



ANALYTICKÁ GEOMETRIE

Libor Šindel, Oldřich Vlach

Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století* (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Libor Šindel, Oldřich Vlach
ANALYTICKÁ GEOMETRIE

© Libor Šindel, Oldřich Vlach, 3. dubna 2012, 13:13
ISBN

Předmluva

Tyto stránky jsou pracovní verzí vznikajícího učebního textu; ještě je v mnohém doplníme (a leccos opravíme). Budeme čtenářům velmi vděční za shovívavost a sdělení všech připomínek.¹

Tento a také ostatní výukové materiály vzniklé (a nadále vznikající) v rámci projektu *Matematika pro inženýry 21. století* lze najít na stránkách <http://mi21.vsb.cz/>. Podívejte se na ně!

V Ostravě, září 2011

Libor Šindel a Oldřich Vlach

¹Všechny připomínky (výhrady, komentáře a doporučení) zasílejte (prosíme) na naše e-mailové adresy: libor.sindel@vsb.cz, oldrich.vlach2@vsb.cz

Obsah

Předmluva	iii
I Analytická geometrie v prostorech dimenze n	2
1 Aritmetický n -rozměrný vektorový prostor $\mathbb{R}^n$	4
2 Afinní n -rozměrný prostor	6
3 Euklidovský n -rozměrný prostor	15
II Analytická geometrie lineárních útvarů v E_3	20
4 Afinní geometrie lineárních útvarů v E_3	24
4.1 Přímka	24
Příklady k procvičení	30
Klíč k příkladům k procvičení	30
4.2 Rovina	31
Příklady k procvičení	38
Klíč k příkladům k procvičení	38
4.3 Přímka a rovina	39
Příklady k procvičení	41
Klíč k příkladům k procvičení	41
5 Metrické vlastnosti vektorů v E_3	42
5.1 Skalární součin dvou vektorů	42
Příklady k procvičení	43
Klíč k příkladům k procvičení	43
5.2 Vektorový součin dvou vektorů	44
Příklady k procvičení	51
Klíč k příkladům k procvičení	52
5.3 Smíšený součin tří vektorů	52
Příklady k procvičení	54

	Klíč k příkladům k procvičení	55
6	Metrická geometrie lineárních útvarů v E_3	56
6.1	Odchylka dvou lineárních útvarů	56
	Příklady k procvičení	61
	Klíč k příkladům k procvičení	61
6.2	Vzdálenost dvou lineárních útvarů	62
	Příklady k procvičení	66
	Klíč k příkladům k procvičení	67
6.3	Směrnice přímky	67
	Příklady k procvičení	70
	Klíč k příkladům k procvičení	70
III	Kuželosečky a kvadriky	71
7	Kuželosečky	73
7.1	Elipsa (a kružnice)	73
7.2	Hyperbola	75
7.3	Parabola	77
7.4	Posunuté kuželosečky	77
7.5	Regulární – singulární – kuželosečky	81
7.6	Kuželosečky v obecné poloze	81
	Příklady k procvičení	86
	Klíč k příkladům k procvičení	86
8	Kvadriky	88
8.1	Rotační kvadriky v základní poloze	88
8.2	Obecné kvadriky v základní poloze	90
8.3	Posunuté kvadriky	94
8.4	Kvadriky v obecné poloze	96
	Příklady k procvičení	99
	Klíč k příkladům k procvičení	99
	Rejstřík	101
	Literatura	105

Co studuje analytická geometrie

Geometrie je důležitým oborem matematiky. Jako každý vědní obor, také geometrie vznikla z praktických potřeb společnosti. Geometrických znalostí bylo zapotřebí při vyměřovacích pracích, při stavbách, v astronomii nebo mořeplavectví. Později byly geometrické poznatky postupně zpracovávány, až se vyvinula samostatná vědecká nauka. O její rozvoj se zasloužili hlavně staří Řekové. S geometrií se dnes setkáváme prakticky všude, nejen v matematických oborech, ale i v jiných vědeckých a technických disciplínách.

Existují dva způsoby, kterými lze budovat geometrii: *syntetický* a *analytický*. Mluvíme potom o syntetické nebo analytické geometrii. V syntetické geometrii se pracuje přímo s rovinnými nebo prostorovými útvary. Tento přístup byl pěstován právě ve starověku. V analytické geometrii vyjadřujeme geometrické útvary početně pomocí tzv. souřadnic. Tímto způsobem převádíme daný geometrický problém na problém početní, který pak řešíme pomocí lineární algebry a výsledek zase vyložíme geometricky. Analytická geometrie lineárních útvarů studuje objekty, které můžeme popsat rovnicemi, resp. nerovnicemi stupně nejvýše prvního. K nim patří body, přímky, roviny a jejich části. Nelineární útvary, například kuželosečky, kvadriky, speciální křivky, jsou středem zájmu tzv. nelineární geometrie.

Za zakladatele analytické geometrie je všeobecně považován francouzský filozof a matematik René Descartes (1596-1650), který v roce 1637 publikoval své dílo *Discours de la Méthode*, v jehož třetí části zvané *La Géométrie* položil základy analytické geometrie jako matematické disciplíny. O její současnou podobu se však zasloužil zejména švýcarský matematik Leonhard Euler (1707-1783).

Část I

Analytická geometrie v prostorech dimenze n

První seznámení s analytickou geometrií na střední škole probíhá zpravidla dosti intuitivně. Spousta základních poznatků bývá odvozována názorným způsobem, což je zpravidla vhodný postup při osvojování si základních pojmů a znalostí. V této kapitole se pokusíme zorganizovat naše počáteční znalosti deduktivním způsobem, tj. pomocí axiomů a vět. Předpokládáme, že z lineární algebry je všem znám pojem vektorového prostoru, speciálně pak pojem n -rozměrného aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$. Některé jeho vlastnosti si v úvodu krátce připomeneme. Od něj potom přejdeme k n -rozměrnému afinnímu prostoru $\mathbf{A}_n$, a nakonec k zavedení n -rozměrného euklidovského prostoru $\mathbf{E}_n$. Nemíníme však vytvářet obecnou abstraktní afinní a euklidovskou geometrii. Zaměříme se pouze na základní pojmy tak, abychom získali potřebné prostředky, které umožní budovat analytickou geometrii pomocí nástrojů lineární algebry.

Kapitola 1

Aritmetický n -rozměrný vektorový prostor $\mathbb{R}^n$

Aritmetický vektorový prostor $\mathbb{R}^n$ je množina všech uspořádaných n -tic reálných čísel. Tyto n -tice nazýváme aritmetickými vektory a zapisujeme je ve tvaru

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n). \quad (1.1)$$

Nulovým vektorem je n -tice $\mathbf{o} = (0, 0, \dots, 0)$, *opačným vektorem* k vektoru (1.1) je vektor $-\mathbf{u} = (-u_1, -u_2, \dots, -u_n)$. *Kanonickou (standardní) bází* prostoru $\mathbb{R}^n$ tvoří vektory

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1), \quad (1.2)$$

jeho *dimenze* je dána počtem vektorů báze. Každý vektor (1.1) můžeme napsat jako *lineární kombinaci* vektorů $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, tj.

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + \dots + u_n \mathbf{e}_n. \quad (1.3)$$

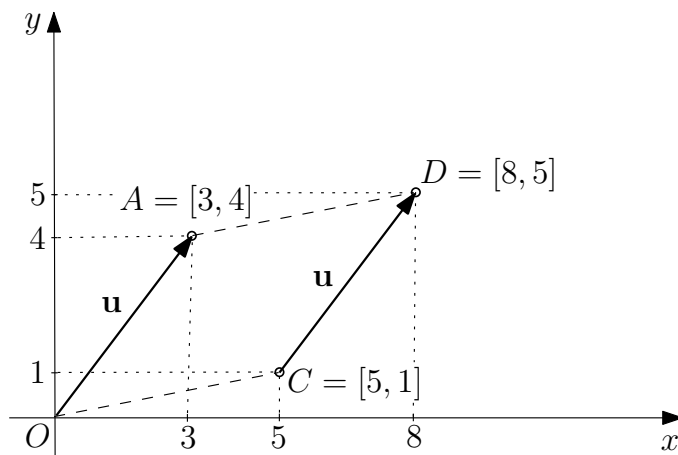
Čísla $u_1, \dots, u_n$ nazýváme *souřadnicemi* vektoru $\mathbf{u}$. Vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ jsou *lineárně nezávislé*, jestliže rovnice

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{o} \quad (1.4)$$

má pouze *triviální řešení*, tj. $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. Má-li rovnice (1.4) *netriviální řešení*, tj. alespoň jedno z čísel $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ je nenulové, jsou dané vektory *lineárně závislé*.

Dvourozměrné nebo třírozměrné aritmetické vektory znázorňujeme v kartézské soustavě souřadnic jako orientované úsečky (šipky) jdoucí z počátku do bodů, které mají stejné souřadnice jako příslušné vektory. Tyto šipky se také nazývají *polohové vektory* těchto bodů nebo *vázané vektory*. Na obrázku 1.1 je zakreslen vektor $\mathbf{u} = (3, 4)$ jako polohový vektor bodu $A = [3, 4]$.

Úmluva 1.1. V celém textu budeme pro lepší přehlednost zapisovat souřadnice bodů do hranatých závorek a souřadnice vektorů do kulatých závorek.



Obr. 1.1: K pojmu vektoru

Ze střední školy víme, že vektorem $\mathbf{u}$ je také definováno shodné zobrazení, tzv. *posunutí*. Bod A je tedy obrazem bodu O v posunutí určeném vektorem $\mathbf{u}$. Toto posunutí zobrazí také například bod $C = [5, 1]$ do bodu $D = [8, 5]$. Jelikož je posunutí určeno libovolnou dvojicí sobě odpovídajících bodů, tj. bodem a jeho obrazem, můžeme tudíž každý vektor, který dostaneme rovnoběžným posunutím vektoru $\mathbf{u}$, považovat za reprezentanta jednoho a téhož aritmetického vektoru. Tímto způsobem vlastně ztotožňujeme aritmetické vektory s *geometrickými vektory*, které známe též jako *volné vektory* z fyziky a geometrie. Dodejme ještě, že množina všech volných vektorů spolu s operacemi sčítání vektorů a násobení vektoru číslem tak, jak jsou obvykle definovány, je vektorovým prostorem ve smyslu definice vektorového prostoru.

Poznámka 1.2. Prostory bodů a volných vektorů jsou tedy velice úzce spjaty. Tomu rozumíme tak, že každé uspořádané dvojici bodů (A, B) můžeme přiřadit právě jeden vektor $\overrightarrow{AB}$. Navíc ke každému bodu A a ke každému vektoru $\mathbf{u}$ existuje jediný bod B takový, že

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{u} \quad (1.5)$$

a pro každé tři body A, B, C platí

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}. \quad (1.6)$$

Uvedené vlastnosti jsou známé vlastnosti *euklidovského prostoru*, s nímž jsme pracovali na střední škole, ať už šlo o *rovinu* nebo *trojrozměrný prostor*. Tento prostor jsme intuitivně chápali jako spojení dvou prostorů: *prostoru bodů* a *prostoru volných vektorů*. Při budování analytické geometrie je právě výhodné uvažovat prostory zahrnující vektory a body. O jejich přesné zavedení se nyní pokusíme.

Kapitola 2

Afinní n -rozměrný prostor

Definice 2.1. Nechť je dána neprázdná množina $\mathbf{A}_n$ (její prvky jsou tzv. *body*), vektorový prostor $\mathbf{V}_n$ dimenze n a zobrazení

$$\phi : \mathbf{A}_n \times \mathbf{A}_n \rightarrow \mathbf{V}_n \quad (2.1)$$

těchto vlastností:

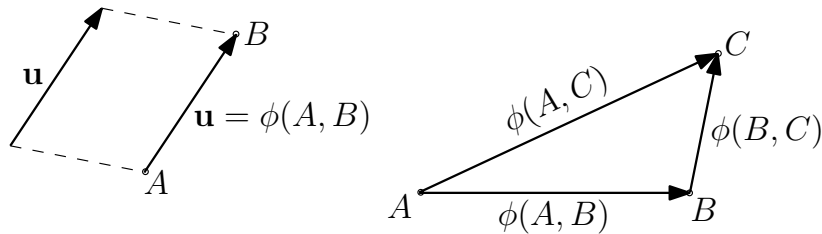
- Pro každý bod $A \in \mathbf{A}_n$ a pro každý vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_n$ existuje právě jeden bod $B \in \mathbf{A}_n$ tak, že

$$\phi(A, B) = \mathbf{u}. \quad (2.2)$$

- Pro každé tři body $A, B, C \in \mathbf{A}_n$ platí, že

$$\phi(A, C) = \phi(A, B) + \phi(B, C). \quad (2.3)$$

Potom uspořádanou trojici $(\mathbf{A}_n, \mathbf{V}_n, \phi)$ nazýváme *afinním prostorem dimenze n* a budeme jej stručně označovat $\mathbf{A}_n$. Vektorový prostor $\mathbf{V}_n$ nazýváme *vektorovým zaměřením afinního prostoru $\mathbf{A}_n$* . Dimenzí afinního prostoru rozumíme dimenzi jeho vektorového zaměření.



Obr. 2.1: K definici afinního prostoru $\mathbf{A}_n$

Poznámka 2.2. Názornou ilustraci k definici afinního prostoru máme na obrázku 2.1. Vektor $\phi(A, B)$ budeme pro jednoduchost označovat $\overrightarrow{AB}$ nebo $B - A$. Ve druhém případě pak mluvíme o *rozdílu bodů* B, A . Píšeme-li tedy $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ nebo $\mathbf{u} = B - A$, jedná se jen o různé zápisy jednoho a téhož vektoru. Rovnost (2.2) budeme tudíž zapisovat také ve tvaru

$$B = A + \mathbf{u}.$$

Příklad 2.3. Necht $\mathbf{A}_n = \mathbb{R}_n$ je množina všech uspořádaných n -tic reálných čísel (tzv. bodů) zapisovaných v hranatých závorkách a necht $\mathbf{V}_n = \mathbb{R}^n$ je n -rozměrný aritmetický vektorový prostor. Jeho vektory budeme označovat jako $\mathbf{v}$ (1.1). Zobrazení (2.1) definujeme následovně:

$$\phi(A, B) = B - A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, \dots, b_n - a_n),$$

kde

$$A = [a_1, a_2, \dots, a_n], \quad B = [b_1, b_2, \dots, b_n].$$

Dokažte, že $(\mathbb{R}_n, \mathbb{R}^n, \phi)$ je n -rozměrným afinním prostorem, jehož vektorovým zaměřením $\mathbf{V}_n$ je aritmetický vektorový prostor $\mathbb{R}^n$.

Řešení. Musíme dokázat, že platí obě vlastnosti z předešlé definice. Mějme tedy $A = [a_i] \in \mathbb{R}_n$, $\mathbf{u} = (u_i) \in \mathbb{R}^n$. Tímto stručným zápisem budeme rozumět, že každý index probíhá množinu čísel $\{1, \dots, n\}$. Pro hledaný bod B , který řeší rovnici (2.2) platí

$$(b_i - a_i) = (u_i),$$

resp.

$$b_i - a_i = u_i, \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Soustava rovnic, kterou jsme obdrželi má právě jedno řešení, existuje tedy jediný bod

$$B = [a_i + u_i].$$

Necht $A = [a_i]$, $B = [b_i]$, $C = [c_i]$ jsou libovolné tři body z $\mathbb{R}_n$. Potom platí:

$$\phi(A, C) = (c_i - a_i) = (b_i - a_i + c_i - b_i) = (b_i - a_i) + (c_i - b_i) = \phi(A, B) + \phi(B, C).$$

Také vlastnost (2.3) je splněna. Uspořádaná trojice $(\mathbb{R}_n, \mathbb{R}^n, \phi)$ je tedy afinním prostorem. Nazýváme jej *aritmetickým afinním prostorem dimenze n* a označujeme $\mathcal{A}(\mathbb{R}_n)$. ▲

Poznámka 2.4. Z axiomů afinního prostoru lze odvodit některé rovnosti, které odpovídají naší intuici. Například pro libovolné body $A, B, C \in \mathbf{A}_n$ a vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}_n$ platí

$$A - A = \mathbf{o} \tag{2.4}$$

$$B - A = -(A - B) \tag{2.5}$$

$$(A + \mathbf{u}) + \mathbf{v} = A + (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \tag{2.6}$$

$$(A + \mathbf{u}) - (B + \mathbf{v}) = (A - B) + (\mathbf{u} - \mathbf{v}). \tag{2.7}$$

K ověření správnosti daných rovností si nejprve napíšeme axiom (2.3) ve tvaru

$$C - A = (B - A) + (C - B). \quad (2.8)$$

Správnost první rovnosti odvodíme, položíme-li ve vztahu (2.8) $B = A$. Jelikož ve vektorovém prostoru existuje právě jeden nulový vektor, musí platit $A - A = \mathbf{o}$, tj. $\overrightarrow{AA} = \mathbf{o}$.

K důkazu rovnosti (2.5) stačí zase do vztahu (2.8) dosadit $C = A$. Vyjde

$$\mathbf{o} = (B - A) + (A - B),$$

tj. vektory $B - A$ a $A - B$ jsou navzájem opačné. Jinak zapsáno $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Označme $B = A + \mathbf{u}$, $C = B + \mathbf{v}$. Odtud $C = (A + \mathbf{u}) + \mathbf{v}$. Rovnost (2.8) můžeme také napsat ve tvaru $C - A = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, tj. $C = A + (\mathbf{u} + \mathbf{v})$. Tím je dokázána třetí rovnost.

Zbývá ještě dokázat poslední rovnost. Položíme $\mathbf{u} = X - A$, $\mathbf{v} = Y - B$, tj. $X = A + \mathbf{u}$, $Y = B + \mathbf{v}$ a pomocí vztahu (2.8) upravíme postupně pravou stranu v rovnosti (2.7)

$$\begin{aligned} (A - B) + (\mathbf{u} - \mathbf{v}) &= (A - B) + ((X - A) + (B - Y)) = ((A - B) + (X - A)) + \\ &+ (B - Y) = (X - B) + (B - Y) = X - Y = (A + \mathbf{u}) - (B + \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Definice 2.5. Necht O je libovolný bod afinního prostoru $(\mathbf{A}_n, \mathbf{V}_n, \phi)$ a necht $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ je libovolná báze jeho vektorového zaměření $\mathbf{V}_n$. Potom uspořádanou $(n + 1)$ -tici

$$\mathcal{S} = (O, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \quad (2.9)$$

nazýváme *afinní soustavou souřadnic* v $\mathbf{A}_n$. *Souřadnicemi bodu* $X \in \mathbf{A}_n$ v soustavě $\mathcal{S}$ budeme rozumět souřadnice vektoru $\overrightarrow{OX}$ v bázi $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$.

Poznámka 2.6. K libovolnému bodu X existuje tedy právě jedna uspořádaná n -tice reálných čísel $x_1, \dots, x_n$ taková, že

$$\overrightarrow{OX} = x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n, \quad (2.10)$$

resp.

$$X = O + x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n. \quad (2.11)$$

Podobně *souřadnicemi vektoru* $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_n$ v soustavě $\mathcal{S}$ rozumíme jeho souřadnice vzhledem k bázi $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$. Pro lepší přehlednost se proto domluvíme na tomto označení

$$[X]_{\mathcal{S}} = [x_1, \dots, x_n], \quad \text{resp.} \quad [X]_{\mathcal{S}} = [x_i], \quad (2.12)$$

$$[\mathbf{u}]_{\mathcal{S}} = (u_1, \dots, u_n), \quad \text{resp.} \quad [\mathbf{u}]_{\mathcal{S}} = (u_i). \quad (2.13)$$

Souřadnicové vektory (2.12) nebo (2.13) budeme také někdy zapisovat jako *aritmické sloupcové vektory*.

Věta 2.7. *Nechť X, Y jsou libovolné body a $\mathbf{u}$ libovolný vektor afinního prostoru $\mathbf{A}_n$, přičemž vzhledem k pevně zvolené afinní soustavě souřadnic je*

$$[X]_S = [x_i], \quad [Y]_S = [y_i], \quad [\mathbf{u}]_S = (u_i).$$

Potom platí

$$[X + \mathbf{u}]_S = [x_i + u_i], \quad (2.14)$$

$$[Y - X]_S = (y_i - x_i). \quad (2.15)$$

Důkaz. Místo $x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$ budeme psát jednoduše $x_i\mathbf{e}_i$, atd.

$$X + \mathbf{u} = O + x_i\mathbf{e}_i + u_i\mathbf{e}_i = O + (x_i + u_i)\mathbf{e}_i, \text{ tzn. } [X + \mathbf{u}]_S = [x_i + u_i],$$

$$Y - X = (O + y_i\mathbf{e}_i) - (O + x_i\mathbf{e}_i) = y_i\mathbf{e}_i - x_i\mathbf{e}_i = (y_i - x_i)\mathbf{e}_i,$$

$$\text{tzn. } [Y - X]_S = (y_i - x_i).$$

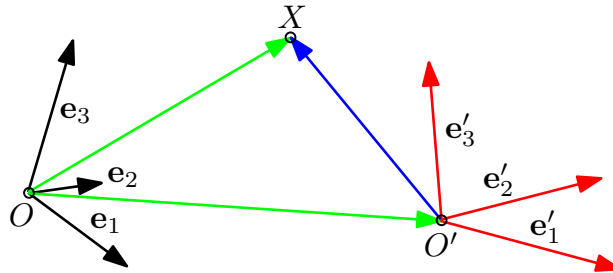
Obě rovnosti jsou splněny, tím je tedy věta dokázána. $\square$

Poznámka 2.8. V předešlé poznámce jsme každému bodu z $\mathbf{A}_n$ přiřadili uspořádanou n -tici souřadnic. Stejně tak i každému vektoru z $\mathbf{V}_n$ jsme přiřadili uspořádanou n -tici souřadnic. Tím jsme vlastně ztotožnili při dané soustavě souřadnic S body afinního prostoru $\mathbf{A}_n$ s body aritmetického afinního prostoru $\mathcal{A}(\mathbb{R}_n)$ a vektory vektorového zaměření $\mathbf{V}_n$ afinního prostoru $\mathbf{A}_n$ s vektory vektorového zaměření $\mathbb{R}^n$ prostoru $\mathcal{A}(\mathbb{R}_n)$. Podle (2.14) a (2.15) můžeme navíc všechny operace mezi body a vektory prostoru $\mathbf{A}_n$ převádět na operace s aritmetickými body a vektory, neboť si tyto operace odpovídají i po souřadnicích.

V afinním prostoru lze zvolit afinní soustavu souřadnic zcela libovolně. Na obrázku 2.2 máme v afinním prostoru $\mathbf{A}_3$ znázorněny dvě afinní soustavy souřadnic $S = (O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ a $S' = (O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$. Pro libovolný bod X pak platí:

$$[X]_S = [x_1, x_2, x_3], \text{ resp. } [X]_{S'} = [x'_1, x'_2, x'_3].$$

Zajímá nás samozřejmě jaký je vztah mezi „nečárkovanými“ a „čárkovanými“ souřadnicemi bodu X . O změně souřadnic bodu při změně afinní soustavy souřadnic pojednává následující věta.



Obr. 2.2: Transformace afinních souřadnic

Věta 2.9. *Nechť $\mathcal{S} = (O, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ a $\mathcal{S}' = (O', \mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n)$ jsou dvě afinní soustavy souřadnic v afinním prostoru $\mathbf{A}_n$, jejichž vzájemný vztah je popsán těmito rovnostmi:*

$$O' = O + b_1 \mathbf{e}_1 + \dots + b_n \mathbf{e}_n \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= a_{11} \mathbf{e}_1 + a_{21} \mathbf{e}_2 + \dots + a_{n1} \mathbf{e}_n \\ \mathbf{e}'_2 &= a_{12} \mathbf{e}_1 + a_{22} \mathbf{e}_2 + \dots + a_{n2} \mathbf{e}_n \\ &\vdots \\ \mathbf{e}'_n &= a_{1n} \mathbf{e}_1 + a_{2n} \mathbf{e}_2 + \dots + a_{nn} \mathbf{e}_n. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Nechť $[X]_{\mathcal{S}} = [x_i]$, $[X]_{\mathcal{S}'} = [x'_i]$. Potom pro souřadnice bodu X platí tyto transformační vzorce:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + \dots + a_{1n}x'_n + b_1 \\ x_2 &= a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + \dots + a_{2n}x'_n + b_2 \\ &\vdots \\ x_n &= a_{n1}x'_1 + a_{n2}x'_2 + \dots + a_{nn}x'_n + b_n. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Důkaz. Zřejmě platí

$$X = O + x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n, \quad (2.19)$$

resp.

$$X = O' + x'_1 \mathbf{e}'_1 + \dots + x'_n \mathbf{e}'_n. \quad (2.20)$$

S přihlédnutím ke vztahům (2.16) a (2.17) můžeme rovnost (2.20) napsat ve tvaru

$$X = O + b_1 \mathbf{e}_1 + \dots + b_n \mathbf{e}_n + x'_1(a_{11} \mathbf{e}_1 + \dots + a_{n1} \mathbf{e}_n) + \dots + x'_n(a_{1n} \mathbf{e}_1 + \dots + a_{nn} \mathbf{e}_n),$$

odkud s použitím axiomů vektorového prostoru dostaneme

$$X = O + (a_{11}x'_1 + \dots + a_{1n}x'_n + b_1) \mathbf{e}_1 + \dots + (a_{n1}x'_1 + \dots + a_{nn}x'_n + b_n) \mathbf{e}_n. \quad (2.21)$$

Porovnáním koeficientů u vektorů $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ ve vztazích (2.19) a (2.21) získáme postupně transformační vztahy (2.18). $\square$

Poznámka 2.10. Vzorce (2.18) lze také napsat přehledně v maticovém tvaru. Definujme matice $\mathbf{X}$, $\mathbf{X}'$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{A}$ sestavené po sloupcích ze souřadnic bodu X v soustavě $\mathcal{S}$

resp. $\mathcal{S}'$, bodu O' a vektorů $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Potom platí

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{X}' + \mathbf{B}. \quad (2.23)$$

Matice $\mathbf{A}$ je regulární, neboť vektory $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$ jsou lineárně nezávislé. Existuje k ní tedy inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$. Násobíme-li rovnici (2.23) zleva maticí $\mathbf{A}^{-1}$, obdržíme po úpravě vzorec

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{X} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}, \quad (2.24)$$

který umožňuje vypočítat souřadnice bodu X v soustavě $\mathcal{S}'$ pomocí „původních“ souřadnic.

Příklad 2.11. V afinní soustavě souřadnic $\mathcal{S} = (O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ je dán bod O' a vektory $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$, přičemž platí $[O']_{\mathcal{S}} = [7, 8, 9]$, $[\mathbf{e}'_1]_{\mathcal{S}} = (3, 1, -2)$, $[\mathbf{e}'_2]_{\mathcal{S}} = (1, 0, 5)$, $[\mathbf{e}'_3]_{\mathcal{S}} = (2, 3, 4)$. Určete souřadnice bodu X v soustavě $\mathcal{S}' = (O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$, jestliže $[X]_{\mathcal{S}} = [13, 12, 16]$.

Řešení. Matice (2.22) mají tvar

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 13 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Matice $\mathbf{A}$ má nenulový determinant, $(\det(\mathbf{A}) = -45)$, je tedy regulární. Máme tak jistotu, že vektory $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ tvoří bázi, a má tudíž smysl mluvit o afinní soustavě souřadnic $\mathcal{S}'$. Platí

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{45} \begin{pmatrix} 15 & -6 & -3 \\ 10 & -16 & 7 \\ -5 & 17 & 1 \end{pmatrix},$$

podle (2.24) pak

$$\mathbf{X}' = \frac{1}{45} \begin{pmatrix} 15 & -6 & -3 \\ 10 & -16 & 7 \\ -5 & 17 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix} - \frac{1}{45} \begin{pmatrix} 15 & -6 & -3 \\ 10 & -16 & 7 \\ -5 & 17 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

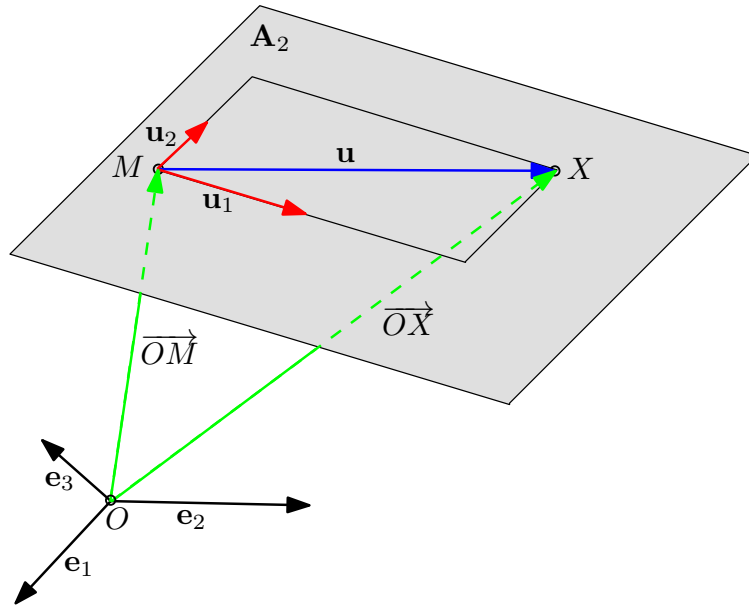
odkud $[X]_{\mathcal{S}'} = [1, 1, 1]$. ▲

Definice 2.12. Necht $\mathbf{A}_n$ je afinní prostor a $\mathbf{V}_n$ jeho vektorové zaměření. Vyberme libovolný bod $M \in \mathbf{A}_n$ a vektorový podprostor $\mathbf{V}_m$ prostoru $\mathbf{V}_n$, $m \leq n$. Potom množinu

$$\mathbf{A}_m = \{X \in \mathbf{A}_n : X = M + \mathbf{u}, \mathbf{u} \in \mathbf{V}_m\}$$

nazýváme *afinním podprostorem* afinního prostoru $\mathbf{A}_n$ s vektorovým zaměřením $\mathbf{V}_m$.

Afinní podprostor je definován jako množina všech bodů X afinního prostoru, pro které vektor $\overrightarrow{MX} \in \mathbf{V}_m$.



