

Problematika maticového počtu při analýze lineárních obvodů

MI 21

Josef Punčochář

Motto: S minimálními prostředky dosáhnout maximální efekt

- Komentář k materiálu v pdf
- Cíle přednášky
 - demonstrovat použití maticového přístupu k řešení lineárních elektronických obvodů
 - specifikovat matematické dovednosti nutné pro úplné řešení problému

- Základní zákony v teorii obvodů

- první Kirchhoffův zákon (souvisí se zákonem zachování náboje)

$$\sum_{k=1}^n i_k(t) = 0$$

$$\sum_{k=1}^n \hat{I}_k = 0$$

$$\sum_{k=1}^n I(p) = 0$$

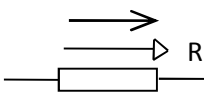
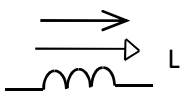
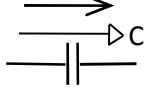
- druhý Kirchhoffův zákon (souvisí se zákonem zachování energie)

$$\sum_{k=1}^n u_k(t) = 0$$

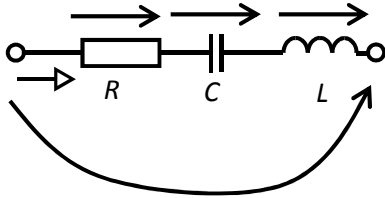
$$\sum_{k=1}^n \hat{U}_k = 0$$

$$\sum_{k=1}^n U(p) = 0$$

Popis základních prvků obvodů; u(0), i(0) - počáteční podmínky

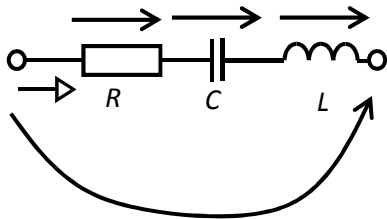
PRVEK OBVODU →				POZNÁMKY	
časově proměnné; u(t), i(t)	$u = R \cdot i$ $i = u/R = u \cdot G$ Ohmův zákon	$u = L \cdot di/dt$ $i = \frac{1}{L} \cdot \int u dt + i(0)$ Indukční zákon (tok $\Phi = L \cdot i$; $u = d\Phi/dt$)	$i = C \cdot du/dt$ $u = \frac{1}{C} \cdot \int i dt + u(0)$ Rovnice kontinuity (náboj $q = C \cdot u$; $i = dq/dt$)	Není „společný“ zákon pro prvky R, L, C	
komplexory, fázory $\hat{u}(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t}$ $\hat{i}(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t}$	$\hat{U} = R \cdot \hat{I}$ $\hat{I} = \hat{U} / R = G \cdot \hat{U}$ $Z_R = \hat{U} / \hat{I} = R = 1/Y_R$	$\hat{U} = j\omega L \hat{I} = \omega L \hat{I} e^{j\pi/2}$ $\hat{I} = \hat{U} / (j\omega L) = (\hat{U} / \omega L) e^{-j\pi/2}$ $Z_L = \hat{U} / \hat{I} = j\omega L = 1/Y_L$	$\hat{U} = \hat{I} / (j\omega C) = (\hat{I} / \omega C) e^{-j\pi/2}$ $\hat{I} = j\omega C \hat{U} = \omega C \hat{U} e^{j\pi/2}$ $Z_C = \hat{U} / \hat{I} = 1 / (j\omega C) = 1/Y_C$	IMPEDANCE ADMITANCE (společný název IMITANCE)	
PLATÍ ZOBECNĚNÝ OHMŮV ZÁKON PRO FÁZORY NAPĚTÍ A PROUDŮ A IMITANCE $\hat{U} = Z \cdot \hat{I}$ $\hat{I} = Y \cdot \hat{U}$					
Laplaceovy obrazy $U(p) = L\{u(t)\}$ $I(p) = L\{i(t)\}$ $u(0) = 0$ $i(0) = 0$	$U(p) = R \cdot I(p)$ $I(p) = U(p)/R = G \cdot U(p)$ $Z_R(p) = U(p)/I(p) =$ $= R = 1/Y_R(p)$	$U(p) = pLI(p)$ $I(p) = U(p)/(pL)$ $Z_L(p) = U(p)/I(p) =$ $= pL = 1/Y_L(p)$	$U(p) = I(p)/(pC)$ $I(p) = pCU(p)$ $Z_C(p) = U(p)/I(p) =$ $= 1/(pC) = 1/Y_C(p)$	OBRAZOVÁ IMPEDANCE OBRAZOVÁ ADMITANCE	
OBVODOVÁ VELIČINA ↑	PLATÍ ZOBECNĚNÝ OHMŮV ZÁKON PRO OBRAZY NAPĚTÍ, PROUDŮ A OBRAZOVÉ IMITANCE $U(p) = Z(p) \cdot I(p)$ $I(p) = Y(p) \cdot U(p)$				

