www.KMA.zcu.cz
SINCE 1954

Symbolické integrování

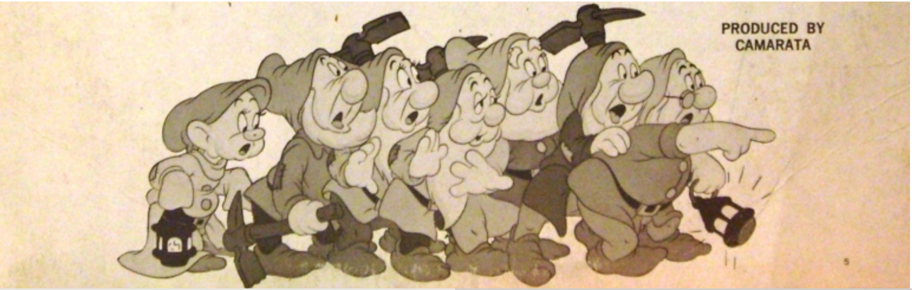
Petr Nečesal, Josef Polák
Katedra matematiky, FAV ZČU v Plzni

Seminář o výuce matematiky
16. června 2011, VŠB-TU Ostrava

evropský sociální fond v ČR EVROPSKÁ UNIE MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Sedm trpaslíků pro symbolické výpočty [Erich L. Kaltofen]

- SymDwf 1. Lineární algebra v přesné aritmetice, svazy
- SymDwf 2. Gröbnerovy báze
- SymDwf 3. Symbolické inverzní problémy
- SymDwf 4. Tarského algebraická teorie
- SymDwf 5. Hybridní symbolicko-numerické výpočty
- **SymDwf 6. Výpočty řešení v uzavřeném tvaru**
- SymDwf 7. Výpočtová teorie grup



Neurčitý integrál – hádanka či překvapení?

- $$\int \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}\,x$$

- $$\int \frac{x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}\,x$$

- $$\int \frac{x(x+1)\left(\left(x^2\mathrm{e}^{2x^2}-\ln^2(x+1)\right)^2+2x\mathrm{e}^{3x^2}\left(x-\left(2x^3+2x^2+x+1\right)\ln(x+1)\right)\right)}{\left((x+1)\ln^2(x+1)-\left(x^3+x^2\right)\mathrm{e}^{2x^2}\right)^2}\,\mathrm{d}\,x$$

Neurčitý integrál – hádanka či překvapení?

- $\displaystyle\int \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}\,x = x - \ln(1+\mathrm{e}^x)$

- $\displaystyle\int \frac{x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}\,x$

- $\displaystyle\int \frac{x(x+1)\left(\left(x^2\mathrm{e}^{2x^2}-\ln^2(x+1)\right)^2+2x\mathrm{e}^{3x^2}\left(x-\left(2x^3+2x^2+x+1\right)\ln(x+1)\right)\right)}{\left((x+1)\ln^2(x+1)-\left(x^3+x^2\right)\mathrm{e}^{2x^2}\right)^2}\,\mathrm{d}\,x$

Neurčitý integrál – hádanka či překvapení?

- $\displaystyle\int \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}\,x = x - \ln(1+\mathrm{e}^x)$

- $\displaystyle\int \frac{x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}\,x = \frac{x^2}{2} - x\ln(1+\mathrm{e}^x) - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n(\mathrm{e}^x)^n}{n^2}$

- $\displaystyle\int \frac{x(x+1)\left(\left(x^2\mathrm{e}^{2x^2} - \ln^2(x+1)\right)^2 + 2x\mathrm{e}^{3x^2}\left(x - \left(2x^3+2x^2+x+1\right)\ln(x+1)\right)\right)}{\left((x+1)\ln^2(x+1) - (x^3+x^2)\,\mathrm{e}^{2x^2}\right)^2}\,\mathrm{d}\,x$

Neurčitý integrál – hádanka či překvapení?

- $\displaystyle\int \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}\,x = x - \ln(1+\mathrm{e}^x)$

- $\displaystyle\int \frac{x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}\,x = \frac{x^2}{2} - x\ln(1+\mathrm{e}^x) - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n(\mathrm{e}^x)^n}{n^2}$

- $$\int \frac{x(x+1)\left(\left(x^2\mathrm{e}^{2x^2}-\ln^2(x+1)\right)^2+2x\mathrm{e}^{3x^2}\left(x-\left(2x^3+2x^2+x+1\right)\ln(x+1)\right)\right)}{\left((x+1)\ln^2(x+1)-(x^3+x^2)\,\mathrm{e}^{2x^2}\right)^2}\,\mathrm{d}\,x$$

$$= x-\ln(x+1)-\frac{x\mathrm{e}^{x^2}\ln(x+1)}{\ln^2(x+1)-x^2\left(\mathrm{e}^{x^2}\right)^2}+\frac{1}{2}\ln\left(\ln(x+1)+x\mathrm{e}^{x^2}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(\ln(x+1)-x\mathrm{e}^{x^2}\right)$$

Elementární funkce

- **základní:** konstantní, mocninné, exponenciální, logaritmické, goniometrické a cyklometrické funkce,
- **funkce z nich vytvořené** pomocí konečného počtu alg. operací sčítání, odčítání, násobení a dělení nebo pomocí tvoření složených funkcí.

- algebraické
  - racionální
    - celistvé (polynomické) $y = x^2 + 1$
    - lomené
      - ryze lomené $y = \frac{1}{x^2+1}$
      - neryze lomené $y = \frac{x^2}{x^2+1}$
  - iracionální $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
- transcendentní $y = \ln x, \quad y = \mathrm{e}^x, \quad y = \ln(x^2+1), \quad y = \ln(\mathrm{e}^x + 1)$

Elementární funkce

Pro $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \qquad \arcsin x = -i \ln(\sqrt{1-x^2} + i\,x), \quad |x| \le 1,$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \arccos x = -i \ln(x - i\sqrt{1-x^2}), \quad |x| \le 1,$$

$$\operatorname{tg} x = -i\,\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}}, \quad x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}, \qquad \operatorname{arctg} x = -\frac{i}{2} \ln \frac{i - x}{i + x},$$

$$\operatorname{cotg} x = i\,\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{e^{ix} - e^{-ix}}, \quad x \neq k\pi, \qquad \operatorname{arccotg} x = -\frac{i}{2} \ln \frac{x + i}{x - i}.$$

Abelova věta (1823)

Abelova věta (1823)

Niels Henrik Abel (1802 – 1829)

- norský matematik,
- rozprava o rovnicích, v které je dokázána nemožnost obecného řešení rovnic pátého stupně,
- od roku 2002 je udělována Abelova cena.

Abelova věta (1823)

Nechť $f = f(x)$ je algebraická funkce proměnné x.

$$\int f(x)\,\mathrm{d}\,x = u(x, f(x)) + \sum_{k=1}^{n} c_k \ln u_k(x, f(x)),$$

$$\Longrightarrow$$

$u = u(x, y), u_k = u_k(x, y)$ jsou racionální funkce proměnných x a y, $c_k \in \mathbb{C}$.

Liouvilleova věta (1834)

Liouvilleova věta (1834)

Joseph Liouville (1809 – 1882)

- francouzský matematik,
- Liouvilleova transcendentní čísla

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10^{n!}},$$

- Sturm–Liouvilleův problém

$$\begin{cases} -(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) &= \lambda w(x)y(x), \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) &= 0, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) &= 0. \end{cases}$$

Liouvilleova věta (1834)

Nechť $f = f(x)$ je algebraická funkce proměnné x.

$$\int f(x)\,\mathrm{d}\,x \text{ je elementární funkce}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\int f(x)\,\mathrm{d}\,x = u(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k \ln u_k(x),$$

kde u, u_k jsou algebraické funkce proměnné x a $c_k \in \mathbb{C}$.

Silná Liouvilleova věta (1835)

Nechť

- $f = f(x, y_1, \ldots, y_m)$ je algebraická funkce prom. $x, y_1, \ldots, y_m$,
- $y_1 = y_1(x), \ldots, y_m = y_m(x)$,
- $\frac{\mathrm{d}\, y_1}{\mathrm{d}\, x}, \ldots, \frac{\mathrm{d}\, y_m}{\mathrm{d}\, x}$ jsou algebraické funkce prom. $x, y_1, \ldots, y_m$.

$$\int f(x, y_1, \ldots, y_m)\, \mathrm{d}\, x \text{ je elementární funkce}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\int f(x, y_1, \ldots, y_m)\, \mathrm{d}\, x = u + \sum_{k=1}^{n} c_k \ln u_k,$$

kde u, u_k jsou algebraické funkce proměnných $x, y_1, \ldots, y_m$ a $c_k \in \mathbb{C}$.

Silná Liouvilleova věta (1835)

Nechť

- $f = f(x, y_1, \dots, y_m)$ je racionální funkce prom. $x, y_1, \dots, y_m$,
- $y_1 = y_1(x), \dots, y_m = y_m(x)$,
- $\frac{\mathrm{d}\, y_1}{\mathrm{d}\, x}, \dots, \frac{\mathrm{d}\, y_m}{\mathrm{d}\, x}$ jsou racionální funkce prom. $x, y_1, \dots, y_m$.

$$\int f(x, y_1, \dots, y_m)\,\mathrm{d}\, x \text{ je elementární funkce}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\int f(x, y_1, \dots, y_m)\,\mathrm{d}\, x = u + \sum_{k=1}^{n} c_k \ln u_k,$$

kde u, u_k jsou racionální funkce proměnných $x, y_1, \dots, y_m$ a $c_k \in \mathbb{C}$.

Liouvilleovo kritérium (1835)

Nechť

- $f = f(x)$ a $g = g(x)$ jsou racionální funkce proměnné x,
- g je nekonstantní funkce.

$$\int f(x)\mathrm{e}^{g(x)} \,\mathrm{d}\,x \text{ je elementární funkce}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$f(x) = r'(x) + r(x)g'(x),$$

kde r je racionální funkce proměnné x.