Obr. 2.3: Rovina v afinním prostoru

Poznámka 2.13. Necht $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m)$ je báze podprostoru $\mathbf{V}_m$, potom afinní podprostor $\mathbf{A}_m$ je množina všech bodů X popsaných rovnicí

$$X = M + t_1 \mathbf{u}_1 + \dots + t_m \mathbf{u}_m, \quad (2.25)$$

kde $M \in \mathbf{A}_n$ a $t_1, \dots, t_m \in \mathbb{R}$. Podprostor $\mathbf{A}_m$ se nazývá *přímka* pro $m = 1$, *rovina* pro $m = 2$, *nadrovina* pro $m = n - 1$. Na obrázku 2.3 je zakreslen případ, kdy $n = 3$ a $m = 2$.

V afinním prostoru $\mathbf{A}_n$ zvolme afinní soustavu souřadnic $\mathcal{S} = (O, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$, vzhledem k níž

$$[X]_{\mathcal{S}} = [x_1, \dots, x_n], \quad [M]_{\mathcal{S}} = [m_1, \dots, m_n], \quad [\mathbf{u}_i]_{\mathcal{S}} = (u_{1i}, \dots, u_{ni}), \quad i \in \{1, \dots, m\}.$$

Rovnici (2.25) pak můžeme zapsat pomocí souřadnic ve tvaru

$$[X]_{\mathcal{S}} = [M]_{\mathcal{S}} + t_1 [\mathbf{u}_1]_{\mathcal{S}} + \dots + t_m [\mathbf{u}_m]_{\mathcal{S}}, \quad (2.26)$$

tj.

$$[x_1, \dots, x_n] = [m_1, \dots, m_n] + t_1(u_{11}, \dots, u_{n1}) + \dots + t_m(u_{1m}, \dots, u_{nm}). \quad (2.27)$$

Porovnáním souřadnic v rovnici (2.27) dostaneme

$$\begin{aligned} x_1 &= m_1 + u_{11}t_1 + \dots + u_{1m}t_m \\ x_2 &= m_2 + u_{21}t_1 + \dots + u_{2m}t_m \\ &\vdots \\ x_n &= m_n + u_{n1}t_1 + \dots + u_{nm}t_m. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Libovolný bod X afinního podprostoru můžeme tedy vyjádřit vektorově (2.25) nebo pomocí souřadnic (2.28). Soustavu (2.28) potom nazýváme *soustavou parametrických rovnic afinního podprostoru* $\mathbf{A}_m$ s parametry $t_1, \dots, t_m$. Z lineární nezávislosti vektorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$ vyplývá, že hodnost matice $\mathbf{U} = [u_{ji}]_{n \times m}$ je m .

Eliminací parametrů $t_1, \dots, t_m$ ze soustavy (2.28) lze afinní podprostor $\mathbf{A}_m$ popsat také jako množinu všech bodů X , jejichž souřadnice vyhovují soustavě lineárních rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + b_1 &= 0 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n + b_2 &= 0 \\ &\vdots \\ a_{h1}x_1 + \dots + a_{hn}x_n + b_h &= 0, \end{aligned} \quad (2.29)$$

kde hodnost matice soustavy i hodnost rozšířené matice soustavy jsou rovny číslu $h = n - m$. V případě nadroviny je hodnost $h = 1$, tj. *nadrovina* je popsána jedinou lineární rovnicí.

Příklad 2.14. Rovina σ v afinním prostoru $\mathcal{A}(\mathbb{R}_4)$ určená bodem $M = [1, -1, -1, 4]$ a vektory $\mathbf{u}_1 = (1, 2, 2, -3)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 1, 0, 2)$ má vektorovou rovnici

$$\sigma : X = [1, -1, -1, 4] + t_1(1, 2, 2, -3) + t_2(1, 1, 0, 2)$$

nebo parametrické rovnice

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + t_1 + t_2 \\ x_2 &= -1 + 2t_1 + t_2 \\ x_3 &= -1 + 2t_1 \\ x_4 &= 4 - 3t_1 + 2t_2 \end{aligned}$$

Z prvních dvou rovnic můžeme vypočítat parametry t_1, t_2 a výrazy, které tak získáme, dosadit do zbývajících dvou rovnic. Tímto způsobem parametry t_1, t_2 vyloučíme a dostaneme rovnici dané roviny ve tvaru (2.29), tj. jako průsečnici dvou nadrovin:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 3 &= 0 \\ -7x_1 + 5x_2 + x_4 + 8 &= 0 \end{aligned}$$

Poznámka 2.15. Nyní bychom už mohli řešit různé úlohy týkající se bodů, přímk a rovin, jejich vzájemné polohy, tj. *afinní úlohy*. Nemáme však definovány pojmy jako vzdálenosti nebo velikosti úhlů, které umožňují řešit i tzv. *metrické úlohy* jako například vzdálenost dvou bodů, odchylka dvou přímek, apod. K řešení běžných geometrických úloh potřebujeme afinní prostor vybavit *skalárním součinem*, což nám umožní v tomto prostoru zavést metriku a „měřit“.

Kapitola 3

Euklidovský n -rozměrný prostor

Afinní prostor $\mathbf{A}_n$ se zavedenou „metrikou“ budeme označovat $\mathbf{E}_n$ a nazývat n -rozměrným *euklidovským prostorem*. V $\mathbf{E}_n$ se naučíme měřit vzdálenosti a odchylky a pak už se budeme věnovat afinní a metrické geometrii lineárních útvarů v euklidovském prostoru $\mathbf{E}_3$, v němž lze vše pěkně názorně demonstrovat. Nejprve si v krátkém přehledu připomeneme základní pojmy z lineární algebry související se skalárním součinem. Podrobnější informace lze najít ve výukovém modulu „Lineární algebra“.

Nechť $\mathbf{V}$ je reálný vektorový prostor a nechť každé uspořádané dvojici vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ je přiřazeno právě jedno reálné číslo, které budeme označovat $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Jestliže pro každé tři vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ a pro každé reálné číslo α platí axiomy

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u}, \mathbf{w}) + (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad (3.1)$$

$$(\alpha \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \alpha (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (3.2)$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u}) \quad (3.3)$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0 \quad (3.4)$$

přičemž rovnost ve vztahu (3.4) nastane právě tehdy, když $\mathbf{u} = \mathbf{o}$, potom takovéto zobrazení nazýváme *skalárním součinem* vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$. Vektorový prostor, v němž je definován skalární součin, se nazývá *vektorový prostor se skalárním součinem* nebo také *unitární prostor*.

Předpokládejme, že $\mathbf{V}$ je opět reálný vektorový prostor a že každému vektoru $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ je přiřazeno právě jedno nezáporné reálné číslo označované $\|\mathbf{u}\|$. Číslo $\|\mathbf{u}\|$ se nazývá *norma (velikost)* vektoru $\mathbf{u}$, má-li pro každé dva vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ a pro každé reálné číslo α tyto vlastnosti:

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \quad (3.5)$$

$$\|\alpha \mathbf{u}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{u}\| \quad (3.6)$$

$$\|\mathbf{u}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{o} \quad (3.7)$$

Poznámka 3.1. V každém vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ konečné dimenze je možno zavést skalární součin i normu nekonečně mnoha způsoby. Například, je-li $\mathbf{V}$ vektorový prostor se skalárním součinem, můžeme normu vektoru $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ zavést předpisem

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}. \quad (3.8)$$

Dá se ukázat, že reálné číslo $\|\mathbf{u}\|$ stanovené rovností (3.8) má skutečně všechny vlastnosti normy (3.5)–(3.7). Tuto normu nazýváme *normou indukovanou skalárním součinem*.

Úmluva 3.2. V dalším textu budeme používat právě normu definovanou vzorcem (3.8).

Vektor $\mathbf{u}$ se nazývá *jednotkový*, jestliže $\|\mathbf{u}\| = 1$. Připomeňme si, že pro libovolné dva vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ platí důležitá *Schwarzova nerovnost*

$$|(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|. \quad (3.9)$$

Jsou-li vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ nenulové, můžeme Schwarzovu nerovnost zapsat také ve tvaru

$$-1 \leq \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \leq 1. \quad (3.10)$$

Nerovnost (3.10) pak umožňuje definovat *odchylku* ϕ (stručně *úhel* ϕ) dvou nenulových vektorů vzorcem

$$\cos \phi = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \quad (3.11)$$

a podmínkou $\phi \in \langle 0, \pi \rangle$. Vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ nazýváme *ortogonální (kolmé)*, právě když $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$. Nulový vektor $\mathbf{o}$ je zřejmě ortogonální k libovolnému vektoru $\mathbf{u}$, neboť

$$(\mathbf{o}, \mathbf{u}) = (0\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0 \quad (\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0.$$

Pokud jde o nenulové vektory, ze vzorce (3.11) vyplývá, že dva nenulové vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou ortogonální právě tehdy, když jejich odchylka ϕ se rovná $\pi/2$, což odpovídá naší představě o kolmosti vektorů. Nenulové ortogonální vektory jsou vždy *lineárně nezávislé*. V každém vektorovém prostoru se skalárním součinem konečné dimenze existuje alespoň jedna *ortogonální báze*. Tu vytvoříme z neortogonální báze pomocí *Schmidtova ortogonalizačního procesu*. Jsou-li všechny vektory ortogonální báze navíc *jednotkové*, nazývá se taková báze *ortonormální*. Jestliže tedy označíme symbolem $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ ortonormální bázi vektorového prostoru $\mathbf{V}$, potom zřejmě

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \begin{cases} 1, & \text{pro } i = j \\ 0, & \text{pro } i \neq j. \end{cases} \quad (3.12)$$

Pro skalární součin dvou vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, jejichž souřadnice vzhledem k ortonormální bázi $\mathcal{E}$ jsou $[\mathbf{u}]_{\mathcal{E}} = (u_1, \dots, u_n)$, $[\mathbf{v}]_{\mathcal{E}} = (v_1, \dots, v_n)$, pak platí

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + \dots + u_n\mathbf{e}_n, v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \dots + v_n\mathbf{e}_n),$$

odkud vzhledem k vlastnostem (3.1)–(3.3) skalárního součinu a rovnostem (3.12) dostaneme jednoduchý vzorec

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n. \quad (3.13)$$

Definice 3.3. Afinní prostor, jehož vektorové zaměření je vektorovým prostorem se skalárním součinem, nazýváme *euklidovským prostorem*.

Poznámka 3.4. Euklidovský prostor dimenze n značíme obvykle $\mathbf{E}_n$. Každý afinní podprostor euklidovského prostoru je zřejmě také euklidovským prostorem. Mluvíme potom o *euklidovských podprostorech* euklidovského prostoru.

Definice 3.5. Nechť $\mathbf{E}_n$ je euklidovský prostor. *Vzdálenost bodů* $A, B \in \mathbf{E}_n$ označujeme $v(A, B)$ a definujeme ji vzorcem

$$v(A, B) = \|B - A\|. \quad (3.14)$$

Věta 3.6. *Bud' $A, B, C \in \mathbf{E}_n$, potom platí*

$$\begin{aligned} v(A, B) &= v(B, A) \\ v(A, B) &\geq 0, \text{ přitom } v(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B \\ v(A, C) &\leq v(A, B) + v(B, C), \text{ tzv. trojúhelníková nerovnost} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Důkaz. S přihlédnutím k rovnostem (2.4), (2.5), (2.8) a axiomům (3.5)–(3.7) platí:

$$\begin{aligned} v(A, B) &= \|B - A\| = \|-(A - B)\| = |-1| \cdot \|A - B\| = v(B, A) \\ v(A, B) &= \|B - A\| \geq 0, \quad v(A, A) = \|A - A\| = \|\mathbf{o}\| = 0 \\ v(A, C) &= \|C - A\| = \|(B - A) + (C - B)\| \leq \|B - A\| + \|C - B\| = \\ &= v(A, B) + v(B, C). \end{aligned}$$

□

Definice 3.7. Nechť $\mathbf{E}_n$ je euklidovský prostor a $\mathbf{V}_n$ jeho vektorové zaměření. Afinní soustavu souřadnic

$$\mathcal{S} = (O, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \quad (3.16)$$

v $\mathbf{E}_n$ nazveme *kartézskou soustavou souřadnic*, jestliže

$$(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$$

je ortonormální báze ve $\mathbf{V}_n$.

Věta 3.8. *Nechť (3.16) je kartézská soustava souřadnic v euklidovském prostoru $\mathbf{E}_n$. Potom vzdálenost libovolných dvou bodů X a Y , kde $[X]_{\mathcal{S}} = [x_1, \dots, x_n]$ a $[Y]_{\mathcal{S}} = [y_1, \dots, y_n]$, je dána vzorcem*

$$v(X, Y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}. \quad (3.17)$$

Důkaz. Podle (2.15) je $[Y - X]_{\mathcal{S}} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_n - x_n)$. Položme $\mathbf{u} = Y - X$, tj. $[\mathbf{u}]_{\mathcal{S}} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_n - x_n)$, takže

$$v(X, Y) = \|\mathbf{u}\| = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}.$$

□

Poznámka 3.9. Jako příklad afinního prostoru jsme si uvedli aritmetický afinní n -rozměrný prostor $\mathcal{A}(\mathbb{R}_n) = (\mathbb{R}_n, \mathbb{R}^n, \phi)$, kde $\mathbb{R}_n$ je množina všech uspořádaných n -tic reálných čísel zapisovaných v hranatých závorkách a $\mathbb{R}^n$ je aritmetický vektorový prostor. Jestliže v $\mathbb{R}^n$ definujeme skalární součin rovností (3.13), dostaneme euklidovský prostor, který označíme symbolem $\mathcal{E}(\mathbb{R}_n)$ a budeme nazývat *aritmetickým euklidovským prostorem dimenze n* . Kanonická báze (1.2) prostoru $\mathbb{R}^n$ je zřejmě ortonormální, takže soustava souřadnic

$$\mathcal{S} = (O, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$$

prostoru $\mathcal{E}(\mathbb{R}_n)$ je kartézská. Zvolíme-li v libovolném euklidovském prostoru $\mathbf{E}_n$ kartézskou soustavu souřadnic, můžeme jej včetně jeho zaměření ztotožnit s aritmetickým euklidovským prostorem $\mathcal{E}(\mathbb{R}_n)$ a všechny příklady týkající se $\mathbf{E}_n$ řešit v $\mathcal{E}(\mathbb{R}_n)$.

Na závěr první kapitoly si nyní naše poznatky krátce zrekapitulujeme. Body a vektory euklidovského prostoru $\mathbf{E}_n$ můžeme na základě předešlé poznámky ztotožnit s aritmetickými body a vektory, a zapisovat je tedy ve tvaru

$$X = [x_1, \dots, x_n], \quad \mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n), \quad \text{atd.}$$

Skalární součin libovolných dvou vektorů $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ je definován vzorcem (3.13), tj.

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n.$$

Tento skalární součin nazýváme *euklidovským skalárním součinem*. Normu (délku, velikost) vektoru $\mathbf{u}$ definujeme vzorcem (3.8), který můžeme vzhledem k vzorci (3.13) psát ve tvaru

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}. \quad (3.18)$$

Norma definována tímto předpisem se nazývá *euklidovská norma*. Odchylka ϕ dvou nenulových vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ je pak definována vzorcem

$$\phi = \arccos \left(\frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \right).$$

Zbývá ještě vzdálenost libovolných dvou bodů $X = [x_1, \dots, x_n]$ a $Y = [y_1, \dots, y_n]$. Ta je určena rovností (3.17), tj.

$$v(X, Y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}.$$

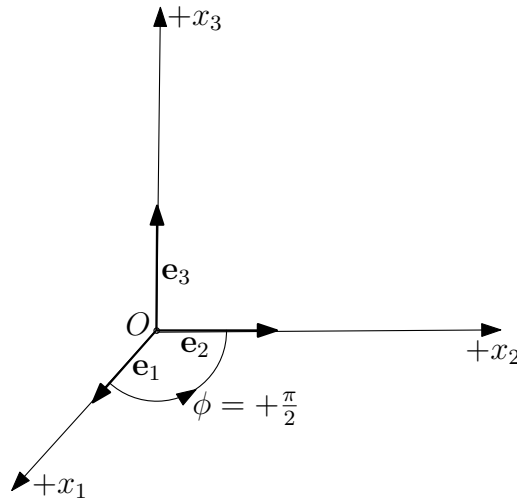
Část II

Analytická geometrie lineárních útvary v E_3

Uvažujme nyní trojrozměrný euklidovský prostor $\mathbf{E}_3$, v němž je zavedena kartézská soustava souřadnic

$$\mathcal{S} = (O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3), \quad \mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \quad \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1). \quad (3.19)$$

Řekneme, že tato soustava je *pravotočivá*, jsou-li jednotlivé vektory orientovány tak, že pozorujeme-li vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ z koncového bodu vektoru $\mathbf{e}_3$, musíme vektor $\mathbf{e}_1$ otočit o úhel $\phi = \pi/2$ proti směru chodu hodinových ručiček, aby splynul s vektorem $\mathbf{e}_2$ (obrázek 3.1). Souřadnicové osy x_1, x_2, x_3 procházejí počátkem O a jejich kladné části jsou souhlasně orientovány s vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Kartézskou soustavu souřadnic (3.19) budeme také označovat $(O, +x_1, +x_2, +x_3)$.



Obr. 3.1: Kartézská soustava souřadnic v $\mathbf{E}_3$

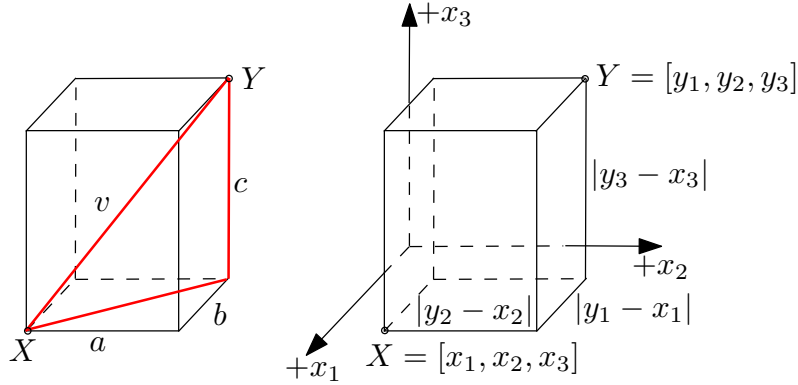
Poznámka 3.10. Euklidovský prostor $\mathbf{E}_3$, v němž je zavedena kartézská soustava souřadnic $(O, +x_1, +x_2, +x_3)$ (jiné označení $(O, +x, +y, +z)$) je svými vlastnostmi nejbližší našemu reálnému prostoru. Myslíme tím, že vzdálenost a odchylka tak, jak jsme je definovali v $\mathbf{E}_n$, mají v $\mathbf{E}_3$ vlastnosti, které mají „obvyklá vzdálenost“ a „obvyklá odchylka“ v reálném prostoru. V následujících dvou ukázkách se o tom můžeme přesvědčit.

Na obrázku 3.2 je znázorněn kvádr o rozměrech a, b, c . Pro délku jeho tělesové úhlopříčky platí podle Pythagorovy věty

$$v = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}. \quad (3.20)$$

Tentýž kvádr je umístěn v kartézské soustavě souřadnic. Pro délky jeho hran zřejmě platí

$$a = |y_2 - x_2|, \quad b = |y_1 - x_1|, \quad c = |y_3 - x_3|,$$

Obr. 3.2: Vzdálenost dvou bodů v $\mathbf{E}_3$

takže po dosazení za a, b, c do (3.20) obdržíme pro délku tělesové úhlopříčky XY :

$$v(X, Y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2},$$

tj. stejný výsledek, který udává vzorec (3.17) pro vzdálenost dvou bodů v $\mathbf{E}_3$.

Strany trojúhelníka na obrázku 3.3 mají délky $\|\mathbf{u}\|$, $\|\mathbf{v}\|$ a $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$. Položíme-li $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, potom $\mathbf{u} - \mathbf{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3)$. Pro odchylku ϕ vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ platí podle kosinové věty:

$$\cos \phi = \frac{\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2}{2 \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|},$$

tedy

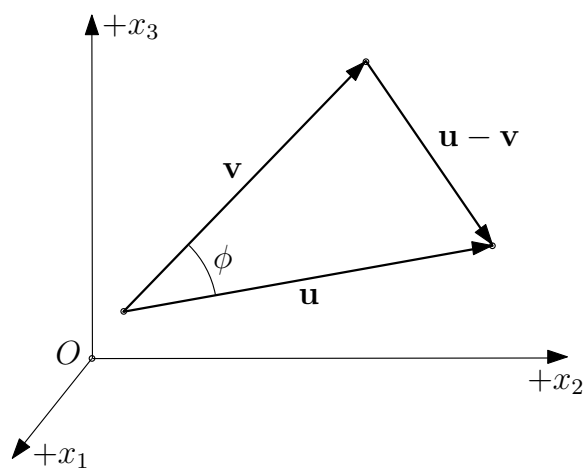
$$\cos \phi = \frac{(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) + (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - [(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2]}{2 \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|},$$

odkud po úpravě vyjde

$$\cos \phi = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}.$$

Poslední rovnost pak už představuje vzorec (3.11) pro odchylku dvou vektorů v $\mathbf{E}_3$. Euklidovský skalární součin vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ v $\mathbf{E}_3$ má totiž právě tvar

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$



Obr. 3.3: Odchylka dvou vektorů v $\mathbf{E}_3$

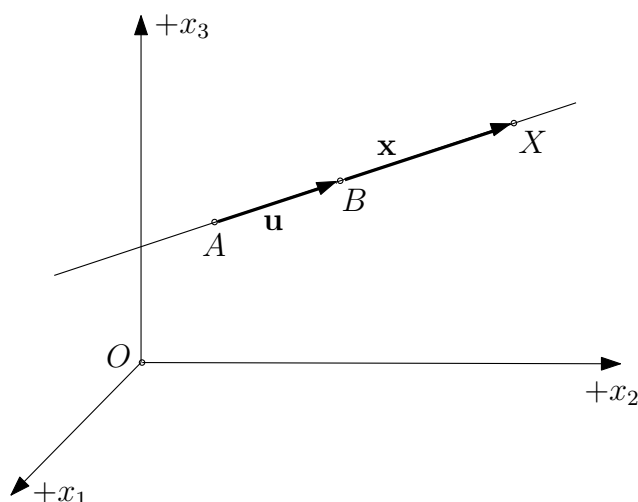
Kapitola 4

Afinní geometrie lineárních útvarů v $\mathbf{E}_3$

V této části se budeme věnovat studiu afinních vlastností a řešení některých úloh, které se týkají bodů, přímek a rovin v prostoru $\mathbf{E}_3$.

4.1 Přímka

Jak víme, přímka je určena dvěma různými body. Mějme tedy přímku AB a libovolný bod X , který na ní leží, viz obrázek 4.1.



Obr. 4.1: Přímka v $\mathbf{E}_3$

Vektory $\mathbf{u} = B - A$ a $\mathbf{x} = X - A$ jsou lineárně závislé, tzn. existuje reálné číslo t takové, že

$$X - A = t\mathbf{u}.$$

Tuto rovnost zapisujeme nejčastěji ve tvaru

$$X = A + t\mathbf{u} \quad (4.1)$$

a mluvíme o *vektorové rovnici přímky*. Vektor $\mathbf{u}$ se nazývá *směrový vektor* přímky AB . Obecně každý vektor, který je rovnoběžný s přímkou AB , můžeme brát jako její směrový vektor. Reálné číslo t se nazývá *parametr*. Je zřejmé, že k libovolnému bodu X přímky AB existuje právě jedno $t \in \mathbb{R}$ takové, že platí (4.1). Naopak, každému $t \in \mathbb{R}$ je rovnicí (4.1) přiřazen právě jeden bod X přímky AB . Jinak řečeno: Jestliže parametr t „proběhne“ všechna reálná čísla, potom bod X „proběhne“ celou přímkou AB . Rozepsáním rovnice (4.1) do souřadnic získáme tzv. *parametrické rovnice přímky*. Je-li tedy $A = [a_1, a_2, a_3]$ a $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, pak pro souřadnice libovolného bodu $X = [x_1, x_2, x_3]$ přímky AB platí

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + tu_1 \\ x_2 &= a_2 + tu_2 \\ x_3 &= a_3 + tu_3. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Příklad 4.1. Je dána přímka AB , kde $A = [-2, 3, -2]$, $B = [2, 6, -3]$. Napište její parametrické rovnice a určete bod P , v němž protíná souřadnicovou rovinu Ox_1x_3 .

Řešení. Pro směrový vektor $\mathbf{u}$ přímky AB platí: $\mathbf{u} = B - A$, tj. $\mathbf{u} = (4, 3, -1)$. Příslušné parametrické rovnice přímky AB jsou

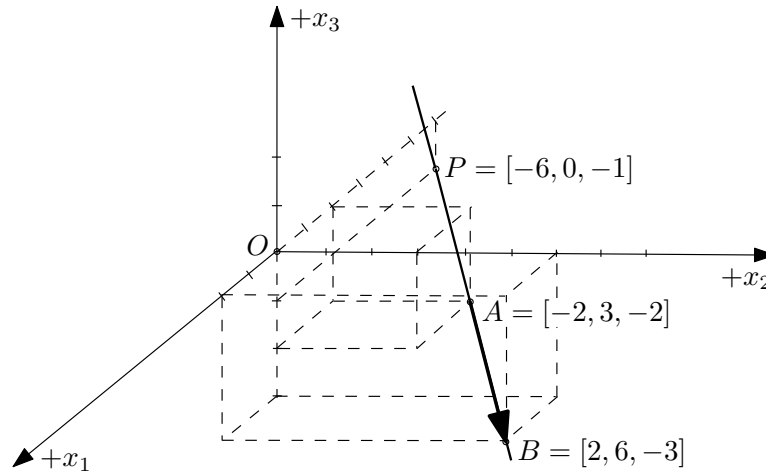
$$\begin{aligned} x_1 &= -2 + 4t \\ x_2 &= 3 + 3t \\ x_3 &= -2 - t. \end{aligned}$$

Hledaný průsečík $P = [p_1, p_2, p_3]$ musí mít druhou souřadnici nulovou, tj. $p_2 = 0$. Po dosazení souřadnic bodu P do parametrických rovnic dostaneme postupně: $t = -1$, $p_1 = -6$, $p_3 = -1$, tedy $P = [-6, 0, -1]$, obrázek 4.2. ▲

Vzájemná poloha dvou přímek

O vzájemné poloze dvou přímek rozhoduje počet společných bodů a také skutečnost, jsou-li libovolně zvolené směrové vektory těchto přímek lineárně nezávislé nebo závislé.

Na obrázku 4.3 máme nakresleny přímky p , q a r . Přímky p , r nemají žádný společný bod, jejich směrové vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{w}$ jsou *lineárně závislé*, přímky jsou *rovnoběžné*. Také přímky q , r nemají žádný společný bod. Jejich směrové vektory $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ jsou však *lineárně nezávislé*, přímky jsou *mimoběžné*. Podobně i přímky p , q mají *lineárně nezávislé* směrové vektory, ale navíc se protínají v bodě P , jsou tedy *různoběžné*.



Obr. 4.2: K příkladu 4.1

Podívejme se nyní na analytický způsob řešení vzájemné polohy dvou přímek v $\mathbf{E}_3$. Nechtě jsou dány přímky p, q o rovnicích

$$p: X = A + t\mathbf{u}$$

$$q: Y = B + s\mathbf{v}.$$

Hledáme jejich společné body, hledáme tedy takové hodnoty parametrů t a s , aby $X = Y$. Porovnáním pravých stran obou rovnic dostáváme po úpravě vektorovou rovnici

$$t\mathbf{u} - s\mathbf{v} = B - A,$$

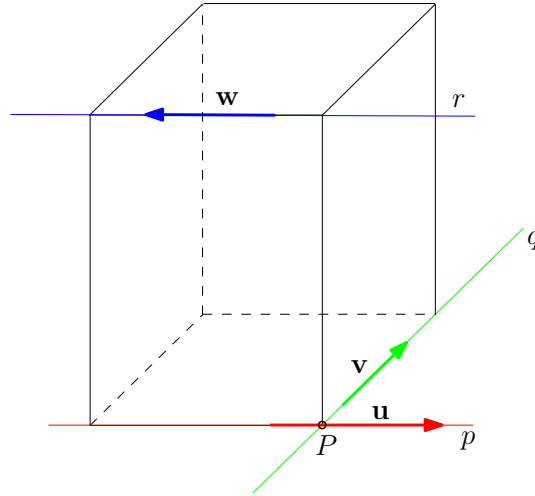
která rozepsáním do souřadnic přejde na soustavu tří lineárních rovnic o dvou neznámých t, s :

$$\begin{aligned} tu_1 - sv_1 &= b_1 - a_1 \\ tu_2 - sv_2 &= b_2 - a_2 \\ tu_3 - sv_3 &= b_3 - a_3. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Z lineární algebry je známo, že každá soustava lineárních rovnic může mít *právě jedno řešení*, *žádné řešení* nebo *nekonečně mnoho řešení*.

Označme h hodnotu matice soustavy (4.3) a h' hodnotu rozšířené matice soustavy (4.3). Podle *Frobeniovovy věty* má daná soustava řešení právě tehdy, když $h = h'$, a nemá řešení právě tehdy, když $h \neq h'$. Odtud pak dostáváme, že může nastat právě jedna z těchto čtyř možností:

- (1) $h = 1, h' = 1$: Soustava má nekonečně mnoho řešení, směrové vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou lineárně závislé. Přímky p, q jsou *rovnoběžné splývající*.
- (2) $h = 1, h' = 2$: Soustava nemá žádné řešení, směrové vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou lineárně závislé. Přímky p, q jsou *rovnoběžné různé*.



Obr. 4.3: K vzájemné poloze dvou přímek

- (3) $h = 2, h' = 2$: Soustava má právě jedno řešení, směrové vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou lineárně nezávislé. Přímky p, q jsou *různoběžné*.
- (4) $h = 2, h' = 3$: Soustava nemá žádné řešení, směrové vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou lineárně nezávislé. Přímky p, q jsou *mimoběžné*.

Jednou z úloh v analytické geometrii je úloha najít *příčku dvou přímek*, tj. přímku, která obě přímky protíná.

