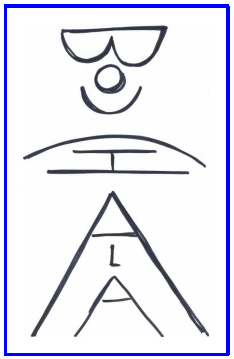
O imaginární matematice

Jiří Bouchala



Katedra
aplikované
matematiky

20. 5. 2010

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Definice (komplexní) exponenciály

- $z \in \mathbb{C}$ ... $\mathrm{e}^z := ?$
  - $z = x + iy$ ... $\mathrm{e}^z := \mathrm{e}^x(\cos y + i \sin y)$.
- $x \in \mathbb{R}$ ... $\mathrm{e}^x := ?$
  - e^x je (maximálním) řešením Cauchyho úlohy: $\begin{cases} y'(x) = y(x), \\ y(0) = 1; \end{cases}$
  - $x > 0$ ... $\ln x := \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{e}^x := \ln^{-1} x$;
  - $\mathrm{e}^x := \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n$;
  - existuje právě jedna funkce $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taková, že
    - *(i)* $\forall x, y \in \mathbb{R} :\ \exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$,
    - *(ii)* $\forall x \in \mathbb{R} :\ \exp(x) \geq 1 + x$.

- Gieronimo Cardano (1501–1576), *Ars Magna*(1545):
  $x(10-x) = 40$ ... $x_1 = 5 + \sqrt{-15}$, $x_2 = 5 - \sqrt{-15}$;
- Raphael Bombelli (1526–1572), *L'Algebra* (1572):
  $\sqrt{-1}$ ... $x + \sqrt{-1}\,y$;
- René Descartes (1596–1650):
  pojem "imaginární";
- Isaac Newton (1642–1727), Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), . . . ;
- Leonhard Euler (1707-1783):
  označení imaginární jednotky symbolem "i" (1777);
- Carl Friedrich Gauss (1777–1855), *A new proof of the theorem that every integral rational algebraic function of one variable can be resolved into real factors of the first or second degree* (1799): důkaz základní věty algebry;
- Louis Augustin Cauchy (1789–1857);
- Bernhard Riemann (1826–1866);
- Carl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897).

Slovník cizích slov:

- reálný ... skutečně existující, skutečný;
- imaginární ... vymyšlený, pomyslný, domnělý, neskutečný.

Kudy vede cesta ke komplexním číslům:

- $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ ... $x^2 - 2 = 0$;
- $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ... $x^2 + 1 = 0$.

- $\mathbb{C} \leftrightarrow \mathbb{R}^2$ ... $x + iy \leftrightarrow (x, y)$;

$$(x + iy) + (u + iv) = (x + u) + i(y + v) \leftrightarrow (x + u, y + v),$$
$$x(u + iv) = xu + ixv \leftrightarrow (xu, xv),$$
$$(x + iy)(u + iv) = xu - yv + i(xv + yu) \leftrightarrow (xu - yv, xv + yu)$$
$$\left[r(\cos t + i \sin t) \cdot \varrho(\cos \alpha + i \sin \alpha) = r\varrho\big(\underbrace{\cos(t + \alpha) + i \sin(t + \alpha)}\big)\right]$$

... **otočení.**

Mocninné řady, holomorfní funkce, křivkové integrály

Tři vrcholy

Diferencovatelné funkce, Taylorovy polynomy a řady v $\mathbb{R}$

- $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$ pro každé $x \in \mathbb{R}$;
- $\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ pro každé $x \in (-1, 1)$;
- $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ pro každé $x \in (-1, 1)$;
- $f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \approx 0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots = 0$

(pro každé $x \neq 0$ je $f(x) \neq 0$).

$$f \in C^\infty(x_0 - r, x_0 + r) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Mocninné a Taylorovy řady v $\mathbb{C}$

Definice

Mocninnou řadou o středu $z_0 \in \mathbb{C}$ rozumíme funkční řadu tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

kde pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ je $a_n \in \mathbb{C}$. Číslo

$$R := \sup \left\{ |z - z_0| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ konverguje} \right\} \in \langle 0, +\infty) \cup \{+\infty\}$$

nazýváme poloměrem konvergence (zmíněné) mocninné řady.