Důsledky Liouvilleova kritéria

- $\displaystyle\int x^{2m} \mathrm{e}^{ax^2}\,\mathrm{d}\,x, \quad m \in \mathbb{Z},\ a \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$ je neelementární funkce,

Důsledky Liouvilleova kritéria

- $\displaystyle\int x^{2m} \mathrm{e}^{ax^2} \,\mathrm{d}\, x, \quad m \in \mathbb{Z},\, a \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$ je neelementární funkce,

Příklady neelementárních funkcí:

$$\int \mathrm{e}^{x^2} \,\mathrm{d}\, x,\ \int \mathrm{e}^{-x^2} \,\mathrm{d}\, x,\ \int \sqrt{\ln x} \,\mathrm{d}\, x,\ \int \frac{1}{\sqrt{\ln x}} \,\mathrm{d}\, x,\ \int \frac{\mathrm{e}^{ax}}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}\, x,\ \int \cos x^2 \,\mathrm{d}\, x,\ \int \sin x^2 \,\mathrm{d}\, x.$$

Důsledky Liouvilleova kritéria

- $\displaystyle\int x^{2m} \mathrm{e}^{ax^2} \,\mathrm{d}\,x, \quad m \in \mathbb{Z},\ a \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$ je neelementární funkce,

Příklady neelementárních funkcí:

$$\int \mathrm{e}^{x^2} \,\mathrm{d}\,x,\ \int \mathrm{e}^{-x^2} \,\mathrm{d}\,x,\ \int \sqrt{\ln x} \,\mathrm{d}\,x,\ \int \frac{1}{\sqrt{\ln x}} \,\mathrm{d}\,x,\ \int \frac{\mathrm{e}^{ax}}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}\,x,\ \int \cos x^2 \,\mathrm{d}\,x,\ \int \sin x^2 \,\mathrm{d}\,x.$$

- $\displaystyle\int x^{-n} \mathrm{e}^{cx} \,\mathrm{d}\,x, \quad n \in \mathbb{N},\ c \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$ je neelementární funkce,

Důsledky Liouvilleova kritéria

- $\displaystyle\int x^{2m} \mathrm{e}^{ax^2}\,\mathrm{d}\,x,\quad m \in \mathbb{Z},\ a \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$ je neelementární funkce,

Příklady neelementárních funkcí:

$$\int \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}\,x,\ \int \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x,\ \int \sqrt{\ln x}\,\mathrm{d}\,x,\ \int \frac{1}{\sqrt{\ln x}}\,\mathrm{d}\,x,\ \int \frac{\mathrm{e}^{ax}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x,\ \int \cos x^2\,\mathrm{d}\,x,\ \int \sin x^2\,\mathrm{d}\,x.$$

- $\displaystyle\int x^{-n} \mathrm{e}^{cx}\,\mathrm{d}\,x,\quad n \in \mathbb{N},\ c \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$ je neelementární funkce,

Příklady neelementárních funkcí:

$$\int \frac{\mathrm{e}^{x}}{x}\,\mathrm{d}\,x,\ \int \frac{\mathrm{e}^{x}}{x^2}\,\mathrm{d}\,x,\ \int \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}\,x,\ \int \frac{1}{\ln x}\,\mathrm{d}\,x,\ \int \ln\ln x\,\mathrm{d}\,x,\ \int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}\,x,\ \int \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}\,x.$$

Čebyševova věta (1853)

Nechť $p, q, r \in \mathbb{Q}$, $\quad a, b \in \mathbb{R}$, $\quad r, a, b \neq 0$.

$$\int x^p (a + bx^r)^q \, \mathrm{d}\, x \quad \text{je elementární funkce}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{p+1}{r} \in \mathbb{Z} \quad \vee \quad q \in \mathbb{Z} \quad \vee \quad \frac{p+1}{r} + q \in \mathbb{Z}.$$

Čebyševova věta (1853)

Nechť $p, q, r \in \mathbb{Q}$, $\quad a, b \in \mathbb{R}$, $\quad r, a, b \neq 0$.

$$\int x^p (a + bx^r)^q \, \mathrm{d}\, x \quad \text{je elementární funkce}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{p+1}{r} \in \mathbb{Z} \quad \vee \quad q \in \mathbb{Z} \quad \vee \quad \frac{p+1}{r} + q \in \mathbb{Z}.$$

Příklady elementárních funkcí:

$$\int \sqrt{1+x^2}\, \mathrm{d}\, x, \quad \int \sqrt{1-x^2}\, \mathrm{d}\, x.$$

Příklady neelementárních funkcí:

$$\int \sqrt[3]{1+x^2}\, \mathrm{d}\, x, \quad \int \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\, \mathrm{d}\, x, \quad \int \sqrt{\sin x}\, \mathrm{d}\, x, \quad \int \sqrt{\cos x}\, \mathrm{d}\, x.$$

Liouvilleova–Hardyho věta (1905)

Nechť $f = f(x)$ je racionální funkce proměnné x.

$$\int f(x) \ln x \, \mathrm{d}\, x \quad \text{je elementární funkce}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$f(x) = \frac{c}{x} + g'(x),$$

kde g je racionální funkce proměnné x a $c \in \mathbb{C}$.

Liouvilleova–Hardyho věta (1905)

Nechť $f = f(x)$ je racionální funkce proměnné x.

$$\int f(x) \ln x \, \mathrm{d}\, x \quad \text{je elementární funkce}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$f(x) = \frac{c}{x} + g'(x),$$

kde g je racionální funkce proměnné x a $c \in \mathbb{C}$.

Příklad neelementární funkce:

$$\int \frac{\ln x}{x - a} \, \mathrm{d}\, x, \quad a \neq 0.$$

Joel Moses

- **1967** – Ph.D. na **M**assachusetts **I**nstitute of **T**echnology v Cambridge,
- vedoucí katedry elektrotechniky a informatiky (EECS),
- **SIN** – **S**ymbolic **IN**tegrator,
- **1969** – **MACSYMA** – **MAC**'s **SY**mbolic **MA**nipulator,
  - celkem 7 hlavních balíčků (od 15000 do 35000 slov v **LISP**u),
  - zjednodušování výrazů,
  - GCD – největší společný dělitel,
  - faktorizace,
  - integrace,
  - řešení diferenciálních rovnic.

Symbolic INtegrator - část I

$$\int c \operatorname{op}(u(x))u'(x) \,\mathrm{d}\, x$$

- $c \in \mathbb{C}$, op je elementární funkce,
- op může být jedna z funkcí

$$\sin, \quad \cos, \quad \operatorname{tg}, \quad \operatorname{cotg}, \quad \sec, \quad \csc, \quad \arcsin, \quad \operatorname{arctg}, \quad \operatorname{arcsec}, \quad \ln,$$

- $\operatorname{op}(u(x))$ může mít tvar

$$u(x), \quad \frac{1}{u(x)}, \quad u(x)^d, \quad d^{u(x)},$$

-

$$\int (A_1 + \cdots + A_n) \,\mathrm{d}\, x = \int A_1 \,\mathrm{d}\, x + \int A_n \,\mathrm{d}\, x,$$

- binomický rozvoj

$$\int (A_1 + A_2)^n \,\mathrm{d}\, x = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \int A_1^{n-k} A_2^k \,\mathrm{d}\, x.$$

Symbolic INtegrator - část II (11 metod)

SIN používá dvě pomocné procedury: **FORM** a **SCHATCHEN**.

1. substituce $y = \mathrm{e}^x$, $\int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{4x}}\,\mathrm{d}\,x$,
2. substituce $y = x^k$, $\int x^3 \sin(x^2)\,\mathrm{d}\,x$,
3. substituce $y = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k}}$, $\int x\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}\,x$,
4. integrace $x^r(c_1 + c_2x^q)^p$, $p, q, r \in \mathbb{Q}$, $\int \sqrt{x(1+x)^5}\,\mathrm{d}\,x$,
5. substituce pro integraci výrazů obsahující $\sqrt{ax^2+bx+c}$, $\int \frac{x^4}{\sqrt{(1-x^2)^5}}\,\mathrm{d}\,x$,
6.
   - $\sin mx \sin nx$, $\sin mx \cos nx$, $\cos mx \cos nx$,
   - $\sin^m x \cos^n x$,
   - substituce $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, $\int \frac{1}{1+\cos x}\,\mathrm{d}\,x$,
7. integrace racionální funkce krát exponenciální funkce, $\int \frac{x}{(x+1)^2}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}\,x$,
8. integrace racionální funkce, $\int \frac{1}{x^3+x}\,\mathrm{d}\,x$,
9. integrace logaritmických funkcí s racionálními koeficienty, $\int x \ln x\,\mathrm{d}\,x$,
10. integrace racionálních funkcí logaritmů, $\int \frac{\ln x}{(1+\ln x)^2}\,\mathrm{d}\,x$,
11. roznásobení v integrandu, $\int x(\cos x + \sin x)\,\mathrm{d}\,x$.

```
                    (AND (NOT (EQUAL AA 1))
                     (NOT (EQUAL AA 0)) ))))
                 (N (FUNCTION (LAMBDA (N)
                    (AND (NUMBERP N) (LESSP N 0)) ))))))))))
            (COEFFTT (B TRUE)) )
           (COEFFPT (A TRUE)) ))
         NIL ))
        (REPLACE W (QUOTE (TIMES (PLUS (QUOTIENT A C) B) C))) )
       (T NIL) )))))))


       FORM,SIN,DERIVATIVE-DIVIDES


DEFINE
(((TRUE1 (LAMBDA (A) (OR (NOT (NUMBERP A)) (NOT (ZEROP A)))))
  (INTEGERP1 (LAMBDA (A) (INTEGERP (SIMPTIMES (LIST 2 A)))))
  (VARP (LAMBDA (A) (EQUAL A VAR)))
  (FREE1 (LAMBDA (A) (AND (FREE A) (OR (NOT (NUMBERP A)) (NOT (ZEROP A))))))
  (FIXP1 (LAMBDA (A) (AND (NUMBERP A) (FIXP A))))
  (MASTER (LAMBDA (A)
    (PROG NIL
          (FILEWRITE (QUOTE MANOVE) (QUOTE LISP) (QUOTE MASTER))
          (FILEAPND
           (QUOTE MANOVE)
           (QUOTE LISP)
           (LIST (CONS (CAR A) (TRANSL (SIMP (CDR A))))) )
          (CHAIN (QUOTE ((SAVE MOSES T) (R FULMAN MANOVE))))
          (FILESEEK (QUOTE MANOVE) (QUOTE ANS))
          (RETURN (SIMP (UNTR (READ)))) )))))

DEFINE
(((FORM
   (LAMBDA
    (EXPRES)
    (COND
     ((FREE EXPRES) NIL)
     ((ATOM EXPRES) NIL)
     ((MEMBER (CAR EXPRES) (QUOTE (PLUS TIMES)))
      ((LAMBDA (L)
        (PROG (Y)
         LOOP
              (COND
               ((SETQ Y (FORM (CAR L))) (RETURN Y))
               ((NOT (SETQ L (CDR L))) (RETURN NIL))
               (T (GO LOOP)) )))
       (CDR EXPRES) ))
     ((MEMBER (CAR EXPRES) (QUOTE (LOG ARCTAN ARCSIN)))
      (COND
       ((SETQ ARG
         (M2
          EXP
          (LIST
           (QUOTE TIMES)
           (QUOTE (COEFFTT (C RAT8PRIME)))
           (CONS (CAR EXPRES)
            (COND ((EQ (CAR EXPRES) (QUOTE LOG))
              (CONS (CADR EXPRES) (QUOTE ((B RAT8)))) )
             (T (QUOTE ((B RAT8)))) )))
          NIL ))
```