Příklad 4.2. Určete souřadnice bodů, v nichž příčka m rovnoběžná s vektorem $\mathbf{w}$ protíná přímky $p: X = A + t\mathbf{u}$ a $q \equiv CD$, je-li

$$\mathbf{w} = (0, 2, 1), \quad A = [-1, -2, -4], \quad \mathbf{u} = (1, 2, 4), \quad C = [-5, 7, 5], \quad D = [5, 1, -1].$$

Řešení. Označme $\mathbf{v}$ směrový vektor přímky CD , platí $\mathbf{v} = (10, -6, -6)$, a rozhodněme nejprve o vzájemné poloze přímek p, q :

$$p: X = [-1, -2, -4] + t(1, 2, 4), \quad q: Y = [-5, 7, 5] + s(10, -6, -6).$$

Příslušná soustava rovnic (4.3) pro přímky p, q má tvar

$$\begin{aligned} t - 10s &= -4 \\ 2t + 6s &= 9 \\ 4t + 6s &= 9, \end{aligned}$$

odkud zjistíme, že hodnosti matice soustavy $\mathbf{A}$ a rozšířené matice soustavy $\mathbf{A}'$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 2 & 6 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & -10 & -4 \\ 2 & 6 & 9 \\ 4 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

jsou $h = 2, h' = 3$, tzn. přímky p, q jsou mimoběžné.

Pokud příčka m existuje, potom protíná mimoběžky p, q po řadě v bodech P, Q , viz obrázek 4.4, takže platí

$$P = A + t\mathbf{u}, \quad Q = C + s\mathbf{v}. \quad (4.4)$$

Navíc existuje nenulové číslo k takové, že

$$Q - P = k\mathbf{w}, \quad (4.5)$$

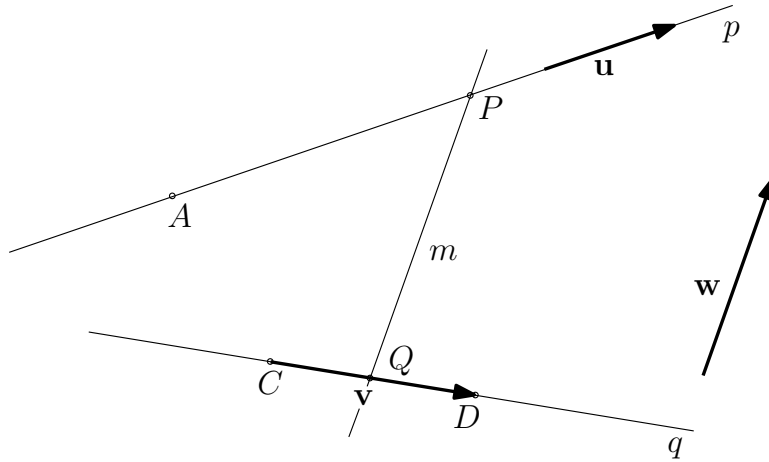
neboť $m \parallel \mathbf{w}$. Rovnici (4.5) upravíme pomocí (4.4). Po malé úpravě obdržíme pro neznámé t, s, k vektorovou rovnici

$$-t\mathbf{u} + s\mathbf{v} - k\mathbf{w} = A - C.$$

Tato rovnice pak po dosazení souřadnic dává soustavu tří lineárních rovnic o třech neznámých

$$\begin{aligned} -t + 10s &= 4 \\ -2t - 6s - 2k &= -9 \\ -4t - 6s - k &= -9, \end{aligned}$$

která má právě jedno řešení: $t = 1, s = 1/2, k = 2$. Z rovnic (4.4) nakonec vypočteme, že $P = [0, 0, 0]$ a $Q = [0, 4, 2]$. ▲



Obr. 4.4: K příkladu 4.2

V dalším výkladu se ještě podíváme na přímku v rovině $\mathbf{E}_2$. Za tímto účelem si rovinu $\mathbf{E}_2$ představíme jako souřadnicovou rovinu Ox_1x_2 prostoru $\mathbf{E}_3$. Každý bod roviny i vektor budou mít třetí souřadnici rovnou nule, takže ji můžeme vynechat a popisovat je pouze dvěma čísly. Většina našich úvah o přímce v $\mathbf{E}_3$ zůstane v platnosti i pro $\mathbf{E}_2$. Vektorová rovnice přímky v $\mathbf{E}_2$ bude mít stejný tvar jako v $\mathbf{E}_3$,

tj. (4.1). Příslušné parametrické rovnice přímky určené bodem $A = [a_1, a_2]$ a směrovým vektorem $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ budou

$$\begin{aligned}x_1 &= a_1 + tu_1 \\x_2 &= a_2 + tu_2,\end{aligned}$$

kde $t \in \mathbb{R}$ a x_1, x_2 jsou souřadnice libovolného bodu X přímky.

Vynásobením první rovnice číslem u_2 a druhé rovnice číslem u_1 získáme po odečtení obou rovnic novou rovnici

$$u_2x_1 - u_1x_2 = a_1u_2 - a_2u_1,$$

v níž není parametr. Tuto rovnici píšeme zpravidla ve tvaru

$$ax_1 + bx_2 = c, \quad (4.6)$$

kde $a = u_2$, $b = -u_1$, $c = a_1u_2 - a_2u_1$ a zřejmě $a \neq 0$ nebo $b \neq 0$. Dá se ukázat, že každá lineární rovnice (4.6) o proměnných x_1, x_2 , kde $a \neq 0$ nebo $b \neq 0$, je rovnicí přímky v rovině a obráceně každou přímku v rovině lze popsat rovnicí (4.6). Rovnici (4.6) nazýváme *obecnou rovnicí přímky*.

Příklad 4.3. Stanovte průsečík přímky p a úsečky AB , jestliže platí

$$p : 2x_1 + 5x_2 - 10 = 0, \quad A = [0, -4] \quad \text{a} \quad B = [5, 3]. \quad (4.7)$$

Řešení. Nejprve napíšeme parametrické rovnice přímky AB :

$$\begin{aligned}x_1 &= 0 + 5t \\x_2 &= -4 + 7t.\end{aligned}$$

Mají-li přímka p a úsečka AB společný bod $M = [x_1, x_2]$, pak jeho souřadnice x_1, x_2 vyhovují rovnici $2x_1 + 5x_2 = 10$ i oběma parametrickým rovnicím $x_1 = 5t$, $x_2 = -4 + 7t$, kde $t \in \langle 0, 1 \rangle$. Musí tedy platit i rovnice, kterou dostaneme, jestliže do rovnice přímky (viz (4.7)) dosadíme za proměnné x_1, x_2 z parametrických rovnic, tj. rovnice

$$2(5t) + 5(-4 + 7t) = 10.$$

Daná rovnice má řešení $t = \frac{2}{3} \in \langle 0, 1 \rangle$. Po dosazení za t do parametrických rovnic úsečky AB pak obdržíme hledaný průsečík $M = [\frac{10}{3}, \frac{2}{3}]$. ▲

Příklad 4.4. Napište obecnou rovnici přímky, která je určena body $A = [-3, 1]$, $B = [-\frac{3}{2}, 3]$.

Řešení. Úlohu můžeme vyřešit tak, že si napíšeme parametrické rovnice přímky a pak z nich vyloučíme parametr. Zvolíme však jiný postup. Protože přímka prochází body A, B , musí jejich souřadnice splňovat rovnici (4.6), takže platí

$$\begin{aligned}-3a + b &= c \\-\frac{3}{2}a + 3b &= c.\end{aligned}$$

Dostali jsme soustavu dvou rovnic o třech neznámých, kterou vyřešíme tak, že neznámé a, b vyjádříme pomocí neznámé c . Vyjde $a = -\frac{4}{15}c$ a $b = \frac{1}{5}c$. Hledaná přímka má tedy rovnici

$$-\frac{4}{15}cx_1 + \frac{1}{5}cx_2 = c.$$

Má-li se však skutečně jednat o rovnici přímky, musí být $c \neq 0$. Položíme-li např. $c = -15$, bude mít přímka rovnici

$$4x_1 - 3x_2 + 15 = 0.$$



Příklady k procvičení

1. Napište parametrické rovnice přímky, která prochází bodem $A = [2, 0, -3]$ a je rovnoběžná s přímkou CD , je-li $C = [-1, 5, -2]$, $D = [1, 2, 3]$.
2. Najděte průsečík přímek p a q , jejichž parametrické rovnice jsou

$$p: x = -t, y = -5 - 7t, z = 7 + 4t$$

$$q: x = -1 - 2s, y = 2, z = -3 - 6s.$$

3. Jsou dány čtyři body $A = [0, 0, 0]$, $B = [1, 2, 4]$, $C = [0, 4, 2]$, $D = [5, 1, -1]$. Jaká je vzájemná poloha přímek AB a CD ?
4. Zjistěte vzájemnou polohu přímek p, q :

$$p: x = 3 + 2t, y = -1 + 4t, z = 2 + 3t$$

$$q: x = -1 - 4s, y = 2 - 8s, z = -3 - 6s.$$

5. Určete vektorovou rovnici přímky mimoběžek p, q procházející bodem M , jestliže

$$M = [1, 3, -3], \quad p: X = [0, 0, 0] + t(-3, 2, 4), \quad q: Y = [4, 6, 15] + s(2, 4, 3).$$

Klíč k příkladům k procvičení

1. $x = 2 + 2t, y = -3t, z = -3 + 5t$.
2. $M = [1, 2, 3]$.
3. Přímky AB a CD jsou mimoběžné.
4. $p \parallel q$.
5. $m: X = [1, 3, -3] + t(-1, -3, 3)$.

4.2 Rovina

Rovina je určena třemi různými body, které neleží na jedné přímce. Předpokládejme, že máme takové tři body A, B, C , viz obrázek 4.5. Vektory $\mathbf{u} = B - A$ a $\mathbf{v} = C - A$ jsou tudíž lineárně nezávislé. Pro libovolný bod X roviny ABC pak platí, že vektor $X - A$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$. Existují tedy taková reálná čísla t a s , že

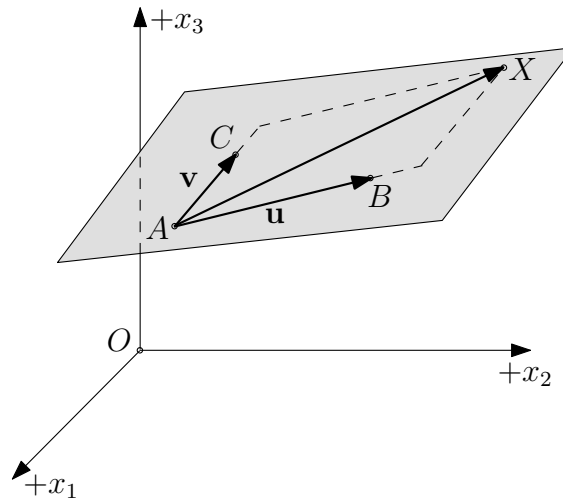
$$X - A = t\mathbf{u} + s\mathbf{v},$$

tj. pro libovolný bod X roviny platí

$$X = A + t\mathbf{u} + s\mathbf{v}. \quad (4.8)$$

Rovnici (4.8) nazýváme *vektorovou rovnicí roviny*. Reálná čísla t, s jsou tzv. *parametry*, vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ nazýváme *směrovými vektory roviny*. Podobně jak tomu bylo u přímky, jestliže dvojice parametrů (t, s) „proběhne“ množinu $\mathbb{R}^2$ všech uspořádaných dvojic reálných čísel, odpovídající bod X „proběhne“ celou rovinu ABC . Rozepíšeme-li vektorovou rovnici roviny do souřadnic, obdržíme *parametrické rovnice roviny*:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + tu_1 + sv_1 \\ x_2 &= a_2 + tu_2 + sv_2 \\ x_3 &= a_3 + tu_3 + sv_3. \end{aligned} \quad (4.9)$$



Obr. 4.5: Rovina v $\mathbf{E}_3$

Poznámka 4.5. Vektorové rovnice přímky a roviny jsou vlastně obdobou rovnice (2.25) afinního podprostoru. Je to dáno tím, že přímka a rovina v $\mathbf{E}_3$ jsou speciálními případy m -rozměrného afinního podprostoru v n -rozměrném euklidovském prostoru $\mathbf{E}_n$. K této okolnosti se později ještě vrátíme.

Přístupme nyní k eliminaci parametrů t, s ze soustavy (4.9). Z lineární nezávislosti vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ vyplývá, že alespoň jeden z determinantů

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

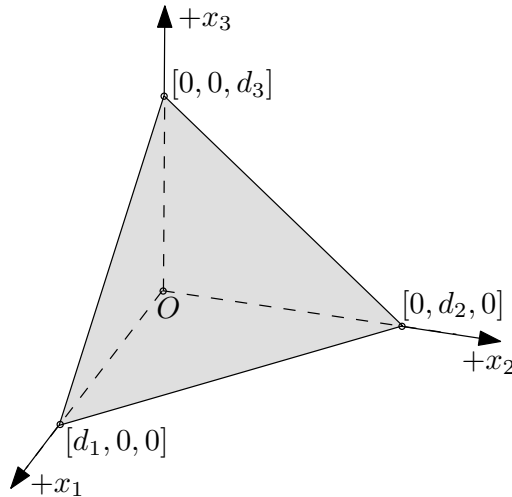
je různý od nuly. Předpokládejme, že je to například první z uvedených determinantů. Potom můžeme z prvních dvou rovnic jednoznačně vyjádřit parametry t a s pomocí x_1, x_2 a dosadit do třetí rovnice. Získáme tak obecně lineární rovnici o třech neznámých x_1, x_2, x_3 , kterou můžeme psát ve tvaru

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d, \quad (4.10)$$

jestliže položíme (ověřte sami)

$$a = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \quad b = - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}, \quad d = a_1a + a_2b + a_3c. \quad (4.11)$$

Rovnice (4.10), kde $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, se nazývá *obecná rovnice roviny*. Dá se ukázat, že bod X leží v rovině určené rovnicemi (4.9) právě tehdy, když jeho souřadnice vyhovují rovnici (4.10). Naopak také každá rovnice (4.10), kde $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, je vyjádřením nějaké roviny.



Obr. 4.6: K úsekovému tvaru rovnice roviny

Je-li v rovnici (4.10) roviny $d = 0$, pak je jasné, že rovina prochází počátkem soustavy souřadnic. Předpokládejme nyní, že všechny koeficienty a, b, c, d jsou nenulové. Potom můžeme obě strany rovnice (4.10) dělit číslem d a napsat ji ve tvaru

$$\frac{x_1}{d_1} + \frac{x_2}{d_2} + \frac{x_3}{d_3} = 1, \quad (4.12)$$

kde

$$d_1 = \frac{d}{a}, \quad d_2 = \frac{d}{b}, \quad d_3 = \frac{d}{c}.$$

Rovnice (4.12) se nazývá *úsekový tvar rovnice roviny*. Význam koeficientů d_1, d_2, d_3 je zřejmý. Daná rovina protíná souřadnicové osy v bodech $[d_1, 0, 0]$, $[0, d_2, 0]$, $[0, 0, d_3]$. Z toho důvodu také mluvíme o „úsecích“ vyřezaných rovinou na souřadnicových osách. Známe-li úsekový tvar rovnice roviny, můžeme ji snadno znázornit, jak je patrné z obrázku 4.6.

Příklad 4.6. Je dána rovina ABC , kde $A = [2, -3, 4]$, $B = [3, -6, 6]$, $C = [-1, 3, 2]$. Napište její vektorovou rovnici, parametrické rovnice, obecnou rovnici a úsekový tvar rovnice.

Řešení. Nejprve vypočteme směrové vektory roviny $\mathbf{u} = B - A$ a $\mathbf{v} = C - A$:

$$\mathbf{u} = (1, -3, 2), \quad \mathbf{v} = (-3, 6, -2).$$

Rovina ABC je nyní určena bodem A a směrovými vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$. Můžeme tedy hned sestavit její vektorovou rovnici

$$X = [2, -3, 4] + t(1, -3, 2) + s(-3, 6, -2)$$

a rozepsáním do souřadnic i příslušné parametrické rovnice

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 + t - 3s \\ x_2 &= -3 - 3t + 6s \\ x_3 &= 4 + 2t - 2s. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Z prvních dvou rovnic soustavy (4.13) lze jednoznačně vyjádřit parametry t, s :

$$t = 1 - 2x_1 - x_2, \quad s = \frac{3 - 3x_1 - x_2}{3}.$$

Dosadíme-li odtud do třetí rovnice, získáme po úpravě obecnou rovnici

$$6x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 12 \tag{4.14}$$

roviny a z ní jednoduchou úpravou její úsekový tvar

$$\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{4} = 1.$$

Úlohu můžeme vyřešit také tak, že nejdříve odvodíme obecnou rovnici roviny a od ní pak přejdeme k rovnicím parametrickým. Souřadnice bodů A, B, C musí být řešením rovnice (4.10), a proto musí platit

$$\begin{aligned} 2a - 3b + 4c &= d \\ 3a - 6b + 6c &= d \\ -a + 3b + 2c &= d. \end{aligned}$$

Dostali jsme soustavu tří rovnic pro čtyři neznámé koeficienty a, b, c, d . Pomocí Gaussovy eliminační metody ji upravíme na schodový tvar

$$\begin{aligned} -a + 3b + 4c &= d \\ 3b + 8c &= 3d \\ 4c &= d. \end{aligned}$$

Další postup je teď zřejmý. Neznámou d zvolíme libovolně jako parametr a ostatní neznámé jsou už pak jednoznačně určeny. Nechť například $d = r$, potom vyjde $c = r/4$, $b = r/3$, $a = r/2$. Za parametr r můžeme dosadit jakékoliv reálné číslo. Soustava má totiž nekonečně mnoho řešení. Triviální řešení, $a = b = c = d = 0$, však musíme vyloučit, neboť v tomto případě bychom nedostali rovnici roviny. Obecná rovnice roviny má tedy tvar

$$\frac{r}{2}x_1 + \frac{r}{3}x_2 + \frac{r}{4}x_3 = r, \quad r \neq 0.$$

Položíme-li $r = 12$, obdržíme přímo rovnici (4.14), pro $r = 1$ pak získáme její úsekový tvar.

Nakonec ještě odvodíme parametrické rovnice roviny. Za tímto účelem stačí z obecné rovnice roviny vyjádřit neznámé x_1, x_2, x_3 . Jelikož se jedná o jednu rovnici o třech neznámých, volíme neznámé x_2, x_3 libovolně jako parametry a dopočteme neznámou x_1 . Z rovnice (4.14) pak dostaneme například tyto parametrické rovnice

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 - 2\alpha - 2\beta \\ x_2 &= 3\alpha \\ x_3 &= 4\beta, \end{aligned} \tag{4.15}$$

kde parametry α a β jsou libovolná reálná čísla. ▲

Poznámka 4.7. Parametrické rovnice (4.15) jsou jiné než parametrické rovnice (4.13), nicméně představují tutéž rovinu ABC . Z rovnic (4.15) dostáváme sice jiné směrové vektory

$$\mathbf{u}' = (-2, 3, 0), \quad \mathbf{v}' = (-2, 0, 4),$$

platí však

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u} + \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}' = 4\mathbf{u} + 2\mathbf{v},$$

tj. $\mathbf{u}', \mathbf{v}'$ jsou lineární kombinací vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$, takže patří do vektorového zaměření roviny. Podobně zjistíme, že body A, B, C leží v rovině (4.15), jen parametry α, β musíme zvolit jinak než parametry t, s . Volíme-li například $\alpha = -1$ a $\beta = 1$, dostaneme bod $A = [2, -3, 4]$, atd.

Příklad 4.8. Jakou polohu má rovina vzhledem k soustavě souřadnic, je-li její obecná rovnice:

$$ax_1 + bx_2 = d, \quad abd \neq 0. \tag{4.16}$$

Řešení. Rovnice roviny se prakticky shoduje s obecnou rovnicí přímky v rovině Ox_1x_2 , chybí člen cx_3 . Z jejího úsekového tvaru

$$\frac{x_1}{\frac{d}{a}} + \frac{x_2}{\frac{d}{b}} = 1$$

je vidět, že protíná souřadnicové osy x_1, x_2 v bodech $[\frac{d}{a}, 0, 0]$, $[0, \frac{d}{b}, 0]$, ale neprotíná osu x_3 . Rovnicí (4.16) je tedy v prostoru $\mathbf{E}_3$ popsána rovina rovnoběžná s osou x_3 . Tato rovina protíná souřadnicovou rovinu Ox_1x_2 v přímce, která má stejnou rovnici. ▲

Vzájemná poloha dvou rovin

O vzájemné poloze dvou rovin můžeme rozhodnout podle množiny jejich společných bodů. Jak víme, může nastat právě jedna z těchto tří možností:

1. Obě roviny nemají žádné společné body, tj. obě roviny jsou *rovnoběžné různé*.
2. Množinou všech společných bodů obou rovin je přímka, roviny jsou tedy *různoběžné*.
3. Obě roviny jsou totožné, jinak řečeno *rovnoběžné splývající*.

Předpokládejme, že roviny ϱ a σ jsou dány vektorovými rovnicemi

$$\begin{aligned}\varrho : X &= A + t\mathbf{u} + s\mathbf{v} \\ \sigma : Y &= B + r\mathbf{w} + q\mathbf{z}.\end{aligned}$$

Abychom našli jejich společné body, porovnáme pravé strany rovnic obou rovin. Obdržíme vektorovou rovnici

$$A + t\mathbf{u} + s\mathbf{v} = B + r\mathbf{w} + q\mathbf{z}, \quad (4.17)$$

kterou rozepíšeme do soustavy tří rovnic o čtyřech neznámých t, s, r, q :

$$\begin{aligned}u_1t + v_1s - w_1r - z_1q &= b_1 - a_1 \\ u_2t + v_2s - w_2r - z_2q &= b_2 - a_2 \\ u_3t + v_3s - w_3r - z_3q &= b_3 - a_3.\end{aligned} \quad (4.18)$$

Matice soustavy (4.18) má jako sloupce směrové vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, -\mathbf{w}, -\mathbf{z}$. Označme h hodnost matice soustavy a h' hodnost rozšířené matice soustavy. Z lineární nezávislosti směrových vektorů roviny a dimenze prostoru $\mathbf{E}_3$ je zřejmé, že $h, h' \in \{2, 3\}$, přičemž $h \leq h'$. Odtud dostáváme tyto tři případy:

1. $h = 2, h' = 3$: Soustava nemá řešení, roviny jsou rovnoběžné, různé.
2. $h = 3, h' = 3$: Soustava má nekonečně mnoho řešení závislých na jednom parametru, neboť jednu neznámou můžeme zvolit libovolně. Roviny jsou různoběžné.
3. $h = 2, h' = 2$: Soustava má nekonečně mnoho řešení závislých na dvou parametrech. Tentokrát lze libovolně volit dvě neznámé. Roviny jsou totožné.

Poznámka 4.9. Dodejme ještě, že nikdy nenastane případ, že by soustava (4.18) měla právě jedno řešení. Dvě roviny prostě nemohou mít jej jeden společný bod.

Pokud jsou roviny ϱ, σ vyjádřeny v obecném tvaru, například

$$\begin{aligned}\varrho : a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ \sigma : a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2\end{aligned}$$

představují jejich obecné rovnice soustavu dvou rovnic o třech neznámých x_1, x_2, x_3 . Zase tak máme o jednu neznámou víc než je počet rovnic. Nechť h, h' opět označují hodnotu matice soustavy a hodnotu rozšířené matice soustavy, potom pro vzájemnou polohu rovin ϱ, σ platí:

1. Roviny jsou rovnoběžné různé právě tehdy, když $h = 1, h' = 2$.
2. Roviny jsou různoběžné právě tehdy, když $h = 2, h' = 2$.
3. Roviny jsou totožné právě tehdy, když $h = 1, h' = 1$.

Poznámka 4.10. Z předcházejícího odstavce vyplývá, že přímkou v prostoru $\mathbf{E}_3$ můžeme také popsat jako průsečnici dvou rovin, tj. pomocí soustavy dvou lineárních rovnic:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2,\end{aligned}$$

kde levá strana žádné z obou rovnic není násobkem levé strany zbývajících rovnic. Jak už jsme uvedli dříve, jsou přímkou a rovina speciálními případy m -rozměrného afinního podprostoru v n -rozměrném euklidovském prostoru $\mathbf{E}_n$. Mohou být tedy popsány pomocí parametrických rovnic (2.28) nebo pomocí soustavy lineárních rovnic (2.29), kterou dostaneme ze soustavy (2.28) eliminací parametrů. Odtud pak vychází, že rovina v prostoru $\mathbf{E}_3$ je vyjádřena jedinou lineární rovnicí (4.10), zatímco přímkou v prostoru $\mathbf{E}_3$ je popsána soustavou dvou lineárních rovnic. Podobně je přímkou v rovině $\mathbf{E}_2$ popsána jednou rovnicí (4.6), zatímco rovina v $\mathcal{A}(\mathbb{R}_4)$ (viz příklad 2.14) byla vyjádřena ve tvaru soustavy dvou lineárních rovnic.

Příklad 4.11. Rozhodněte o vzájemné poloze rovin

$$\begin{aligned}X &= [4, 2, 2] + t(2, 2, 2) + s(4, 2, -2) \\ Y &= [3, 1, 4] + r(1, 2, 4) + q(5, 2, -4).\end{aligned}$$

Řešení. Budeme se řídit obecným postupem použitým při sestavení rovnice (4.17) a soustavy rovnic (4.18). Získanou soustavu rovnic

$$\begin{aligned}2t + 4s - r - 5q &= -1 \\ 2t + 2s - 2r - 2q &= -1 \\ 2t - 2s - 4r + 4q &= 2.\end{aligned}$$

upravíme Gaussovou metodou na schodový tvar

$$\begin{aligned} 2t + 4s - r - 5q &= -1 \\ -2s - r + 3q &= 0 \\ 0 &= 3. \end{aligned}$$

Poslední rovnice nemá řešení, a tudíž ani soustava rovnic nemá řešení. Roviny nemají žádný společný bod, jsou tedy rovnoběžné různé. ▲

Příklad 4.12. Napište vektorovou rovnici průsečnice rovin, které jsou dany rovnicemi

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 5. \end{aligned}$$

Řešení. Obě rovnice tvoří soustavu rovnic, v níž pro hodnot h matice soustavy i hodnot h' matice rozšířené platí $h = h' = 2$, jak je zřejmé z příslušného schodového tvaru

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 3 \\ x_2 - 3x_3 &= 2. \end{aligned}$$

Neznámou x_3 můžeme zvolit libovolně, například $x_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$, a zbývající neznámé už pak jednoznačně dopočteme

$$x_2 = 2 + 3t, \quad x_1 = 7 + 4t.$$

Průsečnice obou rovin je popsána vektorovou rovnicí

$$X = [7, 2, 0] + t(4, 3, 1).$$

▲

Příklad 4.13. Jaká je vzájemná poloha roviny ABC , $A = [3, -1, 1]$, $B = [2, 4, 2]$, $C = [1, -3, -1]$, a roviny $2x + y - 3z = 2$?

Řešení. Vektorovou rovnici roviny ABC zapíšeme ve tvaru

$$X = A + t(B - A) + s(C - A),$$

odpovídající parametrické rovnice pak jsou

$$\begin{aligned} x &= 3 - t - 2s \\ y &= -1 + 5t - 2s \\ z &= 1 + t - 2s. \end{aligned}$$

Abychom našli společné body obou rovin, dosadíme do rovnice $2x + y - 3z = 2$ za proměnné z parametrických rovnic roviny ABC . Získáme tak rovnici

$$2(3 - t - 2s) + (-1 + 5t - 2s) - 3(1 + t - 2s) = 2,$$

která po úpravě přejde v rovnost

$$2 = 2,$$

tj. rovnice je splněna pro libovolné hodnoty parametrů t, s . To ovšem znamená, že každý bod roviny ABC je zároveň i bodem roviny určené rovnicí $2x + y - 3z = 2$. Obě roviny jsou tedy totožné. $\blacktriangle$

Příklady k procvičení

1. Určete, který z vektorů $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 7, 3)$ a $\mathbf{w} = (-1, 5, 4)$ patří do vektorového zaměření $\mathbf{V}_\rho$ roviny $\rho: 2x + y - 3z = 2$.
2. Napište obecnou rovnici roviny, která prochází bodem $M = [-2, 2, 4]$ a průsečnicí rovin

$$x - y = 0$$

$$y - z = 0.$$

3. Najděte rovnici roviny, která je rovnoběžná s rovinou $-3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6$ a prochází bodem $C = [3, 1, 2]$.
4. Jakou polohu vzhledem k soustavě souřadnic $(O, +x_1, +x_2, +x_3)$ mají roviny

$$\sigma: ax_1 + bx_2 = 0, \quad ab \neq 0$$

$$\tau: cx_3 = d, \quad cd \neq 0.$$

5. Je dána rovina $\rho \equiv ABC$, $A = [-1, 1, 3]$, $B = [2, 0, 0]$, $C = [0, 0, 3]$. Určete chybějící souřadnici bodu $D = [-2, ?, 6]$ tak, aby ležel v rovině ρ .
6. Najděte společný bod P rovin

$$\rho: X = [2, 0, 1] + t(-1, 1, 0) + s(2, 1, -2)$$

$$\sigma: y - 2z + 1 = 0$$

$$\tau: x - 2y + z = 0.$$

Klíč k příkladům k procvičení

1. $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}_\rho$, $\mathbf{w} \notin \mathbf{V}_\rho$.
2. $x - 3y + 2z = 0$.
3. $3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -1$.
4. Rovina σ prochází osou x_3 , rovina τ je rovnoběžná se souřadnicovou rovinou Ox_1x_2 .

5. $D = [-2, 0, 6]$.

6. $P = [1, 1, 1]$.

4.3 Přímka a rovina

Ze střední školy víme, že přímka p je *rovnoběžná* s rovinou ϱ , jestliže je rovnoběžná s některou přímkou, která v ní leží. Je-li přímka rovnoběžná s rovinou a má s ní navíc nějaký společný bod, potom má přímka s rovinou nekonečně mnoho společných bodů, tj. přímka *leží* v rovině. Není-li přímka p rovnoběžná s rovinou ϱ , říkáme, že je s rovinou ϱ *různoběžná*.

