

**Interaktivní 3D grafika generovaná
programem Asymptote pro podporu
výuky diferenciálního počtu funkcí
více proměnných**

**Interactive 3D graphics generated
by program Asymptote for multi
variable calculus**

Zadání bakalářské práce

Student: **Ladislav Foltyn**

Studijní program: B2647 Informační a komunikační technologie

Studijní obor: 1103R031 Výpočetní matematika

Téma: Interaktivní 3d grafika generovaná programem Asymptote pro podporu
výuky diferenciálního počtu funkcí více proměnných
Interaktive 3d graphics generated by program Asymptote for Multi
Variable Calculus

Zásady pro vypracování:

Cílem práce je vytvoření sady řešených úloh s vloženou interaktivní 3d grafikou pro podporu výuky diferenciálního počtu funkcí více proměnných. Matematická interaktivní 3d grafika bude vytvořena v open source programu Asymptote. Jedná se o interpretovaný jazyk se syntaxí založenou na jazyce C++. Zdrojový kód programu Asymptote je pak možno umístit přímo do zdrojového kódu LaTeXového dokumentu a grafiku tak generovat společně se samotným dokumentem. Výsledkem je pak PDF soubor s vloženou interaktivní 3d grafikou.

Seznam doporučené odborné literatury:

Oficiální stránky Asymptote. [online]. 2004 [cit. 2011-12-15]. Dostupné z WWW: <http://asymptote.sourceforge.net/>

ASYMPTOTE - Galeries d'exemples. [online]. 2011 [cit. 2011-12-15]. Dostupné z WWW: <http://marris.org/asymptote/>

PLCH, Roman - ŠARMANOVÁ, Petra. Interaktivní 3D grafika v HTML a PDF dokumentech. Zpravodaj československého sdružení uživatelů TEXu, Praha : Československé sdružení uživatelů TEXu, 18, 1-2, od s.76-92, 16 s. ISSN 1211-6661.2008.

Kutal Ondřej, Tvorba matematické grafiky pomocí programu Asymptote, diplomová práce, Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita Brno, 2012

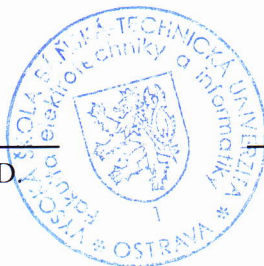
Formální náležitosti a rozsah bakalářské práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí bakalářské práce: **RNDr. Petra Šarmanová, Ph.D.**

Datum zadání: 16.11.2012

Datum odevzdání: 07.05.2013

doc. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D.
vedoucí katedry



prof. RNDr. Václav Snášel, CSc.
děkan fakulty

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně. Uvedl jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpal.

V Ostravě 6. května 2013



V první řadě bych chtěl poděkovat RNDr. Petře Šarmanové, Ph.D. za svůj drahocenný čas, který mi věnovala při konzultacích, a také za odborné vedení bakalářské práce. Dále bych chtěl poděkovat své rodině, která měla ve mně velkou důvěru a dodávala mi síly i odhodlání při tvorbě této práce. V neposlední řadě bych chtěl poděkovat svým blízkým přátelům, kteří mě taktéž dokázali dostatečně podpořit.

Abstrakt

Cílem bakalářské práce je vysvětlit geometrický význam základních pojmů diferenciálního počtu funkcí více proměnných. Jedná se o sbírku patnácti řešených příkladů, které jsou doplněny o interaktivní 3D grafiku vygenerovanou programem Asymptote. Příklady byly voleny takovým způsobem, aby byl geometrický význam co nejvíce patrný, a řešeny tak, aby každý čtenář měl přehled v tom, co se děje v daném kroku řešení. Na začátku této práce se navíc nachází kapitola zaměřená na práci s programem Asymptote. V kapitole o programu Asymptote je uvedena stručná charakteristika programu, jeho instalace i s konfigurací a přehled vykreslovacích metod potřebných pro zhotovení grafiky bakalářské práce.

Klíčová slova: Asymptote, diferenciální počet funkcí více proměnných, interaktivní 3D grafika, $\text{\LaTeX}$, PDF

Abstract

The aim of the bachelor thesis is to explain the geometric meaning of elementary terms of multi variable calculus. It is a collection of fifteen solved examples which are supplemented by interactive 3D graphics generated by the program called Asymptote. The examples are chosen in such a way as to make the geometric meaning most evident and solved in a way to show the reader an overview of what is happening in each step of the solution. At the beginning of the thesis you can find a chapter focused on operating the Asymptote program. The brief description of the program and its installation and configuration and also an overview of the rendering methods needed for the graphic creation of the thesis are introduced in the chapter on the Asymptote program.

Keywords: Asymptote, multi variable calculus, interactive 3D graphics, $\text{\LaTeX}$, PDF

Seznam použitých zkratk a symbolů

- bp – big points (1bp = 1/72 palce)
- EPS – Encapsulated PostScript
- GUI – Graphical User Interface
- OS – Operační Systém
- PDF – Portable Document Format
- PNG – Portable Network Graphics
- pt – point (1 pt = 1/72,27 palce)
- SVG – Scalable Vector Graphics

Obsah

1	Úvod	11
1.1	Práce s interaktivní 3D grafikou	12
2	Asymptote	14
2.1	Popis	14
2.2	Instalace a konfigurace	15
2.3	Asymptote v $\text{\LaTeX}$ u	16
2.4	Způsoby vykreslování 3D grafiky	17
2.4.1	Funkce zadané explicitně	20
2.4.2	Funkce zadané implicitně	23
2.4.3	Křivka ve 3D	25
2.4.4	Vykreslení pomocí rotace	27
2.5	Hodnocení práce s Asymptote	28
3	Vybrané partie z diferenciálního počtu funkcí více proměnných	30
3.1	Reálné funkce dvou reálných proměnných	32
3.2	Parciální a směrová derivace	38
3.3	Diferenciál, gradient a směrová derivace	48
3.4	Taylorův mnohočlen	60
3.5	Lokální extrémy	72
4	Závěr	80
	Literatura	82
A	Příloha na CD	83

Seznam obrázků

2.1	surface bez nepovinných parametrů	21
2.2	surface s dělením n_x a n_y	22
2.3	surface s parametrem $x_{\text{spline}}type$	23
2.4	contour3 bez dělení n_x , n_y a n_z	24
2.5	contour3 s nastaveným dělením n_x , n_y a n_z	25
2.6	křivka ve 3D	27
2.7	revolution	28
3.1	Definiční obor $D_1(f)$	32
3.2	Definiční obor + funkce $f(x, y)$	33
3.3	Definiční obor $D_1(f)$	35
3.4	Definiční obor $D_2(f)$	35
3.5	Definiční obor + funkce $f(x, y)$	35
3.6	Definiční obor $D(f)$	36
3.7	Vrstevnice funkce $f(x, y)$	37
3.8	Graf funkce $f(x, y)$	38
3.9	Derivace $f(x, y)$ podle x	39
3.10	Derivace $f(x, y)$ podle x	39
3.11	Derivace $f(x, y)$ podle y	40
3.12	Derivace $f(x, y)$ podle y	40
3.13	Graf funkce $f(x, y)$	41
3.14	Derivace $f(x, y)$ podle x	42
3.15	Derivace $f(x, y)$ podle y	43
3.16	Graf funkce $f(x, y)$	44
3.17	Směrová derivace	45
3.18	Směrová derivace - průhledně	46
3.19	Směrová derivace - rovina ρ	46
3.20	Graf funkce $f(x, y)$	48
3.21	Tečná rovina ke grafu $f(x, y)$ v bodě T	50
3.22	Tečná rovina a tři tečny ke grafu funkce $f(x, y)$	50
3.23	Graf funkce $f(x, y)$	51
3.24	Diferenciál	53
3.25	Graf funkce $f(x, y)$	54

3.26	Diferenciál	55
3.27	Diferenciál - detail	55
3.28	Graf funkce $f(x, y)$	56
3.29	Graf funkce $f(x, y)$ se znázorněným gradientem	58
3.30	Geometrický význam gradientu	59
3.31	Graf funkce $f(x, y)$	60
3.32	Taylorův mnohočlen 1. řádu	61
3.33	Taylorův mnohočlen 2. řádu	62
3.34	Taylorův mnohočlen 3. řádu	63
3.35	Taylorův mnohočlen 4. řádu	64
3.36	Graf funkce $f(x, y)$	66
3.37	Taylorův mnohočlen 1. řádu	67
3.38	Taylorův mnohočlen 2. řádu	68
3.39	Taylorův mnohočlen 3. řádu	69
3.40	Taylorův mnohočlen 4. řádu	70
3.41	Graf funkce $f(x, y)$	72
3.42	Graf funkce $f(x, y)$ s extrémem	74
3.43	Graf funkce $f(x, y)$	75
3.44	Graf funkce $f(x, y)$ s extrémem	76
3.45	Graf funkce $f(x, y)$	77
3.46	Graf funkce $f(x, y)$ s extrémem	79

Kapitola 1

Úvod

Bakalářská práce je zaměřena na vysvětlení geometrického významu základních pojmů diferenciálního počtu funkcí více proměnných pomocí **interaktivní 3D** grafiky. Jedná se o sbírku patnácti řešených příkladů, ve kterých je pokaždé vysvětlen geometrický význam řešené problematiky. Je nutno uvést, že při tvorbě práce se vycházelo ze skript [6], tzn. předpokládá se znalost teorie diferenciálního počtu funkcí více proměnných. Vkládání **3D** grafiky do **PDF** dokumentu bylo motivováno odbornou publikací [4].

Jak už bylo řečeno, pro lepší pochopení geometrického významu jsou jednotlivé příklady doplněny o **interaktivní 3D** grafiku. Proč tomu tak je? Zkusme uvažovat případ, ve kterém bychom si geometrický význam vysvětlovali pouze na základě teorie bez jakékoliv názorné ukázky, nebo si vzpomeňme na vyučovací hodiny, kdy nám učitel (přednášející) mával před zraky rukama, papíry, sešity a někdy dokonce i houbou na tabuli, aby nám aspoň trochu přiblížil řešenou situaci. Musíme uznat, že tento způsob výkladu není dvakrát efektivní a nepřidá nám na představivosti. Dále zkusme uvažovat vylepšenou variantu výkladu a to takovou, ve které je výukový text doplněn o **2D** obrázky znázorňující danou situaci. V takových textech bylo vyvinuto větší úsilí k vyvolání určité představivosti čtenáře. Uznáme, že v některých případech jsou **2D** obrázky zcela postačující, avšak většina z nich se snaží pojmout přespříliš informací, které je činí nepřehlednými. V těchto případech přišlo veškeré úsilí věnované tvorbě obrázku na zmar a minulo se účinkem. Z uvedených případů tedy vyplývá použití **interaktivní 3D** grafiky. Není nad to, když si řešenou situaci můžeme zobrazit z kterékoliv strany, libovolně si scénu přibližovat a oddalovat nebo si měnit způsob zobrazení dané scény (drátový model, průhledně, atd.). To vše nám umožňuje **interaktivní 3D** grafika. Navíc se výpočetní technika každým dnem více a více zdokonaluje, a proto se nemusíme bát její aplikace ve výukových textech. V dnešní době je každý člověk vlastnící počítač schopen tuto grafiku používat. Milí kolegové studenti, netěší vás snad představa, že váš vyučující již nebude nadále před vámi mávat rukama, ale zobrazí pomocí projektoru **3D** grafiku osvětlující řešenou problematiku?

Nyní se vraťme zpátky do reality a řekněme si v čem byla vytvořena zmiňovaná **interaktivní 3D** grafika. Tato grafika byla vygenerovaná programem **Asymptote**. Program **Asymptote** je kvalitní generátor **vektorové 2D** a **interaktivní 3D** grafiky. Je však

nutno podotknout, že se nejedná pouze o generátor grafiky, ale i o samostatný programovací jazyk. Syntaxe programu **Asymptote** je založená na syntaxi programovacího jazyka **C++**. Více informací o programu **Asymptote** se dozvíme ve druhé kapitole, kde si povíme o jeho instalaci, konfiguraci a něco málo o používání jednotlivých vykreslovacích metod, které byly používány pro zhotovení bakalářské práce.

Třetí kapitola je věnována diferenciálnímu počtu funkcí více proměnných. Kapitola obsahuje celkem patnáct řešených příkladů, které jsou rozděleny do pěti podčástí, zaměřující se na jednotlivé problematiky. Rozdělení je následující:

- Reálné funkce dvou reálných proměnných – dva příklady na určování definičního oboru funkcí dvou proměnných a jeden příklad na nalezení vrstevnic funkce.
- Parciální a směrové derivace – dva příklady na parciální derivace a jeden příklad na derivaci ve směru.
- Diferenciál – jeden příklad na nalezení tečné roviny, dva příklady na výpočet přibližné hodnoty funkce pomocí diferenciálu a jeden příklad poukazující na vztah mezi gradientem a diferenciálem.
- Taylorův mnohočlen – dva příklady na nalezení Taylorova mnohočlenu čtvrtého řádu.
- Lokální extrémy – tři příklady na hledání lokálních extrémů, přičemž je každý příklad řešen jiným způsobem.

Všechny příklady jsou navíc umístěné i na webových stránkách <http://homel.vsb.cz/~fol0037/>. Stránky jsou rozděleny stejným způsobem, jakým je rozdělena třetí kapitola bakalářské práce. Rozdíl je v tom, že jednotlivé příklady jsou vloženy do samostatných **PDF** souborů, aby bylo možné je rychleji stáhnout/otevřít. Na stránkách je také umístěn **PDF** soubor věnující se programu **Asymptote**. Obsah tohoto **PDF** souboru je shodný s druhou kapitolou bakalářské práce. Bakalářská práce bude umístěna i na stránkách <http://mi21.vsb.cz/>, kde se nachází skripta [6]. Tak bude mít student k dispozici na jednom místě skripta i sbírku řešených příkladů.

Závěrem nezbývá už nic jiného, než si popřát příjemnou četbu při hledání odpovědí na otázky, které si klademe v oblasti diferenciálního počtu funkcí více proměnných.

1.1 Práce s interaktivní 3D grafikou

Dříve, než se budeme moci věnovat jednotlivým kapitolám, je nutné si vysvětlit, jak se zachází s **interaktivní 3D** grafikou, na které je postavena tato bakalářská práce.

Pro manipulaci s **3D** grafikou je zapotřebí tento **PDF** soubor otevřít pomocí programu **Adobe Reader**. V případě internetového prohlížeče **Mozilla Firefox** lze v nabídce „Možnosti – Aplikace“ u položky „Přenositelný formát dokumentu (PDF)“ nastavit možnost „Použít Adobe Reader (výchozí)“. Je tedy vhodné si zkontrolovat nastavení svého

prohlížeče, aby se **PDF** soubor s **interaktivní 3D** grafikou vždy otevíral pomocí programu **Adobe Reader** a ne pomocí vestavěného modulu pro **PDF**.

Interaktivní 3D grafiku v **PDF** souboru spustíme kliknutím levého tlačítka myši na zobrazenou grafiku. Po načtení grafiky budeme moci scénu natáčet pomocí držení levého tlačítka myši a jejím pohybem. Kolečkem na myši můžeme provést přiblížení a oddálení scény. Danou scénu si můžeme zobrazit i na celou obrazovku. Provedeme stisk pravého tlačítka myši na grafiku a v zobrazené nabídce zvolíme „Multimédia na celé obrazovce“. V nabídce zobrazené pomocí pravého tlačítka myši můžeme v záložce „Volby zobrazení“ nastavit typ promítání, režim vykreslování modelu a schéma osvětlení. Dále si můžeme pomocí této nabídky zobrazit strom objektů obsažených v grafice.

Kapitola 2

Asymptote

Tato kapitola je věnována open-source programu **Asymptote**. Je zde zahrnutý krátký popis programu včetně jeho instalace a konfigurace, aby si čtenář mohl přímo vyzkoušet příklady, které jsou uvedeny v této kapitole. Poté následují instrukce pro použití kódu **Asymptote** v $\text{\LaTeX}$ u. Na konci této kapitoly, jak už bylo napovězeno, se nachází menší přehled funkcí (způsobů vykreslování), které byly použity pro zhotovení **3D** grafiky bakalářské práce. Součástí přehledu je také jejich hodnocení z mého úhlu pohledu.

Informace o práci s programem jsem čerpal z diplomové práce [3] a internetových stránek [1,2].

2.1 Popis

V této části si řekneme pár slov o programu **Asymptote**, uvedeme jeho stručnou charakteristiku a možnosti využití. Program **Asymptote** je volně šiřitelný (neboli open-source), který umí velice kvalitně generovat **vektorovou 2D** a **interaktivní 3D** grafiku. **Asymptote** v roce 2004 vytvořili Andy Hammerlindl, John Bowman a Tom Prince. Vývoj **Asymptote** byl inspirován programem **MetaPost**, jehož autorem je John D. Hobby. **Asymptote** byl totiž původně smýšlen jako alternativa k **MetaPost**. Řekněme si tedy v bodech, co je pro **Asymptote** charakteristické:

- jedná se o kvalitní program pro tvorbu vektorové **2D** a **3D** grafiky,
- jeho syntaxe vychází z jazyka **C++**,
- oproti **MetaPost** je vybaven lepší syntaxí, přesnějšími výpočty v plovoucí desetinné čárce a tvorbou interaktivní **3D** grafiky,
- nejedná se pouze o generátor **2D** a **3D** grafiky, ale také o samostatný programovací jazyk,
- je kompatibilní se všemi operačními systémy, tj. s OS **Microsoft Windows**, **UNIX** a **MacOS**,

- součástí instalace je i uživatelské rozhraní **Xasy**. Bohužel se toto GUI hodí spíše jen pro doladování obrázků (přidání nějaké křivky, přímky či popisku), ne pro jejich tvorbu,
- je možné vkládat zdrojový kód grafiky **Asymptote** přímo do kódu $\text{\LaTeX}$ u a vytvořit tak grafiku, která je nedílnou součástí dokumentu,
- podporuje výstupní formáty **PDF**, **EPS**, **SVG** a **PNG**. Pro další výstupy je třeba nainstalovat program **ImageMagick**.

2.2 Instalace a konfigurace

Jak již bylo řečeno výše, **Asymptote** je možné nainstalovat v OS **Unix**, v OS **MacOS** a také v OS **Microsoft Windows**. Já osobně používám OS **Microsoft Windows**, a proto budu dále specifikovat instalaci a konfiguraci pouze pro OS **Microsoft Windows**. Uživatelé používající OS **Unix** nebo OS **MacOS** nemusí zoufat, protože potřebné informace k instalaci najdou na oficiálních stránkách **Asymptote** [1].

Instalaci programu **Asymptote** v OS **Microsoft Windows** provedeme pomocí spustitelného **asymptote-x.xx-setup.exe** souboru, kde **x.xx** představuje číslo poslední verze. Spustitelný instalační **asymptote-x.xx-setup.exe** soubor je dostupný ke stažení na stránce <http://sourceforge.net/projects/asymptote/>.

V další řadě je potřeba nainstalovat $\text{\TeX}$, aby bylo možno sázet popisky v grafice. Například já používám **MiKTeX**, který je dostupný na stránkách <http://www.miktex.org>. Pro prohlížení výchozího **PostScript** výstupu je zapotřebí nainstalovat program **gsview** dostupný na <http://www.cs.wisc.edu/~ghost/gsview/> nebo je možné nainstalovat **PostScript viewer**, který je dostupný zdarma na <http://psview.sourceforge.net/>. V případě **PostScript vieweru** bude potřeba menšího manuálního nastavení přístupové cesty. Konkrétně, pokud je verze **psview-x.xx** extrahována do složky **C:\Program Files**, tak je třeba do konfiguračního souboru **Asymptote config.asy** vložit řádky:

```
import settings;
psviewer="C:\Program Files (x86)\psview-x.xx\psv.exe";
```

Pro podporu výstupních formátů jiných než jsou **PDF**, **EPS**, **SVG** a **PNG**, je zapotřebí nainstalovat program **ImageMagick** dostupný na <http://www.imagemagick.org/script/binary-releases.php>. Pokud někdo chce využívat grafické uživatelské rozhraní, tak bude nutné nainstalovat **Python**, který je dostupný na <http://www.python.org>.

Součástí instalace **Asymptote** jsou i ukázky kódu. Tyto ukázky kódu se nacházejí v podadresáři **examples** v instalačním adresáři (s výchozím nastavením **C:\Program Files (x86)\Asymptote**).

Pro editaci kódu **Asymptote** doporučuji používat program **PSPad** a jemu podobné.

Nyní pár slov ke konfiguraci. Konfigurační soubor **config.asy** se nachází v uživatelském adresáři ve složce **.asy**, resp. **C:\Users\%user_profile%\asy**. V tomto souboru by se měly nacházet následující řádky:

```
import settings;
gs="C:\Program Files\gs\gs9.07\bin\gswin64c.exe";
psviewer="C:\Program Files\Ghostgum\gsview\gsview64.exe";
pdfviewer="C:\Program Files (x86)\Adobe\Reader 11.0\Reader\AcroRd32.exe";
```

Samozřejmě budou tyto přístupové cesty odlišné, pokud uživatel zvolí jinou složku pro instalaci daných programů. V OS **Microsoft Windows** by se měly přístupové cesty nastavit automaticky pomocí registrů. Není však na škodu si konfiguraci zkontrolovat, jestli je vše tak, jak má být.