SCHATCHEN

```
DEFINE
(((SCHATCHEN M2)
  (M2 (LAMBDA (E P SPLIST)
             (PROG (ANS)
                   (RETURN (COND ((NULL (M1 E P)) NIL)
                                 ((NULL ANS) T)
                                 (T ANS) )))))
  (M1 (LAMBDA (E P)
             (COND ((EQUAL E P) T)
                   ((ATOM P) NIL)
                   ((ATOM (CAR P))
                    (COND ((OR (EQ (CAR P) (QUOTE PLUS))
                               (EQ (CAR P) (QUOTE TIMES)) )
                           (LOOPP E P) )
                          ((EQ (CAR P) (QUOTE EXPT)) (ZEPOW E P))
                          ((EQ (CAR E) (CAR P)) (EACHP E P))
                          ((OP (CAR P)) NIL)
                          ((EQ (CAR P) (QUOTE COEFFT))
                           (COEFFPORT E P (QUOTE (TIMES 1 T))) )
                          ((EQ (CAR P) (QUOTE COEFFPT)) (COEFFPT E P T))
                          ((EQ (CAR P) (QUOTE COEFFP))
                           (COEFFPORT E P (QUOTE (PLUS 0 T))) )
                          ((EQ (CAR P) (QUOTE COEFFTT))
                           (COEFFTT E (CADR P) T (QUOTE TIMES)) )
                          ((EQ (CAR P) (QUOTE COEFFPP))
                           (COEFFTT E (CADR P) T (QUOTE PLUS)) )
                          ((EQ (CAR P) (QUOTE DVCOE)) (DVCOE E P T))
                          ((EQ (CAR P) (QUOTE ZEPOW)) (ZEPOW E P))
                          ((AND (SETQ ANS (CONS NIL ANS)) (TESTA P E NIL))
                           (RESTORE1) )
                          (T (RESTORE)) ))
                   ((ATOM (CAAR P))
                    (COND ((ATOM E) NIL)
                          ((PROG2 (SETQ ANS (CONS NIL ANS))
                                  (TESTA (CAR P) (CAR E) E) )
                           (COND ((OR (EQ (CAR E) (QUOTE PLUS))
                                      (EQ (CAR E) (QUOTE TIMES)) )
                                  (COND ((LOOPP E
                                                (CONS (CAR E)
                                                      (CDR P) ))
                                         (RESTORE1) )
                                        (T (RESTORE)) ))
                                 ((AND (SETQ P (CONS (CAR E) (CDR P)))
                                       (EACHP E P) )
                                  (RESTORE1) )
                                 (T (RESTORE)) ))
                          (T (RESTORE)) ))
                   (T NIL) )))))
DEFINE
(((LOOPP (LAMBDA (E P)
               (PROG (X Z EE)
                     (SETQ EE
                           (COND ((NOT (EQ (CAR E) (CAR P)))
                                  (LIST (CAR P) E) )
```

Symbolic INtegrator - část III (2 metody)

1. integrace per-partes

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}\,x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}\,x,$$

2. **ED**ucated **G**u**E**ss - heuristika založená na Liouvilleově teorii,
   - snaha „uhodnout“ tvar integrálu dle integrandu,
   - implementace části Rischova algoritmu,

R.H. Risch
The Problem of Integration in Finite Terms,
Transactions of the American Mathematical Society 139 (1969), 167–189.

Definice

Těleso $(F;+,\cdot)$ je množina F, na které jsou definovány dvě binární operace $+$ a $\cdot$ takové, že $(F;+)$ a $(F\setminus\{0\};\cdot)$ jsou Abelovy grupy a $\cdot$ je distributivní vzhledem k $+$.

Tj. platí

1. A1, A2, A3, A4 pro F vzhledem k $+$,
2. A1, A2, A3, A4 pro $F\setminus\{0\}$ vzhledem k $\cdot$,
3. A5,

kde

A1:	$\forall a,b,c \in G:$	$a\circ(b\circ c)$	$=$	$(a\circ b)\circ c,$	(asociativita)
A2:	$\forall a \in G \quad \exists e \in G:$	$e\circ a$	$=$	$a\circ e = a,$	(neutrální prvek)
A3:	$\forall a \in G \quad \exists a^{-1} \in G:$	$a\circ a^{-1}$	$=$	$a^{-1}\circ a = e,$	(inverzní prvek)
A4:	$\forall a,b \in G:$	$a\circ b$	$=$	$b\circ a,$	(komutativita)
A5:	$\forall a,b,c \in F:$	$a\cdot(b+c)$	$=$	$(a\cdot b)+(a\cdot c),$	(distibutivita)
		$(a+b)\cdot c$	$=$	$(a\cdot c)+(b\cdot c).$	

Definice

Diferenciální těleso je těleso F, na kterém je definováno zobrazení

$$D : F \to F$$

takové, že $\quad \forall f, g \in F \quad$ platí

$$\begin{aligned} D(f+g) &= D(f) + D(g), \\ D(f \cdot g) &= D(f) \cdot g + f \cdot D(g). \end{aligned}$$

Zobrazení D se říká **derivace** nebo **diferenciální operátor** a značíme $'$.

Definice

Nechť F je diferenciální těleso a G je diferenciální rozšířené těleso F.

- $\theta \in G$ nazveme **logaritmickým prvkem** nad F, pokud existuje $u \in F$ tak, že

$$\theta' = \frac{u'}{u}.$$

Zapisujeme: $\theta = \ln(u)$.

- $\theta \in G$ nazveme **exponenciálním prvkem** nad F, pokud existuje $u \in F$ tak, že

$$\frac{\theta'}{\theta} = u'.$$

Zapisujeme: $\theta = \exp(u)$.

- $\theta \in G$ nazveme **algebraickým prvkem** nad F, pokud existuje $p \in F[z]$ tak, že

$$p(\theta) = 0.$$

- $\theta \in G$ nazveme **transcendentním prvkem** nad F, pokud θ není alg. prvkem nad F.

Definice

Nechť F je diferenciální těleso a G je diferenciální rozšířené těleso F.

- G je **jednoduché rozšíření** F, pokud

$$G = F(\theta) = \left\{ \frac{f(\theta)}{g(\theta)} : \ f, g \in F[z], \ g(\theta) \neq 0 \right\},$$

kde $\theta \in G$.

- G je **transcendentní elementární rozšíření** F, pokud

$$G = F(\theta_1, \ldots, \theta_n),$$

kde θ_i, $i = 1, \ldots, n$, je transcendentní prvek a log. nebo exp. prvek nad $F(\theta_1, \ldots, \theta_{i-1})$.

- G je **elementární rozšíření** F, pokud

$$G = F(\theta_1, \ldots, \theta_n),$$

kde θ_i, $i = 1, \ldots, n$, je transcendentní nebo log. nebo exp. prvek nad $F(\theta_1, \ldots, \theta_{i-1})$.

Věta (Liouvilleova)

Nechť

- F je diferencovatelné těleso s konstantním tělesem $K = \{c \in F : \; c' = 0\}$,
- G je elementární rozšíření F se stejným konst. tělesem K.

Jestliže rovnice $g' = f$, $f \in F$, má řešení $g \in G$

$$\Longrightarrow$$

$$g = v_0 + \sum_{i=1}^{m} c_i \ln(v_i),$$

kde $\quad v_0, v_1, \ldots, v_m \in F \quad$ a $\quad c_1, \ldots, c_m \in K$.

Důkaz:

Krok 1: Pro $G = F$ máme $g \in F$, $m = 0$, $g = v_0$.

Krok 2a: $G = F(\theta), \quad \theta = \ln(u), \quad u \in F,$

θ je transcendentní prvek nad F.

Krok 2a: $G = F(\theta), \quad \theta = \ln(u), \quad u \in F,$

θ je transcendentní prvek nad F.

- $g = \dfrac{a(\theta)}{b(\theta)}$, kde $a(\theta), b(\theta) \in F[\theta]$, $\gcd(a(\theta), b(\theta)) = 1$, $b(\theta)$ je normovaný polynom,

Krok 2a: $G = F(\theta), \quad \theta = \ln(u), \quad u \in F,$

θ je transcendentní prvek nad F.

- $g = \dfrac{a(\theta)}{b(\theta)}$, kde $a(\theta), b(\theta) \in F[\theta]$, $\gcd(a(\theta), b(\theta)) = 1$, $b(\theta)$ je normovaný polynom,
- $b(\theta) = \prod_{i=1}^{\mu} b_i(\theta)^{r_i}$, kde $b_i(\theta)$ jsou různé normované nerozlož. polynomy v $F[\theta]$,

Krok 2a: $G = F(\theta)$, $\theta = \ln(u)$, $u \in F$,

θ je transcendentní prvek nad F.

- $g = \dfrac{a(\theta)}{b(\theta)}$, kde $a(\theta), b(\theta) \in F[\theta]$, $\gcd(a(\theta), b(\theta)) = 1$, $b(\theta)$ je normovaný polynom,
- $b(\theta) = \prod_{i=1}^{\mu} b_i(\theta)^{r_i}$, kde $b_i(\theta)$ jsou různé normované nerozlož. polynomy v $F[\theta]$,
- $g = \dfrac{a(\theta)}{b(\theta)} = a_0(\theta) + \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{r_i} \dfrac{a_{ij}(\theta)}{b_i(\theta)^j}$, kde $a_0(\theta), a_{ij}(\theta), b_i(\theta) \in F[\theta]$,

  $\deg(a_{ij}(\theta)) < \deg(b_i(\theta))$,

Krok 2a: $G = F(\theta),\quad \theta = \ln(u),\quad u \in F,$

θ je transcendentní prvek nad F.