Analytický způsob řešení vzájemné polohy přímky a roviny se nikterak neliší od způsobu řešení vzájemné polohy dvou přímek nebo dvou rovin, a proto jej vysvětlíme jen stručně. Necht přímka p a rovina ϱ jsou dány vektorovými rovnicemi

$$\begin{aligned} p : X &= A + r\mathbf{u} \\ \varrho : Y &= B + t\mathbf{v} + s\mathbf{w}. \end{aligned}$$

Hledáme takové hodnoty parametrů r, t, s , pro které $X = Y$. Tyto hodnoty opět najdeme řešením vektorové rovnice

$$A + r\mathbf{u} = B + t\mathbf{v} + s\mathbf{w},$$

která po dosazení souřadnic přejde v soustavu tří rovnic o třech neznámých r, t, s :

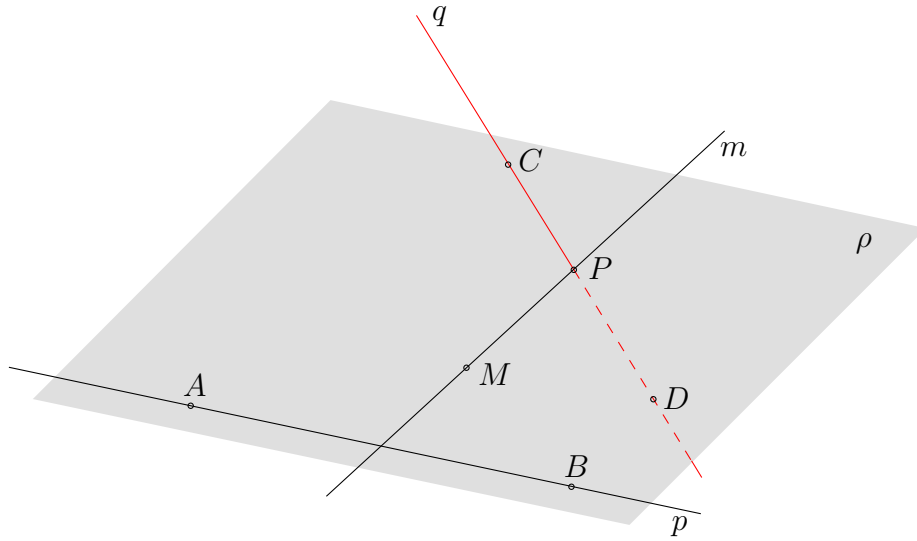
$$\begin{aligned} ru_1 - tv_1 - sw_1 &= b_1 - a_1 \\ ru_2 - tv_2 - sw_2 &= b_2 - a_2 \\ ru_3 - tv_3 - sw_3 &= b_3 - a_3. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Rozborem soustavy (4.19) bychom pak zjistili, že pro vzájemnou polohu přímky p a roviny ϱ může nastat právě jedna z těchto možností:

- (1) Soustava (4.19) nemá žádné řešení. Směrový vektor $\mathbf{u}$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{v}, \mathbf{w}$. Přímka p je s rovinou ϱ rovnoběžná.
- (2) Daná soustava má právě jedno řešení. Vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ jsou lineárně nezávislé. Přímka p je s rovinou ϱ různoběžná a má s ní právě jeden společný bod.
- (3) Soustava (4.19) má nekonečně mnoho řešení. Vektor $\mathbf{u}$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{v}, \mathbf{w}$. Přímka p leží v rovině ϱ .

Příklad 4.14. Napišme vektorovou rovnici přímky, která prochází bodem M a je příčkou mimoběžek $p \equiv AB$ a $q \equiv CD$, je-li $M = [2, 2, 1]$, $A = [6, 4, 5]$, $B = [3, 4, 2]$, $C = [5, 7, 8]$, $D = [4, 5, 5]$.

Řešení. Úlohu vyřešíme způsobem, který je znázorněn na obrázku 4.7. Jedná se vlastně o klasický způsob řešení: Přímkou p a bodem M proložíme rovinu ϱ a určíme její průsečík P s přímkou q . Hledaná příčka m je pak určena body M a P .



Obr. 4.7: K příkladu 4.14

Napíšeme si tedy vektorové rovnice roviny ϱ a přímky q

$$\varrho: X = [2, 2, 1] + t(4, 2, 4) + s(1, 2, 1)$$

$$q: Y = [5, 7, 8] + r(-1, -2, -3).$$

a porovnáme jejich pravé strany. Po úpravě dostaneme soustavu rovnic

$$-r - 4t - s = -3$$

$$-2r - 2t - 2s = -5$$

$$-3r - 4t - s = -7.$$

Tato soustava má právě jedno řešení: $r = 2$, $t = \frac{1}{6}$, $s = \frac{1}{3}$, tzn. přímka p a rovina ϱ jsou různoběžné. Jejich společný průsečík P spočteme následovně:

$$P = [2, 2, 1] + \frac{1}{6}(4, 2, 4) + \frac{1}{3}(1, 2, 1) = [3, 3, 2],$$

resp. snadněji

$$P = [5, 7, 8] + 2(-1, -2, -3) = [3, 3, 2].$$

Teď už můžeme napsat rovnici přímky m :

$$X = M + \lambda(P - M), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

čili

$$X = [2, 2, 1] + \lambda(1, 1, 1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

▲

Velmi jednoduše se řeší úloha o vzájemné poloze přímky a roviny, je-li rovina zadána v obecném tvaru a přímka dvěma body, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 4.15. Rozhodněme o vzájemné poloze přímky MN , kde $M = [2, 4, 4]$, $N = [3, 8, 1]$, a roviny dané rovnicí $2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 7$.

Řešení. Přímka MN má parametrické rovnice

$$\begin{aligned}x_1 &= 2 + t \\x_2 &= 4 + 4t \\x_3 &= 4 - 3t.\end{aligned}$$

Do obecné rovnice roviny dosadíme za x_1, x_2, x_3 z parametrických rovnic, čímž obdržíme rovnici o jedné neznámé t :

$$2(2 + t) + 4(4 + 4t) + 6(4 - 3t) = 7.$$

Tato rovnice nemá řešení, po úpravě totiž vychází $37 = 0$. Přímka a rovina nemají žádný společný bod a jsou tedy navzájem rovnoběžné. ▲

Příklady k procvičení

1. Zjistěte vzájemnou polohu přímky p a roviny σ , jejichž vektorové rovnice jsou:

$$\begin{aligned}p: X &= [4, -2, 2] + r(4, 3, -1) \\ \sigma: Y &= [3, 1, 0] + t(2, -1, 1) + s(1, 2, -1).\end{aligned}$$

2. Najděte (pokud existuje) společný bod roviny $\varrho: 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1$ a úsečky AB , kde $A = [2, 3, 1]$, $B = [-1, 4, -5]$.
3. Určete průsečík R roviny ϱ jdoucí bodem $Q = [-2, 4, 5]$ rovnoběžně se souřadnicovou rovinou Ox_2x_3 a přímky p , která je rovnoběžná s osou x_1 a prochází bodem $P = [2, -3, 4]$.
4. Zjistěte vzájemnou polohu přímky p , která prochází bodem $M = [2, -3, -4]$ rovnoběžně s osou x_3 a roviny $\tau: 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 9$. Případně najděte jejich společný bod.
5. Najděte průsečík Q přímky q s rovinou ϱ , je-li

$$\begin{aligned}q: X &= [1, 3, 2] + r(1, -1, -3) \\ \varrho: Y &= [-1, 1, 2] + t(1, -2, 0) + s(0, 2, -3).\end{aligned}$$

Klíč k příkladům k procvičení

1. Přímka p leží v rovině σ .
2. Úsečka AB a rovina ϱ nemají společný bod, existuje však průsečík $P = [\frac{13}{5}, \frac{14}{5}, \frac{11}{5}]$ přímky AB s rovinou ϱ .
3. $R = [-2, -3, 4]$.
4. Přímka p a rovina τ jsou různoběžné, jejich společným bodem je bod $M = [2, -3, -4]$.
5. $Q = [7, -3, -16]$.

Kapitola 5

Metrické vlastnosti vektorů v $\mathbf{E}_3$

V této části se budeme zabývat úlohami vektorového počtu, jako jsou například odchylky nebo velikosti vektorů v euklidovském prostoru $\mathbf{E}_3$. Předpokládejme, že je v něm pevně zvolena kartézská soustava souřadnic $(O, +x_1, +x_2, +x_3)$. Zavedení euklidovského skalárního součinu zde právě umožnilo vyjadřovat délky nebo odchylky, přičemž tyto délky a odchylky, jak jsme ukázali v úvodu druhé kapitoly, měly vlastnosti skutečných délek nebo odchylek. Základním pojmem, který zde budeme používat bude proto skalární součin. Vedle něj zavedeme také dvě nové operace: vektorový součin dvou vektorů a smíšený součin tří vektorů.

5.1 Skalární součin dvou vektorů

Se skalárním součinem jsme se sice už seznámili dříve, nebude však jistě na škodu, když si nyní všechny potřebné poznatky související s euklidovským skalárním součinem a na ní navazující metrikou znovu přehledně uspořádáme a to v té podobě, jakou mají v prostoru $\mathbf{E}_3$.

Euklidovský skalární součin vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{E}_3$ je definován rovností

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3. \quad (5.1)$$

S jeho pomocí můžeme vyjádřit *délku* (velikost, normu) vektoru $\mathbf{u}$ vzorcem

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \quad (5.2)$$

a *odchylku* ϕ ($0 \leq \phi \leq \pi$) dvou nenulových vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ vzorcem

$$\cos \phi = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}. \quad (5.3)$$

Odtud lze také počítat skalární součin vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ podle vzorce

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \phi. \quad (5.4)$$

Ze vzorce (5.4) je zřejmé, že jsou-li dva nenulové vektory navzájem ortogonální, tj. $\phi = \pi/2$, je jejich skalární součin roven nule.

Ještě si připomeňme vzorec pro výpočet vzdálenosti dvou bodů $X = [x_1, x_2, x_3]$, $Y = [y_1, y_2, y_3]$:

$$v(X, Y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}. \quad (5.5)$$

Příklad 5.1. Vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ o velikostech $\|\mathbf{u}\| = 6$, $\|\mathbf{v}\| = 2$ mají odchylku $\phi = \frac{2}{3}\pi$. Vypočtěte postupně $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, $\| -2\mathbf{u} \|$, $(2\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v})$.

Řešení. Podle (5.4) platí: $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos(\phi) = 6 \cdot 2 \cdot \cos(\frac{2\pi}{3}) = 12 \cdot (-\frac{1}{2}) = -6$. Pro výpočet $\| -2\mathbf{u} \|$ použijeme vlastnost (3.6) normy vektoru:

$$\| -2\mathbf{u} \| = |-2| \cdot \|\mathbf{u}\| = 12.$$

Poslední výraz upravíme s použitím axiomů (3.1)–(3.3) a vzorce (3.8):

$$\begin{aligned} (2\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v}) &= (2\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u}) + (2\mathbf{u} + \mathbf{v}, -\mathbf{v}) = \\ &= (2\mathbf{u}, \mathbf{u}) + (\mathbf{v}, \mathbf{u}) + (2\mathbf{u}, -\mathbf{v}) + (\mathbf{v}, -\mathbf{v}) \\ &= 2(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + (\mathbf{u}, \mathbf{v}) - 2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - (\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \\ &= 2\|\mathbf{u}\|^2 - (\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \|\mathbf{v}\|^2 = 74. \end{aligned}$$

▲

Příklady k procvičení

1. Vypočtěte velikosti všech vnitřních úhlů v trojúhelníku KLM , jestliže $K = [0, -1, 2]$, $L = [10, -1, 2]$, $M = [5, -1, 7]$.
2. Jsou dány body $A = [5, -1, -3]$, $B = [5, 4, 2]$, $C = [0, -1, 2]$. Ukažte, že trojúhelník ABC je rovnostranný.
3. Dokažte, že platí $(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v}) = \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2$.
4. Určete třetí souřadnici vektoru $\mathbf{n} = (5, 2, ?)$ tak, aby byl kolmý k vektoru $\mathbf{u} = (3, 6, 3)$.

Klíč k příkladům k procvičení

1. $\angle K = \frac{\pi}{4}$, $\angle L = \frac{\pi}{4}$, $\angle M = \frac{\pi}{2}$.
2. Například: strany AB , AC mají stejnou délku $\sqrt{50}$ a svírají úhel $\alpha = \frac{\pi}{3}$.
3. Návod: Položte $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ a porovnejte výrazy na obou stranách rovnosti nebo využijte axiomů (3.1) – (3.3) a vzorce (3.8).
4. Chybějící souřadnice $n_3 = -9$.

5.2 Vektorový součin dvou vektorů

Nechť $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ jsou libovolné vektory. Hledejme vektor $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ tak, aby byl ortogonální k oběma vektorům $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$. Souřadnice vektoru $\mathbf{w}$ musí tedy splňovat soustavu rovnic

$$\begin{aligned} u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3 &= 0 \\ v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 &= 0. \end{aligned}$$

Tato soustava má stejné řešení jako soustava

$$\begin{aligned} u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3 &= 0 \\ u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3 &= 0 \\ v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 &= 0 \end{aligned}$$

i jako soustava

$$\begin{aligned} v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 &= 0 \\ u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3 &= 0 \\ v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 &= 0. \end{aligned}$$

Matice obou soustav jsou čtvercové a mají vždy dva stejné řádky. Pro jejich determinanty proto platí

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = u_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = 0,$$

resp.

$$\begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = v_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - v_2 \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + v_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Jestliže porovnáme tyto rozvoje s rovnicemi původní soustavy, obdržíme pro složky hledaného vektoru $\mathbf{w}$ následující vzorce:

$$w_1 = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \quad w_2 = - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \quad w_3 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}. \quad (5.6)$$

Vzorce (5.6) tedy definují složky vektoru $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$, který je kolmý k vektorům $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Tento vektor budeme značit

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$$

a nazývat *vektorovým součinem* vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$. Vektorový součin vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ můžeme také zapsat ve tvaru

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{e}_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{e}_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{e}_3. \quad (5.7)$$

Vzorec (5.7) si lze snadno zapamatovat pomocí symbolu determinantu

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \quad (5.8)$$

který pak „formálně“ rozvineme podle prvků prvního řádku.

Věta 5.2. Vektorový součin $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ je roven nulovému vektoru právě tehdy, když vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou lineárně závislé.

Důkaz. Důkaz věty provedeme ve dvou krocích.

(1) Předpokládejme nejprve, že $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$, tj. podle (5.6) platí:

$$\begin{aligned} u_2v_3 - u_3v_2 &= 0 \\ u_3v_1 - u_1v_3 &= 0 \\ u_1v_2 - u_2v_1 &= 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Je-li některý z vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ nulový, je soustava (5.9) triviálně splněna. V tomto případě jsou ovšem oba vektory lineárně závislé. Nechť tedy $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou nenulové vektory. Každý z nich má potom alespoň jednu složku různou od nuly. Nechť například $u_1 \neq 0$. Z druhé a třetí rovnice soustavy (5.9) pak vypočteme

$$v_3 = \frac{v_1}{u_1}u_3, \quad v_2 = \frac{v_1}{u_1}u_2.$$

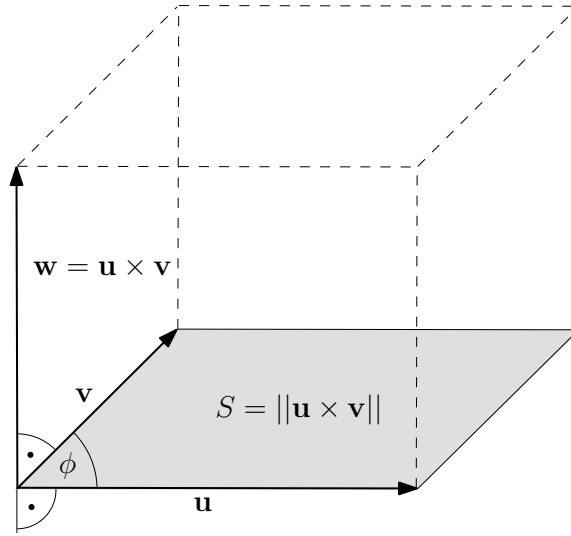
Přidáme-li ještě k těmto rovnostem zřejmou identitu

$$v_1 = \frac{v_1}{u_1}u_1,$$

dostáváme ihned, že vektor $\mathbf{v}$ je násobkem vektoru $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} = (v_1/u_1)\mathbf{u}$, tj. vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou opět lineárně závislé.

(2) Předpokládejme naopak, že vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou lineárně závislé. To znamená, že existuje takové reálné číslo k , že například $\mathbf{v} = (ku_1, ku_2, ku_3)$. Pak jsou ovšem všechny determinanty v (5.6) rovny nule, a tudíž $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$. □

Poznámka 5.3. Dva lineárně závislé vektory se nazývají *kolineární (rovnoběžné)*. Říkáme potom také, že vektorový součin $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ právě tehdy, když vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou kolineární. Jsou-li vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ lineárně nezávislé, pak $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ je vždy nenulovým vektorem.



Obr. 5.1: Vektorový součin

Věta 5.4. *Nechť vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou lineárně nezávislé. Označme ϕ jejich odchylku a $\mathbf{w}$ jejich vektorový součin. Potom platí:*

- (1) *Velikost vektoru $\mathbf{w}$ je rovna obsahu rovnoběžníka vymezeného vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ umístěnými do společného bodu (obrázek 5.1).*
- (2) *Determinant*

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} > 0. \quad (5.10)$$

Důkaz. (1) Obsah rovnoběžníka lze vyjádřit vzorcem $S = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \phi$, pro jeho čtverec pak platí

$$S^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 \sin^2 \phi. \quad (5.11)$$

Ukážeme, že $S = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$:

$$\begin{aligned} S^2 &= \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 (1 - \cos^2 \phi) \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u}, \mathbf{v})^2 \\ &= (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2 \\ &= (u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_3v_1 - u_1v_3)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2 \\ &= w_1^2 + w_2^2 + w_3^2. \end{aligned}$$

Z poslední rovnosti pak po odmocnění dostáváme $S = \|\mathbf{w}\|$, respektive

$$S = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|. \quad (5.12)$$

Tím je důkaz první části potvrzen.

(2) K ověření nerovnosti (5.10) stačí rozvinout determinant podle prvků třetího řádku:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} &= w_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - w_2 \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + w_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \\ &= w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = \|\mathbf{w}\|^2 > 0 \end{aligned}$$

□

Poznámka 5.5. Z důkazu věty vyplývá, že velikost vektoru $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ lze také vyjádřit rovností

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \phi. \quad (5.13)$$

Pokud bychom chtěli ozřejmit nerovnost (5.10), musíme se vrátit k transformaci souřadnic v afinním prostoru. Nechť $\mathcal{S} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ a $\mathcal{S}' = (\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n)$ jsou dvě uspořádané báze vektorového zaměřeného prostoru $\mathbf{E}_n$, jejichž vzájemný vztah je popsán pomocí rovností (2.17). Matice $\mathbf{A}$, jejíž sloupce tvoří souřadnice vektorů báze $\mathcal{S}'$ vzhledem k bázi $\mathcal{S}$, viz (2.22), se nazývá *matice přechodu* od uspořádané báze $\mathcal{S}$ k uspořádané bázi $\mathcal{S}'$. Víme, že matice $\mathbf{A}$ je regulární, tj. $\det \mathbf{A} \neq 0$. Jestliže $\det \mathbf{A} > 0$, řekneme, že uspořádané báze $\mathcal{S}$ a $\mathcal{S}'$ jsou *souhlasně orientovány*. V opačném případě řekneme, že jsou *nesouhlasně orientovány*.

Předpokládejme, že vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou lineárně nezávislé. Uspořádaná trojice $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v})$ je potom uspořádanou bází. Pro příslušnou matici přechodu $\mathbf{A}$ platí

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} > 0,$$

tzn. *uspořádaná báze* $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v})$ je například *souhlasně orientována s uspořádanou bází* $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, kde $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ je kartézská soustava souřadnic. Jestliže však přejdeme k jiné ortonormální bázi, například $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$, která je s uspořádanou bází $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ *nesouhlasně orientována*, bude vektor $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ v „nové bázi“ opačným vektorem k vektoru $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ ve „staré bázi“.

Nakonec se ještě zastavme u rovnoběžnostěnu na obrázku 5.1. Jeho objem V se rovná součinu obsahu základny a výšky:

$$V = S\|\mathbf{w}\| = \|\mathbf{w}\|^2,$$

takže jej můžeme vyjádřit pomocí determinantu (5.10), tj.

$$V = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Věta 5.6. Pro každé tři vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ a pro každé reálné číslo α platí

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= -\mathbf{v} \times \mathbf{u} \\ \alpha(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= (\alpha\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (\alpha\mathbf{v}) \\ (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} &= (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) + (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \\ \mathbf{w} \times (\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) + (\mathbf{w} \times \mathbf{v}).\end{aligned}$$

Důkaz věty je poměrně snadný. Nebudeme jej proto uvádět.

Příklad 5.7. Necht bod P se pohybuje po kružnici. Středem této kružnice kolmo k její rovině prochází osa otáčení. Otáčení bodu P můžeme popsat pomocí vektoru $\mathbf{w}$, který leží v ose rotace (obrázek 5.2), jehož orientace je taková, že otáčení probíhá ve směru chodu hodinových ručiček, jestliže se díváme z počátečního bodu O do koncového bodu. Velikost vektoru $\mathbf{w}$ se rovná úhlové rychlosti rotace ω , $\omega > 0$, tj. obvodové rychlosti v , $v = \|\mathbf{v}\|$, bodu P dělené jeho vzdáleností r od osy rotace:

$$\omega = \frac{v}{r}.$$

Necht $\mathbf{p}$ je polohový vektor bodu P , potom platí

$$v = \omega r = \|\mathbf{w}\| \|\mathbf{p}\| \sin \gamma = \|\mathbf{w} \times \mathbf{p}\|.$$

Vektor obvodové rychlosti $\mathbf{v}$, který má směr tečny ke kruhové dráze a stojí kolmo k rovině proložené osou rotace o a vektorem $\mathbf{p}$, můžeme tedy vyjádřit jako vektorový součin vektoru úhlové rychlosti $\mathbf{w}$ a polohového vektoru $\mathbf{p}$ bodu P :

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{p}. \quad (5.14)$$

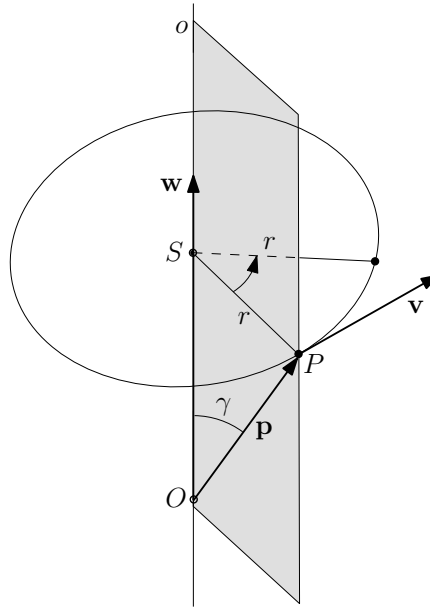
Příklad 5.8. Vypočítejte obsah trojúhelníka s vrcholy $A = [2, 7, -1]$, $B = [0, 3, 5]$, $C = [-1, 4, 3]$.

Řešení. Obsah trojúhelníka určeného vrcholy A, B, C je roven polovině obsahu rovnoběžníka sestrojeného nad vektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, tedy

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|. \quad (5.15)$$

Vektorový součin vektorů $\overrightarrow{AB} = (-2, -4, 6)$, $\overrightarrow{AC} = (-3, -3, 4)$ vypočteme pomocí (5.8):

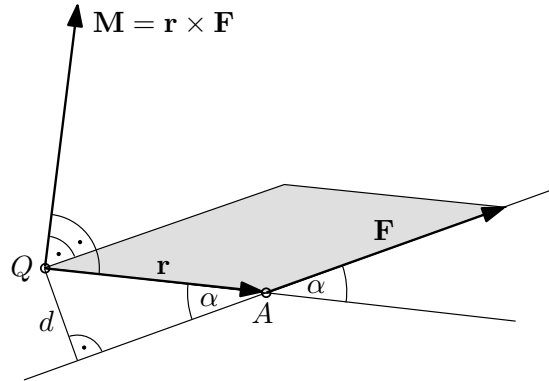
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -2 & -4 & 6 \\ -3 & -3 & 4 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 + \left(-\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} \right) \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3 \\ &= 2\mathbf{e}_1 + (-10)\mathbf{e}_2 + (-6)\mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

Obr. 5.2: Užití vektorového součinu pro vyjádření vektoru $\mathbf{v}$ obvodové rychlosti

Odtud dostáváme

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \sqrt{2^2 + (-10)^2 + (-6)^2} = \sqrt{35}.$$

▲

Obr. 5.3: Užití vektorového součinu při vyjádření statického momentu $\mathbf{M}$

Příklad 5.9. *Statický moment* M síly $\mathbf{F}$ vzhledem k libovolnému bodu Q je definován jako součin

$$M = d \|\mathbf{F}\|,$$

kde d je kolmá vzdálenost jejího paprsku od bodu Q . Označme $\mathbf{r}$ vektor z bodu Q do působíště síly A a α jeho odchylku od $\mathbf{F}$ (obrázek 5.3). Potom $d = \|\mathbf{r}\| \sin \alpha$, takže

moment síly můžeme také napsat takto:

$$M = \|\mathbf{r}\| \|\mathbf{F}\| \sin \alpha. \quad (5.16)$$

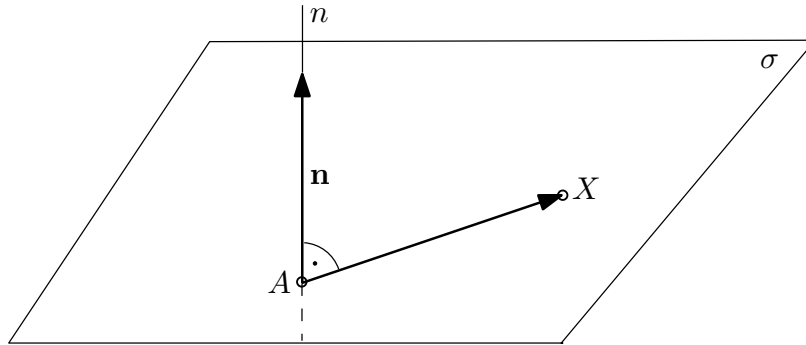
Vzorec (5.16) udává velikost vektorového součinu vektorů $\mathbf{r}$ a $\mathbf{F}$, takže *vektor momentu* $\mathbf{M}$ můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \quad (5.17)$$

čímž jsme momentu přiřadili také *směr*. Z rovnosti (5.16) je ještě zřejmé, že moment je nulový pro $\alpha = 0$, tj. paprsek síly prochází bodem Q , a je největší pro $\alpha = \pi/2$, kdy síla působí kolmo na vektor $\mathbf{r}$.

Normála roviny

Normála roviny je přímka, která je kolmá k rovině, tj. je kolmá ke dvěma různoběžkám dané roviny. Předpokládejme, že rovina σ je určena bodem A a směrovým vektorem $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ normály, tzv. *normálovým vektorem* (obrázek 5.4).



Obr. 5.4: Normálový vektor roviny

Libovolný bod X pak leží v rovině σ právě tehdy, když vektory $\mathbf{n}$ a $X - A$ jsou navzájem kolmé, takže

$$(\mathbf{n}, X - A) = 0. \quad (5.18)$$

Rovnici (5.18) lze postupně upravit na rovnici roviny v obecném tvaru

$$\begin{aligned} n_1(x_1 - a_1) + n_2(x_2 - a_2) + n_3(x_3 - a_3) &= 0 \\ n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + (-n_1a_1 - n_2a_2 - n_3a_3) &= 0. \end{aligned}$$

V poslední rovnici stačí jen položit $a = n_1$, $b = n_2$, $c = n_3$, $d = n_1a_1 + n_2a_2 + n_3a_3$, čímž dostaneme přímo rovnici (4.10), tj.

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d.$$

Význam koeficientů a, b, c v obecné rovnici roviny je teď zřejmý. V kartézské soustavě souřadnic udávají čísla a, b, c *souřadnice normálového vektoru roviny*.

Příklad 5.10. Napište obecnou rovnici roviny ABC , $A = [2, -3, 4]$, $B = [3, -6, 6]$, $C = [-1, 3, 2]$.

Řešení. Tuto úlohu jsme už řešili. Nejprve jsme sestavili parametrické rovnice roviny a z nich pak vyloučili parametry. K tomu jsme potřebovali znát směrové vektory roviny $\mathbf{u} = B - A$, $\mathbf{v} = C - A$. Ty nyní potřebujeme taky, můžeme však hned určit příslušný normálový vektor $\mathbf{n}$ roviny. Ten musí být totiž kolmý k oběma směrovým vektorům, a tudíž platí

$$\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}.$$

Postupně vypočteme: $\mathbf{u} = (1, -3, 2)$, $\mathbf{v} = (-3, 6, -2)$, $\mathbf{n} = (-6, -4, -3)$. Odtud dostáváme rovnici

$$-6x_1 - 4x_2 - 3x_3 = d.$$

Zbývajících koeficient d pak určíme dosazením souřadnic kteréhokoliv z bodů A, B, C do výše uvedené rovnice. Vyjde $d = -12$. Obecná rovnice roviny má po úpravě tvar

$$6x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 12.$$



Poznámka 5.11. Podobně můžeme zavést *normálový vektor přímky*, jako vektor kolmý k jejímu směrovému vektoru. Je-li $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ směrový vektor přímky, pak vektor $\mathbf{n} = (u_2, -u_1)$ je zřejmě její normálový vektor, platí přece $(\mathbf{n}, \mathbf{u}) = 0$. Čísla a, b v obecné rovnici přímky $ax_1 + bx_2 = c$ tak představují souřadnice jejího normálového vektoru, viz odvození rovnice (4.6), kde jsme položili $a = u_2$, $b = -u_1$.

Příklady k procvičení

1. Vypočtete vektorové součiny $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$, je-li $\mathbf{u} = (1, 2, 2)$, $\mathbf{v} = (1, 4, 8)$.
2. Vypočtete vektorové součiny $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3$.
3. Určete $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$, jestliže $\|\mathbf{a}\| = 10$, $\|\mathbf{b}\| = 2$, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 12$.
4. Najděte obsah trojúhelníka ohraničeného přímkami, jejichž rovnice v soustavě (O, x, y) jsou $y = x$, $y = -3x + 8$, $5x + 3y = 0$.
5. Síla $\mathbf{F}$ působí v bodě A . Určete moment síly $\mathbf{F}$ vzhledem k bodu Q , je-li:
 - a) $\mathbf{F} = (3, 0, -6)$, $A = [1, 8, 1]$, $Q = [4, 6, -1]$;
 - b) $\mathbf{F} = (0, 0, 1)$, $A = [0, 0, 0]$, $Q = [0, 0, 5]$.
6. Jsou dány tři body $A = [1, 1, 1]$, $B = [2, 3, 3]$, $C = [3, 3, 2]$. Napište rovnici přímky p , která prochází bodem A a je kolmá k rovině ABC .

Klíč k příkladům k procvičení

1. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (8, -6, 2)$, $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = (-8, 6, -2)$.
2. $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1$.
3. $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = 16$.
4. $S_\Delta = 16$. [Návod: Určete vrcholy trojúhelníka jako body prostoru $\mathbf{E}_3$, tj. třetí souřadnici položte rovnou nule.]
5. a) $\mathbf{M} = (-12, -12, -6)$; b) $\mathbf{M} = \mathbf{o}$.
6. $p: X = [1, 1, 1] + t(-2, 3, -2)$.