- Každý grafický symbol má přiřazen (zastupuje, definuje) operační vztahy mezi proudy a napětími
- Nakreslení obvodu (grafické zobrazení) přímo definuje i matematický model obvodu



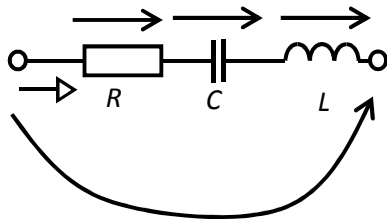
**Sériové řazení R, L, C –
obecné časové veličiny**

$$\begin{aligned}
 u(t) &= u_R(t) + u_C(t) + u_L(t) = \\
 &= R \cdot i(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + u(0) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} = \\
 &= \left\{ R \cdot * + \frac{1}{C} \int_0^t * d\tau + u(0) + L \cdot \frac{d*}{dt} \right\} \cdot i(t); * \equiv i(t)
 \end{aligned}$$



**Sériové řazení R, L, C –
ustálený harmonický stav**

$$\hat{U} = R \cdot \hat{I} + \frac{1}{j\omega C} \cdot \hat{I} + j\omega L \cdot \hat{I} = \left(R + \frac{1}{j\omega C} + j\omega L \right) \cdot \hat{I}$$

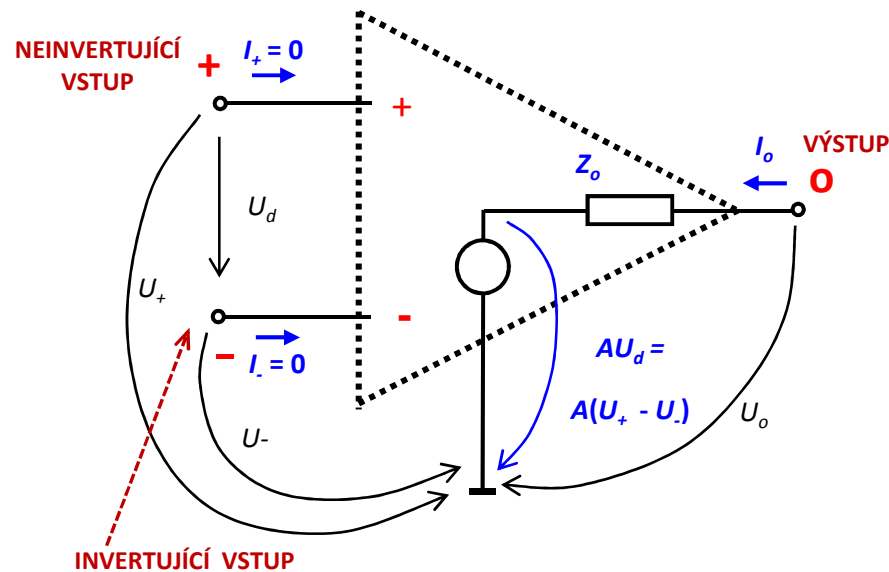


**Sériové řazení R, L, C –
Laplaceova transformace**

$$U(p) = R \cdot I(p) + \frac{1}{pC} \cdot I(p) + pL \cdot I(p) = \left(R + \frac{1}{pC} + pL \right) \cdot I(p)$$

- Obecně je vhodné vyjít z **teorie grafů** – určení nezávislého systému rovnic (uzel, větve, strom, ...)