- $g = \dfrac{a(\theta)}{b(\theta)}$, kde $a(\theta), b(\theta) \in F[\theta]$, $\gcd(a(\theta), b(\theta)) = 1$, $b(\theta)$ je normovaný polynom,
- $b(\theta) = \prod_{i=1}^{\mu} b_i(\theta)^{r_i}$, kde $b_i(\theta)$ jsou různé normované nerozlož. polynomy v $F[\theta]$,
- $g = \dfrac{a(\theta)}{b(\theta)} = a_0(\theta) + \sum_{i=1}^{\mu}\sum_{j=1}^{r_i} \dfrac{a_{ij}(\theta)}{b_i(\theta)^j}$, kde $a_0(\theta), a_{ij}(\theta), b_i(\theta) \in F[\theta]$,

  $\deg(a_{ij}(\theta)) < \deg(b_i(\theta))$,
- $f = g' = \left(\dfrac{a(\theta)}{b(\theta)}\right)' = a_0(\theta)' + \sum_{i=1}^{\mu}\sum_{j=1}^{r_i}\left(\dfrac{a_{ij}(\theta)'}{b_i(\theta)^j} - \dfrac{a_{ij}(\theta)\cdot j \cdot b_i(\theta)'}{b_i(\theta)^{j+1}}\right)$,

Krok 2a: $G = F(\theta), \quad \theta = \ln(u), \quad u \in F,$

θ je transcendentní prvek nad F.

- $g = \dfrac{a(\theta)}{b(\theta)}$, kde $a(\theta), b(\theta) \in F[\theta]$, $\gcd(a(\theta), b(\theta)) = 1$, $b(\theta)$ je normovaný polynom,
- $b(\theta) = \displaystyle\prod_{i=1}^{\mu} b_i(\theta)^{r_i}$, kde $b_i(\theta)$ jsou různé normované nerozlož. polynomy v $F[\theta]$,
- $g = \dfrac{a(\theta)}{b(\theta)} = a_0(\theta) + \displaystyle\sum_{i=1}^{\mu}\sum_{j=1}^{r_i} \frac{a_{ij}(\theta)}{b_i(\theta)^j}$, kde $a_0(\theta), a_{ij}(\theta), b_i(\theta) \in F[\theta]$,

  $\deg(a_{ij}(\theta)) < \deg(b_i(\theta))$,
- $f = g' = \left(\dfrac{a(\theta)}{b(\theta)}\right)' = a_0(\theta)' + \displaystyle\sum_{i=1}^{\mu}\sum_{j=1}^{r_i} \left(\frac{a_{ij}(\theta)'}{b_i(\theta)^j} - \frac{a_{ij}(\theta)\cdot j \cdot b_i(\theta)'}{b_i(\theta)^{j+1}}\right)$,
- $f = a_0(\theta)'$,

Krok 2a: $G = F(\theta), \quad \theta = \ln(u), \quad u \in F,$

θ je transcendentní prvek nad F.

- $g = \dfrac{a(\theta)}{b(\theta)}$, kde $a(\theta), b(\theta) \in F[\theta]$, $\gcd(a(\theta), b(\theta)) = 1$, $b(\theta)$ je normovaný polynom,
- $b(\theta) = \prod_{i=1}^{\mu} b_i(\theta)^{r_i}$, kde $b_i(\theta)$ jsou různé normované nerozlož. polynomy v $F[\theta]$,
- $g = \dfrac{a(\theta)}{b(\theta)} = a_0(\theta) + \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{r_i} \dfrac{a_{ij}(\theta)}{b_i(\theta)^j}$, kde $a_0(\theta), a_{ij}(\theta), b_i(\theta) \in F[\theta]$,

  $\deg(a_{ij}(\theta)) < \deg(b_i(\theta))$,
- $f = g' = \left(\dfrac{a(\theta)}{b(\theta)}\right)' = a_0(\theta)' + \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{r_i} \left(\dfrac{a_{ij}(\theta)'}{b_i(\theta)^j} - \dfrac{a_{ij}(\theta) \cdot j \cdot b_i(\theta)'}{b_i(\theta)^{j+1}}\right)$,
- $f = a_0(\theta)'$,
- $a_0(\theta) = c\,\theta + d$, kde $c \in K$ a $d \in F$,

Krok 2a: $G = F(\theta), \quad \theta = \ln(u), \quad u \in F,$

θ je transcendentní prvek nad F.

- $g = \dfrac{a(\theta)}{b(\theta)},$ kde $a(\theta), b(\theta) \in F[\theta]$, $\gcd(a(\theta), b(\theta)) = 1$, $b(\theta)$ je normovaný polynom,
- $b(\theta) = \displaystyle\prod_{i=1}^{\mu} b_i(\theta)^{r_i},$ kde $b_i(\theta)$ jsou různé normované nerozlož. polynomy v $F[\theta]$,
- $g = \dfrac{a(\theta)}{b(\theta)} = a_0(\theta) + \displaystyle\sum_{i=1}^{\mu}\sum_{j=1}^{r_i} \frac{a_{ij}(\theta)}{b_i(\theta)^j},$ kde $a_0(\theta), a_{ij}(\theta), b_i(\theta) \in F[\theta]$,

  $\deg(a_{ij}(\theta)) < \deg(b_i(\theta)),$
- $f = g' = \left(\dfrac{a(\theta)}{b(\theta)}\right)' = a_0(\theta)' + \displaystyle\sum_{i=1}^{\mu}\sum_{j=1}^{r_i} \left(\frac{a_{ij}(\theta)'}{b_i(\theta)^j} - \frac{a_{ij}(\theta)\cdot j\cdot b_i(\theta)'}{b_i(\theta)^{j+1}}\right),$
- $f = a_0(\theta)',$
- $a_0(\theta) = c\,\theta + d,$ kde $c \in K$ a $d \in F$,
- $g = d + c\ln(u),$ kde $c \in K$ a $d, u \in F$.

Krok 2b: $G = F(\theta), \quad \theta = \exp(u), \quad u \in F,$

θ je transcendentní prvek nad F.

Krok 2b: $G = F(\theta), \quad \theta = \exp(u), \quad u \in F,$

θ je transcendentní prvek nad F.

- $g = \dfrac{a(\theta)}{b(\theta)}$, kde $a(\theta), b(\theta) \in F[\theta]$, $\gcd(a(\theta), b(\theta)) = 1$, $b(\theta)$ je normovaný polynom,
- $b(\theta) = \prod_{i=1}^{\mu} b_i(\theta)^{r_i}$, kde $b_i(\theta)$ jsou různé normované nerozložitelné polynomy v $F[\theta]$,
- $g = \dfrac{a(\theta)}{b(\theta)} = a_0(\theta) + \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{r_i} \dfrac{a_{ij}(\theta)}{b_i(\theta)^j}$, kde $a_0(\theta), a_{ij}(\theta), b_i(\theta) \in F[\theta]$,

  $\deg(a_{ij}(\theta)) < \deg(b_i(\theta))$,
- $f = g' = \left(\dfrac{a(\theta)}{b(\theta)}\right)' = a_0(\theta)' + \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{r_i} \left(\dfrac{a_{ij}(\theta)'}{b_i(\theta)^j} - \dfrac{a_{ij}(\theta) \cdot j \cdot b_i(\theta)'}{b_i(\theta)^{j+1}}\right)$,

Krok 2b: $G = F(\theta), \quad \theta = \exp(u), \quad u \in F,$

θ je transcendentní prvek nad F.

- $g = \dfrac{a(\theta)}{b(\theta)}$, kde $a(\theta), b(\theta) \in F[\theta]$, $\gcd(a(\theta), b(\theta)) = 1$, $b(\theta)$ je normovaný polynom,
- $b(\theta) = \prod_{i=1}^{\mu} b_i(\theta)^{r_i}$, kde $b_i(\theta)$ jsou různé normované nerozložitelné polynomy v $F[\theta]$,
- $g = \dfrac{a(\theta)}{b(\theta)} = a_0(\theta) + \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{r_i} \dfrac{a_{ij}(\theta)}{b_i(\theta)^j}$, kde $a_0(\theta), a_{ij}(\theta), b_i(\theta) \in F[\theta]$,

  $\deg(a_{ij}(\theta)) < \deg(b_i(\theta))$,
- $f = g' = \left(\dfrac{a(\theta)}{b(\theta)}\right)' = a_0(\theta)' + \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{r_i} \left(\dfrac{a_{ij}(\theta)'}{b_i(\theta)^j} - \dfrac{a_{ij}(\theta) \cdot j \cdot b_i(\theta)'}{b_i(\theta)^{j+1}}\right)$,
- pokud $b_i(\theta)$ **není monomial**
  - $f = a_0(\theta)'$, $\quad a_0(\theta) = c\,\theta + d$, $\quad g = d + c\ln(u)$, kde $c \in K$ a $d, u \in F$,

Krok 2b: $G = F(\theta), \quad \theta = \exp(u), \quad u \in F,$

θ je transcendentní prvek nad F.

- $g = \dfrac{a(\theta)}{b(\theta)}$, kde $a(\theta), b(\theta) \in F[\theta]$, $\gcd(a(\theta), b(\theta)) = 1$, $b(\theta)$ je normovaný polynom,
- $b(\theta) = \prod_{i=1}^{\mu} b_i(\theta)^{r_i}$, kde $b_i(\theta)$ jsou různé normované nerozložitelné polynomy v $F[\theta]$,
- $g = \dfrac{a(\theta)}{b(\theta)} = a_0(\theta) + \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{r_i} \dfrac{a_{ij}(\theta)}{b_i(\theta)^j}$, kde $a_0(\theta), a_{ij}(\theta), b_i(\theta) \in F[\theta]$, $\deg(a_{ij}(\theta)) < \deg(b_i(\theta))$,
- $f = g' = \left(\dfrac{a(\theta)}{b(\theta)}\right)' = a_0(\theta)' + \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{r_i} \left(\dfrac{a_{ij}(\theta)'}{b_i(\theta)^j} - \dfrac{a_{ij}(\theta) \cdot j \cdot b_i(\theta)'}{b_i(\theta)^{j+1}}\right)$,
- pokud $b_i(\theta)$ **není monomial**
  - $f = a_0(\theta)', \quad a_0(\theta) = c\,\theta + d, \quad g = d + c\ln(u)$, kde $c \in K$ a $d, u \in F$,
- pokud $b_i(\theta)$ **je monomial**
  - $b_i(\theta) = \theta, \qquad f = \left(\sum_{j=-k}^{l} h_j \theta^j\right)'$, kde $h_j \in F$,
  - $f = h_0'$,
  - $g = h_0 \in F$.