V této fázi bychom měli být připraveni pro práci s **Asymptote**. Avšak dříve než se začneme zabývat jednotlivými funkcemi, je třeba se zmínit o použití **Asymptote** v L^AT_EXu.

2.3 Asymptote v L^AT_EXu

Výhodou **Asymptote** je, že námi vytvořenou grafiku můžeme přímo vkládat do L^AT_EXu. Interaktivní grafika se tak stane nedílnou součástí našeho **PDF** dokumentu. Ovšem abychom toho byli schopni, tak je třeba věnovat pozornost následujícímu textu.

Aby bylo možné vkládat grafiku přímo do zdrojového kódu našeho dokumentu, bude zapotřebí zkopírovat pár souborů přímo do L^AT_EXovského úložiště balíčků, resp. do místa, kde L^AT_EX vyhledává balíčky. Soubory, které potřebujeme zkopírovat, jsou **asymptote.sty**, **asycolors.sty** a **ocg.sty**. Tyto soubory najdeme v hlavním adresáři **Asymptote**, tj. v adresáři, kam jsme **Asymptote** nechali nainstalovat (**C:\Program Files (x86)\Asymptote**). Poté můžeme do preambule našeho zdrojového kódu dokumentu napsat:

```
\usepackage[inline]{asymptote}
```

Po načtení balíčku **Asymptote** v našem dokumentu jsme konečně schopni vkládat grafiku do dokumentu. Vložení grafiky se provádí tak, že zdrojový kód **Asymptote** vložíme mezi:

```
\begin{asy}
...
\end{asy}
```

Existuje i alternativa ke vkládání grafiky do dokumentu a to:

```
\asyinclude{soubor.asy}
```

Soubor **soubor.asy** představuje soubor, ve kterém je vytvořená samostatná grafika, tj. jedná se o soubor, ve kterém se nachází zdrojový kód **Asymptote** reprezentující příslušnou grafiku.

Nyní už jen zbývá prozradit magické kroky, které začlení námi vytvořenou grafiku do našeho dokumentu. Po vložení řádek kódů **Asymptote** do kódu L^AT_EXu provedeme prvotní kompilaci pomocí pdfL^AT_EX. Při této první kompilaci se nám vygenerují samostatné soubory **dokument-*.asy** odpovídající příslušné grafice (počet souborů odpovídá počtu vložených kódů **Asymptote** do kódu dokumentu).

Druhý krok představuje vepsání příkazu do příkazové řádky OS **Microsoft Windows**:

```
asy dokument-*.asy
```

Tímto příkazem zkompilujeme soubory **dokument-*.asy**. V případě změny jen v některém ze souborů **dokument-*.asy**, kdy není potřeba kompilovat všechny **dokument-*.asy** soubory, stačí uvést jen jeho pořadové číslo, například **dokument-4.asy**. Jejich pořadí je určeno pořadím, ve kterém jsme vkládali kódy **Asymptote** do zdrojového kódu dokumentu. Je nutno podotknout, že pro spuštění příkazu **asy dokument-*.asy** se musíme v příkazové řádce nacházet v adresáři, ve kterém jsou tyto soubory obsažené.

Posledním krokem je opět přeložení celého zdrojového kódu dokumentu pdfL^AT_EXem. Tímto krokem se konečně začlení do dokumentu námi vytvořená grafika.

Pro zajímavost se ještě zmíníme o prostředí **asydef**. Do tohoto prostředí můžeme vkládat globální nastavení (příkazy **Asymptote**), které bude platné pro celý dokument. Můžeme zde naimportovat potřebné balíčky, nastavit osvětlení, projekci, rozměry grafiky, atd. Globální nastavení může vypadat následovně:

```
\begin{asydef}
  import solids;
  import graph3;
  import contour3;

  size(200, keepAspect = false);
  currentprojection = orthographic(1, 1, 0);
  currentlight = Viewport;
\end{asydef}
```

2.4 Způsoby vykreslování 3D grafiky

Pro vykreslování 3D grafů je zapotřebí naimportovat balíčky **graph3**, **contour3** a **solids**. Načtení balíčků provedeme pomocí příkazu **import**:

```
import graph3;
import contour3;
import solids;
```

To, jaký balíček bude potřeba pro daný způsob vykreslení, si vždy řekneme na začátku určité podsekcce. Dříve, než se začneme bavit o způsobech jak vytvořit určité plochy, se ještě ve stručnosti zmíníme o pár funkcích, které jsou společné pro všechny případy. Je nutno podotknout, že pro níže uvedené funkce existuje v **Asymptote** více deklarácí než pouze ty, které jsou zde vypsané. Jednotlivé funkce lze v **Asymptote** přetěžovat.

První funkcí je funkce pro nastavení velikosti plátna pro danou grafiku. Její deklarace je následující:

```
void size(picture pic=currentpicture, real x, real y=x, bool keepAspect=Aspect);
```

První parametr **picture pic=currentpicture** nám určuje, do jakého obrázku se nám má grafika vykreslit. Podle výchozího nastavení se používá obrázek **currentpicture**. Můžeme však v jednom kódu používat i více obrázků.

Další dva parametry **real x** a **real y=x** slouží pro nastavení velikosti plátna dosazením určité hodnoty, kterou můžeme zadat v jednotkách **cm**, **mm**, **inches**, **bp** a **pt**. Pro čtvercové plátno stačí nastavit pouze hodnotu **real x**, protože v případě nezadání hodnoty **real y**, se hodnota **real y** dle zápisu automaticky nastaví na hodnotu **real x**.

Účelem posledního parametru **bool keepAspect=Aspect** je zachovávání poměru stran. Pokud chceme zachovávat poměr stran, tak nastavíme tuto hodnotu na hodnotu **true**. V opačném případě nastavíme tuto hodnotu na hodnotu **false**.

Ve 3D grafice máme možnost si nastavit své osvětlení. To se provede funkcí **light**, ve které zvolíme **pero** (barvu) pro difuzní složku (**diffuse**), ambientní složku (**ambient**), odrazovou složku (**specular**) a **pero** pro pozadí (**background**). Deklarace funkce **light**:

```
light light (pen diffuse=white, pen ambient=black, pen specular=diffuse, pen background=nullpen,
            bool viewport=false, real x, real y, real z);
```

Pro naše potřeby budou stačit předdefinovaná světla **Headlamp**, **White**, **Viewport** a **nolight**. Nastavení provedeme na začátku kódu například příkazem:

```
currentlight = Viewport;
```

Výchozí nastavení používá světlo **Headlamp**.

Abychom mohli vůbec něco vykreslovat (plochy, přímky, atd.), tak je třeba si představit tu nejzákladnější funkci a to funkci **draw**. Jelikož je většina funkcí deklarována několika způsoby (vždy s jinými parametry), tak si ukážeme deklarace funkce **draw**, které jsem osobně používal pro vykreslení křivky nebo plochy.

Deklarace funkce **draw** pro parametrickou křivku:

```
void draw(picture pic=currentpicture, Label L="", path3 g, align align=NoAlign,
          material p=currentpen, arrowbar3 arrow, arrowbar3 bar=None,
          margin3 margin=NoMargin3, light light=nolight, light arrowheadlight=currentlight,
          string name="", render render=defaultrender)
```

První (pro nás) důležitý parametr je parametr **path3 g**, do kterého dosadíme trojdímezi-onální „cestu“ křivky. Tuto „cestu“ získáme z parametrického zápisu křivky, kde každá souřadnice má svůj předpis.

Pro nastavení barvy křivky nám poslouží parametr **material p=currentpen**. Datový typ **material** v sobě nese nastavení čtyř barev a to difuzní (**diffuse**), ambientní (**ambient**), emisní (**emissive**) a odrazové (**specular**) složky. Dále je možné pomocí **material** nastavit průhlednost (**opacity**) a lesklost (**shininess**). Deklarace **material**:

```
material material(pen diffusepen=black, pen ambientpen=black, pen emissivepen=black,
                  pen specularpen=mediumgray, real opacity=opacity(diffusepen),
                  real shininess=defaultshininess);
```

Posledním parametrem, který nás bude zajímat, je parametr **arrowbar3 arrow**. Používá se pro vykreslení šipky na začátku (**BeginArrow3**), na konci (**EndArrow3** nebo **Arrow3**) nebo na obou stranách křivky (**Arrows3**).

Nyní následuje deklarace funkce **draw** pro vykreslování ploch:

```
void draw(picture pic=currentpicture, surface s, int nu=1, int nv=1,
          material surfacepen=currentpen, pen meshpen=nullpen, light light=currentlight,
          light meshlight=light, string name="", render render=defaultrender);
```

V tomto případě nás bude zajímat parametr **surface s**, do kterého dosadíme předpis plochy, kterou chceme vykreslit.

Pro nastavení barvy plochy slouží parametr **material surfacepen=currentpen** a pro nastavení barvy mřížky plochy parametr **pen meshpen=nullpen**. O datovém typu **material** jsme se již zmínili výše.

Parametry **int nu=1** a **int nv=1** určují počet dělení mřížky pro každý Beziérův plát.

Parametry s datovým typem **light** nemusíme uvádět, pokud jsme světlo nastavili podle svého už na začátku kódu (platí pro obě deklarace **draw**).

Parametr **string name=""** slouží pro pojmenování objektu v přehledovém stromu všech objektů (platí pro obě deklarace **draw**).

Poslední parametr **render render=defaultrender** slouží pro nastavení výsledného renderu (platí pro obě deklarace **draw**). Osobně jsem po celou dobu práce vystačil s výchozím nastavením pro render.

V poslední řadě si ještě ukážeme způsob vykreslení souřadných os, konkrétně osy x (osy y a z se vykreslují obdobným způsobem). Deklarace osy x :

```
void axis3(picture pic=currentpicture, Label L="", axis axis=YZZero, real xmin=-infinity,
           real xmax=infinity, pen p=currentpen, ticks3 ticks=NoTicks3,
           arrowbar3 arrow=None, bool above=false);
```

Za parametr **label L=""**, který má význam popisku, dosadíme označení pro osu. V tomto případě dosadíme **"\$x\$"**.

Další parametr **axis axis=YZZero** nám podle výchozího nastavení říká, že osa x leží na přímce $y = 0$ a $z = 0$. Stejným způsobem to platí i pro osu y , kde je parametr **XZZero**, a pro osu z , kde je parametr **XYZZero**.

Parametry **real xmin=-infinity** a **real xmax=infinity** znamenají, odkud kam se má daná osa vykreslit, resp. její horní a dolní mez.

Parametr **pen p=currentpen** opět slouží pro nastavení barvy stejně, jako tomu bylo v předchozích případech.

Parametr **ticks3 ticks=NoTicks3** nám definuje čárkování na ose. Předdefinované jsou následující možnosti: **NoTicks3**, **InTicks**, **OutTicks** a **InOutTicks**. Čárkování můžeme upravit podle svého zavoláním stejnojmenných funkcí.

Parametr **arrowbar3 arrow=None** nám provede zakončení osy čárkou (stejným způsobem, jako by se jednalo o čárkování na ose) nebo šipkou v daném směru.

To by bylo vše podstatné k tomu, abychom byli připraveni si názorně ukázat slibované způsoby vykreslování ve **3D**.

2.4.1 Funkce zadané explicitně

Nejprve si ukážeme vykreslení **3D** grafu funkce dvou proměnných zadané explicitně. Uvažujme například funkci $f(x, y) = x^2 + y^2$. K vykreslení použijeme funkci **surface**, která vytvoří Beziérovu plochu mající tvar podle zadaného předpisu. Před použitím funkce **surface** načteme balíček **graph3**. Funkce **surface** je deklarována takto:

```
surface surface(real f(pair z), pair a, pair b, int nx=nmesh, int ny=nx,
               splinetype xsplintype, splinetype ysplintype=xsplintype,
               bool cond(pair z)=null);
```

Vysvětleme si význam jednotlivých parametrů a řekněme si zda jsou povinné nebo ne.

Parametr **real f(pair z)** představuje předpis funkce (v našem případě $f(x, y) = x^2 + y^2$). Datový typ **pair** reprezentuje uspořádanou dvojici čísel typu **real**. V případě **pair z** přistoupíme k jednotlivým složkám přes atributy **x** a **y** připojené tečkou, tj. **z.x**. Parametr **real f(pair z)** je povinný a jeho zápis v kódu může vypadat například takto:

```
real f(pair z){
    real x=z.x, y=z.y;
    return x^2*y^2;
}
```

Dalšími povinnými parametry jsou **pair a** a **pair b**. Tyto parametry jsou dolní a horní mezí, tzn. odkud kam se má funkce vykreslit. Parametr **pair a** reprezentuje dolní mez a parametr **pair b** horní mez.

Celočíselné parametry **int nx** a **int ny** nejsou povinné a určují dělení funkce $f(x, y)$ ve směru os x a y .

Parametry **splintype xsplintype** a **splintype ysplintype** také nejsou povinné. Pokud je však uvedeme, znamená to, že průběh funkce $f(x, y)$ aproximujeme pomocí spline křivek a docílíme tak hladšího průběhu, než kdybychom použili parametry **int nx** a **int ny**.

Poslední parametr **bool cond(pair z)=null** (nepovinný parametr) určuje, jaké buňky mřížky (mesh cells) se mají vykreslit a které ne. Podle výchozího nastavení se vykresluje všechny body mřížky. Jeho nastavení nebude potřeba.

Uvedme si nyní pár příkladů použití funkce **surface**. V každém případě budeme používat odlišné parametry, aby byl mezi nimi zřetelný rozdíl. Budeme vykreslovat výše zmíněnou funkci $f(x, y) = x^2 + y^2$.

V prvním případě zavoláme funkci **surface** bez nepovinných parametrů:

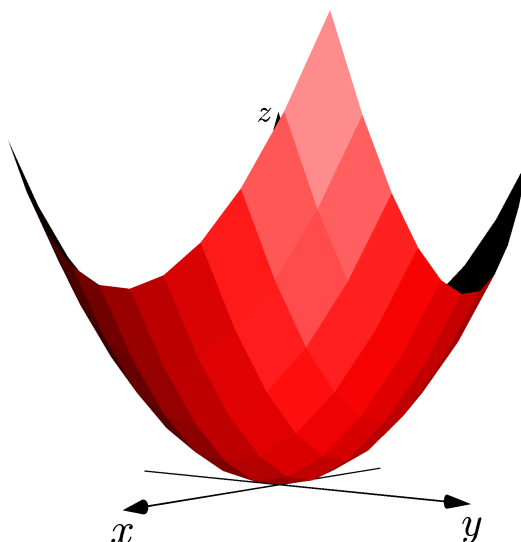
```
import graph3;
size(200,keepAspect=true);
currentlight=Viewport;

real f(pair z){
    real x=z.x, y=z.y;
    return x^2+y^2;
}

draw(surface(f,(-2,-2),(2,2)),red);

xaxis3("$x$",-2,2,Arrow3);
yaxis3("$y$",-2,2,Arrow3);
zaxis3("$z$",0,9,Arrow3);
```

Tomuto kódu odpovídá obr. 2.1.



Obrázek 2.1: surface bez nepovinných parametrů

Ve druhém případě zavoláme funkci **surface** se zadaným dělením **nx** (dělení **ny** se nastaví automaticky na hodnotu **nx**):

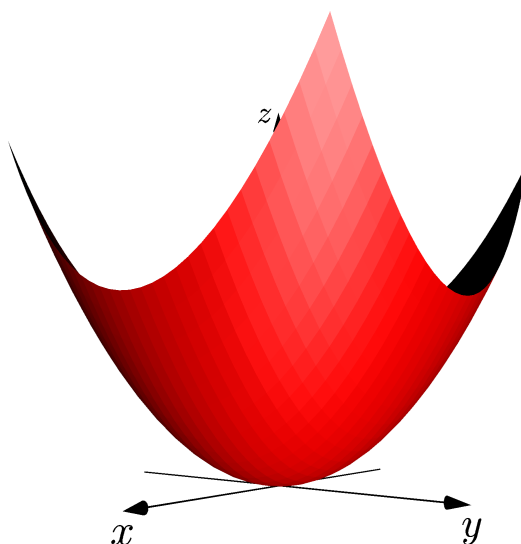
```
import graph3;
size(200,keepAspect=false);
currentlight=Viewport;

real f(pair z){
    real x=z.x, y=z.y;
    return x^2+y^2;
}
```

```
draw(surface(f,(-2,-2),(2,2),nx=30),red);

xaxis3("$x$",-2,2,Arrow3);
yaxis3("$y$",-2,2,Arrow3);
zaxis3("$z$",0,9,Arrow3);
```

Tomuto kódu odpovídá obr. 2.2.



Obrázek 2.2: surface s dělením nx a ny

V posledním třetím případě zavoláme funkci **surface** se zadaným parametrem **xsplinetype** (**ysplinetype** se stejně jako v předchozím případě nastaví automaticky na hodnotu **xsplinetype**):

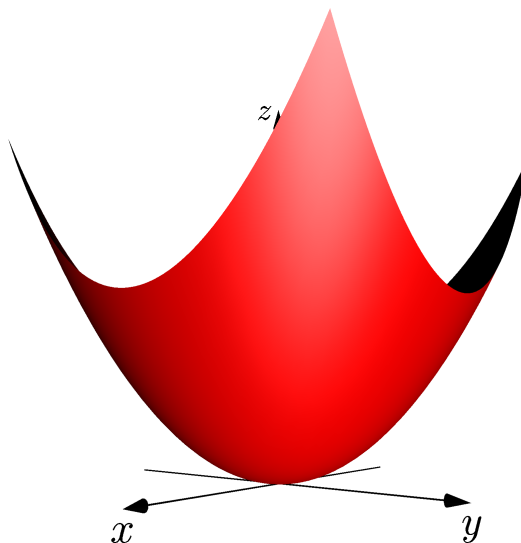
```
import graph3;
size(200,keepAspect=false);
currentlight=Viewport;

real f(pair z){
    real x=z.x, y=z.y;
    return x^2+y^2;
}

draw(surface(f,(-2,-2),(2,2),xsplinetype=Spline),red);

xaxis3("$x$",-2,2,Arrow3);
yaxis3("$y$",-2,2,Arrow3);
zaxis3("$z$",0,9,Arrow3);
```

Tomuto kódu odpovídá obr. 2.3.



Obrázek 2.3: surface s parametrem xsplinetype

2.4.2 Funkce zadané implicitně

Asymptote také umožňuje vykreslit funkce, které jsou zadané v implicitním tvaru. Pro porovnání výsledků si zkusme vykreslit parabolu z předchozí části, avšak zadanou v implicitním tvaru. Předpis paraboly má tvar: $x^2 + y^2 - z = 0$, kde $f(x, y) = z$. Pro vykreslení funkce zadané v implicitním tvaru použijeme funkci **contour3**, která je obsažená v balíčku nesoucí stejný název **contour3**. Zapotřebí bude i balíček **graph3**. Deklarace funkce **contour3**:

```
vertex [][] contour3(real F(real, real, real), triple a, triple b, int nx=nmesh, int ny=nx,
                    int nz=nx, projection P=currentprojection);
```

První parametr **real F(real, real, real)** reprezentuje předpis funkce zadané v implicitním tvaru.

Parametry **triple a** a **triple b** mají význam dolní meze a horní meze. Meze zadáváme ve tvaru **(x,y,z)**. Výhodou je, že můžeme omezit vykreslení grafu funkce na z -ové ose (zarovnat ji na ose z podle potřeby). Nevýhodou však je, že průběh funkce není tak hezký jako tomu bylo v předchozí části.

Parametry **int nx=nmesh**, **int ny=nx** a **int nz=nx** opět slouží pro nastavení počtu dělení na určitých osách. Pro lepší výsledky je opravdu zapotřebí nastavit vyšší počet dělení. Vyšší počet dělení ale znamená větší nároky na výpočetní paměť, takže ne vždy docílíme takového výsledku, jakého bychom chtěli dosáhnout.

Poslední parametr **projection P=currentprojection** určuje typ promítání. Máme na výběr ze dvou typů promítání a to **ortogonálního (orthographic)** a **perspektivního (perspective)**. Typ promítání je lepší nastavit na začátku kódu pomocí proměnné **currentprojection**. Nastavení může vypadat například takto:

```
currentprojection = orthographic(2, 3, 1);
```

Čísla v závorce reprezentují souřadnice (x, y, z) určující polohu kamery, resp. místo odkud se na daný graf díváme při spuštění kódu.

Nyní, když jsme seznámeni s funkcí **contour3**, si uvedeme menší ukázkou použití funkce **contour3** a to na funkci $x^2 + y^2 - z = 0$. Nejdříve provedeme vykreslení grafu bez nastaveného dělení **nx**, **ny** a **nz**:

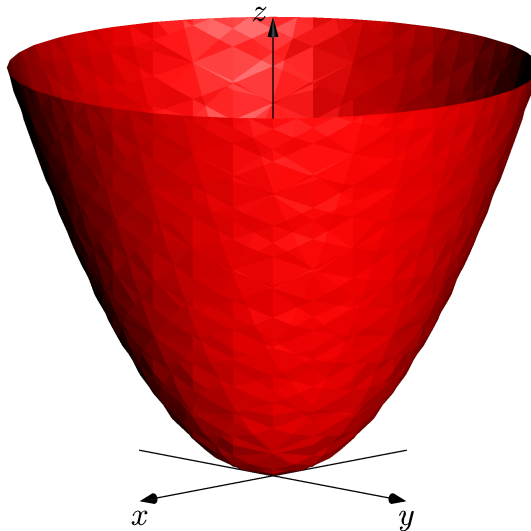
```
import graph3;
import contour3;
size(200,keepAspect=false);
currentlight=Viewport;
currentprojection=orthographic(1, 1, 0.5);

real F(real x, real y, real z){
    return x^2+y^2-z;
}

draw(surface(contour3(F,(-3,-3,0),(3,3,8))),red);

xaxis3("$x$",-2,2,Arrow3);
yaxis3("$y$",-2,2,Arrow3);
zaxis3("$z$",0,9,Arrow3);
```

Z obr. 2.4 je patrné, že průběh funkce $x^2 + y^2 - z = 0$ je znehodnocený snahou o aproximaci funkce pomocí triangulizace.



