,j,k))*195/255+120*(rand(1,1)-0.5);
      end
   end
end
imwrite(c,'TatraGauss.jpg','Quality',100);
------------------------Filtrace-------------------------------
a=c;
%b=[1 1 1; 1 1 1; 1 1 1]/9;
%b=[1 2 1; 2 4 2; 1 2 1]/16;
b=[1 4 6 4 1; 4 16 24 16 4; 6 24 36 24 6; 4 16 24 16 4; 1 4 6 4 1]/256;
c(:,:,1)=conv2(a(:,:,1),b);
c(:,:,2)=conv2(a(:,:,2),b);
c(:,:,3)=conv2(a(:,:,3),b);
imwrite(c,'TatraFilt.jpg','Quality',100);
----------------------Detekce hran----------------------------
a=imread('Tatra.jpg');
b=[0 1 0; 1 -4 1; 0 1 0];
%b=[1 1 1; 1 -8 1; 1 1 1];
c(:,:,1)=conv2(a(:,:,1),b);
c(:,:,2)=conv2(a(:,:,2),b);
c(:,:,3)=conv2(a(:,:,3),b);
imwrite(c,'TatraEdge.jpg','Quality',100);
```

Kapitola 3

Diskrétní ortonormální systémy, zobecněná diskrétní Fourierova transformace

3.1 Rademacherův systém

Definice 3.1. Rademacherova ortogonální soustava je posloupnost funkcí $\{r_n(x)\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbf{L}^2(0,1)$ definovaná na intervalu $x \in [0,1]$:

$$r_n(x) = \begin{cases} +1 & \text{pro } \frac{k-1}{2^n} < x < \frac{k}{2^n},\ k \text{ je liché} \\ -1 & \text{pro } \frac{k-1}{2^n} < x < \frac{k}{2^n},\ k \text{ je sudé} \end{cases}, \quad k = 1, 2, \dots, 2^n.$$

S vyjímkou bodů $x = \frac{k}{2^n}$ pro tuto soustavu platí vztah: $r_n(x) = sgn \sin(2^n \pi x)$. Podělíme-li každou funkci $r_n(x)$ hodnotou $\|r_n(x)\|$, získáme soustavu ortonormální.

Konstrukce: Rozdělíme interval $x \in [0,1]$ na $N = 2^n$ stejných dílků, v příslušných dílčích intervalech položíme $r_n(x)$ střídavě rovno +1 a -1.

Definice 3.2. Diskrétní Rademacherův ortogonální systém v $\mathbf{l}^2(N)$, $N = 2^m$ je tvořen

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{1}, \quad \{\mathbf{r}_n\}_{n=1}^{m}, \quad \mathbf{r}_n = [-\mathbf{1}]^{\mathbf{p}_{m-n+1}},$$

kde $\mathbf{p}_k$ jsou vektory tvořeny koeficienty p_k z dvojkového rozkladu čísla $z = \sum\limits_{k=1}^{m} p_k 2^{k-1}$, kde $z = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Podělíme-li každý vektor $\mathbf{r}_n$ hodnotou $\sqrt{N}$, získáme soustavu ortonormální.

z	p_3	p_2	p_1	$\mathbf{r}_0$	$\mathbf{r}_1$	$\mathbf{r}_2$	$\mathbf{r}_3$
0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	-1
2	0	1	0	1	1	-1	1
3	0	1	1	1	1	-1	-1
4	1	0	0	1	-1	1	1
5	1	0	1	1	-1	1	-1
6	1	1	0	1	-1	-1	1
7	1	1	1	1	-1	-1	-1
Mocn.	2^2	2^1	2^0				

Tab. 3.1Rademacherova báze

Algoritmus 3.1 rad.m

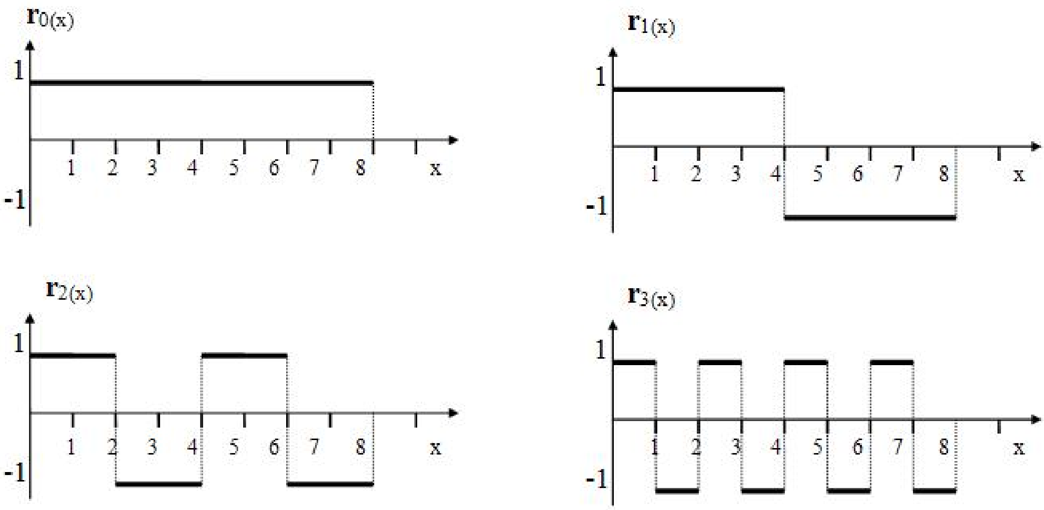
```
function [R,P]=rad(n)

P=[];
N=2^n;
for i=0:N-1
  p=dec2bin(i,n);
  P(:,i+1)=bin2dec(p');
end
P=[zeros(1,N);P];
R=(-1).^P;
```

Pro $N = 8$ pak získáme ortonormální bázi

$$\mathbf{M_R} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} r_0^T \\ r_1^T \\ r_2^T \\ r_3^T \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Rademacherova soustava je tvořena stochasticky nezávislými funkcemi a v důsledku své jednoducosti je velice rozšířená a používá se v teorii pravděpodobnosti při analýze náhodných procesů. Velkou výhodou této báze je, že index řádku matice souvisí s počtem nulových bodů v řádku, tj. $2^m - 1$.



Obr. 3.1Grafická reprezentace ortogonální Rademacherovy báze

3.2 Walshův (Walsh-Paleyho) systém

Definice 3.3. Diskrétní Walshův ortogonální systém v $\mathbf{l}^2(N)$, $N = 2^m$ je tvořen součinem Rademacherových funkcí

$$\{\mathbf{W}_n\}_{n=0}^{N-1}, \quad \mathbf{W}_n = \prod_{n=0}^{m} [\mathbf{r}_n]^{p_n},$$

kde p_k jsou určeny z dvojkového rozkladu čísla $z = \sum_{k=1}^{m} p_k 2^{k-1}, \quad p_0 = 0$, kde $z = 0, 1, 2, \ldots, N-1$. Podělíme-li každý vektor $\mathbf{W}_n$ hodnotou $\sqrt{N}$, získáme soustavu ortonormální.

Walshova báze $\mathbf{M_W}$ je tvořena vektory $\mathbf{W}_n$, pro $N = 8$ tedy obdržíme ortonormální matici

$$\mathbf{M_W} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} \mathbf{W}_0^T \\ \mathbf{W}_1^T \\ \mathbf{W}_2^T \\ \mathbf{W}_3^T \\ \mathbf{W}_4^T \\ \mathbf{W}_5^T \\ \mathbf{W}_6^T \\ \mathbf{W}_7^T \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Index bodu	Dvojkový rozklad							
z	p_3	p_2	p_1	$\mathbf{r}_0^{p_0}$	$\mathbf{r}_1^{p_1}$	$\mathbf{r}_2^{p_2}$	$\mathbf{r}_3^{p_3}$	$\mathbf{W}_n(x)$
0	0	0	0	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	0	0	1	**1**	$\mathbf{r}_1$	**1**	**1**	$\mathbf{r}_1$
2	0	1	0	**1**	**1**	$\mathbf{r}_2$	**1**	$\mathbf{r}_2$
3	0	1	1	**1**	$\mathbf{r}_1$	$\mathbf{r}_2$	**1**	$\mathbf{r}_1\ \mathbf{r}_2$
4	1	0	0	**1**	**1**	**1**	$\mathbf{r}_3$	$\mathbf{r}_3$
5	1	0	1	**1**	$\mathbf{r}_1$	**1**	$\mathbf{r}_3$	$\mathbf{r}_1\ \mathbf{r}_3$
6	1	1	0	**1**	**1**	$\mathbf{r}_2$	$\mathbf{r}_3$	$\mathbf{r}_2\ \mathbf{r}_3$
7	1	1	1	**1**	$\mathbf{r}_1$	$\mathbf{r}_2$	$\mathbf{r}_3$	$\mathbf{r}_1\ \mathbf{r}_2\ \mathbf{r}_3$

Tab. 3.2Walshova báze pro $N = 2^m = 8$

Algoritmus 3.2 walsh.m

```
function [W,P]=walsh(n)

N=2^n;
[R,P]=rad(n);
P=flipud(P);
P=[P(size(P,1),:)
   P(1:size(P,1)-1,:)];

W=ones(N,N);
for i=1:N
   for j=1:size(P,1)
      W(i,:)=W(i,:).*(R(j,:).^P(j,i));
   end
end
```

Výhodou této báze je, že je úplná, nevýhodou však je, že index řádku nekoresponduje s počtem nulových bodů, což ztěžuje její využití při analýze náhodných procesů.

3.3 Walshův modifikovaný systém

Definice 3.4. Diskrétní Walshova modifikovaná báze vznikne rekurentně z diskrétní Walshovy báze přeuspořádáním podle vzorce

$$\widetilde{\mathbf{W}}_n = \widetilde{\mathbf{W}}_{2j+p} = \mathbf{W}_j + (-1)^{j+p}\mathbf{W}_j,\ p = 0, 1; j = 0, 1, \ldots, k; N = 2^k.$$

Pro $N = 8$ modifikovaný ortonormální Walshův systém vypadá následovně

Algoritmus 3.3 walshm.m

```
function [Wm]=walshm(n)

N=2^n;
[W,P]=walsh(n);
for i=1:size(W,2)-1
   S(:,i)=W(:,i)+W(:,i+1);
end

for i=1:N
   Z(i)=N-nnz(S(i,:));
end

for i=1:N
   Wm(i,:)=W(Z==i,:);
end
```

$$\mathbf{M}_{\widetilde{\mathbf{W}}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{W}}_0^T \\ \widetilde{\mathbf{W}}_1^T \\ \widetilde{\mathbf{W}}_2^T \\ \widetilde{\mathbf{W}}_3^T \\ \widetilde{\mathbf{W}}_4^T \\ \widetilde{\mathbf{W}}_5^T \\ \widetilde{\mathbf{W}}_6^T \\ \widetilde{\mathbf{W}}_7^T \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

3.4 Haarův systém

Definice 3.5. Haarův ortonormální systém$\{h_n(x)\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbf{L}^2(0,1)$ je definován na intervalu $x \in [0,1]$:

$$h_n(x) = h_{mk}(x) = \begin{cases} \sqrt{2^m}, & \frac{2k-2}{2^{m+1}} < x < \frac{2k-1}{2^{m+1}} \\ -\sqrt{2^m}, & \frac{2k-1}{2^{m+1}} < x < \frac{2k}{2^{m+1}} \\ 0 & \text{pro jiná } x \in [0,1] \end{cases},$$

$n = 2^m + k,\ m = 0,1,2,\dots,\ \ k = 1,2,\dots,2^m.$

Algoritmus 3.4 haar.m

```
function [H]=haar(n)

N=2^n;
k=1/N;
H=zeros(N);
H(1,:)=1;
x=k/2:k:(1-k/2);
for m=0:n-1
  for k=1:2^m
    H(2^m+k,:)=sqrt(2^m)*(((2*k-2)/(2^(m+1))<x&x<(2*k-1)/(2^(m+1)))-...
                          ((2*k-1)/(2^(m+1))<x&x<(2*k)/(2^(m+1))));
   end
end

H=H/sqrt(N);
```

Definice 3.6. Diskretizací funkcí $h_n(x)$ sestavíme diskrétní Haarovu ortogonální soustavu $\mathbf{h}_n \in \mathbf{l}^2(N)$,. Podělíme-li každý vektor $\mathbf{h}_n$ hodnotou $\sqrt{N}$, získáme diskrétní soustavu ortonormální - matice $\mathbf{M_H}$.

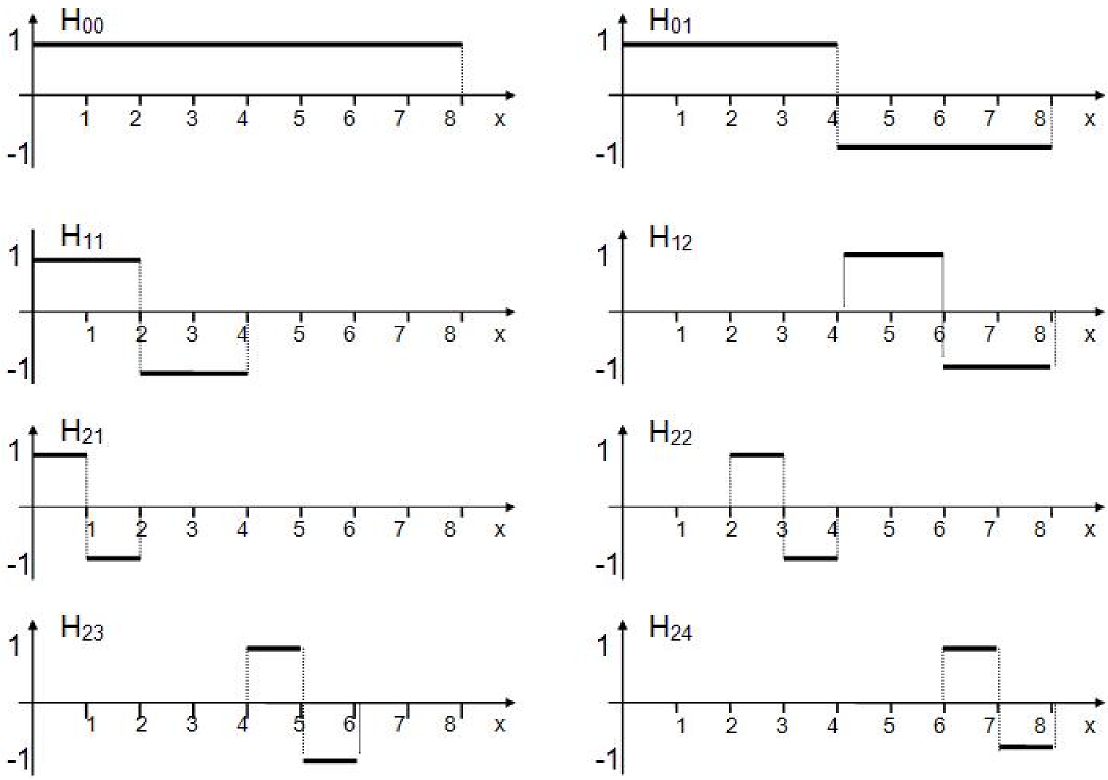
Pro názornost zvolme délku intervalu 8, což představuje 2^3subintervalů. Diskrétní ortonormální Haarova báze pak bude

$$\mathbf{M_H} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} \mathbf{h}_0^T \\ \mathbf{h}_1^T \\ \mathbf{h}_2^T \\ \mathbf{h}_3^T \\ \mathbf{h}_4^T \\ \mathbf{h}_5^T \\ \mathbf{h}_6^T \\ \mathbf{h}_7^T \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

3.5 Diskrétní zobecněná FŘ a zobecněná DFT

Věta 3.7. *Nechť $\{\boldsymbol{\varphi}_n\}_{n=0}^{N-1}$ je ortonormální bází prostoru $\mathbf{l}^2(N)$ a nechť $\{a_n\}_{n=0}^{N-1}$ je libovolná číselná posloupnost (v $\mathbb{R}$ nebo v $\mathbb{C}$), pak platí*

$$\left\| \sum_{n=0}^{N-1} a_n \boldsymbol{\varphi}_n \right\|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |a_n|^2 < \infty.$$



Obr. 3.2Grafická reprezentace ortogonální Haarovy báze

Důkaz. Zřejmý, plyne z ortonormality $\{\boldsymbol{\varphi}_n\}_{n=0}^{N-1}$:

$$\left\|\sum_{n=0}^{N-1} a_n\boldsymbol{\varphi}_n\right\|^2 = \left\langle \sum_{n=0}^{N-1} a_n\boldsymbol{\varphi}_n, \sum_{n=0}^{N-1} a_n\boldsymbol{\varphi}_n \right\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} |a_n|^2 < \infty. \qquad \square$$

Věta 3.8. *Nechť $\{\boldsymbol{\varphi}_n\}_{n=0}^{N-1}$ je ortonormální bází prostoru $\mathbf{l}^2(N), N \in \mathbb{N}$, pak každý prvek $\mathbf{f} \in \mathbf{l}^2(N)$ lze rozvinout v konvergentní konečnou řadu zvanou* ***diskrétní zobecněná FŘ***

$$\mathbf{f} = \sum_{n=0}^{N-1} c_n\boldsymbol{\varphi}_n, \qquad \textit{kde} \qquad c_n = \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}_n\rangle, \tag{3.1}$$

vektor $\mathbf{c}$ koeficientů c_n nazveme ***zobecněnou DFT*** *vektoru $\mathbf{f}$. Tento mnohočlen s Fourierovskými koeficinety má ze všech mnohočlenů v bázi $\{\boldsymbol{\varphi}_n\}_{n=0}^{N-1}$ nejmenší střední kvadratickou odchylku od $\mathbf{f}$, tj. je nejlepší aproximací funkce $\mathbf{f}$ v normě $\mathbf{l}^2$*

$$\left\|\mathbf{f} - \sum_{n=0}^{N-1} c_n\boldsymbol{\varphi}_n\right\| = \min_{\forall a_n}\left\|\mathbf{f} - \sum_{n=0}^{N-1} a_n\boldsymbol{\varphi}_n\right\|.$$

Důkaz. $\left\|\mathbf{f} - \sum_{n=0}^{N-1} a_n\boldsymbol{\varphi}_n\right\|^2 = \left\langle (\mathbf{f} - \sum_{n=0}^{N-1} a_n\boldsymbol{\varphi}_n), (\mathbf{f} - \sum_{n=0}^{N-1} a_n\boldsymbol{\varphi}_n) \right\rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{f}\rangle - \sum_{n=0}^{N-1} a_n \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}_n\rangle$

$$- \sum_{n=0}^{N-1} a_n \langle \boldsymbol{\varphi}_n, \mathbf{f}\rangle + \sum_{n=0}^{N-1} |a_n|^2 \langle \boldsymbol{\varphi}_n, \boldsymbol{\varphi}_n\rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{f}\rangle - 2\sum_{n=0}^{N-1} a_n \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}_n\rangle + \sum_{n=0}^{N-1} |a_n|^2 =$$

$$= \|\mathbf{f}\|^2 + \sum_{n=0}^{N-1} |c_n|^2 - 2\sum_{n=0}^{N-1} a_n c_n + \sum_{n=0}^{N-1} |a_n|^2 - \sum_{n=0}^{N-1} |c_n|^2 =$$

$$= \|\mathbf{f}\|^2 + \sum_{n=0}^{N-1} (a_n - c_n)^2 - \sum_{n=0}^{N-1} |c_n|^2 .$$

Minima je dosaženo pro $a_n = c_n$, tj. $\sum_{n=0}^{N-1} (a_n - c_n)^2 = 0$, pak

$\min_{\forall a_n}\left\|\mathbf{f} - \sum_{n=0}^{N-1} a_n\boldsymbol{\varphi}_n\right\|^2 = \|\mathbf{f}\|^2 - \sum_{n=0}^{N-1} |c_n|^2 \geqq 0 \Rightarrow \|\mathbf{f}\|^2 \geqq \sum_{n=0}^{N-1} |c_n|^2$...Besselova nerovnost přecházející při $N \to \infty$ v Parsevalovu rovnost $\|\mathbf{f}\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2$. $\square$

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$\mathbf{f} = \mathbf{M^{-1}c}$	3	1	6	2	3	7	9	5
$\mathbf{c}_{Walsh}$	36	-12	-8	0	6	6	-10	6
$\mathbf{c}_{MWalsh}$	36	-12	0	-8	-10	6	6	6
$\mathbf{c}_{Haar}$	36	-12	-4$\sqrt{2}$	-4$\sqrt{2}$	4	8	-8	8

Tab. 3.3Zobecněné DFT

Definice 3.9. Nechť $\{\boldsymbol{\varphi}_n\}_{n=0}^{N-1}$ tvoří ortonormální bázi $\mathbf{l}^2(N), N \in \mathbb{N}$ (Walshovu, modifikovanou Walshovu, Haarovu, Fourierovu) a $\mathbf{f} \in \mathbf{l}^2(N)$. Pak **přímá zobecněná DFT** je definována maticově vztahem

$$\mathbf{c} = \mathbf{F} = \mathbf{Mf} \tag{3.2}$$

a **zpětná zobecněná DFT**

$$\mathbf{f} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{c}, \tag{3.3}$$

kde $n+1$. řádek (indexováno od 1) transformační matice $\mathbf{M}$ je tvořen hodnotami $\boldsymbol{\varphi}_n$. Navíc platí, že $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^T$.

Poznámka 3.10. Spočtením součinu matice a vektoru se vyčíslí N skalárních součinů - v případě diskrétního ortonormálního systému $\langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}_n \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} f_k \overline{\varphi_{n,k}}$ vektorů $\mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}_n$ z $\mathbf{l}^2(N)$ odpovídajících skalárním součinům $\langle f(t), \varphi_n(t) \rangle = \int_I f(t)\overline{\varphi_n(t)}dt$ funkce $f(t)$ a funkce úplného ortonormálního systému $\varphi_n(t)$ z $\mathbf{L}^2(I)$.

Příklad 3.11. Zvolme vektor o 8 složkách $\mathbf{f} = (3, 1, 6, 2, 3, 7, 9, 5)^T$. Najděte jeho Walshovu, modifikovanou Walshovu a Haarovu transformaci.

Řešení. Postupně vytvoříme jednotlivé transformační matice $\mathbf{M}$ (Walshovu $\mathbf{M} = \mathbf{M_W}$, modifik. Walshovu $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\widetilde{\mathbf{W}}}$, Haarovu $\mathbf{M} = \mathbf{M_H}$) a provedeme transformaci $\mathbf{c} = \mathbf{Mf}$ a inverzní transformaci $\mathbf{f} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{c} = \mathbf{M}^T\mathbf{c}$, viz. Tab. 3.3.

▲

Poznámka 3.12. Rademacherova soustava tvoří neúplný systém, pak výpočet koeficientů a rekonstrukce funkce je neúplná. V dalším textu budeme uvažovat jen úplné ortonormální báze.

Cvičení 3.13. Vygenerujte si signál, spočtěte jeho Walshovu, modifikovanou Walshovu, Haarovu a Fourierovu transformaci, koeficienty zašuměte a analyzujte filtrační účinek Tichonovovy regularizace v závislosti na parametrech α a e. Základem Vám budiž Algoritmus 3.5.

Algoritmus 3.5 transform.m

```
n=input('Zadej n pro 2^n bodu:');
N=2^n;
T=input('Zadej transformaci:  ');
if(T=='R')  M=rad(n);    end
if(T=='W')  M=walsh(n);  end
if(T=='Wm') M=walshm(n); end
if(T=='H')  M=haar(n);   end
if(T=='F')  M=four(n);   end
% Vygenerovani vektoru
x1=0*pi:2*pi/N:2*pi; x2=2*pi:2*pi/N:4*pi; x3=4*pi:2*pi/N:6*pi;
f=sin([x1 x2 x3])'; f=f(1:N);
% f=[sin(13*x1)+0.8*sin(23*x1)+0.6*sin(33*x1)
%    sin(13*x2)+0.8*sin(23*x2)+0.6*sin(33*x2)
%    sin(13*x3)+0.8*sin(23*x3)+0.6*sin(33*x3)]';
% f=[sin(13*x1) 0.8*sin(23*x2) 0.6*sin(33*x3)]';
figure;  plot(f);  title('Signal')

% Transformace
c=M*f;
figure;  plot(abs(c(1:N))); title('Spektrum')

% Porovnani s fft
cf=fft(f);
figure; plot(abs(cf(1:N))); title('Spektrum-fft')

% Zaneseni 10-procentni chyby
cerr=c+0.1*max(abs(c))*(rand(N,1)-0.5);
figure;  plot(abs(cerr(1:N)));  title('Spektrum zatiz. chybou')

% Zpetna transformace(rekonstrukce) chybou zatiz. koef.
ferr=M'*cerr;
figure;  plot(real(ferr)); title('Signal-chyb. koef.')