Krok 2c: $G = F(\theta)$, θ je algebraický prvek nad F.

Krok 2c: $G = F(\theta)$, θ je algebraický prvek nad F.

- $p(\theta) = 0$, kde $p(z) \in F[z]$ a $\deg(p(z)) = N + 1$,
- $g = a(\theta)$, kde $a(\theta) \in F(\theta)$,
- $f = g' = a(\theta)'$,
- $f = g' = a(\theta_j)'$ pro $j = 0, 1, \dots, N$, kde $\theta = \theta_0$, $\theta_1, \dots, \theta_N$ jsou ostatní kořeny p,
- $(N+1)f = \sum_{j=0}^{N} a(\theta_j)'$,
- $f = \left(\underbrace{\frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^{N} a(\theta_j)}_{=h} \right)'$,
- $h \in F(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_N)$, $h \in F$,
- $g = h \in F$.

Krok 3: $G = F(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N)$, $\theta_1 = \ln(u)$, $u \in F(\theta_2, \ldots, \theta_N)$,

θ_1 je transcen. prvek nad $F(\theta_2, \ldots, \theta_N)$.

Krok 3: $G = F(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N)$, $\theta_1 = \ln(u)$, $u \in F(\theta_2, \ldots, \theta_N)$,
θ_1 je transcen. prvek nad $F(\theta_2, \ldots, \theta_N)$.

- $g = v_0(\theta_1) + \sum_{i=1}^{m} c_i \ln(v_i(\theta_1))$, kde $v_i(\theta_1) \in F(\theta_1)$, $c_i \in K$,

Krok 3: $G = F(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N)$, $\theta_1 = \ln(u)$, $u \in F(\theta_2, \ldots, \theta_N)$,

θ_1 je transcen. prvek nad $F(\theta_2, \ldots, \theta_N)$.

- $g = v_0(\theta_1) + \sum_{i=1}^{m} c_i \ln(v_i(\theta_1))$, kde $v_i(\theta_1) \in F(\theta_1)$, $c_i \in K$,
- $v_0(\theta_1) = \dfrac{a(\theta_1)}{b(\theta_1)}$, kde $a(\theta_1), b(\theta_1) \in F[\theta_1]$, $\gcd(a(\theta_1), b(\theta_1)) = 1$, $b(\theta_1)$ je norm. polynom,

Krok 3: $G = F(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N)$, $\theta_1 = \ln(u)$, $u \in F(\theta_2, \ldots, \theta_N)$,

θ_1 je transcen. prvek nad $F(\theta_2, \ldots, \theta_N)$.

- $g = v_0(\theta_1) + \sum_{i=1}^{m} c_i \ln(v_i(\theta_1))$, kde $v_i(\theta_1) \in F(\theta_1)$, $c_i \in K$,
- $v_0(\theta_1) = \frac{a(\theta_1)}{b(\theta_1)}$, kde $a(\theta_1), b(\theta_1) \in F[\theta_1]$, $\gcd(a(\theta_1), b(\theta_1)) = 1$, $b(\theta_1)$ je norm. polynom,
- $b(\theta_1) = \prod_{i=1}^{\mu} b_i(\theta_1)^{r_i}$, kde $b_i(\theta)$ jsou různé normované nerozlož. polynomy v $F[\theta_1]$,

Krok 3: $G = F(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N)$, $\theta_1 = \ln(u)$, $u \in F(\theta_2, \ldots, \theta_N)$,

θ_1 je transcen. prvek nad $F(\theta_2, \ldots, \theta_N)$.

- $g = v_0(\theta_1) + \sum_{i=1}^{m} c_i \ln(v_i(\theta_1))$, kde $v_i(\theta_1) \in F(\theta_1)$, $c_i \in K$,
- $v_0(\theta_1) = \dfrac{a(\theta_1)}{b(\theta_1)}$, kde $a(\theta_1), b(\theta_1) \in F[\theta_1]$, $\gcd(a(\theta_1), b(\theta_1)) = 1$, $b(\theta_1)$ je norm. polynom,
- $b(\theta_1) = \prod_{i=1}^{\mu} b_i(\theta_1)^{r_i}$, kde $b_i(\theta)$ jsou různé normované nerozlož. polynomy v $F[\theta_1]$,
- $v_0(\theta_1) = a_0(\theta_1) + \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{r_i} \dfrac{a_{ij}(\theta_1)}{b_i(\theta_1)^j}$, kde $a_0, a_{ij}, b_i \in F[\theta_1]$ a $\deg(a_{ij}) < \deg(b_i)$,

Krok 3: $G = F(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N)$, $\theta_1 = \ln(u)$, $u \in F(\theta_2, \ldots, \theta_N)$,

θ_1 je transcen. prvek nad $F(\theta_2, \ldots, \theta_N)$.

- $g = v_0(\theta_1) + \sum_{i=1}^{m} c_i \ln(v_i(\theta_1))$, kde $v_i(\theta_1) \in F(\theta_1)$, $c_i \in K$,
- $v_0(\theta_1) = \frac{a(\theta_1)}{b(\theta_1)}$, kde $a(\theta_1), b(\theta_1) \in F[\theta_1]$, $\gcd(a(\theta_1), b(\theta_1)) = 1$, $b(\theta_1)$ je norm. polynom,
- $b(\theta_1) = \prod_{i=1}^{\mu} b_i(\theta_1)^{r_i}$, kde $b_i(\theta)$ jsou různé normované nerozlož. polynomy v $F[\theta_1]$,
- $v_0(\theta_1) = a_0(\theta_1) + \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{r_i} \frac{a_{ij}(\theta_1)}{b_i(\theta_1)^j}$, kde $a_0, a_{ij}, b_i \in F[\theta_1]$ a $\deg(a_{ij}) < \deg(b_i)$,
- $f = g' = a_0(\theta_1)' + \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{r_i} \left(\frac{a_{ij}(\theta_1)'}{b_i(\theta_1)^j} - \frac{a_{ij}(\theta_1) \cdot j \cdot b_i(\theta_1)'}{b_i(\theta_1)^{j+1}} \right) + \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{v_i(\theta_1)'}{v_i(\theta_1)}$,

Krok 3: $G = F(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)$, $\theta_1 = \ln(u)$, $u \in F(\theta_2, \dots, \theta_N)$,
θ_1 je transcen. prvek nad $F(\theta_2, \dots, \theta_N)$.

- $g = v_0(\theta_1) + \sum_{i=1}^{m} c_i \ln(v_i(\theta_1))$, kde $v_i(\theta_1) \in F(\theta_1)$, $c_i \in K$,
- $v_0(\theta_1) = \frac{a(\theta_1)}{b(\theta_1)}$, kde $a(\theta_1), b(\theta_1) \in F[\theta_1]$, $\gcd(a(\theta_1), b(\theta_1)) = 1$, $b(\theta_1)$ je norm. polynom,
- $b(\theta_1) = \prod_{i=1}^{\mu} b_i(\theta_1)^{r_i}$, kde $b_i(\theta)$ jsou různé normované nerozlož. polynomy v $F[\theta_1]$,
- $v_0(\theta_1) = a_0(\theta_1) + \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{r_i} \frac{a_{ij}(\theta_1)}{b_i(\theta_1)^j}$, kde $a_0, a_{ij}, b_i \in F[\theta_1]$ a $\deg(a_{ij}) < \deg(b_i)$,
- $f = g' = a_0(\theta_1)' + \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{r_i} \left(\frac{a_{ij}(\theta_1)'}{b_i(\theta_1)^j} - \frac{a_{ij}(\theta_1) \cdot j \cdot b_i(\theta_1)'}{b_i(\theta_1)^{j+1}} \right) + \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{v_i(\theta_1)'}{v_i(\theta_1)}$,
- $f = a_0(\theta_1)' + \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{v_i'}{v_i}$, kde $a_0(\theta_1) \in F[\theta_1]$, $v_i \in F$ a $c_i \in K$,

Krok 3: $G = F(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N)$, $\theta_1 = \ln(u)$, $u \in F(\theta_2, \ldots, \theta_N)$,
θ_1 je transcen. prvek nad $F(\theta_2, \ldots, \theta_N)$.

- $g = v_0(\theta_1) + \sum_{i=1}^{m} c_i \ln(v_i(\theta_1))$, kde $v_i(\theta_1) \in F(\theta_1)$, $c_i \in K$,
- $v_0(\theta_1) = \frac{a(\theta_1)}{b(\theta_1)}$, kde $a(\theta_1), b(\theta_1) \in F[\theta_1]$, $\gcd(a(\theta_1), b(\theta_1)) = 1$, $b(\theta_1)$ je norm. polynom,
- $b(\theta_1) = \prod_{i=1}^{\mu} b_i(\theta_1)^{r_i}$, kde $b_i(\theta)$ jsou různé normované nerozlož. polynomy v $F[\theta_1]$,
- $v_0(\theta_1) = a_0(\theta_1) + \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{r_i} \frac{a_{ij}(\theta_1)}{b_i(\theta_1)^j}$, kde $a_0, a_{ij}, b_i \in F[\theta_1]$ a $\deg(a_{ij}) < \deg(b_i)$,
- $f = g' = a_0(\theta_1)' + \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{r_i} \left(\frac{a_{ij}(\theta_1)'}{b_i(\theta_1)^j} - \frac{a_{ij}(\theta_1) \cdot j \cdot b_i(\theta_1)'}{b_i(\theta_1)^{j+1}} \right) + \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{v_i(\theta_1)'}{v_i(\theta_1)}$,
- $f = a_0(\theta_1)' + \sum_{i=1}^{m} c_i \frac{v_i'}{v_i}$, kde $a_0(\theta_1) \in F[\theta_1]$, $v_i \in F$ a $c_i \in K$,
- $a_0(\theta_1) = c\,\theta_1 + d$, kde $c \in K$ a $d \in F$,

Krok 3: $G = F(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N)$, $\theta_1 = \ln(u)$, $u \in F(\theta_2, \ldots, \theta_N)$,

θ_1 je transcen. prvek nad $F(\theta_2, \ldots, \theta_N)$.

