Proč (a jak) učit lineární algebru na technických školách

Zdeněk Dostál

Katedra aplikované matematiky 470

FEI VŠB-TU Ostrava

Projekt MI21,Leden 2010

evropský sociální fond v ČR

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Osnova

- Motivace a cíl přednášky
- Přehled základních pojmů lineární algebry
- Dva pohledy na lineární algebru
- Vektory v matematice a fyzice
- Lineární zobrazení
- Tenzor napětí=lineární zobrazení
- Tenzor malých deformací a přibližný polární rozklad
- Variační principy R^n a C[a,b]
- Proč učit LA na technikách

Motivace a cíle

Motivace:

Význam partií matematiky se mění s časem a závisí na cíli.

Co je cílem přednášky:

- Připomenout význam některých pojmů lineární algebry
- Zhodnotit je s ohledem na aplikace
- Přivést k zamyšlení nad způsobem výuky

Co není cílem přednášky:

- Předvést hotovou metodiku výuky
- Dávat recepty jak se má co dělat

Co je přemětem lineární algebry

- Lineární prostory, podprostory, báze, souřadnice
- Lineární zobrazení, bilineární a kvadratické formy- jejich vzájemný vztah (variační principy) a souřadnice (matice)
- Specielní lineární zobrazení (rotace)
- Ortogonální soustavy
- Struktura lineárních zobrazení – nulový prostor, obor hodnot, vlastní čísla a vektory
- Maticové rozklady
- Základní metody řešení soustav rovnic a úloh na vlastní čísla

Algebraický přístup

- Důraz na abstraktní pojmy
- Dodatečné struktury definované na vektorových prostorech (kvaterniony, grupy transformací)
- Determinanty, permanenty a j. multilineární funkce
- Upřednostňuje se algebraická charakteristika (př.: matice je regulární když má nenulový determinant, vlastní číslo je kořen charakteristické rovnice)
- Neuvažuje zaokrouhlovací chyby a nevěnuje pozornost pracnosti výpočtů (např. Cramerovy vzorce)
- Nemluví se o geometrických charakteristikách

Funkcionálně-analyticko-numerický přístup

- Výklad se omezuje na prostory aritmetických vektorů a podprostory prostorů funkcí
- Důraz na pojmy používané v analýze (determinant jako míra změny objemu, invarianty)
- Zabývá se alternativní formulací problémů
- Zabývá se pracností výpočtů a jejich reálné řešitelnosti
- Rozlišuje co je důležité pro pochopení, co pro formulaci problémů, a co pro jejich řešení

Vektory v matematice a fyzice

Definice vektoru ve fyzice: Vektor je veličina, která má velikost a směr

Př.: Volné a vázané vektory

Definice vektoru v matematice: Vektory jsou veličiny, které lze „rozumně" sčítat a násobit skalárem (přesněji vektor je prvek lineárního prostoru)

Př.: aritmetické vektory

$$u = (u_1, u_2, u_3), \quad v = (v_1, v_2, v_3)$$

$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, x_3 + v_3), \quad \alpha u = (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3)$$

Př.: funkce

$$f : R^3 \to R, \quad g : R^3 \to R,$$

$$(\alpha f)(x_1, x_2, x_3) = \alpha(f(x_1, x_2, x_3))$$

$$(f + g)(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3) + g(x_1, x_2, x_3)$$

Lineární zobrazení

Definice: Lineární zobrazení $A:U\to V$ je předpis, který každému $u\in U$ přiřazuje $v\in V$ tak, že

$$A(u+v)=A(u)+A(v) \quad \text{a} \quad \mathrm{A}(\alpha \mathrm{u})=\alpha A(u)$$

Př. 1: Jacobián (deformační gradient)

$$f:R^2\to R^2, \quad \nabla f:R^2\to R^2, \ x,h\in R$$

$$F(h)=f(x+h)-f(x)\approx \nabla f(x)^T h$$

Př. 2, lineární funkcionály na spojitých funkcích:

$$g\in D=C(a,b), \quad I,\delta:D\to R, \quad \zeta\in(a,b)$$

$$I(f)=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x, \quad \delta(f)=f(\zeta)=\int_a^b f(x)\delta(x)\mathrm{d}x$$

Matice a lineární zobrazení

$A:V \to V$ lineární zobrazení, báze $E=(e_1,\dots,e_n)$

$$x \in V, \quad x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, \quad Ax = x_1 Ae_1 + \dots + x_n Ae_n$$

Souřadnice obrazů báze tedy úplně popisují lineární zobrazení. Vhodným uspořádáním do matice dostaneme matici lineárního zobrazení. Charakteristiky lineárních zobrazení jsou invarianty matic:

Vlastní čísla a jejich funkce, např.:

Determinant=součin vlastních čísel

Stopa =součet vlastních čísel=součet diagonálních prvků matice

…

Užitečné invarianty a maticové rozklady

Determinant (=součin vlastních čísel) charakterizuje změnu objemu

Stopa tenzoru malých deformací (= součet vlastních čísel) charakterizuje také změnu objemu při malých deformacích

Vlastní čísla charakterizují maximální napětí, maximální smykové napětí, aplikace v dynamice atd.