% Tichonovova regularizace
e=2;
for i=1:N
  alfa=0.01;    creg1(i,1)=(cerr(i,1))/(1+alfa*(i^e));
  alfa=0.001;   creg2(i,1)=(cerr(i,1))/(1+alfa*(i^e));
  alfa=0.0001;  creg3(i,1)=(cerr(i,1))/(1+alfa*(i^e));
end
freg1=M'*creg1; freg2=M'*creg2; freg3=M'*creg3;

figure;  plot(real(freg1));  title('Signal-freg1');
figure;  plot(real(freg2));  title('Signal-freg2');
figure;  plot(real(freg3));  title('Signal-freg3');
```

Kapitola 4

Diskrétní Fourierova transformace (DFT) a její rychlá verze (FFT)

4.1 Připomenutí spojité FT

Spojitá přímá a zpětná FT $F(\omega)$ funkce $f(t)$, která byla publikována Josephem Fourierem r. 1822 v Paříži, jsou dány formulemi

$$F(\omega) = \widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \tag{4.1}$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \tag{4.2}$$

Tyto vztahy lze odvodit z Fourierovy řady skrz limitní proces zvětšování periody $T \to \infty$, což umožní využít tuto metodu i pro neperiodické signály. Co se požadavků kladených na funkci $f(t)$ pro FT týče, stačí její absolutní integrovatelnost nebo její rozvinutelnost ve FŘ na každém intervalu $[a, b]$ dána tzv. Dirichletovými podmínkami. Integrál pak vyjadřuje funkci $f(t)$ ve všech bodech spojitosti. Obecně však FT může existovat k funkcím, které uvedené podmínky nesplňují, a dokonce i k distribucím (regulárním, temperovaným).

4.2 DFT

V sekci 1.2 byl zmíněn obecný pohled na IT a DT (jakožto konečnou diskretizaci IT). V této sekci probereme detailně nejrozšířenější a nejpoužívanější z nich a to DFT. Většina vlastností spojité FT platí po nahrazení integrálů sumami i pro DFT.

Definice 4.1. Nechť $\mathbf{f} = (f_0, f_1, ..., f_{N-1})^T \in \mathbf{l}^2(N)$ a systém $\left\{\boldsymbol{\varphi}_n = (\varphi_{n,0}, \varphi_{n,1}, ..., \varphi_{n,N-1})^T\right\}_{n=0}^{N-1}, \varphi_{n,k} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{i\frac{2\pi}{N}nk}$ tvoří ortonormální bázi prostoru $\mathbf{l}^2(N)$. **Přímá DFT (klasická, trigonometrická)** vektoru $\mathbf{f}$ je definována jako vektor $\mathbf{c} = (c_0, c_1, ..., c_{N-1})^T$, jehož n-tá komponenta (koeficient n-té harmonické) je dána vztahem

$$c_n = \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}_n \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} f_k \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-i\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i\frac{2\pi}{N}nk} \tag{4.3}$$

a **zpětná DFT** vektoru $\mathbf{c}$ je definována jako vektor $\mathbf{f}$, jehož n-tá komponenta je dána vztahem

$$f_n = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \frac{1}{\sqrt{N}} e^{i\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{i\frac{2\pi}{N}nk}. \tag{4.4}$$

Poznámka 4.2. DFT je vlastně numerický výpočet koeficientů FŘ obdélníkovou metodou při ekvidistantním vzorkování.

Definice 4.3. Nechť $\mathbf{c}$ je DFT signálu $\mathbf{f}$. Posloupnost $|\mathbf{c}_n|$ nazveme Fourierovským amplitudovým spektrem a posloupnost $\arg \mathbf{c}_n, n = 0, 1, ..., N-1$ Fourierovským spektrem fázovým.

Poznámka 4.4. Ze vztahu (4.3) můžeme určit pouze N hodnot spektra, neboť $\frac{1}{\sqrt{N}} e^{i\frac{2\pi}{N}nk}$ je periodická s periodou N. Pomocí DFT tedy získáme vektor o N složkách nebo periodickou nekonečnou posloupnost.

Navíc spektra vektoru $\mathbf{f} = (f_0, f_1, ..., f_{N-1})^T$ a funkce $f(t) = \begin{cases} f_k, & t = kT \\ 0, & t \neq kT \end{cases}$ jsou rozdílná, to první obsahuje N členů, to druhé nekonečně mnoho, přičemž prvních N se shoduje s N složkami spektra prvního.

Označíme-li $w = e^{-i\frac{2\pi}{N}}$ a $e^{-i\frac{2\pi}{N}nk} = w^{nk}$, pak transformační matice $\mathbf{M_F}$ má tvar pro různá n a k:

$$\mathbf{M_F} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} w^0 & w^0 & w^0 & \dots & w^0 \\ w^0 & w^1 & w^2 & \dots & w^{N-1} \\ w^0 & w^2 & w^4 & \dots & w^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w^0 & w^{N-1} & w^{2(N-1)} & \dots & w^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix},$$

$\mathbf{M_F}$ je tvořená ortonormální soustavou funkcí na intervalu $[0, \ (N-1)\triangle t]$, kde $\triangle t = t_{k+1} - t_k$. Přímá DFT je pak dána vztahem:

$$\mathbf{F} = \mathbf{M_F} \mathbf{f} \tag{4.5}$$

Algorithm 4.1 four.m

```
function [F]=four(n)

N=2^n;
w=exp(2i*pi/N);

for i=1:N
  for j=1:N
    F(i,j)=w^((i-1)*(j-1));
  end
end

F=F/sqrt(N);
```

a zpětná DFT:

$$\mathbf{f} = \mathbf{M_F}^{-1}\mathbf{F} = \mathbf{M_F}^T\mathbf{F}. \tag{4.6}$$

Cvičení 4.5. Vyberte si spojitou funkci (např. obdélníkovou funkci), k níž snadno naleznete spojitou FT. Analyzujte vliv diskretizace funkce v kombinaci s užitím spojité FT a vliv diskretizace funkce v kombinaci s užitím diskrétní FT (DFT) na Fourierovské spektrum. Jaký vliv má volba vzorkovací frekvence $\frac{1}{T}$ na jeho tvar?

4.3 Vlastnosti matice $\mathbf{M_F}$

1. $\mathbf{M_F}$ je regulární, symetrická, tj. $\exists \mathbf{M_F}^{-1} : \mathbf{M_F}\mathbf{M_F}^{-1} = \mathbf{M_F}^{-1}\mathbf{M_F} = \mathbf{I}, \mathbf{M_F} = \mathbf{M_F}^T$.

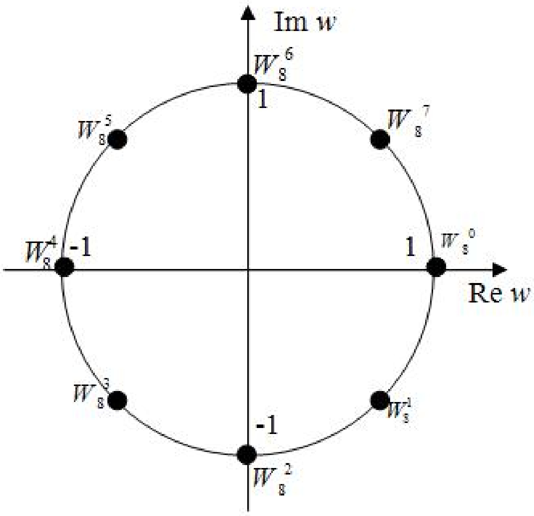
2. $\mathbf{M_F}^{-1}$lze vyjádřit pomocí vztahu $\mathbf{M_F}^{-1} = \mathbf{M_F}^*, \quad w_{kn} = w^*_{nk} = \overline{w}_{nk}$.

3. $\mathbf{M_F}$ je unitární tj. $\left(\mathbf{M_F}^T\right)^* = \mathbf{M_F}^{-1}$.

4. k-tý řádek $\mathbf{w}_k = \frac{1}{\sqrt{N}}\left(w^0, w^k, w^{2k}, \ldots, w^{(N-1)k}\right), k = 2, 3, ..., N-1$ je $\frac{1}{\sqrt{N}}$ násobkem k-té mocniny vektoru $\sqrt{N}\mathbf{w}_1 = \left(w^0, w^1, w^2, \ldots, w^{N-1}\right)$ tvořícího druhý řádek $\mathbf{M_F}$.

5. Prvky w^k, $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ jsou kořeny rovnice $z^N - 1 = 0$. Čísla $z = w^k = e^{-\frac{2\pi}{N}ki}$ leží v komplexní rovině na kružnici o poloměru 1 a platí $\sum\limits_{k=0}^{N-1} w^{kn} = \begin{cases} N & \text{pro } n = 0 \\ 0 & \text{pro } n \neq 0 \end{cases}$, a $\prod_{k=0}^{N-1} w^{kn} = -(-1)^n = (-1)^{n+1}$.

6. Pro $n = \frac{N}{2}, k = 0, 1, ..., N-1$ resp. $k = \frac{N}{2}, n = 0, 1, ..., N-1$ platí, že $nk = \frac{N}{2}k$ resp. $nk = n\frac{N}{2}$, pak $w^{kn} = e^{-i\frac{2\pi}{N}k\frac{N}{2}} = e^{-i\pi k} = (-1)^k$ resp. $w^{kn} = e^{-i\frac{2\pi}{N}n\frac{N}{2}} = e^{-i\pi n} = (-1)^n$



Obr. 4.1Komponenty báze DFT

7. Funkce w^{kn} je periodická s periodou $mN, m \in \mathbb{Z}$ tzn., že

$$w^{kn+mN} = e^{-i\frac{2\pi}{N}(kn+mN)} = e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}e^{-i\frac{2\pi}{N}mN} = e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}.1 = w^{kn}.$$

8. $\mathbf{M_F}$ je permutační periodická matice 4. stupně: $\mathbf{M_F}^2 = \mathbf{P}, \quad \mathbf{M_F}^4 = \mathbf{I}$, kde $\mathbf{P}$ je permutační matice řádu N a $\mathbf{PP} = \mathbf{I}$.

Příklad 4.6. Nechť $\mathbf{f} = (1, 3, 6, 2, 7, 8, 4, 5)^T$. Nalezni DFT signálu $\mathbf{f}$ a ověř jednoznačnost transformace zpětnou DFT.

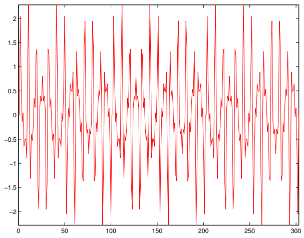
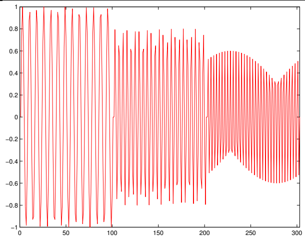
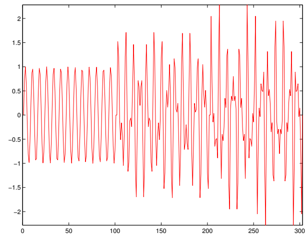
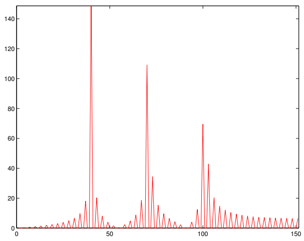
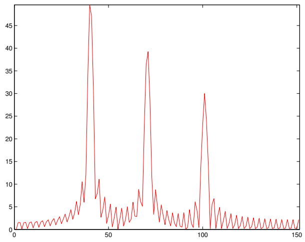
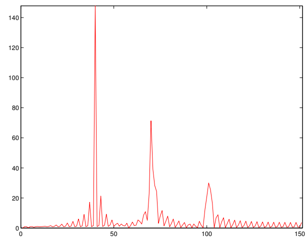
Řešení.

$$w^0 = 1 = -w^4, \quad w^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) = -w^5, \quad w^2 = -i = -w^6, \quad w^3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = -w^7$$

$$\left(w^0, w^1, w^2, w^3, w^4, w^5, w^6, w^7\right) = \left(1, w^1, w^2, w^3, -1, -w^1, -w^2, -w^3\right)$$

Ortonormální transformační matice pro $N = 8$ je

$$\mathbf{M_F} = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w^1 & w^2 & w^3 & -1 & -w^1 & -w^2 & -w^3 \\ 1 & w^2 & -1 & -w^2 & 1 & w^2 & -1 & -w^2 \\ 1 & w^3 & -w^2 & w^1 & -1 & -w^3 & w^2 & -w^1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -w^1 & w^2 & -w^3 & -1 & w^1 & -w^2 & w^3 \\ 1 & -w^2 & -1 & w^2 & 1 & -w^2 & -1 & w^2 \\ 1 & -w^3 & -w^2 & -w^1 & -1 & w^3 & w^2 & w^1 \end{bmatrix}.$$

$f_1(t) = sin(13t)$ $f_2(t) = 0.8sin(23t)$ $f_3(t) = 0.6sin(33t)$	$f_1(t) = sin(13t)$ $f_2(t) = 0.8sin(23t)$ $f_3(t) = 0.6sin(33t)$	$f_1(t) = sin(13t)$ $f_2(t) = 0.8sin(23t)$ $f_3(t) = 0.6sin(33t)$
$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t),$ $t \in \langle 0, 6\pi \rangle$	$f(t) = \begin{cases} f_1(t), t \in \langle 0, 2\pi \rangle \\ f_2(t), t \in \langle 2\pi, 4\pi \rangle \\ f_3(t), t \in \langle 4\pi, 6\pi \rangle \end{cases}$	$f(t) = \begin{cases} f_1(t), t \in \langle 0, 2\pi \rangle \\ f_1(t) + f_2(t), t \in \langle 2\pi, 4\pi \rangle \\ f_1(t) + f_2(t) + f_3(t), t \in \langle 4\pi, 6\pi \rangle \end{cases}$
		
		

Obr. 4.2Ukázka funkcí majících stejná amplitudová Fourierovská spektra

Přímá DFT a zpětná DFT je

$$\mathbf{F} = \mathbf{M_F f} = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{bmatrix} 36 \\ -7,4142 + 3,6569i \\ -2 - 4i \\ -4,5858 + 7,6569i \\ 0 \\ -4,5858 - 7,6569i \\ -2 + 4i \\ -7,4142 - 3,6569i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \mathbf{M_F^T F} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \\ 7 \\ 8 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Druhá polovina vektoru **F** je komplexně sdružená k té první. ▲

Příklad 4.7. DFT nám poskytuje informaci pouze o zastoupených harmonických a jejich amplitudách - tzn. pro tři odlišné funkce obsahující stejné frekvence, ale různě lokalizované v čase, obdržíme identické amplitudové spektrum viz. obr. 4.2. Lokalizaci jak v časové, tak ve frekvenční oblasti pak umožnuje okenní FT (WFT) nebo waveletová transformace (WT) - viz. následující kapitoly.

4.4 Dvoustranná DFT

Poznámka 4.8. Někdy se můžeme setkat s dvoustrannou DFT definovanou

$$\hat{f}_n = c_n = \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} f_k \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-i\frac{2\pi}{N}nk} \quad \text{resp.} \quad \hat{f}_n = c_n = \sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} f_k \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-i\frac{2\pi}{N}nk}$$

v závislosti na tom, zda celkový počet vstupních hodnot N funkce f je sudý (pak $k = -\frac{N}{2}+1, \dots, \frac{N}{2}$, $n = -\frac{N}{2}+1, \dots, \frac{N}{2}$) resp. lichý (pak $k = -\frac{N-1}{2}, \dots, \frac{N-1}{2}$, $n = -\frac{N-1}{2}, \dots, \frac{N-1}{2}$).

4.5 Dvourozměrná DFT

Definice 4.9. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^D, D \in \mathbb{N}$, $\mathbf{x} \in \Omega$ a nechť $\{\varphi_n(\mathbf{x})\}_{\forall n}, \varphi_n(\mathbf{x}) \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ tvoří úplný ortonormální systém. Pak pro každou funkci $f(\mathbf{x}) \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ existuje na množině Ω jednoznačný rozvoj v konvergentí řadu (v normě $\mathbf{L}^2$)

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \varphi_n(\mathbf{x}), \quad \text{kde } c_n = \langle f, \varphi_n \rangle = \int \dots \int_{\mathbf{x}\in\Omega} f(\mathbf{x}) \overline{\varphi}_n(\mathbf{x}) dx_1 \dots dx_D.$$

Tuto řadu nazveme D**- rozměrnou zobecněnou FŘ**. Numerický výpočet c_n pak vede na $D-$**rozměrnou zobecněnou DFT**.

Příklad 4.10. Např. pro $D = 2$, index $n \in \mathbb{Z}$

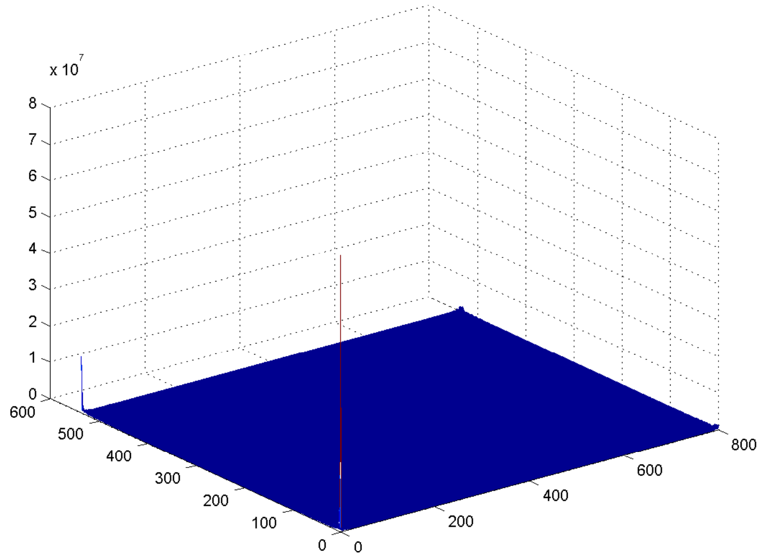
$$c_n = \langle f, \varphi_n \rangle = \iint_{(x_1,x_2)\in\Omega} f(x_1,x_2)\overline{\varphi}_n(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \iint_{(x,y)\in\Omega} f(x,y)\overline{\varphi}_n(x,y)dxdy.$$

Pro funkce $\varphi_n(x,y) = \varphi_{uv}(x,y) = \frac{1}{\|\Omega\|} e^{i(ux+vy)}$ obdržíme klasickou dvourozměrnou FŘ.

Definice 4.11. Nechť Ω je obdélník diskretizován v matici $\mathbb{R}^{M\times N}$, $\mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}_n = \boldsymbol{\varphi}_{uv} = \frac{1}{\sqrt{MN}} e^{i2\pi(\frac{ku}{M}+\frac{lv}{N})} \in \mathbf{l}^2(M\times N)$, kde $k = 0,1,\dots,M-1$ je tzv. řádkový index charakterizující první proměnnou, $l = 0,1,\dots,N-1$ je tzv. sloupcový index charakterizující druhou proměnnou a $n = 0,1,\dots,(M-1)(N-1)$. Pak **dvourozměrná DFT** je definována jako matice $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{M\times N}$, jejíž prvky c_n jsou dány vztahem

$$c_n = \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}_n \rangle = \hat{f}_{uv} = \sum_{l=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{M-1} f_{kl} \frac{1}{\sqrt{MN}} e^{-2\pi i(\frac{ku}{M}+\frac{lv}{N})} = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{l=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{M-1} f_{kl} e^{-2\pi i(\frac{ku}{M}+\frac{lv}{N})},$$

kde řádkový index $u = 0,1,\dots,M-1$ a sloupcový index $v = 0,1,\dots,N-1$.



Obr. 4.3Dvourozměrná DFT - amplitudové spektrum R složky obrazu 2.1a

Poznámka 4.12. Výpočet dvourozměrné DFT lze provést ve dvou krocích:
1. jednorozměrná DFT řádků matice $\mathbf{f}$: $\mathbf{f}\mathbf{M}_{\mathbf{F}N}^T = (\mathbf{M}_{\mathbf{F}N}\mathbf{f}^T)^T$
2. jednorozměrná DFT sloupců vzniklých po 1. kroku: $\mathbf{M}_{\mathbf{F}M}\mathbf{f}\mathbf{M}_{\mathbf{F}N}^T$,
nebo v opačném pořadí.
Výslednou dvourozměrnou DFT můžeme tedy psát ve tvaru

$$\mathbf{c} = \mathbf{M}_{\mathbf{F}M}\mathbf{f}\mathbf{M}_{\mathbf{F}N}^T = \mathbf{M}_{\mathbf{F}M}(\mathbf{f}\mathbf{M}_{\mathbf{F}N}^T) = (\mathbf{M}_{\mathbf{F}M}\mathbf{f})\mathbf{M}_{\mathbf{F}N}^T,$$

nezávislost na pořadí transformací plyne z asociativity násobení matic.

Příklad 4.13. Aplikujte dvourozměrnou DFT na R-složku obrazu 2.1a.

Řešení. Amplitudové Fourierovské spektrum je vykresleno na obrázku 4.3. ▲

4.6 Rychlá DFT - FFT

Výpočet DFT mající za vstup i výstup vektor hodnot dle vztahu (4.5) není pro praktické úlohy příliš vhodný zejména pro svou značnou časovou náročnost rostoucí se čtvercem délky vektorů, tj. $\mathcal{O}(N^2)$. Výpočet n-té složky DFT vektoru délky N je srovnatelný s vyčíslením hodnoty polynomu stupně $N-1$ v bodě $e^{-i\frac{2\pi}{N}n}$. I přes použití optimálního Hornerova schématu je potřeba $2N(N-1) \sim N^2$ operací. Tento fakt vedl k vypracování algoritmu založeného na „pěkných“ vlastnostech diskrétních exponenciálních funkcí a redukujícího výrazným způsobem výpočetní dobu skrz minimalizaci počtu násobení a to navíc komplexních čísel - tzv. FFT algoritmus (Fast Fourier Transform).

Algoritmus FFT byl publikován 1965 J. W. Cooleyem a J. W. Tukeyem pod názvem „Butterfly“ (motýlek) nebo též „Splitting method“ pro počet vstupních hodnot $N = 2^m$, $m \in \mathbb{N}$. Vyjděme z DFT dané vztahem

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} f_k w^{nk}, \quad w = w_N = e^{-i\frac{2\pi}{N}}.$$

Rozdělením vektoru $\mathbf{f} = (f_0, f_1, ..., f_{N-1})^T$ majícího N složek na 2 vektory o $\frac{N}{2}$ složkách $\mathbf{y} = (f_0, f_2, ..., f_{N-2})^T$ a $\mathbf{z} = (f_1, f_3, ..., f_{N-1})^T$ a to tím způsobem že vezmeme členy se sudým indexem $y_k = f_{2k}$ a členy s lichým indexem $z_k = f_{2k+1}$, pak lze F_n obrazu $\mathbf{F} = (F_0, F_1, ..., F_{N-1})^T$ rozepsat

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \left(f_0 w^0 + f_1 w^n + ... + f_{N-1} w^{(N-1)n}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \left[\left(f_0 w^0 + f_2 w^{2n} + ... + f_{N-2} w^{(N-2)n}\right) + w^n \left(f_1 w^0 + f_3 w^{2n} + ... + f_{N-1} w^{(N-2)n}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[y_k w^{2nk} + z_k w^{(2k+1)n}\right], \quad n = 0, 1, ..., N-1.$$

V důsledku symetrie komplexních čísel (koeficientů na kružnici):

$$w^{2nk} = w_N^{2nk} = w_{N/2}^{nk} = e^{-i\frac{4\pi}{N}nk} = e^{-i\frac{2\pi}{N/2}nk}$$

(obecně $w_N^{pq} = w_{N/q}^{p}$) platí

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} y_k w_{N/2}^{nk} + \frac{1}{\sqrt{N}} w_N^n \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} z_k w_{N/2}^{nk} = Y_n + w_N^n Z_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \frac{N}{2} - 1, \tag{4.7}$$

kde $\mathbf{Y} = DFT(\mathbf{y})$ a $\mathbf{Z} = DFT(\mathbf{z})$. První polovinu koeficientů F_n tedy obdržíme pomocí DFT vektorů poloviční velikosti. Druhou polovinu získáme

$$F_{n+\frac{N}{2}} = Y_n + w_N^{n+\frac{N}{2}} Z_n = Y_n + w_N^n w_N^{\frac{N}{2}} Z_n = Y_n - w_N^n Z_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \frac{N}{2} - 1, \tag{4.8}$$

neboť $w_N^{\frac{N}{2}} = e^{-i\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}} = e^{-i\pi} = -1$. Uvedené štěpení vektorů lze opakovat do doby, dokud nedostaneme dva vektory o jedné složce

$$DFT(y_0) = Y_0 = \sum_{k=0}^{0} y_0 w_N^0 = y_0, \; DFT(z_0) = Z_0 = \sum_{k=0}^{0} z_0 w_N^0 = z_0.$$

Časová náročnost vycházející ze sekvence výše popsaných štěpení $(2\left(\frac{N}{2}\right)^2 = \frac{N^2}{2} < < N^2)$ je $\mathcal{O}(N \ln N)$. Maticový zápis FFT daný vztahy (4.7), (4.8) bude

$$\mathbf{F} = \mathbf{M}_{\mathbf{F},N}\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} & \mathbf{D}_{\frac{N}{2}} \\ \mathbf{I}_{\frac{N}{2}} & -\mathbf{D}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_N \begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} \end{bmatrix},$$

kde $\mathbf{I}_{\frac{N}{2}}$ je jednotková matice, diagonální matice $\mathbf{D}_{\frac{\mathbf{N}}{\mathbf{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{N}{2}}} diag\left(1, w_{2r}^1, w_{2r}^2, \ldots, w_{2r}^{\frac{N}{2}-1}\right)$, obě řádu $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}$. Další krok bude

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\frac{N}{4}} & \mathbf{D}_{\frac{N}{4}} \\ \mathbf{I}_{\frac{N}{4}} & -\mathbf{D}_{\frac{N}{4}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}' \\ \mathbf{Z}' \end{bmatrix} = \mathbf{B}_{\frac{N}{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}' \\ \mathbf{Z}' \end{bmatrix}, \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\frac{N}{4}} & \mathbf{D}_{\frac{N}{4}} \\ \mathbf{I}_{\frac{N}{4}} & -\mathbf{D}_{\frac{N}{4}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}'' \\ \mathbf{Z}'' \end{bmatrix} = \mathbf{B}_{\frac{N}{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}'' \\ \mathbf{Z}'' \end{bmatrix},$$

kde $\mathbf{I}_{\frac{N}{4}}$ je jednotková matice, diagonální matice $\mathbf{D}_{\frac{N}{4}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{N}{4}}} diag\left(1, w_{2r}^2, w_{2r}^4, \ldots, w_{2r}^{\frac{N}{4}-2}\right)$, obě řádu $\frac{N}{4} \times \frac{N}{4}$. V dalším kroku vektory $\mathbf{Y}', \mathbf{Z}', \mathbf{Y}'', \mathbf{Z}''$ znovu rozdělíme na vektory se sudým a lichým indexem, přeindexujeme a několikerým dalším zopakováním dostaneme

$$\mathbf{F} = \mathbf{B}_N \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\frac{N}{2}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\frac{N}{4}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{\frac{N}{4}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{\frac{N}{4}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{\frac{N}{4}} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \mathbf{P}^T\mathbf{f}, \tag{4.9}$$

kde $\mathbf{P}$ je permutační matice vytvořená při vykonávání postupného sudo-lichého přeskupování sloupců jednotkové matice. Vstupní sekvence $\mathbf{f}$ je nejprve přeskupena pomocí permutační matice $\mathbf{P}^T$a pak prochází jednotlivými kombinačními stupni. Např. pro $N = 8$

$$\mathbf{P}^T\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_4 \\ f_2 \\ f_6 \\ f_1 \\ f_5 \\ f_3 \\ f_7 \end{bmatrix}.$$

Navíc platí, že transformační matice DFT vektroru o 8 složkách bude rovna produktu

$$\mathbf{M}_{\mathbf{F},8} = \mathbf{B}_8 \begin{bmatrix} \mathbf{B}_4 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \mathbf{P}^T.$$

Algoritmus 4.2 Implementace algoritmu přímé FFT

