Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava
Západočeská univerzita v Plzni

OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE V PŘÍKLADECH

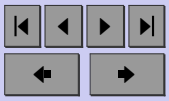
BOHUMIL KRAJC,
PETR BEREMLIJSKI

esf evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ









Bohumil Krajc, Petr Beremlijski

Obyčejné diferenciální rovnice v příkladech

© Bohumil Krajc, Petr Beremlijski, 2012

Předmluva

Vážený čtenáři,

předkládaná publikace je věnována podrobnému výkladu několika vybraných partií z teorie obyčejných diferenciálních rovnic. Ve snaze Vás již od začátku zaujmout, v úvodní kapitole diskutujeme řadu různorodých úloh vedoucích k rovnicím obsahujícím derivace neznámé funkce jedné reálné proměnné - k obyčejným diferenciálním rovnicím. Jedná se zejména o odvození modelů popsaných lineárními diferenciálními rovnicemi. Lineárním diferenciálním rovnicím je v celém textu věnována vůbec největší pozornost, lze je totiž považovat za vstupní bránu do celé oblasti a také se nejčastěji vyskytují v aplikacích. Důraz je kladen zejména na popis a zdůvodnění příslušných výpočetních postupů. Kromě lineárních diferenciálních rovnic jsou studovány také další třídy více či méně významných typických úloh. Nepostradatelné pojednání o metodě řešení rovnic se separovanými proměnnými je tak například doplněno náročnějším rozborem určitého zobecnění těchto rovnic - exaktními diferenciálními rovnicemi, které jsou zajímavé především v kontextu teorie potenciálu. Schopnosti výpočetní techniky dnes umožňují efektivně numericky řešit i velmi složité nelineární úlohy, a tak je do kurzu zařazeno několik prerekvizitních pasáží o kvalitativních vlastnos-

tech řešení diferenciálních rovnic. Jedná se zejména o výsledky charakterizující podmínky zajišťující v obecném případě existenci a jednoznačnost řešení Cauchyových úloh. Popis sofistikovaných numerických řešičů ovšem v tomto elementárním textu nenaleznete.

Pro porozumění výkladu je, kromě jisté vytrvalosti, potřebná znalost základních poznatků z lineární algebry, z diferenciálního počtu reálných funkcí jedné a více reálných proměnných a především pak z integrálního počtu funkcí jedné reálné proměnné. Podle našich zkušeností můžeme před samotným čtením tohoto textu studentům doporučit, aby si předem doplnili případné mezery z uvedených oblastí tím, že si zopakují zejména:

- Věty o substituci pro neurčitý i určitý integrál
- Základní vlastnosti Riemannova integrálu jako funkce proměnné meze
- Větu o derivaci inverzní funkce
- Větu o derivaci složené funkce několika proměnných
- Větu o implicitně zadaných funkcích

Řada obyčejných diferenciálních rovnic vznikla při zkoumání dějů, které závisejí na čase. Proto jsme se rozhodli nezávisle proměnnou většinou označovat symbolem t. Správně se má s funkcemi manipulovat jako s autonomními objekty, proto bychom například měli korektně psát sin a ne $\sin t$, chceme-li hovořit o funkci sinus. Při popisu různých algoritmů je však často názornější ztotožnit funkci s jejím předpisem, tedy s vyznačením nezávislé proměnné. Podle kontextu potom například výraz e^t může znamenat označení pro exponenciální funkci, označení vlastního předpisu pro tuto funkci nebo hodnotu (tedy reálné číslo) exponenciální funkce v pevném čase t. Doufáme, že uvedená volnost ve značení bude vždy

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

Obsah
4. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

správně interpretována a naše nedůslednost ve značení odpuštěna. Prosíme ještě o laskavou toleranci k následující nedůslednosti. Protože naším záměrem bylo co nejvíce vyjít vstříc cílové skupině čtenářů, rozhodli jsme se většinou popisovat dané metody řešení s použitím neurčitých integrálů, které jsou u studentské obce výrazně populárnější, než zápisy používající Riemannova integrálu s proměnnou mezí. To ovšem vede k tomu, že někdy budeme na příslušném otevřeném intervalu J pod označením $\int f(t)\,\mathrm{d}t$ rozumět jednu „vhodnou" konkrétní primitivní funkci k funkci f na J, jindy zase libovolnou primitivní funkci k f na J a konečně, často budeme integrál $\int f(t)\,\mathrm{d}t$ chápat jako systém všech funkcí, které jsou na J primitivní k funkci f. Připomeňme, že na otevřeném intervalu se dvě primitivní funkce liší nejvýše o konstantu, proto budeme někdy zdůrazňovat interpretaci neurčitého integrálu jako množiny, popřípadě libovolné primitivní funkce přidáním „integrační konstanty" do zápisu: $\int f(t)\,\mathrm{d}t + C$, $C \in \mathbb{R}$. Nejdůležitější tvrzení o řešeních diferenciálních rovnic se v textu ovšem snažíme vždy zformulovat tak, abychom se popsaným nepřesnostem vyhnuli.

O textu

Důležitá tvrzení, poznámky a příklady jsme se snažili pojmenovat, příslušné slogany jsou samozřejmě pouze orientační. Máme zato, že to vede k lepší následné orientaci při odkazování na uvedená tvrzení při následné argumentaci. Nejdůležitější tvrzení jsou graficky zvýrazněna. Věty jsou uvedeny v rámečku. Konce důkazů jsou vyznačeny prázdným čtverečkem (□), konce řešení příkladů plným trojúhelníčkem (▲). Obtížnější či rozšiřující pasáže jsou označeny hvězdičkou (★) a jsou od ostatního textu odlišeny menším typem písma. Text byl vysázen pomocí sázecího systému TEX ve formátu pdf LATEX. Výukový materiál je obohacen řadou autotestů, které pomohou čtenáři ověřit jeho pochopení dané problematiky. Dále jsou k textu k dispozici videa popisující řešení některých diferenciálních rovnic.

O projektu

Text, který právě čtete, vznikl v rámci řešení projektu „Matematika pro inženýry 21. století – inovace výuky matematiky na technických školách v nových podmínkách rychle se vyvíjející informační a technické společnosti“. Projekt byl řešen na Vysoké škole báňské - Technické univerzitě v Ostravě a Západočeské univerzitě v Plzni v období 2009 – 2012.

Hlavní motivací projektu je potřeba reagovat na změny významu jednotlivých partií matematiky při řešení praktických problémů, způsobenou zejména velkým pokrokem v matematickém modelování, dramatickým zlepšováním software a rychlým zvyšováním výpočetních kapacit moderních počítačů. Inženýři nyní běžně využívají stále se vyvíjející komplikované softwarové produkty založené na matematických pojmech, se kterými se v kurzech matematiky buďto nesetkají vůbec nebo v nevhodné formě. Na druhé straně prezentace některých pojmů v základních kurzech neodráží z nejrůznějších důvodů potřeby odborných kateder. Bohužel tento stav ztěžuje studentům aktivní používání získaných vědomostí v odborných předmětech i orientaci v rychle se vyvíjejících metodách inženýrské praxe.

Cílem projektu je inovace matematických a některých odborných kurzů na technických vysokých školách s cílem získat zájem studentů, zvýšit efektivnost výuky, zpřístupnit prakticky aplikovatelné výsledky moderní matematiky a vytvořit předpoklady pro efektivní výuku inženýrských předmětů. Zkvalitnění výuky matematiky budoucích inženýrů chceme dosáhnout po stránce formální využitím nových informačních technologií přípravy elektronických studijních materiálů a po stránce věcné pečlivým výběrem vyučované látky s důsledným využíváním zavedených pojmů v celém kurzu matematiky s promyšlenou integrací moderního matematického aparátu do vybraných inženýrských předmětů. Metodiku výuky matematiky a její atraktivnost pro studenty chceme zlepšit důrazem na motivaci a důsledným používáním postupu „od problému k řešení“.

V rámci projektu vytváříme 41 nových výukových materiálů z oblastí matematické analýzy, lineární algebry, numerických metod, metod optimalizace, diskrétní matematiky, teorie grafů, statistiky a několika odborných kurzů. Všechny hotové výukové materiály jsou volně k dispozici na webových stránkách projektu http://mi21.vsb.cz.

Autoři předem děkují za všechny případné nápady a návrhy k vylepšení textu i za upozornění na chyby. Závěrem dovolte, abychom poděkovali Ing. Pavlu Praksovi, Ph.D., za řadu konstruktivních připomínek k podstatné části skript a Ing. Marii Sadowské, Ph.D. a Bc. Matyáši Theuerovi za pomoc při grafickém zpracování úvodní kapitoly. Jejich poděkování patří také MUDr. Michalu Pětrošovi za trpělivé a laskavé uvedení do problematiky farmakokinetiky. Jsme také vděčni za pomoc při přepisu části textu do LaTeXu, kterou nám poskytli studenti Ondřej Zjevík, Ondřej Grunt a Michal Maléř.

V Ostravě 1. 8. 2012 Bohumil Krajc a Petr Beremlijski

Obsah

Předmluva **3**

1 Motivace, modely vedoucí k ODR a jejich soustavám **12**

2 Pojem řešení ODR a další základní pojmy **50**
Příklady k procvičení 57
2.1 Video s ilustrací pojmu 58
2.2 Interaktivní testy 58

3 Rovnice se separovanými proměnnými **77**
3.1 Videa s řešenými příklady 93
3.2 Interaktivní test 94
Příklady k procvičení 98
Klíč k příkladům k procvičení 98

4 Lineární diferenciální rovnice 1. řádu **99**
4.1 Videa s řešenými příklady 116
4.2 Interaktivní test 116
Příklady k procvičení 123

Klíč k příkladům k procvičení 124

5 Obecné věty o existenci a jednoznačnosti řešení obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu 126

5.1 Video s ilustrací pojmu 133
Příklady k procvičení 133
Klíč k příkladům k procvičení 134

6 Geometrická interpretace ODR a nástin numerických metod 135

7 Bernoulliova diferenciální rovnice 142

8 Exaktní diferenciální rovnice 150

8.1 Videa s řešenými příklady 179
8.2 Interaktivní test 179
Příklady k procvičení 189
Klíč k příkladům k procvičení 191

9 Obyčejné diferenciální rovnice n-tého řádu - základní vlastnosti 192

9.1 Videa s ilustrací pojmu 199
9.2 Interaktivní test 199

10 Lineární diferenciální rovnice vyšších řádů 206

10.1 Videa s řešenými příklady 257
10.2 Interaktivní testy 258
Příklady k procvičení 274
Klíč k příkladům k procvičení 277

11 Systémy obyčejných diferenciálních rovnic **280**
11.1 Videa s ilustrací pojmu 323
11.2 Interaktivní test 323
Příklady k procvičení 329
Klíč k příkladům k procvičení 331

Literatura **333**

Rejstřík **334**

Obsah
11. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Kapitola 1

Motivace, modely vedoucí k ODR a jejich soustavám

Rovnice, ve kterých se vyskytují derivace neznámých funkcí, se nazývají diferenciálními rovnicemi. Pomocí diferenciálních rovnic lze popsat celou řadu zákonitostí, které se objevují v přírodních a společenských vědách. Z toho plyne, že základní poznatky a dovednosti z oblasti diferenciálních rovnic jsou součástí intelektuální výbavy většiny úspěšných přírodovědců, inženýrů, ekonomů i sociologů.

Řešeními diferenciálních rovnic jsou funkce, které popisují vlastnosti zkoumaných jevů. Budeme-li umět řešit diferenciální rovnice, znamená to, že budeme umět lépe rozumět okolnímu světu, řídit různé technologické i společenské procesy a ovlivňovat tak naši budoucnost. V této kapitole podrobněji nastíníme, jak diferenciální rovnice vznikají.

V partiích věnovaných integrálnímu počtu se řeší následující problém:

Je zadána funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Je třeba zjistit, pro jaké funkce $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definované na intervalu $I \subset \mathbb{R}$, platí pro každé $x \in I$ vztah

$$y'(x) = f(x). \tag{1.1}$$

Rovnice (1.1) představuje speciální typ diferenciální rovnice. Uvedené rovnici na intervalu I zřejmě vyhovují všechny primitivní funkce k funkci f na I, hovoříme o řešeních rovnice. Podrobněji, přejde-li diferenciální rovnice po dosazení funkce φ v rovnost platnou na nějakém intervalu I, nazýváme funkci φ řešením[1] této rovnice na I.

Například jedním z řešení rovnice

$$y'(x) = 2x - \sin(x) \tag{1.2}$$

na intervalu $\mathbb{R}$ je funkce φ daná předpisem

$$\varphi(x) = x^2 + \cos(x).$$

Skutečně, na $\mathbb{R}$ platí

$$\varphi'(x) = \left(x^2 + \cos(x)\right)' = 2x - \sin(x).$$

Snadno ověříme, že jiným řešením téže rovnice je funkce ψ definovaná vztahem

$$\psi(x) = x^2 + \cos(x) + 4807.$$

Všechna řešení uvedené rovnice na $\mathbb{R}$ lze zřejmě zapsat ve tvaru

$$y(x) = x^2 + \cos(x) + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

[1] Pojem řešení diferenciální rovnice bude upřesněn v další kapitole.

Obsah
13. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

uvedený vzorec nazýváme obecným řešením diferenciální rovnice (1.2). Naše úloha má nekonečně mnoho řešení. Zkusme navíc přidat k naší rovnici například podmínku $y(0) = 2$, tj. chceme nalézt funkci, která řeší naši rovnici a navíc její funkční hodnota v $x = 0$ je rovna 2. Lze ukázat, že taková úloha má na $\mathbb{R}$ pouze jediné řešení $\bar{y}(x) = x^2 + \cos(x) + 1$. Dále se v textu budeme věnovat některým „praktickým“ úlohám.

Příklad 1.1. V poledne vyjel ze stanoviště vzdáleného po cestě 200 metrů od vrcholu Lysé hory cyklista Mirek. Dochovaly se záznamy tachometru na Mirkově kole, podle kterých Mirkova rychlost v_M v závislosti na čase t v měřeném úseku odpovídala funkci

$$v_M(t) = 10 \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{100}\right), \quad \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right].$$

Ve stejnou dobu vyrazil z vrcholu hory Jirka vybavený lepším kolem rychlostí v_J:

$$v_J(t) = \frac{1}{1000}t + 10 \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{100}\right), \quad \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right].$$

Dožene Jirka Mirka? Pokud ano, v jakém čase?

Řešení. Mirkova vzdálenost po cestě od vrcholu Lysé hory je dána funkcí s_M. Víme, že $s_M(0) = 200$ a funkce s_M je řešením diferenciální rovnice[1]

$$y'(t) = 10 \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{100}\right),$$

[1] Rovnici získáme pokud si uvědomíme, že rychlost v_M je matematicky popsána derivací funkce s_M.

to znamená, že na uvažovaném intervalu platí:

$$s'_M(t) = 10 \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{100}\right).$$

Hledejme funkci s_M:

$$s_M(t) = \int 1 \cdot 10 \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{100}\right) \mathrm{d}t \overset{(\mathrm{p})}{=} t \cdot 10 \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{100}\right) - 10 \cdot \frac{1}{100} \cdot$$

$$\cdot \int \frac{t}{\left(\frac{t}{100}\right)^2 + 1} \mathrm{d}t \overset{(\mathrm{s})}{=} 10 \cdot t \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{100}\right) - 500 \cdot \ln\left(\left(\frac{t}{100}\right)^2 + 1\right) + C,$$

kde $C \in \mathbb{R}$ je vhodná konstanta. Při výpočtu byla použita metoda per partes (p) a substituce (s):

$$(\mathrm{p}): \left| \begin{array}{ll} u = 10 \cdot \operatorname{arctan}\left(\frac{t}{100}\right), & v' = 1 \\ u' = 10 \cdot \frac{\frac{1}{100}}{\left(\frac{t}{100}\right)^2 + 1}, & v = t \end{array} \right|, \quad (\mathrm{s}): \left| \begin{array}{l} z = \left(\frac{t}{100}\right)^2 + 1 \\ \mathrm{d}z = \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{100} \cdot 2t\mathrm{d}t \end{array} \right|$$

Protože $s_M(0) = 200$, platí

$$200 = 0 - 500 \cdot \ln(1) + C,$$

takže

$$C = 200,$$

a konečně

$$s_M(t) = 10 \cdot t \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{100}\right) - 500 \cdot \ln\left(\left(\frac{t}{100}\right)^2 + 1\right) + 200.$$

Podobné vztahy platí v Jirkově případě: $s_J(0) = 0$,

$$s'_J(t) = \frac{1}{1000}t + 10 \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{100}\right).$$

Po obdobných výpočtech zjistíme, že

$$s_J(t) = \frac{t^2}{2000} + 10 \cdot t \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{100}\right) - 500 \cdot \ln\left(\left(\frac{t}{100}\right)^2 + 1\right), \ t > 0.$$

Z toho plyne, že okamžik střetnutí musí splňovat rovnost

$$200 = \frac{t^2}{2000}.$$

To znamená, že Jirka dožene Mirka za přibližně 632.5 s. ▲

Příklad 1.2. V tomto příkladě se pokusíme vytvořit matematický model, který popisuje, jakým způsobem se mění koncentrace léku v krvi v závislosti na čase. Nechť funkce $C(t)$ udává okamžitou koncentraci látky (vhodného léku) v krvi v čase t (v $\left[\frac{\mu g}{ml}\right]$). Lékařskými pokusy bylo zjištěno, že rychlost poklesu koncentrace této látky v krvi je přímo úměrná její samotné koncentraci, tj. platí:

$$C'(t) = -kC(t),$$

kde $k > 0$ je konstanta[1]. Tato konstanta popisující úbytek dané látky bývá dobře popsána dvěma farmakokinetickými parametry, kterými jsou *clearance* (míra schopnosti organismu eliminovat látku) a *distribuční objem* (míra kapacity tzv. zdánlivého prostoru, který je

[1] Hodnota k závisí na léku a pacientovi.

Obsah
16. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

v organismu pro tuto látku k dispozici). Clearance budeme dále značit Cl, standardní volba jednotek bývá $\left[\frac{\text{ml}}{\text{min}}\right]$, distribuční objem v litrech označíme v_d. Pokud zvolíme jako jednotku času hodiny, můžeme konstantu k popsat následující závislostí

$$k = \frac{Cl \cdot \frac{60}{1000}}{v_d}.$$

Dále pro jednoduchost předpokládejme, že látka je distribuována do krve intravenózní injekcí a rozšiřuje se do krve okamžitě. Předpokládejme, že tímto způsobem byla v čase $t = 0$ dodáno do krve takové množství látky, že její koncentrace v krvi měla hodnotu C_0. Tím jsme získali jednoduchý model popisující hodnoty koncentrace látky v krvi po její intravenózní aplikaci:

$$\begin{cases} C'(t) = -kC(t), \\ C(0) = C_0. \end{cases} \tag{1.3}$$

U léčiv je dalším významným farmakokinetickým parametrem *účinná koncentrace*. Ta udává hodnotu koncentrace či interval hodnot koncentrací, při kterých látka působí prospěšně na organismus. Pokud známe hodnotu výše zmíněných farmakokinetických parametrů pro konkrétní léčivo, můžeme využít řešení úlohy (1.3) pro odpověď na otázku, jak často lék obsahující tuto látku pacientovi aplikovat pro zajištění úspěšné léčby. V následujících příkladech předpokládáme, že pacientem je průměrná osoba s tělesnou hmotností 70 kg. Hodnoty farmakokinetických parametrů pro léčiva z těchto příkladů byly převzaty z [6], kde se lze seznámit s oblastí farmakokinetiky mnohem detailněji.

Pro léčbu nemocného s průduškovým astmatem se používá theofylin. Jeho farmakoki-

Obsah
17. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

netické parametry jsou:

$$Cl = 48 \left[\frac{\text{ml}}{\text{min}}\right], \; v_d = 35 \text{ [l]}, \text{ účinná koncentrace : } 10 - 20 \left[\frac{\mu\text{g}}{\text{ml}}\right].$$

Toto léčivo musíme pacientovi podávat v pravidelných časových intervalech tak, aby jeho koncentrace v krvi léčené osoby nepřesáhla horní mez účinné koncentrace a neklesla pod její dolní mez. Na začátku léčby byla aplikována zaváděcí dávka, která způsobila, že v čase $t = 0$ byla koncentrace theofylinu v krvi $C_0 = 20 \left[\frac{\mu\text{g}}{\text{ml}}\right]$. Další dávky chceme aplikovat vzhledem k pohodlí pacienta tak, aby rozmezí podávání léku bylo co největší. Zjistěme po jakém čase (v hodinách) je nutné lék obsahující theofylin znovu podat pacientovi. Připomeňme, že aby byla léčba účinná, je třeba lék pacientovi podat dříve než koncentrace theofylinu klesne pod dolní mez účinné koncentrace.

Řešení. Po dosazení zadaných hodnot dostaneme rovnici

$$\begin{cases} C'(t) = -\frac{2{,}88}{35} C(t), \\ C(0) = 20. \end{cases} \tag{1.4}$$

Derivováním se lze přesvědčit, že řešením úlohy (1.4) je funkce $\bar{C}(t) = 20 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{2{,}88}{35}t}$. Z toho ihned plyne rovnice po dobu t do další aplikace:

$$10 = 20 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{2{,}88}{35}t}.$$

To znamená, že další dávku theofylinu je nutno podat za přibližně $8,4$ hod. ▲

Obsah
18. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Příklad 1.3. Než se začneme zabývat tvorbou dalšího matematického modelu, vrátíme se v čase do doby krátce po konci druhé světové války. Těsně po válce zjistila nizozemská policie, že během války bylo prodáno několik Vermeerových[1] obrazů německému ministrovi letectví Hermannu Göringovi. Tuto transakci zprostředkoval Han van Meegeren. Na základě těchto zjištěných faktů byl 29.5.1945 van Meegeren zadržen a obviněn z kolaborace s nepřítelem. 12.7.1945 van Meegeren vydal prohlášení, že Göringovi nikdy žádný Vermeerův obraz neprodal. Naopak Göringa napálil, protože obrazy, které mu prodal, jsou podvrhy Vermeerových obrazů a sám je vytvořil.

A aby dokázal své tvrzení, začal jeden z „Vermeerových“ obrazů[2] napodobovat. Van Meegeren přizvaným znalcům předvedl způsob, jakým vytváří barvy, jak připravuje plátno, či jak zařídí, aby povrch malby vypadal jako u několik set let starého obrazu. Těsně před dokončením podvrhu Vermeerova obrazu se van Meegeren dozvěděl, že obvinění z kolaborace bude nahrazeno obviněním z padělatelství, a tak odmítl tuto kopii dokončit. I tak ale většina přizvaných odborníků uznala, že obrazy prodané Göringovi jsou pravděpodobně falzum a van Meegeren byl 12.10.1947 odsouzen za padělatelství na rok do vězení, ve kterém 30.12.1947 na infarkt zemřel.

I přesto, že komise, která posuzovala pravost „Vermeerových“ obrazů uznala, že to jsou pravděpodobně podvrhy vytvořené van Meegerenem, zůstávali odborníci u některých obrazů, k jejichž autorství se také van Meegeren přihlásil, na pochybách. Zejména zpochybňování pravosti obrazu Emauzští učedníci, který zakoupilo muzeum v Rotterdamu za 170 000 dolarů, vyvolávalo velké spory. Proto se přistoupilo u tohoto obrazu v roce 1967 k metodě radioaktivního datování, která měla tyto pochyby rozhodnout.

Metoda radioaktivního datování využívá toho, že radioaktivní prvky jsou nestabilní

[1] Jan Vermeer (1632 - 1675) byl nizozemský malíř.

[2] Šlo o obraz „Ježíš mezi znalci Písma“

a část jejich atomů se samovolně rozpadá na atomy jiných prvků. Experimenty bylo zjištěno, že rychlost rozpadu atomů radioaktivních prvků je přímo úměrná počtu těchto atomů. Pokud funkci udávající počet atomů radioaktivního prvku v čase t v gramu látky označíme jako $N(t)$, pak výše zmíněnou závislost můžeme popsat diferenciální rovnicí[1]

$$N'(t) = -\lambda N(t), \tag{1.5}$$

kde λ je konstanta, která popisuje rychlost rozpadu atomů daného radioaktivního prvku. Tato konstanta je dána pro každý radioaktivní prvek vztahem:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{\text{poločas rozpadu prvku v minutách}}.$$

Čas t v našem modelu budeme měřit v minutách a jednotka konstanty λ je v min^{-1}.

Metoda radioaktivního datování je založena na jednoduchém pozorování. Pokud bychom věděli, kolik atomů radioaktivního prvku měla látka v jednom svém gramu při svém vzniku (tzn. známe hodnotu N_0, pro kterou platí $N(0) = N_0$) a znali bychom také aktuální počet těchto atomů v gramu látky, mohli bychom řešením úlohy

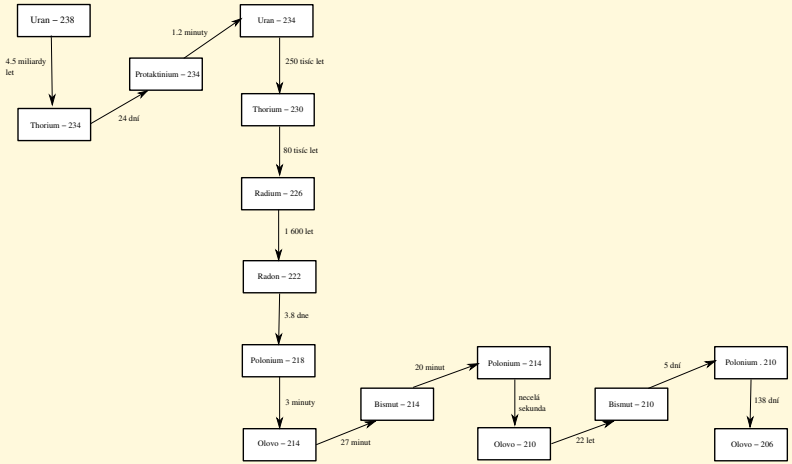
$$\begin{cases} N'(t) = -\lambda N(t), \\ N(0) = N_0. \end{cases} \tag{1.6}$$

zjistit, jak je tato látka stará.

Než se začneme zabývat datováním „Vermeerových“ obrazů, uvědomme si, že všechny horniny na Zemi obsahují malé množství radioaktivního uranu, který se rozpadá na atomy dalšího prvku. Tyto atomy se opět samovolně mění na další atomy atd. (viz obrázek 1.1).

[1] Atomů musí být „dostatečně“ mnoho, abychom mohli jejich množství dobře aproximovat hladkou funkcí.

Obsah
20. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obr. 1.1: Uranová rozpadová řada (časy u šipek udávají poločasy rozpadu jednotlivých radioaktivních prvků)

Obsah
21. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Dále je známo, že olovnatá běloba používaná na malbách obsahuje oxid olovnatý, který obsahuje malé množství olova-210 a ještě menší množství radia-226. V okamžiku, kdy je barva obsahující oxid olovnatý vyrobena, začnou se atomy olova-210 velmi rychle rozpadat s poločasem rozpadu 22 let a množství olova-210 v této barvě klesá. Na druhé straně vzniká malé množství olova-210 rozpadem radia-226 (a prvků, které následují v rozpadové řadě za ním). Tento proces můžeme popsat následující diferenciální rovnicí

$$\begin{cases} N'(t) = -\lambda N(t) + r(t), \\ N(0) = N_0, \end{cases} \tag{1.7}$$

kde $N(t)$ je funkce udávající počet atomů olova-210 v čase t v gramu látky, $r(t)$ je funkce udávající počet atomů olova-210, které vzniknou v čase t v gramu oxidu olovnatého za minutu.

Protože poločas rozpadu radia-226 je 1600 let a metodu radioaktivního datování chceme použít pro rozpoznání stáří obrazů, které měly v roce 1967 přibližně buď 300 let nebo 20 let, můžeme funkci $r(t)$ považovat za konstantní. Pak $r(t) = r = \text{konst.}$ a rovnici (1.7) můžeme nahradit rovnicí

$$\begin{cases} N'(t) = -\lambda N(t) + r, \\ N(0) = N_0. \end{cases} \tag{1.8}$$

Mnohem více podrobností o metodě radioaktivního datování může čtenář nalézt v [3].

Také v případě rovnice (1.8) jsme schopni, pokud známe počet atomů olova-210 v gramu oxidu olovnatého v době výroby olovnaté běloby určit stáří obrazu, na kterém je tato barva použita. V naší úloze počet atomů olova-210 v gramu oxidu olovnatého v době výroby barvy bohužel neznáme. I přesto jsme schopni rozlišit obraz jehož stáří je 300 let od obrazu, který má 20 let. Je totiž známo, jaké bývají koncentrace radioaktivního olova-210 v rudách, ze





Které se vyrábí oxid olovnatý. Je naprosto nemožné, aby počet atomů olova-210 v gramu rudy, ze které se oxid olovnatý vyrobil přesáhl počet $5 \cdot 10^{11}$. Proto můžeme zjistit, pokud známe potřebné parametry, zda je možné, aby bylo stáří obrazu 300 let. V následujícím příkladu použijeme: 1 rok = 525 600 minut.

Určeme, zda je možné, aby byl obraz Emauzští učedníci opravdu starý 300 let a byl tedy pravý, pokud bylo měřením zjištěno, že v čase T platí

$$N(T) = 1,42 \cdot 10^8, \ r = 0,8.$$



Obr. 1.2: Emauzští učedníci

Obsah

23. strana ze 336

Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Řešení. Po dosazení zadaných hodnot a využitím faktu, že poločas rozpadu olova-210 je 22 let, dostaneme rovnici

$$\begin{cases} N'(t) = -5,99 \cdot 10^{-8} N(t) + 0,8, \\ N(T) = 1,42 \cdot 10^{8}. \end{cases} \tag{1.9}$$

Dá se ukázat, že řešením rovnice (1.9) je funkce $\bar{N}(t) = -\frac{\frac{0,8}{5,99 \cdot 10^{-8}} - 1,42 \cdot 10^{8}}{\mathrm{e}^{-5,99 \cdot 10^{-8} \cdot T}} \cdot \mathrm{e}^{-5,99 \cdot 10^{-8} t} + \frac{0,8}{5,99 \cdot 10^{-8}}$. Zkusme s využitím řešení rovnice (1.9) určit, zda je možné, aby byl obraz pravý. Pokud je $T = 300 \cdot 525600$ minut, pak $\bar{N}(0) \doteq 1,63 \cdot 10^{12}$. Z toho je zřejmé, že obraz je podvrh. ▲

Příklad 1.4. Nyní nastal čas na šálek kávy. Hrnek s čerstvě uvařenou kávou má teplotu T_h a je ochlazován vzduchem v místnosti o konstantní teplotě T_v.



Obr. 1.3: Hrneček s chladnoucí kávou

Obsah
24. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Je možné modelovat teplotu hrnku jako funkci $T_h(t)$, která se mění rychlostí[1] přímo úměrnou rozdílu teploty vzduchu a hrnku[2] s koeficientem k, který závisí na materiálových vlastnostech a tvaru. Nechť teplota hrnku v čase t_0 je dána hodnotou T_{h0}. Dostáváme tedy následující model:

$$\begin{cases} T_h'(t) = k(T_v - T_h(t)), \\ T_h(t_0) = T_{h0}. \end{cases} \tag{1.10}$$

Řešení úlohy (1.10) použijeme k modelování ochlazování hrnku s kávou, která měla v čase $t_0 = 0$ teplotu $100°$ [C]. Teplota vzduchu má hodnotu $T_v = 20°$ [C] a experimentálně[3] byla zjištěna hodnota konstanty $k = 0{,}04$. Čas t je v minutách. Za jak dlouho se hrnek ochladí alespoň na $50°$ [C]?

Řešení. Po dosazení uvedených hodnot dostaneme diferenciální rovnici

$$\begin{cases} T_h'(t) = 0{,}04(20 - T_h(t)), \\ T_h(0) = 100. \end{cases} \tag{1.11}$$

Dá se ukázat, že řešením rovnice (1.11) je funkce $\bar{T}_h(t) = 80 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}04t} + 20$. Z toho plyne

$$50 = 80 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}04t} + 20.$$

To znamená, že hrnek s kávou se ochladí na $50°$ [C] za přibližně $24,5$ [min]. ▲

[1] Tuto rychlost matematicky popisuje derivace funkce $T_h(t)$.
[2] Popsané zákonitosti se říká Newtonův zákon ochlazování.
[3] Třeba opakovaným měřením.

Obsah
25. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Příklad 1.5. V této úloze se pokusíme odhadovat vývoj velikosti dané populace. Nechť $y(t)$ označuje velikost populace v čase t a y_0 popisuje velikost populace v čase t_0. Nechť a je konstanta, která udává přírůstek populace za časovou jednotku. Zjednodušený model vývoje populace[1] lze popsat rovnicí a počáteční podmínkou ve tvaru:

$$\begin{cases} y'(t) = ay(t), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{1.12}$$

Rovnice (1.12) poměrně dobře aproximuje vývoj početné populace, která má dostatečně velké zásoby potravy, dalších zdrojů a může neomezeně růst. Lepší model dává následující populační rovnice s počáteční podmínkou, ve které se navíc objevuje člen $b(y(t))^2$ (b je konstanta)

$$\begin{cases} y'(t) = ay(t) - b(y(t))^2, \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{1.13}$$

Rovnice (1.13) dobře aproximuje vývoj populace, která už je dostatečně velká, má omezené zásoby potravy i dalších zdrojů a mezi členy populace dochází k soupeření o tyto zdroje (to popisuje konstanta b).

Populační rovnici s počáteční podmínkou (1.13) použijeme k modelování vývoje počtu obyvatel USA v letech 1790 - 1950. Konstanty a, b byly odhadnuty takto: $a = 0{,}03134$, $b = 1{,}5887 \cdot 10^{-10}$. Čas t je v rocích. Navíc víme, že počet obyvatel v USA v roce 1790 byl 3 929 000. Odhadněme velikost populace Spojených států amerických v letech 1800,

[1] Vycházíme z představy, že rychlost s jakou roste počet členů populace je přímo úměrná počtu členů populace, kteří se rozmnožují.

Obsah
26. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

1850, 1900 a 1950. Spočítané hodnoty můžeme porovnat se skutečnými hodnotami v následující tabulce.

Rok	Počet obyvatel
1790	3 929 000
1800	5 308 000
1850	23 192 000
1900	75 995 000
1950	150 697 000

Tab. 1.1: Populace USA v letech 1790 - 1950

Řešení. Po dosazení zadaných hodnot dostaneme rovnici

$$\begin{cases} y'(t) = 0{,}03134y(t) - 1{,}5887 \cdot 10^{-10}(y(t))^2, \\ y(1790) = 3929000. \end{cases} \tag{1.14}$$

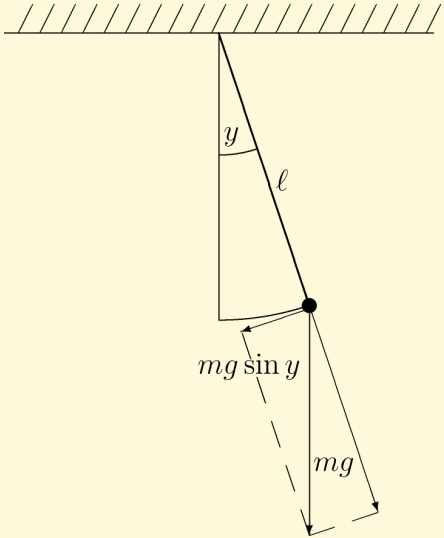
Dá se ukázat, že řešením rovnice (1.14) je funkce

$$\bar{y}(t) = -123134,86 \cdot \frac{\mathrm{e}^{-56,0986}}{-6,2420023 \cdot 10^{-4} \cdot \mathrm{e}^{-56,0986} - 0,03071579977 \cdot \mathrm{e}^{-0,03134 \cdot t}}.$$

Po dosazení dostaneme $\bar{y}(1800) \doteq 5\ 336\ 024$, $\bar{y}(1850) \doteq 23\ 192\ 502$, $\bar{y}(1900) \doteq 76\ 871\ 300$ a $\bar{y}(1950) \doteq 148\ 677\ 189$, což jsou velmi dobré odhady skutečných hodnot. ▲

Obsah
27. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Příklad 1.6. Nyní využijme obyčejnou diferenciální rovnici pro popis matematického kyvadla. Zabývejme se zkoumáním chování hmotného bodu zavěšeného na tenkém vláknu zanedbatelné hmotnosti, zanedbává se odpor vzduchu při pohybu kyvadla i tření v závěsu a gravitační pole se považuje za homogenní. Délka vlákna je ℓ, hmotný bod zavěšený na vláknu má hmotnost m. Náčrtek kyvadla je na obrázku 1.4.



Obr. 1.4: Matematické kyvadlo

Vytvořme matematický model kyvadla popisující jeho výchylku y od rovnovážné polohy

Obsah
28. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

v závislosti na čase t. Výchylku y budeme měřit v radiánech. S využitím Newtonova zákona[1] a známého pravidla, že síly působící na závaží jsou v rovnováze dostaneme vztah

$$F = ma(t) = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -mg\sin y(t). \tag{1.15}$$

Pokud upravíme (1.15), získáme rovnici

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + g\sin y(t) = 0. \tag{1.16}$$

Délka oblouku, po kterém projde hmotný bod od rovnovážné polohy, pokud je vychýlen o $y(t)$ radiánů je

$$s = \ell y \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \ell\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}. \tag{1.17}$$

Protože platí $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$, plyne z druhé rovnice v (1.17) tvrzení

$$v = \ell\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \ell\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}. \tag{1.18}$$

Dosaďme druhou rovnici z (1.18) do (1.16) a dostaneme rovnici popisující výchylku

$$\ell\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + g\sin y(t) = 0. \tag{1.19}$$

Abychom tento model zjednodušili, použijeme Taylorův polynom funkce sin se středem v 0

$$\sin y(t) = y(t) - \frac{y(t)^3}{3!} + \frac{y(t)^5}{5!} - \dots. \tag{1.20}$$

[1] Přesněji druhého Newtonova pohybového zákona, který je matematicky vyjádřen $F = m \cdot a$.

Obsah
29. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Nahraďme v rovnici (1.19) funkci sin jejím rozvojem (1.20)

$$\ell\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+gy(t)-g\frac{y(t)^3}{3!}+g\frac{y(t)^5}{5!}-\ldots=0. \tag{1.21}$$

Předpokládejme, že chceme vytvořit model pouze pro popis kyvadla, které bude mít pouze „malé“ výchylky (tj. y je „malé“). V tom případě platí $\sin y(t)=y(t)-\frac{y(t)^3}{3!}+\frac{y(t)^5}{5!}-\ldots\approx y$ a dostaneme

$$\ell\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+gy(t)=0. \tag{1.22}$$

Pokud k (1.22) přidáme počáteční podmínky popisující stav kyvadla v čase t_0 a vhodně ji upravíme získáme následující Cauchyovou úlohou

$$\left.\begin{aligned} &y''(t)+(g/\ell)\;y(t)=0,\\ &y(t_0)=y_0,\;y'(t_0)=dy_0, \end{aligned}\right\} \tag{1.23}$$

kde y_0 označuje počáteční výchylku závaží (v radiánech) a dy_0 značí počáteční (úhlovou) rychlost závaží.

Pomocí úlohy (1.23) popíšeme kyvadlo jehož délka je $\ell:=1$ [m] a tíhové zrychlení g považujme rovné 10 m/s^{-2}. Výchylka kyvadla je na počátku rovna $0,1$ (tj. $y(0)=0{,}1$ [rad]) a počáteční úhlová rychlost kyvadla je nulová (tj. $y'(0)=0$ [rad/s]).

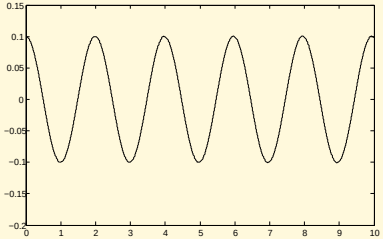
Řešení. Po dosazení zadaných hodnot dostaneme rovnici

$$\left\{\begin{aligned} &y''(t)+10y(t)=0,\\ &y(0)=0{,}1,\;y'(0)=0. \end{aligned}\right. \tag{1.24}$$

Obsah
30. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Dá se ukázat, že řešením rovnice (1.24) je funkce

$$\bar{y}(t) = 0{,}1 \cdot \cos\left(\sqrt{10} \cdot t\right).$$



Obr. 1.5: Výchylky závaží (v radiánech)

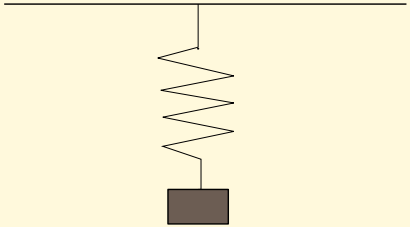
Tato funkce popisující výchylku daného kyvadla je zobrazena na obrázku (1.5) pro časy z rozmezí $\langle 0, 10\rangle$ [s]. ▲

Příklad 1.7. Nyní uvedeme matematický popis polohy $y(t)$ závaží, které je zavěšeno na pružině, v závislosti na čase t. Předpokládejme, že hmotnost závaží je m, proti pohybu závaží působí odpor prostředí popsaný konstantou r a tuhost pružiny je k. Navíc na závaží působí síla, která je závislá na čase a je popsána funkcí $F(t)$.

Matematicky lze takovýto systém popsat[1] následující diferenciální rovnicí s počátečními

[1] Přenechejme čtenáři k promyšlení, že zjednodušená rovnice $my''(t) = F(t)$ je vlastně pouze zápisem Newtonova zákona síly.

Obsah
31. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obr. 1.6: Závaží na pružině

podmínkami:

$$\begin{cases} my''(t) + ry'(t) + ky(t) = F(t), \\ y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = v_0, \end{cases} \tag{1.25}$$

kde y_0, v_0 jsou konstanty charakterizující polohu a rychlost závaží v čase t_0.

Pomocí rovnice s počátečními podmínkami (1.25) popíšeme pohyb závaží o hmotnosti $m = 1$ [kg] kmitající na pružině tuhosti $k = 50$ $\left[\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-2}\right]$, odpor prostředí je dán $r = 2$ $\left[\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-1}\right]$ a na závaží působí tíha $F(t) = -10$ $\left[\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}\right]$. Závaží je na počátku vychýleno z rovnovážné polohy do bodu $-0{,}1$ $[m]$, rychlost závaží je na počátku nulová.

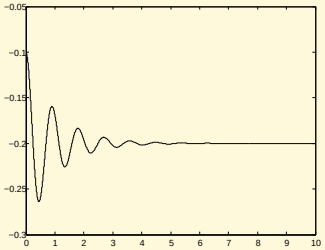
Řešení. Po dosazení zadaných hodnot dostaneme rovnici

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 50y(t) = -10, \\ y(0) = 0{,}1,\ y'(0) = 0. \end{cases} \tag{1.26}$$

Obsah
32. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Dá se ukázat, že řešením rovnice (1.26) je funkce

$$\bar{y}(t) = \frac{1}{70} \cdot \mathrm{e}^{-t} \cdot \sin(7 \cdot t) + 0{,}1 \cdot \mathrm{e}^{-t} \cdot \cos(7 \cdot t) - 0.2.$$



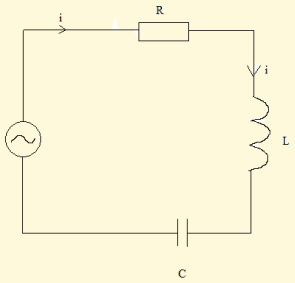
Obr. 1.7: Pohyb závaží na pružině

Tato funkce popisující výchylku daného závaží je zobrazena na obrázku (1.7) pro časy z rozmezí $\langle 0, 10\rangle$ [s]. ▲

Příklad 1.8. Uvažujme jednoduchý elektrický obvod, ve kterém je sériově zapojena cívka, rezistor a kondenzátor. V obvodu je také v sérii zapojen elektrický zdroj, který do sítě dodává elektromotorické napětí. Schéma obvodu je na obrázku (1.8).

Nyní uveďme model, který popíše hodnotu elektrického náboje q v obvodu v závislosti na čase t. Nechť indukčnost cívky je určena parametrem L, odpor rezistoru označíme R a kapacitu kondenzátoru popíšeme parametrem C. Elektrický zdroj dodává do obvodu

Obsah
33. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obr. 1.8: Schéma elektrického obvodu

elektromotorické napětí $E(t)$ (často $E(t) = A\sin(\omega t), A \in \mathbb{R},\ \omega \in \mathbb{R}$). Matematicky lze takovýto systém popsat následující diferenciální rovnicí s počátečními podmínkami[1]

$$\begin{cases} Lq''(t) + Rq'(t) + \frac{1}{C}q(t) = E(t), \\ q(t_0) = q_0,\ q'(t_0) = i_0. \end{cases} \tag{1.27}$$

Protože elektrický proud $i(t)$ v čase t je definován jako „okamžitá změna“ náboje q a tento vztah můžeme matematicky zapsat jako $i(t) = q'(t)$, můžeme předcházející diferenciální rovnici s počátečními podmínkami (1.27) upravit takto

$$\begin{cases} Lq''(t) + Rq'(t) + \frac{1}{C}q(t) = E(t), \\ q(t_0) = q_0,\ i(t_0) = i_0. \end{cases} \tag{1.28}$$

[1]Pozorný čtenář si jistě všimne formální podobnosti rovnic v (1.25) a (1.27). Z této „podobnosti“ mimo jiné plyne analogické chování závaží kmitajícího na pružině a elektrického RLC obvodu při vhodné volbě parametrů mechanického a elektrického systému.

Obsah
34. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Derivováním rovnice v (1.28) snadno získáme rovnici pro hodnotu elektrického proudu i procházejícího obvodem v závislosti na čase t ($i(t) = q'(t)$)

$$Li''(t) + Ri'(t) + \tfrac{1}{C}i(t) = E'(t). \tag{1.29}$$

Pomocí rovnice s počátečními podmínkami (1.28) popíšeme náboj v elektrickém obvodu, ve kterém je sériově zapojena cívka s indukčností $L = 1$ [Henry], rezistor s odporem $R = 2$ [Ohm], kondenzátor s kapacitou $C = 1$ [Farad] a elektrický zdroj, který do sítě dodává elektromotorické napětí $E(t) = 10$ [Volt]. Hodnota elektrického náboje i proudu v daném obvodu nechť je na počátku nulová, tj. $q(0) = 0$ [Coulomb] a $i(0) = 0$ [Amper]. Dále najděme náboj v obvodu se sériově zapojenou cívkou, rezistorem a kondenzátorem (se stejnými parametry jako v předchozím případě). Tentokrát ovšem předpokládejme, že v obvodu není zapojen elektrický zdroj. Hodnota proudu v obvodu budiž na počátku nulová a kondenzátor nechť je na počátku nabit nábojem o hodnotě 10 [Coulomb], tj. $q(0) = 10$ [Coulomb] a $i(0) = 0$ [Amper].

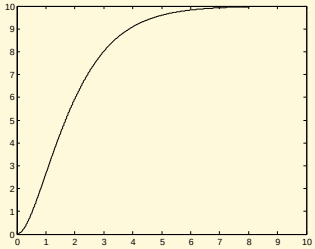
Řešení. Po dosazení zadaných hodnot dostaneme pro první obvod vztahy

$$\begin{cases} q''(t) + 2q'(t) + q(t) = 10, \\ q(0) = 0,\ i(0) = 0. \end{cases} \tag{1.30}$$

Dá se ukázat, že řešením rovnice (1.30) je funkce

$$\bar{q}(t) = -10 \cdot \mathrm{e}^{-t} - 10 \cdot t \cdot \mathrm{e}^{-t} + 10.$$

Tato funkce popisující průběh elektrického náboje v obvodu je zobrazena na obrázku (1.9) pro čas $t \in \langle 0, 10\rangle$ [s].



Obr. 1.9: Hodnota elektrického náboje v obvodu

Pro druhý obvod dostaneme rovnici

$$\begin{cases} q''(t) + 2q'(t) + q(t) = 0, \\ q(0) = 10, \ i(0) = 0. \end{cases} \tag{1.31}$$

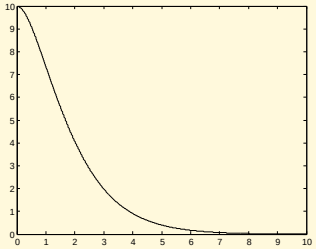
Dá se ukázat, že řešením rovnice (1.31) je funkce

$$\bar{q}(t) = 10 \cdot \mathrm{e}^{-t} + 10 \cdot t \cdot \mathrm{e}^{-t}.$$

Tato funkce popisující průběh elektrického náboje v obvodu je zobrazena na obrázku (1.10) pro čas $t \in \langle 0, 10 \rangle$ [s].

▲

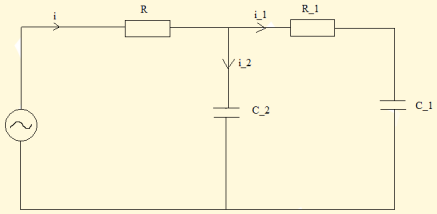
Obsah
36. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obr. 1.10: Hodnota elektrického náboje v obvodu

Příklad 1.9. Nyní se budeme zabývat složitějším obvodem než v předchozím příkladě. V tomto obvodu budou zapojeny dva rezistory, dva kondenzátory a také je do obvodu zapojen elektrický zdroj, který do sítě dodává elektromotorické napětí. Schéma obvodu je na obrázku (1.11).

Obsah
37. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obr. 1.11: Schéma komplikovanějšího elektrického obvodu

Matematicky lze takové systémy popsat následující soustavou diferenciálních rovnic s počátečními podmínkami:

$$\begin{aligned} R\,(q_1'(t)+q_2'(t))+\tfrac{1}{C_2}q_2(t) &= E(t),\\ -R_1q_1'(t)-\tfrac{1}{C_1}q_1(t)+\tfrac{1}{C_2}q_2(t) &= 0, \end{aligned} \qquad (1.32)$$
$$q_1(t_0)=q_{10},\ q_2(t_0)=q_{20}.$$

Pomocí soustavy rovnic s počátečními podmínkami (1.32) popíšeme konkrétní náboje v jednotlivých větvích elektrického obvodu, ve kterém jsou zapojeny rezistory s odpory $R = 1$ a $R_1 = 2$ [Ohm], kondenzátory s kapacitami $C_1 = 1$ a $C_1 = 5$ [Farad] a elektrický zdroj, který do sítě dodává elektromotorické napětí $E(t) = 10$ [Volt]. Hodnota elektrického náboje v daném obvodu budiž na počátku ve všech větvích obvodu nulová, tj. $q_1(0) = 0$ a $q_2(0) = 0$ [Coulomb]. Dále najděme náboje v obvodu, ve kterém jsou zapojeny dva rezistory a dva kondenzátory (se stejnými parametry jako v předchozím případě). V tomto obvodu

Obsah
38. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

ale není zapojen elektrický zdroj. Kondenzátor C_2 je na počátku nabit nábojem o hodnotě 10 [Coulomb], tj. $q_2(0) = 10$ [Coulomb] a $q_1(0) = 0$ [Coulomb].

Řešení. Po dosazení zadaných hodnot dostaneme pro první obvod soustavu rovnic

$$\begin{cases} q_1'(t) + q_2'(t) + \frac{1}{5}q_2(t) &= 10, \\ -2q_1'(t) - q_1(t) + \frac{1}{5}q_2(t) &= 0, \\ q_1(0) = 0,\ q_2(0) = 0. \end{cases} \tag{1.33}$$

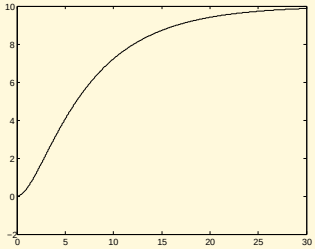
Dá se ukázat, že řešením rovnice (1.33) jsou funkce

$$\bar{q_1}(t) = \left(-5 - \frac{10 \cdot \sqrt{6}}{3}\right) \cdot \mathrm{e}^{\frac{(-4+\sqrt{6})\cdot t}{10}} + \left(-5 + \frac{10 \cdot \sqrt{6}}{3}\right) \cdot \mathrm{e}^{\frac{(-4-\sqrt{6})\cdot t}{10}} + 10$$

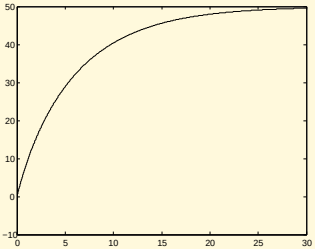
a

$$\bar{q_2}(t) = \left(-25 - \frac{25 \cdot \sqrt{24}}{6}\right) \cdot \mathrm{e}^{\frac{(-8+\sqrt{24})\cdot t}{20}} + \left(-25 + \frac{25 \cdot \sqrt{24}}{6}\right) \cdot \mathrm{e}^{\frac{(-8-\sqrt{24})\cdot t}{20}} + 50.$$

Obsah
39. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

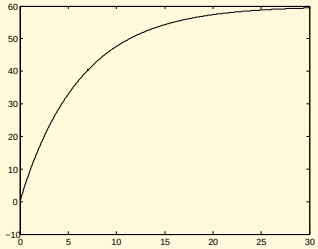


Obr. 1.12: Hodnota elektrického náboje q_1 v obvodu



Obr. 1.13: Hodnota elektrického náboje q_2 v obvodu

Funkce popisující průběhy elektrického náboje v jednotlivých větvích obvodu jsou zobrazeny na obrázcích (1.12), (1.13) a (1.14) pro čas $t \in \langle 0, 30 \rangle$ [s].



Obr. 1.14: Hodnota elektrického náboje q v obvodu

Pro druhý obvod dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{cases} q_1'(t) + q_2'(t) + \frac{1}{5}q_2(t) &= 0, \\ -2q_1'(t) - q_1(t) + \frac{1}{5}q_2(t) &= 0, \\ q_1(0) = 0,\ q_2(0) = 10. \end{cases} \tag{1.34}$$

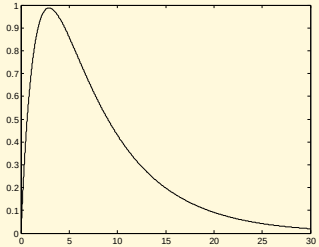
Dá se ukázat, že řešením rovnice (1.34) jsou funkce

$$\bar{q_1}(t) = \frac{5\cdot\sqrt{6}}{6}\cdot \mathrm{e}^{\frac{(-4+\sqrt{6})\cdot t}{10}} - \mathrm{e}^{\frac{(-4-\sqrt{6})\cdot t}{10}}$$

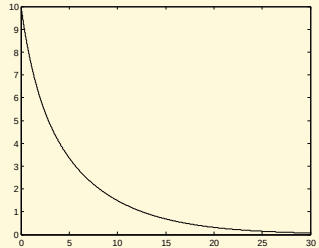
a

$$\bar{q_2}(t) = \left(5 + \frac{5\cdot\sqrt{6}}{6}\right)\cdot \mathrm{e}^{\frac{(-4+\sqrt{6})\cdot t}{10}} + \left(5 - \frac{5\cdot\sqrt{6}}{6}\right)\cdot \mathrm{e}^{\frac{(-4-\sqrt{6})\cdot t}{10}}.$$

Obsah
41. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



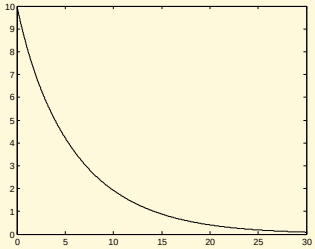
Obr. 1.15: Hodnota elektrického náboje q_1 v obvodu



Obr. 1.16: Hodnota elektrického náboje q_2 v obvodu

Funkce popisující průběhy elektrického náboje v jednotlivých větvích obvodu jsou zobrazeny na obrázcích (1.15), (1.16) a (1.17) pro čas $t \in \langle 0, 30 \rangle$ [s].