Polární rozklad $A = BU$

(popis deformace, oddělení tuhého pohybu)

Spektrální rozklad $A = U^T \Sigma U$

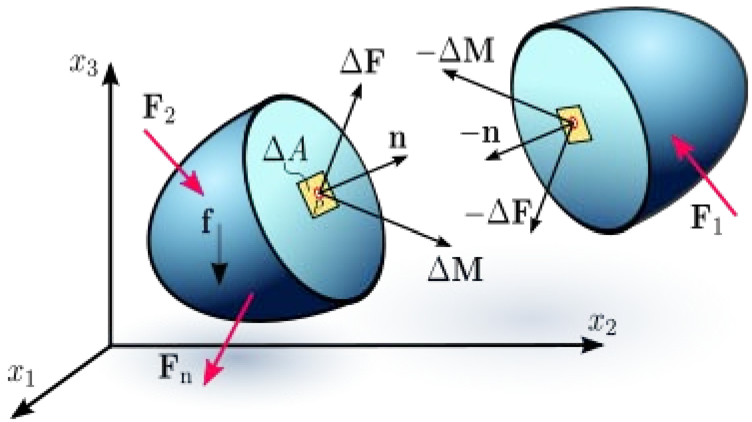
(analýza řešení symetrických soustav iteračními metodami)

Singulární rozklad $A = U^T \Sigma V$

(řešení obecných soustav, pochopení geometrie lineárního zobrazení)

Tenzor napětí=lineární zobrazení

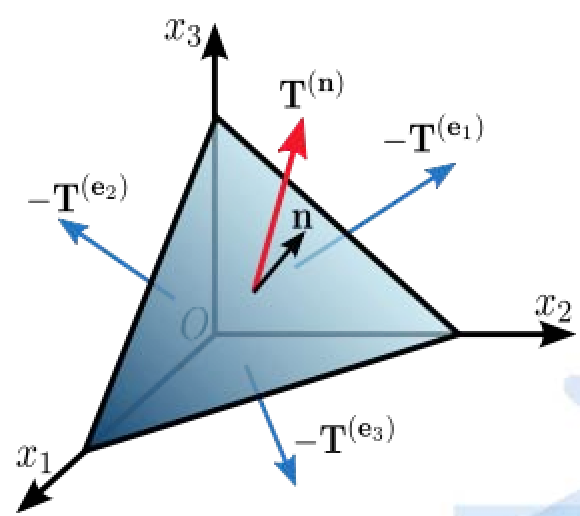
Síla ΔA působící na plošku ΔF je přímo úměrná velikosti plošky a splňuje princip superpozice. Odtud:



Cauchyova věta: Sila ΔF působící na plošku ΔA s normálou *n*, ||*n*||= ΔA je určena vztahem

$$\Delta F = Tn$$

kde *T* je lineární zobrazení.



Tenzor (malých) deformací

$$f(x) = x + u(x), \quad F(x) = \nabla f(x) = I + \nabla u(x)$$

$x \in R^3$ pevně zvolené, $F(x) = F = I + A, \quad \|A\| << 1$

Polární rozklad F:

$$F = BU, \quad U^T U = I, \quad B = B^T$$

$$(Ux, Uy) = x^T U^T U y = (x, y), \quad \|Ux\|^2 = \|x\|^2$$

Aprox. pol. rozklad:

$$F = I + A \approx (I + \frac{1}{2}(A + A^T))(I + \frac{1}{2}(A - A^T))$$

$$B \approx I + \frac{1}{2}(A + A^T), \quad U \approx I + \frac{1}{2}(A - A^T)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(A + A^T) = \frac{1}{2}(\nabla u(x) + \nabla u(x)^T)$$

Variační principy v lineární algebře

Variační princip (princip minima energie):

$$A \quad \mathrm{spd}, b \in R^n$$

$$\mathrm{V.:}\ Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad x = \arg\min\ f(x)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x$$

$$D.:\ f(x+h) = f(x) + (Ax-b)^T h + \frac{1}{2} h^T A h$$

Metoda nejmenších čtverců:

$$V.:\ x = \arg \left\| Ax - b \right\|^2 \Leftrightarrow A^T A x = A^T b$$

$$D.:\ \frac{1}{2} \left\| Ax - b \right\|^2 = \frac{1}{2} x^T A^T A x - (A^T b)^T x + const.$$

Proč učit lineární algebru na technikách?

- Řada základních fyzikálních veličin je definovaná prvky lineární algebry.
- Pomocí pojmů lineární algebry lze popsat a manipulovat s různými objekty (texty, fotografie, soubory tabulek)
- Lineární algebra umožňuje relativně jednoduše odvodit alternativní formulaci základních úloh
- Lineární algebra je bezprostředně spojena s počítáním, takže znalost jejích základů umožňuje pochopení moderních výpočetních postupů
- Znalost abstraktních pojmů usnadňuje pochopení struktury problémů bez technických komplikací (na rozdíl od vzorců v souřadnicích)
- Výuka lineární algebry umožňuje oddělit potíže spojené s řešením spojitých problémů od jednoduchých obecných postupů.