```
function X=myfft(x);

    N=length(x); n=log2(N);
    % Vytvoreni permutacniho vektoru
    pt=(1:N)';
    i_odd=(1:N/2)*2-1;      % liche koeficienty
    i_even=(1:N/2)*2;       % sude
    for i=1:n-1
        m=2^(i-1);K=N/(2*m);
        pt_odd=reshape(pt(i_odd),K,m)
        pt_even=reshape(pt(i_even),K,m)
        pt=reshape([pt_odd;pt_even],N,1)
    end;
    % Prenasobovani dilcimi maticemi
    X=x(pt);
    for i=1:n

        K=2^i; m=N/K; % m je pocet bloku B na diag., K je rad B
        w=exp(2i*pi/K);
        D=sqrt(2/K)*diag(w.^(0:-1:-(K/2-1))); %Diag. matice s prvky w
        I=eye(K/2);                 % Jednotkova matice
        B=[[I,D];[I,-D]];           % Blok B
        V=diags(B,m);               % Matice sestavena z m bloku B
        X=V*X;
    end;
```

Algoritmus 4.3 Implementace algoritmu zpětné FFT

```
function x=myifft(X);

    N=length(X);
    n=log2(N);              % n...pocet urovni
    % Vytvoreni permutacniho vektoru pt
    pt=(1:N)';
    i_odd=(1:N/2)*2-1;      % i_odd..liche indexy
    i_even=(1:N/2)*2;       % i_even.. sude indexy
    for i=1:n-1
        m=2^(i-1);
        K=N/(2*m);
        pt_odd=reshape(pt(i_odd),K,m); % preusporadani prvku
        pt_even=reshape(pt(i_even),K,m);
        pt=reshape([pt_odd;pt_even],N,1);
    end;
    % Prenasobovani dilcimi maticemi
    x=X;
    for i=n:-1:1
        K=2^i;
        m=N/K;    % m je pocet bloku B na diagonale, K je rad B
        w=exp(2i*pi/K);
        D=sqrt(2/K)*diag(w.^(0:-1:-(K/2-1)));% Diag. matice s prvky w
        I=eye(K/2);                 % Jednotkova matice
        B=[[I,D];[I,-D]];           % Blok B
        V=diags(B,m);               % Matice sestavena z m bloku B
        x=V'*x;
    end;
    x=x(pt);
```

Poznámka 4.14. Existuje celá řada velmi rychlých a efektivních implementací DFT jako je např. algoritmus s redukcí kmitočtu, sloučený algoritmus, modifikace algoritmu FFT s prvočíselným rozkladem, algoritmus v konečných kruzích a jiné.

Poznámka 4.15. DFT má obrovské využití v různých oborech, za zmínku stojí její použití ve fyzice při řešení přenosových soustav (charakterizace chování dynamické soustavy pomocí přenosové funkce a převod konvoluce na násobení), úlohách difrakce, v krystalografii při řešení reciproké mřížky, v optice při zobrazování čočkami v tzv. Fraunhofferově aproximaci, v kvantové mechanice v relaci neurčitosti a digitálním zpracování obrazu (restaurování, zkvalitňování, segmentace a komprese obrazu) a zvuku. U posledně zmíněné aplikace bych rád upozornil na zcela nový typ tzv. kepstrální analýzy spočívající v aplikaci FFT na upravené Fourierovské spektrum mající hlavně využití v analýze řeči.

Kapitola 5

Okenní Fourierova transformace (WFT)

5.1 Motivace

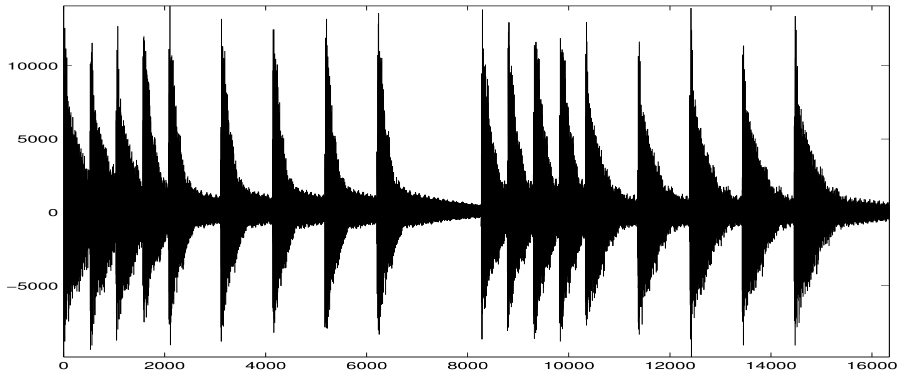
Svět je plný signálů - zvuků (hudba, řeč), obrazů (fotografie, televize), datových řetězců (čísel, znaků), zemětřesení, elektromagnetických vlnění atd., které musí být analyzovány, syntetizovány, komprimovány, přenášeny nebo vyhlazovány. Metody používané k tomuto zpracování signálů jsou Fourierova řada, Fourierova, okenní a waveletová transformace. Cílem této kapitoly je seznámit studenty s problematikou okenní Fourierovy transformace a jejího využití pro časově-frekvenční analýzu signálů a jejich filtraci.

Uvažujme analýzu části skladby "Kočka leze dírou, pes oknem, nebude-li pršet, nezmoknem" (viz obr. 5.1). Skladba může být modelována funkcí $f(t)$, reprezentující tlak vzduchu na ušní bubínek jako funkce času (viz. obr 5.2) - tato „klavírní skladba" trvá 17.63 sec a byla vzorkována 44600 Hz na 777492 bodů a převzorkována na 16384 bodů.

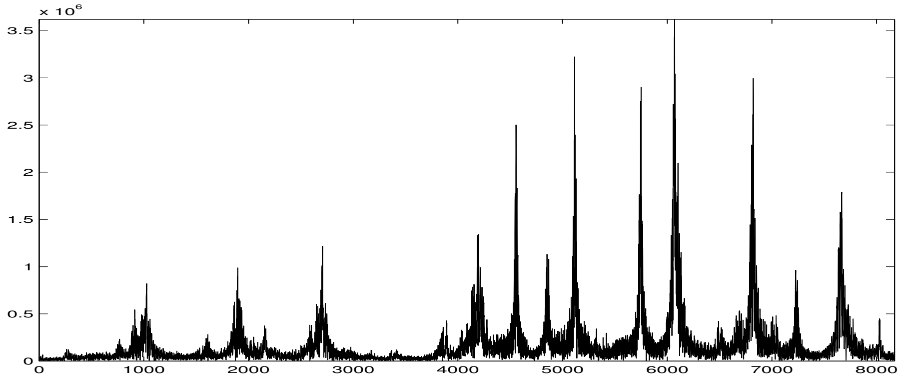
Jestliže se hudba skládá z jednotlivých tónù s frekvencí ω_1 , pak $f(t)$ je periodická s periodou $T = 1/\omega_1$ a jejím přirozeným popisem bude Fourierova řada - tzv. harmonická analýza funkce $f(t)$ splňující Dirichletovy podmínky. Frekvenční charakteristiky, tj. Fourierovy koeficienty určují amplitudy jednotlivých harmonických $\omega_n = n\omega_1$ v $f(t)$. Jestliže je hudba řadou takovýchto tónů a melodií, pak obecně tato řada není periodická a Fourierova řada nemůže být pro její analýzu použita.

Teoreticky existuje možnost spočítat Fourierovu integrální transformaci $F(\omega)$

Obr. 5.1Část skladby reprezentovaná notami



Obr. 5.2Část skladby reprezentovaná jako funkce času



Obr. 5.3Jednostranné amplitudové Fourierovské spektrum funkce $f(t)$

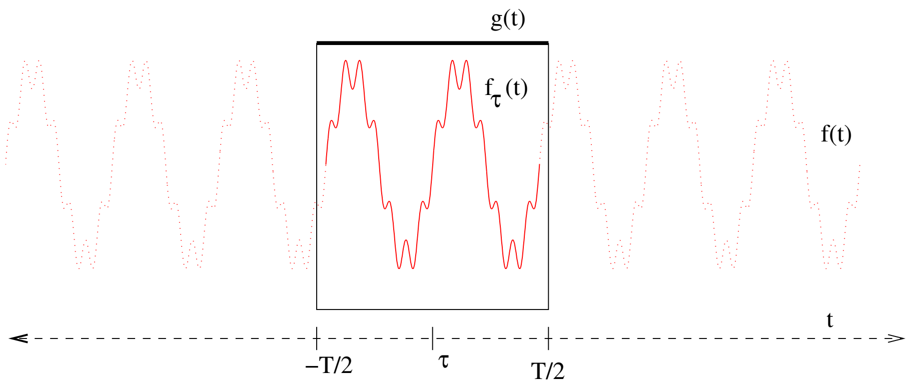
funkce $f(t)$ podle (4.1). Tento přístup má však z praktického hlediska jednu vadu. Abychom spočítali $F(\omega)$, musíme integrovat $f(t)$ na celé časové ose $t \in (-\infty, +\infty)$. Potom $F(\omega)$ obsahuje celkové amplitudové spektrum (viz obr. 5.3) v celé skladbě a nikoliv rozdělení harmonických v každém tónu - tzn. chybí časová lokalizace.

Dalším příkladem je obr. 4.2, kde třem zcela odlišným funkcím odpovídá podobné amplitudové spektrum.

Jestliže skladba trvá určitou dobu, musíme před výpočtem $F(\omega)$ počkat až dozní. Tedy Fourierovou transformací jsme schopni analyzovat pouze frekvenční obsah signálu, nikoli začátek či konec zkoumaného děje, tj. délku jeho trvání.

Navíc informace o skocích a singularitách je rozložena do celého frekvenčního spektra, tj. při libovolně malých změnách funkce $f(t)$ v okolí libovolného bodu t dochází ke změně celého frekvenčního spektra, což vede k obtížím při rekonstrukci. Příčinou je periodicita bázových funkcí $e^{i\omega t}$, které nejsou lokalizovány v ohraničeném intervalu proměnné t .

Uvažujme nyní model slyšení, z něhož bere okenní transformace inspiraci. Lidské ucho může vnímat změny melodie aniž by rozkládalo signál na tóny. Poněvadž ucho analyzuje rozdělení frekvencí daného signálu $f(t)$ v reálném čase, musí současně



Obr. 5.4Princip okenní transformace

podat informaci o $f(t)$ ve frekvenční i časové oblasti. Popišme tedy výstup funkce $\widehat{f}(\omega,\tau)$ v závislosti na frekvenci ω a posunutí τ .

Poněvadž ucho nemůže analyzovat to, co uslyší později, mohou být pro výpočet $\widehat{f}(\omega,\tau)$ použity pouze hodnoty $f(t)$, kde $t < \tau + T/2$. Ucho má také konečnou paměť - existuje časový interval takový, že pouze hodnoty $f(t)$ pro $t \geqq \tau - T/2$ mají vliv na výsledek v čase t . Tedy $\widehat{f}(\omega,\tau)$ může záviset jen na $f(t)$ pro $\tau - T/2 \leqq t \leqq$ $\leqq \tau + T/2$. Hodnoty signálu blízko konců intervalu mají menší vliv na anlýzu než hodnoty uprostřed intervalu.

5.2 Definice okenní funkce a spojité WFT

Jednou z možností, jak odstranit tento problém, je použití okenních (váhových) funkcí $g(t-\tau)$, které jsou dobře lokalizovány kolem hodnoty τ.

Spojitá funkce $g(t)$, která je finitní a nenulová na intervalu $-T/2 \leqq t \leqq T/2$ a nulová vně tohoto intervalu, bude použita k lokalizaci signálu v čase. Pomocí funkce $g(t)$ definujeme funkci $f_\tau(t) = f(t)\overline{g(t-\tau)}$, která má obecně stejný nosič jako funkce $g(t)$ a nazývá se lokalizovaná část funkce $f(t)$ - viz obr 5.4. Funkce $\overline{g(t)}$ je funkce komplexně sdružená k $g(t)$. Funkce $g(t)$ "klouže" podél časové osy. Okenní transformaci lze interpretovat jako lokální Fourierovu transformaci s posunutím.

Definice 5.1. Nechť $f(t), g(t), tg(t) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, $f_\tau(t) = f(t)\overline{g(t-\tau)}$, pak pro $\forall \tau \in \mathbb{R}$ definujme okenní Fourierovu transformaci (Window Fourier transform - WFT) jako Fourierovu transformaci funkce $f_\tau(t)$:

$$F(\omega,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\|g(t)\|}\int_{-\infty}^{+\infty} f_\tau(t)e^{-i\omega t}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\|g(t)\|}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{g(t-\tau)}e^{-i\omega t}dt. \tag{5.1}$$

FT je prováděna pro každou polohu okna určenou parametrem τ .
Zpětná (inverzní) okenní Fourierova transformace je dána formulí:

$$F^{-1}(\omega,\tau) = f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\|g(t)\|}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega,\tau)g(t-\tau)e^{i\omega t}d\omega\right)d\tau. \tag{5.2}$$

Generování okenní funkce $g(t)$ je založeno na:

- filtračních vlastnostech jádra v konvoluci $(f \star g)(t)$, $g(t)$ je jádrem konvoluce, jestliže $g(t) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt = 1$ a $g(t)$ lze psát ve tvaru

$$g(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} E^{-1}(s)e^{st}ds$$

  s γ značícím vertikální přímku v oboru absolutní konvergence Fourier-Laplaceova integrálu a

$$E(s) = e^{bs}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{a_k}\right)e^{\frac{s}{a_k}}$$

  s $b \in \mathbb{R}$ a reálnou posloupností $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ vytvářející konvergentní řadu $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_k^2}$,

- reprezentaci „$\delta-$ funkce" mající tvar

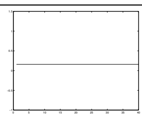
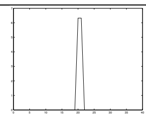
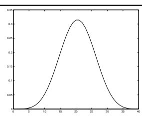
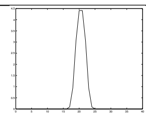
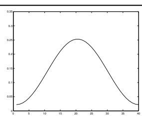
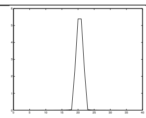
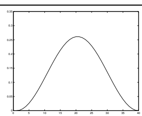
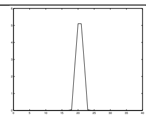
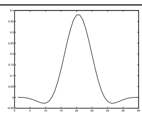
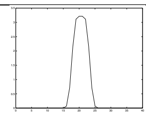
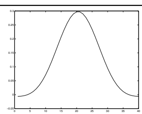
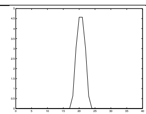
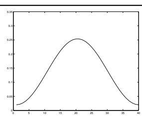
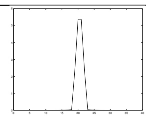
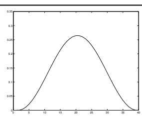
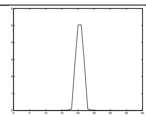
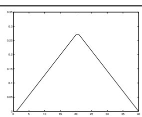
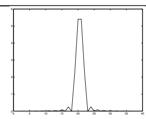
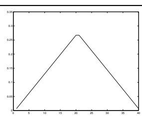
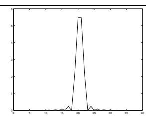
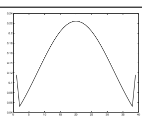
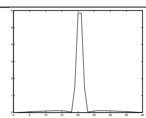
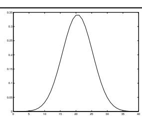
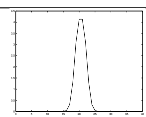
$$g(t,\lambda) = \frac{\lambda K(\lambda t)}{2\int_0^{+\infty} K(\tau)d\tau},$$

  přičemž $\lambda \to \infty$ a $K(t)$ je sudá funkce s $K(0) \neq 0$,

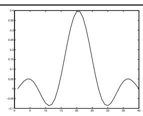
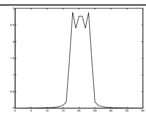
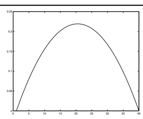
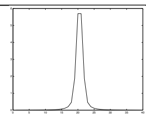
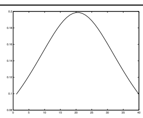
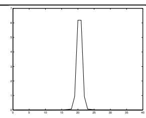
- lokálních FŘ - zobecněná kosinová okna mající tvar

$$g(t) = K\sum_{k=0}^{n}(-1)^k A_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right), |t| \in \langle 0, T/2\rangle\,.$$

Přehled nejčastěji používaných okenních funkcí jak v časové, tak ve frekvenční oblasti (při šířce okna 20 bodů) je uveden na obr. 5.5 - každé z oken má své specifické vlastnosti dané jeho FT a propouští jen určité frekvence (více viz [1]).

Název	Vzorec	Okenní fce v oblasti časové	Okenní fce v oblasti frekvenční
Obdélník	$g(t) = K\sum_{k=0}^{4}(-1)^k A_k \cos\frac{2k\pi t}{T}$ $K = 1, A_0 = 1, A_1 = 0, A_2 = 0,$ $A_3 = 0, A_4 = 0$		
Blackmann-Harrison	$g(t) = K\sum_{k=0}^{4}(-1)^k A_k \cos\frac{2k\pi t}{T}$ $K = 1, A_0 = 1, A_1 = 1.361, A_2 = 0.394,$ $A_3 = 0.033, A_4 = 0$		
Hamming	$g(t) = K\sum_{k=0}^{4}(-1)^k A_k \cos\frac{2k\pi t}{T}$ $K = 1, A_0 = 1, A_1 = 0.84, A_2 = 0,$ $A_3 = 0, A_4 = 0$		
Hanning	$g(t) = K\sum_{k=0}^{4}(-1)^k A_k \cos\frac{2k\pi t}{T}$ $K = 1, A_0 = 1, A_1 = 1, A_2 = 0,$ $A_3 = 0, A_4 = 0$		
Flat-top	$g(t) = K\sum_{k=0}^{4}(-1)^k A_k \cos\frac{2k\pi t}{T}$ $K = 1, A_0 = 1, A_1 = 1.93, A_2 = 1.29,$ $A_3 = 0.388, A_4 = 0.032$		
Kaiser-Bessel	$g(t) = K\sum_{k=0}^{4}(-1)^k A_k \cos\frac{2k\pi t}{T}$ $K = 1, A_0 = 1, A_1 = 1.29, A_2 = 0.244,$ $A_3 = 0.003, A_4 = 0$		
Tukey	$g(t) = K\sum_{k=0}^{4}(-1)^k A_k \cos\frac{2k\pi t}{T}$ $K = 1, A_0 = 0.54, A_1 = 0.46, A_2 = 0,$ $A_3 = 0, A_4 = 0$		
Radar	$g(t) = 1 + \cos\pi t,\ t \in (-1, 1)$		
Bartlett	$g(t) = \begin{cases} 2t/T, & t \in \langle 0, T/2\rangle \\ 2 - 2t/T, & t \in \langle T/2, T\rangle \end{cases}$		
Trojúhelník	$g(t) = \begin{cases} 2t/T, & t \in \langle 0, T/2\rangle \\ 2 - 2t/T, & t \in \langle T/2, T\rangle \end{cases}$		
Čebyšev	Matlab. funkce chebwin-hyperbol.fce		
Gauss	$g(t) = (2a)^{1/4} e^{-\pi a t^2},\ \lvert t\rvert \in \langle 0, T/2\rangle$		

Obr. 5.5Přehled okenních funkcí v časové a frekvenční oblasti I

Název	Vzorec	Okenní fce v oblasti časové	Okenní fce v oblasti frekvenční
Sinuscardinalis	$g(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}, \quad \lvert t\rvert \in \langle 0, T/2\rangle$		
Parsen1	$g(t) = 1 - \left(\frac{2\lvert t\rvert}{T}\right)^q, q \geqq 2 \;\; \lvert t\rvert \in \langle 0, T/2\rangle$		
Parsen2	$g(t) = \left[1 - \left(\frac{2\lvert t\rvert}{T}\right)^q\right]^{-1}, q \geqq 2 \quad \lvert t\rvert \in \langle 0, T/2\rangle$		

Obr. 5.6Přehled okenních funkcí v časové a frekvenční oblasti II

Průkopníkem okenní transformace byl Gabor se svou spojitou transformací (1946) založenou na rozkladu na časově-frekvenční atomy generované jako časové a frekvenční posuny Gaussovské funkce.

Interval T (šířka okna) a posuv τ jsou zde konstantní a nezávisí přímo na průběhu funkce ani na její frekvenci. Zvolená okenní funkce minimalizuje vztah (kritérium vyhodnocení) $\lambda(\tau t) = \|f - f_\tau\|_{L_2}$, $\tau \in [0, T]$ jak uvnitř zvoleného okna, tak i na celé časové ose.

5.3 Diskrétní WFT (DWFT)

Jak již bylo zmíněno, principem WFT je napočítávání FT jednotlivých lokalizovaných částí f_τ vstupního signálu f pomocí okenní funkce g. Při numerickém výpočtu budeme tedy vyčíslovat sekvenci DFT resp. FFT vektoru $\mathbf{f}_{\tau_k} = \mathbf{f}.\bullet\mathbf{g}_{\tau_k}$, kde nenulové hodnoty okenní funkce doplníme nulami na stejnou délku jako má vektor $\mathbf{f}$ a mohl být vyčíslen součin element po elemetnu. Z maticového zápisu DFT : $\mathbf{c}_{\tau_k} = \mathbf{M_F}\mathbf{f}_{\tau_k}$ obdržíme k-tý sloupec matice $\mathbf{c}$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{\tau_0} & \mathbf{c}_{\tau_1} & \cdots & \mathbf{c}_{\tau_K} \end{bmatrix} = \mathbf{M_F} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\tau_0} & \mathbf{f}_{\tau_1} & \cdots & \mathbf{f}_{\tau_K} \end{bmatrix},$$

kde K je celkový počet okenních lokalizací. Absolutní hodnoty jednotlivých sloupců $\mathbf{c}_{\tau_k}$ tak budou tvořit „řezy“ časově-frekvenčního spektra jejichž „seskládáním“ resp. projekcí do jedné roviny dostaneme klasické amplitudové Fourierovské spektrum, tj. označíme-li $\mathbf{F}$=DFT($\mathbf{f}$), pak pro n-tou komponentu platí:

$$|F_n| = \max\left\{|c_{n,\tau_0}|, |c_{n,\tau_1}|, ..., |c_{n,\tau_K}|\right\}.$$

Příklad 5.2. S využitím DWFT proveďte časově-frekvenční analýzu hudední skladby 5.2.

Řešení. Časově-frekvenční spektra hudební skladby 5.2 zpracovaná pomocí DWFT jsou vyobrazena na obr. 5.7 - grafy v sloupci představují vyhlazený signál, jednostranné amplitudové spektrum, časově-frekvenční spektrum v 3D a při pohledu shora (777492 bodů / 17.63 sec => 44600 bodů / 1 sec => max. frekvence 22300 Hz, při použití oken délky 20 bodů => 10 frekvenčních hladin => 2230 Hz / 1 frekv. hladinu). ▲

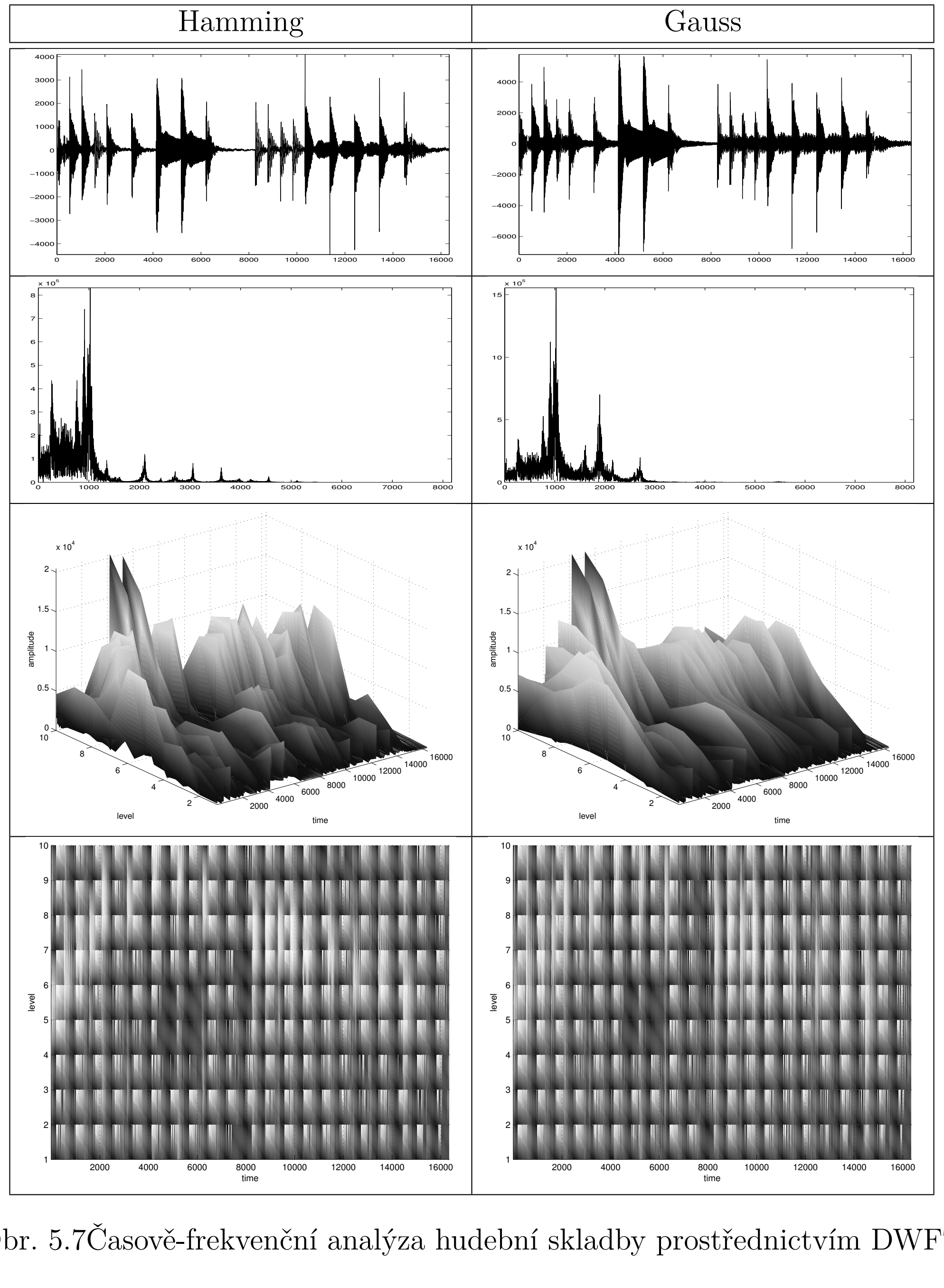
Příklad 5.3. S využitím DWFT proveďte časově-frekvenční analýzu třech signálů z obrázku 4.2.

Řešení. Časově-frekvenční spektra při pohledu shora funkcí majících podobná amplitud. spektra získaná pomocí Hammingova okna jsou pro ilustraci vyobrazena na obr. 5.8. Ukázka programu v Matlabu generujícího vyhlazené signály, jejich amplitudová spektra, časově-frekvenční spektra a časově-frekvenční spektra při pohledu shora funkce $f(t)$ je uvedena v Algoritmu 5.2. ▲

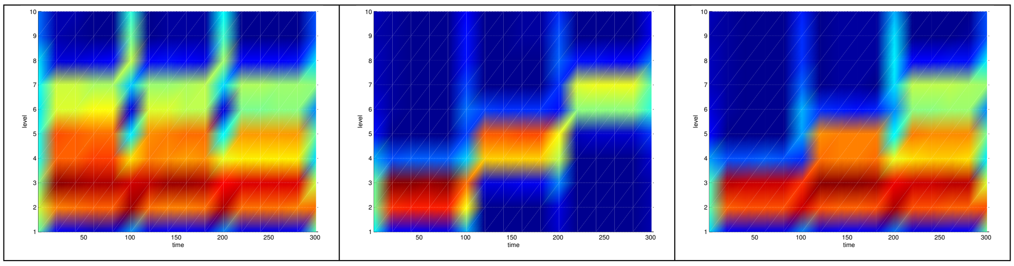
Poznámka 5.4. WFT potlačuje vyšší frekvence - v závislosti na použitém okně, čehož se využívá při vyhlazování signálů. WFT může být také užita pro analýzu nestacionárních signálů. Mezi nevýhody WFT lze řadit neadaptivitu okna - tj. konstantní šířku okna jak v časové, tak i ve frekvenční oblasti (tento nedostatek odstraňuje až waveletová transformace) a podle Heissenbergova principu neurčitosti také nemožnost přesné lokalizace v časové a ve frekvenční oblasti současně.

Implementace vzorového příkladu obsahuje tyto části

- generování vstupního signálu f obsahujícího 3 frekvence - 13, 23, 33 Hz, které nastupují postupně po násobcích 2π s diskretizačním krokem $2\pi/100$ a vykreslení namodelovaného signálu
- FT namodelovaného signálu za použití matlab. funkce fft a vykreslení jednostranného Fourierovského amplitudového spektra
- generování okenní funkce - podle výše uvedeného přehledu je možno vygenerovat kteroukoliv okenní funkci - pro ukázku byla zvolena funkce Hammingova a Gaussova délky $N = 20$ a posun okna byl zvolen $\tau = 2$
- výpočet koeficientů DWFT - podle definice (integrace je nahrazena sumací) - koeficienty jsou ukládány do matice $\mathbf{c}$ po řádcích - pro do danou pozici okna jsou spočteny koeficienty DWFT na jednotlivých frekvenčních hladinách v zavislosti na délce okna určující rozsah propouštěných frekvencí (Neyquistova frekvence - největší možná zachytitelná frekvence), výsledná matice je nakonec transponována tj. $\mathbf{c}^T$



Obr. 5.7Časově-frekvenční analýza hudební skladby prostřednictvím DWFT



Obr. 5.8Časově-frekvenční spektra signálů majících podobná Fourier. spektra při pohledu shora

- vyhlazení signálu - pro ukázku je uvedena aplikace DWFT pro vyhlazení namodelovaného signálu - pro každou pozici okna je vypočten $f_{vyhl}(\tau) = f_\tau^T g$, následuje výpočet DFT takto vyhlazeného signálu a zobrazení jeho spektra - v porovnání s původním amplitud. spektrem namodelovaného signálu je patrné, které frekvence byly oknem propuštěny a které naopak byly potlačeny
- zobrazení amplitudového časově-frekvenčního spektra (CFS) - interpolace hodnot a jejich vykreslení opět s použitím matlab. funkcí

Cvičení 5.5. 1. Namodelujte signál podobný tomu na obr. 4.2 např. s prvočíselnými frekvencemi.

2. Vykreslete tento signál a jeho jednostranné amplitudové Fourierovské spektrum.

3. Vyberte z přehledu okenních funkcí jednu, kterou vygenerujete podle příslušného vzorce.

4. Vykreslete toto okno jak v časové, tak ve frekvenční oblasti (jednostr. amplit. Four. spektrum).

5. Podle vzorového příkladu pak vypočtěte DWFT namodelovaného signálu a proveďte jeho vyhlazení s užitím tohoto okna.

6. Analyzujte propuštěné a odfiltrované frekvence na základě Four. spektra.

Algoritmus 5.1 Generátory okenních funkcí

```
function g=gcw(N,k,a0,a1,a2,a3,a4)  %  generalized cosine window
t=2*pi/(N-1);
for i=1:N
   g(i)=k*(a0-a1*cos(t*(i-1))+a2*cos(2*t*(i-1))...
        -a3*cos(3*t*(i-1))+a4*cos(4*t*(i-1)));
end)

function g=gauss(N,a)
krok=pi/(N-1);
for i=1:N+1
  t(i)=(i-N/2-1)*krok;
  g(i)=((2*a)^(1/4))*exp(-pi*a*t(i)*t(i));
end

function g=parsen1(N,q)
t=(-N/2:N/2);
for i=1:N+1
   g(i)=1-(abs(t(i))/(N/2))^q;
end

function g=parsen2(N,q)
t=(-N/2:N/2);
for i=1:N+1
   g(i)=1/(1+(abs(t(i))/(N/2))^q);
end

function g=radar(N)
krok=2/(N-1);
for i=1:N+1
   t(i)=(i-N/2-1)*krok;
   g(i)=1+cos(pi*t(i));
end

function g=sincard(N)
t=(-3:(6/(N-1)):3);
g=sinc(t);
```

Algoritmus 5.2 Implementace WFT