Obsah
42. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



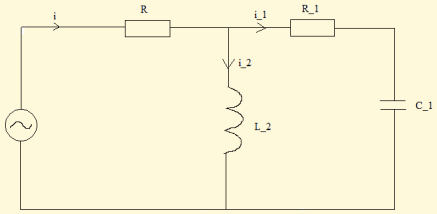
Obr. 1.17: Hodnota elektrického náboje q v obvodu

▲

Příklad 1.10. Na závěr ještě prozkoumejme obvod trochu jiného typu. V tomto obvodu jsou zapojeny dva rezistory, kondenzátor, cívka a také je do obvodu zapojen elektrický zdroj, který do sítě dodává elektromotorické napětí. Schéma obvodu je na obrázku (1.18).

Matematicky lze takovýto systém popsat následující soustavou diferenciálních rovnic

Obsah
43. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obr. 1.18: Schéma ještě komplikovanějšího elektrického obvodu

s počátečními podmínkami[1]:

$$\begin{aligned} L_2 q_2''(t) + R\,(q_1'(t) + q_2'(t)) &= E(t), \\ L_2 q_2''(t) - R_1 q_1'(t) - \tfrac{1}{C_1} q_1(t) &= 0, \end{aligned} \tag{1.35}$$

$$q_1(t_0) = q_{10},\ q_2(t_0) = q_{20},\ i_2(t_0) = q_2'(t_0) = i_{20}.$$

Pomocí vztahů (1.35) popíšeme náboje v jednotlivých větvích konkrétního elektrického obvodu, ve kterém jsou zapojeny rezistory s odpory $R = 1$ a $R_1 = 2$ [Ohm], kondenzátor s kapacitou $C_1 = 1$ [Farad], cívka s indukčností $L_2 = 10$ [Henry] a elektrický zdroj, který do sítě dodává elektromotorické napětí $E(t) = 10$ [Volt]. Hodnota elektrického náboje i proudu nechť je v daném obvodu na počátku ve všech větvích obvodu nulová, tj. $q_1(0) = 0$, $q_2(0) = 0$ [Coulomb] a $i_2(0) = q_2'(0) = 0$ [Amper]. Dále najděme náboje v obvodu bez zdroje

[1] Pro řešení obecné soustavy diferenciálních rovnic 2. řádu je třeba mezi počáteční podmínky zařadit i podmínku pro $i_1(t_0) = q_1'(t_0)$. V této soustavě se nevyskytuje $q_1''(t)$, a proto podmínka pro $i_1(t_0) = q_1'(t_0)$ není nutná.

Obsah
44. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

elektromotorického napětí, ve kterém jsou zapojeny dva rezistory, kondenzátor a cívka (se stejnými parametry jako v předchozím případě). Přitom předpokládejme, že kondenzátor C_1 je na počátku nabit nábojem o hodnotě 10 [Coulomb], tj. $q_1(0) = 10$ [Coulomb], $q_2(0) = 0$ [Coulomb] a $i_2(0) = q_2'(0) = 0$ [Amper].

Řešení. Po dosazení zadaných hodnot dostaneme pro první obvod soustavu rovnic

$$\begin{cases} 10q_2''(t) + q_1'(t) + q_2'(t) &= 10, \\ 10q_2''(t) - 2q_1'(t) - q_1(t) &= 0, \\ q_1(0) = 0,\ q_2(0) = 0,\ i_2(0) = q_2'(0) = 0. \end{cases} \tag{1.36}$$

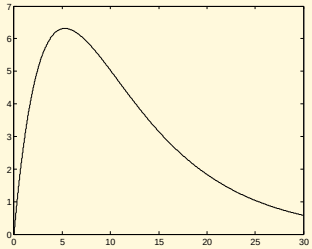
Dá se ukázat, že řešením rovnice (1.36) jsou funkce

$$\bar{q_1}(t) = \left(\frac{35}{2} - \frac{35 \cdot \sqrt{24}}{6}\right) \cdot \mathrm{e}^{\frac{(-12+\sqrt{24})\cdot t}{60}} + \left(\frac{45}{2} - \frac{45 \cdot \sqrt{24}}{6}\right) \cdot \mathrm{e}^{\frac{(-12-\sqrt{24})\cdot t}{60}}$$

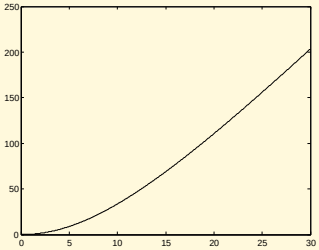
a

$$\bar{q_2}(t) = \frac{\left(300 + 100 \cdot \sqrt{24}\right)}{12 - \sqrt{24}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{(-12+\sqrt{24})\cdot t}{60}} + \frac{\left(300 - 100 \cdot \sqrt{24}\right)}{12 + \sqrt{24}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{(-12-\sqrt{24})\cdot t}{60}} + 10 \cdot t - 100.$$

Obsah
45. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

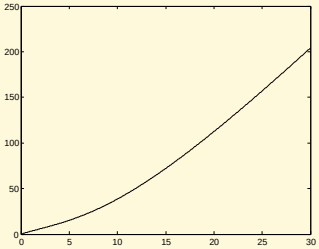


Obr. 1.19: Hodnota elektrického náboje q_1 v obvodu



Obr. 1.20: Hodnota elektrického náboje q_2 v obvodu

Funkce popisující průběhy elektrického náboje v jednotlivých větvích obvodu je zobrazena na obrázcích (1.19), (1.20) a (1.21) pro čas $t \in \langle 0, 30 \rangle$ [s].



Obr. 1.21: Hodnota elektrického náboje q v obvodu

Pro druhý obvod dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{cases} 10q_2''(t) + q_1'(t) + q_2'(t) &= 0, \\ 10q_2''(t) - 2q_1'(t) - q_1(t) &= 0, \\ q_1(0) = 10,\ q_2(0) = 0,\ i_2(0) = q_2'(0) = 0. \end{cases} \tag{1.37}$$

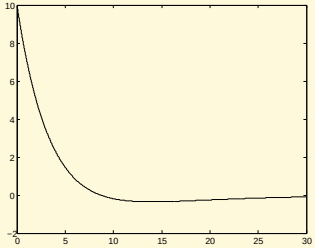
Dá se ukázat, že řešením rovnice (1.37) jsou funkce

$$\bar{q_1}(t) = \left(5 - \frac{5\cdot\sqrt{24}}{3}\right)\cdot \mathrm{e}^{\frac{(-12+\sqrt{24})\cdot t}{60}} + \left(5 + \frac{5\cdot\sqrt{24}}{3}\right)\cdot \mathrm{e}^{\frac{(-12-\sqrt{24})\cdot t}{60}}$$

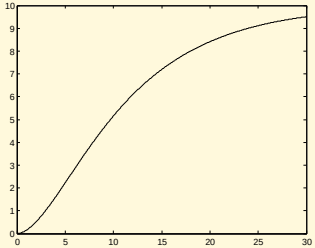
a

$$\bar{q_2}(t) = -\frac{25\cdot\sqrt{24}}{12-\sqrt{24}}\cdot \mathrm{e}^{\frac{(-12+\sqrt{24})\cdot t}{60}} + \frac{25\cdot\sqrt{24}}{12+\sqrt{24}}\cdot \mathrm{e}^{\frac{(-12-\sqrt{24})\cdot t}{60}} + 10.$$

Obsah
47. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



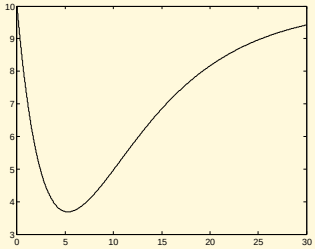
Obr. 1.22: Hodnota elektrického náboje q_1 v obvodu



Obr. 1.23: Hodnota elektrického náboje q_2 v obvodu

Funkce popisující průběhy elektrického náboje v jednotlivých větvích obvodu je zobrazena na obrázcích (1.22), (1.23) a (1.24) pro čas $t \in \langle 0, 30 \rangle$ [s].

Obsah
48. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obr. 1.24: Hodnota elektrického náboje q v obvodu

▲

Mnoho dalších aplikací obyčejných diferenciálních rovnic lze nalézt v [9].

Obsah
49 strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Kapitola 2

Pojem řešení ODR a další základní pojmy

Jak jste si mohli všimnout v úvodní části, obyčejnými diferenciálními rovnicemi (stručněji ODR) budeme nazývat rovnice, ve kterých se vyskytují[1] derivace neznámé funkce jedné reálné proměnné. Řekneme, že ODR je rovnicí prvního řádu, jestliže tato rovnice efektivně obsahuje pouze první derivaci neznámé funkce. Upřesněme tedy, že obecně lze ODR prvního řádu zapsat v tzv. implicitním tvaru

$$F\left(t, y\left(t\right), y'\left(t\right)\right) = 0, \tag{2.1}$$

kde $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je zadaná funkce. Někdy lze ODR zapsat ve tvaru explicitním:

$$y'\left(t\right) = f\left(t, y\left(t\right)\right), \tag{2.2}$$

[1] Například rovnici $0 \cdot y'(t) + 2y^2(t) - \sin\left(y(t)\right) = 0$ nebudeme považovat za diferenciální rovnici.

Obsah
50. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

pro pevně danou funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

V zadání ODR nezávisle proměnnou u neznámé funkce a jejich derivací většinou nevypisujeme, takže píšeme pouze

$$F\left(t, y, y'\right) = 0, \text{ respektive}$$

$$y' = f\left(t, y\right).$$

Nechť pro diferencovatelnou funkci $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanou na otevřeném intervalu $J \subset \mathbb{R}$ platí:

$$\forall t \in J : \; F\left(t, \varphi\left(t\right), \varphi'\left(t\right)\right) = 0.$$

Pak řekneme, že φ je řešením rovnice (2.1) (na intervalu J).

Podobně řekneme, že funkce φ je řešením (2.2) na J, platí-li na J:

$$\varphi'(t) = f\left(t, \varphi(t)\right).$$

Říkáme, že dvě ODR jsou ekvivalentní, mají-li stejnou množinu všech řešení. Všimněme si, že rovnici (2.2) můžeme vždy ekvivalentně zapsat v implicitním tvaru. Stačí volit

$$F\left(a, b, c\right) = c - f\left(a, b\right).$$

Obecně však nelze ekvivalentně přepsat rovnici v implicitním tvaru do explicitní formy (2.2).

Obsah
51. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Příklad 2.1. Jedním z řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$y' = y \cdot \cos t,$$

na otevřeném intervalu $J = \mathbb{R}$, je funkce φ definovaná předpisem $\varphi(t) = \mathrm{e}^{\sin t}$. Skutečně, podle pravidla o derivování složené funkce zjišťujeme, že platí:

$$\forall t \in \mathbb{R}: \ \varphi'(t) = \left(\mathrm{e}^{\sin t}\right)' = \mathrm{e}^{\sin t} \cdot \cos t = \varphi(t) \cdot \cos t.$$

Snadno lze ukázat, že pro každé pevně zvolené číslo $C \in \mathbb{R}$ je funkce daná předpisem

$$C \cdot \mathrm{e}^{\sin t}$$

řešením zadané rovnice:

$$\forall t \in \mathbb{R}: \ \left(C \cdot \mathrm{e}^{\sin t}\right)' = \left(C \cdot \mathrm{e}^{\sin t}\right) \cdot \cos t.$$

Poznamejme ještě, že uvedená rovnice může být ekvivalentně zapsána v implicitním tvaru

$$y' - y \cdot \cos t = 0.$$

▲

Nechť jsou dána čísla $t_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}$. K ODR (2.1) připojme požadavek, aby hledaná funkce v bodě t_0 nabývala hodnoty y_0, tzn.

$$y(t_0) = y_0. \tag{2.3}$$

Požadavku (2.3) se říká počáteční podmínka. Úlohu (2.1), (2.3) nazýváme Cauchyovou úlohou.

Řekneme, že funkce φ je řešením Cauchyovy úlohy (2.1), (2.3) (na otevřeném intervalu J), jestliže φ je řešením (2.1) (na J) a navíc platí $\varphi(t_0) = y_0$.

Příklad 2.2. Uvažujme Cauchyovu úlohu

$$y' = y \cdot \cos t, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{e}.$$

V předchozím příkladě jsme ukázali, že funkce φ daná předpisem $\varphi(t) = \mathrm{e}^{\sin t}$ je řešením zadané rovnice na $\mathbb{R}$. Protože φ navíc splňuje příslušnou počáteční podmínku:

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{e}^{\sin\frac{\pi}{2}} = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e},$$

můžeme konstatovat, že φ je na $\mathbb{R}$ řešením zadané Cauchyovy úlohy. ▲

Příklad 2.3. Hledejme řešení Cauchyovy úlohy

$$y' = y \cdot \cos t, \quad y(0) = 1.$$

Výše jsme ukázali, že funkce tvaru

$$C \cdot \mathrm{e}^{\sin t}, \quad C \in \mathbb{R}$$

reprezentují řešení zadané rovnice. Aplikací počáteční podmínky $y(0) = 1$ získáváme rovnici pro konstantu C:

$$1 = C \cdot \mathrm{e}^{\sin 0}.$$

Odtud $C = 1$, takže funkce φ daná předpisem $\varphi(t) = \mathrm{e}^{\sin t}$ je řešením Cauchyovy úlohy $y' = y \cdot \cos t, \quad y(0) = 1.$ ▲

Příklad 2.4. Všimněme si, že ODR nemusí mít řešení. Rovnice tvaru

$$\left(y'\right)^2 + 1 = 0$$

nemá řešení. Neexistuje totiž reálná funkce φ taková, že by pro nějaké $t \in \mathbb{R}$ platilo

$$\left(\varphi'(t)\right)^2 = -1.$$

▲

Uvažujme řešení φ_1 rovnice (2.1) na otevřeném intervalu J_1 a řešení φ téže rovnice na otevřeném intervalu J. Nechť

$$J_1 \subset J,\ J_1 \neq J$$

a obě funkce nabývají na J_1 stejných hodnot:

$$\forall t \in J_1 : \quad \varphi_1(t) = \varphi(t).$$

Pak řekneme, že řešení φ je prodloužením řešení φ_1 na interval J. Maximálními řešeními zadané obyčejné diferenciální rovnice, popřípadě zadané Cauchyovy úlohy, budeme nazývat taková řešení, která dále nelze prodloužit. Přesněji, řekneme, že řešení φ rovnice (2.1) na otevřeném intervalu J je maximální, jestliže pro každé další řešení ψ této rovnice na otevřeném intervalu K platí implikace:

$$[J \subset K \ \wedge\ (\forall t \in J : \varphi(t) = \psi(t))] \implies J = K.$$

Domluvme se, že grafům maximálních řešení zadané diferenciální rovnice budeme říkat integrální křivky této rovnice. Tedy, je-li φ maximálním řešením rovnice (2.1) na J, pak integrální křivkou rovnice (2.1) je množina

$$\left\{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : t \in J \ \wedge\ y = \varphi(t)\right\}.$$

Obsah
54. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Příklad 2.5. Snadno se lze přesvědčit, že funkce φ_1, φ_2 definované předpisy

$$\varphi_1(t) = 0,\ D_{\varphi_1} = (-\infty, 0), \quad \varphi_2(t) = t^3,\ D_{\varphi_2} = (0, \infty)$$

jsou na svých definičních oborech řešeními ODR tvaru

$$y' = 3 \cdot \sqrt[3]{y^2}.$$

Skutečně,

$$\forall t \in (-\infty, 0): \ \varphi_1'(t) = 0' = 3 \cdot \sqrt[3]{0^2} = 3 \cdot \sqrt[3]{\varphi_1^2(t)},$$

$$\forall t \in (0, \infty): \ \varphi_2'(t) = 3t^2 = 3 \cdot \sqrt[3]{(t^3)^2} = 3 \cdot \sqrt[3]{\varphi_2^2(t)}.$$

Protože

$$\lim_{t \to 0+} \varphi_1(t) = 0 = \lim_{t \to 0-} \varphi_2(t),$$

můžeme se pokusit obě řešení „slepit v čase 0". Definujme proto na $\mathbb{R}$ funkci φ předpisem

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & t \leqq 0, \\ t^3, & t > 0. \end{cases}$$

Funkce φ je zřejmě spojitá na $\mathbb{R}$. Nyní můžeme vypočítat hodnoty jednostranných derivací funkce φ v bodě 0. Zleva je to snadné:

$$\varphi_-'(0) = \lim_{t \to 0-} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t - 0} = \lim_{t \to 0-} \frac{\varphi_1(t) - \varphi_1(0)}{t - 0} = \lim_{t \to 0-} \frac{0}{t} = 0.$$

Zprava postupujeme podobně:

$$\varphi_+'(0) = \lim_{t \to 0+} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t - 0} = \lim_{t \to 0+} \frac{\varphi_2(t) - \varphi(0)}{t - 0} = \lim_{t \to 0+} \frac{t^3}{t} = 0.$$

Obsah
55. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Ukázali jsme, že platí $\varphi'_-(0) = \varphi'_+(0) = 0$, tedy $\varphi'(0)$=0. Zároveň

$$\varphi'(0) = 0 = 3 \cdot \sqrt[3]{(0^3)^2} = 3 \cdot \sqrt[3]{\varphi^2(0)}.$$

Z výše provedených výpočtů plyne, že rovnost

$$\varphi'(t) = 3 \cdot \sqrt[3]{\varphi^2(t)}$$

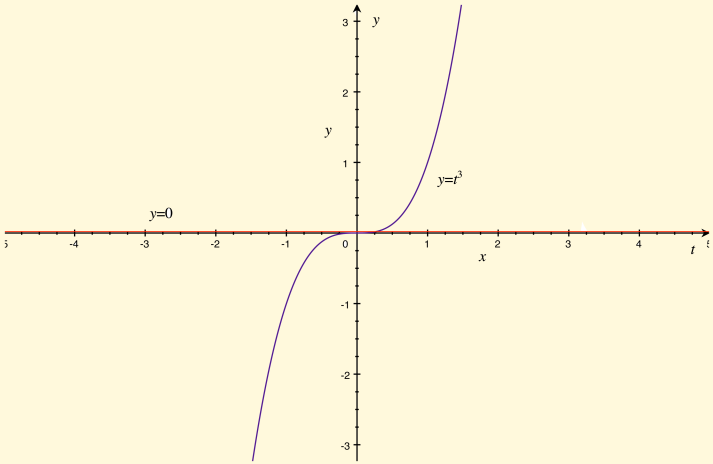
platí na $\mathbb{R}$, takže funkce φ zřejmě představuje řešení zadané rovnice na $\mathbb{R}$. Zároveň je funkce φ prodloužením řešení φ_1 i prodloužením řešení φ_2 na $\mathbb{R}$. Protože řešení ODR na definované na $\mathbb{R}$ evidentně nelze prodloužit, funkce φ představuje maximální řešení zadané rovnice.

V obrázku (2.1) jsou v různých barvách načrtnuty 3 různé integrální křivky, které odpovídají různým maximálním řešením Cauchyovy úlohy

$$y' = 3 \cdot \sqrt[3]{y^2}, \qquad y(0) = 0.$$

Dokázali byste určit čtvrtou integrální křivku?

Obsah
56. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obr. 2.1: Integrální křivky

Příklady k procvičení

1. Přepište ekvivalentně do implicitního tvaru rovnici $y' = t \cdot y^2 - \sin(t) \cdot y$.

2. Přepište ekvivalentně do explicitního tvaru rovnici $\left(1 + \cos^2(t)\right) \cdot y' - t \cdot y^2 = 0$.

3. Ukažte, že funkce daná předpisem
$$3 \cdot \mathrm{e}^{5 \cdot (t-4)}$$

Obsah
57. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

je maximálním řešením Cauchyovy úlohy

$$y' = 5 \cdot y, \quad y(4) = 3.$$

na $\mathbb{R}$.

4. Ukažte, že funkce φ daná předpisem

$$\varphi(t) = \operatorname{tg}(t), \quad D_\varphi = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

je maximálním řešením Cauchyovy úlohy

$$y' = \frac{1}{\cos^2 t}, \quad y(0) = 0.$$

5. Uhodněte maximální řešení Cauchyovy úlohy

$$y' = \frac{1}{\cos^2 t}, \quad y(\pi) = 0.$$

2.1. Video s ilustrací pojmu

Ilustraci pojmu řešení obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu lze vidět v tomto videu.

2.2. Interaktivní testy

Následující testy byly vytvořeny pomocí balíčku `acrotex`. Test zahájíte kliknutím na tlačítko „Zacátek testu“. U otázek, kde lze volit jen jednu odpověď (test nedovolí zaškrtnout více odpovědí), je správná odpověď bodována počtem bodů uvedených v závorce u zadání

a špatná odpověď je bodována 0 body. U otázek, kde lze volit více správných odpovědí, je součet bodů správných odpovědí uveden v závorce u zadání a za každou špatnou odpověď bude odečten jeden či více bodů.

Zacátek testu

0 pts **1.** (1b.) Obyčejná diferenciální rovnice

$$y' = 0$$

- [x] má právě jedno maximální řešení.
- [●] má nekonečně mnoho maximálních řešení.
- [ ] nemá žádné maximální řešení.

1pt **2.** (1b.) Obyčejná diferenciální rovnice

$$\mathrm{e}^{(y')} = 0$$

- [ ] má právě jedno maximální řešení.
- [ ] má nekonečně mnoho maximálních řešení.
- [x] nemá žádné maximální řešení.



2 pts **3.** (2b.) Mezi řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$y' = 0$$

na $\mathbb{R}$ patří funkce dané předpisem

- [x] $y(t) = 1$.
- [ ] $y(t) = t$.
- [x] $y(t) = 3$.

2 pts **4.** (2b.) Mezi řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$y' = -5$$

na $\mathbb{R}$ patří funkce dané předpisem

- [x] $y(t) = -5t + 1$.
- [x] $y(t) = -5t$.
- [ ] $y(t) = 1$.

2 pts **5.** (2b.) Mezi řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$y' = t$$

na $\mathbb{R}$ patří funkce dané předpisem

- [x] $y(t) = \frac{t^2}{2} + 1.$
- [x] $y(t) = \frac{t^2}{2} - 5.$
- [ ] $y(t) = t.$

1pt **6.** (2b.) Mezi řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$y' = y$$

na $\mathbb{R}$ patří funkce dané předpisem

- [ ] $y(t) = t.$
- [x] $y(t) = \mathrm{e}^t.$
- [●] $y(t) = 2\mathrm{e}^t.$

1pt **7.** (2b.) Mezi řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$y' = 2y$$

na $\mathbb{R}$ patří funkce dané předpisem

- [x] $y(t) = \mathrm{e}^{2t}$.
- [ ] $y(t) = t$.
- [x] $y(t) = -2\mathrm{e}^{2t}$.

1pt **8.** (2b.) Mezi řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$y' = y + 1$$

na $\mathbb{R}$ patří funkce dané předpisem

- [ ] $y(t) = t$.
- [x] $y(t) = \mathrm{e}^{t} - 1$.
- [x] $y(t) = 4\mathrm{e}^{t} - 1$.

Obsah

62. strana ze 336

Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

1pt **9.** (2b.) Mezi řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$y' = y + \mathrm{e}^t$$

na $\mathbb{R}$ patří funkce dané předpisem

- [x] $y(t) = \mathrm{e}^t + t\mathrm{e}^t$.
- [x] $y(t) = t\mathrm{e}^t$.
- [ ] $y(t) = \mathrm{e}^t$.

0 pts **10.** (2b.) Mezi řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$y' = \frac{y}{t}$$

na $(0, +\infty)$ patří funkce dané předpisem

- [x] $y(t) = -3t$.
- [ ] $y(t) = t^2$.
- [x] $y(t) = 5t$.

Obsah

63. strana ze 336

Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

0 pts **11.** (2b.) Mezi řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$y' = \frac{y}{t} + 1$$

na $(0, +\infty)$ patří funkce dané předpisem

- ☐ $y(t) = t$.
- ● $y(t) = t + t \cdot \ln t$.
- ● $y(t) = t \cdot \ln t$.

0 pts **12.** (2b.) Mezi řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$y' = \frac{1}{y}$$

na $(0, +\infty)$ patří funkce dané předpisem

- ● $y(t) = \sqrt{2t}$.
- ☐ $y(t) = \mathrm{e}^t$.
- ● $y(t) = -\sqrt{2t}$.



2 pts **13.** (2b.) Mezi řešení Cauchyovy úlohy

$$y' = 0,\ y(0) = 1$$

na $\mathbb{R}$ patří funkce dané předpisem

- [x] $y(t) = 1.$
- [ ] $y(t) = t.$
- [ ] $y(t) = 3.$

2 pts **14.** (2b.) Mezi řešení Cauchyovy úlohy

$$y' = t,\ y(1) = \frac{3}{2}$$

na $\mathbb{R}$ patří funkce dané předpisem

- [x] $y(t) = \frac{t^2}{2} + 1.$
- [ ] $y(t) = \frac{t^2}{2} - 5.$
- [ ] $y(t) = t.$

2 pts **15.** (2b.) Mezi řešení Cauchyovy úlohy

$$y' = y,\ y(0) = 2$$

na $\mathbb{R}$ patří funkce dané předpisem

- ☐ $y(t) = t$.
- ☐ $y(t) = \mathrm{e}^t$.
- ☒ $y(t) = 2\mathrm{e}^t$.

0 pts **16.** (2b.) Mezi řešení Cauchyovy úlohy

$$y' = y + 1,\ y(0) = 3$$

na $\mathbb{R}$ patří funkce dané předpisem

- ☐ $y(t) = t$.
- ☐ $y(t) = \mathrm{e}^t - 1$.
- ● $y(t) = 4\mathrm{e}^t - 1$.

Obsah
66. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

0 pts **17.** (2b.) Mezi řešení Cauchyovy úlohy

$$y' = y + \mathrm{e}^t,\ y(1) = 2\mathrm{e}$$

na $\mathbb{R}$ patří funkce dané předpisem

- [x] $y(t) = \mathrm{e}^t + t\mathrm{e}^t$.
- [ ] $y(t) = t\mathrm{e}^t$.
- [ ] $y(t) = \mathrm{e}^t$.

Konec testu

Správně zodpovězené otázky:	7 z celkovych 17
Získané body:	17 z celkovych 32
Procento úspěšnosti:	53.1%

Výsledky

Pro ukončení testu je třeba kliknout na tlačítko „Konec testu“. Opravení testu se provede kliknutím na tlačítko „Výsledky“, správné odpovědi budou označeny zeleně a červeně budou označeny odpovědi chybné.

Zacátek testu

0 pts **1.** (1b.) Obyčejná diferenciální rovnice

$$y' = t$$

má maximální řešení na otevřeném intervalu

- ☐ $(0, +\infty)$.
- ● $\mathbb{R}$.
- ☐ $(0, -\infty)$.

0 pts **2.** (1b.) Obyčejná diferenciální rovnice

$$y' = y$$

má maximální řešení na otevřeném intervalu

- ☐ $(0, +\infty)$.
- ☐ $(0, -\infty)$.
- ● $\mathbb{R}$.



0 pts **3.** (2b.) Funkce daná předpisem $y(t) = 2t$ je řešením obyčejné diferenciální rovnice

$$y' = 2$$

na otevřeném intervalu

- [x] $\mathbb{R}$.
- [ ] $\{0\}$.
- [x] $(0, +\infty)$.

0 pts **4.** (2b.) Funkce daná předpisem $y(t) = \frac{t^3}{3}$ je řešením obyčejné diferenciální rovnice

$$y' = t^2$$

na otevřeném intervalu

- [ ] $\{1\}$.
- [x] $\mathbb{R}$.
- [x] $(0, -\infty)$.

0 pts **5.** (2b.) Funkce daná předpisem $y(t) = \mathrm{e}^{5t}$ je řešením obyčejné diferenciální rovnice

$$y' = 5y$$

na otevřeném intervalu

- [x] $\mathbb{R}$.
- [x] $(0, +\infty)$.
- [ ] $\{\mathrm{e}\}$.

0 pts **6.** (2b.) Funkce daná předpisem $y(t) = 3t$ je řešením obyčejné diferenciální rovnice

$$y' = \frac{y}{t}$$

na otevřeném intervalu

- [ ] $\mathbb{R}$.
- [x] $(-\infty, 0)$.
- [x] $(0, +\infty)$.

Obsah

70. strana ze 336

Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

0 pts **7.** (2b.) Funkce daná předpisem $y(t) = \mathrm{e}^t - 1$ je řešením obyčejné diferenciální rovnice

$$y' = y + \frac{t}{t}$$

na otevřeném intervalu

- [x] $(0, 100)$.
- [ ] $(-100, 100)$.
- [x] $(0, +\infty)$.

0 pts **8.** (2b.) Funkce daná předpisem $y(t) = \mathrm{e}^t - 1$ je řešením obyčejné diferenciální rovnice

$$y' = y + \frac{5}{5}$$

na otevřeném intervalu

- [x] $\mathbb{R}$.
- [ ] $\{0\}$.
- [x] $(0, +\infty)$.

Obsah
71. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

0 pts **9.** (2b.) Funkce daná předpisem $y(t) = t + t \cdot \ln t$ je řešením obyčejné diferenciální rovnice

$$y' = \frac{y}{t} + 1$$

na otevřeném intervalu

- [x] $(0, 100)$.
- [x] $(0, +\infty)$.
- [ ] $(-\infty, 0)$.

0 pts **10.** (2b.) Funkce daná předpisem $y(t) = \sqrt{2t}$ je řešením obyčejné diferenciální rovnice

$$y' = \frac{1}{y}$$

na otevřeném intervalu

- [ ] $\mathbb{R}$.
- [x] $(0, 100)$.
- [x] $(1, 2)$.

Obsah
72. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

0 pts **11.** (2b.) Funkce daná předpisem $y(t) = t \cdot \ln(-t)$ je řešením obyčejné diferenciální rovnice

$$y' = \frac{y}{t} + 1$$

na otevřeném intervalu

- ☐ $(0, 100)$.
- ☐ $(0, +\infty)$.
- ● $(-\infty, 0)$.

0 pts **12.** (2b.) Funkce daná předpisem $y(t) = t + 1$ je řešením obyčejné diferenciální rovnice

$$y' = y + \frac{t}{t+1}$$

na otevřeném intervalu

- ● $(0, 100)$.
- ☐ $(-\infty, 0)$.
- ● $(0, +\infty)$.

Obsah

73. strana ze 336

Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

2 pts **13.** (2b.) Funkce daná předpisem $y(t) = 2t$ je řešením Cauchyovy úlohy

$$y' = 2,\ y(1) = 2$$

na otevřeném intervalu

- [x] $\mathbb{R}$.
- [ ] $(-\infty, 0)$.
- [x] $(0, +\infty)$.

2 pts **14.** (2b.) Funkce daná předpisem $y(t) = \mathrm{e}^{5t}$ je řešením Cauchyovy úlohy

$$y' = 5y,\ y(0) = 1$$

na otevřeném intervalu

- [ ] $(0, +\infty)$.
- [x] $\mathbb{R}$.
- [x] $(-\mathrm{e}, \mathrm{e})$.

Obsah

74. strana ze 336

Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

0 pts **15.** (2b.) Funkce daná předpisem $y(t) = 3t$ je řešením Cauchyovy úlohy

$$y' = \frac{y}{t},\ y(1) = 3$$

na otevřeném intervalu

- ☐ $(-\infty, 0)$.
- ☐ $\mathbb{R}$.
- ● $(0, +\infty)$.

0 pts **16.** (2b.) Funkce daná předpisem $y(t) = t + t \cdot \ln t$ je řešením Cauchyovy úlohy

$$y' = \frac{y}{t} + 1,\ y(1) = 1$$

na otevřeném intervalu

- ● $(0, 10)$.
- ● $(0, +\infty)$.
- ☐ $(-\infty, -1)$.

Obsah

75. strana ze 336

Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

0 pts **17.** (2b.) Funkce daná předpisem $y(t) = \sqrt{2t}$ je řešením Cauchyovy úlohy

$$y' = \frac{1}{y},\ y(2) = 2$$

na otevřeném intervalu

- ☐ $\mathbb{R}$.
- ☐ $(0, 1)$.
- ● $(1, 4)$.

Konec testu

Správně zodpovězené otázky:	2 z celkovych 17
Získané body:	4 z celkovych 32
Procento úspěšnosti:	12.5%

Výsledky

Pro ukončení testu je třeba kliknout na tlačítko „Konec testu“. Opravení testu se provede kliknutím na tlačítko „Výsledky“, správné odpovědi budou označeny zeleně a červeně budou označeny odpovědi chybné.

Kapitola 3

Rovnice se separovanými proměnnými

Obyčejnou diferenciální rovnici, kterou lze zapsat ve tvaru

$$g(y) \cdot y' = h(t), \tag{3.1}$$

kde g, h jsou zadané reálné funkce, budeme nazývat rovnicí se separovanými proměnnými („závislá proměnná y a nezávislá proměnná t se vyskytují na různých stranách rovnice“). Pro vysvětlení postupu řešení uvedené rovnice budeme potřebovat větu o derivaci složené funkce, respektive větu o první substituční metodě pro neurčité integrály (a zřejmý vztah $\left(\int f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = f(t)$). Zopakujte si znění příslušných tvrzení, které byly probrány v úvodním kurzu matematické analýzy. K rovnici (3.1) ještě připojme počáteční podmínku

$$y(t_0) = y_0. \tag{3.2}$$

Dvojice (3.1), (3.2) tedy specifikuje Cauchyovu úlohu, kterou nyní blíže prozkoumáme.

Předpoklad: V celém odstavci budeme dále předpokládat:

- funkce h je spojitá funkce definovaná na nějakém otevřeném intervalu I,
- funkce g je spojitá funkce definovaná na nějakém otevřeném intervalu J.

I. Předpokládejme nejprve, že uvedená Cauchyova úloha má řešení φ na otevřeném intervalu $I_1 = D_\varphi \subset I$. Pak platí

$$\forall t \in I_1 : \qquad g(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = h(t).$$

Integrací výše uvedené rovnosti zjišťujeme, že musí existovat číslo $C \in \mathbb{R}$ takové, že na intervalu I_1 platí

$$\int g(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, \mathrm{d}t = \int h(t)\, \mathrm{d}t + C. \tag{3.3}$$

Nechť G je libovolná, pevně zvolená primitivní funkce k funkci g na J a H je libovolná, pevně zvolená primitivní funkce k funkci h na I, to znamená

$$G(y) = \int g(y)\, \mathrm{d}y, \quad H(t) = \int h(t)\, \mathrm{d}t.$$

Použijeme-li nyní větu o substituci pro integrál na levé straně rovnosti (3.3) (volíme $y = \varphi(t)$, takže $\mathrm{d}y = \varphi'(t)\, \mathrm{d}t$), můžeme psát

$$\forall t \in I_1 : \quad G(\varphi(t)) = H(t) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Řešení φ (o rovnici $y = \varphi(t)$) tedy na I_1 vyhovuje implicitnímu vztahu

$$G(y) = H(t) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Obsah
78. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

II. Nyní postupujme obráceně, nechť

$$G(y) = \int g(y)\,\mathrm{d}y \text{ na } J, \quad H(t) = \int h(t)\,\mathrm{d}t \text{ na } I, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Předpokládejme, že diferencovatelná funkce φ (o rovnici $y = \varphi(t)$) na otevřeném intervalu $I_1 = D_\varphi$ vyhovuje rovnici

$$G(y) = H(t) + C,$$

to znamená, že platí

$$\forall t \in I_1 : \quad G(\varphi(t)) = H(t) + C.$$

Potom nutně platí

$$\forall t \in I_1 : \quad (G(\varphi(t)))' = (H(t) + C)' = H'(t) = h(t).$$

Podle pravidla o derivaci složené funkce tedy musí platit

$$\forall t \in I_1 : \quad h(t) = (G(\varphi(t)))' = G'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = g(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t),$$

takže φ je řešením rovnice (3.1) na I_1.

Poznámka 3.1. Provedené úvahy můžeme shrnout do pravidla, že řešení $y = \varphi(t)$ rovnice

$$g(y) \cdot y' = h(t)$$

hledáme mezi diferencovatelnými funkcemi, které vyhovují implicitním vztahům

$$\boxed{\int g(y)\,\mathrm{d}y = \int h(t)\,\mathrm{d}t + C,\ C \in \mathbb{R}.}$$

Obsah
79. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Příklad 3.2. Hledejme řešení φ Cauchyovy úlohy

$$\frac{1}{y^2+1}\cdot y' = 2t,\ y(0) = 1.$$

Řešení. Protože na $\mathbb{R}$ platí

$$\int \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \operatorname{arctg} y, \quad \int 2t\,\mathrm{d}t = t^2,$$

řešení úlohy hledáme mezi funkcemi splňujícími rovnici

$$\operatorname{arctg} y = t^2 + C,$$

kde $C \in \mathbb{R}$ je vhodná konstanta. Tu určíme dosazením počáteční podmínky:

$$\operatorname{arctg} 1 = 0^2 + C,$$

tedy

$$C = \frac{\pi}{4},$$

takže řešení φ (o rovnici $y = \varphi(t)$) naší úlohy budeme hledat mezi funkcemi danými implicitně vztahem

$$\operatorname{arctg} y = t^2 + \frac{\pi}{4}$$

a podmínkou $\varphi(0) = 1$.

Máme štěstí, z předchozí rovnice můžeme snadno vyjádřit závisle proměnnou y:

$$y = \operatorname{tg}\left(t^2 + \frac{\pi}{4}\right).$$

Vlastní předpis pro řešení zadané Cauchyovy úlohy již známe, zbývá ještě určit definiční obor I_1 tohoto řešení. Z počáteční podmínky $y(0) = 1$ plyne, že musí platit $0 \in I_1$. Odtud získáme požadavek $-\frac{\pi}{2} \leqq t^2 + \frac{\pi}{4} \leqq \frac{\pi}{2}$, tedy $-\frac{3\pi}{4} \leqq t^2 \leqq \frac{\pi}{4}$, takže konečně

$$t \in \left(-\sqrt{\frac{\pi}{4}}, \sqrt{\frac{\pi}{4}}\right).$$

Protože funkce

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \operatorname{tg}\left(t^2 + \frac{\pi}{4}\right), \quad D_\varphi = \left(-\sqrt{\frac{\pi}{4}}, \sqrt{\frac{\pi}{4}}\right)$$

je diferencovatelná, představuje řešení zadané Cauchyovy úlohy.

▲

Poznámka 3.3. V literatuře se často setkáváme s následujícím popisem formálního postupu hledání řešení rovnice se separovanými proměnnými. Označíme-li derivaci jako „podíl diferenciálů“, můžeme psát

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},$$

a rovnice (3.1) tak přechází do tvaru

$$g(y)\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = h(t).$$

Obsah
81. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Nyní obě strany rovnice „přenásobíme“ výrazem $\mathrm{d}t$:

$$g\left(y\right)\mathrm{d}y = h\left(t\right)\mathrm{d}t.$$

Po integraci obou stran pak získáváme rovnost

$$\boxed{\int g\left(y\right)\mathrm{d}y = \int h\left(t\right)\,\mathrm{d}t + C,\, C \in \mathbb{R},}$$

ze které se snažíme nalézt předpis pro hledané řešení y. Doporučujeme čtenáři, aby si důkladně rozmyslel, že právě popsaný algoritmus je jen volným přepisem předchozích úvah (místo substituce $y = \varphi\left(t\right)$ vlastně používáme substituci $y = y\left(t\right)$).

Například rovnici

$$\mathrm{e}^{y} \cdot y' = 2t,$$

lze stručně řešit takto:

$$\mathrm{e}^{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2t,$$

$$\mathrm{e}^{y}\mathrm{d}y = 2t\mathrm{d}t,$$

$$\int \mathrm{e}^{y}\mathrm{d}y = \int 2t\,\mathrm{d}t + C,$$

$$\mathrm{e}^{y} = t^2 + C,$$

$$\underline{\underline{y = \ln\left(t^2 + C\right),\, C \in \mathbb{R}.}}$$

Všimněme si, že správněji bychom měli psát

$$y\left(t\right) = \ln\left(t^2 + C\right),\, C \in \mathbb{R}.$$

Obsah

82. strana ze 336

Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Poznamenejme ještě, že pro pevně zvolené číslo $C \in (0, \infty)$ je maximálním řešením zadané rovnice funkce definovaná na $\mathbb{R}$. Je-li však $C \in (-\infty, 0\rangle$, potom můžeme uvažovat dvě různá maximální řešení. První z nich je definováno na intervalu $\left(-\infty, \sqrt{|C|}\right)$, zatímco druhým maximálním řešením je funkce definovaná na intervalu $\left(\sqrt{|C|}, \infty\right)$.

Příklad 3.4. Hledejme řešení φ Cauchyovy úlohy

$$\frac{y'}{y} = \cos t,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

Řešení. Nejprve si všimněme, že hledaná funkce nemůže nabývat nulové hodnoty (vyskytuje se ve jmenovateli na levé straně rovnice). Z počáteční podmínky (a ze spojitosti hledaného řešení) pak usuzujeme, že hledané řešení může nabývat pouze záporných hodnot. Po přepisu rovnice má platit

$$\frac{1}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{y} = \cos t,$$

takže

$$\frac{1}{y}\mathrm{d}y = \cos t \mathrm{d}t,$$

a po integraci získáváme pro naše (záporné) řešení vztah

$$\ln(-y) = \sin t + C,$$

kde $C \in \mathbb{R}$ je vhodná konstanta. Aplikace počáteční podmínky vede k rovnici

$$\ln 1 = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + C,$$

Obsah
83. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

takže $C = -1$, odkud plyne, že

$$\varphi(t) = -\mathrm{e}^{\sin t - 1}.$$

▲

Příklad 3.5. Hledejme řešení Cauchyovy úlohy

$$y' = \frac{t}{2y},\ y\,(0) = 1.$$

Řešení. Nejprve si všimněme, že řešení úlohy nemůže nabývat nulové hodnoty (vyskytuje se ve jmenovateli na pravé straně rovnice). Z počáteční podmínky (a ze spojitosti hledaného řešení) pak plyne, že hledané řešení může nabývat pouze kladných hodnot. Po úpravě musí pro naše řešení zřejmě platit vztah

$$2y \cdot y' = t,$$

takže postupně platí:

$$2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = t,$$

$$2y\mathrm{d}y = t\mathrm{d}t,$$

$$\int 2y\mathrm{d}y = \int t\,\mathrm{d}t,$$

$$y^2 = \frac{t^2}{2} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Z počáteční podmínky bezprostředně plyne

$$C = 1,$$

takže s příhlédnutím k požadavku $y > 0$ získáváme po drobné úpravě:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\sqrt{2t^2 + 4},$$

což je předpis pro řešení zadané Cauchyovy úlohy. ▲

Příklad 3.6. Hledejme řešení Cauchyovy úlohy

$$\left(7y^6 + 5y^4 + 3y^2 + 1\right) \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2t,\ y\,(0) = 1.$$

Řešení. Řešení zřejmě musí vyhovovat vztahu

$$\int \left(7y^6 + 5y^4 + 3y^2 + 1\right) \mathrm{d}y = \int 2t\,\mathrm{d}t,$$

takže

$$y^7 + y^5 + y^3 + y = t^2 + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Z počáteční podmínky bezprostředně plyne $C = 4$, tedy

$$y^7 + y^5 + y^3 + y = t^2 + 4.$$

Vidíme, že hledat explicitní vyjádření pro řešení zadané Cauchyovy úlohy by bylo neefektivní, proto se spokojíme s konstatováním, že řešením zadané úlohy je funkce zadaná implicitně rovnicí

$$y^7 + y^5 + y^3 + y = t^2 + 4,$$

a podmínkou

$$y\,(0) = 1.$$

Kompetentní čtenář si snadno ověří, že (podle věty o implicitně zadané funkci) uvedené vztahy zaručují existenci řešení naší úlohy. ▲

Nyní naše poznatky o rovnicích se separovanými proměnnými upřesníme.

Věta 3.7. *Nechť*

- *h je spojitá funkce definovaná na nějakém otevřeném intervalu I takovém, že $t_0 \in I$,*
- *g je spojitá funkce definovaná na nějakém otevřeném intervalu J, přičemž $y_0 \in J$,*
- *pro každé $y \in J$ platí $g(y) \neq 0$.*

Potom Cauchyova úloha (3.1), (3.2) má právě jedno maximální řešení.

Pro zájemce

Důkaz. I. Nejprve dokážeme jednoznačnost:

Předpokládejme nejprve, že uvedená Cauchyova úloha má maximální řešení φ na otevřeném intervalu $I_1 = D_\varphi \subset \mathbb{R}$. Pak platí $\varphi(t_0) = y_0$, $H_\varphi \subset J$ a

$$\forall t \in I_1 : \qquad g(\varphi(t))\,\varphi'(t) = h(t)\,.$$

Integrací výše uvedené rovnosti získáváme na I_1 rovnost

$$\int_{t_0}^{t} g(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s)\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} h(s)\,\mathrm{d}s.$$

Použitím substituce $y = \varphi(s)$ v integrálu na levé straně rovnosti můžeme psát

$$\int_{y_0}^{\varphi(t)} g(y)\,\mathrm{d}y = \int_{t_0}^{t} h(s)\,\mathrm{d}s. \tag{3.4}$$

Obsah
86. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Rozveďme podrobněji získaný výsledek. Nechť G je na J taková primitivní funkce k funkci g, že platí $G(y_0) = 0$, tedy

$$G(y) = \int_{y_0}^{y} g(u)\,\mathrm{d}u.$$

Ze spojitosti a poslední podmínky v předpokladech věty plyne, že g na J je buď kladná nebo je na tomto intervalu záporná. To ovšem znamená, že G je na J ryze monotónní, tedy prostou funkcí. Existuje tedy inverzní funkce G^{-1} k funkci G.

Nechť H je na I taková primitivní funkce k funkci h, že platí $\mathrm{H}(t_0) = 0$, to znamená

$$H(t) = \int_{t_0}^{t} h(s)\,\mathrm{d}s.$$

Pak rovnost (3.4) na I_1 můžeme zapsat ve tvaru:

$$G(\varphi(t)) = H(t).$$

Použijeme-li nyní na obě strany rovnosti inverzi G^{-1}, získáváme na I_1 vztah

$$G^{-1}(G(\varphi(t))) = G^{-1}(H(t)),$$

tedy

$$\forall t \in I_1: \quad \varphi(t) = G^{-1}(H(t)).$$

Získali jsme předpis pro hledané řešení φ a jsme tak připraveni ukázat, že maximální řešení uvažované Cauchyovy úlohy je dáno jednoznačně. Skutečně, předpokládejme kvůli sporu, že zadaná Cauchyova úloha má ještě jiné maximální řešení ψ na otevřeném intervalu $I_2 \subset I$. Pro toto řešení zřejmě musí platit

$$\forall t \in I_2: \quad \psi(t) = G^{-1}(H(t)).$$

Protože $t_0 \in I_1 \cap I_2$, sjednocení $I_1 \cup I_2$ musí být otevřeným intervalem, který je vlastní nadmnožinou intervalu I_1 nebo vlastní nadmnožinou intervalu I_2. To je ovšem ve sporu s naším předpokladem, že

Obsah
87. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

obě funkce φ, ψ představují maximální řešení. Funkce γ definovaná předpisem

$$\gamma(t) = G^{-1}(H(t)), \ t \in I_1 \cup I_2,$$

totiž představuje prodloužení řešení φ nebo prodloužení řešení ψ.

II. Nyní se zabývejme důkazem existence:

Nechť funkce G, H jsou definovány vztahy

$$G(y) = \int_{y_0}^{y} g(u)\,\mathrm{d}u, \ y \in J,$$

$$H(t) = \int_{t_0}^{t} h(s)\,\mathrm{d}s, \ t \in I.$$

Protože $G(y_0) = 0 = H(t_0)$, obory hodnot obou funkcí mají neprázdný průnik. Protože G je ryze monotónní a diferencovatelná funkce definovaná na otevřeném intervalu J, jejím oborem hodnot musí být nějaký otevřený interval (c, d). Ze spojitosti funkce H plyne existence otevřeného intervalu $I_1 \subset I$ takového, že pro všechna $t \in I_1$ platí $H(t) \in (c, d)$. Na I_1 můžeme tedy definovat funkci φ předpisem

$$\varphi(t) = G^{-1}(H(t)), \quad t \in I_1.$$

Přímou aplikací pravidel pro derivaci inverzní funkce a derivaci složené funkce ověříme, že φ je řešením zadané Cauchyovy úlohy na I_1:

$$\forall t \in I_1: \ g(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = g(\varphi(t)) \cdot \left(G^{-1}(H(t))\right)' =$$

$$= g(\varphi(t)) \cdot \frac{1}{G'(G^{-1}(H(t)))} \cdot H'(t) = g(\varphi(t)) \cdot \frac{1}{g(G^{-1}(H(t)))} \cdot h(t) =$$

$$= g(\varphi(t)) \cdot \frac{1}{g(\varphi(t))} \cdot h(t) = h(t).$$

Obsah
88. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Vezměme nyní sjednocení

$$\bigcup_{\tau\in\Theta} I_\tau$$

všech otevřených intervalů I_τ, které obsahují interval I_1 a na kterých jsou definována řešení φ_τ uvažované Cauchyovy úlohy. Uvažované sjednocení je zřejmě otevřeným intervalem. Jednotlivá řešení jsou jednoznačně určena předpisem

$$\varphi_\tau(t) = G^{-1}(H(t)), \quad t \in I_\tau,$$

lze tedy korektně definovat funkci

$$\varphi(t) = G^{-1}(H(t)), \quad t \in \bigcup_{\tau\in\Theta} I_\tau,$$

která je maximálním řešením úlohy.

□

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

Příklad 3.8. Určeme všechna maximální řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}. \tag{3.5}$$

Řešení. I. Jedním z maximálních řešení (3.5) je nulová funkce na $\mathbb{R}$.

II. Nejprve místo (3.5) zkoumejme rovnice

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2},\ y > 0, \tag{3.6}$$

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2},\ y < 0. \tag{3.7}$$

Rovnice lze psát ekvivalentně ve tvarech

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}} \cdot y' = 1,\ y > 0,$$

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}} \cdot y' = 1,\ y < 0.$$

Pro (3.6) i (3.7) jsou proto splněny předpoklady Věty 3.7, máme tedy zaručenu existenci i jednoznačnost maximálních řešení Cauchyových úloh (3.6), $y(t_0) = y_0$, $y_0 \in (0, +\infty)$ a (3.7), $y(t_0) = y_0$, $y_0 \in (-\infty, 0)$. Určeme všechna maximální řešení (3.6) a všechna maximální řešení (3.7). Postup je stejný, takže je určeme najednou.

Buď $y > 0$ nebo $y < 0$:

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2},$$

$$\frac{1}{3}\frac{y'}{\sqrt[3]{y^2}} = 1,$$

$$\sqrt[3]{y} = t + C,\ C \in \mathbb{R},$$
$$y = (t + C)^3,\ C \in \mathbb{R}.$$

Tedy funkce y je maximálním řešením (3.6) právě tehdy, když

$$\exists C \in \mathbb{R}:\ y(t) = (t + C)^3,\ t \in (-C, +\infty).$$

Dále, y je maximálním řešením (3.7) právě tehdy, když

$$\exists C \in \mathbb{R}:\ y(t) = (t + C)^3,\ t \in (-\infty, -C).$$

III. Nyní jsme připraveni pomocí techniky „slepování“ určit všechna maximální řešení (3.5). Nechť $C \in \mathbb{R}$, $\tilde{\varphi}_1(t) = (t + C)^3$, $t \in (-C, +\infty)$. Pak

$$\lim_{t \to -C+} \tilde{\varphi}_1(t) = 0.$$

Definujme proto $\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} \tilde{\varphi}_1(t), & t \in (-C, +\infty) \\ 0, & t = -C. \end{cases}$$

Vypočtěme $\varphi'_{1+}(-C)$:

$$\varphi'_{1+}(-C) = \lim_{t \to -C+} \frac{(t + C)^3 - 0}{t - (-C)} = \lim_{t \to -C+} (t + C)^2 = 0.$$

Budiž nyní $C \in \mathbb{R}$, $\tilde{\varphi}_2(t) = (t + C)^3$, $t \in (-\infty, -C)$. Pak

$$\lim_{t \to -C-} \tilde{\varphi}_2(t) = 0.$$

Obsah
91. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Definujme proto $\varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\varphi_2(t) = \begin{cases} \tilde{\varphi}_2(t), & t \in (-\infty, -C) \\ 0, & t = -C. \end{cases}$$

Podobně, jako u funkce φ_1 snadno zjistíme:

$$\varphi'_{2-}(-C) = 0.$$

Všechna maximální řešení (3.5) můžeme tedy zkonstruovat „lepením“ z funkcí 0, φ_1, φ_2 takto:

Nechť $C_1 \in \mathbb{R}$, $C_2 \in \mathbb{R}$, $C_1 \geqq C_2$.

$$\psi_1(t) = \begin{cases} (t + C_1)^3, & t \in (-\infty, -C_1), \\ 0, & t \in \langle -C_1, -C_2 \rangle, \\ (t + C_2)^3, & t \in (-C_2, +\infty), \end{cases}$$

$$\psi_2(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, -C_2), \\ (t + C_2)^3, & t \in \langle -C_2, +\infty \rangle, \end{cases}$$

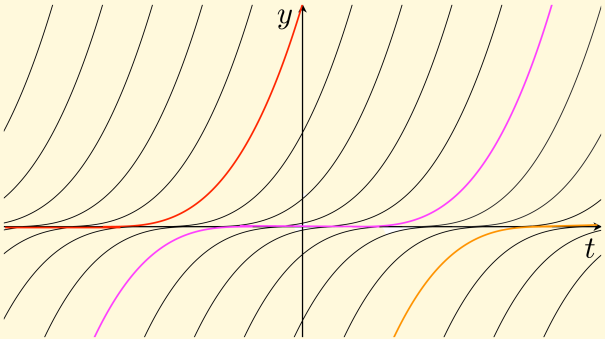
$$\psi_3(t) = \begin{cases} (t + C_1)^3, & t \in (-\infty, -C_1\rangle, \\ 0, & t \in (-C_1, +\infty), \end{cases}$$

$$\psi_4(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Integrální křivky jsou načrtnuty na obrázku (3.1).

▲

Obsah
92. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obr. 3.1

3.1. Videa s řešenými příklady

Stručný postup řešení rovnice se separovanými proměnnými lze vidět v tomto videu. Následuje řešení tří příkladů rovnic se separovanými proměnnými:

Příklad 1
Příklad 2
Příklad 3

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

Obsah
93. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

3.2. Interaktivní test

Následující test byl vytvořen pomocí balíčku `acrotex`. Test zahájíte kliknutím na tlačítko „Zacátek testu“. U otázek lze volit jen jednu odpověď (test nedovolí zaškrtnout více odpovědí). Správná odpověď je bodována počtem bodů uvedených v závorce u zadání a špatná odpověď je bodována 0 body.

Zacátek testu

1. (1b.) Obyčejná diferenciální rovnice

$$y' = 0$$

- ☐ je rovnice se separovanými proměnnými.
- ☐ není rovnice se separovanými proměnnými.

2. (1b.) Obyčejná diferenciální rovnice

$$y' = y + 1$$

- ☐ je rovnice se separovanými proměnnými.
- ☐ není rovnice se separovanými proměnnými.

3. (1b.) Obyčejná diferenciální rovnice

$$y' = y^2 - t$$

☐ je rovnice se separovanými proměnnými.

☐ není rovnice se separovanými proměnnými.

4. (1b.) Obyčejná diferenciální rovnice

$$y' = y \cdot t$$

☐ je rovnice se separovanými proměnnými.

☐ není rovnice se separovanými proměnnými.



5. (1b.) Obyčejná diferenciální rovnice

$$y - y' = 1$$

☐ je rovnice se separovanými proměnnými.

☐ není rovnice se separovanými proměnnými.

6. (1b.) Obyčejná diferenciální rovnice

$$2y - ty' = 0$$

☐ je rovnice se separovanými proměnnými.

