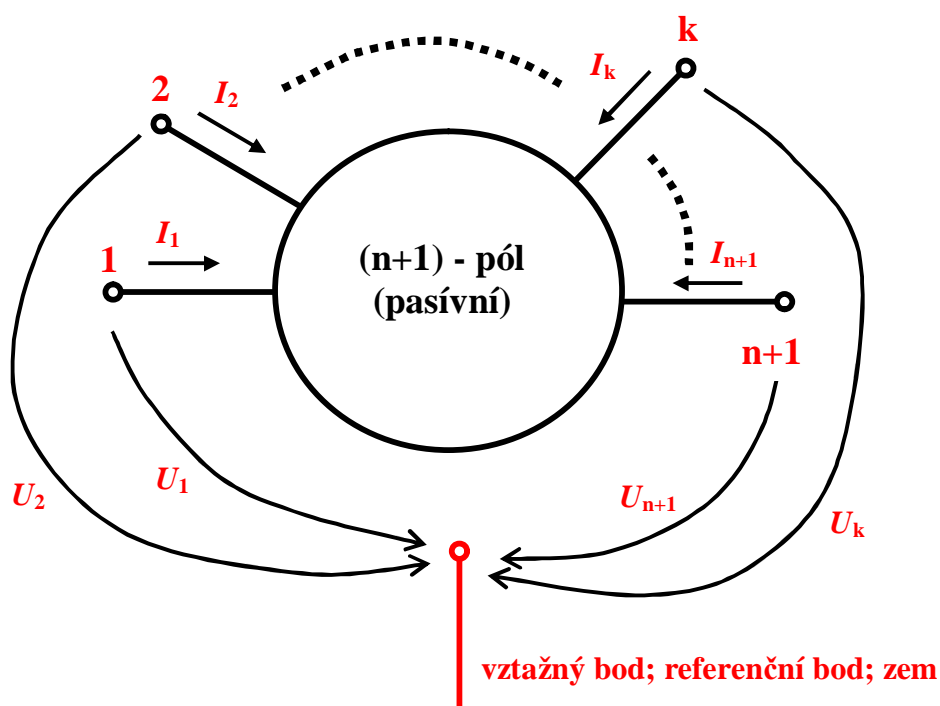


Problematika maticového počtu při analýze lineárních obvodů

Maticový počet je vhodným nástrojem pro analýzu lineárních (linearizovaných) elektronických obvodů. Tyto obvody lze obecně řešit metodou smyčkových proudů (to vede k modelu impedančnímu – impedanční matice) nebo metodou řezových napětí. Speciálním případem metody řezových napětí je **metoda uzlových napětí**, kdy všechna uzlová napětí (neznámá) vztahujeme ke stejnému referenčnímu uzlu. V lineárním obvodu je každý proud určen superpozicí vlivu všech uzlových napětí – dostáváme **admitanční model** elektronického (elektrického) obvodu. Vzhledem k tomu, že metoda uzlových napětí vede při vhodné šipkové konvenci k velmi jednoduchým praktickým algoritmům, budeme se dále zabývat **zobecněnou metodou uzlových napětí**. Předpokládáme řešení obvodu v *ustáleném harmonickém* (ve frekvenční oblasti) stavu (Dodatek 1). Postupy lze velmi snadno rozšířit na řešení přechodných dějů, použijeme-li Laplaceovu transformaci (Dodatek 1).

1. ZOBECNĚNÁ METODA UZLOVÝCH NAPĚTÍ [1, 2, 3]

Na obr. 1 je obecný pasivní lineární $(n+1)$ -pól. Do každého uzlu obvodu (pólu, svorky) vstupuje známý externí proud I_k (modelován fázorem, zdroj proudu) a každému uzlu je přiřazen fázor napětí U_k (neznámá veličina; jedná se o komplexní čísla). Všechna napětí jsou vztažena stejně orientovanou napěťovou šipkou vůči vnějšímu (externímu) vztažnému bodu (referenční bod, zem).



Obr. 1. Obecný $(n+1)$ – pól s vyznačenou šipkovou konvencí, která bude vždy dodržována

Pokud je systém lineární, lze jej popsat souborem lineárních rovnic

$$\begin{aligned}
 Y_{11}U_1 + Y_{12}U_2 + \dots + Y_{1k}U_k + Y_{1l}U_l + \dots + Y_{1(n+1)}U_{n+1} &= I_1 \\
 \dots & \\
 Y_{k1}U_1 + Y_{k2}U_2 + \dots + Y_{kk}U_k + Y_{kl}U_l + \dots + Y_{k(n+1)}U_{n+1} &= I_k \\
 \dots & \\
 Y_{n1}U_1 + Y_{n2}U_2 + \dots + Y_{nk}U_k + Y_{nl}U_l + \dots + Y_{n(n+1)}U_{n+1} &= I_n \\
 \dots & \\
 Y_{(n+1)1}U_1 + Y_{(n+1)2}U_2 + \dots + Y_{(n+1)k}U_k + Y_{(n+1)l}U_l + \dots + Y_{(n+1)(n+1)}U_{n+1} &= I_{n+1}
 \end{aligned}$$

Význam parametrů (admitančních) je zřejmý:

$$Y_{kl} = I_k / U_l \quad \text{pro } k, l = 1, 2, \dots, n+1$$

přičemž všechna napětí vyjma U_l jsou rovna nule (všechny uzly mimo l – tého jsou zkratovány – *stav nakrátko*). Obvod (pro vnější vztažený bod) je charakterizován ÚPLNOU ADMITANČNÍ MATICÍ $[Y]_U$

$$[Y]_U = \begin{bmatrix} Y_{11} & \dots & \dots & Y_{1(n+1)} \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ Y_{(n+1)1} & \dots & \dots & Y_{(n+1)(n+1)} \end{bmatrix}$$

a platí

$$[Y]_U \times \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ U_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ I_{n+1} \end{bmatrix}$$

1.2. Vlastnosti úplné admitanční matice (pasivního obvodu - obvod bez vnitřních zdrojů; všechny zdroje proudu přivedeny do vyvedených uzlů)

Podle 1. Kirchhoffova zákona musí pro obvod na obr. 1 platit pro libovolná uzlová napětí:

$$\sum_1^{n+1} I_k = 0$$

Odtud tedy musí platit

$$\begin{aligned}
 U_1(Y_{11} + Y_{21} + \dots + Y_{k1} + Y_{l1} + \dots + Y_{n1} + Y_{(n+1)1}) + U_2(Y_{12} + Y_{22} + \dots + Y_{k2} + Y_{l2} + \dots + Y_{n2} + Y_{(n+1)2}) + \dots \\
 + U_{n+1}(Y_{1(n+1)} + Y_{2(n+1)} + \dots + Y_{k(n+1)} + Y_{l(n+1)} + \dots + Y_{n(n+1)} + Y_{(n+1)(n+1)}) = 0
 \end{aligned}$$

Má-li být tato rovnost splněna pro libovolné napětí, musí platit, že součet admitancí v každé závorce je roven nule. Tomu odpovídá popis

$$\sum_{j=1}^{n+1} Y_{js} = 0 \text{ pro } s = 1, 2, \dots, n+1$$

Součet admitancí v každém sloupci úplné admitanční matice musí být roven nule. Báze uzlových napětí je již lineárně závislá.

Připojíme-li všechny uzly obvodu na stejné libovolné napětí

$$U = U_1 = U_2 = \dots = U_k = U_l = \dots = U_{n+1}$$

nemohou do uzlů vtékat proudy, v obvodu není rozdíl potenciálů. Musí proto platit

$$I_1 = I_2 = \dots = I_k = I_l = \dots = I_{n+1} = 0$$

Po dosazení do uvedených vztahů dostáváme

$$U(Y_{11} + Y_{12} + \dots + Y_{1k} + \dots + Y_{1(n+1)}) = \dots = U(Y_{(n+1)1} + Y_{(n+1)2} + \dots + Y_{(n+1)k} + \dots + Y_{(n+1)(n+1)}) = 0$$

Tato podmínka je pro libovolné $U \neq 0$ splněna pouze pro

$$\sum_{j=1}^{n+1} Y_{rj} = 0 \text{ pro } r = 1, 2, \dots, n+1$$

Součet admitancí v každém řádku úplné admitanční matice musí být roven nule.

1.3. Zkrácená admitanční matice

Zkrácená admitanční matice definuje (modeluje) obvod po propojení libovolného uzlu obvodu s externím referenčním uzlem. Bez újmy na obecnosti spojme s referenčním uzlem $(n+1)$ – ním pól (obecně k – tý). Potom platí, že

$$U_{n+1} = 0$$

a je vyloučen (eliminován) $(n+1)$ – ním sloupec (k – tý) úplné matice.

Současně z 1. Kirchhoffova zákona

$$\sum_1^{n+1} I_k = 0$$

plyne, že proud

$$I_{n+1} = -(I_1 + I_2 + \dots + I_n)$$

je lineární kombinací ostatních proudů. Proto můžeme $(n+1)$ – ní (obecně k – tou) rovnici vyloučit a systém je nyní modelován (popisován) **zkrácenou maticí**, lze stanovit neznámá uzlová napětí (n lineárně nezávislých rovnic):

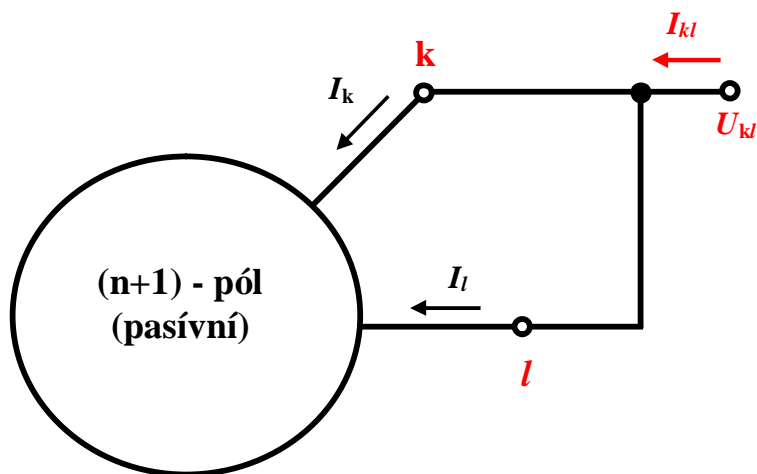
$$\begin{bmatrix} Y_{11} & \dots & \dots & Y_{1n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ Y_{n1} & \dots & \dots & Y_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ I_n \end{bmatrix}$$

Z udělaných úvah plyne **důležité pravidlo**:

Propojení kteréhokoliv uzlu (pólu) s uzlem referenčním vede k vyloučení (eliminaci) odpovídajícího řádku a sloupce v admitančním modelu obvodu.

1.4. Propojení dvou (nereferenčních) uzlů (odpovídá zmenšení počtu prvků báze uzlových napětí o jeden prvek)

Základní situace je znázorněna na obr. 2.



Obr. 2. Propojení dvou uzlů

Zřejmě platí $U_k = U_l = U_{kl}$.

Potom platí rovněž

$$Y_{k1}U_1 + Y_{k2}U_2 + \dots + Y_{kk}U_{kl} + Y_{kl}U_{kl} + \dots + Y_{k(n+1)}U_{n+1} = I_k$$

$$Y_{l1}U_1 + Y_{l2}U_2 + \dots + Y_{lk}U_{kl} + Y_{ll}U_{kl} + \dots + Y_{l(n+1)}U_{n+1} = I_l$$

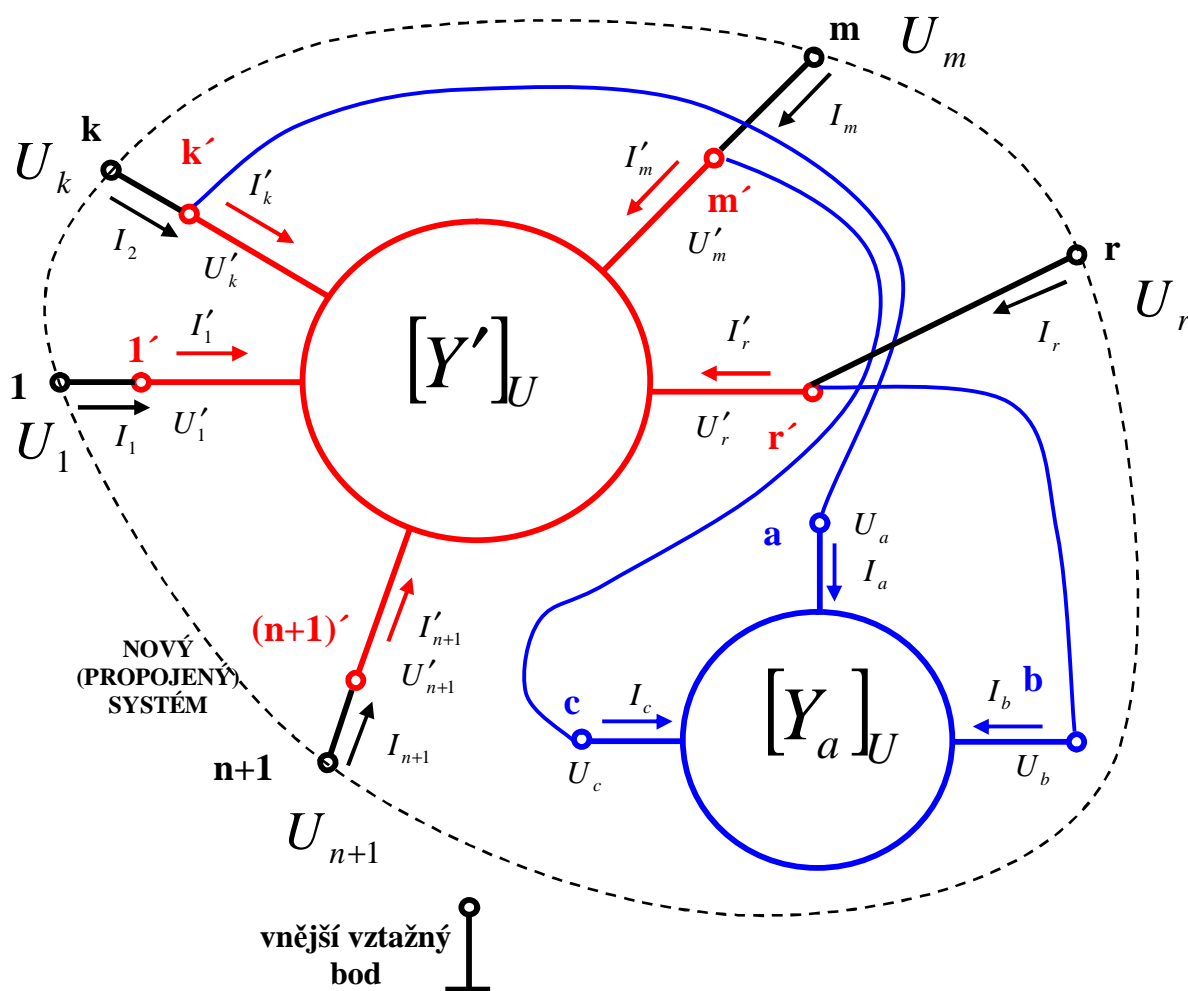
Z 1. Kirchhoffova zákona ovšem musí platit

$$\begin{aligned}
 I_{kl} = I_k + I_l &= Y_{k1}U_1 + Y_{k2}U_2 + \dots + Y_{kk}U_{kl} + Y_{kl}U_{kl} + \dots + Y_{k(n+1)}U_{n+1} + \dots \\
 \dots + Y_{l1}U_1 + Y_{l2}U_2 + \dots + Y_{lk}U_{kl} + Y_{ll}U_{kl} + \dots + Y_{l(n+1)}U_{n+1} &= \dots \\
 = U_1(Y_{k1} + Y_{l1}) + U_2(Y_{k2} + Y_{l2}) + \dots + U_{kl}(Y_{kk} + Y_{ll} + Y_{kl} + Y_{lk}) + \dots + U_{n+1}(Y_{k(n+1)} + Y_{l(n+1)})
 \end{aligned}$$

Této rovnici odpovídá sečtení sloupců k, l i sečtení řádků k, l v původní admitanční matici.

1.5. Propojení dvou různých systémů

Předpokládejme, že každý systém je lineární a je definován admitanční maticí. Nejčastěji je druhým systémem trojpól, obr.3, všechny udělané úvahy však platí zcela obecně.



Obr. 3. Propojení systémů

Pro samotné systémy (podsystemy) platí ve shodě s předchozími úvahami

$$[Y']_U \times \begin{bmatrix} U'_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ U'_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I'_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ I'_{n+1} \end{bmatrix}$$

$$[Y_a]_U \times \begin{bmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{aa} & Y_{ab} & Y_{ac} \\ Y_{ba} & Y_{bb} & Y_{bc} \\ Y_{ca} & Y_{cb} & Y_{cc} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}$$

Propojení (incidence) je definováno zřejmými vztahy (shoda napětí je znakem paralelnosti řazení obvodů)

$$U_1 = U'_1; \quad U_2 = U'_2; \dots; U_k = U'_k = U_a; \dots; U_m = U'_m = U_c; \dots; U_r = U'_r = U_b; \dots; U_{n+1} = U'_{n+1}$$

Pro proudy platí podle 1. Kirchhoffova zákona

$$I_1 = I'_1; \quad I_2 = I'_2; \dots; I_k = I'_k + I_a; \dots; I_m = I'_m + I_c; \dots; I_r = I'_r + I_b; \dots; I_{n+1} = I'_{n+1}$$

Popis propojeného systému má nyní tvar

$$[Y]_U \times \begin{bmatrix} U_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ U_k \\ \cdot \\ \cdot \\ U_m \\ \cdot \\ \cdot \\ U_r \\ \cdot \\ \cdot \\ U_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ I_k \\ \cdot \\ \cdot \\ I_m \\ \cdot \\ \cdot \\ I_r \\ \cdot \\ \cdot \\ I_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I'_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ I'_k \\ \cdot \\ \cdot \\ I'_m \\ \cdot \\ \cdot \\ I'_r \\ \cdot \\ \cdot \\ I'_{n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ I_a \\ 0 \\ \cdot \\ I_c \\ 0 \\ \cdot \\ I_b \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nyní vyjádříme proudy „s čárkou“ i proudy I_a, I_b, I_c v „bázi“ U_1 až U_{n+1} . Vždyť platí

$$U_k = U'_k = U_a; \quad U_m = U'_m = U_c; \quad U_r = U'_r = U_b \text{ atd.}$$

Získáváme rovnost

$$[Y]_U \times \begin{bmatrix} U_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ U_k \\ \cdot \\ \cdot \\ U_m \\ \cdot \\ \cdot \\ U_r \\ \cdot \\ \cdot \\ U_{n+1} \end{bmatrix} = [Y']_U \times \begin{bmatrix} U_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ U_k \\ \cdot \\ \cdot \\ U_m \\ \cdot \\ \cdot \\ U_r \\ \cdot \\ \cdot \\ U_{n+1} \end{bmatrix} + [Y_t]_U \times \begin{bmatrix} U_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ U_k \\ \cdot \\ \cdot \\ U_m \\ \cdot \\ \cdot \\ U_r \\ \cdot \\ \cdot \\ U_{n+1} \end{bmatrix}$$

kde transformovaná matice $[Y_t]$ vzniká právě z uvedených rovností napětí – dáno propojením (incidencí) uzlů obvodů ($U_k = U_a$; $U_m = U_c$; $U_r = U_b$):

$$\begin{bmatrix} Y_{aa} & Y_{ab} & Y_{ac} \\ Y_{ba} & Y_{bb} & Y_{bc} \\ Y_{ca} & Y_{cb} & Y_{cc} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_k \\ U_r \\ U_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}$$

Odsud snadno určíme v „bázi“ U_1 až U_{n+1} (viz druhá sloupcová matice pouze s proudy I_a, I_b, I_c):

$$\begin{aligned} 0 \cdot U_1 + 0 \cdot U_2 + \dots + 0 \cdot U_k + \dots + 0 \cdot U_m + \dots + 0 \cdot U_r + \dots + 0 \cdot U_{n+1} &= 0 \\ \cdot & \\ 0 \cdot U_1 + 0 \cdot U_2 + \dots + Y_{aa} \cdot U_k + \dots + Y_{ac} \cdot U_m + \dots + Y_{ab} \cdot U_r + \dots + 0 \cdot U_{n+1} &= I_a \\ \cdot & \\ 0 \cdot U_1 + 0 \cdot U_2 + \dots + Y_{ca} \cdot U_k + \dots + Y_{cc} \cdot U_m + \dots + Y_{cb} \cdot U_r + \dots + 0 \cdot U_{n+1} &= I_c \\ \cdot & \\ \cdot & \\ 0 \cdot U_1 + 0 \cdot U_2 + \dots + Y_{ba} \cdot U_k + \dots + Y_{bc} \cdot U_m + \dots + Y_{bb} \cdot U_r + \dots + 0 \cdot U_{n+1} &= I_b \\ \cdot & \\ \cdot & \\ 0 \cdot U_1 + 0 \cdot U_2 + \dots + 0 \cdot U_k + \dots + 0 \cdot U_m + \dots + 0 \cdot U_r + \dots + 0 \cdot U_{n+1} &= 0 \end{aligned}$$

Tím je transformovaná matice jednoznačně definována. Nyní již stačí pro získání výsledného admitančního modelu sečíst obě matice. Jde o paralelní řazení obvodů popsaných maticemi $[Y_a]_U$ a $[Y']_U$, přičemž matici $[Y_a]_U$ je nutné transformovat „na rozměry“ matice $[Y']_U$:

$$[Y]_U = [Y']_U + [Y_t]_U$$

Výslednou matici $[Y]_U$ lze získat přímo „projekcí“ rovnic $U_k = U_a$; $U_m = U_c$; $U_r = U_b$ „do matice $[Y']_U$ “ (projekcí propojení – incidence – uzlů obou systémů). Do „velké“ matice vyznačíme propojení s „menší“ maticí $[Y_a]_U$ - do řádků i sloupců. Nyní není nutné používat odlišení prvků „velké“ matice „čárkami“. Odpovídající přičítané parametry získáme v místech „incidence“ matic:

	1	2	...	k (a)	...	m (c)	...	r (b)	...	n	n+1=z
1	Y_{11}	Y_{12}	...	Y_{1k}		Y_{1m}		Y_{1r}		Y_{1n}	Y_{1z}
2	Y_{21}	Y_{22}		Y_{2n}	Y_{2z}
...
k (a)	Y_{k1}	.		$Y_{kk}+(Y_{aa})$		$Y_{km}+(Y_{ac})$		$Y_{kr}+(Y_{ab})$		Y_{kn}	Y_{kz}
m (c)	Y_{m1}	.		$Y_{mk}+(Y_{ca})$		$Y_{mm}+(Y_{cc})$		$Y_{mr}+(Y_{cb})$		Y_{mn}	Y_{mz}
r (b)	Y_{r1}	.		$Y_{rk}+(Y_{ba})$		$Y_{rm}+(Y_{bc})$		$Y_{rr}+(Y_{bb})$		Y_{rn}	Y_{rz}
...
n	Y_{n1}	.		Y_{nk}		Y_{nm}		Y_{nr}		Y_{nn}	Y_{nz}
n+1=z	Y_{z1}	.		Y_{zk}		Y_{zm}		Y_{zr}		Y_{zn}	Y_{zz}

Tímto způsobem přímo transformujeme „menší“ matici do báze matice „větší“. Pokud je propojováno více systémů, postup analogicky opakujeme.