Obrázek 2.4: contour3 bez dělení nx, ny a nz

Pro porovnání si zkusme vytvořit graf, u kterého nastavíme počet dělení **nx**, **ny** a **nz**.

V kódu stačí nastavit pouze hodnotu **nx**. Hodnoty **ny** a **nz** se automaticky nastaví na hodnotu **nx**. Kód vypadá následovně:

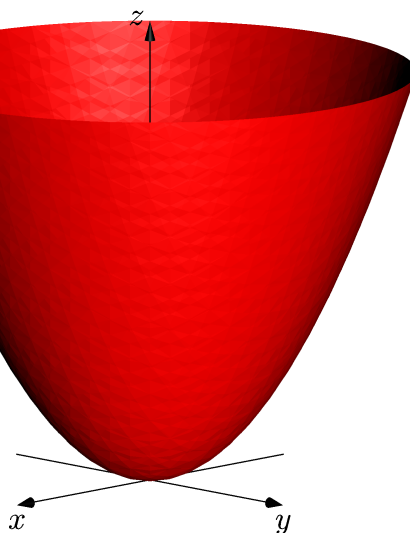
```
import graph3;
import contour3;
size(200,keepAspect=false);
currentlight=Viewport;
currentprojection=orthographic(1, 1, 0.5);

real F(real x, real y, real z){
    return x^2+y^2-z;
}

draw(surface(contour3(F,(-3,-3,0),(3,3,8),nx=20)),red);

xaxis3("$x$",-2,2,Arrow3);
yaxis3("$y$",-2,2,Arrow3);
zaxis3("$z$",0,9,Arrow3);
```

Průběh funkce na obr. 2.5 je mnohem přijatelnější než v předchozím případě. Výsledek je však náročnější jak na výpočetní paměť, tak i na velikost samotného souboru.



Obrázek 2.5: contour3 s nastaveným dělením nx, ny a nz

2.4.3 Křivka ve 3D

V této části si ukážeme, jakým způsobem můžeme vykreslit křivku ve **3D**. Budeme k tomu potřebovat funkci **graph**, která je součástí balíčku **graph3**. Pomocí funkce **graph** vytvoříme z parametrického zápisu křivky „cestu“ **path3**. Deklarace funkce **graph**:

```
guide3 graph(picture pic=currentpicture, real x(real), real y(real), real z(real), real a,
             real b, int n=ngraph, interpolate3 join= operator --);
```

Dříve, než se podíváme na jednotlivé parametry funkce **graph**, si řekneme, jaký je rozdíl mezi datovým typem **guide3** a datovým typem **path3**. Oba dva datové typy představují kubickou spline křivku, ale datový typ **guide3** reprezentuje pouze seznam (posloupnost) kontrolních bodů kubické spline křivky. K převodu **guide3** na **path3** dochází před vykreslením. Nyní se vraťme k parametrům funkce **graph**.

Parametry **real x(real)**, **real y(real)** a **real z(real)** představují předpisy pro jednotlivé souřadnice x , y a z .

Parametry **real a** a **real b** představují dolní a horní mez intervalu, ve kterém se daná křivka má vykreslit.

Pomocí parametru **int n=ngraph** nastavujeme počet dělení křivky.

Poslední parametr **interpolate join=operator --** určuje typ interpolace, tj. způsob, jakým jsou jednotlivé body křivky spojeny. Operátor **operator --** nám spojuje jednotlivé body pomocí přímek. „Ohebnější“ variantou je **operator ..**, kdy jsou úseky mezi body aproximované Beziérovou kubikou.

V následující ukázce si předvedeme, jak se funkce **graph** používá v praxi. Vykreslíme si křivku, která se svým tvarem podobá pružině a která bude zakončená šipkou:

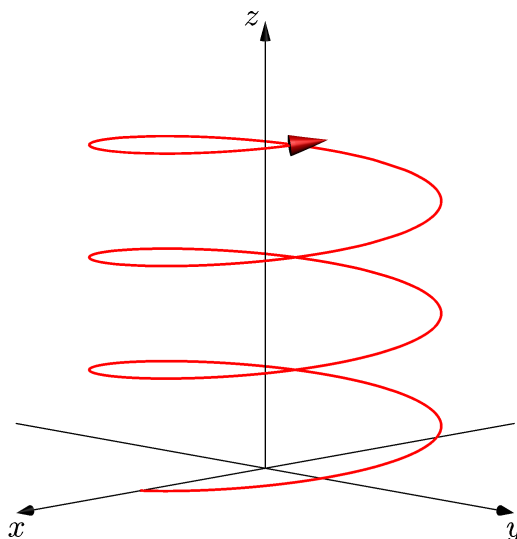
```
import graph3;
size(200,keepAspect=false);
viewportmargin = 1cm;
currentlight = Headlamp ;
currentprojection=orthographic(1,1,0.5);

real x(real t){return cos(t);}
real y(real t){return sin(t);}
real z(real t){return t/5;}

path3 krivka = graph(x,y,z,0,20, operator ..) ;
draw(krivka,red+1,EndArrow3);

xaxis3("$x$",-2,2,Arrow3);
yaxis3("$y$",-2,2,Arrow3);
zaxis3("$z$",0,5,Arrow3);
```

Výsledek lze vidět na obr. 2.6.



Obrázek 2.6: křivka ve 3D

2.4.4 Vykreslení pomocí rotace

Poslední způsob vykreslení grafu funkce (plochy), který si v této kapitole uvedeme, bude pomocí rotace křivky. Rotaci umožňuje funkce **revolution** z balíčku **solids**. Pomocí funkce **revolution** jsme schopni zrotovat křivku kolem zadaného vektoru o určitý úhel. Podívejme se na deklaraci funkce **revolution**:

```
revolution revolution ( triple c=0, path3 g, triple axis=Z, real angle1=0, real angle2=360);
```

První parametr **triple c=0** představuje bod, kterým bude procházet vektor, kolem kterého provádíme rotaci. Zadáváme ve tvaru (x, y, z) , kde x , y a z představují jednotlivé souřadnice v prostoru. Je zapotřebí si dávat pozor na předpis křivky, protože při každém posunutí bodu c vykreslíme jiný graf (nemusíme vykreslit správný graf).

Druhý parametr **path3 g** představuje předpis křivky, kterou chceme zrotovat.

Parametr **triple axis=Z** představuje vektor, kolem kterého se má otáčet zadaná křivka. Standardně je vektor nastavený na osu z . Opět je potřeba věnovat pozornost předpisu křivky, abychom dokázali vykreslit správný průběh funkce.

Poslední dva parametry **real angle1=0** a **real angle2=360** určují, od kterého úhlu do kterého úhlu se má rotace provést. Výchozí nastavení provede rotaci o 360° neboli o 2π rad.

Funkci **revolution** jsme si představili a nyní si ukážeme její aplikaci v kódu. Opět si vykreslíme stejnou parabolu jako v předchozích příkladech, tj. parabolu $f(x, y) = x^2 + y^2$. Kód vypadá následovně:

```
import solids;
```

```

size(200,keepAspect=false);
viewportmargin = 1cm;
currentlight = Viewport ;
currentprojection=orthographic(1,1,0.5);

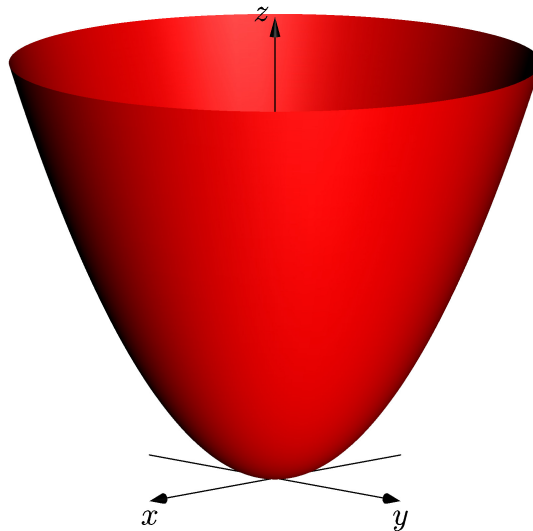
real rx(real t){return t;}
real ry(real t){return 0;}
real rz(real t){return t^2;}

path3 krivka = graph(rx,ry,rz,0,3, operator ..) ;
revolution rotace=revolution(krivka,0,360);
draw(surface(rotace),red,meshpen=black+opacity(0));

xaxis3("$x$",-2,2,Arrow3);
yaxis3("$y$",-2,2,Arrow3);
zaxis3("$z$",0,10,Arrow3);

```

Výsledný graf je znázorněný na obr. 2.7.



Obrázek 2.7: revolution

2.5 Hodnocení práce s Asymptote

V této části si porovnáme velikosti **PDF** souborů, které odpovídají jednotlivým způsobům vykreslení plochy, a zhodnotíme práci s programem. Pro porovnání použijeme výše uvedené příklady. Konkrétně příklad se spline aproximací u explicitně zadané funkce, dále příklad s nastaveným počtem dělení u implicitně zadané funkce a v poslední řadě příklad vykreslení grafu funkce pomocí rotace. Velikost **PDF** souboru v případě explicitně zadané funkce byla 208 *kB*, v případě implicitně zadané funkce s počtem dělení

$n_x = n_y = 20$ byla 900 *kB* a v případě rotace byla 605 *kB*. Z hlediska velikosti výsledného **PDF** souboru se tedy jeví jako nejlepší možnost vykreslování explicitně zadané funkce. Navíc tímto způsobem získáme hladký průběh funkce. Nevýhodou vykreslování explicitně zadaných funkcí je ta, že můžeme pouze omezit intervaly vykreslení na ose x a y . Pak se samozřejmě může stát, že nám funkce „ustřelí“ pokud nabývá v některém bodě velké funkční hodnoty (viz obr. 2.1, obr. 2.2 a obr. 2.3).

Na druhém místě je vykreslování grafu funkce pomocí rotace. Rotací opět získáme hladký průběh funkce. Problém je však v tom, že ne všechny grafy funkcí se dají vytvořit pomocí rotace. Navíc, pokud nastavíme v počátečním stavu vykreslovací mřížku funkce na neviditelnou, se nám po aktivaci interaktivity nastaví mřížka zpět na viditelnou.

Nejvíce paměťového místa zabere vykreslování implicitně zadaných funkcí. Jedinou výhodou z mého úhlu pohledu je, že můžeme omezit vykreslení grafu funkce na všech souřadných osách, tzn. funkce nám již „neustřelí“ ve směru osy z , jako tomu bylo v případě explicitně zadané funkce. Značnou nevýhodou je paměťová náročnost z důvodu použití triangulizace při výpočtu plochy, takže pokud použijeme vysoký počet dělení může příkazová řádka při kompilaci zahlásit **out of memory**. Nevýhodou také je, že pokud nepoužijeme dostatečný počet dělení, tak může být průběh funkce v některých místech značně znehodnocený (například obr. 2.4 u vrcholu paraboloidu).

Každý způsob má své výhody a nevýhody. Je proto třeba při vykreslování zvolit ten způsob, který bude pro daný graf funkce (plochu) nejvýhodnější. Čím více je grafika komplikovanější (náročnější na výpočet), tím větší je pravděpodobnost, že při manipulaci s **interaktivní 3D** grafikou nám bude daná grafika „kostičkovat“. Jestli nám bude grafika „kostičkovat“ nebo ne, závisí na typu grafické karty.

Ještě bych se chtěl zmínit o chybových hláškách. **Asymptote** hlásí chyby v příkazové řádce s příslušným číslem řádku, na kterém se v kódu nachází zmiňovaná chyba. Z tohoto důvodu doporučuji v editoru používat číslování řádků.

Podle mého hodnocení je **Asymptote** kvalitním grafickým programem, ale zabere hodně času, než se v něm člověk začne trochu orientovat a využívat jeho funkce v plné míře.

Kapitola 3

Vybrané partie z diferenciálního počtu funkcí více proměnných

Jak už bylo řečeno v úvodu, cílem této kapitoly je co nejlépe vysvětlit geometrický význam základních pojmů diferenciálního počtu funkcí více proměnných pomocí **interaktivní 3D** grafiky. Jedná se o sbírku patnácti řešených příkladů, ve kterých je vždy vysvětlen geometrický význam řešené problematiky. Výběr příkladů probíhal s ohledem na to, aby se v každém příkladě, pokud to bylo možné, používala jiná funkce, na jejíž grafu bude geometrický význam dostatečně patrný. V některých příkladech však byly nakonec zvoleny podobné funkce, protože dle mého názoru se na nich nejlépe ukáže a vysvětlí geometrický význam.

Příklady jsou rozděleny do pěti částí a to:

- Reálné funkce dvou reálných proměnných – dva příklady jsou zaměřené na určování definičního oboru funkce dvou proměnných a jeden příklad na nalezení vrstevnic funkce.
- Parciální a směrové derivace – dva příklady jsou věnované parciálním derivacím a jeden příklad směrové derivaci.
- Diferenciál – jeden příklad je určen pro hledání tečné roviny, další dva příklady pro výpočet přibližné hodnoty pomocí diferenciálu a poslední čtvrtý příklad poukazuje na vztah mezi gradientem a diferenciálem.
- Taylorův mnohočlen – dva příklady na jeho nalezení.
- Lokální extrémy – celkem tři příklady, ve kterých je pokaždé použit jiný způsob výpočtu.

U řešených příkladů se předpokládá znalost teorie diferenciálního počtu funkcí více proměnných. Při řešení příkladů jsem se snažil dodržovat stejná značení a definice, jaká se používají ve skriptech [6], ze kterých jsem také čerpal jednotlivé příklady. Velká část z nich je však modifikována pro lepší interpretaci geometrického významu.

Inspirací při tvorbě sbírky řešených příkladů byla interaktivní sbírka příkladů [5].

Závěrem bych se chtěl zmínit o tom, že pro funkci budeme používat označení $f(x, y)$. Toto označení budeme chápat nejen jako funkční hodnotu zadané funkce, ale také jako funkci samotnou. Dále zdůrazňeme, že v případě derivace ve směru vektoru $\mathbf{u}$ vždy požadujeme, aby byl vektor $\mathbf{u}$ jednotkový.

3.1 Reálné funkce dvou reálných proměnných

V této části se zaměříme na určování definičního oboru funkce $f(x, y)$ dvou proměnných (1. a 2. příklad) a znázornění vrstevnic funkce $f(x, y)$ (3. příklad).

Příklad 1. (Definiční obor)

Zadání:

Určete a zakreslete definiční obor funkce $f(x, y) = \ln((9 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4))$.

Řešení:

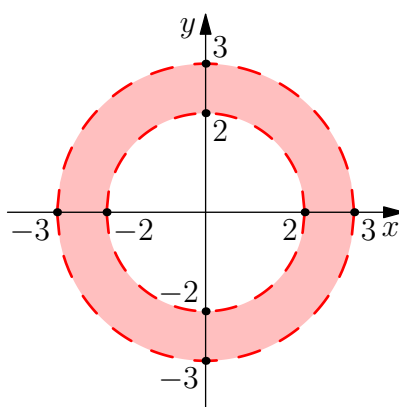
Definiční obor $D(f)$ je množina takových $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, pro něž má předpis $\ln((9 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4))$ smysl. Je tedy zřejmé, že výraz $(9 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4)$ musí být větší než 0. Toho dosáhneme ve dvou případech. V prvním případě bude výraz $(9 - x^2 - y^2)$ kladný a současně výraz $(x^2 + y^2 - 4)$ bude také kladný. Ve druhém případě bude výraz $(9 - x^2 - y^2)$ záporný a současně výraz $(x^2 + y^2 - 4)$ bude také záporný.

První případ:

$$\begin{array}{ll} 9 - x^2 - y^2 > 0 & \wedge \quad x^2 + y^2 - 4 > 0 \\ x^2 + y^2 < 9 & \wedge \quad x^2 + y^2 > 4 \end{array}$$

$D_1(f)$ je roven:

$$D_1(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 < x^2 + y^2 < 9\}$$



Obrázek 3.1: Definiční obor $D_1(f)$

Druhý případ:

$$\begin{array}{ccc} 9 - x^2 - y^2 < 0 & \wedge & x^2 + y^2 - 4 < 0 \\ x^2 + y^2 > 9 & \wedge & x^2 + y^2 < 4 \end{array}$$

$D_2(f)$ je roven:

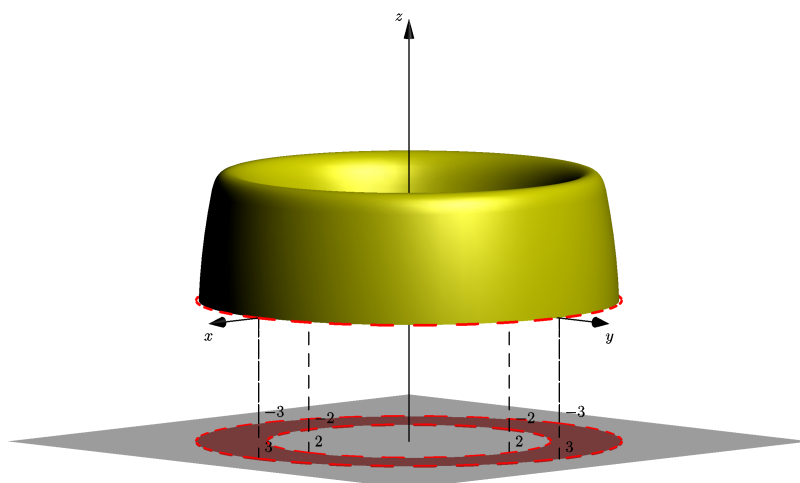
$$D_2(f) = \emptyset$$

Výsledný $D(f)$:

$$D(f) = D_1(f) \cup D_2(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 < x^2 + y^2 < 9\}$$

Definiční obor $D(f)$ funkce $f(x, y)$ představuje mezikruží, které leží mezi kružnicí o poloměru 2 a kružnicí o poloměru 3 (mimo tyto kružnice!). Tomuto závěru odpovídá i grafické znázornění, viz obr. 3.2.

Žlutou barvou je znázorněn graf funkce $f(x, y)$. Vykreslení grafu funkce $f(x, y)$ zcela neodpovídá realitě, neboť funkce není zdola ohraničena. Dále je červenou barvou znázorněn definiční obor. Šedou barvou je znázorněná rovina xy . Čísla reprezentují příslušné souřadnice na dané ose.



Obrázek 3.2: Definiční obor + funkce $f(x, y)$

Příklad 2. (Definiční obor)**Zadání:**

Určete a zakreslete definiční obor funkce $f(x, y) = \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$.

Řešení:

Určíme množinu takových $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, pro něž má předpis $\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$ smysl. Výraz pod odmocninou $(1-x^2)(1-y^2)$ musí být větší nebo roven 0. Toho docílíme ve dvou případech. V prvním případě budou výrazy $(1-x^2)$ a $(1-y^2)$ kladné nebo rovny 0. Ve druhém případě budou výrazy $(1-x^2)$ a $(1-y^2)$ záporné nebo rovny 0. První případ:

$$\begin{array}{lll} 1-x^2 \geq 0 & \wedge & 1-y^2 \geq 0 \\ (1-x)(1+x) \geq 0 & \wedge & (1-y)(1+y) \geq 0 \\ x \in \langle -1, 1 \rangle & \wedge & y \in \langle -1, 1 \rangle \end{array}$$

$D_1(f)$ je roven:

$$D_1(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \langle -1, 1 \rangle \wedge y \in \langle -1, 1 \rangle\}$$

Druhý případ:

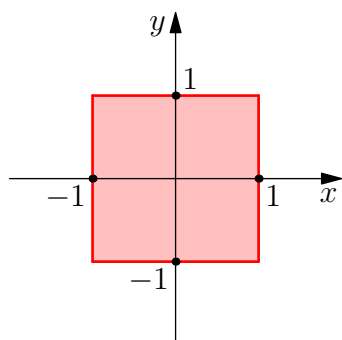
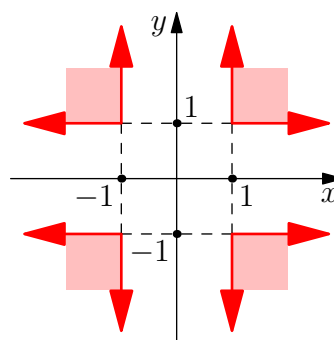
$$\begin{array}{lll} 1-x^2 \leq 0 & \wedge & 1-y^2 \leq 0 \\ (1-x)(1+x) \leq 0 & \wedge & (1-y)(1+y) \leq 0 \\ x \in (-\infty, -1) \cup \langle 1, \infty \rangle & \wedge & y \in (-\infty, -1) \cup \langle 1, \infty \rangle \end{array}$$

$D_2(f)$ je roven:

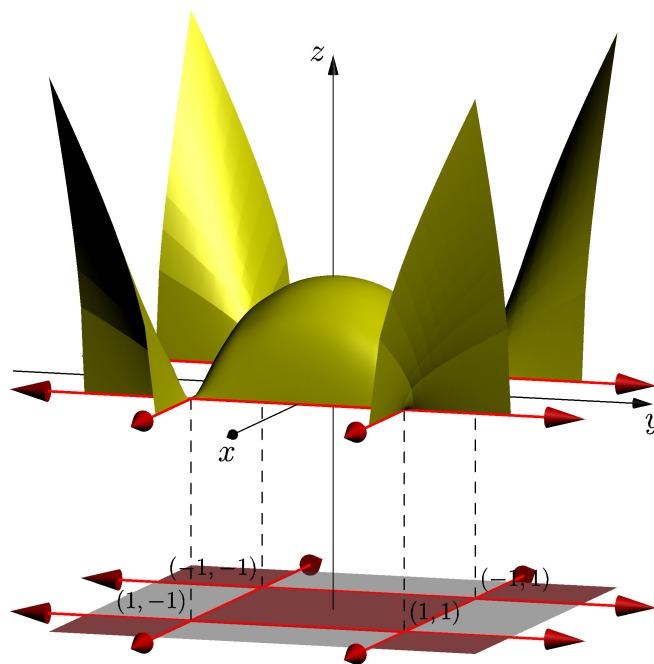
$$D_2(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (-\infty, -1) \cup \langle 1, \infty \rangle \wedge y \in (-\infty, -1) \cup \langle 1, \infty \rangle\}$$

Výsledný $D(f)$:

$$D(f) = D_1(f) \cup D_2(f)$$

Obrázek 3.3: Definiční obor $D_1(f)$ Obrázek 3.4: Definiční obor $D_2(f)$

Podívejme se na obr. 3.5, kde je červenou barvou znázorněný definiční obor. Žlutou barvou je znázorněný graf funkce $f(x, y)$. Šedou barvou je znázorněná rovina xy . Černou barvou jsou označeny souřadnice (x, y) v rovině xy .