```
% Generovani vstupniho signalu --------------------------------
x1=0:2*pi/100:2*pi;x2=2*pi:2*pi/100:4*pi;x3=4*pi:2*pi/100:6*pi;
f=[sin(13*x1) 0.8*sin(23*x2) 0.6*sin(33*x3)]; n=length(f); plot(f);
% Fourierova transformace vstupniho signalu -------------------
F=fft(f); figure; plot(abs(F(1:n/2))); axis([0 n/2 0 max(F)]);
% Generovani okenni funkce ------------------------------------
N=20; tau=2;  % delka okna a posunuti okna
cg=input('Zadejte poradove cislo okna pro okenni transformaci: ');
if (cg==1) g=gcw(N,1,1,0,0,0,0); nazev='Obdelnikove okno';end
if (cg==2) g=gcw(N,1,1,1.36109,0.39381,0.03256,0); nazev='Blackmann-Harrisovo okno';end
if (cg==3) g=gcw(N,1,1,0.84,0,0,0); nazev='Hammingovo okno';end
if (cg==4) g=gcw(N,1,1,1,0,0,0); nazev='Hanningovo okno';end
if (cg==5) g=gcw(N,1,1,1.93,1.29,0.388,0.0322); nazev='Plochy vrch';end
if (cg==6) g=gcw(N,1,1,1.29,0.244,0.00305,0); nazev='Kaiser-Besselovo okno';end
if (cg==7) g=gcw(N,1,0.54,0.46,0,0,0); nazev='Tukyovo okno';end
if (cg==8) g=radar(N-1); nazev='Radarove okno';end
if (cg==9) g=bartlett(N); nazev='Bartlettovo okno';end
if (cg==10) g=triang(N); nazev='Trojuhelnikove okno';end
if (cg==11) g=chebwin(N-1,30); nazev='Chebyshovo okno';end
if (cg==12) g=gauss(N-1,1); nazev='Gaussovske okno';end
if (cg==13) g=sincard(N); nazev='Sinus-cardinalis okno';end
if (cg==14) g=parsen1(N-1,2); nazev='Parsenovo1 okno';end
if (cg==15) g=parsen2(N-1,2); nazev='Parsenovo2 okno';end
if (cg==16) g=transient(N); nazev='Transient okno';end
if (cg==17) g=exponent(N); nazev='Exponencialni okno';end
if (cg==18) g=radar(N); nazev='Radarove okno';end
g=g/norm(g,2); figure; plot(g);   % Normovani okna
G=fft(g); fwin=abs(G(1:N/2));     % Fourieruv obraz okna
fw=[]; for i=1:N/2 fw=[fwin(i) fw fwin(i)]; end;  figure; plot(1:N,fw);
% Vypocet matice Four. koeficientu c --------------------------
w1=2*pi/N; c=[];
for l=1:n/tau
   for j=1:N/2
      c(l,j)=0;
      for k=1:N
         tk=(l-1)*tau-N/2+k;
         if (tk > 0) & (tk < n)
            c(l,j)=c(l,j)+f(tk)*g(k)*exp(-i*w1*j*tk)/sqrt(N);
         end
      end
   end
end
c=c';
% Vyhlazeni signalu a jeho ampl. spektrum ---------------------
fvyhl=[];
for l=1:n/tau
   fvyhl(l)=0;
   for k=1:N
      tk=(l-1)*tau-N/2+k;
      if (tk > 0) & (tk < n)
         fvyhl(l)=fvyhl(l)+f(tk)*g(k);
      end
   end
end
fconv=interp(fvyhl,tau); figure; plot(fconv);
Fconv=fft(fconv); figure; plot(abs(Fconv(1:n/2)));
% Casove-frekvencni spektrum signalu ---------------------
for i=1:n/tau ctemp(:,2*i-1)=c(:,i); ctemp(:,2*i)=c(:,i); end;
[X,Y] = meshgrid(1:N:n,1:N/2); [x,y] = meshgrid(1:n, 1:N/2);
Z=interp2(x,y,abs(ctemp),X,Y); figure; surf(X,Y,Z); shading interp;
axis([1 n 1 N/2 0 max(max(Z))]);
xlabel('time'); ylabel('level'); zlabel('amplitude');
colorbar; view(0,90);   % CFS pri pohledu shora
```

Kapitola 6

Waveletová (vlnková) transformace (WT)

Zobecněné FT mají různé vlastnosti dané použitou bází a z toho plynoucí aplikace. Zatímco u řady těchto jednorozměrných zobecněných FT dochází k transformaci prostoru s určitým fyzikálním rozměrem (např. $[r]$ u klasické FT) do prostoru s fyzikálním rozměrem jiným (např. $[r^{-1}]$ u klasické FT), tak u waveletové neboli vlnkové transformace (WT), využívající bázi odvozenou od základní funkce pomocí posunutí a změny měřítka, dochází k transformaci jednorozměrného prostoru do dvourozměrného majícího však tentýž rozměr fyzikální. Waveletová analýza je tudíž speciálním případem Fourierovy analýzy.

K popisu WT potřebujeme složitější matematický aparát, jehož základem bude tzv. víceúrovňová analýza (multirozklad $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ neboli multiresolution analysis - MRA).

Pokusíme se vysvětlit základy tohoto procesu na jednoduchém příkladu. Představme si, že v supermarketu máme regál (nazveme jej Hilbertovým prostorem $\mathbf{L}^2(\Omega)$), označíme podlahu jako nulovou hladinu $m = 0$. Máme k dispozici zásilku zboží (funkce $f(t)$), např. zásilka míčů různé velikosti, regál je sestaven z jednotlivých polic, každá police tvoří jednu hladinu (V_m). Na každé polici jsou kulaté otvory (jednotlivé bázové elementy ϕ_{mn}, m je index police, n je počet otvorů na polici), průměry otvorů jsou stejné na jedné polici (na jedné hladině), ale při přechodu z jedné police na druhou se mění dle vztahu 2^m, $m = 0, 1, 2, \ldots$, tj. otvory na nižší polici tedy jsou 2x menší než o jednu výše. Úkolem bude najít optimální rozklad zboží na policích, tj. aby každý míč byl uložen na příslušné místo, odpovídající jeho průměru. Řešení: Je-li míč měnší než otvor, pak tento míč spadne přes otvor na příslušnou polici (na příslušnou hladinu), kde otvor bude menší než průměr míče. Uložit tento míč na nižší polici je ekonomicky nevýhodné - tam může být umístěn míč o menším diametru. Proceduru právě tohoto rozložení nazýváme víceúrovňovou analýzou. Díváme-li se do dalekohledu, mikroskopu, fotoaparátu, snažíme se zachytit ostré a zároveň dostatečně velké zobrazení našeho objektu, přitom automaticky provádíme podobnou analýzu.

6.1 Multirozklad

Definice 6.1. Multirozkladem $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ (víceúrovňovou analýzou) budeme nazývat neklesající posloupnost uzavřených škálovacích podprostorů $V_m \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n),\ m \in \mathbb{Z}$ pro něž platí následující podmínky:
1.$\ldots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots$ tj. $V_m \subset V_{m+1},\ \forall m \in \mathbb{Z}$
2. $\bigcap_{m\in\mathbb{Z}} V_m = \{0\}$
3. $\bigcup_{m\in\mathbb{Z}} V_m$je hustý a představjuje $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$, tj. $\overline{\bigcup_{m\in\mathbb{Z}} V_m} = \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$
4. $f(\mathbf{t}) \in V_m \Leftrightarrow f(2\mathbf{t}) \in V_{m+1}, \quad \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$
5. existuje funkce $\phi \in V_0$ taková, že $\{\phi(\mathbf{t}-\mathbf{n})\}_{n\in\mathbb{Z}}$ je ortonormální bází V_0.
Funkce $\phi \in V_0$ se nazývá škálovací funkce nebo základní škálová funkce resp. otcovský wavelet.

Poznámka 6.2. Formálně bychom mohli MRA interpretovat následujícím způsobem. Bod 1 představuje rozdělení regálu na police, někteří autoři zapisují $V_{m+1} \subset \subset V_m,\ \forall m \in \mathbb{Z}$, my této indexace využijeme u DWT. Bod 3 říká, že sjednocením získáme celý regál, tj. $V_\infty = \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ a $V_{-\infty} = \{0\}$, tzn. neexistuje žádné zobží, které by se udržovalo na horní polici. Bod 4 znamená, že funkce $f \in V_{m+1}$ obsahuje 2x více bodů než $f \in V_m$, což odpovídá proceduře přeložení míče na nejbližší nižší polici za podmínky, že průměr otvoru je 2x menší než na předchozí polici. $\phi \in V_0$ v bodě 5 a slouží pro analýzu jednotlivých škálovaných podprostorů V_m - police v horizontálním směru vyplní celý prostor bez překrývání a mezer, tedy bázi prostoru $V_1 :\ \{\phi(2t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ dostaneme z elementů báze prostoru $V_0 :\ \{\phi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ jednoduchým 2x zmenšením posledních.

Existují další definice, které se vztahují k biortogonalizaci waveletů, k waveletům v prostoru $\mathbf{L}^p$, k waveletům na distribucích apod. Základem pro vytvoření diskrétní waveletové transformace (DWT) je dilatační rovnice tzv. rovnice soběpodobnosti - škálovací rovnice. Formální řešení této rovnice můžeme sestavit ve tvaru Four. integrálu, avšak analýza vznikajících funkcí není vůbec jednoduchá.

6.2 Definice spojité WT

Definice 6.3. Nechť $f(t), \psi(t) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$. Waveletovou (vlnkovou) transformaci funkce $f(t)$ pak definujeme

$$WT(f) = F(a,b) = \hat{f}(a,b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt, \tag{6.1}$$

kde $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je tzv. dilatační škálový parametr, $b \in \mathbb{R}$ je translační parametr, $\psi(t)$ je mateřský wavelet nebo jen wavelet splňující

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0.$$

Zpětná (inverzní) waveletová transformace je pak dána vztahem

$$WT^{-1}(F) = f(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} F(a,b) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) da \right) db. \tag{6.2}$$

Poznámka 6.4. Základní mateřský wavelet si můžeme představit jako "vlnku" nabývající kladných a záporných hodnot, která nemusí být vůbec symetrická a může být vytvořena i pomocí nelineárních kombinací otcovského waveletu. Obraz F je skalární součin funkce f s dilatacemi a translacemi okna ψ, tj.

$$F(a,b) = \left\langle f(t), \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \right\rangle.$$

6.3 Vlastnosti WT

Koeficienty WT obsahují informaci jak o analyzované funkci, tak i o waveletu použitém při analýze. Nechť $WT(f(t)) = F(a,b)$, pak některé vlastnosti WT jsou nezávislé na typu waveletu:

1. linearita $WT(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha WT(f_1) + \beta WT(f_2) = \alpha F_1(a,b) + \beta F_2(a,b)$,
2. invariance vzhledem k posunutí $WT(f(t-b_0)) = F(a, b-b_0)$,
3. invariance vzhledem k dilataci $WT\left(f\left(\frac{t}{a_0}\right)\right) = \frac{1}{a_0} F\left(\frac{a}{a_0}, \frac{b}{a_0}\right)$,
4. derivování originálu $WT\left(\frac{\partial^m}{\partial t^m} f\right) = (-1)^m \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{\partial^m}{\partial t^m} \left(\overline{\psi}_{ab}(t)\right) dt$,
5. analogie Parsevalovy věty v případě ortogonální waveletovské báze

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) \overline{f}_2(t) dt = C_\psi^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(a,b) \overline{F}_2(a,b) a^{-2} da\, db \ \Rightarrow$$

energie signálu (funkce)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = C_\psi^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(a,b)|^2 a^{-2} da\, db.$$

6.4 WT - Konstrukce ortonormálních waveletů

Matematická konstrukce ortonormálních waveletů s kompaktním nosičem byla provedená I. Daubechies (1988) s použitím teorie MRA. Nástin tvorby báze pomocí MRA je následující:

- Nechť P_m znamená ortogonální projekci f do V_m a D_{2^m} dilatační operátor, tj. $f(.) \in D_{2^m} V_n \Leftrightarrow f(2^m.) \in V_{m+n}$. S rostoucím m pak $P_m f$ lépe aproximuje f, až nakonec

  $$\lim_{m \to \infty} P_m f = f.$$

  Prostor V_m je tvořen škálovými funkcemi $\{\phi_{mn}\}_{\forall n}$, $\forall m \in \mathbb{Z}$.

- Jelikož V_m je obsažen ve V_{m+1}, můžeme definovat W_m jako m-tý waveletový prostor obsahující waveletové funkce $\{\psi_{mn}\}_{\forall n}$, $\forall m \in \mathbb{Z}$ tak, aby byl ortogonálním doplňkem V_m do V_{m+1}, tj.

  $$V_{m+1} = V_m \oplus W_m,$$

  Q_m je projekční operátor do W_m - škálované verze W_0, kde $f(.) \in W_m \Leftrightarrow f(2^{-m}.) \in W_0$. Tedy obdobně W_m je tvořen waveletovými funkcemi $\{\psi_{mn}\}_{\forall n}$, $\forall m \in \mathbb{Z}$. Pak

  $$P_{m+1} = P_m \oplus Q_m$$

  je projekční operátor do V_{m+1}.

- Základní vlastnost MRA je to, že umožňuje sestavit ortonormální waveletovskou bázi $\{\psi_{mn}(t)\}_{\forall n}$, $\forall m \in \mathbb{Z}$, kde $\psi_{mn}(t) = 2^{-\frac{m}{2}} \psi(2^{-m} t - n),\ m, n \in \mathbb{Z}$ tak, že pro každou $f(t) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ platí:

  $$P_{m+1} f = P_m f + Q_m f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{mn} \phi_{mn} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_{mn} \psi_{mn} =$$

  $$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi_{mn} \rangle \phi_{mn} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{mn} \rangle \psi_{mn}.$$

  Koeficienty a_{mn} nazveme aproximačními, trendovými, škálovými nebo nízkofrekvenčními, koeficienty d_{mn} pak detailními, doplňkovými, waveletovými nebo vysokofrekvenčními.

- Hledáme funkci $\psi \in W_0$ tak, aby $\{\psi(t-n)\}_n$ tvořila ortonormální bázi W_0, $W_{m+1} = D_2 W_m$ a $\{D_{2^m}\psi(t-n)\}_n$ byla ortonormální bází W_m. Jelikož $W_m \perp V_m$, $V_{m+1} = V_m \oplus W_m$ a $\mathbf{L}^2 = \overline{\bigcup_{m\in\mathbb{Z}} V_m}$, $W_{m+1} \perp W_m$ a $\mathbf{L}^2 = \oplus_{m\in\mathbb{Z}} W_m$, pak $\{D_{2^m}\psi(t-n)\}_{nm}$ je ortonormální bází $\mathbf{L}^2$. Ortonormalita je zde zaručena na jednotlivých úrovních m:

$$\langle \phi_{mk},\ \phi_{ml}\rangle = \delta_{kl} = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}.$$

  Pro skalární součin mezi sousedními úrovněmi platí

$$\langle \phi_{mk},\ \phi_{m+1,l}\rangle = h_{l-2k},\ k, l \in \mathbb{Z},\ \sum_{\forall k} h_k^2 = 1.$$

- Konstrukce ψ je dána následující procedurou. Nechť $\mathbf{l}^2$ je diskrétní analog prostoru $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$. Je-li $\phi \in V_0 \subset V_1$ a $\{\phi(2t-n)\}$ je ortonormální bází V_1, pak posloupnost koeficientů $h_n \in \mathbf{l}^2$ splňuje **dilatační rovnici**

$$\phi(t) = \sqrt{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n \phi(2t-n).$$

  Vyřešení této rovnice odstartovalo konstrukci ortonormálních waveletů. Zde h_n jsou škálovací filtrační koeficienty zaručující ortonormalitu, má-li $\phi(t)$ kompaktní nosič, pak počet těchto nenulových koeficientů je nenulový.

- Definujme

$$\psi(t) = \sqrt{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n \phi(2t-n),$$

  pak právě wavelety $\psi_{mn} = 2^{-\frac{m}{2}}\psi(2^{-m}t-n)$, $m,\ n \in \mathbb{Z}$ tvoří ortonormální waveletové báze prostorů W_m, které nazýváme Daubechiesové (tyto wavelety nemají žádné osy symetrie, ortonormalita waveletů je zaručena i mezi různými úrovněmi m). Pro ortogonální báze $\phi(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n \phi(2t-n)$, $\psi(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n \phi(2t-n)$.

Některé další podmínky pro sestavení waveletů (nejsou nutné):