1.5. 1. Propojení dvou různých systémů – incidenční matice

Propojení obou systémů můžeme definovat pomocí incidenční matice. Zavedme pomocnou **incidenční matici** $[T]$, která popisuje jednoznačně vztah mezi bázemi U_a ; U_b ; U_c a U_1 až U_{n+1} . Vyjděme z rovností $U_k = U_a$; $U_m = U_c$; $U_r = U_b$:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ U_k \\ \cdot \\ \cdot \\ U_m \\ \cdot \\ \cdot \\ U_r \\ \cdot \\ \cdot \\ U_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \end{bmatrix} \quad \text{tedy} \quad [T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lze dokázat, že transformovanou matici získáme následujícím způsobem:

$$[Y_t]_U = [T] \times [Y_a]_U \times [T]^T$$

Čtvercová matice $[Y_a]$ rozměru 3×3 je tak transformována na matici rozměru $(n+1) \times (n+1)$. Výslednou admitanční matici propojených systémů nyní můžeme napsat ve tvaru

$$[Y]_U = [Y'] + [Y_t]_U = [Y']_U + [T] \times [Y_a]_U \times [T]^T$$

Incidenční matici lze ovšem konstruovat i druhým možným způsobem. Nyní vyjděme z rovností $U_a = U_k$; $U_b = U_r$; $U_c = U_m$:

$$\begin{bmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdot & 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ U_k \\ \cdot \\ \cdot \\ U_m \\ \cdot \\ \cdot \\ U_r \\ \cdot \\ \cdot \\ U_{n+1} \end{bmatrix} = [T'] \times \begin{bmatrix} U_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ U_k \\ \cdot \\ \cdot \\ U_m \\ \cdot \\ \cdot \\ U_r \\ \cdot \\ \cdot \\ U_{n+1} \end{bmatrix}$$

Zřejmě platí $[T] = [T']^T$.

Pro propojené systémy tedy získáme výslednou admitanční matici pomocí vztahu

$$[Y]_U = [Y']_U + [Y_t]_U = [Y']_U + [T] \times [Y_a]_U \times [T]^T = [Y']_U + [T']^T \times [Y_a]_U \times [T]$$

přičemž definice použitých symbolů je zřejmá z předchozího textu.

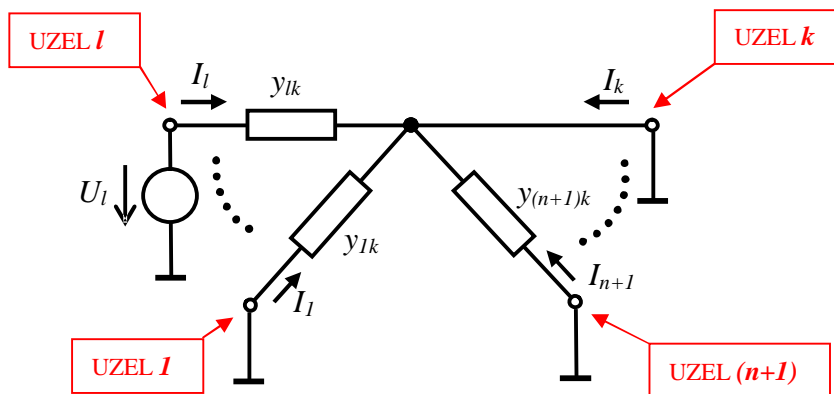
Transformace matice $[Y_a]_U$ s jiným počtem pólů bude analogická.

Tímto způsobem lze získat admitanční modely elektronických struktur a řešit je, to znamená určit všechna uzlová napětí jako funkci proudů vstupujících do uzlů z externích zdrojů proudu. Známe-li všechna uzlová napětí, můžeme pomocí Ohmova zákona dopočítat i proudy všemi obvodovými prvky zapojenými mezi uzly. Samozřejmě stejně lze určovat i modely propojených pasívních obvodů (lineárních).

1.6. Určení prvků Y_{kl} pasivního obvodu

Konkrétní admitance (fyzické) mezi jednotlivými uzly označme pro rozlišení malými písmeny y_{lk} . V reálném fyzikálním prostředí platí pro pasivní obvody vždy rovnost $y_{kl} = y_{lk}$.

Na obr. 4 je znázorněna obecná situace (uvažujeme vždy všechny uzly obvodu) pro $k \neq l$.



Obr. 4. Určování Y_{lk} ($U_l \neq 0$, ostatní napětí jsou nulová); $k \neq l$

Zřejmě platí, že

$$I_1 = I_2 = \dots = I_{l-1} = I_{l+1} = \dots = I_{k-1} = I_{k+1} = \dots = I_{n+1} = 0$$

protože nenulové napětí je pouze mezi uzly k a l . Z Ohmova zákona (zobecněný tvar pro ustálený harmonický stav) určíme, že (šipky napětí a proudu orientovány shodně, proto podle spotřebičové konvence použijeme znaménko kladné)

$$I_l = U_l y_{kl} = U_l y_{lk}$$

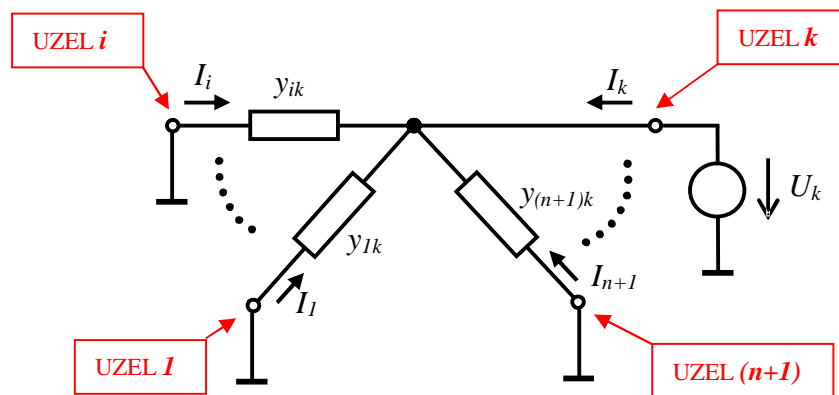
a z 1. Kirchhoffova zákona platí $I_k = -I_l = -U_l y_{kl}$. Podle definice je $Y_{kl} = I_k / U_l$, tedy zřejmě platí, že

$$Y_{kl} = I_k / U_l = -y_{kl} = -y_{lk}$$

Pro pasivní obvody je prvek (meziuzlová admitance) Y_{kl} roven záporné hodnotě admitance prvků zapojených mezi uzly k a l ($k \neq l$).

Na obr. 5 je znázorněna situace pro $k = l$. Na všech admitancích je nyní napětí U_k a z Ohmova zákona (šipky napětí a proudu na admitancích jsou nyní orientovány opačně, proto podle spotřebičové konvence použijeme znaménko mínus) určíme proudy jednotlivými prvky obvodu:

$$I_1 = -U_k y_{1k}; \quad \dots \quad I_i = -U_k y_{ik}; \quad \dots \quad I_{(n+1)} = -U_k y_{(n+1)k}$$



Obr. 5. Určování Y_{kk} ($U_k \neq 0$, ostatní napětí jsou nulová)

Proud I_k určíme z 1. Kirchhoffova zákona – je definován sumou všech ostatních proudů:

$$I_k = -(I_1 + I_2 + \dots + I_{k-1} + I_{k+1} + \dots + I_{n+1}) = U_k \sum_{j=1}^{n+1} y_{jk}; \quad j \neq k$$

Nyní již snadno určíme, že platí

$$Y_{kk} = I_k / U_k = \sum_{j=1}^{n+1} y_{jk}; \quad j \neq k$$

Pro pasívní obvod je prvek (uzlová admitance) Y_{kk} určen součtem všech admitancí y_{jk} , které jsou do uzlu připojeny.

Z udělaných úvah je zřejmé, že ($y_{kl} = y_{lk}$) admitanční matice pasívního obvodu je vždy symetrická. Prvky na diagonále jsou dány sumou uzlových admitancí (znaménko plus), prvky mimo diagonálu jsou definovány odpovídajícími meziuzlovými admitancemi se znaménkem záporným. Tento závěr platí pro uvedenou šipkovou konvenci.

1.7. Určení prvků Y_{kl} aktivního obvodu

1.7.1 Klasický postup linearizace - např. [4]

Klasickým aktivním prvkem elektronických obvodů je trojpól (elektronka, tranzistor), který je (při jednom vývodu referenčním) popsán pomocí dvou napětí a dvou proudů - obr.6. Závislosti mezi proudy a napětími jsou obecně nelineární a mohou být popsány funkcí dvou proměnných

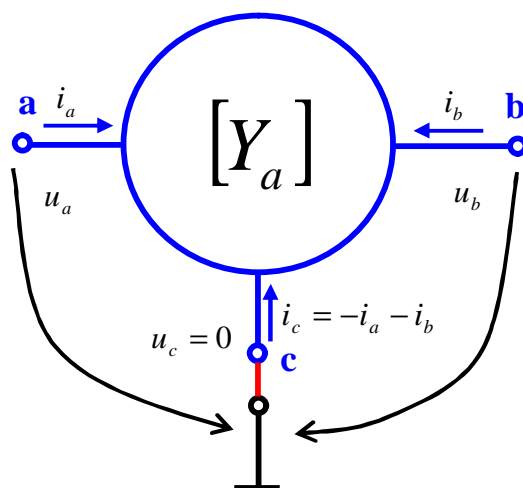
$$\begin{aligned} i_a &= f_1(u_a, u_b) \\ i_b &= f_2(u_a, u_b) \end{aligned}$$

Reálná měření probíhají vždy s jedním pólem referenčním, získáváme tedy obvykle pouze matici zkrácenou.

Při linearizaci nás zajímá malá oblast napětí a proudů v okolí nějakého vhodného pracovního bodu u_{a0}, u_{b0} . To vyjádříme pomocí malých změn napětí $\Delta u_{a,b}$:

$$u_a = u_{a0} + \Delta u_a$$

$$u_b = u_{b0} + \Delta u_b$$



Obr. 6. Symbolická značka trojpólu; zde malá písmenka značí obecně časově proměnné

Tyto malé změny napětí vyvolají odpovídající změny proudů

$$i_a = f_1(u_{a0} + \Delta u_a, u_{b0} + \Delta u_b)$$

$$i_b = f_2(u_{a0} + \Delta u_a, u_{b0} + \Delta u_b)$$

Rozvineme-li rovnice v Taylorovu řadu a uvažujeme pouze derivace 1. řádu, obdržíme [4]

$$i_a \cong f_1(u_{a0}, u_{b0}) + \left(\frac{\mathcal{J} i_a}{\mathcal{J} u_a} \Delta u_a + \frac{\mathcal{J} i_a}{\mathcal{J} u_b} \Delta u_b \right)$$

$$i_b \cong f_2(u_{a0}, u_{b0}) + \left(\frac{\mathcal{J} i_b}{\mathcal{J} u_a} \Delta u_a + \frac{\mathcal{J} i_b}{\mathcal{J} u_b} \Delta u_b \right)$$

Členy $i_{a0} \cong f_1(u_{a0}, u_{b0}), i_{b0} \cong f_2(u_{a0}, u_{b0})$ určují klidové pracovní proudy. Musí být nalezeny graficky nebo numericky z nelineárních popisů zkoumaných trojpólů. Zbývající členy popisují odezvy proudů $\Delta i_{a,b}$ na změny napětí $\Delta u_{a,b}$. Je zřejmé, že

$$\Delta i_a \cong \frac{\mathcal{J} i_a}{\mathcal{J} u_a} \Delta u_a + \frac{\mathcal{J} i_a}{\mathcal{J} u_b} \Delta u_b$$

$$\Delta i_b \cong \frac{\mathcal{J} i_b}{\mathcal{J} u_a} \Delta u_a + \frac{\mathcal{J} i_b}{\mathcal{J} u_b} \Delta u_b$$

Parciální derivace definují diferenční parametry trojpólu, které určujeme z jejich charakteristik (popisů) v okolí pracovního bodu. Při vhodně zvoleném režimu lze považovat veličiny (vodivosti)

$$g_{aa} = \frac{\mathcal{I}i_a}{\mathcal{I}u_a}; \quad g_{ab} = \frac{\mathcal{I}i_a}{\mathcal{I}u_b}; \quad g_{ba} = \frac{\mathcal{I}i_b}{\mathcal{I}u_a}; \quad g_{bb} = \frac{\mathcal{I}i_b}{\mathcal{I}u_b}$$

za nezávislé na změnách napětí Δu a proudů Δi . Jedná se o **linearizovaný model** v pracovním bodě u_{a0}, u_{b0} .

Časové průběhy napětí a proudů se při analýze obvodů zaměňují jejich komplexními obrazy (fázory) nebo operátorovými obrazy ($I_a; I_b; U_a; U_b$). Potom může být trojpól popsán (pro malé signály) vodivostními (obecně admitančními) rovnicemi ($g_{aa} \rightarrow Y_{aa}, g_{ab} \rightarrow Y_{ab}, g_{ba} \rightarrow Y_{ba}, g_{bb} \rightarrow Y_{bb}$)

$$\begin{aligned} I_a &= g_{aa}U_a + g_{ab}U_b \\ I_b &= g_{ba}U_a + g_{bb}U_b \end{aligned}$$

Tomu odpovídá maticový zápis (zkrácená matice)

$$\begin{bmatrix} I_a \\ I_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{aa} & g_{ab} \\ g_{ba} & g_{bb} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_a \\ U_b \end{bmatrix}; \quad [Y_a]_{ZKR} = \begin{bmatrix} g_{aa} & g_{ab} \\ g_{ba} & g_{bb} \end{bmatrix}$$

Pro dříve uvedený algoritmus přímé projekce je vhodný „tabulkový zápis“ zkrácené matice

	a	b
a	g_{aa}	g_{ab}
b	g_{ba}	g_{bb}

**zkrácená matice
trojpólu –
referenční bod c**

Týž aktivní prvek však nemusí mít v jiném zapojení uzemněn (k referenční svorce vztahen) právě „vhodný“ uzel nebo nemá uzemněný žádný uzel. Jak získáme úplný soubor parametrů (ovšem vždy ve stejné pracovním bodě)?

Stačí získat úplnou matici. Ke **zkrácené matici** přidáme jeden řádek a jeden sloupec – uzel c odpojen od referenčního bodu. K doplnění prvků matice rozšířené použijeme základních vlastností úplné matice o nulové sumě admitancí v řádcích i sloupcích - prvky doplníme tak, aby součet v každém řádku a v každém sloupci byl roven nule:

	a	b	c
a	g_{aa}	g_{ab}	$-g_{aa}-g_{ab}$
b	g_{ba}	g_{bb}	$-g_{ba}-g_{bb}$
c	$-g_{aa}-g_{ba}$	$-g_{ab}-g_{bb}$	$g_{aa}+g_{ab}+g_{ba}+g_{bb}$

**úplná matice trojpólu – definována pomocí
parametrů zkrácené matice
s referenčním bodem c**

Pokud je dále kterýkoliv uzel uzemněn, volíme jej za referenční a vždy eliminujeme odpovídající řádek a sloupec matice úplné - získáváme tak popis aktivního prvku se správným (požadovaným) společným (referenčním) bodem.

Pokud bude aktivní prvek vícepólový, úvahu analogicky rozšíříme. Pro čtyřpól (a, b, c, d) s referenčním uzlem d bude platit popis

$$I_a = g_{aa}U_a + g_{ab}U_b + g_{ac}U_c$$

$$I_b = g_{ba}U_a + g_{bb}U_b + g_{bc}U_c$$

$$I_c = g_{ca}U_a + g_{cb}U_b + g_{cc}U_c$$

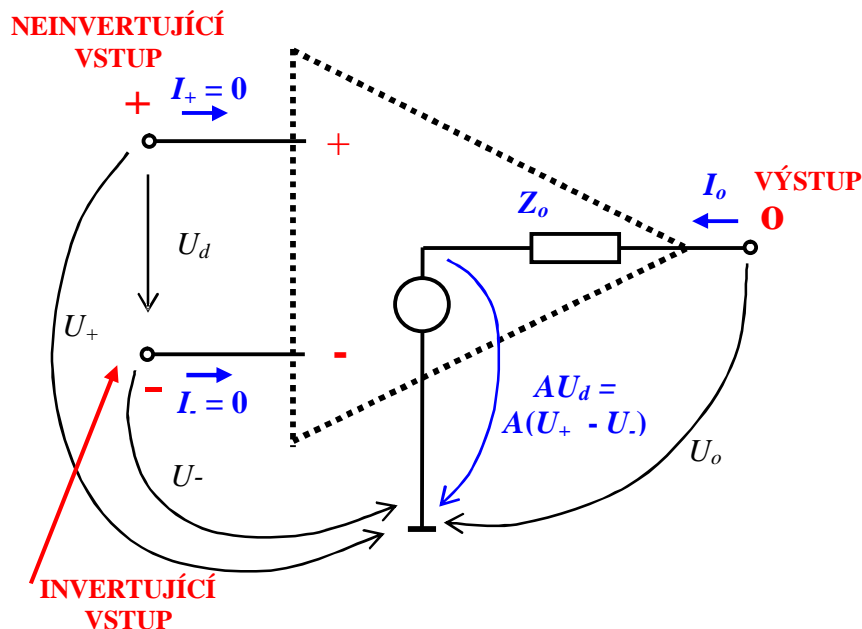
kde

$$g_{jk} = \frac{\mathcal{I}i_j}{\mathcal{I}u_k}$$

pro $j = a, b, c$
 $k = a, b, c$

1.7.2 Využití lineárních obvodových modelů zesilovacích struktur (Dodatek 2)

Pokud známe lineární obvodové modely zesilovacích struktur, můžeme se vyhnout klasickému postupu linearizace. Admitanční model získáme velmi jednoduše tak, že *pro zavedenou šipkovou konvenci vyjádříme všechny do obvodu vstupující proudy jako funkci všech uzlových (pólových) napětí.*



Obr. 7. Lineární obvodový model idealizovaného diferenčního operačního zesilovače s reálným zesílením A (zesílení diferenčního napětí U_d naprázdno) a výstupní impedancí Z_o ; vstupní proudy jsou idealizovány (rovný nule); obecně se jedná o reálný zdroj napětí řízený napětím

Pro příklad určíme admitanční matici příslušnou diferenčnímu operačnímu zesilovači se zesílením A , výstupní impedancí Z_o a nulovými vstupními proudy (idealizovaný parametr). Vzhledem k tomu, že výstupní napětí operačního zesilovače je vždy vztaženo k jeho vnitřnímu referenčnímu bodu, sestavujeme pouze matici zkrácenou (i když formální získání matice úplné je jednoduché). Bez ohledu na skutečnou obvodovou realizaci operačního zesilovače, shora uvedený slovní popis dostatečně vystihuje obvodová struktura na obr. 7.

Pro výstupní obvod platí (aplikace 2. Kirchhoffova zákona a Ohmova zákona)

$$U_o = Z_o I_o + A \cdot (U_+ - U_-)$$

Je snadné upravit všechny podmínky do „admitanční“ podoby:

$$\begin{aligned} I_+ &= 0 \cdot U_+ + 0 \cdot U_- + 0 \cdot U_o \\ I_- &= 0 \cdot U_+ + 0 \cdot U_- + 0 \cdot U_o \\ I_o &= -A \cdot Y_o \cdot U_+ + A \cdot Y_o \cdot U_- + Y_o \cdot U_o \end{aligned}$$

kde $Y_o = 1/Z_o$ je výstupní admitance operačního zesilovače.