- Z praktického hlediska vede na velmi jednoduchý algoritmus **metoda uzlových napětí**.
Pracujeme s admitančními modely elektronických obvodů.
- Získání admitančních modelů elektronických prvků – viz pdf materiál – linearizace - **Taylorova řada**;
použití modelů (lineárních) elektronických prvků



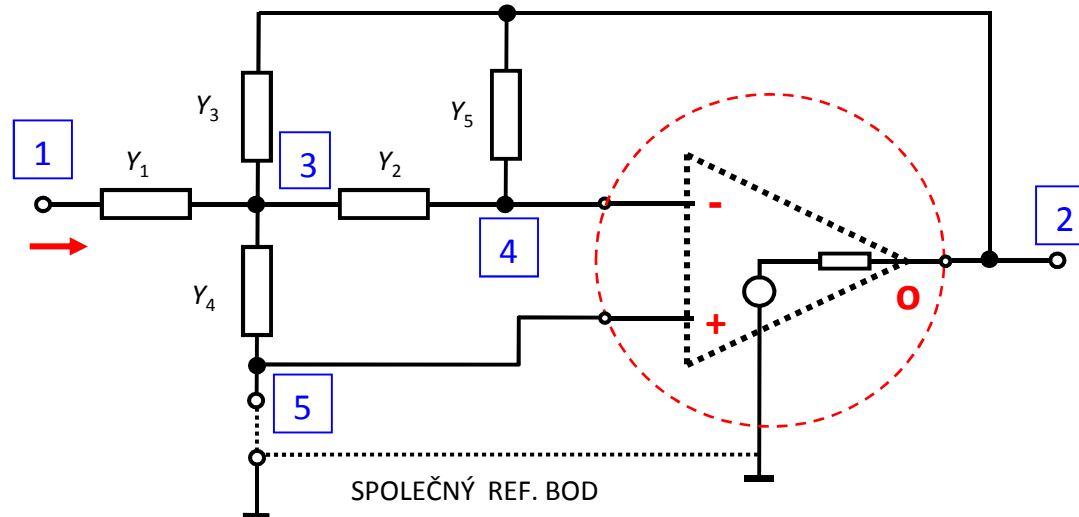
$$\begin{aligned}
 I_+ &= 0 \cdot U_+ + 0 \cdot U_- + 0 \cdot U_o \\
 I_- &= 0 \cdot U_+ + 0 \cdot U_- + 0 \cdot U_o \\
 I_o &= -A \cdot Y_o \cdot U_+ + A \cdot Y_o \cdot U_- + Y_o \cdot U_o
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} I_+ \\ I_- \\ I_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -AY_o & AY_o & Y_o \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_+ \\ U_- \\ U_o \end{bmatrix}$$

Lineární obvodový model idealizovaného diferenčního operačního zesilovače s reálným zesílením A (zesílení diferenčního napětí U_d naprázdno) a výstupní impedancí Z_o ; vstupní proudy jsou idealizovány (rovny nule); obecně se jedná o reálný zdroj napětí řízený napětím

- ✚ Propojování obvodů – **přímá** projekce „malé“ matice na „velkou“ matici, incidence; vyjádření uzlových napětí elektronického obvodu v bázi uzlových napětí pasívní části obvodu.

