



DISKRÉTNÍ MATEMATIKA

a

ÚVOD DO TEORIE GRAFŮ

(příklady k procvičení)

Petr Kovář

Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století* (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Úvodem

Tento text je zatím pracovní. Původně soubor obsahoval přípravy na cvičení a poznámky k předmětu Diskrétní matematika pro zimní semestr 2006/2007. Nyní je k dispozici také celá řada příkladů k procvičení. V plánu je zařadit do každé kapitoly i řešené příklady.

Chtěl bych poděkovat studentům Pavle Kabelíkové a Tomáši Kupkovi, kteří pomáhali s přípravou některých příkladů a také Michalovi Kubesovi, který pozorně prošel řešené příklady. Poděkování patří i Martinu Čermákovi a Oldřichu Vlachovi, kteří odhalili celou řadu chyb a překlepů.

K použitým symbolům

Příklady označené „*“ patří k náročnějším. Jejich řešení obvykle vyžaduje delší výpočet nebo pečlivější rozbor. Při řešení příkladů označených „**“ je třeba nějaký nápad nebo výsledek z jiné oblasti matematiky. Zdůrazněme ale, že hvězdička neznamena nutně „to nikdy nevyřeším“.

Naproti tomu příklady označené „♡“ jsou tak lehké, že jejich řešení je možné z paměti jen s užitím základních pojmů.

Obsah

0 První cvičení – před přednáškou	5
0.1 Podmínky zápočtu	5
0.2 Zápočtové písemky	5
0.3 Samostatný projekt	5
0.4 Zkouška	6
0.5 Další poznámky	6
0.6 Motivační příklady	7
1 Množiny a výběry prvků	8
1.1 Čísla, operace, množiny	9
1.2 Výběry bez opakování	11
1.3 Výběry s opakováním	13
1.4 Příklady k procvičení	13
2 Diskrétní pravděpodobnost	17
2.1 Motivační příklady	18
2.2 Konečný pravděpodobnostní prostor	18
2.3 Disjunktní a nezávislé jevy	20
2.4 Podmíněná pravděpodobnost	21
2.5 Střední hodnota	21
2.6 Náhodné výběry	22
2.7 Příklady k procvičení	23
3 Kapitola 3 – Důkazy v diskrétní matematice	25
3.1 Motivační příklady	26
3.2 Základní logické symboly	26
3.3 Pojem matematického důkazu	27
3.4 Princip matematické indukce	27
3.5 Vztahy s kombinačními čísly	28
3.6 Důkazy počítáním	29
3.7 Příklady k procvičení	30
4 Relace a zobrazení	31
4.1 Motivační příklady	32
4.2 Pojem relace	33
4.3 Uspořádání a ekvivalence	34
4.4 Funkce a zobrazení	35
4.5 Skládání zobrazení a permutace	36
4.6 Princip inkluze a exkluze	37
4.7 Příklady k procvičení	38
6 Úvod do teorie grafů	39
6.1 Motivační příklady	39
6.2 Pojem grafu	40
6.3 Stupně vrcholů v grafu	40
6.4 Podgrafy a isomorfismus	42
6.5 Orientované grafy a multigrafy	44
6.6 Implementace grafů	44
6.7 Příklady k procvičení	44

7	Souvislost	46
7.1	Souvislost a komponenty grafu	47
7.2	Prohledávání grafu	48
7.3	Vyšší stupně souvislosti	48
7.4	Eulerovské grafy	49
7.5	Příklady k procvičení	50
8	Vzdálenost a metrika	52
8.1	Motivační příklady	52
8.2	Vzdálenost v grafu	52
8.3	Vážená (ohodnocená) vzdálenost	53
8.4	Dijkstrův algoritmus	54
8.5	Příklady k procvičení	55
9	Stromy a les	56
9.1	Motivační příklady	56
9.2	Základní vlastnosti stromů	56
9.3	Kořenové a pěstované stromy	57
9.4	Isomorfismus stromů	59
9.5	Kostry grafů	59
9.6	Příklady k procvičení	60
10	Barvení a rovinné kreslení grafů	61
10.1	Motivační příklady	62
10.2	Vrcholové barvení grafů	62
10.3	Rovinné kreslení grafu	63
10.4	Rozpoznání rovinných grafů	66
10.5	Barvení map a rovinných grafů	66
10.6	Bonus – Hamiltonovské grafy	66
10.7	Příklady k procvičení	67
11	Kapitola 11 – Toky v sítích	68
11.1	Definice sítě	68
11.2	Hledání maximálního toku	68
11.3	Zobecnění sítí a další aplikace	69
11.4	Příklady k procvičení	70
	Reference	71

0 První cvičení – před přednáškou

0.1 Podmínky zápočtu

Oficiální informace o předmětu v Edisonu (<http://edison.vsb.cz>)

- hodnocení v průběhu studia,
- termínech písemných testů,
- termíny zkoušky,
- možnost (závazného) přihlášení ke zkoušce.

V tomto předmětu je 100b celkem, z toho 30b během semestru:

- 10b za projekt: projekty se nevrací k dopracování (pozor na dead line)
- 20b za písemky: každý týden 0/1/2b ze zadaných příkladů

0.2 Zápočtové písemky

- Každý týden semestru se na cvičení bude psát krátká zápočtová písemka (10–11 písemek).
- K vyřešení bude zhruba 2–10 minut, podle obtížnosti příkladu.
- Během písemek není možno používat literaturu, ani zápisky.
- Za každou písemku můžete získat 0/1/2 body (NE/TÉMĚŘ SPRÁVNĚ/ZCELA SPRÁVNĚ).
- Při absenci se písemka hodnotí 0 body.
- Celkem je za zápočtové písemky až 20 bodů.

Na konci semestru se každému vezmou body **osmi nejlepších** písemek a jejich součet se vynásobí koeficientem 1,25.

- Témata písemek najdete <http://am.vsb.cz/kovar>
- Alespoň týden předem budou k dispozici také zadání příkladů.
- Při neúčasti máte možnost zjistit, co bylo probráno a na jaké téma se bude psát další písemka.

0.3 Samostatný projekt

Během semestru budou zveřejněna témata samostatných písemných projektů.

- Každý student vypracuje jedno zadání podle čísla, které mu bude přiděleno.
- Pro získání zápočtu musíte mít *přijatý* referát, tj. kromě řešení musí vyhovět i formálním požadavkům.
- Referát obsahuje cca 5 příkladů
- Příklady se hodnotí buď za 0, 1 nebo 2 bodů, (opět stylem NE/TÉMĚŘ SPRÁVNĚ/ZCELA SPRÁVNĚ).
- V případě, že si student zvolí variantu „Projekt pro ty, kteří se chtějí něco naučit“, tak v případě mimořádně kvalitního referátu lze udělit až 5 bodů navíc.
- Celkem je za samostatné referáty 10 (ve výjimečných případech až 20) bodů.

Referát má pevně stanovený termín odevzdání, který musíte dodržet.

- Každý musí sepsat svůj referát sám, žádná spolupráce na výsledném textu referátu není dovolena.
- Je dovoleno o zadání referátu diskutovat se spolužáky a věnovat příkladům nějaký čas na cvičeních.
- Referát odevzdáváte e-mailem nebo na papíře příslušnému vyučujícímu (kontakt je uveden u každého zadání).
- Předepsaný formát je PDF nebo postscript.

0.4 Zkouška

- Předmět je zakončen písemnou zkouškou, až 70 bodů.
- Přihlášení ke zkoušce je možné pouze prostřednictvím Edisonu.
- Ke zkoušce mohou jít pouze studenti, kteří získali zápočet.
- Přihlášky jsou závazné a v případě nepřítomnosti na zkoušce je student hodnocen 0 body.

Podrobné informace jsou v Edisonu a také na stránkách <http://am.vsb.cz/kovar/>.

0.5 Další poznámky

- pokud má někdo uznaný zápočet z loňského roku, musí se rozhodnout, zda ho bude chtít uznat nebo zda bude chodit znovu a výsledky v Edisonu mu zrušíme
- 14 dní na přesuny mezi skupinami
- při přesunu dát vědět oběma vyučujícím

Literatura:

- P. Hliněný. Diskrétní matematika, výukový text on-line, FEI VŠB – TUO, 2004.
- J. Matoušek, J. Nešetřil. Kapitoly z diskrétní matematiky, Karolinum Praha 2000.
- přednášky jsou/budou dopředu na webu http://am.vsb.cz/kovar/predmety_dm_prubeh.php

0.6 Motivační příklady

0.6.1. Devět kamarádů si na Vánoce dalo dárky. Každý dal dárky třem svým kamarádům. Ukažte, že není možné, aby každý dostal dárky právě od těch tří kamarádů, kterým dárky sám dal. [dle věty 1.1.]

0.6.2. „Tři domy a tři studny.“ Podle pověsti žily v Temném hvozdu tři čarodejnice. Každá bydlela ve své vlastní sluji a každá potřebovala k provozování své živnosti vodu ze tří studánek: s živou vodou, s mrtvou vodou a s pitnou vodou. Jenomže cestou ke studánkám se čarodejnice nesmí potkat, ani zkřížit vyšlapanou cestičku jiné čarodejnice. Jak mohla vypadat mapa lesa se slujemi, studnami a cestičkami? Pokud řešení neexistuje, pečlivě zdůvodněte. [taková uspořádání nemůže existovat, pověst není pravdivá]

0.6.3. „Sedm mostů města Královce“ Městem Královec (nyní Kaliningrad na území Ruska) teče řeka Pregola, která vytváří dva ostrovy. V 18. století byly ostrovy spojeny s oběma břehy i navzájem celkem sedmi mosty. Otázka zní, zda je možné všechny mosty přejít tak, aby ten, kdo se o to pokouší, vstoupil na každý most pouze jednou. [řešení nemůže neexistovat]

0.6.4. „Dokonalý kompresní algoritmus“ Najděte alespoň jeden příklad dokonalého kompresního a dekompresního algoritmu, (máte najít dva algoritmy):

1. postup, jak z libovolné posloupnosti bajtů b_1, b_2, \dots, b_n sestavit kratší posloupnost c_1, c_2, \dots, c_m , kde $m < n$, a současně
2. postup, jak z posloupnosti c_1, c_2, \dots, c_m sestavit zpět posloupnost b_1, b_2, \dots, b_n .

Pokud takový algoritmus neexistuje, pečlivě zdůvodněte. [algoritmus nemůže existovat]

0.6.5. „Lámání čokolády“ Tabulka čokolády se skládá z $m \times n$ čtverečků. Chceme ji nalámat na jednotlivé čtverečky. Najděte (a dokažte) jaký je *nejmenší* počet zlomů, abychom čokoládu $m \times n$ rozdělili na jednotlivé čtverečky? [nejmenší možný počet lámání je $mn - 1$]

0.6.6. „Handshaking problem“ Máme skupinu n lidí ($n \geq 2$) z nichž někteří si podali ruce. Ukažte, že ve skupině jsou alespoň dva lidé, kteří podali ruku stejnému počtu lidí ve skupině. [rozbořem a užitím Dirichletova principu]

1 Množiny a výběry prvků

Druhé cvičení je věnováno kapitole o kombinatorických výběrech.

Řešené příklady

Známý vztah pro součet prvních n kladných celých čísel je

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n}{2}(n+1). \quad (1)$$

1.0.1. Vypočtete $\sum_{i=-3}^4 \frac{3+i}{2}$.

Pro přehlednost si sumu rozepíšeme, což zkušenější počtář dělat nemusí.

$$\sum_{i=-3}^4 \frac{3+i}{2} = 0 + \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \frac{5}{2} + \frac{6}{2} + \frac{7}{2}$$

Dále postupujeme substitucí $j = i + 3$ a s využitím vztahu (1).

$$\sum_{i=-3}^4 \frac{3+i}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=-3}^4 (3+i) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^7 j = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{2} (1+7) = 14.$$

1.0.2. Upravte na celočíselný zlomek $31, \overline{271}$.

Označíme si $a = 31, \overline{271}$. Protože se za desetinou čárkou opakují číslice 71, vynásobíme číslo a číslem 100, dostaneme $100a = 3127, \overline{171}$. Nyní odečteme čísla tak, aby se periodický rozvoj odečetl. Dostaneme

$$\begin{aligned} 100a - a &= 3127, \overline{171} - 31, \overline{271} \\ 99a &= 3095,9 \\ 990a &= 30959 \\ a &= \frac{30959}{990}. \end{aligned}$$

Proto $31, \overline{271} = \frac{30959}{990}$.

1.0.3. Vypočítejte, kolika způsoby lze na klasické šachovnici (8×8 polí) vybrat

a) trojici libovolných políček,

Jedná se o neuspořádaný výběr (nezáleží na pořadí, v jakém políčka vybereme) tří políček z 64.
 $C(64, 3) = \binom{64}{3} = \frac{64 \cdot 63 \cdot 62}{6} = 32 \cdot 21 \cdot 62 = 41664$.

b) trojici políček tak, že žádné dvě neleží v témže sloupci,

Nejprve vybereme tři sloupce z osmi. Jedná se o neuspořádaný výběr $C(8, 3)$, protože nezáleží který sloupec vybereme nejdřív a který později. Potom, podle principu nezávislých výběrů, v každém sloupci vybereme jedno políčko. Bude se jednat o upořádaný výběr s opakováním tří políček z osmi, protože v každém sloupci můžeme vybrat libovolné z osmi políček. $C(8, 3) \cdot V^*(8, 3) = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} \cdot 8^3 = 28672$.

c) trojici políček tak, že žádné dvě neleží v témže sloupci ani v téže řadě,

Opět nejprve vybereme tři sloupce z osmi, což je celkem $C(8, 3)$ možností. Potom, opět podle principu nezávislých výběrů, v každém sloupci vybereme jedno políčko. Bude se jednat o upořádaný výběr bez opakování tří políček z osmi, protože v každém řádku můžeme vybrat nejvýše jedno políčko. $C(8, 3) \cdot V(8, 3) = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 56^2 \cdot 6 = 18816$.

d) trojici políček, která jsou všechna téže barvy.

Máme dvě možnosti, jaké barvy budou políčka. Podle principu nezávislých výběrů můžeme pro každou barvu vybrat tři libovolná políčka z množiny 32 políček stejné barvy. $2 \cdot \binom{32}{3} = 2 \cdot \frac{32 \cdot 31 \cdot 30}{6} = 32 \cdot 31 \cdot 10 = 9920$.

1.0.4. Kolika způsoby je možné napsat číslo k jako součet n sčítanců 1 a 2? (počet sčítanců n je pevně dán) Předpokládáme, že rozlišujeme pořadí sčítanců.

Ze zadání plyne, že $\lceil \frac{k}{2} \rceil \leq n \leq k$ (neboli $n \leq k \leq 2n$). Hledáme počet celočíselných řešení rovnice

$$k = x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

Představíme si číslo k je součet jedniček. do každé z n proměnných x_1, \dots, x_n přiřadíme jednu jedničku a zbývajících $k - n$ jedniček rozdělíme do *různých* proměnných

$$\binom{n}{k-n}.$$

1.0.5. Kolika způsoby můžeme na šachovnici rozestavit všech 32 figur? Započítáme i ty možnosti, které nemohou nastat během regulérní hry (pěšec v první řadě, dva králové na sousedních polích, dva bílí střelci na černých polích, ...).

Protože se jedná o rozmístění *všech* figur na šachovnici, úlohu snadno vyřešíme pomocí permutací s opakováním (uspořádaný výběr, kde počet opakování každé figury je přesně dán). Na šachovnici je

- 1 bílý a 1 černý král,
- 1 bílá 1 černá královna,
- 2 bílé a 2 černé věže,
- 2 bílí a 2 černí střelci,
- 2 bílí a 2 černí jezdcí,
- 8 bílých a 8 černých pěšců

a 32 neobsazených polí. Šachovnici si můžeme představit jako posloupnost 64 polí (pole rozlišujeme podle toho, kde se na šachovnici nebo v posoupanosti nachází). Sestavíme všechna možná pořadí z 32 figur a 32 neobsazených polí. Nerozlišíme pořadí dvojice věží, jezdců ani střelců, nerozlišíme pořadí pěšců stejné barvy ani pořadí neobsazených polí. Pro počet různých rozestavení dostaneme vztah

$$\begin{aligned} P(1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 8, 8, 32) &= \frac{64!}{(1!)^4(2!)^6(8!)^232!} = \frac{64!}{2^6(40320)^232!} = \frac{64 \cdot 63 \cdot \dots \cdot 33}{2^6 40320^2} = \\ &= 4634726695587809641192045982323285670400000 \doteq 4.6347 \cdot 10^{42}. \end{aligned}$$

1.1 Čísla, operace, množiny

1.1.1. Vypočítejte následující sumy nebo produkty.

a) Vypočtete $\sum_{i=2}^5 \frac{1}{2^i}$. $\left[\frac{2}{j} \right]$

b) Vypočtete $\sum_{j=2}^5 \frac{1}{2^j}$. $\left[\frac{77}{120} \right]$

c) Vypočtete $\sum_{i=1}^4 i^3$. $[100]$

d) Vypočtete $\prod_{i=0}^n \frac{i}{i+1}$. $[0]$

e) Vypočtete $\prod_{i=1}^n \frac{i}{i+1}$. $\left[\frac{1}{n+1} \right]$

- 1.1.2. Najděte obecný vztah pro součet prvních k lichých čísel. $[k^2]$
- 1.1.3. Najděte obecný vztah pro součet prvních k sudých kladných čísel. $[k(k+1)]$
- 1.1.4. Ukažte, že aritmetický průměr libovolného sudého počtu po sobě jdoucích čísel není celé číslo. $[a-1+k+\frac{1}{2}]$
- 1.1.5. \heartsuit Zapište funkci součet prvků množiny $A = \{18, 25, 31, 67, 202, 301, 356\}$ pomocí sumy. $[\sum_{i \in A} i = \sum_{i \in \{18, 25, 31, 67, 202, 301, 356\}} i]$
- 1.1.6. \heartsuit Vypočítejte
- a) $[2.7]$. $[2]$
- b) $[-2.7]$. $[-3]$
- c) $[\frac{22}{10}]$. $[2]$
- d) $[-\frac{22}{10}]$. $[-3]$
- e) $[-\pi]$. $[-4]$
- f) $[-e]$. $[-3]$
- g) $P = [\frac{n+1}{n}]$, pro $n \in \mathbb{N}_0$ $[pro\ n = 0\ nemá\ smysl,\ pro\ n = 1\ vyjde\ P = 2,\ jinak\ P = 1]$
- 1.1.7.* Zapište funkci $\lfloor \cdot \rfloor$ pomocí $\lceil \cdot \rceil$. $[\lfloor x \rfloor = -\lceil -x \rceil]$
- 1.1.8.* Zapište funkci $\lceil \cdot \rceil$ pomocí $\lfloor \cdot \rfloor$. $[\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor]$
- 1.1.9. Upravte na celočíselný zlomek $1, \overline{23}$. $[\frac{122}{99}]$
- 1.1.10.* Ukažte, že $\lfloor 1.\overline{9} \rfloor = 2$ $[úpravou\ na\ celočíselný\ zlomek]$
- 1.1.11.* Ukažte, že $\lceil 1.\overline{9} \rceil = 2$ $[úpravou\ na\ celočíselný\ zlomek]$
- 1.1.12. Ukažte, že $\lceil \lfloor x \rfloor \rceil = \lceil x \rceil$ $[\lceil x \rceil\ je\ celé\ číslo]$
- 1.1.13. Jak vyjádříte klasické zaokrouhlení pomocí $\lfloor \cdot \rfloor$? $[\lfloor x + 0.5 \rfloor]$
- 1.1.14.* Jak vyjádříte klasické zaokrouhlení pomocí $\lceil \cdot \rceil$? $[\lceil -\lfloor -0.5 - x \rfloor \rceil]$
- 1.1.15. Nakreslete graf funkcí $\lfloor \sin x \rfloor$, $\lceil \cos x \rceil$ a $\lfloor \tan x \rfloor$.
- 1.1.16. Kolik prvků má $2^{\{1,2,3,4\}}$? Rozepište. $[16\ prvků,\ 2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}]$
- 1.1.17. Rozepište potenční množinu množiny $B = \{1, 2, 3\}$. $[2^B = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}]$
- 1.1.18. \heartsuit Máme dány množiny $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{\circ, \star\}$.
- a) Kolik prvků má sjednocení $A \cup B$? $[5]$
- b) Kolik prvků má průnik $A \cap B$? $[0]$
- c) Kolik prvků má rozdíl $A \setminus B$? $[3]$
- d) Kolik prvků má kartézský součin $A \times B$? $[6]$
- e) Kolik prvků má součin $A \times 2^B$? $[12]$
- f) Rozepište kartézský součin $A \times B$. $[A \times B = \{(1, \circ), (2, \circ), (3, \circ), (1, \star), (2, \star), (3, \star)\}]$
- g) Rozepište kartézský součin $B \times A$. $[B \times A = \{(\circ, 1), (\circ, 2), (\circ, 3), (\star, 1), (\star, 2), (\star, 3)\}]$
- h) Rozepište rozdíl $A \setminus B$. $[A \setminus B = A]$

- i) Rozepište rozdíl $B \setminus A$. [$B \setminus A = B$]
- j) Rozepište součin $A \times 2^B$. [$A \times 2^B = \{(1, \emptyset), (1, \{\circ\}), (1, \{\star\}), (1, \{\circ, \star\}), (2, \emptyset), (2, \{\circ\}), (2, \{\star\}), (2, \{\circ, \star\}), (3, \emptyset), (3, \{\circ\}), (3, \{\star\}), (3, \{\circ, \star\})\}$]

1.1.19. Určete doplněk množiny B v množině A , kde $A = \mathbb{R}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 2\}$. [$\overline{B} = (-2, 2) = \{x \in \mathbb{R} : |x - 2| < 0\}$]

1.1.20. Určete průnik a sjednocení množin $A = \mathbb{N}_0$, $B = \{x \in \mathbb{Z} : |x| \geq 3\}$. [$A \cap B = \{x \in \mathbb{N}_0 : x \geq 3\} = \mathbb{N}_0 \setminus \{0, 1, 2\}$, $A \cup B = \{x \in \mathbb{Z} : x \leq -3 \vee x \geq 0\} = \mathbb{Z} \setminus \{-2, -1\}$]

1.1.21. Určete rozdíly $A \setminus B$, $B \setminus A$, kde $A = \mathbb{N}_0$, $B = \{x \in \mathbb{Z} : |x| \geq -7\}$. [$A \setminus B = [0, 6]$, $B \setminus A = \{x \in \mathbb{Z} : x \leq -7\} = \{-7 - x : x \in \mathbb{N}_0\}$]

1.1.22.♥ Kdy platí

- a) $A \cap B = A$? [je-li $A \subseteq B$]
- b) $A \cup B = A$? [je-li $B \subseteq A$]
- c) $A \cup B = A \cap B$? [pro $A = B$]

1.1.23.* Dokažte matematickou indukcí, že $|2^A| = 2^{|A|}$. [Indukcí vzhledem k $|A|$.]

1.2 Výběry bez opakování

1.2.1. Máme prázdnou množinu \emptyset .

- a) Kolika způsoby můžeme seřadit prvky \emptyset do posloupnosti? [1]
- b) Kolika způsoby můžeme vybrat \emptyset z nějaké množiny? [1]
- c) Jak by se tyto počty změnil, kdyby $0! \neq 1$? [počet výběru stejný, nebylo by však možno použít vztahy pro kombinační čísla a faktoriál]

1.2.2.♥ Pro jaké hodnoty n a k je více k -prvkových podmnožin z n prvkové množiny než $(n - k)$ -prvkových podmnožin? [stejně pro všechny hodnoty n a k]

1.2.3. Pro jaké hodnoty n a k je více k -prvkových variací z n prvkové množiny než $(n - k)$ -prvkových variací? [pro $k > \frac{n}{2}$]

1.2.4. Vyjádřete bez kombinačních čísel $\binom{3n}{3}$ [$\frac{1}{2}n(3n - 1)(3n - 2)$]

1.2.5. Tenisový turnaj se hraje systémem každý s každým. Kolik se bude hrát zápasů, jestliže

- a) se turnaje zúčastní 8 hráčů? [28]
- b) se turnaje zúčastní 21 hráčů? [210]

1.2.6. Tenisového turnaje se účastní 8 hráčů. Kolik je různých pořadí na stupních vítězů? [336]

1.2.7. Upravte a porovnejte $\binom{6n}{3}$ a $\binom{3n}{6}$. [pro $n = 2, 3, 4$ je větší $\binom{6n}{3}$ a pro $n \geq 5$ je větší $\binom{3n}{6}$]

1.2.8.♥ Kolik způsoby se může postavit pět artistů na sebe? [$P(5) = 5! = 120$]

1.2.9. Kolika způsoby můžeme postavit šest artistů do pyramidy $3 + 2 + 1$, přičemž rozlišujeme pouze kdo stojí na zemi, kdo v první vrstvě a kdo nahoře? [$P(3, 2, 1) = \frac{720}{6 \cdot 2} = 60$]

1.2.10. Máme šest karet.

- a) Kolika způsoby můžeme vybrat dvě karty? [15]
- b) Kolika způsoby můžeme vybrat dvě karty, jestliže rozlišuje pořadí? [30]

1.2.11. Házíme dvakrát kostkou a výsledky zapisujeme.

- a) Kolik různých výsledků můžeme dostat, jestliže rozlišujeme pořadí hodů? [36]
 b) Kolik různých výsledků můžeme dostat, jestliže nerozlišujeme pořadí hodů? [21]

1.2.12. Máme n lidí. Jak velké skupinky vybírat, aby byl počet možností co největší? [$k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$]

1.2.13. Ukažte několika způsoby, že $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ [úpravou faktoriálů nebo kombinatoricky jako počet k -prvkových podmnožin]

1.2.14. Ukažte několika způsoby, že $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ [úpravou faktoriálů nebo kombinatoricky jako počet $k+1$ -prvkových podmnožin s jedním významným prvkem]

1.2.15.* Hokejový trenér má k dispozici 13 útočníků a 9 obránců. Kolika způsoby vybereme pětku (2 obránce + 3 útočníci), jestliže jeden konkrétní útočník může hrát i v obraně? [12276]

1.2.16. Vlajka má být sestavena ze tří různobarevných vodorovných pruhů. K dispozici jsou látky barvy bílé, červené, modré, zelené a žluté.