Platí tedy

$$\begin{bmatrix} I_+ \\ I_- \\ I_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -AY_o & AY_o & Y_o \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_+ \\ U_- \\ U_o \end{bmatrix}$$

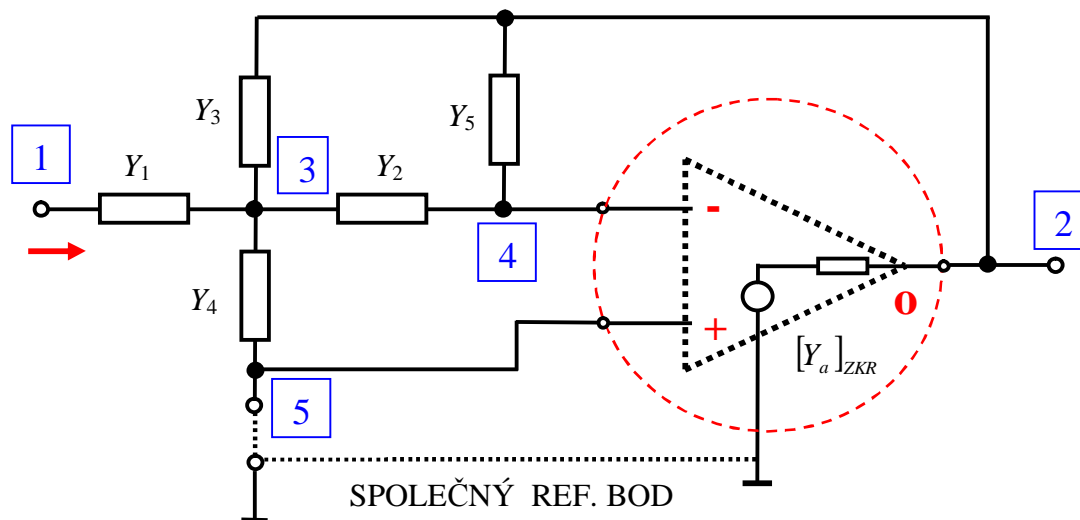
tedy admitanční matice (zkrácená; admitanční model) je

	+	-	o
+	0	0	0
-	0	0	0
o	$-AY_o$	AY_o	Y_o

admitanční matice operačního zesilovače (zkrácená)

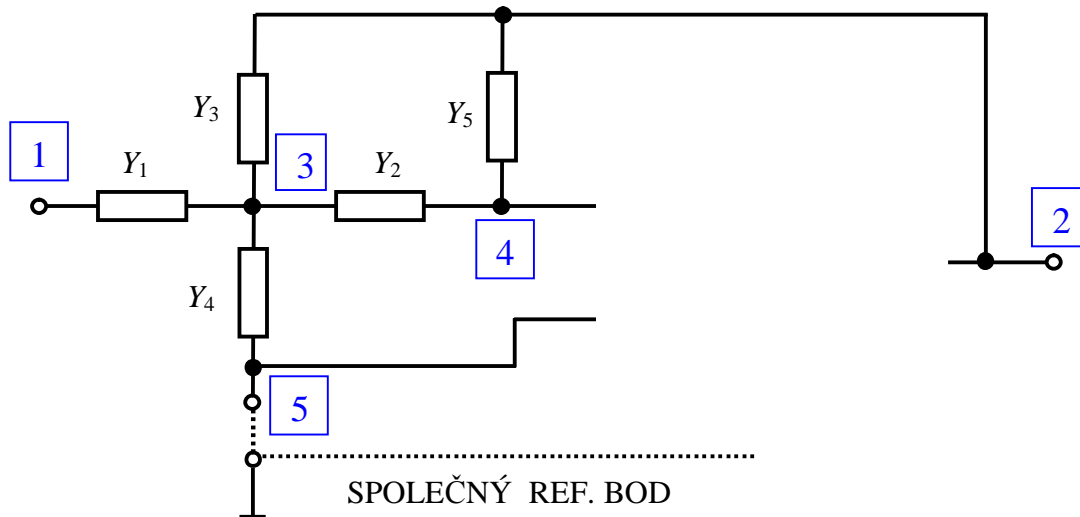
1.8. Příklad 1

Analyzujme strukturu na obr. 8. Máme určit přenos z uzlu 1 do uzlu 2.



Obr. 8. Analýza struktury s operačním zesilovačem

1) Po přiřazení čísel uzlům (všem) obvodu sestavíme matici pasívní části obvodu – obr. 9.



Obr. 9. Pasívní část obvodu z obr.8

Na základě udělaných úvah zřejmě platí, že

- $Y_{11} = Y_1 = y_{13}$ - to jsou všechny admittance připojené do uzlu 1
- $Y_{12} = 0$ - mezi uzly 1 a 2 není přímo připojena žádná admittance
- $Y_{13} = -Y_1 = -y_{13}$ - admittance mezi uzly 1 a 3
- $Y_{14} = Y_{15} = 0$ - žádné admittance mezi uzly

$Y_{21} = 0$ - mezi uzly 1 a 2 není přímo připojena žádná admitance

$Y_{22} = Y_3 + Y_5 = y_{23} + y_{24}$ - to jsou všechny admitance připojené do uzlu 2

atd.:

	1	2	3	4	5	
1	Y_1		$-Y_1$			$= [Y]_{\text{U}}$
2		$Y_3 + Y_5$	$-Y_3$	$-Y_5$		
3	$-Y_1$	$-Y_3$	$Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4$	$-Y_2$	$-Y_4$	
4		$-Y_5$	$-Y_2$	$Y_2 + Y_5$		
5			$-Y_4$		Y_4	

2) Do matice rozměru 5x5 vepíšeme incidence (+), (-), (o) – k patřičným uzlům – a pomocí „incidencí“ přičteme prvky matice operačního zesilovače. Uzel 5 je spojen s referenčním bodem, tedy 5. řádek a 5. sloupec se eliminují, ani nebylo nutné je vyplňovat:

	1	2 (o)	3	4 (-)	5 (+)	
1	Y_1		$-Y_1$			$= [Y]_{\text{U}}$
2 (o)		$Y_3 + Y_5 + Y_o$	$-Y_3$	$-Y_5 + AY_o$	$-AY_o$	
3	$-Y_1$	$-Y_3$	$Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4$	$-Y_2$	$-Y_4$	
4 (-)		$-Y_5$	$-Y_2$	$Y_2 + Y_5$		
5 (+)			$-Y_4$		Y_4	

	+	-	o
+	0	0	0
-	0	0	0
o	$-AY_o$	AY_o	Y_o

3) Je-li uzel 5 propojen na společný referenční bod, je celá struktura popsána zkrácenou maticí (eliminuje se 5. řádek a 5. sloupec) – od začátku bylo možné pracovat přímo se zkrácenou maticí pasívní části obvodu. Uvažujeme-li pouze jediný (signálový) nenulový zdroj proudu I_1 do uzlu 1 (vstup obvodu), je admitanční model obvodu z obr.8 následující:

	1	2 (o)	3	4 (-)		
1	Y_1		$-Y_1$		U_1	I_1
2 (o)		$Y_3 + Y_5 + Y_o$	$-Y_3$	$-Y_5 + AY_o$	U_2	0
3	$-Y_1$	$-Y_3$	$Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4$	$-Y_2$	U_3	0
4 (-)		$-Y_5$	$-Y_2$	$Y_2 + Y_5$	U_4	0

x =

4) Sestavme pro ilustraci rovněž incidenční matici $[T]$:

Ze základní identity

$$U_2 = U_o; \quad U_4 = U_-; \quad U_5 = U_+$$

určíme

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_+ \\ U_- \\ U_o \end{bmatrix} \Rightarrow [T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow [T]^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Odsud dále

PŘEVOD DO ODPOVÍDAJÍCÍCH ŘÁDKŮ

$$[Y_t] = [T] \times [Y_a] \times [T]^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -AY_o & AY_o & Y_o \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -AY_o & AY_o & Y_o \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_o & 0 & AY_o & -AY_o \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

PŘEVOD DO ODPOVÍDAJÍCÍCH SLOUPCŮ

Nyní určíme výslednou matici obvodu

$$[Y] = [Y'] + [Y_t] = \begin{bmatrix} Y_1 & 0 & -Y_1 & 0 & 0 \\ 0 & Y_3 + Y_5 & -Y_3 & -Y_5 & 0 \\ -Y_1 & -Y_3 & Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 & -Y_2 & -Y_4 \\ 0 & -Y_5 & -Y_2 & Y_2 + Y_5 & 0 \\ 0 & 0 & -Y_4 & 0 & Y_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_o & 0 & AY_o & -AY_o \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Po sečtení a eliminaci 5. řádku a 5. sloupce (uzel 5 propojen s referenčním uzlem) získáváme opět shora uvedený admitanční model elektronické struktury z obr.8.

1.9. Určení napět'ového přenosu

Stanovení napět'ového přenosu je v elektronickém obvodu nejčastější úlohou. Přenos z uzlu k do uzlu r definujeme jako podíl odpovídajících uzlových napětí:

$$P_{k \rightarrow r} = U_r / U_k$$

Uzel k je vstupem (vstupním uzlem) struktury, uzel r je výstupem struktury.

V praxi nejčastěji volíme $k \equiv 1$ a $r \equiv 2$ (řešení přenosu soustavy není pochopitelně funkcí prvotního přiřazení čísel uzlům) a do uzlu k často vstupuje jediný nenulový proud. Pro uvedený příklad snadno určíme pomocí Cramerova pravidla, že přenos zkoumané struktury je pro ideální operační zesilovač, kdy $A \rightarrow \infty$, určen vztahem

$$P_{1 \rightarrow 2} = \frac{U_2}{U_1} = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{\det \begin{bmatrix} Y_1 & I_1 & -Y_1 & 0 \\ 0 & 0 & -Y_3 & -Y_5 + AY_0 \\ -Y_1 & 0 & Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 & -Y_2 \\ 0 & 0 & -Y_2 & Y_2 + Y_5 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} I_1 & 0 & -Y_1 & 0 \\ 0 & Y_3 + Y_5 + Y_0 & -Y_3 & -Y_5 + AY_0 \\ 0 & -Y_3 & Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 & -Y_2 \\ 0 & -Y_5 & -Y_2 & Y_2 + Y_5 \end{bmatrix}}$$

$$P_{1 \rightarrow 2} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{-Y_1 Y_2}{Y_2 Y_3 + Y_5 (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)}$$

Vhodnou fyzikální volbou jednotlivých admitancí obvodu (Y_1 až Y_5) získáme různé invertující filtry 2. řádu. Například při volbě ($p = j\omega$; admitance rezistoru je $G = 1/R$; admitance kapacitoru C je $j\omega C$):

$$Y_1 = G_1; \quad Y_2 = G_2; \quad Y_3 = G_3; \quad Y_4 = pC_4; \quad Y_5 = pC_5$$

obdržíme pro ideální operační zesilovač přenos

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{-G_1 G_2}{p^2 C_4 C_5 + p C_5 (G_1 + G_2 + G_3) + G_2 G_3} = -\frac{R_3}{R_1} \cdot \frac{1/(R_2 R_3 C_4 C_5)}{p^2 + p(1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3) + 1/(R_2 R_3 C_4 C_5)}$$

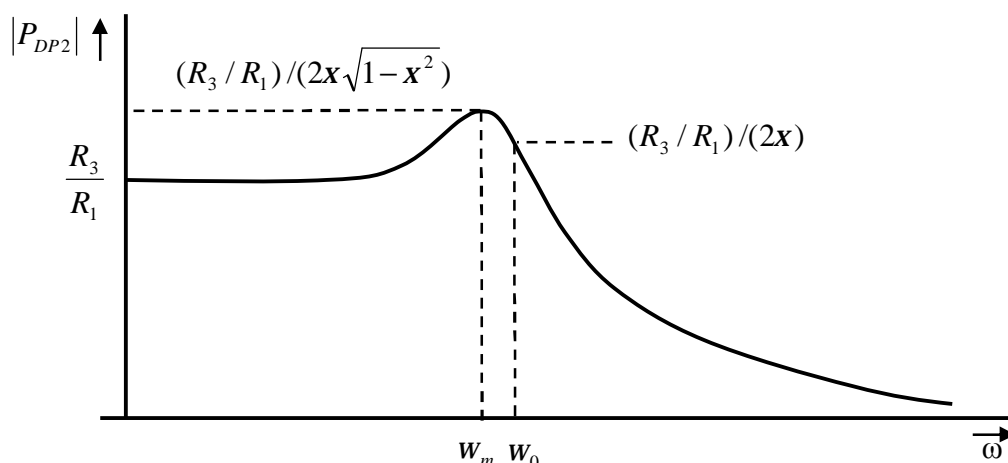
Jedná se o invertující dolní propust 2. řádu. Srovnáme-li tuto přenosovou funkci s obvyklým formalizovaným tvarem přenosu pro dolní propusti 2. řádu

$$P_{DP2} = P_{1 \rightarrow 2} = K_0 \cdot \frac{w_0^2}{p^2 + 2\alpha w_0 p + w_0^2}$$

můžeme určit, že

$$K_0 = -R_3 / R_1; \quad w_0^2 = 1 / (R_2 R_3 C_4 C_5); \quad 2x = \sqrt{\frac{C_5}{C_4}} \cdot \left(\sqrt{\frac{R_2 R_3}{R_1^2}} + \sqrt{\frac{R_3}{R_2}} + \sqrt{\frac{R_2}{R_3}} \right).$$

Vyšetřením extrémů modulu přenosu zjistíme, že na úhlovém kmitočtu $w_m = w_0 \cdot \sqrt{1 - 2x^2}$ je maximum modulu přenosu $|P_{DP2}|_{\max} = (R_3 / R_1) / (2x \sqrt{1 - x^2})$, modul přenosu na charakteristickém úhlovém kmitočtu w_0 je $|P_{DP2}(w_0)| = (R_3 / R_1) / (2x)$, modul přenosu pro $w_0 \rightarrow 0$ je $|P_{DP2}(0)| = (R_3 / R_1)$ - kvalitativní zobrazení viz obr. 10.



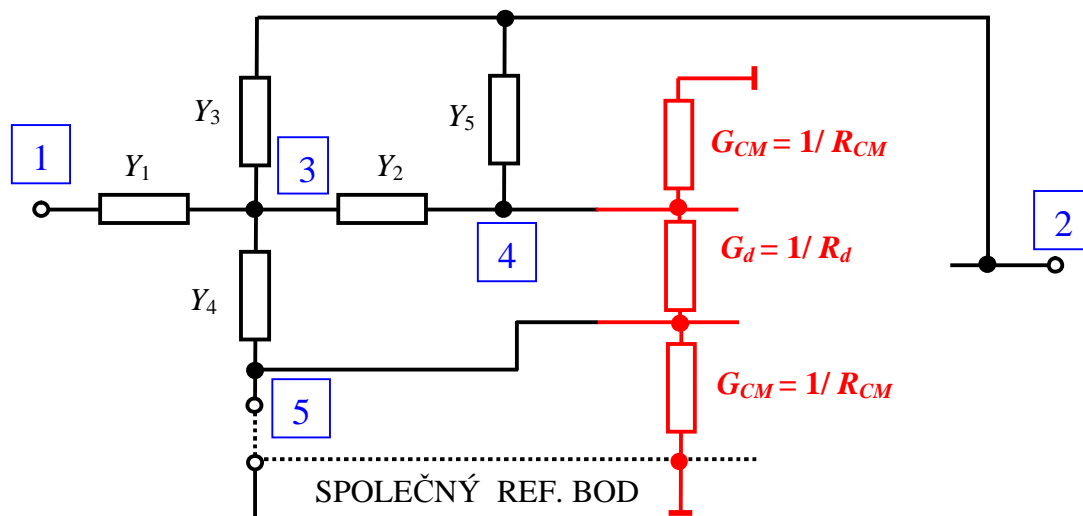
Obr. 10. Modul přenosu obvodu z obr. 8 pro: $Y_1 = G_1; Y_2 = G_2; Y_3 = G_3; Y_4 = pC_4; Y_5 = pC_5$

Předpoklad $A \rightarrow \infty$ zavádí pojem *ideální operační zesilovač*. Vlastnosti elektronické struktury s ideálním operačním zesilovačem jsou definovány pouze pasívními prvky elektronické struktury. V tomto smyslu představuje přenos na obr. 10 ideální (požadovaný) stav. Pro *reálný operační zesilovač* můžeme v nejjednodušším případě definovat pouze výstupní vodivost ($Y_0 = G_0 = 1 / R_0$), tak jak je tomu v admitančním modelu, a použít pro zesílení model s jedním pólem přenosu

$$A = A_0 \cdot \frac{w_1}{p + w_1} = \frac{w_T}{p + w_1}; \quad w_T = A_0 \cdot w_1$$

Tyto vlastnosti ovlivní všechny vlastnosti struktury – v praxi vždy nepříznivě. Přenos obvodu (a další vlastnosti) se odchyluje od požadovaného ideálu. Výpočty jsou přiměřeně náročnější.

Pokud chceme zahrnout i *vstupní odpory operačního zesilovače* (diferenční - R_d , souhlasný odpor invertujícího a neinvertujícího vstupu - R_{CM} - předpokládá se stejná hodnota), postupujeme podle již stanovených pravidel. Tyto odpory prostě dokreslíme do obvodu a považujeme je za součást pasívní části struktury – situace pro obvod z obr. 8 je znázorněna na obr. 11.



Obr. 11. Pasívní část obvodu z obr.8 doplněná o vstupní vodivosti operačního zesilovače

Snadno tak získáme odpovídající admitanční matici struktury, která zahrnuje vlastnosti reálného operačního zesilovače (zesílení A , výstupní odpor R_o , diferenční vstupní odpor R_d a vstupní souhlasné odpory R_{CM}):

	1	2 (o)	3	4 (-)	5 (+)	
1	Y_1		$-Y_1$			
2 (o)		$Y_3+Y_5+G_o$	$-Y_3$	$-Y_5+A.G_o$	$-A.G_o$	
3	$-Y_1$	$-Y_3$	$Y_1+Y_2+Y_3+Y_4$	$-Y_2$	$-Y_4$	
4 (-)		$-Y_5$	$-Y_2$	$Y_2+Y_5+G_{CM}+G_d$	$-G_d$	
5 (+)			$-Y_4$	$-G_d$	$Y_4+G_{CM}+G_d$	

$= [Y]_U$

	+	-	o
+	0	0	0
-	0	0	0
o	$-A.G_o$	$A.G_o$	G_o

Admitanční model obvodu z obr.8 (uzel 5 propojen na společný referenční bod) je nyní:

	1	2 (o)	3	4 (-)	
1	Y_1		$-Y_1$		U_1
2 (o)		$Y_3+Y_5+G_o$	$-Y_3$	$-Y_5+A.G_o$	U_2
3	$-Y_1$	$-Y_3$	$Y_1+Y_2+Y_3+Y_4$	$-Y_2$	U_3
4 (-)		$-Y_5$	$-Y_2$	$Y_2+Y_5+G_{CM}+G_d$	U_4

x

I_1
0
0
0

Jeho řešením získáváme analýzu obvodu se zahrnutými vlastnostmi reálného operačního zesilovače.

1.10. Určení impedance (admittance) uzlu (vzhledem k externím obvodům)

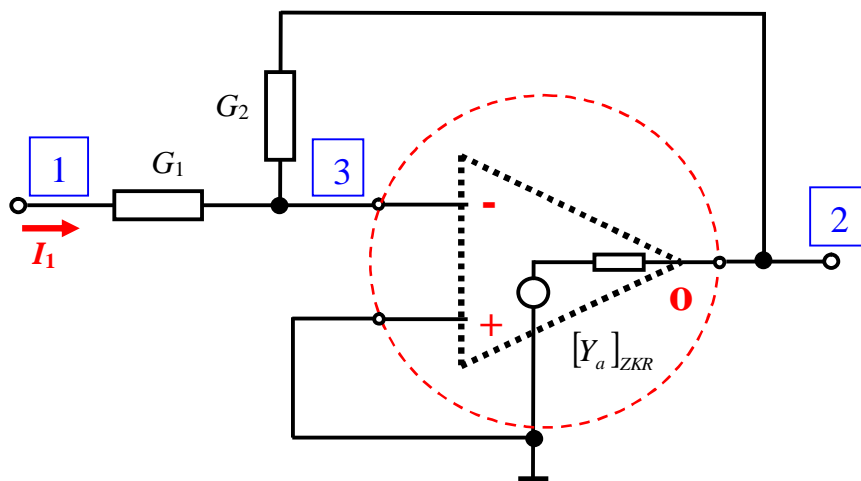
Obecně můžeme v lineárním obvodu určit impedanci $Z_{Uk} = 1/Y_{Uk}$ každého uzlu (k) jako podíl uzlového napětí U_k a proudu I_k , který je do uzlu přiváděn z externího zdroje. Všechny ostatní externí zdroje nahradíme pouze jejich vnitřními admittancemi G_i . To znamená, že ideální zdroje proudu prostě odpojíme (má nulovou admittanci). Ideální zdroje napětí nahradíme zkratem, protože jejich vnitřní impedance je nulová (admittance nekonečná).

V praxi určujeme pouze impedanci vstupní Z_{VST} (vstupního uzlu), která definuje chování struktury vůči zdroji signálu a impedanci výstupní Z_{VYS} (výstupního uzlu), která definuje chování struktury vůči zátěži (vůči navazujícímu obvodu). Při určování výstupní impedance je výhodné pracovat na vstupu s reálným zdrojem signálu – místo zdroje signálu zařadit admittanci G_i , která definuje vnitřní admittanci reálného zdroje signálu. Její velikost totiž může v některých strukturách výstupní admittanci významně ovlivnit.