☐ není rovnice se separovanými proměnnými.



7. (1b.) Obyčejná diferenciální rovnice

$$y' = \sin y$$

☐ je rovnice se separovanými proměnnými.

☐ není rovnice se separovanými proměnnými.

8. (1b.) Obyčejná diferenciální rovnice

$$y' = \sqrt{y + t}$$

☐ je rovnice se separovanými proměnnými.

☐ není rovnice se separovanými proměnnými.

Konec testu

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:

Výsledky

Pro ukončení testu je třeba kliknout na tlačítko „Konec testu“. Opravení testu se provede kliknutím na tlačítko „Výsledky“, správné odpovědi budou označeny zeleně a červeně budou označeny odpovědi chybné.

Příklady k procvičení

1. Řešte dané diferenciální rovnice metodou separace proměnných:

   a) $y' = \frac{y}{t}$,
   b) $\frac{y'}{t} = 2y - 3ty$,
   c) $ty' = \left(1 + y^2\right) \operatorname{arctg} y$,
   d) $y' = \frac{1-2t}{y^2}$,
   e) $ty' = -\sqrt{1 - y^2} \arccos y$,
   f) $y' = t^2 y$.

2. Najděte řešení Cauchyových úloh:

   a) $\begin{cases} (t+1)y' + ty = 0, \\ y(0) = 1, \end{cases}$
   b) $\begin{cases} y' = y \cos t, \\ y(\pi) = 1, \end{cases}$
   c) $\begin{cases} y'\sqrt{1-t^2} = ty, \\ y(0) = \mathrm{e}^{-1}, \end{cases}$
   d) $\begin{cases} y' = 2y, \\ y(1) = 0. \end{cases}$

Klíč k příkladům k procvičení

1. a) $y(t) = Ct,\ C \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+$,
   b) $y(t) = C\mathrm{e}^{t^2 - t^3},\ C \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+$,
   c) $y(t) = \operatorname{tg}(Ct),\ C \in \mathbb{R},\ Ct \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,
   d) $y(t) = \sqrt[3]{3t - 3t^2 + C},\ C \in \mathbb{R},\ 3t - 3t^2 + C > 0$,
   e) $y(t) = \cos(Ct),\ C \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ Ct \in (0, \pi),\ y(t) = -1,\ t \in \mathbb{R},\ y(t) = 1,\ t \in \mathbb{R}$ nebo „vhodná slepení“ těchto tří řešení,
   f) $y(t) = C\mathrm{e}^{t^3/3},\ C \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}$.

2. a) $\varphi(t) = (t+1)\,\mathrm{e}^{-t},\ t \in \mathbb{R}$,
   b) $\varphi(t) = \mathrm{e}^{\sin t},\ t \in \mathbb{R}$,
   c) $\varphi(t) = \mathrm{e}^{-\sqrt{1-t^2}},\ t \in (-1, 1)$,
   d) $\varphi(t) = 0,\ t \in \mathbb{R}$.

Obsah
98. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Kapitola 4

Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Nechť jsou zadány funkce a, b definované na otevřeném intervalu $J \subset \mathbb{R}$. ODR tvaru

$$y' + a(t)\, y = b(t) \tag{4.1}$$

nazýváme lineární diferenciální rovnicí 1. řádu.

Je-li speciálně pravá strana v uvedené rovnici nulová, rovnice přechází v rovnici

$$y' + a(t)\, y = 0, \tag{4.2}$$

kterou nazýváme homogenní lineární diferenciální rovnicí 1. řádu.

Mějme ještě zadána čísla $t_0 \in J$, $y_0 \in \mathbb{R}$. Připomeňme, že podmínku

$$y(t_0) = y_0 \tag{4.3}$$

nazýváme počáteční podmínkou (kladenou na řešení zadané diferenciální rovnice).

Popišme nyní metodu „přenásobení“, která umožňuje řešit zadané lineární diferenciální rovnice.

- Nejprve nalezneme „maximální“ interval J, na kterém jsou koeficient a rovnice a pravá strana b rovnice spojitými funkcemi. Je-li zadána počáteční podmínka $y(t_0) = y_0$, ověříme, že $t_0 \in J$.
- Vypočteme $\int a(t)\,\mathrm{d}t$ na J, to znamená nalezneme libovolnou primitivní funkci k funkci $a(t)$ na J.
- Rovnici (4.1) přenásobíme kladnou a diferencovatelnou funkcí

$$\mathrm{e}^{\int a(t)\,\mathrm{d}t}, \quad t \in J :$$

$$y' \cdot \mathrm{e}^{\int a(t)\,\mathrm{d}t} + y \cdot \mathrm{e}^{\int a(t)\,\mathrm{d}t} \cdot a(t) = \mathrm{e}^{\int a(t)\,\mathrm{d}t} \cdot b(t) .$$

Získáme tak diferenciální rovnici, která má zřejmě stejnou množinu všech řešení jako rovnice (4.1) (hovoříme o ekvivalentních rovnicích). Použijme na levou stranu rovnice (pozpátku) vzorec pro derivaci součinu. Na intervalu J tedy platí rovnost

$$\left(y \cdot \mathrm{e}^{\int a(t)\,\mathrm{d}t}\right)' = \mathrm{e}^{\int a(t)\,\mathrm{d}t} \cdot b(t) .$$

Po integraci obou stran získáváme na J vztah

$$y(t) \cdot \mathrm{e}^{\int a(t)\,\mathrm{d}t} = \int \mathrm{e}^{\int a(t)} \cdot b(t)\,\mathrm{d}t + C\,,\ C \in \mathbb{R},$$

který v závislosti na volbě „integrační konstanty“ C zachycuje všechna řešení zadané rovnice na J. Množinu všech řešení naší rovnice na intervalu J pak lze po úpravě popsat vzorcem (někdy jej nazýváme *obecným řešením* zadané rovnice):

$$y(t) = C \cdot \mathrm{e}^{-\int a(t)\,\mathrm{d}t} + \mathrm{e}^{-\int a(t)\,\mathrm{d}t} \cdot \int \mathrm{e}^{\int a(t)} \cdot b(t)\ \mathrm{d}t,\ t \in J, \quad C \in \mathbb{R}.$$

- Je-li zadána počáteční podmínka $y(t_0) = y_0$, zjistíme dosazením konkrétní hodnotu C a napíšeme příslušné řešení Cauchyovy úlohy na J.

Příklad 4.1. Určete řešení Cauchyovy úlohy

$$y' - 3t^2 y = 0\,, \quad y(1) = 2\mathrm{e}^3.$$

Řešení. Zřejmě je $a(t) = -3t^2$, $b(t) = 0$, jde tedy o homogenní rovnici. Funkce daná předpisem $-3t^2$ je spojitá na $J = \mathbb{R}$. Zřejmě platí $\int \left(-3t^2\right)\,\mathrm{d}t = -t^3$, takže po přenásobení zadané rovnice kladnou a diferencovatelnou funkcí

$$\mathrm{e}^{-t^3}$$

dostáváme ekvivalentní rovnici

$$y' \cdot \mathrm{e}^{-t^3} + y \cdot \left(\mathrm{e}^{-t^3} \cdot \left(-3t^2\right)\right) = 0\,.$$

Po úpravě přechází levá strana v derivaci součinu

$$\left(y \cdot \mathrm{e}^{-t^3}\right)' = 0,$$

Obsah
101. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

takže po integraci obou stran :

$$y(t) \cdot \mathrm{e}^{-t^3} = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Po přenásobení funkcí e^{t^3} získáváme obecné řešení zadané rovnice:

$$y(t) = C\mathrm{e}^{t^3}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Z počáteční podmínky $y(1) = 2\mathrm{e}^3$ (v předchozím vztahu dosadíme číslo $2\mathrm{e}^3$ místo $y(t)$ a číslo 1 za t) získáváme rovnici pro C:

$$2\mathrm{e}^3 = C\mathrm{e}^{1^3} \quad \Longrightarrow \quad C = 2\mathrm{e}^2.$$

Nyní jsme již schopni zapsat hledané řešení φ zadané Cauchyovy úlohy:

$$\varphi(t) = 2\mathrm{e}^2\mathrm{e}^{t^3} = 2\mathrm{e}^{t^3+2}.$$

▲

Ukázka stručného zápisu řešení téhož příkladu:
Určete řešení Cauchyovy úlohy

$$y' - 3t^2 y = 0, \quad y(1) = 2\mathrm{e}^3.$$

$$y' - 3t^2 y = 0 \qquad \big| \cdot \mathrm{e}^{\int -3t^2\,\mathrm{d}t}$$

$$y'\mathrm{e}^{-t^3} - 3t^2 y\mathrm{e}^{-t^3} = 0$$

Obsah
102. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

$$\left(y \cdot \mathrm{e}^{-t^3}\right)' = 0$$

$$y \cdot \mathrm{e}^{-t^3} = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\underline{y = C\mathrm{e}^{t^3}, \quad C \in \mathbb{R}}$$

$$2\mathrm{e}^3 = C\mathrm{e} \quad \Longrightarrow \quad C = 2\mathrm{e}^2$$

$$\underline{\underline{\varphi\,(t) = 2\mathrm{e}^{t^3+2}}}$$

Uveďme ještě stručné řešení dalšího příkladu.

Příklad 4.2. Určete řešení Cauchyovy úlohy

$$y' + \frac{1}{t}y = t\,, \quad y\,(-1) = 2.$$

Řešení. $-1 \in (-\infty, 0) \implies J = (-\infty, 0)$. Na J:

$$y' + \frac{1}{t}y = t \qquad \left| \cdot \mathrm{e}^{\int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}, \quad t \in (-\infty, 0) \right. \qquad \left[\mathrm{e}^{\ln|t|} = -t, \text{ pro } t < 0\right]$$

$$-y't - y = -t^2,$$

$$(-yt)' = -t^2,$$

$$-yt = \tilde{C} - \frac{t^3}{3},$$

Obsah

103. strana ze 336

Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

$$\underline{y = \frac{C}{t} + \frac{t^2}{3}, \quad t \in (-\infty, 0), \quad C \in \mathbb{R}}$$

$$y(-1) = 2 \implies 2 = -C + \frac{1}{3} \implies C = -\frac{5}{3}$$

$$\underline{\underline{\varphi(t) = -\frac{5}{3t} + \frac{t^2}{3}, \quad t \in (-\infty, 0).}}$$

▲

Příklad 4.3. Určete řešení Cauchyovy úlohy

$$y' + \frac{1}{t}y = \frac{\sin t}{t^2}, \quad y(1) = 5.$$

Řešení. V první části můžeme postupovat podobně jako u předešlého příkladu: $1 \in (0, \infty) \implies J = (0, \infty)$. Na J:

$$y' + \frac{1}{t}y = \frac{\sin t}{t^2} \qquad \left| \cdot \mathrm{e}^{\int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}, \quad t \in (0, \infty) \right. \qquad \left[\mathrm{e}^{\ln|t|} = t, \text{ pro } t > 0\right]$$

$$y't + y = \frac{\sin t}{t},$$

$$(yt)' = \frac{\sin t}{t}.$$

Obsah
104. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Nyní si uvědomíme, že na intervalu $(0, \infty)$ integrál $\int \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ sice existuje, ale není elementární funkcí (není možné jej zapsat „obyčejným" vzorcem). Musíme se tedy uchýlit k zápisu příslušné primitivní funkce pomocí určitého integrálu jako funkce horní meze:

$$yt = C + \int_1^t \frac{\sin s}{s}\,\mathrm{d}s, \quad t > 0.$$

Protože $\int_1^1 \frac{\sin s}{s}\,\mathrm{d}s = 0$, po dosazení počáteční podmínky zjišťujeme, že $C = 5$, a proto

$$\varphi(t)\,t = 5 + \int_1^t \frac{\sin s}{s}\,\mathrm{d}s, \quad t > 0.$$

Řešením zadané Cauchyovy úlohy je tedy funkce $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daná předpisem

$$\underline{\underline{\varphi(t) = \frac{5}{t} + \frac{1}{t}\int_1^t \frac{\sin s}{s}\,\mathrm{d}s, \quad t \in (0, \infty)}}$$

Při výpočtu hodnot $\varphi(t)$ bychom tak zřejmě museli použít numerických metod k výpočtu uvedeného určitého integrálu. ▲

Základní poznatky o vlastnostech lineárních diferenciálních rovnic můžeme shrnout do následujícího tvrzení:

Věta 4.4. *Nechť a, b jsou spojité funkce definované na otevřeném intervalu J. Nechť $t_0 \in J$, $y_0 \in \mathbb{R}$. Pak platí:*

1) *Existuje právě jedna funkce φ, která je na J řešením Cauchyovy úlohy (4.1), (4.3).*
2) *Množina všech řešení homogenní rovnice (4.2) na J tvoří vektorový prostor dimenze 1.*
3) *Řešení rovnice (4.2) na J nemění na tomto intervalu znaménko.*
4) *Nechť y_p je řešení rovnice (4.1) na J. Zvolme libovolně řešení y_h homogenní rovnice (4.2) na J. Pak funkce*
$$y(t) = y_h(t) + y_p(t), \quad t \in J$$
je opět řešením rovnice (4.1) na J.
5) *Nechť y_p je nějaké, pevně zvolené řešení rovnice (4.1) na J. Pak ke každému řešení y rovnice (4.1) na J existuje právě jedno řešení y_h homogenní lineární diferenciální rovnice (4.2) na J takové, že pro všechna $t \in J$ platí:*
$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) .$$

Poznámka 4.5. Ve tvrzeních posledních dvou částí uvedené věty je obsažen tzv. princip superpozice, který můžeme volně shrnout v následujícím sloganu: Obecné řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice je součtem obecného řešení přidružené homogenní rovnice a partikulárního řešení y_p nehomogenní rovnice. Jinak zapsáno, označíme-li symbolem Y_H množinu všech řešení homogenní rovnice (4.2) na J a symbolem Y systém všech řešení rovnice (4.1), můžeme napsat symbolický vzorec

$$\boxed{Y = Y_H + y_p.}$$

Obsah
106. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Důkaz. Nechť a, b jsou spojité funkce definované na otevřeném intervalu J. Nechť $t_0 \in J$, $y_0 \in \mathbb{R}$. Pak platí následující ekvivalence na J:

$$\varphi'(t) + a(t)\,\varphi(t) = b(t), \qquad \varphi(t_0) = y_0$$

$$\Updownarrow$$

$$\varphi'(t) \cdot \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s} + \varphi(t) \cdot \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s} \cdot a(t) = \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s} \cdot b(t), \qquad \varphi(t_0) = y_0$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\varphi(t) \cdot \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s}\right)' = \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s} \cdot b(t), \qquad \varphi(t_0) = y_0$$

$$\Updownarrow$$

$$\varphi(t) \cdot \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s} = y_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{u} a(s)\,\mathrm{d}s} \cdot b(u)\,\mathrm{d}u$$

$$\Updownarrow$$

$$\varphi(t) = y_0 \cdot \mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s} + \left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{u} a(s)\,\mathrm{d}s} \cdot b(u)\,\mathrm{d}u\right) \cdot \mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s}.$$

Právě jsme ukázali, že Cauchyova úloha (4.1), (4.3) je na J jednoznačně řešitelná. Zvolíme-li v získaném vzorci pro řešení $b = 0$, vidíme, že řešení homogenní lineární diferenciální rovnice na J lze psát ve tvaru

$$y_h(t) = C \cdot \mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s},$$

kde $C = y_h(t_0)$. Každé řešení homogenní rovnice (4.2) můžeme tedy zapsat jako vhodný násobek řešení

$$\overline{y_h}(t) = \mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s}$$

této rovnice. Odtud bezprostředně plyne, že množina všech řešení homogenní rovnice (4.2) na J tvoří lineární prostor dimenze jedna. Z tvaru vzorce pro řešení homogenní rovnice ihned plyne, (řešení jsou reálnými násobky „exponenciál“), že tyto funkce jsou na J všude kladné nebo všude záporné, popřípadě jde o nulovou funkci na J.

Nechť y_p je řešení rovnice (4.1) na J. Zvolme libovolně řešení y_h homogenní rovnice (4.2) na J. Položme

$$y = y_h + y_p.$$

Pak na J platí:

$$y'(t) + a(t)\cdot y(t) = (y_h(t) + y_p(t))' + a(t)\cdot(y_h(t) + y_p(t)) =$$

$$= \left(y_h'(t) + a(t)\cdot y_h(t)\right) + \left(y_p'(t) + a(t)\cdot y_p(t)\right) = 0 + b(t) = b(t).$$

Funkce y tedy představuje řešení rovnice (4.1) na J.

Obráceně, nechť y_p, y jsou řešeními (4.1) na J. Položíme-li

$$y_h = y - y_p,$$

pak

$$y = y_h + y_p,$$

funkce y_h je určena jednoznačně a na J platí:

$$y_h'(t) + a(t)\cdot y_h(t) = (y(t) - y_p(t))' + a(t)\cdot(y(t) - y_p(t)) =$$

Obsah
108. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

$$= \left(y'(t) + a(t) \cdot y(t)\right) - \left(y_p'(t) + a(t) \cdot y_p(t)\right) = b(t) - b(t) = 0,$$

takže y_h je řešením homogenní rovnice (4.2), čímž je důkaz ukončen. □

Poznámka 4.6. Homogenní lineární rovnice lze zřejmě převést na rovnice se separovanými proměnnými. Připomeňme jen, že řešení homogenní rovnice nemění znaménko, tato informace nám při řešení metodou separace usnadní práci.

Příklad 4.7. Řešme na $\mathbb{R}$ rovnici

$$y' + y \cdot \sin t = 0.$$

Řešení. Nejprve si uvědomíme, že jedním z maximálních řešení je nulová funkce. Hledejme nenulová řešení zadané rovnice na $\mathbb{R}$. Protože grafy těchto řešení neprotínají osu t, můžeme postupně provádět následující ekvivalentní úpravy:

$$\begin{gathered} y' + y \cdot \sin t = 0 \\ \Updownarrow \\ \frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\sin t \\ \Updownarrow \\ \int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = \int -\sin t \,\mathrm{d}t + C_1, \end{gathered}$$

Obsah
109. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

kde $C_1 \in \mathbb{R}$ je libovolné pevně zvolené číslo. Po integraci obou stran získáváme

$$\ln|y(t)| = C_1 + \cos t,\ C_1 \in \mathbb{R},$$

takže

$$|y(t)| = \mathrm{e}^{C_1+\cos t} = \mathrm{e}^{C_1} \cdot \mathrm{e}^{\cos t} = K \cdot \mathrm{e}^{\cos t},\ K = \mathrm{e}^{C_1} \in (0,\infty)\,.$$

Nyní je zřejmé, že kladná řešení zadané rovnice popíšeme předpisem

$$y(t) = K \cdot \mathrm{e}^{\cos t},\ K \in (0,\infty)\,,$$

zatímco záporná řešení předpisem

$$y(t) = -K \cdot \mathrm{e}^{\cos t},\ K \in (0,\infty)\,.$$

Obě možnosti zřejmě můžeme popsat jediným vzorcem, ve kterém je navíc zahrnuto i nulové řešení:

$$y(t) = C \cdot \mathrm{e}^{\cos t},\ C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 4.8. Popišme stručně hledání maximálního řešení následující Cauchyovy úlohy:

$$y' + \frac{y}{\cos^2 t} = 0, \quad y\,(0) = 1.$$

Řešení. Vzhledem k počáteční podmínce hledáme kladné řešení definované na otevřeném intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Pro toto řešení musí (na zmíněném intervalu) platit:

Obsah
110. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{y}{\cos^2 t} = 0, \quad y(0) = 1$$
$$\frac{1}{y}\mathrm{d}y = -\frac{1}{\cos^2 t}\mathrm{d}t, \quad y(0) = 1$$
$$\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = \int -\frac{1}{\cos^2 t}\mathrm{d}t + C,\ C \in \mathbb{R}, \quad y(0) = 1$$
$$\ln y = C - \operatorname{tg} t, \quad y(0) = 1$$
$$\underline{\underline{y(t) = \mathrm{e}^{1-\operatorname{tg} t},\ t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).}}$$

▲

Metoda variace konstanty

Odvoďme si nyní alternativní metodu pro řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice 1. řádu (4.1). Předpokládejme, že funkce a, b jsou spojité funkce definované na otevřeném intervalu J. Pak systém všech řešení homogenní lineární diferenciální rovnice prvního řádu tvoří vektorový prostor dimenze 1. Odtud ihned plyne, že známe-li jedno nenulové řešení y_h homogenní rovnice (4.2) na J, pak každé další řešení y této rovnice je dáno předpisem ve tvaru

$$y(t) = C \cdot y_h(t),$$

kde $C \in \mathbb{R}$ je vhodná konstanta. Ukažme si, že zaměníme-li v uvedeném předpisu konstantu C vhodnou funkcí $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, získáme předpis pro řešení y_p rovnice (4.1) na J (odtud název metoda variace konstanty). Hledejme tedy řešení y_p rovnice (4.1) na J ve tvaru

$$y_p(t) = k(t) \cdot y_h(t),$$

Obsah
111. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

kde k je diferencovatelná funkce definována na J. Po dosazení do rovnice (4.1) můžeme na J provést následující řetězec úprav:

$$y_p'(t) + a(t) \cdot y_p(t) = b(t)$$

$$\Updownarrow$$

$$(k(t) \cdot y_h(t))' + a(t) \cdot (k(t) \cdot y_h(t)) = b(t)$$

$$\Updownarrow$$

$$k'(t) \cdot y_h(t) + k(t) \cdot y_h'(t) + a(t) \cdot k(t) \cdot y_h(t) = b(t)$$

$$\Updownarrow$$

$$k'(t) \cdot y_h(t) + k(t) \cdot \left[y_h'(t) + a(t) \cdot y_h(t)\right] = b(t).$$

Protože y_h je řešením homogenní rovnice (4.2), funkce v hranaté závorce posledního vzorce je nulová. Pro funkci k tedy na J musí platit

$$k'(t) \cdot y_h(t) = b(t),$$

a protože y_h nemění znaménko, můžeme psát

$$k(t) = \int \frac{b(t)}{y_h(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Obsah
112. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Příklad 4.9. Řešme na $\mathbb{R}$ rovnici

$$y' + y \cdot \sin t = \sin t.$$

Řešení. Nejprve je třeba vyřešit přidruženou homogenní diferenciální rovnici

$$y' + y \cdot \sin t = 0.$$

Tuto úlohu jsme již řešili a tak jen zopakujme, že množinu všech řešení na $\mathbb{R}$ můžeme popsat předpisem

$$C \cdot \mathrm{e}^{\cos t},\ C \in \mathbb{R}.$$

Nyní budeme postupovat metodou variace konstanty. Hledáme diferencovatelnou funkci k, pro kterou na $\mathbb{R}$ platí

$$\left(k\left(t\right) \cdot \mathrm{e}^{\cos t}\right)' + \left(k\left(t\right) \cdot \mathrm{e}^{\cos t} \cdot \sin t\right) = \sin t.$$

Odtud

$$k'\left(t\right) \cdot \mathrm{e}^{\cos t} + k\left(t\right) \cdot \mathrm{e}^{\cos t} \cdot \left(-\sin t\right) + k\left(t\right) \cdot \mathrm{e}^{\cos t} \cdot \sin t = \sin t,$$

takže

$$k'\left(t\right) \cdot \mathrm{e}^{\cos t} = \sin t.$$

Použijeme-li jednoduchou substituci $u = -\cos t$, můžeme snadno vypočítat, že

$$k\left(t\right) = \int \mathrm{e}^{-\cos t} \cdot \sin\left(t\right)\,\mathrm{d}t = \int \mathrm{e}^{u}\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-\cos t},$$

takže jedním z řešení zadané nehomogenní rovnice je funkce y_p daná předpisem

$$y_p\left(t\right) = k\left(t\right) \cdot \mathrm{e}^{\cos t} = \mathrm{e}^{-\cos t} \cdot \mathrm{e}^{\cos t} = 1.$$

Poznamenejme, že toto řešení jsme mohli při pozornějším pohledu na zadanou rovnici „uhodnout" přímo a ušetřit si tak uvedené výpočty. Abychom konečně završili splnění zadaného úkolu, použijeme princip superpozice a obecné řešení zadané rovnice napíšeme jako součet obecného řešení přidružené rovnice a právě zjištěného řešení rovnice nehomogenní:

$$y(t) = C \cdot \mathrm{e}^{\cos t} + 1,\ C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 4.10. Stručný zápis popsaného postupu si ukažme ještě na řešení Cauchyovy úlohy

$$y' + 2t \cdot y = 2t,\ y\,(0) = 1.$$

Řešení. I. Nalezneme obecné řešení homogenní rovnice

$$y' + 2t \cdot y = 0.$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 2t \cdot y = 0,$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int -2t\,\mathrm{d}t,$$

$$\ln|y| = C_1 - t^2,$$

$$|y| = \mathrm{e}^{C_1} \cdot \mathrm{e}^{-t^2},$$

$$\underline{y_h(t) = C \cdot \mathrm{e}^{-t^2},\quad C \in \mathbb{R}.}$$

II. Metodou variace konstanty nalezneme partikulární řešení nehomogenní rovnice

$$y' + 2t \cdot y = 2t.$$

Obsah
114. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

$$y_p(t) = k(t) \cdot \mathrm{e}^{-t^2}.$$

$$\left(k(t) \cdot \mathrm{e}^{-t^2}\right)' + 2t \cdot k(t) \cdot \mathrm{e}^{-t^2} = 2t,$$

$$k'(t) \cdot \mathrm{e}^{-t^2} - 2t \cdot k(t) \cdot \mathrm{e}^{-t^2} + 2t \cdot k(t) \cdot \mathrm{e}^{-t^2} = 2t,$$

$$k'(t) \cdot \mathrm{e}^{-t^2} = 2t,$$

$$k(t) = \int \mathrm{e}^{t^2} 2t \,\mathrm{d}t = \int \mathrm{e}^{u} \,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{t^2},$$

$$\underline{y_p(t) = k(t) \cdot \mathrm{e}^{t^2} = \mathrm{e}^{t^2} \cdot \mathrm{e}^{-t^2} = 1.}$$

III. Zapíšeme obecné řešení nehomogenní rovnice:

$$\underline{y(t) = C \cdot \mathrm{e}^{t^2} + 1, \quad C \in \mathbb{R}.}$$

IV. Nalezneme řešení Cauchyovy úlohy.

$$y(0) = 1: \qquad 1 = C \cdot \mathrm{e}^{0^2} + 1 \quad \Rightarrow \quad C = 0,$$

$$\underline{\underline{y(t) = 1.}}$$

Pozorný čtenář si opět všiml, že řešení zadané Cauchyovy úlohy se dalo snadno uhodnout. ▲

Obsah
115. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

4.1. Videa s řešenými příklady

Stručný postup řešení lineární diferenciální rovnice prvního řádu lze vidět v tomto videu. Následuje řešení čtyř příkladů lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu:

Příklad 1
Příklad 2
Příklad 3
Příklad 4

4.2. Interaktivní test

Následující test byl vytvořen pomocí balíčku `acrotex`. Test zahájíte kliknutím na tlačítko „Zacátek testu“. U otázek lze volit jen jednu odpověď (test nedovolí zaškrtnout více odpovědí). Správná odpověď je bodována počtem bodů uvedených v závorce u zadání a špatná odpověď je bodována 0 body.

Zacátek testu

1. (1b.) Obyčejná diferenciální rovnice

$$y' = 0$$

☐ je lineární diferenciální rovnice 1. řádu.

☐ není lineární diferenciální rovnice 1. řádu.

2. (1b.) Obyčejná diferenciální rovnice

$$y' = y + 5t$$

☐ je lineární diferenciální rovnice 1. řádu.

☐ není lineární diferenciální rovnice 1. řádu.

3. (1b.) Obyčejná diferenciální rovnice

$$y' = y^2 - 1$$

☐ je lineární diferenciální rovnice 1. řádu.

☐ není lineární diferenciální rovnice 1. řádu.

Obsah

117. strana ze 336

Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

4. (1b.) Obyčejná diferenciální rovnice

$$y' = y \cdot t$$

☐ je lineární diferenciální rovnice 1. řádu.

☐ není lineární diferenciální rovnice 1. řádu.

5. (1b.) Obyčejná diferenciální rovnice

$$\cos y - y' = 0$$

☐ je lineární diferenciální rovnice 1. řádu.

☐ není lineární diferenciální rovnice 1. řádu.

Obsah

118. strana ze 336

Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

6. (1b.) Obyčejná diferenciální rovnice

$$2y - 5y' = t^2$$

☐ je lineární diferenciální rovnice 1. řádu.

☐ není lineární diferenciální rovnice 1. řádu.

7. (1b.) Obyčejná diferenciální rovnice

$$y' = \operatorname{arctg} t$$

☐ je lineární diferenciální rovnice 1. řádu.

☐ není lineární diferenciální rovnice 1. řádu.

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

Obsah

119. strana ze 336

Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

8. (1b.) Obyčejná diferenciální rovnice

$$y' = \sqrt{y} - 1$$

☐ je lineární diferenciální rovnice 1. řádu.

☐ není lineární diferenciální rovnice 1. řádu.

9. (1b.) Obyčejná diferenciální rovnice

$$y' - 5y = 0$$

☐ je homogenní lineární diferenciální rovnice 1. řádu.

☐ není homogenní lineární diferenciální rovnice 1. řádu.

10. (1b.) Obyčejná diferenciální rovnice

$$y' = y + 5t$$

☐ je homogenní lineární diferenciální rovnice 1. řádu.

☐ není homogenní lineární diferenciální rovnice 1. řádu.

11. (1b.) Obyčejná diferenciální rovnice

$$y' = y^2$$

☐ je homogenní lineární diferenciální rovnice 1. řádu.

☐ není homogenní lineární diferenciální rovnice 1. řádu.

12. (1b.) Obyčejná diferenciální rovnice

$$y' = y \cdot t$$

☐ je homogenní lineární diferenciální rovnice 1. řádu.

☐ není homogenní lineární diferenciální rovnice 1. řádu.

Konec testu

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:

Výsledky

Pro ukončení testu je třeba kliknout na tlačítko „Konec testu“. Opravení testu se provede kliknutím na tlačítko „Výsledky“, správné odpovědi budou označeny zeleně a červeně budou označeny odpovědi chybné.

Příklady k procvičení

1. Určete všechna maximální řešení zadaných diferenciálních rovnic:

a) $ty' - y = 0\,,$
b) $y' - \frac{y}{t} = -\ln t\,,$
c) $y' - y = t^2\,,$
d) $y' + ty = t\,,$
e) $y' - y\,\mathrm{tg}\,t = \cos t\,,$
f) $y' - \frac{t}{1+t^2}y = \frac{1}{t}\,,$
g) $y' = 2ty - 3t^2y\,,$
h) $y' = 3t^2y\,,$
i) $y' = ty - t^3\,,$
j) $y' + y = \cos t\,,$
k) $y' - \frac{2y}{t\ln t} = \frac{1}{t}\,,$
l) $(1+t^2)y' - 2ty = (1+t^2)^2\,.$

2. Nalezněte maximální řešení zadaných Cauchyových úloh:

a) $\begin{cases} y' + \frac{y}{t} = 3t, \\ y\,(1) = 1, \end{cases}$
b) $\begin{cases} y' - y\,\mathrm{cotg}\,t = \mathrm{e}^t \sin t, \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \end{cases}$
c) $\begin{cases} y' = ty, \\ y(0) = 1, \end{cases}$
d) $\begin{cases} y' = y\sin t, \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \end{cases}$
e) $\begin{cases} y' + y = t, \\ y(0) = 0, \end{cases}$
f) $\begin{cases} y' + y\,\mathrm{cotg}\,t = \sin t, \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1. \end{cases}$

Obsah
123. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

3. Vyřešte úlohu

$$\begin{cases} C' = -\frac{2{,}88}{35} C, \\ C(0) = 20 \end{cases}$$

z Příkladu 1.2 popisující jakým způsobem se mění koncentrace léku v krvi v závislosti na čase.

4. Vyřešte úlohu

$$\begin{cases} T_h' = 0{,}04(20 - T_h), \\ T_h(0) = 100 \end{cases}$$

z Příkladu 1.4 popisující teplotu hrníčku s kávou v závislosti na čase.

Klíč k příkladům k procvičení

1. a) $y(t) = Ct,\ C \in \mathbb{R}$,
   b) $y(t) = -\frac{1}{2} t \ln t + Ct,\ C \in \mathbb{R}$,
   c) $y(t) = Ce^t - t^2 - 2t - 2,\ C \in \mathbb{R}$,
   d) $y(t) = Ce^{-\frac{t^2}{2}} + 1,\ C \in \mathbb{R}$,
   e) $y(t) = \frac{2C + t + \frac{1}{2}\sin(2t)}{2\cos t},\ t \in \left(\frac{-\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z},\ C \in \mathbb{R}$,
   f) $y(t) = \sqrt{1+t^2}\left(C - \ln\left(1 + \sqrt{1+t^2}\right) + \ln|t|\right),\ C \in \mathbb{R}$,
   g) $y(t) = Ce^{t^2 - t^3},\ C \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}$,
   h) $y(t) = Ce^{t^3},\ C \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}$,
   i) $y(t) = Ce^{t^2/2} + t^2 + 2,\ C \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}$,
   j) $y(t) = Ce^{-t} + \frac{1}{2}(\sin t + \cos t),\ C \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}$,
   k) $y(t) = C\ln^2 t - \ln t,\ \ C \in \mathbb{R},\ t \in (1, +\infty)$,
   m) $y(t) = (C + t)(1 + t^2),\ C \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}$.

2. a) $\varphi(t) = t^2,\ t \in (0, \infty)$,
   b) $\varphi(t) = \sin t\left(e^t - e^{\frac{\pi}{2}}\right),\ t \in (0, \pi)$,
   c) $\varphi(t) = e^{t^2/2},\ t \in \mathbb{R}$,
   d) $\varphi(t) = e^{-\cos t},\ t \in \mathbb{R}$,
   e) $\varphi(t) = e^{-t} + t - 1,\ t \in \mathbb{R}$,
   f) $\varphi(t) = \frac{2t - \sin(2t) - \pi + 4}{4\sin t},\ t \in (0, \pi)$.

Obsah
124. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

3. $\bar{C}(t) = 20 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{2,88}{35}t},\ t \in \mathbb{R}.$

4. $\bar{T}_h(t) = 80 \cdot \mathrm{e}^{-0,04t} + 20,\ t \in \mathbb{R}.$

Obsah

125. strana ze 336

Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Kapitola 5

Obecné věty o existenci a jednoznačnosti řešení obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu

V této kapitole se (bez důkazů, které lze nalézt například v [8]) seznámíme s obecnými tvrzeními o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyových úloh.

Uvažujme obyčejnou diferenciální rovnici

$$y' = f(t, y), \tag{5.1}$$

spolu s počáteční podmínkou

$$y(t_0) = y_0. \tag{5.2}$$

Věta 5.1 (Peanova, o existenci řešení). *Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce definovaná na otevřené množině a bod (t_0, y_0) patří do definičního oboru této funkce. Potom Cauchyova úloha (5.1), (5.2) má alespoň jedno maximální řešení.*

Příklad 5.2. Cauchyova úloha

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}, \quad y(0) = 0$$

splňuje předpoklady Peanovy věty a, jak jsme již vlastně ukázali v příkladu (3.8), existuje nekonečně mnoho maximálních řešení této úlohy.

▲

Jak jsme viděli v uvedeném příkladě, k zajištění jednoznačnosti řešení pouhá spojitost pravé strany diferenciální rovnice (5.1) nestačí. Obvykle se jednoznačnost zajišťuje přidáním předpokladu „o omezené rychlosti změny funkce f“ vzhledem ke druhé proměnné. Nejjednodušší způsob, jak to provést, je obsažen v následujícím tvrzení:

Věta 5.3 (O existenci a jednoznačnosti). *Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce definovaná na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, přičemž (t_0, y_0) patří do definičního oboru této funkce. Nechť je na Ω navíc spojitá funkce $\frac{\partial f}{\partial y}$, to znamená parciální derivace funkce f podle druhé proměnné. Potom Cauchyova úloha (5.1), (5.2) má právě jedno maximální řešení.*

Poznámka 5.4. Vraťme se k rovnici

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}.$$

Zřejmě $f(t, y) = 3\sqrt[3]{y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y) = \frac{2}{\sqrt[3]{y}}$, takže je ihned vidět, že předpoklad zaručující jednoznačnost je porušen na přímce $y = 0$.

Obsah
127. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Pro zájemce

Následující tvrzení přináší informaci o minimálním intervalu, na kterém je garantována existence řešení zkoumané Cauchyovy úlohy.

Věta 5.5 (Picardova-Lindelöffova). *Předpokládejme, že funkce* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *je spojitá na obdélníku* $V = \langle t_0 - a, t_0 + a\rangle \times \langle y_0 - b, y_0 + b\rangle$, *kde* $a > 0$, $b > 0$. *Nechť existuje číslo* $L \in \mathbb{R}$ *takové, že pro každé dva body* $(t, y) \in V$, $(t, z) \in V$ *platí:*

$$|f(t, y) - f(t, z)| \leqq L \cdot |y - z| . \tag{5.3}$$

Označme

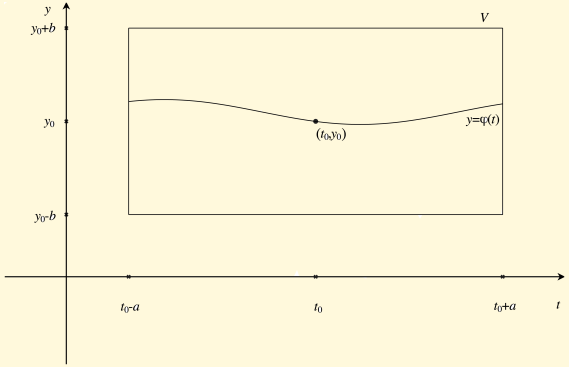
$$M = \max_{(t,y)\in V} |f(t, y)|$$

a předpokládejme, že f *je na* V *nenulová funkce, tedy* $M > 0$. *Položme*

$$\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}.$$

Potom existuje právě jedna funkce φ *definovaná na intervalu* $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$, *která je na tomto intervalu řešením Cauchyovy úlohy (5.1), (5.2).*

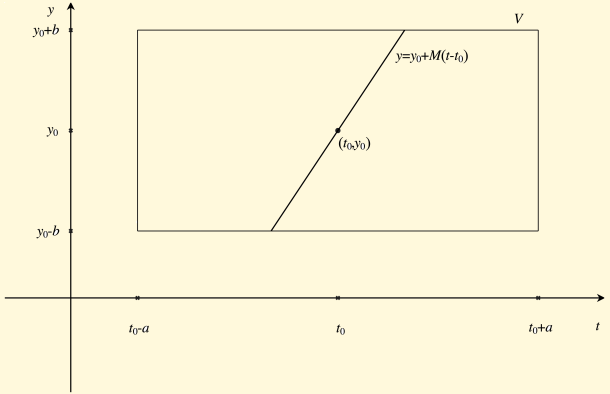
Poznámka 5.6. Ukažme, že interval $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$ z právě uvedené věty obecně nelze rozšířit. Je-li $\alpha = a$, pak řešení naší úlohy je definováno na intervalu $(t_0 - a, t_0 + a)$ a nemůže být prodlouženo - grafem případného prodloužení bychom se dostali mimo „minimální“ definiční obor V funkce f („ve vodorovném směru“) , jak je ukázáno na obrázku (5.1).



Obr. 5.1

Jestliže $\alpha = \frac{b}{M}$, pak řešením studované Cauchyovy s volbou $f(t,y) = M$, $(t,y) \in V$ je funkce $\varphi(t) = y_0 + M(t - t_0)$, přičemž toto řešení nemůže být prodlouženo - opět bychom se při prodlužování dostali ven z definičního oboru V funkce f (tentokrát ve „vertikálním směru“), jak ukazuje obrázek (5.2).

Obsah
129. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obr. 5.2

Poznámka 5.7. Požadavku popsanému nerovností (5.3) se říká Lipschitzova podmínka (vzhledem ke druhé proměnné). Ukažme, že má-li spojitá funkce f na obdélníku V spojitou parciální derivaci podle druhé proměnné, splňuje Lipschitzovu podmínku (5.3). Protože podle předpokladu je $\frac{\partial f}{\partial y}$ spojitou funkcí na uzavřené a ohraničené množině, podle Weierstrassovy věty existuje číslo

$$L = \max_{(t,y)\in V} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t,y) \right|.$$

Zvolme nyní libovolně dva body $(t,y) \in V$, $(t,z) \in V$. Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě musí existovat ξ ležící mezi y, z a takové, že platí

$$f(t,y) - f(t,z) = \frac{\partial f}{\partial y}(t,\xi) \cdot (y-z).$$

Obsah
130. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Odtud již bezprostředně plyne dokazovaná nerovnost:

$$|f(t,y) - f(t,z)| \leqq \max_{(t,y)\in V} \left|\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\right| \cdot |y-z| = L \cdot |y-z|\,.$$

Větu 5.3 o existenci a jednoznačnosti tedy lze v jistém smyslu považovat za důsledek Picardovy-Lindelöffovy věty.

Poznámka 5.8. Nechť jsou splněny předpoklady Picardovy-Lindelöffovy věty. Vezměme libovolnou spojitou funkci φ_1, jejíž graf leží v obdélníku V a která je definována na $(t_0-\alpha, t_0+\alpha)$. Můžeme zvolit třeba konstantní funkci $\varphi_1(t) = y_0$, $t \in (t_0-\alpha, t_0+\alpha)$. Lze ukázat, že pak je na $(t_0-\alpha, t_0+\alpha)$ korektně definovaná následující posloupnost funkcí $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$:

$$\forall j \in \mathbb{N}: \quad \varphi_{j+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_j(s))\,\mathrm{d}s. \tag{5.4}$$

Důkaz Picardovy-Lindelöffovy věty je založen na důkazu stejnoměrné konvergence posloupnosti (5.4) na $(t_0-\alpha, t_0+\alpha)$. Přesněji, dokáže se, že platí:

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}\, \forall t \in (t_0-\alpha, t_0+\alpha): \; [n > n_0 \implies |\varphi(t) - \varphi_n(t)| < \epsilon]\,,$$

kde funkce $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je na $(t_0-\alpha, t_0+\alpha)$ řešením uvažované Cauchyovy úlohy.

Posloupnosti zadané pomocí (5.4) se říká posloupnost Picardových aproximací řešení φ Cauchyovy úlohy (5.1), (5.2).

Příklad 5.9. Uvažujme Cauchyovu úlohu

$$y' = y, \;\; (t,y) \in V = \langle -1,1\rangle \times \langle 0,2\rangle\,, \quad y(0) = 1.$$

Funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(t,y) = y$ je zřejmě spojitá na V a položíme-li $L = 1$, ihned vidíme, že

$$\forall (t,y) \in V \quad \forall (t,z) \in V : |y-z| \leqq L \cdot |y-z|\,,$$

Obsah
131. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

takže můžeme konstatovat, že jsou splněny předpoklady Picardovy-Lindelöffovy věty. Protože

$$M = \max_{(t,y)\in V} |y| = 2,$$

tvrzení věty nám zaručuje, že zadaná úloha má na intervalu $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ právě jedno řešení φ. Zvolíme-li $\varphi_1(t) = 1$, můžeme postupně určit členy příslušné Picardovy posloupnosti:

$$\varphi_2(t) = 1 + \int_0^t \varphi_1(s)\,\mathrm{d}s = 1 + \int_0^t s\,\mathrm{d}s = 1 + \frac{t^1}{1!},$$

$$\varphi_3(t) = 1 + \int_0^t \varphi_2(s)\,\mathrm{d}s = 1 + \int_0^t \left(1 + \frac{s^1}{1!}\right)\mathrm{d}s = 1 + \frac{t^1}{1!} + \frac{t^2}{2!},$$

$$\varphi_4(t) = 1 + \int_0^t \varphi_3(s)\,\mathrm{d}s = 1 + \int_0^t \left(1 + \frac{s^1}{1!} + \frac{s^2}{2!}\right)\mathrm{d}s = 1 + \frac{t^1}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!},$$

$$\dots$$

$$\varphi_{j+1}(t) = 1 + \int_0^t \varphi_j(s)\,\mathrm{d}s = \dots = 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots + \frac{t^j}{j!},$$

$$\dots$$

Podle Picardovy-Lindelöffovy věty na $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ platí:

$$\lim_{j\to\infty} \sum_{k=0}^{j} \frac{t^j}{j!} = \varphi(t).$$

Pozorný čtenář si již jistě všiml, že prvky právě sestrojené Picardovy posloupnosti jsou Maclaurinovými polynomy funkce e^t, která je jediným řešením zadané Cauchyovy úlohy.

▲

Poznámka 5.10. Výpočet Picardových aproximací můžeme chápat jako jednu z přibližných metod hledání řešení obyčejných diferenciálních rovnic. Většinou je však výpočet potřebných integrálů velmi pracný a tak je význam této metody spíše teoretický.

Obsah
132. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

5.1. Video s ilustrací pojmu

Ilustraci pojmu existence a jednoznačnosti řešení obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu lze vidět v tomto videu.

Příklady k procvičení

1. Nalezněte „maximální“ otevřené množiny, na které je třeba omezit definiční obor funkce f tak, aby Peanova věta garantovala existenci maximálního řešení Cauchyovy úlohy (5.1), (5.2) , jestliže:

   a) $f(t,y) = \frac{1}{t} - \arccos(y)\,,\ (t_0,y_0) = \left(1,\frac{1}{2}\right)\,,$

   b) $f(t,y) = \ln\left(t\cdot y^3\right)\,,\ (t_0,y_0) = (1,1)\,,$

   c) $f(t,y) = \sqrt{y\cdot\sin t},\ (t_0,y_0) = \left(-\frac{\pi}{4},0\right)\,.$

2. Nalezněte „maximální“ otevřené množiny, na které je třeba omezit definiční obor funkce f tak, aby Věta 5.3 garantovala existenci a jednoznačnost maximálního řešení Cauchyovy úlohy (5.1), (5.2) , jestliže:

   a) $f(t,y) = \frac{\arcsin t}{y^2-1},\ (t_0,y_0) = (0,0)\,,$

   b) $f(t,y) = \cos(t-y) + \ln(t\cdot y)\,,\ (t_0,y_0) = (1,1)\,,$

   c) $f(t,y) = y^y,\ (t_0,y_0) = (1,10)\,.$

3. Zvolte $\varphi_1(t) = 1$ a vypočtěte první tři členy Picardovy posloupnosti Cauchyovy úlohy:

   a) $y' = 5y+1,\ y(0) = 1\,,$

   b) $y' = \mathrm{e}^t + y^2,\ y(0) = 0\,.$

Obsah
133. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

4. Ukažte, že funkce:

   $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(t,y) = t^3 - |y|$ splňuje Lipschitzovu podmínku na $\mathbb{R}^2$. Nalezněte nejmenší hodnotu Lipschitzovy konstanty L.

Klíč k příkladům k procvičení

1. a) $\{(t,y) \in \mathbb{R}^2 : t \neq 0 \wedge y \in (-1,1)\}$,
   b) $\{(t,y) \in \mathbb{R}^2 : t \cdot y > 0\}$,
   c) $\emptyset$.

2. a) $\{(t,y) \in \mathbb{R}^2 : t \in (-1,1) \wedge |y| \neq 1\}$,
   b) $\{(t,y) \in \mathbb{R}^2 : t \cdot y > 0\}$,
   c) $\{(t,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$.

3. a) $\varphi_1(t) = 1, \quad \varphi_2(t) = 1 + 6t, \quad \varphi_3(t) = 1 + 6t + 15t^2$,
   b) $\varphi_1(t) = 0, \quad \varphi_2(t) = \mathrm{e}^t - 1, \quad \varphi_3(t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^t + t + \frac{1}{2}$.

4. $L = 1$.

Obsah
134. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Kapitola 6

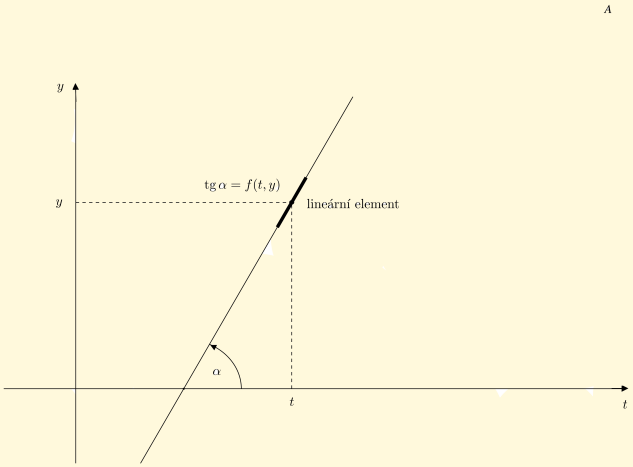
Geometrická interpretace ODR a nástin numerických metod

Směrová pole

Budiž dána funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Naznačme geometrickou interpretaci pojmu řešení diferenciální rovnice

$$y' = f(t, y). \tag{6.1}$$

Uvažujme nyní pouze body $(t, y) \in D_f$. Každému takovému bodu (t, y) můžeme přiřadit přímku procházející tímto bodem a mající směrnici $f(t, y)$.

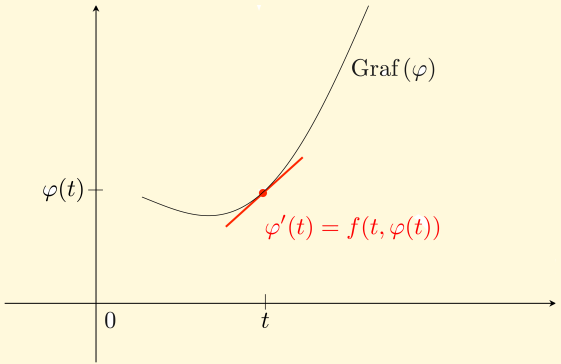


Obr. 6.1

Uvažovanou přímku můžeme reprezentovat úsečkou (vhodně zvolené délky), která leží na přímce a střed má umístěn v bodě (t, y). Této úsečce budeme třeba říkat *lineární element* (rovnice (6.1) v bodě (t, y)). Systém všech lineárních elementů nazýváme *směrovým polem* rovnice (6.1).

Buď nyní funkce φ řešením rovnice (6.1) definovaným na otevřeném intervalu J. Pak pro každý bod $(t, \varphi(t))$ grafu funkce φ platí $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$. Lineární element příslušný bodu $(t, \varphi(t))$ tedy musí ležet na tečně ke grafu funkce φ v bodě $(t, \varphi(t))$.

Obsah
136. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obr. 6.2

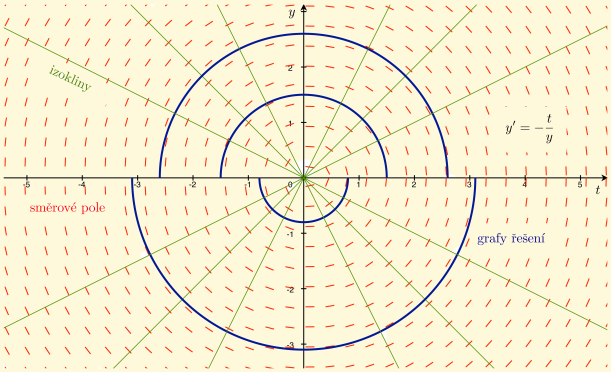
Znázorněním vhodně vybraných lineárních elementů v souřadnicové rovině tak můžeme získat dobrou představu o grafech řešení rovnice (6.1). Je-li $k \in \mathbb{R}$ konstanta, pak lineární elementy ležící na přímkách se směrnicí k mají středy umístěné na vrstevnici funkce f o kótě k. Vrstevnice funkce f nazýváme *izokliny* diferenciální rovnice (6.1).

Příklad 6.1. Uvažujme diferenciální rovnici

$$y' = -\frac{t}{y}. \tag{6.2}$$

Označíme-li $f(t, y) = -\frac{t}{y}$, pak $D_f = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a izoklinou rovnice (6.2) (odpovídající konstantě $k \in \mathbb{R}$) je dvojice „otevřených“ polopřímek zadaná rovnicí $f(t, y) = k$, tedy $t = -k \cdot y$, $y \neq 0$. Různým volbám konstanty k odpovídají izokliny znázorněné zeleně na obrázku 6.3.

Obsah
137. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno



Obr. 6.3

Po zakreslení sítě lineárních elementů lze načrtnout grafy integrálních křivek. Hypotézu, že půjde o polokružnice lze ověřit (pilný čtenář ověří sám) dosazením funkcí ($C \in \mathbb{R}$ je konstanta) $\varphi_{1,2}(t) = \pm\sqrt{C^2 - t^2}$, $t \in (-|C|, |C|)$ do rovnice (6.2).

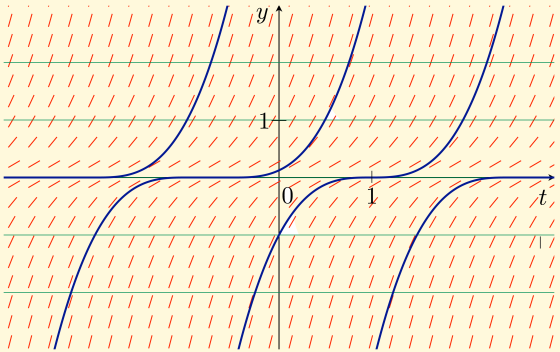
▲

Obsah
138. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Příklad 6.2. Načrtněte grafy řešení diferenciální rovnice

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}. \tag{6.3}$$

Izoklinami budou zřejmě rovnoběžky s osou t. Náčrtek 6.4 vede k hypotéze o rozdílných typech integrálních křivek rovnice (6.3).



Obr. 6.4

Obsah
139. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Poznámka 6.3. Existuje-li řešení (6.3), pak nutně musí jít o neklesající funkci. Pravá strana rovnice (6.3) je totiž nezáporná.

Poznámka 6.4. Řešení (6.3) - vizte Příklad 3.8.

Eulerova metoda

Zabývejme se nyní jednou z numerických metod pro přibližné řešení diferenciálních rovnic 1. řádu s počáteční podmínkou – *Eulerovou metodou*. O funkci f budeme předpokládat, že je v množině $D := \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : \ t_0 \leqq t\}$ spojitá a že je v D spojitá i derivace této funkce podle proměnné y.

Eulerova metoda je nejjednodušší způsob numerického řešení Cauchyových úloh. Výstup Eulerovy metody je aproximací řešení Cauchyovy úlohy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{6.4}$$

na intervalu $\langle t_0, t_N \rangle$. Metoda využívá aproximace derivace[1] funkce y v bodě t pomocí tzv. *diference* y v tomto bodě

$$y'(t) \approx \frac{y(t+h) - y(t)}{h},$$

[1] Tuto aproximaci lze získat z Taylorova polynomu 1. řádu funkce y se středem v bodě t:

$$y(t+h) \approx y(t) + y'(t) \cdot h.$$

Obsah
140. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

kde h je dostatečně „malé“ $(0 < h \ll 1)$.

Použijeme-li diferenci k aproximaci $y'(t)$ v rovnici úlohy (6.4), dostáváme vztah

$$y(t+h) \approx y(t) + hf(t, y(t)). \tag{6.5}$$

Dále zvolme „dostatečně malé“ $h > 0$ a sestrojme body

$$t_0,\ t_1 := t_0 + h,\ t_2 := t_0 + 2h,\ \ldots,\ t_N := t_0 + Nh.$$

Označme pomocí y_n aproximaci hodnoty přesného řešení $y(t_n)$, $n = 0, 1, \ldots, N$. Z (6.5) a počáteční podmínky pak dostaneme rekurentní vztah

$$\boxed{\begin{aligned} &y_0 = y(t_0), \\ &y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n),\ n = 0, 1, \ldots, N, \end{aligned}}$$

který použijeme pro numerické řešení Cauchyovy úlohy (6.4). Lze ukázat, že chyba aproximace řešení pomocí Eulerovy metody v bodě t_1 je přímo úměrná druhé mocnině velikosti kroku h. Chyba aproximace řešení v bodě t_N je přímo úměrná velikosti h.