- a) Kolik různých vlajek můžeme sestavit? [60]
 b) Kolik z nich má modrý pruh? [36]
 c) Kolik jich má modrý pruh uprostřed? [12]
 d) Kolik jich nemá uprostřed červený pruh? [48]

1.2.17. Určete počet všech pěticiferných přirozených čísel, v jejichž dekadickém zápisu se každá z deseti číslic vyskytuje nejvýše jednou. Kolik z nich je menších než 50 000? [27216, 12096]

1.2.18. Na konferenci vystoupí šest přednášejících: A, B, C, D, E, F. Určete počet

- a) všech možných pořadí jejich vystoupení; [720]
 b) všech pořadí, v nichž vystoupí A po E; [360]
 c) všech pořadí, v nichž vystoupí A ihned po E. [120]

1.2.19. Kolika způsoby můžeme n lidí posadit

- a) do řady [n!]
 b) do řady, v níž je člověk A na kraji; [$2(n-1)!$]
 c) do řady tak, aby lidé A a B neseděli vedle sebe; [$(n-2) \cdot (n-1)!$]
 d) kolem kulatého stolu (záleží jen na tom, jakého má kdo souseda, nikoli na které židli sedí). [$(n-1)!$]

1.2.20. Kolika způsoby můžeme ze sedmi mužů a čtyř žen vybrat šestičlennou skupinu, tak aby v ní byly

- a) právě dvě ženy; [210]
 b) alespoň dvě ženy; [371]
 c) nejvýše dvě ženy; [301]

1.3 Výběry s opakováním

- 1.3.1. Kolik existuje anagramů slova MISSISSIPPI? [34650]
- 1.3.2. Kolik existuje anagramů slova MISSISSIPPI, které neobsahují IIII? [33810]
- 1.3.3. Kolik existuje anagramů slova MISSISSIPPI, které neobsahují II? [7350]
- 1.3.4. Kolik existuje anagramů slova ABRAKADABRA,
- a) všech? [83160]
 - b) které začínají a končí písmenem B? [1512]
 - c) které začínají nebo končí písmenem B? [28728]
 - d) které začínají a končí písmenem A? [15120]
 - e) které neobsahují BB? [68 040]
 - f) které neobsahují AA? [3780]
 - g) ve kterých písmeno K předchází písmeno D? [41580]
- 1.3.5. Na patnáct stožárů v řadě budou pověšeny vlajky pěti zemí, každá třikrát. Kolik existuje možností? [168168000]
- 1.3.6. Kolik je třiciferných čísel dělitelných
- a) dvěma? [450]
 - b) pěti? [180]
 - c) třemi? [300]
 - d) sedmi? [128]

1.4 Příklady k procvičení

- 1.4.1. Existuje taková posloupnost $(a_i)_{i=1}^n$, že $\sum_{i=1}^n a_i < \sum_{i=1}^n (-a_i)$? Pokud ano, uveďte příklad! [ano, $(a_i)_{i=1}^n = (-1)_{i=1}^n$ pro $n \in \mathbb{N}_0, n \geq 1$]
- 1.4.2. Existuje taková posloupnost $(a_i)_{i=1}^n$, že $\sum_{i=1}^n a_i > 0$ a $\prod_{i=1}^n a_i < 0$? Pokud ano, uveďte příklad! [ano, například $(a_1, a_2) = (-1, 3)$]
- 1.4.3. Existuje taková posloupnost *kladných* čísel $(a_i)_{i=1}^n$, že $\sum_{i=1}^n a_i > \prod_{i=1}^n a_i$? Pokud ano, uveďte příklad! [ano, například $(a_1, a_2) = (0.1, 0.2)$]
- 1.4.4. Kolika způsoby, je možné napsat 7 jako součet právě čtyř přirozených sčítanců? (dovolíme i nulové sčítance!) Předpokládáme, že rozlišujeme pořadí sčítanců. [120]
- 1.4.5. Kolika způsoby, je možné napsat 7 jako součet právě čtyř kladných přirozených sčítanců? Předpokládáme, že rozlišujeme pořadí sčítanců. [20]
- 1.4.6. Kolika způsoby, je možné napsat k jako součet n sčítanců? Předpokládáme, že rozlišujeme pořadí sčítanců. $\left[\binom{n+k-1}{k} \right]$
- 1.4.7. Kolika způsoby, je možné napsat k jako součet n kladných sčítanců? Předpokládáme, že rozlišujeme pořadí sčítanců. $\left[\binom{k-1}{n-1} \right]$
- 1.4.8. Máme 10 stejných figurek a čtyři různé barvy. Kolik existuje možností, jak všechny figurky obarvit? [286]

1.4.9. Máme 7 *různých* figurek a tři různé barvy. Kolik existuje možností, jak všechny figurky obarvit? [2187]

1.4.10. Máme 10 stejných figurek a čtyři různé barvy. Kolik existuje možností, jak některé figurky obarvit? [1001]

1.4.11. Máme 10 stejných figurek a čtyři různé barvy. Kolik existuje možností, jak všechny figurky obarvit, přičemž od každé barvy by měla být alespoň jedna figurka? [84]

1.4.12. Kolika způsoby můžeme posadit n lidí kolem kulatého stolu? Ve dvou rozdílných rozesazeních má některý člověk jiného souseda po levé nebo po pravé ruce. $[(n-1)!]$

1.4.13. Kolika způsoby můžeme posadit n manželských párů kolem kulatého stolu tak, aby manželé seděli vždy vedle sebe? Ve dvou rozdílných rozesazeních má některý člověk jiného souseda po levé nebo po pravé ruce. $[2^n(n-1)!]$

1.4.14. Dříve byly státní poznávací značky osobních automobilů tvořeny uspořádanou sedmicí, jejíž první tři členy byly písmena a další čtyři číslice. Kolik poznávacích značek bylo možno sestavit, jestliže pro první část značky bylo možno použít každé z 26 písmen (každá možnost povolena nebyla). [175760000]

1.4.15. Určete počet všech *nejvýše* k -prvkových podmnožin n -prvkové množiny. $[\sum_{i=0}^k \binom{n}{i}]$

1.4.16. Kolik je všech pěticiferných přirozených čísel? Kolik z nich je menších než 50 000? [90000, 40000]

1.4.17. Určete počet všech čtyřciferných přirozených čísel dělitelných 9, v jejichž dekadickém zápisu mohou být pouze číslice 0, 1, 2, 5, 7. [54]

1.4.18. V sáčku jsou červené, modré a zelené kuličky (kuličky téže barvy jsou nerozlišitelné). Určete, kolika způsoby lze vybrat pět kuliček, jestliže v sáčku je

a) aspoň pět kuliček od každé barvy; [21]

b) pět červených, čtyři modré a čtyři zelené kuličky. [19]

1.4.19. [♡] Je některá množina podmnožinou každé množiny? [ano, prázdná množina]

1.4.20. Čemu se rovná

a) $A \cap (B \cup C) = ?$ $[(A \cap B) \cup (A \cap C)]$

b) $A \cup (B \cap C) = ?$ $[(A \cup B) \cap (A \cup C)]$

c) $\overline{A \cap B} = ?$ (\bar{X} značí doplněk množiny X) $[\bar{A} \cup \bar{B}]$

1.4.21. Kdy je potenční množina 2^A

a) jednoprvková? [pouze pro $A = \emptyset$]

b) dvouprvková [pouze pro $|A| = 1$]

c) tříprvková [nikdy]

d) prázdná [nikdy]

1.4.22. Kdy je kartézský součin dvou množin $A \times B$ prázdný? [pouze když $A = \emptyset$ nebo $B = \emptyset$]

1.4.23. Je možno najít dvě takové množiny A, B , aby současně platilo $A \subset B$ i $A \in B$? [ano, například pro $A = \emptyset, B = \{\emptyset\}$]

1.4.24. Je možno najít dvě takové neprázdné množiny A, B , aby současně platilo $A \subset B$ i $A \in B$? [ano, například $A = \{a\}, B = \{a, \{a\}\}$]

1.4.25.* Kolika způsoby je možné napsat číslo k jako součet sčítanců 1 a 2? Předpokládáme, že rozlišujeme pořadí sčítanců. $[\sum_{n=\lceil \frac{k}{2} \rceil}^k \binom{n}{k-n}]$

1.4.26.* Jaký je počet všech trojúhelníků, z nichž žádné dva nejsou shodné a každá jejich strana má velikost vyjádřenou některým z čísel $n + 1, n + 2, n + 3, \dots, 2n$, kde n je přirozené číslo. $\left[\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)\right]$

1.4.27. Kolik přímek lze proložit 7 body, jestliže žádné tři body neleží v přímce? [21]

1.4.28. Kolik přímek lze proložit 7 body, jestliže právě tři body leží v přímce? [19]

1.4.29. Máme dány dvě mimoběžky. Na jedné je m bodů, na druhé n bodů. Kolik lze sestavit čtyřstěnů s vrcholy v daných bodech? $\left[\binom{m}{2} \cdot \binom{n}{2}\right]$

1.4.30. Kolika způsoby můžete seřadit v polici pěť učebnic angličtiny, čtyři učebnice matematiky a dvě učebnice českého jazyka, jestliže mají zůstat rozděleny do skupin po jednotlivých předmětech? [34560]

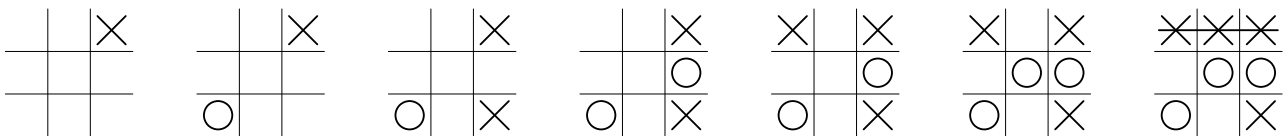
1.4.31. Na hlídku půjdou 4 vojáci z čety. Kolik vojáků má četa, jestliže výběr je možno provést 210 způsoby? [10 vojáků]

1.4.32. Palindrom je slovo, které se píše stejně jako pozpátku. Anglická abeceda má 26 písmen. Kolik existuje palindromů (i nesmyslných) délky n z písmen anglické abecedy? $\left[26^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}\right]$

1.4.33. Házíme třikrát kostkou. Kolik existuje takových možností, kdy v každém dalším hoďu padají větší a větší čísla? [20]

1.4.34. Byli jsme čtyři, seděli v baru a popíjeli. Trápilo nás špatné svědomí, že místo abychom v životě dělali něco pořádného, jsme závislí na alkoholu. Tu k nám přistoupil rozjařený barman a namíchal nám sedm různých drinků tak, aby každý dostal alespoň jeden. Kolika způsoby to mohl provést, jestliže rozlišujeme pořadí drinků, které jsme vypili. [100800]

1.4.35. Hra *Tic-tac-toe* je hra s tužkou a papírem pro dva hráče X a O. Hráči střídavě zapisují křížky a kolečka do čtvercové sítě políček 3×3 . Obvykle začíná X, jako na Obrázku 1.1. Hráč, který jako první umístí tři své symboly v jedné řadě, sloupci nebo diagonále, vyhraje.



Obrázek 1.1: Jedna hra *Tic-tac-toe*.

a) [♥]Kolik existuje různých rozmístění křížků a koleček (pět křížků a čtyři kolečka) na herním plánu? $\left[\binom{9}{4}\right]$

b) Kolik existuje různých rozmístění křížků a koleček na herním plánu, jestliže rozlišujeme pořadí tahů, křížky a kolečka se střídají? [362880]

c) Kolik existuje různých her *Tic-tac-toe*, kdy vyhraje X v pátém tahu? [1440]

d) Kolik existuje různých her *Tic-tac-toe*, kdy vyhraje O v šestém tahu? [5328]

e) Kolik existuje různých her *Tic-tac-toe*, kdy vyhraje X v sedmém tahu? [47952]

f) Kolik existuje různých her *Tic-tac-toe*, kdy vyhraje O v osmém tahu? [72576]

g)* Kolik existuje různých her *Tic-tac-toe*, kdy vyhraje X v devátém tahu? [81792]

h) Kolik existuje různých her *Tic-tac-toe*, které končí remízou? [46080]

i) Kolik existuje všech různých her *Tic-tac-toe*? [255168]

1.4.36. Dělové koule si dělostřelci stavěli do pyramid.

a) Pyramida buď měla čtvercovou základnu např. 4×4 koule, na ní dali vrstvu 3×3 koule, pak 2×2 koule a na vrchol 1 kouli. Tato pyramida měla celkem 30 koulí. Kolik celkem koulí by měla pyramida o základně $n \times n$ koulí? $\left[\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right]$

- b) Pyramida mohla mít založenou podstavu ve tvaru rovnoramenného trojúhelníku z 15 koulí, na ní byla další vrstva 10 koulí, další vrstva měla 6 koulí, pak 3 koule a na vrcholu byla 1 koule. Celkem měla taková pyramida 35 koulí. Kolik celkem koulí by měla pyramida o základně s hranou z n koulí?
 $\left[\frac{1}{6}n(n+1)(n+2) \right]$

1.4.37. Počítač Kecálek ve filmu Rumburak dostal za úkol najít všechny dvojice slouv složené z dvanácti písmen (mezeru nepočítáme). Kolik takových slov z 26 písmen existuje? $[11 \cdot 26^{12}]$

1.4.38. Zaklínadlo pro přesun do říše pohádek ve filmu Rumburak zní HUBERO KORORO. Kolik existuje anagramů tohoto zaklínadla složených ze dvou šestipísmenných slov? $[3\ 326\ 400]$

1.4.39. Zaklínadlo pro změnu počasí ve filmu Rumburak zní RABERA TAREGO. Kolik existuje anagramů tohoto zaklínadla složených ze dvou šestipísmenných slov? $[6\ 652\ 800]$

1.4.40. Na běžných dominových kostkách se vyskytují oka v počtu $0, 1, \dots, 6$. Každá dvojice počtu ok se s sadě vyskytuje na právě jedné kostce. Všechny kostky domina je možné položit do jediné řady tak, aby navazující kostky sdílely stejný počet ok. Nyní n -dominem budeme rozumět takovou sadu kostek, která obsahuje všechny dvojice počtů ok z rozsahu $0, 1, \dots, n$. Pro jaká přirozená čísla n lze všechny kostky n -domina položit do jediné řady? $[\text{pro sudá } n > 0]$

1.4.41. Máme čtverečkovanou síť $m \times n$ čtverečků. Kolik různých obdélníků najdeme v síti? $\left[\binom{m+1}{2} \cdot \binom{n+1}{2} \right]$

2 Diskrétní pravděpodobnost

Pokud nebude řečeno jinak, tak budeme předpokládat, že balíček obsahuje 32 karet, od sedmičky po eso ve čtyřech různých barvách (srdce, piky, káry a kříže). Klasická šestistěnná kostka je vyrobena tak, že součet ok na protilehlých stěnách je vždy sedm.

Všimněte si, že i v případě, kdy máme zamíchaný celý balíček karet, nemusíme někdy uvažovat šech 32! pořadí. Pokud se zajímáme o nějaký výběr, stačí pracovat s nějakým náhodným výběrem.

Řešené příklady

2.0.1. Hodíme současně sedmi kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že

a) padne součet 12?

Nejmenší možný součet je 7. Zbývá „rozdělit pět jednotek“ mezi sedm kostek. Jedná se o neuspořádaný výběr s možností opakování. Existuje celkem $C^*(7, 5) = \binom{11}{6} = \binom{11}{5} = 462$ takových možností. Protože uniformní pravděpodobnostní prostor má $V(6, 7) = 6^7$ prvků, hledaná pravděpodobnost je

$$P = \frac{\binom{11}{5}}{6^7} = \frac{462}{279936} = \frac{77}{46656}.$$

b) padne součet 13?

Nejmenší možný součet je 7. Zbývá „rozdělit šest jednotek“ mezi sedm kostek, nikoli však všechny do jedné přihrádky. Jedná se o neuspořádaný výběr s možností opakování. Odečteme počet takových možností, kdy všechny jednotky jsou přidány na jednu ze sedmi kostek. Existuje celkem $C^*(7, 6) - C(6, 1) = \binom{12}{6} - \binom{7}{1} = 924 - 7 = 917$ takových možností. Protože uniformní pravděpodobnostní prostor má $V(6, 7) = 6^7$ prvků, hledaná pravděpodobnost je

$$P = \frac{\binom{12}{6} - \binom{7}{1}}{6^7} = \frac{917}{279936}.$$

2.0.2. Hodíme dvěma kostkami. Jsou jev *padl součet 6* a jev *padl součin 8* nezávislé?

Zavedeme pravděpodobnostní prostor

$$\Omega = \{(a, b) : 1 \leq a, b, \leq 6\}.$$

Jev A , kdy padne součet 6, je $A = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$. Jev B , kdy padne součin 8, je $B = \{(2, 4), (4, 2)\}$. Protože se jedná o uniformní pravděpodobnostní prostor, máme

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5}{36}, \quad P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{2}{36}, \quad P(A \cap B) = P(B) = \frac{2}{36}.$$

Pokud jsou jevy nezávislé, musí podle definice platit

$$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B).$$

Dosažením dostaneme

$$\frac{5}{36} \cdot \frac{2}{36} \neq \frac{2}{36},$$

proto jevy A a B nejsou nezávislé.

Jiné řešení:

Vyjdeme z alternativní definice nezávislosti jevů, která říká, že A a B jsou nezávislé, jestliže pravděpodobnost jevu A nezávisí na tom, zda současně nastal nebo nenastal jev B :

$$\frac{P(A)}{P(\Omega)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Dosazením dostaneme

$$\frac{\frac{5}{36}}{1} \neq \frac{\frac{2}{36}}{\frac{2}{36}}$$

a proto jevy A , B nejsou nezávislé (jsou závislé).

2.0.3. V krabici je 5 koulí, 3 jsou bílé a 2 černé. Vytáhneme postupně dvě koule. Jaká je pravděpodobnost, že první je bílá a druhá černá?

2.0.4. Máme dva sáčky s kuličkami. V prvním sáčku jsou dvě kuličky s číslem 2 a tři kuličky s číslem 3. Ve druhém sáčku jsou 3 kuličky s číslem 4 a 2 kuličky s číslem 5. Taháme z obou sáčků po jedné kuličce. Jaký je průměrný součet tažených čísel?

Pro první sáček je $P(2) = \frac{2}{5}$ a $P(3) = \frac{3}{5}$. Pro druhý sáček je $P(4) = \frac{3}{5}$ a $P(5) = \frac{2}{5}$. Označíme X náhodnou veličinu udávající číslo tažené z prvního sáčku. Potom je

$$E(X) = 2 \cdot \frac{2}{5} + 3 \cdot \frac{3}{5} = \frac{4 + 9}{5} = \frac{13}{5}.$$

Označíme Y náhodnou veličinu udávající číslo tažené z druhého sáčku. Potom je

$$E(Y) = 4 \cdot \frac{3}{5} + 5 \cdot \frac{2}{5} = \frac{12 + 10}{5} = \frac{22}{5}.$$

Pro součet náhodných veličin platí

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = \frac{13}{5} + \frac{22}{5} = \frac{35}{5} = 7.$$

Průměrný součet tažených čísel je 7.

2.1 Motivační příklady

2.1.1. Na jednom Americkém televizním kanálu běžela *Montyho Show*. Soutěžící měli možnost získat automobil, jestliže si vyberou ze tří dveří ty dveře, za kterými se automobil nachází. Soutěžící si jedny dveře zvolil a potom Monty šel a otevřel některé ze dvou zbývajících dveří. Vždy otevřel ty dveře, za kterými nestál automobil, ale koza. Nyní měl soutěžící možnost změnit svou volbu a vybrat si libovolné ze dvou stále zavřených dveří. Předpokládáme, že pořadatelé vyberou na začátku náhodně jedny ze tří dveří, za které zaparkují automobil a za další dvě postaví kozy. Je lepší změnit svoji volbu, nebo zůstat u původního tipu a nebo je to jedno? S jakou pravděpodobností získá soutěžící výhru jestliže změní svoji volbu? Svou odpověď vysvětlete. [je lepší volbu změnit]

2.2 Konečný pravděpodobnostní prostor

2.2.1. Hodíme kostkou.

- a) Jaká je pravděpodobnost, že padne sudé číslo? [$\frac{1}{2}$]
- b) Jaká je pravděpodobnost, že padne prvočíslo? [$\frac{1}{2}$]
- c) Jaká je pravděpodobnost, že padne jednička nebo dvojka? [$\frac{1}{3}$]
- d) Jaká je pravděpodobnost, že součet horní a spodní stěny je 7? [1]
- e) Jaká je pravděpodobnost, že součet horní a spodní stěny je 3? [0]

2.2.2. Hodíme kostkou, která není spravedlivá, různá čísla padají s různou pravděpodobností. Čísla 1, 2 padnou s pravděpodobností $\frac{1}{5}$, čísla 4, 5 a 6 padnou s pravděpodobností $\frac{1}{7}$. Pravděpodobnost čísla 3 není udána.

- a) Jsou uvedené pravděpodobnosti konzistentní? [ano]

- b) S jakou pravděpodobností padne číslo 3? $[1 - 2/5 - 3/7 = \frac{6}{35}]$
- c) Jaká je pravděpodobnost, že padne sudé číslo? $[\frac{17}{35}]$
- d) Jaká je pravděpodobnost, že padne prvočíslo? $[\frac{18}{35}]$
- e) Jaká je pravděpodobnost, že padne jednička nebo dvojka? $[\frac{2}{5}]$
- f) Jaká je pravděpodobnost, že součet horní a spodní stěny je 7? $[1]$
- g) Jaká je pravděpodobnost, že součet horní a spodní stěny je 3? $[0]$

2.2.3. Hodíme dvěma kostkami.

- a) Je pravděpodobnější, že padne 5 a 6 nebo že padnou dvě 3? [pravděpodobnější jsou dvě různá čísla]
- b) Jaká je pravděpodobnost, že padne součin 12? $[\frac{1}{9}]$
- c) Jaká je pravděpodobnost, že padne součin 4? $[\frac{1}{12}]$
- d) Jaká je pravděpodobnost, že padne součin 14? $[0]$
- e) Jaká je pravděpodobnost, že padne součet 10? $[\frac{1}{12}]$

2.2.4. Sestavte funkci $P(n)$, která bude udávat pravděpodobnost, že při současném hodu $n \geq 1$ kostkami

- a) padne součet n . $[P(n) = \frac{1}{6^n}]$
- b) padne součet 3. $[P(n) = \frac{1}{6}$ pro $n = 1$, $P(n) = \frac{1}{18}$ pro $n = 2$, $P(n) = \frac{1}{216}$ pro $n = 3$ a $P(n) = 0$ pro $n \geq 4].$

2.2.5. Hodíme n -stěnnou kostkou očíslovanou $1, 2, \dots, n$. Jaká je pravděpodobnost, že padne liché číslo? $[\frac{\lceil \frac{n}{2} \rceil}{n}]$ 2.2.6. Hodíme n -stěnnou prvočíselnou kostkou (stěny jsou očíslované užitím prvních n prvočísel). Jaká je pravděpodobnost, že padne liché číslo? $[\frac{n-1}{n}]$

2.2.7. Máme zamíchaný balíček 32 hracích karet. Jaká je pravděpodobnost, že

- a) první karta v balíčku je eso? $[\frac{1}{8}]$
- b) třetí karta v balíčku je desítka? $[\frac{1}{8}]$
- c) třetí karta v balíčku je desítka, víme-li, že první dvě karty jsou dáma a král? $[\frac{2}{15}]$
- d) třetí karta v balíčku je desítka, víme-li, že první dvě karty jsou sedmička a desítka? $[\frac{1}{10}]$

2.2.8. Házíme dvěma kostkami: šestistěnnou a dvanáctistěnnou. Jaká je pravděpodobnost, že na obou padne stejné číslo? $[\frac{1}{12}]$ 2.2.9. Házíme třemi kostkami: čtyřstěnnou, šestistěnnou, desetistěnnou. Jaká je pravděpodobnost, že na všech padne stejné číslo? $[\frac{1}{60}]$

2.2.10. Házíme třemi šestistěnnými kostkami.

- a) Je lepší vsadit si, že nepadne žádná šestka, nebo že padne alespoň jedna šestka? [je lepší si vsadit, že nepadne žádná šestka]
- b) Jaká je pravděpodobnost, že padne právě jedna šestka? $[\frac{75}{216}]$
- c) Jaká je pravděpodobnost, že padnou alespoň dvě šestky? $[\frac{2}{27}]$

2.2.11. Házíme desetistěnnou kostkou.

- a) Hodíme jednou. Jaká je pravděpodobnost, že padne prvočíslo? $\left[\frac{2}{5}\right]$
- b) Házíme dvakrát. Jaká je pravděpodobnost, že padne lichý součet? $\left[\frac{1}{2}\right]$
- c) Házíme dvakrát. Jaká jsou pravděpodobnosti jednotlivých součtů? $\left[P(i) = \min\left\{\frac{i-1}{19}, \frac{21-i}{19}\right\}\right]$
pro $i \in [2, 20]$

2.2.12. Házíme čtyřikrát mincí. Jaká je pravděpodobnost, že

- a) padne čtyřikrát za sebou hlava? $\left[\frac{1}{16}\right]$
- b) padne nejprve hlava, potom orel, znovu orel a nakonec hlava? $\left[\frac{1}{16}\right]$
- c) padne dvakrát hlava a dvakrát orel (v libovolném pořadí)? $\left[\frac{3}{8}\right]$
- d) padne alespoň jednou hlava? $\left[\frac{15}{16}\right]$

2.2.13. Hodíme třemi stejnými kostkami.

- a) Jaká je pravděpodobnost, že padne 2, 4, 6? $\left[\frac{1}{36}\right]$
- b) Jaká je pravděpodobnost, že padne 2, 4, 4? $\left[\frac{1}{72}\right]$

2.2.14. Ve třídě je 25 žáků. S jakou pravděpodobností budou alespoň dva spolužáci slavit narozeniny ve stejný den? Kolik nejméně musí být ve třídě žáků, aby byla pravděpodobnost společného data narozenin dvou spolužáků větší než $\frac{1}{2}$? Předpokládejme, že nikdo z žáků nemá narozeniny 29. února (v přestupném roce). $\left[P_{25} = 0.5687, \text{ pro } 23 \text{ žáků}\right]$

2.3 Disjunktní a nezávislé jevy

2.3.1. Dva hráči hází kostkou. Jsou jejich hody nezávislé? I když někdo hodí tři šestky za sebou? [ano]

2.3.2. Mějme dva různé elementární jevy.

- a) Jsou různé elementární jevy vždy disjunktní? [ano]
- b) Jsou různé elementární jevy vždy nezávislé? [ne]

2.3.3. Mějme dva disjunktní jevy.

- a) Mohou být dva disjunktní jevy nezávislé? [ano]
- b) Je prázdný jev nezávislý s libovolným jevem? [ano]

2.3.4. Udejte příklad dvou různých jevů, které nejsou disjunktní. [Například při hození kostkou: jev padlo liché číslo a jev padlo prvočíslo.]