Obrázek 3.5: Definiční obor + funkce $f(x, y)$

Příklad 3. (Vrstevnice)**Zadání:**

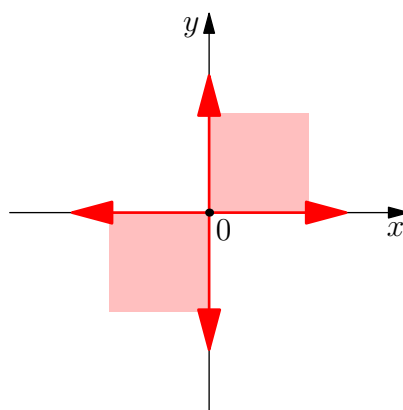
Určete rovnice vrstevnic funkce $f(x, y) = \sqrt{xy}$ a znázorněte vrstevnice vzniklé průnikem rovin $f(x, y) = c$, $c = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Řešení:

Určíme definiční obor funkce $f(x, y)$, resp. určíme takové $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, pro něž má předpis $\sqrt{xy}$ smysl.

Vzhledem k výrazu pod odmocninou, pro který musí platit $xy \geq 0$, dostáváme výsledný $D(f)$:

$$D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x \geq 0 \wedge y \geq 0) \vee (x \leq 0 \wedge y \leq 0)\}$$

Obrázek 3.6: Definiční obor $D(f)$

Rovnice vrstevnic jsou ve tvaru:

$$v_f(c) : \sqrt{xy} = c$$

Pro $c < 0$ je $v_f = \emptyset$, protože $\sqrt{xy} \geq 0$ pro $\forall (x, y) \in D(f)$.

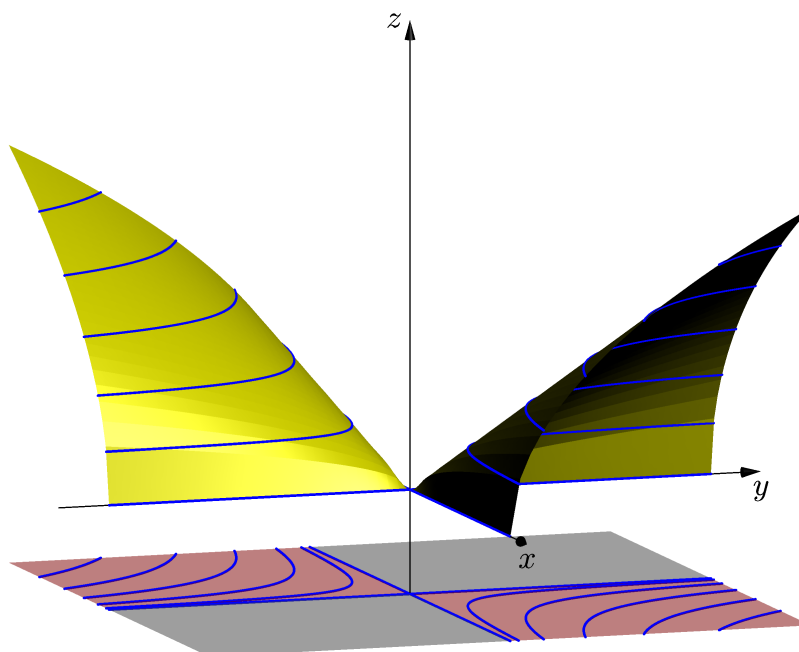
Pro $c = 0$ je $v_f = 0$ pro $x = 0 \vee y = 0$, tzn. pro $c = 0$ je vrstevnice totožná s osou x a osou y .

Pro $c > 0$ je $c = \sqrt{xy}$:

$$\begin{aligned} 1 = \sqrt{xy} &\Rightarrow y = \frac{1}{x} \\ 2 = \sqrt{xy} &\Rightarrow y = \frac{4}{x} \\ 3 = \sqrt{xy} &\Rightarrow y = \frac{9}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 = \sqrt{xy} &\Rightarrow y = \frac{16}{x} \\ 5 = \sqrt{xy} &\Rightarrow y = \frac{25}{x} \end{aligned}$$

Výsledné vrstevnice pro $c > 0$ představují hyperboly. Na obr. 3.7 jsou modrou barvou znázorněné výsledné vrstevnice. Žlutou barvou je znázorněn graf funkce $f(x, y)$. Rovina xy je obarvena šedou barvou. Červenou barvou je znázorněn definiční obor, který jsme určili výše.



Obrázek 3.7: Vrstevnice funkce $f(x, y)$

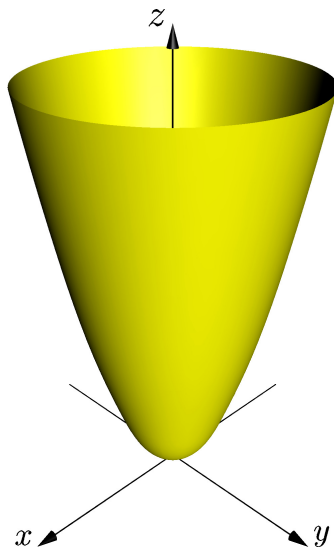
3.2 Parciální a směrová derivace

V této části se podíváme na geometrický význam parciálních derivací (1. a 2. příklad) a směrové derivace (3. příklad).

Příklad 1. (Parciální derivace)

Zadání:

Uvažujte funkci $f(x, y) = x^2 + y^2$ (obr. 3.8). Vypočítejte první parciální derivace funkce $f(x, y)$ v bodě $(x_0, y_0) = (2, 1)$.



Obrázek 3.8: Graf funkce $f(x, y)$

Řešení:

Funkce $f(x, y)$ je funkce dvou reálných proměnných, kde $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Vypočteme první parciální derivaci funkce $f(x, y)$ podle proměnné x :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x$$

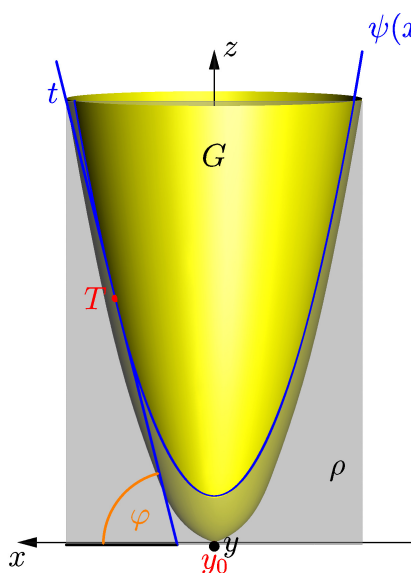
V dalším kroku dosadíme do vypočtené parciální derivace bod $(2, 1)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) = 4$$

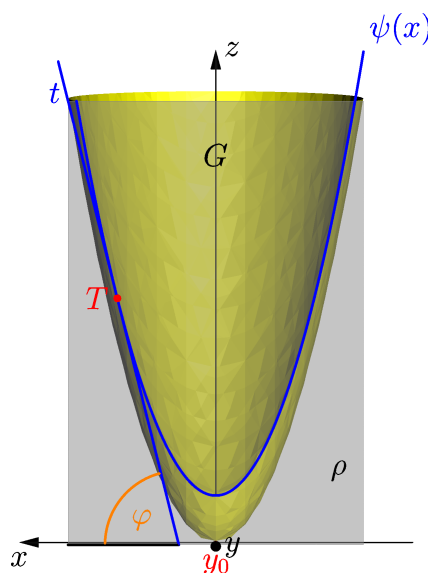
Podívejme se na geometrický význam této parciální derivace:

1. Průnikem grafu funkce $f(x, y)$ (označme graf písmenem G) a roviny určené předpisem $\rho : y = y_0 = 1$ je graf funkce jedné proměnné $\psi(x) = f(x, y_0) = f(x, 1) = x^2 + 1$. Rovina ρ je rovnoběžná s osou z a protíná osu y v $y_0 = 1$.
2. Zaměřme se nyní pouze na rovinu ρ . Existuje tečna t ke grafu funkce jedné proměnné $\psi(x) = x^2 + 1$ v bodě $x_0 = 2$. Tato tečna t má směrnici určenou námi vypočítanou první parciální derivací funkce $f(x, y)$ podle proměnné x v zadaném bodě $(2, 1)$. Směrnice tečny t má hodnotu 4, tedy $\operatorname{tg} \varphi = 4$, a to je právě geometrický význam parciální derivace.

Na obr. 3.9 a obr. 3.10 je žlutou barvou znázorněný graf G funkce $f(x, y)$. Červenou barvou je označen bod $T = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) = (2, 1, 5)$ a souřadnice y_0 , kterou prochází rovina ρ . Rovina ρ je označena šedou barvou. Modrou barvou je znázorněná funkce $\psi(x)$ a tečna t . Úhlu φ přísluší oranžová barva.



Obrázek 3.9: Derivace $f(x, y)$ podle x



Obrázek 3.10: Derivace $f(x, y)$ podle y

Stejným způsobem budeme postupovat při výpočtu první parciální derivace $f(x, y)$ podle proměnné y .

První parciální derivace $f(x, y)$ podle proměnné y :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$$

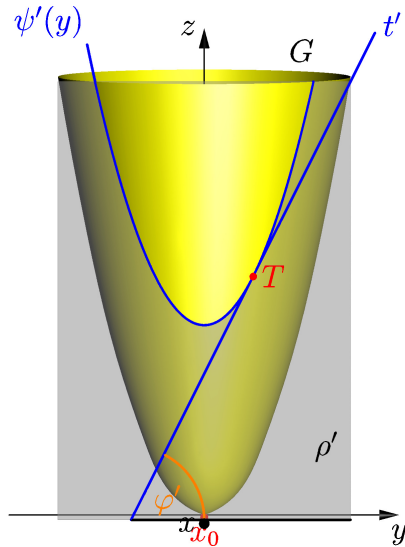
Dosadíme bod $(2, 1)$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = 2$$

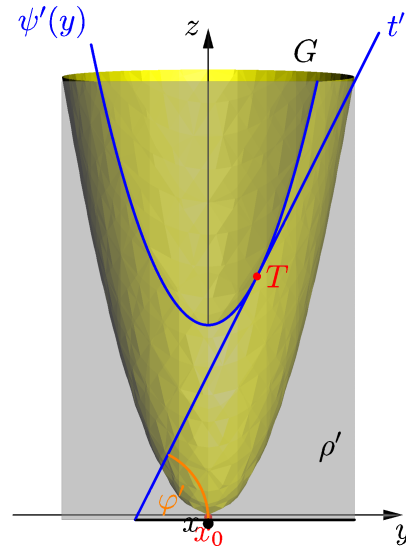
Geometrický význam parciální derivace podle proměnné y :

1. Průnikem grafu funkce $f(x, y)$ (označme graf písmenem G) a roviny určené předpisem $\rho' : x = x_0 = 2$ je graf funkce jedné proměnné $\psi'(y) = f(x_0, y) = f(2, y) = y^2 + 4$. Rovina ρ' je rovnoběžná s osou z a protíná osu x v $x_0 = 2$.
2. Zaměříme se nyní pouze na rovinu ρ' . Existuje tečna t' ke grafu funkce jedné proměnné $\psi'(y) = y^2 + 4$ v bodě $y_0 = 1$. Tato tečna t' má směrnici určenou námi vypočítanou první parciální derivací funkce $f(x, y)$ podle proměnné y v zadaném bodě $(2, 1)$. Směrnice tečny t' má hodnotu 2, tedy $\operatorname{tg} \varphi = 2$, a to je geometrický význam parciální derivace.

Na obr. 3.11 a obr. 3.12 je žlutou barvou znázorněný graf G funkce $f(x, y)$. Červenou barvou je označený bod $T = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) = (2, 1, 5)$ a souřadnice x_0 , kterou prochází rovina ρ' . Rovina ρ' je označena šedou barvou. Modrou barvou je znázorněná funkce $\psi'(y)$ a tečna t' . Úhel φ' je znázorněn oranžovou barvou.



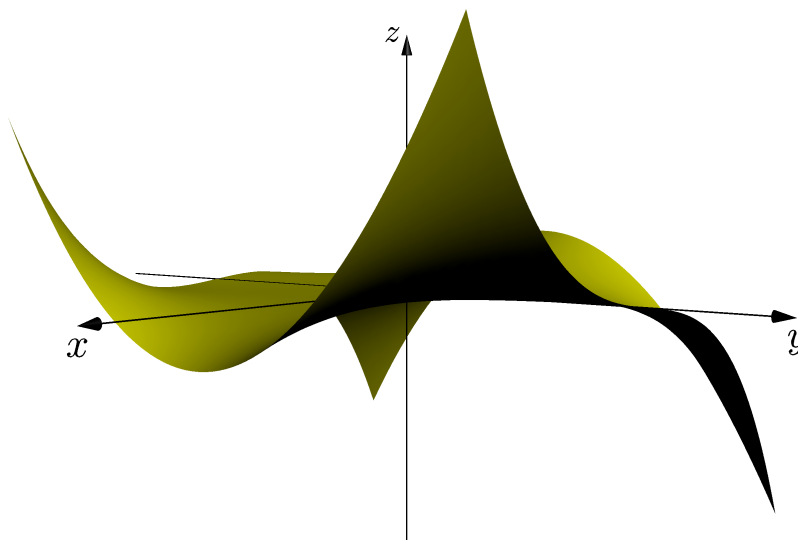
Obrázek 3.11: Derivace $f(x, y)$ podle y



Obrázek 3.12: Derivace $f(x, y)$ podle y

Příklad 2. (Parciální derivace)**Zadání:**

Nechť je dána funkce $f(x, y) = \frac{1}{4}x^3y^2 - \frac{1}{5}x^3 + \frac{1}{4}xy$ (obr. 3.13). Vypočítejte první parciální derivace funkce $f(x, y)$ v bodě $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

Obrázek 3.13: Graf funkce $f(x, y)$ **Řešení:**

Nejdříve vypočítáme první parciální derivaci funkce $f(x, y)$ podle proměnné x :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{3}{4}x^2y^2 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{1}{4}y$$

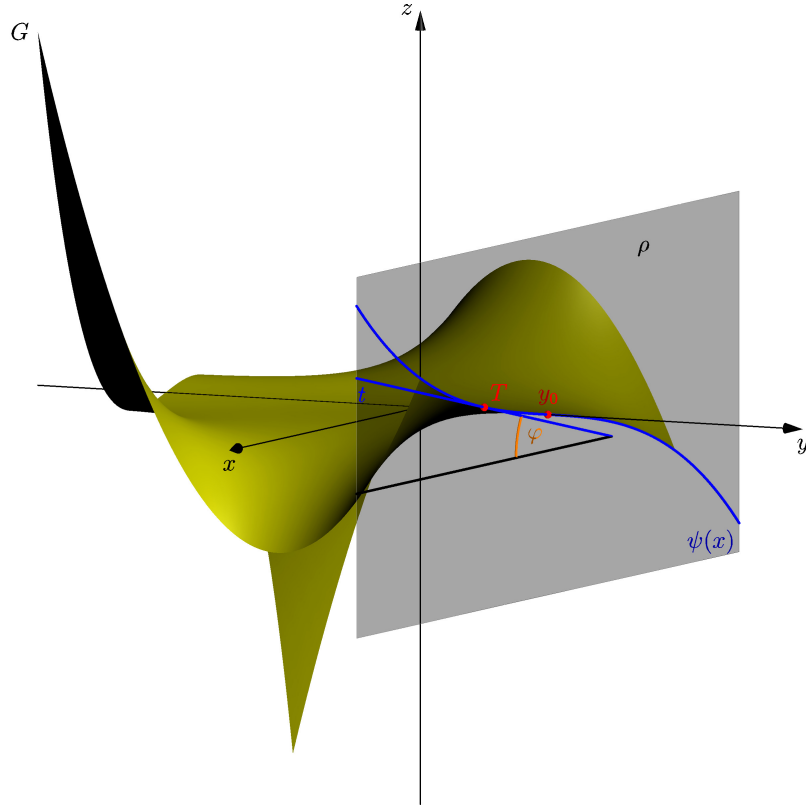
Dosadíme zadaný bod $(1, 1)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = \frac{2}{5}$$

Rozeberme si geometrický význam této parciální derivace:

1. Průnikem grafu G funkce $f(x, y)$ a roviny určené předpisem $\rho : y = y_0 = 1$ je graf funkce jedné proměnné $\psi(x) = f(x, y_0) = f(x, 1) = \frac{1}{20}x^3 + \frac{1}{4}x$.
2. V rovině ρ existuje tečna t ke grafu funkce jedné proměnné $\psi(x) = \frac{1}{20}x^3 + \frac{1}{4}x$ v bodě $x_0 = 1$. Tato tečna t má směrnici určenou námi vypočítanou první parciální derivací funkce $f(x, y)$ podle proměnné x v zadaném bodě $(1, 1)$. Směrnice tečny t má hodnotu $\frac{2}{5}$, tedy $\operatorname{tg} \varphi = \frac{2}{5}$ (tj. úhel $\varphi \doteq \frac{22\pi}{180}$ rad), a to je geometrický význam parciální derivace.

Na obr. 3.14 je žlutou znázorněný graf G funkce $f(x, y)$. Červenou barvou je označen bod $T = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) = (1, 1, \frac{3}{10})$ a souřadnice y_0 . Souřadnicí y_0 prochází rovina ρ . Rovina ρ je obarvena šedou barvou. Na obrázku je funkce $\psi(x)$ znázorněná modrou barvou stejně jako tečna t . Úhel φ je obarven oranžovou barvou.



Obrázek 3.14: Derivace $f(x, y)$ podle x

Dále vypočteme první parciální derivaci funkce $f(x, y)$ podle proměnné y :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2}x^3y + \frac{1}{4}x$$

Dosadíme zadaný bod $(1, 1)$:

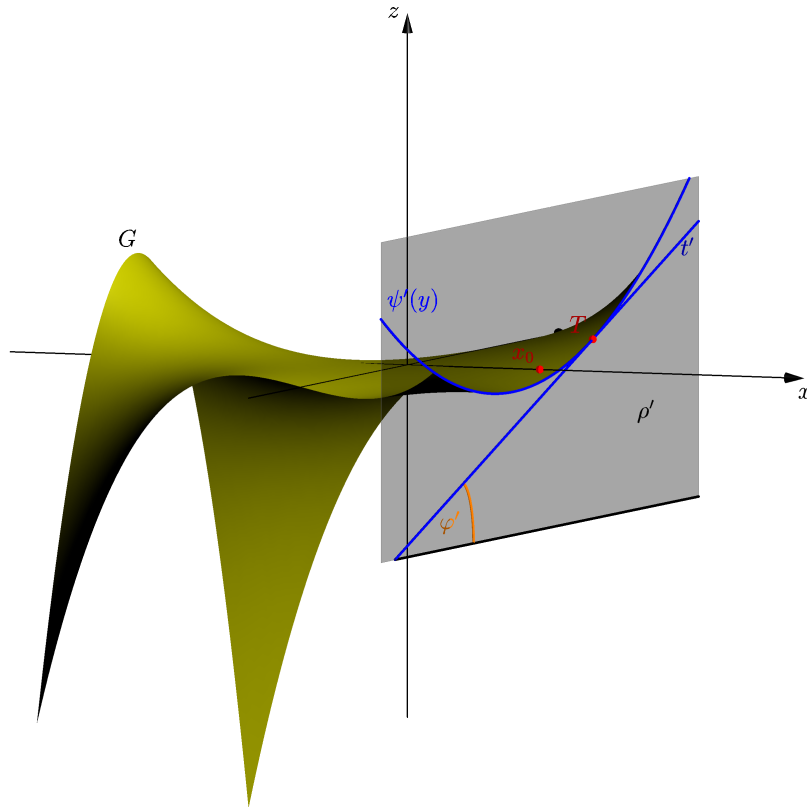
$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = \frac{3}{4}$$

Znovu si rozebereme geometrický význam parciální derivace:

1. Průnikem grafu G funkce $f(x, y)$ a roviny určené předpisem $\rho' : x = x_0 = 1$ je graf funkce jedné proměnné $\psi'(y) = f(x_0, y) = f(1, y) = \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{4}y - \frac{1}{5}$.
2. V rovině ρ' existuje tečna t' ke grafu funkce jedné proměnné $\psi'(y) = \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{4}y - \frac{1}{5}$ v bodě $y_0 = 1$. Tato tečna t' má směrnici určenou námi vypočítanou první parciální

derivací $f(x, y)$ podle proměnné y v zadaném bodě $(1, 1)$. Směrnice tečny t' má tedy hodnotu $\frac{3}{4}$, tedy $\operatorname{tg} \varphi' = \frac{3}{4}$ (tj. úhel $\varphi' \doteq \frac{37\pi}{180}$ rad), a to je právě geometrický význam parciální derivace.