5.3 Smíšený součin tří vektorů

Definice 5.12. Předpokládejme, že jsou dány tři vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Číslo, které označujeme $(\mathbf{abc})$ a které definujeme

$$(\mathbf{abc}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{c}), \quad (5.19)$$

nazýváme *smíšeným součinem vektorů $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$* .

Věta 5.13. Pro smíšený součin vektorů $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ platí

$$(\mathbf{abc}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \quad (5.20)$$

Důkaz. Ve vzorci (5.19) označíme $\mathbf{v} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$. Podle (5.1) a (5.6) potom platí

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 \\ &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Poslední výraz je rozvoj determinantu (5.20) podle prvního řádku, čímž je věta dokázána. $\square$

Poznámka 5.14. Zaměníme-li v determinantu dva řádky, determinant změní znaménko. Odtud pak vyplývá, že smíšený součin vektorů závisí na jejich pořadí, takže platí:

$$(\mathbf{abc}) = -(\mathbf{bac}) = (\mathbf{cab}) = -(\mathbf{cba}) = (\mathbf{bca}) = -(\mathbf{acb}).$$

Věta 5.15. *Absolutní hodnota smíšeného součinu tří vektorů je rovna objemu rovnoběžnostěnu, jehož tři hrany vycházející z téhož vrcholu jsou určeny danými třemi vektory (obrázek 5.5).*

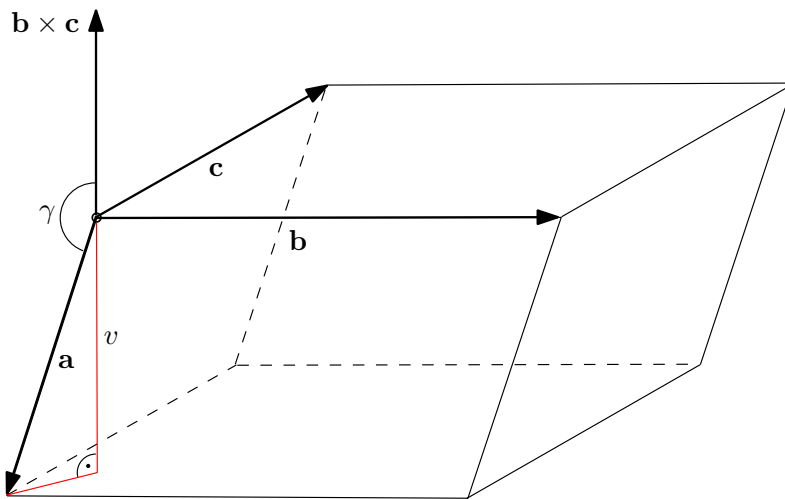
Důkaz. Označme V objem rovnoběžnostěnu. Máme dokázat, že platí

$$V = |(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|. \quad (5.21)$$

Obsah podstavy rovnoběžnostěnu se rovná $\|\mathbf{b} \times \mathbf{c}\|$, velikost jeho výšky v je rovna délce pravoúhlého průmětu vektoru $\mathbf{a}$ na kolmici k podstavě mající stejný směr jako vektor $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$, tedy $v = \|\mathbf{a}\| |\cos \gamma|$. Pro objem rovnoběžnostěnu pak s přihlédnutím k vzorci 5.4 platí:

$$V = \|\mathbf{b} \times \mathbf{c}\| \|\mathbf{a}\| |\cos \gamma| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b} \times \mathbf{c}\| |\cos \gamma| = |(\mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{c})| = |(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|.$$

□



Obr. 5.5: Geometrický význam smíšeného součinu

Poznámka 5.16. Ze vzorce (5.20) okamžitě vyplývá, že $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$ právě tehdy, když $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ jsou lineárně závislé vektory. Tři lineárně závislé vektory se nazývají *komplanární*. Takové vektory leží v rovnoběžných rovinách (tedy i v téže rovině). Objem rovnoběžnostěnu je v tom případě roven nule. Někdy se také uvádí, že $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$ právě tehdy, když vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ jsou komplanární.

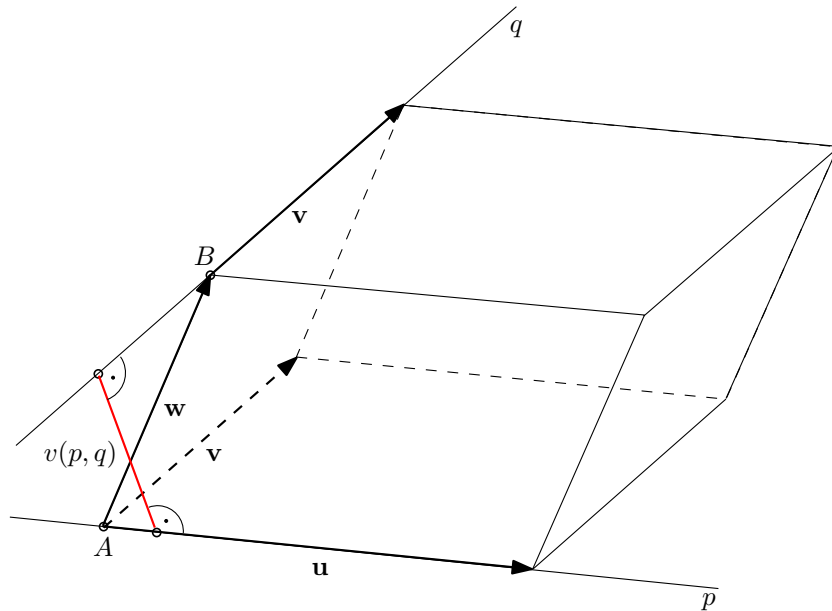
Příklad 5.17. Vypočtete vzdálenost mimoběžek

$$p : A + t\mathbf{u}, \quad q : B + s\mathbf{v}.$$

Řešení. Vzdálenost mimoběžek je rovna délce příčky, která je obě kolmo protíná. Taková příčka existuje právě jedna. Úlohu lze jednoduše vyřešit užitím vektorového počtu. Umístíme směrové vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ mimoběžek do společného bodu A . Oba vektory spolu s vektorem $\mathbf{w} = \overrightarrow{AB}$ pak určují rovnoběžnostěn (obrázek 5.6), jehož výška je hledanou vzdáleností $v(p, q)$ daných mimoběžek. Jinými slovy $v(p, q)$ je podílem objemu rovnoběžnostěnu a obsahu jeho podstavy. S použitím vzorců (5.21) a (5.12) dostáváme pro vzdálenost přímek p, q vzorec

$$v(p, q) = \frac{|(\mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{w})|}{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|}. \quad (5.22)$$

▲



Obr. 5.6: Vzdálenost mimoběžek

Příklady k procvičení

1. Vypočtete objem čtyřstěnu $ABCD$, je-li

$$A = [3, -1, 2], \quad B = [5, 1, 4], \quad C = [0, 2, 5], \quad D = [-2, 0, 6].$$

2. Určete vzdálenost mimoběžek

$$p: [2, -2, 0] + t(1, -1, 0), \quad q: [2, 3, -1] + s(0, 1, -2).$$

3. Jsou dány body $A = [1, 0, -2]$, $B = [2, 1, 1]$, $C = [3, -2, 0]$, $D = [-1, 4, 2]$. Určete velikost výšky v čtyřstěnu $ABCD$ na stěnu ABC .

Klíč k příkladům k procvičení

1. $V = 6$.
2. $v(p, q) = 3$.
3. $v = \frac{2}{3}\sqrt{6}$.

Kapitola 6

Metrická geometrie lineárních útvarů v E_3

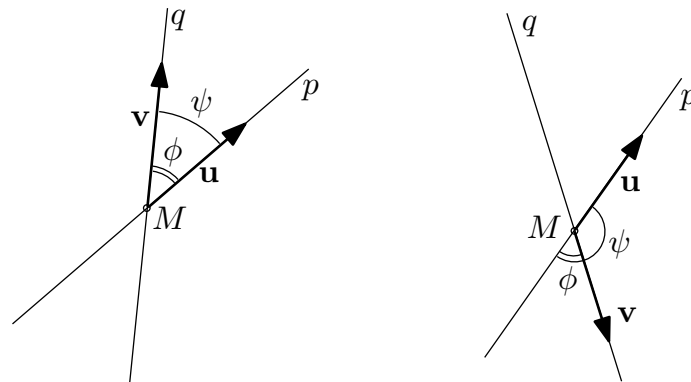
V této části budeme řešit s pomocí skalárního a vektorového součinu metrické úlohy, jako odchylky a vzdálenosti lineárních útvarů v E_3 .

6.1 Odchylka dvou lineárních útvarů

V tomto článku se budeme věnovat odchylce dvou přímek, dvou rovin a odchylce přímky od roviny.

Odchylka dvou přímek

Předpokládejme, že máme v rovině dvě přímky p, q , které se protínají v bodě M . Tyto přímky rozdělují rovinu na čtyři úhly, z nichž dva a dva mají stejnou velikost. Odchylkou ϕ přímek p, q rozumíme velikost jednoho z ostrých úhlů resp. pravých úhlů určených těmito přímkami. Jsou-li přímky p, q rovnoběžné různé nebo splývající, klademe $\phi = 0$.



Obr. 6.1: Odchylka dvou přímek

Označme $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ směrové vektory uvedených přímk a ψ odchylku těchto vektorů (obrázek 6.1). Jak vidíme, mohou nastat právě dva případy:

- Jestliže $\psi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, potom $\phi = \psi$, tedy $\cos \phi = \cos \psi$.
- Jestliže $\psi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, potom $\phi = \pi - \psi$, tedy $\cos \phi = -\cos \psi$.

V obou případech však platí $\cos \phi = |\cos \psi|$. Odchylku dvou přímek tak můžeme počítat bez ohledu na volbu jejich směrových vektorů podle vzorce

$$\cos \phi = \left| \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \right|. \quad (6.1)$$

Jsou-li přímky p a q mimoběžné, posuneme je rovnoběžně do zvoleného bodu. Jejich odchylkou pak rozumíme odchylku různoběžek, které takto dostaneme, takže můžeme opět použít vzorce (6.1).

Příklad 6.1. Jsou dány body $A = [1, 2, 2]$, $B = [2, 4, 5]$, $C = [0, 1, 5]$, $D = [6, 5, 3]$. Vypočtěte odchylku ϕ přímek AB a CD .

Řešení. Určíme směrové vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ obou přímek:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= B - A = (1, 2, 3) \\ \mathbf{v} &= D - C = (6, 4, -2). \end{aligned}$$

Máme $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 8$, $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{14}$, $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$. Odtud po dosazení do (6.1)

$$\cos \phi = \frac{2}{7},$$

takže dostáváme výsledek $\phi = \arccos \frac{2}{7}$. ▲

Odchylka dvou rovin

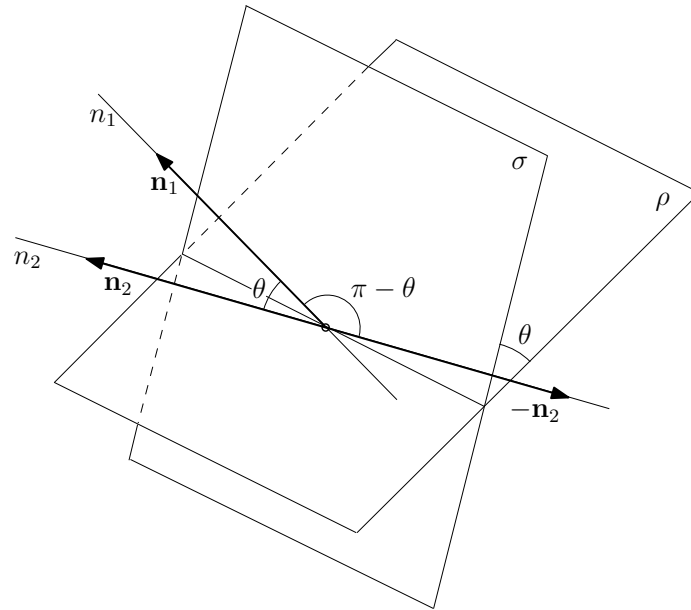
Odchylku dvou rovin definujeme jako odchylku jejich normál. Na obrázku 6.2 jsou znázorněny roviny ϱ, σ spolu se svými normálami n_1, n_2 . Označme ještě $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ příslušné normálové vektory. Pro odchylku θ rovin ϱ a σ pak nezávisle na jejich volbě platí

$$\cos \theta = \left| \frac{(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)}{\|\mathbf{n}_1\| \|\mathbf{n}_2\|} \right|. \quad (6.2)$$

Odchylka dvou rovnoběžných rovin (různých nebo splývajících) je rovna nule.

Příklad 6.2. Vypočtěte odchylku θ rovin ϱ, σ daných rovnicemi

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + x_3 &= -3 \\ -4x_1 + x_2 + x_3 &= -7. \end{aligned}$$



Obr. 6.2: Odchylka dvou rovin

Řešení. Úlohu vyřešíme způsobem známým ze stereometrie, kde se odchylka dvou různoběžných rovin určuje jako odchylka přímk, ve kterých obě roviny protíná rovina k nim kolmá, jak je zřejmé z obrázku 6.3. Normálový vektor $\mathbf{n} = (a, b, c)$ roviny τ kolmé k rovinám ϱ, σ musí být kolmý k jejich normálovým vektorům $\mathbf{n}_1 = (2, -2, 1)$, $\mathbf{n}_2 = (-4, 1, 1)$, takže platí

$$\begin{aligned} 2a - 2b + c &= 0 \\ -4a + b + c &= 0. \end{aligned}$$

Normálový vektor $\mathbf{n}$ lze tedy získat řešením výše uvedené soustavy rovnic nebo také přímo jako vektorový součin $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$. V obou případech můžeme například zvolit $\mathbf{n} = (1, 2, 2)$. Rovina τ má potom rovnici

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = d.$$

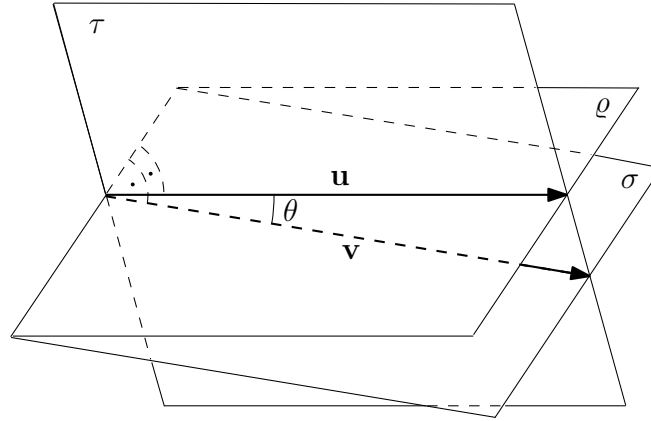
Zbývá ještě určit průsečnice (vlastně jen jejich směrové vektory) roviny τ s rovinami ϱ a σ . Řešením příslušných soustav rovnic (koeficient d v rovnici roviny τ nemusíme znát) najdeme směrové vektory

$$\mathbf{u} = (-2, -1, 2), \quad \mathbf{v} = (0, -1, 1).$$

Teď už můžeme odchylku θ rovin ϱ, σ vypočítat podle vzorce (6.1):

$$\cos \theta = \left| \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \right|,$$

tedy $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, odtud $\theta = \frac{\pi}{4}$. Stejný výsledek bychom samozřejmě dostali hned dosazením za $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ do vzorce (6.2). ▲



Obr. 6.3: K příkladu 6.2

Odchylka přímky od roviny

Odchylka přímky od roviny je definována jako odchylka dané přímky a jejího pravouhlého průmětu do roviny. Na obrázku 6.4 je znázorněna přímka p různoběžná s rovinou σ a její kolmý průmět p' do této roviny. Označme $\mathbf{u}$ směrový vektor přímky p a $\mathbf{n}$ normálový vektor roviny σ . Pro odchylku α přímky p od roviny σ , tedy odchylku přímk p, p' , a odchylku ϕ přímky p a normály n roviny σ platí

$$\alpha + \phi = \frac{\pi}{2}.$$

Jelikož

$$\sin \alpha = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \cos \phi,$$

můžeme pro odchylku α vzhledem k vzorci (6.1) psát

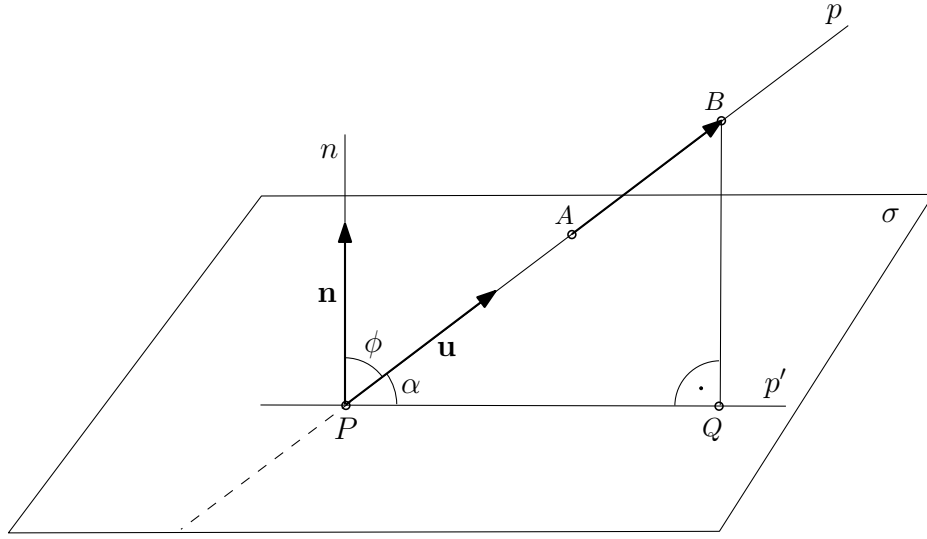
$$\sin \alpha = \left| \frac{(\mathbf{n}, \mathbf{u})}{\|\mathbf{n}\| \|\mathbf{u}\|} \right|, \quad (6.3)$$

kde $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$. Je-li přímka p rovnoběžná s rovinou σ nebo leží-li v ní, klademe $\alpha = 0$.

Příklad 6.3. Najděte kolmý průmět přímky $p \equiv AB$ do roviny $\sigma : x - y + 3 = 0$ a vypočtěte pak odchylku α přímky AB od této roviny, je-li $A = [5, 5, 5]$, $B = [3, 5, 3]$.

Řešení. K určení kolmého průmětu přímky AB do roviny σ potřebujeme znát dva body. Jedním bodem může být průsečík P přímky AB a roviny σ , druhým bodem například kolmý průmět Q bodu B do dané roviny (obrázek 6.4). Přímka

$$p : X = [5, 5, 5] + t(-2, 0, -2)$$



Obr. 6.4: Odchylka přímky od roviny

protíná rovinu σ , jak jistě snadno spočtete, v bodě $P = [2, 5, 2]$. Normálový vektor roviny je zároveň směrovým vektorem přímky jdoucí bodem B kolmo k ní, takže pro bod Q platí

$$Q = B + s\mathbf{n},$$

resp.

$$Q = [3, 5, 3] + s(1, -1, 0).$$

Dosadíme-li odtud do rovnice roviny za proměnné, určíme postupně: $s = -\frac{1}{2}$, $Q = [\frac{5}{2}, \frac{11}{2}, 3]$. Přímka $p' \equiv PQ$ má tedy rovnici

$$p' : X = [2, 5, 2] + r \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right).$$

Odchylkou α přímky p od roviny σ je tedy odchylka přímek p a p' , jejichž směrové vektory jsou $\mathbf{u} = (-2, 0, -2)$, $\mathbf{v} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$. Dostáváme tak

$$\cos \alpha = \left| \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \right| = \left| \frac{-1 + (-2)}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{\frac{6}{4}}} \right| = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

čili $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Výsledek ještě zkontrolujeme podle vzorce (6.3):

$$\sin \alpha = \left| \frac{(\mathbf{n}, \mathbf{u})}{\|\mathbf{n}\| \|\mathbf{u}\|} \right| = \left| \frac{-2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}} \right| = \frac{1}{2},$$

tj. $\alpha = \frac{\pi}{6}$. ▲

Příklady k procvičení

1. Najděte rovnici přímky, která prochází bodem $A = [1, -2, 3]$ a má s osou Ox odchylku $\phi_1 = \frac{\pi}{4}$ a s osou Oy odchylku $\phi_2 = \frac{\pi}{3}$.
2. Napište vektorovou rovnici přímky procházející bodem $B = [4, 2]$ mající s přímkou p odchylku $\phi = 45^\circ$; $p: X = [2, 3] + t(-1, 2)$.
3. Napište rovnici roviny jdoucí bodem $M = [-1, 2, 4]$ kolmé k rovinám

$$6x - 2y + 3z - 12 = 0$$

$$3x + 2y - 6z + 21 = 0.$$

4. Vypočtěte odchylku θ rovin

$$2x - 10y + 11z - 1 = 0$$

$$4x + 4y - 7z + 2 = 0.$$

5. Najděte rovnici roviny, která prochází body $P = [0, 2, 0]$, $Q = [2, 0, 0]$ a má od roviny dané rovnicí $x = 0$ odchylku $\theta = \frac{\pi}{3}$.

6. Vypočtěte odchylku θ stěn čtyřstěnu $ABCD$ protínajících se v hraně AB , je-li

$$A = [0, 2, 6], B = [2, 1, 4], C = [5, 0, 1], D = [0, 2, 0].$$

7. Určete odchylku α přímky MN , $M = [2, -3, 1]$, $N = [3, -2, 0]$ a roviny σ , je-li

$$\sigma: X = [0, 2, -1] + t(1, 4, 1) + s(-1, 2, 3).$$

8. Napište obecnou rovnici přímky v rovině Oxy , která je pravoúhlým průmětem přímky

$$x + 2y + 3z = 26$$

$$3x + y + 4z = 14,$$

do této roviny.

Klíč k příkladům k procvičení

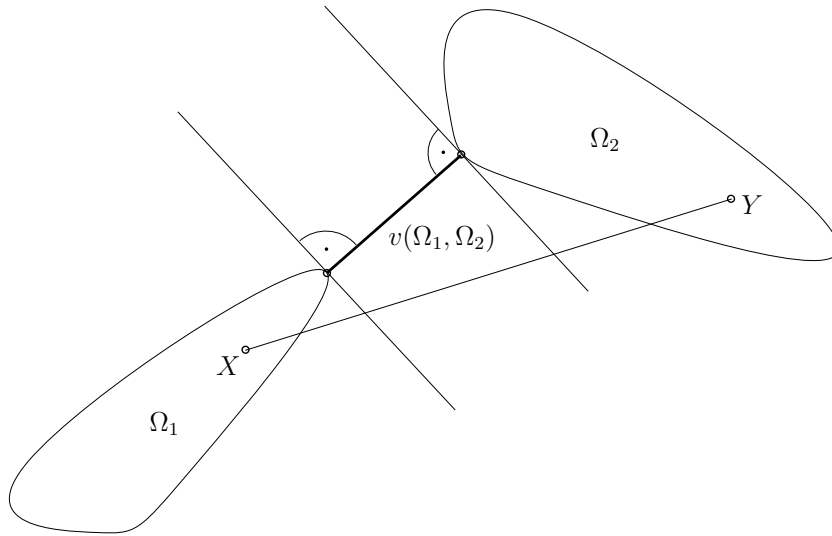
1. $X = [1, -2, 3] + t(\sqrt{2}, 1, \pm 1)$, $Y = [1, -2, 3] + t(\sqrt{2}, -1, \pm 1)$. [Návod: Směrové vektory přímek volte jako vektory jednotkové.]
2. $X = [4, 2] + t[1, 3]$, $Y = [4, 2] + t[-3, 1]$.
3. $2x + 15y + 6z - 52 = 0$.
4. $\theta \doteq \arccos(0.8)$.
5. $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{\pm\sqrt{2}} = 1$.
6. $\theta = \arccos \frac{1}{\sqrt{10}} = 71^\circ 33' 54''$.
7. $\alpha = 0$.
8. $5x - 5y + 6z = 0$.

6.2 Vzdálenost dvou lineárních útvarů

V tomto článku uvedeme nejdříve definici vzdálenosti dvou množin v $\mathbf{E}_3$ a na základě této definice budeme pak počítat vzdálenosti lineárních útvarů v $\mathbf{E}_3$.

Definice 6.4. Necht Ω_1, Ω_2 jsou dvě neprázdné množiny bodů v $\mathbf{E}_3$ a necht $v(X, Y)$ je vzdálenost libovolných bodů X, Y takových, že $X \in \Omega_1, Y \in \Omega_2$. Vzdálenost množin Ω_1, Ω_2 označujeme $v(\Omega_1, \Omega_2)$ a definujeme

$$v(\Omega_1, \Omega_2) = \inf \{v(X, Y) : X \in \Omega_1 \wedge Y \in \Omega_2\}. \quad (6.4)$$



Obr. 6.5: Vzdálenost dvou množin v $\mathbf{E}_2$

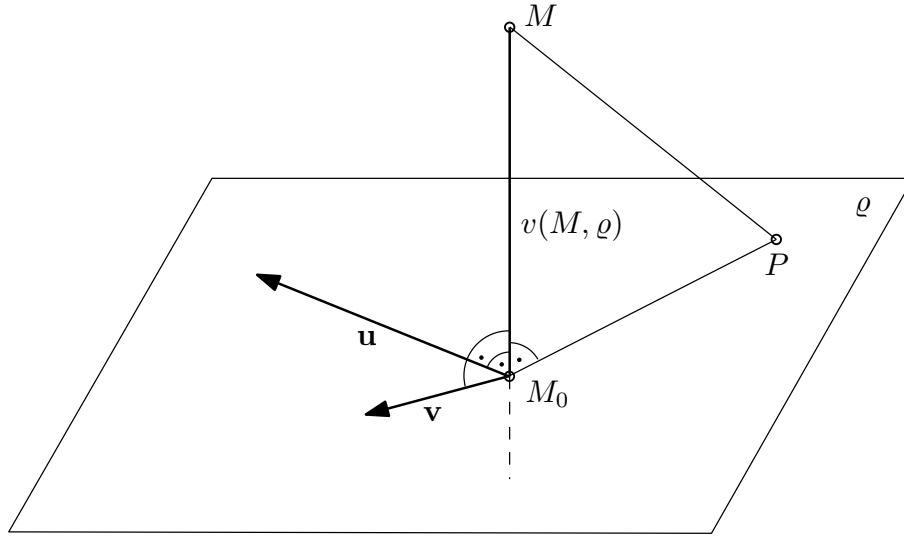
Poznámka 6.5. Vzdálenost dvou množin Ω_1, Ω_2 je tedy definována jako infimum množiny všech vzdáleností $v(X, Y)$, kde $X \in \Omega_1, Y \in \Omega_2$. Obrázek 6.5 podává ilustraci k vzdálenosti dvou množin v $\mathbf{E}_2$. Jestliže množiny Ω_1, Ω_2 mají neprázdný průnik, je jejich vzdálenost rovna nule.

Vzdálenost bodu od roviny

Vzdálenost $v(M, \varrho)$ bodu M a roviny ϱ je rovna vzdálenosti bodu M a jeho pravoúhlého průmětu M_0 do roviny ϱ (obrázek 6.6). Je zřejmé, že vzdálenost bodu M od kteréhokoliv jiného bodu roviny ϱ je větší než $v(M, M_0)$. Infimum množiny z (6.4) je v tomto případě zároveň i jejím minimem.

Příklad 6.6. Ukažte, že pro vzdálenost bodu $M = [x_0, y_0, z_0]$ od roviny ϱ určené rovnicí $ax + by + cz + d = 0$ platí vzorec

$$v(M, \varrho) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \quad (6.5)$$



Obr. 6.6: Vzdálenost bodu od roviny

Řešení. Přímka, která prochází bodem M a je kolmá k rovině $ax + by + cz + d = 0$ má parametrické rovnice

$$x = x_0 + ta, \quad y = y_0 + tb, \quad z = z_0 + tc.$$

Jestliže odtud dosadíme do rovnice roviny, určíme nejprve hodnotu parametru t :

$$t = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}$$

a po dosazení za t do parametrických rovnic přímky dostaneme souřadnice průsečíku M_0 přímky s rovinou, tj. pravoúhlého průmětu bodu M do roviny ρ :

$$M_0 = \left[x_0 - a \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}, y_0 - b \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}, z_0 - c \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2} \right].$$

Vzdálenost bodů M a M_0 vypočteme podle vzorce (5.5). Po úpravě vyjde

$$v(M, M_0) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

tedy vzorec (6.5). ▲

Poznámka 6.7. Vzorec (6.5) se dobře pamatuje. Do rovnice roviny v obecném tvaru dosadíme za proměnné souřadnice bodu, jehož vzdálenost od roviny počítáme, a absolutní hodnotu takto získaného výrazu vydělíme délkou normálového vektoru $\mathbf{n}$ roviny.

Odvodíme ještě jeden jednoduchý vzorec pro výpočet vzdálenosti bodu od roviny, který se dá dobře zapamatovat nebo snadno odvodit. Předpokládejme, že rovina ϱ je určena bodem A a jednotkovým normálovým vektorem $\mathbf{n}$. Vzdálenost bodu M od roviny ϱ pak vypočteme jako velikost pravoúhlého průmětu vektoru $\mathbf{u} = M - A$ do jednotkového vektoru $\mathbf{n}$ (obrázek 6.7). Platí tedy

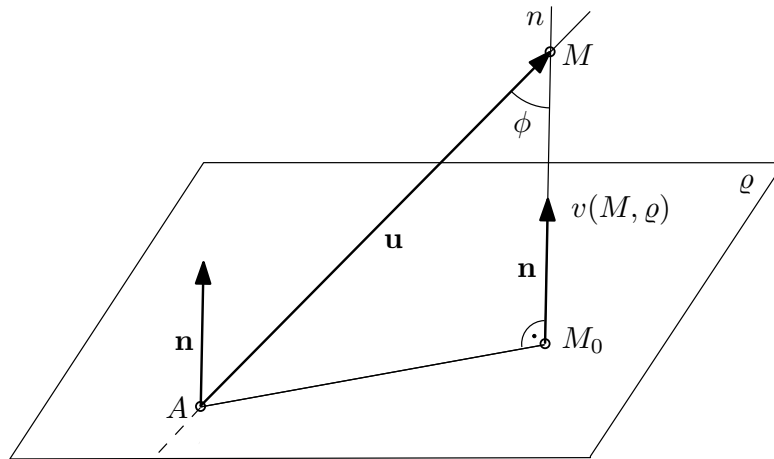
$$v(M, \varrho) = \|M - A\| \cos \phi,$$

kde ϕ je odchylka přímek AM a normály n roviny ϱ . Pro tuto odchylku podle vzorce 6.1 platí

$$\cos \phi = \left| \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{n})}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{n}\|} \right| = \frac{|(M - A, \mathbf{n})|}{\|M - A\|},$$

takže po dosazení za $\cos \phi$ do předešlé rovnice dostaneme

$$v(M, \varrho) = |(M - A, \mathbf{n})|. \quad (6.6)$$



Obr. 6.7: Jiný způsob určení vzdálenosti bodu od roviny

Vzdálenost bodu od přímky

Vzdálenost $v(M, p)$ bodu M od přímky p definujeme podobně jako vzdálenost bodu od roviny, tj. $v(M, p) = v(M, M_0)$, kde M_0 je pravoúhlý průmět bodu M na přímku p . Jedná-li se speciálně o vzdálenost bodu od přímky v rovině Oxy , pak pro vzdálenost bodu $M = [x_0, y_0]$ od přímky p vyjádřené obecnou rovnicí $ax + by + c = 0$ platí vzorec

$$v(M, p) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (6.7)$$

Poznámka 6.8. Vzorec (6.7) je obdobou vzorce (6.5) a odvodí se zcela analogickým způsobem.