1.11. Příklad 2

Pro ilustraci řešíme jednoduchý obvod na obr. 12 – invertující zapojení operačního zesilovače ($Y_o = G_o = 1/R_o$; sestavujeme přímo zkrácené matice). Uzel 1 je uzlem vstupním – buzen proudem I_1 , uzel 2 je uzlem výstupním. Popsaným způsobem určíme, že:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & 1 & 2(o) & 3(-) \\
 1 & G_1 & 0 & -G_1 \\
 2(o) & 0 & G_2 + (G_o) & -G_2 + (A \cdot G_o) \\
 3(-) & -G_1 & -G_2 & G_1 + G_2
 \end{array}
 \end{array}
 \times
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 U_1 \\
 U_2 \\
 U_3
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 I_1 \\
 0 \\
 0
 \end{array}
 \end{array}$$



Obr. 12. Invertující zapojení operačního zesilovače

Snadno určíme, že přenos struktury (z uzlu 1 do uzlu 2) je

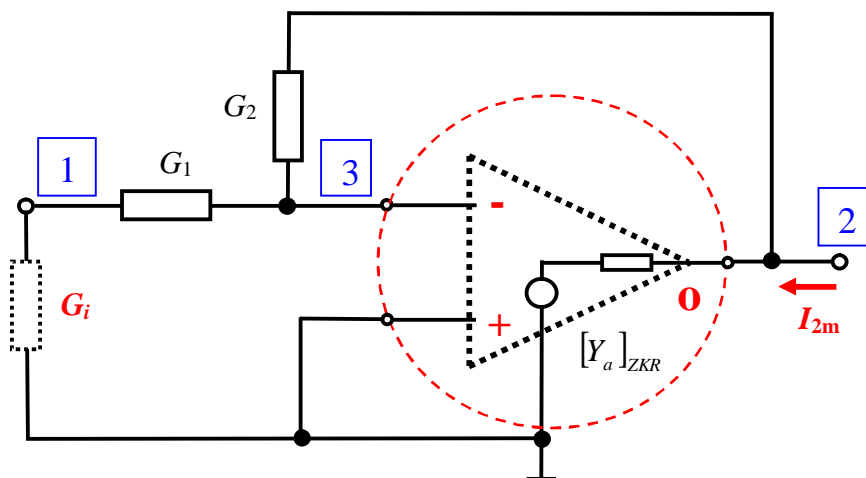
$$U_2 / U_1 = \frac{-G_1(-G_2 + AG_o)}{G_1G_2 + G_o(G_1 + G_2) + G_2AG_o} = -\frac{G_1}{G_2} \cdot \frac{AG_o - G_2}{G_1 + G_o(1 + G_1/G_2) + AG_o}$$

Snadno určíme i vstupní impedanci (impedanci uzlu 1)

$$Z_{vst} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{\det \begin{bmatrix} I_1 & 0 & -G_1 \\ 0 & G_2 + G_0 & -G_2 + AG_0 \\ 0 & -G_2 & G_1 + G_2 \end{bmatrix}}{I_1 \times \det \begin{bmatrix} G_1 & 0 & -G_1 \\ 0 & G_2 + G_0 & -G_2 + AG_0 \\ -G_1 & -G_2 & G_1 + G_2 \end{bmatrix}} = \frac{1}{G_1} \cdot \frac{G_1 G_2 + G_0(G_1 + G_2) + G_2 A G_0}{G_2 G_0 + G_2 A G_0} =$$

$$\dots = \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_0 + A G_0} + \frac{1}{G_2 + G_2 A} = R_1 + \frac{R_0}{1 + A} + \frac{R_2}{1 + A}$$

Určíme nyní výstupní impedanci (impedanci uzlu 2). Situace je znázorněna na obr. 13. Pro odlišení situace je nyní proudům i napětím přidán index „m“. Admitanční model se mění nepatrně. V prvku „11“ matice navíc přičítáme vodivost modelující reálný zdroj signálu, mění se vektor budících proudů.



Obr. 13. Situace při určování výstupní impedance (impedance uzlu 2)

	1	2(o)	3(-)
1	$G_1 + G_i$	0	$-G_1$
2(o)	0	$G_2 + (G_0)$	$-G_2 + (A \cdot G_0)$
3(-)	$-G_1$	$-G_2$	$G_1 + G_2$

$$x \begin{bmatrix} U_{1m} \\ U_{2m} \\ U_{3m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{2m} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Výstupní impedance je

$$Z_{vys} = \frac{U_{2m}}{I_{2m}} = \frac{\det \begin{bmatrix} G_1 + G_i & 0 & -G_1 \\ 0 & I_{2m} & -G_2 + AG_0 \\ -G_1 & 0 & G_1 + G_2 \end{bmatrix}}{I_{2m} \times \det \begin{bmatrix} G_1 + G_i & 0 & -G_1 \\ 0 & G_2 + G_0 & -G_2 + AG_0 \\ -G_1 & -G_2 & G_1 + G_2 \end{bmatrix}} = \dots =$$

$$= \frac{G_1 G_2 + G_i (G_1 + G_2)}{G_i G_1 G_2 + G_1 G_2 G_0 + G_i G_1 G_0 + G_i G_2 G_0 + AG_2 G_0 (G_1 + G_2)}$$

Odsud určíme

$$Z_{vys} (A \rightarrow \infty) = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{G_1 G_2 + G_i (G_1 + G_2)}{G_i G_1 G_2 + G_1 G_2 G_0 + G_i G_1 G_0 + G_i G_2 G_0 + AG_2 G_0 (G_1 + G_2)} = 0$$

$$Z_{vys} (G_0 \rightarrow \infty) = \lim_{G_0 \rightarrow \infty} \frac{G_1 G_2 + G_i (G_1 + G_2)}{G_i G_1 G_2 + G_1 G_2 G_0 + G_i G_1 G_0 + G_i G_2 G_0 + AG_2 G_0 (G_1 + G_2)} = 0$$

V praxi vždy platí $G_0 \gg G_1, G_2$. Za této zjednodušující podmínky lze určit, že výstupní odpor celé struktury je definován vztahem

$$Z_{vys} = \frac{R_0}{1 + A \frac{R_1 + R_i}{R_1 + R_i + R_2}}$$

Je-li struktura buzena z ideálního zdroje proudu, platí $R_i \rightarrow \infty$ a

$$Z_{vys} (R_i \rightarrow \infty) = \frac{R_0}{1 + A}$$

Stejný výsledek získáme ze situace na obr. 13, jestliže uzel 1 zůstane odpojen.

Je-li struktura buzena z ideálního zdroje napětí, platí $R_i = 0$ a

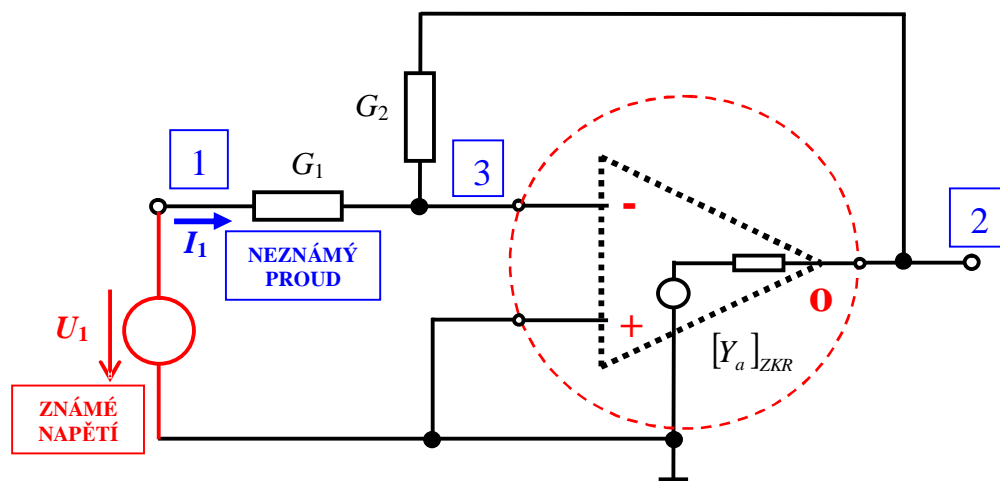
$$Z_{vys} (R_i = 0) = \frac{R_0}{1 + A \frac{R_1}{R_1 + R_2}}$$

Stejný výsledek získáme ze situace na obr. 13, jestliže uzel 1 připojíme k referenčnímu uzlu, tedy eliminujeme 1. řádek a 1. sloupec.

Tyto výsledky jsou ve shodě s výsledky získané pomocí teorie zpětné vazby.

1.12. Buzení obvodu z ideálního zdroje napětí

Doposud jsme předpokládali, že známými veličinami jsou externí proudy I_k vstupující do jednotlivých uzlů, řešili jsme neznámá uzlová napětí U_k . Co se stane, připojíme-li do některého uzlu místo zdroje proudu ideální zdroj napětí? Situaci demonstrováme bez újmy na obecnosti na řešení příkladu 2 z obr. 12 – viz obr. 14.



Obr. 14. Invertující zapojení operačního zesilovače – vstupní uzel buzen z ideálního zdroje napětí U_1

I v obvodu na obr. 14 jistě platí Ohmův a Kirchhoffovy zákony, platí všechny předchozí úvahy a postupy. Proto musí platit i stejný admitanční model (souvisí rovněž s principem substituce, náhrada zdroje napětí ekvivalentním zdrojem proudu, který tímto zdrojem protéká, nevede ke změně poměrů v obvodu)

	1	2(o)	3(-)
1	G_1	0	$-G_1$
2(o)	0	$G_2 + (G_o)$	$-G_2 + (A \cdot G_o)$
3(-)	$-G_1$	$-G_2$	$G_1 + G_2$

 $\times \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Nyní je ovšem uzlové napětí U_1 veličinou známou a proud I_1 veličinou neznámou. Shora uvedený model převedeme pomocí základních ekvivalentních rovnicových úprav do tvaru (smíšená matice, nikoli již čistě admitanční)

	1	2(o)	3(-)
1	-1	0	$-G_1$
2(o)	0	$G_2 + (G_o)$	$-G_2 + (A \cdot G_o)$
3(-)	0	$-G_2$	$G_1 + G_2$

 $\times \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -G_1 U_1 \\ 0 \\ G_1 U_1 \end{bmatrix}$

Pokud budeme určovat pouze neznámá uzlová napětí, stačí řešit systém rovnic

$$\begin{bmatrix} G_2 + G_o & -G_2 + AG_o \\ -G_2 & G_1 + G_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ G_1 U_1 \end{bmatrix}$$

Odsud

$$U_2 = \frac{\det \begin{bmatrix} 0 & -G_2 + AG_o \\ G_1 U_1 & G_1 + G_2 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} G_2 + G_o & -G_2 + AG_o \\ -G_2 & G_1 + G_2 \end{bmatrix}} = -U_1 \cdot \frac{G_1}{G_2} \cdot \frac{AG_o - G_2}{G_1 + G_o(1 + G_1/G_2) + AG_o}$$

tedy

$$U_2 / U_1 = -\frac{G_1}{G_2} \cdot \frac{AG_o - G_2}{G_1 + G_o(1 + G_1/G_2) + AG_o}$$

To je stejný výsledek, jako jsme získali při předchozím řešení. Výpočet zbývajících neznámých veličin je již rutinní záležitostí.

2. ÚPRAVA MATIC PRO NUMERICKÉ ŘEŠENÍ

Pokud by měl být problém řešen numericky, je nutno získaný admitanční model rozložit na reálné a imaginární části. Demonstrujme postup přímo na příkladu 1, budící proud má obecně reálnou i imaginární složku

$$I_1 = I_{r1} + jI_{i1}$$

Každé uzlové napětí je rovněž definováno reálnou a imaginární složkou

$$U_k = U_{rk} + jU_{ik}$$

Potom admitanční model získaný v příkladu 1 můžeme zapsat ve tvaru

G_1		$-G_1$		\times	$U_{r1}+j U_{i1}$	$=$	$I_{r1}+j I_{i1}$
	$G_3 +G_o+j\omega C_5$	$-G_3$	$-j\omega C_5+A.G_o$		$U_{r2}+j U_{i2}$		0
$-G_1$	$-G_3$	$G_1+G_2+G_3+j\omega C_4$	$-G_2$		$U_{r3}+j U_{i3}$		0
	$-j\omega C_5$	$-G_2$	$G_2+j\omega C_5$		$U_{r4}+j U_{i4}$		0

a uvažujeme-li nejjednodušší možný model frekvenční závislosti zesílení operačního zesilovače

$$A \cong \frac{A_0 \cdot w_1}{jw} = -j \frac{w_T}{w}; \quad w_T = A_0 \cdot w_1$$

obdržíme ekvivalentní zápis (kruhová frekvence bude jistě parametrem výpočtu)

$$\left\{ \begin{bmatrix} G_1 & 0 & -G_1 & 0 \\ 0 & G_3 + G_o & -G_3 & 0 \\ -G_1 & -G_3 & G_1 + G_2 + G_3 & -G_2 \\ 0 & 0 & -G_2 & G_2 \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & wC_5 & 0 & -wC_5 - \frac{G_o w_T}{w} \\ 0 & 0 & wC_4 & 0 \\ 0 & -wC_5 & 0 & wC_5 \end{bmatrix} \right\} \times$$

$$\times \left\{ \begin{bmatrix} U_{r1} \\ U_{r2} \\ U_{r3} \\ U_{r4} \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} U_{i1} \\ U_{i2} \\ U_{i3} \\ U_{i4} \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} I_{r1} \\ I_{r2} \\ I_{r3} \\ I_{r4} \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} I_{i1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Označíme-li reálnou část admitanční matice jako matici $[Y_r]$, imaginární část admitanční matice jako matici $[Y_i]$, reálnou část sloupce uzlových napětí jako $[U_r]$, imaginární část sloupce uzlových napětí jako $[U_i]$, reálnou část sloupce budících proudů jako $[I_r]$ a imaginární část sloupce budících proudů jako $[I_i]$, můžeme vztah přepsat do podoby

$$\{[Y_r] + j[Y_i]\} \times \{[U_r] + j[U_i]\} = [I_r] + j[I_i]$$

Odsud určíme, že

$$[Y_r] \times [U_r] - [Y_i] \times [U_i] + j\{[Y_i] \times [U_r] + [Y_r] \times [U_i]\} = [I_r] + j[I_i]$$

což vede k systému rovnic (už pouze v oboru reálných čísel)

$$[Y_r] \times [U_r] - [Y_i] \times [U_i] = [I_r]$$

$$[Y_i] \times [U_r] + [Y_r] \times [U_i] = [I_i]$$

Tento systém můžeme zapsat v blokové podobě

$$\begin{bmatrix} [Y_r] & -[Y_i] \\ [Y_i] & [Y_r] \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} [U_r] \\ [U_i] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [I_r] \\ [I_i] \end{bmatrix}$$

což v našem příkladu vede na tvar

$$\begin{bmatrix} G_1 & 0 & -G_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_3 + G_o & -G_3 & 0 & 0 & -wC_5 & 0 & wC_5 + \frac{G_o w_T}{w} \\ -G_1 & -G_3 & G_1 + G_2 + G_3 & -G_2 & 0 & 0 & -wC_4 & 0 \\ 0 & 0 & -G_2 & G_2 & 0 & wC_5 & 0 & -wC_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_1 & 0 & -G_1 & 0 \\ 0 & wC_5 & 0 & -wC_5 - \frac{G_o w_T}{w} & 0 & G_3 + G_o & -G_3 & 0 \\ 0 & 0 & wC_4 & 0 & -G_1 & -G_3 & G_1 + G_2 + G_3 & -G_2 \\ 0 & -wC_5 & 0 & wC_5 & 0 & 0 & -G_2 & G_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_{r1} \\ U_{r2} \\ U_{r3} \\ U_{r4} \\ U_{i1} \\ U_{i2} \\ U_{i3} \\ U_{i4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{r1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I_{i1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tento matematický model je již řešitelný v oboru reálných čísel. Za upozornění stojí skutečnost, že za běžných okolností jsou hodnoty výstupní vodivosti G_o operačního zesilovače velmi velké (až nekonečně). Stejně tak poměr w_T/w může pro malé hodnoty úhlového kmitočtu ω běžně dosahovat hodnot 10^6 .

Pokud použijeme složitější model pro zesílení operačního zesilovače, který v sobě zahrnuje i jeho „stejnoseměrné“ vlastnosti ($\omega < \omega_1$)

$$A = A_0 \cdot \frac{w_1}{jw + w_1} = \frac{w_T}{jw + w_1} = w_T \cdot \frac{w_1 - jw}{w_1^2 + w^2}; \quad w_T = A_0 \cdot w_1$$

obdržíme matematický popis zkoumaného obvodu v podobě

$$\begin{bmatrix} G_1 & 0 & -G_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_3 + G_o & -G_3 & \frac{G_o w_T w_1}{w_1^2 + w^2} & 0 & -wC_5 & 0 & wC_5 + \frac{G_o w_T w}{w_1^2 + w^2} \\ -G_1 & -G_3 & G_1 + G_2 + G_3 & -G_2 & 0 & 0 & -wC_4 & 0 \\ 0 & 0 & -G_2 & G_2 & 0 & wC_5 & 0 & -wC_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_1 & 0 & -G_1 & 0 \\ 0 & wC_5 & 0 & -wC_5 - \frac{G_o w_T w}{w_1^2 + w^2} & 0 & G_3 + G_o & -G_3 & \frac{G_o w_T w_1}{w_1^2 + w^2} \\ 0 & 0 & wC_4 & 0 & -G_1 & -G_3 & G_1 + G_2 + G_3 & -G_2 \\ 0 & -wC_5 & 0 & wC_5 & 0 & 0 & -G_2 & G_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_{r1} \\ U_{r2} \\ U_{r3} \\ U_{r4} \\ U_{i1} \\ U_{i2} \\ U_{i3} \\ U_{i4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{r1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I_{i1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tento systém je již řešitelný. Pro zvolené hodnoty kruhového kmitočtu ω je možné určit všechna uzlová napětí, tedy i určit přenos a impedanci uzlu 1 jako funkci kruhového kmitočtu. Pokud bude nutné určit impedanci uzlu 2, pracujeme analogicky s admitančním modelem získaným podle čl.1.9 (příklad viz čl.1.10).

3. ADMITANČNÍ MODEL PRO ŘEŠENÍ PŘECHODNÝCH DĚJŮ – LAPLACEOVA TRANSFORMACE

3.1. Nulové počáteční podmínky

Řešíme-li přechodný děj při nulových počátečních podmínkách (a tento případ je při určování přenosů velmi častý) lze snadno určit (Dodatek 1), že platí (pro shodnou orientaci proudové a napěťové šipky – tzv. spotřebičová konvence):

pro rezistor R $I(p) = G \cdot U(p)$

pro induktor L $I(p) = \left(\frac{1}{pL} \right) \cdot U(p)$

pro kapacitor C $I(p) = pC \cdot U(p)$

kde $I(p), U(p)$ jsou obrazy proudů $i(t)$ a napětí $u(t)$.

Po Laplaceově transformaci tak můžeme použít zobecněnou podobu Ohmova zákona

$$I(p) = Y(p) \cdot U(p)$$

kde $Y(p)$ je admitance (obrazová) prvků; $Y(p) = G = 1/R$ pro rezistor; $Y(p) = (1/pL)$ pro induktor a $Y(p) = pC$ pro kapacitor.

Protože Kirchhoffovy zákony jsou při Laplaceově transformaci zachovány, platí formálně (pro nulové počáteční podmínky) všechny předchozí úvahy s tím, že použijeme jednoduchou substituci

$$j\omega \rightarrow p$$

a potom jsme schopni určit obrazy všech uzlových napětí pro známý obraz vstupního budicího proudu nebo napětí. Časové průběhy získáme zpětnou transformací.

3.2. Příklad 3 - odezva dolní propusti 2. řádu na skokovou změnu vstupního napětí

Na základě uvedených tvrzení je zřejmé, že obvod na obr. 8 má (při nulových počátečních podmínkách) formálně stejný (obrazový) admitanční model:

	1	2 (o)	3	4 (-)				
1	Y_1		$- Y_1$		x	$U_1(p)$	=	$I_1(p)$
2 (o)		$Y_3 + Y_5 + Y_o$	$- Y_3$	$- Y_5 + AY_o$		$U_2(p)$		0
3	$- Y_1$	$- Y_3$	$Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4$	$- Y_2$		$U_3(p)$		0
4 (-)		$- Y_5$	$- Y_2$	$Y_2 + Y_5$		$U_4(p)$		0

Pro $Y_1 = G_1$, $Y_2 = G_2$, $Y_3 = G_3$, $Y_4 = pC_4$, $Y_5 = pC_5$ a $A \rightarrow \infty$ (ideální operační zesilovač) je tedy formálně stejný i přenos (přesněji obrazový přenos)

$$P_{DP2}(p) = P_{1 \rightarrow 2}(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = K_0 \cdot \frac{w_0^2}{p^2 + 2xw_0p + w_0^2}$$

přičemž stále platí

$$K_0 = -R_3 / R_1; \quad w_0^2 = 1/(R_2 R_3 C_4 C_5); \quad 2x = \sqrt{\frac{C_5}{C_4}} \cdot \left(\sqrt{\frac{R_2 R_3}{R_1^2}} + \sqrt{\frac{R_3}{R_2}} + \sqrt{\frac{R_2}{R_3}} \right)$$

Obraz výstupního napětí $U_2(p)$ je zřejmě definován vztahem

$$U_2(p) = U_1(p) \cdot K_0 \cdot \frac{w_0^2}{p^2 + 2xw_0p + w_0^2}$$

kde $U_1(p) = [u_1(t)]$ je obrazem známého vstupního napětí .