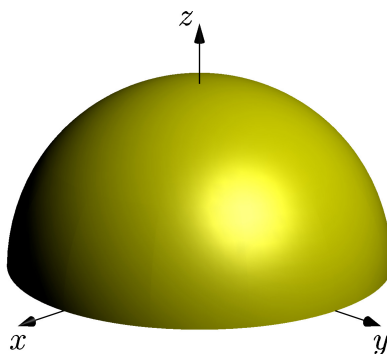
Na obr. 3.15 je znázorněný graf G funkce $f(x, y)$ žlutou barvou. Souřadnice x_0 a bod $T = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) = (1, 1, \frac{3}{10})$ jsou označeny červenou barvou. Souřadnicí x_0 prochází rovina ρ' . Rovina ρ' je označena šedou barvou. Funkce $\psi'(y)$ a tečna t' jsou obarveny modrou barvou. Úhel φ' je znázorněn oranžovou barvou.



Obrázek 3.15: Derivace $f(x, y)$ podle y

Příklad 3. (Směrová derivace)**Zadání:**

Nechť je dána funkce $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ (obr. 3.16). Vypočítejte derivaci funkce $f(x, y)$ v bodě $(x_0, y_0) = (\frac{5}{2}, -\frac{3}{4})$ ve směru jednotkového vektoru $\mathbf{u} = \frac{(-2, 1)}{\|(-2, 1)\|}$.

Obrázek 3.16: Graf funkce $f(x, y)$ **Řešení:**

Vypočítáme první parciální derivace funkce $f(x, y)$ podle proměnných x a y :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2} (9 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2} (9 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} (-2y) = \frac{-y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$$

Dosadíme zadaný bod $(\frac{5}{2}, -\frac{3}{4})$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{4}\right) = \frac{-\frac{5}{2}}{\sqrt{9 - (\frac{5}{2})^2 - (-\frac{3}{4})^2}} = -\frac{10}{\sqrt{35}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{4}\right) = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{9 - (\frac{5}{2})^2 - (-\frac{3}{4})^2}} = \frac{3}{\sqrt{35}}$$

Vypočteme derivaci ve směru vektoru $\mathbf{u} = \frac{(-2, 1)}{\|(-2, 1)\|} = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. Pro výpočet derivace ve směru jednotkového vektoru $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ můžeme využít gradient:

$$\frac{df}{d\mathbf{u}}(x_0, y_0) = \langle \text{grad } f(x_0, y_0), \mathbf{u} \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot u_2,$$

kde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je označení pro skalární součin.

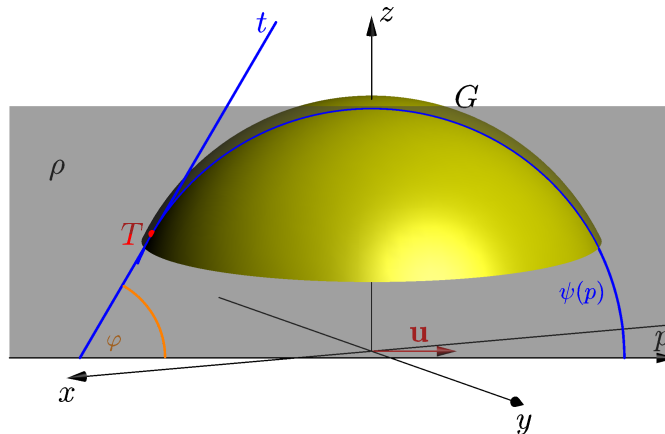
Tedy:

$$\frac{df}{d\mathbf{u}}(x_0, y_0) = \langle \text{grad } f(x_0, y_0), \mathbf{u} \rangle = -\frac{10}{\sqrt{35}} \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + \frac{3}{\sqrt{35}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{23}{5\sqrt{7}}$$

Podívejme se na geometrický význam směrové derivace. Co nám udává číslo $\frac{23}{5\sqrt{7}}$?

1. Průnikem grafu G funkce $f(x, y)$ a roviny určené předpisem¹ $\rho : \frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y - \frac{1}{\sqrt{5}} = 0$ je graf funkce $\psi(p)$ (p je parametr).
2. V rovině ρ existuje tečna t ke grafu funkce $\psi(p)$ v bodě $p = 0$. Tato tečna t má směrnici určenou námi vypočítanou derivací funkce $f(x, y)$ ve směru vektoru $\mathbf{u}$ v zadaném bodě $(\frac{5}{2}, -\frac{3}{4})$. Směrnice tečny t má tedy hodnotu $\frac{23}{5\sqrt{7}}$, tj. $\text{tg } \varphi = \frac{23}{5\sqrt{7}}$, a to je geometrický význam směrové derivace.

Na obr. 3.17 a obr. 3.18 je znázorněný graf G funkce $f(x, y)$ žlutou barvou. Bod $T = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) = (\frac{5}{2}, -\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{35}}{4})$ je označen červenou barvou spolu s vektorem $\mathbf{u}$. Rovina ρ je označena šedou barvou. Funkce $\psi(p)$ a tečna t jsou obarveny modrou barvou. Úhel φ je znázorněn oranžovou barvou.

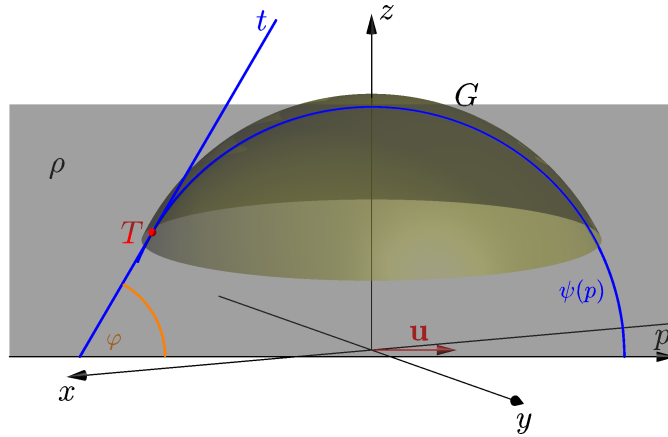


Obrázek 3.17: Směrová derivace

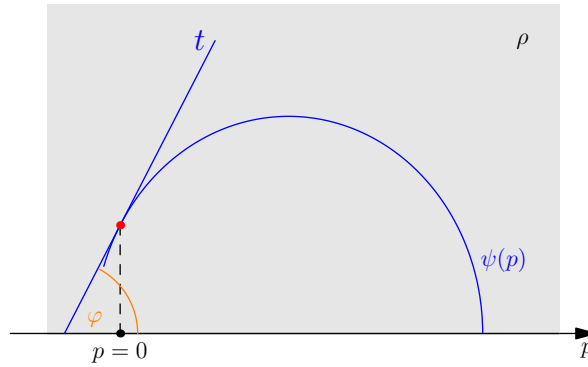
Pro lepší přehlednost je na obr. 3.18 zobrazena stejná situace, jako je na obr. 3.17, avšak s tím rozdílem, že graf funkce $f(x, y)$ je vykreslen průhledně.

Na dalším obrázku, tj. obr. 3.19, je znázorněno pouze to, co se odehrává v rovině ρ . Bod, ve kterém se tečna t dotýká grafu funkce $\psi(p)$, je označen červeně.

¹Rovnici roviny ρ získáme pomocí vektorového součinu vektorů $\mathbf{u} = (-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0)$ a $\mathbf{z} = (0, 0, 1)$, kde vektor $\mathbf{z}$ zaručuje rovnoběžnost roviny se z -ovou osou. Vektorovým součinem získáme koeficienty a, b, c rovnice $\rho : ax + by + cz + d = 0$.



Obrázek 3.18: Směrová derivace - průhledně

Obrázek 3.19: Směrová derivace - rovina ρ

Závěrem si ukažme výpočet směrové derivace přímo z definice. Položme $\psi(p) = f(A + p\mathbf{u})$, kde $p \in \mathbb{R}$ a $A = (x_0, y_0)$. Víme, že má-li funkce $\psi(p)$ v bodě $p = 0$ derivaci, pak tuto derivaci nazýváme derivací funkce $f(x, y)$ v bodě A ve směru vektoru $\mathbf{u}$. Platí:

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\mathbf{u}}(x_0, y_0) &= \psi'(0) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\psi(p) - \psi(0)}{p} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{f(A + p\mathbf{u}) - f(A)}{p} = \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + pu_1, y_0 + pu_2) - f(x_0, y_0)}{p} \end{aligned}$$

Funkce $\psi(p)$:

$$\begin{aligned}\psi(p) &= f(A + p(u)) = f\left(\frac{5}{2} - \frac{2}{\sqrt{5}}p, -\frac{3}{4} + \frac{1}{\sqrt{5}}p\right) = \\ &= \sqrt{9 - \left(\frac{5}{2} - \frac{2}{\sqrt{5}}p\right)^2 - \left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{\sqrt{5}}p\right)^2} = \\ &= \sqrt{9 - \left(\frac{25}{4} - \frac{10}{\sqrt{5}}p + \frac{4}{5}p^2\right) - \left(\frac{9}{16} - \frac{3}{2\sqrt{5}}p + \frac{1}{5}p^2\right)} \\ \psi(p) &= \sqrt{\frac{35}{16} + \frac{23}{2\sqrt{5}}p - p^2}\end{aligned}$$

Derivace $\psi(p)$:

$$\psi'(p) = \frac{1}{2} \left(\frac{35}{16} + \frac{23}{2\sqrt{5}}p - p^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{23}{2\sqrt{5}} - 2p \right)$$

Dosadíme $p = 0$:

$$\psi'(0) = \frac{1}{2} \left(\frac{35}{16} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{23}{2\sqrt{5}} = \frac{23}{5\sqrt{7}}$$

Číslo $\frac{23}{5\sqrt{7}}$ má pro nás význam směrnice tečny t zobrazené na obrázcích obr. 3.17, obr. 3.18 a obr. 3.19 ($\operatorname{tg} \varphi = \frac{23}{5\sqrt{7}}$).

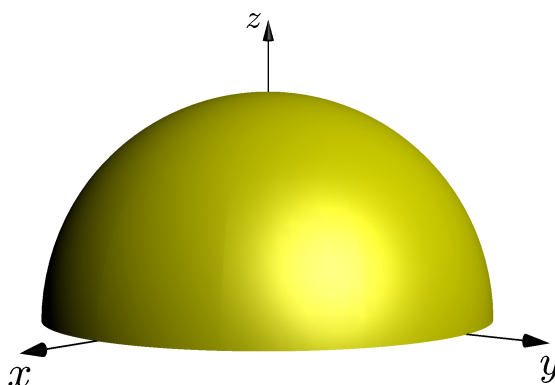
3.3 Diferenciál, gradient a směrová derivace

Tato část je zaměřena na nalezení tečné roviny (1. příklad), výpočet přibližné hodnoty funkce pomocí diferenciálu (2. a 3. příklad) a na geometrický význam gradientu (4. příklad).

Příklad 1. (Tečná rovina)

Zadání:

Najděte rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ (obr. 3.20) v bodě $T = (1, -2, ?)$.



Obrázek 3.20: Graf funkce $f(x, y)$

Řešení:

Víme, že tečná rovina τ ke grafu funkce $f(x, y)$ v bodě $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ existuje právě tehdy, když je funkce $f(x, y)$ diferencovatelná v bodě (x_0, y_0) . Předpis tečné roviny τ je:

$$\tau : z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

neboli

$$\tau : z - f(x_0, y_0) = df_{(x_0, y_0)}(x - x_0, y - y_0)$$

K nalezení rovnice tečné roviny τ ke grafu funkce $f(x, y)$ je tedy třeba vypočítat parciální derivace funkce $f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0) .

První parciální derivace:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{-x}{\sqrt{9-x^2-y^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{-y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}\end{aligned}$$

Dříve než dosadíme bod $(1, -2)$ je třeba zjistit, zda jsou vypočtené parciální derivace spojité na celém $D(f)$. $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 9\}$. Jedná se o kruh o poloměru 3. Podíváme-li se na definiční obor vypočtených parciálních derivací, tak v obou případech je díky jmenovateli zřejmé, že $D(\partial f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 9\}$. Definiční obor vypočtených parciálních derivací je kruh bez hraničních bodů (bez kružnice o poloměru 3). Bod $(1, -2)$ náleží oběma definičním oborům, a proto ho lze bez problému dosadit. Pokud by bod nespadal do obou definičních oborů, tak by úloha nebyla řešitelná.

Dosadíme bod $(1, -2)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(1, -2) &= -\frac{1}{2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1, -2) &= 1\end{aligned}$$

Dosazením bodu $(1, -2)$ do vypočtených parciálních derivací jsme získali směrnice tečen t_1 a t_2 . Tečny t_1 a t_2 se dotýkají grafu funkce $f(x, y)$ v bodě T a určují námi hledanou tečnou rovinu τ .

Zbývá ještě vypočítat funkční hodnotu $f(x, y)$ v bodě $(1, -2)$:

$$f(x_0, y_0) = f(1, -2) = \sqrt{9-1-4} = 2$$

Nyní můžeme dosadit do předpisu roviny τ :

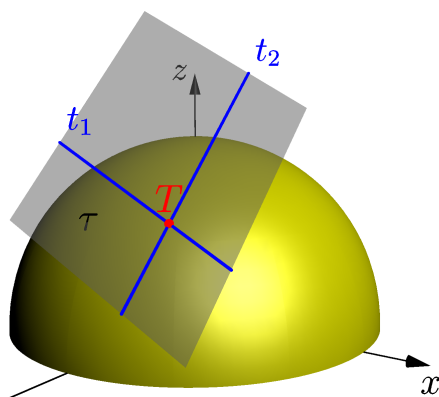
$$\begin{aligned}\tau : z - f(x_0, y_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \\ \tau : z - 2 &= -\frac{1}{2} \cdot (x - 1) + 1 \cdot (y + 2),\end{aligned}$$

kde $-\frac{1}{2} \cdot (x - 1) + 1 \cdot (y + 2) = df_{(1, -2)}(x - 1, y + 2)$.

Výsledná rovnice roviny τ má tvar:

$$\begin{aligned}\tau : z - 2 &= -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + y + 2 \\ \tau : x - 2y + 2z - 9 &= 0\end{aligned}$$

Na obr. 3.21 je tečná rovina τ znázorněna šedou barvou. Tečny t_1 a t_2 jsou obarveny modrou barvou. Červenou barvou je znázorněn tečný bod T . Graf funkce $f(x, y)$ je znázorněn žlutou barvou.

Obrázek 3.21: Tečná rovina ke grafu $f(x, y)$ v bodě T

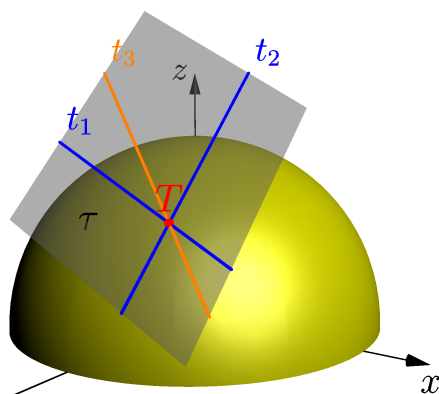
Z obr. 3.21 je patrný geometrický význam parciálních derivací ve vztahu k tečné rovině. Podívejme se ještě na geometrický význam směrové derivace ve vztahu k tečné rovině.

Směrovou derivaci spočítáme například ve směru vektoru $\mathbf{u} = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$:

$$\frac{df}{d\mathbf{u}}(x_0, y_0) = \langle \text{grad } f(x_0, y_0), \mathbf{u} \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot u_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

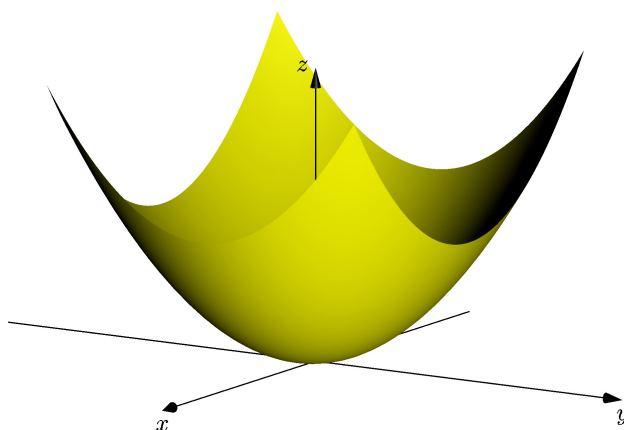
Číslo $\frac{2}{\sqrt{5}}$ nám udává směrnici „třetí“ tečny.

Na obr. 3.22 vidíme, že námi přidáná tečna, kterou jsme vypočítali pomocí směrové derivace (oranžová barva), leží spolu s tečnami, které jsme vypočítali pomocí parciálních derivací (modrá barva), na tečné rovině τ . Tečná rovina τ je znázorněná šedou barvou. Žlutou barvou je znázorněný graf funkce $f(x, y)$. Červenou barvou je znázorněn tečný bod T .

Obrázek 3.22: Tečná rovina a tři tečny ke grafu funkce $f(x, y)$

Příklad 2. (Výpočet přibližné hodnoty)**Zadání:**

- a) Určete rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + y^2$ (obr. 3.23) v bodě $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) = (1, 0, \frac{1}{2})$.
- b) Pomocí diferenciálu vypočtete přibližně $f(x, y) = \frac{1}{2}(2,5)^2 + (-0,25)^2$.

Obrázek 3.23: Graf funkce $f(x, y)$ **Řešení:**

a) Tečná rovina τ ke grafu funkce $f(x, y)$ v bodě $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ existuje právě tehdy, když je funkce $f(x, y)$ diferencovatelná v bodě (x_0, y_0) . Předpis tečné roviny τ je:

$$\tau : z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

neboli

$$\tau : z - f(x_0, y_0) = df_{(x_0, y_0)}(x - x_0, y - y_0)$$

K nalezení rovnice tečné roviny τ ke grafu funkce $f(x, y)$ je tedy třeba vypočítat parciální derivace funkce $f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0) .

První parciální derivace:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= x \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 2y \end{aligned}$$

Dosadíme bod $(1, 0)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 0\end{aligned}$$

Dosadíme do předpisu roviny τ :

$$\begin{aligned}\tau : z - f(x_0, y_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \\ \tau : z - \frac{1}{2} &= 1 \cdot (x - 1) + 0 \cdot (y - 0),\end{aligned}$$

kde $1 \cdot (x - 1) + 0 \cdot (y - 0) = df_{(1,0)}(x - 1, y - 0)$.

Výsledná rovnice roviny τ má tvar:

$$\begin{aligned}\tau : z - \frac{1}{2} &= x - 1 \\ \tau : -x + z + \frac{1}{2} &= 0\end{aligned}$$

b) Pro výpočet přibližné hodnoty budeme potřebovat funkci $f(x, y)$, bod (x_0, y_0) a difference dx, dy . Vzhledem k zadání uvažujeme:

- Funkci $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + y^2$, viz obr. 3.23
- Bod $(x_0, y_0) = (1, 0)$.¹
- Difference $dx = 1,5$ a $dy = -0,25$

Pro výpočet diferenciálu použijeme vypočtené parciální derivace z části **a**). Diferenciál $df_{(1,0)}(1,5; -0,25)$ je roven:

$$\begin{aligned}df_{(x_0, y_0)}(dx, dy) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot dy \\ df_{(1,0)}(1,5; -0,25) &= 1 \cdot 1,5 + 0 \cdot (-0,25) \\ df_{(1,0)}(1,5; -0,25) &= 1,5\end{aligned}$$

Přibližná hodnota $f(x, y) = \frac{1}{2}(2,5)^2 + (-0,25)^2$ je rovna :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(2,5)^2 + (-0,25)^2 &\doteq f(x_0, y_0) + df_{(x_0, y_0)}(dx, dy) \\ \frac{1}{2}(2,5)^2 + (-0,25)^2 &\doteq 0,5 + 1,5 = 2\end{aligned}$$

¹Jsmo si vědomi toho, že tento bod není zvolen nejlépe, poslouží nám však k vysvětlení geometrického významu diferenciálu.