✚ Příklad:



Analýza struktury s operačním zesilovačem

- Po přiřazení čísel uzlům (všem) obvodu sestavíme matici pasívní části obvodu.
- Do matice rozměru 5x5 vepíšeme incidence (+), (-), (o) – k patřičným uzlům – a pomocí „incidencí“ přičteme prvky matice operačního zesilovače. Uzel 5 je spojen s referenčním bodem, tedy 5. řádek a 5. sloupec se eliminují, ani nebylo nutné je vyplňovat.
- Je-li uzel 5 propojen na společný referenční bod, je celá struktura popsána zkrácenou maticí (eliminuje se 5. řádek a 5. sloupec) – od začátku bylo možné pracovat přímo se zkrácenou maticí pasívní části obvodu. Uvažujeme-li pouze jediný (signálový) nenulový zdroj proudu I_1 do uzlu 1 (vstup obvodu), je admitanční model obvodu následující:

Například při volbě ($p = j\omega$; admittance rezistoru je $G = 1/R$; admittance kapacitoru C je $j\omega C$):

$$Y_1 = G_1; \quad Y_2 = G_2; \quad Y_3 = G_3; \quad Y_4 = pC_4; \quad Y_5 = pC_5$$

obdržíme pro ideální operační zesilovač ($A \rightarrow \infty$) **přenos**

$$P_{1 \rightarrow 2} = \frac{U_2}{U_1} = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{\det \begin{bmatrix} Y_1 & I_1 & -Y_1 & 0 \\ 0 & 0 & -Y_3 & -Y_5 + AY_0 \\ -Y_1 & 0 & Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 & -Y_2 \\ 0 & 0 & -Y_2 & Y_2 + Y_5 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} I_1 & 0 & -Y_1 & 0 \\ 0 & Y_3 + Y_5 + Y_0 & -Y_3 & -Y_5 + AY_0 \\ 0 & -Y_3 & Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 & -Y_2 \\ 0 & -Y_5 & -Y_2 & Y_2 + Y_5 \end{bmatrix}} = \dots = -\frac{R_3}{R_1} \cdot \frac{1/(R_2 R_3 C_4 C_5)}{p^2 + p(1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3) + 1/(R_2 R_3 C_4 C_5)}$$

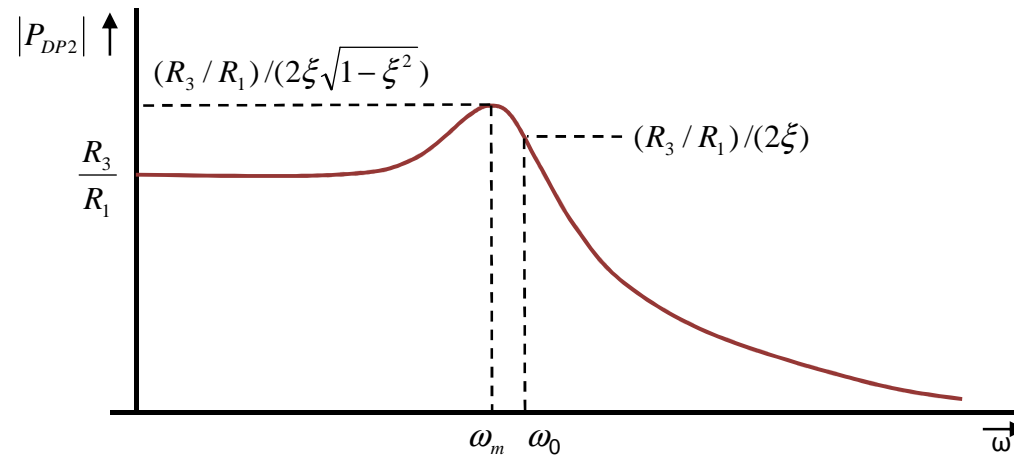
Jedná se o invertující dolní propust 2. řádu. Srovnáme-li tuto přenosovou funkci s obvyklým formalizovaným tvarem přenosu pro dolní propusti 2. řádu

$$P_{DP2} = P_{1 \rightarrow 2} = K_0 \cdot \frac{\omega_0^2}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2}$$

můžeme určit, že

$$K_0 = -R_3 / R_1; \quad \omega_0^2 = 1/(R_2 R_3 C_4 C_5); \quad 2\xi = \sqrt{\frac{C_5}{C_4}} \cdot \left(\sqrt{\frac{R_2 R_3}{R_1^2}} + \sqrt{\frac{R_3}{R_2}} + \sqrt{\frac{R_2}{R_3}} \right)$$