- $\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)dt = 1$, zde ϕ lze chápat jako prostorovou hustotu rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny t za podmínky, že $\phi(t) \geqq 0,\ t \in \mathbb{R}$. Uvažujeme-li, že střední hodnota náhodné veličiny t je 0 a její rozptyl 1, pak $\int_{-\infty}^{+\infty} t\phi(t)dt = 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\phi(t)dt = 1$,
- $\int_{-\infty}^{+\infty} t^k\psi(t)dt = 0,\ \ k = 1, 2, ...$ nulovost momentů k-tého stupně,
- pro $\psi(t) \geqq 0 :\ \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)dt = 1$,
- podmínka na symetrii apod.

Budeme se snažit nalézt škálovací funkci tvořící ortonormální multirozklad.

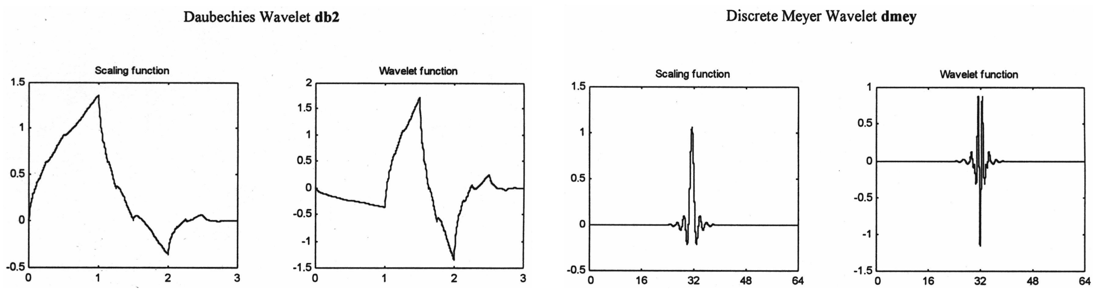


Figure 6.1 Ukázka škálové a waveletové funkce neboli též otcovského a mateřského waveletu pro Db2 a Meyerovskou bázi

6.5 DWT

Od této kapitoly dále budeme používat v multirozkladu indexaci $V_m \subset V_{m-1}$. Nejdříve najdeme filtrační koeficienty, které prostřednictím dilatační rovnice budou definovat škálovací funkci s požadovanými vlastnostmi. Kromě ortogonality budeme ještě požadovat kompaktní nosič. Číselné hodnoty filtračních koeficientů jako první spočítala Ingrid Daubechies (1988). Ortonormální wavelety s $2M = N$ nenulovými filtračními koeficienty se zančí DN(dbN) resp. D2M(db2M). Např. wavelet D1 je ortonormální wavelet 1. řádu tzv. Haarův wavelet.

Škálovací filtrační koeficienty h_n (koeficienty projekčního operátoru P do prostoru škálovacích funkcí) budeme značit: $\mathbf{h} = (h_0, h_1, \ldots, h_{N-1})^T$. Waveletové filtrační koeficienty g_n (koeficienty projekčního operátoru Q do prostoru waveletovských funkcí) $\mathbf{g} = (g_0, g_1, \ldots, g_{N-1})^T$. V důsledku ortogonality vektoru h a g na všech hladinách i mezi hladinami rozkladu koeficienty g_n vypočteme ze vztahu

$$g_n = (-1)^n h_{N-1-n}.$$

Příklad 6.5. Řešením dilatační rovnice určete hodnoty škálovacích a waveletovských filtračních koeficientů nejjednodušího Haarova waveletu.

Řešení. Ortonormální báze $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ je tvořená translacemi a dilatacemi mateřského Haarova waveletu

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ -1 & t \in [\frac{1}{2}, 1) \\ 0 & t \notin [0, 1) \end{cases}.$$

Prvky této báze nejsou hladké křivky a mají rozptyl $1/\omega$ frekvenčního rozsahu. Při $t \to 0 \Leftrightarrow \omega \to \infty$, při $t \to \infty \Leftrightarrow \omega \to 0$. Škálovací filtrační koeficienty jsou $\mathbf{h} = (h_0, h_1)^T$, waveletovské filtrační koeficienty $\mathbf{g} = (g_0, g_1)^T$, jejich hodnoty jsou určeny rovnicemi

$$h_0^2 + h_1^2 = 1, \tag{6.3}$$

$$g_0 + g_1 = 0. \tag{6.4}$$

Rovnici (6.3) sestavíme na základě podmínky ortonormality na hladině s indexem m: $\|\mathbf{h}\|^2 = \langle \mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle = 1$, rovnici (6.4) sestavíme použitím požadavku $\int_{\mathbb{R}} \psi(t)dt = 0$ v diskrétním tvaru $\sum\limits_{\forall k} g_k = 0$. Jelikož má platit $g_n = (-1)^n h_{N-1-n} \Rightarrow g_0 = h_1, g_1 = -h_0$, pak dosazením za g_0, g_1 a dořešením soustavy obdržíme

$$h_0 = h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow g_0 = \frac{1}{\sqrt{2}},\ g_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

▲

Obecně pro výpočet škálovacích parametrů lze sestavit následující soustavu rovnic:

- v důsledku ortogonality: $\sum\limits_{n=0}^{2M-1} h_n h_{n+2m} = \delta_m = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 0, & m \neq 0 \end{cases}, m = 0, 1, ..., M-1$

- z hlediska normování: $\sum\limits_{n=0}^{2M-1} h_n = \sqrt{2}$,

- nulovost momentů k-tého stupně zajistíme: $\sum\limits_{n=0}^{2M-1} (-1)^n n^k h_n = 0, k = 0, 1, ..., M-1$,

- rovnice $\sum\limits_{n=0}^{2M-1} (-1)^n h_n = 0$ je lineárních kombinací výše uvedených.

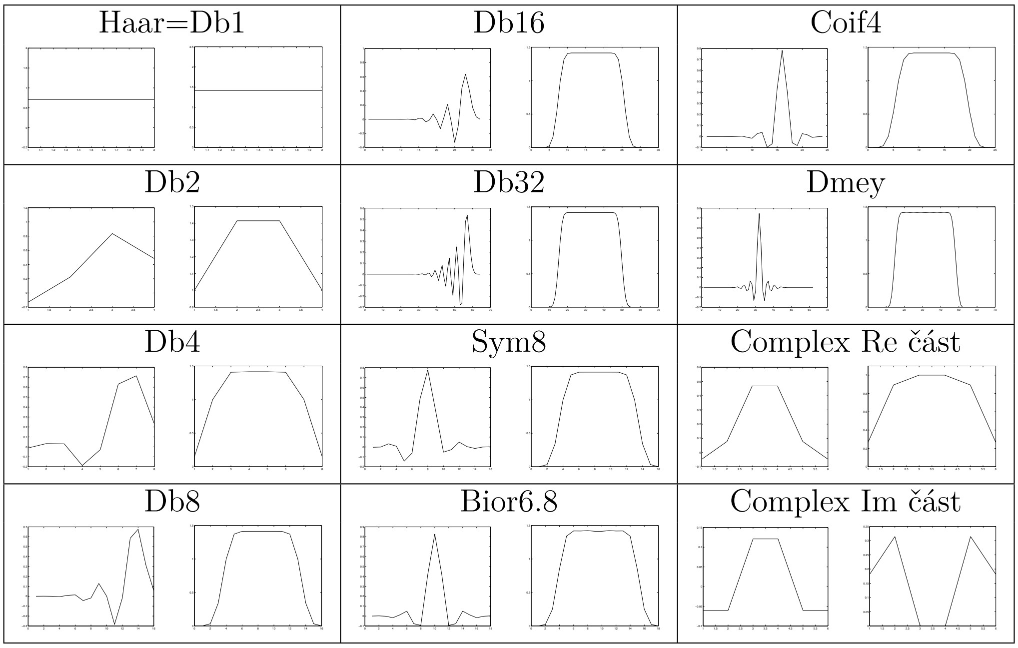
V důsledku ortogonality koeficientů pro výpočet doplňkové informace při daných filtračních parametrech vypočteme g_n. Tyto koeficienty použijeme pro popis algoritmu přímé a zpětné DWT, při výpočtu časově-frekvenčního spektra, při odšumování apod. Při výpočtu budeme přecházet na hladiny s vyšším indexem - čím menší index hladiny, tím větší frekvence charakterizuje.

Nejčastěji používané škálové funkce (otcovské wavelety) jak v časové oblasti, tak jejich obraz v oblasti frekvenční jsou vyobrazeny na obrázku 6.2.

6.6 Mallatův algoritmus - rychlá DWT - FWT

Mallatův algoritmus (pyramidální, kaskádový) je sestaven pro případ ortonormálních waveletů a často je nazýván rychlá DWT (FWT - Fast Wavelet Transform). Algoritmus vyžaduje, aby vstupní vektor obsahoval počet vstupních hodnot $N = 2^n$ nebo $k2^n$, $k, n \in \mathbb{N}$.

Nechť vstupní diskrétní data jsou $\mathbf{f} = \mathbf{f}_0 = \mathbf{a}_0 = (f_0, f_1, \ldots, f_{N-1})^T$. Pomocí operátorů ortogonálních projekcí do diskretizovaného škálového podprostoru V_m



Obr. 6.2Přehled škálových funkcí (otcovských waveletů) v časové a frekvenční oblasti

a do diskretizovaného waveletovského podprostoru W_m reprezentovaných maticemi $\mathbf{P}_m, \mathbf{Q}_m$ lze prvek $\mathbf{f}_{m-1} = \mathbf{a}_{m-1} \in V_{m-1}$ rozložit:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_m \\ \mathbf{Q}_m \end{bmatrix} \mathbf{f}_{m-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_m \\ \mathbf{d}_m \end{bmatrix} = \mathbf{c}_m,$$

$\mathbf{a}_m = \mathbf{f}_m \in V_m, \mathbf{d}_m \in W_m$ pro $m = 1, 2, ...$ Řádky těchto projekčních matic budou tvořeny filtračními škálovými $\mathbf{h}^T$ resp. waveletovskými koeficienty $\mathbf{g}^T$ posouvanými o dva body, tedy

$$\mathbf{P}_m = \mathbf{H}_m = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \\ h_2 & h_3 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & h_0 & h_1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_m = \mathbf{G}_m = \begin{bmatrix} g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 \\ g_2 & g_3 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & g_0 & g_1 \end{bmatrix}.$$

m-tý krok přímé DWT je dán vztahem

$$\mathbf{c}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_m \\ \mathbf{d}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_m \\ \mathbf{G}_m \end{bmatrix} \mathbf{a}_{m-1} = \mathbf{M}_m \mathbf{f}_{m-1}. \tag{6.5}$$

Výsledkem této procedury jsou vektory $\mathbf{a}_m, \mathbf{d}_m, \mathbf{d}_{m-1}, \ldots, \mathbf{d}_1$ (listy stromu multirozkladu) tvořící waveletovské spektrum popisující časově-frekvenční lokalizaci vstupního signálu. Složky aproximačního vektoru $\mathbf{a}_m = (a_{m,1}, a_{m,2}, ..., a_{m,M})^T$ jsou dány skalárním součinem $a_{m,n} = \langle \mathbf{f}_{m-1}, \boldsymbol{\phi}_{mn} \rangle$ a určují celkový trend vstupních dat (nižší frekvence, komprimovaná část). Složky doplňkového vektoru $\mathbf{d}_m = (d_{m,1}, d_{m,2}, ..., d_{m,M})^T$ jsou dány skalárním součinem $d_{m,n} = \langle \mathbf{f}_{m-1}, \boldsymbol{\psi}_{mn} \rangle$ a obsahují doplňující informaci o jemnostech (vyšší frekvence).

Z ortonormality plyne $\mathbf{M}_m^{-1} = \mathbf{M}_m^T$, pak odpovídající krok zpětné DWT je dán vztahem

$$\mathbf{a}_{m-1} = \mathbf{f}_{m-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_m \\ \mathbf{G}_m \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{a}_m \\ \mathbf{d}_m \end{bmatrix} = \mathbf{M}_m^T \mathbf{c}_m. \tag{6.6}$$

Příklad 6.6. Nechť vstupní vektor $\mathbf{f} = \mathbf{f}_0 = \mathbf{a}_0 = (1, 3, 6, 2, 7, 8, 4, 5)^T$. Spočtěte jeho DWT s užitím Haarova waveletu.

Řešení. Nejprve vytvoříme matice $\mathbf{M}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_k \\ \mathbf{Q}_k \end{bmatrix}, k = 1, 2, 3$ pro DWT na k-tou úroveň, která bude tvořena pomocí škálovacích a waveletovských filtračních koeficientů posouvaných o 2 hodnoty a to tak, že matice $\mathbf{P}_{k+1}, \mathbf{Q}_{k+1}$ vzniknou z $\mathbf{P}_k, \mathbf{Q}_k$ „vyřezáním“ horního levého bloku (submatice) o polovičním počtu řádků i sloupců.

$$\mathbf{P}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{Q}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{Q}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{Q}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Přímá DWT

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{M}_1 \mathbf{f}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} \mathbf{a}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \\ 7 \\ 8 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 15 \\ 9 \\ -2 \\ 4 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{d}_1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{c}_2 = \mathbf{M}_2 \mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix} \mathbf{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 15 \\ 9 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 12 \\ 24 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{d}_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{c}_3 = \mathbf{M}_3 \mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_3 \\ \mathbf{Q}_3 \end{bmatrix} \mathbf{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 18 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{d}_3 \end{bmatrix}.$$

Zpětná DWT

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{f}_2 = \mathbf{M}_3^T \mathbf{c}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 18 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{f}_1 = \mathbf{M}_2^T \mathbf{c}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 15 \\ 9 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{f}_0 = \mathbf{M}_1^T \mathbf{c}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 15 \\ 9 \\ -2 \\ 4 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \\ 7 \\ 8 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

▲

Poznámka 6.7. Vedle uvedeného algoritmu (**standardní DWT**) existuje **stacionární DWT**, kde nedochází ke kompresi. Při sestavení algoritmu v matici $\mathbf{M}$ se nepoužívá posuv o 2 místa, ale posuv jen o 1 místo resp. vložení 0 mezi každé dvě

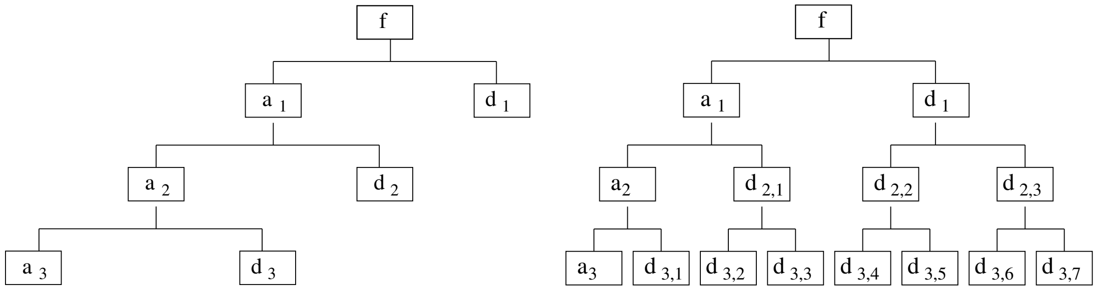


Figure 6.3 3-úrovňový multirozklad a paketový rozklad

složky vektoru. Matici $\mathbf{M}$ rozložíme na 2 matice $\mathbf{H}$, $\mathbf{G}$, které sestavíme z filtračních koeficientů s posunem jen o 1 místo resp. při sestavení matic $\mathbf{H}$, $\mathbf{G}$ za každý filtrační koeficient vložíme 0, pak provedeme posun o 2 místa. Pak $\mathbf{a}_1 = \mathbf{Hf}$, $\mathbf{d}_1 = \mathbf{Gf}$ budou vektory stejné délky jako vstupní signál $\mathbf{f}$.

6.7 Paketový rozklad

Nechť m značí index transformační hladiny (větší index charakterizuje menší frekvence a větší měřítko, tedy hladinu s menší rozlišovací schopností) a $\mathbf{a}_m$ komprimovaný signál (aproximace signálu, trendová část) na hladině m a $\mathbf{d}_m$ ortogonální doplněk (zachycující odlišnosti, jemnosti) na hladině m. Podstata paketového rozkladu je v tom, že můžeme stejným způsobem jako s vektory $\mathbf{a}_m$ pracovat s vektory $\mathbf{d}_m$. Při multirozkladu provádíme sekvenci kroků

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_m \\ \mathbf{d}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_m \\ \mathbf{G}_m \end{bmatrix} \mathbf{a}_{m-1},$$

u paketového rozkladu budeme navíc provádět v každém kroku pro $k = 1, ..., K_{m-1}$, kde K_{m-1} je počet doplňků na hladině s indexem $m-1$, následující operace

$$\begin{bmatrix} \mathbf{d}_{m,2k} \\ \mathbf{d}_{m,2k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_m \\ \mathbf{G}_m \end{bmatrix} \mathbf{d}_{m-1,k},$$

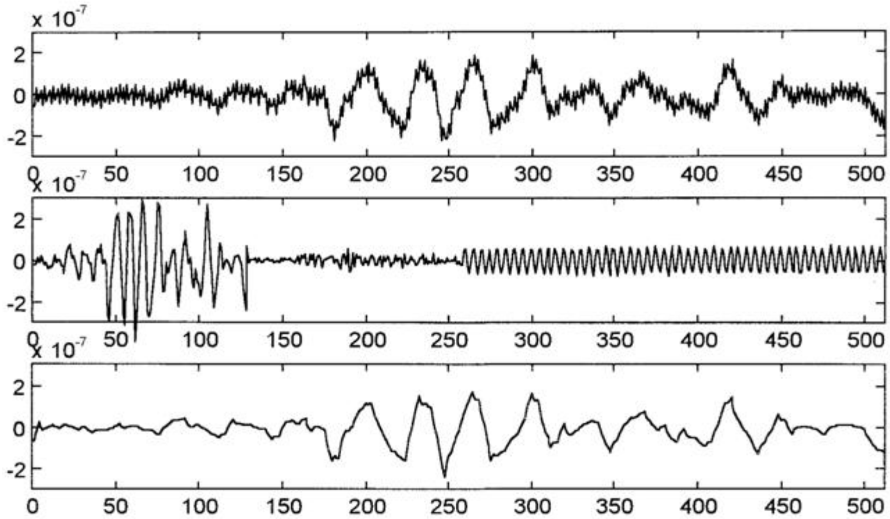
tj. budeme provádět DWT každého doplňku na hladině s indexem $m-1$, čímž budeme budovat strom paketového rozkladu symetricky do šířky, viz. obrázek 6.3.

Poznámka 6.8. Výběr waveletové báze je velmi důležitý a ovlivňuje výsledky zpracování. Obvykle se waveletová báze volí tak, aby se co nejvíce podobala zpracovávanému signálu - lépe zachycuje frekvence. Při okenní transformaci jsou odstraněny vysoké frekvence (dochází k vyhlazení), zatímco u waveletové transformace jsou zachyceny všechny frekvence. WT se hodí jak pro stacionární, tak pro nestacionární signály.

Aproximační vlastnosti waveletů - dnes existuje celá řada různých hledisek, dle kterých lze wavelety dělit na spojité, diskrétní, lineární, harmonické, ortogonální, biortogonální, s kompaktním nosičem a jiné. Lze však vyčlenit 3 základní parametry, podle nichž lze hodnotit aproximační vlastnosti waveletů: L - stupeň lokalizace, C - počet prvních nulových momentů, S - hladkost, tj. do které třídy funkcí příslušná škálová funkce patří.

Příklad 6.9. Proveďte DWT vzorkovaného reálného seismického signálu na 2 hladiny pomocí Meyerovského waveletu a filtraci pomocí kvantilového prahování.

Řešení. Výsledek je zobrazen na obr. 6.4. ▲



Obr. 6.4Reálný seismic.signál, jeho DWT a rekonstrukce po kvantil. prahování

Příklad 6.10. Pomocí DWT a multirozkladu nalezněte časově-frekvenční spektrum hudební skladby 5.2.

Řešení. Při řešení byla provedena 3-úrovňová MRA analýza, čímž jsme obdrželi 4 frekvenční hladiny odpovídající koeficientům $\mathbf{a}_3, \mathbf{d}_3, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_1$, 1. hladina ($\mathbf{a}_3$) obsahuje frekvence 0-2756,25 Hz, 2. hladina ($\mathbf{d}_3$) frekvence 2756,25-5512,5 Hz, 3. hladina ($\mathbf{d}_2$) frekvence 5512,5-11025 Hz a 4. hladina ($\mathbf{d}_1$) frekvence 11025-22050 Hz. Výsledné multirozklady, jejich Fourierovská amplitudová a časově-frekvenční spektra i při pohledu shora získaná pomocí waveletu Db8 a Bior6.8 jsou vykreslena na obrázku 6.5.

▲

6.8 Dvourozměrná WT

Triviální způsob vytvoření 2D ortonormální waveletovské báze z ortonormální 1D waveletovské báze $\psi_{m,n}(t) = m^{m/2}\psi(2^m t - n)$ je založen na jejich tenzorovém součinu:

$$\psi_{m_1,n_1,m_2,n_2}(t_1,t_2) = \psi_{m_1,n_1,m_2,n_2}(x,y) = \psi_{m_1,n_1,}(x)\psi_{m_2,n_2}(y).$$

Algoritmus 6.1 Implementace přímé, zpětné DWT (Haarův wavelet) a její použití při filtraci