2.3.5. Hodíme dvěma kostkami.

- a) Jsou jevy A : *padl součet 4* a B : *padl součin 4* disjunktní? [ne]
- b) Jsou jevy A : *padl součet 6* a B : *padl součin 6* disjunktní? [ano]

2.3.6. Mějme tři jevy A, B, C . Víme, že jevy A a B jsou nezávislé, jevy B a C jsou nezávislé a jevy A a C jsou nezávislé.

- a) Jsou jevy A, B, C nezávislé jako trojice? [ne]
- b) Mohou být ve speciálním případě nezávislé? Kdy? [ano, je-li alespoň jeden z jevů prázdný]

2.3.7. Máme zamíchaný balíček 32 karet.

- a) Rozdáme dvěma hráčům po třech kartách. Jsou výběry karet nezávislé? [ne]
- b) Dáme prvnímu hráči tři karty a zbylé karty zamícháme. Potom druhý hráč dostane také tři karty. Jsou výběry karet nezávislé? [ne]
- c) Dáme prvnímu hráči tři karty. On si je zapamatuje a vrátí do balíčku. Potom karty zamícháme a druhý hráč dostane tři karty. Jsou výběry karet nezávislé? [ano]
- d) Hráč dostane pět karet, potom karty vrátí a po zamíchání dostane znovu pět karet. Jaká je pravděpodobnost, že měl pokaždé fullhouse (3+2 stejné hodnoty)? $\left[\frac{36}{808201}\right]$
- e) Hráč dostane pět karet, schová si je dostane dalších pět karet. Jaká je pravděpodobnost, že měl královský poker (4 esa a další karta stejné hodnoty) dvakrát za sebou? [0]

2.3.8. Hodíme dvěma kostkami, jednou zelenou a jednou červenou. Jsou jevy A : „na obou padne stejné číslo“ a B : „na zelené kostce padne šestka“ nezávislé? [ano]

2.3.9. Mějme pravděpodobnostní prostor $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ s uniformní pravděpodobností (házíme osmistěnnou kostkou). Jsou jevy $A = \{1, 2, 3, 4\}$ a $B = \{5, 6, 7, 8\}$ nezávislé? [jevy A a B nejsou nezávislé]

2.3.10. Mějme pravděpodobnostní prostor $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ s uniformní pravděpodobností (házíme osmistěnnou kostkou). Jsou jevy $A = \{1, 2, 3, 4\}$ (padlo malé číslo) a $B = \{1, 3, 5, 7\}$ (padlo liché číslo) nezávislé? [jevy A a B jsou nezávislé]

2.3.11. Mějme pravděpodobnostní prostor $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ s uniformní pravděpodobností (házíme šestistěnnou kostkou). Jsou jevy $A = \{1, 2, 3\}$ (padlo malé číslo) a $B = \{1, 3, 5\}$ (padlo liché číslo) nezávislé? [jevy A a B nejsou nezávislé]

2.3.12. Házíme n -stěnnou kostkou. Nadefinujeme jev A , že padne malé číslo $1, 2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ a jev B , že padne liché číslo. Pro jaká n jsou jevy A a B nezávislé? [jevy jsou nezávislé jen pro $n \equiv 0 \pmod{4}$]

2.4 Podmíněná pravděpodobnost

2.4.1. Jaká je pravděpodobnost při hození klasickou kostkou, že padne číslo větší než 3 víme-li, že padlo liché číslo. $\left[\frac{1}{3}\right]$

2.4.2. V krabici je 5 koulí, 3 jsou bílé a 2 černé. Vytáhneme postupně dvě koule. Počítejme: Všechny možnosti, jak mohou dopadnout losování jsou: bílá-bílá, bílá-černá, černá-černá a černá-bílá. Pouze jedna z nich je příznivá: bílá-černá. Dostaneme pravděpodobnost $P = \frac{1}{4}$. Co je špatně? Vysvětlete! [nelze užít vztah platný pro uniformní pravděpodobnostní prostor]

2.4.3. V krabici je 5 koulí, 3 jsou bílé a 2 černé. Vytáhneme postupně dvě koule. Počítejme: Všech možností, jak může dopadnout losování je $\binom{5}{2} = 10$. Příznivé jsou ty, kdy vybereme nejprve bílou a potom černou: Dostaneme pravděpodobnost $P = \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1}}{|\Omega|} = \frac{3 \cdot 2}{10} = \frac{3}{5}$. Co je špatně? Vysvětlete! [rozlišit neuspořádaný a uspořádaný výběr]

2.4.4. Z celkové produkce závodu jsou 4% zmetků. Z dobrých výrobků je 75% standardních. Určete pravděpodobnost, že náhodně vybraný výrobek je standardní. [72%]

2.5 Střední hodnota

2.5.1. Házíme kostkou, která není spravedlivá, různá čísla padají s různou pravděpodobností. Čísla 1, 2 padnou s pravděpodobností $\frac{1}{5}$, čísla 4, 5 a 6 padnou s pravděpodobností $\frac{1}{7}$. Pravděpodobnost čísla 3 není udána. Jaký je střední počet počtu ok, která na kostce padnou? $[E(X) = \frac{114}{35}]$

2.5.2. Jaká je střední hodnota počtu šestek, které padnou při hození pěti kostkami? $\left[\frac{5}{6}\right]$

2.5.3. Máme šestistěnnou kostku.

- a) Jaký je průměrný součet čísel na horní a spodní stěně kostky vyrobené tak, že 1 je naproti 6, 2 naproti 5 a 3 naproti 4? [7]
- b) Jaký je průměrný součet čísel na horní a spodní stěně kostky vyrobené tak, že 1 je naproti 2, 3 naproti 5 a 4 naproti 6? [7]

2.5.4. Uměli byste rozmístit čísla 1 až 6 na poctivou kostku tak, aby střední hodnota součtu horní a spodní stěny byla jiná než 7? [pro poctivou kostku takové rozdělení není možné]

2.5.5. Najděte vhodná čísla a_1, a_2, \dots, a_6 a rozmístěte je na poctivou kostku tak, aby střední hodnota součtu horní a spodní stěny byla jiná než průměr hodnot a_1 až a_6 vynásobený dvěma. [pro poctivou kostku takové rozdělení není možné]

2.5.6. Najděte vhodná celá čísla a_1, a_2, \dots, a_6 a rozmístěte je na poctivou kostku tak, aby střední hodnota součinu horní a spodní stěny byla jiná než průměr hodnot a_1 až a_6 umocněný na druhou. [například klasická kostka]

2.5.7.* Najděte vhodná různá celá čísla a_1, a_2, \dots, a_6 a rozmístěte je na poctivou kostku tak, aby střední hodnota součinu horní a spodní stěny byla stejná jako průměr hodnot a_1 až a_6 umocněný na druhou. [například kostka s dvojicemi protilehlých stěn 1 a 6, -1 a -6 , 0 a 12]

2.5.8. Kolik je třeba průměrně hodů mincí, aby vyšly dva stejné výsledky? [$\frac{5}{2}$]

2.5.9.* Kolik je třeba průměrně hodů mincí, kde hlava má pravděpodobnost p (p nemusí být $\frac{1}{2}$), aby vyšly dva stejné výsledky? [$2(1 + p - p^2)$]

2.5.10.* Kolik je třeba průměrně hodů poctivou mincí, aby padla první hlava? [2]

2.5.11.* Kolik je třeba průměrně hodů mincí, kde hlava má pravděpodobnost p (p nemusí být $\frac{1}{2}$), aby padla první hlava? [$\frac{1}{p}$]

2.5.12. Jaká je střední hodnota počtu políček, o které se vaše figurka přesune v jednom kole hry „Člověče, nezlob se!“, pokud se

a) po třetí šestce za sebou již znovu nehází? [$\frac{301}{72}$]

b) opakovaně hází dokud padají šestky? [$\frac{21}{5}$]

2.5.13. Při objednávání obědů u terminálu vedle jídelny nevíte, která jídla jsou k dispozici a která ne. Jestliže tři z pěti jídel již není možné objednat. Jaký je střední počet pokusů než si objednáme jídlo, které se ještě vaří? [2]

2.5.14. Při objednávání obědů u terminálu vedle jídelny nevíte, která jídla jsou k dispozici a která ne. Je-li v menu výběr z n jídel a jestliže $k \leq n$ je počet jídel z pěti, která je možno objednat, jaký je střední počet pokusů než si objednáme jídlo, které se ještě vaří?

$$\left[E(X) = \frac{(n-k)!}{n!} \sum_{i=1}^{n-k} \frac{(n-i)!}{(n-i-k+1)!} \cdot i \right]$$

2.6 Náhodné výběry

2.6.1. Máme sedmiprvkovou množinu A .

a) S jakou pravděpodobností vybereme náhodně jednu konkrétní pětiprvkovou množinu mezi pětiprvkovými podmnožinami? [$\frac{1}{21}$]

b) S jakou pravděpodobností vybereme náhodně jednu konkrétní pětiprvkovou množinu mezi všemi podmnožinami? [$\frac{1}{128}$]

c) S jakou pravděpodobností vybereme náhodně některou pětiprvkovou množinu mezi všemi podmnožinami? [$\frac{21}{128}$]

- 2.6.2. S jakou pravděpodobností vybereme náhodně jednu k -prvkovou podmnožinu n -prvkové množiny?
 $\left[\frac{1}{\binom{n}{k}} \right]$
- 2.6.3. S jakou pravděpodobností vybereme náhodně k -prvkovou podmnožinu mezi všemi podmnožinami n -prvkové množiny?
 $\left[\frac{\binom{n}{k}}{2^n} \right]$
- 2.6.4. Jaká je pravděpodobnost, že náhodná podmnožina n -prvkové množiny obsahuje jeden pevně zvolený prvek?
 $\left[\frac{1}{2} \right]$
- 2.6.5. Máme náhodnou posloupnost čtyř bitů.
- a) S jakou pravděpodobností se jedná o „0011“?
 $\left[\frac{1}{16} \right]$
- b) S jakou pravděpodobností obsahuje dvě jedničky a dvě nuly?
 $\left[\frac{3}{8} \right]$
- 2.6.6. S jakou pravděpodobností obsahuje více jedniček než nul?
 $\left[\frac{5}{16} \right]$
- 2.6.7. Máme náhodnou permutaci pětiprvkové množiny.
- a) Jakou pravděpodobnost má jedna náhodná permutace?
 $\left[\frac{1}{120} \right]$
- b) Jakou pravděpodobnost má permutace, kde číslo 1 následuje bezprostředně za číslem 2?
 $\left[\frac{1}{5} \right]$
- c) Jakou pravděpodobnost má permutace, kde číslo 1 následuje za číslem 2?
 $\left[\frac{1}{2} \right]$
- d) Jakou pravděpodobnost má permutace, kde čísla 1, 2 jsou vedle sebe?
 $\left[\frac{2}{5} \right]$
- ## 2.7 Příklady k procvičení
- 2.7.1. Házíme opakovaně poctivou mincí.
- a) Jaká je pravděpodobnost, že při šesti hodech mincí padne hlava i orel stejněkrát?
 $\left[\frac{5}{16} \right]$
- b) Jaká je pravděpodobnost, že při n hodech mincí padne hlava i orel stejněkrát?
 $\left[\frac{\binom{n}{\frac{n}{2}}}{2^n} \right]$
- 2.7.2. Máme zamíchaný balíček 32 karet. Vytáhneme postupně dvě karty. Jaká je pravděpodobnost, že
- a) obě karty budou esa?
 $\left[\frac{3}{248} \right]$
- b) obě karty budou devítka a desítka (v tomto pořadí)?
 $\left[\frac{1}{62} \right]$
- c) obě karty budou devítka a desítka (v libovolném pořadí)?
 $\left[\frac{1}{31} \right]$
- d) ani jedna karta nebude král?
 $\left[\frac{189}{248} \right]$
- e) obě karty budou stejné barvy?
 $\left[\frac{7}{31} \right]$
- 2.7.3. Kuchař upustil omylem do polévky dva různé prsteny. Všechna polévka byla rozdělena mezi 25 hostů, z toho 8 žen. Jaká je pravděpodobnost, že
- a) oba prsteny dostane jedna osoba?
 $\left[\frac{1}{25} \right]$
- b) prsteny budou mít v polévce dva muži?
 $\left[\frac{272}{625} \right]$
- c) prsteny budou mít v polévce jeden muž a jedna žena?
 $\left[\frac{136}{625} \right]$
- d) prsteny budou mít v polévce dvě ženy?
 $\left[\frac{56}{625} \right]$
- e) Jak se pravděpodobnosti změní, jestliže prsteny budou stejné? [pravděpodobnosti se nezmění]

2.7.4. Hodíme dvěma šestistěnnými kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že větší číslo bude m ? $\left[\frac{2m-1}{36} \right]$

2.7.5. V šuplíku máme rozházených po 6 ponožkách od každé z barev černá, šedá a bílá. Kolik ponožek musíme průměrně vytáhnout (postupně a poslepu), abychom dostali jednobarevný pár? Nerozlišujeme levou a pravou ponožku. $\left[\frac{101}{34} \right]$

2.7.6. V šuplíku máme rozházených po p ponožkách od každé z b barev. Kolik ponožek musíme průměrně vytáhnout (postupně a poslepu), abychom dostali jednobarevný pár? Nerozlišujeme levou a pravou ponožku.

2.7.7.* Magnet má dva póly, které se přitahují. Barevné dětské magnetky mají na sobě umělohmotnou čepičku. Čepička zakrývá celý jeden pól magnetu, proto přitahovat se mohou pouze jedním pólem. Magnetky jsou balené po 40 kusech, 10 od každé ze čtyř barev. Předpokládejme, že zakryté póly těchto magnetků jsou zvoleny náhodně s pravděpodobností $\frac{1}{2}$. Jaká je pravděpodobnost, že těchto 40 magnetků lze pospojovat do 5×4 stejnobarevných dvojic tak, že každá dvojice se navzájem přitahuje opačnými nezakrytými póly?

$$\left[\left(\frac{\binom{10}{5}}{2^{10}} \right)^4 \right]$$

2.7.8. Hra *Tic-tac-toe* je hra s tužkou a papírem pro dva hráče X a O, kteří střídavě zapisují křížky a kolečka do čtvercové sítě políček 3×3 , viz Cvičení 1.4.35. Při řešení využijte výsledku Cvičení 1.4.35.

a) Jaká je střední hodnota počtu tahů do vítězství, jestliže remízy nebudeme uvažovat (předpokládáme, že remíza nemůže nastat). Předpokládejme, že každá hra má stejnou pravděpodobnost (což nemusí být pravda). $\left[\frac{11747}{1452} \right]$

b)* Jaká je střední hodnota počtu tahů do prvního vítězství, jestliže remízy započítáme jako 9 tahů a další hra pokračuje dalším (desátým) tahem. Předpokládejme, že každá hra má stejnou pravděpodobnost (což nemusí být pravda). $\left[\frac{14627}{1452} \right]$

2.7.9. Krabice dřevěných dětských vláček obsahuje jednu lokomotivu a tři vagónky. Vagónky a lokomotiva se spojují pomocí magnetů. Lokomotiva má jeden magnet a každý vagónek má magnety dva – na každém konci jeden. Póly magnetů jsou otočeny tak, aby bylo možno zapojit do vláčku všechny vagónky a to v libovolném pořadí.

a) S jakou pravděpodobností by se dal sestavit vláček s vagónky v libovolném pořadí, pokud by v továrně orientaci magnetů přiřazovali náhodně? $\left[\frac{3}{16} \right]$

b)* Uměli byste předchozí úlohu zobecnit pro n vagónků? $\left[\frac{3}{2^{n+1}} \right]$

c) S jakou pravděpodobností by se dal sestavit vláček s vagónky v alespoň jednom pořadí, pokud by v továrně orientaci magnetů přiřazovali náhodně? $\left[\frac{3}{4} \right]$

d)* Uměli byste předchozí úlohu zobecnit pro n vagónků?

2.7.10. V balíčku je 8 karet, dvě od každé barvy. Balíček pečlivě rozmícháme. S jakou pravděpodobností dostaneme takové rozmíchání, ve kterém nejsou žádné dvě karty stejné barvy vedle sebe? $\left[\frac{13824}{40320} = \frac{12}{35} \right]$

2.7.11. Jaký je střední počet hodů šestistěnnou kostkou než padne každá stěna alespoň jednou?

2.7.12. Čtyřicet sportovců bude rozděleno na čtyři stejně početné skupiny. Jaká je pravděpodobnost, že dva konkrétní sportovci A a B budou ve stejné skupině? $\left[\frac{3}{13} \right]$

2.7.13. S jakou pravděpodobností bude přijato binární slovo délky 8 znaků, které obsahuje čtyři nuly, jestliže zdroj signálu generuje 7krát více nul než jedniček? $\left[\frac{84035}{8388608} \right]$

3 Kapitola 3 – Důkazy v diskrétní matematice

Řešené příklady

3.0.1. Kolik různých binárních operátorů existuje (může existovat)? Sestavte jejich pravdivostní tabulky. Podívejme se na operátor $A \oplus B$. Jsou čtyři různé kombinace pravdivostních hodnot proměnných A a B . Pro každou existují dvě možnosti, jaká bude výsledná logická hodnota operátoru \oplus . Dostáváme tak celkem $V(2, 4) = 2^4 = 16$ různých logických binárních operátorů.

Označíme si je $\oplus_1, \oplus_2, \dots, \oplus_{16}$. Jejich tabulky pravdivostních hodnot jsou

A	B	$A \oplus_1 B$	$A \oplus_2 B$	$A \oplus_3 B$	$A \oplus_4 B$	$A \oplus_5 B$	$A \oplus_6 B$	$A \oplus_7 B$	$A \oplus_8 B$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Tabulka 3.1: Tabulky pravdivostních hodnot operátorů \oplus_1 až \oplus_8 .

A	B	$A \oplus_9 B$	$A \oplus_{10} B$	$A \oplus_{11} B$	$A \oplus_{12} B$	$A \oplus_{13} B$	$A \oplus_{14} B$	$A \oplus_{15} B$	$A \oplus_{16} B$
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Tabulka 3.2: Tabulky pravdivostních hodnot operátorů \oplus_9 až \oplus_{16} .

3.0.2. Dokažte že pro $\forall a \in \mathbb{Z}$, je-li a^2 liché, potom a je liché.

Tvrzení dokážeme nepřímou. Místo původního výroku dokážeme jeho obměnu $\forall a \in \mathbb{Z}$, je-li a sudé, potom a^2 je sudé. Víme, že existuje $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $a = 2k$. Potom $a^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$. Vidíme, že a^2 je opět sudé, neboť existuje $k' = 2k^2$ tak, že $a^2 = 2k'$.

3.0.3. Ukažte, že každé poštovné větší než 12 Kč může být zapláceno užitím známek v hodnotě 4 Kč a 5 Kč.

Ukážeme matematickou indukci vzhledem k ceně c .

Základ indukce: Nejprve ukážeme, že je možno vyplatit částky

- 12 Kč jako $4 + 4 + 4 + 4 = 12$
- 13 Kč jako $5 + 4 + 4 + 4 = 13$
- 14 Kč jako $5 + 5 + 4 + 4 = 14$
- 15 Kč jako $5 + 5 + 5 + 4 = 15$

Indukční krok: Ukážeme, že když jde zaplatit poštovné v ceně c , tak jde zaplatit také poštovné o hodnotě $c + 4$. Stačí nalepit o jednu čtyřkorunovou známku navíc.

3.0.4. Dva zloději ukradli náhrdelník. Náhrdelník je sestaven z drahokamů (rubínů a diamantů) po řadě spojených řetízkem. Svůj lup by si chtěli rozdělit tak, aby každý dostal stejný počet diamantů i rubínů. Ukažte, že pokud náhrdelník obsahuje sudý počet diamantů ($2d$) a sudý počet rubínů $2r$, je vždy možné rozdělit náhrdelník na dvě části tak, aby každá část obsahovala polovinu rubínů i polovinu diamantů.

Tvrzení ukážeme přímo. Navíc důkaz bude konstruktivní a poskytne návod, jak místo pro dělení najít.

Náhrdelník rozložíme na stůl tak, abychom mohli určovat směr po a proti směru hodinových ručiček. Najdeme takové dva články c_1 a c_2 na náhrdelníku řetízkem (vždy vedle diamantu, měřeno proti směru hodinových ručiček), že při rozdělení by v jednom i druhém dílu byl stejný počet diamantů $d_1 = d_2$. Takové rozdělení jistě existuje, neboť náhrdelník obsahuje sudý počet diamantů. Podíváme se, jaký je počet rubínů r_1 a r_2 v obou částech. Je-li $r_1 = r_2$, tak je tvrzení dokázáno. Jinak můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že rubínů je více po směru od c_1 a že platí $r_1 > r_2$ (obě jsou sudá nebo obě lichá čísla).

Nyní rozlišíme následující případy:

1. drahokam po směru od c_1 (resp. proti směru od c_2) je rubín

posuneme místo dělení c_1 o jeden drahokam (rubín) po směru (resp. c_2 proti směru) na místo c'_1 (resp. c'_2); nyní je $r'_1 = r_1 - 1$ a $r'_2 = r_2 + 1$

2. drahokam po směru od c_1 i proti směru od c_2 diamant

posuneme místo dělení c_1 o jeden drahokam (diamant) po směru (resp. c_2 **po směru**) na místo c'_1 (resp. c'_2); jistě zůstane $d'_1 = d_1 = d_2 = d'_2$

Všimneme si, že při opakování postupu se v případě prvním rozdíl $r_1 - r_2$ vždy sníží o nejmenší možnou hodnotu 2, zatímco v druhém případě se zůstane rozdíl $r_1 - r_2$ stejný nebo se zvýší (o nějakou sudou hodnotu).

Postup je jistě konečný, neboť náhrdelník obsahuje konečný počet drahokamů a navíc se určitě podaří rozdělit náhrdelník na dvě stejně hodnotné části dříve, než se místo dělení c'_1 dostane na původní místo c_2 , neboť potom by muselo být $r'_1 - r'_2 = -(r_1 - r_2)$ záporné. Při dělení snižujeme rozdíl pouze v případě prvním a to vždy o nejmenší možnou hodnotu, proto získáme všechna možná dělení s rozdílem mezi hodnotou $r_1 - r_2$ a hodnotou $-(r_1 - r_2)$.

Jiné řešení:

Náhrdelník, který obsahuje $2d$ diamantů a $2r$ rubínů rozložíme na stůl tak, abychom mohli určovat směr po a proti směru hodinových ručiček. Najdeme na náhrdelníku takové dva protilehlé články řetízku A a B , že při rozdělení by v jedné i druhé části byl stejný počet drahokamů: $(2d + 2r)/2 = d + r$.

Pokud obsahuje jedna část více diamantů $d + x$ (a méně rubínů $d - x$) než druhá tak budeme posouvat místa dělení o jeden drahokam ve směru hodinových ručiček. V každém kroku se vymění jedna dvojice drahokamů. Jsou-li vyměněné drahokamy stejné, nezmění se počty diamantů ani rubínů v každé části. Jsou-li vyměněné drahokamy různé, tak se počet diamantů v jedné části o 1 zvýší (na $d + x + 1$) nebo o 1 sníží (na $d + x - 1$).

Postup je jistě konečný, neboť náhrdelník obsahuje konečný počet drahokamů a navíc se určitě podaří rozdělit náhrdelník na dvě stejně hodnotné části dříve, než se místa dělení posunou o polovinu obvodu $(d + r)$, neboť potom by měla jedna část tolik diamantů, jako původně měla druhá část: $d - x$. V každém kroku se celočíselná hodnota $d + x$ mění o 1, proto dříve než otočíme o $d + r$ drahokamů musí nastat $x = 0$. Jakmile mají části v některém kroku stejný počet diamantů, musí mít i stejný počet rubínů, neboť obě mají stejný počet drahokamů.