Příklad 6.9. Vypočtěte vzdálenost bodu $M = [-3, 1, 2]$ od přímky p :

$$x = -3 + 3t, \quad y = 0, \quad z = 2 + 4t.$$

Řešení. Bod $M_0 = [\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}]$ leží na přímce p , tj. existuje takové číslo t , že

$$\tilde{x} = -3 + 3t, \quad \tilde{y} = 0, \quad \tilde{z} = 2 + 4t.$$

Vektory $M - M_0 = (-3t, 1, -4t)$ a $\mathbf{u} = (3, 0, 4)$ jsou ortogonální, tedy lze psát $(M - M_0, \mathbf{u}) = 0$, čili

$$-9t + 0 - 16t = 0.$$

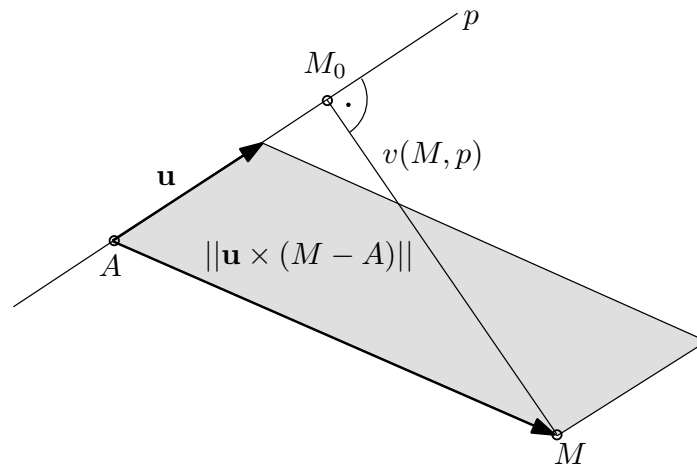
Odtud dostaneme $t = 0$, takže $M_0 = (-3, 0, 2)$. Pro hledanou vzdálenost pak platí

$$v(M, p) = v(M, M_0) = 1.$$

▲

Poznámka 6.10. Vzdálenost bodu od přímky lze také určit způsobem zřejmým z obrázku 6.8. Předpokládejme, že přímka p je dána bodem A a směrovým vektorem $\mathbf{u}$. Vzdálenost bodu M od přímky p se rovná výšce rovnoběžníka určeného vektory $\mathbf{u}$ a $M - A$, jehož obsah se vypočte podle vzorce (5.12). Odtud pak máme

$$v(M, p) = \frac{\|\mathbf{u} \times (M - A)\|}{\|\mathbf{u}\|}. \quad (6.8)$$



Obr. 6.8: Vzdálenost bodu od přímky

Vzdálenost dvou rovin

Vzdálenost dvou totožných nebo různoběžných rovin nemá smysl počítat, neboť je evidentně rovna nule. Jestliže jsou obě roviny rovnoběžné různé, stačí v jedné z nich zvolit bod a určit jeho vzdálenost od druhé roviny.

Vzdálenost přímky a roviny

Jestliže je přímka různoběžná s rovinou nebo v ní leží, není opět co počítat. Jejich vzdálenost je rovna nule. Je-li přímka s rovinou rovnoběžná, zvolíme na ní bod a vypočteme jeho vzdálenost od roviny.

Vzdálenost dvou přímek

V části věnované smíšenému součinu tří vektorů jsme se setkali s úlohou určit vzdálenost dvou mimoběžných přímek. Víme tedy, že vzdálenost dvou mimoběžek p, q , z nichž první je určena bodem A a směrovým vektorem $\mathbf{u}$, druhá pak bodem B a směrovým vektorem $\mathbf{v}$ se vypočte podle vzorce (5.22):

$$v(p, q) = \frac{|(\mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{w})|}{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|},$$

kde $\mathbf{w} = B - A$. Zbývající případy jsou už, poté co bylo řečeno v předchozích dvou odstavcích, zcela jistě triviální záležitosti.

Příklady k procvičení

1. Napište parametrické rovnice přímky p , která prochází bodem $M = [-5, 2, 7]$ a je kolmá k rovině $\varrho : 2x - y + z - 1 = 0$. Určete pak vzdálenost $v(M, \varrho)$.

2. Strany trojúhelníka ABC mají rovnice

$$AB : x + 3y - 7 = 0, \quad BC : 4x - y - 2 = 0, \quad A\bar{y}C : 6x + 8y - 35 = 0.$$

Určete velikost výšky v_b .

3. Určete vzdálenost rovnoběžek p, q :

$$p : 3x + y - 6 = 0, \quad q : 6x + 2y - 2 = 0.$$

4. Najděte bod B symetrický k bodu $A = [2, -7, 10]$ vzhledem k rovině, která prochází bodem $P = [3, 2, 2]$ a je kolmá k vektoru $\mathbf{v} = (1, -3, 2)$.

5. Určete množinu všech bodů, které mají od daných dvou bodů $A = [0, 0, 0]$, $B = [0, b, 0]$ stejnou vzdálenost.

6. Napište rovnici roviny procházející body $P = [-8, -8, -8]$, $Q = [8, 10, 2]$, jejíž vzdálenost od bodu $M = [-1, 1, 2]$ je rovna 3.

7. Vypočtěte vzdálenost přímek $p \equiv AB$, $q \equiv CD$, je-li

$$A = [2, 3, 4], \quad B = [-1, -3, -5], \quad C = [0, -1, 4], \quad D = [6, -1, -2].$$

Klíč k příkladům k procvičení

1. $x = -5 + 2t, y = 2 - t, z = 7 + t; v(M, \varrho) = \sqrt{6}.$
2. $v_b = 1.3.$
3. $v(p, q) = \frac{1}{2}\sqrt{10}.$
4. $B = [-4, 11, -2].$
5. Rovina $2y - b = 0.$
6. $-7x + 4y + 4z + 8 = 0, x - 2y + 2z + 8 = 0.$
7. $v(p, q) = \sqrt{6}.$

6.3 Směrnice přímky

Přímce v rovině E_2 jsme se zatím věnovali jen okrajově. Přímku určenou bodem $A = [a_1, a_2]$ a směrovým vektorem $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ jsme vyjádřili pomocí parametrických rovnic

$$\begin{aligned}x_1 &= a_1 + tu_1 \\x_2 &= a_2 + tu_2.\end{aligned}$$

Vyloučením parametru t z obou rovnic jsme odvodili obecnou rovnici přímky (4.6), kterou jsme v rovině Oxy zapisovali ve tvaru

$$ax + by + c = 0. \quad (6.9)$$

Tuto rovnici můžeme odvodit také tak, že sestavíme normálový vektor přímky $\mathbf{n} = (u_2, -u_1)$. V rovnici $ax + by + c = 0$ pak položíme $a = u_2, b = -u_1$ a za proměnné dosadíme souřadnice bodu A , čímž určíme chybějící koeficient c :

$$c = -(aa_1 + ba_2).$$

Přímku v rovině můžeme vyjádřit ještě jinak. Z matematické analýzy je známo, že přímka je grafem lineární funkce

$$y = kx + q. \quad (6.10)$$

V rovnici (6.10) jsou souřadnice libovolného bodu $X = [x, y]$ přímky popsány pomocí dvou konstant $k, q \in \mathbb{R}$. Jejich význam si teď objasníme. Předpokládejme, že přímka m není rovnoběžná s osou y . V tomto případě je první souřadnice směrového vektoru $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ různá od nuly, takže rovnici (6.9) můžeme upravit na rovnici (6.10):

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b},$$

odkud dostáváme, že $q = -c/b$, $k = -a/b$, respektive

$$k = \frac{u_2}{u_1}, \quad u_1 \neq 0. \quad (6.11)$$

Hodnota k nezávisí na výběru směrového vektoru přímky. Je-li totiž $\mathbf{v}$ nějaký jiný směrový vektor, potom $\mathbf{v} = \alpha \mathbf{u}$, a tedy

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\alpha u_2}{\alpha u_1} = k.$$

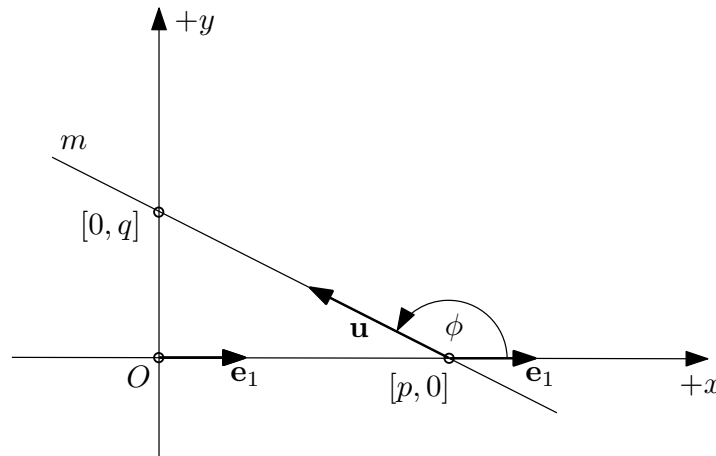
Nechť $\mathbf{u}$ je směrovým vektorem přímky m . Potom číslo k definované rovností (6.11) nazýváme *směrnicí přímky m* . Rovnice (6.10) se nazývá *směrnice tvar rovnice přímky*. Jestliže známe směrnici k přímky a jeden bod, kterým přímka prochází, například $B = [x_1, y_1]$, vypočteme z rovnice (6.10) $q = y_1 - kx_1$. Odtud pak odvodíme rovnici přímky určené bodem a směrnicí ve tvaru

$$y - y_1 = k(x - x_1). \quad (6.12)$$

Pro úplnost ještě dodejme, že jinou úpravou rovnice (6.9) bychom mohli získat, je-li $abc \neq 0$, tzv. *úsekovou rovnici přímky*

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1. \quad (6.13)$$

Geometrický význam konstant $p = -c/a$, $q = -c/b$ je vidět z obrázku 6.9. Přímka protíná souřadnicové osy v bodech $[p, 0]$, $[0, q]$.



Obr. 6.9: Směrový úhel přímky

Na obrázku 6.9 je také vyznačen úhel ϕ , o který se musí otočit v kladném smyslu osa x kolem společného průsečíku s přímkou m , aby splýnula poprvé s uvažovanou přímkou. Tento úhel nazýváme *směrovým úhlem přímky*. Zřejmě platí $0 \leq \phi < \pi$.

Věta 6.11. *Směrnice přímky dané rovnicí $y = kx + q$ udává tangens směrového úhlu, tj*

$$k = \tan \phi.$$

Důkaz. Předpokládejme, že daná přímka není rovnoběžná se žádnou ze souřadnicových os. Její směrový vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ zvolme tak, aby jeho počáteční bod byl průsečíkem přímky s osou x a jeho koncový bod byl nad osou x , takže $u_2 > 0$, obrázek 6.9. Vektor $\mathbf{u}$ pak svírá s vektorem $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ úhel ϕ , pro který platí

$$\cos \phi = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{e}_1)}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{e}_1\|} = \frac{u_1}{\|\mathbf{u}\|},$$

takže

$$\sin \phi = \sqrt{1 - \cos^2 \phi} = \frac{u_2}{\|\mathbf{u}\|}$$

a tedy

$$\tan \phi = \frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \frac{u_2}{u_1} = k.$$

□

Poznámka 6.12. Jestliže je přímka rovnoběžná s osou x , její směrnice $k = 0$. Přímku rovnoběžnou s osou y nelze vyjádřit ve směrnicovém tvaru.

Příklad 6.13. Ukažte, že pro odchylku β přímek p, q jejichž směrnice rovnice jsou

$$p : y = k_1x + q_1, \quad q : y = k_2x + q_2,$$

platí vztah

$$\tan \beta = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} \right| \text{ pro } 1 + k_1k_2 \neq 0, \quad (6.14)$$

resp.

$$\beta = \frac{\pi}{2} \text{ pro } k_1k_2 = -1.$$

Řešení. Vyjdeme ze vzorce (6.1) pro odchylku dvou přímek, v němž označíme příslušnou odchylku β . Normálové vektory přímek p, q jsou po řadě $\mathbf{n}_1 = (k_1, -1)$, $\mathbf{n}_2 = (k_2, -1)$, takže za směrové vektory těchto uvedených přímek můžeme dosadit $\mathbf{u} = (1, k_1)$, $\mathbf{v} = (1, k_2)$. Dostaneme

$$\cos \beta = \frac{|1 + k_1k_2|}{\sqrt{1 + k_1^2} \sqrt{1 + k_2^2}},$$

odtud je

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{\frac{(k_1 - k_2)^2}{(1 + k_1^2)(1 + k_2^2)}} = \frac{|k_2 - k_1|}{\sqrt{1 + k_1^2} \sqrt{1 + k_2^2}}.$$

Je-li $1 + k_1k_2 \neq 0$, potom

$$\tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} \right|.$$

Pro $k_1k_2 = -1$ je $\cos \phi = 0$, a tedy $\phi = \frac{\pi}{2}$. ▲

Příklady k procvičení

1. Najděte směrový úhel ϕ přímky AB , $A = [-2, -5]$, $B = [-2, -3]$.
2. Určete rovnici přímky, která prochází bodem $A = [-1, 3]$ a je kolmá k přímce $3y = x + 6$.
3. Napište rovnici přímky jdoucí bodem $M = [-\sqrt{3}, 2]$ mající od přímky $y = -\sqrt{3}x + 7$ odchylku $\phi = \frac{\pi}{3}$.

Klíč k příkladům k procvičení

1. $\phi = \frac{\pi}{2}$.
2. $3x + y = 0$.
3. $y = \sqrt{3}x + 5$, $y = 2$.

Část III

Kuželosečky a kvadriky

V předchozích kapitolách jsme víceméně (až na úlohy týkající se určování vzdáleností a úhlů) vystačili s dovedností řešit soustavy lineárních rovnic, a proto se této oblasti také říká *lineární geometrie*. Každá proměnná v nějaké soustavě lineárních rovnic je pouze násobena různými čísly – pevnými konstantami. Naskytá se otázka s nakolik složitějšími rovnicemi, respektive s jakými geometrickými útvary, které jsou těmito složitějšími rovnicemi popsány, se dále zabývat. V této kapitole se budeme věnovat tzv. *kvadratické geometrii*. Budeme se zabývat geometrickými útvary, které jsou popsány pomocí kvadratických rovnic, tj. rovnicemi ve tvaru

$$c_1x_1^2 + \cdots + c_nx_n^2 + c_{n+1}x_1 + \cdots + c_{2n}x_n = c_{2n+1}, \quad (6.15)$$

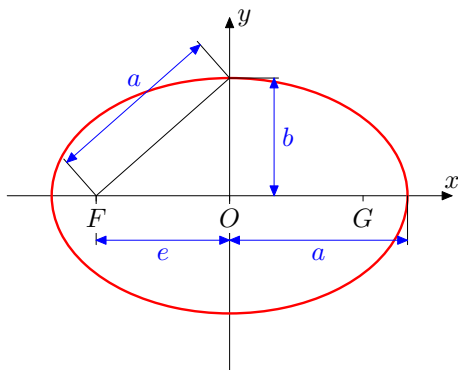
nebo v takovém tvaru, který lze v nějaké kartézské soustavě souřadnic zapsat pomocí vzorce (6.15). Případy, kdy $c_1 = \cdots = c_n = 0$, již byly popsány v předchozích kapitolách a doufáme, že je čtenář již podrobně zná. Proto budeme předpokládat, že v rovnici (6.15) je alespoň jeden z koeficientů $c_1, \dots, c_n$ nenulový. V dalším výkladu se omezíme pouze na $n \in \{2, 3\}$, tedy na *kvadratické* útvary v $\mathbf{E}_2$ (kuželosečky) a $\mathbf{E}_3$ (kvadratické plochy – kvadriky). Nejprve se seznámíme s kuželosečkami a kvadrikami, které mají vzhledem ke kartézské soustavě souřadnic speciální polohu, což umožňuje jejich vyjádření pomocí jednoduchých rovnic. V posledním odstavci této části krátce pojednáme o obecné rovnici kvadratických útvarů a zmíníme postup, jak nalézt takovou kartézskou soustavu souřadnic, vzhledem k níž budou tyto útvary vyjádřeny rovnicí (6.15).

Se zmiňovanými útvary se poměrně dobře počítá, což je patrné z prvních zmínek o kvadrikách, které pocházejí z doby před naším letopočtem. To však není hlavní důvod, proč je tato kapitola začleněna do našeho textu. S kvadratickými útvary se pravidelně setkáváme a to nejen v matematice, ale nalézáme je také v okolním světě: viz například logo McDonald's (parabola), oběžná dráha planety kolem slunce (elipsa), světlomet (paraboloid), chladicí věž (jednodílný rotační hyperboloid), atd.

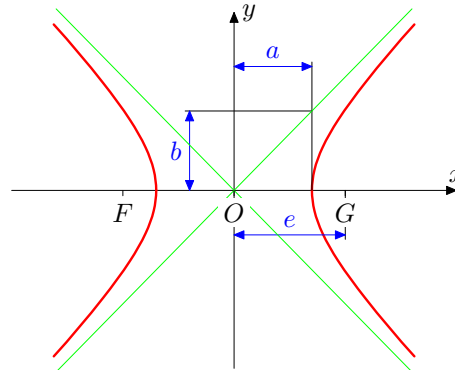
Kapitola 7

Kuželosečky

7.1 Elipsa (a kružnice)



Obr. 7.1: Elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



Obr. 7.2: Hyperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Geometricky je elipsa E definována jako množina všech bodů v rovině, které mají od dvou pevných bodů (tzv. *ohnisek*) stejný součet vzdáleností. Označme si ohniska F a G , jejich vzdálenost jako v , tj. $|FG| = v$ a součet vzdáleností libovolného bodu X elipsy od F , G jako s , tj. $|FX| + |GX| = s$. Je jasné, že má smysl pouze případ $s > v \geq 0$. Zvolme kartézskou soustavu souřadnic $(O, +x, +y)$ tak, aby počátek O ležel ve středu úsečky FG a osa x měla směr polopřímky $\overrightarrow{OG}$, jako na obrázku 7.1, takže $F = [-\frac{v}{2}, 0]$, $G = [\frac{v}{2}, 0]$. V případě $F = G = O$ volíme směr osy x libovolně.

Odvodíme nyní rovnici, kterou musí splňovat všechny body $X = [x, y]$ elipsy:

$$\begin{aligned}
 s &= |XF| + |XG| = \sqrt{\left(x + \frac{v}{2}\right)^2 + y^2} + \sqrt{\left(x - \frac{v}{2}\right)^2 + y^2} \\
 s - \sqrt{\left(x + \frac{v}{2}\right)^2 + y^2} &= \sqrt{\left(x - \frac{v}{2}\right)^2 + y^2} \quad \dots \text{umocníme } |^2 \\
 s^2 + \left(x + \frac{v}{2}\right)^2 + y^2 - 2s\sqrt{\left(x + \frac{v}{2}\right)^2 + y^2} &= \left(x - \frac{v}{2}\right)^2 + y^2 \\
 s^2 + 2xv &= 2s\sqrt{\left(x + \frac{v}{2}\right)^2 + y^2} \quad \dots \text{umocníme } |^2 \\
 s^4 + 4x^2v^2 + 4s^2xv &= 4s^2\left(x^2 + y^2 + \frac{v^2}{4} + xv\right) \\
 s^4 - s^2v^2 &= 4(s^2x^2 + s^2y^2 - x^2v^2) \\
 4(s^2 - v^2)x^2 + 4s^2y^2 &= s^2(s^2 - v^2) \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{s^2}{4}} + \frac{y^2}{\frac{s^2 - v^2}{4}} = 1.
 \end{aligned}$$

Označíme-li $a = s/2$, $b = \sqrt{s^2 - v^2}/2$, získáme tak ze střední školy známou rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (7.1)$$

Čísla a , b se nazývají *délka hlavní poloosy*, *délka vedlejší poloosy*; číslu $e = v/2$ se říká *délková excentricita* a platí

$$e^2 = \frac{v^2}{4} = \frac{s^2 - 4b^2}{4} = \frac{4a^2 - 4b^2}{4} \Rightarrow a^2 = e^2 + b^2.$$

Poměr délkové excentricity a délky hlavní poloosy $\varepsilon = e/a = \sqrt{1 - (b/a)^2}$ se nazývá *číselná excentricita*. Zřejmě $0 \leq \varepsilon < 1$. Pokud je excentricita nulová, tj. $a = b$, jedná se o kružnici. Na obrázku 7.1 jsou pro ilustraci zakresleny délky a , b a e .

Při odvozování rovnice (7.1) jsme dvakrát použili operaci umocnění, která jak víme, může rozšířit množinu řešení. Všechny body X elipsy tedy splňují rovnici (7.1), ale nemáme zajištěno, že všechny body Y , které řeší (7.1), leží na elipse E . Ve skutečnosti to však platí; pokud $Y = [x, y]$ řeší rovnici (7.1), tak $y^2 = b^2(1 - x^2/a^2)$,

a jelikož $b^2 = (s^2 - v^2)/4$, $a = s/2$, je

$$\begin{aligned}
 |YF| + |YG| &= \sqrt{\left(x + \frac{v}{2}\right)^2 + y^2} + \sqrt{\left(x - \frac{v}{2}\right)^2 + y^2} = \\
 &= \sqrt{\left(x + \frac{v}{2}\right)^2 + \frac{s^2 - v^2}{4} \left(1 - \frac{x^2}{\frac{s^2}{4}}\right)} + \sqrt{\left(x - \frac{v}{2}\right)^2 + \frac{s^2 - v^2}{4} \left(1 - \frac{x^2}{\frac{s^2}{4}}\right)} = \\
 &= \sqrt{x^2 + xv + \frac{v^2}{4} + \frac{s^2}{4} - \frac{v^2}{4} - x^2 + \frac{v^2}{s^2}x^2} + \sqrt{\dots} = \\
 &= \sqrt{\frac{v^2}{s^2}x^2 + xv + \frac{s^2}{4}} + \sqrt{\frac{v^2}{s^2}x^2 - xv + \frac{s^2}{4}} = \sqrt{\left(\frac{v}{s}x + \frac{s}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{v}{s}x - \frac{s}{2}\right)^2} = \\
 &= \left|\frac{v}{s}x + \frac{s}{2}\right| + \left|\frac{v}{s}x - \frac{s}{2}\right| = \frac{v}{s}x + \frac{s}{2} - \left(\frac{v}{s}x - \frac{s}{2}\right) = s,
 \end{aligned}$$

kde předposlední rovnost zdůvodníme tím, že $v < s$ a z rovnice (7.1) evidentně plyne nerovnost $|x| \leq a = s/2$. V první absolutní hodnotě je tedy kladné a ve druhé záporné číslo.

Právě jsme ukázali, že $X = [x, y] \in E$ právě tehdy, když (x, y) řeší rovnici (7.1). Jestliže označíme

$$R_E = \left\{ X = [x, y] : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\},$$

pak ze skutečnosti

$$[x, y] \in R_E \Rightarrow [-x, y], [x, -y], [-x, -y] \in R_E$$

a právě ukázaného vztahu mezi body elipsy E a řešeními (7.1) plyne, že elipsa je osově souměrná podle přímk x , y a středově souměrná podle bodu O (tzv. *středu* elipsy). Přímk FG nazýváme *hlavní osou* a osu úsečky FG *vedlejší osou* elipsy. Osy elipsy protínají elipsu v tzv. *vrcholech* elipsy.

V odvětvích matematiky zabývajících se křivkami je často požadována jejich *parametrizace*. Uvedeme si tedy, jak lze elipsu parametrizovat. Položíme-li

$$x = a \cos(t), \quad y = b \sin(t), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle, \quad (7.2)$$

shledáme, že uspořádaná dvojice $(x(t), y(t))$ řeší (7.1), a tedy bod $X(t) = [x(t), y(t)]$ patří elipse E . Naopak pro každý bod Y elipsy E v prvním a druhém kvadrantu lze jednoznačně najít $t \in \langle 0, \pi \rangle$ tak, že $Y = X(t)$. Skutečně, z první rovnice (7.2) jednoznačně určíme $t = \arccos(x/a)$. Stejnou vzájemnou jednoznačnost můžeme ukázat mezi jakýmkoli bodem elipsy ve třetím či čtvrtém kvadrantu a parametrem $t = 2\pi - \arccos(x/a) \in \langle \pi, 2\pi \rangle$.

7.2 Hyperbola

Definice hyperboly je velmi podobná definici elipsy. Na rozdíl od elipsy pro body hyperboly H platí, že absolutní hodnota rozdílu jejich vzdáleností od dvou pevných

bodů F a G (tzv. *ohnisek*) je rovna konstantě $r \in \mathbb{R}^+$. Při odvozování rovnice hyperboly postupujeme jako u elipsy. Zvolíme stejnou kartézskou soustavu souřadnic (viz obrázek 7.2). Pro libovolný bod X hyperboly H dle její definice platí

$$r = \left| |XF| - |XG| \right|.$$

Téměř stejným postupem jako v odstavci 7.1 obdržíme rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (7.3)$$

kterou splňují všechny body $X = [x, y]$ hyperboly H . Čísla $a = r/2$, $b = \sqrt{v^2 - r^2}/2$, $e = v/2$ jsou postupně tzv. *délka hlavní poloosy*, *délka vedlejší poloosy* a *délková excentricita* hyperboly. Tentokrát mezi nimi platí vztah $e^2 = a^2 + b^2$. Číslo $e = e/a$, $e > 1$ se nazývá *číslná excentricita*. Je-li $a = b$, hyperbola se nazývá *rovnoosá*.

Navíc, splňuje-li uspořádaná dvojice (x, y) rovnici (7.3), pak bod $X = [y, x]$ patří hyperbole H . Je zřejmé, že pro

$$R_H = \{X = [x, y] : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\}$$

platí

$$[x, y] \in R_H \Rightarrow [-x, y], [x, -y], [-x, -y] \in R_H.$$

Podobně jako elipsa je hyperbola osově souměrná podle přímk x, y a středově souměrná podle bodu O , tzv. *středu* hyperboly. Body $[-a, 0]$, $[a, 0]$ nazýváme *vrcholy* hyperboly. Přímka FG se nazývá *hlavní osa* a osa úsečky FG *vedlejší osa* hyperboly.

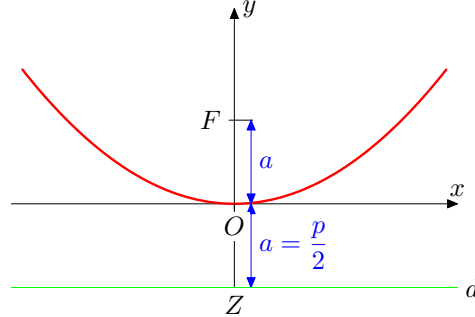
Na obrázku 7.2 jsou nakresleny zeleně dvě přímky, kterým říkáme *asymptoty* hyperboly a které mají vlastnosti asymptot, s nimiž jste se seznámili v diferenciálním počtu funkcí jedné proměnné. Zkusme najít rovnice těchto asymptot. Nejprve nás bude zajímat jejich směrnice. Z rovnice (7.3) vyjádříme $y^2 = b^2((x/a)^2 - 1)$, tedy v prvním kvadrantu ($x \geq 0 \wedge y \geq 0$) je $y(x) = b\sqrt{(x/a)^2 - 1}$ a pro asymptotu $y = kx + q$ platí

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}}{\sqrt{x^2}} = b \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{x^2}} = \frac{b}{a} \\ q &= \lim_{x \rightarrow \infty} y(x) - kx = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b}{a}(\sqrt{x^2 - a^2} - x) \frac{\sqrt{x^2 - a^2} + x}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b}{a} \frac{x^2 - a^2 - x^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-ab}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = 0, \end{aligned}$$

tedy $y = bx/a$. Odtud vzhledem k symetriím, které jsme u hyperboly našli, jsou její asymptoty $y = \pm bx/a$, což lze zkráceně zapsat jako

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0. \quad (7.4)$$

7.3 Parabola

Obr. 7.3: Parabola $y = ax^2$

Parabola P je definována jako množina všech bodů v rovině, které mají stejnou vzdálenost od daného bodu F (tzv. *ohniska*) a přímky d (tzv. *řídící přímky*), která tímto bodem neprochází. Vzdálenost p ohniska F od přímky d nazýváme *parametrem* dané paraboly. Kartézskou soustavu souřadnic zvolíme tak, aby její střed O ležel ve středu úsečky FZ , která vede z bodu F kolmo na řídící přímku d paraboly a její druhý koncový bod $Z \in d$. Osa y je určena orientovanou úsečkou OF (viz obrázek 7.3). Bod O nazýváme *vrcholem* paraboly. Každý bod $X = [x, y]$ paraboly splňuje

$$\begin{aligned} |XF| &= |Xd| \Leftrightarrow \left| [x, y] - \left[0, \frac{p}{2}\right] \right| = \left| y + \frac{p}{2} \right| \\ \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} &= \left| y + \frac{p}{2} \right| \quad \dots \text{umocníme } |^2 \\ x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} &= y^2 + py + \frac{p^2}{4} \Rightarrow x^2 = 2py. \end{aligned}$$

Označíme-li $a = 1/(2p)$ můžeme rovnici paraboly napsat jako

$$y = ax^2. \quad (7.5)$$

Podobně jako u elipsy vzhledem k operaci umocnění při odvození rovnice (7.5) je ještě potřeba ukázat, že každý bod $X = [x, y]$, který odpovídá řešení rovnice (7.5) (tedy $X = [x, ax^2] = [x, \frac{x^2}{2p}]$), opravdu leží na parabole P :

$$|XF| - |Xd| = \sqrt{x^2 + \left(\frac{x^2}{2p} - \frac{p}{2}\right)^2} - \left|\frac{x^2}{2p} + \frac{p}{2}\right| = \frac{1}{2p} \sqrt{(x^2 + p^2)^2} - \frac{1}{2p} |x^2 + p^2| = 0.$$

7.4 Posunuté kuželosečky

Kuželosečky, jejichž rovnice jsme právě odvodili, měly vzhledem k dané kartézské soustavě souřadnic speciální polohu. V případě, že *elipsa* a *hyperbola* mají střed

v počátku soustavy souřadnic a osy v souřadnicových osách, mluvíme o *základní poloze*. O *parabole* řekneme, že leží v *základní poloze*, jestliže vrchol paraboly je v počátku soustavy souřadnic a její ohnisko leží na některé ze souřadnicových os.