Použijeme-li jako vstupní signál skokové napětí o amplitudě A_1 , platí $u_1(t) = s(t) \cdot A_1$ a tudíž $U_1(p) = L[s(t) \cdot A_1] = A_1/p$. Potom

$$U_2(p) = A_1 \cdot K_0 \cdot \frac{w_0^2}{p \cdot (p^2 + 2xw_0p + w_0^2)}$$

Zpětnou transformací, např. [5, 2], zjistíme, že časová odezva elektronického obvodu je za definovaných podmínek dána vztahem

$$u_2(t) = A_1 \cdot K_0 \cdot \left[1 - \frac{e^{-xw_0t}}{\sqrt{x^2 - 1}} \cdot \sinh(w_0 \sqrt{x^2 - 1} \cdot t + b) \right];$$

$$\sinh b = \sqrt{x^2 - 1}$$

Pro $x^2 - 1 < 1$ je výhodnější vztah upravit do podoby

$$u_2(t) = A_1 \cdot K_0 \cdot \left[1 - \frac{e^{-xw_0t}}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot \sin(w_0 \sqrt{1 - x^2} \cdot t + b) \right];$$

$$\sin b = \sqrt{1 - x^2}$$

Pro limitní hodnotu $x = 1$ lze pomocí základních úvah určit

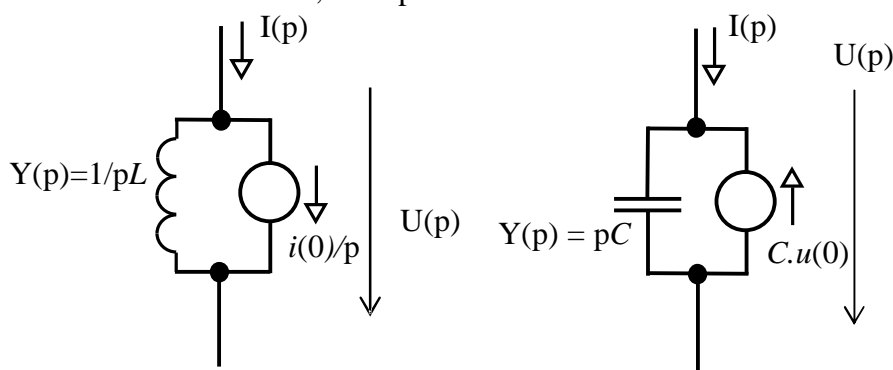
$$u_2(t; x=1) = \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ A_1 \cdot K_0 \cdot \left[1 - \frac{e^{-xw_o t}}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \sin(w_o \sqrt{1-x^2} \cdot t + b) \right] \right\} =$$

$$\left| \sin b = 0; \cos b = 1; \sin(w_o \sqrt{1-x^2} \cdot t) \cong w_o \sqrt{1-x^2} \cdot t; \cos(w_o \sqrt{1-x^2} \cdot t) \cong 1 \right| = \dots$$

$$\dots = A_1 \cdot K_0 \cdot [1 - e^{-w_o t} (w_o \cdot t + 1)]$$

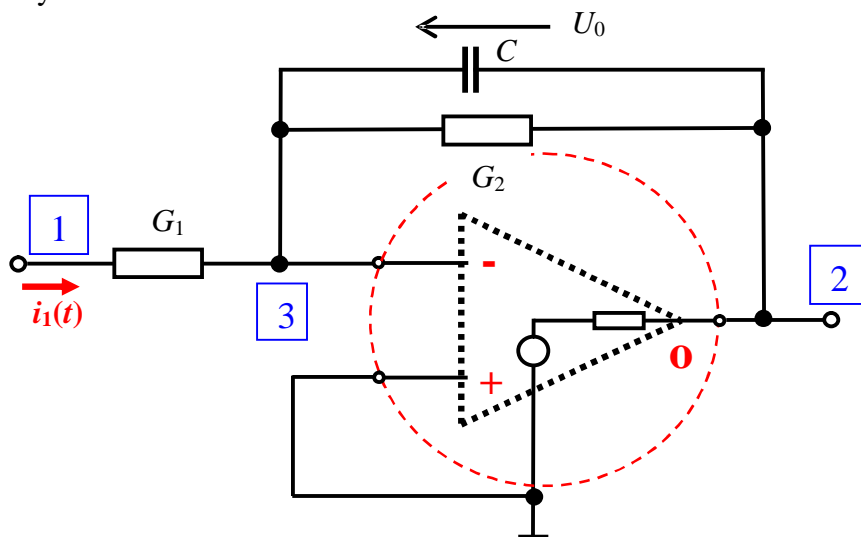
3.3. Nenulové počáteční podmínky

Pro nenulové počáteční podmínky platí obvodové modely na obr. 15 (Dodatek 1), admittance rezistoru se nemění, stále platí $G = 1/R$.



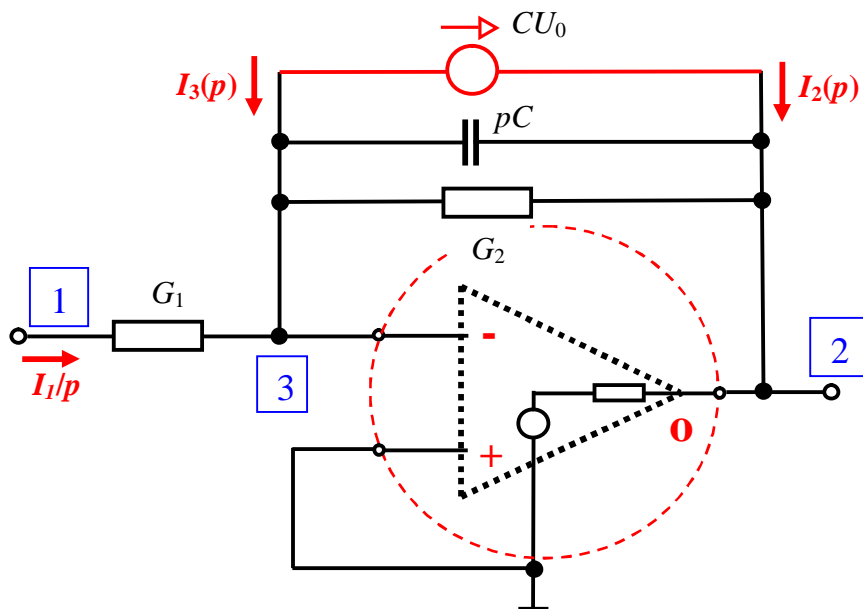
Obr. 15. Modely induktoru L s počátečním proudem $i(0)$ a kapacitoru C s počátečním napětím $u(0)$ pro Laplaceovu transformaci; zdroje proudu $i(0)/p$ a $C.u(0)$ nejsou napětím $U(p)$ ovlivňovány – nejsou funkcí přiloženého napětí; proudová šipka $i(0)/p$ je ve shodě s původním směrem $i(0)$; proudová šipka $C.u(0)$ směřuje proti původnímu směru $u(0)$

Zahrneme-li zdroje proudu, které definují počáteční stav obvodu, do standardního algoritmu řešení, můžeme použít všechny shora stanovené postupy. Postup demonstrujeme pro elektronický obvod na obr. 16.



Obr. 16. Invertující zapojení operačního zesilovače – dolní propust 1. řádu

V čase $t = 0$ je skokově připojen proud o konstantní úrovni I_1 a známe hodnotu napětí na kapacitoru $C - U_0$. Potom pro Laplaceovu transformaci platí model na obr. 17, $I_1(p) = I_1 / p$:



Obr. 16. Invertující zapojení operačního zesilovače – dolní propust 1. řádu model po Laplaceově transformaci

Rutinním způsobem stanovíme admitanční (obrazový) model, musíme si nyní ovšem uvědomit, že do uzlu 2 vstupuje proud $I_2(p) = CU_0$ (proto znaménko + ve sloupci budících veličin) a z uzlu 3 vystupuje proud CU_0 , proto $I_3(p) = -CU_0$ (a proto znaménko mínus ve sloupci budících veličin):

	1	2(o)	3(-)			
1	G_1	0	$-G_1$	\times	$\frac{U_1(p)}{U_2(p)}$	$= \frac{I_1/p}{CU_0}$
2(o)	0	$G_2 + pC + (G_o)$	$-pC - G_2 + (A \cdot G_o)$		$\frac{U_2(p)}{U_3(p)}$	$= \frac{CU_0}{-CU_0}$
3(-)	$-G_1$	$-G_2 - pC$	$G_1 + G_2 + pC$			

Pro ideální operační zesilovač platí, že $A \rightarrow \infty$; pomocí Cramerova pravidla určíme za této situace

$$\begin{aligned}
 U_2(p) &= \frac{-I_1}{p \cdot (pC + G_2)} + \frac{CU_0}{pC + G_2} = \frac{-I_1 / C}{p \cdot (p + G_2 / C)} + \frac{U_0}{p + G_2 / C} = \dots = \\
 &= -\frac{I_1}{G_2} \cdot \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + G_2 / C} \right) + \frac{U_0}{p + G_2 / C}
 \end{aligned}$$

Zpětnou transformací určíme, že časová odezva na skokovou změnu proudu je

$$u_2(t) = -I_1 \cdot R_2 \cdot (1 - \exp(-w_0 t)) + U_0 \cdot \exp(-w_0 t)$$

kde

$w_0 = G_2 / C = 1 / (R_2 C) = 1 / \tau$ je charakteristický kmitočet obvodu (τ – časová konstanta).

Samozřejmě můžeme určit odezvu systému i na skokovou změnu napětí U_1 ; obrazem je potom U_1/p . Proud (obraz) $I_1(p)$ nyní neznáme. Formálně i nyní platí

$$\begin{array}{l} 1 \\ 2(o) \\ 3(-) \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2(o) & 3(-) \\ \hline G_1 & 0 & -G_1 \\ \hline 0 & G_2 + pC + (G_o) & -pC - G_2 + (A \cdot G_o) \\ \hline -G_1 & -G_2 - pC & G_1 + G_2 + pC \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline U_1/p \\ \hline U_2(p) \\ \hline U_3(p) \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline I_1(p) \\ \hline CU_0 \\ \hline -CU_0 \\ \hline \end{array}$$

Ekvivalentními úpravami získáme model v podobě

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & 0 & -G_1 \\ \hline 0 & G_2 + pC + (G_o) & -pC - G_2 + (A \cdot G_o) \\ \hline 0 & -G_2 - pC & G_1 + G_2 + pC \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline I_1(p) \\ \hline U_2(p) \\ \hline U_3(p) \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline -G_1 U_1/p \\ \hline CU_0 \\ \hline -CU_0 + G_1 U_1/p \\ \hline \end{array}$$

Pomocí Cramerova pravidla získáme pro ideální operační zesilovač ($A \rightarrow \infty$)

$$U_2(p) = \dots = -\frac{G_1}{G_2} \cdot U_1 \cdot \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + G_2/C} \right) + \frac{U_0}{p + G_2/C}$$

a odsud

$$u_2(t) = -U_1 \cdot \frac{R_2}{R_1} \cdot (1 - \exp(-w_0 t)) + U_0 \cdot \exp(-w_0 t)$$

Fyzikální souvislost mezi oběma odezvami je pro ideální operační zesilovač jednoznačná. Podmínka $A \rightarrow \infty$ znamená to, že napětí uzlu 3 je nulové pro libovolné výstupní napětí. V dané struktuře to znamená, že platí

$$I_1 = U_1 / R_1$$

Pokud chceme použít reálnější model operačního zesilovače, platí (pro nulové počáteční podmínky) vztah

$$A = A_0 \cdot \frac{w_1}{p + w_1} = \frac{w_T}{p + w_1}; \quad w_T = A_0 \cdot w_1$$

Výpočty budou ovšem přiměřeně obtížnější.

4. STABILITA (FREKVENČNÍ) ELEKTRONICKÉHO SYSTÉMU

Na základě získaných admitančních modelů lze definovat i stabilitu elektronického systému – a to bez aplikace formální terminologie používané v oblasti teorie zpětné vazby. Zpětné vazby jsou v reálném systému téměř vždy. Použitý algoritmus je do maticového modelu zahrnuje „automaticky“, aniž je pojmenovává.

V reálném obvodu je vždy některý uzel uzlem referenčním a v ustáleném harmonickém stavu je výsledná admitanční matice $[Y(j\omega)]$ vždy maticí zkrácenou (nikoli úplnou). Je zřejmé, že systém má řešení (konečné hodnoty uzlových napětí) pouze tehdy, platí-li pro všechna ω

$$\det[Y(j\omega)] \neq 0$$

Platí –li pro některé ω_n

$$\det[Y(j\omega_n)] = 0$$

je zde systém *nestabilní* – vznikají oscilace, které jsou nežádoucí v případě zesilujících struktur a filtračních struktur, ale jsou žádoucí u generátorů periodických signálů. Na obr. 10 by se stav blížící nestabilitě projevil zvětšováním přenosu na frekvenci ω_m .

Problém stability se lépe diskutuje v laplaceovském modelu obvodu. Opět platí, že $Y(p)$ je již zkrácená obrazová matice obvodu. Kořeny p_k výrazu (charakteristická rovnice)

$$\det[Y(p)] = 0$$

se objeví v originálu přenosů nebo uzlových napětí v exponentech $e^{p_k t}$. Má-li být elektronická struktura stabilní, musí mít všechny kořeny zápornou reálnou část, musí ležet v levé otevřené polorovině $s + j\omega$. Pouze v tom případě je odezva na jakýkoliv signál konečná (v čase) – tedy systém je stabilní.

Byla vypracována kritéria, podle nichž určujeme polohu kořenů charakteristické rovnice v komplexní rovině – *kritéria stability* [6]: Routhovo – Hurwitzovo, Michajlovovo-Leonhardovo a Nyquistovo. Tato kritéria umožňují stanovit, pro jaký interval frekvencí je obvod nestabilní a z toho vyvodit možná technická (obvodová) řešení pro zajištění stability elektronické struktury (korekce frekvenčních vlastností struktury).

5. ZÁVĚR

V materiálu byly demonstrovány některé vybrané aplikace maticového počtu tak, jak je lze použít při analýze lineárních elektronických obvodů. Byly voleny nejjednodušší možné postupy a demonstrovány na elementárních příkladech z elektroniky.

Je zřejmé, že sestavení správného modelu je vždy jen prvním, byť velmi důležitým, krokem. Je také zřejmé, že komplexní vyšetření každého elektronického obvodu vyžaduje znalost dalšího, značně rozsáhlého, matematického aparátu (např. rozvoj v Taylorovu řadu, rozklad na parciální zlomky, Laplaceova transformace, vyšetření extrémů funkce, ...).

Metoda uzlových napětí byla zvolena proto, že její šipková konvence je velmi přátelská pro uživatele a na minimum omezuje „znaménkové“ chyby. Výsledný algoritmus analýzy obvodu je relativně jednoduchý, známe-li admitanční modely elektronických struktur (Dodatek 2).

Obecnější, ale i obtížnější, přístup je zvolen například v [7]. Monotematicky se problematikou zabývá např. [8], ovšem diskutovány jsou pouze elektronické prvky v té době známé (elektronky, tranzistory).

Literatura

- [1] Punčochář, J.: *Operační zesilovače - historie a současnost*. BEN, Praha 2002, ISBN 80-7300-047-4.
- [2] Punčochář, J.: *Lineární obvody s elektronickými prvky*. VŠB - TU Ostrava, Ostrava, 2002. ISBN 80-248-0040-3.
- [3] Mohylová, J.: *Lineární obvody s elektronickými prvky – sbírka příkladů*. VŠB - TU Ostrava, Ostrava, 2002. ISBN 80-248-0098-5.
- [4] Sigorskij, V. P.: *Matrice i grafy v elektronice*. Energiya, Moskva, 1968
- [5] Angot, A.: *Užitá matematika pro elektrotechnické inženýry*. SNTL, Praha, 1971
- [6] Čajka, J., Kvasil, J.: *Teorie lineárních obvodů*, SNTL, ALFA, Praha 1979
- [7] Zíma, V.: *Maticové funkce v teorii obvodů*. Slaboproudý obzor 31 (1970), č. 5, str. P13 – P20
- [8] Mayer, D.: *Analýza elektrických obvodů maticovým počtem*. ACADEMIA, Praha 1966
- [9] Reza, F. M., Seely, S.: *Modern network analysis*. McGraw-Hill Book Company, N. Y., 1959
- [10] Hlávka, J.: *Střídavé proudy*. SNTL, Praha, 1958
- [11] Hlávka, J.: *Elektrotechnika I (fyzikální základy, část 1)*. SNTL, Praha, 1968
- [12] Punčochář, J.: *Admittance models of modern linear amplifying structures*. Sborník vědeckých prací VŠB – TU Ostrava, řada elektrotechnická číslo 1/2003, str. 151 -161, VŠB – TU Ostrava, 2003, ISBN 80 – 248 – 0223 – 6 (viz i Dodatek 2).

DODATEK 1

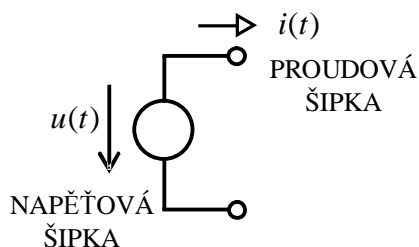
Základní pojmy z teorie lineárních obvodů se soustředěnými parametry (žádný parametr obvodu není funkcí obvodových veličin)

Obvodové veličiny – obecně jsou funkcí času:

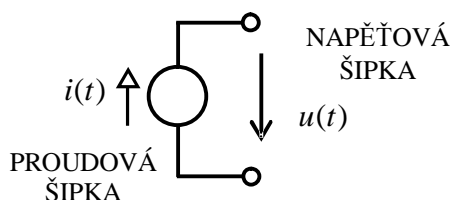
- 1) $u(t)$ - napětí
- 2) $i(t)$ - proud

Pro účely sestavení modelu elektrického obvodu definujeme:

- 1) Zdroj napětí (ideální) – prvek obvodu, který dodává do obvodu energii a jeho napětí $u(t)$ není funkcí zatěžovacího proudu $i(t)$; pro okamžitý výkon platí $p(t) = u(t) \cdot i(t) \leq 0$, což při spotřebičové orientaci značí dodávání energie do obvodu.

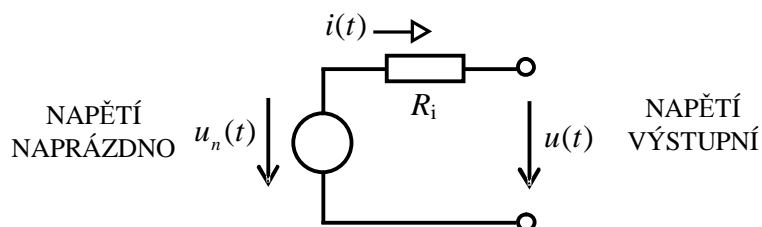


- 2) Zdroj proudu (ideální) – prvek obvodu, který dodává do obvodu energii a jeho proud $i(t)$ není funkcí v obvodu vzniklého napětí $u(t)$; pro okamžitý výkon platí $p(t) = u(t) \cdot i(t) \leq 0$, což při spotřebičové orientaci značí dodávání energie do obvodu.



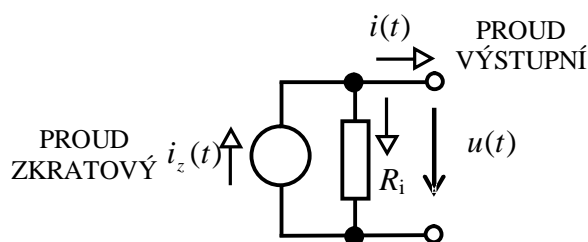
Užitečné je definovat i reálné zdroje napětí a proudu a jejich ekvivalence (z hlediska poměrů v obvodu).

- 3) Zdroj napětí (s reálným výstupním odporem R_i) – prvek obvodu, který dodává do obvodu energii a jeho výstupní (svorkové) napětí $u(t)$ je funkcí zatěžovacího proudu



Pro výstupní napětí platí $u(t) = u_n(t) - R_i \cdot i(t) = u_n(t) - i(t)/G_i$, platí tedy, že pro nezátžené výstupní svorky (stav naprázdno, $i(t) = 0$), je $u(t) = u_n(t)$. V ustáleném harmonickém stavu platí $U = U_n - Z_i \cdot I = U_n - I/Y_i$; po Laplaceově transformaci platí $U(p) = U_n(p) - Z_i(p) \cdot I(p) = U_n(p) - I(p)/Y_i(p)$. Ideální zdroj napětí nyní můžeme definovat jako zdroj napětí s nulovým výstupním odporem.

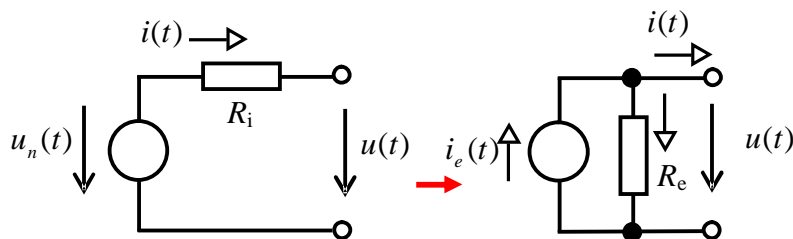
4) Zdroj proudu (s reálným výstupním odporem R_i) – prvek obvodu, který dodává do obvodu energii a jeho výstupní (svorkový) proud $i(t)$ je funkcí svorkového napětí



Pro výstupní proud platí $i(t) = i_z(t) - u(t)/R_i = i_z(t) - u(t) \cdot G_i$, platí tedy, že pro zkratované výstupní svorky (stav nakrátko, $u(t) = 0$), je $i(t) = i_z(t)$. V ustáleném harmonickém stavu platí $I = I_z - Y_i \cdot U = I_z - U/Z_i$; po Laplaceově transformaci platí $I(p) = I_z(p) - Y_i(p) \cdot U(p) = I_z(p) - U(p)/Z_i(p)$. Ideální zdroj proudu nyní můžeme definovat jako zdroj proudu s nekonečným výstupním odporem.

5) Ekvivalence reálných zdrojů (Théveninův a Nortonův teorém)

Pro lineární reálné zdroje lze snadno definovat ekvivalenci mezi zdrojem proudu a napětí. Stačí zajistit (lineární obvod je vždy definován lineární funkcí napětí a proudu) ekvivalenci pouze ve dvou bodech modelu. Vhodnými body jsou právě stav naprázdno a stav nakrátko:



naprázdno: $i(t) = 0$: $u(t) = u_n(t)$

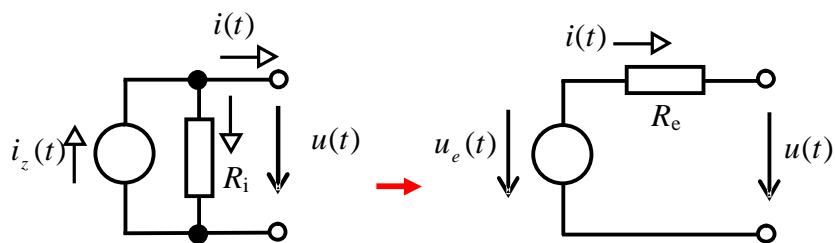
nakrátko: $u(t) = 0$: $i(t) = u_n(t)/R_i$

Musí tedy platit: $R_e = R_i$; $i_e(t) = u_n(t)/R_i$

$u(t) = R_e \cdot i_e(t)$

$i(t) = i_e(t)$

Transformace reálného zdroje napětí na reálný zdroj proudu



naprázdno: $i(t) = 0$: $u(t) = R_i \cdot i_z(t)$

nakrátko: $u(t) = 0$: $i(t) = i_z(t)$

Musí tedy platit: $R_e = R_i$; $u_e(t) = i_z(t) \cdot R_i$

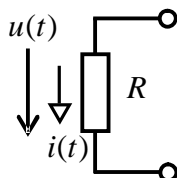
$u(t) = u_e(t)$

$i(t) = u_e(t) / R_e$

Transformace reálného zdroje proudu na reálný zdroj napětí

Pro účely sestavení modelu elektrického obvodu definujeme parametry obvodu:

- 1) Odpor R – technická realizace rezistor (odporník) – mění elektrickou energii v teplo (*Joule - Lenzův zákon*); šipky napětí a proudu orientovány souhlasně – spotřebičová konvence; vždy platí $p(t) = u(t) \cdot i(t) \geq 0$, což definuje spotřebu elektrické energie.