- $g = v_0(\theta_1) + \sum_{i=1}^{m} c_i \ln(v_i(\theta_1))$, kde $v_i(\theta_1) \in F(\theta_1)$, $c_i \in K$,
- $v_0(\theta_1) = \dfrac{a(\theta_1)}{b(\theta_1)}$, kde $a(\theta_1), b(\theta_1) \in F[\theta_1]$, $\gcd(a(\theta_1), b(\theta_1)) = 1$, $b(\theta_1)$ je norm. polynom,
- $b(\theta_1) = \prod_{i=1}^{\mu} b_i(\theta_1)^{r_i}$, kde $b_i(\theta)$ jsou různé normované nerozlož. polynomy v $F[\theta_1]$,
- $v_0(\theta_1) = a_0(\theta_1) + \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{r_i} \dfrac{a_{ij}(\theta_1)}{b_i(\theta_1)^j}$, kde $a_0, a_{ij}, b_i \in F[\theta_1]$ a $\deg(a_{ij}) < \deg(b_i)$,
- $f = g' = a_0(\theta_1)' + \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{r_i} \left(\dfrac{a_{ij}(\theta_1)'}{b_i(\theta_1)^j} - \dfrac{a_{ij}(\theta_1) \cdot j \cdot b_i(\theta_1)'}{b_i(\theta_1)^{j+1}} \right) + \sum_{i=1}^{m} c_i \dfrac{v_i(\theta_1)'}{v_i(\theta_1)}$,
- $f = a_0(\theta_1)' + \sum_{i=1}^{m} c_i \dfrac{v_i'}{v_i}$, kde $a_0(\theta_1) \in F[\theta_1]$, $v_i \in F$ a $c_i \in K$,
- $a_0(\theta_1) = c\,\theta_1 + d$, kde $c \in K$ a $d \in F$,
- $g = d + c\ln(u) + \sum_{i=1}^{m} c_i \ln(v_i)$, kde $c, c_i \in K$ a $d, u, v_i \in F$.

Rischův algoritmus $G = F(\theta), \quad \theta = \ln(u), \quad u \in F,$

θ je transcendentní prvek nad F.

Rischův algoritmus $G = F(\theta)$, $\theta = \ln(u)$, $u \in F$,

θ je transcendentní prvek nad F.

- $\int f(\theta) = \int p(\theta) + \int \frac{r(\theta)}{q(\theta)}$, kde $p(\theta), q(\theta), r(\theta) \in F[\theta]$, $\deg(r(\theta)) < \deg(q(\theta))$,

Rischův algoritmus $G = F(\theta)$, $\theta = \ln(u)$, $u \in F$, θ je transcendentní prvek nad F.

- $\displaystyle\int f(\theta) = \int p(\theta) + \int \frac{r(\theta)}{q(\theta)}$, kde $p(\theta), q(\theta), r(\theta) \in F[\theta]$, $\deg(r(\theta)) < \deg(q(\theta))$,
- $\displaystyle\int f(\theta) = \int p(\theta) + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{i} \int \frac{r_{ij}(\theta)}{q_i(\theta)^j}$, kde $q_i(\theta)$ je normovaný square-free polynom,

Rischův algoritmus $G = F(\theta)$, $\theta = \ln(u)$, $u \in F$,

θ je transcendentní prvek nad F.

- $\displaystyle\int f(\theta) = \int p(\theta) + \int \frac{r(\theta)}{q(\theta)}$, kde $p(\theta), q(\theta), r(\theta) \in F[\theta]$, $\deg(r(\theta)) < \deg(q(\theta))$,
- $\displaystyle\int f(\theta) = \int p(\theta) + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{i} \int \frac{r_{ij}(\theta)}{q_i(\theta)^j}$, kde $q_i(\theta)$ je normovaný square-free polynom,
- $r_{ij}(\theta) = s(\theta)q_i(\theta) + t(\theta)q_i(\theta)'$, kde $\deg(s(\theta)) < \deg(q_i(\theta)')$ a $\deg(t(\theta)) < \deg(q_i(\theta))$,

Rischův algoritmus $G = F(\theta)$, $\theta = \ln(u)$, $u \in F$,

θ je transcendentní prvek nad F.

- $\int f(\theta) = \int p(\theta) + \int \frac{r(\theta)}{q(\theta)}$, kde $p(\theta), q(\theta), r(\theta) \in F[\theta]$, $\deg(r(\theta)) < \deg(q(\theta))$,
- $\int f(\theta) = \int p(\theta) + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{i} \int \frac{r_{ij}(\theta)}{q_i(\theta)^j}$, kde $q_i(\theta)$ je normovaný square-free polynom,
- $r_{ij}(\theta) = s(\theta)q_i(\theta) + t(\theta)q_i(\theta)'$, kde $\deg(s(\theta)) < \deg(q_i(\theta)')$ a $\deg(t(\theta)) < \deg(q_i(\theta))$,
- $\int \frac{r_{ij}(\theta)}{q_i(\theta)^j} = \int \frac{s(\theta)}{q_i(\theta)^{j-1}} + \int \frac{t(\theta)q_i(\theta)'}{q_i(\theta)^j} = \frac{-\frac{1}{j-1}t(\theta)}{q_i(\theta)^{j-1}} + \int \frac{s(\theta) + \frac{1}{j-1}t(\theta)'}{q_i(\theta)^{j-1}}$,

Rischův algoritmus $G = F(\theta)$, $\theta = \ln(u)$, $u \in F$,

θ je transcendentní prvek nad F.

- $\int f(\theta) = \int p(\theta) + \int \frac{r(\theta)}{q(\theta)}$, kde $p(\theta), q(\theta), r(\theta) \in F[\theta]$, $\deg(r(\theta)) < \deg(q(\theta))$,
- $\int f(\theta) = \int p(\theta) + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{i} \int \frac{r_{ij}(\theta)}{q_i(\theta)^j}$, kde $q_i(\theta)$ je normovaný square-free polynom,
- $r_{ij}(\theta) = s(\theta)q_i(\theta) + t(\theta)q_i(\theta)'$, kde $\deg(s(\theta)) < \deg(q_i(\theta)')$ a $\deg(t(\theta)) < \deg(q_i(\theta))$,
- $\int \frac{r_{ij}(\theta)}{q_i(\theta)^j} = \int \frac{s(\theta)}{q_i(\theta)^{j-1}} + \int \frac{t(\theta)q_i(\theta)'}{q_i(\theta)^j} = \frac{-\frac{1}{j-1}t(\theta)}{q_i(\theta)^{j-1}} + \int \frac{s(\theta) + \frac{1}{j-1}t(\theta)'}{q_i(\theta)^{j-1}}$,
- $\int f(\theta) = \int p(\theta) + \frac{c(\theta)}{d(\theta)} + \int \frac{a(\theta)}{b(\theta)}$, kde $b(\theta)$ je normovaný square-free polynom,

Rischův algoritmus $G = F(\theta)$, $\theta = \ln(u)$, $u \in F$,

θ je transcendentní prvek nad F.

- $\int f(\theta) = \int p(\theta) + \int \frac{r(\theta)}{q(\theta)}$, kde $p(\theta), q(\theta), r(\theta) \in F[\theta]$, $\deg(r(\theta)) < \deg(q(\theta))$,
- $\int f(\theta) = \int p(\theta) + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{i} \int \frac{r_{ij}(\theta)}{q_i(\theta)^j}$, kde $q_i(\theta)$ je normovaný square-free polynom,
- $r_{ij}(\theta) = s(\theta)q_i(\theta) + t(\theta)q_i(\theta)'$, kde $\deg(s(\theta)) < \deg(q_i(\theta)')$ a $\deg(t(\theta)) < \deg(q_i(\theta))$,
- $\int \frac{r_{ij}(\theta)}{q_i(\theta)^j} = \int \frac{s(\theta)}{q_i(\theta)^{j-1}} + \int \frac{t(\theta)q_i(\theta)'}{q_i(\theta)^j} = \frac{-\frac{1}{j-1}t(\theta)}{q_i(\theta)^{j-1}} + \int \frac{s(\theta) + \frac{1}{j-1}t(\theta)'}{q_i(\theta)^{j-1}}$,
- $\int f(\theta) = \int p(\theta) + \frac{c(\theta)}{d(\theta)} + \int \frac{a(\theta)}{b(\theta)}$, kde $b(\theta)$ je normovaný square-free polynom,
- $R(z) = \mathrm{res}_\theta(a(\theta) - z \cdot b(\theta)', b(\theta))$,

Rischův algoritmus $G = F(\theta)$, $\theta = \ln(u)$, $u \in F$,

θ je transcendentní prvek nad F.

- $\int f(\theta) = \int p(\theta) + \int \frac{r(\theta)}{q(\theta)}$, kde $p(\theta), q(\theta), r(\theta) \in F[\theta]$, $\deg(r(\theta)) < \deg(q(\theta))$,
- $\int f(\theta) = \int p(\theta) + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{i} \int \frac{r_{ij}(\theta)}{q_i(\theta)^j}$, kde $q_i(\theta)$ je normovaný square-free polynom,
- $r_{ij}(\theta) = s(\theta)q_i(\theta) + t(\theta)q_i(\theta)'$, kde $\deg(s(\theta)) < \deg(q_i(\theta)')$ a $\deg(t(\theta)) < \deg(q_i(\theta))$,
- $\int \frac{r_{ij}(\theta)}{q_i(\theta)^j} = \int \frac{s(\theta)}{q_i(\theta)^{j-1}} + \int \frac{t(\theta)q_i(\theta)'}{q_i(\theta)^j} = \frac{-\frac{1}{j-1}t(\theta)}{q_i(\theta)^{j-1}} + \int \frac{s(\theta) + \frac{1}{j-1}t(\theta)'}{q_i(\theta)^{j-1}}$,
- $\int f(\theta) = \int p(\theta) + \frac{c(\theta)}{d(\theta)} + \int \frac{a(\theta)}{b(\theta)}$, kde $b(\theta)$ je normovaný square-free polynom,
- $R(z) = \mathrm{res}_\theta(a(\theta) - z \cdot b(\theta)', b(\theta))$,
- $\int \frac{a(\theta)}{b(\theta)}$ je elementární $\iff$ všechny kořeny c_i polynomu $R(z)$ jsou konstantní,

Rischův algoritmus $G = F(\theta), \quad \theta = \ln(u), \quad u \in F,$

θ je transcendentní prvek nad F.