Uvažujme nyní, že se střed elipsy nachází v bodě $S = [h, k]$ a její osy jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami. V takovém případě zavedme novou kartézskou soustavu souřadnic s počátkem $\bar{O} = [h, k]$ a osami $\bar{x}$, $\bar{y}$, které vzniknou posunutím původních os do nového počátku souřadnic $\bar{O}$. Je zřejmé, že osy nové soustavy souřadnic leží v osách posunuté elipsy. Rovnice elipsy v kartézské soustavě souřadnic $(\bar{O}, \bar{x}, \bar{y})$ bude

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1.$$

Ze střední školy víme, že vztah mezi posunutými souřadnicemi $[\bar{x}, \bar{y}]$ a původními souřadnicemi $[x, y]$ bodu X je dán vzorcem

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x - h, \\ \bar{y} &= y - k.\end{aligned}$$

Stejný výsledek dává po rozepsání do souřadnic vzorec (2.24), který vyjadřuje vztah mezi „novými“ a „původními“ souřadnicemi bodu X , jestliže přejdeme od afinní soustavy souřadnic $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ k soustavě $(\bar{O}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Rovnice dané elipsy v soustavě souřadnic (O, x, y) tak bude

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1. \quad (7.6)$$

Jestliže v rovnici (7.6) odstraníme zlomky a provedeme umocnění, dostaneme po úpravě kvadratickou rovnici

$$c_1 x^2 + c_2 y^2 + c_3 x + c_4 y = c_5, \quad c_1 c_2 > 0. \quad (7.7)$$

Obráceně každou kvadratickou rovnici (7.7) můžeme metodou doplnění na čtverec, jíž odpovídá posunutí os, upravit na rovnici (7.6), popřípadě na rovnici se stejnou levou stranou a s čísly 0 nebo -1 na pravé straně.

Příklad 7.1. Určete střed a poloosy elipsy dané rovnicí $3x^2 + 8y^2 + 12x - 16y = 4$.

Řešení. Metodou doplnění na čtverec postupně obrdžíme

$$\begin{aligned}3(x^2 + 4x) + 8(y^2 - 2y) &= 4 \\ 3(x^2 + 4x + 4) + 8(y^2 - 2y + 1) &= 4 + 12 + 8 \\ 3(x + 2)^2 + 8(y - 1)^2 &= 24 \\ \frac{(x + 2)^2}{8} + \frac{(y - 1)^2}{3} &= 1.\end{aligned}$$

Odtud střed $S = [-2, 1]$, hlavní poloosa $a = \sqrt{8}$, vedlejší poloosa $b = \sqrt{3}$. ▲

Poznámka 7.2. Pokud bychom na pravé straně dané rovnice měli místo čísla 4 číslo -20 , získali bychom rovnici $3(x+2)^2 + 8(y-1)^2 = 0$, která popisuje pouze jediný bod $[x, y] = [-2, 1]$. Tento bod lze považovat za tzv. *degenerovanou elipsu*. Pokud by na pravé straně uvedené rovnice bylo číslo -21 , obdrželi bychom rovnici $3(x+2)^2 + 8(y-1)^2 = -1$, které nevyhovuje žádný reálný bod $[x, y]$. Daná rovnice tak popisuje prázdnou množinu (tzv. *imaginární elipsu*). Každá rovnice (7.7) tedy představuje elipsu, popřípadě degenerovanou nebo imaginární elipsu.

Podobně rovnicí

$$c_1x^2 + c_2y^2 + c_3x + c_4y = c_5, \quad c_1c_2 < 0, \quad (7.8)$$

v níž koeficienty c_1, c_2 mají opačná znaménka, je popsána hyperbola. Doplníme-li kvadratické členy v rovnici (7.8) na úplné čtverce, získáme jednu z rovnic

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1, \quad -\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1. \quad (7.9)$$

První z rovnic (7.9) je rovnicí hyperboly se středem v bodě $S = [h, k]$ a hlavní osou rovnoběžnou s osou x . Druhá rovnice představuje hyperbolu opět se středem v bodě $S = [h, k]$ a hlavní osou rovnoběžnou s osou y . Pro úplnost ještě dodejme, že úprava rovnice (7.8) může také vést k rovnici

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 0,$$

která představuje dvojici přímk $y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h)$, tzv. *degenerovanou hyperbolu*.

Nakonec, rovnice

$$c_1x^2 + c_3x + c_4y = c_5, \quad c_2y^2 + c_3x + c_4y = c_5 \quad (7.10)$$

jsou rovnicemi parabol. Je-li v první rovnici (7.10) $c_4 \neq 0$ a v druhé rovnici $c_3 \neq 0$, můžeme je zapsat ve tvaru

$$(x-h)^2 = \pm 2p(y-k), \quad (y-k)^2 = \pm 2p(x-h). \quad (7.11)$$

V prvním případě vrchol paraboly $V = [h, k]$ a ohnisko $F = [h, k \pm \frac{p}{2}]$, v druhém případě $V = [h, k]$ a $F = [h \pm \frac{p}{2}, k]$. Redukují-li se rovnice (7.10) na $c_1x^2 + c_3x = c_5$, resp. $c_2y^2 + c_4y = c_5$, potom reprezentují dvojice rovnoběžných přímk, které lze považovat za tzv. *degenerované paraboly*.

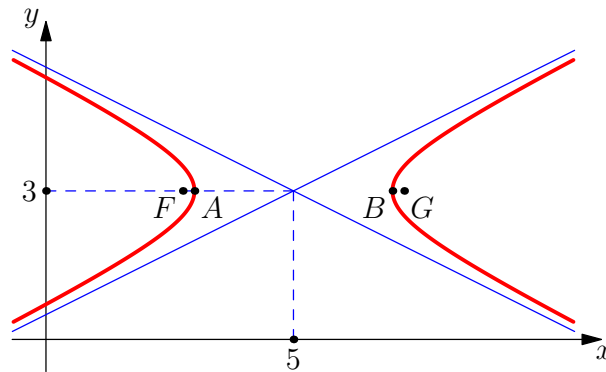
Příklad 7.3. Najděte střed, vrcholy, ohniska a rovnice asymptot hyperboly

$$x^2 - 4y^2 - 10x + 24y = 15.$$

Řešení. Uvedenou rovnici upravíme známým způsobem na jednu z rovnic (7.9):

$$\begin{aligned}x^2 - 10x - 4y^2 + 24y &= 15 \\(x^2 - 10x + 25) - 4(y^2 - 6y + 9) &= 15 + 25 - 36 \\(x - 5)^2 - 4(y - 3)^2 &= 4 \\\frac{(x - 5)^2}{4} - \frac{(y - 3)^2}{1} &= 1.\end{aligned}$$

Odtud máme: $S = [5, 3]$, $a = 2$, $b = 1$, $e = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5}$. Poněvadž $a = 2$, budou vrcholy posunuty vzhledem ke středu o 2 jednotky vlevo a vpravo, tj. $A = [3, 3]$ a $B = [7, 3]$. Ohniska budou zase posunuta oproti středu o $\sqrt{5}$ jednotek vlevo a vpravo, tedy $F = [5 - \sqrt{5}, 3]$, $G = [5 + \sqrt{5}, 3]$. Nakonec ještě zbývají asymptoty. Jejich směrnice jsou $\pm b/a = \pm 1/2$, obě prochází středem $S = [5, 3]$. Jejich rovnice tak jsou $y - 3 = \pm \frac{1}{2}(x - 5)$. Náčrtek viz obrázek 7.4. ▲



Obr. 7.4: Posunutá hyperbola $x^2 - 4y^2 - 10x + 24y = 15$ z příkladu 7.3.

Příklad 7.4. Určete souřadnice vrcholu, ohniska a rovnici řídicí přímky paraboly

$$6x - x^2 - 8y - 1 = 0.$$

Řešení. Danou rovnici převedeme na některou z rovnic (7.11):

$$\begin{aligned}x^2 - 6x &= -8y - 1 \\x^2 - 6x + 9 &= -8y + 8 \\(x - 3)^2 &= -8(y - 1).\end{aligned}$$

Parabola má tedy vrchol v bodě $V = [3, 1]$, její osa je rovnoběžná s osou y , vzdálenost ohniska od řídicí přímky je $p = 4$. Ohnisko bude posunuto vzhledem k vrcholu o $p/2$ jednotek směrem dolů, tj. $F = [3, -1]$. Řídicí přímka bude rovnoběžná s osou x , její rovnice je $y = 3$. ▲

7.5 Regulární – singulární – kuželosečky

V předešlé části jsme se zabývali rovnicí

$$c_1x^2 + c_2y^2 + c_3x + c_4y = c_5, \quad (7.12)$$

která je vlastně obdobou rovnice (6.15) v prostoru $\mathbf{E}_2$. Rovnice (7.12), v níž je aspoň jeden z koeficientů c_1 nebo c_2 nenulový, popisuje elipsu, hyperbolu nebo parabolu, případně degenerovanou kuželosečku nebo prázdnou množinu. Elipsa, hyperbola a parabola se souhrně nazývají *regulární kuželosečky* a nelze je v kartézské soustavě souřadnic zapsat pomocí lineárních rovnic. Ostatní případy, kdy je v rovnici (7.12) alespoň jeden z koeficientů c_1, c_2 nenulový, lze již pomocí lineárních rovnic popsat a říká se jim *singulární kuželosečky*. Geometricky to mohou být:

- dvojice různoběžných přímek ... například asymptoty hyperboly (7.4)
- dvojice rovnoběžných přímek ... například $x^2 = 4$, $x^2 + 3x = 18$
- přímka ... například $x^2 = 0$
- bod ... například $x^2 + y^2 = 0$
- prázdná množina ... například $x^2 + y^2 = -1$.

7.6 Kuželosečky v obecné poloze

V rovnici (7.12) nenajdeme kvadratický člen xy . Víme však, že právě rovnice

$$xy = c, \quad c \neq 0 \quad (7.13)$$

je vyjádřením rovnoosé hyperboly, jak je známo z grafického znázornění *nepřímé úměrnosti* $y = c/x$. Jejími asymptotami jsou souřadnicové osy x a y . Je-li $c > 0$, hyperbola leží v prvním a třetím kvadrantu, je-li $c < 0$, leží pak v druhém a čtvrtém kvadrantu.

Rovnici (7.13) odvodíme následovně. Předpokládejme, že rovnoosá hyperbola leží v prvním a třetím kvadrantu soustavy souřadnic (O, x, y) . Označme a délku její hlavní poloosy. Otočením soustavy souřadnic (O, x, y) okolo počátku o úhel $\varphi = \frac{\pi}{4}$ v kladném smyslu dostaneme novou soustavu souřadnic $(O, \bar{x}, \bar{y})$, v níž má tato hyperbola rovnici

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} - \frac{\bar{y}^2}{a^2} = 1. \quad (7.14)$$

Vztah mezi souřadnicemi bodu X ve dvou různých afinních soustavách souřadnic vyjadřuje, jak víme, vzorec (2.24). V našem případě se jedná o afinní soustavy souřadnic $\mathcal{S} = (O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ a $\bar{\mathcal{S}} = (O, \bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2)$, kde

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1), \quad \bar{\mathbf{e}}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad \bar{\mathbf{e}}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Podle vzorce (2.24) tedy platí

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

tj.

$$\bar{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y, \quad \bar{y} = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y.$$

Jestliže dosadíme za $\bar{x}$ a $\bar{y}$ do rovnice (7.14), dostaneme po úpravě rovnici

$$xy = \frac{1}{2}a^2,$$

tedy již rovnici (7.13). Stačí jen položit $c = \frac{1}{2}a^2$.

Poznámka 7.5. Z předchozí ukázky je vidět, že smíšený člen xy souvisí s otočením soustavy souřadnic. Pro vyjádření kuželosečky v obecné poloze (otočené a posunuté) v prostoru $\mathbf{E}_2$ musíme tedy počítat s obecnější rovnicí než je rovnice (7.12).

Obecná kvadratická rovnice v $\mathbb{R}^2$, která zahrnuje všechny členy, tj. kvadratické včetně členu xy , lineární a také absolutní člen má tvar

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \quad (7.15)$$

což lze maticově zapsat jako

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \quad (7.16)$$

Ukážeme si, že otočením původní soustavy souřadnic (O, x, y) můžeme najít novou soustavu souřadnic $(O, \bar{x}, \bar{y})$, ve které má rovnice (7.15) tvar (7.12), tedy tvar rovnice regulární nebo singulární kuželosečky jako v odstavci 7.5.

Část rovnice (7.15) vyznačená červeně je rovnicí kvadratické formy $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$, kde

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Ze spektrální teorie je známo, že k reálné symetrické matici $\mathbf{A}$ existuje ortogonální matice $\mathbf{U}$ taková, že matice $\mathbf{D} = \mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{U}$ je diagonální. Ortogonální substituce

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{U} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}, \quad \det(\mathbf{U}) = 1, \quad (7.17)$$

převěde tedy rovnici (7.15) na rovnici

$$\lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2 + d\bar{x} + e\bar{y} + f = 0, \quad (7.18)$$

která je stejného tvaru jako rovnice (7.12). Celý postup bude podrobněji vyložen v odstavci 8.4. Připomeňme si, že transformace (7.17) souvisí s *otočením*, jež převádí bázové vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ po řadě v ortonormální vlastní vektory $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2$ matice $\mathbf{A}$, které tvoří sloupce matice $\mathbf{U}$. Souřadnicové osy $\bar{x}, \bar{y}$ pak orientujeme souhlasně s $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2$. Naše dosavadní úvahy si nyní uvedeme jako větu.

Věta 7.6. Každou rovnici (7.15), v níž je alespoň jeden z koeficientů a_{11}, a_{12}, a_{22} nenulový, můžeme pomocí ortogonální substituce (8.26) převést na rovnici (7.18), kde koeficienty λ_1, λ_2 jsou vlastní čísla symetrické matice kvadratické formy, jež tvoří část rovnice (7.15). Rovnice představuje

elipsu je-li $\lambda_1 \lambda_2 > 0$

hyperbolu je-li $\lambda_1 \lambda_2 < 0$

parabolu je-li $\lambda_1 \lambda_2 = 0$

včetně degenerovaných případů nebo prázdnou množinu.

Příklad 7.7. Určete typ kuželosečky vyjádřené rovnicí

$$x^2 - 2xy + y^2 + 4\sqrt{2}x - 4 = 0.$$

V případě, že nejde o prázdnou množinu, zakreslete ji v soustavě souřadnic (O, x, y) .

Řešení. Kvadratická forma $x^2 - 2xy + y^2$ má matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Najdeme její vlastní čísla, ortonormální vlastní vektory a ortogonální matici $\mathbf{U}$:

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2.$$

$$\lambda_1 = 0: \quad \mathbf{A} - 0\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}: \quad \bar{\mathbf{e}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 = 2: \quad \mathbf{A} - 2\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}: \quad \bar{\mathbf{e}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Substituce

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{U} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

tedy

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{x} - \bar{y}), \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{x} + \bar{y}),$$

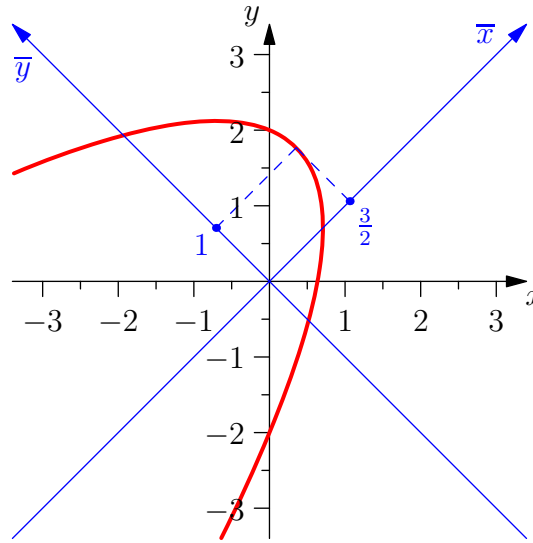
převádí uvedenou rovnici kuželosečky na rovnici

$$2\bar{y}^2 + 4\bar{x} - 4\bar{y} = 4.$$

Poslední rovnici ještě upravíme doplněním na čtverec. Vyjde

$$(\bar{y} - 1)^2 = -2 \left(\bar{x} - \frac{3}{2} \right), \quad (7.19)$$

odkud vidíme, že jde o parabolu v soustavě $(O, \bar{x}, \bar{y})$, která se otevírá ve směru záporné poloosy $\bar{x}$ (obrázek 7.5) a má vrchol v bodě $[\frac{3}{2}, 1]$. ▲



Obr. 7.5: Otočená parabola z příkladu 7.7

Poznámka 7.8. Pokud bychom v příkladu 7.7 sestavili ortogonální matici jinak, například

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

získali bychom po úpravě rovnici

$$(\bar{x} + 1)^2 = -2 \left(\bar{y} - \frac{3}{2} \right). \quad (7.20)$$

To znamená, že soustava $(O, \bar{x}, \bar{y})$ na obrázku 7.5 by pak byla otočena o úhel $\phi = \frac{\pi}{2}$ v záporném smyslu. Stejný výsledek by také dala záměna os $\bar{x}$, $\bar{y}$ a následná změna orientace u osy $\bar{x}$.

Příklad 7.9. Napište rovnici hyperboly H' , která vznikne z hyperboly H se středem v počátku a hlavní osou v ose x soustavy souřadnic (O, x, y) postupně otočením o úhel $\pi/3$ v kladném smyslu a následným posunutím ve směru vektoru $\mathbf{p} = (-5, 2)$. Délky hlavní a vedlejší poloosy jsou $a = 2$, $b = 3$.

Řešení. V prostoru $\mathbf{E}_2$ zavedeme afinní soustavy souřadnic

$$\mathcal{E} = (O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2), \quad \mathcal{F} = (O, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2), \quad \mathcal{G} = ([-5, 2], \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$$

kde $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ a vektory $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ volíme tak, aby pro $i \in \{1, 2\}$ vznikl bázeový vektor $\mathbf{f}_i$ rotací vektoru $\mathbf{e}_i$ o úhel $\pi/3$, takže

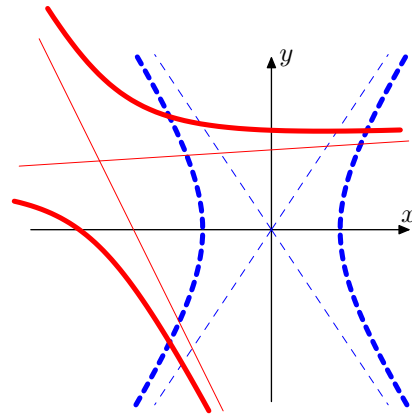
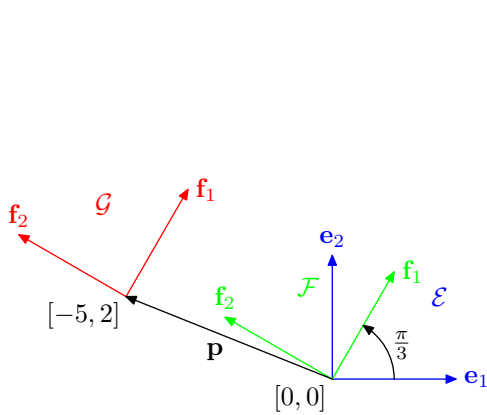
$$\mathbf{f}_1 = \left(\cos \frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} (1, \sqrt{3}), \quad \mathbf{f}_2 = \left(\cos \frac{5\pi}{6}, \sin \frac{5\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} (-\sqrt{3}, 1).$$

Souřadnicové vektory bodu $X \in \mathbf{E}_2$ vzhledem k těmto soustavám označme

$$[X]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad [X]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}, \quad [X]_{\mathcal{G}} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$$

Rovnice hyperboly H v soustavě $\mathcal{E}$ a H' v soustavě $\mathcal{G}$ budou formálně stejné:

$$\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1, \quad \frac{\tilde{x}^2}{2^2} - \frac{\tilde{y}^2}{3^2} = 1.$$



Obr. 7.6: Afinní soustavy souřadnic Obr. 7.7: Otočená a posunutá hyperbola

Nás ovšem zajímá rovnice hyperboly H' v soustavě $\mathcal{E}$, tj. v (O, x, y) . Podle vzorce 2.24 platí:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix},$$

takže

$$\tilde{x} = \frac{1}{2} (x + 5 + \sqrt{3}(y - 2)), \quad \tilde{y} = \frac{1}{2} (-\sqrt{3}(x + 5) + y - 2).$$

Rovnice hyperboly v soustavě (O, x, y) je tedy

$$\begin{aligned} & \frac{\left(\frac{(x+5)+\sqrt{3}(y-2)}{2}\right)^2}{2^2} - \frac{\left(\frac{-\sqrt{3}(x+5)+(y-2)}{2}\right)^2}{3^2} = 1 \\ & 3^2(x + \sqrt{3}y + 5 - 2\sqrt{3})^2 - 2^2(\sqrt{3}x - y + 5\sqrt{3} + 2)^2 = 12^2 \\ & 3^2(x^2 + 3y^2 + (5 - 2\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3}xy + 2(5 - 2\sqrt{3})x + 2\sqrt{3}(5 - 2\sqrt{3})y) \\ & - 2^2(3x^2 + y^2 + (5\sqrt{3} + 2)^2 - 2\sqrt{3}xy + 2\sqrt{3}(5\sqrt{3} + 2)x - 2(5\sqrt{3} + 2)y) = 12^2 \\ & -3x^2 + 23y^2 + 26\sqrt{3}xy - 2(15 + 26\sqrt{3})x + 2(65\sqrt{3} - 46)y - 127 - 260\sqrt{3} = 0. \end{aligned}$$

Na obrázku 7.6 jsou znázorněny afinní soustavy souřadnic $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ a $\mathcal{G}$, vedle je pak (čárkovaně) zobrazena původní hyperbola H a (plnou čarou) hyperbola H' . ▲

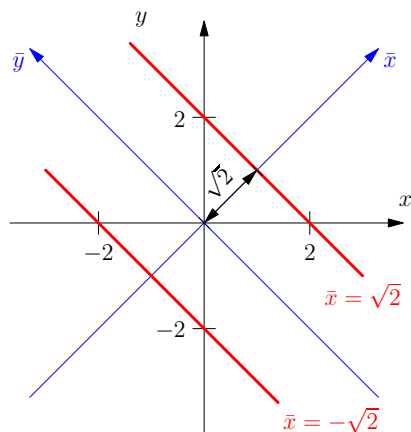
Příklady k procvičení

- Zjistěte typ kuželosečky a znázorněte ji v soustavě (O, x, y) :
 - $x^2 + 2xy + y^2 = 4$;
 - $2xy - 2\sqrt{2}y = 1$;
 - $10x^2 + 6xy + 2y^2 = 4$.
- Ukažte, že rovnice (7.15), uvažujeme-li i singulární kuželosečky, představuje:
 - elipsu, je-li $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$;
 - hyperbolu, je-li $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$;
 - parabolou, je-li $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$.
- Najděte úhel φ a vektor $\mathbf{p}$, o které musíme otočit a posunout elipsu $7x^2 + y^2 = 49$, aby její rovnice v soustavě (O, x, y) byla $2x^2 - 3xy + 2y^2 - 8\sqrt{2}y = -\frac{169}{14}$.
- Napište rovnici paraboly, kterou dostaneme otočením paraboly $y^2 = 4x$ o úhel $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ a posunutím ve směru vektoru $\mathbf{p} = (-\sqrt{3}, 1)$.

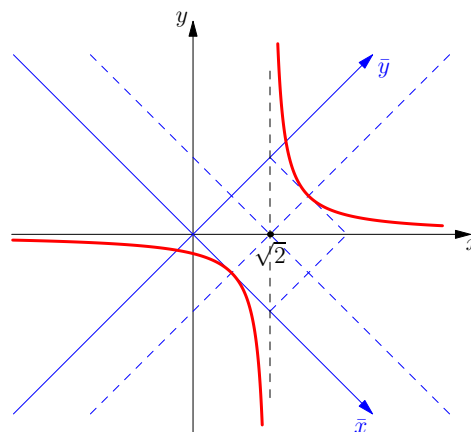
Klíč k příkladům k procvičení

- Uvedené rovnice převedeme pomocí substituce (8.26) na tvar (7.18):
 - $2\bar{x}^2 + 0\bar{y}^2 = 4$ - degenerovaná parabola, tj. dvojice rovnoběžných přímek $\bar{x} = \pm\sqrt{2}$; viz obr. 7.8;
 - $-(\bar{x} - 1)^2 + (\bar{y} - 1)^2 = 1$ - rovnoosá hyperbola; viz obr. 7.9;
 - $11\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 4$ - elipsa; viz obr. 7.10.
- Návod: Sestavte kvadratickou rovnici pro výpočet vlastních čísel matice kvadratické formy $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ a rozhodněte, kdy platí $\lambda_1\lambda_2 > 0$, $\lambda_1\lambda_2 < 0$ a $\lambda_1\lambda_2 = 0$.
- $\varphi = -\frac{\pi}{4}$, $\mathbf{p} = \frac{16}{7\sqrt{2}}(3, 4)$.

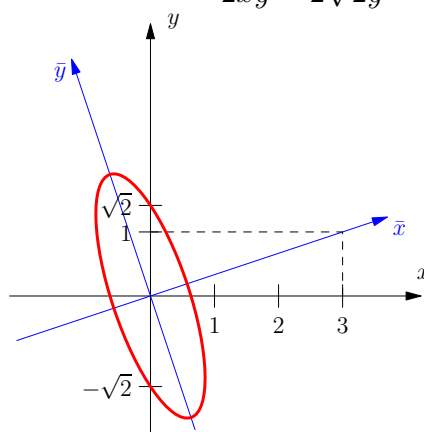
4. $x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 - 8\sqrt{3}x + 8y = 32$.



Obr. 7.8: Degenerovaná parabola
 $x^2 + 2xy + y^2 = 4$



Obr. 7.9: Rovnoosá hyperbola
 $2xy - 2\sqrt{2}y = 1$



Obr. 7.10: Elipsa $10x^2 + 6xy + 2y^2 = 4$

Kapitola 8

Kvadriky

V kapitole 7 jsme se seznámili s kuželosečkami. Odvodili jsme nejprve jejich rovnice v základní poloze a postupně jsme se dobrali až k jejich rovnicím v obecné poloze. Také s kvadriky se budeme seznamovat postupně. Nejdříve si ukážeme jednoduchý způsob, jak lze odvodit rovnice rotačních kvadrik a následně i rovnice obecných kvadrik v základní poloze. Odtud pak přejdeme k posunutým kvadrikám a nakonec ke kvadrikám v obecné poloze.

8.1 Rotační kvadriky v základní poloze

V tomto článku nejprve odvodíme rovnici rotační plochy, kterou získáme otáčením křivky v souřadnicové rovině Oxz kolem osy z . Potom speciálně odvodíme rovnice rotačních kvadrik v *základní poloze*, tj. ploch, které vzniknou rotací kuželoseček v tzv. *základní poloze* vzhledem k rovině Oxz okolo osy z .

Rotační plochy

Předpokládejme, že v rovině Oxz je dána křivka o rovnici

$$f(x, z) = 0. \quad (8.1)$$

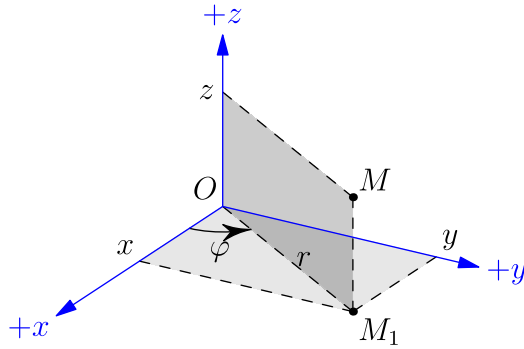
Například, v případě kružnice o poloměru 1 v rovině Oxz se středem v počátku, má implicitní vztah (8.1) tvar

$$x^2 + z^2 - 1 = 0.$$

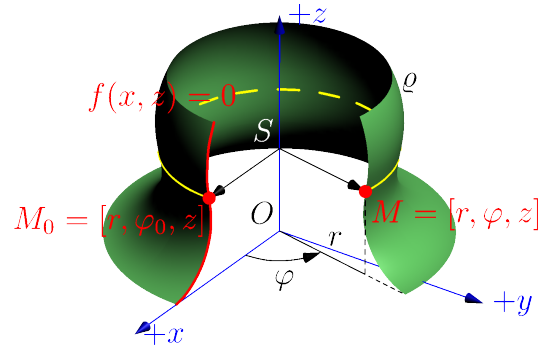
Zavedme nyní válcové souřadnice r, φ, z ; $r \geq 0, \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle, z \in \mathbb{R}$. Vztah mezi kartézskými a válcovými souřadnicemi (viz obrázek 8.1) je popsán rovnicemi

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (8.2)$$

Necháme-li křivku o rovnici (8.1) otáčet kolem osy z , vznikne rotační plocha ρ (obr. 8.2). Každý bod křivky přitom opisuje tzv. *rovnoběžkovou kružnici*. Libovolnému bodu $M = [r, \varphi, z]$ rotační plochy odpovídá na křivce určené vztahem (8.1)



Obr. 8.1: Válcové souřadnice
 $r = |OM_1|$, $\varphi = \angle(+x, OM_1)$, $|z| = |MM_1|$



Obr. 8.2: Rotační plocha

bod $M_0 = [r, \varphi_0, z]$, kde $\varphi_0 = 0 \vee \varphi_0 = \pi$. Pro příslušné kartézské souřadnice bodu M_0 v rovině Oxz pak s přihlédnutím ke vztahům (8.2) a (8.1) platí

$$x = \pm r, \quad z = z, \quad f(\pm r, z) = 0.$$

Dostali jsme tak tento výsledek. Bod M leží na ploše ρ právě tehdy, když souřadnice odpovídajícího otočeného bodu M_0 vyhovují rovnici (8.1), tj. platí-li

$$f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0. \quad (8.3)$$

Rovnice (8.3) je tedy hledanou rovnicí rotační plochy ρ . Prakticky to znamená, že do rovnice (8.1) dosadíme všude za proměnnou x výraz $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$.