Pomocí diferenciálu jsme vypočetli přibližnou hodnotu $\frac{1}{2}(2,5)^2 + (-0,25)^2$, která je 2.

Nyní si na obr. 3.24 vysvětlíme, jaký je geometrický význam diferenciálu a jaký je jeho vztah k tečné rovině τ , kterou jsme našli v části a).

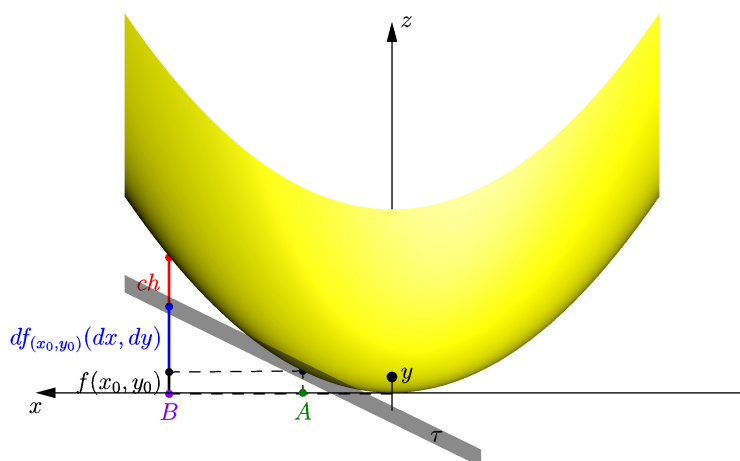
Jak už bylo řečeno, tak v části a) jsme hledali tečnou rovinu τ (šedá barva) ke grafu funkce $f(x, y)$ (žlutá barva) v bodě $(1, 0, \frac{1}{2})$ (černá barva). Geometrický význam tečné roviny τ je zřejmý. Zelený bod A na obr. 3.24 představuje průmět tečného bodu do roviny xy .

V části b) jsme počítali přibližnou hodnotu funkce $f(x, y)$ v bodě $(2,5; -0,25)$ pomocí diferenciálu. Vysvětleme si tedy jeho geometrický význam. Nechť B značí bod, který dostaneme, posuneme-li se z bodu $A = (x_0, y_0)$ o dx ve směru osy x a o dy ve směru osy y , tj. $B = (x_0 + dx, y_0 + dy)$. Vypočtená hodnota diferenciálu $df_{(x_0, y_0)}(dx, dy) = 1,5$ představuje délku úsečky, která je v obr. 3.24 vyznačena modrou barvou. Přibližná hodnota $f(B) = f(x_0 + dx, y_0 + dy) \doteq f(x_0, y_0) + df_{(x_0, y_0)}(dx, dy) = 2$ představuje součet délek modré a černé úsečky. Je to tedy funkční hodnota funkce τ (tečné roviny) v bodě B . Tzn. funkční hodnotu funkce $f(x, y)$ v bodě B aproximujeme funkční hodnotou funkce τ v bodě B .

Při aproximaci funkční hodnoty funkce $f(x, y)$ tečnou rovinou τ se dopouštíme jisté chyby (červená barva). Zkusme vypočítat, jak velké chyby jsme se dopustili:

$$\begin{aligned} chyba &= f(x, y) - (f(x_0, y_0) + df_{(x_0, y_0)}(dx, dy)) \\ chyba &= f(2,5; -0,25) - [f(1, 0) + df_{(1, 0)}(1,5; -0,25)] \\ chyba &= 1,1875 \end{aligned}$$

Jak je vidět, dopustili jsme se poměrně velké chyby. Je to způsobeno špatnou volbou bodu (x_0, y_0) . Pro přesnější aproximaci by bylo lepší zvolit $(x_0, y_0) = (2, 0)$. Difference dx by se zmenšila na hodnotu 0,5 a velikost chyby by klesla na hodnotu 0,1875. Výsledek by však byl na obr. 3.24 málo názorný.



Obrázek 3.24: Diferenciál

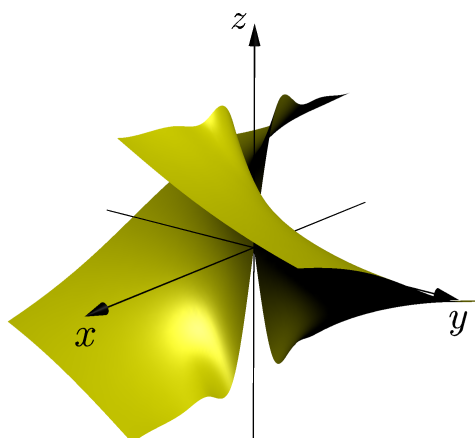
Příklad 3. (Výpočet přibližné hodnoty)**Zadání:**

Pomocí diferenciálu vypočtete přibližně $\operatorname{arctg}\left(\frac{1,49}{0,85}\right)$.

Řešení:

Pro výpočet přibližné hodnoty budeme potřebovat funkci $f(x, y)$, bod (x_0, y_0) a difference dx, dy . Vzhledem k zadání uvažujeme:

- Funkci $f(x, y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$, viz obr. 3.25
- Bod $(x_0, y_0) = (1, 1)$
- Difference $dx = 0,49$ a $dy = -0,15$



Obrázek 3.25: Graf funkce $f(x, y)$

Vypočteme první parciální derivace:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{1}{y\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right)} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{-x}{y^2\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right)}\end{aligned}$$

Dosadíme bod $(1, 1)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) &= \frac{1}{2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Diferenciál $df_{(1,1)}(0,49; -0,15)$ je roven:

$$\begin{aligned} df_{(x_0, y_0)}(dx, dy) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot dy \\ df_{(1,1)}(0,49; -0,15) &= \frac{1}{2} \cdot 0,49 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-0,15) \\ df_{(1,1)}(0,49; -0,15) &= 0,32 \end{aligned}$$

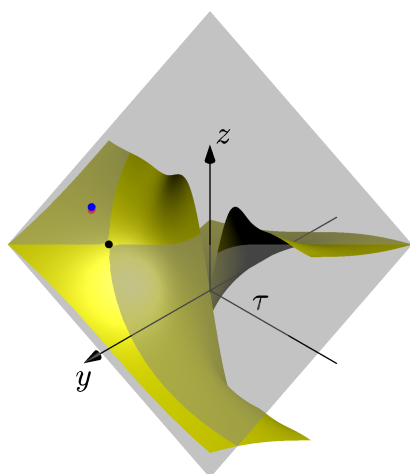
Přibližná hodnota $\arctg\left(\frac{1,49}{0,85}\right)$ je rovna :

$$\begin{aligned} \arctg\left(\frac{1,49}{0,85}\right) &\doteq f(x_0, y_0) + df_{(x_0, y_0)}(dx, dy) \\ \arctg\left(\frac{1,49}{0,85}\right) &\doteq \frac{\pi}{4} + 0,32 \doteq 1,1054 \end{aligned}$$

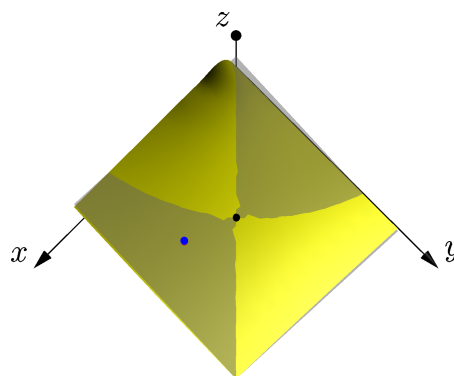
Pomocí diferenciálu jsme vypočetli přibližnou hodnotu $\arctg\left(\frac{1,49}{0,85}\right)$, která je 1,1054 ($chyba = f(x, y) - (f(x_0, y_0) + df_{(x_0, y_0)}(dx, dy)) = 0,053$).

Na grafech níže (obr. 3.26 a obr. 3.27) je černou barvou znázorněný bod $(1, 1, \frac{\pi}{4})$. Modrou barvou je označen bod $(1,49; 0,85; 1,1054)$ ležící na tečné rovině τ . Červenou barvou je označen bod $(1,49; 0,85; 1,0524)$ ležící na grafu funkce $f(x, y)$. Tečná rovina τ je znázorněná šedou barvou. Graf funkce $f(x, y)$ je obarven žlutou barvou.

Na grafech je vidět, že body $(1,49; 0,85; 1,1054)$ a $(1,49; 0,85; 1,0524)$ (modrý a červený) jsou si blízké. Chyba, které jsme se dopustili, je poměrně malá.



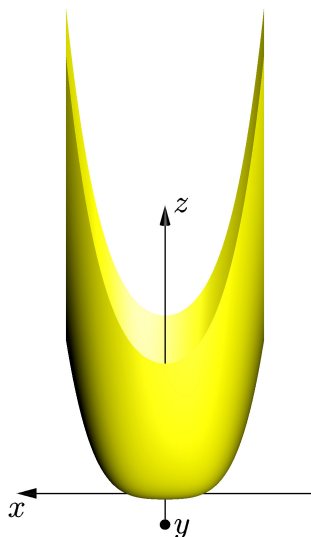
Obrázek 3.26: Diferenciál



Obrázek 3.27: Diferenciál - detail

Příklad 4. (Gradient)**Zadání:**

Je zadána funkce $f(x, y) = \frac{1}{5}x^4 + \frac{1}{5}x^2y^2 + \frac{1}{5}y^4$ (obr. 3.28). Najděte jednotkový vektor $\mathbf{u}$, pro nějž je směrová derivace funkce $f(x, y)$ v bodě $(x_0, y_0) = (1, 1)$ maximální a určete její hodnotu.

Obrázek 3.28: Graf funkce $f(x, y)$ **Řešení:**

Víme, že směrová derivace je největší ve směru vektoru, pro který platí:

$$\mathbf{u} = \frac{\text{grad } f(x_0, y_0)}{\|\text{grad } f(x_0, y_0)\|},$$

kde $\text{grad } f(x_0, y_0)$ je označení pro gradient funkce $f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0) a platí:

$$\text{grad } f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

Gradient je tedy vektor, jehož složky jsou rovny příslušným parciálním derivacím. Pro jeho výpočet budeme muset vyjádřit první parciální derivace funkce $f(x, y)$.

První parciální derivace:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{4}{5}x^3 + \frac{2}{5}xy^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{4}{5}y^3 + \frac{2}{5}x^2y \end{aligned}$$

Dosadíme bod $(1, 1)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) &= \frac{6}{5} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) &= \frac{6}{5}\end{aligned}$$

Gradient je roven:

$$\text{grad } f(x_0, y_0) = \left(\frac{6}{5}, \frac{6}{5} \right)$$

Nyní můžeme vypočítat velikost gradientu:

$$\|\text{grad } f(1, 1)\| = \frac{6\sqrt{2}}{5}$$

Směrová derivace je největší ve směru vektoru:

$$\mathbf{u} = \frac{\text{grad } f(x_0, y_0)}{\|\text{grad } f(x_0, y_0)\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Nyní zbývá už jen poslední bod zadání a to vypočítat hodnotu směrové směrové derivace.

Pro maximální hodnotu směrové derivace platí:

$$\begin{aligned}\frac{df}{d\mathbf{u}}(x_0, y_0) &= \langle \text{grad } f(x_0, y_0), \mathbf{u} \rangle = \langle \text{grad } f(x_0, y_0), \frac{\text{grad } f(x_0, y_0)}{\|\text{grad } f(x_0, y_0)\|} \rangle = \\ &= \frac{1}{\|\text{grad } f(x_0, y_0)\|} \langle \text{grad } f(x_0, y_0), \text{grad } f(x_0, y_0) \rangle = \\ &= \frac{\|\text{grad } f(x_0, y_0)\|^2}{\|\text{grad } f(x_0, y_0)\|} = \|\text{grad } f(x_0, y_0)\|,\end{aligned}$$

kde $\langle , \rangle$ je označení pro skalární součin.

Hodnota směrové derivace je tedy:

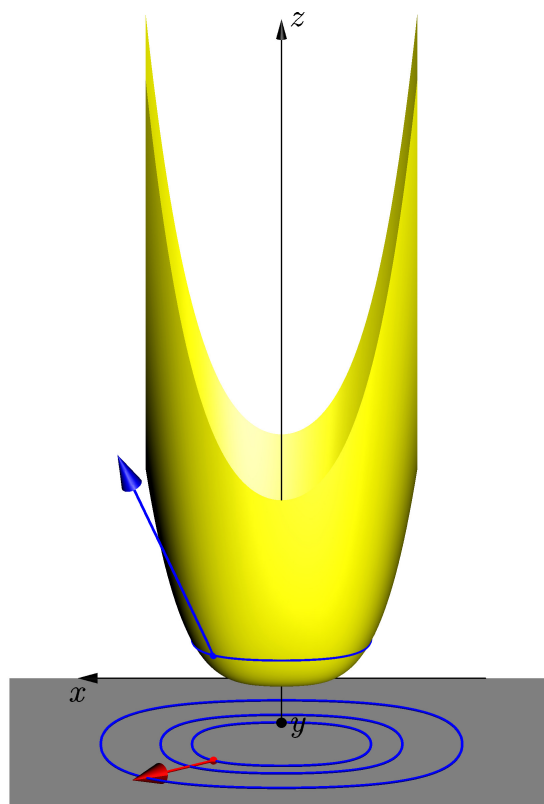
$$\frac{df}{d\mathbf{u}}(x_0, y_0) = \|\text{grad } f(x_0, y_0)\| = \frac{6\sqrt{2}}{5}$$

Podívejme se detailněji na vztah gradientu k směrové derivaci.

Výsledné číslo $\frac{6\sqrt{2}}{5}$ má pro nás vzhledem k směrové derivaci význam směrnice tečny ke grafu funkce jedné proměnné $\psi(p)$ (p je parametr) v bodě $p = 0$. Funkce $\psi(p)$ je průnikem funkce $f(x, y)$ a roviny ρ . Rovina ρ je rovnoběžná s osou z a je určena vektorem gradientu $\mathbf{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$. Označíme-li si průsečnici roviny ρ a roviny xy jako osu p , pak hodnota směrové derivace $\frac{6\sqrt{2}}{5}$ je tangenta úhlu φ , který svírá tečna ke grafu funkce $\psi(p)$ s kladnou částí osy p .

Všimněme si tedy, že velikost gradientu se rovná tangentě úhlu mezi tečnou a rovinou xy , tj. $\frac{df}{du}(x_0, y_0) = \|\text{grad } f(x_0, y_0)\| = \text{tg } \varphi$.

Na obr. 3.29 je žlutou barvou znázorněn graf funkce $f(x, y)$. Červenou barvou je znázorněn bod $(1, 1)$ a gradient. Modrou barvou je znázorněn směr největšího růstu a vrstevnice funkce $f(x, y)$. Vodorovná rovina xy je obarvena šedou barvou.



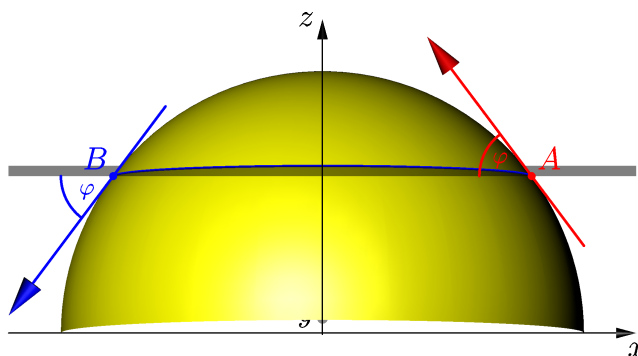
Obrázek 3.29: Graf funkce $f(x, y)$ se znázorněným gradientem

Poznámka:

Jak souvisí gradient s průběhem (tvarem) funkce $f(x, y)$?

Gradient nám udává směr, ve kterém funkce $f(x, y)$ nejrychleji roste/klesá. Pro lepší představu si zkusme představit vrstevnice funkce $f(x, y)$ tak, jako by se jednalo o vrstevnice na mapě (Pozn.: Gradient je kolmý na vrstevnice).

Pokud bychom chtěli z bodu A co nejrychleji stoupat (viz červená šipka obr. 3.30), pak půjdeme ve směru gradientu ($\operatorname{tg} \varphi$ je největší – kladné). V případě, kdybychom chtěli z bodu B co nejrychleji klesat (viz modrá šipka obr. 3.30), pak zvolíme směr opačný ke gradientu ($\operatorname{tg} \varphi$ je nejmenší – záporné).¹



Obrázek 3.30: Geometrický význam gradientu

¹Logicky by se toto vysvětlení mělo vztahovat pouze k jednomu bodu. Pro lepší přehlednost v obrázku jsou však uvedeny body dva.

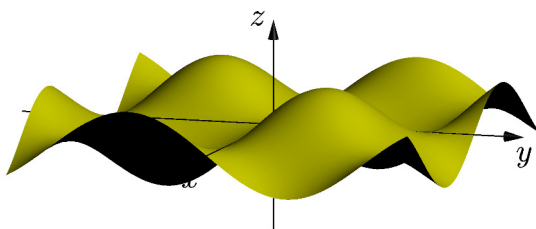
3.4 Taylorův mnohočlen

Tato část je zaměřena na Taylorův mnohočlen a jeho grafické znázornění (Příklad 1. a 2.).

Příklad 1. (Taylorův mnohočlen)

Zadání:

Najděte Taylorův mnohočlen prvního, druhého, třetího a čtvrtého řádu funkce $f(x, y) = \sin x \sin y$ (obr. 3.31) se středem v bodě $S = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$.



Obrázek 3.31: Graf funkce $f(x, y)$

Řešení:

Pro Taylorův mnohočlen čtvrtého řádu platí:

$$\begin{aligned} T_4(x, y) = & f\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) + df_{\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)}\left(x - \frac{\pi}{4}, y - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}d^2f_{\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)}\left(x - \frac{\pi}{4}, y - \frac{\pi}{4}\right) + \\ & + \frac{1}{6}d^3f_{\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)}\left(x - \frac{\pi}{4}, y - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{24}d^4f_{\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)}\left(x - \frac{\pi}{4}, y - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

Je vidět, že musíme vypočítat parciální derivace až čtvrtého řádu. Začneme Taylorovým mnohočlenem prvního řádu.

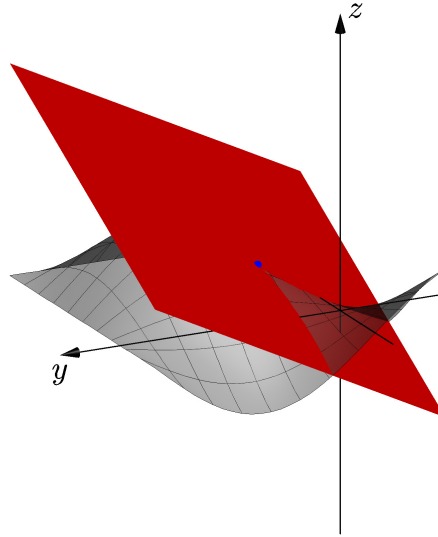
Parciální derivace prvního řádu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \cos x \sin y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \sin x \cos y \end{aligned}$$

Taylorův mnohočlen prvního řádu:

$$\begin{aligned} T_1(x, y) &= f\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) + df_{\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)}\left(x - \frac{\pi}{4}, y - \frac{\pi}{4}\right) \\ T_1(x, y) &= \frac{1}{2}\left(x + y - \frac{\pi}{2} + 1\right) \end{aligned}$$

Na obr. 3.32 je šedou barvou znázorněný graf funkce $f(x, y)$. Graf funkce $f(x, y)$ je pro lepší přehlednost vykreslen pouze v mezích $\langle -1, \pi \rangle \times \langle -1, \pi \rangle$. Modrou barvou je označen střed S . Červenou barvou je znázorněn graf Taylorova mnohočlenu prvního řádu. Vidíme, že grafem Taylorova mnohočlenu prvního řádu je tečná rovina. Tzn. že v okolí středu $S = (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ jsme nahradili funkci $f(x, y) = \sin x \sin y$ tečnou rovinou.



Obrázek 3.32: Taylorův mnohočlen 1. řádu

Dále si vyjádříme Taylorův mnohočlen druhého řádu. Pro něj budeme potřebovat parciální derivace druhého řádu:

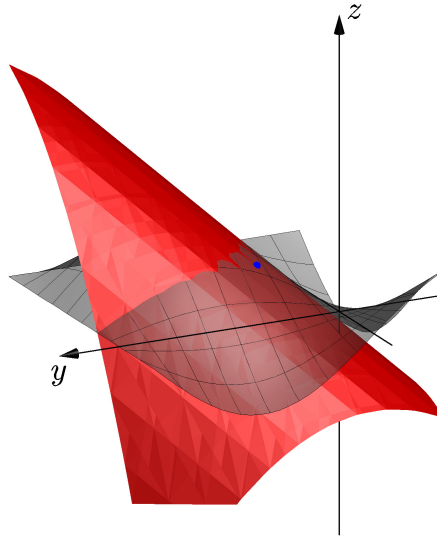
$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= -\sin x \sin y \\ \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x, y) &= \cos x \cos y \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= -\sin x \sin y\end{aligned}$$

Taylorův mnohočlen druhého řádu:

$$T_2(x, y) = f\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) + df_{\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)}\left(x - \frac{\pi}{4}, y - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}d^2f_{\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)}\left(x - \frac{\pi}{4}, y - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$T_2(x, y) = \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + x + y + xy - \frac{\pi}{2} + 1 \right)$$

Na obr. 3.33 je graf Taylorova mnohočlenu druhého řádu znázorněn červenou barvou. Taylorův mnohočlen druhého řádu nám funkci $f(x, y)$ v okolí středu S nahrazuje s větší přesností, než tomu bylo v případě Taylorova mnohočlenu prvního řádu.