- $\int f(\theta) = \int p(\theta) + \int \frac{r(\theta)}{q(\theta)},$ kde $p(\theta), q(\theta), r(\theta) \in F[\theta], \quad \deg(r(\theta)) < \deg(q(\theta)),$
- $\int f(\theta) = \int p(\theta) + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{i} \int \frac{r_{ij}(\theta)}{q_i(\theta)^j},$ kde $q_i(\theta)$ je normovaný square-free polynom,
- $r_{ij}(\theta) = s(\theta) q_i(\theta) + t(\theta) q_i(\theta)',$ kde $\deg(s(\theta)) < \deg(q_i(\theta)')$ a $\deg(t(\theta)) < \deg(q_i(\theta)),$
- $\int \frac{r_{ij}(\theta)}{q_i(\theta)^j} = \int \frac{s(\theta)}{q_i(\theta)^{j-1}} + \int \frac{t(\theta) q_i(\theta)'}{q_i(\theta)^j} = \frac{-\frac{1}{j-1} t(\theta)}{q_i(\theta)^{j-1}} + \int \frac{s(\theta) + \frac{1}{j-1} t(\theta)'}{q_i(\theta)^{j-1}},$
- $\int f(\theta) = \int p(\theta) + \frac{c(\theta)}{d(\theta)} + \int \frac{a(\theta)}{b(\theta)},$ kde $b(\theta)$ je normovaný square-free polynom,
- $R(z) = \mathrm{res}_\theta(a(\theta) - z \cdot b(\theta)', b(\theta)),$
- $\int \frac{a(\theta)}{b(\theta)}$ je elementární $\iff$ všechny kořeny c_i polynomu $R(z)$ jsou konstantní,
- $\int f(\theta) = b_{l+1}\theta^{l+1} + \ldots b_1 \theta + b_0 + \sum_{i=1}^{m} c_i \ln(v_i(\theta)),$ kde $l = \deg(p(\theta)),$

  $v_i(\theta) = \gcd(a(\theta) - c_i \cdot b(\theta)', b(\theta)).$

Příklad

- $$\int \frac{x(x+1)\left(\left(x^2 e^{2x^2} - \ln^2(x+1)\right)^2 + 2x e^{3x^2}\left(x - \left(2x^3 + 2x^2 + x + 1\right)\ln(x+1)\right)\right)}{\left((x+1)\ln^2(x+1) - \left(x^3 + x^2\right)e^{2x^2}\right)^2}\,\mathrm{d}\,x,$$

Příklad

- $$\int \frac{x(x+1)\left(\left(x^2e^{2x^2}-\ln^2(x+1)\right)^2+2xe^{3x^2}\left(x-\left(2x^3+2x^2+x+1\right)\ln(x+1)\right)\right)}{\left((x+1)\ln^2(x+1)-\left(x^3+x^2\right)e^{2x^2}\right)^2}\,\mathrm{d}\,x,$$
- $\theta_1 = e^{x^2}$, $\theta_2 = \ln(x+1)$,

Příklad

- $$\int \frac{x(x+1)\left(\left(x^2 e^{2x^2} - \ln^2(x+1)\right)^2 + 2x e^{3x^2}\left(x - \left(2x^3+2x^2+x+1\right)\ln(x+1)\right)\right)}{\left((x+1)\ln^2(x+1) - (x^3+x^2)\, e^{2x^2}\right)^2}\, \mathrm{d}\,x,$$

- $\theta_1 = e^{x^2}$, $\theta_2 = \ln(x+1)$,

- $$f(\theta_2) = \frac{x(x+1)\left(\left(x^2\theta_1^2 - \theta_2^2\right)^2 + 2x\theta_1^3\left(x - \left(2x^3+2x^2+x+1\right)\theta_2\right)\right)}{\left((x+1)\theta_2^2 - x^2(x+1)\theta_1^2\right)^2}$$

$$= \frac{x}{x+1} + \frac{\frac{2x^2}{x+1}\theta_1^3\left(x - \left(2x^3+2x^2+x+1\right)\theta_2\right)}{\left(\theta_2^2 - x^2\theta_1^2\right)^2}$$

$$= p(\theta_2) + \frac{r(\theta_2)}{q_2(\theta_2)^2},$$ kde $q_2(\theta_2) = \theta_2^2 - x^2\theta_1^2$ je square-free.

Příklad

- $f(\theta_2) = p(\theta_2) + \dfrac{r(\theta_2)}{q_2(\theta_2)^2}$, kde $q_2(\theta_2) = \theta_2^2 - x^2\theta_1^2$ je square-free,

Příklad

- $f(\theta_2) = p(\theta_2) + \dfrac{r(\theta_2)}{q_2(\theta_2)^2}$, kde $q_2(\theta_2) = \theta_2^2 - x^2\theta_1^2$ je square-free,
- $r(\theta_2) = s(\theta_2)q_2(\theta_2) + t(\theta_2)q_2(\theta_2)'$, kde $q_2(\theta_2)' = 2\theta_2\frac{1}{x+1} - 2x\theta_1^2 - x^2 2\theta_1\theta_1 2x$,

Příklad

- $f(\theta_2) = p(\theta_2) + \dfrac{r(\theta_2)}{q_2(\theta_2)^2}$, kde $q_2(\theta_2) = \theta_2^2 - x^2\theta_1^2$ je square-free,
- $r(\theta_2) = s(\theta_2)q_2(\theta_2) + t(\theta_2)q_2(\theta_2)'$, kde $q_2(\theta_2)' = 2\theta_2\frac{1}{x+1} - 2x\theta_1^2 - x^2 2\theta_1\theta_1 2x$,
- $$\frac{2x^2}{x+1}\theta_1^3\left(x - \left(2x^3 + 2x^2 + x + 1\right)\theta_2\right) = s(\theta_2)\left(\theta_2^2 - x^2\theta_1^2\right) + t(\theta_2)\left(\frac{2}{x+1}\theta_2 - 2x(1+2x^2)\theta_1^2\right),$$

Příklad

- $f(\theta_2) = p(\theta_2) + \dfrac{r(\theta_2)}{q_2(\theta_2)^2}$, kde $q_2(\theta_2) = \theta_2^2 - x^2\theta_1^2$ je square-free,
- $r(\theta_2) = s(\theta_2)q_2(\theta_2) + t(\theta_2)q_2(\theta_2)'$, kde $q_2(\theta_2)' = 2\theta_2\frac{1}{x+1} - 2x\theta_1^2 - x^2 2\theta_1\theta_1 2x$,
- $$\frac{2x^2}{x+1}\theta_1^3\left(x - \left(2x^3 + 2x^2 + x + 1\right)\theta_2\right) = s(\theta_2)\left(\theta_2^2 - x^2\theta_1^2\right) + t(\theta_2)\left(\frac{2}{x+1}\theta_2 - 2x(1+2x^2)\theta_1^2\right),$$
- ... $s(\theta_2) = \dfrac{-2x}{x+1}\theta_1$, $t(\theta_2) = x\theta_1\theta_2$,

Příklad

- $f(\theta_2) = p(\theta_2) + \dfrac{r(\theta_2)}{q_2(\theta_2)^2}$, kde $q_2(\theta_2) = \theta_2^2 - x^2\theta_1^2$ je square-free,
- $r(\theta_2) = s(\theta_2)q_2(\theta_2) + t(\theta_2)q_2(\theta_2)'$, kde $q_2(\theta_2)' = 2\theta_2\frac{1}{x+1} - 2x\theta_1^2 - x^2 2\theta_1\theta_1 2x$,
- $$\frac{2x^2}{x+1}\theta_1^3\left(x - \left(2x^3+2x^2+x+1\right)\theta_2\right) = s(\theta_2)\left(\theta_2^2 - x^2\theta_1^2\right) + t(\theta_2)\left(\frac{2}{x+1}\theta_2 - 2x(1+2x^2)\theta_1^2\right),$$
- $\ldots \qquad s(\theta_2) = \dfrac{-2x}{x+1}\theta_1, \qquad t(\theta_2) = x\theta_1\theta_2,$
- $$\int \frac{r(\theta_2)}{q_2(\theta_2)^2} = \int \frac{s(\theta_2)}{q_2(\theta_2)} + \int \frac{t(\theta_2)q_2(\theta_2)'}{q_2(\theta_2)^2} = \frac{-t(\theta_2)}{q_2(\theta_2)} + \int \frac{s(\theta_2)+t(\theta_2)'}{q_2(\theta_2)}$$
$$= \frac{-x\theta_1\theta_2}{\theta_2^2 - x^2\theta_1^2} + \int \frac{\frac{-2x}{x+1}\theta_1 + \theta_1\theta_2 + x(2x\theta_1\theta_2 + \theta_1\frac{1}{x+1})}{\theta_2^2 - x^2\theta_1^2}$$
$$= \frac{-x\theta_1\theta_2}{\theta_2^2 - x^2\theta_1^2} + \int \frac{(2x^2+1)\theta_1\theta_2 - \frac{x}{x+1}\theta_1}{\theta_2^2 - x^2\theta_1^2}.$$

Příklad

- $$\int \frac{r(\theta_2)}{q_2(\theta_2)^2} = \frac{-x\theta_1\theta_2}{\theta_2^2 - x^2\theta_1^2} + \int \frac{a(\theta_2)}{q_2(\theta_2)},$$

kde $a(\theta_2) = (2x^2+1)\theta_1\theta_2 - \frac{x}{x+1}\theta_1,$
$q_2(\theta_2) = \theta_2^2 - x^2\theta_1^2,$

Příklad

- $\displaystyle\int \frac{r(\theta_2)}{q_2(\theta_2)^2} = \frac{-x\theta_1\theta_2}{\theta_2^2 - x^2\theta_1^2} + \int \frac{a(\theta_2)}{q_2(\theta_2)},$ kde $a(\theta_2) = (2x^2+1)\theta_1\theta_2 - \frac{x}{x+1}\theta_1,$ $q_2(\theta_2) = \theta_2^2 - x^2\theta_1^2,$