Rotační kvadriky

Plochu, kterou dostaneme otáčením kuželosečky kolem její osy, nazýváme *rotační kvadrikou*. Rotací regulární kuželosečky vznikne *regulární rotační kvadrika*, rotací singulární kuželosečky pak *singulární rotační kvadrika*.

Plocha kulová

V rovině Oxz mějme kružnici, která je dána rovnicí $x^2 + z^2 = 1$. Její rotací kolem osy z získáme *plochu kulovou* o rovnici

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1. \quad (8.4)$$

Rotační paraboloid

V rovině Oxz uvažujme parabolu $z = x^2$. Jejím otáčením kolem osy z obdržíme *rotační paraboloid* vyjádřený rovnicí

$$z = x^2 + y^2. \quad (8.5)$$

Rotační hyperboloid a kuželová plocha

V rovině Oxz jsou dány postupně hyperboly $x^2 - z^2 = 1$, $x^2 - z^2 = -1$ a jejich společné asymptoty $x^2 - z^2 = 0$. Jestliže je necháme rotovat kolem osy z dostaneme

1. *rotační hyperboloid jednodílný*

$$x^2 + y^2 = z^2 + 1; \quad (8.6)$$

2. *rotační hyperboloid dvojdílný*

$$x^2 + y^2 = z^2 - 1; \quad (8.7)$$

3. *rotační kuželovou plochu*

$$x^2 + y^2 = z^2. \quad (8.8)$$

Rotační válcová plocha

V rovině Oxz nechť je dána dvojice přímek $x^2 = 1$. Jejich otáčením kolem osy z vznikne *rotační válcová plocha*

$$x^2 + y^2 = 1. \quad (8.9)$$

8.2 Obecné kvadriky v základní poloze

Některé typy obecných kvadrik můžeme získat z rotačních kvadrik a to užitím jisté afinní transformace (tzv. *dilatace*, tj. „roztážení“ či „stlačení“ prostoru $\mathbf{E}_3$), která každému bodu $X = [x, y, z]$ přiřazuje bod $\bar{X} = [\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}]$ pomocí rovnic

$$\bar{x} = ax, \quad \bar{y} = by, \quad \bar{z} = cz, \quad abc \neq 0. \quad (8.10)$$

Dosadíme-li tedy dilatační vztahy (8.10) do rovnice rotační kvadriky, obdržíme rovnici příslušné obecné kvadriky. V následujícím přehledu si tyto kvadriky uvedeme a doplníme je o ty kvadriky, které tímto způsobem dostat nelze. Čárku nad proměnnými nebudeme pro lepší přehlednost uvádět.

Trojosý elipsoid

Trojosý elipsoid je obrazem plochy kulové (8.4) při dilataci (8.10). Jeho rovnice je

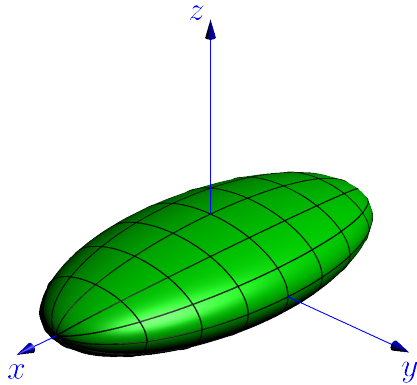
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (8.11)$$

Je-li například $a = b$, mluvíme o *rotačním elipsoidu*. Ten bychom také dostali rotací elipsy $x^2/a^2 + z^2/c^2 = 1$ kolem osy z . Trojosý elipsoid je znázorněn na obrázku 8.3.

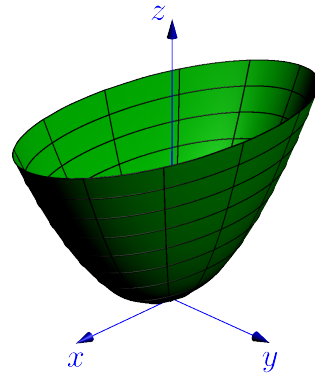
Eliptický paraboloid

Stejným způsobem získáme z rotačního paraboloidu (8.5) tzv. *eliptický paraboloid* (obrázek 8.4)

$$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}. \quad (8.12)$$



Obr. 8.3: Trojosý elipsoid
((8.11): $a = 4$, $b = 2$, $c = 1$)



Obr. 8.4: Eliptický paraboloid
((8.12): $a = 4$, $b = 2$, $c = 1$)

Jednodílný hyperboloid

Z rovnic (8.6) a (8.10) dostaneme rovnici tzv. *jednodílného hyperboloidu* (obrázek 8.5)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (8.13)$$

Dvojdílný hyperboloid

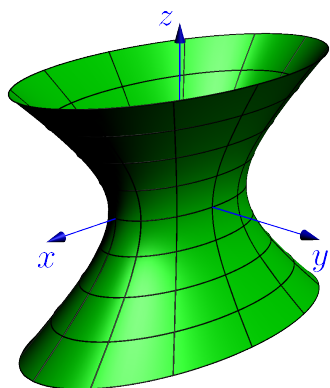
Podobně odvodíme z rotačního hyperboloidu dvojdílného tzv. *dvojdílný hyperboloid* (obrázek 8.6)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \quad (8.14)$$

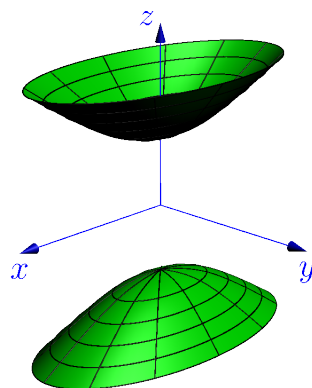
Eliptická kuželová plocha

Jestliže dosadíme vztahy (8.10) do rovnice rotační kuželové plochy (8.8), získáme rovnici tzv. *eliptické kuželové plochy* (obrázek 8.7)

$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}. \quad (8.15)$$



Obr. 8.5: Jedinodílný hyperboloid
((8.13): $a = 4, b = 2, c = 1$)

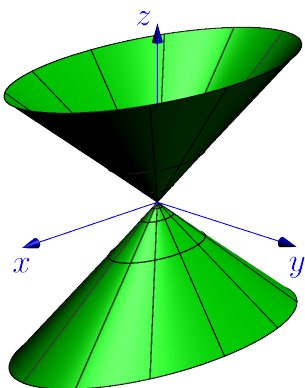


Obr. 8.6: Dvojdílný hyperboloid
((8.14): $a = 4, b = 2, c = 1$)

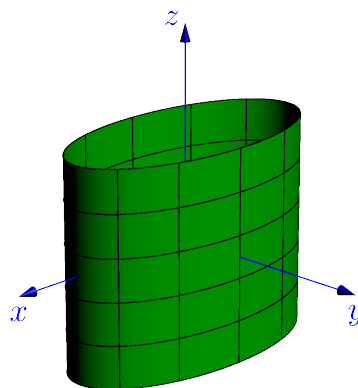
Eliptická válcová plocha

Nakonec ještě necháme působit dilataci (8.10) na rovnici rotační válcové plochy (8.9). Vznikne tzv. *eliptická válcová plocha* (obrázek 8.8)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (8.16)$$



Obr. 8.7: Eliptická kuželová plocha
((8.15): $a = 4, b = 2, c = 1$)



Obr. 8.8: Eliptická válcová plocha
((8.16): $a = 4, b = 2$)

Poznámka 8.1. Tím jsme ukončili přehled všech kvadrik, které můžeme získat z rotačních kvadrik pomocí afinní transformace (8.10). Pověsimně si, že rovnice eliptické kuželové plochy, jednodílného nebo dvojdílného hyperboloidu se liší pouze v tom, je-li v nich příslušná konstanta rovna 0, 1 nebo -1 .

Hyperbolický paraboloid

Hyperbolický paraboloid je kvadrika, která má v základní poloze rovnici

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}. \quad (8.17)$$

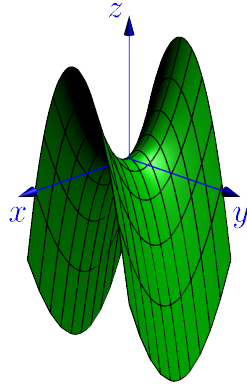
Plocha je souměrná podle osy z a souřadnicových rovin Oxz a Oyz . Hyperbolický paraboloid je zobrazen na obrázku 8.9.

Parabolická válcová plocha

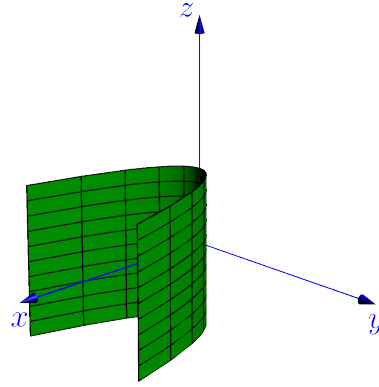
Parabolickou válcovou plochu získáme tak, že každým bodem paraboly $y = ax^2$ vedeme přímkou rovnoběžnou s osou z . Její rovnice je stejná (z je libovolné) jako rovnice příslušné paraboly, tj.

$$y = ax^2. \quad (8.18)$$

Příklad parabolické válcové plochy uvádí obrázek 8.10.



Obr. 8.9: Hyperbolický paraboloid
((8.17): $a = 2$, $b = 1$)



Obr. 8.10: Parabolická válcová plocha
((8.16): $a = 1$)

Hyperbolická válcová plocha

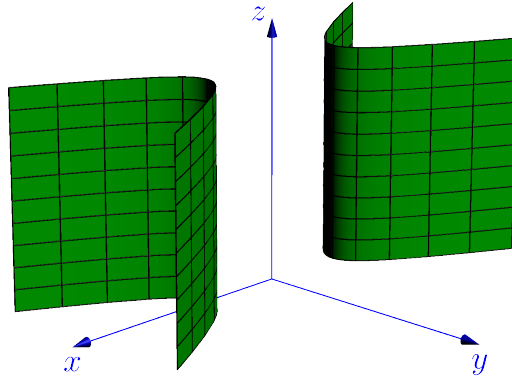
Hyperbolickou válcovou plochu dostaneme, povedeme-li každým bodem hyperboly $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ přímkou rovnoběžnou s osou z . Příslušná rovnice pak je

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (8.19)$$

Na obrázku 8.11 je uveden příklad hyperbolické válcové plochy.

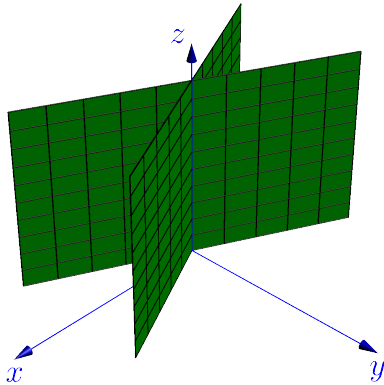
Poznámka 8.2. Uvedený přehled můžeme ještě doplnit o dvojice různoběžných, resp. rovnoběžných rovin (obrázky 8.12 a 8.13). Jedná se o tzv. *degenerované kvadriky*, jejichž rovnice jsou

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad \text{resp.} \quad x^2 - c^2 = 0. \quad (8.20)$$

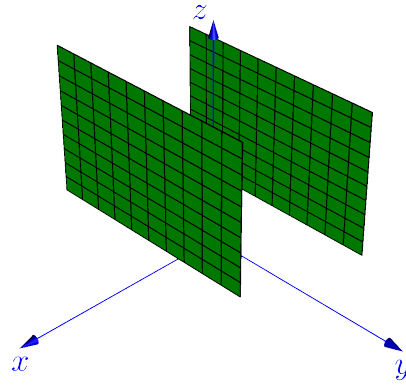


Obr. 8.11: Hyperbolická válcová plocha((8.19): $a = 2, b = 1$)

Dodejme ještě, že záměnou souřadnicových os bychom získali jiné základní polohy našich kvadrik. Například rovnice $x^2 + z^2 = r^2$ představuje rotační válcovou plochu o poloměru r s osou v ose y . Plochu kulovou, elipsoid, hyperboloid (jednodílný i dvoudílný), paraboloid (eliptický i hyperbolický) nazýváme *regulárními kvadrikami*. Ostatní kvadriky jsou tzv. *singulární kvadriky*.



Obr. 8.12: Degenerovaná kvadrika ((8.19): $a = 2, b = 1$)



Obr. 8.13: Degenerovaná kvadrika ((8.20): $c = 1$)

8.3 Posunuté kvadriky

Posunutím kvadriky se její původní rovnice samozřejmě změní. V takovém případě zavedeme novou soustavu souřadnic $(\bar{O}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ tak, aby vzhledem k ní byla kvadrika v základní poloze, takže její rovnice v proměnných $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ bude mít formálně stejný tvar jako rovnice původní. Nechť $\bar{O} = (h, k, l)$ vzhledem k soustavě (O, x, y, z) . Dosadíme-li za proměnné $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$

$$\bar{x} = x - h, \quad \bar{y} = y - k, \quad \bar{z} = z - l,$$

viz (2.24), dostaneme po úpravě rovnici

$$c_1x^2 + c_2y^2 + c_3z^2 + c_4x + c_5y + c_6z = c_7. \quad (8.21)$$

Rovnice (8.21) (srovnej s rovnicí (6.15)), v níž je alespoň jeden z koeficientů c_1 , c_2 nebo c_3 různý od nuly, tak představuje některou z uvedených kvadrik v prostoru $\mathbf{E}_3$. Typ kvadriky zjistíme opět metodou doplnění na čtverec.

Příklad 8.3. Určete kvadratickou plochu, jejíž rovnice má tvar

$$4x^2 - y^2 + 4z^2 + 8x + 4y + 12z = 55.$$

Řešení. Nejprve doplníme kvadratické členy na úplné čtverce:

$$\begin{aligned} 4(x^2 + 2x) - (y^2 - 4y) + 4(z^2 + 3z) &= 55 \\ 4(x^2 + 2x + 1) - (y^2 - 4y + 4) + 4\left(z^2 + 3z + \frac{9}{4}\right) &= 55 + 4 - 4 + 9 \\ 4(x+1)^2 - (y-2)^2 + 4\left(z + \frac{3}{2}\right)^2 &= 64 \end{aligned}$$

Položíme-li

$$\bar{x} = x + 1, \quad \bar{y} = y - 2, \quad \bar{z} = z + \frac{3}{2},$$

dostaneme po úpravě rovnici

$$\frac{\bar{x}^2}{16} + \frac{\bar{z}^2}{16} = \frac{\bar{y}^2}{64} + 1.$$

Odtud vidíme, že danou kvadrikou je jednodílný rotační hyperboloid, který vznikne rotací hyperboly $x^2/16 - y^2/64 = 1$ v rovině Oxy kolem osy y a následným posunutím ve směru vektoru $\mathbf{p} = (-1, 2, -\frac{3}{2})$. ▲

Příklad 8.4. Pojmenujte kvadriku danou rovnicí

$$y^2 - 8z^2 + 2y + 1 = 0.$$

Řešení. Budeme postupovat jako v předešlém příkladu:

$$\begin{aligned} (y+1)^2 - 8z^2 &= 0 \\ (y+1+2\sqrt{2}z)(y+1-2\sqrt{2}z) &= 0. \end{aligned}$$

Uvedenou kvadrikou je dvojice různoběžných rovin:

$$y + 2\sqrt{2}z + 1 = 0, \quad y - 2\sqrt{2}z + 1 = 0.$$

▲

8.4 Kvadriky v obecné poloze

Uvažujme nyní obecnou kvadratickou rovnici v $\mathbb{R}^3$

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0, \quad (8.22)$$

v níž je alespoň jeden z koeficientů u kvadratických členů různý od nuly. Tuto rovnici zapisujeme také maticově jako

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \quad (8.23)$$

Abychom mohli určit typ kvadriky, která je popsána rovnicí (8.22), musíme ji převést na tvar (8.21). Část rovnice (8.22) označená červeně představuje kvadratickou formu $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$, kde

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Označíme-li si v maticovém zápisu (8.23) obecné kvadratické rovnice (v $\mathbb{R}^3$) bloky

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{pmatrix}, \quad g = a_{44},$$

můžeme rovnici (8.23) zapsat také ve tvaru

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + 2\mathbf{b}^T \mathbf{x} + g = 0. \quad (8.24)$$

Reálnou symetrickou matici $\mathbf{A}$ rozložíme užitím spektrálního rozkladu na

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{U}^T,$$

kde $\mathbf{D}$ je diagonální matice a sloupce matice $\mathbf{U}$ jsou ortonormální vlastní vektory matice $\mathbf{A}$, ($\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{U} \mathbf{U}^T = \mathbf{I}$, $\det(\mathbf{U}) = 1$), a následně upravíme rovnici (8.24):

$$\mathbf{x}^T \underbrace{\mathbf{A}}_{\mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{U}^T} \mathbf{x} + 2\mathbf{b}^T \underbrace{\mathbf{I}}_{\mathbf{U} \mathbf{U}^T} \mathbf{x} + g = 0 \implies (\mathbf{U}^T \mathbf{x})^T \mathbf{D} (\mathbf{U}^T \mathbf{x}) + 2(\mathbf{U}^T \mathbf{b})^T (\mathbf{U}^T \mathbf{x}) + g = 0.$$

Pomocí ortogonální substituce

$$\mathbf{x} = \mathbf{U} \bar{\mathbf{x}}, \quad \bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})^T \quad (8.25)$$

uvedeme poslední rovnici do tvaru

$$\bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{x}} + 2\bar{\mathbf{b}}^T \bar{\mathbf{x}} + g = 0, \quad (8.26)$$

kde jsme položili $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{U}^T \mathbf{b}$. Označíme-li ještě $\bar{\mathbf{b}} = (d, e, f)^T$, lze rovnici (8.26) napsat jako

$$\lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2 + \lambda_3 \bar{z}^2 + d\bar{x} + e\bar{y} + f\bar{z} + g = 0, \quad (8.27)$$

což je již rovnice typu (8.21). Tyto výsledky teď shrneme v následující větě.

Věta 8.5. Každou kvadratickou rovnici typu (8.22) můžeme převést na rovnici tvaru (8.27) a to užitím ortogonální substituce (8.25), již odpovídá otočení soustavy souřadnic.

Poznámka 8.6. O konkrétním typu kvadriky rozhodují vlastní čísla λ_1 , λ_2 a λ_3 symetrické matice kvadratické formy, jež je částí rovnice (8.22). Klasifikace kvadrik podle znamének vlastních čísel je uvedena v tabulce 8.1.

znaménka vlastních čísel $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	Kvadrika
$\lambda_3 > 0 \vee 0 > \lambda_1$	trojosý elipsoid
$\lambda_2 > 0 > \lambda_3 \vee \lambda_1 > 0 > \lambda_2$	hyperboloid (1 nebo 2 díl.), el. kuž. pl.
$\lambda_2 > 0 = \lambda_3 \vee \lambda_1 = 0 > \lambda_2$	el. paraboloid, el. vál. pl.
$\lambda_1 > \lambda_2 = 0 > \lambda_3 \vee \lambda_1 > 0 = \lambda_2 > \lambda_3$	hyp. par., hyp. vál. pl., dvě $\nparallel$ roviny
$\lambda_1 > \lambda_2 = 0 = \lambda_3 \vee \lambda_1 = 0 = \lambda_2 > \lambda_3$	par. vál. pl., dvě $\parallel$ roviny

Tab. 8.1: Typ kvadriky podle znamének vlastních čísel jejich kvadratické formy, vlastní čísla jsou seřazena podle velikosti ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$)

Příklad 8.7. Určete kvadratickou plochu danou rovnicí

$$2xy + z^2 + 1 = 0.$$

Řešení. Symetrická matice kvadratické formy $2xy + z^2$ má tvar

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Najdeme vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ a odpovídající ortonormální vlastní vektory:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(\lambda^2-1) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1.$$

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} = 1 : \mathbf{A} - 1\mathbf{I} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \mathbf{e} = \begin{pmatrix} r \\ r \\ s \end{pmatrix}; r, s \in \mathbb{R}, \\ \mathbf{e} &= r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{\mathbf{e}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{\mathbf{e}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \lambda_3 = -1 : \mathbf{A} + 1\mathbf{I} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \bar{\mathbf{e}}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Pomocí ortogonální substituce (8.25), kde

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix},$$

tj.

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{x} + \bar{z}), \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{x} - \bar{z}), \quad z = \bar{y},$$

redukujeme danou rovnici kvadratické plochy na rovnici

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = \bar{z}^2 - 1.$$

Odtud je zřejmé, že se jedná o rotační hyperboloid dvojdielný, který bychom odvodili rotací hyperboly $\bar{x}^2 - \bar{z}^2 = -1$ v rovině $O\bar{x}\bar{z}$ kolem osy $\bar{z}$. ▲

Poznámka 8.8. Zvolíme-li jiné pořadí vlastních čísel, například $\lambda_1 = -1$, $\lambda_{2,3} = 1$, získáme redukovanou rovnici ve tvaru

$$-\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 = -1.$$

Tentokrát se jedná o rotační hyperboloid dvojdielný s osou souměrnosti v ose $\bar{x}$. Tato změna je způsobena jiným uspořádáním sloupců v matici $\mathbf{U}$, a tedy jiným otočením soustavy souřadnic.

Příklad 8.9. Klasifikujte kvadratickou plochu

$$2xy + 2xz - x - 1 = 0.$$

Řešení. Kvadratická forma $2xy + 2xz$ má symetrickou matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Její vlastní čísla jsou $\lambda_1 = \sqrt{2}$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -\sqrt{2}$. Najdeme k nim příslušné vlastní vektory a sestavíme ortogonální matici $\mathbf{U}$. Platí

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}, \det(\mathbf{U}) = 1.$$

Užitím ortogonální substituce

$$x = \frac{1}{2} (\sqrt{2}\bar{x} - \sqrt{2}\bar{z}), \quad y = \frac{1}{2} (\bar{x} + \sqrt{2}\bar{y} + \bar{z}), \quad z = \frac{1}{2} (\bar{x} - \sqrt{2}\bar{y} + \bar{z})$$

obdržíme

$$\sqrt{2}\bar{x}^2 - \sqrt{2}\bar{z}^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{x} + \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{z} = 1$$

resp.

$$2\bar{x}^2 - 2\bar{z}^2 - \bar{x} + \bar{z} = \sqrt{2}.$$

Doplněním na čtverec získáme nakonec rovnici

$$2\left(\bar{x} - \frac{1}{4}\right)^2 - 2\left(\bar{z} - \frac{1}{4}\right)^2 = \sqrt{2}.$$

Uvedenou kvadratickou plochou je tedy hyperbolická válcová plocha. ▲

Příklady k procvičení

1. Pojmenujte kvadratickou plochu danou rovnicí:

- a) $x^2 + 3y^2 - 8x + 6y = 5$;
- b) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4x - 12y - 6z - 11 = 0$;
- c) $x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 4z = 29$.

2. Klasifikujte následující kvadriky:

- a) $2x^2 + 2y^2 + 6yz + 10z^2 - 9 = 0$;
- b) $2xz + y^2 + 2y + 1 = 0$;
- c) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 2yz = 9$.

Klíč k příkladům k procvičení

1. Uvedené rovnice upravíme metodou doplnění na čtverec:

- a) $(x - 4)^2 + 3(y + 1)^2 = 24$ - eliptická válcová plocha;
- b) $(x + 2)^2 + 2(y - 3)^2 + 3(z - 1)^2 = 36$ - trojosý elipsoid;
- c) $(x + 4)^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 49$ - kulová plocha.

2. Dané rovnice redukuje pomocí ortogonální substituce (8.25) na

a) $11\bar{x}^2 + 2\bar{y}^2 + \bar{z}^2 = 9$ - trojosý elipsoid;

$$\lambda_1 = 11, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1, \quad \mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

b) $\bar{x}^2 + (\bar{y} + 1)^2 - \bar{z}^2 = 0$ - rotační kužel;

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1, \quad \mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

c) $3\bar{x}^2 = 9$ - dvojice rovnoběžných rovin;

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \quad \mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Rejstřík

A

asymptota, 76

B

báze

- kanonická (standardní), 4
- matice přechodu, 47
- nesouhlasně orientované, 47
- ortogonální, 16
- ortonormální, 16
- souhlasně orientované, 47

bod

- vzdálenost bodů, 17, 43

D

délka

- hlavní poloosy, 74, 76
- vedlejší poloosy, 74, 76

dilatace, 90

dimenze, 4

E

excentricita

- délková
- hyperboly, 76
- číselná
- hyperboly, 76

G

geometrie

- kvadratická, 72
- lineární, 72

K

komplanární vektory, 53

kuželosečka, 72

- elipsa, 72, 73

degenerovaná, 79

délka hlavní poloosy, 74

délka vedlejší poloosy, 74

hlavní osa, 75

imaginární, 79

ohnisko, 73

střed, 75

vedlejší osa, 75

vrcholy, 75

hyperbola, 75

asymptoty, 76

degenerovaná, 79

délka hlavní poloosy, 76

délka vedlejší poloosy, 76

délková excentricita, 76

číselná excentricita, 76

hlavní osa, 76

ohniska, 76

rovnoosá, 76

střed, 76

vedlejší osa, 76

vrcholy, 76

obecná poloha, 81

parabola, 72, 77

degenerovaná, 79

ohniska, 77

řídící přímky, 77

vrchol, 77

posunutá, 77

regulární, 81

singulární, 81

základní poloha, 78

kvadrika, 72, 88

degenerovaná, 93

dvojdílný hyperboloid, 91

rotační, 90
 elipsoid
 kulová plocha, 89
 trojosý, 90
 hyperbolický
 paraboloid, 92
 jednodílný hyperboloid, 72, 91
 rotační, 90
 kuželová plocha
 eliptická, 91
 rotační, 90
 obecná
 v základní poloze, 90
 paraboloid
 rotační, 89
 paraboloid, 72
 eliptický, 91
 regulární, 94
 rotační, 89
 regulární, 89
 singulární, 89
 v základní poloze, 88
 singulární, 94
 válcová plocha
 eliptická, 92
 hyperbolická, 93
 parabolická, 93
 rotační, 90

L

lineární kombinace, 4

M

matice
 ortogonální, 82
 moment
 statický, 49

N

nadrovina, 12
 nepřímá úměrnost, 81
 nerovnost
 Schwarzova, 16
 norma, 15

eukleidovská, 19
 indukovaná sk. součinem, 16, 42

O

objem
 rovnoběžnostěnu, 47, 53
 obsah
 trojúhelníka, 48
 obsah rovnoběžníka, 46
 odchylka (úhel)
 dvou přímek, 56
 dvou rovin, 57
 dvou vektorů, 16, 42
 přímky a roviny, 59
 ohnisko
 elipsy, 73
 hyperboly, 76
 paraboly, 77
 otočení, 83
 soustavy souřadnic, 81

P

parametr, 25, 31
 parametrizace, 75
 plocha
 kulová, 89
 rotační, 88
 podprostor
 afinní, 12
 eukleidovský, 17
 přímka, 12
 mimoběžné přímky, 25
 vzdálenost, 53
 obecná rovnice přímky, 29
 odchylka dvou přímek, 56
 řídící přímky paraboly, 77
 parametrická rovnice, 25
 rovnoběžné přímky, 25
 různoběžné přímky, 25
 směrnice přímky, 67, 68
 směrnice rovnice, 68
 směrový úhel, 68
 úseková rovnice, 68
 vektorová rovnice, 25

prostor

- afinní, 6
- aritmetický, 7
- soustava parametr. rovnic, 13
- vektorové zaměření, 6
- aritmetický eukleidovský, 18
- eukleidovský, 5, 15, 17
- unitární, 15

R

rovina, 12

- normálový vektor roviny, 50
- obecná rovnice roviny, 32
- odchylka dvou rovin, 57
- parametrická rovnice roviny, 31
- směrové vektory roviny, 31
- úseková rovnice roviny, 33
- vektorová rovnice roviny, 31
- vzájemná poloha rovin
 - rovnoběžné různé, 35
 - rovnoběžné splývající, 35
 - různoběžné, 35

rovnice

- obecná rovnice přímky, 29
- přímky
 - parametrická, 25
 - směrnice, 68
 - úseková, 68
 - vektorová, 25

roviny

- obecná, 32
- parametrická, 31
- úseková, 33
- vektorová, 31

rovnoběžnostěn, 47

- objem, 47

rychlost

- obvodová, 48
- úhlová, 48

S

součin

- skalární, 15
- eukleidovský, 18, 42

smíšený, 52

vektorový, 45

souřadnice

- bod, 8
- normálového vektoru roviny, 50
- válcové, 88
- vektoru, 4, 8

soustava souřadnic

- afinní, 8
- kartézská, 17, 21

střed

- elipsy, 75
- hyperboly, 76

substituce

- ortogonální, 82

U

úlohy

- afinní, 14
- metrické, 14

V

vektor

- délka (velikost), 18, 42
- geometrický, 5
- jednotkový, 16
- kolineární vektory, 45
- komplanární vektory, 53
- lineárně nezávislé vektory, 4, 25
- lineárně závislé vektory, 4, 25
- nulový, 4
- opačný, 4
- ortogonální vektory, 16
- směrový vektor přímky, 25
- souřadnice vektoru, 4
- statického momentu, 50
- volný, 5

vektorový prostor

- aritmetický, 4

vzdálenost

- bod od přímky, 64
- bod od roviny, 62
- dvou množin, 62
- dvou přímek, 66

dvou rovin, 65

přímky a roviny, 66

Z

zobrazení

posunutí, 5

Literatura

- [1] Z. Dostál: *Lineární algebra*. <http://mi21.vsb.cz/>, 2011
- [2] B. Budinský: *Analytická a diferenciální geometrie*. SNTL Praha, 1983. 296 s.
- [3] T. Trajdos: *Matematyka, Część III*. WNT Warszawa, 1993. 387 s. ISBN 83-204-2350-3.
- [4] J.B. Fraleigh and R.A. Beauregard: *Linear algebra*. Addison-Wesley, 1989. 516 s. ISBN 0-201-11949-8.