3.1 Motivační příklady

3.1.1. Tabulka čokolády se skládá z $m \times n$ čtverečků. Chceme ji nalámat na jednotlivé čtverečky. Najděte a dokažte jaký je *nejmenší* počet zlomů, abychom čokoládu $m \times n$ rozdělili na jednotlivé čtverečky? [přímo nebo silnou indukcí]

3.1.2. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí, že n přímek rozdělí rovinu na nejvýše $\frac{1}{2}n(n + 1) + 1$ oblastí. [indukcí vzhledem k n]

3.2 Základní logické symboly

3.2.1. Sestavte negaci výroku „Všechna auta jsou červená.“ [alespoň jedno auto není červené]

3.2.2. Sestavte negaci výroku „Každý student u zkoušky uspěje.“ [alespoň jeden student u zkoušky neuspěje]

3.2.3. Sestavte negaci výroku „Jednou jsem vyhrál ve sportce.“ [ve sportce jsem vyhrál alespoň dvakrát nebo nikdy]

3.2.4. Sestavte negaci výroku „Kdo neskáče, není Čech.“ [kdo neskáče, může být i Čech]

3.2.5. Sestavte negaci výroku $\forall n : 2^n > n^2$. $[\exists n : 2^n \leq n^2]$

3.2.6. Sestavte negaci výroku $\forall x > 1 : x^2 > x$. $[\exists x > 1 : x^2 \leq x]$

3.2.7. Sestavte negaci výroku $\exists x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \ln|x| < 0$. $[\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \ln|x| \geq 0]$

3.2.8. Pokud je to možné, запиšte všechny možné různé binární operátory užitím negace, konjunkce a disjunkce.

3.2.9. Pokud je to možné, запиšte všechny možné různé binární operátory užitím negace, konjunkce a XOR.

3.2.10. Pokud je to možné, запиšte všechny možné různé binární operátory užitím NAND a XOR.

3.2.11. Víme, že výrok A a jeho negace $\neg A$ nemohou být současně pravdivé nebo současně nepravdivé. Označíme A výrok „Tato věta neobsahuje zápor,“ který je pravdivý. Avšak jeho negace „Tato věta obsahuje zápor“ je také nepravdivá. Vysvětlete! [A ani $\neg A$ nejsou výroky, proč?]

3.2.12.* Najděte podobné věty jako v předchozím příkladu tak, aby obě tvrzení A a $\neg A$ byly pravdivé. [řešení existují, najdete je?]

3.3 Pojem matematického důkazu

Celé číslo a se nazývá sudé, existuje-li $k \in \mathbb{Z}$ tak, aby $a = 2k$. V opačném případě se číslo a nazývá liché.

3.3.1. Dokažte že pro $\forall a \in \mathbb{Z}$, je-li a liché, potom a^2 je liché. [přímo]

3.3.2. Najděte chybu v následujícím důkazu. Ukážeme, že 13 je prvočíslo. Předpokládejme, že všechna lichá čísla jsou prvočísla. Protože $13 = 2 \cdot 6 + 1$ je liché číslo, tak 13 je prvočíslo. [implikace z nepravdivého výroku není důkaz!]

3.3.3. Najděte chybu v následujícím důkazu. Mějme výrok V , který říká $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > x$. Protože jistě $0 > -1$, tak přičtením x dostaneme $x > x - 1$. Nyní z nerovností $x^2 > x > x - 1$ dostaneme $x^2 > x - 1$. Nerovnice $x^2 - x + 1 > 0$ má řešení pro všechna reálná čísla (vyřešte si podrobně sami), proto náš předpoklad je pravdivý pro všechna reálná čísla. [implikace z nepravdivého výroku není důkaz!]

3.3.4. Najděte chybu v následujícím důkazu. Mějme celé číslo a . Jistě platí $a = a$. Umocněním předpokladu $a = a$ dostaneme $a^2 = a^2$, neboli $0 = a^2 - a^2 = (a + a)(a - a)$. Nyní $0 \cdot (a - a) = 0 = (a + a)(a - a)$ a zkrácením výrazem $a - a$ dostaneme $a + a = 0$, tj. $a = -a$. [neekvivalentní úprava]

3.3.5. Najděte chybu v následujícím důkazu. Mějme celá čísla a, b . Pokud platí $a = b$, tak umocněním dostaneme $a^2 = b^2$, neboli $0 = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. Nyní zkrácením výrazem $a - b$ dostaneme $0 = a + b$, tj. $a = -b$. [neekvivalentní úprava]

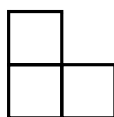
3.4 Princip matematické indukce

3.4.1. Dokažte matematickou indukcí, že součet prvních n lichých čísel je n^2 . [indukcí vzhledem k n]

3.4.2. Dokažte kombinatoricky (jinak než přímo nebo indukcí), že součet prvních n lichých čísel je n^2 . [rozkrájením šachovnice]

3.4.3. Dokažte přímo (jinak než indukcí nebo kombinatoricky), že součet prvních n lichých čísel je n^2 . [součtem posloupnosti]

3.4.4. Máme šachovnici o rozměrech $2^n \times 2^n$ políček ($n \geq 1$), na které chybí jedno (libovolné) políčko. K dispozici máme neomezený počet dílků, z nich každý sestává ze tří políček šachovnice ve tvaru L. Ukažte, že šachovnici je možno pokrýt dílky tak, aby se žádné dílky nepřekrývaly a přitom byla celá šachovnice (až na chybějící políčko) pokrytá.



Obrázek 3.1: Dílek se třemi políčky šachovnice ve tvaru L.

[indukcí vzhledem k n]

3.4.5. Dokažte, $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

Základ indukce: Pro $i = 1$ je tvrzení snadné:

$$\sum_{i=1}^1 i^2 = 1^2 = 1 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = \frac{1}{6} 1(1+1)(2+1).$$

Indukční krok: Dále předpokládáme platnost pro $1, 2, \dots, n$, tj.

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

Pro $n+1$ chceme ukázat, že platí

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{1}{6} (n+1)(n+2)(2n+3).$$

Pro $n+1$ dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} i^2 &= \sum_{i=1}^n i^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 = \frac{1}{6} (n+1) (n(2n+1) + 6(n+1)) = \\ &= \frac{1}{6} (n+1) (2n^2 + 7n + 6) = \frac{1}{6} (n+1)(n+2)(2n+3). \end{aligned}$$

[indukcí vzhledem k n]

3.4.6. Dokažte $\sum_{i=1}^n i^3 = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$.

[graficky nebo indukcí]

3.4.7. Najděte chybu v následujícím důkazu. Indukcí podle n dokážeme, že každých n čísel je sobě rovných: $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. Pro $n = 1$ jistě platí $x_1 = x_1$. Nechť tvrzení platí pro obecné n . Ukážeme, že platí i pro $n+1$ čísel: $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$. Dle indukčního předpokladu je $x_1 = x_2 = \dots = x_n$, a současně $x_2 = \dots = x_n = x_{n+1}$. Nyní z tranzitivity rovnosti vyplývá $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x_{n+1}$. [chybně zvolený základ indukce $n = 1$]

3.4.8. Najděte chybu v následujícím důkazu. Indukcí podle n dokážeme, že každých $n \geq 2$ různoběžných přímk má právě jeden společný bod. Pro $n = 2$ tvrzení jistě platí: dvě různoběžky p_1 a p_2 mají společný právě jeden bod. Nechť tvrzení platí pro n přímk. Ukážeme, že platí i pro $n+1$ přímk: $p_1, p_2, \dots, p_n, p_{n+1}$. Dle indukčního předpokladu mají přímky p_1, p_2, \dots, p_n jediný společný bod, a současně přímky p_2, \dots, p_n, p_{n+1} mají jediný společný bod. Označíme P společný bod přímk p_2 a p_3 . Podle indukčního předpokladu je tento bod společný pro prvních n přímk i pro posledních n přímk a je proto společný pro všech $n+1$ přímk. [chybně zvolený základ indukce $n = 2$]

3.4.9. Ukažte, že každé poštovné větší než $(h_1 - 1)(h_2 - 1)$ Kč může být získáno užitím známek v hodnotě h_1 Kč a h_2 Kč.

3.4.10. Dokažte Bernoulliho nerovnost: Pro každé přirozené n a reálné $x > -1$ platí nerovnost $(1+x)^n \geq 1+nx$. [indukcí vzhledem k n]

3.4.11. Dokažte, že $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \sum_{i=0}^n i \cdot i! = (n+1)! - 1$ [indukcí vzhledem k n]

3.5 Vztahy s kombinačními čísly

3.5.1. Upravte výraz $\binom{2n}{n-2} + \binom{2n}{n+3}$ na jediné kombinační číslo. $\left[\binom{2n+1}{n-2} \right]$

3.5.2. Upravte výraz $\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \binom{n+3}{3} + \binom{n+4}{4}$ na jediné kombinační číslo. $\left[\binom{n+5}{4} \right]$

3.5.3.* Upravte výraz $\sum_{i=0}^k \binom{n+i}{i}$ na jediné kombinační číslo. $\left[\binom{n+k+1}{k} \right]$

3.5.4. Pro jaká n platí $C(n-1, 3) + C(n+2, 3) + 10 = P(n, 3)$? $[n = 3, 8]$

3.5.5. Ukažte, že platí

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

[kombinatoricky (čísla 1, 2, ..., 2n) nebo přímo]

3.5.6. Ukažte, že platí

$$\binom{n}{1} + 6\binom{n}{2} + 6\binom{n}{3} = n^3$$

[přímo]

3.5.7. Zdůvodněte (kombinatoricky, bez výpočtu kombinačních čísel), že platí

$$\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$$

[kombinatoricky (čísla 1, 2, ..., 2n)]

3.5.8.* Sečtěte $1 + 2\binom{n}{1} + \cdots + (k+1)\binom{n}{k} + \cdots + (n+1)\binom{n}{n}$.

$[(n+2)2^{n-1}]$

3.5.9.* Ukažte, že platí

$$\binom{n}{1} + 3\binom{n}{3} + 5\binom{n}{5} + \cdots = 2\binom{n}{2} + 4\binom{n}{4} + 6\binom{n}{6} + \cdots$$

3.5.10. Vypočítejte

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \cdots + (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$$

$[3!(\frac{n+1}{4})]$

3.5.11. Vypočítejte $\sum_{k=1}^n (k^2 + 1)k!$

$[(n+1)!n]$

3.5.12. Vypočítejte $\sum_{k=1}^n 2^{n-k}k(k+1)!$

$[(n+2)! - 2^{n+1}]$

3.5.13. Vypočítejte $\sum_{i=0}^k \binom{2n-k}{n-i} \binom{k}{i}$ kde $k \leq n$

$[\binom{2n}{n}]$

3.6 Důkazy počítáním

3.6.1. Existují na VŠB dva studenti se stejným posledním čtyřčíslím rodného čísla? [Dirichletův princip]

3.6.2. Ukažte, že na Zemi žijí dva lidé se stejným počtem vlasů. [Dirichletův princip]

3.6.3. V místnosti je n lidí. Každý z nich má v místnosti několik známých (třeba i žádného). Předpokládáme, že relace „mít známého“ je symetrická. Ukažte, že někteří dva lidé mají v ;místnosti stejný počet známých. [Dirichletův princip, a když někdo $n-1$ známých, nemůže být 0.]

3.6.4. Máte 4 různá čísel od 1 do n ($n \geq 4$). Ukažte, že některá dvě dávají sudý součet. Kolik nejméně čísel zaručí sudý součet? [Dirichletův princip, min=3]

3.6.5. Máte k různých čísel od 1 do n ($n \geq k \geq 2$). Pro jaké nejmenší k máme zaručeno, že některá dvě dávají lichý součet. $[k_{min} = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1]$

3.6.6. Na čtrnáctidenní dovolenou jelo 20 lidí. Každé odpoledne hrají stolní tenis. U každého ze dvou stolů se hraje postupně šest zápasů, Ukažte, že někteří dva lidé spolu během celé dovolené nehráli. [počet dvojic, Dirichletův princip]

3.6.7. V Plzni se v městský dopravních prostředcích štípají lístky. Po Plzni jezdí 150 tramvají, 90 trolejbusů a 120 autobusů. Ukažte, že pokud se štípe vždy 3, 4 nebo 5 políček z devíti, tak musí být v některých vozech stejné kombinace. $[336 < 360]$

3.6.8.* Ukažte, že vyříneme-li z šachovnice dva protilehlé rohy, potom není možné šachovnici pokrýt dominovými kostkami.

3.6.9.* Ze šachovnice odebereme dvě políčka různé barvy. Ukažte, že je možno pokrýt dominem.

3.6.10. Ukažte, že neexistuje univerzální bezztrátový kompresní algoritmus, tj. taková kompresní funkce, která libovolnou posloupnost n bajtů zkompreseje na posloupnost délky menší než n . [Neexistuje injektivní zobrazení $VSTUP \rightarrow VYSTUP$.]

3.7 Příklady k procvičení

3.7.1. Dokažte, že pro každé přirozené n je číslo $n^3 - n$ dělitelné šesti. [přímo nebo indukcí]

3.7.2. Dokažte, že platí

$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \binom{r+2}{r} + \cdots + \binom{n-1}{r} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$

[indukcí podle n]

3.7.3. Dokažte, že pro všechna přirozená $n \geq 1$ platí

$$\sum_{i=1}^n (2i-1) \cdot 3^i = (n-1) \cdot 3^{n+1} + 3.$$

[indukcí vzhledem k n]

3.7.4. Najděte všechna řešení nerovnice $\binom{n}{2} > \binom{n}{3}$. [$n = 3, 4$]

3.7.5.* Dokažte, že platí

$$n^{n/2} \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

[přímo]

3.7.6. Ukažte, že aritmetický průměr dvou nezáporných reálných čísel je nejvýše roven geometrickému průměru, tj. $\sqrt{x \cdot y} \leq \frac{x+y}{2}$. [přímo]

3.7.7. Ukažte, že při hodu $n \geq 1$ kostkami je stejná pravděpodobnost, že součet bude sudý nebo lichý.

3.7.8. Ukažte, že počet všech zobrazení m prvkové množiny do n prvkové je n^m . [indukcí vzhledem k m]

3.7.9. Ukažte, že $\sqrt{2}$ není racionální číslo. [sporem]

3.7.10. Hra *Tic-tac-toe* je hra s tužkou a papírem pro dva hráče X a O, kteří střídavě zapisují křížky a kolečka do čtvercové sítě políček 3×3 , viz Cvičení 1.4.35.

a) Existuje vítězná strategie pro prvního hráče? Pokud ano, najděte ji, pokud ne, dokažte to. [vítězná strategie neexistuje]

b) Existuje vítězná strategie pro druhého hráče, jestliže první tah prvního hráče nesmí být na prostřední pole? Pokud ano, najděte ji, pokud ne, dokažte to. [vítězná strategie neexistuje]

3.7.11. Ukažte indukcí, že k kružnic dělí povrch koule na nejvýše $k^2 - k + 2$ částí.

3.7.12. Máme řetěz s n očky v řadě. Najděte a dokažte jaký je nejmenší počet oček řetízku, které je třeba cviknout, aby potom bylo možno bez dalšího cviknutí odpočítat (ne nutně spojit) libovolný počet oček od 1 do n . [nejmenší k takové, že $n \geq (k+1)2^{k+1} - 1$]

3.7.13. Ukažte, že pro libovolných $n+1$ přirozených čísel z množiny $[1, 2n]$ existují taková dvě čísla, že jedno je násobek druhého.

3.7.14. Matematickou indukcí ukažte, že pro každé celé číslo $n \geq 3$ existuje n takových *různých* přirozených čísel x_1, x_2, \dots, x_n že rovnice $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = 1$. [pro každé další n vezmeme dvojnásobné hodnoty]

4 Relace a zobrazení

Řešené příklady

4.0.1. Jaké vlastnosti má relace $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 1)\}$ definovaná na množině $A = \{1, 2, 3\}$?

R je reflexivní a není ireflexivní, protože $(1, 1)$, $(2, 2)$ a $(3, 3)$ patří do R . R je antisymetrická. R není asymetrická, protože $(1, 1) \in R$. R není symetrická ani tranzitivní ($(1, 2), (2, 3) \in R \not\Rightarrow (1, 3) \in R$). R je úplná, protože pro každou dvojici prvků (i dvakrát stejný prvek), najdeme alespoň jednu uspořádanou dvojici, která do relace patří.

4.0.2. Pro relaci R na množině A definujeme symbol R^n takto: $R^1 = R$, $R^{n+1} = R \circ R^n$.

- a) Ukažte, že je-li A konečná množina, tak musí existovat taková $r, s \in \mathbb{N}_0$, $r < s$, že platí $R^r = R^s$.

Uvědomme si, že R^n je zase relace na A . Protože A je konečná, tak na A existuje konečně mnoho relací ($2^{|A|^2}$). Proto mezi všemi relacemi R^n se musí relace opakovat, tj. $\exists r, s \in \mathbb{N}_0$, $r < s$ tak, že $R^r = R^s$.

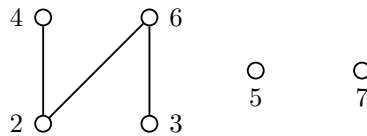
- b) Najděte takovou relaci R na konečné množině A , že $R^{r+1} \neq R^r$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$.

Množina A musí být alespoň dvouprvková, například $A = \{x, y\}$ (a případně další prvky). Potom vezmeme $R = \{(x, y), (y, x)\}$. Pro n liché je $R^n = R$, pro n sudé je $R^n = \{(x, x), (y, y)\}$.

4.0.3. Máme dānu množinu $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ s relací dělitelnosti $|$.

- a) Nakreslete hasseovský diagram relace $|$ na množině A . Najděte všechny minimální, maximální, největší a nejmenší prvky.

Minimální prvky jsou 2, 3, 5, 7, protože žádné z těchto čísel není dělitelné nějakým jiným prvkem množiny A . Maximální prvky jsou 4, 5, 6, 7, protože žádné z těchto čísel nedělí nějaký jiný prvek množiny A . Největší ani nejmenší prvek relace dělitelnosti na množině A nemá.



Obrázek 4.1: Hasseovský diagram relace dělitelnosti na množině $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

- b) Jaký prvek $a \in \mathbb{N}_0$ je třeba přidat do A , aby relace dělitelnosti měla nejmenší prvek?

Musíme přidat dělitele všech čísel v množině A . Takovým číslem v množině \mathbb{N}_0 je pouze číslo 1.

- c) Jaký prvek $a \in \mathbb{N}_0$ stačí přidat do A , aby relace dělitelnosti měla největší prvek?

Musíme přidat dělitele číslo, které je dělitelné všemi čísly v množině A . Takovým číslem v množině \mathbb{N}_0 je každý společný násobek čísel z množiny A . Nejmenším je číslo 420, další jsou například 840 nebo 4200. Každé z čísel $420k$, kde $k \in \mathbb{N}_0$ je přípustné, dokonce číslo 0 (proč?).

- d) Jaký *nejmenší* prvek $a \in \mathbb{N}_0$ je třeba přidat do A , aby relace dělitelnosti měla největší prvek?

Protože každé přirozené číslo dělí nulu, tak stačí přidat nulu. Jistě to je nejmenší takové číslo.

- e) Jaké *nejmenší* číslo $a \in \mathbb{Z}$ stačí přidat do A , aby relace dělitelnosti měla největší prvek?

Takovým číslem je každý společný násobek čísel z množiny A . Avšak v množině \mathbb{Z} jsou i záporná čísla a každé z čísel $420k$, kde $k \in \mathbb{Z}$ je přípustné. Ke každému takovému číslu $420k$ najdeme menší číslo $-420(|k| + 1)$, které splňuje podmínky zadání. Proto neexistuje nejmenší celé číslo a , které je největším prvkem $A \cup \{a\}$ vzhledem k relaci dělitelnosti.

4.0.4. Kolika způsoby je možno vybrat pět karet z 52 tak, aby mezi nimi byla od každé barvy alespoň jedna karta?

Užitím principu inkluze a exkluze. Od celkového počtu výběrů pěti karet $\binom{52}{5}$

- odečteme možnosti, kdy chybí alespoň jedna barva: $\binom{4}{1}\binom{39}{5}$,
- přičteme možnosti, kdy chybí alespoň dvě barvy: $\binom{4}{2}\binom{26}{5}$,
- odečteme možnosti, kdy chybí alespoň tři barvy: $\binom{4}{4}\binom{13}{5}$.

Čtyři barvy chybět nemohou. Dostaneme

$$\binom{52}{5} - 4\binom{39}{5} + 6\binom{26}{5} - 4\binom{13}{5} + 0 = 685464.$$

Jiné řešení:

Od celkového počtu výběrů pěti karet $\binom{52}{5}$ odečteme možnosti, kdy

- máme právě tři karty nějaké barvy $\binom{4}{1} \cdot \binom{13}{3} \cdot \binom{39}{2}$
- máme právě čtyři karty nějaké barvy $\binom{4}{1} \cdot \binom{13}{4} \cdot \binom{39}{1}$
- máme právě pět karet nějaké barvy $\binom{4}{1} \cdot \binom{13}{5} \cdot \binom{13}{0}$
- máme právě dvě karty jedné barvy a dvě karty jiné barvy $\binom{4}{2} \cdot \binom{13}{2} \cdot \binom{13}{2} \cdot \binom{26}{1}$

Celkem máme

$$\binom{52}{5} - \binom{4}{1} \cdot \binom{13}{3} \cdot \binom{39}{2} - \binom{4}{1} \cdot \binom{13}{4} \cdot \binom{39}{1} - \binom{4}{1} \cdot \binom{13}{5} \cdot \binom{13}{0} - \binom{4}{2} \cdot \binom{13}{2} \cdot \binom{13}{2} \cdot \binom{26}{1} = 685464.$$

Jiné řešení:

Všimneme si, že musí být 2 karty jedné barvy a zbylé různých barev. Vybereme jednu barvu $\binom{4}{1}$ způsoby a v této barvě dvě karty $\binom{13}{2}$. Celkem máme

$$4\binom{13}{2} \cdot \binom{13}{1} \cdot \binom{13}{1} \cdot \binom{13}{1} = 685464.$$

4.1 Motivační příklady

Na první pohled se může pojem relace, který je zaveden jako podmnožina kartézské mocniny (kartézského součinu), zdát nezajímavý. Zkuste si však spočítat, kolik různých relací na konečné množině je možno definovat. Uvidíme, že formalizace pojmu relace je nezbytná i pro velmi malé množiny (na čtyřech, na deseti prvcích), neboť relací je příliš mnoho na to, abychom mohli všechny vypsát.

4.1.1. [♡] Kolik existuje relací na konečné n prvkové množině X ?

$$\left[2^{n^2} \right]$$

4.1.2. Máme stroječek na míchání karet. Když do stroječku vložíme seřazený balíček karet v pořadí 1, 2, ..., 32, balíček zamíchá tak (udělá takovou permutaci karet), že vloží sudé karty mezi liché. Dostaneme pořadí 1, 17, 2, 18, 3, 19, ..., 16, 32. Jaký je řád permutace, neboli po kolika nejméně opakovaných mícháních dostaneme opět seřazený balíček?

[5]

4.1.3. Patnáčka, známá také jako Loydova patnáčka¹, je hlavolam, který obsahuje patnáct kamenů s čísly 1 až 15. Kameny máme za úkol seřadit posouváním kamenů.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

¹Loydova patnáčka se nazývá podle jejího popularizátora Sama Loyda. Loyd vypsál odměnu \$1000 tomu, kdo jako první úkol vyřeší. Loyd věděl, že úloha nemá řešení a na prodeji hlavolamu vydělal nemalé peníze.

Obrázek 4.2: Loydova patnáctka.

- a) Ukažte, že není možné u klasické *patnáctky* posouváním sestavit čísla tak, aby byla prohozena dvě sousední čísla. [počítáním inverzí]
- b) Kolik existuje různých rozmíchání hlavolamu *patnáctka* (užitím legálních tahů) s prázdným políčkem v pravém dolním rohu? [653837184000]

4.2 Pojem relace

Řekneme, že (binární) relace na množině A je

- *reflexivní* pokud $\forall x \in A : (x, x) \in R$,
- *ireflexivní* pokud $\forall x \in A : (x, x) \notin R$,
- *symetrická* pokud $\forall x, y \in A : (x, y) \in R \Leftrightarrow (y, x) \in R$,
- *antisymetrická* pokud $\forall x, y \in A : (x, y), (y, x) \in R \Rightarrow x = y$,
- *asymetrická* pokud $\forall x, y \in A : (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R$,
- *tranzitivní* pokud $\forall x, y, z \in A : (x, y), (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$,
- *lineární (úplná)* pokud $\forall x, y \in A : (x, y) \in R \vee (y, x) \in R$.

4.2.1. Kolik existuje relací na konečné n prvkové množině, které jsou

- a) symetrické? $\left[2^{\frac{n(n+1)}{2}} \right]$
- b) antisymetrické? $\left[2^n 3^{\frac{n(n-1)}{2}} \right]$
- c) asymetrické? $\left[3^{\frac{n(n-1)}{2}} \right]$

4.2.2. Kolik existuje relací na konečné n prvkové množině X takových, které jsou symetrické i antisymetrické současně? $[2^n]$

4.2.3. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?