```
function [ca, cd]=mydwt(a)
N=length(a);
h(1)=1; h(2)=1;  h=h/sqrt(2);
g(1)=1; g(2)=-1; g=g/sqrt(2);
for i=1:N/2
   H(i,(i-1)*2+1:(i-1)*2+length(h))=h;
   G(i,(i-1)*2+1:(i-1)*2+length(h))=g;
end
M=[H; G];
b=M*a;
ca=b(1:N/2,1);
cd=b(N/2+1:N,1);
----------------------------------------------------------
function [a]=myidwt(ca, cd)
c=[ca; cd];  N=length(a);
h(1)=1; h(2)=1;  h=h/sqrt(2);
g(1)=1; g(2)=-1; g=g/sqrt(2);
for i=1:N/2
   H(i,(i-1)*2+1:(i-1)*2+length(h))=h;
   G(i,(i-1)*2+1:(i-1)*2+length(h))=g;
end
M=[H; G];
a=M'*c;
------------------------------------------------------------
function [C,R]=wavdemo(f,M)
N=length(f); C=f;
for i=1:M
   for j=1:2^(i-1)
      n=N/2^(i-1);  %delka paketu na i-te hladine
      % Vypocet komprim.,dopln. koef. pomoci komplex. waveletu
      [ca, cd]=mydwt(C(i,(j-1)*n+1:j*n));
      C(i+1,(j-1)*n+1:j*n)=[ca(1:n/2), cd(1:n/2)];
   end
end
% Vyhlazeni
R=C;
for i=1:N
   if(abs(C(M+1,i))<=median(f)) R(M+1,i)=0; nvyhl=nvyhl+1; end
end
% Rekonstrukce vyhl.signalu
for i=M+1:-1:2
   for j=1:2:2^(i-1)
      m=floor(N/2^(i-1));
      fx=myidwt(R(i,(j-1)*n+1:j*n),R(i,j*n+1:(j+1)*n));
      R(i-1,(j-1)*n+1:(j-1)*n+length(fx))=fx;
   end
end
R=real(R); plot(C(1,:)); hold on; plot(R(1,:),'r');
```

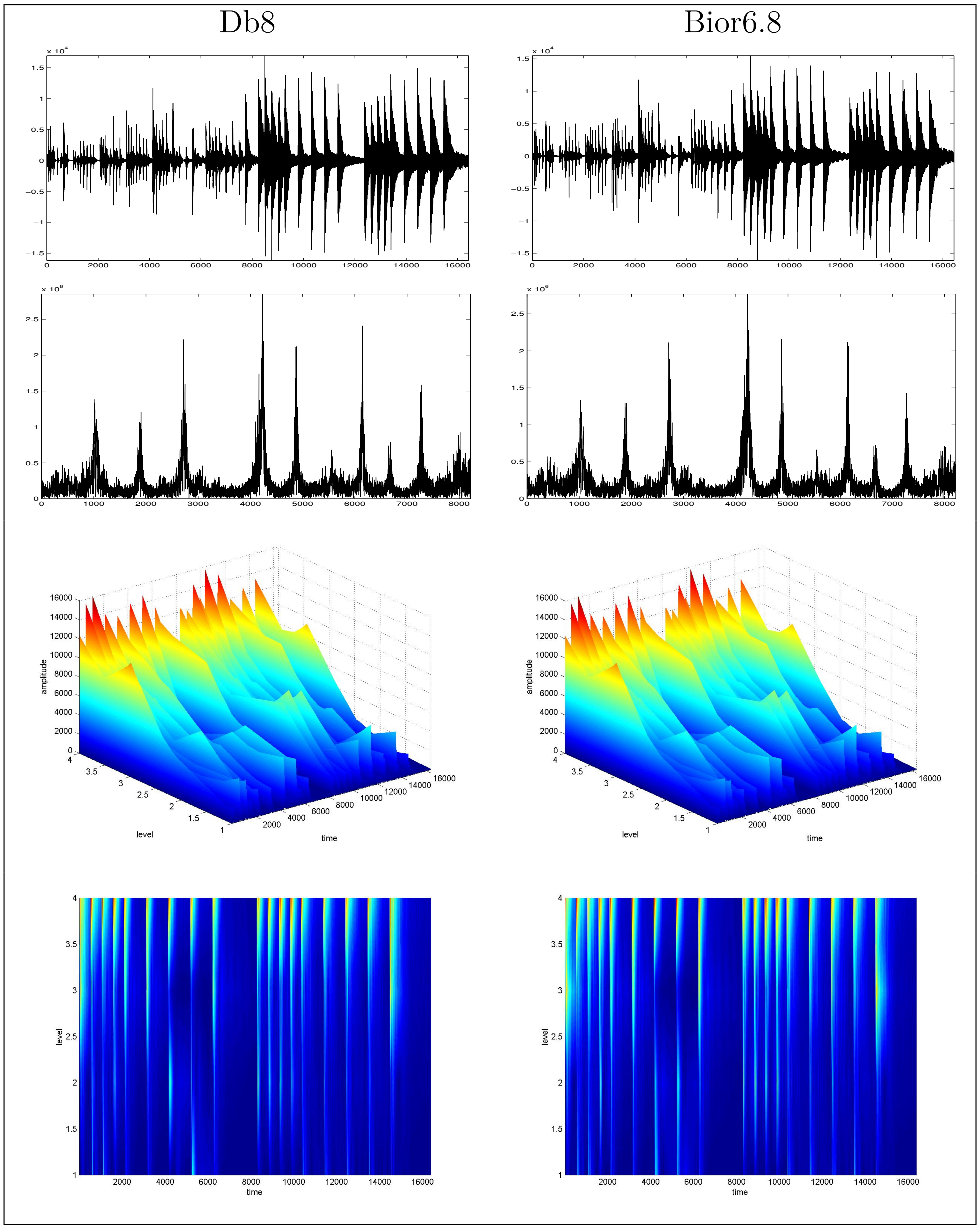


Figure 6.5 Časově-frekvenční analýza hudební skladby pomocí DWT

V nové bázi proměnné x, y mají různé koeficienty dilatace.

Jiná konstrucke je, že 2D wavelet je tvořen jako

$$\psi_{m,n}(x,y) = 2^m \psi(2^m x - n, 2^m y - k),$$

kde proměnné x, y mají v nové bázi stejné koeficienty dilatace. Funkce ψ v tomto případě je tvořena 3 elemetnárními wavelety

$$2^m \psi_1(2^m x - n)\psi_2(2^m y - k), \quad 2^m \psi_2(2^m x - n)\psi_1(2^m y - k), \quad 2^m \psi_2(2^m x - n)\psi_2(2^m y - k).$$

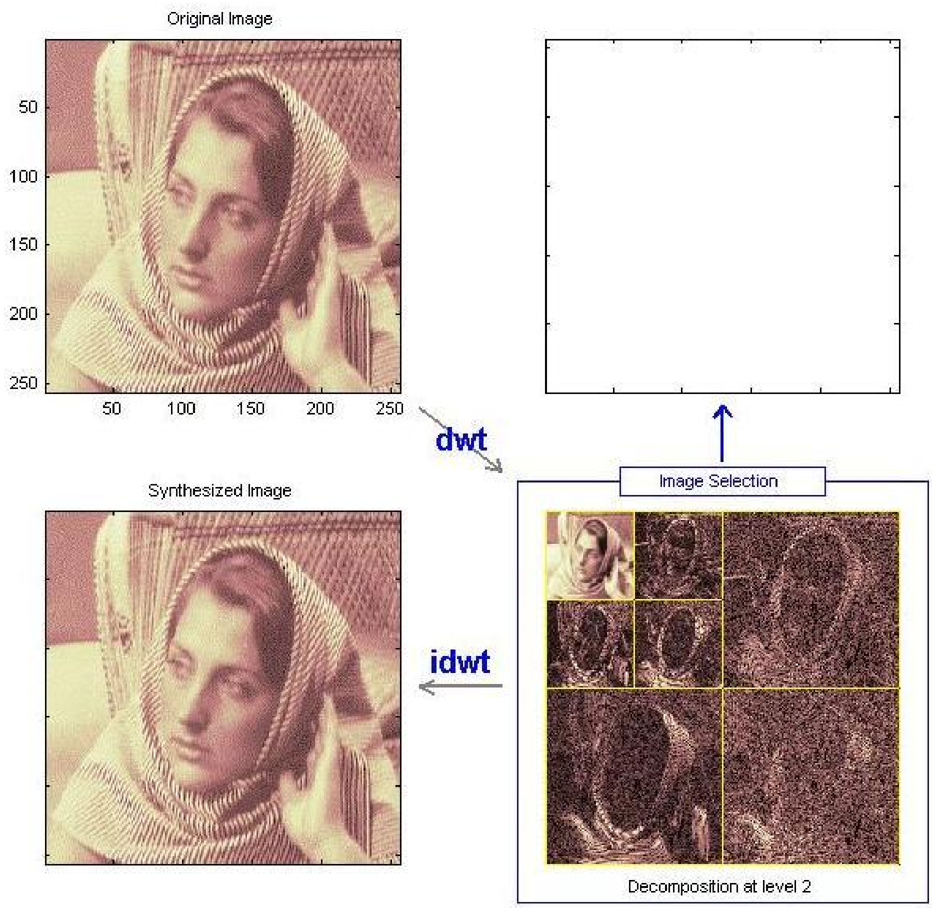
Analýza se provádí v horizontálním směru, ve vertikálním a po diagonále.

Na obrázku 6.6 je znázorněno rozložení waveletovských koeficientů geometrických objektů při různých úrovních rozkladu $m = 1$ a $m = 2$ ale při stejných dilatačních koeficientech. Při dekompozici $\mathbf{f} = \mathbf{f}_0$ mající M řádků a N sloupců na první úroveň použijeme 1D DWT nejdříve na řádky (sloupce) a pak na sloupce (řádky), 2D DWT na první hladinu rozkladu bude.

$$\mathbf{f}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{mM}\mathbf{f}_{m-1}\mathbf{H}_{mN}{}^T & \mathbf{H}_{mM}\mathbf{f}_{m-1}\mathbf{G}_{mN}{}^T \\ \mathbf{G}_{mM}\mathbf{f}_{m-1}\mathbf{H}_{mN}{}^T & \mathbf{G}_{mM}\mathbf{f}_{m-1}\mathbf{G}_{mN}{}^T \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{mM}\mathbf{f}_{m-1}\mathbf{M}_{mN}^T, \quad m = 1, 2, ...,$$

pro $m = 1$

$$\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{M\times N}, \mathbf{M}_{1M} \in \mathbb{R}^{M\times M}, \mathbf{M}_{1N} \in \mathbb{R}^{N\times N}, \mathbf{H}_{1M}, \mathbf{G}_{1M} \in \mathbb{R}^{\frac{M}{2}\times M}, \mathbf{H}_{1N}, \mathbf{G}_{1N} \in \mathbb{R}^{\frac{N}{2}\times N}.$$



Obr. 6.6Dvourozměrná DWT - Matlabovský příklad

Kapitola 7

Z-transformace

7.1 Definice přímé a zpětné Z-transformace

Při studiu spojité Laplaceovy transformace jsme u originálu $f(t)$ požadovali tzv. ohraničený (omezený) růst a po částech spojitost $f(t)$ i $f'(t)$, pak L-obrazem byla komplexní funkce komplexní proměnné $F(s)$. V případě Z-transformace bude originálem posloupnost komplexních resp. reálných čísel $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ a Z-obrazem komplexní funkce komplexní proměnné $F(z)$.

Věta 7.1. *Nechť pro řadu* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} \exists M \in \mathbb{R}^+$

$$\exists s \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : |f_n| \leqq M e^{sn}, \tag{7.1}$$

pak je řada konvergentní na množině $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| > e^s = R\}$ *(tj. vně kruhu o poloměru* R*).*

Definice 7.2. Nechť $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ je číselná posloupnost v $\mathbb{C}$ resp. $\mathbb{R}$ splňující (7.1). Jednostranná Z-transformace této posloupnosti je definována

$$F(z) = Z\left(\{f_n\}_{n=0}^{\infty}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}. \tag{7.2}$$

Poznámka 7.3. V celém textu budeme mít pod pojmem Z-transformace na mysli vždy jednostrannou Z-transformaci.

Důkaz. Pro případ jednostranné Z-transformace při platnosti (7.1) dokážeme absolutní konvergenci řady z níž plyne její konvergence

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} \leqq \sum_{n=0}^{\infty} \left|f_n z^{-n}\right| = \sum_{n=0}^{\infty} |f_n| \left|z^{-n}\right| \leqq M \sum_{n=0}^{\infty} (e^s z^{-1})^n = \frac{M}{1 - e^s |z|^{-1}} < \infty,\ |z| > e^s.$$

□

Věta 7.4. *Z-transformace posloupnosti $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ daná vztahem (7.2) je v oblasti Ω regulární (holomorfní) funkce $F(z)$ komplexní proměnné z. Bod $z = \infty$ je bodem odstranitelné singularity, nebo v něm $F(z)$ není singulární. Vždy ale platí*

$$\lim_{z\to\infty} F(z) = f_0.$$

Poznámka 7.5. Singulární body $F(z)$ leží uvnitř nebo na hranici kruhu s poloměrem R.

Ke všem posloupnostem $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ vyhovujícím nerovnosti (7.1) podle věty 7.1 existuje jejich Z-obraz $F(z)$ na množině Ω. Naskýtá se otázka, zda naopak ke všem funkcím $F(z)$, holomorfním (regulárním) na množině Ω odpovídá právě jedna posloupnost $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ splňující uvedené podmínky a vztah (7.2). Na tuto otázku odpovídá následující věta.

Věta 7.6. *Ke každé funkci regulární (holomorfní) $F(z)$ na $P(\infty)$ a mající v ∞ buď odstranitelnou singularitu, nebo žádnou, tzn. $\lim\limits_{z\to\infty} F(z) \neq \infty$, existuje právě jedna posloupnost $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ splňující (7.1).*

Důkaz. Řada (7.2) reprezentuje regulární část Laurentova rozvoje funkce $F(z)$ se středem v bodě ∞, tedy existuje prstencové okolí $P(\infty)$, v němž je $F(z)$ regulární. Z jednoznačnosti Laurentova rozvoje plyne

$$f_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} F(z)z^{n-1}dz \tag{7.3}$$

pro $\forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $\gamma(t) = Re^{it}, t \in [0, 2\pi]\,, R \in \mathbb{R}^+$ tak aby obraz křivky $\langle\gamma\rangle \subset P(\infty)$. K důkazu ohraničenosti růstu

$$|f_n| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\gamma} F(z)z^{n-1}dz\right| \leqq \frac{2\pi R}{2\pi}MR^{n-1} = MR^n = Me^{n\ln R} = Me^{sn}, M = \max_{z\in\langle\gamma\rangle}|F(z)|\,.$$

□

Definice 7.7. Vztah (7.3) definuje zpětnou (inverzní) Z-transformaci.

Poznámka 7.8. Při řešení konkrétních úloh je Z–obraz $F(z)$ nejčastěji dán racionální funkcí, jejíž čitatel je nejvýše stejného stupně jako jmenovatel. Pak zpětnou Z-transformaci lze provést několika snadnějšími způsoby (obdobně jako v případě Laplaceovy transformace):

1. $F(z)$ rozložíme na funkce, k nimž známe vzory, využíváme vlastností Z-transformace a postupně budujeme „slovník".

2. má-li $F(z)$ konečný počet singulárních bodů, pak při výpočtu integrálu ve vztahu (7.3) lze použít základní větu o reziduích

$$f_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma F(z)z^{n-1}dz = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{Res}\left[F(z)\,z^{n-1}\right]_{z=z_i}, \tag{7.4}$$

kde k je počet singulárních bodů.

3. využití věty o obrazu konvoluce dvou posloupností v případě, že $F(z)$ je součinem dvou funkcí.

Příklad 7.9. Určete Z-transformaci posloupnosti $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}, f_0 = a \in \mathbb{C}, f_n = 0$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$.

Řešení. $Z\left(\{f_n\}_{n=0}^{\infty}\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} = \frac{a}{z^0} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} 0z^{-n} = a.$ ▲

Příklad 7.10. Určete Z-transformaci posloupnosti $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}, f_n = a \in \mathbb{C}$ pro $\forall n \in \mathbb{N}\cup \cup \{0\}$.

Řešení. $Z\left(\{f_n\}_{n=0}^{\infty}\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} az^{-n} = a\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{a}{1-z^{-1}} = \frac{az}{z-1}, \quad |z| > 1.$ ▲

Příklad 7.11. Určete Z-transformaci posloupnosti $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}, f_n = e^{cn}, c \in \mathbb{C}$ pro $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Řešení. $Z\left(\{f_n\}_{n=0}^{\infty}\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{cn} z^{-n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^{-n}}{e^c}\right) = \frac{1}{1-\left(\frac{z}{e^c}\right)^{-1}} = \frac{z}{z-e^c}, \quad |z| > > |e^c|.$ ▲

Příklad 7.12. Dokažte, že originálem Z-transformace k funkci $F(z) = \frac{1}{z^k}, \quad k \in \mathbb{N}$ je posloupnost $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, $f_n = \delta_{kn} = \begin{cases} 0 & k = n \\ 1 & k \neq n \end{cases}$.

Řešení. Sestavíme Z-obraz δ_{kn}

$$Z\left(\{\delta_{kn}\}_{n=0}^{\infty}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{kn} z^{-n} = 0 + \frac{0}{z} + \ldots + \frac{0}{z^{k-1}} + \frac{1}{z^k} + \frac{0}{z^{k+1}} + \ldots = \frac{1}{z^k}, \quad |z| > 0$$

▲

Příklad 7.13. Najděte zpětnou Z-transformaci funkce $F(z) = \frac{z(z-1)}{(z-1)^3}$.

Řešení. Výpočet provedeme pomocí vztahu (7.4). $F(z)$ má v čitateli polynom 2. stupně, v jmenovateli polynom 3.stupně. f_n můžeme vypočítat jako

$$f_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{z(z-1)}{(z+1)^3} z^{n-1} dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{z^n(z-1)}{(z+1)^3} dz,$$

kde γ je kružnice se středem $0+0i$ a poloměrem $R > 1$. Integrovaná funkce má v bodě $-1+0i$ pól třetího řádu. Podle věty o reziduích platí

$$\begin{aligned} f_n &= \operatorname{Res}_{z=-1} \frac{z^n(z-1)}{(z+1)^3} = \frac{1}{2!}\lim_{z\to -1} \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(z^n(z-1)\right) = \\ &= \frac{1}{2}\lim_{z\to -1}\left((n+1)nz^{n-1} - n(n-1)z^{n-2}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left((n+1)n(-1)^{n-1} - n(n-1)(-1)^{n-2}\right) = \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{2}\left(n^2+n+n^2-n\right) = (-1)^{n-1}n^2. \end{aligned}$$

▲

7.2 Vlastnosti Z-transformace

Věta 7.14. *(linearita Z-transformace) Nechť posloupnosti $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}, \{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ splňují podmínky pro sestavení Z-obrazů $F(z)$, $G(z)$. Nechť a, b jsou komplexní (reálné) konstanty, pak*

$$Z\left(\{af_n + bg_n\}_{n=0}^{\infty}\right) = aF(z) + bG(z).$$

Důkaz. Plyne přímo z definice:

$$Z\left(\{af_n + bg_n\}_{n=0}^{\infty}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(af_n + bg_n\right)z^{-n} = a\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} + b\sum_{n=0}^{\infty} g_n z^{-n} = aF(z) + bG(z).$$

□

Příklad 7.15. Pomocí věty o linearitě určete Z-transformaci posloupnosti $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ dané vztahem $f_n = \cos(cn)\ \forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, kde $c \in \mathbb{C}$.

Řešení. Z příkladu 7.11 víme, že

$$Z\left(\left\{e^{icn}\right\}_{n=0}^{\infty}\right) = F_1(z) = \frac{z}{z-e^{ic}}, \quad |z| > |e^c|,$$

$$Z\left(\left\{e^{-icn}\right\}_{n=0}^{\infty}\right) = F_2(z) = \frac{z}{z-e^{-ic}}, \quad |z| > |e^{-c}|.$$

Nyní využijeme větu o linearitě

$$Z\left(\{\cos(cn)\}_{n=0}^{\infty}\right) = Z\left(\left\{\frac{1}{2}e^{icn} + \frac{1}{2}e^{-icn}\right\}_{n=0}^{\infty}\right) = \frac{1}{2}F_1(z) + \frac{1}{2}F_2(z) =$$

$$= \frac{z(z-\cos(c))}{z^2 - 2z\cos(c) + 1}; \quad |z| > \max\left\{|e^c|, |e^{-c}|\right\}.$$

▲

Věta 7.16. *(o podobnosti obrazů) Je dána posloupnost* $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$*, její obraz* $F(z)$ *a* $\mathbb{C} \ni a \neq 0$*. Pak*

$$Z\left(\{a^n f_n\}_{n=0}^{\infty}\right) = F(\frac{z}{a}).$$

Důkaz. Plyne přímo z definice

$$Z\left(\{a^n f_n\}_{n=0}^{\infty}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n f_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \left(\frac{z}{a}\right)^{-n} = F\left(\frac{z}{a}\right).$$

□

Věta 7.17. *(násobení originálu exponenciální funkcí - tlumení) Nechť* $F(z)$ *je Z--obraz posloupnosti* $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$*, nechť* a *je komplexní konstanta, pak*

$$Z\left(\{e^{an} f_n\}_{n=0}^{\infty}\right) = F\left(\frac{z}{e^a}\right).$$

Důkaz. Plyne přímo z definice:

$$Z\left(\{e^{an} f_n\}_{n=0}^{\infty}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{an} f_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \left(\frac{z}{e^a}\right)^{-n} = F\left(\frac{z}{e^a}\right).$$

□

Věta 7.18. *(Z-obraz konvoluce originálů (vzorů), věta o součinu obrazů) Mějme posloupnosti* $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$*,* $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ *a jejich Z-obrazy* $F(z)$*,* $G(z)$*. Pak*

$$Z\left(\{(f \star g)_n\}_{n=0}^{\infty}\right) = Z\left(\left\{\sum_{i=0}^{n} f_i g_{n-i}\right\}_{n=0}^{\infty}\right) = Z\left(\left\{\sum_{i=0}^{n} f_{n-i} g_i\right\}_{n=0}^{\infty}\right) = F(z)G(z).$$

Důkaz. Mějme obrazy $F(z)$, $G(z)$ a jejich originály $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$. Součin $F(z)G(z)$ bude

$$F(z)G(z) = \left(\sum_{l=0}^{\infty} f^l z^{-l}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} g^k z^{-k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} f_i g_{n-i}\right) z^{-n} =$$

$$= Z\left(\left\{\sum_{i=0}^{n} f_i g_{n-i}\right\}_{n=0}^{\infty}\right) = Z\left(\{(f\star g)_n\}_{n=0}^{\infty}\right).$$

□

Příklad 7.19. Pomocí věty o součinu obrazů určete Z-transformaci posloupnosti $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ dané vztahem $f_n = 1 + e^c + e^{2c} + \ldots + e^{nc}$, $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Řešení. Protože pro posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ dané vztahy $a_n = e^{cn}$, $b_n = 1$, $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí $\{(a\star b)_n\}_{n=0}^{\infty} = \{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ a protože z předchozích příkladů známe výsledky

$$Z\left(\{a_n\}_{n=0}^{\infty}\right) = Z\left(\{e^{cn}\}_{n=0}^{\infty}\right) = \frac{z}{z-e^c}, \quad |z| > |e^c|,$$

$$Z\left(\{b_n\}_{n=0}^{\infty}\right) = Z\left(\{1\}_{n=0}^{\infty}\right) = \frac{z}{z-1}, \ |z| > 1,$$

plyne z věty o konvoluci vzorů