Obsah
141. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Kapitola 7

Bernoulliova diferenciální rovnice

Nechť jsou zadány spojité reálné funkce p, q definované na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Budiž dáno číslo $s \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Potom diferenciální rovnici

$$y' + p(t)\, y = q(t)\, y^s \tag{7.1}$$

budeme říkat Bernoulliova diferenciální rovnice.

Poznámka 7.1.

- Všimněme si, že je-li $s = 0$ nebo $s = 1$, rovnice $y' + p(t)\, y = q(t)\, y^s$ přechází v lineární diferenciální rovnici.
- Jestliže $s \in \mathbb{N}$, pak má diferenciální rovnice (7.1) nulové řešení na I.

Ukažme si nyní, jak lze Bernoulliovu rovnici (7.1) převést na lineární diferenciální rovnici 1. řádu. Přenásobením (7.1) výrazem y^{-s} získáváme rovnici

$$y^{-s} y' + p(t)\, y^{1-s} = q(t)\,. \tag{7.2}$$

Po substituci

$$z = y^{1-s}$$

a formálním výpočtu derivace

$$z' = (1-s)\, y^{-s} y'$$

jsme připraveni dosadit do (7.2):

$$\frac{1}{1-s} z' + p(t)\, z = q(t)\,.$$

Odtud

$$z' + (1-s)\, p(t)\, z = (1-s)\, q(t)\,, \tag{7.3}$$

přičemž poslední rovnice zřejmě představuje lineární diferenciální rovnici 1. řádu

$$z' + a(t)\, z = b(t)\,,$$

s volbou

$$a(t) = (1-s)\, p(t)\,,\ b(t) = (1-s)\, q(t)\,.$$

K pochopení smyslu jednotlivých formálních kroků, které jsme právě popsali, doporučujeme pečlivě prostudovat důkaz následujícího tvrzení.

Obsah
143. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Věta 7.2. *[O transformaci Bernoulliovy diferenciální rovnice] Nechť funkce u je řešením diferenciální rovnice (7.1) na intervalu $J \subset I$. Nechť navíc platí:*

$$\forall t \in J: \quad u(t) \neq 0. \tag{7.4}$$

Potom funkce v definovaná předpisem

$$v(t) = u^{1-s}(t)$$

je řešením lineární diferenciální rovnice (7.3) na J.

Důkaz. Nechť funkce u je na J řešením Bernoulliovy rovnice (7.1) . Pak na J platí rovnost

$$u'(t) + p(t)\,u(t) = q(t)\,u^s(t).$$

Není příliš obtížné si rozmyslet, že v důsledku (7.4) jsou na J dobře definovány mocniny u^{-s}, u^{1-s}, takže předchozí rovnost můžeme na J ekvivalentně upravit do tvaru

$$(1-s)\,u^{-s}(t)\,u'(t) + (1-s)\,p(t)\,u^{1-s}(t) = (1-s)\,q(t). \tag{7.5}$$

Funkce v definovaná na J předpisem

$$v(t) = u^{1-s}(t)$$

je zřejmě diferencovatelná a na J platí

$$v'(t) = (1-s)\,u^{-s}(t)\,u'(t).$$

Obsah
144. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Rovnost (7.5) tedy může být psána ve tvaru

$$\forall t \in J: \quad v'(t) + (1-s)\,p(t)\,v(t) = (1-s)\,q(t)\,.$$

Poslední vztah ovšem znamená, že funkce v je na J řešením rovnice (7.3), čímž je důkaz u konce. □

Obecné studium Bernoulliovy rovnice zakončíme jistým obrácením předchozího tvrzení.

Věta 7.3. *[O zpětné transformaci] Budiž dána Bernoulliova rovnice (7.1) a řešení v odpovídající lineární diferenciální rovnice (7.3) na J. Předpokládejme, že na J je definována diferencovatelná funkce u, která splňuje následující podmínky:*

$$\forall t \in J: \quad u(t) \neq 0, \tag{7.6}$$

$$\forall t \in J: \quad u^{1-s}(t) = v(t)\,. \tag{7.7}$$

Potom funkce u představuje řešení Bernoulliovy rovnice (7.1) na J.

Poznámka 7.4. Ještě před provedením důkazu si všimněme, že diferencovatelná funkce u na J nemusí být pro některé hodnoty s vztahy (7.6), (7.7) určena jednoznačně.

Důkaz. Z předpokladů věty plyne, že na J platí rovnost

$$v'(t) + (1-s)\,p(t)\,v(t) = (1-s)\,q(t) \tag{7.8}$$

a na J jsou definovány diferencovatelné funkce u^{1-s}, u^{-s}, u^s.

Obsah
145. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Ze vztahu (7.7) plyne

$$\forall t \in J: \quad v'(t) = (1-s)\, u^{-s}(t)\, u'(t),$$

což po dosazení do předchozí rovnosti (7.8) znamená, že na J platí

$$(1-s)\, u^{-s}(t)\, u'(t) + (1-s)\, p(t)\, u^{1-s}(t) = (1-s)\, q(t),$$

tedy

$$u^{-s}(t)\, u'(t) + p(t)\, u^{1-s}(t) = q(t).$$

Poslední rovnost přenásobme funkcí u^s:

$$\forall t \in J: \quad u'(t) + p(t)\, u(t) = q(t)\, u^s(t).$$

To ovšem znamená, že u je na J řešením (7.1) a s důkazem jsme hotovi. □

Příklad 7.5. Hledáme-li všechna kladná řešení diferenciální rovnice

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}, \tag{7.9}$$

můžeme psát

$$y' = 3y^{\frac{2}{3}},$$

což je Bernoulliova diferenciální rovnice s volbou $I = \mathbb{R}$, $p(t) = 0$, $q(t) = 3$, $s = \frac{2}{3}$. Postupujme formálně. Po přenásobení platí

$$y^{-\frac{2}{3}} y' = 3,$$

Obsah
146. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

takže

$$\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}y' = 1.$$

Substituce $z = y^{1-\frac{2}{3}} = y^{\frac{1}{3}}$ vede postupně k $z' = \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}y'$, takže získáváme diferenciální rovnici

$$z' = 1.$$

Odtud $z(t) = t + C, \quad C \in \mathbb{R}$, takže $y^{\frac{1}{3}}(t) = t + C$, odkud $y(t) = (t + C)^3$. Přenecháme čtenáři, aby si podrobně rozmyslel, že vzhledem k výše uvedeným tvrzením je náš postup ospravedlnitelný pouze pro kladná řešení, tedy

$$y(t) = (t + C)^3, \quad C \in \mathbb{R}, \quad t \in (-C, \infty).$$

Pomocí vhodného převodu na Bernoulliovu rovnici lze zřejmě také hledat záporná řešení (7.9). Laskavý čtenář si rozmyslí, že po substituci

$$Y = -y, \quad Y' = -y',$$

lze upravit (7.9) na rovnici

$$Y' = -3Y^{\frac{2}{3}},$$

u které hledáme pouze kladná řešení a posléze provedeme zpětnou substituci. Jednodušší je ovšem zkouškou přímo prověřit, že řešením (7.9) na $\mathbb{R}$ je každá funkce tvaru

$$y(t) = (t + C)^3, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Na závěr příkladu si ještě vzpomeňme, že s rovnicí (7.9) jsme se již setkali dříve (v kapitole 3) a také se setkáme na několika místech dále v textu (v kapitole 8 a dále opět v kapitole 8), přičemž je popsáno, jak lze pomocí techniky slepování nalézt všechna její maximální řešení.

▲

Obsah
147. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Příklad 7.6. Určeme maximální řešení Cauchyovy úlohy

$$y' - \frac{1}{t}y = t\frac{1}{y}, \tag{7.10}$$

$$y(-1) = -2. \tag{7.11}$$

Vzhledem k počáteční podmínce uvažujeme rovnici (7.10) pouze pro $t \in I = (-\infty, 0)$, kde jde o Bernoulliovu rovnici s volbami

$$s = -1,\ \forall t \in I:\ p(t) = -\frac{1}{t},\ q(t) = t.$$

Vzhledem k pravé straně rovnice (7.10) nás zajímají jen taková řešení uvedené rovnice, která nabývají pouze záporných hodnot. Po přenásobení nejprve získáváme rovnici

$$yy' - \frac{1}{t}y^2 = t, \quad t < 0,\ y < 0.$$

Po substituci $z = y^2, \quad z' = 2yy'$ můžeme poslední rovnici převést v lineární diferenciální rovnici tvaru

$$z' - \frac{2}{t}z = 2t, \quad t < 0. \tag{7.12}$$

Přenechejme čtenáři podrobné vyřešení poslední rovnice. Tak zjistí, že její řešení lze zapsat ve tvaru

$$z(t) = Ct^2 + 2t^2 \ln(-t),\ C \in \mathbb{R}.$$

Z počáteční podmínky (7.11) plyne $z(-1) = y^2(-1) = 4$, odkud ihned $C = 4$ a získáváme tak vhodné partikulární řešení rovnice (7.12):

$$\psi(t) = 4t^2 + 2t^2 \ln(-t).$$

Obsah
148. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Z podmínek $\varphi^2 = \psi \wedge \varphi < 0$, pak získáváme předpis pro maximální řešení φ zadané Cauchyovy úlohy:

$$\varphi(t) = -\sqrt{4t^2 + 2t^2 \ln(-t)}, \quad t \in \left(-\infty, -\mathrm{e}^{-2}\right).$$

▲

Obsah

149. strana ze 336

Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Kapitola 8

Exaktní diferenciální rovnice

Nechť funkce $M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jsou definovány na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. V této části textu se budeme zabývat diferenciální rovnici prvního řádu ve tvaru

$$M(t, y) + N(t, y) \cdot y' = 0. \tag{8.1}$$

Pro zadaný bod $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ budeme spolu s rovnicí (8.1) uvažovat ještě počáteční podmínku

$$y(t_0) = y_0. \tag{8.2}$$

Rovnici (8.1) nazveme exaktní, jestliže existuje taková diferencovatelná funkce $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovaná na Ω, že pro všechny body $(t, y) \in \Omega$ platí:

$$\frac{\partial V(t, y)}{\partial t} = M(t, y), \qquad \frac{\partial V(t, y)}{\partial y} = N(t, y). \tag{8.3}$$

Funkci V pak nazýváme potenciálem uspořádané dvojice funkcí (M, N) na Ω.

Poznámka 8.1. Pro potenciál V dvojice (M, N) tedy musí platit:

$$\operatorname{grad} V = (M, N).$$

V literatuře se někdy místo pojmu potenciál dvojice (M, N) používá název kmenová funkce rovnice (8.1).

Poznámka 8.2. Ve fyzice hodnota potenciálu $V(t, y)$ v bodě (t, y) obvykle odpovídá potenciální energii v daném místě. Hodnota $\operatorname{grad} V(t, y)$ pak udává směr největšího vzrůstu této energie, uvedený gradient proto popisuje hodnotu intenzit sil potenciálního vektorového pole. V elektrostatice se například funkcí V reprezentuje plošný elektrostatický potenciál, vektorová funkce $\operatorname{grad} V = (M, N)$ je pak polem elektrických intenzit.

Příklad 8.3. Prozkoumejme rovnici

$$2t\sqrt{y} + 1 + \frac{t^2+1}{2\sqrt{y}} \cdot y' = 0. \tag{8.4}$$

Řešení. Zvolíme-li dvojici funkcí (M, N) definovanou na $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ předpisy

$$M(t, y) = 2t\sqrt{y} + 1, \quad N(t, y) = \frac{t^2+1}{2\sqrt{y}},$$

ihned vidíme, že zadaná rovnice je konkrétním případem (8.1). Pokusme se ukázat, že daná rovnice je exaktní. Předpokládejme tedy, že existuje diferencovatelná funkce $V : \Omega \to \mathbb{R}$, pro kterou na Ω platí rovnosti

$$\frac{\partial V(t, y)}{\partial t} = 2t\sqrt{y} + 1, \tag{8.5}$$

Obsah
151. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

$$\frac{\partial V(t,y)}{\partial y} = \frac{t^2+1}{2\sqrt{y}}. \tag{8.6}$$

Integrací rovnosti (8.5) podle proměnné t na $\mathbb{R}$ zjišťujeme, že pak musí existovat diferencovatelná funkce χ, definovaná na $\mathbb{R}^+$ a taková,[1] že na Ω platí:

$$V(t,y) = t^2\sqrt{y} + t + \chi(y).$$

Využijeme-li nyní rovnosti (8.6), musí na Ω platit

$$\frac{\partial V(t,y)}{\partial y} = \frac{t^2}{2\sqrt{y}} + \chi'(y) = \frac{t^2+1}{2\sqrt{y}},$$

takže na $\mathbb{R}^+$ musí platit rovnost

$$\chi'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Odtud integrací zjistíme, že funkce χ musí na $\mathbb{R}^+$ splňovat vztah

$$\chi(y) = \sqrt{y} + C,$$

kde $C \in \mathbb{R}$ je nějaké číslo.
Shrňme naše úvahy. Z předpokladu existence potenciálu V jsme zjistili, že tento potenciál musí být funkce vyhovující na Ω vztahu

$$V(t,y) = t^2\sqrt{y} + t + \sqrt{y} + C, \tag{8.7}$$

[1] Přesněji vzato, χ je takovou funkcí definovanou na Ω, která je konstantní vzhledem k první proměnné t.

Obsah
152. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

kde $C \in \mathbb{R}$ je konstanta, na kterou podmínky (8.5), (8.6) nekladly žádná omezení. Pokud se tedy hlouběji zamyslíme nad způsobem, kterým jsme získali vztah (8.7), zjistíme, že pro libovolnou pevně zvolenou hodnotu $C \in \mathbb{R}$ je funkce V zadaná předpisem (8.7) potenciálem dvojice (M, N), takže (8.4) je exaktní diferenciální rovnicí. ▲

Poznámka 8.4. (**O exaktnosti separovatelných rovnic**) Uvažujme separovatelnou diferenciální rovnici ve tvaru

$$h(t) + g(y) \cdot y' = 0, \tag{8.8}$$

kde h, g jsou spojité funkce definované na otevřených intervalech $I \subset \mathbb{R}$, respektive $J \subset \mathbb{R}$. Na otevřeném obdélníku $I \times J$ definujme funkci $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vztahem

$$V(t, y) = \int h(t)\, \mathrm{d}t + \int g(y)\, \mathrm{d}y.$$

Potom V je diferencovatelná a na $I \times J$ zřejmě platí

$$\frac{\partial V(t, y)}{\partial t} = h(t), \qquad \frac{\partial V(t, y)}{\partial t} = g(y),$$

takže separovatelnou rovnici (8.8) lze považovat za exaktní diferenciální rovnici.

Příklad 8.5. Rovnici se separovanými proměnnými

$$\mathrm{e}^y \cdot y' = -\cos t,$$

můžeme ekvivalentně zapsat ve tvaru

$$\cos t + \mathrm{e}^y \cdot y' = 0,$$

Obsah
153. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

a považovat za exaktní rovnici s potenciálem

$$V(t,y) = \sin t + \mathrm{e}^{y}.$$

▲

Poznámka 8.6. (**O vrstevnicích potenciálu a řešeních exaktní rovnice**) Nechť V je potenciálem dvojice funkcí (M,N) na Ω. Nechť $(t_0,y_0) \in \Omega$. Předpokládejme, že existuje taková funkce $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná na otevřeném intervalu $J \subset \mathbb{R}$, že $\varphi(t_0) = y_0$ a na J platí:

$$V(t,\varphi(t)) = V(t_0,y_0). \tag{8.9}$$

Graf funkce φ tedy tvoří část vrstevnice funkce V o kótě $V(t_0,y_0)$. Nechť funkce φ je navíc diferencovatelná. Pokusme se (podle proměnné t) derivovat obě strany rovnosti (8.9). Na pravé straně derivujeme konstantní funkci, takže získáme funkci nulovou na J. Při derivování levé strany vztahu zřejmě můžeme použít pravidlo pro derivaci složené funkce více proměnných (vnější funkce V je funkcí dvou reálných proměnných). Na J tak získáváme rovnost

$$\frac{\partial V(t,\varphi(t))}{\partial t} + \frac{\partial V(t,\varphi(t))}{\partial y} \cdot \varphi'(t) = 0.$$

Použijeme-li nyní na levé straně vztahy (8.3):

$$\frac{\partial V(t,y)}{\partial t} = M(t,y), \qquad \frac{\partial V(t,y)}{\partial y} = N(t,y),$$

vidíme, že na J musí platit:

Obsah
154. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

$$M(t, \varphi(t)) + N(t, \varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = 0.$$

To ovšem znamená, že funkce φ je na J řešením Cauchyovy úlohy (8.1), (8.2).

Právě jsme si ukázali, že je rozumné pátrat po řešeních exaktní rovnice mezi vrstevnicemi kmenové funkce této rovnice. Ve fyzikální terminologii lze také volně říci, že řešení exaktní rovnice hledáme mezi ekvipotenciálními křivkami pole intenzit. Pro doplnění a zpřesnění dosud provedených pozorování formulujme následující tvrzení:

Věta 8.7 (O řešeních exaktní rovnice). *Nechť M, N jsou spojité funkce definované na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Buď $(t_0, y_0) \in \Omega$. Nechť (8.1) je exaktní diferenciální rovnicí s kmenovou funkcí V. Potom platí:*

1) *Nechť φ je libovolná diferencovatelná funkce definovaná na otevřeném intervalu $J \subset \mathbb{R}$ a taková, že $\varphi(t_0) = y_0$. Pak φ je řešením Cauchyovy úlohy (8.1), (8.2) na J právě tehdy, když na J platí*

$$V(t, \varphi(t)) = V(t_0, y_0).$$

2) *Předpokládejme navíc, že pro všechna $(t, y) \in \Omega$ platí:*

$$N(t, y) \neq 0. \tag{8.10}$$

Potom Cauchyova úloha (8.1), (8.2) má právě jedno maximální řešení.

Pro zájemce

Důkaz. I. Budiž φ libovolná diferencovatelná funkce definovaná na otevřeném intervalu $J \subset \mathbb{R}$ a taková, že $\varphi(t_0) = y_0$. Na intervalu J zřejmě platí

$$V(t, \varphi(t)) = V(t_0, y_0),$$
$$\Updownarrow$$
$$V(t, \varphi(t)) = V(t_0, \varphi(t_0)),$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{\partial V(t,\varphi(t))}{\partial t} + \frac{\partial V(t,\varphi(t))}{\partial y} \cdot \varphi'(t) = 0,$$
$$\Updownarrow$$
$$M(t,\varphi(t)) + N(t,\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = 0,$$

čímž jsme hotovi s důkazem první části.

II.

A.

Nejprve dokážeme existenci řešení zkoumané Cauchyovy úlohy.

Na Ω definujme funkci G předpisem

$$G(t, y) = V(t, y) - V(t_0, y_0).$$

Z předpokladů věty plyne, že funkce G má na Ω spojité první derivace,

$$G(t_0, y_0) = 0$$

a

$$\frac{\partial G(t_0, y_0)}{\partial y} = N(t_0, y_0) \neq 0.$$

Obsah
156. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Podle věty o implicitně zadané funkci tedy existuje otevřený interval J a právě jedna spojitě diferencovatelná funkce φ, která je definovaná na J a taková, že na J platí:

$$G\left(t,\varphi\left(t\right)\right)=0\ \wedge\ \varphi\left(t_0\right)=y_0.$$

To ovšem znamená, že na J platí

$$V\left(t,\varphi\left(t\right)\right)=V\left(t_0,y_0\right),$$

takže podle první, již dokázané části Věty, je φ řešením (8.1), (8.2) na J.

B.

Nyní dokážeme, že je-li φ_1 řešením (8.1), (8.2) na intervalu I_1 a φ_2 řešením (8.1), (8.2) na I_2, potom na $I_1\cap I_2$ obě řešení splývají. Princip důkazu této části spočívá v důkazu nemožnosti existence bodu $\bar{t}\in I_1\cap I_2$, ve kterém by docházelo k větvení řešení.

Nejprve si všimněme, že $t_0\in I_1\cap I_2$, takže uvažovaný průnik je neprázdným otevřeným intervalem. Předpokládejme, kvůli sporu, že existuje $t^*\in I_1\cap I_2$ takové, že $\varphi_1\left(t^*\right)\neq\varphi_2\left(t^*\right)$. Nechť $t^*<t_0$ (v případě $t^*>t_0$ se postupuje podobně). Označíme-li

$$\bar{t}=\sup\left\{t\in I_1\cap I_2:\ t<t_0\ \wedge\ \varphi_1\left(t\right)\neq\varphi_2\left(t\right)\right\},$$

musí platit $\bar{t}\in I_1\cap I_2$, $\bar{t}\leqq t_0$. Je-li $\bar{t}=t_0$, zřejmě platí $\varphi_1\left(\bar{t}\right)=\varphi_2\left(\bar{t}\right)$. Nechť $\bar{t}<t_0$. To ovšem znamená, že na $\left(\bar{t},t_0\right)$ platí $\varphi_1\left(t\right)=\varphi_2\left(t\right)$. Ze spojitosti funkcí φ_1, φ_2 pak plyne:

$$\varphi_1\left(\bar{t}\right)=\lim_{t\to\bar{t}^+}\varphi_1\left(t\right)=\lim_{t\to\bar{t}^+}\varphi_2\left(t\right)=\varphi_2\left(\bar{t}\right).$$

Označme $\bar{y}=\varphi_1\left(\bar{t}\right)$ a zdůrazněme, že jsme dokázali, že také platí $\bar{y}=\varphi_2\left(\bar{t}\right)$. Definujme funkci G předpisem

$$G\left(t,y\right)=V\left(t,y\right)-V\left(\bar{t},\bar{y}\right).$$

Funkce G má podle předpokladů věty na Ω spojité první derivace,

$$G\left(\bar{t},\bar{y}\right)=0,$$

Obsah
157. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

a

$$\frac{\partial G\left(\bar{t},\bar{y}\right)}{\partial y} = N\left(\bar{t},\bar{y}\right) \neq 0.$$

Podle věty o implicitně definované funkci tedy existuje otevřený interval K a právě jedna spojitě diferencovatelná funkce ψ definovaná na K a taková, že na K platí:

$$G\left(t,\psi\left(t\right)\right) = 0 \ \wedge \ \psi\left(\bar{t}\right) = \bar{y},$$

což znamená:

$$\forall t \in K: \ V\left(t,\psi\left(t\right)\right) = V\left(\bar{t},\bar{y}\right) \ \wedge \ \psi\left(\bar{t}\right) = \bar{y}.$$

Protože funkce φ_1, φ_2 lze chápat jako řešení Cauchyovy úlohy (8.1), $y\left(\bar{t}\right) = \bar{y}$, podle první části Věty platí

$$\forall t \in I_1: \ V\left(t,\varphi_1\left(t\right)\right) = V\left(\bar{t},\bar{y}\right) \ \wedge \ \varphi_1\left(\bar{t}\right) = \bar{y},$$

$$\forall t \in I_2: \ V\left(t,\varphi_2\left(t\right)\right) = V\left(\bar{t},\bar{y}\right) \ \wedge \ \varphi_2\left(\bar{t}\right) = \bar{y}.$$

Funkce ψ je ovšem na K zadána jednoznačně, takže na $K \cap I_1 \cap I_2$ musí platit

$$\varphi_1\left(t\right) = \psi\left(t\right) = \varphi_2\left(t\right),$$

což je spor s definicí $\bar{t}$. Z vlastností suprema totiž plyne, že v otevřeném intervalu $K \cap I_1 \cap I_2$ musí ležet alespoň jeden bod, ve kterém se hodnoty funkcí φ_1, φ_2 liší.

C.

Nyní zbývá jen popsat konstrukci maximálního řešení uvažované Cauchyovy úlohy. Vezměme sjednocení

$$I = \bigcup_{\tau\in\Theta} I_\tau$$

všech otevřených intervalů I_τ, na kterých jsou definována řešení φ_τ Cauchyovy úlohy (8.1), (8.2). Protože existuje alespoň jedno řešení uvedené úlohy a pro každé $\tau \in \Theta$ platí $t_0 \in I_\tau$, I je zřejmě

neprázdným a otevřeným intervalem. Je-li $t \in I$, znamená to, že pro nějaké $\tau \in \Theta$ je $t \in I_\tau$, a proto můžeme (vzhledem k jednoznačnosti dokázané v části II.B) definovat právě jednu hodnotu

$$\tilde{\varphi}(t) = \varphi_\tau(t).$$

Tak jsme na I definovali funkci $\tilde{\varphi}$, která je zřejmě řešením zadané Cauchyovy úlohy. Z definice I je zřejmé, že $\tilde{\varphi}$ nelze prodloužit, takže jde o maximální řešení. Jednoznačnost tohoto maximálního řešení pak opět snadno plyne z tvrzení dokázaného v části II.B důkazu Věty. □

Příklad 8.8. Nalezněme maximální řešení Cauchyovy úlohy

$$2t\sqrt{y} + 1 + \frac{t^2+1}{2\sqrt{y}} \cdot y' = 0, \qquad y(0) = 1.$$

Řešení. V Příkladu 8.3 jsme zjistili, že uvedená rovnice je exaktní a jejím potenciálem je například funkce V zadaná na $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ předpisem

$$V(t,y) = t^2\sqrt{y} + t + \sqrt{y}.$$

Protože pro každé $(t,y) \in \Omega$ platí

$$\frac{t^2+1}{2\sqrt{y}} \neq 0,$$

existuje právě jedno maximální řešení φ zadané Cauchyovy úlohy. Hledejme tedy „maximální" otevřený interval I a diferencovatelnou funkci φ definovanou na I tak, aby na I platilo:

$$\varphi(0) = 1 \wedge \varphi(t) \in \mathbb{R}^+ \wedge t^2\sqrt{\varphi(t)} + t + \sqrt{\varphi(t)} = 1.$$

Obsah
159. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Po drobných úpravách a přihlédnutí ke všem uvedeným podmínkám zjišťujeme, že musí platit

$$\varphi(t) = \left(\frac{1-t}{t^2+1}\right)^2, \qquad t \in I = (-\infty, 1),$$

což je předpis pro maximální řešení uvažované Cauchyovy úlohy. ▲

Poznámka 8.9. Z prvého tvrzení Věty 8.7 plyne, že všechna řešení exaktní rovnice s potenciálem V lze popsat požadavkem

$$V(t,y) = C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Například všechna řešení exaktní rovnice z předchozího příkladu jsou zahrnuta ve vztahu

$$t^2\sqrt{y} + t + \sqrt{y} = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Z právě uvedeného vzorce jsme schopni najít explicitní vyjádření předpisu pro řešení:

$$y(t) = \left(\frac{C-t}{t^2+1}\right)^2, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

V řadě případů je však nalezení explicitního vyjádření příslušného předpisu obtížné nebo dokonce nemožné. Obvykle se pak spokojíme s dílčím úspěchem a po nalezení potenciálu V řešení zadaného příkladu ukončíme zápisem

$$V(t,y) = C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Podobně budeme postupovat i při zkoumání Cauchyových úloh pro exaktní rovnice. Jsou-li na Ω nenulové všechny hodnoty $N(t,y)$, pak maximální řešení φ (o rovnici $y = \varphi(t)$) příslušné Cauchyovy úlohy je jednoznačně určeno podmínkou

$$y(t_0) = y_0$$

a implicitním vztahem

$$V(t,y) = V(t_0,y_0)\,.$$

Zápis uvedených podmínek budeme považovat za úspěšné splnění úkolu v případě, kdy nebude možné jednoduše vyjádřit explicitní předpis pro φ.

Nakonec se ještě domluvme, že pokud v zadání nebude výslovně uveden požadavek nalezení maximálního řešení Cauchyovy úlohy, bude stačit vymezení libovolného řešení této úlohy. V takovém případě je vhodné si rozmyslet, že k zajištění existence (a lokální jednoznačnosti) řešení Cauchyovy úlohy stačí spojitost funkcí M, N na nějakém okolí bodu (t_0,y_0) a splnění požadavku $N(t_0,y_0)\neq 0$, který v důsledku spojitosti N zaručuje, že hodnoty $N(t,y)$ budou nenulové na nějakém okolí bodu (t_0,y_0). Potom totiž stačí aplikovat Větu 8.7, kde Ω zvolíme jako takové okolí bodu (t_0,y_0), na kterém jsou spojité obě funkce M, N a současně jsou v něm nenulové všechny hodnoty $N(t,y)$.

V následujících příkladech uveďme ukázky stručného zápisu řešení některých rovnic a Cauchyových úloh.

Příklad 8.10. Řešte diferenciální rovnici

$$\mathrm{e}^y + (t\mathrm{e}^y - 2y)\,y' = 0.$$

Řešení.

$$\frac{\partial V(t,y)}{\partial t} = \mathrm{e}^y \;\Rightarrow\; V(t,y) = t\mathrm{e}^y + \chi(y) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{\partial V(t,y)}{\partial y} = t\mathrm{e}^y + \chi'(y) \;\Rightarrow\; t\mathrm{e}^y + \chi'(y) = t\mathrm{e}^y - 2y \;\Rightarrow$$

Obsah
161. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

$$\Rightarrow \ \chi'(y) = -2y.$$

Odtud například

$$\chi(y) = -y^2,$$

takže zadaná rovnice je exaktní rovnicí s potenciálem

$$\underline{V(t,y) = te^y - y^2}.$$

Řešení zadané rovnice splňují podmínky:

$$\underline{\underline{te^y - y^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}}}.$$

▲

Příklad 8.11. Řešte Cauchyovu úlohu

$$2t^3 - ty^2 + \left(2y^3 - t^2 y\right) y' = 0, \qquad y(0) = 1.$$

Řešení.

$$\frac{\partial V(t,y)}{\partial y} = 2y^3 - t^2 y \ \Rightarrow \ V(t,y) = \frac{1}{2}y^4 - \frac{1}{2}t^2 y^2 + \psi(t) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \frac{\partial V(t,y)}{\partial t} = -ty^2 + \psi'(t) \ \Rightarrow \ -ty^2 + \psi'(t) = 2t^3 - t^2 y \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \psi'(t) = 2t^3.$$

Odtud například

$$\psi(t) = \frac{1}{2}t^4,$$

Obsah
162. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

takže zadaná rovnice je exaktní rovnicí s potenciálem

$$V(t,y) = \frac{1}{2}\left(y^4 - t^2y^2 + t^4\right).$$

Řešení zadané rovnice splňují podmínky:

$$y^4 - t^2y^2 + t^4 = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Protože funkce

$$M(t,y) = 2t^3 - ty^2, \qquad N(t,y) = 2y^3 - t^2y$$

jsou spojité a

$$N(0,1) = 2 \neq 0,$$

existuje otevřený interval J a jediná funkce φ definovaná na J, která je na tomto intervalu řešením zadané Cauchyovy úlohy. Funkce φ (o rovnici $y = \varphi(t)$) je dána implicitně vztahem

$$y^4 - t^2y^2 + t^4 = 4$$

a podmínkou

$$y(0) = 1.$$

▲

Jak jsme měli možnost vidět, existence a vlastnosti potenciálu hrají podstatnou roli při studiu rovnic tvaru (8.1). Věnujme se proto této problematice podrobněji.

Nejprve si všimněme, že jednorozměrnou analogií potenciálu je vlastně neurčitý integrál. Pro libovolné primitivní funkce k funkci f na otevřeném intervalu J platí, že se liší

nejvýše o aditivní (integrační) konstantu. Podobné tvrzení lze vyslovit i o potenciálu dvojice (M, N). Přitom se však ukazuje, že je třeba úžeji specifikovat množinu Ω na níž potenciály zkoumáme. To vede k následující definici:

Neprázdnou množinu $\Omega \in \mathbb{R}^n$ nazýváme souvislou, jestliže neexistuje dvojice otevřených množin $G_1 \subset \mathbb{R}^n$, $G_2 \subset \mathbb{R}^n$ taková, že současně platí:

$$\Omega \subset G_1 \cup G_2, \qquad G_1 \cap G_2 = \emptyset,$$

$$\Omega \cap G_1 \neq 0, \;\; \Omega \cap G_2 \neq 0.$$

Otevřeným a souvislým množinám $\mathbb{R}^n$ říkáme oblasti.

Poznámka 8.12. Pro lepší interpretaci pojmu oblast si uveďme, že lze ukázat: Neprázdná množina $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je oblastí, právě když je otevřenou množinou a každé dva body z Ω lze spojit lomenou čarou, která celá leží v Ω. Například oblastí v $\mathbb{R}$ je každý otevřený interval v $\mathbb{R}$.

Poznámka 8.13. (**O všech potenciálech**) Lze dokázat, že platí: Nechť dvojice (M, N) má na oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ potenciál V. Pak se všechny potenciály dvojice (M, N) na Ω liší nejvýše o aditivní konstantu. Jinak zapsáno, množina

$$\{W \in C(\Omega) : \; \exists C \in \mathbb{R} \; \forall (t, y) \in \Omega : \; W(t, y) = V(t, y) + C\}$$

představuje všechny potenciály dvojice (M, N) na oblasti Ω.

Nyní formulujme jednoduché pravidlo, podle kterého snadno usoudíme, že rovnice (8.1) není exaktní.

Věta 8.14 (O nutné podmínce exaktnosti). *Nechť funkce M, N definované na otevřené množině Ω mají spojité parciální derivace. Nechť rovnice (8.1) je exaktní. Pak platí:*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}.$$

Důkaz. Uvažovaná rovnice je exaktní, takže pro příslušný potenciál V platí:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = M, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = N.$$

Při splnění předpokladů věty má potenciál V dvojice (M, N) na Ω spojité všechny parciální derivace až do druhého řádu. Podle pravidla o záměnnosti smíšených parciálních derivací platí:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial t},$$

odkud ihned plyne:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial t} = \frac{\partial N}{\partial t}.$$

□

Příklad 8.15. Rovnice

$$t \sin y + y' \cdot \cos y = 0$$

není exaktní. Skutečně, definujeme-li

$$M(t, y) = t \sin y, \qquad N(t, y) = \cos y,$$

Obsah
165. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

pak

$$\frac{\partial M\,(t,y)}{\partial y} = t\cos y, \qquad \frac{\partial N\,(t,y)}{\partial t} = -\sin y,$$

takže

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial t}.$$

Všimněme si ještě, že v tomto případě by nám zřejmě nepomohlo, ani kdybychom uvažovali zadanou rovnici na menší otevřené množině než je $\mathbb{R}^2$.

▲

Poznámka 8.16. Neklademe-li na oblast Ω další podmínky, pak rovnost $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$ na Ω obecně nestačí k zajištění existence potenciálu. Situace se však změní, je-li Ω speciálním typem oblasti, tzv. jednoduše souvislou oblastí. Přesnou definici pojmu jednoduše souvislá oblast přenechme vyšším partiím matematické analýzy a na tomto místě se spokojme s intuitivním popisem. Řekneme, že oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je jednoduše souvislá, nemá-li „díry“. Například otevřený kruh

$$\left\{(t,y) \in \mathbb{R}^2 : t^2 + y^2 < 4\right\}$$

je jednoduše souvislou oblastí, zatímco otevřené mezikruží

$$\left\{(t,y) \in \mathbb{R}^2 : t^2 + y^2 > 1 \wedge t^2 + y^2 < 4\right\}$$

je oblastí, která není jednoduše souvislá. Jednoduše souvislou oblastí není ani žádné prstencové okolí libovolného bodu, například množina

$$\left\{(t,y) \in \mathbb{R}^2 : t^2 + y^2 < 4\right\} \setminus \left\{(0,0)\right\}.$$

Obsah
166. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Důležitými příklady jednoduše souvislých oblastí jsou následující množiny: libovolný otevřený kruh (okolí bodu), libovolný otevřený obdélník, celá rovina $\mathbb{R}^2$. Pro čtenáře blíže seznámené s pojmem křivky můžeme ještě uvést přesnější specifikaci pojmu jednoduše souvislá oblast: Oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je jednoduše souvislá, právě když lze každou jednoduchou uzavřenou křivku ležící v Ω spojitě stáhnout (v Ω) do bodu.

Věta 8.17 (O postačující podmínce existence potenciálu). *Nechť funkce $M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jsou definovány na jednoduše souvislé oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ a mají zde spojité parciální derivace. Nechť platí:*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}.$$

Potom existuje potenciál dvojice (M, N) na Ω.

Příklad 8.18. Rovnice

$$\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^y \cdot y' = 0$$

je exaktní diferenciální rovnicí, protože na jednoduše souvislé oblasti $\mathbb{R}^2$ platí:

$$\frac{\partial \left(\mathrm{e}^t\right)}{\partial y} = 0 = \frac{\partial \left(\mathrm{e}^y\right)}{\partial t}.$$

▲

Poznámka 8.19. Při hledání řešení rovnice (8.1) zpravidla nejprve zjišťujeme, zda se vůbec jedná o exaktní rovnici, to znamená, zda je zajištěna existence potenciálu. V takovém

případě začneme s ověřováním rovnosti $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$. To někdy vede k tomu, že se omezíme na vhodnou jednoduše souvislou oblast Ω, která se nemusí krýt s původně daným „oborem rovnice“. Dalším důvodem pro zúžení oboru rovnice bývá zajištění splnění požadavku $N(t,y) \neq 0$ garantujícího existenci a jednoznačnost. Poté začneme s výpočtem potenciálu. Na konkrétních příkladech uvedených výše, jsme si již ukázali, jak jej lze nalézt. Jako malé opakování ještě shrňme poněkud systematičtěji uvedený postup.

Nechť na oblasti Ω jsou definovány spojité funkce M, N. Označme

$$m(t,y) = \int M(t,y)\,\mathrm{d}t, \quad (t,y) \in \Omega,$$

$$n(t,y) = \int N(t,y)\mathrm{d}y, \quad (t,y) \in \Omega.$$

Existuje-li potenciál V dvojice (M,N) na Ω, pak existují funkce $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které jsou diferencovatelné a takové, že současně platí

$$V(t,y) = m(t,y) + \chi(y), \ (t,y) \in \Omega, \tag{8.11}$$

$$V(t,y) = n(t,y) + \psi(t), \ (t,y) \in \Omega. \tag{8.12}$$

Funkci χ lze někdy určit vzhledem k (8.11) ze vztahu

$$\frac{\partial m(t,y)}{\partial y} + \chi'(y) = N(t,y), \ (t,y) \in \Omega. \tag{8.13}$$

Funkci ψ lze někdy určit vzhledem k (8.12) ze vztahu

$$\frac{\partial n(t,y)}{\partial t} + \psi'(t) = M(t,y), \ (t,y) \in \Omega. \tag{8.14}$$

Obsah
168. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Při hledání potenciálu V se nejprve rozhodneme, kterou z funkcí m, n lze snadněji vypočítat. Po integraci se pak snažíme určit z (8.11) - (8.14) celý předpis pro V.

Někdy jsme při hledání maximálních řešení nuceni použít techniku slepování.

Příklad 8.20. Určeme všechna maximální řešení ODR

$$3t^2 + 2ty + (t^2 - 1)y' = 0. \tag{8.15}$$

Řešení. Ověřme nejprve, zda jde o exaktní rovnici. Pro všechna $(t, y) \in \mathbb{R}^2$ platí:

$$M(t, y) = 3t^2 + 2ty \Rightarrow \frac{\partial M(t, y)}{\partial y} = 2t,$$

$$N(t, y) = t^2 - 1 \Rightarrow \frac{\partial N(t, y)}{\partial t} = 2t.$$

Na jednoduše souvislé oblasti $\mathbb{R}^2$ tedy platí $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$, rovnice (8.15) je proto exaktní diferenciální rovnicí a na $\mathbb{R}^2$ existuje potenciál V dvojice funkcí (M, N). Nalezněme jej.

$$n(t, y) = \int (t^2 - 1)\mathrm{d}y = (t^2 - 1)y,$$

$$V(t, y) = (t^2 - 1)y + \psi(t).$$

Funkci ψ nalezneme z podmínky $\frac{\partial V}{\partial t} = M$ na $\mathbb{R}^2$:

$$2ty + \psi'(t) = 3t^2 + 2ty,$$

Obsah
169. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

$$\psi'(t) = 3t^2, \qquad \psi(t) = t^3,$$

$$V(t,y) = (t^2-1)y + t^3.$$

Všimněme si nyní, že rovnost $N(t,y) = t^2 - 1 = 0$ nastane právě tehdy, když $t = 1$ nebo $t = -1$. Na obou zmíněných přímkách jsou tedy porušeny předpoklady zaručující jednoznačnost. Označme proto

$$\Omega_1 = (-\infty, -1) \times \mathbb{R},$$

$$\Omega_2 = (-1, 1) \times \mathbb{R},$$

$$\Omega_3 = (1, +\infty) \times \mathbb{R}.$$

Věta 8.7 zajišťuje existenci a jednoznačnost maximálních řešení pro následující Cauchyovy úlohy:

$$3t^2 + 2ty + (t^2-1)y' = 0,\ (t,y) \in \Omega_1;\ y(t_0) = y_0\ ((t_0,y_0) \in \Omega_1) \tag{8.16}$$

$$3t^2 + 2ty + (t^2-1)y' = 0,\ (t,y) \in \Omega_2;\ y(t_0) = y_0\ ((t_0,y_0) \in \Omega_2) \tag{8.17}$$

$$3t^2 + 2ty + (t^2-1)y' = 0,\ (t,y) \in \Omega_3;\ y(t_0) = y_0\ ((t_0,y_0) \in \Omega_3) \tag{8.18}$$

Potenciál dvojice funkcí (M,N) jsme nalezli na $\mathbb{R}^2$, tedy rovněž na Ω_1, Ω_2, Ω_3.

Uvažujme nyní bod $(t_0, y_0) \in \Omega_1$, resp. $(t_0, y_0) \in \Omega_2$, resp. $(t_0, y_0) \in \Omega_3$ a popišme maximální řešení úlohy (8.16), resp.(8.17), resp(8.18).

Označme $C = V(t_0, y_0) = (t_0^2 - 1)y_0 + t_0^3$ a všimněme si, že pro $i = 1, 2, 3$ platí:

a) Je-li $C \in \mathbb{R}$, pak v Ω_i lze nalézt bod (t_0, y_0) takový, že $V(t_0, y_0) = C$.

b) Ke každému bodu $(t_0, y_0) \in \Omega_i$ je jednoznačně přiřazena příslušná hodnota

$$C = V(t_0, y_0) \in \mathbb{R}.$$

Všechna řešení úlohy(8.16), resp.(8.17), resp.(8.18) jsou tedy funkce φ_c^1, resp. φ_c^2, resp. φ_c^3 (nezávislé proměnné t) vyhovující implicitním předpisům

$$(t^2 - 1)y + t^3 = C, \quad t \in (-\infty, -1), \text{ resp.}$$

$$(t^2 - 1)y + t^3 = C, \quad t \in (-1, 1), \text{ resp.}$$

$$(t^2 - 1)y + t^3 = C, \quad t \in (1, \infty).$$

V našem případě „máme štěstí“ a můžeme podat explicitní předpisy pro maximální řešení Cauchyových úloh (8.16), resp. (8.17), resp. (8.18).

$$\varphi_c^i(t) = \frac{C - t^3}{t^2 - 1}, \; C \in \mathbb{R}, \; i = 1, \text{ resp. } 2, \text{ resp. } 3, \tag{8.19}$$

$$t \in (-\infty, -1), \text{ resp. } t \in (-1, 1), \text{ resp. } t \in (1, \infty).$$

Nyní zbývá nalézt všechna maximální řešení rovnice (8.15), tj. rovnice

$$3t^2 + 2ty + (t^2 - 1)y' = 0$$

uvažované na celé rovině $\mathbb{R}^2$.

Ze vzorce (8.19) plyne :

$$\lim_{t\to -1-} \varphi_c^1(t) = \lim_{t\to -1-} \frac{C - t^3}{t^2 - 1} = \begin{cases} -\infty, \text{ pro } C < -1, \\ +\infty, \text{ pro } C > -1, \end{cases}$$

$$\lim_{t\to -1+} \varphi_c^2(t) = \lim_{t\to -1+} \frac{C - t^3}{t^2 - 1} = \begin{cases} -\infty, \text{ pro } C > -1, \\ +\infty, \text{ pro } C < -1, \end{cases}$$

$$\lim_{t\to 1-} \varphi_c^2(t) = \lim_{t\to 1-} \frac{C - t^3}{t^2 - 1} = \begin{cases} -\infty, \text{ pro } C > 1, \\ +\infty, \text{ pro } C < 1, \end{cases}$$

$$\lim_{t\to 1+} \varphi_c^3(t) = \lim_{t\to 1+} \frac{C - t^3}{t^2 - 1} = \begin{cases} -\infty, \text{ pro } C < 1, \\ +\infty, \text{ pro } C > 1. \end{cases}$$

Zbývá ještě prověřit následující limity:

$$\lim_{t\to -1-} \varphi_{-1}^1(t) = \lim_{t\to -1-} \frac{-1 - t^3}{t^2 - 1} = \lim_{t\to -1-} \frac{-3t^2}{2t} = \frac{3}{2},$$

$$\lim_{t\to -1+} \varphi_{-1}^2(t) = \lim_{t\to -1+} \frac{-1 - t^3}{t^2 - 1} = \lim_{t\to -1+} \frac{-3t^2}{2t} = \frac{3}{2},$$

Obsah
172. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

$$\lim_{t\to 1-}\varphi_1^2(t)=\lim_{t\to 1-}\frac{1-t^3}{t^2-1}=\lim_{t\to 1-}\frac{-3t^2}{2t}=-\frac{3}{2},$$
$$\lim_{t\to 1+}\varphi_1^3(t)=\lim_{t\to 1+}\frac{1-t^3}{t^2-1}=\lim_{t\to 1+}\frac{-3t^2}{2t}=-\frac{3}{2}.$$

Nyní můžeme na φ_{-1}^1, φ_{-1}^2 a φ_1^2, φ_1^3 aplikovat techniku slepování řešení. Definujme funkce

$$\hat{\varphi}(t)=\begin{cases}\frac{-1-t^3}{t^2-1},\ t\in(-\infty,-1),\\ \frac{3}{2},\ t=-1,\\ \frac{-1-t^3}{t^2-1},\ t\in(0,1),\end{cases}$$

$$\tilde{\varphi}(t)=\begin{cases}\frac{1-t^3}{t^2-1},\ t\in(-1,1),\\ -\frac{3}{2},\ t=1,\\ \frac{1-t^3}{t^2-1},\ t\in(1,\infty).\end{cases}$$

Funkce $\hat{\varphi}$, $\tilde{\varphi}$ jsou zřejmě spojité funkce, které lze zapsat ve tvaru:

$$\hat{\varphi}(t)=-t-\frac{1}{t-1},\ t\in(-\infty,1),$$

$$\tilde{\varphi}(t)=-t-\frac{1}{1+t},\ t\in(-1,\infty),$$

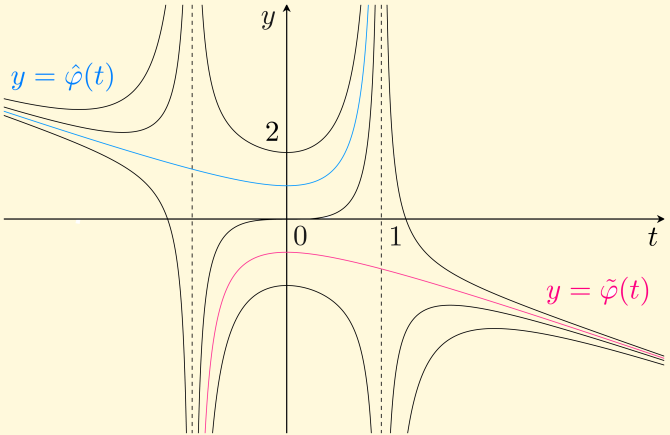
tedy $\hat{\varphi}$, $\tilde{\varphi}$ jsou diferencovatelné. Dosazením do rovnice (8.15) lze snadno ověřit, že $\hat{\varphi}$, $\tilde{\varphi}$ jsou řešeními (8.15).

Shrňme, že jsme zatím nalezli systém Φ funkcí, které jsou řešeními rovnice (8.15). Uvažovaný systém je tvořen funkcemi φ_c^1, φ_c^2, φ_c^3, kde $C\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ a dále funkcemi $\hat{\varphi}$, $\tilde{\varphi}$. O každé funkci systému Φ můžeme navíc říci, že jednostranné limity v krajních bodech

definičního oboru jsou nevlastní nebo jsou krajní body definičního oboru nevlastními body. To ovšem znamená, že systém Φ je tvořen maximálními řešeními rovnice (8.15).

Všimněme si ještě, že grafy funkcí systému Φ se neprotínají. Na Ω_1, resp. Ω_2, resp. Ω_3 je totiž zaručena jednoznačnost a při slepování jsme rovněž vyčerpali všechny možnosti. Systém Φ zřejmě obsahuje všechna maximální řešení (8.15). Každé řešení ψ rovnice (8.15) je totiž funkcí definovanou na otevřeném intervalu, tedy musí existovat bod grafu ψ, který leží v Ω_1 nebo v Ω_2 nebo v Ω_3, odtud pak nutně plyne $\psi \in \Phi$.

Průběh integrálních křivek řešení diferenciální rovnice (8.15) lze charakterizovat následujícím náčrtkem:



Obr. 8.1

Obsah
174. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Poznámka 8.21. (**O integračním faktoru**) Nechť rovnice

$$M(t,y) + N(t,y)y' = 0 \tag{8.20}$$

není exaktní. Někdy lze nalézt takovou funkci $\mu : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, že exaktní rovnicí bude rovnice

$$\mu(t,y) \cdot M(t,y) + \mu(t,y) \cdot N(t,y)y' = 0. \tag{8.21}$$

Funkci μ pak říkáme integrační faktor diferenciální rovnice (8.20).

Mají-li funkce M,N,μ stejný definiční obor Ω a je-li μ navíc taková funkce, že platí $\forall (t,y) \in \Omega : \ \mu(t,y) \neq 0$, pak diferenciální rovnice (8.20), (8.21) jsou zřejmě ekvivalentní, mají stejnou množinu řešení.

Nechť navíc funkce M, N, μ mají spojité parciální derivace na definičním oboru $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, kterým je jednoduše souvislá oblast. Pak μ lze hledat z postačujících podmínek pro exaktnost rovnice:

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial t},$$

to znamená ze vztahů:

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} M + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial t} N + \mu \frac{\partial N}{\partial t}.$$

Poslední řádek je vlastně parciální diferenciální rovnicí pro neznámou funkci μ, předpokládáme-li však, že μ je konstantní vzhledem k y, resp., že μ je konstantní vzhledem t, pak $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$, resp. $\frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$. Funkci μ lze tedy někdy hledat s úspěchem jako funkci proměnné t, která je řešením obyčejné diferenciální rovnice

$$\mu \frac{\partial M(t,y)}{\partial y} = \mu' N(t,y) + \mu \frac{\partial N(t,y)}{\partial t},$$

Obsah
175. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

nebo jako funkci proměnné y, která je řešením rovnice

$$\mu' M(t,y) + \mu \frac{\partial M(t,y)}{\partial y} = \mu \frac{\partial N(t,y)}{\partial t}.$$

Příklad 8.22. Hledejme řešení Cauchyovy úlohy

$$3ty + y^2 + (t^2 + ty)y' = 0,\ y(1) = 2.$$

Řešení.

$$M(t,y) = 3ty + y^2, \quad N(t,y) = t^2 + ty,$$
$$\frac{\partial M(t,y)}{\partial y} = 3t + 2y, \quad \frac{\partial N(t,y)}{\partial t} = 2t + y,$$

nejde tedy o exaktní diferenciální rovnici.
Hledejme integrační faktor jako funkci proměnné t, tj. $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$:

$$\frac{\partial M}{\partial y}\mu = \frac{\partial N}{\partial t}\mu + N\mu',$$

$$(3t + 2y)\mu = (2t + y)\mu + (t^2 + ty)\mu', \tag{8.22}$$
$$(t + y)\mu = t(t + y)\mu' \quad (t + y \neq 0),$$
$$\mu = t\mu',$$
$$\mu(t) = t.$$

(Všimněme si, že (8.22) platí rovněž v případě $t + y = 0$).

Obsah
176. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Získaná exaktní rovnice:

$$3t^2y + ty^2 + (t^3 + t^2y)y' = 0.$$

Po standardním výpočtu získáme potenciál:

$$V(t, y) = t^3y + \frac{1}{2}t^2y^2.$$

Po dosazení počáteční podmínky získáváme: $V(1, 2) = 4$. Položme

$$\Omega = \left\{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : t \in (0, +\infty) \wedge y > -t\right\}.$$

Při zúžení rovnice na Ω je zajištěna existence a jednoznačnost řešení uvažované Cauchyovy úlohy. Řešení je přitom dáno implicitně vztahy:

$$t^3y + \frac{1}{2}t^2y^2 = 4,\ y(1) = 2.$$

Poznamenejme ještě, že tomto příkladu šlo stěží hledat integrační faktor μ jako funkci proměnné y. Vzniklá rovnice by totiž obsahovala explicitně rovněž proměnnou t, které se „nezbavíme“ např. krácením. ▲

Poznámka 8.23. (**O integračním faktoru lineární rovnice**) Uvažujme lineární diferenciální rovnici

$$y' + a(t)\, y - b(t) = 0,$$

za předpokladu, že a, b jsou spojité funkce definované na otevřeném intervalu I. Uvedená rovnice obecně není exaktní, po přenásobení funkcí

$$\mu(t) = \mathrm{e}^{\int a(t)\,\mathrm{d}t}$$

Obsah
177. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

však přejde v ekvivalentní exaktní diferenciální rovnici:

$$\left[\left(a\left(t\right)y-b\left(t\right)\right)\mathrm{e}^{\int a(t)\,\mathrm{d}t}\right]+\mathrm{e}^{\int a(t)\,\mathrm{d}t}y'=0.$$

Skutečně, snadno ověříme, že na jednoduše souvislé oblasti $\Omega = I \times \mathbb{R}$ platí:

$$\frac{\partial\left(\left(a\left(t\right)y-b\left(t\right)\right)\mathrm{e}^{\int a(t)\,\mathrm{d}t}\right)}{\partial y}=a\left(t\right)\mathrm{e}^{\int a(t)\,\mathrm{d}t}=\frac{\partial\left(\mathrm{e}^{\int a(t)\,\mathrm{d}t}\right)}{\partial t}.$$

Funkce $\mathrm{e}^{\int a(t)\,\mathrm{d}t}$, kterou si pamatujeme z metody přenásobení je tedy vlastně integračním faktorem lineární diferenciální rovnice prvního řádu.

Poznámka 8.24. Někdy se pod pojmem exaktní diferenciální rovnice rozumí výraz tvaru

$$M(t,y)\mathrm{d}t+N(t,y)\mathrm{d}y=0, \tag{8.23}$$

kde existuje potenciál V dvojice funkcí (M,N) na nějaké oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Přitom mohou nastat zhruba tři možnosti, jak chápat pojem řešení uvedené rovnice:

a) Řešením (8.23) je funkce φ taková, že pro všechna t z nějakého otevřeného intervalu platí

$$M(t,\varphi(t))+N(t,\varphi(t))\varphi'(t)=0.$$

b) Řešením (8.23) je funkce φ z definice v bodě a) nebo funkce ψ taková, že pro všechna y z nějakého otevřeného intervalu platí $M(\psi(y),y)\psi'(y)+N(\psi(y),y)=0$. Tedy (8.23) se chápe jako libovolná z rovnic

$$M(t,y)t'+N(t,y)=0,\quad M(t,y)+N(t,y)y'=0.$$

Obsah
178. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

c) Řešením (8.23) se rozumí množina všech bodů $(t, y) \in \mathbb{R}^2$, které vyhovují rovnici $V(t, y) = C$, kde $C \in \mathbb{R}$ je zvolená konstanta. Například řešeními rovnice $t\mathrm{d}t + y\mathrm{d}y = 0$ ve smyslu uvedené možné definice jsou kružnice se středem v počátku a budeme-li důslední, také množiny $\{(0, 0)\}$, $\emptyset$.