Věta

Nechť mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ má poloměr konvergence $R > 0$. Pak je funkce $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ holomorfní na oblasti $U(z_0, R)$.

Taylorova věta

Nechť funkce f je holomorfní na oblasti $U(z_0, R)$, kde $R > 0$. Pak existuje právě jedna mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ taková, že pro každé $z \in U(z_0, R)$ je

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Navíc pro koeficienty výše uvedené (Taylorovy) řady platí: $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.

Definice (komplexní) exponenciály

Dá se ukázat, že mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ má poloměr konvergence $R = +\infty$.

Definice

Exponenciální funkci definujeme (na $\mathbb{C}$) předpisem

$$\mathrm{e}^z := 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Podobně můžeme (na $\mathbb{C}$) definovat i goniometrické funkce:

$$\sin z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{\mathrm{e}^{iz} - \mathrm{e}^{-iz}}{2i},$$

$$\cos z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \frac{\mathrm{e}^{iz} + \mathrm{e}^{-iz}}{2}.$$

Křivkové integrály

Definice

- Buď funkce $f = f(t) = u(t) + iv(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t := \int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t.$$

- Buď $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2 : \langle a, b\rangle \to \mathbb{C}$ hladký oblouk
  a buď funkce $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ spojitá na $\{\gamma(t) : t \in \langle a, b\rangle\}$. Pak

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\Big(\gamma'(t) := \gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t)\Big).$$

Tvrzení

- Buď γ jednoduchá uzavřená po částech hladká kladně orientovaná křivka v $\mathbb{C}$. Pak
$$\int_\gamma \overline{z}\,\mathrm{d}z = 2i \cdot (\text{obsah int}\,\gamma).$$
  - Příklad. Buď $\gamma_r(t) := re^{it},\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle$. Pak
$$\int_{\gamma_r} \overline{z}\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} re^{-it} ire^{it}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} r^2 i\,\mathrm{d}t = 2i\pi r^2.$$

- Za situace z Taylorovy věty platí
$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z,$$
kde $\gamma_r(t) := z_0 + re^{it},\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle;\ 0 < r < R$.

Cauchyho věta

Nechť funkce f je holomorfní na jednoduše souviské oblasti Ω a nechť γ je uzavřená a po částech hladká křivka v Ω.
Pak

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Cauchyho integrální vzorce

Nechť γ je jednoduchá uzavřená po částech hladká kladně orientovaná křivka v $\mathbb{C}$ a nechť funkce $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na $\Omega = \operatorname{int}\gamma$ a spojitá na $\overline{\Omega}$.
Pak pro každé $z_0 \in \Omega$ a $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z.$$

Příklad

- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \ldots$

  $\ldots = \lim\limits_{R\to\infty} \left[\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\right]_{-R}^{R} = \frac{\pi}{2}.$

- Buď

$$\gamma_R(t) := \begin{cases} R\mathrm{e}^{it}, & t \in \langle 0, \pi\rangle, \\ t - \pi - R, & t \in (\pi, 2R+\pi\rangle. \end{cases}$$

  Pak

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{1}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{\frac{1}{(z+i)^2}}{(z-i)^2}\,\mathrm{d}z =$$

$$= 2\pi i \left[\left(\frac{1}{(z+i)^2}\right)'\right]_{z=i} = 2\pi i \left[-2\frac{1}{(z+i)^3}\right]_{z=i} = \frac{\pi}{2}.$$

Nejkrásnější matematická věta

Snadným důsledkem předcházejících definic je tvrzení:

$$\forall z \in \mathbb{C}: \ \mathrm{e}^{iz} = \cos z + i \sin z,$$

a proto

$$\boxed{\boxed{\mathrm{e}^{i\pi} + 1 = 0.}}$$

Literatura

Jiří Veselý
Komplexní analýza pro učitele
Univerzita Karlova v Praze – Nakladatelství Karolinum, Praha (2000)

Tristan Needham
Visual Complex Analysis
Oxford University Press (1997)

Jiří Bouchala
Funkce komplexní proměnné
www.am.vsb.cz/bouchala

Mirko Rokyta
Poznámka k zavedení exponenciály
www.karlin.mff.cuni.cz/∼rokyta/vyuka

David Wells
Jsou to ty nejkrásnější?
Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, ročník 36 (1991), č. 3, 171-179