$$Z\left(\{f_n\}_{n=0}^{\infty}\right) = Z\left(\{(a\star b)_n\}_{n=0}^{\infty}\right) = F(z)G(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-e^c)}, \ |z| > \max\{|e^c|, 1\}.$$

▲

Definice 7.20. Nechť $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost v $\mathbb{C}$ a nechť $k \in \mathbb{N}$. Pod pojmem "posloupnost $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ posunutá o k vpravo", budeme značit $\{f_{n-k}\}_{n=0}^{\infty}$, rozumíme posloupnost

$$\{f_{n-k}\}_{n=0}^{\infty} = \{0, 0, \ldots, 0, f_1, f_2, f_3, \ldots\}$$

a pod pojmem "posloupnost $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ posunutá o k vlevo", budeme značit $\{f_{n+k}\}_{n=0}^{\infty}$, rozumíme posloupnost

$$\{f_{n+k}\}_{n=0}^{\infty} = \{f_k, f_{k+1}, f_{k+2}, \ldots\}.$$

Věta 7.21. *(posunutí vzoru (originálu) vpravo) Nechť posloupnost $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ má obraz $F(z)$ a $k \in \mathbb{N}$. Pro posloupnost posunutou o k vpravo, tj. $\{f_{n-k}\}_{n=0}^{\infty}$ pak platí*

$$Z\left(\{f_{n-k}\}_{n=0}^{\infty}\right) = z^{-k}F(z).$$

Důkaz. Posunutou posloupnost rozložíme na dvě posloupnosti, a provedeme přeindexování

$$Z\left(\{f_{n-k}\}_{n=0}^{\infty}\right) = \sum_{n=0}^{k-1} f_{n-k} z^{-n} + \sum_{n=k}^{\infty} f_{n-k} z^{-n} = \sum_{n=0}^{k-1} 0 z^{-n} + \sum_{i=0}^{\infty} f_i z^{-(i+k)} =$$

$$= z^{-k} \sum_{i=0}^{\infty} f_i z^{-i} = z^{-k} F(z).$$

□

Příklad 7.22. Pomocí věty o posunutí vzoru vpravo určete Z-transformaci posloupnosti $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ dané vztahem $f_n = e^{c(n-k)}$, $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k \in \mathbb{N}$ a $c \in \mathbb{C}$.

Řešení. Posloupnost $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ získáme z posloupnosti $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ dané vztahem $g_n = e^{cn}$, $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ posunutím o k vpravo. Z příkladu 7.11 víme, že

$$Z\left(\{e^{cn}\}_{n=0}^{\infty}\right) = \frac{z}{z - e^c} = G(z), \quad |z| > |e^c|.$$

Použitím věty o posunutí vpravo dostaneme:

$$Z\left(\{f_n\}_{n=0}^{\infty}\right) = Z\left(\left\{e^{c(n-k)}\right\}_{n=0}^{\infty}\right) = Z\left(\{g_{n-k}\}_{n=0}^{\infty}\right) = \frac{G(z)}{z^k} = \frac{z}{z^k(z - e^c)}, \ |z| > |e^c|.$$

▲

Věta 7.23. *(posunutí vzoru vlevo) Nechť posloupnost $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ má obraz $F(z)$ a $k \in \mathbb{N}$. Pro posloupnost posunutou o k vlevo, tj. $\{f_{n+k}\}_{n=0}^{\infty}$ pak platí*

$$Z\left(\{f_{n+k}\}_{n=0}^{\infty}\right) = z^k \left(F(z) - \sum_{n-1}^{k-1} f_n z^{-n}\right).$$

Důkaz. Z tvaru posloupnosti posunuté o k vlevo dostáváme

$$Z\left(\{f_{n+k}\}_{n=0}^{\infty}\right) = \sum_{n-1}^{\infty} f_{n+k} z^{-n} = \sum_{i=k}^{\infty} f_i z^{-(i-k)} = z^k \left(\sum_{i=0}^{\infty} f_i z^{-i} - \sum_{i=0}^{k-1} f_i z^{-i}\right) =$$

$$= z^k \left(F(z) - \sum_{n=0}^{k-1} f_n z^{-n}\right).$$

□

Příklad 7.24. Pomocí věty o posunutí vzoru vpravo určete Z-transformaci posloupnosti $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ dané vztahem $f_n = e^{c(n+k)}$, $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k \in \mathbb{N}$ a $c \in \mathbb{C}$.

Řešení. Posloupnost $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ získáme z posloupnosti $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ dané vztahem $g_n = e^{cn}$, $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ posunutím o k vlevo. Z příkladu 7.11 víme, že

$$Z\left(\{g_n\}_{n=0}^{\infty}\right) = Z\left(\{e^{cn}\}_{n=0}^{\infty}\right) = \frac{z}{z-e^c} = G(z).$$

Použitím věty o posunutí vpravo dostaneme

$$Z\left(\{f_n\}_{n=0}^{\infty}\right) = Z\left(\{g_{n+k}\}_{n=0}^{\infty}\right) = z^k\left(G(z) - \sum_{n=0}^{k-1} g_n z^{-n}\right) = z^k\left(\frac{z}{z-e^c} - \sum_{n=0}^{k-1} e^{cn} z^{-n}\right).$$

▲

Definice 7.25. Nechť $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ posloupnost v $\mathbb{C}$ a $k \in \mathbb{N}$. Dopřednou resp. zpětnou diferencí posloupnosti $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, budeme označovat $\{\triangle f_n\}_{n=0}^{\infty}$ resp. $\{\nabla f_n\}_{n=0}^{\infty}$, rozumíne posloupnost

$$\{\triangle f_n\}_{n=0}^{\infty} = \{f_{n+1} - f_n\}_{n=0}^{\infty} \quad \text{resp.} \quad \{\nabla f_n\}_{n=0}^{\infty} = \{f_n - f_{n-1}\}_{n=0}^{\infty}.$$

Dopřednou resp. zpětnou diferencí k-tého řádu posloupnosti $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, budeme označovat $\left\{\triangle^k f_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ resp. $\left\{\nabla^k f_n\right\}_{n=0}^{\infty}$, definujeme rekurentně pomocí první dopředné resp. zpětné diference

$$\left\{\triangle^k f_n\right\}_{n=0}^{\infty} = \left\{\triangle\left(\triangle^{k-1} f_n\right)\right\}_{n=0}^{\infty} \quad \text{resp.} \quad \left\{\nabla^k f_n\right\}_{n=0}^{\infty} = \left\{\nabla\left(\nabla^{k-1} f_n\right)\right\}_{n=0}^{\infty}.$$

Věta 7.26. *(obraz dopředných diferencí 1. řádu) Nechť posloupnost $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ má obraz $F(z)$. Pro obraz její první dopředné diference pak platí*

$$Z\left(\{\triangle f_n\}_{n=0}^{\infty}\right) = (z-1)F(z) - f_0 z.$$

Důkaz. Z linearity Z-transformace a věty o posloupnosti posunuté o k vlevo dostáváme

$$Z\left(\{\triangle f_n\}_{n=0}^{\infty}\right) = Z\left(\{f_{n+1} - f_n\}_{n=0}^{\infty}\right) = Z\left(\{f_{n+1}\}_{n=0}^{\infty}\right) - Z\left(\{f_n\}_{n=0}^{\infty}\right) =$$
$$= z\left(F(z) - f_0\right) - F(z) = (z-1)F(z) - f_0 z.$$

□

Věta 7.27. *(obraz dopředných diferencí k-tého řádu) Nechť posloupnost $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ má obraz $F(z)$. Pro obraz její k-té dopředné diference pak platí*

$$Z\left(\left\{\triangle^k f_n\right\}_{n=0}^{\infty}\right) = (z-1)^k F(z) - \sum_{i=0}^{k-1} (z-1)^{k-i-1} \triangle^i f_0.$$

Důkaz. Matematickou indukcí: pro $k = 1$

$$Z\left(\left\{\triangle^1 f_n\right\}_{n=0}^{\infty}\right) = (z-1)F(z) - f_0 z = (z-1)^1 F(z) - z\sum_{i=0}^{1-1}(z-1)^{1-i-1}\triangle^0 f_0,$$

předpokládáme platnost vztahu pro k a z předpokladu dokazujeme platnost pro $k+1$

$$Z\left(\left\{\triangle^{k+1} f_n\right\}_{n=0}^{\infty}\right) = (z-1)Z\left(\left\{\triangle^{k} f_n\right\}_{n=0}^{\infty}\right) - z\triangle^k f_0 =$$

$$= (z-1)\left[(z-1)^k F(z) - z\sum_{i=0}^{k-1}(z-1)^{k-i-1}\triangle^i f_0\right] - z\triangle^k f_0 =$$

$$= (z-1)^{k+1} F(z) - z\sum_{i=0}^{k-1}(z-1)^{(k+1)-i-1}\triangle^i f_0 - z\triangle^k f_0 (z-1)^{(k+1)-k-1} =$$

$$= (z-1)^{k+1} F(z) - z\sum_{i=0}^{k}(z-1)^{(k+1)-i-1}\triangle^i f_0.$$

□

Věta 7.28. *(obraz zpětných diferencí 1. řádu) Nechť posloupnost* $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ *má obraz* $F(z)$*. Pro obraz její první zpětné diference pak platí*

$$Z\left(\{\nabla f_n\}_{n=0}^{\infty}\right) = \frac{z-1}{z}F(z).$$

Důkaz. Z linearity Z-transformace a věty o posloupnosti posunuté o k vpravo dostáváme

$$Z\left(\{\nabla f_n\}_{n=0}^{\infty}\right) = Z\left(\{f_n - f_{n-1}\}_{n=0}^{\infty}\right) = Z\left(\{f_n\}_{n=0}^{\infty}\right) - Z\left(\{f_{n-1}\}_{n=0}^{\infty}\right) =$$

$$= F(z) - z^{-1}F(z) = \frac{z-1}{z}F(z).$$

□

Věta 7.29. *(obraz zpětných diferencí k-tého řádu) Nechť posloupnost* $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ *má obraz* $F(z)$*. Pro obraz její k-té zpětné diference pak platí*

$$Z\left(\left\{\nabla^k f_n\right\}_{n=0}^{\infty}\right) = \left(\frac{z-1}{z}\right)^k F(z).$$

Důkaz. Matematickou indukcí: pro $k = 1$

$$Z\left(\left\{\nabla^1 f_n\right\}_{n=0}^{\infty}\right) = \left(\frac{z-1}{z}\right)^1 F(z),$$

předpokládáme platnost vztahu pro k a z předpokladu dokazujeme platnost pro $k+1$

$$Z\left(\left\{\nabla^{k+1} f_n\right\}_{n=0}^{\infty}\right) = \frac{z-1}{z} Z\left(\left\{\nabla^k f_n\right\}_{n=0}^{\infty}\right) = \frac{z-1}{z}\left(\frac{z-1}{z}\right)^k F(z) = \left(\frac{z-1}{z}\right)^{k+1} F(z).$$

□

Věta 7.30. *(derivace obrazu) Nechť posloupnost $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ má obraz $F(z)$. Potom platí*

$$Z\left(\{n\, f_n\}_{n=0}^{\infty}\right) = -z\frac{dF(z)}{dz}.$$

Důkaz. Podívejme se blíže na první derivaci $F(z)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}F(z) &= \frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} -n f_n z^{-n-1} = \\ &= -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n f_n}{z^n} = -\frac{1}{z}Z\left(\{n\, f_n\}_{n=0}^{\infty}\right) \Rightarrow \frac{d}{dz}F(z) = -\frac{1}{z}Z\left(\{n\, f_n\}_{n=0}^{\infty}\right). \end{aligned}$$

Vynásobíme-li obě strany posledního výrazu $-z$, $z \neq 0$ dostaneme dokazovaný vztah.

□

Příklad 7.31. Pomocí věty o derivaci obrazu určete Z-transformaci posloupnosti $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ dané vztahem $f_n = n$, $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Řešení. Posloupnost $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ získáme z posloupnosti $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ dané vztahem $g_n = 1$, $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ násobením každého n-tého členu posloupnosti číslem n. Z-obraz posloupnosti $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ (viz. příklad 7.10, $a = 1$) bude

$$Z\left(\{g_n\}_{n=0}^{\infty}\right) = Z\left(\{1\}_{n=0}^{\infty}\right) = \frac{z}{z-1} = G(z), \quad |z| > 1.$$

Použitím věty o derivaci obrazu dostáváme

$$Z\left(\{f_n\}_{n=0}^{\infty}\right) = Z\left(\{n1\}_{n=0}^{\infty}\right) = -z\frac{dG(z)}{dz} = -z\left(\frac{z}{z-1}\right)' = \frac{z}{(z-1)^2}, \quad |z| > 1.$$

▲

Věta 7.32. *(integrace obrazu) Nechť posloupnost* $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, $f_0 = 0$ *má obraz* $F(z)$. *Jako posloupnost* $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ *označme posloupnost danou vztahem* $g_0 = 0,\ g_n = \frac{f_n}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$. *Pro tuto posloupnost platí*

$$Z\left(\{g_n\}_{n=0}^{\infty}\right) = \int_z^{\infty} \frac{F(w)}{w} dw.$$

Příklad 7.33. Pomocí věty o integraci obrazu určete Z-transformaci posloupnosti $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ dané vztahem $f_n = 0,\ f_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Řešení. Pro Z-obraz posloupnosti $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ dané vztahem $c_n = (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ platí

$$Z\left(\{c_n\}_{n=0}^{\infty}\right) = Z\left(\{1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots,\}\right) = C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{-n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{z}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{-1}{z}} = \frac{z}{z+1}, \quad |z| > 1.$$

Posloupnost $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ vzniká z posloupnosti $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ posunutím o jeden člen doprava a má Z-obraz

$$Z\left(\{f_n\}_{n=0}^{\infty}\right) = Z\left(\left\{0, 1, -1, \dots, (-1)^{n-1}, \dots,\right\}\right) = F(z) = \frac{C(z)}{z} = \frac{1}{z+1}, \ |z| > 1.$$

Pro posloupnost $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ bude Z-obraz na základě věty 7.32

$$Z\left(\{g_n\}_{n=0}^{\infty}\right) = Z\left(\left\{0, \frac{1}{1}, \frac{-1}{2}, \dots, \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \dots,\right\}\right) =$$

$$= G(z) = \int_z^{\infty} \frac{F(w)}{w} dw = \int_z^{\infty} \frac{1}{w(w+1)} dw =$$

$$= \lim_{w \to \infty} \ln\left(\frac{w}{w+1}\right) - \ln\left(\frac{z}{z+1}\right) = \ln(1) - \ln\left(\frac{z}{z+1}\right) = \ln\left(\frac{z}{z+1}\right).$$

▲

Věta 7.34. *(derivace podle parametru) Nechť posloupnost* $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ *má obraz* $F(z)$. *Potom pro derivaci* f_n *podle parametru* w *platí*

$$Z\left(\left\{\frac{\partial f_n(w)}{\partial w}\right\}_{n=0}^{\infty}\right) = \frac{\partial F(z,w)}{\partial w}.$$

Věta 7.35. *(integrace podle parametru) Nechť posloupnost $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ má obraz $F(z)$. Potom pro integraci f_n podle parametru w platí*

$$Z\left(\left\{\int_a^b f_n(w)dw\right\}_{n=0}^{\infty}\right)=\int_a^b F(z,w)dw.$$

Věta 7.36. *(obraz částečných součtů) Nechť posloupnost $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ má obraz $F(z)$. Potom pro posloupnost částečných součtů $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ posloupnosti $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ platí*

$$\left\{\sum_{i=0}^{n} f_i\right\}_{n=0}^{\infty}=\{g_n\}_{n=0}^{\infty}\Rightarrow Z\left(\{g_n\}_{n=0}^{\infty}\right)=Z\left(\left\{\sum_{i=0}^{n} f_i\right\}_{n=0}^{\infty}\right)=\frac{z}{z-1}F(z)=G(z).$$

Důkaz. Nechť částečné součty jsou

$$g_{n+1}=\sum_{i=0}^{n+1} f_i,\quad g_n=\sum_{i=0}^{n} f_i.$$

První dopředná diference a její Z-obraz (věta 7.26) bude

$$\triangle g_n=f_{n+1}\Rightarrow Z\left(\{\triangle g_n\}_{n=0}^{\infty}\right)=(z-1)G(z)-zg_0=z\left(F(z)-f_0\right)=Z\left(\{f_{n+1}\}_{n=0}^{\infty}\right).$$

Použitím věty o posunutí doleva a z platnosti vztahu $f_0=g_0$ dostaneme

$$(z-1)G(z)=zF(z).$$

□

Cvičení 7.37.

Výsledky některých příkladů jsou uvedeny v hranatých závorkách vždy za textem zadání.

1. Najděte Z-obrazy daných posloupností f_n, $\forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$:
   (a) $f_n=(-2)^n$ $\left[F(z)=\frac{z}{z+2}\right]$,
   (b) $f_n=\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ $\left[F(z)=\frac{3z}{3z+2}\right]$,
   (c) $f_n=(2e^a)^n$, a je konstanta $\left[F(z)=\frac{z}{z-2e^{an}}\right]$,
   (d) $f_n=-3n$ $\left[F(z)=\frac{-3z}{(z-1)^2}\right]$,
   (e) $f_0=0,\ f_n=(-2)^n,\ n=1,\ 2,\ \ldots$ $\left[F(z)=\frac{1}{z+2}\right]$,

	Originál	Obraz funkce $f(t)$	Poznámka
	$\{f_n\}_{n=0}^{\infty} = Z^{-1}\{F(z)\}$	$F(z) = Z\{f_n\}_{n=0}^{\infty} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}$	
	Limitní věta:	$\lim\limits_{z\to\infty} F(z) = f_0$	
1	$\{af_n + bg_n\}_{n=0}^{\infty}$	$aF(z) + bG(z)$	Lineárnost, a, b jsou konstatny
2	$\{a^n f_n\}_{n=0}^{\infty}$	$F\left(\frac{z}{a}\right)$	Podobnost obrazů a je komplexní konstanta
3	$\{e^{an} f_n\}_{n=0}^{\infty}$	$F\left(\frac{z}{e^a}\right)$	Násobení vzoru exponenciální funkcí
4	$\{(f \star g)_n\}_{n=0}^{\infty}$	$F(z).G(z)$	Konvoluce vzorů
5	$\{f_{n-k}\}_{n=0}^{\infty}$	$z^{-k}F(z)$	Posunutí vzorů vpravo
6	$\{f_{n+k}\}_{n=0}^{\infty}$	$z^k\left(F(z) - \sum\limits_{n=0}^{k-1} f_n z^{-n}\right)$	Posunutí vzorů vlevo