Na závěr ovšem zdůrazněme, že v tomto textu jsme se rozhodli za definici řešení rovnice (8.23) přijmout vymezení tohoto pojmu popsané v bodě a).

8.1. Videa s řešenými příklady

Stručný postup řešení exaktní diferenciální rovnice lze vidět v tomto videu. Stručný postup řešení diferenciální rovnice pomocí integračního faktoru lze vidět v tomto videu.
Následuje řešení čtyř příkladů exaktních diferenciálních rovnic:

Příklad 1
Příklad 2
Příklad 3
Příklad 4

8.2. Interaktivní test

Následující test byl vytvořen pomocí balíčku `acrotex`. Test zahájíte kliknutím na tlačítko „Zacátek testu“. U otázek, kde lze volit jen jednu odpověď (test nedovolí zaškrtnout více odpovědí), je správná odpověď bodována počtem bodů uvedených v závorce u zadání a špatná odpověď je bodována 0 body. U otázek, kde lze volit více správných odpovědí, je součet

bodů správných odpovědí uveden v závorce u zadání a za každou špatnou odpověď bude odečten jeden či více bodů.

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

Obsah

180. strana ze 336

Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Zacátek testu

1. (2b.) Potenciálem V dvojice (M, N), definované předpisy

$$M(t, y) = 1, \ N(t, y) = 1,$$

je funkce

- ☐ $V(t, y) = t + y.$
- ☐ $V(t, y) = t - y.$
- ☐ $V(t, y) = t + 2 + y.$

2. (2b.) Potenciálem V dvojice (M, N), definované předpisy

$$M(t, y) = t, \ N(t, y) = y,$$

je funkce

- ☐ $V(t, y) = \frac{t^2}{2} + \frac{y^2}{2}.$
- ☐ $V(t, y) = \frac{t^2}{2} + \frac{y^2}{2} - 1.$
- ☐ $V(t, y) = \frac{t^2}{2} + y^2.$

Obsah

181. strana ze 336

Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

3. (2b.) Potenciálem V dvojice (M, N), definované předpisy

$$M(t,y) = y,\ N(t,y) = t,$$

je funkce

☐ $V(t,y) = \frac{t^2}{2} + \frac{y^2}{2}$.

☐ $V(t,y) = t \cdot y$.

☐ $V(t,y) = 1 + t \cdot y$.

4. (2b.) Potenciálem V dvojice (M, N), definované předpisy

$$M(t,y) = 2te^y,\ N(t,y) = t^2e^y,$$

je funkce

☐ $V(t,y) = t^2e^y$.

☐ $V(t,y) = 1 - t^2e^y$.

☐ $V(t,y) = 1 + t^2e^y$.

Obsah

182. strana ze 336

Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

5. (2b.) Potenciálem V dvojice (M, N), definované předpisy

$$M(t, y) = y \cos t, \;\; N(t, y) = \sin t,$$

je funkce

- ☐ $V(t, y) = y \sin t.$
- ☐ $V(t, y) = y \sin (t + 2\pi).$
- ☐ $V(t, y) = y \cos t.$

6. (2b.) Potenciálem V dvojice (M, N), definované předpisy

$$M(t, y) = 2t \cdot y, \;\; N(t, y) = t^2,$$

je funkce

- ☐ $V(t, y) = t^2 \cdot y.$
- ☐ $V(t, y) = t \cdot y + 2.$
- ☐ $V(t, y) = t^2 \cdot (y + 2).$

Obsah

183. strana ze 336

Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

7. (3b.) Obyčejná diferenciální rovnice

$$1 + y' = 0$$

☐ je exaktní diferenciální rovnice.

☐ není exaktní lineární diferenciální rovnice.

8. (3b.) Obyčejná diferenciální rovnice

$$y + t \cdot y' = 1$$

☐ je exaktní diferenciální rovnice.

☐ není exaktní lineární diferenciální rovnice.

9. (3b.) Obyčejná diferenciální rovnice

$$t + y \cdot y'' = 0$$

☐ je exaktní diferenciální rovnice.

☐ není exaktní lineární diferenciální rovnice.



10. (2b.) Mezi řešení exaktní diferenciální rovnice

$$1 + y' = 0$$

na $\mathbb{R}$ patří funkce dané předpisem

☐ $y(t) = 1 - t$.

☐ $y(t) = t$.

☐ $y(t) = -t$.

11. (2b.) Mezi řešení exaktní diferenciální rovnice

$$t + y \cdot y' = 0$$

na $\mathbb{R}$ patří funkce dané předpisem

☐ $\frac{y(t)^2}{2} + \frac{t^2}{2} = 1$.

☐ $y(t) = \frac{t^2}{2}$.

☐ $y(t) = t$.

Obsah

185. strana ze 336

Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

12. (2b.) Mezi řešení exaktní diferenciální rovnice

$$y + t \cdot y' = 0$$

na $(0, +\infty)$ patří funkce dané předpisem

☐ $y(t) = \dfrac{1}{t}$.

☐ $y(t) = t$.

☐ $y(t) = -\dfrac{1}{t}$.

13. (2b.) Mezi řešení exaktní diferenciální rovnice

$$2te^y + t^2e^y y' = 0$$

na $(0, +\infty)$ patří funkce dané předpisem

☐ $y(t) = \ln\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

☐ $y(t) = \ln\left(\dfrac{2}{t^2}\right)$.

☐ $y(t) = e^t$.

14. (2b.) Mezi řešení exaktní diferenciální rovnice

$$y \cos t + \sin t \cdot y' = 0$$

na $(0, \pi)$ patří funkce dané předpisem

☐ $y(t) = \dfrac{1}{\cos t}$.

☐ $y(t) = \dfrac{1}{\sin t}$.

☐ $y(t) = \sin t$.

15. (2b.) Mezi řešení exaktní diferenciální rovnice

$$2t \cdot y + t^2 y' = 0$$

na $(0, +\infty)$ patří funkce dané předpisem

☐ $y(t) = \dfrac{1}{t^2}$.

☐ $y(t) = \dfrac{1}{t^3}$.

☐ $y(t) = -\dfrac{1}{t^2}$.

Obsah

187. strana ze 336

Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

16. (2b.) Mezi řešení Cauchyovy úlohy

$$1 + y' = 0,\ y(0) = 1$$

na $\mathbb{R}$ patří funkce dané předpisem

☐ $y(t) = 1 - t.$

☐ $y(t) = -t.$

☐ $y(t) = 2 - t.$

17. (2b.) Mezi řešení Cauchyovy úlohy

$$y + t \cdot y' = 0,\ y(1) = 1$$

na $(0, +\infty)$ patří funkce dané předpisem

☐ $y(t) = -\frac{1}{t}.$

☐ $y(t) = \frac{1}{t}.$

☐ $y(t) = \frac{2}{t}.$

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

Obsah

188. strana ze 336

Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Konec testu

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:

Výsledky

Pro ukončení testu je třeba kliknout na tlačítko „Konec testu“. Opravení testu se provede kliknutím na tlačítko „Výsledky“, správné odpovědi budou označeny zeleně a červeně budou označeny odpovědi chybné.

Příklady k procvičení

1. Nalezněte předpis pro potenciál V dvojice (M, N), jestliže:

   a) $M(t,y) = \cos t + \mathrm{e}^t \cos y, \qquad N(t,y) = -\mathrm{e}^t \sin y,$

   b) $M(t,y) = \frac{-2t}{t^2+1}, \qquad N(t,y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,.$

2. Nalezněte kmenové funkce exaktních diferenciálních rovnic:

   a) $2ty + \left(t^2+1\right) y' = 0\,,$

   b) $t + \sin y + (t\cos y - 2y)\, y' = 0\,.$

3. Řešte zadané exaktní diferenciální rovnice:

   a) $2 + ye^{ty} + (te^{ty} - 2y)\, y' = 0\,,$

   b) $y^2 + (1 + 2yt)\, y' = 0\,.$

4. Řešte zadané Cauchyovy úlohy:

   a) $2ty + \left(t^2 + 1\right) y' = 0,\ y\,(1) = 2,$

   b) $y' = \frac{-y^2}{2ty+1},\ y\,(1) = -2\,,$

   c) $y + 2ty^3 + \left(1 + t + 3t^2y^2\right) y' = 0,\ y\,(1) = -5\,.$

5. Nalezněte integrační faktory zadaných rovnic a následně řešte přiložené Cauchyovy úlohy:

   a) $y^2 - y + ty' = 0, \quad y\,(2) = \frac{1}{2}\,,$

   b) $2ty \ln y \mathrm{d}t + \left(t^2 + y^2\sqrt{y^2+1}\right) \mathrm{d}y = 0, \quad y\,(0) = 1\,.$

6. Ukažte, že funkce zadané předpisy $\mu_1\,(t) = -\frac{1}{t^2}$, $\mu_2\,(y) = \frac{1}{y^2}$, $\mu_2\,(t,y) = -\frac{1}{t^2+y^2}$, $\mu_3\,(t,y) = -\frac{1}{ty}$ jsou integračními faktory rovnice $y - ty' = 0$.

7. Uvažujme diferenciální rovnici ve tvaru

$$yf\,(ty) + tg\,(ty)\, y' = 0,$$

   kde funkce f, g mají spojité derivace. Ukažte, že funkce daná předpisem

$$\mu\,(t,y) = \frac{1}{tyf\,(ty) - tyg\,(ty)},$$

   je integračním faktorem zmíněné rovnice.

Obsah
190. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Klíč k příkladům k procvičení

1. a) $V(t,y) = \mathrm{e}^t \cos y + \sin t,$
   b) $V(t,y) = \arcsin y - \ln\left(t^2+1\right), \quad (t,y) \in \mathbb{R} \times (-1,1).$

2. a) $V(t,y) = y\left(t^2+1\right),$
   b) $V(t,y) = \frac{1}{2}t^2 + t\sin y - y^2.$

3. a) $2t + \mathrm{e}^{ty} - y^2 = C,\ C \in \mathbb{R},$
   b) $ty^2 + y = C,\ C \in \mathbb{R}.$

4. a) $\varphi(t) = \frac{4}{t^2+1},$
   b) $\varphi(t) = \frac{-1-\sqrt{1+8t}}{2t},\ t \in (0,\infty),$
   c) $yt + y^3t^2 + y = -135,\ y(1) = -5.$

5. a) $\mu(t) = \frac{1}{y^2},\ \varphi(t) = \frac{t}{t+2},$
   b) $\mu(t) = \frac{1}{y},\ t^2 \ln y + \frac{1}{3}\sqrt{(y^2+1)^3} = \frac{2\sqrt{2}}{3},\ y(0) = 1.$

Obsah
191. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Kapitola 9

Obyčejné diferenciální rovnice n-tého řádu - základní vlastnosti

Budeme postupovat podobně jako jsme postupovali v případě obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Obyčejnými diferenciálními rovnicemi n-tého řádu budeme nazývat rovnice, ve kterých se vyskytují n-té derivace neznámé funkce jedné reálné proměnné. Řekneme, že ODR je rovnicí n-tého řádu, jestliže tato rovnice efektivně obsahuje pouze n--tou, popřípadě i nižší derivace neznámé funkce. Upřesněme tedy, že obecně lze ODR n-tého řádu zapsat v tzv. implicitním tvaru

$$F\left(t, y\left(t\right), y'\left(t\right), \ldots, y^{(n)}\left(t\right)\right) = 0, \tag{9.1}$$

Obsah
192. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

kde $F : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ je zadaná funkce. Někdy lze ODR zapsat ve tvaru explicitním:

$$y^{(n)}(t) = f\left(t, y(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)\right), \tag{9.2}$$

pro pevně danou funkci $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$.

V zadání ODR n-tého proměnnou u neznámé funkce a jejich derivací většinou nevypisujeme, takže píšeme pouze

$$F\left(t, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \text{ respektive}$$

$$y' = f\left(t, y, \ldots, y^{(n-1)}\right).$$

Nechť pro diferencovatelnou funkci $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanou na otevřeném intervalu $J \subset \mathbb{R}$ platí:

$$\forall t \in J : \; F\left(t, \varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(n)}(t)\right) = 0.$$

Pak řekneme, že φ je řešením rovnice n-tého řádu (9.1) na J.

Stejně jako u ODR 1. řádu říkáme, že dvě ODR n-tého řádu jsou ekvivalentní, mají-li stejnou množinu všech řešení.

Příklad 9.1. Najděme řešení obyčejné diferenciální rovnice třetího řádu

$$y''' = \frac{y''}{t}$$

na otevřeném intervalu $J = (0, +\infty)$.

Řešení. Pro formální řešení této rovnice můžeme použít substituci $z = y''$. Následně dostaneme rovnici

$$z' = \frac{z}{t}.$$

Jejím řešením je funkce ψ definovaná předpisem $\psi(t) = t$, $t \in (0, +\infty)$.

Snadno lze ukázat, že pro každé pevně zvolené číslo $C_1 \in \mathbb{R}$ je funkce daná předpisem

$$C_1 t$$

řešením upravené rovnice:

$$\forall t \in (0, +\infty) : \ (C_1 t)' = \frac{C_1 t}{t}.$$

Dosazením do $y'' = z$ dostaneme

$$y'' = C_1 t, \ t \in (0, +\infty), \ C_1 \in \mathbb{R}.$$

Po dvojím integrování dostaneme třídu funkcí definovanou předpisem

$$y(t) = \frac{C_1}{6} t^3 + C_2 t + C_3, \ t \in (0, +\infty), \ C_{1,2,3} \in \mathbb{R}.$$

Zbývá ukázat, že pro každou pevně zvolenou trojici čísel $C_1 \in \mathbb{R}$, $C_2 \in \mathbb{R}$, $C_3 \in \mathbb{R}$ je příslušná funkce na J řešením zadané rovnice:

$$\forall t \in J : \ \varphi'''(t) = \left(\frac{C_1}{6} t^3 + C_2 t + C_3 \right)''' = \frac{\left(\frac{C_1}{6} t^3 + C_2 t + C_3 \right)''}{t} = \frac{\varphi''(t)}{t}.$$

▲

Obsah
194. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Příklad 9.2. Najděme řešení obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu

$$y'' \mathrm{e}^{y'} = 1$$

na otevřeném intervalu $J = \mathbb{R}$.

Řešení. Pro řešení této rovnice můžeme použít substituci $z = y'$. Následně dostaneme rovnici

$$z' \mathrm{e}^{z} = 1.$$

Řešením této rovnice se separovanými proměnnými je pro každé pevně zvolené $C_1 \in \mathbb{R}$ každá funkce definovaná předpisem

$$\ln(t + C_1) :$$

$$\forall t \in (-C_1, +\infty) : \ (\ln(t + C_1))' \, \mathrm{e}^{\ln(t+C_1)} = 1.$$

Dosazením do $y' = z$ dostaneme

$$y' = \ln(t + C_1), \ t \in (-C_1, +\infty), \ C_1 \in \mathbb{R}.$$

Po integrování dostaneme třídu funkcí definovaných předpisem

$$y(t) = (t + C_1) \ln(t + C_1) - t + C_2, \ t \in (-C_1, +\infty), \ C_{1,2} \in \mathbb{R}.$$

Snadno lze ukázat, že pro každou pevně zvolenou dvojici čísel $C_1 \in \mathbb{R}$, $C_2 \in \mathbb{R}$ je tato funkce řešením zadané rovnice:

$$\forall t \in \mathbb{R} : \ ((t + C_1) \ln(t + C_1) - t + C_2)'' \, \mathrm{e}^{((t+C_1)\ln(t+C_1)-t+C_2)'} = 1.$$

▲

Nechť jsou dána čísla $t_0 \in (0, +\infty)$, $y_0 \in \mathbb{R}$, $y_1 \in \mathbb{R}$, $y_2 \in \mathbb{R}$, $\ldots$, y_{n-1}. K ODR n-tého řádu (9.1) připojme požadavek, aby hledaná funkce v bodě t_0 nabývala hodnoty y_0, její první derivace měla hodnotu y_1, druhá derivace měla hodnotu y_2 atd. až (n-1)-ní derivace nabývala hodnoty y_{n-1}, tzn.

$$y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}. \tag{9.3}$$

Požadavku (9.3) budeme opět říkat počáteční podmínky. Úlohu (9.1), (9.3) nazýváme Cauchyovou úlohou.

Řekneme, že funkce φ je řešením Cauchyovy úlohy (9.1), (9.3) na otevřeném intervalu J, jestliže φ je řešením (9.1) na J a navíc platí $\varphi(t_0) = y_0$, $\varphi'(t_0) = y_1$, $\ldots$, $\varphi^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$.

Příklad 9.3. Uvažujme Cauchyovu úlohu

$$y''' = \frac{y''}{t}, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0, \quad y''(1) = 0.$$

V příkladě 9.2 jsme ukázali, že funkce zadané předpisem $\frac{C_1}{6}t^3 + C_2 t + C_3$, $C_{1,2,3} \in \mathbb{R}$ jsou řešením zadané rovnice na $(0, +\infty)$. Dá se snadno ověřit, že pokud zvolíme $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, $C_3 = 1$, pak funkce $\varphi(t) = 1$ je řešením zadané Cauchyovy úlohy.

▲

Příklad 9.4. Uvažujme Cauchyovu úlohu

$$y'' \mathrm{e}^{y'} = 1, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

V příkladě 9.1 jsme ukázali, že funkce dané předpisem $y(t) = (t + C_1)\ln(t + C_1) - t + C_2$, $C_{1,2} \in \mathbb{R}$ tvoří řešení zadané rovnice na $(-C_1, +\infty)$. Dá se snadno ověřit, že pokud zvolíme

Obsah
196. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

$C_1 = 1$, $C_2 = 1$, pak funkce $\varphi(t) = (t+1)\ln(t+1) - t + 1$ je řešením zadané Cauchyovy úlohy.

▲

Nyní se (bez důkazů, které lze nalézt například v [8]) seznámíme s obecnými tvrzeními o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyových úloh.

Zabývejme se nyní obyčejnou diferenciální rovnicí n-tého řádu v explicitním tvaru

$$y^{(n)} = f\left(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)\right), \tag{9.4}$$

spolu s počátečními podmínkami

$$y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}. \tag{9.5}$$

Věta 9.5 (o existenci řešení). *Nechť $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce definovaná na otevřené množině a bod $(t_0, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$ patří do definičního oboru této funkce. Potom Cauchyova úloha (9.4), (9.5) má alespoň jedno maximální řešení.*

Příklad 9.6. Cauchyova úloha

$$y'' = 2\sqrt{y'}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

splňuje předpoklady Věty 9.5. Dá se ukázat, že existuje nekonečně mnoho maximálních řešení této úlohy.[1]

▲

[1] Získáme je „přilepováním“ parabol $(t-C)^2$, $C \in (0, +\infty)$ k funkci nulové na $\langle -\infty, 0)$.

Obsah
197. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Jak jsme viděli již u obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu, k zajištění jednoznačnosti řešení pouhá spojitost pravé strany diferenciální rovnice (9.4) nestačí. Obvykle se jednoznačnost zajišťuje přidáním předpokladu „o omezené rychlosti změny funkce f“ vzhledem ke druhé a dalším proměnným. Nejjednodušší způsob, jak to provést, je obsažen v následujícím tvrzení:

Věta 9.7 (O existenci a jednoznačnosti). *Nechť $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce definovaná na otevřené množině, přičemž $(t_0, y_0, y_0^1, \ldots, y_0^{n-1})$ patří do definičního oboru této funkce. Nechť jsou navíc spojité funkce $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y'}$, $\ldots$, $\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$, to znamená parciální derivace funkce f podle druhé a dalších proměnných. Potom Cauchyova úloha (9.4), (9.5) má právě jedno maximální řešení.*

Poznámka 9.8. Vraťme se k rovnici

$$y'' = 2\sqrt{y'}.$$

Zřejmě $f(t, y, y') = 2\sqrt{y'}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y, y') = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y'}(t, y, y') = \frac{1}{\sqrt{y'}}$, takže je ihned vidět, že předpoklad zaručující jednoznačnost je porušen pro $y' = 0$.

Poznámka 9.9. Obdobně jako v případě obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu je k dispozici tvrzení, které přináší také informaci o minimálním intervalu, na kterém je garantována existence řešení zkoumané Cauchyovy úlohy. V této kapitole tuto větu formulovat nebudeme a spokojíme se skutečností, že obyčejná diferenciální rovnice n-tého řádu jde převést na soustavu diferenciálních rovnic prvního řádu. V případě soustavy diferenciálních rovnic prvního řádu budeme formulovat zmiňovanou větu dále v textu.

Obsah
198. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

9.1. Videa s ilustrací pojmu

Ilustraci pojmu řešení obyčejné diferenciální rovnice vyššího řádu lze vidět v tomto videu. Ilustraci pojmu existence a jednoznačnosti řešení obyčejné diferenciální rovnice vyššího řádu lze vidět v tomto videu.

9.2. Interaktivní test

Následující test byl vytvořeny pomocí balíčku `acrotex`. Test zahájíte kliknutím na tlačítko „Zacátek testu“. U otázek, kde lze volit jen jednu odpověď (test nedovolí zaškrtnout více odpovědí), je správná odpověď bodována počtem bodů uvedených v závorce u zadání a špatná odpověď je bodována 0 body. U otázek, kde lze volit více správných odpovědí, je součet bodů správných odpovědí uveden v závorce u zadání a za každou špatnou odpověď bude odečten jeden či více bodů.

Zacátek testu

1. (1b.) Obyčejná diferenciální rovnice druhého řádu

$$y'' = 0$$

- ☐ má právě jedno maximální řešení.
- ☐ má nekonečně mnoho maximálních řešení.
- ☐ nemá žádné maximální řešení.

2. (1b.) Obyčejná diferenciální rovnice třetího řádu

$$e^{(y''')} = -1$$

- ☐ má právě jedno maximální řešení.
- ☐ má nekonečně mnoho maximálních řešení.
- ☐ nemá žádné maximální řešení.

3. (2b.) Mezi řešení obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu

$$y'' = 0$$

na $\mathbb{R}$ patří funkce dané předpisem

- ☐ $y(t) = 1$.
- ☐ $y(t) = t - 1$.
- ☐ $y(t) = t^2$.

4. (2b.) Mezi řešení obyčejné diferenciální rovnice třetího řádu

$$y''' = y''$$

na $\mathbb{R}$ patří funkce dané předpisem

☐ $y(t) = \mathrm{e}^t + t + 5.$

☐ $y(t) = 2t - 10.$

☐ $y(t) = \mathrm{e}^t + t^2 + 1.$

5. (2b.) Mezi řešení obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu

$$\left(y''\right)^2 + 2y'' + 1 = 0$$

na $\mathbb{R}$ patří funkce dané předpisem

☐ $y(t) = -\dfrac{t^2}{2} + t + 1.$

☐ $y(t) = -t^2 + \mathrm{t}.$

☐ $y(t) = t + 1.$

6. (2b.) Mezi řešení obyčejné diferenciální rovnice třetího řádu

$$e^{(y''')} = 1$$

na $\mathbb{R}$ patří funkce dané předpisem

- ☐ $y(t) = e^t$.
- ☐ $y(t) = 5\frac{t^2}{2} - t + 2$.
- ☐ $y(t) = \frac{t^3}{3} + t - 1$.

7. (2b.) Mezi řešení obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu

$$\frac{1}{y''} = 1$$

na $\mathbb{R}$ patří funkce dané předpisem

- ☐ $y(t) = \frac{t^2}{2} + t + 1$.
- ☐ $y(t) = \frac{t^2}{2}$.
- ☐ $y(t) = \frac{3t^2}{2}$.

Obsah
202. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

8. (2b.) Mezi řešení Cauchyovy úlohy

$$y'' = 0,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 1$$

na $\mathbb{R}$ patří funkce dané předpisem

- ☐ $y(t) = t - 1$.
- ☐ $y(t) = t$.
- ☐ $y(t) = 1$.

9. (2b.) Mezi řešení Cauchyovy úlohy

$$y''' = y'',\ y(0) = 6,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 1$$

na $\mathbb{R}$ patří funkce dané předpisem

- ☐ $y(t) = \mathrm{e}^t + 5$.
- ☐ $y(t) = \mathrm{e}^t + t + 5$.
- ☐ $y(t) = 2t - 10$.

Obsah

203. strana ze 336

Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

10. (2b.) Mezi řešení Cauchyovy úlohy

$$\left(y''\right)^2 + 2y'' + 1 = 0,\ y(2) = 1,\ y'(2) = -1$$

na $\mathbb{R}$ patří funkce dané předpisem

☐ $y(t) = t.$

☐ $y(t) = -\dfrac{t^2}{2} + t + 1.$

☐ $y(t) = t + 1.$

11. (2b.) Mezi řešení Cauchyovy úlohy

$$\mathrm{e}^{(y''')} = 1,\ y(0) = 2,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = 5$$

na $\mathbb{R}$ patří funkce dané předpisem

☐ $y(t) = t + 5.$

☐ $y(t) = \dfrac{t^2}{2} - t + 2.$

☐ $y(t) = 5\dfrac{t^2}{2} - t + 2.$

12. (2b.) Mezi řešení Cauchyovy úlohy

$$\frac{1}{y''} = 1,\ y(2) = 2,\ y'(2) = 2$$

na $\mathbb{R}$ patří funkce dané předpisem

☐ $y(t) = \frac{t^2}{2}$.

☐ $y(t) = \frac{t^2}{2} + t$.

☐ $y(t) = \frac{t^2}{2} - t$.

Konec testu

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:

Výsledky

Pro ukončení testu je třeba kliknout na tlačítko „Konec testu“. Opravení testu se provede kliknutím na tlačítko „Výsledky“, správné odpovědi budou označeny zeleně a červeně budou označeny odpovědi chybné.

Kapitola 10

Lineární diferenciální rovnice vyšších řádů

Základní vlastnosti

Nechť je pro $n \in \mathbb{N}$ dáno $n+1$ reálných funkcí jedné reálné proměnné $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$. Obyčejnou diferenciální rovnici ve tvaru

$$y^{(n)} + a_1(t)\, y^{(n-1)} + a_2(t)\, y^{(n-2)} + \cdots + a_n y = b(t) \tag{10.1}$$

budeme nazývat lineární diferenciální rovnicí n-tého řádu (zkráceně LDR řádu n).

Rovnici

$$y^{(n)} + a_1(t) y^{(n-1)} + a_2(t) y^{(n-2)} + \ldots + a_n(t) y = 0 \tag{10.2}$$

se říká homogenní LDR n-tého řádu (přidružená k rovnici (10.1)). Poznamenejme, že jestliže b je nenulovou funkcí, pak budeme říkat, že (10.1) je nehomogenní rovnicí.

Spolu s linárními diferenciálními rovnicemi budeme dále studovat příslušné Cauchyovy úlohy, které jsou specifikovány doplněním počátečních podmínek pro neznámou funkci a její derivace. Pro $1+n$ zadaných reálných čísel $t_0, y_0, y_1, \dots y_{n-1}$ lze počáteční podmínky zapsat jako následující soustavu požadavků:

$$\begin{aligned} y(t_0) &= y_0, \\ y'(t_0) &= y_1, \\ &\dots \\ y^{(n-1)}(t_0) &= y_{n-1}. \end{aligned} \tag{10.3}$$

Pro další úvahy bude klíčové následující tvrzení, které v porovnání s obecnými výsledky z předchozí kapitoly přináší nově zejména informaci o intervalech, na kterých je zaručena existence řešení zadaných Cauchyových úloh.

Věta 10.1 (O existenci a jednoznačnosti pro LDR řádu n). *Nechť koeficienty $a_1, a_2, \dots, a_n$ rovnice (10.1) jsou spojitými funkcemi definovanými na otevřeném intervalu $J \subset \mathbb{R}$. Nechť také pravá strana b rovnice (10.1) je spojitá na J. Budiž dáno číslo $t_0 \in J$ a n reálných čísel $y_0, y_1, \dots y_{n-1}$. Potom Cauchyova úloha (10.1), (10.3) má právě jedno řešení definované na J.*

Obsah
207. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Příklad 10.2. Uvažujme Cauchyovu úlohu

$$\begin{aligned} y'' + \frac{1}{t} \cdot y' &= t^2, \\ y(-1) &= 2, \\ y'(-1) &= 0. \end{aligned} \tag{10.4}$$

Řešení. V uvedeném případě je zřejmě $t_0 = -1$, $y_0 = 2$, $y_1 = 0$. Protože $t_0 < 0$, bude rozumné zvolit $J = (-\infty, 0)$, takže

$$a_1(t) = \frac{1}{t},\ t \in J, \qquad a_2(t) = 0,\ t \in J, \qquad b(t) = t^2,\ t \in J.$$

Podle právě uvedené věty je zaručena existence jediného řešení φ zadané Cauchyovy úlohy na J.

I když zatím neznáme obecný postup hledání řešení lineárních diferenciálních rovnic vyšších řádů, v tomto případě si pomůžeme drobným trikem a řešení φ nalezneme. Nejprve si všimněme, že a_2 je nulová funkce, takže v zadané rovnici se vyskytují pouze derivace hledané funkce. To nás vede k nápadu nalézt nejprve funkci φ'. Pro funkci φ platí rovnosti

$$\begin{aligned} \varphi''(t) + \frac{1}{t} \cdot \varphi'(t) &= t^2, \quad t \in J, \\ \varphi(-1) &= 2, \\ \varphi'(-1) &= 0, \end{aligned}$$

takže pro funkci $\psi = \varphi'$ zřejmě platí:

$$\begin{aligned} \psi'(t) + \frac{1}{t} \cdot \psi(t) &= t^2, \quad t \in J, \\ \psi(-1) &= 0. \end{aligned}$$

Obsah
208. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Funkce ψ tedy bude zřejmě takovým řešením lineární diferenciální rovnice prvního řádu

$$z' + \frac{1}{t} \cdot z = t^2, \quad t \in J, \tag{10.5}$$

které splňuje počáteční podmínku

$$z\,(-1) = 0.$$

Poznamenejme, že formálně můžeme provedenou úvahu zapsat stručně jako substituci

$$z = y'$$

aplikovanou na původně zadaný Cauchův problém (10.4).

Snadno lze nalézt obecné řešení rovnice (10.5). Zopakujeme si třeba metodu přenásobení. Protože na $J = (-\infty, 0)$ platí

$$\int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln\,(-t)\,, \quad \mathrm{e}^{\ln(-t)} = -t,$$

rovnici (10.5) přenásobíme funkcí $-t$, $t \in J$:

$$z' \cdot (-t) - z = -t^3.$$

Provedenou ekvivalentní úpravou na J jsme dosáhli možnosti přepsat levou stranu rovnice jako derivaci součinu $z \cdot (-t)$, takže na J platí:

$$(z \cdot (-t))' = -t^3. \tag{10.6}$$

Po integraci obou stran rovnice (10.6) můžeme psát

$$-t \cdot z(t) = C - \frac{t^4}{4}, \quad C \in \mathbb{R},$$

Obsah
209. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

odkud získáváme obecné řešení rovnice (10.5) ve tvaru:

$$z(t) = \frac{t^3}{4} - \frac{C}{t},\ t \in J, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Z počáteční podmínky $z\,(-1) = 0$ snadno zjistíme hodnotu integrační konstanty C:

$$0 = \frac{(-1)^3}{4} - \frac{C}{-1} \qquad \Rightarrow \qquad C = \frac{1}{4}.$$

Platí tedy $\psi\,(t) = \frac{1}{4} \cdot \left(t^3 - \frac{1}{t}\right),\ t \in J$. Hledanou funkci φ nyní zjistíme ze vztahů

$$\varphi'\,(t) = \frac{1}{4} \cdot \left(t^3 - \frac{1}{t}\right),\ t \in J, \qquad \varphi\,(-1) = 2.$$

Při počítání si třeba můžeme zopakovat použití určitého integrálu jako funkce proměnné horní meze:

$$\varphi\,(t) = 2 + \int_{-1}^{t} \frac{1}{4} \cdot \left(s^3 - \frac{1}{s}\right) \mathrm{d}s = 2 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\left[s^4\right]_{-1}^{t} - \left[\ln\,(-s)\right]_{-1}^{t}\right), \quad t \in J,$$

takže

$$\varphi\,(t) = \frac{t^4 + 31}{16} - \frac{1}{4} \cdot \ln\,(-t)\,, \quad t \in J = (-\infty, 0)\,.$$

▲

Uveďme si ještě ukázku stručného zápisu hledání řešení obdobných úloh.

Příklad 10.3. Nalezněme všechna maximální řešení homogenní lineární diferenciální rovnice třetího řádu

$$y''' - y'' = 0. \tag{10.7}$$

Obsah
210. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Řešení. Po substituci $z = y''$:

$$z' - z = 0. \tag{10.8}$$

Řešení metodou separace ($z > 0$ na $\mathbb{R}$ nebo $z < 0$ na $\mathbb{R}$):

$$\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 1,$$

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{z} = t + \widetilde{C}, \quad \widetilde{C} \in \mathbb{R},$$

$$\ln|z| = t + \widetilde{C},$$

Po úpravách a zahrnutí nulového řešení lze zapsat obecné řešení rovnice (10.8):

$$z = C_1 \cdot \mathrm{e}^t, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Zpětné substituce:

$$y' = \int C_1 \cdot \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = C_1 \cdot \mathrm{e}^t + C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R},$$

$$y = \int \left(C_1 \cdot \mathrm{e}^t + C_2\right) \mathrm{d}t = C_1 \cdot \mathrm{e}^t + C_2 \cdot t + C_3, \quad C_1 \in \mathbb{R},\, C_2 \in \mathbb{R},\, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Tedy pro každé řešení y_h homogenní rovnice (10.7) existují reálná čísla C_1, C_2, C_3 taková, že y_h je dáno předpisem

$$\underline{\underline{y_h(t) = C_1 \cdot \mathrm{e}^t + C_2 \cdot t + C_3}}.$$

▲

Obsah
211. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Věta 10.4 (O vlastnostech řešení LDR vyšších řádů). *Nechť $a_1, ..., a_n, b$ jsou spojité funkce definované na otevřeném intervalu J. Označme symbolem Y množinu všech řešení LDR (10.1) na J. Nechť Y_h označuje systém všech řešení homogenní LDR (10.2) na J. Pak platí:*

1) *Y_h je lineárním prostorem,* $\dim Y_h = n$.
2) *Nechť y_p je libovolné řešení (10.1) na J a y_h je libovolné řešení přidružené homogenní rovnice (10.2) na J. Potom součet $y = y_p + y_h$ je opět řešením rovnice (10.1) na J. Obráceně, ke každým dvěma řešením y, y_p rovnice (10.1) na J existuje řešení y_h přidružené homogenní rovnice (10.2) na J, pro které na tomto intervalu platí $y = y_h + y_p$.*

   Stručně zapsáno, pro $y_p \in Y$ platí :

$$y \in Y \iff (\exists y_h \in Y_h : \; y = y_h + y_p).$$

Poznámka 10.5. Dříve, než se pustíme do důkazu uvedené věty, učiňme několik úmluv. Tvoří-li systém funkcí $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$ bázi prostoru Y_h, pak tento systém nazýváme fundamentálním systémem řešení homogenní LDR (10.2) na příslušném intervalu J . Známe-li fundamentální systém $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$ rovnice (10.2) na J, pak pro každé řešení y_h této rovnice na J platí:

$$y_h \in Y_h \iff (\exists! C_1 \in \mathbb{R}\, \exists! C_2 \in \mathbb{R} \dots \exists! C_n \in \mathbb{R} : \; y_h = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + \dots + C_n\varphi_n).$$

Pomocí vzorce

$$y_h(t) = C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t) + \cdots + C_n\varphi_n(t), \; C_1 \in \mathbb{R}, \; C_2 \in \mathbb{R}, \; \dots \; C_n \in \mathbb{R}, \qquad (10.9)$$

Obsah
212. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

tak lze popsat každé řešení rovnice (10.2). Vzorci (10.9) budeme říkat obecné řešení rovnice (10.2) na J. V příkladu 10.3 jsme například zjistili, že každé řešení homogenní rovnice (10.7) lze zapsat ve tvaru

$$y_h(t) = C_1 \cdot \mathrm{e}^t + C_2 \cdot t + C_3,\ C_1 \in \mathbb{R},\ C_2 \in \mathbb{R},\ C_3 \in \mathbb{R}.$$

Právě uvedený zápis obecného řešení rovnice (10.7) zřejmě odpovídá volbě fundamentálního systému řešení této rovnice ve tvaru

$$\varphi_1(t) = \mathrm{e}^t, \quad \varphi_2(t) = t, \quad \varphi_3(t) = 1.$$

Tvrzení obsažené ve druhé části Věty 10.4 lze symbolicky vyjádřit ve tvaru

$$\boxed{Y = Y_h + y_p.}$$

Uvedený vztah můžeme zapsat také takto:

$$y(t) = C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t) + \cdots + C_n\varphi_n(t) + y_p(t),\ C_1 \in \mathbb{R}, \ldots C_n \in \mathbb{R}.$$

Právě uvedený výraz budeme nazývat obecným řešením rovnice (10.1). Obecné řešení rovnice (10.1) lze tedy zapsat jako součet obecného řešení přidružené homogenní rovnice (10.2) a jednoho pevně daného (tzv. partikulárního) řešení y_p této rovnice.

Zkoumáme-li třeba nehomogenní rovnici ve tvaru

$$y''' - y'' = -1, \tag{10.10}$$

po chvíli snadno uhodneme, že jedním z řešení této rovnice je funkce

$$y_p(t) = \frac{t^2}{2}.$$

Obsah
213. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Protože obecné řešení přidružené homogenní rovnice (10.7) má tvar

$$y_h(t) = C_1 \cdot \mathrm{e}^t + C_2 \cdot t + C_3,\ C_1 \in \mathbb{R},\ C_2 \in \mathbb{R},\ C_3 \in \mathbb{R},$$

můžeme ihned napsat obecné řešení (10.10):

$$y(t) = C_1 \cdot \mathrm{e}^t + C_2 \cdot t + C_3 + \frac{t^2}{2},\ C_1 \in \mathbb{R},\ C_2 \in \mathbb{R},\ C_3 \in \mathbb{R}.$$

Pro zájemce

Důkaz. Zdůvodnění Věty 10.4 provedeme pro rovnici druhého řádu. Obecně se důkaz provede stejně, jen je trochu méně přehledný. Předpokládejme, že a_1, a_2, b jsou spojité reálné funkce definované na otevřeném intervalu J a na tomto intervalu uvažujme diferenciální rovnice

$$y'' + a_1(t)\, y' + a_2(t)\, y = b(t), \tag{10.11}$$

$$y'' + a_1(t)\, y' + a_2(t)\, y = 0. \tag{10.12}$$

Označme si symbolem $C^2(J)$ systém všech reálných funkcí, které jsou definovány na J a v každém bodě tohoto intervalu mají spojité derivace až do řádu 2. Není těžké ukázat, že $C^2(J)$ je lineárním prostorem (nad tělesem skalárů $\mathbb{R}$) . Poznamenejme ještě, že řešení rovnice (10.11) i řešení rovnice (10.12) zřejmě musí mít spojitou druhou derivaci na J, takže platí $Y \subset C^2(J)$, $Y_h \subset C^2(J)$.

Každé funkci $y \in C^2(J)$ zřejmě můžeme přiřadit funkci $L(y)$ definovanou na J předpisem

$$L(y)(t) = y''(t) + a_1(t)\, y'(t) + a_2(t)\, y(t).$$

Na lineárním prostoru $C^2(J)$ jsme tak definovali zobrazení (operátor), který popisuje efekt způsobený levou stranou uvažovaných diferenciálních rovnic (10.11) a (10.12).

Pomocí operátoru L můžeme stručně zapsat, že pro řešení y rovnice (10.11) na J platí

$$L(y)(t) = b(t),$$

Obsah
214. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

zatímco pro řešení y_h přidružené homogenní rovnice (10.12) na J platí

$$L\left(y_h\right)(t) = 0.$$

Ukažme, že L je lineárním operátorem, to znamená, že platí:

$$\forall u \in C^2(J)\ \forall v \in C^2(J):\ L(u+v) = L(u) + L(v),$$

$$\forall u \in C^2(J)\ \forall \alpha \in \mathbb{R}:\ L(\alpha \cdot u) = \alpha \cdot L(u).$$

Vezměme tedy funkci $u \in C^2(J)$ a funkci $v \in C^2(J)$. Pak pro každé $t \in J$ platí

$$L(u+v)(t) = (u+v)''(t) + a_1(t)(u+v)'(t) + a_2(t)(u+v)(t) =$$

$$= [u''(t) + a_1(t)u'(t) + a_2(t)u(t)] + [v''(t) + a_1(t)v'(t) + a_2(t)v(t)] =$$

$$= L(u)(t) + L(v)(t),$$

čímž je dokázán vztah $L(u+v) = L(u) + L(v)$.

Nyní zvolme libovolně číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ a funkci $u \in C^2(J)$. Pro každé $t \in J$ zřejmě platí

$$L(\alpha \cdot u)(t) = (\alpha \cdot u)''(t) + a_1(t)(\alpha \cdot u)'(t) + a_2(t)(\alpha \cdot u)(t) =$$

$$= \alpha \cdot [u''(t) + a_1(t)u'(t) + a_2(t)u(t)] = \alpha \cdot L(u)(t),$$

takže $L(\alpha \cdot u) = \alpha \cdot L(u)$.

Zavedením operátoru L a důkazem jeho linearity jsme si připravili půdu pro stručný zápis a můžeme tak přistoupit k vlastnímu důkazu, který si rozdělíme na několik částí.

I. A. Nejprve se ujistěme, že množina Y_h je lineárním prostorem. Protože Y_h je neprázdnou podmnožinou lineárního prostoru $C^2(J)$, stačí dokázat, že Y_h je lineárním podprostorem tohoto

prostoru. Stačí se tedy přesvědčit, že pro každá dvě řešení $u \in Y_h$, $v \in Y_h$ a libovolné číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ platí:

$$(u+v) \in Y_h,$$
$$(\alpha \cdot u) \in Y_h.$$

Nechť $u \in Y_h$ a $v \in Y_h$. Potom J platí

$$L(u+v) = L(u) + L(v) = 0 + 0 = 0,$$

tudíž $(u+v) \in Y_h$.

Nyní předpokládejme, že je dána funkce $u \in Y_h$ a číslo $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom platí

$$L(\alpha \cdot u) = \alpha \cdot L(u) = \alpha \cdot 0 = 0,$$

proto $(\alpha \cdot u) \in Y_h$.

Poznamenejme, že jsme zde místo našeho prověřování mohli pouze konstatovat, že Y_h je vlastně jádrem lineárního zobrazení L a využít poznatku, že jádro lineárního zobrazení je vždy lineárním prostorem.

I. B. Ukažme, že

$$\dim Y_h = 2.$$

To provedeme tak, že popíšeme jednu z možných bází φ_1, φ_2 prostoru Y_h.

Zvolme libovolně, ale pevně $t_0 \in J$. Na J uvažujme takové řešení φ_1 rovnice (10.12), které splňuje počáteční podmínky

$$y(t_0) = 1, \; y'(t_0) = 0,$$

a řešení φ_2 téže homogenní rovnice, které ovšem splňuje podmínky

$$y(t_0) = 0, \; y'(t_0) = 1.$$

Obsah
216. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Zdůrazněme, že tato řešení podle Věty 10.1 existují a jsou dána jednoznačně. Vezměme nyní libovolné řešení u rovnice (10.12) na J. Řešení u samozřejmě můžeme chápat jako řešení Cauchyovy úlohy (10.12),

$$y(t_0) = u(t_0)\,,\ y'(t_0) = u'(t_0)\,.$$

Označme:

$$C_1 = u(t_0)\,,\quad C_2 = u'(t_0)\,.$$

Definujeme-li nyní na J funkci φ předpisem

$$\varphi(t) = C_1 \cdot \varphi_1(t) + C_2 \cdot \varphi_2(t)\,,$$

vidíme, že (Y_h je lineární prostor, jak jsme ukázali) $\varphi \in Y_h$, to znamená, že φ je řešením (10.12) na J. Jak snadno ověříme, platí

$$\varphi(t_0) = C_1 \cdot \varphi_1(t_0) + C_2 \cdot \varphi_2(t_0) = u(t_0) \cdot 1 + u(t_0) \cdot 0 = u(t_0)\,,$$

$$\varphi'(t_0) = C_1 \cdot \varphi_1'(t) + C_2 \cdot \varphi'_2(t) = u'(t_0) \cdot 0 + u'(t_0) \cdot 1 = u'(t_0)\,.$$

Obě funkce u, φ jsou tedy řešeními téže Cauchyovy úlohy. Odtud ovšem podle věty 10.1 plyne, že nutně

$$u = \varphi = C_1 \cdot \varphi_1 + C_2 \cdot \varphi_2.$$

Ukázali jsme, že libovolně zvolené $u \in Y_h$ lze vyjádřit jako vhodnou lineární kombinaci funkcí φ_1, φ_2. To ovšem znamená, že

$$\dim Y_h \leqq 2.$$

K dokončení důkazu první části si stačí uvědomit, že funkce φ_1, φ_2 jsou lineárně nezávislé a tvoří tak fundamentální systém řešení homogenní rovnice (10.12). Potřebujeme dokázat, že pro každou dvojici konečných reálných čísel α, β platí implikace:

$$(\alpha \cdot \varphi_1 + \beta \cdot \varphi_2 = 0) \ \Rightarrow\ (\alpha = \beta = 0).$$

Obsah
217. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Nechť tedy platí

$$\alpha \cdot \varphi_1 + \beta \cdot \varphi_2 = 0.$$

Pak musí také platit

$$\alpha \cdot \varphi_1' + \beta \cdot \varphi_2' = 0.$$

Odtud okamžitě plyne, že

$$\alpha \cdot \varphi_1(t_0) + \beta \cdot \varphi_2(t_0) = 0 \ \wedge \ \alpha \cdot \varphi_1'(t_0) + \beta \cdot \varphi_2'(t_0) = 0,$$

takže

$$\alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 = 0 \ \wedge \ \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1 = 0,$$

tedy

$$\alpha = 0 \ \wedge \ \beta = 0,$$

což jsme potřebovali ukázat.

II. Nyní dokážeme vlastnost formulovanou ve druhém tvrzení Věty 10.4. Nechť $y_p \in Y$ je pevně zvolená funkce.

Nejprve ukažme, že pro libovolně zvolenou funkci funkci $y \in Y$ patří do Y_h také funkce y_h definovaná vztahem

$$y_h = y - y_p,$$

(takže evidentně platí $y = y_h + y_p$).

Z linearity operátoru L plyne na J

$$L(y_h)(t) = L(y - y_p)(t) = L(y)(t) - L(y_p)(t) = b(t) - b(t) = 0,$$

takže

$$y_h \in Y_h.$$

K dokončení celého důkazu si stačí uvědomit, že pokud pro libovolnou funkci y_h definujeme funkci y předpisem

$$y = y_h + y_p,$$

pak na J dostáváme

$$L(y)(t) = L(y_h + y_p)(t) = L(y_h)(t) + L(y_p)(t) = 0 + b(t) = b(t),$$

takže $y \in Y$. □

Poznámka 10.6. (**O principu superpozice**) Z úvodní kapitoly si čtenář mohl odnést jistou představu o významu jednotlivých členů v lineární diferenciální rovnici. Při rozboru různých lineárních modelů (lze si připomenout například model kmitajícího závaží nebo model sériového RLC obvodu) si lze všimnout, že přidružená homogenní LDR obvykle charakterizuje chování systému bez působení vnějších vlivů, přičemž koeficienty představované funkcemi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ odpovídají vlastnostem konstrukčních prvků systému. Budeme-li na systém působit dodatečným vnějším vlivem, tento vliv bývá obvykle reprezentován funkcí b na pravé straně lineární diferenciální rovnice. Tvrzení obsažené ve druhé části Věty 10.4 a vyjádřené mnemotechnickou pomůckou

$$Y = Y_h + y_p,$$

tak lze v kontextu terminologie teorie systémů volně formulovat takto:

„Všechny možné odezvy lineárního systému na konkrétní vnější vliv jsou vytvořeny jako součet (superpozice) všech myslitelných chování systému bez působení tohoto vlivu a jedné konkrétní reakce systému na tento vliv.“

Popsané vlastnosti se někdy říká princip superpozice.

Uvedený princip můžeme poněkud modifikovat. Uvažujme dvě LDR druhého řádu s různými pravými stranami a stejnou přidruženou homogenní rovnicí:

$$y'' + a_1(t)\,y' + a_2(t)\,y = b(t), \tag{10.13}$$

$$y'' + a_1(t)\,y' + a_2(t)\,y = c(t). \tag{10.14}$$

Obsah
219. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Předpokládejme, že funkce u je na otevřeném intervalu J řešením (10.13) a funkce v je na stejném intervalu řešením (10.14). Potom můžeme lehce ukázat, že součet $u+v$ představuje na J řešení následující rovnice:

$$y'' + a_1(t)\, y' + a_2(t)\, y = b(t) + c(t)\,.$$

Na J totiž platí:

$$\begin{aligned}(u+v)''(t) + a_1(t)\cdot(u+v)'(t) + a_2(t)\cdot(u+v)(t) = \\ = u''(t) + a_1(t)\,u'(t) + a_2(t)\,u(t) + \\ + v''(t) + a_1(t)\,v'(t) + a_2(t)\,v(t) = b(t) + c(t)\,.\end{aligned}$$

Právě provedené pozorování je samozřejmě možné formulovat rovněž pro lineární diferenciální rovnice libovolného řádu. Jeho formulace v jazyce teorie systémů pak může znít třeba takto:

„Reakce lineárního systému na působení superpozice vnějších vlivů je dána superpozicí izolovaných odezev tohoto systému na jednotlivé vlivy.“

Na závěr poznamenejme, že princip superpozice nám někdy může ušetřit práci při hledání řešení lineárních diferenciálních rovnic.

Příklad 10.7. Uvažujme diferenciální rovnici

$$y'' - 2y' + y = t - 2 + \frac{\mathrm{e}^t}{t}, \qquad t \in J = (0,\infty)\,. \tag{10.15}$$

Řešení. Jedno z řešení rovnice

$$y'' - 2y' + y = t - 2$$

Obsah
220. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

lze uhodnout:

$$u(t) = t, \quad t \in J.$$

Později popíšeme způsob, jak najít řešení

$$v(t) = te^t(\ln(t) - 1), \quad t \in J,$$

diferenciální rovnice

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t}, \quad t \in J.$$

Podle principu superpozice pak platí, že funkce y_p definovaná na J předpisem

$$y_p(t) = t + te^t(\ln(t) - 1),$$

je na J řešením rovnice (10.15). ▲

Homogenní lineární diferenciální rovnice n-tého řádu

Začněme smutnou zprávou - na rozdíl od rovnice prvního řádu není znám obecný algoritmus pro nalezení fundamentálního systému řešení homogenních lineárních diferenciálních rovnic vyšších řádů. Nyní pouze popíšeme postup, který umožňuje nalézt obecné řešení homogenní rovnice v případě, že koeficienty této rovnice jsou konstantní.

Homogenní rovnice s konstantními koeficienty

Úmluva. V celém odstavci budeme předpokládat, že všechny koeficienty rovnice

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0 \tag{10.16}$$

Obsah
221. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

jsou konstantní funkce (stručně $a_1 \in \mathbb{R}, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$). Řešením (10.16) budeme rozumět maximální řešení této rovnice, to znamená řešení na $\mathbb{R}$.

Nejprve si všimněme, jak vypadá řešení homogenní rovnice prvního řádu s konstantním koeficientem $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} y' + a \cdot y = 0 \qquad & \mid \cdot \mathrm{e}^{\int a \,\mathrm{d}t} \\ \left(y \cdot \mathrm{e}^{a \cdot t}\right)' &= 0 \\ y = C \cdot \mathrm{e}^{-a \cdot t}, \quad & C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Řešením uvažované rovnice je tedy například funkce $\varphi(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 \cdot t}$, kde číslo $\lambda_1 = -a$ je řešením rovnice $\lambda + a = 0$.

Hledejme proto řešení φ rovnice vyššího řádu (10.16) opět ve tvaru „exponenciály“

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{\lambda t},$$

a zkusme přitom zjistit, jaké požadavky na λ získáme.

Protože pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí (derivujeme podle proměnné t)

$$\begin{aligned} (\mathrm{e}^{\lambda t})' &= \lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda t}, \\ (\mathrm{e}^{\lambda t})' &= \lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda t}, \\ &\vdots \\ (\mathrm{e}^{\lambda t})^{(k)} &= \lambda^k \cdot \mathrm{e}^{\lambda t}, \end{aligned}$$

můžeme, po dosazení předpokládaného tvaru řešení do (10.16) , psát

$$\lambda^n \cdot \mathrm{e}^{\lambda t} + a_1 \cdot \lambda^{n-1} \cdot \mathrm{e}^{\lambda t} + \cdots + a_n \cdot \mathrm{e}^{\lambda t} = 0.$$

Obsah
222. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Protože exponenciální funkce je v každém bodě nenulová, můžeme bez obav vzniklou rovnici vydělit $e^{\lambda t}$. Získáme tak rovnici

$$\lambda^n + a_1 \cdot \lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \tag{10.17}$$

která vymezuje vhodná λ.

Polynom

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n \tag{10.18}$$

budeme nazývat charakteristickým polynomem (přidruženým k rovnici (10.16)), rovnici (10.17) se říká charakteristická rovnice.

Má-li tedy být funkce $e^{\lambda t}$ řešením rovnice (10.16), pak λ musí být kořenem charakteristického polynomu přidruženého k této rovnici. Přitom je známo, že polynom stupně $n \in \mathbb{N}$ má právě n (obecně komplexních) kořenů, počítáme-li každý z nich tolikrát, kolik činí jeho algebraická násobnost.

V následujícím tvrzení, jehož důkaz je možné nalézt například v [8], je popsán způsob jak získat fundamentální systém řešení homogenních rovnic s konstantními koeficienty.

Obsah
223. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Věta 10.8. *Uvažujme homogenní rovnici s konstantními koeficienty (10.16) a přidružený charakteristický polynom (10.17). Přiřaďme každému reálnému kořenu λ_j násobnosti k_j tohoto polynomu k_j funkcí:*

$$e^{\lambda_j t},\ t\cdot e^{\lambda_j t},\ t^2\cdot e^{\lambda_j t},\ \ldots,\ t^{k_j-1}\cdot e^{\lambda_j t}.$$

Přiřaďme dále každé dvojici $\lambda_l=\alpha_l+\beta_l i$, $\overline{\lambda_l}=\alpha_l-\beta_l i$, $\alpha_l\in\mathbb{R}$, $\beta_l\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, komplexně sdružených kořenů polynomu (10.18) násobnosti m_l následujících $2m_l$ funkcí :

$$e^{\alpha_l t}\cdot\sin(\beta_l t),\ t\cdot e^{\alpha_l t}\cdot\sin(\beta_l t),\ t^2\cdot e^{\alpha_l t}\cdot\sin(\beta_l t),\ \ldots,\ t^{m_l-1}\cdot e^{\alpha_l t}\cdot\sin(\beta_l t),$$

$$e^{\alpha_l t}\cdot\cos(\beta_l t),\ t\cdot e^{\alpha_l t}\cdot\cos(\beta_l t),\ t^2\cdot e^{\alpha_l t}\cdot\cos(\beta_l t),\ \ldots,\ t^{m_l-1}\cdot e^{\alpha_l t}\cdot\cos(\beta_l t).$$

Popsaným způsobem získáme právě n funkcí. Tyto funkce tvoří fundamentální systém řešení rovnice (10.16).