Tomuto symbolu je přiřazen operační vztah (*Ohmův zákon*)

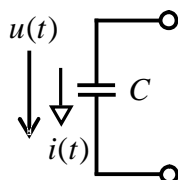
$$u(t) = R \cdot i(t)$$

nebo pro admitanční „přístup“ (proud je definován jako funkce napětí)

$$i(t) = R^{-1} \cdot u(t) = G \cdot u(t)$$

kde $G = R^{-1}$ je vodivost.

- 2) Kapacita C – technická realizace kondenzátor (kapacitor) – akumuluje elektrickou energii ve formě elektrického pole; šipky napětí a proudu orientovány souhlasně – spotřebičová konvence; platí $p(t) = u(t) \cdot i(t) \geq 0$ při akumulaci energie (to je spotřeba) a $p(t) = u(t) \cdot i(t) \leq 0$ - energie je z kapacity odebírána, kapacita se v tomto intervalu chová jako zdroj. Kondenzátor může do obvodu dodat pouze akumulovanou energii.



V každém fyzikálním prostoru je jednoznačná souvislost mezi nábojem $q(t)$ a napětím $u(t)$. V lineárním prostoru je tento vztah definován konstantou C - kapacitou: $q(t) = C \cdot u(t)$. Platí *zákon zachování náboje* (kontinuity) – náboj se může měnit jedině tak, že do definovaného prostoru vstupuje proud, který definujeme vztahem $i(t) = dq(t)/dt = C \cdot du(t)/dt$. Tak je symbolu na obrázku přiřazen operační vztah (model)

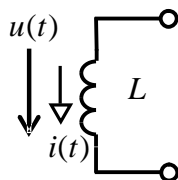
$$i(t) = C \cdot du(t)/dt$$

nebo pro impedanční „přístup“ (napětí je definováno jako funkce proudu):

$$u(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + u(0)$$

kde $u(0)$ je počáteční napětí na kapacitoru.

- 3) Indukčnost L – technická realizace cívka (induktor) – akumuluje elektrickou energii ve formě magnetického; pole šipky napětí a proudu orientovány souhlasně – spotřebičová konvence; platí $p(t) = u(t) \cdot i(t) \geq 0$ při akumulaci energie (to je spotřeba) a $p(t) = u(t) \cdot i(t) \leq 0$ - energie je z cívky odebírán chová se jako zdroj. Induktor může do obvodu dodat pouze akumulovanou energii.



V každém fyzikálním prostoru je jednoznačná souvislost mezi proudem $i(t)$ a magnetickým tokem $\Phi(t)$. V lineárním prostoru je tento vztah definován konstantou L - indukčností: $\Phi(t) = L \cdot i(t)$. Platí *Faradayův zákon* – indukované napětí je dáno derivací magnetického toku, $u(t) = d\Phi(t)/dt = L \cdot di(t)/dt$. Tak je symbolu na obrázku přiřazen operační vztah

$$u(t) = L \cdot di(t)/dt$$

nebo pro admitanční „přístup“:

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u(t) dt + i(0)$$

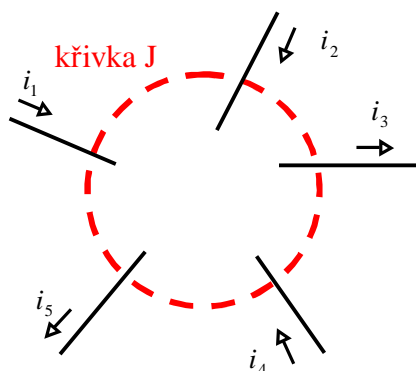
kde $i(0)$ je počáteční proud induktorem.

Reálné technické prvky modelujeme kombinací prvků ideálních (reálný rezistor může mít parazitní kapacitu a parazitní indukčnost, atd. ...).

První Kirchhoffův zákon (pro proudy)

Při řešení obvodu - sestavování obvodových rovnic - neznáme skutečnou orientaci proudových šipek (proudů ani napětí). Proto na začátku řešení **volíme proudové šipky** - volíme šipkovou konvenci pro daný problém (obvod). Tuto konvenci během řešení neměníme. Je-li výsledek řešení kladný, shoduje se směr proudu (napětí) se směrem šipky. Je-li výsledek záporný, jde skutečný proud proti směru proudové šipky.

Uvažujme plochu v rovině ohraničenou uzavřenou křivkou J (Jordanova křivka). Křivkou J prochází konečný počet vodičů, kterými se může "pohybovat" náboj. Proud je definován jako změna náboje „za čas“ – při změně náboje vždy protéká proud. Jednotkou proudu je **ampér [A]**.



Znázornění proudů procházejících křivkou J

Z definice proudu platí postupně $i_1 = dq_1 / dt$, ..., $i_5 = dq_5 / dt$, obecně $i_k = dq_k / dt$. Odsud určíme náboj prošlý vodičem k za dobu dt : $dq_k = i_k \cdot dt$. Zvolme konvenci: náboji **vystupujícímu** z plochy ohraničené křivkou J přiřadíme **znaménko kladné (+)**; náboji **vstupujícímu** do plochy ohraničené křivkou J přiřadíme **znaménko záporné (-)**. Potom v každém zkoumaném časovém intervalu dt musí být dodržen zákon zachování elektrického náboje:

$$-dq_1 - dq_2 + dq_3 - dq_4 + dq_5 = 0$$

tedy i

$$-i_1 dt - i_2 dt + i_3 dt - i_4 dt + i_5 dt = 0$$

a tedy

$$-i_1 - i_2 + i_3 - i_4 + i_5 = 0$$

Nejčastěji uzavírá křivka J právě jeden uzel. Obecně platí pro libovolný uzel (křivku J), do něhož je připojeno n vodičů:

$$\sum_{k=1}^n i_k(t) = 0$$

tedy suma všech proudů uzlu (křivky J) je rovna nule. Přitom proudům "vstupujícím" přiřadíme znaménko záporné, proudům "vystupujícím" přiřadíme znaménko kladné (dohodnutá konvence; při opačné konvenci bychom obdrželi naprosto stejný výsledek).

Předchozí úvahy lze rozšířit i pro trojrozměrný prostor, křivka J bude nahrazena uzavřenou plochou S uzavírající prostor objemu V . Suma všech proudů procházejících plochou S musí být v každém časovém okamžiku rovna nule.

Druhý Kirchhoffův zákon (pro napětí)

Elektrické napětí mezi body 1 a 2 je rovno práci A [J] vykonané silami elektrického pole při přesunu náboje q [C] z bodu 1 do bodu 2 přepočtené (normované) na jednotkový náboj, tedy

$$u_{12}(t) \equiv u_{12} = A/q$$

Jednotkou napětí je **volt** [V]. Je-li náboj přesouván zpět z bodu 2 do bodu 1, koná práci externí síla, celková vykonaná práce při návratu do výchozího bodu je rovna nule (zákon zachování energie) – náboj se pohyboval po uzavřené křivce. A to je podstatou **druhého Kirchhoffova zákona**: suma všech napětí v uzavřené smyčce je rovna nule

$$\sum_1^n u_k(t) = 0$$

příčemž napětím orientovaným **souhlasně s orientací** oběhové šipky přiřazujeme **znaménko kladné (+)**; napětím orientovaným **nesouhlasně s orientací** oběhové šipky přiřazujeme **znaménko záporné (-)**.

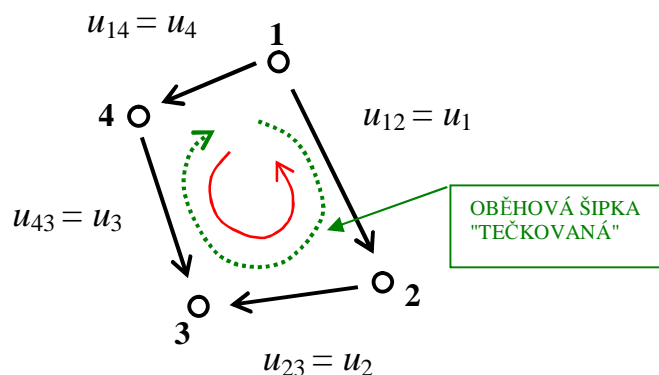
Na spodním obrázku potom platí jednoduše ("tečkovaná" oběhová šipka)

$$u_1 + u_2 - u_3 - u_4 = 0$$

Při opačné volbě oběhové šipky (vyznačena "plně") obdržíme výsledek, jehož význam je naprosto stejný. Platí totiž nyní

$$-u_1 - u_2 + u_3 + u_4 = 0$$

což se po vynásobení číslem -1 shoduje s výsledkem předchozím.



Příklad aplikace 2. Kirchhoffova zákona

Ustálený harmonický stav – využívá se skutečnosti, že derivování i integrování exponenciální funkce vede zase na exponenciální funkci (poznámka: V základní části textu se používaly pro popisy fázorů proudů a napětí symboly „bez stříšky“ – pro jednoduchost zápisu).

1) Základní vztahy

$$e^{\pm ja} = \cos a \pm j \sin a$$

$$\cos a = (e^{ja} + e^{-ja}) / 2$$

$$\sin a = (e^{ja} - e^{-ja}) / (2j)$$

$$u(t) = U_m \cdot \sin(\omega t + \mathbf{j}_u) = \text{Im}(U_m \cdot e^{j\mathbf{j}_u} \cdot e^{j\omega t}) = \text{Im}(\hat{u}(t))$$

$$u(t) = U_m \cdot \cos(\omega t + \mathbf{j}_u) = \text{Re}(U_m \cdot e^{j\mathbf{j}_u} \cdot e^{j\omega t}) = \text{Re}(\hat{u}(t))$$

$$i(t) = I_m \cdot \sin(\omega t + \mathbf{j}_i) = \text{Im}(I_m \cdot e^{j\mathbf{j}_i} \cdot e^{j\omega t}) = \text{Im}(\hat{i}(t))$$

$$i(t) = I_m \cdot \cos(\omega t + \mathbf{j}_i) = \text{Re}(I_m \cdot e^{j\mathbf{j}_i} \cdot e^{j\omega t}) = \text{Re}(\hat{i}(t))$$

$$\hat{u}(t) = U_m \cdot e^{j\mathbf{j}_u} \cdot e^{j\omega t} \text{ - komplexor napětí}$$

$$\hat{i}(t) = I_m \cdot e^{j\mathbf{j}_i} \cdot e^{j\omega t} \text{ - komplexor proudu}$$

$$\hat{U}_m = U_m \cdot e^{j\mathbf{j}_u} \text{ - fázor napětí (amplitudy)}$$

$$\hat{I}_m = I_m \cdot e^{j\mathbf{j}_i} \text{ - fázor proudu (amplitudy)}$$

$$\hat{U} = \hat{U}_m / \sqrt{2} = (U_m / \sqrt{2}) \cdot e^{j\mathbf{j}_u} = U \cdot e^{j\mathbf{j}_u} \text{ - fázor napětí (ef. hodnota)}$$

$$\hat{I} = \hat{I}_m / \sqrt{2} = (I_m / \sqrt{2}) \cdot e^{j\mathbf{j}_i} = I \cdot e^{j\mathbf{j}_i} \text{ - fázor proudu (ef. hodnota)}$$

2) Kirchhoffovy zákony

Musí platit 1. Kirchhoffův zákon pro ustálený stav a sinusový model, tedy

$$\sum_1^n \text{Im}(\hat{i}_k(t)) = \text{Im} \sum_1^n (\hat{i}_k(t)) = \text{Im} \sum_1^n (\hat{I}_{mk} \cdot e^{j\omega t}) = e^{j\omega t} \text{Im} \sum_1^n (\hat{I}_{mk}) = 0$$

Ale musí rovněž platit i „kosinový“ model

$$\sum_1^n \text{Re}(\hat{i}_k(t)) = \text{Re} \sum_1^n (\hat{i}_k(t)) = \text{Re} \sum_1^n (\hat{I}_{mk} \cdot e^{j\omega t}) = e^{j\omega t} \text{Re} \sum_1^n (\hat{I}_{mk}) = 0$$

1. Kirchhoffův zákon tedy platí i pro fázory amplitud

$$\sum_1^n (\hat{I}_{mk}) = 0$$

Dělíme-li vztah $\sqrt{2}$, zjišťujeme, že platí i pro fázory efektivních hodnot

$$\sum_1^n (\hat{I}_k) = 0$$

Pro 2. Kirchhoffův zákon určíme analogicky

$$\sum_1^n (\hat{U}_k) = 0$$

3) Odpor: $u(t) = R \cdot i(t); \quad u(t) = U_m \sin \omega t; \quad i(t) = \frac{U_m}{R} \sin \omega t = GU_m \sin \omega t = I_m \sin \omega t$
 $I_m = \frac{U_m}{R} = GU_m; \quad \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{U_m}{\sqrt{2} \cdot R} = \frac{G}{\sqrt{2}} U_m \Rightarrow I = \frac{U}{R} = GU$

V komplexním tvaru $\hat{u}(t) = R \cdot \hat{i}(t); \quad I_m \cdot e^{j\omega t} = \frac{U_m}{R} \cdot e^{j\omega t}; \quad I_m = \frac{U_m}{R};$ atd.

Proud a napětí mají stále stejnou fázi – jsou ve fázi.

3) Kapacita: $i(t) = C \cdot du(t) / dt$
 $u(t) = U_m \sin \omega t$
 $i(t) = C \cdot \omega \cdot U_m \cos \omega t = C \cdot \omega \cdot U_m \sin(\omega t + p/2) \Rightarrow$
 $I_m = \omega \cdot C \cdot U_m; \quad I_m / \sqrt{2} = \omega \cdot C \cdot U_m / \sqrt{2} \Rightarrow I = \omega \cdot C \cdot U$
 a proud předbíhá napětí o úhel $\pi/2$, tedy $j_i = p/2$.

V komplexním tvaru $\hat{i}(t) = C \cdot d\hat{u}(t) / dt;$

$$I_m \cdot e^{j j_i} \cdot e^{j\omega t} = C \cdot \frac{d}{dt} (U_m \cdot e^{j0} \cdot e^{j\omega t}) = j\omega C U_m \cdot e^{j\omega t} = \omega C U_m \cdot e^{j p/2} \cdot e^{j\omega t} \Rightarrow$$

$$I_m = \omega C U_m; \quad j_i = p/2$$

atd.

4) Indukčnost: $i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u(t) dt$
 $u(t) = U_m \sin \omega t$
 $i(t) = \frac{U_m}{\omega L} \cdot (-\cos \omega t) = \frac{U_m}{\omega L} \cdot \sin(\omega t - p/2) \Rightarrow$
 $I_m = \frac{U_m}{\omega L}; \quad I = \frac{U}{\omega L}$
 proud se zpožďuje za napětím o úhel $\pi/2$, tedy $j_i = -p/2$.

V komplexním tvaru $\hat{i}(t) = \frac{1}{L} \int_0^t \hat{u}(t) dt;$

$$I_m \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\omega t} = \frac{1}{L} \int U_m \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega L} \cdot U_m \cdot e^{j\omega t} = \frac{1}{\omega L} \cdot U_m \cdot e^{-j\omega/2} \cdot e^{j\omega t} \Rightarrow$$

$$I_m = \frac{1}{\omega L} \cdot U_m; \quad j_i = -p/2$$

atd.

5) Impedance, admittance, zobecněný Ohmův zákon

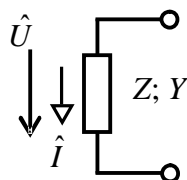
Nyní již můžeme definovat impedanci Z a admitanci Y (komplexní). Nejčastěji se pracuje přímo s fázory efektivních hodnot – opět používáme souhlasnou orientaci napěťové a proudové šipky (spotřebičovou konvenci). Platí nyní zobecněný Ohmův zákon (v časové oblasti se jedná o jiné fyzikální zákony – viz předchozí text)

$$\hat{U} = Z \cdot \hat{I}; \quad \hat{I} = \hat{U} / Z = Y \cdot \hat{U}; \quad Y \cdot Z = 1$$

Z předchozího textu je zřejmé, že platí rovněž

$$\hat{U}_m = Z \cdot \hat{I}_m; \quad \hat{I}_m = \hat{U}_m / Z = Y \cdot \hat{U}_m$$

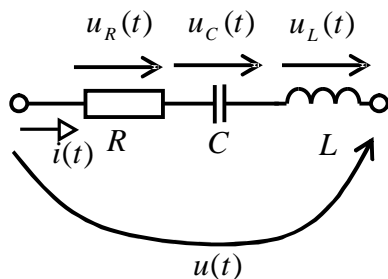
$$\hat{u}(t) = Z \cdot \hat{i}(t); \quad \hat{i}(t) = \hat{u}(t) / Z = Y \cdot \hat{u}(t)$$



prvek	R	C	L
Z	R	$(j\omega C)^{-1}$	$j\omega L$
Y	$1/R=G$	$j\omega C$	$(j\omega L)^{-1}$

6) Příklad na modelově „úplnou“ impedanci – sériové řazení

Všemi prvky prochází stejný proud – znak sériového řazení.

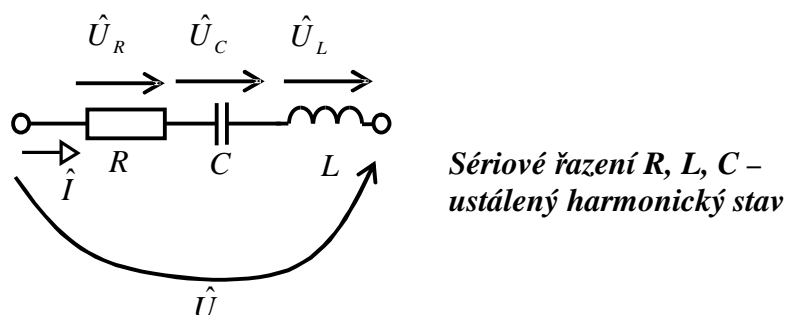


Sériové řazení R, L, C – obecné časové veličiny

Podle 2. Kirchhoffova zákona platí (v časové oblasti – obecné veličiny)

$$u(t) = u_R(t) + u_C(t) + u_L(t) = R \cdot i(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + u(0) + L \cdot \frac{di(t)}{dt}.$$

Pro ustálený harmonický stav platí stejný obrázek, funkce času nahradíme odpovídajícími fázory (efektivní hodnoty):



Podle 2. Kirchhoffova zákona platí

$$\hat{U} = R \cdot \hat{I} + \frac{1}{j\omega C} \cdot \hat{I} + j\omega L \cdot \hat{I} = \left(R + \frac{1}{j\omega C} + j\omega L \right) \cdot \hat{I}$$

Celková (ekvivalentní) impedance obvodu na obrázku je dána součtem impedancí řazených do série:

$$Z = R + \frac{1}{j\omega C} + j\omega L$$

Odpovídající admitance zobrazeného sériového řazení je:

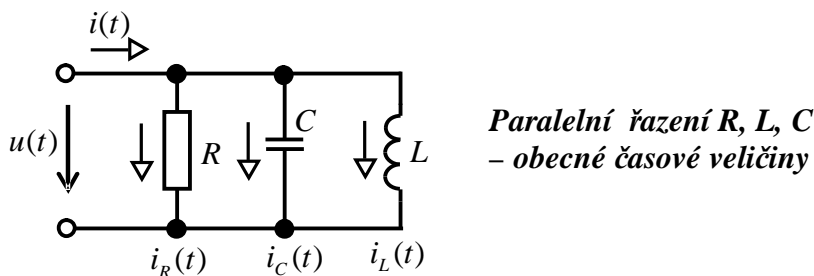
$$Y = 1/Z = 1 / \left(R + \frac{1}{j\omega C} + j\omega L \right)$$

Je-li znám proud, umíme určit fázor celkového napětí. Umíme určit i odpovídající komplexor (nezapomenout na převod efektivní hodnoty na amplitudu). Je-li proud definován jako „sin“, je časový průběh napětí roven imaginární složce komplexoru, je-li definován jako „cos“, je řešením reálná složka komplexoru.

Schéma obvodu – propojení prvků obvodu – vždy jednoznačně definuje matematický model obvodu. Každý prvek přiřazuje operační vztah mezi proudy a napětími, Kirchhoffovy zákony popisují propojení prvků.

7) Příklad na modelově „úplnou“ admitanci – paralelní řazení

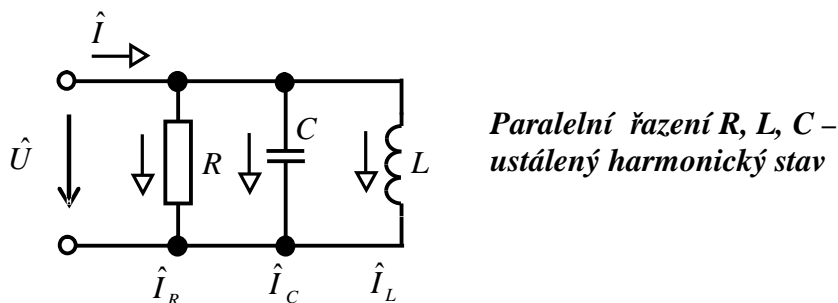
Na všech prvcích je stejné napětí – znak paralelnosti.