7	$\{\triangle f_n\}_{n=0}^{\infty}$	$(z-1)F(z) - f_0 z$	Obraz dopředných diferencí 1. řádu
8	$\left\{\triangle^k f_n\right\}_{n=0}^{\infty}$	$(z-1)^k F(z) - z\sum\limits_{i=0}^{k-1}(z-1)^{k-i-1} f_0$	Obraz dopředných diferencí k-tého řádu
9	$\{\nabla f_n\}_{n=0}^{\infty}$	$\frac{z-1}{z}F(z)$	Obraz zpětných diferencí 1. řádu
10	$\left\{\nabla^k f_n\right\}_{n=0}^{\infty}$	$\left(\frac{z-1}{z}\right)^k F(z)$	Obraz zpětných diferencí k-tého řádu
11	$\{nf_n\}_{n=0}^{\infty}$	$-z\frac{dF(z)}{dz}$	Derivace obrazu
12	$\left\{\frac{f_n}{n}\right\}_{n=0}^{\infty}$	$\int_z^{\infty} \frac{F(w)}{w} dw$	Integrace obrazu
13	$\left\{\frac{\partial f_n(w)}{\partial w}\right\}_{n=0}^{\infty}$	$\frac{\partial F(z,w)}{\partial w}$	Derivace obrazu podle parametru
14	$\left\{\int_a^b f_n(w)dw\right\}_{n=0}^{\infty}$	$\int_a^b F(z,w)dw$	Integrace obrazu podle parametru
15	$\left\{\sum\limits_{i=0}^{n} f_i\right\}_{n=0}^{\infty}$	$\frac{z}{z-1}F(z)$	Obraz částečných součtů
16	$f_0 = 1,\ f_n = 0,\ n > 0$	1	

Tab. 7.1Přehled vzorců Z-transformace

(f) $f_0 = f_1 = 0,\ f_n = (-2)^n,\ n = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$ $\left[F(z) = \frac{1}{z(z+2)}\right]$.

2. Najděte originály daných Z-obrazů, stanovte příslušnou množinu proměnné z:

   (a) $F(z) = \frac{z}{z+2}$ $[|z| > 2,\ \ f_n = (-2)^n]$,

   (b) $F(z) = \frac{3z}{3z+2}$ $\left[|z| > \frac{2}{3},\ \ f_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]$,

   (c) $F(z) = \frac{z}{z-2e^{an}}$, a je konstanta $[|z| > 2|e^{an}|,\ \ f_n = (-2e^a)^n]$,

   (d) $F(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$ $[|z| > 1,\ \ f_n = n]$,

   (e) $F(z) = \frac{-3z}{(z-1)^2}$ $[|z| > 1,\ \ f_n = -3n]$,

   (f) $F(z) = \frac{1}{z+2}$ $[|z| > 2,\ \ f_0 = 0,\ f_n = (-2)^n,\ \ n = 1,\ 2,\ \ldots]$,

   (g) $F(z) = \frac{1}{z(z+2)}$ $[|z| > 2,\ \ f_0 = f_1 = 0,\ f_n = (-2)^n,\ n = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots]$.

3. Řešte následující diferenční rovnice $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

   (a) $\triangle y_n = 2^n,\ \ y_0 = 0$,

   (b) $\triangle y_n + 2y_n = 2^n,\ \ y_0 = 1$,

   (c) $\triangle^2 y_n - y_n = (-1)^n,\ \ y_0 = y_1 = 0$,

   (d) $\triangle^2 y_n + 2\triangle y_n + 2y_n = (-1)^n,\ \ y_0 = 0,\ \triangle y_0 = 1$,

   (e) $y_{n+2} + y_{n+1} - 2y_n = 1^n,\ \ y_0 = 0,\ \ y_1 = 1$,

   (f) $8y_{n+2} - 6y_{n+1} + y_n = 9,\ \ y_0 = 1,\ \ y_1 = 1.5$,

   (g) $\triangle^2 f(n) - 2\triangle f(n) + f(n) = 2,\ \ f(0) = 0,\ \ \triangle f(0) = 1$,

   (h) $\triangle^2 f(n) - 8\triangle f(n) + 16f(n) = -16n^2 + 16n + 6,\ \ f(0) = 0,\ \ f(1) = 4$,

   (i) $\triangle^2 f(n) + 3\triangle f(n) + 3f(n) = 0,\ \ f(0) = 1,\ \ \triangle f(0) = -2$,

   (j) $\triangle^3 f(n) + 6\triangle^2 f(n) + 8f(n) = \cos n\pi,\ \ f(0) = \triangle f(0) = \triangle^2 f(0) = 0$.

4. Řešte diferenční systémy:

   (a) $\begin{array}{rcl} f(n+1) & = & -f(n) + g(n) + h(n) \\ g(n+1) & = & f(n) - g(n) + h(n) \\ h(n+1) & = & f(n) + g(n) - h(n) \end{array}$, $\quad f(0) = 1,\ g(0) = h(0) = 0$,

   (b) $\begin{array}{rcl} f(n+1) & = & g(n) + h(n) \\ g(n+1) & = & f(n) + h(n) \\ h(n+1) & = & f(n) + g(n) \end{array}$, $\quad f(0) = -1,\ h(0) = 1,\ g(0) = 0$,

   (c) $\begin{array}{rcl} f(n+1) - 7f(n) - g(n) & = & 0 \\ g(n+1) + f(n) + 5g(n) & = & 0 \end{array}$, $\quad f(0) = g(0) = 1$,

   (d) $\begin{array}{rcl} f(n+1) - 3f(n) - g(n) & = & 0 \\ g(n+1) + 5f(n) + g(n) & = & 0 \end{array}$, $\quad f(0) = g(0) = 1$.

7.3 Vztah mezi diskrétní Laplaceovou a Z-transformací

Laplaceova integrální transformace je zobrazení definované vztahem

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt,$$

kde originál $f(t)$ je komplexní funkce reálné proměnné: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, obraz $F(s)$ je holomorfní (analytická, regulární) funkce komplexní proměnné $F: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a jádro Laplaceovy transformace $e^{-st} = K(s,t)$ je zobrazení $K: [\mathbb{R} \times \mathbb{C}] \to \mathbb{C}$.

Při pohledu na Z-transformaci definovanou vztahem (7.2), tj. $F(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}$ se nabízí zavedení nové nezávislé proměnné substitucí

$$z = e^s. \tag{7.5}$$

Pak

$$F(z) = F(e^s) = \widehat{F}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{-ns},$$

což je obraz posloupnosti $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ při diskrétní Laplaceově transformaci [9].

Když budeme zcela analogicky postupovat při zpětné Z-transformaci dané vztahem (7.3), tj. $f_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma F(z)z^{n-1}dz$, kde $\gamma(t) = Re^{it}, t \in [0, 2\pi]$ a $\langle\gamma\rangle \subset P(\infty)$, při substituci (7.5) se křivka γ transformuje na křivku $\widetilde{\gamma}$, kterou je úsečka spojující body $\mu - \pi i$ a $\mu + \pi i$, $\mu > \ln R$, tj. $\widetilde{\gamma}(t) = \mu + it$, $t \in [-\pi, \pi]$. Pak po dosazení

$$dz = e^s ds,$$

dostaneme

$$f_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mu-\pi i}^{\mu+\pi i} \widehat{F}(s)e^{ns}ds,$$

což je vztah pro nalezení originálu definující zpětnou diskrétní Laplaceovu transformaci.

7.4 Využití Z transformace při řešení (soustav) diferenčních rovnic

Laplaceovu transformaci jsme použili při řešení lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty. Z-transformaci použijeme při řešení diferenčních rovnic s konstantními koeficienty.

Definice 7.38. Lineární diferenční rovnice s konstantními koeficienty k-tého řádu je definována

$$\triangle^k y_n + a_1 \triangle^{k-1} y_n + \ldots + a_{k-1} \triangle y_n + a_k y_n = f_n, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{7.6}$$

kde $a_1, a_2, \ldots, a_k$ jsou konstanty, f je pravá strana rovnice, $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ je hledané řešení diferenční rovnice, f, y nazýváme mřížkové funkce, které jsou dány ve tvaru posloupnosti funkčních hodnot, $\triangle^k y_n$ je dopředná diference k-tého řádu posloupnosti $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Poznámka 7.39. Použijeme-li pro diference vztahy z definice 7.25 lze diferenční rovnici přepsat ve tvaru

$$y_{n+k} + b_1 y_{n+k-1} + \ldots + b_{k-1} y_{n+1} + b_k y_n = f_n, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

zde $b_1, b_2, \ldots, b_k$ jsou konstanty. Oba vztahy jsou rovnocenné.

Použití Z-transformace při řešení diferenčních rovnic je obdobné jako použití Laplaceovy transformace při řešení diferenciálních rovnic:

Na základě podmínek a předpokladů, že k dané diferenční rovnici lze sestavit její Z-obraz

1. sestavíme Z–obraz diferenční rovnice s použitím věty o linearitě,
2. vypočteme obraz řešení $Y(z)$,
3. pomocí zpětné Z-transformace nalezneme řešení $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Příklad 7.40. S využitím Z-transformace určete partikulární řešení diferenční rovnice

$$\begin{cases} \triangle^2 y_n - y_n = 1, & \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ y_0 = 0, & \triangle y_0 = 1 \end{cases}.$$

Řešení. Nejdříve ukážeme, že danou rovnici lze přepsat do ekvivalentního tvaru bez použití diferencí

$$\begin{aligned} \triangle^2 y_n - y_n &= \triangle (y_{n+1} - y_n) - y_n = \triangle y_{n+1} - \triangle y_n - y_n = \\ &= (y_{n+2} - y_{n+1}) - (y_{n+1} - y_n) - y_n = y_{n+2} - 2y_{n+1}. \end{aligned}$$

Diferenční rovnici teď obdržíme ve tvaru:

$$\begin{cases} y_{n+2} - 2y_{n+1} = 1, & \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ y_0 = 0, & \triangle y_0 = 1 \end{cases}.$$

Jak již bylo řečeno oba tvary jsou rovnocenné, popisují stejný problém.

1. Předpokládáme, že existuje Z-obraz $Y(z) = Z(\{y_n\}_{n=0}^{\infty})$ řešení této diferenční rovnice, pak na základě vět o posunutí vlevo nebo vět o obrazech diferencí sestavíme Z–obraz diferenční rovnice, přičemž nezáleží na tom, jestli pracujeme s diferenční rovnicí v prvním nebo druhém tvaru. Posloupnost $\{f_n\}_{n=0}^{\infty} = \{1^n\}_{n=0}^{\infty}$ je ohraničená a její Z–obraz je

$$Z\left(\{1\}_{n=0}^{\infty}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} 1\, z^{-1} = \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1.$$

Z–obraz levé strany diferenční rovnice bude

$$Z\left(\triangle^2 y_n - y_n\right) = Z\left(y_{n+2} - 2y_{n+1}\right) = Z\left(y_{n+2}\right) - Z\left(2y_{n+1}\right), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Jelikož na základě vět o posunutí vlevo

$$Z\left(y_{n+1}\right) = z\left(Y(z) - y_0\right) = z\left(Y(z) - 0\right) = zY(z),$$

$$Z\left(y_{n+2}\right) = z\left(Z\left(y_{n+1}\right) - y_1\right) = \left(Z\left(y_{n+1}\right) - 1\right) = z^2 Y(z) - z, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

potom Z-obraz diferenční rovnice bude

$$Z\left(y_{n+2}\right) - 2Z\left(y_{n+1}\right) = \frac{z}{z-1}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \Rightarrow z^2 Y(z) - 2zY(z) - z = \frac{z}{z-1}.$$

2. Vyřešíme transformovanou rovnici

$$\left(z^2 - 2z\right) Y(z) = \frac{z}{z-1} + z \Rightarrow Y(z) = \frac{z}{z(z-1)(z-2)} + \frac{z}{z(z-2)} = \frac{z + z(z-1)}{z(z-1)(z-2)},$$

$$Y(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}, \quad |z| > 2.$$

3. Hledáme originál - řešení diferenční rovnice $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ k nalezenému obrazu $Y(z)$:

a) rozkladem obrazu na funkce, k nimž známe vzory (rozklad na parciální zlomky)

$$Y(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)} = \frac{z}{z-2} - \frac{z}{z-1},$$

$$Z^{-1}\left(\frac{z}{z-2}\right) = Z^{-1}\left(\frac{z}{z - e^{\ln 2}}\right) = \left\{e^{n \ln 2}\right\}_{n=0}^{\infty} = \{2^n\}_{n=0}^{\infty},$$

$$Z^{-1}\left(\frac{z}{z-1}\right) = Z^{-1}\left(\frac{z}{z - e^{0}}\right) = \left\{e^{n\, 0}\right\}_{n=0}^{\infty} = \{1\}_{n=0}^{\infty},$$

$$Z^{-1}\left(\frac{z}{z-2} - \frac{z}{z-1}\right) = Z^{-1}\left(\frac{z}{z-2}\right) - Z^{-1}\left(\frac{z}{z-1}\right) = \{2^n - 1\}_{n=0}^{\infty},$$

$$\{y_n\}_{n=0}^{\infty} = \{2^n - 1\}_{n=0}^{\infty} = (0, 1, 3, 7, \ldots).$$

b) podle definičního vztahu (7.4), kde γ je kružnice se středem v bodě 0 a poloměru $R > 2$, integrovaná funkce má v bodech $1 + 0i$ a $2 + 0i$ póly prvního řádu, proto

$$y_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{z^{n-1}z}{(z-1)(z-2)}dz = \mathrm{Res}_{z=1}\frac{z^n}{(z-1)(z-2)} + \mathrm{Res}_{z=2}\frac{z^n}{(z-1)(z-2)} \Rightarrow$$

$$y_n = -1 + 2^n \Rightarrow \{y_n\}_{n=0}^{\infty} = \{2^n - 1\}_{n=0}^{\infty}.$$

c) použitím konvoluce dvou posloupností

$$Y(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)} = \frac{z}{z-2}.\frac{1}{z-1},$$

$$Z^{-1}\left(\frac{z}{z-2}\right) = Z^{-1}\left(\frac{z}{z-e^{\ln 2}}\right) = \left\{e^{n\ln 2}\right\}_{n=0}^{\infty} = \{2^n\}_{n=0}^{\infty} = \{g_n\}_{n=0}^{\infty},$$

$$Z^{-1}\left(\frac{z}{z-1}\right) = Z^{-1}\left(\frac{z}{z-e^0}\right) = \left\{e^{n\,0}\right\}_{n=0}^{\infty} = \{1\}_{n=0}^{\infty}.$$

Na základě věty o posunutí vpravo

$$Z^{-1}\left(\frac{1}{z-1}\right) = Z^{-1}\left(z^{-1}\frac{z}{z-1}\right) = \{0, 1, 1, 1, \ldots\} = \{h_n\}_{n=0}^{\infty}.$$

Partikulární řešení bude

$$Z^{-1}\left(\frac{z}{(z-1)(z-2)}\right) = \{(g \star h)_n\}_{n=0}^{\infty} = \left\{\sum_{k=0}^{n} h_k g_{n-k}\right\}_{n=0}^{\infty},$$

$$y_0 = \sum_{k=0}^{0} h_0 g_0 = 0 = 1 - 1 = 2^0 - 1,$$

$$\{y_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\sum_{k=0}^{n} h_k g_{n-k}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\sum_{k=1}^{n} 1.2^{n-k}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{2^n \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}_{n=1}^{\infty} =$$

$$= \left\{2^n \frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{2^n\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{2^n - \left(\frac{2}{2}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty} = \{2^n - 1\}_{n=1}^{\infty}$$

$$\Rightarrow \{y_n\}_{n=0}^{\infty} = \{2^n - 1\}_{n=1}^{\infty} = (0, 1, 3, 7, \ldots).$$

▲

7.5 Dvoustranná Z-transformace

Věta 7.41. *Nechť pro řadu* $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} f_n z^n$ $\exists M \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{array}{ll} \exists s \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : |f_n| \leqq M e^{sn} \wedge \\ \exists t \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} \quad\ : |f_{-n}| \leqq M e^{-tn} \end{array}, \tag{7.7}$$

pak je řada konvergentní na množině $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \ r = e^{-t} > |z| > e^s = R\}$ *(tj. v mezikruží o poloměrech* R, r*).*

Definice 7.42. Nechť $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ je číselná posloupnost v $\mathbb{C}$ resp. $\mathbb{R}$. Dvoustranná Z-transformace této posloupnosti splňující (7.7) je definována

$$F(z) = Z_D\left(\{f_n\}_{n=0}^{\infty}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} f_{-n} z^n. \tag{7.8}$$

Důkaz. Pro případ dvoustranné Z-transformace při platnosti (7.7) dokážeme absolutní konvergenci dvou řad, z níž plyne konvergence jejich součtu na mezikruží. Konvergence první řady byla dokázána výše. Pro druhou řadu dokážeme absolutní konvergenci, z níž plyne její konvergence

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{-n} z^n \leqq \sum_{n=1}^{\infty} |f_{-n} z^n| = \sum_{n=1}^{\infty} |f_{-n}|\, |z^n| \leqq M \sum_{n=0}^{\infty} (e^t z)^n = \frac{M}{1 - e^t\,|z|} < \infty,\ |z| < e^{-t}.$$

$\square$

Literatura

[1] N. Častová, D. Horák: Okenní transformace, Sborník z 7. semináře Moderní matematické metody v inženýrství, Ostrava, 1998.

[2] N. Častová, E. Dršťáková, D. Horák: Časově-frekvenční analýza modelovaného signálu, Sborník z 8. semináře Moderní matematické metody v inženýrství, Ostrava, 1999.

[3] T. P. Kraus, L. Shure, J. N. Little: Signal Processing Toolbox, MathWorks, Inc.

[4] B. Torrésani: An Overview of Wavelet Analysis and Time-Frequency Analysis, Universite de Provence, Marseille.

[5] K. Rektorys: Přehled užité matematiky, Prometheus, 1995.

[6] J. Bouchala: Funkce komplexní proměnné, učební text, www.am.vsb.cz/bouchala.

[7] N. Častová, T. Kozubek: Integrální transformace, www.am.vsb.cz/studium.

[8] D. Horák: Sylaby k předmětům Integrální transformace a Diskrétní transformace, www.am.vsb.cz/horak/ITDT.

[9] P. Galajda, Š. Schrötter: Funkcie komplexnej premennej a operátorový počet, Alfa, Bratislava, ISBN 80-05-00800-7, 1991.

[10] wikipedie - konvoluce.

[11] N. Častová, D. Horák, Z. Kaláb: Description of seismic events using wavelet transform, International journal of wavelets multiresolution and information processing, Volume 4, Issue 3, 405-414, 2006.