- a) Relace, která není symetrická, je antisymetrická. [nepravdivé tvrzení]
- b) Relace, která není antisymetrická, je symetrická. [nepravdivé tvrzení]
- c) Relace, která není symetrická, je asymetrická. [nepravdivé tvrzení]
- d) Relace, která je asymetrická, je antisymetrická. [pravdivé tvrzení]
- e) Relace, která je antisymetrická, je asymetrická. [nepravdivé tvrzení]
- f) Relace je asymetrická, právě když je antisymetrická a ireflexivní. [pravdivé tvrzení]
- g) Relace, pro kterou platí $\forall x, y \in A : ((x, y) \in R \wedge (y, x) \notin R) \vee ((x, y) \notin R \wedge (y, x) \in R)$, je antisymetrická. [pravdivé tvrzení]
- h) Relace, která je symetrická i antisymetrická, je také reflexivní. [nepravdivé tvrzení]
- i) Relace, která je lineární, je také reflexivní. [pravdivé tvrzení]

4.2.4. Popište relaci $R \circ R$, je-li R

- a) relace rovnosti „=” na \mathbb{N}_0 , $[R]$

- b) relace menší nebo rovno „ \leq “ na \mathbb{N}_0 , [R]
 c) relace menší „ $<$ “ na \mathbb{N}_0 . [$R \circ R = \{(a, b) : a + 1 < b, a, b \in \mathbb{N}_0\}$]

4.2.5. Najděte příklad relací R a S na nějaké množině X tak, aby $R \circ S \neq S \circ R$. [$X = \{1, 2\}, R = \{(1, 2)\}, S = \{(2, 1)\}$]

4.2.6. [♡] Sestavte na množině $\{1, 2, 3, 4\}$ relace

- a) rovnosti R , [$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$]
 b) menší $<$, [$< = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$]
 c) menší nebo rovno \leq . [$\leq = R \cup <$]

4.2.7. Jaké vlastnosti má relace $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 1)\}$ definovaná na množině $A = \{1, 2, 3, 4\}$? [antisymetrická]

4.2.8. Jaké vlastnosti má relace $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$ na množině $A = \{1, 2, 3, 4\}$? [antisymetrická, reflexivní i tranzitivní]

4.2.9. Jaké vlastnosti má relace soudělnosti R na N (dva prvky jsou v relaci, jestliže jejich největší společný dělitel je větší než 1)? [symetrická]

4.2.10. Může na konečné množině existovat relace, která

- a) [♡] je symetrická i antisymetrická? [ano]
 b) [♡] není symetrická ani antisymetrická? [ano]
 c) není symetrická ani asymetrická? [ano]
 d) je symetrická i asymetrická? [ano]
 e) není symetrická, antisymetrická ani asymetrická? [ano]

4.2.11. Je relace dělitelnosti na \mathbb{Z} antisymetrická? [není]

4.3 Uspořádání a ekvivalence

4.3.1. Nakreslete hasseovský diagram relace podmnožin množiny $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Najděte všechny minimální, maximální, největší a nejmenší prvky. [nejmenší i minimální \emptyset ; největší i maximální A]

4.3.2. Sestavte relaci R_{\equiv} kongruence podle modulu 4 na množině $\{1, 2, \dots, 10\}$. Je R_{\equiv} relací ekvivalence? Pokud ano, sestavte třídy rozkladu. [$R_{\equiv} = \{(1, 5), (5, 1), (1, 9), (9, 1), (5, 9), (9, 5), (2, 6), (6, 2), (2, 10), (10, 2), (6, 10), (10, 6), (3, 7), (7, 3), (4, 8), (8, 4)\}$, ano, $A_1 = \{1, 5, 9\}, A_2 = \{2, 6, 10\}, A_3 = \{3, 7\}, A_4 = A_0 = \{4, 8\}$]

4.3.3. Vezmeme systém všech tříprvkových podmnožin množiny $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Definujeme relaci $X \rho Y$, jestliže mají stejný největší prvek. Ověřte, zda se jedná o ekvivalenci. Pokud ano, kolik má tříd rozkladu a která třída má nejvíce prvků? [reflexivní, symetrická, tranzitivní; 5 tříd rozkladu, největší přísluší hodnotě 7]

4.3.4. Popište všechny relace na množině A , které jsou současně relacemi ekvivalence i uspořádáním. [právě relace rovnosti]

4.3.5. Mějme R a S libovolné relace ekvivalence na množině A . Které následující relace jsou také nutně ekvivalence?

- a) $R \cap S$ [ano]

- b) $R \cup S$ [ne]
 c) $R \setminus S$ [ne]
 d) $R \circ S$ [ano]

4.3.6. Mějme R a S libovolné relace částečného uspořádání na množině A . Které následující relace jsou také nutně částečného uspořádání?

- a) $R \cap S$ [ano]
 b) $R \cup S$ [ne]
 c) $R \setminus S$ [ne]
 d) $R \circ S$ [ano]

4.3.7. Kolik uspořádaných dvojic na množině $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ patří do relace

- a) \sphericalcap rovnosti? [5]
 b) menší? [10]

4.3.8. Kolik uspořádaných dvojic na množině $A = [1, n]$, kde $1 \leq n \in \mathbb{N}_0$, patří do relace

- a) rovnosti? [n]
 b) menší? [$\frac{1}{2}n(n-1)$]

4.3.9. Je relace dělitelnosti relací částečného uspořádání

- a) na \mathbb{N}_0 ? [ano]
 b) na \mathbb{Z} ? [ne]
 c) na $[a, b]$, kde $a, b \in \mathbb{N}_0 \wedge a < b$? [ano]

4.3.10. Má smysl kreslit hasseovský diagram relace R , kde pro dva různé prvky platí $(x, y) \in R$ a $(y, x) \in R$?
 [relace není antisymetrická – není jasné, který prvek zakreslit výš]

4.4 Funkce a zobrazení

4.4.1. Rozhodněte, zda následující funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jsou injekce, surjekce, bijekce nebo žádná z nich.

- a) $f : y = x^4$ [žádná]
 b) $g : y = \ln x$ [není funkce]
 c) $h : y = e^x$ [injekce]
 d) $k : y = \operatorname{tg} x$ [není funkce]
 e) $k : y = \operatorname{arctg} x$ [injekce]
 f) $l : y = x^3 - x$ [surjekce]
 g) $m : y = (x - 1)^3$ [bijekce]

4.4.2. Najděte příklad funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, která je

- a) injekce, ale není surjekcí [$f : y = \operatorname{arctg} x$]

- b) surjekce, ale není injekcí $[f : y = x^3 - x]$
 c) (netriviální) bijekce $[f : y = (x - 1)^3]$

4.4.3. Najděte příklad funkce $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$, která je

- a) injekce, ale není surjekcí $[f : y = 2x]$
 b) surjekce, ale není injekcí $[f : \lfloor \frac{x}{2} \rfloor]$
 c) (netriviální) bijekce $[f : y = \begin{cases} x + 1 & \text{pro } x \text{ sudé} \\ x - 1 & \text{pro } x \text{ liché} \end{cases}]$

4.4.4. Je-li $g \circ f$ surjekce,

- a) musí být g surjekce? [ano]
 b) musí být f surjekce? [ne]

4.4.5. Je-li $g \circ f$ prostá,

- a) musí být g prostá? [ne]
 b) musí být f prostá? [ano]

4.4.6. Je-li $g \circ f$ prostá, musí být g prostá? Musí být f prostá? [a] ne $g : y = \ln|x|$, $f : y = e^x$, b) ano]

4.4.7. Ukažte, že přirozených čísel i celých čísel je stejně, tj. že platí $|\mathbb{N}_0| = |\mathbb{Z}|$. [Najdeme bijekci a ukážeme, že se jedná o bijekci.]

4.5 Skládání zobrazení a permutace

4.5.1. Ukažte, že zobrazení ρ přiřazující číslu x z množiny $0, 1, \dots, 6$ číslo $3 \cdot x \pmod{7}$ je permutace.

Zapište permutaci ρ pomocí a) matice, b) pomocí cyklů. Jaký je řád této permutace? [a]

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \rho = (0)(132645). \text{ Řád } \rho \text{ je } 6. \quad]$$

4.5.2. Určete řád permutace σ , je-li

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 7 & 8 & 9 & 6 \end{pmatrix}$ [12]

b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 4 & 1 & 3 & 5 & 9 & 8 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ [6]

c) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 1 & 8 & 2 & 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ [8]

d) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 4 & 2 & 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ [6]

4.5.3. Najděte inverzní permutaci π^{-1} , je-li

a) $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 7 & 8 & 9 & 6 \end{pmatrix}$ $[\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 & 9 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}]$

b) $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 1 & 8 & 2 & 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ $[\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 2 & 6 & 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}]$

c) $\pi = (147)(2685)(3)$ $[\pi^{-1} = (174)(2586)(3)]$

d) $\pi = (13742685)$ $[\pi^{-1} = (15862473)]$

4.5.4. Kolik existuje permutací množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ s jediným cyklem? $[(n-1)!]$

4.5.5. Najděte složenou permutaci $\sigma \circ \pi$, je-li

a) $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ $[\sigma \circ \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}]$

b) $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ $[\sigma \circ \pi = \iota = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}]$

c) $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ [neexistuje]

d) $\pi = (134)(2675), \sigma = (136)(47)(25)$ $[\sigma \circ \pi = (164372)(5)]$

e) $\pi = (1243)(675), \sigma = (1342)(576)$ $[\sigma \circ \pi = (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)]$

4.5.6. Jakého nejvyššího řádu najdete permutaci na množině A , je-li

a) $A = [1, 9]$ [20]

b) $A = [1, 10]$ [30]

c) $A = [1, 13]$ [60]

4.5.7. Máme danu permutaci $\pi = (17485)(263)$. Určete $\underbrace{\pi \circ \pi \circ \dots \circ \pi}_{542\text{krát}}$ $[\underbrace{\pi \circ \pi \circ \dots \circ \pi}_{542\text{krát}} = (14578)(362)]$

4.5.8.* Máme stroječek na míchání karet. Navrhněte takovou permutaci karet, aby počet různých rozmíchání, která dostaneme opakovaným použitím stroječku byl co největší.

4.5.9.** Máme stroječek na míchání karet. Když do stroječku vložíme seřazený balíček karet v pořadí $1, 2, \dots, n = 2t$, balíček zamíchá tak (udělá takovou permutaci karet), že na sudé pozice po řadě vmíchá karty z druhé poloviny. Dostaneme pořadí $1, t+1, 2, t+2, 3, 19, \dots, t, 2t$. Jaký je řád permutace, neboli po kolika nejméně opakovaných mícháních dostaneme opět seřazený balíček?

4.5.10.** Máme stroječek na míchání karet. Když do stroječku vložíme seřazený balíček karet v pořadí $1, 2, \dots, n$, balíček zamíchá tak (udělá takovou permutaci karet), že vloží sudé karty mezi liché. Dostaneme pořadí $1, \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1, 2, \lceil \frac{n}{2} \rceil + 2, 3, 19, \dots, n, \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Jaký je řád permutace, neboli po kolika nejméně opakovaných mícháních dostaneme opět seřazený balíček?

4.5.11. Označme $r(n)$ funkci, která každému číslu n přiřadí největší řád permutace na n -prvkové množině. Ukažte, že $r(n)$ je neklesající funkce. [ke každé permutaci n prvkové množiny najdeme permutaci $n+1$ prvkové množiny přidáním cyklu $(n+1)$]

4.5.12. Jsou dány dvě permutace ρ a σ . Můžete určit, jak vypadá každá permutace ρ a σ , jetliže víte, jak vypadá $\rho \circ \sigma$ a $\sigma \circ \rho$? [ne]

4.6 Princip inkluze a exkluze

4.6.1. Kolik čísel zůstane v množině čísel $\{1, 2, \dots, 1000\}$ po vyškrtání všech násobků 2, 3, 5? [266]

4.6.2. Kolik čísel zůstane v množině čísel $\{1, 2, \dots, 1000\}$ po vyškrtání všech násobků 2, 3, 5, 7? [228]

4.6.3. Na večírku se sešly 3 manželské páry. Kolika různými způsoby lze posadit těchto 6 lidí kolem kulatého stolu tak, aby manželé neseděli vedle sebe? [32]

4.6.4. Na večírku se sešly 4 manželské páry. Kolika různými způsoby lze posadit těchto 8 lidí kolem kulatého stolu tak, aby manželé neseděli vedle sebe? [1488]

4.6.5.* Na večírku se sešlo n manželských párů. Kolika různými způsoby lze posadit těchto $2n$ lidí kolem kulatého stolu tak, aby manželé *neseděli* vedle sebe? Ve dvou rozdílných rozesazeních má některý člověk jiného souseda po levé nebo po pravé ruce.

4.6.6.* Na plese se sešlo n manželských párů. Kolika různými způsoby může spolu tančit vždy všech $2n$ lidí tak, aby žádný manželský pár netančil spolu?

4.6.7.* (Problém šatnářky) Na shromáždění přišlo n hostů, všichni v kloboucích, a odloží si své klobouky do šatny. Při odchodu dostávají své klobouky náhodně. Jaká pravděpodobnost, že žádný pán nedostane svůj klobouk zpět? $[\sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{1}{i!} \approx \frac{1}{e}]$

4.6.8. Na shromáždění přišlo 5 hostů, všichni v kloboucích, a odloží si své klobouky do šatny. Při odchodu dostávají své klobouky náhodně. Jaká pravděpodobnost, že žádný pán nedostane svůj klobouk zpět? $[\frac{11}{30}]$

4.6.9. Máme dva zamíchané balíčky 32 karet. Z každého obrátíme shora vždy jednu kartu. Jaká je pravděpodobnost, že nikdy nebudou vytaženy dvě stejné karty? $[\approx 0.36788]$

4.6.10. Kolika způsoby rozmístíme r objektů do pěti schránek tak, aby alespoň jedna byla prázdná? $[(\binom{5}{1})4^r - (\binom{5}{2})3^r + (\binom{5}{3})2^r - (\binom{5}{4})1^r + 0]$

4.6.11. Kolik existuje n prvkových posloupností čísel $0, 1, \dots, 9$ takových, které obsahují vždy čísla 1, 2 a 3? Čísla se mohou opakovat. $[10^n - 3 \cdot 9^n + 3 \cdot 8^n - 7^n]$

4.7 Příklady k procvičení

4.7.1. Kolik nul na konci má

a) číslo $50!$? [12]

b) číslo $1234!$? [305]

4.7.2. Najděte příklad dvojice takových tranzitivních relací R_1 a R_2 , že $R_1 \cup R_2$, $R_1 \setminus R_2$ ani $R_1 \delta R_2$ tranzitivní nejsou.

4.7.3. Pomocí vhodné kombinatorické interpretace a použitím principu inkluze a exkluze spočítejte následující sumu pro n, m, j přirozená taková, že $n \geq j \geq (m+n)$, t.j. vyjádřete tuto sumu jako nějaký výraz, který už bude bez sumy:

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} \binom{m+n-i}{j-i}$$

4.7.4. Máme množinu $X = \{(x, y): a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$. Ukažte, že relace R definovaná tak, že $(a, b)R(c, d)$ právě tehdy, když $ad = bc$ je relací ekvivalence na množině X . jakou známou množinu tvoří třídy ekvivalence? [třídy ekvivalence jsou ekvivalentní zlomky]

6 Úvod do teorie grafů

Řešené příklady

6.0.1. Pro jaké n je K_n cyklem?

Musí se rovnat počty hran, tj.

$$\begin{aligned} |E(K_n)| &= n \\ \binom{n}{2} &= n \\ \frac{n(n-1)}{2} &= n \\ n-1 &= 2 \\ n &= 3. \end{aligned}$$

Pouze pro $n = 3$ je K_n cyklem.

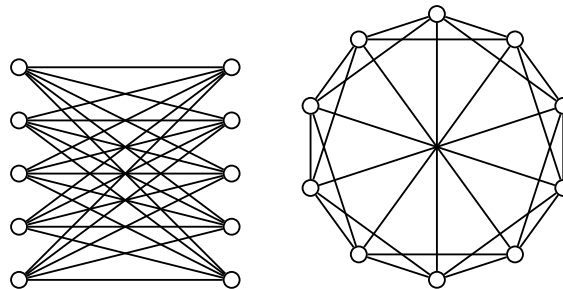
Jiné řešení:

Stupeň každého vrcholu musí být 2.

$$\begin{aligned} \deg(x) &= 2 \\ n-1 &= 2 \\ n &= 3. \end{aligned}$$

Pouze pro $n = 3$ je K_n cyklem.

6.0.2. Jsou isomorfní $K_{5,5}$ a cirkulant $C_{10}(1, 2, 5)$ na Obrázku 6.1?



Obrázek 6.1: *Kompletní bipartitní graf $K_{5,5}$ a cirkulant $C_{10}(1, 2, 5)$.*

Ne, protože graf $K_{5,5}$ je bipartitní, ale cirkulant není. Bipartitní graf obsahuje jako podgrafy pouze sudé cykly, ale cirkulant $C_{10}(1, 2, 5)$ obsahuje jako podgraf cyklus C_3 .

6.1 Motivační příklady

6.1.1. Devět kamarádů si na Vánoce dalo dárky. Každý dal dárky třem svým kamarádům. Ukažte, že není možné, aby každý dostal dárky právě od těch tří kamarádů, kterým dárky sám dal. [dle věty 1.1.]

6.1.2. Máme 6 házenkářských týmů, které mají odehrát 15 zápasů, každý s každým. Je možné odehrát celý turnaj během pěti hracích dnů, kdy probíhají současně vždy 3 zápasy? [užitím výsledku o hranovém barvení grafu]

6.1.3. Máme 7 házenkářských týmů, které mají odehrát 21 zápasů, každý s každým. Ukažte, že není možné odehrát celý turnaj během šesti hracích dnů, kdy probíhají současně vždy 3 zápasy. [Dirichletův princip nebo užitím výsledku o hranovém barvení grafu]

6.2 Pojem grafu

6.2.1.♡ Nakreslete graf $G = (V, E)$, je-li dáno

- a) $V = \{a, b, c, d\}$ a $E = \{ab, ac, ad\}$. [$K_{1,3}$]
 b) $V = \{k, l, m, n, o\}$ a $E = \{kl, mn, mo, ln, ko\}$. [C_5]
 c) $V = \{k, l, m, n, o, p\}$ a $E = \{kl, mn, mp, lo, ok, np\}$. [$2C_3$]
 d) $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ a $E = \{12, 13, 14, 25, 26, 57, 68\}$ [langusta $L(2, 1, 1)$]

6.2.2.♡ Kolik hran a kolik vrcholů má P_n (dle značení ve skriptech)? [$|V(P_n)| = n + 1, |E(P_n)| = n$]

6.2.3.♡ Kolik hran a kolik vrcholů má K_n ? [$|V(K_n)| = n, |E(K_n)| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$]

6.2.4.♡ Kolik hran a kolik vrcholů má $K_{m,n}$? [$|V(K_{m,n})| = m + n, |E(K_{m,n})| = mn$]

6.2.5.♡ Srovnejme grafy $K_{7,7}$ a K_{10} .

- a) Který má více vrcholů? [$K_{7,7}$]
 b) Který má více hran? [$K_{7,7}$]

6.2.6.♡ Srovnejme grafy $K_{5,12}$ a K_{12} .

- a) Který má více vrcholů? [$K_{5,12}$]
 b) Který má více hran? [K_{12}]

6.3 Stupně vrcholů v grafu

6.3.1. Jaký je největší a nejmenší stupeň vrcholu v grafu

- a) P_n [$\delta(P_n) = 1, \Delta(P_n) \in \{1, 2\}$]
 b) C_n ? [$\delta(C_n) = \Delta(C_n) = 2$]
 c) K_n ? [$\delta(K_n) = \Delta(K_n) = n - 1$]
 d) $K_{m,n}$? [$\delta(K_{m,n}) = \min\{m, n\}$ a $\Delta(K_{m,n}) = \max\{m, n\}$]

6.3.2.♡ Napište stupňovou posloupnost grafu

- a) P_5 , [$1, 1, 2, 2, 2, 2$]
 b) C_4 , [$2, 2, 2, 2$]
 c) K_4 , [$3, 3, 3, 3$]
 d) $K_{3,2}$. [$2, 2, 2, 3, 3$]

6.3.3. Kolik existuje různých grafů na n vrcholech. Rozlišujeme pojmenování vrcholů, tj. například pro $V = \{1, 2, 3\}$ rozlišíme grafy s $E_1 = \{12\}$ a s $E_2 = \{23\}$. [$2^{\binom{n}{2}}$]

6.3.4. Kolik existuje různých bipartitních grafů na $m + n$ vrcholech. Rozlišujeme pojmenování vrcholů! [2^{mn}]

6.3.5. Pro jaké n je K_n cestou? [$n = 0, n = 1$]

6.3.6. Pro jaké n je $K_{m,n}$ cyklem? [$n = m = 2$]

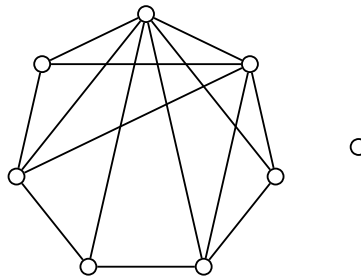
6.3.7. Pro jaké m, n je $K_{m,n}$ cestou? [pro $m = n = 1$ nebo pro $m = 2, n = 1$ nebo pro $m = 1, n = 2$]

6.3.8.♡ Kolik hran má graf

- a) s deseti vrcholy stupně 5? [25]
- b) s 11 vrcholy stupně 5? [takový graf neexistuje]
- c) se stupňovou posloupností $(1, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 5, 6, 6, 7)$ [18]
- d) se stupňovou posloupností $(1, 1, 1, 2, 3, 3, 5, 6, 6, 7)$ [takový graf neexistuje]
- e) se stupňovou posloupností $(1, 1, 2, 3, 3, 5, 6, 6, 7)$ [takový graf neexistuje]

6.3.9. Kolik vrcholů má graf, který má 15 hran, 3 vrcholy stupně 4 a zbývající vrcholy stupně 3? [9 vrcholů]

6.3.10. Určete stupňovou posloupnost grafu G na Obrázku 6.2. Je to jediný graf s touto stupňovou posloupností?



Obrázek 6.2: Graf G .

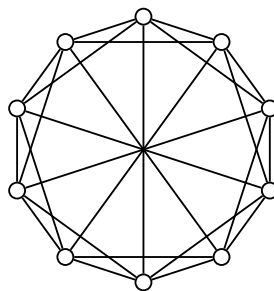
[(0, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 6), ne]

6.3.11. Nakreslete graf se stupňovou posloupností

- a) $\heartsuit(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$ [takový graf neexistuje]
- b) $(1, 1, 1, 2, 2, 5)$ [existuje]
- c) $(0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4)$ [existuje]
- d) $(2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5)$ [existuje]
- e) $(1, 1, 3, 3, 3, 4, 6, 7)$ [takový graf neexistuje]
- f) $\heartsuit(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 5)$ [existuje]
- g) $\heartsuit(1, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 5)$ [takový graf neexistuje]
- h) $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 5)$ [existuje]

6.3.12. Najděte velikost největší nezávislé množiny vrcholů v grafu $K_{5,5}$. [5]

6.3.13. Najděte velikost největší nezávislé množiny vrcholů v grafu na Obrázku 6.3.



Obrázek 6.3: Cirkulant $C_{10}(1, 2, 5)$.

[tři]

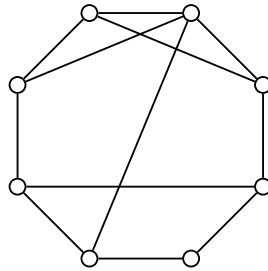
6.4 Podgrafy a isomorfismus

Mějme dána kladná celá čísla a_1, a_2, \dots, a_k . Cirkulantom $C_n(a_1, a_2, \dots, a_k)$ rozumíme graf $G = (V, E)$ na n vrcholech v_0, v_1, \dots, v_{n-1} , kde hranová množina je

$$E = \{v_i v_{(i+a_j) \bmod n} : 0 \leq i \leq n-1 \wedge 1 \leq j \leq k\}.$$

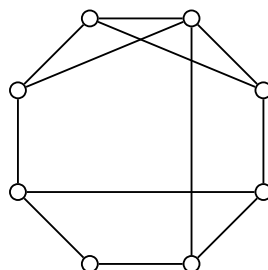
Příklad cirkulantu $C_{10}(1, 2, 5)$ je na Obrázku 6.1.

6.4.1. Mějme graf G na Obrázku 6.4.



Obrázek 6.4: Graf G .

- ∇ Jaká je nejdelší kružnice obsažená jako podgraf v grafu G ? [C_8]
- ∇ Jaká je nejkratší kružnice obsažená jako podgraf v grafu G ? [C_3]
- ∇ Jaká je nejdelší cesta obsažená jako podgraf v grafu G ? [P_7]
- ∇ Jaká je nejkratší indukovaná kružnice v grafu G ? [C_3]
- * Jaká je nejdelší indukovaná kružnice v grafu G ? [C_5]
- * Jaká je nejdelší indukovaná cesta v grafu G ? [P_5]
- Jaká je velikost největší nezávislé množiny vrcholů grafu G ? [3]
- Existuje nějaký neisomorfní graf se stejnou stupňovou posloupností? [ano]
- Ukažte, že graf G'' na Obrázku 6.5 je isomorfní s grafem G .



Obrázek 6.5: Graf G'' se stupňovou posloupností $(2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4)$.

[najít isomorfismus]

6.4.2. Mějme grafy G a H na Obrázku 6.6.



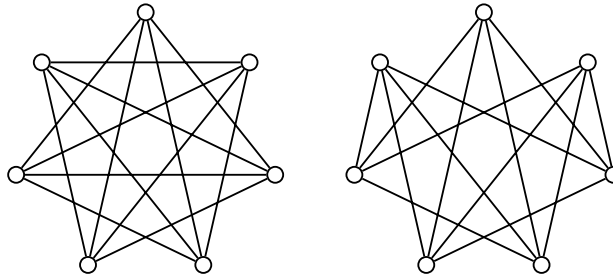
Obrázek 6.6: Grafy G a H .

- a) Jaká je nejdelší indukovaná cesta v grafu G ? [P_4]
- b) Jaký je nejdelší indukovaný cyklus v grafu G ? [C_3]
- c) Jaká je nejdelší indukovaná cesta v grafu H ? [P_5]
- d) Jaký je nejdelší indukovaný cyklus v grafu H ? [C_3]

6.4.3. Kolik existuje neisomorfních 2-pravidelných grafů

- a) na 5 vrcholech? [1]
- b) na 6 vrcholech? [2]

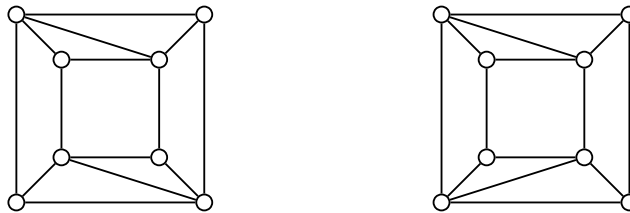
6.4.4. Jsou isomorfní grafy $K_7 - C_7$ a $K_7 - (C_3 \cup C_4)$?



Obrázek 6.7: Grafy $K_7 - C_7$ a $K_7 - (C_3 \cup C_4)$.