Podle 1. Kirchhoffova zákona platí (v časové oblasti – obecné veličiny)

$$i(t) = i_R(t) + i_C(t) + i_L(t) = G \cdot u(t) + \frac{1}{L} \int_0^t u(t) dt + i(0) + C \cdot \frac{du(t)}{dt}$$

Pro ustálený harmonický stav platí opět stejný obrázek, funkce času nahradíme odpovídajícími fázory (efektivní hodnoty):



Podle 1. Kirchhoffova zákona platí

$$\hat{I} = G \cdot \hat{U} + j\omega C \cdot \hat{U} + \frac{1}{j\omega L} \cdot \hat{U} = \left(G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} \right) \cdot \hat{U}$$

Celková (ekvivalentní) admitance obvodu na obrázku je dána součtem admitancí řazených paralelně:

$$Y = G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}$$

Odpovídající impedance zobrazeného paralelního řazení je:

$$Z = 1/Y = 1 / \left(G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} \right)$$

Laplaceovský model

$$x(t) = u(t) \text{ nebo } i(t)$$

$$L\{x(t)\} = X(p) = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-pt} dt; \quad L\{K \cdot x(t)\} = K \cdot X(p); \quad L\left\{ \sum_i K_i x_i(t) \right\} = \sum_i K_i X_i(p)$$

$$L\left\{ \frac{dx(t)}{dt} \right\} = pX(p) - x(0); \quad L\left\{ \int x(t) dt \right\} = \frac{X(p)}{p}$$

kde $p = s + j\omega$ je **komplexní kmitočet** (proměnná)

$x(t)$ je **originál funkce** (předmět)

$X(p)$ je **obraz funkce** $x(t)$

K je konstanta (zde $R; R^{-1}; L; L^{-1}; C; C^{-1}$)

1) Kirchhoffovy zákony

Platí-li $\sum_{k=1}^n i_k(t) = 0$ a $\sum_{k=1}^n u_k(t) = 0$, platí po transformaci

$$\sum_{k=1}^n I_k(p) = 0; \quad \sum_{k=1}^n U_k(p) = 0$$

kde $I_k(p)$ a $U_k(p)$ jsou odpovídající obrazy časových průběhů proudů a napětí.

2) Odpor: $u(t) = R \cdot i(t)$; po transformaci platí

$$U(p) = R \cdot I(p)$$

kde $I(p)$ a $U(p)$ jsou odpovídající obrazy časových průběhů proudů a napětí.

3) Kapacita:

$$i(t) = C \cdot du(t) / dt ;$$

jestliže $I(p)$ a $U(p)$ jsou odpovídající obrazy časových průběhů proudů a napětí, potom po transformaci

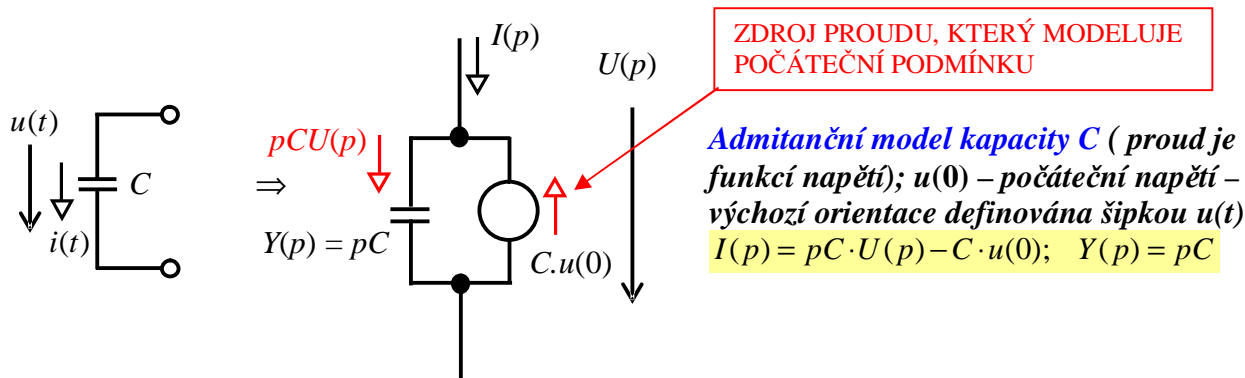
$$I(p) = C \cdot (p \cdot U(p) - u(0))$$

Nebo ze vztahu $u(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + u(0)$ dostáváme

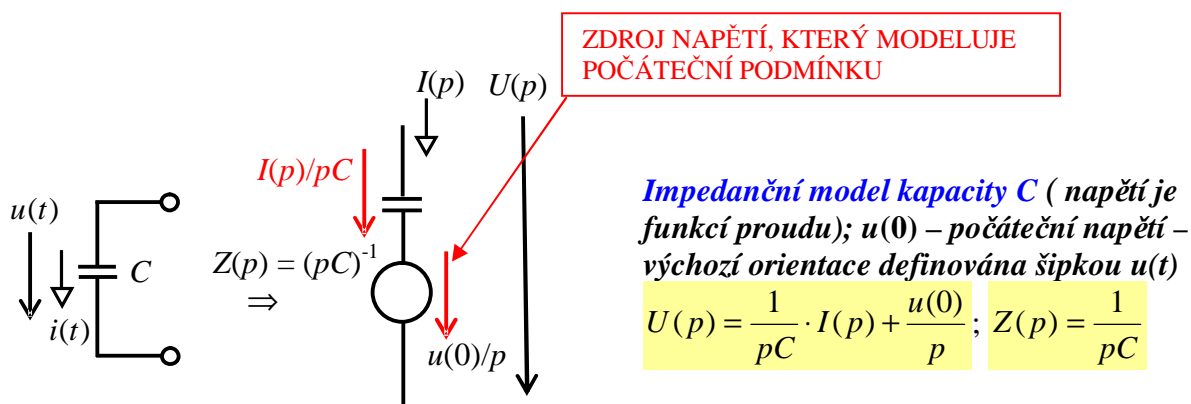
$$U(p) = \frac{1}{pC} \cdot I(p) + \frac{u(0)}{p}$$

Tento vztah je identický se vztahem předchozím.

Kapacitě pak můžeme přiřadit **admitanční model** podle obrázku (vhodný pro metodu uzlových napětí)



Impedanční model kapacity je na následujícím obrázku



4) Indukčnost:

$$u(t) = L \cdot di(t) / dt$$

jestliže $I(p)$ a $U(p)$ jsou odpovídající obrazy časových průběhů proudů a napětí, potom po transformaci (impedanční model)

$$U(p) = L \cdot (p \cdot I(p) - i(0))$$

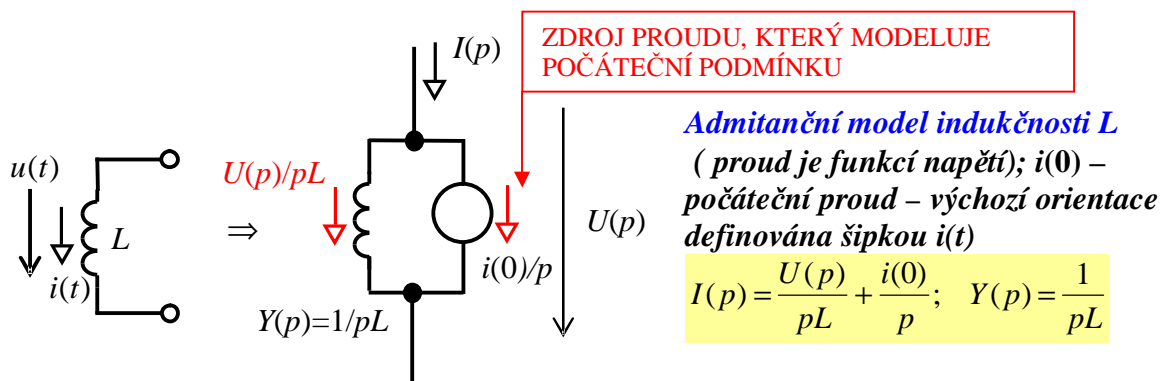
nebo pro admitanční „přístup“:

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u(t) dt + i(0)$$

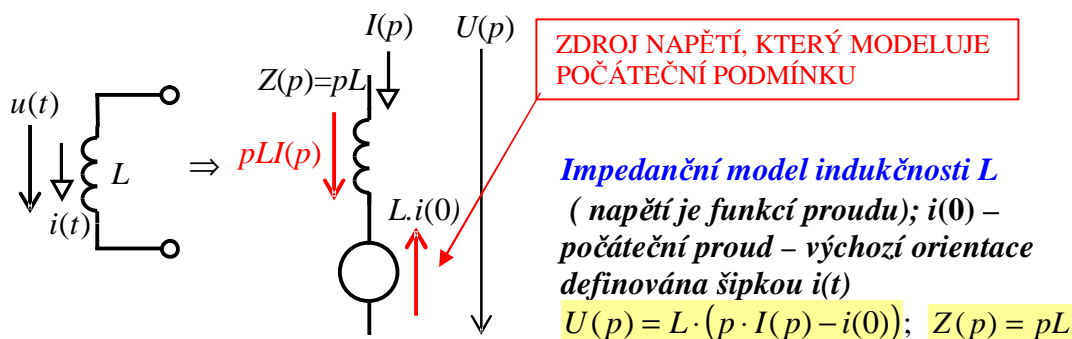
obdržíme

$$I(p) = \frac{1}{pL} \cdot U(p) + \frac{i(0)}{p}$$

Indukčnosti pak můžeme přiřadit **admitanční model** podle obrázku (vhodný pro metodu uzlových napětí)



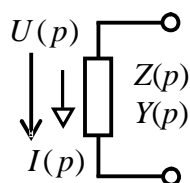
Impedanční model indukčnosti je na následujícím obrázku



5) Impedance, admittance (obrazové), zobecněný Ohmův zákon

Nyní již můžeme definovat impedanci $Z(p)$ a admitanci $Y(p)$ (obrazovou) – definují vztahy mezi obrazy napětí a proudů; opět používáme souhlasnou orientaci napěťové a proudové šipky (spotřebičovou konvenci). Platí nyní zobecněný Ohmův zákon (v časové oblasti se jedná o jiné fyzikální zákony – viz předchozí text)

$$U(p) = Z(p) \cdot I(p); \quad I(p) = U(p) / Z(p) = Y(p) \cdot U(p); \quad Y(p) \cdot Z(p) = 1$$



prvek	R	C	L
Z(p)	R	$(pC)^{-1}$	pL
Y(p)	1/R=G	pC	$(pL)^{-1}$

pro nulové počáteční podmínky

Je zřejmé, že všechna pravidla určená pro ustálený harmonický stav platí formálně i po Laplaceově transformaci po substituci $j\omega \rightarrow p$. Pokud jsou počáteční podmínky nenulové, jsou modelovány příslušnými zdroji, které při analýze obvodu do výpočtu zahrnujeme. Musíme si ovšem uvědomit, že řešením získáváme obrazy proudů a napětí, časové průběhy musíme získat zpětnou transformací.

DODATEK 2

Admitanční modely základních elektronických prvků

[Punčochář, Mohylová: TELO, Chapter 2, quiescent point of basic active tripoles (BJT, FET, triode); their admittance models]

ADMITTANCE MODEL OF GENERAL ACTIVE THREE – TERMINAL DEVICE

(We will suppose that input current is not function of a voltage u_{23} ; $i_1 \ll i$ and the device quiescent point is correct).

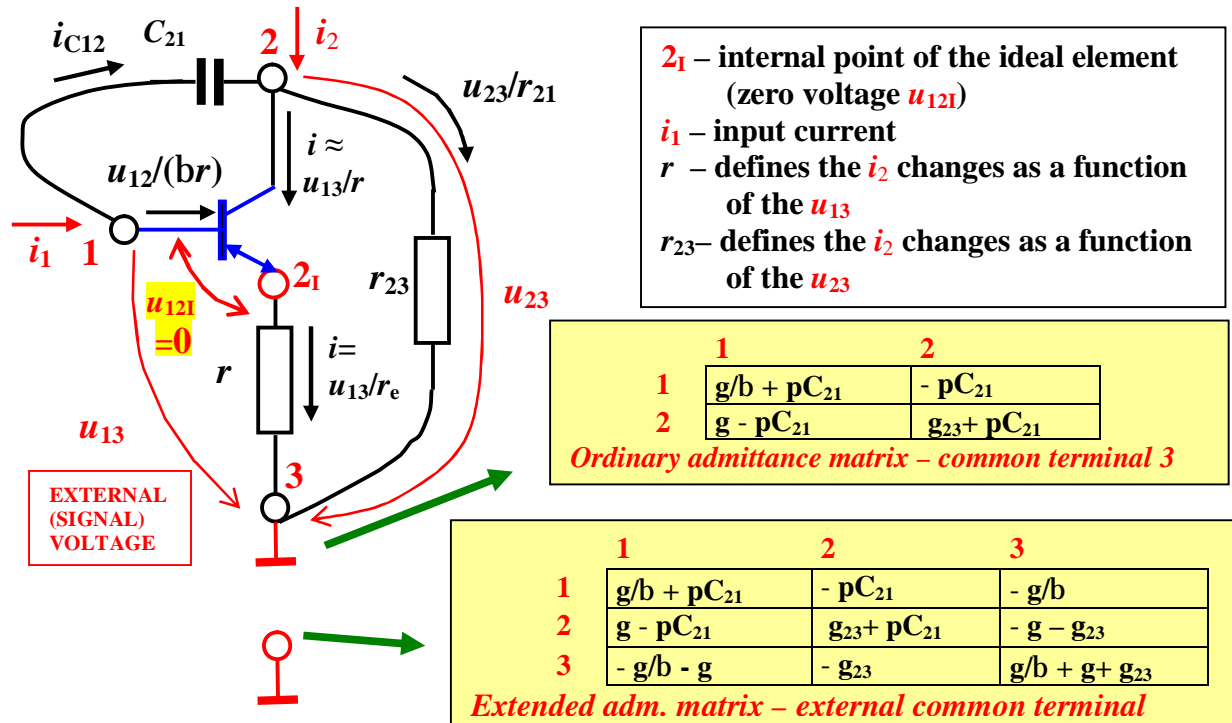


Fig. 23 A signal model of general active three-terminal device with capacitance C_{21} ; all voltages referred to the terminal 3; input current is not function of a voltage; $i_1 \ll i$ and the device – see Table 1

general tripole device	bipolar transistor; BJT	field effect transistor; FET	triode
terminal 1	≡Base	≡Gate	≡Grid
terminal 2	≡Collector	≡Drain	≡Anode
terminal 3	≡Emitter	≡Source	≡Cathode
input current i_1	i/β	$i_G \rightarrow 0$ it means that model $\beta \rightarrow \infty$	$i_G \rightarrow 0$ it means that model $\beta \rightarrow \infty$
$g = 1/r$	$g_e = 1/r_e = I_C/U_{th}$ $U_{th} \approx 26 \text{ mV}$	$g_{GS} = g_m = 1/r_m = 2 \cdot k \cdot (U_{GS} - U_T)$ $= \frac{2 \cdot I_D}{(U_{GS} - U_T)} = 2 \cdot \sqrt{k \cdot I_D} = 2 \cdot \sqrt{\frac{I_{DSS} \cdot I_D}{U_P^2}}$	$S = 1/r_m = g_m$
$r_{23} = 1/g_{23}$	$r_{CE} = U_A/I_C$	$r_d = U_A/I_D$	R_i
C_{21}	C_{CB}	C_{DG}	C_{AG}

Table 1. Sum of „all“ as mentioned above; $y_{12} = 0$ if input current is no function of u_{23} and parasitic capacitance is neglected. $U_T \rightarrow U_P$ – if depletion type

Admittance models of modern linear amplifying structures

Josef Punčochář¹

¹Katedra teoretické elektrotechniky FEI VŠB – Technická Univerzita Ostrava, 17. listopadu 15,
708 33 Ostrava-Poruba

Josef.Puncochar@vsb.cz

Abstract: Generalized nodal voltage analysis is very simple and useful in the analysis of linear active networks. It is evident that for the nodal voltage analysis of networks with modern integrated electronic devices it would be known their admittance models (matrices). That is why we will determine the admittance matrices of some modern electronic devices: *operational amplifier, current conveyors, current feedback (transimpedance) amplifier, transadmittance amplifier and Norton amplifier*. The signal models in this paper provide a means of checking device parameters such as voltage gain, output resistances, transimpedance, transconductance, etc. that is specified on the manufacturer's data sheets.

Key words: nodal voltage analysis, admittance model, amplifier, conveyor

1 Introduction

In order to analyze a linear electronic network we can define it as an *active n-terminal* (linear) and *passive part* of the circuit *connected in parallel*.

The revision of basic rules of the generalized voltage analysis and nullor nodal analysis is in [8, 9, 6, 7, etc.] From the revision it is evident that a description of modern integrated electronic devices is needed. That is why we are going to determine their admittance matrices and nullor models. We prefer the signal models with parameters that are specified on the manufacturer's data sheets.

2 Operational amplifier (OA)

OA is well known modern device. OA's structures and properties you may find almost everywhere then in [2, 5] also.

2.1 Matrix model of OA

The assignment and sign convention for input (U_+ , U_-) and output (U_o) voltages and currents (I_+ , I_- , I_o) of differential amplifiers is shown in Fig.1. The simplified model (for $I_+ = I_- = 0$) of differential amplifiers is shown in Fig.1b. We can easily determine equations

$$I_+ = 0 \cdot U_+ + 0 \cdot U_- + 0 \cdot U_o$$

$$I_- = 0 \cdot U_+ + 0 \cdot U_- + 0 \cdot U_o$$

$$I_o = (U_o - AU_d)/R_o = -AG_oU_+ + AG_oU_- + G_oU_o$$

Input impedances (if I_+ and $I_- \neq 0$) of the OA we can „put in the passive part“ of the analyzed circuit.

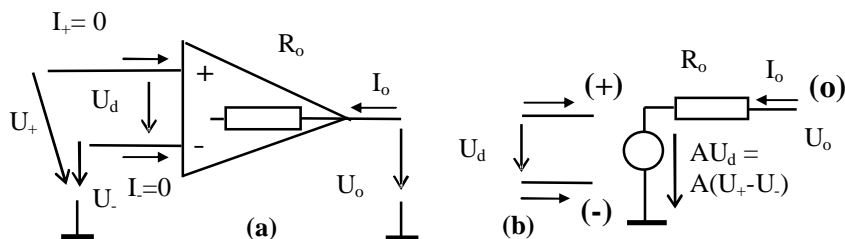


Fig. 1. a) A differential amplifier; b) a signal model

A matrix form (model) of equations is

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & (+) & (-) & (o) \\
 \begin{array}{c}
 (+) \\
 (-) \\
 (o)
 \end{array}
 & \begin{array}{|c|c|c|}
 \hline
 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 -AG_o & AG_o & G_o \\
 \hline
 \end{array}
 & = & \begin{array}{|c|}
 \hline
 U_+ \\
 \hline
 U_- \\
 \hline
 U_o \\
 \hline
 \end{array}
 & = & \begin{array}{|c|}
 \hline
 I_+ \\
 \hline
 I_- \\
 \hline
 I_o \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (1)$$

The eq.(1) describes the *matrix admittance model* of the differential amplifier with an output resistance $R_o = 1/G_o$ and a voltage gain A . If the amplifier is ideal (ideal OA) than $A \rightarrow \infty$ and $U_+ = U_-$, e.g. [8].

If only one input is needed (+ or -) we can non request input connect to the reference point and the corresponding row and column of the matrix must be omitted.

2.2 An example of a calculus with the OA model

A practical configuration of the narrow band-reject (notch) filter is in Fig.2. Basic rules of the generalized nodal voltage analysis are e.g. in [6, 7, 11]. After numbering of nodes we can determine the admittance model of the circuit in Fig.2b:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & 1(+)& 2(o)(-)& 3 \\
 \begin{array}{c}
 1(+)\ \\
 2(o)(-)\ \\
 3
 \end{array}
 & \begin{array}{|c|c|c|}
 \hline
 G+(0) & 0+(0)+(0) & -G \\
 \hline
 0+(-AG_o)+(0) & pC+(G_o)+(AG_o)+(0)+(0) & -pC \\
 \hline
 -G & -pC & 2G+pC \\
 \hline
 \end{array}
 & = & \begin{array}{|c|}
 \hline
 U_1 \\
 \hline
 U_2 \\
 \hline
 U_3 \\
 \hline
 \end{array}
 & = & \begin{array}{|c|}
 \hline
 I_1 \\
 \hline
 0 \\
 \hline
 0 \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (2)$$

where $R_o = 1/G_o$ is the output resistance and A is voltage gain of the real operational amplifier OZ2.