Modulová charakteristika přenosu:



Modul přenosu obvodu pro: $Y_1 = G_1; Y_2 = G_2; Y_3 = G_3; Y_4 = pC_4; Y_5 = pC_5$

Vyšetřením extrémů modulu přenosu zjistíme, že na úhlovém kmitočtu $\omega_m = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - 2\xi^2}$ je maximum modulu přenosu $|P_{DP2}|_{\max} = (R_3 / R_1) / (2\xi \sqrt{1 - \xi^2})$

- ✚ Buzení z ideálního zdroje napětí – počet neznámých uzlových napětí se zmenšuje – platí naprosto stejný algoritmus – viz str. 25 v „pdf“.
- ✚ Úprava matic pro numerické řešení – viz „pdf“ – str. 27 – 29 – komplexní matice ($n \times n$) přechází na matici ($2n \times 2n$). Při řešení obvodů se zesilovacími prvky nabývají některé parametry velmi velkých hodnot – ideálně často hodnot nekonečných.
- ✚ Admitanční model (obrazový) pro řešení přechodných dějů pro nulové počáteční podmínky
 - stačí triviální substituce $j\omega \rightarrow p$
 - místo fázorů řešíme obrazy napětí (uzlových)
 - časové průběhy získáme ***zpětnou Laplaceovou transformací***

Pro shora řešený příklad platí: $P_{DP2}(p) = P_{1 \rightarrow 2}(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = K_0 \cdot \frac{\omega_0^2}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2}$

Použijeme-li jako vstupní signál skokové napětí o amplitudě A_1 , platí $u_1(t) = \sigma(t) \cdot A_1$

a tudíž $U_1(p) = L[\sigma(t) \cdot A_1] = A_1/p$

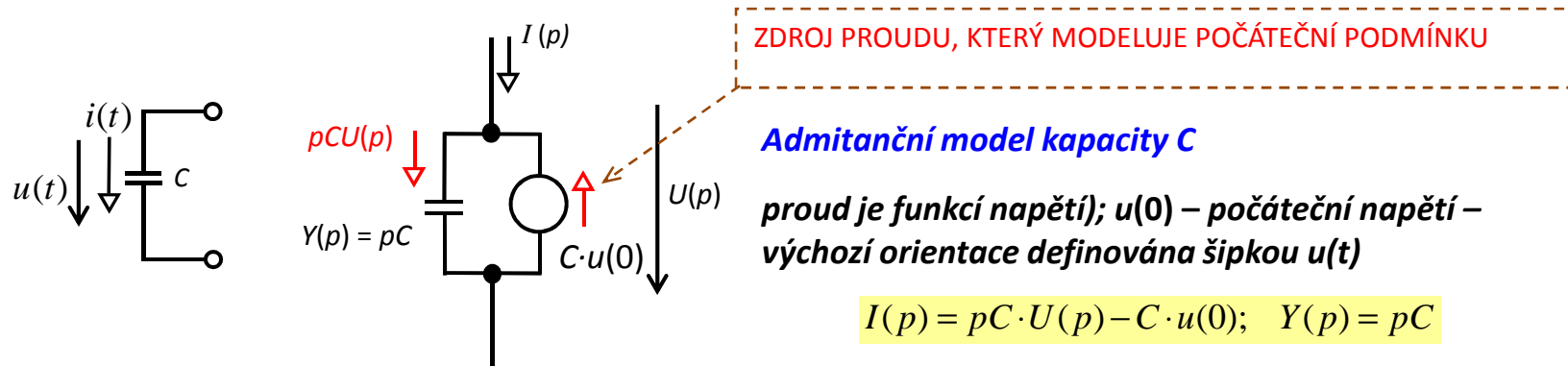
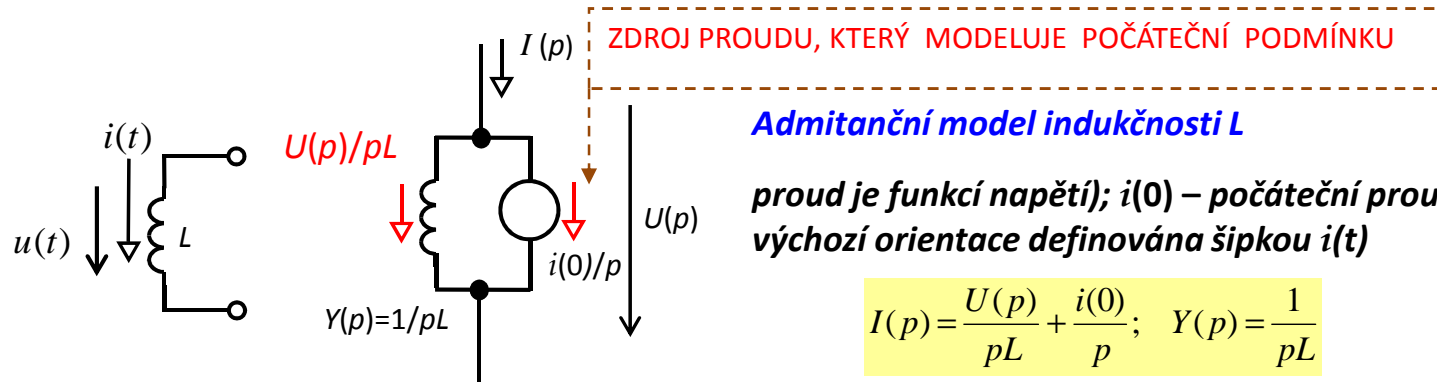
$$U_2(p) = A_1 \cdot K_0 \cdot \frac{\omega_0^2}{p \cdot (p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2)}$$