[ne]

6.4.5. Jsou následující dva grafy G a H isomorfní?



Obrázek 6.8: Grafy G a H .

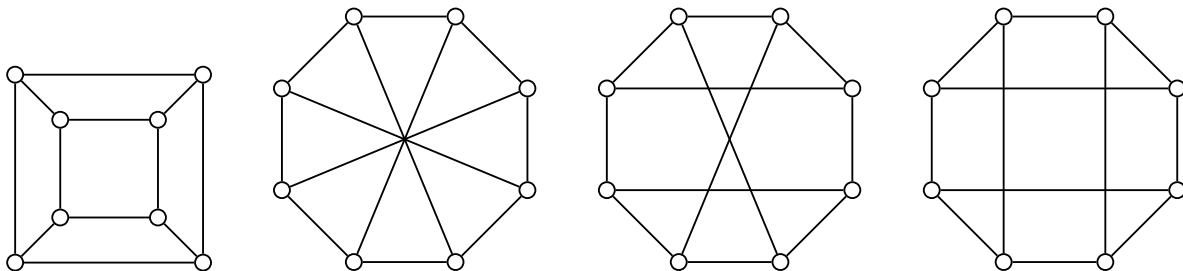
[ne]

6.4.6. Kolik existuje neisomorfních 5-pravidelných grafů na osmi vrcholech? [tři]

6.4.7. Existují dva neisomorfní grafy se stupňovou posloupností

- a) $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$? Najděte je nebo ukažte, že takové grafy neexistují. [ano, $K_6 - C_6$ a $K_6 - 2C_3$]
- b) $(2, 2, 3, 3)$? Najděte je nebo ukažte, že takové grafy neexistují. [ne]

6.4.8. Najděte mezi grafy G_1 , G_2 , G_3 a G_4 na Obrázku 6.9 všechny isomorfní dvojice. Pečlivě zdůvodněte.



Obrázek 6.9: Grafy G_1 , G_2 , G_3 a G_4 .

[$G_1 \simeq G_4$ a $G_2 \simeq G_3$]

6.4.9. Najděte všechny neisomorfní jednoduché grafy na čtyřech vrcholech.

[jedenáct grafů]

6.5 Orientované grafy a multigrafy

6.5.1.* Dva hráči přidávají postupně 1, 2, nebo 3 centy na hromádku. Ten, kdo na hromádku přidá šestnáctý cent, vyhrál. Modelujte hru s užitím orientovaného grafu a ukažte, že druhý hráč může vždy vyhrát.

6.5.2. Najděte všechny neisomorfní orientované grafy na třech vrcholech.

6.6 Implementace grafů

6.6.1.* Naprogramujte algoritmus, jak rozmístit 8 královen na šachovnici tak, aby se navzájem neohrožovaly.

6.6.2. Naprogramujte algoritmus, který vygeneruje všechny grafy na n vrcholech, jestliže rozlišujeme pojmenování vrcholů, tj. například pro $V = \{1, 2, 3\}$ rozlišíme grafy s $E_1 = \{12\}$ a s $E_2 = \{23\}$.

6.7 Příklady k procvičení

6.7.1.♥ Srovnejme grafy $K_{6,6}$ a K_9 .

- a) Který má více vrcholů? [$K_{6,6}$]
 b) Který má více hran? [stejně hran]

6.7.2. Srovnejme grafy $K_{20,20}$ a K_{29} .

- a) Který má více vrcholů? [$K_{20,20}$]
 b) Který má více hran? [K_{29}]

6.7.3. Kolik hran a kolik vrcholů má C_n ? [$|V(C_n)| = n, |E(C_n)| = n$]

6.7.4. Pro jaké m, n neobsahuje $K_{m,n}$ žádnou kružnici? [pouze je-li $m = 1$ nebo $n = 1$]

6.7.5.♥ Kolik hran musíme odebrat z grafu K_6 , abychom dostali $K_{3,3}$? [6 hran]

6.7.6. Pro která n je následující stupňová posloupnost grafová?

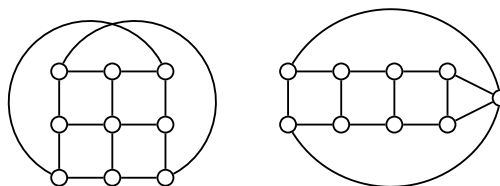
- a) $(1, 2, \dots, n)$ [pro žádné n]
 b) $(0, 1, \dots, n - 1)$ [pouze $n = 1$]
 c) $(1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots, n, n)$ [pro každé $n \geq 1$]

6.7.7. Pro které hodnoty n a r existuje grafu na n vrcholech, kde každý vrchol je stupně r ? Dokažte. [pro n, r liché graf neexistuje, jinak ano]

6.7.8. Jsou grafy $K_{3,3}$ a cirkulant $C_6(1, 3)$ isomorfní? [ano]

6.7.9. Jsou grafy $K_{4,4}$ a cirkulant $C_8(1, 2)$ isomorfní? [ne]

6.7.10. Jsou následující dva grafy G a H isomorfní?



Obrázek 6.10: Grafy G a H .

6.7.11.* Na jakém nejmenším počtu vrcholů najdete dva neisomorfní grafy se stejnou stupňovou posloupností? [$n = 5$]

6.7.12.* Strnulý graf má pouze triviální automorfismus. Najděte strnulý graf s co nejmenším počtem vrcholů. [nejmenší strnulý graf má 6 vrcholů]

6.7.13. Kolik existuje grafů se sedmi vrcholy stupně 2? [dva]

6.7.14. Kolik existuje grafů s deseti vrcholy stupně 2? [pět]

7 Souvislost

Řešené příklady

7.0.1. Kolik nejvýše hran může mít graf na deseti vrcholech, který má dvě komponenty? Najdete takový graf?

Předpokládejme, že máme graf se dvěma komponentami H_1 a H_2 , který má největší počet hran. Nejprve si všimneme, že obě komponenty jsou kompletní grafy, jinak bychom mohli nějaké hrany přidat (G by nebyl a největším počtem hran).

Máme proto $G \simeq K_i \cup K_{10-i}$. Vyjádříme si počet hran v závislosti na proměnné i .

$$\begin{aligned} |E(G)| &= |E(K_i)| + |E(K_{10-i})| = \binom{i}{2} + \binom{10-i}{2} = \frac{1}{2}i(i-1) + \frac{1}{2}(10-i)(9-i) = \frac{1}{2}(i^2 - i + 90 - 19i + i^2) = \\ &= \frac{1}{2}(2i^2 - 20i + 90) = i^2 - 10i + 45 = (i-5)^2 + 20. \end{aligned}$$

Najdeme (celočíslné) maximum funkce $E(i) = i^2 - 10i + 45$ v závislosti na proměnné i na intervalu $\langle 1, 9 \rangle$. K řešení můžeme použít diferenciální počet a nebo pozorování, že grafem kvadratické funkce je parabola otevřená směrem nahoru. Minimum (vrchol) má v bodě $[5, 20]$, maximum nabývá v krajních bodech intervalu $\langle 1, 9 \rangle$. Vzhledem k symetrii úlohu je $E_{max}(G) = E(9) = E(1) = 1 - 10 + 45 = 36$. Maximální počet hran s danými parametry má graf $G = K_1 \cup K_9$.

Jiné řešení:

Víme (podle definice hranové k -souvislosti), že graf K_{10} je hranově 9-souvislý. Je proto nutno z celkového počtu $\binom{10}{2} = 45$ hran vynechat alespoň devět, abychom dostali nesouvislý graf. Vynecháme-li všech 9 hran incidentních s některým vrcholem, dostaneme nesouvislý graf s celkem $45 - 9 = 36$ hranami. Protože K_{10} byl 9-souvislý, jedná se graf s největším počtem hran.

7.0.2. Mějme kompletní bipartitní graf $K_{m,n}$.

a) Jaký je hranový stupeň souvislosti $K_{m,n}$?

Pomocí Mengerových vět snadno ukážeme, že hranový stupeň souvislosti grafu $K_{m,n}$ je $\min\{m, n\}$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $m \geq n$, proto $\min\{m, n\} = n$.

Označme partity grafu $K_{m,n}$ jako U a W a jejich vrcholy u_1, u_2, \dots, u_m a w_1, w_2, \dots, w_n . Nyní zkonstruujeme mezi libovolnými dvěma různými vrcholy x, y grafu $K_{m,n}$ n hranově disjunktních cest.

1. Jsou-li $x, y \in U$, můžeme vrcholy v U přechíslovat tak, aby $x = u_1$ a $y = u_2$. Nyní cesty $P^{(1)} = u_1, w_1, u_2$, $P^{(2)} = u_1, w_2, u_2$, až $P^{(n)} = u_1, w_n, u_2$ jsou hranově disjunktní.
2. Jsou-li $x, y \in W$, můžeme vrcholy v W přechíslovat tak, aby $x = w_1$ a $y = w_2$. Nyní cesty $P^{(1)} = w_1, u_1, w_2$, $P^{(2)} = w_1, u_2, w_2$, až $P^{(n)} = w_1, u_n, w_2$ jsou hranově disjunktní.
3. Jsou-li $x \in U$ a $y \in W$ (podobně naopak), můžeme vrcholy v U a W přechíslovat tak, aby $x = u_1$ a $y = w_2$. Nyní cesta (hrana) $P^{(1)} = u_1, w_1$ a cesty, $P^{(2)} = u_1, w_2, u_2, w_1$, $P^{(3)} = u_1, w_3, u_3, w_1$, až $P^{(n)} = u_1, w_n, u_n, w_1$ jsou hranově disjunktní.

Protože mezi libovolnými dvěma vrcholy x, y grafu $K_{m,n}$ n existuje hranově disjunktních cest a protože odstraněním všech n hran z jednoho vrcholu partity U dostaneme nesouvislý graf, je hranový stupeň souvislosti grafu $K_{m,n}$ roven $\min\{m, n\}$.

b) Jaký je vrcholový stupeň souvislosti $K_{m,n}$?

Protože cesty zkonstruované v předchozím příkladu jsou nejen hranově, ale i vrcholově disjunktní, je důkaz i řešení stejné.

7.0.3. Ukažte, že pro nesouvislé grafy nemusí platit, že graf s $2t$ vrcholy lichého stupně je možno nakreslit t otevřenými eulerovskými tahy.

Stačí vzít nesouvislý graf $K_1 \cup K_2$, případně $K_2 \cup K_3$. Oba mají dva vrcholy stupně lichého a není možné je nakreslit jedním otevřeným tahem.

7.1 Souvislost a komponenty grafu

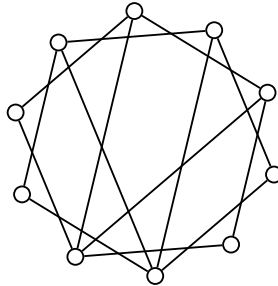
7.1.1.♥ Kolik komponent souvislosti má souvislý graf?

[jedinou komponentu]

7.1.2.♥ Kolik komponent souvislosti má nesouvislý graf?

[alespoň dvě komponenty]

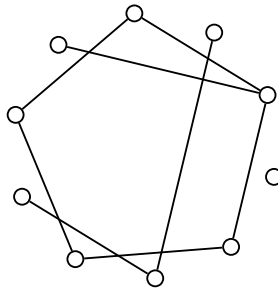
7.1.3.♥ Kolik komponent souvislosti má graf na Obrázku 7.1? Je souvislý?



Obrázek 7.1: Graf G .

[dvě komponenty, ne]

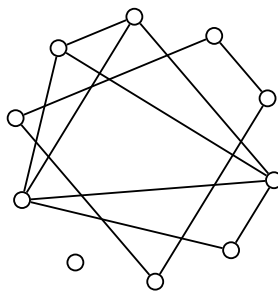
7.1.4. Kolik komponent souvislosti má graf G na Obrázku 7.2? Je souvislý?



Obrázek 7.2: Graf G .

[tři komponenty, ne]

7.1.5.♥ Kolik komponent souvislosti má graf na Obrázku 7.3? Je souvislý?



Obrázek 7.3: Graf G .

[tři komponenty, ne]

7.1.6. Kolik komponent souvislosti má cirkulant $C_{12}(3, 6)$?

[tři]

7.1.7. Kolik komponent má graf s deseti vrcholy stupně 5? Dokažte.

[jednu komponentu]

7.1.8. Kolik komponent má graf s deseti vrcholy a 25 hranami? Dokažte. [jednu, dvě nebo tři komponenty]

7.1.9. Kolik existuje různých grafů s deseti vrcholy a 25 hranami? Dokažte.

[5]

7.1.10.♥ Kolik komponent má graf s patnácti vrcholy stupně 5? Dokažte. [žádnou, takový graf neexistuje]

7.1.11. Kolik komponent může mít graf s deseti vrcholy stupně 2? Dokažte.

[jednu, dvě nebo tři komponenty]

7.1.12. Kolik nejvýše hran může mít graf na deseti vrcholech, který má dvě komponenty a žádný vrchol stupně většího než 3? Najdete takový graf? [graf $K_4 \cup K_6 - C_6$ nebo $K_6 - (C_3 \cup C_3)$ mají 15 hran]

7.1.13. Kolik nejméně hran může mít graf na deseti vrcholech, který má dvě komponenty? [8 hran, $2P_4$]

7.1.14. Kolik nejméně hran může mít graf na n vrcholech, který má k komponent? [$n - k$ hran, $P_{n-k-1} \cup (k-1)K_1$]

7.2 Prohledávání grafu

7.2.1. Jaká je složitost algoritmu (uvedeného na přednášce) pro prohledávání do šířky?

7.2.2. Jaká je složitost algoritmu (uvedeného na přednášce) pro prohledávání do hloubky?

7.3 Vyšší stupně souvislosti

7.3.1. Mějme cyklus C_n .

a) Jaký je hranový stupeň souvislosti C_n ? [2]

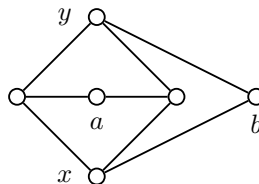
b) Jaký je vrcholový stupeň souvislosti C_n ? [2]

7.3.2. [♡] Víte, že minimální stupeň grafu G je 5.

a) Co můžete říci o hranové souvislosti grafu G ? [hranový stupeň souvislosti je menší než 5]

b) Co můžete říci o vrcholové souvislosti grafu G ? [vrcholový stupeň souvislosti je menší než 5]

7.3.3. Máme dán graf $K_{3,3}$ bez jedné hrany, viz Obrázek 7.4.



Obrázek 7.4: Graf $K_{3,3} - e$.

a) Kolik hran musíme z grafu vynechat, aby neexistovala cesta mezi vrcholy a, b ? Zdůvodněte! [dvě]

b) Kolik hran musíme z grafu vynechat, aby neexistovala cesta mezi vrcholy x, y ? Zdůvodněte! [tři]

7.3.4. [♡] Kolik musíme přidat hran do grafu P_5 (podle značení ve skriptech), aby byl 2-souvislý? [jednu]

7.3.5. Kolik musíme přidat hran do grafu P_5 (podle značení ve skriptech), aby byl 3-souvislý? [čtyři]

7.3.6. Najděte příklad grafu, kde každý vrchol je stupně r a hranová i vrcholová souvislost je 1.

7.3.7. Najděte příklad grafu, kde každý vrchol je stupně r a hranová i vrcholová souvislost je 2.

7.3.8. Najděte příklad grafu, kde každý vrchol je stupně r a hranová i vrcholová souvislost je $k \leq r$.

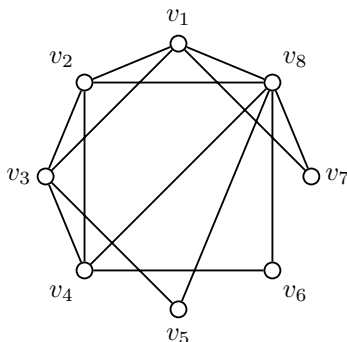
7.3.9. Mějme libovolná přirozená čísla $a \leq b \leq c$. Najděte příklad grafu, kde každý vrchol je stupně c a hranová souvislost je b a vrcholová souvislost je a .

7.3.10. Najděte příklad souvislého grafu, jehož vrcholová souvislost je menší než hranová souvislost. [motýlek]

7.3.11. Najděte příklad souvislého grafu, jehož hranová souvislost je menší než vrcholová souvislost. [neexistuje]

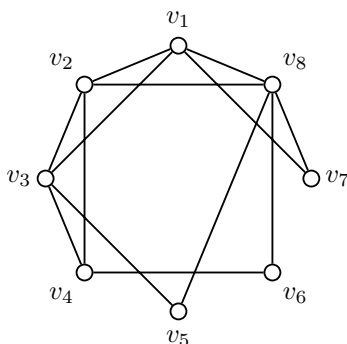
7.4 Eulerovské grafy

7.4.1. Je graf na Obrázku 7.5 eulerovský? Pokud ano, najděte uzavřený eulerovský tah.

Obrázek 7.5: Graf G .

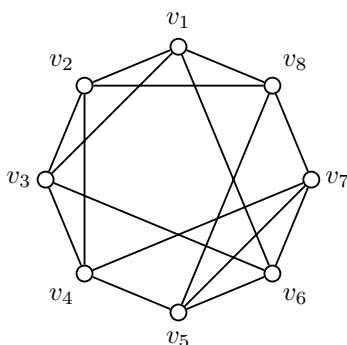
[ano, například tah $v_1, v_2, v_3, v_4, v_8, v_1, v_3, v_5, v_8, v_2, v_4, v_6, v_8, v_7, v_1$]

7.4.2. Je graf na Obrázku 7.6 eulerovský? Pokud ano, najděte uzavřený eulerovský tah.

Obrázek 7.6: Graf G .

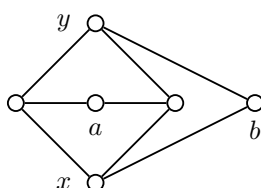
[ne]

7.4.3. Je graf na Obrázku 7.7 eulerovský? Pokud ano, najděte uzavřený eulerovský tah.

Obrázek 7.7: Graf G .

[ano, například tah $v_1, v_3, v_6, v_1, v_2, v_4, v_7, v_5, v_8, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_1$]

7.4.4. Máme dán graf $K_{3,3}$ bez jedné hrany, viz Obrázek 7.8.

Obrázek 7.8: Graf $K_{3,3} - e$.

- a) Je možno graf $K_{3,3} - e$ nakreslit jedním uzavřeným tahem? Nakreslete nebo zdůvodněte, proč to není možné. [ne]
- b) Je možno graf $K_{3,3} - e$ nakreslit jedním otevřeným tahem? Nakreslete nebo zdůvodněte, proč to není možné. [ne]
- c) Je možno graf $K_{3,3} - e$ nakreslit dvěma otevřenými tahy? Nakreslete nebo zdůvodněte, proč to není možné. [ano]
- d) Kolik nejméně hran je třeba přidat do grafu $K_{3,3} - e$, aby jej bylo možno nakreslit jedním otevřeným tahem? [1 hranu]
- e) Kolik nejméně hran je třeba přidat do grafu $K_{3,3} - e$, aby jej bylo možno nakreslit jedním uzavřeným tahem? [2 hrany]

7.4.5. Je cirkulant $C_6(1, 2)$ s vrcholovou množinou $V = \{v_i : i = 1, 2, \dots, 6\}$ eulerovský? Pokud ano, najděte uzavřený eulerovský tah. [ano, například $v_1, v_3, v_5, v_1, v_2, v_4, v_6, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_1$]

7.4.6. Je cirkulant $C_6(1, 3)$ s vrcholovou množinou $V = \{v_i : i = 1, 2, \dots, 6\}$ eulerovský? Pokud ano, najděte uzavřený eulerovský tah. [není eulerovský]

7.4.7. Je cirkulant $C_8(1, 2)$ s vrcholovou množinou $V = \{v_i : i = 1, 2, \dots, 8\}$ eulerovský? Pokud ano, najděte uzavřený eulerovský tah. [ano, například $v_1, v_3, v_5, v_7, v_1, v_2, v_4, v_6, v_8, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_1$]

7.4.8. [♡] Pro která n je možno K_n nakreslit jedním uzavřeným tahem? [pro n liché]

7.4.9. Pro která n je možno K_n nakreslit jedním otevřeným a nikoli uzavřeným tahem? [pouze pro $n = 2$]

7.4.10. Pro která m, n je možno $K_{m,n}$ nakreslit jedním uzavřeným tahem? [pro m, n sudé]

7.4.11. Pro která n je možno $K_{m,n}$ nakreslit jedním otevřeným tahem? [pro $m = 2, n$ liché nebo $n = 2, m$ liché nebo $m = n = 1$]

7.5 Příklady k procvičení

7.5.1. [♡] Může existovat souvislý graf, který má více vrcholů než hran? Pokud ano, najděte příklad, pokud ne, dokažte. [ano, K_2]

7.5.2. Najděte všechny souvislé grafy, které mají více vrcholů než hran. [stromy]

7.5.3. Může existovat souvislý graf, který má n vrcholů a méně než $n - 1$ hran? Pokud ano, najděte příklad, pokud ne, dokažte. [takový graf nemůže existovat]

7.5.4. Ukažte, že není možné putovat koněm po celé šachovnici 3×3 . [graf úlohy není souvislý]

7.5.5. Kolik nejvíce hran může mít graf s $n \geq 2$ vrcholy a 2 komponentami? [$\binom{n-1}{2}$]

7.5.6.* Kolik nejvíce hran může mít graf s n vrcholy a k komponentami? Předpokládáme, že $k \leq n$. [$\binom{n-k+1}{2}$]

7.5.7. Kolik nejméně hran musí mít 3-souvislý graf

- a) na 6 vrcholech? [9]
- b) na 12 vrcholech? [18]
- c) na 9 vrcholech? [14]

7.5.8. Je graf $K_{4,4}$ eulerovský? Pokud ano, najděte uzavřený eulerovský tah. [ano]

7.5.9. Je graf $K_{4,6}$ eulerovský? Pokud ano, najděte uzavřený eulerovský tah. [ano]

7.5.10. Pro které n je graf $K_{2,n}$ eulerovský? Pokud ano, najděte uzavřený eulerovský tah. [n sudé]

7.5.11. Najděte příklad souvislého grafu, který má dva vrcholy lichého stupně a všechny ostatní vrcholy sudého stupně a do kterého

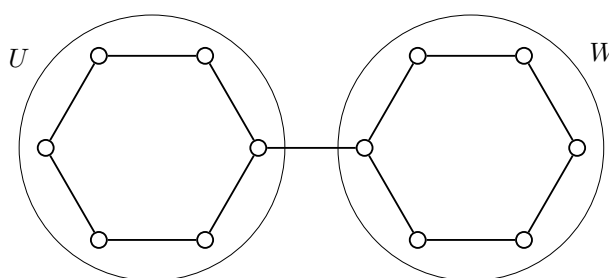
- a) stačí přidat jedinou hranu tak, aby byl eulerovský. Jaký je nejmenší takový graf? [$K_5 - e, P_2$]
 b) není možné přidat jedinou hranu tak, aby byl eulerovský. Jaký je nejmenší takový graf? [$K_4 - e, K_2$]

7.5.12. Pro každé t najděte příklad souvislého grafu, který

- a) je souvislý, obsahuje $2t$ vrcholů lichého stupně a je možno jej nakreslit t otevřenými tahy. [K_{2t}]
 b) není souvislý, obsahuje $2t$ vrcholů lichého stupně a je možno jej nakreslit t otevřenými tahy. [tK_2]
 c) je souvislý, obsahuje $2t$ vrcholů lichého stupně a je možno jej nakreslit t otevřenými tahy, ale není možné přidáním t hran získat eulerovský graf. [K_{2t}]
 d)* je souvislý, obsahuje $2t$ vrcholů lichého stupně a je možno jej nakreslit t otevřenými tahy, a přidáním t hran je možné získat eulerovský graf. [$K_{1,2t}$]

7.5.13. Pro libovolné sudé r a libovolné $n > r$ najděte příklad r -pravidelného eulerovského grafu na n vrcholech. [například cirkulant $C_n(1, 2, \dots, \frac{r}{2})$]

7.5.14. Máme dán graf G na Obrázku 7.9.



Obrázek 7.9: Graf G .

- a) Je graf G eulerovský? [ne]
 b) Jak přidat hrany pouze mezi vrcholy v množině U nebo pouze mezi vrcholy v množině W tak, aby vznikl eulerovský graf? Pokud to není možné, dokažte! [není možné]
 c) Jestliže dovolíme, aby alespoň jedna přidaná hrana měla jeden koncový vrchol v množině U a druhý v množině W , může přidáním hran vzniknout eulerovský graf? Jestliže ano, kolik nejméně hran je třeba přidat? Pokud to není možné, dokažte! [stačí přidat dvě hrany]

7.5.15. Definujme graf $Z_2(n)$ jako graf, jehož vrcholy jsou všechny dvouprvkové podmnožiny nějaké n prvkové množiny, $n \geq 2$. Dva vrcholy jsou sousední, jestliže odpovídající vrcholy jsou disjunktní.

- a) Pro která n je graf $Z_2(n)$ souvislý? [$n \geq 5$]
 b) Je graf $Z_2(n)$ pravidelný? [ano]
 c) Jaký je stupeň souvislosti grafu $Z_2(n)$?

7.5.16. Definujme graf $Z_2^*(n)$ jako graf, jehož vrcholy jsou všechny dvouprvkové podmnožiny nějaké n prvkové množiny, $n \geq 2$. Dva vrcholy jsou sousední, jestliže odpovídající vrcholy nejsou disjunktní.

- a) Pro která n je graf $Z_2(n)$ souvislý? [všechna $n \geq 2$]
 b) Je graf $Z_2(n)$ pravidelný? [ano]
 c) Jaký je stupeň souvislosti grafu $Z_2(n)$? [$n - 2$]

7.5.17. Ukažte, že souvislý graf s $2t$ vrcholy lichého stupně je možno nakreslit t otevřenými eulerovskými tahy. [přidáním pomocného vrcholu]

7.5.18.* Na množině čtyř vrcholů konstruujeme náhodný jednoduchý neorientovaný graf (bez smyček) tak, že každou dvojici vrcholů spojíme hranou s pravděpodobností p . Určete pravděpodobnost, že výsledný graf bude obsahovat a) alespoň jeden izolovaný vrchol, b) alespoň jeden trojúhelník.