Solving matrix set of equations (1) give us the input impedance of the circuit in Fig.2b:

$$\begin{aligned}
 Z_{IN} = U_1/I_1 &= [G_o(1+A)(2G+pC) + 2pGC] / \{ G_o[G^2(1+A) + pGC] + pG^2C \} = \\
 &= | G_o \rightarrow \infty | = (2R + pCR^2) \cdot 1/[1 + pRC/(1+A)]
 \end{aligned}
 \quad (3)$$

In general, A is determined by many poles and zeros; however, in order to assure stability in closed-loop feedback configuration, most modern op amps are designed to have only one dominant negative real pole at $p = -\omega_1$ so that a suitably accurate op amp model is $(p=j\omega$ for steady

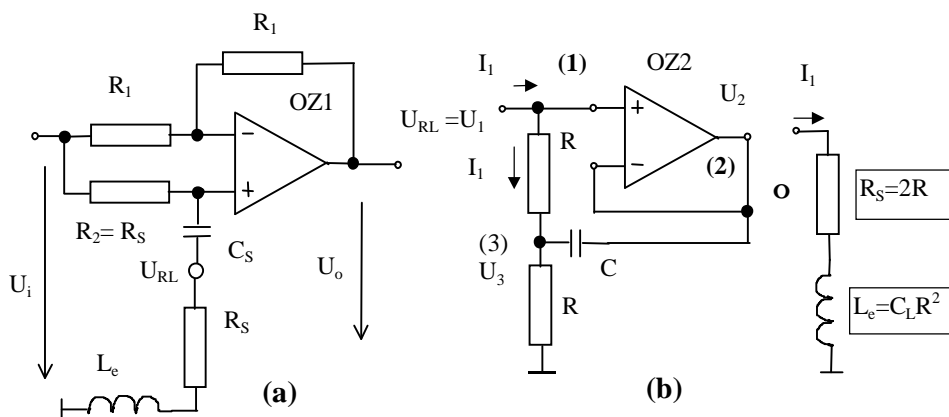


Fig. 2. a) Notch-filter and b) the realization of L_e and R_s - the synthetic inductor with series resistance

state solution) $A(p) = A_0 \omega_1 / (p + \omega_1) \cong \omega_T / p$, where ω_T is unity gain-bandwidth frequency defined as $\omega_T = A_0 \cdot \omega_1$; ω_1 is, of course, the 3 dB frequency of the op amp gain. For $\omega \ll \omega_T$ we can suppose $1/(A+1) \approx 1/A \approx p/\omega_T$ and from eq.(3) we get

$$Z_{IN} = (2R + pCR^2) \cdot 1/[1 + p^2RC/\omega_T] \quad (4)$$

From the eq.(4) it is evident that ideal conditions in Fig.2b ($R_s = 2R$, $L_e = CR^2$) are valid only for $\omega^2 CR/\omega_T \ll 1$ consequently for

$$\omega \ll \sqrt{\omega_T / (CR)} \quad (5)$$

But for $\omega \ll \omega_T$ we can easily determine from eq.(4) that $[\omega_0 = 1/(CR)]$

$$Z_{IN} = (2R + j\omega CR^2) \cdot 1/[1 - \omega^2/(\omega_0 \omega_T)] \quad (6)$$

consequently the series part of the Z_{IN} , R_s , is now

$$R_s = 2R/[1 - \omega^2/(\omega_0 \omega_T)] \quad (7)$$

and the equivalent inductance of the Z_{IN} , L_e , is now

$$L_e = CR^2/[1 - \omega^2/(\omega_0 \omega_T)] \quad (8)$$

Eqs. (7) and (8) enable us to determine properties of the circuit in Fig.2a (see [5, 13, 14, 15]) for $\omega \ll \omega_T$ - for the *real op amp*. The notch frequency is $\omega_n = 1/\sqrt{L_e C_S}$, the needed value of R_2 is evident from eq.(7).

3 Current conveyors (ICCI₊,₋)

Selected example of CCII is described in [5, 6, 16]. The assignment and sign convention for input and output voltages and currents is shown in Fig.3.

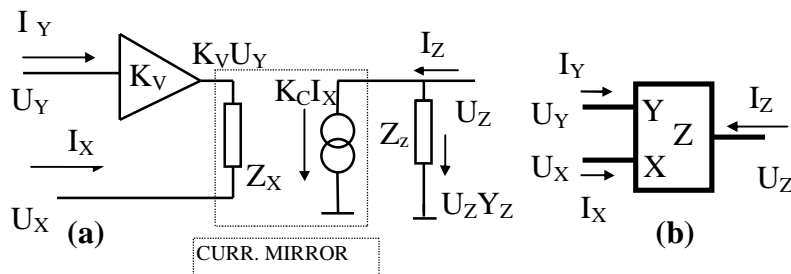


Fig. 3. a) Signal model of the three-port second-generation current conveyor; b) symbol of current conveyor signal model is shown in Fig.3a.

The ground (reference) terminal provides a reference point for the three others. The simplified signal model is shown in Fig.3a.

The terminal Y is the input of a voltage amplifier (voltage gain K_V is 1 or -1 for the ideal case), input current $I_Y = 0$ for the ideal case.

The terminal X is the output of the voltage amplifier; I_X is the current through an output impedance Z_X of the voltage amplifier. Z_X is zero for the ideal case, consequently

$$U_X = K_V U_Y$$

for the ideal case.

Table 1. Different types of three-port second -generation current conveyors

K_V	K_C	NAMED	SYMBOL
1	1	<i>conventional positive current conveyor</i>	CCII+
1	-1	<i>conventional negative current conveyor</i>	CCII-
-1	1	<i>inverting positive current conveyor</i>	ICCI+
-1	-1	<i>inverting negative current conveyor</i>	ICCI-

The output current I_Z (Z - output terminal) will mirror the current I_X (by means of current mirrors; K_C - current gain):

$$I_Z = K_C I_X$$

An admittance $Y_Z = 1/Z_Z$ (zero for the ideal case) represents real properties of the current source (Fig.3a).

All possibilities are summarized in a table 1.

3.1 Matrix model of conveyors

From the Fig.3a we can easily determine equations

$$I_X = (U_X - K_V U_Y)/Z_X = Y_X U_X - K_V Y_X U_Y + 0 \cdot U_Z$$

$$I_Y = 0 \cdot U_X + 0 \cdot U_Y + 0 \cdot U_Z$$

$$I_Z = K_C I_X + U_Z/Z_Z = K_C Y_X U_X - K_C K_V Y_X U_Y + Y_Z U_Z$$

The matrix form of these equations is

	X	Y	Z
X	Y_X	$-K_V Y_X$	0
Y	0	0	0
Z	$K_C Y_X$	$-K_C K_V Y_X$	Y_Z

U_X
U_Y
U_Z

 $=$

I_X
I_Y
I_Z

(9)

Equation (9) thus describes all *four different types* of three-port current conveyors from the table 1.

3.2 An example of a calculus with the CC model

As an example, consider a combination of (I)CCII(+,-) and five admittances [5] shown in Fig.4. This circuit is able to realize 2-nd order ARC filters if we choose suitable (right) admittances Y_i . First we number nodes (Fig.4). There is only one signal current source I_1 in the circuit. We use the admittance matrix from the Eq. (9) for $Y_z = 0$ and basic rules of generalized nodal voltage analysis, e.g. [7].

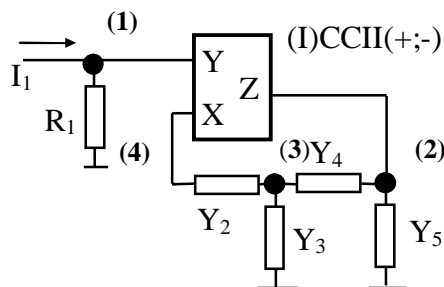


Fig. 4. 2-nd order RC filter

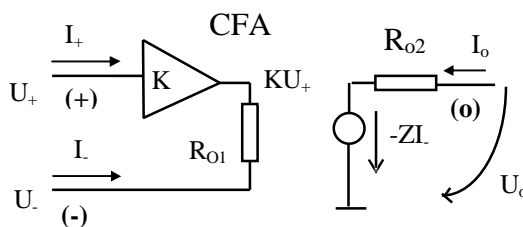


Fig.5. Signal model of CFA

The admittance matrix „with (I)CCII(+;-)“ is:

	1; Y	2; Z	3	4; X
1; Y	G_1	0	0	0
2; Z	$-K_C K_V Y_X$	$Y_4 + Y_5$	$-Y_4$	$K_C Y_X$
3	0	$-Y_4$	$Y_2 + Y_3 + Y_4$	$-Y_2$
4; X	$-K_V Y_X$	0	$-Y_2$	$Y_2 + Y_X$

U_1
U_2
U_3
U_4

 $=$

I_1
0
0
0

Solving this set of equations for $Y_x = G_x \rightarrow \infty$ ($R_x = 0$) give us voltage transfer function of the analyzed circuit

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{K_V Y_2 [Y_4 (1 + K_C) + K_C Y_X]}{Y_5 (Y_2 + Y_3 + Y_4) + Y_2 Y_4 (1 + K_C) + Y_3 Y_4} \quad (10)$$

Only for $K_C = -1$ we can get the known ideal result

$$\frac{U_2}{U_1} = K_V \cdot \frac{-Y_2 Y_3}{Y_5 (Y_2 + Y_3 + Y_4) + Y_3 Y_4}$$

It is evident that K_V can not change the basic function of the analysed circuit, it changes only „main sign“ of a transfer function.

4 Current feedback amplifier (CFA, transimpedance)

Selected example and signal model of CFA is described in [5, 10, 6]. The assignment and sign convention for input and output voltages and currents is shown in Fig.5.

A terminal (+) is an input of a voltage follower (ideal case $K = 1$, in general case $K \neq 1$). An input current $I_+ = 0$ for the ideal CFA. A terminal (-) is an output of the follower; I_- is the current through an output resistance R_{O1} of the follower. R_{O1} is zero for the ideal CFA consequently $U_+ = U_-$ for the ideal case.

The output voltage U_o will follow the current I_- thanks to a *transimpedance* Z (and current mirrors, of course), see [5]. An output resistance R_{O2} represents real properties of the voltage source controlled by I_- (zero for the ideal CFA).

4.1 Matrix model of CFA

From the Fig.5 we can easily determine equations (we suppose $I_+ = 0$; $G_{O1} = 1/R_{O1}$; $G_{O2} = 1/R_{O2}$; K is voltage gain of the follower)

$$\begin{aligned}
 I_+ &= 0 \cdot U_+ + 0 \cdot U_- + 0 \cdot U_o \\
 I_- &= (U_- - KU_+)/R_{O1} = | \text{for } K=1 | = -G_{O1}U_+ + G_{O1}U_- + 0 \cdot U_o \\
 I_o &= (U_o - (-ZI_-))/R_{O2} = -G_{O1}G_{O2}ZU_+ + G_{O1}G_{O2}ZU_- + G_{O2}U_o
 \end{aligned}$$

A matrix form (model) of the equations is

$$\begin{matrix}
 & \begin{matrix} (+) & (-) & (o) \end{matrix} \\
 \begin{matrix} (+) \\ (-) \\ (o) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -G_{O1} & G_{O1} & 0 \\ -G_{O1}G_{O2}Z & G_{O1}G_{O2}Z & G_{O2} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} U_+ \\ U_- \\ U_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_+ \\ I_- \\ I_o \end{bmatrix}
 \end{matrix} \quad (11)$$

4.2 An example of calculus with matrix model of CFA

As an example, consider the combination of CFA and two admittances [5] shown in Fig.6. First we number nodes (Fig.6). There is only one signal current source I_1 in the circuit. We use the admittance matrix from the Eq. (11) and basic rules of generalized nodal voltage analysis.

$$\begin{matrix}
 & \begin{matrix} 1 (+) & 2(o) & 3(-) \end{matrix} \\
 \begin{matrix} 1(+) \\ 2(o) \\ 3(-) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 + (0) & 0 + (0) & 0 + (0) \\ 0 + (-G_{O1}G_{O2}Z) & G_2 + (G_{O2}) & -G_2 + (G_{O1}G_{O2}Z) \\ 0 + (-G_{O1}) & -G_2 + (0) & G_1 + G_2 + (G_{O1}) \end{bmatrix} & \times \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{matrix}$$

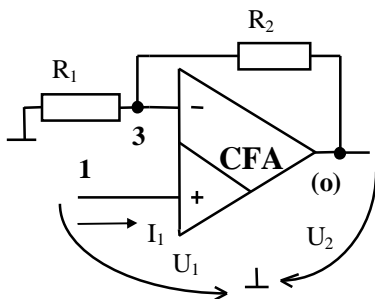


Fig.6. Noninverting amplifier with the CFA

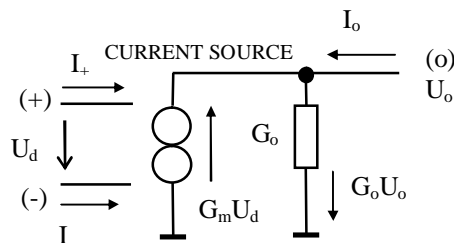


Fig.7. The idealized signal model of the TAA

In the first step we suppose that frequency is large enough and the capacitor C_V has negligible influence on circuit properties - $1/(\omega C_V) \ll R_x$, and also that $G_o = 0$ (of the TAA). Then $X \equiv$ node 1, and admittance model of the circuit in Fig.8 will be:

	1; (o); a	2; (-)	3; b
1; (o); a	$G_o = 0$	G_m	0
2; (-)	0	$G_A + G$	$-G$
3; b	$-G_{oVF}$	$-G$	$G + G_{oVF}$

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

We easy determine (if $G_o = 0$ a $G_{oK} \rightarrow \infty$) by means of Crammer's rules

$$U_1 = U_x = I_x(G + G_A)/(G_m G)$$

and then input resistance of the node 1:

$$R_x = U_1/I_1 = U_x/I_x = (1+R/R_A)/G_m \quad (16)$$

Now we are able to determine the influence of the capacitor C_V . It is evident that impedance of node X is defined more exactly by equation (always is $I_1 = I_x$)

$$Z_x = R_x + 1/(j \omega C_V)$$

and then

$$U_1 = U_x \cdot \frac{R_x}{R_x + 1/(j\omega C_V)} = U_x \cdot \frac{j\omega C_V R_x}{j\omega C_V R_x + 1} = U_x \cdot \frac{p}{p + \omega_h} \quad (17)$$

where

$$\omega_h = \frac{1}{C_V R_x} = \frac{g_m}{(1 + R/R_A) C_V}$$

And this is the first order *high pass filter*: node X is its input and node 3 is its output, because the voltages of node 3 and node 1 are the same and output resistance of the node 3 is low enough. Filter properties we can control by means of controlling TAA transconductance (G_m).

6. Norton amplifier (NA)

A signal model of the NA is in Fig.9 [5]. Transistors T1 and T2 create a current mirror (current-controlled current-source) if they are identical and their currents gains $\beta \gg 1$. A next circuit element is an inverting amplifier (input resistance R_{IN} , voltage gain A, output resistance R_O), by another name a current-controlled voltage-source: $U_o = -AR_{IN}I_B$, $I_B = I_- - I_+$.

6.1 Matrix model of NA

From Fig.9 we can determine equations ($g_d = 1/r_d$; $G_{IN} = 1/R_{IN}$)

$$I_+ = U_+/r_d = g_d U_+ + 0 \cdot U_- + 0 \cdot U_o$$

$$I_- = I_+ + I_B = g_d U_+ + U_-/R_{IN} = g_d U_+ + G_{IN} U_- + 0 \cdot U_o$$

$$I_o = [U_o - (-AU_-)]/R_O = 0 \cdot U_+ + AG_o U_- + G_o U_o$$

where r_d represents a signal resistance of transistors T1 and T2 in the operating point; $r_d \approx 26 \text{ mV}/I_{DC}$, I_{DC} is the quiescent current of the transistors.

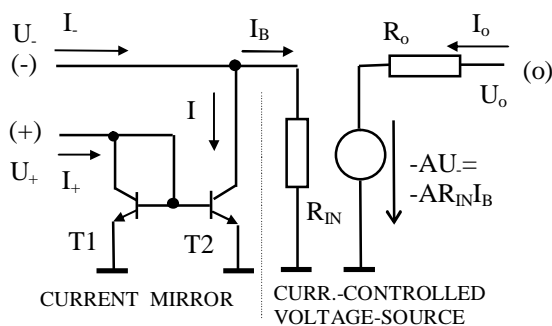


Fig.9. The signal model of the NA

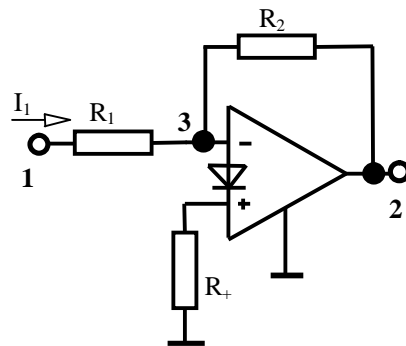


Fig.10. The signal model of an inverting amplifier with the NA

A matrix form of the equations is

$$\begin{array}{c}
 (+) \quad (-) \quad (o) \\
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline g_d & 0 & 0 \\ \hline g_d & G_{IN} & 0 \\ \hline 0 & AG_o & G_o \\ \hline \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline U_+ \\ \hline U_- \\ \hline U_o \\ \hline \end{array}
 =
 \begin{array}{|c|} \hline I_+ \\ \hline I_- \\ \hline I_o \\ \hline \end{array}
 \quad (18)$$

6.2 An example of calculus with the matrix model of NA

An signal model of an inverting amplifier with the NA is in Fig.10. From the practical point of view it is zero voltage across the resistor R_+ , thus it can be omitted - the (+) input is connected to the earth, directly.

After numbering of nodes we can determine the admittance model of the circuit in Fig.10:

$$\begin{array}{c}
 1 \quad 2 (o) \quad 3 (-) \\
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline G_1 & 0 & -G_1 \\ \hline 0 & G_2 + G_o & -G_2 + AG_o \\ \hline -G_1 & -G_2 & G_1 + G_2 + G_{IN} \\ \hline \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline U_1 \\ \hline U_2 \\ \hline U_3 \\ \hline \end{array}
 =
 \begin{array}{|c|} \hline I_1 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}$$

Usually it is valid $G_o \gg G_2$ and $AG_o \gg G_2$, and we can easy determine that a transfer function of the circuit is

$$U_2 / U_1 = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + (1 + R_2/R_1 + R_2/R_{IN})/A} \quad (20)$$

7. Conclusion

In the matrices models we can easy define frequency responses, too. We can do substitutions: $A \rightarrow A(j\omega)$; $G_m \rightarrow Y_m(j\omega)$; $Z \rightarrow Z(j\omega)$; $K \rightarrow K(j\omega)$; etc. Other applications of some matrices and nullor models can be found in [4, 6, 7].

It is really evident that there are no outstanding difficulties involved in incorporating the described devices (models) into the framework of conventional linear network theory.

Usefulness of the signal models with parameters that are specified on the manufacturers' data sheets is evident, too.

Appendix

Let us revise basic rules of the generalized *nodal voltage analysis*:

- 1) First we determine the admittance matrix of the circuit „without“ active n-terminal [„passive part“ of the circuit - I_i are exciting currents, U_i are nodal voltages, Y_{11}, \dots, Y_{mm} are elements of the admittance matrix; Y_{kk} are sums of admittances of elements connected to the k-th node - they are always positive; Y_{rs} are sums of admittances of elements connected between the r-th and s-th nodes - all these elements are negative].
- 2) Now we rewrite matrices of the active n-terminals in the same system of nodes (in the admittance matrix „without“ active n-terminals).
- 3) In „places of coincidences“ we add the respective matrix elements from the matrices of active n-terminals.
- 4) The resultant admittance matrix, thus, the circuit equations, describe the linear active network and we can solve the problem - the analysis of circuit with active n-terminals by means of Cramer's rule.

References

1. Davies, A. C.: The Significance of Nullators, Norators, and Nullors in Active- network Theory. *The Radio and Electronic Engineer*, November 1967.
2. Dostál, J.: *Operational Amplifiers*. ELSEVIER SCIENTIFIC PUBLISHING COMPANY. Amsterdam - Oxford - New-York 1981.
3. Kvasil, J.: *Mikroelektronické transformační bloky*. SNTL, Praha 1981.
4. Mohylová, J.: *Lineární obvody s elektronickými prvky - Sbírka příkladů*. VŠB - TU Ostrava, Ostrava 2002, ISBN 80-248-0098-5.
5. Punčochář, J.: *Operační zesilovače v elektronice*. BEN, Praha 1996 (1. a 2. vydání), 1997 (3. vydání), 1999 (4. vydání), 2002 (5. vydání), ISBN 80-901984-3-0 (1. až 3. vydání), ISBN 80-86056-37-6 (4. vydání), ISBN 80-7300-059-8 (5. vydání).
6. Punčochář, J.: *Operační zesilovače - historie a současnost*. BEN, Praha 2002, ISBN 80-7300-047-4.
7. Punčochář, J.: *Lineární obvody s elektronickými prvky*. VŠB - TU Ostrava, Ostrava 2002. ISBN 80-248-0040-3.
8. Punčochář, J.: Nullor Nodal Analysis as a Result of a Nodal Analysis With Ideal OP Amps. *21st SEMINAR on fundamentals of electrotechnics and circuit theory (SPETO)*. GLIWICE - USTROŇ, 1998. ISBN 83-85940-20-0.
9. Punčochář, J.: Current Conveyors in Linear Circuit Theory. *22nd SEMINAR on fundamentals of electrotechnics and circuit theory (IC-SPETO 99)*. GLIWICE - USTROŇ, 1999, ISBN 83-85940-21-9.
10. Punčochář, J.: Current-feedback (transimpedance) amplifiers in linear circuit theory. *8th Scientific Conference Theoretical Electrical Engineering and Electrical Measurement*. Technical University Košice, 1999.
11. Punčochář, J.: Zobecněná metoda uzlových napětí. *Seminář teorie obvodů (STO-6), MODERNÍ SMĚRY VÝUKY ELEKTROTECHNIKY A ELEKTRONIKY, Katedra elektrotechniky a elektroniky VA Brno*, Brno 1997.
12. Punčochář, J.: Analysis of Sallen and Key Low-Pass Filters with Real Operational Amplifiers. *Transactions of the VŠB - Technical University of Ostrava Electrical Engineering Series, ročník V, číslo 1*. Ostrava 1999. ISBN 80-7078-740-6.
13. Punčochář, J.: Pásmová zadrž se syntetickou indukčností. *Sdělovací technika 1980, č.2*.
14. Punčochář, J.: Maximální vstupní napětí pro zadrž RC. *Sdělovací technika 1984, č.10*.
15. Punčochář, J.: Narrow band-reject filter with a real operational amplifier. *Radioelektronika 2000*. Bratislava, 2000, ISBN 80-227-1389-9.
16. Punčochář, J.: The universal admittance model of the three-port second generation current conveyors (CCII, ICCII). *24th SEMINAR on fundamentals of electrotechnics and circuit theory (IC-SPETO 2001)*. GLIWICE - USTROŇ, 2001, ISBN 83-85940-23-5.
17. Punčochář, J.: Modern integrate electronic devices in linear circuit theory. *23rd SEMINAR on fundamentals of electrotechnics and circuit theory (IC-SPETO 2000)*. GLIWICE - USTROŇ, 2000, ISBN 83-85940-22-7.

Publikováno v:

Sborník vědeckých prací VŠB – TU Ostrava, řada elektrotechnická číslo 1/2003, str. 151 - 161, VŠB – TU Ostrava, 2003, ISBN 80 – 248 – 0223 – 6