Obrázek 3.33: Taylorův mnohočlen 2. řádu

Zkusme dosáhnout ještě lepší náhrady funkce $f(x, y)$ v okolí středu S . Té docílíme Taylorovým mnohočlenem třetího řádu.

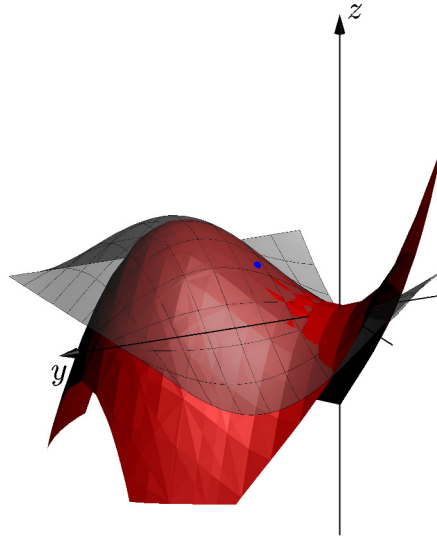
Parciální derivace třetího řádu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x, y) &= -\cos x \sin y & \frac{\partial^3 f}{\partial x y^2}(x, y) &= -\cos x \sin y \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 y}(x, y) &= -\sin x \cos y & \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, y) &= -\sin x \cos y \end{aligned}$$

Taylorův mnohočlen třetího řádu:

$$\begin{aligned} T_3(x, y) &= f\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) + df_{\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)}\left(x - \frac{\pi}{4}, y - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}d^2f_{\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)}\left(x - \frac{\pi}{4}, y - \frac{\pi}{4}\right) + \\ &\quad + \frac{1}{6}d^3f_{\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)}\left(x - \frac{\pi}{4}, y - \frac{\pi}{4}\right) \\ T_3(x, y) &= -\frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}xy + \frac{1}{8}y^2\pi - \frac{1}{16}y\pi^2 + \frac{1}{8}x^2\pi - \frac{1}{16}x\pi^2 - \frac{1}{4}xy^2 - \frac{1}{4}x^2y + \\ &\quad - \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{12}y^3 + \frac{1}{96}\pi^3 - \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}xy\pi \end{aligned}$$

Na obr. 3.34 je graf Taylorova mnohočlenu třetího řádu znázorněn červenou barvou. Je vidět, že Taylorův mnohočlen třetího řádu má už komplikovanější tvar, než tomu bylo v předchozích případech. Taylorův mnohočlen třetího řádu zase o něco více přesněji nahrazuje funkci $f(x, y)$ v okolí středu S .



Obrázek 3.34: Taylorův mnohočlen 3. řádu

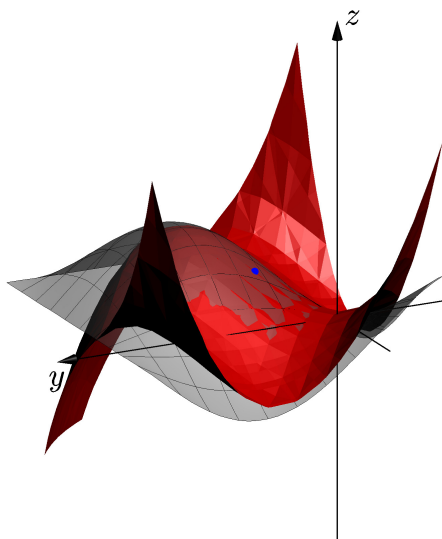
Poslední případ nahrazení funkce $f(x, y)$ v okolí středu S provedeme pomocí Taylorova mnohočlenu čtvrtého řádu. Parciální derivace čtvrtého řádu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(x, y) &= \sin x \sin y & \frac{\partial^4 f}{\partial x y^3}(x, y) &= -\cos x \cos y \\ \frac{\partial^4 f}{\partial x^3 y}(x, y) &= -\cos x \cos y & \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(x, y) &= \sin x \sin y \\ \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 y^2}(x, y) &= \sin x \sin y \end{aligned}$$

Taylorův mnohočlen čtvrtého řádu:

$$\begin{aligned} T_4(x, y) &= f\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) + df_{\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)}\left(x - \frac{\pi}{4}, y - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}d^2f_{\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)}\left(x - \frac{\pi}{4}, y - \frac{\pi}{4}\right) + \\ &\quad + \frac{1}{6}d^3f_{\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)}\left(x - \frac{\pi}{4}, y - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{24}d^4f_{\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)}\left(x - \frac{\pi}{4}, y - \frac{\pi}{4}\right) \\ T_4(x, y) &= -\frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}xy + \frac{1}{8}y^2\pi - \frac{1}{16}y\pi^2 + \frac{1}{8}x^2\pi - \frac{1}{16}x\pi^2 - \frac{1}{4}xy^2 - \frac{1}{4}x^2y - \\ &\quad - \frac{1}{12}xy^3 + \frac{1}{8}x^2y^2 - \frac{1}{12}x^3y + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}y^3 + \frac{1}{96}\pi^3 - \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2} + \\ &\quad + \frac{1}{48}x^4 + \frac{1}{48}y^4 - \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{4}xy\pi \end{aligned}$$

Na obr. 3.35 vidíme graf Taylorova mnohočlenu čtvrtého řádu (červená barva), který nám nahrazuje průběh funkce $f(x, y)$ (šedá barva) v okolí středu S (červená barva) s ještě větší přesností než Taylorův mnohočlen třetího řádu.



Obrázek 3.35: Taylorův mnohočlen 4. řádu

Abychom si o Taylorových mnohočlenech udělali ještě lepší obrázek, tak se podívejme na tabulku 3.1. Zelenou barvou jsou zde uvedeny funkční hodnoty funkce $f(x, y)$ ve zvolených bodech $(\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{5})$, $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$ a $(\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{7})$. Černou barvou jsou uvedeny funkční hodnoty Taylorova mnohočlenu příslušného řádu. Červenou barvou jsou uvedeny absolutní chyby, tzn. $chyba = |f(x, y) - T_i(x, y)|$ pro $i = 1, 2, 3, 4$. Podle *chyby* vidíme, jak moc se liší aproximovaná hodnota od hodnoty reálné.

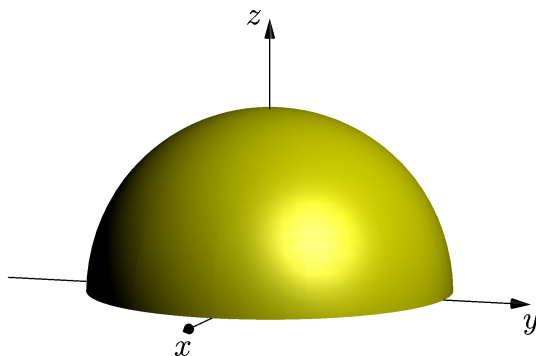
Z tabulky je patrné, že čím blíže jsou umístěny body (x, y) , ve kterých počítáme funkční hodnoty, středu S a čím vyšší je řád Taylorova mnohočlenu, tím bude *chyba* menší. Všimněme si však toho, že se *chyba* zmenšuje jenom co druhý krok. Je to způsobeno cyklickou derivací funkce $\sin x$, tzn. $f(x) = \sin x \rightarrow f'(x) = \cos x \rightarrow f''(x) = -\sin x \rightarrow f'''(x) = -\cos x \rightarrow f^{(4)}(x) = \sin x$.

	$(x, y) = \left(\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{5}\right)$	$(x, y) = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$	$(x, y) = \left(\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{7}\right)$
$f(x, y)$	0,3454915029	0,2500000000	0,1882550992
$T_1(x, y)$	0,3429203673	0,2382006122	0,1634007872
chyba	0,0025711356	0,0117993878	0,0248543120
$T_2(x, y)$	0,3429203673	0,2382006122	0,1634007872
chyba	0,0025711356	0,0117993878	0,0248543120
$T_3(x, y)$	0,3455042237	0,2501629103	0,1888250301
chyba	0,000012720791	0,00016291030	0,00056993091
$T_4(x, y)$	0,3455042237	0,2501629103	0,1888250301
chyba	0,000012720791	0,00016291030	0,00056993091

Tabulka 3.1: Tabulka funkčních hodnot

Příklad 2. (Taylorův mnohočlen)**Zadání:**

Najděte Taylorův mnohočlen prvního, druhého, třetího a čtvrtého řádu funkce $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ (obr. 3.36) se středem v bodě $S = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Obrázek 3.36: Graf funkce $f(x, y)$ **Řešení:**

Pro Taylorův mnohočlen čtvrtého řádu platí:

$$T_4(x, y) = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + df_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}\left(x - \frac{1}{2}, y - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}d^2f_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}\left(x - \frac{1}{2}, y - \frac{1}{2}\right) + \\ + \frac{1}{6}d^3f_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}\left(x - \frac{1}{2}, y - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{24}d^4f_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}\left(x - \frac{1}{2}, y - \frac{1}{2}\right)$$

Z výše uvedeného vzorce je patrné, že musíme vypočítat parciální derivace až čtvrtého řádu. Začneme s Taylorovým mnohočlenem prvního řádu.

Parciální derivace prvního řádu:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

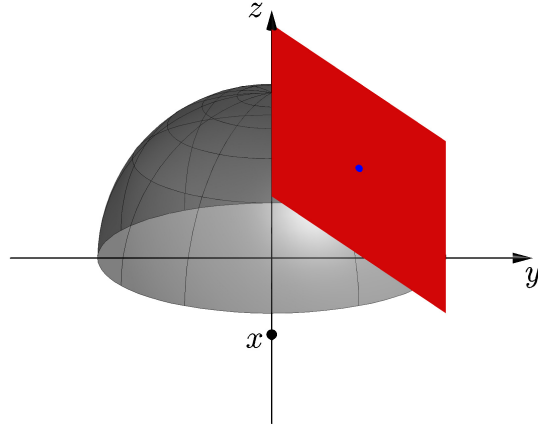
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

Taylorův mnohočlen prvního řádu:

$$T_1(x, y) = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + df_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}\left(x - \frac{1}{2}, y - \frac{1}{2}\right)$$

$$T_1(x, y) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(y - \frac{1}{2}\right)$$

Na obr. 3.37 je šedou barvou znázorněný graf funkce $f(x, y)$. Modrou barvou je označen střed S . Červenou barvou je znázorněn graf Taylora mnohočlen prvního řádu tvořící tečnou rovinu, která v okolí středu $S = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ nahrazuje funkci $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.



Obrázek 3.37: Taylorův mnohočlen 1. řádu

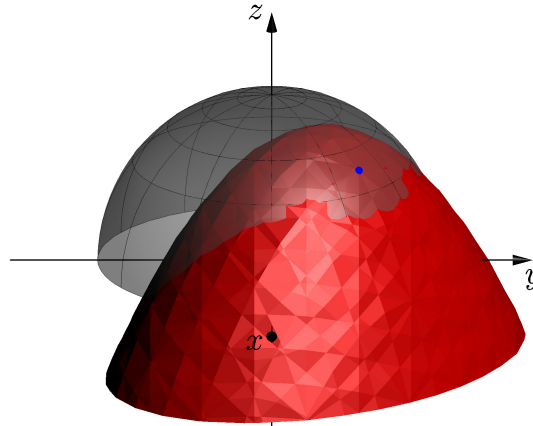
Jak to bude vypadat s Taylorovým mnohočlenem druhého řádu?
Parciální derivace druhého řádu:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{-1 + y^2}{\sqrt{(1 - x^2 - y^2)^3}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x, y) &= -\frac{xy}{\sqrt{(1 - x^2 - y^2)^3}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{-1 + x^2}{\sqrt{(1 - x^2 - y^2)^3}}\end{aligned}$$

Taylorův mnohočlen druhého řádu:

$$\begin{aligned}T_2(x, y) &= f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + df_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}\left(x - \frac{1}{2}, y - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}d^2f_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}\left(x - \frac{1}{2}, y - \frac{1}{2}\right) \\ T_2(x, y) &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(y - \frac{1}{2}\right) - \frac{3\sqrt{2}}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \\ &\quad - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right) - \frac{3\sqrt{2}}{4}\left(y - \frac{1}{2}\right)^2\end{aligned}$$

Na obr. 3.38 vidíme, že průběh Taylorova mnohočleny druhého řádu (červená barva) kopíruje tvar funkce $f(x, y)$ (šedá barva) v okolí středu S (modrá barva) s větší přesností než tomu bylo u tečné roviny uvedené výše.



Obrázek 3.38: Taylorův mnohočlen 2. řádu

Jak to bude s Taylorovým mnohočlenem třetího řádu? Opravdu bude nahrazení funkce $f(x, y)$ v okolí středu S tímto mnohočlenem přesnější než tomu bylo v přechozích případech?

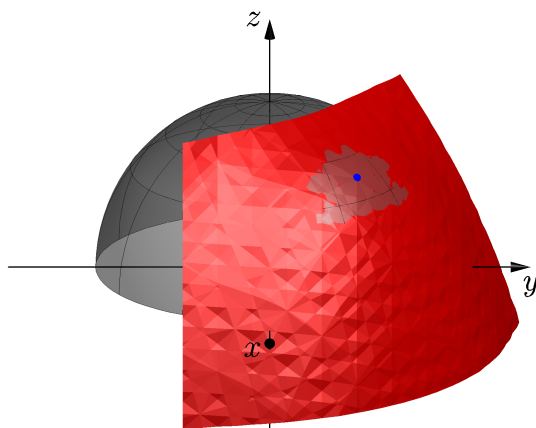
Parciální derivace třetího řádu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x, y) &= \frac{3x(-1+y^2)}{\sqrt{(1-x^2-y^2)^5}} & \frac{\partial^3 f}{\partial x y^2}(x, y) &= \frac{x(-1+x^2-2y^2)}{\sqrt{(1-x^2-y^2)^5}} \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 y}(x, y) &= -\frac{y(1+2x^2-y^2)}{\sqrt{(1-x^2-y^2)^5}} & \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, y) &= \frac{3y(-1+x^2)}{\sqrt{(1-x^2-y^2)^5}} \end{aligned}$$

Taylorův mnohočlen třetího řádu:

$$\begin{aligned} T_3(x, y) &= f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + df_{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}\left(x - \frac{1}{2}, y - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}d^2f_{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}\left(x - \frac{1}{2}, y - \frac{1}{2}\right) + \\ &\quad + \frac{1}{6}d^3f_{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}\left(x - \frac{1}{2}, y - \frac{1}{2}\right) \\ T_3(x, y) &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(y - \frac{1}{2}\right) - \frac{3\sqrt{2}}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \\ &\quad - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right) - \frac{3\sqrt{2}}{4}\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3\sqrt{2}}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 - \\ &\quad - \frac{5\sqrt{2}}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2\left(y - \frac{1}{2}\right) - \frac{5\sqrt{2}}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3\sqrt{2}}{4}\left(y - \frac{1}{2}\right)^3 \end{aligned}$$

Na obr. 3.39 máme opět červenou barvou znázorněný graf Taylorova mnohočlenu (tentokrát třetího řádu). Vidíme, že průběh Taylorova mnohočlenu třetího řádu nahrazuje funkci $f(x, y)$ v okolí středu S mnohem precizněji než tomu bylo v předchozích případech.



Obrázek 3.39: Taylorův mnohočlen 3. řádu

Nyní zbývá splnit už jen poslední bod zadání, tj. nalézt Taylorův mnohočlen čtvrtého řádu.

Parciální derivace čtvrtého řádu:

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(x, y) = \frac{3(-4x^2 + 4x^2y^2 - 1 + 2y^2 - y^4)}{\sqrt{(1 - x^2 - y^2)^7}}$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^3 y}(x, y) = -\frac{3xy(2x^2 + 3 - 3y^2)}{\sqrt{(1 - x^2 - y^2)^7}}$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 y^2}(x, y) = \frac{-x^2 + 2x^4 - 11x^2y^2 - 1 - y^2 + 2y^4}{\sqrt{(1 - x^2 - y^2)^7}}$$

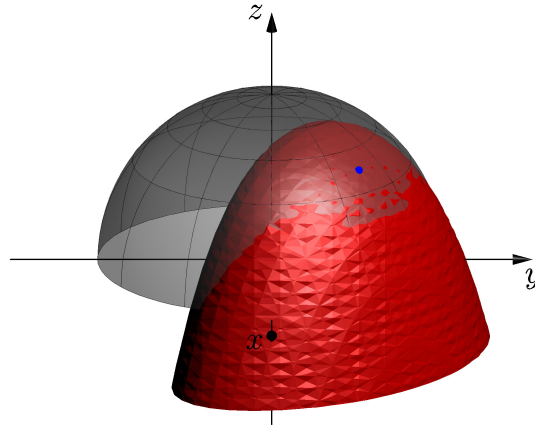
$$\frac{\partial^4 f}{\partial x y^3}(x, y) = \frac{3xy(-3 + 3x^2 - 2y^2)}{\sqrt{(1 - x^2 - y^2)^7}}$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(x, y) = \frac{3(1 - 2x^2 + 4y^2 + x^4 - 4x^2y^2)}{\sqrt{(1 - x^2 - y^2)^7}}$$

Taylorův mnohočlen čtvrtého řádu:

$$\begin{aligned}
 T_4(x, y) &= f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + df_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}\left(x - \frac{1}{2}, y - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}d^2f_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}\left(x - \frac{1}{2}, y - \frac{1}{2}\right) + \\
 &\quad + \frac{1}{6}d^3f_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}\left(x - \frac{1}{2}, y - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{24}d^4f_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}\left(x - \frac{1}{2}, y - \frac{1}{2}\right) \\
 T_4(x, y) &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(y - \frac{1}{2}\right) - \frac{3\sqrt{2}}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \\
 &\quad - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right) - \frac{3\sqrt{2}}{4}\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3\sqrt{2}}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 - \\
 &\quad - \frac{5\sqrt{2}}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2\left(y - \frac{1}{2}\right) - \frac{5\sqrt{2}}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3\sqrt{2}}{4}\left(y - \frac{1}{2}\right)^3 - \\
 &\quad - \frac{21\sqrt{2}}{16}\left(x - \frac{1}{2}\right)^4 - \frac{11\sqrt{2}}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right)^3\left(y - \frac{1}{2}\right) - \\
 &\quad - \frac{31\sqrt{2}}{8}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{11\sqrt{2}}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right)^3 - \frac{21\sqrt{2}}{16}\left(y - \frac{1}{2}\right)^4
 \end{aligned}$$

Na obr. 3.40 je graf Taylorova mnohočlenu čtvrtého řádu znázorněn červenou barvou. Z obrázku je patrné, že nám Taylorův mnohočlen tvoří opět paraboloid stejně, jako tomu bylo u Taylorova mnohočlenu druhého řádu (obr. 3.38).



Obrázek 3.40: Taylorův mnohočlen 4. řádu

Podívejme se ještě na tabulku 3.2, která se nachází níže. Zelenou barvou jsou zde uvedeny funkční hodnoty funkce $f(x, y)$ ve zvolených bodech $(\frac{7}{16}, \frac{7}{16})$, $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ a $(\frac{1}{8}, \frac{1}{8})$. Černou barvou jsou uvedeny funkční hodnoty Taylorova mnohočlenu příslušného řádu. Červenou barvou jsou uvedeny absolutní chyby, tzn. $chyba = |f(x, y) - T_i(x, y)|$ pro $i = 1, 2, 3, 4$. Podle chyby víme, jak moc se liší aproximovaná hodnota od hodnoty

reálné. Také víme, že čím blíže jsou umístěny body (x, y) , ve kterých počítáme funkční hodnoty, středu S a čím vyšší je řád Taylorova mnohočlenu, tím bude *chyba* menší.

	$(x, y) = (\frac{7}{16}, \frac{7}{16})$	$(x, y) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$	$(x, y) = (\frac{1}{8}, \frac{1}{8})$
$f(x, y)$	0,7856128181	0,9354143468	0,9842509842
$T_1(x, y)$	0,7954951286	1,060660172	1,237436867
<i>chyba</i>	0,0098823105	0,1252458252	0,2531858828
$T_2(x, y)$	0,7844465852	0,8838834762	0,8396893024
<i>chyba</i>	0,0011662329	0,0515308706	0,1445616818
$T_3(x, y)$	0,7858276531	0,9722718239	1,137999976
<i>chyba</i>	0,0002148350	0,0368574771	0,1537489918
$T_4(x, y)$	0,7855687028	0,9059805632	0,8024004683
<i>chyba</i>	0,0000441153	0,0294337836	0,1818505159

Tabulka 3.2: Tabulka funkčních hodnot

Jak je z tabulky 3.2 patrné, tak pro bod $(\frac{1}{8}, \frac{1}{8})$ toto pravidlo zřejmě neplatí. Nejmenší *chyba* nastala v případě Taylorova mnohočlenu druhého řádu. Je to způsobeno tím, že bod $(\frac{1}{8}, \frac{1}{8})$ leží relativně daleko od středu $S = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

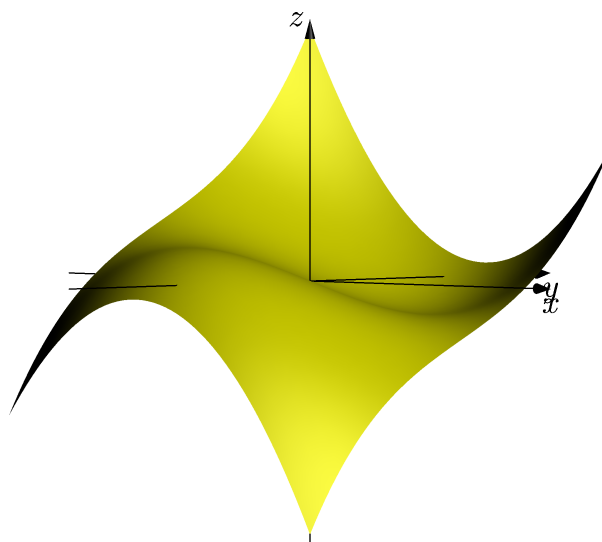
3.5 Lokální extrémy

V této kapitole se zaměříme na hledání lokálních extrému. Uvedeme si tři příklady, které jsou navoleny tak, aby se výpočet v každém příkladě o něco lišil. V 1. příkladě budeme postupovat obvyklým způsobem přes determinant $J(x, y)$. Ve 2. a 3. příkladu budeme muset zvolit jiný přístup k řešení.