8 Vzdálenost a metrika

Řešené příklady

8.0.1. Jaká je největší vzdálenost dvou vrcholů v grafu W_n ?

Ukážeme, že vzdálenost dvou vrcholů nemůže být větší než 2. Vezměme dva libovolné vrcholy $x, y \in V(W_n)$.

1. Je-li $x = y$, je $\text{dist}(x, y) = 0$
2. Je-li $x \neq y$ a je-li jeden z vrcholů centrální vrchol kola v_0 , potom je $\text{dist}(x, y) = 1$, protože centrální vrchol je sousední se všemi.
3. Je-li $x \neq y$ a není-li ani jeden z vrcholů centrálním vrcholem, potom v případě, že x a y jsou sousední je $\text{dist}(x, y) = 1$
4. Jinak je $\text{dist}(x, y) \geq 2$. Současně ale víme, že $\text{dist}(x, y) \leq \text{dist}(x, v_0) + \text{dist}(v_0, y) = 1 + 1 = 2$. Proto je $\text{dist}(x, y) = 2$.

Celkem dostáváme, že pro $n = 3$, kdy na vnějším cyklu kola nenajdeme dva nesousední vrcholy ($W_3 = K_4$), je největší vzdálenost dvou vrcholů 1. Jinak je největší vzdálenost dvou vrcholů 2.

8.0.2. Jaká největší vzdálenost může být mezi dvěma vrcholy v cyklu délky 9, který je ohodnocený čísly $1, 2, \dots, 9$ v nějakém libovolném pořadí.

Jedno jak budou ohodnocení rozložená, vždy je jedna cesta kratší a druhá delší, neboť součet $\sum_{i=1}^9 i = 45$ je lichý. Zvolíme ohodnocení po řadě $9, 6, 5, 2, 8, 7, 4, 3, 1$. Největší vzdálenost je $\min\{9 + 6 + 5 + 2, 8 + 7 + 4 + 3 + 1\} = \min\{22, 23\} = 22$. Větší vzdálenost není možná, neboť $\lfloor \frac{45}{2} \rfloor = 22$ a vždy jedna ze dvou cest xy je kratší a v součtu dají 45.

8.1 Motivační příklady

8.1.1.* Hlavolam známý jako „Hanojské věže“² má tři kolíky a sadu osmi disků různých velikostí. Na začátku je všech osm disků seřazeno podle velikosti na prvním kůlu. Úkolem je přemístit všechny disky na jiný kůl za dodržení následujících podmínek:

1. vždy se přesunuje pouze jeden disk,
2. nikdy nesmí ležet větší disk na menším.

Namodelujte úlohu užitím grafu a pro tři disky najděte nejkratší možné řešení řešení. [existuje řešení na 7 tahů]

8.1.2. Máme osmi litrovou nádobu s vínem a dvě prázdné nádoby – pětilitrovou a třilitrovou. Rozdělte osm litrů na čtyři a čtyři litry jen s užitím těchto nádob, bez použití odměrky. Úloha namodelujte grafem a najděte nejkratší řešení a popište všechna přípustná řešení. [nejkratší řešení má osm přelévání]

8.1.3. Máme osmi litrovou nádobu s vínem a dvě prázdné nádoby – pětilitrovou a třilitrovou. Je možno odměřit libovolné (celočíslné) množství vína? Pokud ne, zjistěte jaké. Pokud ano, dokažte. [ano]

8.2 Vzdálenost v grafu

8.2.1.♥ Jaká je největší vzdálenost dvou vrcholů v grafu K_4 ? [1]

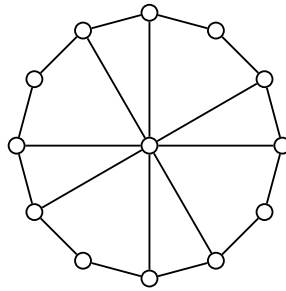
8.2.2.♥ Jaká je největší vzdálenost dvou vrcholů v grafu K_1 ? [0]

8.2.3.♥ Jaká je největší vzdálenost dvou vrcholů v grafu C_7 ? [3]

8.2.4.♥ Jaká je největší vzdálenost dvou vrcholů v grafu $K_{7,8}$? [2]

8.2.5. Jaká je největší vzdálenost dvou vrcholů v grafu G na Obrázku 8.1?

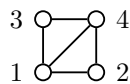
²Hanojské věže vymyslel v roce 1883 francouzský matematik Édouard Lucas.

Obrázek 8.1: Graf G .

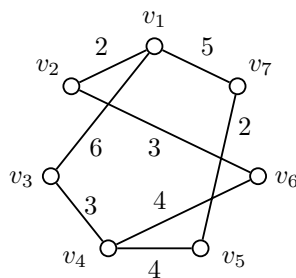
[4]

8.2.6. Jaká je největší vzdálenost dvou vrcholů v grafu K_n ? [0 pro $n = 1$, 1 jinak]8.2.7. ♡ Jaká je největší vzdálenost dvou různých vrcholů v grafu P_n ? [n (oba koncové vrcholy cesty P_n .)]8.2.8. Jaká je největší vzdálenost dvou různých vrcholů v grafu $K_{m,n}$? [1 pro $m = n = 1$, jinak 2]8.2.9. Jaká je největší vzdálenost dvou různých vrcholů v grafu C_n ? [$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$]8.2.10. Najděte příklad grafu na osmi vrcholech, ve kterém je minimální i maximální vzdálenost dvou různých nesousedních vrcholů 2. [$K_{4,4}$]8.2.11. Najděte graf s co nejmenším počtem hran na osmi vrcholech, ve kterém je minimální i maximální vzdálenost dvou různých nesousedních vrcholů 2. [$K_{1,7}$]8.2.12. Najděte graf s co největším počtem hran na osmi vrcholech, ve kterém je minimální i maximální vzdálenost dvou různých nesousedních vrcholů 2. [K_8 bez jedné hrany]

8.2.13. Najděte graf s co největším počtem vrcholů, ve kterém je maximální vzdálenost dvou různých nesousedních vrcholů 2 a nejvyšší stupeň vrcholu je 3. [10 vrcholů]

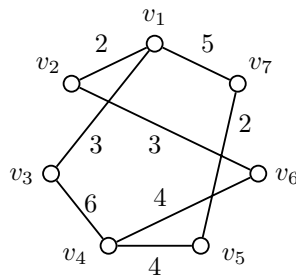
8.2.14. Vypočítejte metriku (matici udávající vzdálenosti mezi vrcholy) grafu $K_4 - e$ na Obrázku 8.2.Obrázek 8.2: Graf K_4 bez jedné hrany.[matice 4×4 , kde $a_{ii} = 0$, políčka $a_{23} = a_{32} = 2$ a ostatní prvky jsou 1]

8.3 Vážená (ohodnocená) vzdálenost

8.3.1. Máme dán graf G na Obrázku 8.3. Jaká je největší vážená vzdálenost mezi vrcholy v grafu G ?Obrázek 8.3: Graf G .

[10]

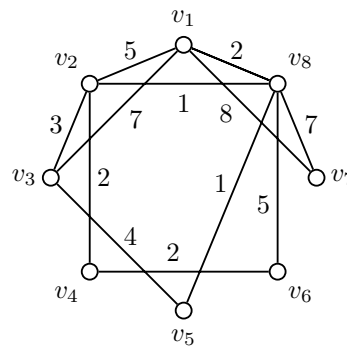
8.3.2. Máme dán graf G na Obrázku 8.4. Jaká je největší vážená vzdálenost mezi vrcholy v grafu G ?

Obrázek 8.4: Graf G .

[10]

8.4 Dijkstrův algoritmus

8.4.1. Máme dán graf jako na Obrázku 8.5.

Obrázek 8.5: Graf G .

- Jaké jsou vzdálenosti všech vrcholů od vrcholu v_1 ? $[\text{dist}(v_1, v_1) = 0, \text{dist}(v_1, v_2) = 3, \text{dist}(v_1, v_3) = 6, \text{dist}(v_1, v_4) = 5, \text{dist}(v_1, v_5) = 3, \text{dist}(v_1, v_6) = 7, \text{dist}(v_1, v_7) = 8, \text{dist}(v_1, v_8) = 2]$
- V jakém pořadí budou zpracovány vrcholy při běhu Dijkstrova algoritmu s výchozím vrcholem v_1 ? $[v_1, v_8, v_2, v_5, v_4, v_3, v_6, v_7 \text{ nebo } v_1, v_8, v_5, v_2, v_4, v_3, v_6, v_7]$
- Jaké jsou vzdálenosti všech vrcholů od vrcholu v_3 ? $[\text{dist}(v_3, v_1) = 6, \text{dist}(v_3, v_2) = 3, \text{dist}(v_3, v_3) = 0, \text{dist}(v_3, v_4) = 5, \text{dist}(v_3, v_5) = 4, \text{dist}(v_3, v_6) = 7, \text{dist}(v_3, v_7) = 11, \text{dist}(v_3, v_8) = 4]$
- V jakém pořadí budou zpracovány vrcholy při běhu Dijkstrova algoritmu s výchozím vrcholem v_3 ? $[v_3, v_2, v_5, v_8, v_4, v_1, v_6, v_7 \text{ nebo } v_3, v_2, v_8, v_5, v_4, v_1, v_6, v_7]$
- Jaké jsou vzdálenosti všech vrcholů od vrcholu v_5 ? $[\text{dist}(v_5, v_1) = 3, \text{dist}(v_5, v_2) = 2, \text{dist}(v_5, v_3) = 4, \text{dist}(v_5, v_4) = 4, \text{dist}(v_5, v_5) = 0, \text{dist}(v_5, v_6) = 6, \text{dist}(v_5, v_7) = 8, \text{dist}(v_5, v_8) = 1]$
- V jakém pořadí budou objeveny vrcholy při běhu Dijkstrova algoritmu s výchozím vrcholem v_5 ? $[v_5, v_8, v_2, v_1, v_3, v_4, v_6, v_7 \text{ nebo } v_5, v_8, v_2, v_1, v_4, v_3, v_6, v_7]$
- Které dva vrcholy jsou nejvzdálenější? Jaká je jejich vzdálenost? $[v_6 \text{ a } v_7, \text{dist}(v_6, v_7) = 12]$
- Ze kterého vrcholu je maximální vzdálenost do všech ostatních vrcholů nejmenší?

8.4.2. Ve kterém místě selže Dijkstrův algoritmus, jestliže připustíme i záporná ohodnocení hran?

8.5 Příklady k procvičení

Hyperkrychlí řádu n budeme rozumět takový graf $G(V, E)$ na 2^n vrcholech, jehož vrcholovou množinu tvoří všechny binární vektory délky n

$$V = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \dots, n\}$$

a hrana je mezi každými dvěma vrcholy, jejichž vektory se liší v jediné souřadnici

$$E = \{(a_1, a_2, \dots, a_n)(b_1, b_2, \dots, b_n) : (a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in V \wedge \sum_{i=1}^n |a_i - b_i| = 1\}.$$

Hyperkrychle řádu se značí Q_n .

8.5.1. Mějme graf Q_3 (hyperkrychle řádu 3). Kolik nejméně hran musíme přidat, aby největší vzdálenost mezi vrcholy grafu byla 2? [2]

8.5.2. \heartsuit Jaká je největší vzdálenost dvou vrcholů v grafu Q_n ? Dokažte [n]

8.5.3.* Jak převést úlohu hledání nejkratší cesty i pro grafy s ohodnocenými vrcholy? [nahradit vrchol stupně d grafem K_d]

8.5.4. Kolik nejvíce vrcholů může mít graf, který má největší vzdálenost mezi dvěma vrcholy rovnou 2? [počet vrcholů není omezen]

8.5.5. Kolik nejvíce vrcholů může mít 3-pravidelný graf, který má největší vzdálenost mezi dvěma vrcholy rovnou 2? Nakreslete příklad takového grafu. [10, například Petersenův graf]

8.5.6. V jednom okrese je 15 velkých měst a každé město je spojeno silnicí s alespoň sedmi jinými.

- Dokažte, že z libovolného města do libovolného jiného se dá dostat buď přímou cestou nebo přes jedno jiné město. [nepřímo nebo sporem]
- Jak by se úloha změnila, kdyby každé město mělo být spojeno silnicí s právě sedmi jinými? [taková silniční síť neexistuje]

9 Stromy a les

Řešené příklady

9.0.1. Kolik neisomorfních lesů existuje na pěti vrcholech?

Vyšetříme možnosti podle počtu hran

- bez hran: 1 les $5K_1$
- s 1 hranou: 1 les $K_2 \cup 3K_1$
- se 2 hranami: 2 lesy $K_2 \cup K_2 \cup K_1, P_2 \cup 2K_2$
- se 3 hranami: 1 + 2 lesy $K_{1,3} \cup K_1, P_3 \cup K_1, P_2 \cup K_2$
- se 4 hranami: 3 stromy P_4 , dvojhvězda $DS(2, 1)$, $K_{1,4}$

Celkem 10 lesů.

9.0.2. Najděte takový graf se dvěma kružnicemi, že vynecháním jediné hrany vznikne strom.

Takový strom neexistuje.

Nejprve ukážeme, že pokud strom obsahuje dvě kružnice, tyto dvě kružnice nesdílí žádnou hranu. Pokud by kružnice C_1 a C_2 sdílely hranu xy , tak vynecháním hrany xy z cyklu C_1 zůstane v grafu cesta mezi vrcholy x a y a podobně z cyklu C_2 zůstane v grafu také (druhá) cesta mezi x a y . Spojením těchto dvou cest dostaneme uzavřený sled, ze kterého je možno vybrat třetí cyklus C_3 , což není možné, neboť graf obsahuje pouze cykly dva.

Nyní víme, že obě kružnice v grafu nesdílí žádnou hranu. Vynecháním libovolné hrany e_1 z C_1 zůstane graf souvislý (vynechaná hrana e_1 neovlivní souvislost grafu) a bude obsahovat jediný cyklus C_2 . Graf nebude acyklický a proto takový graf, který splňuje podmínky zadání, neexistuje. Podobně vynecháním libovolné hrany e_2 z C_2 zůstane graf souvislý (vynechaná hrana e_2 neovlivní souvislost grafu) a graf bude bez cyklů, tj. strom. \square

Jiný důkaz:

Podle důsledku Věty 9.6 ve skriptech, vznikne přidáním hrany právě jeden cyklus. Existence grafu se zadání by byla ve sporu s tímto důsledkem. \square

9.0.3. Kolik hran je třeba vynechat z kompletního grafu K_n , aby zůstala kostra?

Z celkového počtu $\binom{n}{2}$ hran má zůstat $n - 1$. Proto je třeba vynechat právě

$$\binom{n}{2} - (n - 1) = \binom{n}{2} - (n - 1) = \frac{1}{2}n(n - 1) - (n - 1) = \frac{1}{2}(n - 1)(n - 2) = \binom{n - 1}{2}$$

hran.

Jiné řešení:

Protože kostra grafu je stromem na n vrcholech, obsahuje každá kostra stejný počet hran. Vybereme jednu konkrétní kostru. V kompletním grafu K_n zvolíme vrchol v a kostra grafu K_n bude tvořena všemi hranami incidentními s v . Ostatní hrany mezi zbývajících $n - 1$ vrcholy odstraníme. Odstraněných hran je $\binom{n-1}{2}$.

9.1 Motivační příklady

9.1.1. Můžeme algoritmus hledání centra použít i pro jiné grafy než stromy? Vysvětlete! [ne]

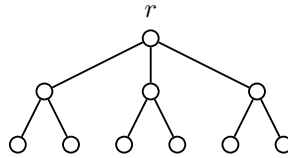
9.2 Základní vlastnosti stromů

9.2.1. Kolik neisomorfních lesů existuje na čtyřech vrcholech? [1+1+2+2=6]

9.2.2. Kolik neisomorfních stromů existuje na pěti vrcholech? [1 + 1 + 1 = 3]

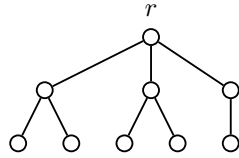
9.2.3. \heartsuit Najděte centra následujících stromů.

a) Strom T na Obrázku 9.1.



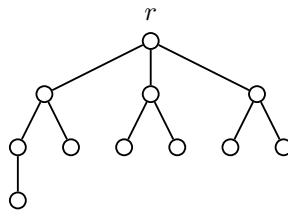
Obrázek 9.1: Strom T .

b) Strom T na Obrázku 9.2.



Obrázek 9.2: Strom T .

c) Strom T na Obrázku 9.3.



Obrázek 9.3: Strom T .

9.2.4. Máme dán strom se 17 vrcholy.

- a) Kolik odebereme vrcholů (dle algoritmu z přednášky), než najdeme centrum? [15 nebo 16]
 b) Kolik nejméně nastane takových kroků, kdy odstraňujeme listy? [jeden]
 c) Kolik nejvíce nastane takových kroků, kdy odstraňujeme listy? [osm]

9.2.5.♥ Máme dán strom se 4 vrcholy. Kolik odebereme vrcholů (dle algoritmu z přednášky), než najdeme centrum? [2 nebo 3]

9.2.6.♥ Strom má 56 hran. Kolik může mít vrcholů? [57]

9.2.7. Acyklický graf má 70 vrcholů a 60 hran. Kolik má komponent? [10]

9.2.8. Acyklický graf má 60 vrcholů a 70 hran. Kolik má komponent? [takový graf neexistuje]

9.2.9.♥ Najděte graf se dvěma kružnicemi, ze kterého vynecháním dvou hran vznikne strom. [lehké]

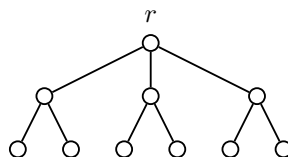
9.2.10. Najděte graf se dvěma kružnicemi, ze kterého vynecháním tří hran vznikne strom. [neexistuje]

9.2.11. Najděte graf se třemi kružnicemi, ze kterého vynecháním tří hran vznikne strom. [existuje]

9.2.12. Najděte graf se třemi kružnicemi, ze kterého vynecháním dvou hran vznikne strom. [existuje]

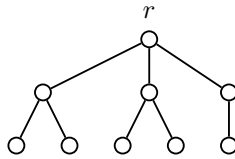
9.3 Kořenové a pěstované stromy

9.3.1. Najděte a запиšte kód kořenového stromu (T, r) na Obrázku 9.4.

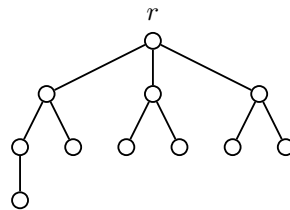


Obrázek 9.4: *Kořenový strom (T, r) .*

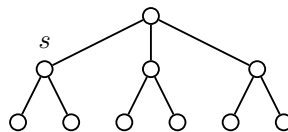
[00010110010110010111]

9.3.2. Najděte a zapište kód kořenového stromu (T, r) na Obrázku 9.5.Obrázek 9.5: *Kořenový strom (T, r) .*

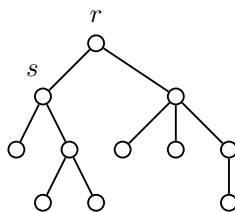
[000101100101100111]

9.3.3. Najděte a zapište kód kořenového stromu (T, r) na Obrázku 9.6.Obrázek 9.6: *Kořenový strom (T, r) .*

[0000110110010110010111]

9.3.4. Najděte a zapište kód kořenového stromu (T, s) na Obrázku 9.7.Obrázek 9.7: *Kořenový strom (T, s) .*

[00101000101100101111]

9.3.5. Máme dán strom T na Obrázku 9.8Obrázek 9.8: *Strom T .*

- a) Najděte a zapište kód kořenového stromu (T, r) . [0001001011100101001111]
- b) Najděte a zapište minimální kód kořenového stromu (T, r) . [0000101101100011010111]
- c) Najděte a zapište kód kořenového stromu (T, s) . [00100101100101001111]
- d) Najděte a zapište minimální kód kořenového stromu (T, s) . [0000011010111001011011]

9.3.6. Nakreslete pěstovaný kořenový strom daný následujícím kódem

- a) 000000000111111111. [strom isomorfní s P_8]
- b) 00010110010110010111 [viz Obrázek 9.4]
- c) 000010110100111000110111

- d) 00001011010011100011011 [toto není korektní kód]
- e) 000010110110011100011011 [toto není korektní kód]

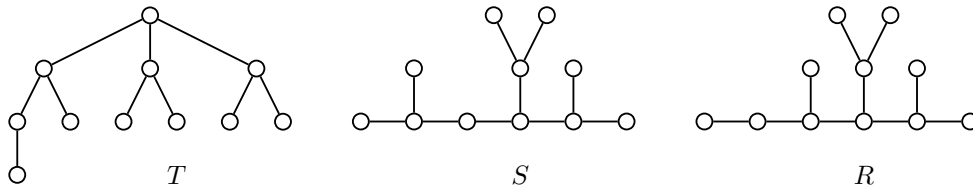
9.3.7. Je kód pěstovaného kořenového stromu daného následujícím kódem minimální?

- a) 000000000111111111. [ano]
- b) 00010110010110010111 [ano]
- c) 000010110100111000110111 [ne]

9.4 Isomorfismus stromů

9.4.1. Které kořenové stromy mají jednoznačně určený kód i když nejsou pěstované? [takové, kde všechny vrcholy ve vzdálenosti d od kořene mají stejný stupeň]

9.4.2. Rozhodněte, které z následujících stromů na Obrázku 9.9 jsou isomorfní.

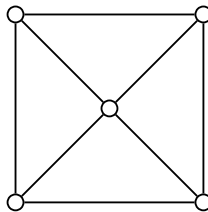


Obrázek 9.9: Stromy T , S a R .

[isomorfní jsou T a R]

9.5 Kostry grafů

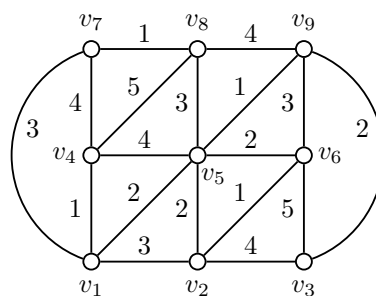
9.5.1. Kolik koster má následující graf W_4 ?



Obrázek 9.10: Graf W_4 .

[45 možností]

9.5.2. Máme dán graf G na Obrázku 9.11.



Obrázek 9.11: Graf G .

- a) Najděte minimální kostru grafu G pomocí Kruskalova (hladového) algoritmu. Jaká je váha minimální kostry? [minimální váha je 13]

- b) Najděte minimální kostru grafu G pomocí Jarníkova (Primova) algoritmu. Výchozí vrchol je v_1 . Jaká je váha minimální kostry? [minimální váha je 13]
- c) Najděte minimální kostru grafu G pomocí Borůvkova algoritmu. Jaká je váha minimální kostry? [nelze použít]

9.5.3. Jaké vlastnosti musí mít ohodnocení grafu, aby všechny tři algoritmy (Borůvkův, Jarníkův/Primův i Kruskalův (hladový) našly vždy stejnou kostru? [ohodnocení musí být injekcí]

9.6 Příklady k procvičení

9.6.1.♥ Kolik různých koster má cyklus C_n ? [n]

9.6.2.♥ Kolik různých neisomorfních koster má cyklus C_n ? [jedinou]

9.6.3. Máme graf K_4 .

- a) Kolik různých neisomorfních koster má graf K_4 ? [2]
- b) Kolik různých koster má graf K_4 ? [16]

9.6.4. Máme graf K_5 .

- a) Kolik různých koster má graf K_5 ? [125]
- b) Kolik různých neisomorfních koster má graf K_5 ? [3]

9.6.5. Máme graf K_6 .

- a) Kolik různých koster má graf K_6 ? [1296]
- b) Kolik různých neisomorfních koster má graf K_6 ? [6]

9.6.6. Kolik hran je třeba vynechat z kompletního bipartitního grafu $K_{m,n}$, aby zůstala kostra? [$(m - 1)(n - 1)$]

9.6.7. Kolik nejméně vrcholů musí mít graf, který má dvě hranově disjunktní kostry? [4]

9.6.8. Najděte příklad souvislého grafu, který má 1001 koster. [spojení tří cyklů C_7 , C_{11} a C_{13}]

9.6.9. Zavedeme pojem inverzního kódu. Máme strom T a nějaký jeho kód C . Inverzní kód C' dostaneme tak, že zaměníme 0 a 1 a napíšeme kód v opačném pořadí. Najděte takový netriviální strom T , který má

- a) stejný kód i inverzní kód, [cesta s kořenem v listu]
- b) různý kód a inverzní kód, přičemž strom T' příslušný inverznímu kódu je isomorfní se stromem T ,
- c) různý kód a inverzní kód, přičemž strom T' příslušný inverznímu kódu není isomorfní se stromem T ,
- d) inverzní kód stejný jako minimální kód. [cesta s kořenem v listu]

9.6.10. Máme strom T a jeho kód C . Cestou ve strom T budeme rozumět podgraf, který je isomorfní s cestou. Co můžeme říci o nejdelší cestě ve stromu T , je-li v kódu C pět po sobě jdoucích nul? [nejdelší cesta ve strom T je délky alespoň 4]

9.6.11. Máme strom T a jeho *minimální* kód C . Cestou ve strom T budeme rozumět podgraf, který je isomorfní s cestou. Co můžeme říci o nejdelší cestě ve stromu T , je-li v kódu C pět po sobě jdoucích nul? [nejdelší cesta ve strom T je délky alespoň 4]

10 Barvení a rovinné kreslení grafů

Řešené příklady

10.0.1. Máme dány hyperkrychli řádu n , značíme ji Q_n (viz strana 55).

a) Jaký je počet vrcholů Q_n ?