- $R(z) = \operatorname{res}_{\theta_2}(a(\theta_2) - z \cdot q_2(\theta_2)', q_2(\theta_2))$

$$= \det \begin{bmatrix} p_1(\theta_1) & p_2(\theta_1) & 0 \\ 0 & p_1(\theta_1) & p_2(\theta_1) \\ 1 & 0 & -x^2\theta_1^2 \end{bmatrix},$$ kde $$\begin{aligned} p_1(\theta_1) &= (2x^2+1)\theta_1 - z\tfrac{2}{x+1}, \\ p_2(\theta_1) &= -\tfrac{x}{x+1}\theta_1 + z2x(1+2x^2)\theta_1^2, \end{aligned}$$

$$R(z) = (4z^2-1)x^2\theta_1^2\left((1+2x^2)\theta_1^2 - \frac{1}{(1+x)^2}\right),$$

Příklad

- $\displaystyle\int \frac{r(\theta_2)}{q_2(\theta_2)^2} = \frac{-x\theta_1\theta_2}{\theta_2^2 - x^2\theta_1^2} + \int \frac{a(\theta_2)}{q_2(\theta_2)},$ kde $a(\theta_2) = (2x^2+1)\theta_1\theta_2 - \frac{x}{x+1}\theta_1,$ $q_2(\theta_2) = \theta_2^2 - x^2\theta_1^2,$
- $R(z) = \mathrm{res}_{\theta_2}(a(\theta_2) - z \cdot q_2(\theta_2)', q_2(\theta_2))$

$$= \det \begin{bmatrix} p_1(\theta_1) & p_2(\theta_1) & 0 \\ 0 & p_1(\theta_1) & p_2(\theta_1) \\ 1 & 0 & -x^2\theta_1^2 \end{bmatrix},$$

kde

$$\begin{aligned} p_1(\theta_1) &= (2x^2+1)\theta_1 - z\frac{2}{x+1}, \\ p_2(\theta_1) &= -\frac{x}{x+1}\theta_1 + z2x(1+2x^2)\theta_1^2, \end{aligned}$$

$$R(z) = (4z^2-1)x^2\theta_1^2\left((1+2x^2)\theta_1^2 - \frac{1}{(1+x)^2}\right),$$

- $c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_2 = -\frac{1}{2},$

Příklad

- $$\int \frac{r(\theta_2)}{q_2(\theta_2)^2} = \frac{-x\theta_1\theta_2}{\theta_2^2 - x^2\theta_1^2} + \int \frac{a(\theta_2)}{q_2(\theta_2)},$$ kde $a(\theta_2) = (2x^2+1)\theta_1\theta_2 - \frac{x}{x+1}\theta_1,$ $q_2(\theta_2) = \theta_2^2 - x^2\theta_1^2,$

- $R(z) = \operatorname{res}_{\theta_2}(a(\theta_2) - z \cdot q_2(\theta_2)', q_2(\theta_2))$

$$= \det \begin{bmatrix} p_1(\theta_1) & p_2(\theta_1) & 0 \\ 0 & p_1(\theta_1) & p_2(\theta_1) \\ 1 & 0 & -x^2\theta_1^2 \end{bmatrix},$$ kde $$\begin{aligned} p_1(\theta_1) &= (2x^2+1)\theta_1 - z\frac{2}{x+1}, \\ p_2(\theta_1) &= -\frac{x}{x+1}\theta_1 + z2x(1+2x^2)\theta_1^2, \end{aligned}$$

$$R(z) = (4z^2-1)x^2\theta_1^2\left((1+2x^2)\theta_1^2 - \frac{1}{(1+x)^2}\right),$$

- $c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_2 = -\frac{1}{2},$

- $v_1(\theta_2) = \gcd(a(\theta_2) - c_1 \cdot q_2(\theta_2)', q_2(\theta_2)) = \theta_2 + x\theta_1,$

Příklad

- $\displaystyle\int \frac{r(\theta_2)}{q_2(\theta_2)^2} = \frac{-x\theta_1\theta_2}{\theta_2^2 - x^2\theta_1^2} + \int \frac{a(\theta_2)}{q_2(\theta_2)},$ kde $a(\theta_2) = (2x^2+1)\theta_1\theta_2 - \frac{x}{x+1}\theta_1,$ $q_2(\theta_2) = \theta_2^2 - x^2\theta_1^2,$

- $$R(z) = \mathrm{res}_{\theta_2}(a(\theta_2) - z \cdot q_2(\theta_2)', q_2(\theta_2))$$
  $$= \det \begin{bmatrix} p_1(\theta_1) & p_2(\theta_1) & 0 \\ 0 & p_1(\theta_1) & p_2(\theta_1) \\ 1 & 0 & -x^2\theta_1^2 \end{bmatrix},$$ kde $$\begin{aligned} p_1(\theta_1) &= (2x^2+1)\theta_1 - z\tfrac{2}{x+1}, \\ p_2(\theta_1) &= -\tfrac{x}{x+1}\theta_1 + z2x(1+2x^2)\theta_1^2, \end{aligned}$$
  $$R(z) = (4z^2-1)x^2\theta_1^2\left((1+2x^2)\theta_1^2 - \frac{1}{(1+x)^2}\right),$$

- $c_1 = \dfrac{1}{2}, \quad c_2 = -\dfrac{1}{2},$

- $v_1(\theta_2) = \gcd(a(\theta_2) - c_1 \cdot q_2(\theta_2)', q_2(\theta_2)) = \theta_2 + x\theta_1,$

- $v_2(\theta_2) = \gcd(a(\theta_2) - c_2 \cdot q_2(\theta_2)', q_2(\theta_2)) = \theta_2 - x\theta_1,$

Příklad

- $\displaystyle\int \frac{r(\theta_2)}{q_2(\theta_2)^2} = \frac{-x\theta_1\theta_2}{\theta_2^2 - x^2\theta_1^2} + \int \frac{a(\theta_2)}{q_2(\theta_2)},$ kde $a(\theta_2) = (2x^2+1)\theta_1\theta_2 - \frac{x}{x+1}\theta_1,$ $q_2(\theta_2) = \theta_2^2 - x^2\theta_1^2,$

- $R(z) = \mathrm{res}_{\theta_2}(a(\theta_2) - z \cdot q_2(\theta_2)', q_2(\theta_2))$

  $$= \det \begin{bmatrix} p_1(\theta_1) & p_2(\theta_1) & 0 \\ 0 & p_1(\theta_1) & p_2(\theta_1) \\ 1 & 0 & -x^2\theta_1^2 \end{bmatrix},$$ kde $$\begin{aligned} p_1(\theta_1) &= (2x^2+1)\theta_1 - z\tfrac{2}{x+1}, \\ p_2(\theta_1) &= -\tfrac{x}{x+1}\theta_1 + z2x(1+2x^2)\theta_1^2, \end{aligned}$$

  $$R(z) = (4z^2-1)x^2\theta_1^2\left((1+2x^2)\theta_1^2 - \frac{1}{(1+x)^2}\right),$$

- $c_1 = \dfrac{1}{2}, \quad c_2 = -\dfrac{1}{2},$

- $v_1(\theta_2) = \gcd(a(\theta_2) - c_1 \cdot q_2(\theta_2)', q_2(\theta_2)) = \theta_2 + x\theta_1,$

- $v_2(\theta_2) = \gcd(a(\theta_2) - c_2 \cdot q_2(\theta_2)', q_2(\theta_2)) = \theta_2 - x\theta_1,$

- $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}\,x = x - \ln(x+1) - \frac{x\theta_1\theta_2}{\theta_2^2 - x^2\theta_1^2} + \frac{1}{2}\ln(\theta_2 + x\theta_1) - \frac{1}{2}\ln(\theta_2 - x\theta_1).$

Rischův algoritmus $G = F(\theta)$, $\theta = \exp(u)$, $u \in F$, θ je transcendentní prvek nad F.

- $\displaystyle\int f(\theta) = \int p(\theta) + \int \frac{r(\theta)}{q(\theta)}$, kde $q(\theta), p(\theta), r(\theta) \in F[\theta]$, $\deg(r(\theta)) < \deg(q(\theta))$, $\theta \nmid q(\theta)$,
- $\displaystyle\int f(\theta) = \int p(\theta) + \frac{c(\theta)}{d(\theta)} + \int \frac{a(\theta)}{b(\theta)}$, kde $b(\theta)$ je normovaný square-free polynom,
- $R(z) = \mathrm{res}_\theta(a(\theta) - z \cdot b(\theta)', b(\theta))$,
- $\displaystyle\int \frac{a(\theta)}{b(\theta)}$ je elementární $\iff$ všechny kořeny c_i polynomu $R(z)$ jsou konstantní,
- $\displaystyle\int f(\theta) = \sum_{i=-k}^{l+1} b_i \theta^i - \left(\sum_{i=1}^{m} c_i \deg(v_i(\theta))\right) u + \sum_{i=1}^{m} c_i \ln(v_i(\theta))$,

kde $l = \deg(p(\theta))$,

$v_i(\theta) = \gcd(a(\theta) - c_i \cdot b(\theta)', b(\theta))$.

Příklad

$$\int \frac{x^2 + 2x + 1 + (3x + 1)\sqrt{x + \ln x}}{x\sqrt{x + \ln x}(x + \sqrt{x + \ln x})} \,\mathrm{d}\,x$$

$$=$$

$$2\left(\sqrt{x + \ln x} + \ln(x + \sqrt{x + \ln x})\right)$$

Literatura

K.O. Geddes, S.R. Czapor a G. Labahn
Algorithms for Computer Algebra,
Kluwer Academic Publishers, Norwell, Massachusetts, 608 p. (1992).

J. Grabmeier, E. Kaltofen a V. Weispfenning
Computer Algebra Handbook,
Berlin: Springer. xx, 638 p. (2003).

E.L. Kaltofen
The Seven Dwarfs of Symbolic Computation,
http://www.kaltofen.us

R.H. Risch
The Problem of Integration in Finite Terms,
Transactions of the American Mathematical Society 139 (1969), 167–189.

J. Moses
Symbolic Integration: The Stormy Decade,
Commun. ACM 14 (1971), 548–560.