Příklad 10.9. Určeme fundamentální systém řešení rovnice

$$y'''-y''-5y'-3y=0.$$

Napišme obecné řešení této rovnice a nalezněme řešení, které vyhovuje počátečním podmínkám

$$y(0)=0,\ y'(0)=8,\ y''(0)=0.$$

Řešení. Nejprve sestavme charakteristickou rovnici :

$$\lambda^3-\lambda^2-5\lambda-3=0.$$

Obsah
224. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Uhodneme jeden z kořenů: $\lambda_1 = 3$. Protože

$$(\lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda - 3) : (\lambda - 3) = \lambda^2 + 2\lambda + 1,$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2,$$

můžeme psát

$$\lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda - 3 = (\lambda - 3)^1 \cdot (\lambda - (-1))^2,$$

takže charakteristický polynom má kořen $\lambda_1 = 3$ násobnosti 1 a dvojnásobný kořen $\lambda_2 = -1$. Fundamentálním systémem řešení zadané diferenciální rovnice je tedy systém funkcí φ_1, φ_2, φ_3, definovaných předpisy

$$\varphi_1(t) = \mathrm{e}^{3t},\ \varphi_2(t) = \mathrm{e}^{-t},\ \varphi_3(t) = t \cdot \mathrm{e}^{-t}.$$

Obecné řešení zapíšeme jako systém všech možných lineárních kombinací fundamentálního systému řešení:

$$y_h(t) = C_1\mathrm{e}^{3t} + C_2\mathrm{e}^{-t} + C_3 t\mathrm{e}^{-t},\ \ C_1 \in \mathbb{R}, C_2 \in \mathbb{R}, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Dosazení obecného řešení a jeho derivací do počátečních podmínek nám umožní sestavit jednoznačně řešitelnou soustavu lineárních rovnic. Její vyřešení nám umožní zapsat řešení zadané Cauchyovy úlohy.

$$\begin{aligned} y_h(t) &= C_1\mathrm{e}^{3t} + C_2\mathrm{e}^{-t} + C_3 t\mathrm{e}^{-t}, \\ y_h'(t) &= 3C_1\mathrm{e}^{3t} - C_2\mathrm{e}^{-t} + C_3(1-t)\,\mathrm{e}^{-t}, \\ y_h''(t) &= 9C_1\mathrm{e}^{3t} + C_2\mathrm{e}^{-t} + C_3(t-2)\,\mathrm{e}^{-t}. \end{aligned}$$

Obsah
225. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

$$\begin{aligned} y(0) = 0: \quad & 0 &=& C_1 + C_2, \\ y'(0) = 8: \quad & 8 &=& 3C_1 - C_2 + C_3, \\ y''(0) = 0: \quad & 0 &=& 9C_1 + C_2 - 2C_3. \end{aligned}$$

Řešením soustavy je trojice $(1, -1, 4)$. To znamená, že řešením φ zadané Cauchyovy úlohy je funkce zadaná předpisem

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^{-t} + 4t\mathrm{e}^{-t}.$$

▲

Příklad 10.10. Popišme stručně jak získáme fundamentální systém řešení rovnice

$$y''' + 4y'' + 6y' + 4y = 0.$$

Řešení. Charakteristická rovnice:

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 + 6\lambda + 4 = 0.$$

Po uhodnutí řešení $\lambda_1 = -2$ a úpravě :

$$(\lambda^2 + 2\lambda + 2) \cdot (\lambda + 2) = 0.$$

Kořeny:

$$\lambda_1 = -2, \ k_1 = 1,$$

$$\lambda_2 = \frac{-2 + \sqrt{4-8}}{2} = -1 + i, \ \overline{\lambda_2} = -1 - i, \quad m_2 = 1.$$

Obsah
226. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Fundamentální systém řešení :

$$\varphi_1(t) = \mathrm{e}^{-2t},\ \varphi_2(t) = \mathrm{e}^{-t} \cdot \sin t,\ \varphi_3(t) = \mathrm{e}^{-t} \cdot \cos t.$$

▲

Příklad 10.11. Určeme obecné řešení rovnice

$$y^{(4)} + 4y'' + 4y = 0.$$

Řešení. Po sestavení charakteristické rovnice

$$\lambda^{(4)} + 4\lambda^2 + 4 = 0,$$

si lze všimnout, že lze psát

$$\lambda^4 + 4\lambda^2 + 4 = (\lambda^2 + 2)^2,$$

takže zbývá nalézt řešení rovnice

$$(\lambda^2 + 2) = 0.$$

Jsou jimi komplexně sdružená čísla $\lambda_1 = i\sqrt{2}$, $\overline{\lambda_1} = -i\sqrt{2}$, přičemž jde o dvojnásobné kořeny charakteristické rovnice. Fundamentální systém řešení je proto tvořen funkcemi $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, definovanými předpisy:

$$\varphi_1(t) = \sin(\sqrt{2}t), \quad \varphi_2(t) = t \cdot \sin(\sqrt{2}t),$$
$$\varphi_3(t) = \cos(\sqrt{2}t), \quad \varphi_4(t) = t \cdot \cos(\sqrt{2}t).$$

Obecné řešení naší rovnice lze proto psát ve tvaru:

$$y_h(t) = C_1 \sin(\sqrt{2}t) + C_2 t \sin(\sqrt{2}t) + C_3 \cos(\sqrt{2}t) + C_4 t \cos(\sqrt{2}t),$$
$$C_1 \in \mathbb{R}, \ldots, C_4 \in \mathbb{R}.$$

▲

Obsah
227. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Wronského matice

Předpokládejme, že jsme nalezli n řešení $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ homogenní rovnice (10.2) se spojitými koeficienty a spojitou pravou stranou na otevřeném intervalu J. Jak poznáme, že jde o fundamentální systém řešení této rovnice? Jinými slovy, jak snadno ověříme lineární nezávislost uvažovaného systému řešení? Při hledání odpovědi na uvedenou otázku se vyplatí studovat vlastnosti čtvercové maticové funkce ve tvaru:

$$W(t) = \begin{bmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \ldots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \ldots & \varphi_n'(t) \\ & & \vdots & \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \varphi_2^{(n-1)}(t) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}.$$

Uvedené matici budeme říkat Wronského matice, jejímu determinantu pak Wronskián.

Připomeňme na úvod jedno tvrzení, které si možná čtenář pamatuje z lineární algebry.

Věta 10.12 (O lineární závislosti funkcí). *Nechť je na otevřeném intervalu $J \subset \mathbb{R}$ dán systém funkcí $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, které na J mají konečné derivace až do řádu $n-1$ včetně. Tvoří-li funkce $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ lineárně závislý systém, potom pro každé $t_0 \in J$ platí:*

$$\det W(t_0) = \det \begin{bmatrix} \varphi_1(t_0) & \varphi_2(t_0) & \ldots & \varphi_n(t_0) \\ \varphi_1'(t_0) & \varphi_2'(t_0) & \ldots & \varphi_n'(t_0) \\ & & \vdots & \\ \varphi_1^{(n-1)}(t_0) & \varphi_2^{(n-1)}(t_0) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(t_0) \end{bmatrix} = 0.$$

Obsah
228. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Pro zájemce

Důkaz. Ukážme tedy, že z lineární závislosti systému $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ nutně plyne nulovost Wronskiánu na celém intervalu J. Předpokládejme tedy, že v rovnosti

$$C_1 \cdot \varphi_1 + C_2 \cdot \varphi_2 + \cdots + C_n \cdot \varphi_n = 0,$$

je alespoň jeden z koeficientů $C_1 \in \mathbb{R}, C_2 \in \mathbb{R}, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$ nenulový. Pokud uvedenou rovnost postupně derivujeme, zjišťujeme, že musí platit:

$$\begin{aligned}
C_1 \cdot \varphi_1 + C_2 \cdot \varphi_2 + \cdots + C_n \cdot \varphi_n &= 0,\\
C_1 \cdot \varphi_1' + C_2 \cdot \varphi_2' + \cdots + C_n \cdot \varphi_n' &= 0,\\
C_1 \cdot \varphi_1'' + C_2 \cdot \varphi_2'' + \cdots + C_n \cdot \varphi_n'' &= 0,\\
&\vdots\\
C_1 \cdot \varphi_1^{(n-1)} + C_2 \cdot \varphi_2^{(n-1)} + \cdots + C_n \cdot \varphi_n^{(n-1)} &= 0.
\end{aligned}$$

To ovšem znamená, že pro každé $t \in J$ má soustava rovnic

$$\begin{bmatrix}
\varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \ldots & \varphi_n(t)\\
\varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \ldots & \varphi_n'(t)\\
 & & \vdots & \\
\varphi_1^{(n-1)}(t) & \varphi_2^{(n-1)}(t) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(t)
\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ \vdots\\ 0 \end{bmatrix}$$

nenulové řešení, což je možné právě tehdy, když matice této soustavy je singulární, a proto $\det W(t) = 0$. □

V případě, že funkce $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ navíc tvoří systém řešení homogenní rovnice (10.2), můžeme předchozí tvrzení výrazně zesílit. Podle Věty 10.1 máme pro libovolně zvolené

Obsah
229. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

$t_0 \in J$ a libovolnou volbu $(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ zajištěnu zajištěnu existenci a jednoznačnost odpovídajícího řešení φ Cauchyovy úlohy (10.2), (10.3) na J. Z Věty 10.4 plyne, že toto řešení je dáno jako vhodná lineární kombinace fundamentálního systému řešení rovnice. Koeficienty této lineární kombinace přitom tvoří n-tici $(C_1, C_2, \ldots, C_n)$ reálných čísel, která je (při zachování pořadí prvků fundamentálního systému řešení) dána jednoznačně. Na základě uvedených vlastností za chvíli dokážeme následující tvrzení:

Věta 10.13 (O Wronskiánu). *Nechť jsou všechny koeficienty $a_1, a_2, \ldots, a_n$ homogenní rovnice (10.2) spojité funkce definované na otevřeném intervalu J. Nechť $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ tvoří fundamentální systém řešení rovnice (10.2) na J. Potom pro každé $t_0 \in J$ je hodnota Wronského maticové funkce $W(t_0)$ regulární maticí, to znamená, že*

$$\forall t_0 \in J: \quad \det W(t_0) \neq 0.$$

Poznámka 10.14. Pro Wronskián $\det W(t)$ odpovídající systému řešení homogenní LDR (10.2) se spojitými koeficienty na J tedy mohou nastat pouze dva případy. Buď je zmíněný Wronskián funkcí na J identicky nulovou nebo je hodnota $\det W(t)$ nenulová v každém bodě $t \in J$.

Pro zájemce

Důkaz. Nechť $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ jsou řešeními homogenní rovnice (10.2) se spojitými koeficienty definovanými na J. Všimněme si, že úloha vyjádřit řešení φ Cauchyovy úlohy (10.2),

$$y(t_0) = 0,\ y'(t_0) = 0, \ldots, y^{(n-1)}(t_0) = 0, \tag{10.19}$$

jako lineární kombinaci

$$\varphi = C_1 \cdot \varphi_1 + C_2 \cdot \varphi_2 + \cdots + C_n \cdot \varphi_n,$$

Obsah
230. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

je ekvivalentní problému nalezení řešení soustavy lineárních rovnic ve tvaru

$$\begin{bmatrix} \varphi_1(t_0) & \varphi_2(t_0) & \dots & \varphi_n(t_0) \\ \varphi_1'(t_0) & \varphi_2'(t_0) & \dots & \varphi_n'(t_0) \\ & & \vdots & \\ \varphi_1^{(n-1)}(t_0) & \varphi_2^{(n-1)}(t_0) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(t_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Zvolme libovolně $t_0 \in J$. Zřejmě bude stačit, když ukážeme, že pokud $\det W(t_0) = 0$, pak je systém $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ tvořen lineárně závislými funkcemi a tedy nemůže představovat fundamentální systém řešení rovnice (10.2). Tedy, nechť platí $\det W(t_0) = 0$. To znamená, že soustava lineárních rovnic

$$\begin{bmatrix} \varphi_1(t_0) & \varphi_2(t_0) & \dots & \varphi_n(t_0) \\ \varphi_1'(t_0) & \varphi_2'(t_0) & \dots & \varphi_n'(t_0) \\ & & \vdots & \\ \varphi_1^{(n-1)}(t_0) & \varphi_2^{(n-1)}(t_0) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(t_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

má singulární matici a tedy kromě nulového řešení existuje nenulové řešení $\left(\widetilde{C_1}, \widetilde{C_2}, \dots, \widetilde{C_n}\right) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0)\}$ této soustavy. To ovšem znamená, že na J existují dvě řešení Cauchyovy úlohy (10.2), (10.19):

$$\begin{aligned} \varphi &= 0 \cdot \varphi_1 + 0 \cdot \varphi_2 + \dots + 0 \cdot \varphi_n = 0, \\ \psi &= \widetilde{C_1} \cdot \varphi_1 + \widetilde{C_2} \cdot \varphi_2 + \dots + \widetilde{C_n} \cdot \varphi_n. \end{aligned}$$

Protože Cauchyova úloha má na J právě jedno řešení, musí platit $\psi = \varphi = 0$, to znamená, že

$$\widetilde{C_1} \cdot \varphi_1 + \widetilde{C_2} \cdot \varphi_2 + \dots + \widetilde{C_n} \cdot \varphi_n = 0,$$

kde alespoň jedno z čísel $\widetilde{C_1}, \widetilde{C_2}, \dots, \widetilde{C_n}$ je nenulové. Odtud však plyne, že systém $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ tvoří lineárně závislou soustavu, a proto nemůže představovat fundamentální systém řešení homogenní rovnice (10.2) . □

Obsah
231. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Pro zájemce

Poznámka 10.15. (**O problému identifikace**) Existuje řada systémů, jejichž chování lze úspěšně modelovat homogenní lineární diferenciální rovnicí druhého řádu ve tvaru

$$y'' + a_1(t)\, y' + a_2(t)\, y = 0, \tag{10.20}$$

přičemž nejsou přesně známy koeficienty a_1, a_2 této rovnice. Představme si na chvíli takový systém a předpokládejme, že jsme (třeba měřením) na otevřeném intervalu J zjistili dvě lineárně nezávislá řešení φ_1, φ_2 rovnice (10.20), takže v každém bodě $t \in J$ je Wronskián

$$\det W(t) = \det \begin{bmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{bmatrix}$$

nenulové číslo. Popišme, jak nalezneme funkce a_1, a_2. Protože ke každému řešení y uvažované rovnice na J jsou dána jednoznačně čísla C_1, C_2 taková, že na J platí

$$y(t) = C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t),$$

musí také platit:

$$y'(t) = C_1\varphi_1'(t) + C_2\varphi_2'(t),$$
$$y''(t) = C_1\varphi_1''(t) + C_2\varphi_2''(t).$$

Zapíšeme-li na J uvedené rovnosti vektorově:

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_1'(t) \\ \varphi_1''(t) \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} \varphi_2(t) \\ \varphi_2'(t) \\ \varphi_2''(t) \end{bmatrix},$$

ihned vidíme, že vektory

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_1'(t) \\ \varphi_1''(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \varphi_2(t) \\ \varphi_2'(t) \\ \varphi_2''(t) \end{bmatrix}$$

jsou lineárně závislé v každém bodě $t \in J$, takže na tomto intervalu platí:

$$\det \begin{bmatrix} y(t) & \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ y'(t) & \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \\ y''(t) & \varphi_1''(t) & \varphi_2''(t) \end{bmatrix} = 0.$$

Rozvineme-li determinant podle prvního sloupce, získáváme na J rovnost tvaru

$$A_1(t) \cdot y''(t) + A_2(t) \cdot y'(t) + A_3(t) \cdot y(t) = 0, \tag{10.21}$$

kde na J platí:

$$A_1(t) = \det \begin{bmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{bmatrix} = \det W(t) \neq 0,$$

$$A_2(t) = \varphi_1''(t) \cdot \varphi_2(t) - \varphi_1(t) \cdot \varphi_2''(t), \;\; A_3(t) = \varphi_1'(t) \cdot \varphi_2''(t) - \varphi_1''(t) \cdot \varphi_2'(t).$$

Po vydělení rovnosti (10.21) funkcí A_1 (nenulovým Wronskiánem), zjistíme, že na J platí rovnost

$$y''(t) + a_1(t)\, y'(t) + a_2(t)\, y(t) = 0,$$

kde pro každé $t \in J$:

$$a_1(t) = \frac{A_2(t)}{A_1(t)}, \quad a_2(t) = \frac{A_3(t)}{A_1(t)}. \tag{10.22}$$

Právě jsme ukázali, že pokud má být libovolná lineární kombinace funkcí φ_1, φ_2 řešením homogenní lineární diferenciální rovnice (10.20), potom funkce a_1, a_2 musí splňovat vztahy (10.22) na J. Koeficienty rovnice (10.20) jsou tedy fundamentálním systémem řešení této rovnice dány jednoznačně. Předpisy (10.22) si přitom nemusíme pamatovat - v zadaných úlohách je vždy snadno spočítáme z příslušných determinantů. Dříve než se pustíme do konkrétních příkladů, jen požádejme laskavého čtenáře, aby si rozmyslel, jak uvedený postup modifikovat pro homogenní LDR libovolného řádu.

Obsah
233. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Pro zájemce

Příklad 10.16. Nalezněme homogenní LDR druhého řádu tak, aby funkce φ_1, φ_2 definované na otevřeném intervalu $J = (1, \infty)$ předpisy

$$\varphi_1(t) = \mathrm{e}^t, \quad \varphi_2(t) = t,$$

tvořily fundamentální systém řešení této rovnice.

Řešení. Pro určení řešení vlastně stačí zopakovat postup z předchozí poznámky, pro stručnost budeme vynechávat označení nezávislé proměnné t u y - dostaneme tak přímo požadovanou diferenciální rovnici. Na $J = (1, \infty)$ zřejmě platí

$$\det \begin{bmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \mathrm{e}^t & t \\ \mathrm{e}^t & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{e}^t(1-t) \neq 0,$$

takže:

$$\det \begin{bmatrix} y & \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ y' & \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \\ y'' & \varphi_1''(t) & \varphi_2''(t) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} y(t) & \mathrm{e}^t & t \\ y'(t) & \mathrm{e}^t & 1 \\ y''(t) & \mathrm{e}^t & 0 \end{bmatrix} = 0,$$

$$\mathrm{e}^t(1-t)\,y'' + t\mathrm{e}^t y' - \mathrm{e}^t y = 0,$$

$$y'' + \frac{t}{1-t}y - \frac{1}{1-t} = 0, \quad t \in (1, \infty).$$

▲

Řešení následujících příkladů lze chápat jako ilustraci stručného zápisu:

Příklad 10.17. Nalezněte homogenní LDR druhého řádu tak, aby funkce φ_1, φ_2 předpisy

$$\varphi_1(t) = \cos t, \quad \varphi_2(t) = \sin t,$$

tvořily fundamentální systém řešení této rovnice.

Obsah
234. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Řešení.

$$\det \begin{bmatrix} y & \cos t & \sin t \\ y' & -\sin t & \cos t \\ y'' & -\cos t & -\sin t \end{bmatrix} = 0,$$

$$\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) y'' + \left(\cos t \sin t - \sin t \cos t\right) y' + \left(\sin^2 t + \cos^2 t\right) y = 0,$$

$$\underline{\underline{y'' + y = 0}}.$$

▲

Příklad 10.18. Jaká homogenní LDR třetího řádu má fundamentální systém řešení tvořen funkcemi

$$\varphi_1(t) = 1, \quad \varphi_2(t) = t, \quad \varphi_3(t) = t^2 \,?$$

Řešení.

$$\det \begin{bmatrix} y & 1 & t & t^2 \\ y' & 0 & 1 & 2t \\ y'' & 0 & 0 & 2 \\ y''' & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0, \qquad - \det \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot y''' +$$

$$+ \det \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot y'' - \det \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot y' + \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot y \; = 0,$$

$$-2 \cdot y''' + 0 \cdot y'' - 0 \cdot y' + 0 \cdot y = 0,$$

$$\underline{\underline{y''' = 0}}.$$

Pozamenejme, že v tomto případě bylo možné diferenciální rovnici $y''' = 0$ jednoduše uhodnout. ▲

Obsah
235. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Nehomogenní LDR řádu n

Metoda variace konstant

V tomto odstavci popíšeme obecnou metodu nalezení partikulárního řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice za předpokladu, že je znám fundamentální systém řešení přidružené homogenní rovnice. Začněme pro jednoduchost s rovnicí druhého řádu. Uvažujme tedy rovnici

$$y'' + a_1(t)\, y' + a_2(t)\, y = b(t)\,, \tag{10.23}$$

ve které jsou jak koeficienty a_1, a_2, tak pravá strana b spojitými funkcemi definovanými na otevřeném intervalu J. Jak již víme, přidružená homogenní rovnice

$$y'' + a_1(t)\, y' + a_2(t)\, y = 0 \tag{10.24}$$

má fundamentální systém řešení tvořený dvojicí funkcí φ_1, φ_2. Obecné řešení y_h přidružené homogenní rovnice (10.24) tedy můžeme zapsat ve tvaru

$$y_h(t) = C_1 \cdot \varphi_1(t) + C_2 \cdot \varphi_2(t)\,, \quad C_1 \in \mathbb{R},\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

I.

Podobně jako u rovnice prvního řádu budeme předpokládat, že řešení y_p nehomogenní rovnice (10.23) lze zapsat ve tvaru

$$y_p(t) = k_1(t) \cdot \varphi_1(t) + k_2(t) \cdot \varphi_2(t)\,, \tag{10.25}$$

kde k_1, k_2 jsou vhodné diferencovatelné funkce definované na J (konstanty C_1, C_2 jsme zaměnili funkcemi - odtud název metoda variace konstant).

Obsah
236. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Má-li být funkce y_p řešením (10.23) na J, musí po dosazení y_p do této rovnice na J, platit vztah

$$y_p''(t) + a_1(t)\, y_p'(t) + a_2(t)\, y_p(t) = b(t),$$

který skrývá jeden požadavek pro dvojici hledaných funkcí k_1, k_2:

$$\begin{aligned}(k_1(t)\cdot\varphi_1(t) + k_2(t)\cdot\varphi_2(t))'' + a_1(t)\,(k_1(t)\cdot\varphi_1(t) + k_2(t)\cdot\varphi_2(t))' + \\ + a_2(t)\,(k_1(t)\cdot\varphi_1(t) + k_2(t)\cdot\varphi_2(t)) = b(t).\end{aligned}$$

Za chvíli si ukážeme, jak vhodně přidat druhou podmínku.

Nejprve zapišme, jak vypadá první derivace funkce y_p na J. Použitím pravidla o derivaci součinu a následném přeuspořádání získáváme:

$$\begin{aligned}y_p'(t) = \left[k_1'(t)\cdot\varphi_1(t) + k_2'(t)\cdot\varphi_2(t)\right] + \\ + \left[k_1(t)\cdot\varphi_1'(t) + k_2(t)\cdot\varphi_2'(t)\right].\end{aligned} \tag{10.26}$$

Nyní bychom měli vypočítat ještě jednu derivaci a dosadit do (10.23). My si však výpočet druhé derivace nejprve zjednodušíme. Přidáme si již avizovanou druhou podmínku. Tou bude požadavek, aby první sčítanec v hranatých závorkách (v řádku s číslem (10.26)) byl na J nulový:

$$k_1'(t)\cdot\varphi_1(t) + k_2'(t)\cdot\varphi_2(t) = 0.$$

Tak jsme získali konkrétní tvar prvního požadavku pro derivace funkcí k_1, k_2. Za chvíli se ukáže, že to byla dobrá volba. Využijeme-li uvedené rovnosti, můžeme napsat

$$y_p'(t) = k_1(t)\cdot\varphi_1'(t) + k_2(t)\cdot\varphi_2'(t)$$

a další derivování nám po drobné úpravě dává:

$$y_p''(t) = \left[k'_1(t)\cdot\varphi_1'(t) + k'_2(t)\cdot\varphi_2'(t)\right] + \left[k_1(t)\cdot\varphi_1''(t) + k_2(t)\cdot\varphi_2''(t)\right].$$

Obsah
237. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Nyní jsme připraveni dosadit do (10.23):

$$\begin{aligned}\left[k'_1(t)\cdot\varphi'_1(t)+k'_2(t)\cdot\varphi'_2(t)\right]+\left[k_1(t)\cdot\varphi''_1(t)+k_2(t)\cdot\varphi''_2(t)\right]+\\ +a_1(t)\left[k_1(t)\cdot\varphi'_1(t)+k_2(t)\cdot\varphi'_2(t)\right]+\\ +a_2(t)\left[k_1(t)\cdot\varphi_1(t)+k_2(t)\cdot\varphi_2(t)\right]=b(t).\end{aligned}$$

Po roznásobení, přeuspořádání jednotlivých sčítanců a vytknutí výrazů $k_1(t)$, $k_2(t)$ můžeme psát:

$$\begin{aligned}&\left[k'_1(t)\cdot\varphi'_1(t)+k'_2(t)\cdot\varphi'_2(t)\right]+\\ &+k_1(t)\left[\varphi''_1(t)+a_1(t)\varphi'_1(t)+a_2(t)\varphi_1(t)\right]+\\ &+k_2(t)\left[\varphi''_2(t)+a_1(t)\varphi'_2(t)+a_2(t)\varphi_2(t)\right]=b(t).\end{aligned}$$

Protože φ_1, φ_2 jsou řešeními přidružené homogenní rovnice (10.24), funkce ve druhé a třetí hranaté závorce jsou nulové. Uvedený vztah tedy přechází do jednoduchého tvaru

$$k'_1(t)\cdot\varphi'_1(t)+k'_2(t)\cdot\varphi'_2(t)=b(t),$$

který je druhou podmínkou kladenou na derivace funkcí k_1, k_2.

Napíšeme-li si pro přehlednost obě rovnosti pod sebe

$$\begin{aligned}k'_1(t)\cdot\varphi_1(t)+k'_2(t)\cdot\varphi_2(t)&=0,\\ k'_1(t)\cdot\varphi'_1(t)+k'_2(t)\cdot\varphi'_2(t)&=b(t),\end{aligned}$$

vidíme, že jde vlastně o soustavu lineárních rovností pro funkce k'_1, k'_2, přičemž maticí této soustavy je Wronského maticová funkce:

Obsah
238. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

$$\begin{bmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_1'(t) \\ k_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b(t) \end{bmatrix}.$$

II.

Tak a obtížnější část je za námi. Z předpokladu, že řešení y_p nehomogenní rovnice (10.23) lze zapsat ve tvaru (10.25) jsme získali soustavu rovností, které musí splňovat derivace funkcí k_1, k_2. Zbývá ukázat, že náš výchozí předpoklad o tvaru řešení y_p a diferencovatelnosti funkcí k_1, k_2 byl oprávněný. Proto na J uvažujme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{bmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b(t) \end{bmatrix}.$$

Protože φ_1, φ_2 tvoří fundamentální systém řešení přidružené homogenní rovnice (10.24), Wronského matice $W(t)$ je regulární maticí pro každé $t \in J$. To ovšem znamená, že funkce u_1, u_2 jsou na J jednoznačně definovány. Obě funkce jsou na J navíc spojité, což je bezprostřední důsledek spojitosti koeficientů Wronského maticové funkce a funkcí na pravé straně soustavy. Ze spojitosti obou funkcí u_1, u_2 plyne existence primitivní funkce k_1 k u_1 na J a existence primitivní funkce k_2 k u_2 na J:

$$k_1(t) = \int u_1(t)\,\mathrm{d}t, \quad k_2(t) = \int u_2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Definujme nyní na J funkci y_p předpisem

$$y_p(t) = k_1(t) \cdot \varphi_1(t) + k_2(t) \cdot \varphi_2(t).$$

Ze způsobu, jakým jsou utvořeny funkce k_1, k_2 je jasné, že obě jsou diferencovatelné na J

Obsah
239. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

a splňují vztahy

$$k_1'(t)\cdot\varphi_1(t)+k_2'(t)\cdot\varphi_2(t)=0,$$
$$k_1'(t)\cdot\varphi_1'(t)+k_2'(t)\cdot\varphi_2'(t)=b(t).$$

Odtud plyne, že po výpočtu y_p, y_p', y_p'' a patřičném dosazení přejde rovnice (10.23) v rovnost na J. Tím je ukázáno, že před chvílí definovaná funkce y_p je skutečně řešením (10.23) na J.

Dosud provedenými úvahami jsme vlastně dokázali speciální případ následujícího tvrzení.

Věta 10.19 (O metodě variace konstant pro LDR řádu n). *Budiž dána lineární diferenciální rovnice (10.1), přičemž všechny koeficienty $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i pravá strana b této rovnice nechť jsou spojitými funkcemi definovanými na otevřeném intervalu J. Nechť na J funkce $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ tvoří fundamentální systém řešení homogenní rovnice (10.2) přidružené k rovnici (10.1). Pak existují na J diferencovatelné funkce $k_1, k_2, \ldots, k_n$ takové, že funkce y_p definovaná na J předpisem*

$$y_p(t)=k_1(t)\cdot\varphi_1(t)+k_2(t)\cdot\varphi_2(t)+\cdots+k_n(t)\cdot\varphi_n(t),$$

je na tomto intervalu řešením rovnice (10.1). n-tice derivací $(k_1', k_2', \ldots, k_n')$, je přitom na J jednoznačně zadána vztahem

$$\begin{bmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \ldots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \ldots & \varphi_n'(t) \\ & & \vdots & \\ \varphi_1^{(n-2)}(t) & \varphi_2^{(n-2)}(t) & \ldots & \varphi_n^{(n-2)}(t) \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \varphi_2^{(n-1)}(t) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_1'(t) \\ k_2'(t) \\ \vdots \\ k_{n-1}'(t) \\ k_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix}. \qquad (10.27)$$

Obsah
240. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Pro zájemce

Poznámka 10.20. Důkaz právě uvedeného tvrzení zůstává pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ téměř beze změn stejný jako odvození, které jsme výše uvedli pro rovnici druhého řádu. Jediné, o čem by mohl čtenář pochybovat je, že získaná soustava rovnic bude skutečně tvaru (10.27). Proto stručně uveďme odvození této soustavy.

Předpokládejme, že jsou splněny předpoklady věty. Nechť fundamentální systém řešení rovnice (10.2) je tvořen funkcemi $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, tedy

$$y_h(t) = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + \ldots + C_n\varphi_n, \quad C_1 \in \mathbb{R}, C_2 \in \mathbb{R}, \ldots, C_n \in \mathbb{R}.$$

Hledejme vztahy pro n-tici na J diferencovatelných funkcí $k_1, \ldots, k_n$ tak, aby funkce $y_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$y_p(t) = k_1(t)\varphi_1(t) + \ldots + k_n(t)\varphi_n(t), \quad t \in J,$$

byla řešením nehomogenní rovnice (10.1). Po dosazení předpokládaného tvaru y_p do rovnice (10.1), získáme jeden požadavek pro n neznámých funkcí. Můžeme si proto dovolit přidat ještě $n-1$ vhodných podmínek.

Nejprve vypočteme 1. derivaci hledaného řešení y_p na J:

$$\begin{aligned} y_p'(t) = {} & k_1'(t)\varphi_1(t) + k_2'(t)\varphi_2(t) + \cdots + k_n'(t)\varphi_n(t) + \\ & + k_1(t)\varphi_1'(t) + k_2(t)\varphi_2'(t) + \cdots + k_n(t)\varphi_n'(t). \end{aligned}$$

Stručněji:

$$y_p'(t) = \sum_{i=1}^{n} k_i'(t)\varphi_i(t) + \sum_{i=1}^{n} k_i(t)\varphi_i'(t).$$

První vztah pro funkce $k_1', \ldots, k_n'$ na J zvolíme takto:

$$\sum_{i=1}^{n} k_i'(t)\varphi_i(t) = 0. \qquad (R_1)$$

Obsah
241. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Tím jsme si zjednodušili předpis pro druhou derivaci y_p'' :

$y_p''(t) = \sum_{i=1}^{n} k_i'(t)\varphi_i'(t) + \sum_{i=1}^{n} k_i(t)\varphi_i''(t).$

Druhou podmínku zvolme takto:

$$\sum_{i=1}^{n} k_i'(t)\varphi_i'(t) = 0. \qquad (R_2)$$

Podobně počítejme další derivace funkce y_p a přidávejme patřičné vztahy:

$y_p'''(t) = \sum_{i=1}^{n} k_i'(t)\varphi_i''(t) + \sum_{i=1}^{n} k_i(t)\varphi_i'''(t),$

$$\sum_{i=1}^{n} k_i'(t)\varphi_i''(t) = 0, \qquad (R_3)$$

$$\vdots$$

$y_p^{(n-1)}(t) = \sum_{i=1}^{n} k_i'(t)\varphi_i^{(n-2)}(t) + \sum_{i=1}^{n} k_i(t)\varphi_i^{(n-1)}(t),$

$$\sum_{i=1}^{n} k_i'(t)\varphi_i^{(n-2)}(t) = 0, \qquad (R_{n-1})$$

$y_p^{(n)}(t) = \sum_{i=1}^{n} k_i'(t)\varphi_i^{(n-1)}(t) + \sum_{i=1}^{n} k_i(t)\varphi_i^{(n)}(t).$

Dosazením funkce y_p a jejich derivací do rovnice (10.1) získáme s přihlédnutím k (R_1) až

Obsah
242. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

(R_{n-1}) na J:

$$\sum_{i=1}^{n} k_i'(t)\varphi_i^{(n-1)}(t) + \sum_{i=1}^{n} k_i(t)\varphi_i^{(n)}(t) + a_1(t)\sum_{i=1}^{n} k_i(t)\varphi_i^{(n-1)}(t) + \\ + a_2(t)\sum_{i=1}^{n} k_i(t)\varphi_i^{(n-2)}(t) + \ldots + a_n(t)\sum_{i=1}^{n} k_i(t)\varphi_i(t) = b(t).$$

Po zřejmých úpravách lze uvedený vztah napsat ve tvaru:

$$\sum_{i=1}^{n} k_i'(t)\varphi_i^{(n-1)}(t) + k_1(t)\left[\varphi_1^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^{n} a_i(t)\,\varphi_1^{(n-i)}(t)\right] + \\ + k_2(t)\left[\varphi_2^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^{n} a_i(t)\,\varphi_2^{(n-i)}(t)\right] + \\ \ldots \\ + k_n(t)\left[\varphi_n^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^{n} a_i(t)\,\varphi_n^{(n-i)}(t)\right] = b(t).$$

Protože každá z funkcí $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ je řešením homogenní rovnice (10.2), výrazy v hranatých závorkách jsou nulové, takže můžeme zapsat poslední rovnici ve tvaru:

$$\sum_{i=1}^{n} k_i'(t)\varphi_i^{(n-1)}(t) = b(t). \qquad (R_n)$$

Nyní je již nahlédnutelné, že n-tice funkcí $(k_1', k_2', \ldots, k_n')$ je dána jednoznačně jako řešení soustavy (10.27).

Obsah
243. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Příklad 10.21. Nalezněme na $\mathbb{R}$ obecné řešení rovnice

$$y'' - \frac{2t}{t^2+1}y' + \frac{2}{t^2+1}y = t^2 + 1,$$

víme-li, že fundamentální systém řešení přidružené homogenní rovnice

$$y'' - \frac{2t}{t^2+1}y' + \frac{2}{t^2+1}y = 0,$$

na $\mathbb{R}$ je tvořen dvojicí funkcí φ_1, φ_2 zadaných předpisy

$$\varphi_1(t) = t, \qquad \varphi_2(t) = t^2 - 1.$$

Řešení. Nejprve nalezneme partikulární řešení

$$y_p(t) = k_1(t) \cdot \varphi_1(t) + k_2(t) \cdot \varphi_2(t)$$

zadané rovnice na $\mathbb{R}$. K tomu je potřeba vyřešit soustavu rovnic (10.27) pro neznámé funkce k_1', k_2' z Věty 10.19. Protože

$$\varphi_1'(t) = 1, \qquad \varphi_2'(t) = 2t,$$

půjde o jednoznačně řešitelnou soustavu

$$\begin{bmatrix} t & t^2-1 \\ 1 & 2t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_1'(t) \\ k_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ t^2+1 \end{bmatrix}.$$

Řešení uvedené soustavy můžeme nalézt třeba Cramerovým pravidlem. Determinantem soustavy je Wronskián

$$\det W(t) = \det \begin{bmatrix} t & t^2-1 \\ 1 & 2t \end{bmatrix} = t^2 + 1,$$

Obsah
244. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

musíme ještě vypočítat (pravou stranou soustavy postupně nahrazujeme sloupce Wronskiánu)

$$\det W_1(t) = \det \begin{bmatrix} 0 & t^2-1 \\ t^2+1 & 2t \end{bmatrix} = \left(1-t^2\right)\cdot\left(t^2+1\right),$$
$$\det W_2(t) = \det \begin{bmatrix} t & 0 \\ 1 & t^2+1 \end{bmatrix} = t\cdot\left(t^2+1\right).$$

Podle Cramerova pravidla platí

$$k_1'(t) = \frac{\det W_1(t)}{\det W(t)} = \frac{\left(1-t^2\right)\cdot\left(t^2+1\right)}{t^2+1} = 1-t^2,$$
$$k_2'(t) = \frac{\det W_2(t)}{\det W(t)} = \frac{t\cdot\left(t^2+1\right)}{t^2+1} = t,$$

takže například

$$k_1(t) = \int \left(1-t^2\right)\,\mathrm{d}t = t-\frac{t^3}{3}, \quad k_2(t) = \int t\,\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2}.$$

Partikulární řešení y_p zadané nehomogenní rovnice je tedy dáno předpisem

$$y_p(t) = k_1(t)\cdot\varphi_1(t) + k_2(t)\cdot\varphi_2(t) = \left(t-\frac{t^3}{3}\right)\cdot t + \frac{t^2}{2}\cdot\left(t^2-1\right) = \frac{t^4+3t^2}{6}.$$

Podle principu superpozice je obecné řešení nehomogenní rovnice dáno jako součet partikulárního řešení y_p této rovnice a obecného řešení přidružené homogenní rovnice. Proto lze psát:

$$y(t) = C_1\cdot t + C_2\cdot\left(t^2-1\right) + \frac{t^4+3t^2}{6}, \quad C_1\in\mathbb{R},\, C_2\in\mathbb{R}.$$

Obsah
245. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Poznamenejme ještě na závěr, že obecné řešení zadané rovnice jsme mohli napsat v poněkud modifikované podobě rovnou, pokud bychom při integraci funkcí k_1', k_2' zahrnuli do výsledku integrační konstanty C_1, C_2:

$$y(t) = \left(t - \frac{t^3}{3} + C_1\right) \cdot t + \left(\frac{t^2}{2} + C_2\right) \cdot \left(t^2 - 1\right), \quad C_1 \in \mathbb{R},\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Právě uvedená poznámka zřejmě platí obecně, její platnost plyne z tvaru obecného řešení homogenní rovnice a tvaru řešení nehomogenní rovnice získaného metodou variace konstant.

▲

Příklad 10.22. Určete maximální řešení Cauchyovy úlohy:

$$y''' - 2y'' + y' = \frac{\mathrm{e}^t}{1+t}, \quad y(0) = 0,\, y'(0) = -1,\, y''(0) = -3.$$

Řešení. Vzhledem k počáteční podmínce a pravé straně rovnice, bude maximální řešení úlohy definováno na intervalu $J = (-1; +\infty)$. Proto budeme od této chvíle všechny úvahy provádět na tomto intervalu. Snadno lze zjistit, že funkce $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ definované předpisy $\varphi_1(t) = \mathrm{e}^t$, $\varphi_2(t) = t \cdot \mathrm{e}^t$, $\varphi_3(t) = 1$, tvoří na J fundamentální systém řešení přidružené homogenní rovnice

$$y''' - 2y'' + y' = 0.$$

Řešení y_p budeme hledat metodou variace konstant, to znamená, že předpokládáme:

$$y_p(t) = k_1(t) \cdot \mathrm{e}^t + k_2 \cdot t \cdot \mathrm{e}^t + k_3(t), \quad t \in J. \tag{10.28}$$

Obsah
246. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Odpovídající systém lineárních rovnic na J:

$$k_1'(t)\cdot \mathrm{e}^t + k_2'(t)\cdot t\mathrm{e}^t + k_3'(t) = 0,$$

$$k_1'(t)\cdot \mathrm{e}^t + k_2'(t)\cdot (1+t)\cdot \mathrm{e}^t = 0,$$

$$k_1'(t)\cdot \mathrm{e}^t + k_2'(t)\cdot (2+t)\cdot \mathrm{e}^t = \frac{\mathrm{e}^t}{1+t}.$$

Z posledních dvou rovnic dostáváme postupně: $k_2'(t) = \frac{1}{1+t}$, $k_1(t) = -1$. Z prvé rovnice pak plyne $k_3'(t) = \frac{\mathrm{e}^t}{1+t}$. Funkce k_1, k_2, k_3 lze tedy na J například volit takto :

$$k_1(t) = -t, \quad k_2(t) = \ln(1+t), \quad k_3(t) = \int_0^t \frac{\mathrm{e}^s}{1+s}\,\mathrm{d}s.$$

Poznamenejme, že k použití určitého integrálu jako funkce horní meze jsme se uchýlili proto, že primitivní funkce k funkci $\frac{\mathrm{e}^t}{1+t}$ není elementární.

Po dosazení zjištěných funkcí do (10.28) a aplikaci principu superpozice řešení můžeme napsat obecné řešení uvažované rovnice:

$$y(t) = C_1\cdot \mathrm{e}^t + C_2 t\cdot \mathrm{e}^t + C_3 - t\cdot \mathrm{e}^t + \ln(1+t)\cdot t\cdot \mathrm{e}^t + \int_0^t \frac{\mathrm{e}^s}{1+s}\,\mathrm{d}s,$$

$C_1 \in \mathbb{R}$, $C_2 \in \mathbb{R}$, $C_3 \in \mathbb{R}$.

Řešení φ Cauchyovy úlohy musí splňovat počáteční podmínky : $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = -3$, takže pro konstanty C_1, C_2, C_3 získáváme po dvojím derivování a úpravě

následující systém rovnic :

$$\begin{aligned} C_1 + C_3 &= \quad 0, \\ C_1 + C_2 &= -1, \\ C_1 + 2C_2 &= -3. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy je uspořádaná trojice $(1, -2, -1)$. Maximálním řešením uvažované Cauchyovy úlohy je proto funkce φ daná předpisem :

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^t \cdot (1 - 3t) - 1 + t \cdot \mathrm{e}^t \ln(1 + t) + \int_0^t \frac{\mathrm{e}^s}{1 + s}\,\mathrm{d}s.$$

▲

Příklad 10.23. Na intervalu $J = (0, \infty)$ určeme řešení y_p diferenciální rovnice

$$y'' - 2y' + y = t - 2 + \frac{\mathrm{e}^t}{t}.$$

Řešení. Nejprve uhodneme řešení $u\,(t) = t$ rovnice

$$y'' - 2y' + y = t - 2.$$

Nyní nalézneme na J metodou variace konstant řešení v rovnice

$$y'' - 2y' + y = \frac{\mathrm{e}^t}{t}.$$

Protože fundamentální systém přidružené homogenní rovnice je tvořen funkcemi tvaru (prověřte)

$$\varphi_1(t) = \mathrm{e}^t, \qquad \varphi_1(t) = t\mathrm{e}^t,$$

můžeme sestavit příslušnou soustavu s Wronského maticí ve tvaru

$$\begin{bmatrix} \mathrm{e}^t & t\mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^t & (t+1)\,\mathrm{e}^t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_1'(t) \\ k_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\mathrm{e}^t}{t} \end{bmatrix}.$$

Snadno vypočteme Wronskián a další determinanty potřebné pro aplikaci Cramerova pravidla:

$$W(t) = \det \begin{bmatrix} \mathrm{e}^t & t\mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^t & (t+1)\,\mathrm{e}^t \end{bmatrix} = \mathrm{e}^{2t},$$

$$W_1(t) = \det \begin{bmatrix} 0 & t\mathrm{e}^t \\ \frac{\mathrm{e}^t}{t} & (t+1)\,\mathrm{e}^t \end{bmatrix} = -\mathrm{e}^{2t}, \qquad W_2(t) = \det \begin{bmatrix} \mathrm{e}^t & 0 \\ \mathrm{e}^t & \frac{\mathrm{e}^t}{t} \end{bmatrix} = \frac{\mathrm{e}^{2t}}{t}.$$

Odtud na J například

$$k_1(t) = \int \frac{-\mathrm{e}^{2t}}{\mathrm{e}^{2t}}\,\mathrm{d}t = \int -1\,\mathrm{d}t = -t, \qquad k_2(t) = \int \frac{\frac{\mathrm{e}^{2t}}{t}}{\mathrm{e}^{2t}}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln t.$$

Předpis pro řešení v na J tedy vypadá takto:

$$v(t) = k_1(t) \cdot \varphi_1(t) + k_1(t) \cdot \varphi_1(t) = -t\mathrm{e}^t + t\mathrm{e}^t \ln t.$$

Nyní jsme připraveni aplikovat princip superpozice a zapsat předpis pro řešení původně zadané rovnice na J:

$$y_p(t) = u(t) + v(t) = t - t\mathrm{e}^t + t\mathrm{e}^t \ln t.$$

▲

Obsah
249. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Metoda speciální pravé strany

Jak jsme si ukázali, je-li rovnice (10.1) nehomogenní, pak její řešení lze (po nalezení fundamentálního systému řešení přidružené homogenní rovnice (10.2)) hledat metodou variace konstant. V případě rovnice s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou b, lze většinou postupovat rychleji.

Věta 10.24 (O rovnicích se speciální pravou stranou). *Uvažujme diferenciální rovnici s konstantními koeficienty ve tvaru*

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = \mathrm{e}^{\alpha t} \cdot [P_1(t) \cdot \sin(\beta t) + P_2(t) \cdot \cos(\beta t)]\,, \tag{10.4}$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ a P_1, P_2 jsou reálné polynomy. Označme písmenem s větší ze stupňů polynomů P_1, P_2. Přitom se dohodněme, že stupněm konstantního nenulového polynomu bude číslo 0 a stupněm nulového polynomu bude číslo -1. Nechť číslo M udává algebraickou násobnost čísla $\alpha + i \cdot \beta$ jakožto kořene charakteristického polynomu $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_n$, přičemž v případě, že $\alpha + i\beta$ není kořenem tohoto polynomu, klademe $M = 0$. Pak na $\mathbb{R}$ existuje řešení y_p rovnice (10.4), které lze zapsat ve tvaru :

$$y_p(t) = t^M \cdot \mathrm{e}^{\alpha t} \cdot [Q_1(t) \cdot \sin(\beta t) + Q_2(t) \cdot \cos(\beta t)]\,,$$

kde Q_1, Q_2 jsou reálné polynomy stupně nejvýše s.

Poznámka 10.25. Je-li v uvedené větě $\sin\beta = 0$, je vhodné zvolit $P_1 = 0$. Je-li $\cos\beta = 0$, položíme $P_2 = 0$.

Obsah
250. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Poznámka 10.26. Polynomy Q_1, Q_2 určujeme dosazením předpokládaného tvaru řešení y_p do rovnice (10.4). K určení polynomů Q_1, Q_2 potřebujeme určit jejich koeficienty. To se provádí metodou neurčitých koeficientů (vzpomeňme si na hledání rozkladu ryzí racionální funkce na parciální zlomky). Nejlepší bude daný postup demonstrovat na příkladech:

Příklad 10.27. Nalezněme maximální řešení diferenciální rovnice

$$y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^t.$$

Řešení. Nejprve nalezneme kořeny charakteristického polynomu přidružené homogenní rovnice. Protože

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2,$$

charakteristický polynom má jediný dvojnásobný kořen $\lambda_1 = 1$.

Protože na $\mathbb{R}$ platí

$$\mathrm{e}^t = \mathrm{e}^{1\cdot t} \cdot [0 \cdot \sin(0 \cdot t) + 1 \cdot \cos(0 \cdot t)]$$

zadaná rovnice je rovnicí s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou. Zřejmě můžeme položit

$$\alpha = 1,\ \beta = 0, ,P_1(t) = 0 \text{ na } \mathbb{R},\ P_2(t) = 1 \text{ na } \mathbb{R},$$

takže

$$s = \max\{-1, 0\} = 0.$$

Protože číslo $\alpha + \beta i = 1 + 0i = 1$ je dvojnásobným kořenem charakteristického polynomu přidružené homogenní rovnice, musíme položit

$$M = 2.$$

Obsah
251. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Z Věty 10.24 plyne, že existují konstantní funkce

$$Q_1(t) = A,\ A \in \mathbb{R}, \qquad Q_2(t) = B,\ B \in \mathbb{R},$$

takové, že zadaná rovnice má na $\mathbb{R}$ řešení y_p, které lze vyjádřit předpisem

$$y_p(t) = t^2 \cdot \mathrm{e}^{1\cdot t} \cdot [A \cdot \sin(0 \cdot t) + B \cdot \cos(0 \cdot t)] = t^2 \cdot \mathrm{e}^t \cdot B.$$

Poznamenejme, že na hodnotě čísla A nezáleží, protože $\beta = 0$. K vyřešení úlohy zbývá nalézt číslo B, které zjistíme po dosazení y_p do rovnice. Po výpočtu potřebných derivací

$$y_p(t) = Bt^2\mathrm{e}^t, \qquad y_p'(t) = B\left(t^2 + 2t\right)\mathrm{e}^t, \qquad y_p''(t) = B\left(t^2 + 4t + 2\right)\mathrm{e}^t,$$

můžeme dosadit do zadané rovnice:

$$B\left(t^2 + 4t + 2\right)\mathrm{e}^t - 2\left[B\left(t^2 + 2t\right)\mathrm{e}^t\right] + Bt^2\mathrm{e}^t = \mathrm{e}^t.$$

Po drobných ekvivalentních úpravách ihned zjistíme, že

$$2B = 1,$$

takže $B = \frac{1}{2}$, a tedy

$$y_p(t) = \frac{1}{2}t^2\mathrm{e}^t.$$

▲

Obsah
252. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Příklad 10.28. Určeme obecné řešení diferenciální rovnice

$$y''' - y'' - 5y' - 3y = \cos(2t). \tag{10.5}$$

Řešení. Nejprve vypočítáme obecné řešení příslušné přidružené homogenní rovnice

$$y''' - y'' - 5y' - 3y = 0.$$

Charakteristický polynom

$$\lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda - 3 = (\lambda - 3)^1 \cdot (\lambda + 1)^2$$

má zjevně kořen $\lambda_1 = 3$ násobnosti 1 a kořen $\lambda_2 = -1$ násobnosti 2. Odtud plyne, že obecné řešení přidružené homogenní rovnice můžeme psát ve tvaru

$$y_h(t) = C_1 \mathrm{e}^{3t} + C_2 \mathrm{e}^{-t} + C_3 t \mathrm{e}^{-t}, \quad C_1 \in \mathbb{R}, C_2 \in \mathbb{R}, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Nyní můžeme přistoupit ke hledání partikulárního řešení y_p zadané rovnice (10.5). Pravou stranu uvažované nehomogenní rovnice lze zřejmě psát takto :

$$\cos(2t) = \mathrm{e}^{0 \cdot t} \cdot [1 \cdot \cos(2t) + 0 \cdot \sin(2t)].$$

Odtud plyne, že můžeme použít Větu 10.24, přičemž postupně klademe $\alpha = 0$, $\beta = 2$, $P_1(t) = 1$, $P_2(t) = 0$. Pak je ovšem

$$s = \max\{\mathrm{st}.P_1, \mathrm{st}.P_2\} = \max\{0, -1\} = 0,$$

a protože číslo

$$\alpha + \beta i = 0 + 2i$$

Obsah
253. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

není kořenem charakteristické rovnice ($2i \neq 3$, $2i \neq -1$), je $M = 0$. Podle tvrzení Věty existuje řešení y_p rovnice (10.5), které lze psát ve tvaru

$$y_p(t) = t^0 \cdot \mathrm{e}^{0 \cdot t} \cdot [Q_1(t) \cdot \cos(2t) + Q_2(t) \cdot \sin(2t)],$$

přičemž polynomy Q_1, Q_2 mají stupeň nejvýše 0, jde tedy o konstantní funkce. Označíme-li

$$Q_1(t) = A, \ (A \in \mathbb{R}), \quad Q_2(t) = B, \ (B \in \mathbb{R}),$$

můžeme po drobné úpravě psát vztah pro y_p takto:

$$y_p(t) = A \cdot \sin(2t) + B \cdot \cos(2t).$$

K nalezení hodnot A, B potřebujeme dosadit do rovnice (10.5). Proto si nejprve vypočtěme potřebné derivace a přehledně vše uspořádejme:

$$\begin{aligned} y_p(t) &= A \cdot \sin(2t) + B \cdot \cos(2t), \\ y_p'(t) &= 2A \cdot \cos(2t) - 2B \cdot \sin(2t), \\ y_p''(t) &= -4A \cdot \sin(2t) - 4B \cdot \cos(2t), \\ y_p'''(t) &= -8A \cdot \cos(2t) + 8B \cdot \sin(2t). \end{aligned}$$

Po dosazení do (10.5) a několika úpravách získáváme rovnici

$$\cos(2t) \cdot (B - 18A - 1) + \sin(2t) \cdot (18B + A) = 0,$$

ze které, vzhledem k lineární nezávislosti funkcí $\sin(2t)$, $\cos(2t)$ obdržíme následující jednoznačně řešitelnou soustavu lineárních rovnic:

Obsah
254. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

$$-18A + B = 1, \qquad A + 18B = 0.$$

Není těžké ověřit, že řešením této soustavy je uspořádaná dvojice čísel: $\left(-\frac{18}{325}, \frac{1}{325}\right)$. Rovnice (10.5) má tedy řešení

$$y_p(t) = \frac{1}{325}(\cos(2t) - 18\sin(2t)).$$

Při znalosti obecného řešení přidružené homogenní rovnice můžeme nyní po aplikaci principu superpozice rovnou napsat obecné řešení studované rovnice:

$$y(t) = C_1 \mathrm{e}^{3t} + C_2 \mathrm{e}^{-t} + C_3 t\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{325}(\cos(2t) - 18\sin(2t)),\ (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3.$$

▲

Poznámka 10.29. Větu 10.24 lze použít i na rovnici prvního řádu ve tvaru

$$y' = \mathrm{e}^{\alpha t} \cdot [P_1(t) \cdot \sin(\beta t) + P_2(t) \cdot \cos(\beta t)]\,,$$

to znamená, při výpočtu integrálů typu

$$\int \mathrm{e}^{\alpha t} \cdot [P_1(t) \cdot \sin(\beta t) + P_2(t) \cdot \cos(\beta t)]\ \mathrm{d}t.$$

Obsah
255. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Příklad 10.30. Vypočtěte na $\mathbb{R}$

$$\int t \cdot \cos t \, \mathrm{d}t.$$

Řešení. Na $\mathbb{R}$ hledáme řešení rovnice

$$y' = t \cdot \cos t. \tag{10.6}$$

Zřejmě lze postupovat podle Věty 10.24, kde

$$\alpha = 0,\ \beta = 1,\ P_1(t) = t,\ P_2(t) = 0, \quad s = 1,\ M = 0,$$

takže primitivní funkce k funkci $t \cdot \cos t$ je pro vhodná reálná čísla A, B, C, D dána předpisem

$$y_p(t) = (At + B) \cdot \sin t + (Ct + D) \cdot \cos t.$$

Po derivování funkce y_p a dosazení do vztahu (10.6) získáváme:

$$(A - D)\sin t - Ct \sin t + At \cos t + (B + C)\cos t = 0 \cdot \sin t + 0 \cdot t \sin t + 1 \cdot t \cos t + 0 \cdot \cos t.$$

Z lineární nezávislosti systému funkcí daných předpisy $\sin t$, $\cos t$, $t \sin t$, $t \cos t$ plyne, že na základě právě uvedené rovnice můžeme sestavit jednoznačně řešitelnou soustavu rovnic

$$A - D = 0,\ -C = 0,\ A = 1,\ B + C = 0.$$

Snadno nahlédneme, že

$$A = 1,\ B = 0,\ C = 0,\ D = 1,$$

takže například:

$$\int t \cdot \cos t \, \mathrm{d}t = t \cdot \sin t + \cos t.$$

▲

Obsah
256. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Příklad 10.31. Nalezněme obecné řešení diferenciální rovnice

$$y''' = \cos(t).$$

Řešení. Uvedená rovnice je rovnicí s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou. Proto může být řešena pomocí Věty 10.24 (proveďte). Daleko rychleji však rovnici vyřešíme přímou integrací. Stručný zápis postupu:

$$y''' = \cos t \Rightarrow y'' = A + \sin t \Rightarrow y' = B + At - \cos t \Rightarrow y = C + Bt + \frac{1}{2}At^2 - \sin t,$$

Obecné řešení:

$$\underline{\underline{y(t) = C_3 + C_2 t + C_1 t^2 - \sin t, \quad (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3.}}$$

▲

10.1. Videa s řešenými příklady

Stručný postup řešení lineární diferenciální rovnice vyššího řádu lze vidět v tomto videu. Následuje řešení šesti příkladů lineárních diferenciálních rovnic vyššího řádu:

Příklad 1
Příklad 2
Příklad 3
Příklad 4
Příklad 5
Příklad 6

10.2. Interaktivní testy

Následující testy byly vytvořeny pomocí balíčku `acrotex`. Test zahájíte kliknutím na tlačítko „Zacátek testu“. U otázek, kde lze volit jen jednu odpověď (test nedovolí zaškrtnout více odpovědí), je správná odpověď bodována počtem bodů uvedených v závorce u zadání a špatná odpověď je bodována 0 body. U otázek, kde lze volit více správných odpovědí, je součet bodů správných odpovědí uveden v závorce u zadání a za každou špatnou odpověď bude odečten jeden či více bodů.