$$u_2(t) = A_1 \cdot K_0 \cdot \left[1 - \frac{e^{-\xi\omega_0 t}}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \cdot \sinh(\omega_0 \sqrt{\xi^2 - 1} \cdot t + \beta) \right]; \quad \sinh \beta = \sqrt{\xi^2 - 1}$$

Pro $\xi^2 - 1 \leq 0$ je výhodnější vztah upravit do podoby

$$u_2(t) = A_1 \cdot K_0 \cdot \left[1 - \frac{e^{-\xi\omega_0 t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cdot \sin(\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} \cdot t + \beta) \right]; \quad \sin \beta = \sqrt{1 - \xi^2}$$

- Admitanční model pro řešení přechodných dějů pro nenulové počáteční podmínky: musíme použít úplné modely



Zdroje proudu, které definují počáteční podmínky, zahrneme do výše uvedeného algoritmu řešení jako externí zdroje proudu.

- ✚ Obecně můžeme pro řešení přechodných dějů využít vlastních čísel matice, např.:

[Zíma, V.: *Maticové funkce v teorii obvodů*. Slaboproudý obzor 31 (1970), č. 5, str. P13 – P20]

- ✚ Stabilita – nejvhodnější je vyjít z laplaceovského modelu – vyšetřovat odezvu struktury – všechny kořeny musí mít reálnou část zápornou. Z toho pak – vypracována kritéria, podle nichž určíme polohu kořenů charakteristické rovnice v komplexní rovině – kritéria stability, např.:

[Čajka, J, Kvasil, J.: *Teorie lineárních obvodů*, SNTL, ALFA, Praha 1979]:

– Routhovo – Hurwitzovo, Michajlovovo-Leonhardovo a Nyquistovo.

Tato kritéria umožňují stanovit, pro jaký interval frekvencí je obvod nestabilní a z toho vyvodit možná technická (obvodová) řešení pro zajištění stability elektronické struktury (korekce frekvenčních vlastností struktury).

- ✚ Závěr

DĚKUJI ZA POZORNOST