Vrcholy hyperkrychle jsou všechny binární vektory délky n . Těch je $V^*(2, n) = 2^n$.

Jiné řešení:

Počet vrcholů určíme podle (rekurzivní) konstrukce: $|V(Q_1)| = 2$. Dále platí $|V(Q_{n+1})| = 2 \cdot |V(Q_n)|$, proto $|V(Q_n)| = 2^n$.

b) Jaký je stupeň vrcholů v grafu Q_n ?

Každý vrchol je spojen hranou se všemi vrcholy, které se liší v jediné souřadnici. Souřadnic je n , proto je každý vrchol stupně n .

c) Jaký je počet hran Q_n ?

V hyperkrychli je podle předchozích příkladů 2^n vrcholů a každý je stupně n . Podle principu sudosti je dvojnásobek počtu hran roven součtu stupňů všech vrcholů

$$2|E(Q_n)| = n \cdot 2^n.$$

Odtud snadno vyjádříme, že $|E(Q_n)| = n \cdot 2^{n-1}$.

Jiné řešení:

Q_n je regulární graf. V každém kroku konstrukce přidáme ke každému vrcholu jednu hranu a zvýšíme stupeň vrcholu, proto $\deg_{Q_n} v = n$.

d) Jaké je chromatické číslo Q_n ?

Ukážeme, že chromatické číslo Q_n je 2, neboli že Q_n bipartitní graf. Stačí obarvit vrcholy, které mají sudý počet jedniček barvou 0 a vrcholy, které mají lichý počet jedniček barvou 1. Toto barvení je dobré, neboť hranou jsou spojeny pouze vrcholy, které se liší v jediné souřadnici a tedy takové, jejichž počet jedniček se liší o jedna.

Jiné řešení:

Indukcí ukážeme, že Q_n je bipartitní graf.

Základ indukce: graf $Q_1 = K_{1,1}$ je jistě bipartitní.

Indukční předpoklad: Předpokládejme, že Q_n je bipartitní graf, ukážeme, že také Q_{n+1} je bipartitní. Graf Q_{n+1} se skládá ze dvou kopií bipartitního grafu Q_n . Každou z nich obarvíme dvěma barvami, jednu barvami 1, 2 druhou opačně barvami 2, 1. Q_{n+1} vznikne spojením hranami mezi odpovídajícími vrcholy (mají různé barvy). Proto je $\chi(Q_n) = 2$.

e) Pro které hodnoty n je graf Q_n rovinný?

Graf Q_n je bipartitní (viz d), proto neobsahuje žádný lichý cyklus ani trojúhelník a podle Důsledku 10.9. obsahuje každý rovinný graf bez trojúhelníků vrchol stupně nejvýše 3. Protože podle c) jsou v Q_n všechny vrcholy stupně n , nejsou hyperkrychle Q_n pro $n \geq 4$ rovinné. Rovinná nakreslení grafů Q_1 , Q_2 a Q_3 jsou snadno k nalezení.

10.0.2. Najděte chybu v následujícím důkazu: Mějme takový graf G , že na jeho dobré vrcholové barvení je potřeba alespoň 5 barev. V grafu G musí být vrcholy stupně alespoň 5, které jsou sousední s vrcholy čtyř ostatních barev, jinak bychom je mohli přebarvit a použít méně než 5 barev. Jiste najdeme takovou množinu pěti vrcholů různé barvy, které tvoří podgraf K_5 .

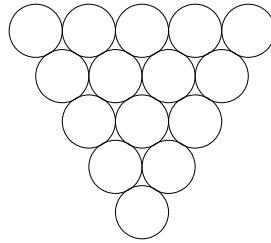
V roviném grafu podle Kuratowského věty neexistuje podgraf isomorfní s K_5 a proto (podle předchozího zdůvodnění) na obarvení roviného grafu budou stačit vždy čtyři barvy.

Chyba je v předpoklady, že graf, na jehož obarvení je potřeba alespoň 5 barev, musí obsahovat podgraf K_5 . Například graf W_7 , do kterého přidáme druhý centrální vrchol y a spojíme ho hranami se všemi vrcholy cyklu C_7 i s centrálním vrcholem x kola W_7 , neobsahuje K_5 jako podgraf (žádné tři vrcholy na obvodu kola nejsou navzájem sousední) a přitom je potřeba na obarvení grafu alespoň 5 barev: dvě na centrální vrcholy x a y a tři na vrcholy cyklu C_7 . Na základě tohoto neplatného tvrzení je pak již snadné „dokázat“ větu o čtyřech barvách.

10.1 Motivační příklady

10.1.1. Skladovací problém: Ve skladu potravin máme různé druhy zboží. Podle hygienických norem se nesmí některé druhy potravin skladovat spolu v jedné místnosti. Naším úkolem je zjistit, kolik nejméně místností je potřeba ve skladu pronajmout, aby bylo zboží uloženo podle předpisů. Jak namodelujete skladovací problém pomocí teorie grafů. [převédeme na barvení jednoduchého grafu]

10.1.2. Kolik nejméně barev je potřeba na obarvení 15 biliárových koulí v trojúhelníkovém postavení tak, aby žádné dvě dotýkající se koule nebyly obarveny stejnou barvou?

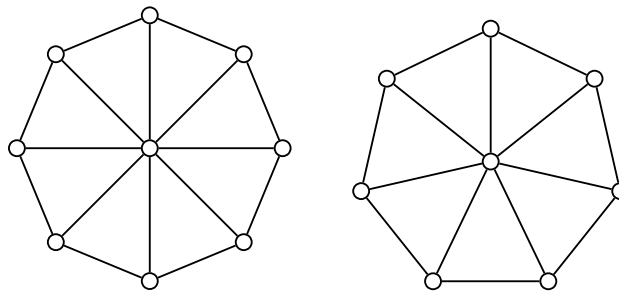


Obrázek 10.1: Biliárové koule v trojúhelníkovém postavení.

[3]

10.2 Vrcholové barvení grafů

10.2.1. Jaké je chromatické číslo (barevnost) následujících grafů?



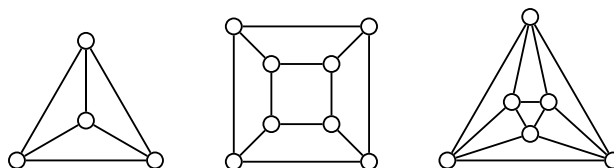
Obrázek 10.2: Grafy W_8 a W_7 .

a) Graf W_8 , viz Obrázek 10.2?

[3]

b) Graf W_7 , viz Obrázek 10.2?

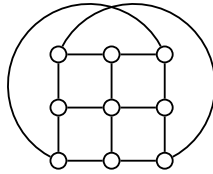
[4]



Obrázek 10.3: Rovinná nakreslení pravidelného čtyřstěnu, šestistěnu a osmistěnu.

- c) Grafu pravidelného čtyřstěnu, viz Obrázek 10.3. [4]
- d) Grafu pravidelného šestistěnu, viz Obrázek 10.3. [2]
- e) Grafu pravidelného osmistěnu, viz Obrázek 10.3. [3]

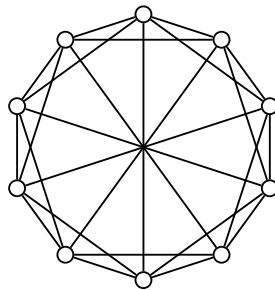
10.2.2. Jaké je chromatické číslo (barevnost) grafu G na Obrázku 10.4?



Obrázek 10.4: Graf G .

[3]

10.2.3. Jaké je chromatické číslo (barevnost) cirkulantu $C_{10}(1, 2, 5)$ na Obrázku 10.5?



Obrázek 10.5: Cirkulant $C_{10}(1, 2, 5)$.

[4]

10.2.4. Kolik nejméně musíme vynechat hran z grafu W_8 (viz Obrázek 10.2), aby jeho chromatické číslo bylo 2? [4]

10.2.5. Kolika nejvýše barvami obarvíme kompletní bipartitní graf, jestliže mu přidáme jednu hranu? [3]

10.2.6. Kolika nejvýše barvami obarvíme kompletní bipartitní graf, jestliže mu přidáme dvě hrany? [3 nebo 4]

10.2.7. ♡ Kolika barvami lze obarvit strom. [1 pro $T = K_1$, 2 jinak]

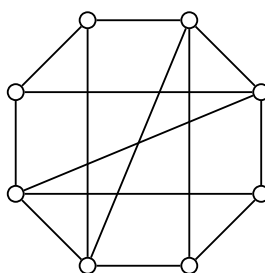
10.2.8. Kolik barev je potřeba na obarvení (jaká je barevnost) $K_n - e$? [$n - 1$]

10.2.9. Kolik barev je potřeba na obarvení (jaká je barevnost) C_n s jednou přidanou hranou v_1v_i , $i \in [1, n]$? [2 pro n , i sudé, 3 jinak]

10.2.10. Mám dán graf G . Co můžeme říci o barvenosti grafu G , jestliže známe $\Delta(G)$? [$\chi(G) \leq 1 + \Delta(G)$]

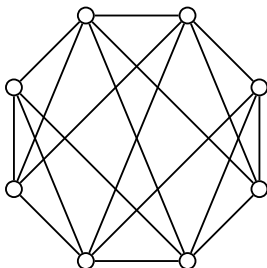
10.3 Rovinné kreslení grafu

10.3.1. Pokud je to možné, nakreslete graf G na Obrázku 10.6 tak, aby se hrany neprotínaly.



Obrázek 10.6: *Graf G*.[*G* je rovinný]

10.3.2. Pokud je to možné, nakreslete graf *G* na Obrázku 10.7 tak, aby se hrany neprotínaly.

Obrázek 10.7: *Graf G*.[*G* je rovinný]

10.3.3. Ukažte, že po přidání libovolné hrany do grafu na Obrázku 10.7 výsledný graf již nebude rovinný. [užitím důsledku Eulerova vzorce]

10.3.4. Pokud je to možné, nakreslete rovinný graf pravidelného čtyřstěnu. [graf pravidelného čtyřstěnu je rovinný]

10.3.5. Pokud je to možné, nakreslete rovinný graf pravidelného šestistěnu (krychle). [graf pravidelného šestistěnu je rovinný]

10.3.6. Pokud je to možné, nakreslete rovinný graf pravidelného osmistěnu. [graf pravidelného osmistěnu je rovinný]

10.3.7. Nakreslete rovinný graf pravidelného dvanáctistěnu. [graf pravidelného dvanáctistěnu je rovinný]

10.3.8. Nakreslete rovinný graf pravidelného dvacetistěnu. [graf pravidelného dvacetistěnu je rovinný]

10.3.9. Nakreslete rovinný graf osmistěnu a najděte odpovídající duální graf. [duální graf pravidelného osmistěnu je graf pravidelného šestistěnu (krychle)]

10.3.10. Nakreslete rovinný graf dvanáctistěny a najděte odpovídající duální graf. [duální graf pravidelného dvanáctistěnu je graf pravidelného dvacetistěnu]

10.3.11. Máme nějaké rovinné nakreslení pravidelného osmistěnu. Stěny pravidelného osmistěnu jsou trojúhelníky.

- Kolik má oblastí? [8]
- Kolik má hran? [12]
- Kolik má vrcholů? [6]
- Kolik dalších hran můžeme do rovinného nakreslení osmistěnu přidat tak, aby graf zůstal rovinný? [žádnou]

10.3.12. Máme nějaké rovinné nakreslení pravidelného šestistěnu (krychle).

- Kolik má oblastí? [6]
- Kolik má hran? [12]
- Kolik má vrcholů? [8]
- Kolik dalších hran můžeme do rovinného nakreslení krychle přidat tak, aby graf zůstal rovinný? [6 hran]

10.3.13. Máme nějaké rovinné nakreslení pravidelného dvanáctistěnu. Stěny pravidelného dvanáctistěnu jsou pětiúhelníky.

- a) Kolik má oblastí? [12]
- b) Kolik má hran? [30]
- c) Kolik má vrcholů? [20]
- d) Kolik dalších hran můžeme do rovinného nakreslení dvanáctistěnu přidat tak, aby graf zůstal rovinný? [24 hran]

10.3.14. Máme nějaké rovinné nakreslení pravidelného dvacetistěnu. Stěny pravidelného dvacetistěnu jsou trojúhelníky.

- a) Kolik má oblastí? [12]
- b) Kolik má hran? [30]
- c) Kolik má vrcholů? [12]
- d) Kolik dalších hran můžeme do rovinného nakreslení dvacetistěnu přidat tak, aby graf zůstal rovinný? [žádnou]

10.3.15. Kolik má souvislý rovinný graf stěn, víte-li že má

- a) 20 vrcholů a 25 hran? [7]
- b) 16 vrcholů a 15 hran? [1]
- c) 25 vrcholů a 22 hran? [takový souvislý graf neexistuje]
- d) 5 vrcholů a 10 hran? [takový rovinný graf neexistuje]

10.3.16. Nakreslete graf K_4 tak, aby

- a) se hrany neprotínaly [graf K_4 je grafem pravidelného čtyřstěnu]
- b) a navíc aby byly úsečky. [graf K_4 je grafem pravidelného čtyřstěnu]

10.3.17. Nakreslete graf $K_5 - e$ tak, aby

- a) se hrany neprotínaly [$K_5 - e$ je rovinný, nakreslení existuje]
- b) a navíc aby byly úsečky. [$K_5 - e$ je rovinný, nakreslení existuje]

10.3.18. Nakreslete graf $K_{3,3} - e$ tak, aby

- a) se hrany neprotínaly [$K_{3,3} - e$ je rovinný, nakreslení existuje]
- b) a navíc aby byly úsečky. [$K_{3,3} - e$ je rovinný, nakreslení existuje]

10.3.19. Najděte rovinný graf, který má nejmenší stupeň vrcholů 5. [graf pravidelného dvacetistěnu]

10.3.20.* Najděte nekonečně mnoho neisomorfních souvislých rovinných grafů, které mají nejmenší stupeň vrcholů 5. [šikově spojíme více pravidelných dvacetistěnu]

10.3.21. Do rovinného nakreslení stromu přidáme dvě hrany, které se navzájem nekříží a nekříží ani žádnou původní hranu stromu. Kolik bude mít výsledný graf oblastí (stěn)? [3]

10.4 Rozpoznání rovinných grafů

10.4.1. \heartsuit Pro která n je graf K_n rovinný? Zdůvodněte. [pro $1 \leq n \leq 4$, užitím Kuratowského věty]

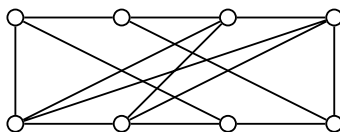
10.4.2. \heartsuit Pro která m, n je graf $K_{m,n}$ rovinný? Zdůvodněte. [pouze pro $m < 3$ nebo $n < 3$]

10.4.3. Existuje rovinné nakreslení pro $K_6 - C_3$? Zdůvodněte. [ne, podle Kuratowského věty]

10.4.4. Nakreslete nějaký rovinný graf s 12 hranami a 8 stěnami. [graf pravidelného osmistěnu]

10.4.5. Nakreslete nějaký rovinný graf s 21 hranami a 16 stěnami. [takový graf neexistuje]

10.4.6.* Je graf G na Obrázku 10.8 rovinný? Zdůvodněte.



Obrázek 10.8: Graf G .

[ne, podle Kuratowského věty]

10.5 Barvení map a rovinných grafů

10.5.1. Kolik nejméně barev je třeba na dobré vrcholové barvení rovinného nakreslení grafů?

a) $K_5 - e$ [4]

b) $K_{3,3} - e$ [2]

10.5.2. Najdete rovinný graf, na jehož obarvení je potřeba alespoň 5 barev? Zdůvodněte. [takový graf neexistuje podle věty o 4 barvách]

10.5.3. Kolik barev je třeba na dobré obarvení hyperkrychle Q_n ? [2 (je bipartitní)]

10.5.4. Najdete graf s největším stupněm 2 na jehož dobré vrcholové barvení jsou potřeba alespoň 3 barvy? Zdůvodněte. [ano, takové grafy existují]

10.5.5. Najděte graf s největším stupněm r na jehož dobré vrcholové barvení je potřeba alespoň $r + 1$ barev. [K_{r+1}]

10.5.6. Najdete graf s největším stupněm 3 na jehož dobré vrcholové barvení je potřeba minimálně 5 barev? Zdůvodněte. [takový graf neexistuje]

10.6 Bonus – Hamiltonovské grafy

10.6.1. Nechť $V(G)$ grafu G je množina všech dvouprvkových podmnožin množiny $[1, 5]$ a nechť hrana $XY \in E(G)$ právě tehdy, když jsou dvouprvkové podmnožiny X, Y disjunktní ($X \cap Y = \emptyset$). Nakreslete graf. [Petersenův graf]

10.6.2. Je Petersenův graf hamiltonovský? Své tvrzení dokažte. [Petersenův graf není hamiltonovský]

10.6.3. Je Petersenův graf rovinný? Zdůvodněte. [není rovinný]

10.7 Příklady k procvičení

10.7.1. Podle předpisů se káva nesmí skladovat společně s rýží, rýže s moukou, mouka s jablky a jablka se nesmí skladovat společně s tropickým ovocem. Kolik nejméně místností je potřeba pro uskladnění všech druhů zboží? [stačí 2 místnosti]

10.7.2. Máme za úkol pronajmout skladové prostory, ve kterých se budou skladovat broskve, kukuřice, papriky, pšenice, rajčata, švestky a konzervy. Podle předpisů se obiloviny nesmí skladovat společně s ovocem, rajčata ani papriky se nesmí skladovat s pšenicí nebo kukuřicí a broskve se nesmí skladovat s rajčaty. Kolik nejméně místností je třeba pronajmout pro uskladnění všech druhů zboží? [3 místnosti]

10.7.3. Kolik hran stačí přidat do cyklu C_n , aby výsledný graf nebyl rovinný? [pro $n \geq 6$ 3 hrany, pro $n = 5$ 5 hran a pro $n < 5$ nelze]

10.7.4. Nakreslete graf K_5 na torus.

10.7.5. Nakreslete graf K_6 na torus.

10.7.6. Nakreslete graf K_7 na torus.

10.7.7. Nakreslete graf $K_{3,3}$ na torus.

10.7.8. Nakreslete graf $K_{4,4}$ na torus.

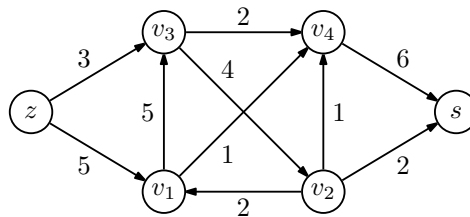
11 Kapitola 11 – Toky v sítích

11.1 Definice sítě

- 11.1.1. Pro které vrcholy sítě neplatí zákony kontinuity? [zdroj a stok]
- 11.1.2. Jak v síti namodelovat neorientovanou hranu? [dvojicí nesouhlasně orientovaných hran]
- 11.1.3. Může pro (jediný) zdroj platit zákon kontinuity? [ano]
- 11.1.4. Může v síti něco přitékat do zdroje? [ano]
- 11.1.5. Může být tok na hranách vycházející ze zdroje větší, než tok na hranách přitékajících do stoku? [ano]

11.2 Hledání maximálního toku

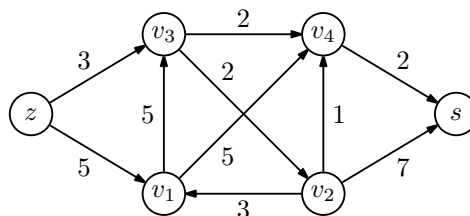
11.2.1. Máme danu síť $S = (G, z, s, w)$ na Obrázku 11.1.



Obrázek 11.1: Síť (G, z, s, w) .

- a) Jaká je hodnota největšího toku v síti S ? Najděte jej! [6]
- b) Jaká je kapacita minimálního řezu v síti S ? Najděte minimální řez. [6, $\{v_3v_4, v_1v_4, v_2v_4, v_2z\}$]
- c) Jak vypadá množina U po skončení algoritmu? [$U = \{s, v_1, v_2, v_3\}$]

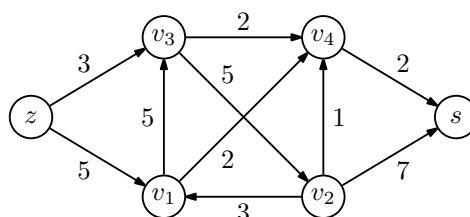
11.2.2. Máme danu síť $S = (G, z, s, w)$ na Obrázku 11.2.



Obrázek 11.2: Síť (G, z, s, w) .

- a) Jaká je hodnota největšího toku v síti S ? Najděte jej! [4]
- b) Jaká je kapacita minimálního řezu v síti S ? Najděte minimální řez. [4, $\{v_3v_2, v_4z\}$]
- c) Jak vypadá množina U po skončení algoritmu? [$U = \{s, v_1, v_3, v_4\}$]

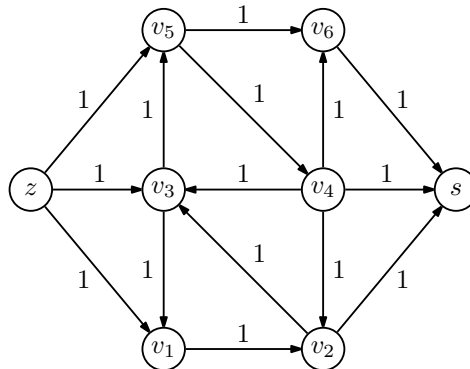
11.2.3. Máme danu síť $S = (G, z, s, w)$ na Obrázku 11.3.



Obrázek 11.3: Síť (G, z, s, w) .

- a) Jaká je hodnota největšího toku v síti S ? Najděte jej! [7]
- b) Jaká je kapacita minimálního řezu v síti S ? Najděte minimální řez. [7, $\{v_3v_2, v_4z\}$]
- c) Jak vypadá množina U po skončení algoritmu? [$U = \{s, v_1, v_3, v_4\}$]

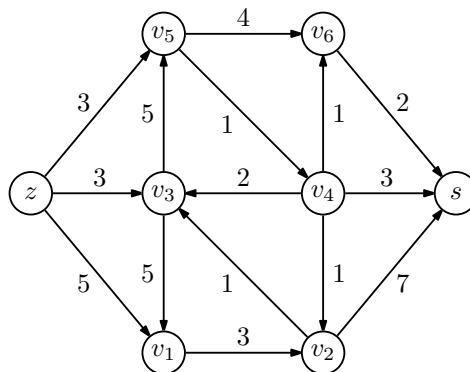
11.2.4. Máme dānu síť $S = (G, z, s, w)$ na Obrázku 11.4.



Obrázek 11.4: Síť (G, z, s, w) .

- a) Jaká je hodnota největšího toku v síti S ? Najděte jej! [3]
- b) Jaká je kapacita minimálního řezu v síti S ? Najděte minimální řez. [3, $\{sv_1, sv_3, sv_5\}$]
- c) Jak vypadá množina U po skončení algoritmu? [$U = \{s\}$]

11.2.5. Máme dānu síť $S = (G, z, s, w)$ na Obrázku 11.5.

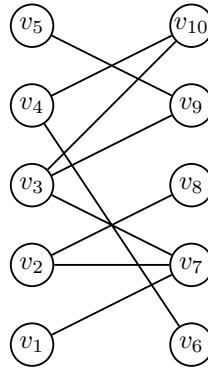


Obrázek 11.5: Síť (G, z, s, w) .

- a) Jaká je hodnota největšího toku v síti S ? Najděte jej! [6]
- b) Jaká je kapacita minimálního řezu v síti S ? Najděte minimální řez. [6, $\{v_1v_2, v_5v_4, v_6z\}$]
- c) Jak vypadá množina U po skončení algoritmu? [$U = \{s, v_1, v_3, v_5, v_6\}$]

11.3 Zobecnění sítí a další aplikace

11.3.1. Najděte největší párování v následujícím grafu. Zdůvodněte, proč neexistuje větší párování.

Obrázek 11.6: Bipartitní graf G .[$v_2v_8, v_3v_5, v_4v_6, v_5v_9$]

11.3.2. Existuje systém různých reprezentantů pro následující systém množin? Pokud ano, najděte ho, pokud ne, dokažte to.

$$M_1 = \{1, 2, 4\}, M_2 = \{1, 3, 7\}, M_3 = \{1, 5, 6\}, M_4 = \{2, 6, 7\}, M_5 = \{2, 3, 5\}, M_6 = \{3, 4, 6\}, M_7 = \{4, 5, 7\}$$

[systém reprezentantů $x_1 = 1, x_2 = 7, x_3 = 5, x_4 = 6, x_5 = 2, x_6 = 3, x_7 = 4$]

11.3.3. Existuje systém různých reprezentantů pro následující systém množin? Pokud ano, najděte ho, pokud ne, dokažte to.

$$M_1 = \{1, 4, 5\}, M_2 = \{1, 4, 6\}, M_3 = \{1, 5, 6\}, M_4 = \{2, 3, 5\}, M_5 = \{4, 5, 6\}, M_6 = \{4, 5, 7\}, M_7 = \{4, 6, 7\}$$

[systém reprezentantů: $|M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_5 \cup M_6 \cup M_7| = |\{1, 4, 5, 6, 7\}| = 5 \not\geq 6$]

11.4 Příklady k procvičení

11.4.1. Najděte příklad sítě, kde kapacity hran jsou celočíselné a maximální tok není celočíselný. [taková síť neexistuje]

Reference

- [F] D. Fronček, Teorie grafů, skriptum, VŠB (1999).
- [H] P. Hliněný, Diskrétní matematika, skriptum, VŠB (2005).
- [MN] J. Matoušek, J. Nešetřil, Kapitoly z diskrétní matematiky, Univerzita Karlova, Praha (2003),
- [DMA] K.H. Rosen, Discrete Mathematics and its Applications – 6th ed., McGraw-Hill, New York (2007).
- [W] D. B. West, Introduction to graph theory – 2nd ed., *Prentice-Hall*, Upper Saddle River NJ, (2001).