Zacátek testu

1. (1b.) Obyčejná diferenciální rovnice

$$y''' - t \cdot y' = \sin t$$

- ☐ je lineární diferenciální rovnice třetího řádu.
- ☐ je lineární diferenciální rovnice druhého řádu.
- ☐ je lineární diferenciální rovnice prvního řádu.
- ☐ není lineární diferenciální rovnice.

2. (1b.) Obyčejná diferenciální rovnice

$$2y'' + t^2 \cdot y' = t - 1$$

- ☐ je lineární diferenciální rovnice třetího řádu.
- ☐ je lineární diferenciální rovnice druhého řádu.
- ☐ je lineární diferenciální rovnice prvního řádu.
- ☐ není lineární diferenciální rovnice.

3. (1b.) Obyčejná diferenciální rovnice

$$y''' = \sin\left((y'')^2\right)$$

- ☐ je lineární diferenciální rovnice třetího řádu.
- ☐ je lineární diferenciální rovnice druhého řádu.
- ☐ je lineární diferenciální rovnice prvního řádu.
- ☐ není lineární diferenciální rovnice.

4. (1b.) Obyčejná diferenciální rovnice

$$y''' + y'' + y' + y^2 = 0$$

- ☐ je lineární diferenciální rovnice třetího řádu.
- ☐ je lineární diferenciální rovnice druhého řádu.
- ☐ je lineární diferenciální rovnice prvního řádu.
- ☐ není lineární diferenciální rovnice.

5. (1b.) Obyčejná diferenciální rovnice

$$y'' - y' = y'''$$

- ☐ je lineární diferenciální rovnice třetího řádu.
- ☐ je lineární diferenciální rovnice druhého řádu.
- ☐ je lineární diferenciální rovnice prvního řádu.
- ☐ není lineární diferenciální rovnice.

6. (1b.) Obyčejná diferenciální rovnice

$$\sin t \cdot y'' = y$$

- ☐ je lineární diferenciální rovnice třetího řádu.
- ☐ je lineární diferenciální rovnice druhého řádu.
- ☐ je lineární diferenciální rovnice prvního řádu.
- ☐ není lineární diferenciální rovnice.

7. (1b.) Obyčejná diferenciální rovnice

$$y' = y$$

- ☐ je lineární diferenciální rovnice třetího řádu.
- ☐ je lineární diferenciální rovnice druhého řádu.
- ☐ je lineární diferenciální rovnice prvního řádu.
- ☐ není lineární diferenciální rovnice.

8. (1b.) Obyčejná diferenciální rovnice

$$y'' - y = \sqrt{t}$$

- ☐ je lineární diferenciální rovnice třetího řádu.
- ☐ je lineární diferenciální rovnice druhého řádu.
- ☐ je lineární diferenciální rovnice prvního řádu.
- ☐ není lineární diferenciální rovnice.

9. (1b.) Obyčejná diferenciální rovnice

$$y''' + y'' + y' + y^2 = 0$$

- ☐ je homogenní lineární diferenciální rovnice třetího řádu.
- ☐ je homogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu.
- ☐ je homogenní lineární diferenciální rovnice prvního řádu.
- ☐ není homogenní lineární diferenciální rovnice.

10. (1b.) Obyčejná diferenciální rovnice

$$y''' - t \cdot y' = \sin t$$

- ☐ je homogenní lineární diferenciální rovnice třetího řádu.
- ☐ je homogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu.
- ☐ je homogenní lineární diferenciální rovnice prvního řádu.
- ☐ není homogenní lineární diferenciální rovnice.

11. (1b.) Obyčejná diferenciální rovnice

$$y'' - y' = y'''$$

- ☐ je homogenní lineární diferenciální rovnice třetího řádu.
- ☐ je homogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu.
- ☐ je homogenní lineární diferenciální rovnice prvního řádu.
- ☐ není homogenní lineární diferenciální rovnice.

12. (1b.) Obyčejná diferenciální rovnice

$$2y'' + t^2 \cdot y' = t - 1$$

- ☐ je homogenní lineární diferenciální rovnice třetího řádu.
- ☐ je homogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu.
- ☐ je homogenní lineární diferenciální rovnice prvního řádu.
- ☐ není homogenní lineární diferenciální rovnice.



13. (1b.) Obyčejná diferenciální rovnice

$$y'' - y' = y'''$$

- ☐ je homogenní lineární diferenciální rovnice třetího řádu s konstantními koeficienty.
- ☐ je homogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty.
- ☐ je homogenní lineární diferenciální rovnice prvního řádu s konstantními koeficienty.
- ☐ není homogenní lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty.

14. (1b.) Obyčejná diferenciální rovnice

$$2y'' + t^2 \cdot y' = 0$$

- ☐ je homogenní lineární diferenciální rovnice třetího řádu s konstantními koeficienty.
- ☐ je homogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty.
- ☐ je homogenní lineární diferenciální rovnice prvního řádu s konstantními koeficienty.
- ☐ není homogenní lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty.

15. (1b.) Obyčejná diferenciální rovnice

$$y'' - y = 0$$

- ☐ je homogenní lineární diferenciální rovnice třetího řádu s konstantními koeficienty.
- ☐ je homogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty.
- ☐ je homogenní lineární diferenciální rovnice prvního řádu s konstantními koeficienty.
- ☐ není homogenní lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty.

Konec testu

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:

Výsledky

Pro ukončení testu je třeba kliknout na tlačítko „Konec testu“. Opravení testu se provede kliknutím na tlačítko „Výsledky“, správné odpovědi budou označeny zeleně a červeně budou označeny odpovědi chybné.



Zacátek testu

1. (2b.) Obyčejné diferenciální rovnici

$$y'' + 2y' + y = 0$$

přísluší charakteristická rovnice

- ☐ $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0.$
- ☐ $\lambda^2 + 2\lambda = 0.$
- ☐ $\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = 0.$

2. (2b.) Obyčejné diferenciální rovnici

$$y'' - y = 0$$

přísluší charakteristická rovnice

- ☐ $\lambda^2 - 1 = 0.$
- ☐ $\lambda^2 - \lambda = 0.$
- ☐ $\lambda^2 = 1.$

3. (2b.) Obyčejné diferenciální rovnici

$$y''' + 2y'' + y' = 0$$

přísluší charakteristická rovnice

☐ $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0.$

☐ $\lambda^3 + 2\lambda^2 + 1 = 0.$

☐ $\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = 0.$

4. (2b.) Obyčejné diferenciální rovnici

$$y'' + y = 0$$

přísluší charakteristická rovnice

☐ $\lambda^2 - 1 = 0.$

☐ $\lambda^2 + 1 = 0.$

☐ $\lambda^2 + \lambda = 0.$

Konec testu

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:

Výsledky

Pro ukončení testu je třeba kliknout na tlačítko „Konec testu“. Opravení testu se provede kliknutím na tlačítko „Výsledky“, správné odpovědi budou označeny zeleně a červeně budou označeny odpovědi chybné.

Zacátek testu

1. (2b.) Charakteristická rovnice

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

má kořeny

☐ $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1.$

☐ $\lambda_1 = -1$ (dvojnásobný kořen).

☐ $\lambda_1 = 1$ (dvojnásobný kořen).

2. (2b.) Charakteristická rovnice

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

má kořeny

- ☐ $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1.$
- ☐ $\lambda_1 = -1$ (dvojnásobný kořen).
- ☐ $\lambda_1 = 1$ (dvojnásobný kořen).

3. (2b.) Charakteristická rovnice

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = 0$$

má kořeny

- ☐ $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 1.$
- ☐ $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -1$ (dvojnásobný kořen).
- ☐ $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1$ (dvojnásobný kořen).

Obsah
270. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

4. (2b.) Charakteristická rovnice

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

má kořeny

☐ $\lambda_1 = -1$ (dvojnásobný kořen).

☐ $\lambda_1 = 1$ (dvojnásobný kořen).

☐ $\lambda_1 = -i,\ \lambda_2 = i.$

Konec testu

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:

Výsledky

Pro ukončení testu je třeba kliknout na tlačítko „Konec testu“. Opravení testu se provede kliknutím na tlačítko „Výsledky“, správné odpovědi budou označeny zeleně a červeně budou označeny odpovědi chybné.

Zacátek testu

1. (2b.) Fundamentální systém řešení diferenciální rovnice

$$y'' + 2y' + y = 0$$

je systém funkcí

☐ $\varphi_1(t) = \mathrm{e}^{-t},\ \varphi_2(t) = \mathrm{e}^{t}.$

☐ $\varphi_1(t) = \mathrm{e}^{-t},\ \varphi_2(t) = 2\mathrm{e}^{-t}.$

☐ $\varphi_1(t) = \mathrm{e}^{-t},\ \varphi_2(t) = t \cdot \mathrm{e}^{-t}.$

2. (2b.) Fundamentální systém řešení diferenciální rovnice

$$y'' - y = 0$$

je systém funkcí

☐ $\varphi_1(t) = \mathrm{e}^{-t},\ \varphi_2(t) = \mathrm{e}^{t}.$

☐ $\varphi_1(t) = \mathrm{e}^{-t},\ \varphi_2(t) = t \cdot \mathrm{e}^{-t}.$

☐ $\varphi_1(t) = \mathrm{e}^{t},\ \varphi_2(t) = t \cdot \mathrm{e}^{t}.$

3. (2b.) Fundamentální systém řešení diferenciální rovnice

$$y''' + 2y'' + y' = 0$$

je systém funkcí

☐ $\varphi_1(t) = 1, \varphi_2(t) = \mathrm{e}^t,\ \varphi_3(t) = t \cdot \mathrm{e}^t.$

☐ $\varphi_1(t) = t, \varphi_2(t) = \mathrm{e}^{-t},\ \varphi_3(t) = t \cdot \mathrm{e}^{-t}.$

☐ $\varphi_1(t) = 1, \varphi_2(t) = \mathrm{e}^{-t},\ \varphi_3(t) = t \cdot \mathrm{e}^{-t}.$

4. (2b.) Fundamentální systém řešení diferenciální rovnice

$$y'' + y = 0$$

je systém funkcí

☐ $\varphi_1(t) = \mathrm{e}^t,\ \varphi_2(t) = \mathrm{e}^{-t}.$

☐ $\varphi_1(t) = \sin t,\ \varphi_2(t) = \cos t.$

☐ $\varphi_1(t) = t \cdot \sin t,\ \varphi_2(t) = t \cdot \cos t.$

Obsah

273. strana ze 336

Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Konec testu

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:

Výsledky

Pro ukončení testu je třeba kliknout na tlačítko „Konec testu“. Opravení testu se provede kliknutím na tlačítko „Výsledky“, správné odpovědi budou označeny zeleně a červeně budou označeny odpovědi chybné.

Příklady k procvičení

1. Nalezněte intervaly, na kterých jsou definována maximální řešení zadaných Cauchyových úloh:

a) $\begin{cases} y''' - \frac{\sin t}{\cos^3 t} y'' + \ln\left(t + \frac{99}{88}\right) y = t^2, \\ y(-1) = 3,\ y'(-1) = 33,\ y''(-1) = 333, \end{cases}$

b) $\begin{cases} y'' - \frac{1}{t^2+t-2} y' = \arcsin\left(t - \frac{1}{2}\right), \\ y(0) = 4,\ y'(0) = 44, \end{cases}$

c) $\begin{cases} \left(t^2+1\right) y'' - y' = \arccos \frac{t}{2}, \\ y(0) = 5,\ y'(0) = -55. \end{cases}$

2. Nalezněte maximální řešení zadaných Cauchyových úloh:

a) $\begin{cases} y'' - \frac{3}{t^2} y' = \frac{1}{t^2}, \\ y(3) = 0,\ y'(3) = -\frac{1}{3}, \end{cases}$

b) $\begin{cases} y''' - \sin\left(\cos\left(\sin\left(t^2\right)\right)\right) \cdot y'' = 0, \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0. \end{cases}$

Obsah

274. strana ze 336

Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

3. Nalezněte obecná řešení následujících homogenních lineárních diferenciálních rovnic:

   a) $y'' - 20y' + 64y = 0\,,$ b) $y'' - 7y = 0\,,$

   c) $y'' + 64y = 0\,,$ d) $y'' - 16y' + 64y = 0\,,$

   e) $y'' + 2y' + 3y = 0\,,$ f) $y''' - y'' - y' + y = 0\,,$

   g) $y''' - 3y'' + 3y' + y = 0\,,$ h) $y^{(4)} + 10y'' + 9y = 0\,.$

4. Jak vypadá LDR řádu 4 s konstantními reálnými koeficienty, jestliže kořeny jejího charakteristického polynomu jsou:

   $1,\ 1,\ -3i,\ 3i\,.$

5. Nalezněte obecné řešení homogenní lineární diferenciální rovnice čtvrtého řádu s konstantními reálnými koeficienty, víte-li, že jedním z řešení této rovnice je funkce daná předpisem $t\cos(4t)$. Jak vypadá příslušná rovnice?

6. Nalezněte řešení zadaných Cauchyových úloh:

   a) $\begin{cases} y'' + 2y' + 3y = 0, \\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1, \end{cases}$ b) $\begin{cases} y''' - 3y'' + 3y' + y = 0, \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 3. \end{cases}$

Pro zájemce

7. Napište homogenní lineární diferenciální rovnici druhého řádu, jejímž fundamentálním systém řešení je dvojice zadaných funkcí:

Obsah
275. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

a) $\varphi_1(t) = t, t \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right), \quad \varphi_2(t) = \mathrm{e}^{2t},\ t \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$,

b) $\varphi_1(t) = 1,\ t \in (0, \infty), \quad \varphi_2(t) = \ln\left(t^2 + 1\right),\ t \in (0, \infty)$.

8. Diferenciální rovnice $y'' - \frac{6}{t^2}y = 0$ má obecné řešení $y_h(t) = C_1 t^3 + C_2 \frac{1}{t^2}$, $C_1 \in \mathbb{R}$, $C_2 \in \mathbb{R}$. Určete řešení y_p diferenciální rovnice $y'' - \frac{6}{t^2}y = t \ln t$.

9. Nalezněte obecná řešení zadaných lineárních diferenciálních rovnic:

a) $y'' - 2y' + y = \frac{\mathrm{e}^t}{t^5}$,

b) $y'' + 4y = \sin^2(2t)$,

c) $y''' - 5y'' + 25y' - 125y = 1000$,

d) $y'' - y' - 2y = \mathrm{e}^{3t}$,

e) $y'' - 6y' + 25y = 50t^3 - 36t^2 - 63t + 18$.

10. Nalezněte řešení zadaných Cauchyových úloh:

a) $\begin{cases} y'' + 9y = \frac{1}{\sin(3t)}, \\ y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1,\ y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}, \end{cases}$

b) $\begin{cases} y'' + 16y = 1, \quad y(0) = \frac{1}{8}, \\ y(0) = \frac{1}{8},\ y'(0) = \frac{1}{4}, \end{cases}$

c) $\begin{cases} y'' + 4y = \sin t + 2\sin(3t), \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0. \end{cases}$

11. Vyřešte úlohu

$$\begin{cases} y''(t) + 10y(t) = 0, \\ y(0) = 0{,}1,\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Obsah
276. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

z Příkladu 1.6 popisující výchylku y kyvadla v závislosti na čase.

12. Vyřešte úlohu

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 50y(t) = -10, \\ y(0) = 0{,}1,\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

z Příkladu 1.7 popisující výchylku y závaží, které je zavěšeno na pružině, v závislosti na čase.

13. Vyřešte úlohy

a) $\begin{cases} q''(t) + 2q'(t) + q(t) = 10, \\ q(0) = 0,\ q'(0) = 0, \end{cases}$

b) $\begin{cases} q''(t) + 2q'(t) + q(t) = 0, \\ q(0) = 10,\ q'(0) = 0. \end{cases}$

z Příkladu 1.8 popisující hodnotu elektrického náboje q v obvodu popsaném v tomto příkladě v závislosti na čase.

Klíč k příkladům k procvičení

1. a) $\left(-\frac{99}{88}, \frac{\pi}{2}\right)$, b) $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$, c) $(-2, 2)$.

2. a) $\varphi(t) = \frac{3-t}{3},\ t \in (0, \infty)$, b) $\varphi(t) = 1,\ t \in \mathbb{R}$.

Obsah
277. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

3. a) $y(t) = C_1 e^{4t} + C_2 e^{16t}$, $C_1 \in \mathbb{R}$, $C_2 \in \mathbb{R}$,
   b) $y(t) = C_1 e^{-\sqrt{7}t} + C_2 e^{\sqrt{7}t}$, $C_1 \in \mathbb{R}$, $C_2 \in \mathbb{R}$,
   c) $y(t) = C_1 \cos(8t) + C_2 \sin(8t)$, $C_1 \in \mathbb{R}$, $C_2 \in \mathbb{R}$,
   d) $y(t) = C_1 e^{8t} + C_2 t e^{8t}$, $C_1 \in \mathbb{R}$, $C_2 \in \mathbb{R}$,
   e) $y(t) = C_1 e^{-t} \cos\left(\sqrt{2}t\right) + C_2 e^{-t} \sin\left(\sqrt{2}t\right)$, $C_1 \in \mathbb{R}$, $C_2 \in \mathbb{R}$, $t \in \left(\frac{-\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, $C \in \mathbb{R}$,
   f) $y(t) = C_1 e^{t} + C_2 t e^{t} + C_3 e^{-t}$, $C_1 \in \mathbb{R}$, $C_2 \in \mathbb{R}$, $C_3 \in \mathbb{R}$,
   g) $y(t) = C_1 e^{t} + C_2 t e^{t} + C_3 t^2 e^{t}$, $C_1 \in \mathbb{R}$, $C_2 \in \mathbb{R}$, $C_3 \in \mathbb{R}$,
   h) $y(t) = C_1 \cos t + C_2 \cos t + C_3 \sin 3t + C_4 \sin 3t$, $C_1 \in \mathbb{R}, \ldots, C_4 \in \mathbb{R}$.

4. $y^{(4)} - 2y''' + 10y'' - 18y' + 9y = 0$.

5. $y(t) = C_1 \cos 4t + C_2 t \cos 4t + C_3 \sin 4t + C_4 t \sin 4t$, $C_1 \in \mathbb{R}, \ldots, C_4 \in \mathbb{R}$,
   $y^{(4)} + 16y'' + 256y = 0$.

6. a) $\varphi(t) = e^{-t} \cos\left(\sqrt{2}t\right)$, $t \in \mathbb{R}$,
   b) $\varphi(t) = \left(2t^2 - t + 1\right) e^{t}$, $t \in \mathbb{R}$.

7. a) $y'' - \frac{4t}{2t-1} y' + \frac{4}{2t-1} = 0$,
   b) $y'' + \frac{t^2-1}{t(t^2+1)} y' = 0$.

8. $y_p(t) = \frac{t^3}{10} \ln^2 t + \frac{t^3(1-5\ln t)}{125}$.

9. a) $y(t) = C_1 e^{t} + C_2 t e^{t} + \frac{1}{12} t^{-3} e^{t}$, $C_1 \in \mathbb{R}$, $C_2 \in \mathbb{R}$,
   b) $y(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + \frac{1}{6}\cos^2(2t) + \frac{1}{12}\sin^2(2t)$, $C_1 \in \mathbb{R}$, $C_2 \in \mathbb{R}$,
   c) $y(t) = C_1 e^{5t} + C_2 \sin(5t) + C_3 \cos(5t) - 8$, $C_1 \in \mathbb{R}$, $C_2 \in \mathbb{R}$, $C_3 \in \mathbb{R}$,
   d) $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} + \frac{1}{4} e^{3t}$, $C_1 \in \mathbb{R}$, $C_2 \in \mathbb{R}$,
   e) $y(t) = C_1 e^{3t} \cos(4t) + C_2 e^{3t} \sin(4t) + 2t^3 - 3t$, $C_1 \in \mathbb{R}$, $C_2 \in \mathbb{R}$.

Obsah
278. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

10. a) $\varphi(t) = \frac{\sin(3t)}{9}\left(9 + \ln\left(\sin(3t)\right)\right) - \frac{t\cos(3t)}{3}$, $t \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$,
    b) $\varphi(t) = \frac{1}{16}\left(\cos(4t) + \sin(4t) + 1\right)$, $t \in \mathbb{R}$,
    c) $\varphi(t) = \frac{1}{30}\left(13\sin(2t) + 10\sin t - 12\sin(3t)\right)$, $t \in \mathbb{R}$.

11. $\varphi(t) = 0{,}1 \cdot \cos\left(\sqrt{10} \cdot t\right)$, $t \in \mathbb{R}$.

12. $\varphi(t) = \frac{1}{70} \cdot \mathrm{e}^{-t} \cdot \sin(7 \cdot t) + 0{,}1 \cdot \mathrm{e}^{-t} \cdot \cos(7 \cdot t) - 0.2$, $t \in \mathbb{R}$.

13. a) $q(t) = -10 \cdot \mathrm{e}^{-t} - 10 \cdot t \cdot \mathrm{e}^{-t} + 10$, $t \in \mathbb{R}$,
    b) $q(t) = 10 \cdot \mathrm{e}^{-t} + 10 \cdot t \cdot \mathrm{e}^{-t}$, $t \in \mathbb{R}$.

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

Obsah

279. strana ze 336

Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Kapitola 11

Systémy obyčejných diferenciálních rovnic

V úvodní kapitole jsme uvedli některé úlohy, které vedou k soustavám obyčejných diferenciálních rovnic. Uveďme si ještě jeden příklad, který ukazuje na souvislost mezi obyčejnou diferenciální rovnicí druhého řádu a soustavou dvou diferenciálních rovnic.

Příklad 11.1. Pozorujme vertikální, v čase t proměnnou pozici $y_1(t)$ parašutisty seskakujícího do propasti (v uvažovaném modelu vylučujeme vliv větru). Na parašutistu působí gravitační síla G měřená v Newtonech, takže

$$G = m \cdot g,$$

kde $m > 0$ je hmotnost parašutisty v kg a $g \doteq 9.81\ [\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}]$ je konstanta tíhového zrychlení.

Kromě uvedené síly je pohyb parašutisty brzděn třecí silou (opět měříme v Newtonech)

$$F(t) = -k \cdot y_1'(t),$$

která je přímo úměrná rychlosti pádu. Koeficient tření $k > 0$, který charakterizuje především plochu použitého padáku a hustotu vzduchu v propasti, nechť je udán v jednotkách $\frac{\mathrm{Ns}}{\mathrm{m}}$. Podle Newtonova zákona síly pak platí v každém okamžiku t pádu vztah

$$m \cdot y_1''(t) = m \cdot g - k \cdot y_1'(t),$$

tedy

$$y_1''(t) = g - \frac{k}{m} \cdot y_1'(t).$$

Označíme-li

$$y_2(t) = y_1'(t), \tag{11.1}$$

pak funkce y_2 popisuje okamžitou rychlost parašutisty a po dosazení do předchozího vztahu můžeme psát

$$y_2'(t) = g - \frac{k}{m} \cdot y_2. \tag{11.2}$$

Poloha a rychlost padajícího parašutisty je tedy vektorovou funkcí času, která vyhovuje soustavě obyčejných diferenciálních rovnic tvaru

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -\frac{k}{m} \cdot y_1 + g. \end{aligned}$$

▲

Obsah
281. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Všimněme si, že při zápisu soustav diferenciálních rovnic, podobně jako v případě diferenciálních rovnic, nezávisle proměnnou t u neznámých funkcí (y_1, y_2) obvykle nevypisujeme. Definujeme-li vektorovou funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ předpisem

$$f(\beta,\gamma) = \begin{pmatrix} f_1(\beta,\gamma) \\ f_2(\beta,\gamma) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ -\frac{k}{m}\cdot\beta + g \end{pmatrix}$$

a označíme-li $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, pak můžeme uvedenou soustavu zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(y_1, y_2) \\ y_2' &= f_2(y_1, y_2) \end{aligned}$$

nebo stručněji

$$y' = f(y).$$

Pojem řešení soustavy ODR

V další části textu budeme předpokládat, že čtenář je obeznámen se základními pojmy a obvyklým značením používaným v lineární algebře a teorii vektorových funkcí.

Upřesněme, co budeme chápat pod pojmem řešení soustavy ODR prvního řádu. Všimněme si přitom podobnosti definice se zavedením pojmu řešení pro případ jednotlivých diferenciálních rovnic.

Obsah
282. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Definice 11.2. Nechť je dána vektorová funkce $f : \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}^n$. Řekneme, že vektorová funkce $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ je řešením soustavy ODR

$$y' = f(t, y) \tag{11.3}$$

na otevřeném intervalu $J \subset \mathbb{R}$, jestliže pro každé $t \in J$ platí rovnost

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)). \tag{11.4}$$

Poznámka 11.3. Po dosazení řešení φ do (11.3) tato rovnice tedy přejde v rovnost dvou vektorových funkcí na příslušném intervalu. Označíme-li postupně

$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n), \; f = (f_1, f_2, \ldots, f_n), \; \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n),$$

můžeme soustavu (11.3) zapsat po složkách ve tvaru

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_2' &= f_2(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &\ldots \\ y_n' &= f_n(t, y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{aligned}$$

zatímco vektorovou rovnost (11.4) lze zapsat takto:

$$\begin{aligned} \varphi_1'(t) &= f_1(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)) \\ \varphi_2'(t) &= f_2(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)) \\ &\ldots \\ \varphi_n'(t) &= f_n(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)). \end{aligned}$$

Obsah
283. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Příklad 11.4. Je-li $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \qquad f(\alpha,\beta,\gamma) = (f_1(\alpha,\beta,\gamma), f_2(\alpha,\beta,\gamma)) = (\gamma, \beta^2+\gamma-\alpha^4-2\alpha+2)$, pak soustava (11.3) přechází do konkrétní podoby

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_1^2 + y_2 - t^4 - 2t + 2. \end{aligned}$$

Lehce nahlédneme, že například funkce

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \qquad \varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = (t^2, 2t)$$

je na intervalu $J = \mathbb{R}$ řešením zadané soustavy. Na J totiž platí

$$\varphi'(t) = (\varphi_1'(t), \varphi_2'(t)) = (2t, 2),$$

takže pro každé $t \in J$ jsou současně splněny požadované rovnosti

$$\begin{aligned} (t^2)' &= 2t \\ (2t)' &= (t^2)^2 + (2t) - t^4 - 2t + 2. \end{aligned}$$

▲

V případě zkoumání jednotlivých obyčejných diferenciálních rovnic jsme často zadávali ještě počáteční podmínku umožňující jednoznačný výběr řešení. Ukazuje se, že v případě soustav n obyčejných diferenciálních rovnic je rozumné zadat systém n počátečních podmínek.

Nechť je dáno číslo $t_0 \in \mathbb{R}$ a vektor $y_0 \in \mathbb{R}^n$. K soustavě rovnic (11.3) připojme požadavek, aby hledaná vektorová funkce v bodě t_0 nabývala hodnoty y_0:

$$y(t_0) = y_0. \tag{11.5}$$

Obsah
284. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Požadavku (11.5) se říká počáteční podmínka. Úlohu (11.3), (11.5) nazýváme Cauchyovou úlohou. Řekneme, že funkce φ je řešením Cauchyovy úlohy (11.3), (11.5) (na otevřeném intervalu J), jestliže φ je řešením (11.3) (na J) a navíc platí $\varphi(t_0) = y_0$.

Stejným způsobem jako v případě jednotlivých rovnic se definuje pojem maximálního řešení v případě soustav obyčejných diferenciálních rovnic. Formulaci definice přenechme čtenáři jako jednoduché opakování.

Pro Cauchyovu úlohu v případě soustav rovnic lze formulovat tvrzení analogická výrokům, které jsme formulovali pro jednotlivé obyčejné diferenciální rovnice. Platí například přirozené zobecnění Peanovy věty o existenci řešení. Pro čtenáře, který doposud není příliš obeznámen s teorií vektorových funkcí, poznamenejme, že vektorová funkce

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) : \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}^n$$

je spojitá právě tehdy, když jsou současně spojité všechny její komponenty

$$f_1 : \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R},\ f_2 : \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R},\ \ldots,\ f_n : \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}.$$

Věta 11.5 (Peanova, o existenci řešení). *Nechť $f : \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}^n$ je spojitá vektorová funkce definovaná na otevřené množině a bod $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^{1+n}$ patří do definičního oboru funkce f. Pak Cauchyova úloha (11.3), (11.5) má alespoň jedno maximální řešení.*

Než se pustíme do formulace věty o existenci a jednoznačnosti pro soustavy rovnic, dohodněme se, že je-li dána vektorová funkce $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) : \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}^n$, pak symbolem $\frac{\partial f}{\partial z}$ budeme rozumět vektorovou funkci $\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}, \frac{\partial f_2}{\partial z}, \ldots, \frac{\partial f_n}{\partial z}\right) : \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}^n$, která je složená z příslušných parciálních derivací jednotlivých komponent funkce f podle proměnné z.

Obsah
285. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Věta 11.6 (O existenci a jednoznačnosti). *Předpokládejme, že* $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) : \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}^n$ *je spojitá vektorová funkce definovaná na otevřené množině* $\Omega \subset \mathbb{R}^{1+n}$, *přičemž* $(t_0, y_0) \in \Omega$. *Nechť na* Ω *jsou navíc spojité vektorové funkce* $\frac{\partial f}{\partial y_1}, \frac{\partial f}{\partial y_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y_n}$, *to znamená, že jsou zde spojité parciální derivace všech složek funkce* f *podle druhé až n-té proměnné. Potom Cauchyova úloha (11.3), (11.5) má právě jedno maximální řešení.*

Příklad 11.7. Uvažujme Cauchyovu úlohu

$$\begin{aligned} y_1' &= t + \ln\left(y_1^2 + y_2^2\right) \\ y_2' &= t y_1 y_2, \\ y_1(1) &= 22 \\ y_2(1) &= 333. \end{aligned}$$

Píšeme-li postupně

$$f(t, y_1, y_2) = (f_1(t, y_1, y_2), f_2(t, y_1, y_2)) = \left(t + \ln\left(y_1^2 + y_2^2\right), t y_1 y_2\right),$$

$$\Omega = \left\{(t, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^3 : y_1^2 + y_2^2 > 0\right\}, \quad t_0 = 1, \quad y_0 = (22, 333),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_1}(t, y_1, y_2) = \left(\frac{2y_1}{y_1^2 + y_2^2}, t y_2\right), \quad \frac{\partial f}{\partial y_2}(t, y_1, y_2) = \left(\frac{2y_2}{y_1^2 + y_2^2}, t y_1\right),$$

ihned vidíme, že jsou splněny všechny předpoklady věty o existenci a jednoznačnosti řešení. Zadaná Cauchyova úloha má tedy právě jedno maximální řešení.

▲

Obsah
286. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Soustavy homogenních lineárních obyčejných diferenciálních rovnic

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a pro všechna $i = 1, 2, \ldots, n$ a $j = 1, 2, \ldots, n$ jsou dány funkce $a_{ij} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Soustavu obyčejných diferenciálních rovnic tvaru

$$\left\{\begin{array}{rcl} y_1' &=& a_{11}(t)y_1 + a_{12}(t)y_2 + \cdots + a_{1n}(t)y_1, \\ y_2' &=& a_{21}(t)y_1 + a_{22}(t)y_2 + \cdots + a_{2n}(t)y_2, \\ & \vdots & \\ y_n' &=& a_{n1}(t)y_1 + a_{n2}(t)y_2 + \cdots + a_{nn}(t)y_n \end{array}\right. \tag{11.6}$$

nazýváme homogenní systém lineárních diferenciálních rovnic.

Utvořme maticovou funkci $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}}$. Jestliže na správném místě (za účelem maticového násobení) ztotožníme vektor s jednosloupcovou maticí, lze (11.6) zapsat stručněji ve tvaru

$$y' \;=\; A(t) \cdot y \;. \tag{11.7}$$

Pro homogenní soustavy lze formulovat zesílení obecného tvrzení o existenci a jednoznačnosti.

Obsah
287. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Věta 11.8 (O existenci a jednoznačnosti pro homogenní soustavy). *Nechť J je otevřený interval, $t_0 \in J$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Uvažujme Cauchyovu úlohu (11.6),*

$$y\,(t_0) = y_0. \tag{11.8}$$

Předpokládejme, že pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ a pro všechna $j = 1, 2, \ldots, n$ jsou reálné funkce a_{ij} spojité funkce definované na J.
Pak existuje právě jedno řešení φ Cauchyovy úlohy (11.6), (11.8), které je definováno na na celém intervalu J.

Poznámka 11.9. V případě homogenního systému lineárních diferenciálních rovnic se vyplatí uvažovat rovněž komplexní řešení těchto systémů.

Nechť $J \subset \mathbb{R}$ a budiž dány reálné vektorové funkce $u \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$ a $v \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$. Pak lze uvažovat komplexní funkci $\psi \overset{ozn.}{=} u + iv$ jako funkci zadanou předpisem:

$$\forall t \in J \qquad \psi(t) = u(t) + iv(t).$$

Definice 11.10. Derivací ψ' komplexní vektorové funkce $\psi = u + iv$ rozumíme funkci $\psi' : J \to \mathbb{C}^n$ takovou, že

$$\forall t \in J : \psi'(t) = u'(t) + iv'(t).$$

Příklad 11.11. Uvažujme funkci $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^2, \psi(t) = \left(\frac{1}{1+it}, \mathrm{e}^{(2+i)t}\right)$.

Připomeňme důležitý vztah:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall \beta \in \mathbb{R} \quad \mathrm{e}^{\alpha+i\beta} = \mathrm{e}^{\alpha} \cdot \mathrm{e}^{i\beta} = \mathrm{e}^{\alpha}(\cos\beta + i\sin\beta) \tag{11.9}$$

Obsah
288. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Odtud $\forall t \in \mathbb{R}\ \psi(t) = \left(\frac{1}{1+it} \cdot \frac{1-it}{1-it}, \mathrm{e}^{2t} \cdot \mathrm{e}^{it}\right) = \left(\frac{1}{1+t^2} + i\frac{-t}{1+t^2}, \mathrm{e}^{2t} \cdot \cos t + i\mathrm{e}^{2t} \cdot \sin t\right)$.
Tedy ψ' je definována předpisem

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \psi'(t) = \left(\frac{-2t}{(1+t^2)^2} + i\frac{t^2-1}{(1+t^2)^2}, \mathrm{e}^{2t}(2\cos t - \sin t) + i\mathrm{e}^{2t}(2\sin t + \cos t)\right).$$

▲

Definice 11.12. Řekneme, že $\psi : J \to \mathbb{C}^n$, $\psi = u + iv$ je (komplexním) řešením (11.7) na J, jestliže funkce u a v jsou současně řešením (11.7) na J.

Příklad 11.13. Nechť $u^{[1]} \in C^{(1)}(J, \mathbb{R}^n)$, $u^{[2]} \in C^{(1)}(J, \mathbb{R}^n)$, $v^{[1]} \in C^{(1)}(J, \mathbb{R}^n)$, $v^{[2]} \in C^{(1)}(J, \mathbb{R}^n)$.
Definujme funkce

$$\psi^{[1]} : J \to \mathbb{C}^n, \psi^{[1]} = u^{[1]} + iv^{[1]},$$
$$\psi^{[2]} : J \to \mathbb{C}^n, \psi^{[2]} = u^{[2]} + iv^{[2]}.$$

Nechť $\lambda \in \mathbb{C}$.
Dokažte následující tvrzení:

Obsah
289. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

$$(\lambda \cdot \psi^{[1]})' = \lambda \cdot (\psi^{[1]})', \tag{11.10}$$

$$(\psi^{[1]} + \psi^{[2]})' = (\psi^{[1]})' + (\psi^{[2]})', \tag{11.11}$$

$$\overline{(\psi^{[1]})'} = \left(\overline{\psi^{[1]}}\right)', \tag{11.12}$$

$$\overline{\mathrm{e}^{\lambda t}} = \mathrm{e}^{\overline{\lambda} t}, \text{ kde } \forall t \in \mathbb{R}, \tag{11.13}$$

$$(\mathrm{e}^{\lambda t})' = \lambda \mathrm{e}^{\lambda t}, \text{ kde } \forall t \in \mathbb{R}. \tag{11.14}$$

Věta 11.14. *Nechť je dána funkce $\psi = J \to \mathbb{C}^n$. Pak ψ je řešením (11.7) na J právě tehdy, když $\overline{\psi}$ je řešením (11.7) na J .*

Důkaz. Zřejmě platí:
ψ řeší (11.7) na $J \iff (u$ řeší (11.7) na $J \wedge v$ řeší (11.7) na $J) \iff$
$\iff (u$ řeší (11.7) na $J \wedge -v$ řeší (11.7) na $J) \iff \overline{\psi}$ řeší (11.7) na J.

Nechť $u \in C^{(1)}(J, \mathbb{R}^n)$, $v \in C^{(1)}(J, \mathbb{R}^n)$, $\psi : J \to \mathbb{C}^n, \psi = u + iv$.

Obsah
290. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Pak funkci u nazýváme reálnou částí funkce ψ a funkci v říkáme imaginární část ψ. Píšeme

$$u = Re\ \psi,\ v = Im\ \psi.$$

□

Příklad 11.15. Dokažte, že pro funkci $\psi : J \to \mathbb{C}^n, \psi = u + iv$ platí:

$$\forall t \in J: \quad Re\,\psi\,(t) = \frac{1}{2}\left(\psi(t) + \overline{\psi}(t)\right), \quad Im\,\psi\,(t) = \frac{1}{2i}(\psi(t) - \overline{\psi}(t)).$$

Věta 11.16. *Nechť* $\forall i = 1, 2, \ldots, n$, $\forall j = 1, 2, \ldots, n$ *platí* $a_{ij} \in C(J, \mathbb{R}^n)$.
Nechť $A \overset{ozn.}{=} (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}}$.
Označme:

$$\begin{aligned} \mathbb{H} &= \{\varphi:\ \varphi \text{ je reálným řešením (11.7) na } J\}, \\ \mathbb{H}_{\mathbb{C}} &= \{\psi:\ \psi \text{ je komplexním řešením (11.7) na } J\}. \end{aligned}$$

Potom platí:

$$\mathbb{H} \text{ je vektorový prostor dimenze } n \text{ (nad } \mathbb{R}). \tag{11.15}$$

$$\mathbb{H}_{\mathbb{C}} \text{ je vektorový prostor dimenze } n \text{ (nad } \mathbb{C}). \tag{11.16}$$

Obsah
291. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Pro zájemce

Důkaz. A Nejprve dokážeme 11.15.

A1 Ze vztahů (11.10), (11.11) plyne:

$$\lambda_1 \in \mathbb{R}, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \varphi^{[1]} \in \mathbb{H}, \varphi^{[2]} \in \mathbb{H} \;\Rightarrow\; \forall t \in J :$$

$\left(\lambda_1\varphi^{[1]}(t) + \lambda_2\varphi^{[2]}(t)\right)' = \lambda_1\varphi^{[1]\prime}(t) + \lambda_2\varphi^{[2]\prime}(t) = \lambda_1 A(t)\varphi^{[1]}(t) + \lambda_2 A(t)\varphi^{[2]}(t) =$
$= A(t)\left(\lambda_1\varphi^{[1]}(t) + \lambda_2\varphi^{[2]}(t)\right).$
Tedy $\lambda_1\varphi^{[1]}(t) + \lambda_2\varphi^{[2]}(t) \in \mathbb{H}$, takže $\mathbb{H}$ je vektorovým podprostorem prostoru $C^{(1)}(J, \mathbb{R}^n)$.

A2 Zde dokážeme $\dim \mathbb{H} \geqq n$.
Připomeňme nejprve, že $\varphi^{[1]}, \ldots, \varphi^{[n]} \in \mathbb{H}$ jsou lineárně nezávislé, platí–li pro všechna $c_1 \in \mathbb{R}, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ implikace

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\varphi^{[j]} = o \;\Rightarrow\; c_1, \ldots, c_n = 0. \tag{11.17}$$

Zvolme libovolně $t_0 \in J$. Víme, že existuje právě n reálných řešení $\varphi^{[1]}, \ldots, \varphi^{[n]}$ systému 11.7 na J, pro která platí:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \varphi^{[1]}(t_0) & = & (1,0,0,\ldots,0,0) \overset{ozn}{=} \mathrm{e}_1 \in \mathbb{R}^n, \\ \varphi^{[2]}(t_0) & = & (0,1,0,\ldots,0,0) \overset{ozn}{=} \mathrm{e}_2 \in \mathbb{R}^n, \\ & \vdots & \\ \varphi^{[n]}(t_0) & = & (0,0,0,\ldots,0,1) \overset{ozn}{=} \mathrm{e}_n \in \mathbb{R}^n. \end{array}\right. \tag{11.18}$$

Nechť $c_1 \in \mathbb{R}^n, \ldots, c_n \in \mathbb{R}^n$. Platí–li $\sum_{j=1}^{n} c_j\varphi^{[j]} = o$, pak také $\sum_{j=1}^{n} c_j\varphi^{[j]}(t_0) = o$, tedy $\sum_{j=1}^{n} c_j\mathrm{e}_j = o$,

Obsah
292. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

takže nutně $c_1 = 0, c_2 = 0, \ldots, c_n = 0$, neboť $\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n$ jsou lineárně nezávislé vektory v $\mathbb{R}^n$. Ukázali jsme, že platí implikace (11.17). Tedy $\dim \mathbb{H} \geqq n$, neboť $\mathbb{H}$ obsahuje alespoň n lineárně nezávislých vektorů $\varphi^{[1]}, \ldots, \varphi^{[n]}$.

A3 Ukažme, že funkce $\varphi^{[1]}, \varphi^{[2]}, \ldots, \varphi^{[n]}$ z předchozího bodu tvoří bázi v $\mathbb{H}$. Protože jde o lineárně nazávislý systém stačí dokázat, že každé řešení $\varphi \in \mathbb{H}$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci $\varphi^{[1]}, \ldots, \varphi^{[n]}$.

Nechť $\varphi \in \mathbb{H}$. Buď $t_0 \in J$ stejné jako v předchozím bodě, tzn. platí (11.18).

Potom

$$\varphi(t_0) \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \exists c_1 \in \mathbb{R}, c_2 \in \mathbb{R}, \ldots, c_n \in \mathbb{R} \quad \varphi(t_0) = \sum_{j=1}^{n} c_j \mathrm{e}_j = \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi^{[j]}(t_0).$$

Položme $\widetilde{\varphi} = \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi^{[j]}$. Již víme, že $\widetilde{\varphi} \in \mathbb{H}$. Dále víme, že $\widetilde{\varphi}(t_0) = \varphi(t_0)$. Z Věty o existenci a jednoznačnosti pro homogenní soustavy pak plyne, že $\widetilde{\varphi}$ je určeno jednoznačně, takže nutně musí platit $\widetilde{\varphi} = \varphi$, tedy φ je lineární kombinací $\varphi^{[1]}, \varphi^{[2]}, \ldots, \varphi^{[n]}$.

B Nyní naznačíme důkaz vztahu 11.16.

B1 Podobně jako v předchozí sekci se ukáže, že $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ je vektorový prostor nad $\mathbb{C}$ (proveďte).

B2 Zde dokážeme, že $\dim \mathbb{H}_{\mathbb{C}} = n$. Vezměme systém funkcí $\varphi^{[1]}, \varphi^{[2]}, \ldots, \varphi^{[n]}$ z první části důkazu a definujme:

$$\begin{aligned} \psi^{[1]} &= \varphi^{[1]} + i\varphi^{[1]}, \\ \psi^{[2]} &= \varphi^{[2]} + i\varphi^{[2]}, \\ &\vdots \\ \psi^{[n]} &= \varphi^{[n]} + i\varphi^{[n]}. \end{aligned}$$

Obsah
293. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Zřejmě $\psi^{[1]} \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}, \psi^{[2]} \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}, \ldots, \psi^{[n]} \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$. Dokažme, že jde o lineárně nezávislý systém.
Nechť $\alpha_1 \in \mathbb{R}, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, $\beta_1 \in \mathbb{R}, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$. Máme dokázat:

$$\sum_{j=1}^{n}(a_j + i\beta_j) \cdot \psi^{[j]} = o \Rightarrow (\forall j = 1, \ldots, n : \ \alpha_j + i\beta_j = 0).$$

Nechť tedy $\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j + i\beta_j) \cdot \psi^{[j]} = o$, tj. $\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j + i\beta_j)(\varphi^{[j]} + i\varphi^{[j]}) = o$.

Pak $\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j - \beta_j)\varphi^{[j]} = o \ \wedge \ i\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j + \beta_j)\varphi^{[j]} = o$.

Protože $\varphi^{[1]}, \varphi^{[2]}, \ldots, \varphi^{[n]}$ je lineárně nezávislý systém v $\mathbb{H}$, musí pro $j = 1, \ldots, n$ platit $\alpha_j - \beta_j = 0$, $\alpha_j + \beta_j = 0$, tedy $\alpha_j + i\beta_j = 0$, což jsme chtěli dokázat.

Ukažme konečně, že každé řešení $\psi \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci řešení $\psi^{[1]}, \ldots, \psi^{[n]}$:
Nechť $u \in C^{(1)}(J, \mathbb{R}^n), v \in C^{(1)}(J, \mathbb{R}^n)$ jsou takové funkce, že $\psi = u + iv \ \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$.
Pak $u \in \mathbb{H}$, $v \in \mathbb{H}$ a tedy existují reálná čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\beta_1, \ldots, \beta_n$, taková, že

$$u = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j\varphi^{[j]} \quad \wedge \quad v = \sum_{j=1}^{n}\beta_j\varphi^{[j]}$$

Pak ovšem

$$\psi = u + iv = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j\varphi^{[j]} + i\sum_{j=1}^{n}\beta_j\varphi^{[j]} = \sum_{j=1}^{n}(\alpha_j + i\beta_j)\varphi^{[j]} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j + i\beta_j}{1+i}(1+i)\varphi^{[j]} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j + i\beta_j}{1+i}\left(\varphi^{[j]} + i\varphi^{[j]}\right) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j + i\beta_j}{1+i}\psi^{[j]},$$

což jsme chtěli ukázat. □

Obsah
294. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Definice 11.17. Každou bázi prostoru $\mathbb{H}$ z právě uvedené Věty nazýváme fundamentálním systémem řešení homogenního systému (11.7) na J.
Nechť $\varphi^{[1]}, \ldots, \varphi^{[n]}$ tvoří fundamentální systém řešení homogenního systému (11.7) na J. Pak funkci

$$\varphi_{\text{ob.}} : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \ \varphi_{\text{ob.}}(t, c_1, \ldots, c_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi^{[j]}(t)$$

nazýváme obecným řešením (11.7) na J.

Poznámka 11.18. Většinou píšeme $\varphi_{\text{ob.}}(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi^{[j]}(t), c_1 \in \mathbb{R}, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ místo $\varphi_{\text{ob.}}(t, c_1, \ldots, c_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi^{[j]}(t)$.

Homogenní soustavy s konstantními koeficienty

Nechť $\forall i = 1, 2, \ldots, n$, $\forall j = 1, 2, \ldots, n$ jsou funkce $a_{ij} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konstantní. Pak (11.7) lze psát ve tvaru

$$y' \ = \ A \cdot y, \tag{11.19}$$

kde $A \overset{ozn.}{=\!=} (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}}$ lze považovat za reálnou číselnou matici typu (n, n).

Systému obyčejných diferenciálních rovnic (11.19) se říká systém homogenních lineárních obyčejných diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty. Postupně se naučíme, jak nalézt fundamentální systém řešení takovýchto soustav.

Úmluva. Nechť $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastní číslo matice A, tj. platí $det(A - \lambda E) = 0$. Nechť $s \in \mathbb{N}$. Pak píšeme

$$N_\lambda^{[s]} \overset{ozn.}{=\!=} \{\xi \in \mathbb{C}^n : (A - \lambda E)^s \xi = o\}.$$

Poznámka 11.19. $N_\lambda^{[s]}$ je zřejmě podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{C}^n$.

Věta 11.20 (O tvaru řešení homogenních soustav). *Nechť $\lambda_1 \in \mathbb{C}, \lambda_2 \in \mathbb{C}, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ jsou po dvou různá komplexní čísla. Nechť $m_1 \in \mathbb{N}, m_2 \in \mathbb{N}, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ jsou taková čísla, že platí:*

$$det(A - \lambda E) = (-1)^n \cdot (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$$

(tzn. λ_j jsou vlastní čísla matice A, m_j jejich algebraické násobnosti).
Nechť $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ a $\xi \in \mathbb{C}^n$. Definujme funkci $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ přepisem

$$\psi(t) = \left(\sum_{l=0}^{m_j - 1} \frac{(A - \lambda_j E)^l \cdot \xi}{l!} \cdot t^l \right) \mathrm{e}^{\lambda_j t}. \tag{11.20}$$

Potom platí:

$$\psi \text{ je řešením } (11.19) \text{ na } \mathbb{R} \Leftrightarrow \xi \in \mathbb{N}_{\lambda_j}^{[m_j]}.$$

Obsah
296. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Pro zájemce

Důkaz. Důkaz provedeme „dosazením ψ do (11.19)“. Připomeňme, že platí:

$$\psi \text{ řeší } (11.19) \text{ na } \mathbb{R} \Leftrightarrow (\forall t \in \mathbb{R}: \ \psi'(t) = A\psi(t)).$$

A Nechť $m_j = 1$. Potom $\psi(t) = \xi \mathrm{e}^{\lambda_j t}$ a pro všechna $t \in \mathbb{R}$ platí:
$(\xi \mathrm{e}^{\lambda_j t})' = A(\xi \mathrm{e}^{\lambda_j t}) \Leftrightarrow \lambda_j \xi \mathrm{e}^{\lambda_j t} = A\xi \mathrm{e}^{\lambda_j t} \Leftrightarrow (A - \lambda_j E)\xi \mathrm{e}^{\lambda_j t} = o \overset{(*)}{\Leftrightarrow} (A - \lambda_j E)^1 \xi = o \Leftrightarrow \xi \in \mathbb{N}_{\lambda_j}^{[1]}$
$(*) \quad \forall \lambda_j \in \mathbb{C} \ \forall t \in \mathbb{R} : \mathrm{e}^{\lambda_j t} \neq 0$ (ověřte použitím (11.9)).

B Nechť $m_j \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$. Potom pro všechna $t \in \mathbb{R}$ platí:

$$(\psi'(t) = A\psi(t)) \Leftrightarrow \left((\mathrm{e}^{\lambda_j t} \cdot \sum_{l=0}^{m_j - 1} \frac{t^l}{l!}(A - \lambda_j E)^l \xi)' = A\psi(t) \right) \overset{(**)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Longleftrightarrow \left(\lambda_j \psi(t) + \mathrm{e}^{\lambda_j t} \cdot \sum_{l=1}^{m_j - 1} \frac{t^{l-1}}{(l-1)!}(A - \lambda_j E)^l \xi = A\psi(t) \right) \overset{(***)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Longleftrightarrow \left((A - \lambda_j E) \cdot \mathrm{e}^{\lambda_j t} \cdot \sum_{l=1}^{m_j - 1} \frac{t^{l-1}}{(l-1)!}(A - \lambda_j E)^{l-1} \xi = (A - \lambda_j E)\psi(t) \right) \overset{(x)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Longleftrightarrow \left((A - \lambda_j E) \cdot \mathrm{e}^{\lambda_j t} \cdot \sum_{l=0}^{m_j - 2} \frac{t^l}{l!}(A - \lambda_j E)^l \xi = (A - \lambda_j E)\psi(t) \right) \overset{(xx)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Longleftrightarrow \left((A - \lambda_j E) \cdot (\psi(t) - \mathrm{e}^{\lambda_j t} \cdot \frac{t^{m_j - 1}}{(m_j - 1)!}(A - \lambda_j E)^{m_j - 1} \xi) = (A - \lambda_j E)\psi(t) \right) \Leftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left(-\mathrm{e}^{\lambda_j t} \cdot \frac{t^{m_j - 1}}{(m_j - 1)!}(A - \lambda_j E)^{m_j} \xi = o \right) \Leftrightarrow \left(t^{m_j - 1}(A - \lambda_j E)^{m_j - 1} \xi) = o \right).$$

Obsah
297. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

(**) Ověřte, že můžeme postupovat podle pravidla o „derivaci součinu“.
(***) Odečetli jsme $\lambda_j\psi(t)$ od obou stran rovnosti a poté na levé straně vytkli $(A-\lambda_j E)$.
(x) Změna indexů v sumě na levé straně.
(xx) Na levé straně jsme přičetli a odečetli $\mathrm{e}^{\lambda_j t}\cdot\frac{t^{m_j-1}}{(m_j-1)!}(A-\lambda_j E)^{m_j-1}\xi$.

Nyní již důkaz tvrzení snadno dokončíme:

$$(\forall t\in\mathbb{R}:\psi'(t)=A\psi(t))\Leftrightarrow(\forall t\in\mathbb{R}:t^{m_j-1}\cdot(A-\lambda_j E)^{m_j}\cdot\xi=o)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(A-\lambda_j E)^{m_j}\cdot\xi=o\Leftrightarrow\xi\in\mathbb{N}_{\lambda_j}^{[m_j]}.$$

□

Poznámka 11.21. Podstatné části důkazu následujícího tvrzení jsou založeny na poznatcích lineární algebry, obtížný důkaz vypusťme.

Obsah
298. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Věta 11.22. *(A)*

$$\forall j = 1, 2, \ldots, k : dim\ N_{\lambda_j}^{[m_j]} = m_j.$$

(B)
Všimněme si, že $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$ *a utvořme* n *komplexních řešení* $\psi^{[1]}, \psi^{[2]}, \ldots, \psi^{[n]}$ *systému (11.19) takto:*
Nechť

$$\begin{aligned}
\xi^{[1]}, \xi^{[2]}, \ \ldots, \xi^{[m_1]} &\quad \text{je bází } N_{\lambda_1}^{[m_1]},\\
\xi^{[m_1+1]}, \xi^{[m_1+2]}, \ \ldots, \xi^{[m_1+m_2]} &\quad \text{je bází } N_{\lambda_2}^{[m_2]},\\
&\vdots\\
\xi^{[m_1+m_2+\ldots+m_{k-1}+1]}, \xi^{[m_1+m_2+\ldots+m_{k-1}+2]}, \ldots, \xi^{[n]} &\quad \text{je bází } N_{\lambda_k}^{[m_k]}.
\end{aligned}$$

Nechť pro každé $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *je* $\psi^{[j]}$ *řešení, které získáme dosazením vektoru* $\xi^{[j]}$ *a odpovídajícího vlastního čísla do vzorce (11.20).*
Potom $\psi^{[1]}, \psi^{[2]}, \ldots, \psi^{[n]}$ *tvoří bázi všech (komplexních) řešení (11.19) na* $\mathbb{R}$.