Příklad 1. (Lokální extrémy)

Zadání:

Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = \frac{27}{10}x^2y + \frac{14}{10}y^3 - \frac{69}{10}y - \frac{54}{10}x$ (obr. 3.41).



Obrázek 3.41: Graf funkce $f(x, y)$

Řešení:

Ze zadání funkce $f(x, y)$ je zřejmé, že je funkce spojitá na $\mathbb{R}^2$ a má zde také spojitě parciální derivace. Vypočteme první parciální derivace, položíme je rovny nule a pokusíme se nalézt stacionární body funkce $f(x, y)$ (jsou-li nějaké).

První parciální derivace:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{54}{10}xy - \frac{54}{10} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{27}{10}x^2 + \frac{42}{10}y^2 - \frac{69}{10}\end{aligned}$$

Ze soustavy dvou rovnic o dvou neznámých vyjádříme x a y (stacionární body):

$$\begin{aligned} \frac{54}{10}xy - \frac{54}{10} &= 0 \\ \frac{27}{10}x^2 + \frac{42}{10}y^2 - \frac{69}{10} &= 0 \\ 54xy - 54 &= 0 & 27x^2 + 42y^2 - 69 &= 0 \\ xy - 1 &= 0 & 27\frac{1}{y^2} + 42y^2 - 69 &= 0 \\ x = \frac{1}{y} & & 42y^4 - 69y^2 + 27 &= 0 \\ & & \text{Substituce: } a = y^2 & \\ & & 42a^2 - 69a + 27 &= 0 \\ a_1 = 1 &\Rightarrow y_1 = 1, y_2 = -1 \\ a_2 = \frac{9}{14} &\Rightarrow y_3 = \frac{3}{\sqrt{14}}, y_4 = -\frac{3}{\sqrt{14}} \end{aligned}$$

Nalezené stacionární body jsou $(1, 1)$, $(-1, -1)$, $\left(\frac{\sqrt{14}}{3}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$ a $\left(-\frac{\sqrt{14}}{3}, -\frac{3}{\sqrt{14}}\right)$.
Dále vypočteme druhé parciální derivace:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{54}{10}y \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{84}{10}y \\ \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x, y) &= \frac{54}{10}x \end{aligned}$$

Sestavíme determinant $J(x, y)$ podle:

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{vmatrix}$$

V našem případě $J(x, y)$ vypadá následovně:

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{54}{10}y & \frac{54}{10}x \\ \frac{54}{10}x & \frac{84}{10}y \end{vmatrix} = \frac{4536y^2 - 2916x^2}{100}$$

Pro body $(1, 1)$ a $(-1, -1)$:

$$J(x, y) = \frac{1620}{100} > 0$$

Pro body $\left(\frac{\sqrt{14}}{3}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$ a $\left(-\frac{\sqrt{14}}{3}, -\frac{3}{\sqrt{14}}\right)$:

$$J(x, y) = -\frac{1620}{100} < 0$$

V těchto bodech se extrém nachází.

V těchto bodech se extrém nenachází.

Nakonec je třeba zjistit, jestli se v bodech $(1, 1)$, $(-1, -1)$ nachází ostré lokální maximum nebo minimum:

Pro bod $(1, 1)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) = \frac{54}{10} > 0$$

Ostré lokální minimum

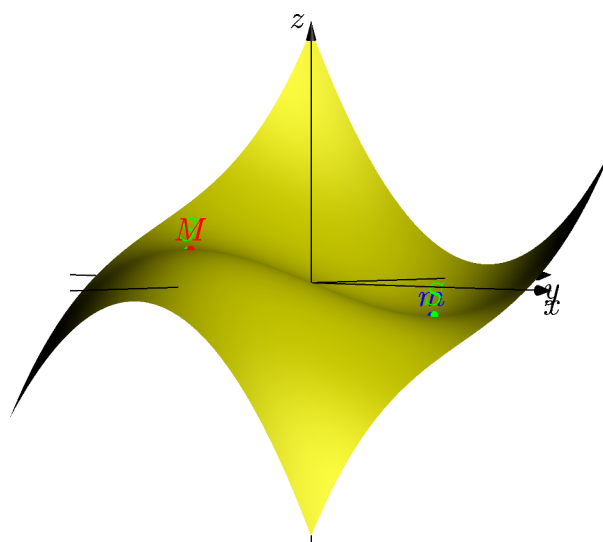
Pro bod $(-1, -1)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, -1) = -\frac{54}{10} < 0$$

Ostré lokální maximum

Extrémy se nacházejí pouze v bodech $(1, 1)$ a $(-1, -1)$. V bodě $(1, 1)$ je ostré lokální minimum a v bodě $(-1, -1)$ je ostré lokální maximum.

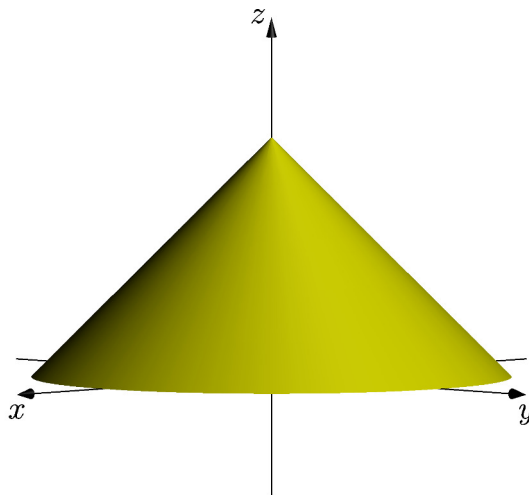
Tomuto závěru odpovídá i grafické znázornění, viz obr. 3.42. Modrou barvou je označen bod, ve kterém se nachází lokální minimum. Červenou barvou je označen bod, ve kterém se nachází lokální maximum. Zelenou barvou jsou označeny body, ve kterých se extrém nenachází. Žlutou barvou je znázorněn graf funkce $f(x, y)$.



Obrázek 3.42: Graf funkce $f(x, y)$ s extrémy

Příklad 2. (Lokální extrémy)**Zadání:**

Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ (obr. 3.43).



Obrázek 3.43: Graf funkce $f(x, y)$

Řešení:

Funkce $f(x, y)$ je spojitá na $\mathbb{R}^2$.

Nejprve vypočteme první parciální derivace:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\end{aligned}$$

Z vypočtených parciálních derivací je zřejmé, že nejsou definovány v bodě $(0, 0)$. Víme, že pokud je v bodě (x_0, y_0) extrém, pak $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ ($\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$) neexistuje nebo $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ ($\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$).

Vidíme tedy, že funkce nemá žádný stacionární bod. Jediný bod, v němž může nastat extrém, je bod, v němž neexistují parciální derivace, tj. bod $(0, 0)$.

Vzhledem k tomu, že neexistují v tomto bodě parciální derivace, nelze použít ke zjištění extrému determinant $J(x, y)$. Podívejme se tedy na chování funkce v okolí tohoto bodu. Funkce $f(x, y)$ má v bodě (x_0, y_0) lokální extrém, existuje-li okolí bodu (x_0, y_0) , kde pro každé (x, y) z okolí bodu (x_0, y_0) platí $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ nebo

$f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$. Vyjádříme si funkční hodnotu ve stacionárním bodě $(0, 0)$ a funkční hodnoty v okolí bodu $(0, 0)$:

Funkční hodnota v bodě $(0, 0)$:

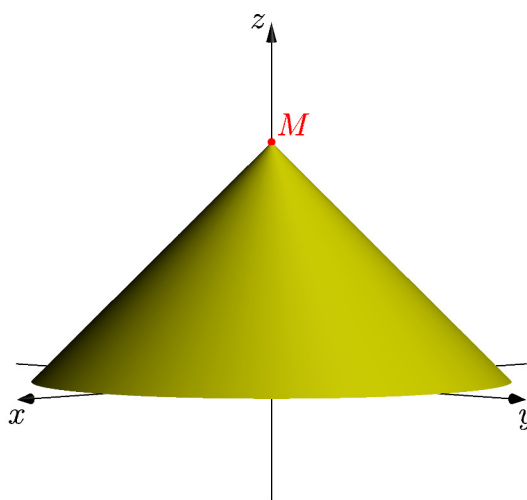
$$f(0, 0) = 1$$

Funkční hodnota v okolí bodu $(0, 0)$:

$$f(x, y) < 1$$

V bodě $(0, 0)$ je funkční hodnota největší oproti funkčním hodnotám v jeho okolí. V bodě $(0, 0)$ je ostré lokální maximum (v okolí bodu $(0, 0)$ nejsou body se stejnou funkční hodnotou jako v $(0, 0)$).

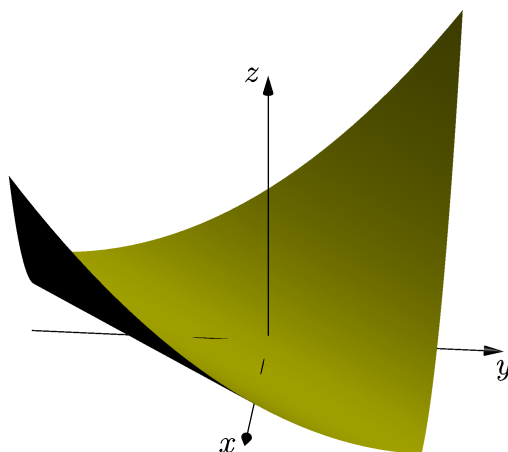
Tento závěr potvrzuje i grafické znázornění funkce $f(x, y)$, viz obr. 3.44. Červenou barvou je označen bod, ve kterém se nachází lokální maximum. Graf funkce $f(x, y)$ má žlutou barvu.



Obrázek 3.44: Graf funkce $f(x, y)$ s extrémem

Příklad 3.**Zadání:**

Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = \frac{1}{10} (x - y - 1)^2$ (obr. 3.45).



Obrázek 3.45: Graf funkce $f(x, y)$

Řešení:

Funkce $f(x, y)$ je spojitá na $\mathbb{R}^2$ a má zde spojitě parciální derivace. Vypočteme první parciální derivace:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{2x - 2y - 2}{10} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{-2x + 2y + 2}{10}\end{aligned}$$

Ze soustavy dvou rovnic o dvou neznámých se pokusíme vyjádřit x a y pro nalezení stacionárních bodů:

$$\begin{aligned}\frac{2x - 2y - 2}{10} &= 0 \\ \frac{2x - 2y - 2}{10} &= 0\end{aligned}$$

Jedná se o dvě stejné rovnice, soustava má tedy nekonečně mnoho řešení. Vyjádřeme si, čemu se rovná y :

$$\begin{aligned}2x - 2y - 2 &= 0 \\ x - y - 1 &= 0 \\ y &= x - 1\end{aligned}$$

Stacionárních bodů je tedy nekonečně mnoho. Každý stacionární bod leží na přímce $y = x - 1$, respektive pro souřadnice stacionárních bodů platí $(x, x - 1)$.

Nyní je třeba zjistit, jestli jsou stacionární body lokálním minimem nebo maximem. Zkusme vypočítat druhé parciální derivace a sestavit determinant $J(x, y)$.

Druhé parciální derivace:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{2}{10} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{2}{10} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x, y) &= -\frac{2}{10}\end{aligned}$$

Determinant $J(x, y)$:

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{2}{10} & -\frac{2}{10} \\ -\frac{2}{10} & \frac{2}{10} \end{vmatrix} = 0$$

Jak se dalo předpokládat, vyšel determinant $J(x, y)$ nulový. Stále nic nevíme o tom, jestli jsou v bodech přímky $y = x - 1$ lokální minima nebo maxima. Proto opět zvolíme jiný postup výpočtu, který by nás měl dovést k výsledku.

Je-li $y_0 = x_0 - 1$, je $f(x_0, y_0) = \frac{1}{10}(x_0 - (x_0 - 1) - 1)^2 = 0$, tzn. funkční hodnota je stejná ve všech bodech přímky $y = x - 1$. V libovolném okolí bodu (x_0, y_0) jsou tedy body se stejnou funkční hodnotou. Extrém buď zde není nebo je neostrý.

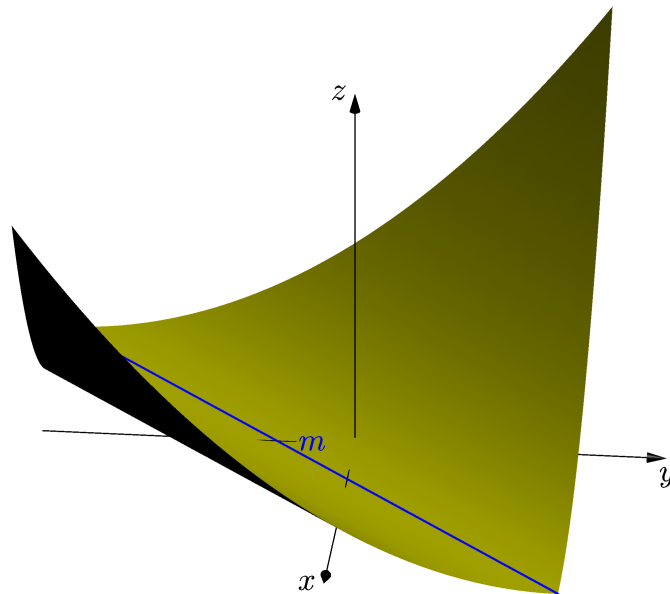
Uvažujme tedy pomocnou funkci jedné proměnné $g(u) = \frac{1}{10}(u - 1)^2$, kde $u \in \mathbb{R}$ představuje substituci $u = x - y$. Funkce $g(u)$ je spojitá, má spojitou derivaci a platí $f(x, y) = g(x - y)$. Pokusme se vyšetřit průběh funkce $g(u)$ a získat tak odpověď. Zkusíme najít stacionární bod této funkce:

$$\begin{aligned}g'(u) &= \frac{1}{10}(2u - 2) = 0 \\ u - 1 &= 0 \\ u &= 1\end{aligned}$$

Získali jsme podezřelý bod $u = 1$.

Nyní zjistíme, zda-li je tento bod maximem nebo minimem. Pro $u \in (-\infty, 1)$ platí $g'(u) < 0$, tzn. funkce je zde klesající. Pro $u \in (1, \infty)$ platí $g'(u) > 0$, tzn. funkce je zde rostoucí. Z toho plyne, že pro hodnoty $u \neq 1$ platí $g(u) > g(1)$. Bod $u = 1$ je minimem funkce $g(u)$. Tudíž body nalezené přímky $y = x - 1$ jsou neostrými lokálními minimy funkce $f(x, y)$, protože platí $u = x - y = 1 \Rightarrow y = x - 1$.

Vše je opět znázorněno na obr. 3.46. Modrá barva označuje lokální minimum. Žlutou barvou je znázorněn graf funkce $f(x, y)$.



Obrázek 3.46: Graf funkce $f(x, y)$ s extrémem

Kapitola 4

Závěr

Cílem bakalářské práce bylo vytvořit **interaktivní 3D** grafiku pro podporu výuky diferenciálního počtu funkcí více proměnných. Vzhledem k zadání byla vytvořena sbírka patnácti řešených příkladů doplněných o **interaktivní 3D** grafiku. Pomocí **3D** grafiky byl vysvětlen geometrický význam řešené problematiky. Příklady byly voleny takovým způsobem, aby byly od sebe, pokud to bylo možné, odlišné a aby byl geometrický význam v každém případě dostatečně patrný.

Pro lepší dostupnost sbírky příkladů byly vytvořeny webové stránky <http://homel.vsb.cz/~fol0037/>. Stránky jsou rozdělené podle jednotlivých partií z diferenciálního počtu funkcí více proměnných. V každé sekci jsou umístěny **PDF** soubory reprezentující vždy jeden samostatný příklad, tzn. každý návštěvník si může stáhnout/otevřít pouze ten příklad, ve kterém je vyřešeno to, co si v danou chvíli potřebuje objasnit. Rozdělení příkladů do samostatných **PDF** souborů bylo také podmíněno celkovou velikostí bakalářské práce. Jednotlivé soubory se stáhnou/otevřou rychleji než celá práce. Na stránkách se nachází i **PDF** soubor obsahující zde uvedenou kapitulu **Asymptote** spolu s doporučenými odkazy k tomuto programu. Pro zvýšení dostupnosti (a pravděpodobnosti využití) bude bakalářská práce umístěna i na stránkách <http://mi21.vsb.cz>. Na stránkách <http://mi21.vsb.cz> jsou navíc dostupné i další výukové materiály včetně skript [6], na kterých je práce „postavena“ a které si návštěvník může stáhnout současně se sbírkou řešených příkladů.

Nyní bych se chtěl zmínit o tom, jaký přínos pro mě měla tvorba bakalářské práce. V rámci bakalářské práce jsem se naučil pracovat s programem **Asymptote**. Dle mého názoru (a zřejmě nejen mého) se opravdu jedná o kvalitní generátor grafiky (**2D** a **3D**). Naučil jsem se však používat jen některé z metod pro **3D** vykreslování. **Asymptote** obsahuje mnoho dalších funkcí a vykreslovacích metod. Záleží totiž na tom, co člověk potřebuje vykreslit. Programem lze vykreslit i vektorová pole, vygenerovat různé animace, atd. V průběhu času bych se chtěl naučit používat tento program v plné míře, odhalit všechna jeho zákoutí, které skrývá, a případně být schopen si doimplementovat potřebné funkce.

Díky práci jsem měl rovněž možnost si vyzkoušet, co všechno obnáší vytvořit sbírku řešených příkladů. Ze začátku to vypadalo na snadnou cestu, ale jak se říká: „zdání

klame.“ Nebylo snadné vybrat vhodné funkce, na kterých by byl geometrický význam dostatečně zřetelný. Navíc jsem se snažil, aby se zde neobjevovalo mnoho podobných funkcí, ale ne vždy to tak šlo. Přece jenom je fakt, že paraboloidy a kulové plochy mají dostatečně vyhovující tvar, díky kterému je geometrický význam krásně viditelný. I přesto jsem se však (mnohdy i hodiny) pokoušel najít odlišné funkce, které by taktéž měly přijatelný průběh. Problém byl také v používání korektní matematické terminologie.

Ve zkratce řečeno: „tvorba bakalářské práce měla pro mne přínos takřka ve všech směrech.“ Největší motivací při vytváření práce byl fakt, že práce bude v budoucnu využívána samotnými studenty. Úsilí, které bylo pro ní vynaloženo, nepřijde vniveč. Proto bych rád postupem času zkompletoval další sbírky příkladů s vloženou **interaktivní 3D** grafikou. Velmi rád bych ještě více pomohl studentům (a nejen jim) v jejich cestě za poznáním. Jak se říká: „Obrázek řekne více než tisíc slov.“

Literatura

- [1] *Oficiální stránky Asymptote* [online]. 2004 [cit. 2013-01-14]. Dostupné z: <<http://asymptote.sourceforge.net>>.
- [2] *ASYMPTOTE - Galeries d'exemples* [online]. 2011 [cit. 2013-01-16]. Dostupné z: <<http://marris.org/asymptote>>.
- [3] KUTAL, Ondřej. *Tvorba matematické grafiky pomocí programu Asymptote* [online]. Brno, 2012 [cit. 2013-01-14]. Diplomová práce. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta. Vedoucí práce Roman Plch. Dostupné z: <http://is.muni.cz/th/208367/prif_m/>.
- [4] PLCH, Roman a Petra ŠARMANOVÁ. *Interaktivní 3D grafika v HTML a PDF dokumentech. Zpravodaj Československého sdružení uživatelů TEXu*, Praha: Československé sdružení uživatelů TEXu, 2008, roč. 18, 1-2, s. 76-92. ISSN 1211-6661.
- [5] KURÁŇOVÁ, Silvie a Jan VONDRA. *Diferenciální počet funkcí více proměnných - interakční sbírka příkladů a testových otázek* [online]. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2009 [cit. 2013-02-10]. Elportál. Dostupné z: <<http://is.muni.cz/elportal/?id=857340>>. ISSN 1802-128X.
- [6] KUBEN, Jaromír, Šárka MAYEROVÁ, Pavlína RAČKOVÁ a Petra ŠARMANOVÁ [online]. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. 2012. [cit. 2013-01-15] Dostupné z: <<http://mi21.vsb.cz/modul/diferencialni-pocet-funkci-vice-promennych>>.

Příloha A

Příloha na CD

Příložené CD obsahuje elektronickou verzi bakalářské práce.