Příklad 11.23. Určeme bázi v $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ systému

$$\begin{aligned} y' &= y + z,\\ z' &= -2y + 3z. \end{aligned} \tag{11.21}$$

(1) Sestavíme matici soustavy: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Vypočteme

$$det\ (A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5.$$

Obsah
299. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Určíme vlastní čísla matice A a jejich násobnosti:

$$det\ (A-\lambda E)=0 \Leftrightarrow \lambda^2-4\lambda+5=0 \Leftrightarrow (\lambda=(2+i) \vee \lambda=(2-i)),$$

přitom $\lambda^2-4\lambda+5=(\lambda-(2+i))^1\cdot(\lambda-(2-i))^1$, tedy

$$\underline{\lambda_1=2+i, m_1=1}, \quad \underline{\lambda_2=2-i, m_2=1}.$$

(2) Určíme báze prostorů $N_{2+i}^{[1]}, N_{2-i}^{[1]}$ a komplexní řešení $\psi^{[1]}, \psi^{[2]}$:

$\underline{N_{2+i}^{[1]}}$:

$$(A-(2+i)E)\xi=o \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1-i & 1 \\ -2 & 1-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} \text{1. řádek násobíme číslem } -1+i \\ \text{komplexně sdruženým k } -1-i \end{array}\right| \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1+i \\ -2 & 1-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\xi_1+(-1+i)\xi_2=0.$$

Jednoprvkovou bází $N_{2+i}^{[1]}$ je tedy např. vektor $\underline{\xi^{[1]}=\begin{pmatrix} -1 \\ -1-i \end{pmatrix}}$.

Z (11.20) pak máme $\underline{\underline{\psi^{[1]}(t)=\begin{pmatrix} -1 \\ -1-i \end{pmatrix}\cdot \mathrm{e}^{2+i}t}}$.

$\underline{N_{2-i}^{[1]}}$:

$$(A-(2-i)E)\xi=o \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1+i & 1 \\ -2 & 1+i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1-i \\ -2 & 1+i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2\xi_1+(-1-i)\xi_2=0.$$

Obsah
300. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Jednoprvkovou bází $N_{2+i}^{[1]}$ je tedy např. vektor $\underline{\xi^{[2]} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1+i \end{pmatrix}}$.

Z (11.20) pak máme $\underline{\underline{\psi^{[2]}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1+i \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{2-i}t}}$.

▲

Poznámka 11.24. Víme, že $det\ (A-(2+i)E) = det\ (A-(2-i)E) = 0$, tedy (protože A je typu $(2,2)$) řádky u příslušných soustav rovnic musí být lineárně závislé; mohli jsme si tedy ušetřit práci a nalézt pouze vhodná řešení rovnice

$$\begin{aligned} (-1-i)\xi_1 + \xi_2 &= 0 \qquad \text{(případ } N_{2+i}^{[1]}\text{), resp. rovnice} \\ (-1+i)\xi_1 + \xi_2 &= 0 \qquad \text{(případ } N_{2-i}^{[1]}\text{).} \end{aligned}$$

Poznámka 11.25. Protože $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$, lze volit $\xi^{[2]} = \overline{\xi}^{[1]} \Rightarrow \psi^{[2]} = \overline{\psi}^{[1]}$.

Poznámka 11.26. Obecněji,

matice A systému (11.19) má reálné koeficienty, takže $\forall j = 1, 2, \ldots, k$:

$(A-\lambda_j E)\cdot\xi = o \Leftrightarrow \overline{(A-\lambda_j E)\cdot\xi} = \overline{o} \Leftrightarrow \overline{(A-\lambda_j E)}\cdot\overline{\xi} = o \Leftrightarrow (\overline{A}-\overline{\lambda}_j\overline{E})\cdot\overline{\xi} = o \Leftrightarrow (A-$ $-\overline{\lambda}_j E)\cdot\overline{\xi} = o$.

Dokázali jsme tak následující tvrzení: Nechť λ_j je vlastní číslo matice A. Pak $\overline{\lambda}_j$ je rovněž vlastní číslo matice A. Lze ukázat, že násobnosti čísel $\lambda_j, \overline{\lambda}_j$ jsou stejné, tedy

$$\xi \in N_{\lambda_j}^{[m_j]} \Leftrightarrow \overline{\xi} \in N_{\overline{\lambda}_j}^{[m_j]}.$$

Odtud a z (11.20) lze odvodit, že každé dvojici komplexně sdružených vlastních čísel $\lambda, \overline{\lambda}$ (s nenulovou imaginární částí) násobnosti m lze (volbou bází $\xi^{[1]}, \ldots, \xi^{[m]}$ v $N_{\lambda}^{[m]}$,

Obsah
301. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

$\overline{\xi}^{[1]}, \ldots, \overline{\xi}^{[m]}$ v $N_{\overline{\lambda}}^{[m]}$) přiřadit $2m$ komplexních lineárně nezávislých řešení $\psi^{[1]}, \overline{\psi}^{[1]}, \ldots, \psi^{[m]}, \overline{\psi}^{[m]}$ systému (11.19).

Jejich vhodnými lineárními kombinacemi pak získáváme $2m$ reálných lineárně nezávislých řešení $\varphi^{[1]}, \ldots, \varphi^{[2m]}$ takto:

$$\begin{aligned}
\varphi^{[1]} &= \tfrac{1}{2}(\psi^{[1]} + \overline{\psi}^{[1]}) \overset{(*)}{=} \mathrm{Re}(\psi^{[1]}), & \varphi^{[2]} &= \tfrac{1}{2i}(\psi^{[1]} - \overline{\psi}^{[1]}) \overset{(*)}{=} \mathrm{Im}(\psi^{[1]}),\\
\varphi^{[3]} &= \tfrac{1}{2}(\psi^{[2]} + \overline{\psi}^{[2]}) \overset{(*)}{=} \mathrm{Re}(\psi^{[2]}), & \varphi^{[4]} &= \tfrac{1}{2i}(\psi^{[2]} - \overline{\psi}^{[2]}) \overset{(*)}{=} \mathrm{Im}(\psi^{[2]}),\\
&\vdots & &\vdots\\
\varphi^{[2m-1]} &= \tfrac{1}{2}(\psi^{[m]} + \overline{\psi}^{[m]}) \overset{(*)}{=} \mathrm{Re}(\psi^{[m]}), & \varphi^{[2m]} &= \tfrac{1}{2i}(\psi^{[m]} - \overline{\psi}^{[m]}) \overset{(*)}{=} \mathrm{Im}(\psi^{[m]}).
\end{aligned}$$

Pro zájemce

Poznámka 11.27. Přesněji, získáváme komplexní řešení s nulovými imaginárními složkami. Taková řešení budeme pro příště ztotožňovat s reálnými řešeními.

Příklad 11.28. Určeme fundamentální systém řešení (tj. bázi $\mathbb{H}$) systému (11.21). Určeme obecné řešení (11.21).

Využijeme výsledku předchozího příkladu, kde jsme mimo jiné získali: $\lambda_1 = 2+i, m_1 = 1$, $\lambda_2 = 2-i = \overline{\lambda}_1, m_2 = 1$,

$\psi^{[1]}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1-i \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{(2+i)t}$. Odtud ihned:

Obsah
302. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

$$\varphi^{[1]}(t) = \mathrm{Re}(\psi^{[1]}(t)) = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} -1 \\ -1-i \end{pmatrix} \cdot (\cos t + i \sin t)) =$$

$$= \mathrm{e}^{2t} \cdot \mathrm{Re}\left(\begin{pmatrix} -\cos t + i(-\sin t) \\ -\cos t + \sin t + i(-\cos t - \sin t) \end{pmatrix}\right) = \underline{\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix}},$$

$$\varphi^{[2]}(t) = \mathrm{Im}(\psi^{[1]}(t)) = \mathrm{e}^{2t} \cdot \mathrm{Im}\left(\begin{pmatrix} -\cos t + i(-\sin t) \\ -\cos t + \sin t + i(-\cos t - \sin t) \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \underline{\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t - \sin t \end{pmatrix}}.$$

Zbývá určit obecné řešení (11.21):

$$\varphi_{\mathrm{ob}}(t) = c_1\varphi^{[1]}(t) + c_2\varphi^{[2]}(t) =$$

$$= \underline{(-\mathrm{e}^{2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t), -\mathrm{e}^{2t}((c_1 + c_2)\cos t + (c_2 - c_1)\sin t))}, \underline{c_1 \in \mathbb{R}, c_2 \in \mathbb{R}.}$$

▲

Shrnutí postupu při určování fundamentálního systému řešení

(A)

Určíme všechna reálná různá vlastní čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ matice A spolu s jejich násobnostmi $m_1, \ldots, m_s$.

Určíme všechny dvojice komplexně sdružených vlastních čísel matice A $\lambda_{s+1}, \overline{\lambda}_{s+1}$ až $\lambda_l, \overline{\lambda}_l$ spolu s jejich násobnostmi $m_{s+1}, \ldots, m_l$.

(B)

Pro $j = 1, \ldots, s$ nalezneme báze prostorů $N_{\lambda_j}^{[m_j]}$ a podle (11.20) určíme $m_1 + m_2 + \ldots + m_s$ reálných řešení

$$\varphi^{[1]}, \ldots, \varphi[m_1 + m_2 + \ldots + m_s]$$

Obsah
303. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

systému (11.19).

(C)

Pro $j = s+1, \dots, l$ nalezneme báze prostorů $N_{\lambda_j}^{[m_j]}$ a podle (11.20) určíme $m_{s+1}+m_{s+2}+\dots+m_l$ komplexních řešení

$$\psi^{[m_1+\dots+m_s+1]}, \dots, \psi^{[m_1+\dots+m_l]}$$

systému (11.19). Ke každému z těchto řešení určíme dvojici reálných řešení (11.19), tedy

$$\begin{aligned}
&\varphi^{[m_1+\dots+m_s+1]} = \mathrm{Re}(\psi^{[m_1+\dots+m_s+1]}), \quad && \varphi^{[m_1+\dots+m_s+2]} = \mathrm{Im}(\psi^{[m_1+\dots+m_s+1]}),\\
&\varphi^{[m_1+\dots+m_s+3]} = \mathrm{Re}(\psi^{[m_1+\dots+m_s+2]}), \quad && \varphi^{[m_1+\dots+m_s+4]} = \mathrm{Im}(\psi^{[m_1+\dots+m_s+2]}),\\
&\quad\vdots && \quad\vdots\\
&\varphi^{[n-1]} = \mathrm{Re}(\psi^{[m_1+\dots+m_l]}), && \varphi^{[n]} = \mathrm{Im}(\psi^{[m_1+\dots+m_l]}),
\end{aligned}$$

(D)

Přehledně sepíšeme nalezený fundamentální systém řešení $\varphi^{[1]}, \dots, \varphi^{[n]}$ SODR (11.19).

Příklad 11.29. Určeme fundamentální systém řešení soustavy

$$\begin{aligned}
u' &= 2u - v + 2w,\\
v' &= u + 2w,\\
w' &= -2u + v - w,
\end{aligned}$$

Obsah
304. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Řešení. (A)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ det(A-\lambda E) = \ldots = -\lambda^3+\lambda^2-\lambda+1,\ \lambda_1 = 1, m_1 = 1;$$

$\lambda_2 = i, m_2 = 1;\ \lambda_3 = \overline{\lambda}_2 = -i, m_1 = m_2 = 1,$ (vypočtěte).

(B)

$$(A-E)\xi = o \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{rcl} \xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 & = & 0, \\ -\xi_2 + 2\xi_3 & = & 0. \end{array}$$ Zvolme $\xi_3 = 1 \Rightarrow \xi_2 = 2 \Rightarrow \xi_1 = 0 \Rightarrow \xi^{[1]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi^{[1]}(t) =$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^t = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 2\mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix}}}$$

(C)

$$(A-iE)\xi = o \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2-i & -1 & 2 \\ 1 & -i & 2 \\ -2 & 1 & -1-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{(*)}{\Leftrightarrow}$$

Obsah
305. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

$$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 5 & -2-i & 4+2i \\ 1 & -i & 2 \\ -2 & 1 & -1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2+4i & -6+2i \\ 1 & -i & 2 \\ 0 & 1-2i & 3-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1-2i & 3-i \\ 1 & -i & 2 \\ 0 & 1-2i & 3-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{(**)}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5+5i \\ 1 & -i & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1+1i \\ 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{rrrcl} & \xi_2 & +(1+i)\xi_3 & = & 0, \\ \xi_1 & & +(1+i)\xi_3 & = & 0. \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ll} (*) & \text{1. řádek násoben } 2+i \ (= \overline{2-i}), \\ (**) & \text{1. řádek násoben } 1+2i \ (= \overline{1-2i}). \end{array} \right)$$

Zvolme např. $\xi_3 = 1-i \Rightarrow \xi_2 = -2, \xi_1 = -2 \Rightarrow \xi^{[2]} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1-i \end{pmatrix} \Rightarrow \psi^{[2]}(t) =$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1-i \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{it} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1-i \end{pmatrix} (\cos t + i \sin t) = \begin{pmatrix} -2\cos t + i(-2\sin t) \\ -2\cos t + i(-2\sin t) \\ \cos t + \sin t + i(\cos t + i \sin t) \end{pmatrix}.$$ Odtud

$$\varphi^{[2]}(t) = \mathrm{Re}(\psi^{[2]}(t)) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -2\cos t \\ -2\cos t \\ \cot t + \sin t \end{pmatrix}}}$$

$$\varphi^{[3]}(t) = \mathrm{Im}(\psi^{[2]}(t)) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -2\sin t \\ -2\sin t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix}}}.$$ ▲

Obsah
306. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Příklad 11.30. Určeme fundamentální systém řešení soustavy

$$\begin{array}{rcrrr} y_1' & = & 2y_1 & -y_2 & -y_3, \\ y_2' & = & 2y_1 & -y_2 & -2y_3, \\ y_3' & = & -y_1 & +y_2 & +2y_3, \end{array} \tag{11.22}$$

Řešení. (A) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 2 & -1-\lambda & -2 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \ldots =$

$= (1-\lambda)(\lambda-1)^2 \Rightarrow \lambda_1 = 1, m_1 = 3$ (vypočtěte)

(B)

$(A-E) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, (A-E)^2 = \ldots,$

$(A-E)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – ani nemusíme počítat, neboť víme, že

$3 = dim\ N_1^{[3]} = \{\xi \in \mathbb{C}^n : (A-E)^3 \cdot \xi = o\}$, a A je typu $(3,3)$.

Zvolme například: $\xi^{[1]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi^{[2]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi^{[3]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Pak

$(A-E)\cdot\xi^{[1]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, (A-E)^2 \cdot \xi^{[1]} = (A-E)\left((A-E)\xi^{[1]}\right) =$

Obsah
307. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ takže } \varphi^{[1]}(t) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1+t \\ 2t \\ -t \end{pmatrix} \mathrm{e}^t}}$$

$$(A-E)\cdot\xi^{[2]} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, (A-E)^2\cdot\xi^{[2]} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ takže}$$

$$\varphi^{[2]}(t) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -t \\ 1-2t \\ t \end{pmatrix} \mathrm{e}^t}}$$

$$(A-E)\cdot\xi^{[3]} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, (A-E)^2\cdot\xi^{[3]} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ takže}$$

$$\varphi^{[3]}(t) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -t \\ -2t \\ 1+t \end{pmatrix} \mathrm{e}^t}} \qquad \blacktriangle$$

Poznámka 11.31. Uveďme „pěknější“ fundamentální systém řešení systému rovnic z před-

Obsah
308. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

chozího příkladu (ověřte lineární nezávislost funkcí $\widetilde{\varphi}^{[1]}, \widetilde{\varphi}^{[2]}, \widetilde{\varphi}^{[3]}$).

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}^{[1]}(t) &= \varphi[1](t) + \varphi^{[2]}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^t, \\
\widetilde{\varphi}^{[2]}(t) &= \varphi[3](t) - \varphi^{[2]}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^t, \\
\widetilde{\varphi}^{[3]}(t) &= \varphi^{[3]}(t) = \begin{pmatrix} -t \\ -2t \\ 1+t \end{pmatrix} \mathrm{e}^t.
\end{aligned}$$

Příklad 11.32. Určeme řešení Cauchyovy úlohy (11.22), (11.23), je–li

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{11.23}$$

Řešení. Pomocí fundamentálního systému řešení $\widetilde{\varphi}^{[1]}, \widetilde{\varphi}^{[2]}, \widetilde{\varphi}^{[3]}$ z poznámky sestavíme obecné řešení (11.22):

$$\varphi_{Ob}(t, c_1 c_2, c_3) = \begin{pmatrix} c_1 & & -c_3 t \\ c_1 & -c_2 & -2c_3 t \\ & c_2 & +c_3 + c_3 t \end{pmatrix} \mathrm{e}^t.$$

Nyní určíme $\widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2, \widetilde{c}_3$ tak, aby platilo: $\varphi_{\mathrm{Ob}}(0, \widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2, \widetilde{c}_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Pro $\widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2, \widetilde{c}_3$ tak

Obsah
309. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

získáváme systém lineárních rovnic

$$\begin{array}{rrrcl} \widetilde{c}_1 & & & = & 1, \\ \widetilde{c}_1 & -\widetilde{c}_2 & & = & 1, \\ & \widetilde{c}_2 & +\widetilde{c}_3 & = & 2. \end{array}$$

Jeho řešení: $(\widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2, \widetilde{c}_3) = (1, 0, 2)$. Odtud pak můžeme přímo psát řešení uvažované Cauchyovy úlohy:

$$\varphi(t) = \varphi_{\mathrm{Ob}}(t, \widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2, \widetilde{c}_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^t + \begin{pmatrix} -t \\ -2t \\ 1+t \end{pmatrix} 2\mathrm{e}^t = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1-2t \\ 1-4t \\ 2+2t \end{pmatrix} \mathrm{e}^t}}.$$

▲

Příklad 11.33. Určete řešení Cauchyovy úlohy (11.22),(11.23) pomocí původního fundamentálního systému $\varphi^{[1]}, \varphi^{[2]}, \varphi^{[3]}$.

Příklad 11.34. Určeme řešení Cauchyovy úlohy

$$\begin{aligned} \delta' &= 2\delta + \epsilon, \quad & \delta(1) &= 1, \\ \epsilon' &= 3\delta + 4\epsilon, \quad & \epsilon(1) &= 0. \end{aligned}$$

Řešení. (A)

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, det\ (a - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = (\lambda - 5) \cdot (\lambda - 1) \Rightarrow \lambda_1 = 5, m_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1, m_2 = 1.$

Obsah
310. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

(B) $\underline{\lambda_1 = 5, m_1 = 1:}\ (A-5E)\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-3 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow 3\xi_1 - \xi_2 = 0 \Rightarrow$ např. $\xi^{[1]} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \Rightarrow \varphi^{[1]}(t) = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\cdot \mathrm{e}^{5t}$,

$\underline{\lambda_2 = 1, m_2 = 1:}\ (A-E)\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \xi_1 + \xi_2 = 0 \Rightarrow$ např. $\xi^{[2]} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow \varphi^{[2]}(t) = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\cdot \mathrm{e}^{t}$.

Obecné řešení: $\varphi(t) = (c_1\mathrm{e}^{5t} + c_2\mathrm{e}^{t}, 3c_1\mathrm{e}^{5t} - c_2\mathrm{e}^{t}), c_1 \in \mathbb{R}, c_2 \in \mathbb{R}$.

Řešení Cauchyovy úlohy:

$$\left.\begin{array}{rcl} c_1\mathrm{e}^5 + c_2\mathrm{e} &=& 1\\ 3c_1\mathrm{e}^5 - c_2\mathrm{e} &=& 0\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 4c_1\mathrm{e}^5 &=& 1\\ 3c_1\mathrm{e}^4 &=& c_2\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} c_1 &=& \frac{1}{4\mathrm{e}^5}\\ c_2 &=& \frac{3}{4\mathrm{e}}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\varphi(t) = \left(\tfrac{\mathrm{e}^{5t}}{4\mathrm{e}^5} + \tfrac{3\mathrm{e}^t}{4\mathrm{e}}, \tfrac{3\mathrm{e}^{5t}}{4\mathrm{e}^5} - \tfrac{3\mathrm{e}^t}{4\mathrm{e}}\right),$$

$$\underline{\underline{\varphi(t) = \left(\tfrac{1}{4}\mathrm{e}^{5(t-1)} + \tfrac{3}{4}\mathrm{e}^{t-1}, \tfrac{3}{4}\mathrm{e}^{5(t-1)} - \tfrac{3}{4}\mathrm{e}^{t-1}\right).}}$$

▲

Příklad 11.35. Určete fundamentální systém řešení systému

$$\begin{array}{rcrcl} y' &=& 3y &-z,\\ z' &=& y &+z.\end{array}$$

Řešení. (A) $A = \begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix}3-\lambda & -1\\ 1 & 1-\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 \Rightarrow \lambda_1 = 1, m_1 = 2.$

Obsah
311. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

(B) A je typu $(2,2), m_1 = 2 \Rightarrow (A-2E)^2\xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (jinak by $N_2^{[2]}$ neměl dimenzi 2) $\Rightarrow$ např. $\xi^{[1]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi^{[2]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$(A-2E)\xi^{[1]} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi^{[1]}(t) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t \cdot \mathrm{e}^{2t}}}$$

$$(A-2E)\xi^{[2]} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi^{[1]}(t) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t \cdot \mathrm{e}^{2t}}}$$

▲

Příklad 11.36. Určeme bázi prostoru $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ všech komplexních řešení systému

$$\begin{array}{rcrcrl} x' & = & 2x & +y, & & \\ y' & = & & 2y & +4z, & \\ z' & = & x & & -z. & \end{array} \tag{11.24}$$

Řešení. Určeme fundamentální systém řešení SODR (11.24) a obecné řešení (11.24).

(A)

Sestavíme matici soustavy $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Vypočteme

$$det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 4 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \ldots = \lambda^2 \cdot (\lambda - 3)$$

Obsah
312. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Určíme vlastní čísla matice A a jejich násobnosti:

$$det(A-\lambda E)=0 \Leftrightarrow \lambda^2\cdot(\lambda-3)=0 \Rightarrow \underline{\lambda_1=0, m_1=2}, \underline{\lambda_2=3, m_2=1}.$$

(B) Určíme báze prostorů $N_0^{[2]}, N_3^{[1]}$ a komplexní řešení $\psi^{[1]}, \psi^{[2]}, \psi^{[3]}$ tvořící bázi v $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$.

$\underline{N_0^{[2]}=\left\{\xi\in\mathbb{C}^n : (A-0\cdot E)^2\cdot\xi=o\right\}}$:

$$A^2\cdot\xi=o \Leftrightarrow \begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&4\\1&0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&4\\1&0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}4&4&4\\4&4&4\\1&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow \xi_1+\xi_2+\xi_3=0.$$

Zvolme např.: $\xi_2^{[1]}=1, \xi_3^{[1]}=0, \Rightarrow \xi_1^{[1]}=-1$, tedy $\xi^{[1]}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$. Zbývá určit druhý vektor báze v $N_0^{[2]}$,

zvolme např.: $\xi_2^{[2]}=0, \xi_3^{[2]}=1, \Rightarrow \xi_1^{[2]}=-1$, tedy $\xi^{[2]}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

$m_1=2$, tedy pro dosazení do vzorce (11.20) je třeba vypočítat ještě

$$(A-0\cdot E)^1\cdot\xi^{[1]}=A\cdot\xi^{[1]}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&4\\1&0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix},$$

$$(A-0\cdot E)^1\cdot\xi^{[2]}=A\cdot\xi^{[2]}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&4\\1&0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\4\\-2\end{pmatrix}.$$

Obsah
313. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Nyní stačí aplikovat vzorec (11.20):

$$\psi^{[1]}(t) = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{1!} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot t^1 \right) \mathrm{e}^{0\cdot t} = \underline{\underline{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot t, }}$$

$$\psi^{[2]}(t) = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{1!} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot t^1 \right) \mathrm{e}^{0\cdot t} = \underline{\underline{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot t. }}$$

$\underline{N_3^{1]} = \{\xi \in \mathbb{C}^n : (A-3E)^1 \cdot \xi = o\}}$:

$$(A-3E)^1 \cdot \xi = o \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{rrrcl} \xi_1 & -\xi_2 & & = & 0, \\ & -\xi_2 & +4\xi_3 & = & 0. \end{array}$$

Zvolme např. $\xi_3^{[3]} = 1 \Rightarrow \xi_2^{[3]} = 4 \Rightarrow \xi_1^{[3]} = 4$, tedy $\xi^{[3]} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Protože $m_1 = 1$, můžeme ihned psát

$$\psi^{[3]}(t) = \underline{\underline{ \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t}. }}$$

Obsah
314. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

(C) Protože imaginární části funkcí $\psi^{[1]}, \psi^{[2]}, \psi^{[3]}$ jsou nulové, můžeme psát rovnou fundamentální systém řešení, tj. bázi prostoru $\mathbb{H}$ takto:

$$\varphi^{[1]}(t) = \operatorname{Re}\left(\psi^{[1]}(t)\right) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot t}}$$

$$\varphi^{[2]}(t) = \operatorname{Re}\left(\psi^{[2]}(t)\right) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot t}}$$

$$\varphi^{[3]}(t) = \operatorname{Re}\left(\psi^{[3]}(t)\right) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{3t}}}$$

Obecné řešení: $\varphi_{\mathrm{Ob}}(t) = c_1\varphi^{[1]}(t) + c_2\varphi^{[2]}(t) + c_3\varphi^{[3]}(t), c_1 \in \mathbb{R}, c_1 \in \mathbb{R}, c_3 \in \mathbb{R}$:
$\varphi_{\mathrm{Ob}}(t) = \underline{(-c_1 - c_2 - (c_1 + 2c_2)t + 4c_3\mathrm{e}^{3t}, c_1 + (2c_1 + 4c_2)t + 4c_3\mathrm{e}^{3t},}$
$\underline{c_2 - (c_1 + 2c_2)t + c_3\mathrm{e}^{3t}), c_1 \in \mathbb{R}, c_1 \in \mathbb{R}, c_3 \in \mathbb{R}}$ ▲

Nehomogenní soustavy

Nechť $n \in \mathbb{N}, b \overset{ozn.}{=\!=} (b_1, b_2, \ldots, b_n) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ a pro všechna $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$, nechť jsou dány funkce $a_{ij} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Obsah
315. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Soustavu tvaru $(y \overset{ozn.}{=\!=} (y_1, \ldots, y_n) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}(t)y_1 + a_{12}(t)y_2 + \ldots + a_{1n}(t)y_n + b_1(t), \\ y_2' &= a_{11}(t)y_1 + a_{22}(t)y_2 + \ldots + a_{2n}(t)y_n + b_2(t), \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}(t)y_1 + a_{n2}(t)y_2 + \ldots + a_{nn}(t)y_n + b_n(t), \end{aligned} \tag{11.25}$$

nazýváme systémem lineárních diferenciálních rovnic. Označíme–li $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}}$, lze (11.25) zapsat stručněji ve tvaru

$$y' = A(t) \cdot y + b(t). \tag{11.26}$$

Je–li $b \neq 0$ pak hovoříme o nehomogenním systému lineárních diferenciálních rovnic. Podobně jako u homogenních soustav platí následující tvrzení:

Věta 11.37. *Nechť J je otevřený interval, $t_0 \in J, y_0 \in \mathbb{R}^n$ a nechť $b \in C(J, \mathbb{R}^n)$ a $\forall i = 1, 2, \ldots, n \; \forall j = 1, 2, \ldots, n \; a_{ij} \in C(J, \mathbb{R})$. Pak na J existuje právě jedno řešení ω splňující Cauchyovu úlohu (11.26),*

$$y(t_0) = y_0. \tag{11.27}$$

Věta 11.38. *Nechť jsou splněny předpoklady a značení předchozí věty. Nechť ω_p je libovolné řešení (11.26) na J. Pak ke každému řešení ω systému (11.26) na J existuje právě jedno řešení φ příslušného homogenního systému (11.7) takové, že*

$$\omega = \varphi + \omega_p.$$

Obsah
316. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Důkaz. (A) Jednoznačnost: Nechť $\varphi, \widetilde{\varphi}$ jsou taková řešení homogenní soustavy (11.7) na J, že platí

$$\omega = \varphi + \omega_p \quad , \quad \omega = \widetilde{\varphi} + \omega_p.$$

Potom

$$\omega - \omega_p = \varphi \quad , \quad \omega - \omega_p = \widetilde{\varphi},$$

tedy $\varphi = \widetilde{\varphi}$.

(B) Existence: Nechť funkce ω, ω_p řeší (11.26). Pak $\forall t \in J$:

$$\omega'(t) = A(t)\omega(t) + b(t) \wedge \omega_p'(t) = A(t)\omega_p(t) + b(t) \Rightarrow \omega'(t) - \omega_p'(t) = A(t) \cdot (\omega(t) - \omega_p(t)) \Rightarrow$$
$$(\omega - \omega_p)'(t) = A(t)((\omega - \omega_p)(t)) \Rightarrow$$
$$(\omega - \omega_p) \text{ řeší (11.7) na } J,$$

stačí tedy položit $\varphi = \omega - \omega_p$. □

Definice 11.39. Nechť jsou splněny předpoklady předchozí věty. Buď ω_p je řešením (11.26) na J. Nechť $\varphi^{[1]}, \ldots, \varphi^{[n]}$ je fundamentální systém řešení příslušné homogenní soustavy (11.7) na J.
Potom funkci $\omega_{\mathrm{Ob}} : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$\omega_{\mathrm{Ob}}(t, c_1, c_2, \ldots, c_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi^{[j]}(t) + \omega_p(t)$$

nazýváme obecným řešením (11.26) na J.

Obsah
317. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Poznámka 11.40. Podobně jako u HS plyne z předchozí věty, že vhodnou volbou $c_1, \dots, c_n$ lze z obecného řešení (11.26) získat kterékoliv řešení (11.26).

Metoda variace konstant

Věta 11.41 (O metodě variace konstant). *Nechť J je otevřený interval, $b \in C(J, \mathbb{R}^n)$ a $\forall i = 1, \dots, n \ \forall j = 1, \dots, n : \ a_{ij} \in C(J, \mathbb{R})$. Nechť funkce $\varphi^{[1]}, \dots, \varphi^{[n]}$ tvoří fundamentální systém všech řešení homogenní soustavy (11.7) na J. Pak existují funkce $c_1 \in C^{(1)}(J, \mathbb{R}), c_2 \in C^{(1)}(J, \mathbb{R}), \dots, c_n \in C^{(1)}(J, \mathbb{R})$ takové, že funkce ω_p,*

$$\omega_p(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j(t) \varphi^{[j]}(t),$$

je řešením (11.26) na J.

Poznámka 11.42. Vezměme ω_p z předchozí věty. Potom ω řeší (11.26), tedy pro každé $t \in J$ platí

$$\left(\sum_{j=1}^{n} c_j(t) \varphi^{[j]}(t) \right)' = A(t) \sum_{j=1}^{n} c_j(t) \varphi^{[j]}(t) + b(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} c_j'(t) \varphi^{[j]}(t) + \sum_{j=1}^{n} c_j(t) \left(\varphi^{[j]} \right)'(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j(t) \cdot A(t) \varphi^{[j]}(t) + b(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} c_j'(t) \varphi^{[j]}(t) = b(t), \tag{11.28}$$

Obsah
318. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

neboť $\forall j = 1, \ldots, n$: $\left(\varphi^{[j]}\right)'(t) = A(t)\varphi^{[j]}(t)$.

Vyřešením soustavy lineárních rovnic tedy získáme derivace hledaných funkcí $c_1, \ldots, c_n$.

Příklad 11.43. Určeme obecné řešení SODR

$$\begin{array}{rcrcrl} y' & = & 2y & & +z & +\mathrm{e}^{6t}, \\ z' & = & 3y & & +4z & -\mathrm{e}^{6t}. \end{array} \tag{11.29}$$

Řešení. (A)

Nejprve určíme fundamentální systém řešení odpovídající homogenní soustavy

$$\begin{array}{rcrcrl} y' & = & 2y & & +z, \\ z' & = & 3y & & +4z. \end{array}$$

Snadno zjistíme, že například dvojice funkcí

$$\varphi^{[1]}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{5t} \quad , \quad \varphi^{[2]}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{t},$$

představuje hledaný systém.

(B)

Hledáme řešení ω_p původního systému ve tvaru

$$\omega_p(t) = c_1(t) \cdot \mathrm{e}^{5t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2(t) \cdot \mathrm{e}^{t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Z (11.28) získáváme soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcl} c_1'(t) \cdot \mathrm{e}^{5t} & & +c_2'(t) \cdot \mathrm{e}^{t} & = & \mathrm{e}^{6t}, \\ 3c_1'(t) \cdot \mathrm{e}^{5t} & & -c_2'(t) \cdot \mathrm{e}^{t} & = & -\mathrm{e}^{6t}. \end{array}$$

Obsah
319. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Zřejmě lze krátit funkcí e^t:

$$\begin{array}{rcl} c_1'(t)\cdot \mathrm{e}^{4t} & +c_2'(t) & = \mathrm{e}^{5t}, \\ 3c_1'(t)\cdot \mathrm{e}^{4t} & -c_2'(t) & = -\mathrm{e}^{5t}. \end{array}$$

Odtud:

$$\left.\begin{array}{rcl} 4c_1'(t)\mathrm{e}^{4t} & = & 0 \\ 3c_1'(t)\mathrm{e}^{4t} - c_2'(t) & = & -\mathrm{e}^{5t} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{rcl} c_1'(t) & = & 0 \\ c_2'(t) & = & -\mathrm{e}^{5t} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{např. } c_1(t)=0, c_2(t)=\tfrac{1}{5}\mathrm{e}^{5t}.$$

Tedy

$$\omega_p(t) = \frac{1}{5}\mathrm{e}^{5t}\cdot \mathrm{e}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{\left(\frac{\mathrm{e}^{6t}}{5}, -\frac{\mathrm{e}^{6t}}{5}\right)}.$$

(C)
Obecné řešení:

$$\omega_{\mathrm{Ob}}(t,c_1,c_2) = c_1\cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\mathrm{e}^{5t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\mathrm{e}^t + \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\mathrm{e}^{6t}, \text{ tj.}$$

$$\underline{\underline{\omega_{\mathrm{Ob}}(t,c_1,c_2) = \left(c_1\mathrm{e}^{5t} + c_2\mathrm{e}^t + \frac{\mathrm{e}^{6t}}{5}, 3c_1\mathrm{e}^{5t} - c_2\mathrm{e}^t - \frac{\mathrm{e}^{6t}}{5}\right)}}.$$

▲

Příklad 11.44. Určeme řešení ω_p Cauchyovy úlohy (11.29),

$$(y(0), z(0)) = (\frac{1}{5}, 0). \tag{11.30}$$

Řešení. Určíme $\widetilde{c}_1 \in \mathbb{R}, \widetilde{c}_2 \in \mathbb{R}$ tak, aby $\omega_{\mathrm{Ob}}(0, \widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2) = (\frac{1}{5}, 0)$ (ω_{Ob} jsme určili v předešlém příkladě). Tedy

Obsah
320. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

$$\left.\begin{array}{rrrcl} c_1 & +c_2 & +\frac{1}{5} & = & \frac{1}{5} \\ 3c_1 & -c_2 & -\frac{1}{5} & = & 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrcl} c_1 & +c_2 & = & \frac{1}{5} \\ 3c_1 & -c_2 & = & 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 4c_1 & = & \frac{1}{5} \\ 3c_1 - c_2 & = & \frac{1}{5} \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} c_1 & = & \frac{1}{20} \\ c_2 & = & \frac{3}{20} - \frac{1}{5} = -\frac{1}{20}. \end{array}\right.$$

Tedy

$$\omega_p(t) = \left(\frac{1}{20}\mathrm{e}^{5t} - \frac{1}{20}\mathrm{e}^{t} + \frac{\mathrm{e}^{6t}}{5}, \frac{3}{20}\mathrm{e}^{5t} + \frac{1}{20}\mathrm{e}^{t} - \frac{\mathrm{e}^{6t}}{5}\right).$$

▲

Příklad 11.45. Určeme řešení ω_p Cauchyovy úlohy

$$\begin{array}{rcrl} y' & = & z & +\mathrm{tg}^2 t - 1, \\ z' & = & -y & +\mathrm{tg} 2t, \end{array}$$

$(y(0), z(0)) = (0, 2)$ na intervalu $J = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Řešení. (A)

$$\begin{array}{rcrl} y' & = & z, & \\ z' & = & -y & , \end{array} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = i, m_1 = 1, \quad \lambda_2 = -i = \overline{\lambda}_1 \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -\xi_1 - i\xi_2 = 0 \Rightarrow$$

Obsah
321. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

např. $\xi_2 = i \Rightarrow \xi_1 = 1 \Rightarrow \xi^{[1]} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \Rightarrow \psi^{[1]}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^{it} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} (\cos t + i \sin t) =$

$= \begin{pmatrix} \cos t + i \sin t \\ -\sin t + i \cos t \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\underline{\varphi^{[1]}(t) = (\cos t, -\sin t)}, \quad \underline{\varphi^{[2]}(t) = (\sin t, \cos t)}$$

(B) $\omega_p(t) = c_1(t)\varphi^{[1]}(t) + c_2\varphi^{[2]}(t) = c_1(t) \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + c_2(t) \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, t \in J.$

$\forall t \in J$:

$$\begin{array}{rrcl} c_1' \cos t & + c_2' \sin t & = & \mathrm{tg}^2 t - 1 \\ -c_1' \sin t & + c_2' \cos t & = & \mathrm{tg}\ t \end{array}$$

$$D(t) = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = 1, \quad D_1(t) = \begin{vmatrix} \mathrm{tg}^2 t - 1 & \sin t \\ \mathrm{tg}\ t & \cos t \end{vmatrix} = -\cos t,$$

$$D_2(t) = \begin{vmatrix} \cos t & \mathrm{tg}^2 t - 1 \\ -\sin t & \mathrm{tg}\ t \end{vmatrix} = \sin t + \frac{\sin^3 t}{\cos^2 t} - \sin t = \frac{1 - \cos^2 t}{\cos^2 t} \sin t.$$

Odtud $c_1(t) = \int \frac{D_1(t)}{D(t)} \mathrm{d}t = -\int \cos t \mathrm{d}t = -\sin t, t \in J,$

$$c_2(t) = \int \frac{D_2(t)}{D(t)} \mathrm{d}t = \int \frac{1 - \cos^2 t}{\cos^2} \sin t \mathrm{d}t = \cos t + \frac{1}{|\cos t|} = \cos t + \frac{1}{\cos t},$$

neboť $t \in J = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Tedy $\omega_p(t) = -\sin t \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + \left(\cos t + \frac{1}{\cos t}\right) \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, t \in J \Rightarrow$

$$\omega_{\mathrm{Ob}}(t) = \begin{pmatrix} c_1 \cos t + c_2 \sin t + \frac{\sin t}{\cos t} \\ -c_1 \sin t + c_2 \cos t + 2 \end{pmatrix}, t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), c_1 \in \mathbb{R}, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Obsah
322. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

(C)

$$\omega_{\mathrm{Ob}}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} c_1 & = & 0 \\ c_2 + 2 & = & 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} c_1 & = & 0 \\ c_2 & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{\omega_p(t) = (\mathrm{tg}\ t, 2), t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).}}$$

▲

11.1. Videa s ilustrací pojmu

Ilustraci pojmu řešení soustavy obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu lze vidět v tomto videu. Ilustraci pojmu existence a jednoznačnosti řešení soustavy obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu lze vidět v tomto videu.

11.2. Interaktivní test

Následující test byl vytvořeny pomocí balíčku `acrotex`. Test zahájíte kliknutím na tlačítko „Zacátek testu“. U otázek lze volit více správných odpovědí. Součet bodů správných odpovědí je uveden v závorce u zadání a za každou špatnou odpověď bude odečten jeden či více bodů.

Obsah
323. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Zacátek testu

1. (2b.) Mezi řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1, \\ y_2' = 2y_2, \end{cases}$$

na $\mathbb{R}$ patří funkce dané předpisem

☐ $y_1(t) = \mathrm{e}^{3t},\ y_2(t) = \mathrm{e}^{2t}.$

☐ $y_1(t) = 0,\ y_2(t) = 0.$

☐ $y_1(t) = \mathrm{e}^{2t},\ y_2(t) = \mathrm{e}^{3t}.$

2. (2b.) Mezi řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2, \\ y_2' = -y_1 + y_2, \end{cases}$$

na $\mathbb{R}$ patří funkce dané předpisem

☐ $y_1(t) = 1 - \mathrm{e}^{2t},\ y_2(t) = 1 + \mathrm{e}^{2t}.$

☐ $y_1(t) = 1 - \mathrm{e}^{2t},\ y_2(t) = 1 + 2\mathrm{e}^{2t}.$

☐ $y_1(t) = -\mathrm{e}^{2t},\ y_2(t) = \mathrm{e}^{2t}.$

Obsah

324. strana ze 336

Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

3. (2b.) Mezi řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2, \\ y_2' = y_1 + 3y_2, \end{cases}$$

na $\mathbb{R}$ patří funkce dané předpisem

☐ $y_1(t) = \mathrm{e}^{3t},\ y_2(t) = -\mathrm{e}^{3t}.$

☐ $y_1(t) = \mathrm{e}^{2t},\ y_2(t) = -\mathrm{e}^{2t}.$

☐ $y_1(t) = 0,\ y_2(t) = 0.$

4. (2b.) Mezi řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\begin{cases} y_1' = -3y_1 - 4y_2, \\ y_2' = y_1 + y_2, \end{cases}$$

na $\mathbb{R}$ patří funkce dané předpisem

☐ $y_1(t) = -\mathrm{e}^{-t} - 2t \cdot \mathrm{e}^{-t},\ y_2(t) = \mathrm{e}^{-t} + t \cdot \mathrm{e}^{-t}.$

☐ $y_1(t) = \mathrm{e}^{t},\ y_2(t) = \mathrm{e}^{t}.$

☐ $y_1(t) = 0,\ y_2(t) = 0.$

Obsah

325. strana ze 336

Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

5. (2b.) Mezi řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + t, \\ y_2' = y_2 - t, \end{cases}$$

na $\mathbb{R}$ patří funkce dané předpisem

☐ $y_1(t) = \mathrm{e}^t - t - 1,\ y_2(t) = \mathrm{e}^t + t + 1.$

☐ $y_1(t) = 0,\ y_2(t) = 0.$

☐ $y_1(t) = \mathrm{e}^t - t,\ y_2(t) = \mathrm{e}^t + t.$

6. (2b.) Mezi řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 + \mathrm{e}^t, \\ y_2' = -y_1 + y_2, \end{cases}$$

na $\mathbb{R}$ patří funkce dané předpisem

☐ $y_1(t) = -\mathrm{e}^{2t},\ y_2(t) = \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{2t}.$

☐ $y_1(t) = -\mathrm{e}^{2t} + 5,\ y_2(t) = \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{2t} + 5.$

☐ $y_1(t) = 0,\ y_2(t) = 0.$

Obsah

326. strana ze 336

Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

7. (2b.) Mezi řešení Cauchyovy úlohy

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1, \\ y_2' = 2y_2, \\ y_1(0) = 0,\ y_2(0) = 0, \end{cases}$$

na $\mathbb{R}$ patří funkce dané předpisem

☐ $y_1(t) = \mathrm{e}^{3t},\ y_2(t) = \mathrm{e}^{2t}$.

☐ $y_1(t) = 0,\ y_2(t) = 0$.

☐ $y_1(t) = \mathrm{e}^{2t},\ y_2(t) = \mathrm{e}^{3t}$.

8. (2b.) Mezi řešení Cauchyovy úlohy

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2, \\ y_2' = -y_1 + y_2, \\ y_1(0) = 0,\ y_2(0) = 2, \end{cases}$$

na $\mathbb{R}$ patří funkce dané předpisem

☐ $y_1(t) = 1 - \mathrm{e}^{2t},\ y_2(t) = 1 + \mathrm{e}^{2t}$.

☐ $y_1(t) = 1 - \mathrm{e}^{2t},\ y_2(t) = 1 + 2\mathrm{e}^{2t}$.

☐ $y_1(t) = -\mathrm{e}^{2t},\ y_2(t) = \mathrm{e}^{2t}$.

Obsah

327. strana ze 336

Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

9. (2b.) Mezi řešení Cauchyovy úlohy

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2, \\ y_2' = y_1 + 3y_2, \\ y_1(1) = 0,\ y_2(1) = 0, \end{cases}$$

na $\mathbb{R}$ patří funkce dané předpisem

☐ $y_1(t) = \mathrm{e}^{3t},\ y_2(t) = -\mathrm{e}^{3t}$.

☐ $y_1(t) = \mathrm{e}^{2t},\ y_2(t) = -\mathrm{e}^{2t}$.

☐ $y_1(t) = 0,\ y_2(t) = 0$.

10. (2b.) Mezi řešení Cauchyovy úlohy

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 + \mathrm{e}^t, \\ y_2' = -y_1 + y_2, \\ y_1(0) = -1,\ y_2(0) = 2, \end{cases}$$

na $\mathbb{R}$ patří funkce dané předpisem

☐ $y_1(t) = -\mathrm{e}^{2t},\ y_2(t) = \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{2t}$.

☐ $y_1(t) = -\mathrm{e}^{2t} + 5,\ y_2(t) = \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{2t} + 5$.

☐ $y_1(t) = 0,\ y_2(t) = 0$.

Konec testu

Obsah

328. strana ze 336

Zavřít dokument

Celá obrazovka/Okno

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:

Výsledky

Pro ukončení testu je třeba kliknout na tlačítko „Konec testu“. Opravení testu se provede kliknutím na tlačítko „Výsledky“, správné odpovědi budou označeny zeleně a červeně budou označeny odpovědi chybné.

Příklady k procvičení

1. Určete všechna maximální řešení zadaných soustav lineárních diferenciálních rovnic:

a)
$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2 + \mathrm{e}^t, \\ y_2' = 3y_1 - 2y_2 + t, \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - 5y_2 - \cos t, \\ y_2' = y_1 - 2y_2 + \sin t, \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} y_1' = -2y_1 + 2y_2 + t, \\ y_2' = 3y_1 - y_2 - t. \end{cases}$$

2. Nalezněte maximální řešení zadaných Cauchyových úloh:

a)
$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 + 5y_2, \\ y_2' = -4y_1 - 4y_2, \\ y_1(0) = 5,\ y_2(0) = -6, \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2, \\ y_2' = -2y_1 + 4y_2, \\ y_1(0) = 0,\ y_2(0) = -1, \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 - \cos t, \\ y_2' = -2y_1 - y_2 + \sin t + \cos t, \\ y_1(0) = 1,\ y_2(0) = -2. \end{cases}$$

3. Vyřešte úlohu

$$\begin{cases} q_1'(t) + q_2'(t) + \frac{1}{5}q_2(t) = 10, \\ -2q_1'(t) - q_1(t) + \frac{1}{5}q_2(t) = 0, \\ q_1(0) = 0,\ q_2(0) = 0. \end{cases}$$

z Příkladu 1.9 popisující hodnotu elektrického náboje q v obvodu popsaném v tomto příkladě v závislosti na čase.

Obsah
330. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

4. Vyřešte úlohu

$$\begin{cases} q_1'(t) + q_2'(t) + \frac{1}{5}q_2(t) &= 0, \\ -2q_1'(t) - q_1(t) + \frac{1}{5}q_2(t) &= 0, \\ q_1(0) = 0,\ q_2(0) = 10. \end{cases}$$

z Příkladu 1.9 popisující hodnotu elektrického náboje q v obvodu popsaném v tomto příkladě v závislosti na čase.

Klíč k příkladům k procvičení

1. a) $y_1(t) = C_1\mathrm{e}^t + C_2\mathrm{e}^{-t} + \frac{3}{2}t\mathrm{e}^t + t,$
$y_2(t) = C_1\mathrm{e}^t + 3C_2\mathrm{e}^{-t} + \frac{3}{2}t\mathrm{e}^t - \frac{1}{2}\mathrm{e}^t + 2t + 1,$ $\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R},$

b) $y_1(t) = C_1\cos t + C_2\sin t + 2t\cos t - t\sin t,$
$y_2(t) = \left(\frac{1}{5}C_1 + \frac{2}{5}C_2\right)\sin t + \left(\frac{2}{5}C_1 - \frac{1}{5}C_2\right)\cos t + t\cos t + \frac{1}{5}\sin t - \frac{3}{5}\cos t,$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R},$

c) $y_1(t) = C_1\mathrm{e}^t + C_2\mathrm{e}^{-4t} + \frac{1}{4}t - \frac{1}{16},$
$y_2(t) = \frac{3}{2}C_1\mathrm{e}^t - C_2\mathrm{e}^{-4t} - \frac{1}{4}t + \frac{1}{16},$ $\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}.$

Obsah
331. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

2. a) $\begin{aligned} y_1(t) &= 5\cos(2t) - 5\sin(2t), \\ y_2(t) &= -6\cos(2t) + 2\sin(2t), \end{aligned} \qquad t \in \mathbb{R},$

b) $\begin{aligned} y_1(t) &= -\mathrm{e}^{3t} + \mathrm{e}^{2t}, \\ y_2(t) &= -2\mathrm{e}^{3t} + \mathrm{e}^{2t}, \end{aligned} \qquad t \in \mathbb{R},$

c) $\begin{aligned} y_1(t) &= \cos t - \sin t - t\cos t, \\ y_2(t) &= -2\cos t + t\sin t + t\cos t, \end{aligned} \qquad t \in \mathbb{R}.$

3. $\begin{aligned} \bar{q_1}(t) &= \left(-5 - \tfrac{10\cdot\sqrt{6}}{3}\right)\cdot \mathrm{e}^{\frac{(-4+\sqrt{6})\cdot t}{10}} + \left(-5 + \tfrac{10\cdot\sqrt{6}}{3}\right)\cdot \mathrm{e}^{\frac{(-4-\sqrt{6})\cdot t}{10}} + 10, \\ \bar{q_2}(t) &= \left(-25 - \tfrac{25\cdot\sqrt{24}}{6}\right)\cdot \mathrm{e}^{\frac{(-8+\sqrt{24})\cdot t}{20}} + \left(-25 + \tfrac{25\cdot\sqrt{24}}{6}\right)\cdot \mathrm{e}^{\frac{(-8-\sqrt{24})\cdot t}{20}} + 50, \end{aligned} \qquad t \in \mathbb{R}.$

4. $\begin{aligned} \bar{q_1}(t) &= \tfrac{5\cdot\sqrt{6}}{6}\cdot \mathrm{e}^{\frac{(-4+\sqrt{6})\cdot t}{10}} - \mathrm{e}^{\frac{(-4-\sqrt{6})\cdot t}{10}}, \\ \bar{q_2}(t) &= \left(5 + \tfrac{5\cdot\sqrt{6}}{6}\right)\cdot \mathrm{e}^{\frac{(-4+\sqrt{6})\cdot t}{10}} + \left(5 - \tfrac{5\cdot\sqrt{6}}{6}\right)\cdot \mathrm{e}^{\frac{(-4-\sqrt{6})\cdot t}{10}}, \end{aligned} \qquad t \in \mathbb{R}.$

Obsah
332. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

Literatura

[1] J. Brabec, B. Hrůza: *Matematická analýza II.* SNTL (1986).

[2] J. Brabec, F. Martan, Z. Rozenský: *Matematická analýza I.* SVTL (1965).

[3] M. Braun: *Differential Equations and Their Applications.* Springer Verlag (1993).

[4] R. Bronson, G. B. Costa: *Schaum's Outline of Differential Equations.* McGraw-Hill (2006).

[5] B. Budinský, J. Charvát: *Matematika II.* SNTL (1990).

[6] B.G. Katzung: *Základní a klinická farmakologie.* H & H (1994).

[7] A. Kufner: *Obyčejné diferenciální rovnice.* ZČU v Plzni (1993).

[8] I. Kluvánek, L. Mišík, M. Švec: *Matematika II. diel.* SVTL (1965).

[9] M. Tennenbaum, H. Pollard: *Ordinary Differential Equations: An Elementary Textbook for Students of Mathematics, Engineering, and the Sciences.* Dover Publications (1985).

Rejstřík

B
Bernoulliova diferenciální rovnice, 142

C
Cauchyova úloha, 52, 78, 196, 207, 285
  maximální řešení, 54, 285
  řešení, 53, 196, 285

D
diference, 140
diferenciální rovnice, 12

E
exaktní diferenciální rovnice, 150, 153, 155, 165, 167
  nutná podmínka, 165
  postačující podmínka, 167

I
integrační faktor, 175, 176, 178
integrální křivka, 54

J
jednoduše souvislá oblast, 166

K
kmenová funkce, 151, 155

L
lineární diferenciální rovnice
  n-tého řádu, 206
    fundamentální systém řešení, 212, 224
    homogenní, 207
    obecné řešení, 213
    partikulární řešení, 213
  prvního řádu, 99

homogenní, 99, 106, 109
obecné řešení, 101, 115
partikulární řešení, 106, 114
lineární element, 136
Lipschitzova podmínka, 130

M
metoda přenásobení, 100, 178, 209
metoda speciální pravé strany, 250
metoda variace konstant, 236, 318
metoda variace konstanty, 111

N
Newtonův zákon ochlazování, 25
numerická metoda pro řešení ODR 1. řádu s počáteční podmínkou
Eulerova metoda, 140

O
oblast, 164
obyčejná diferenciální rovnice, 50, 77
n-tého řádu, 192
explicitní tvar, 193
implicitní tvar, 192
řešení, 193
maximální řešení, 54
prvního řádu, 50
explicitní tvar, 50
implicitní tvar, 50
řešení, 51

P
počáteční podmínka, 52, 100
počáteční podmínky, 196, 207, 284
populační rovnice, 26
posloupnost Picardových aproximací, 131
potenciál, 151, 164, 166, 167
princip superpozice, 219

R
rovnice se separovanými proměnnými, 77

S
směrové pole, 136
soustavy lineárních diferenciálních rovnic
homogenní, 287
fundamentální systém řešení, 295
komplexní řešení, 288, 289
obecné řešení, 295
s konstantními koeficienty, 295
nehomogenní, 315
obecné řešení, 317
soustavy obyčejných diferenciálních rovnic, 280

Obsah
335. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno

maximální řešení, 285
řešení, 282, 283
souvislá množina, 164

T
technika slepování, 91, 147, 169, 173

V
věta
o existenci a jednoznačnosti řešení, 127, 198, 286
o existenci a jednoznačnosti řešení pro homogenní soustavy, 288
o nutné podmínce exaktnosti, 165
o postačující podmínce existence potenciálu, 167
o řešení exaktní rovnice, 155
o transformaci Bernoulliovy diferenciální rovnice, 144
o zpětné transformaci, 145
o existenci řešení, 197
o existenci řešení a jednoznačnosti pro LDR řádu n, 207
o lineární nezávislosti funkcí, 228
o metodě variace konstant, 318
o metodě variace konstant pro LDR řádu n, 240
o rovnicích se speciální pravou stranou, 250
o tvaru řešení homogenních soustav, 296
o vlastnostech řešení LDR vyšších řádů, 212
o Wronskiánu, 230
Peanova (o existenci řešení), 127, 285
Picardova-Lindelöffova, 128

W
Wronského matice, 228
Wronskián, 228

Obsah
336. strana ze 336
Zavřít dokument
Celá obrazovka/Okno